ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ)

4/10/85

ΔΕ ΖΗΤΑΜΕ ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ. Απαντηστε σε οσα μπορειτε σε 4 ωρες με <u>σαφηνεια</u> και <u>πληροτητα</u>, αλλα χωρις περιττες πολυλογιες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Γ. Αντωνιαδης
Β. Δουγαλης
Σ. Παπαδοπουλου

4/10/85

1) Δινεται η διαφορικη εξισωση $y''+y'+y=0$. Για ποια $a\in\mathbb{R}$ η εξισωση εχει μια μη μηδενικη λυση με $y(0)=y(a)=0$;

2) Για τη λυση της εξισωσης $x=\cos x$ σχηματιζουμε μια ακολουθια (x_n) με τον εξης τροπο: x_0 ειναι οποιοσδηποτε πραγματικος αριθμος και $x_{n+1}=\cos x_n$, $n=0,1,2,\dots$ Αποδειξτε οτι η (x_n) συγκλινει στη ζητουμενη λυση.

3) Ποιος ειναι ο μεγαλυτερος απο τους αριθμους e^{π}, π^{e};
(Υποδειξη: Μελετηστε τα ακροτατα μιας καταλληλης συναρτησης.)

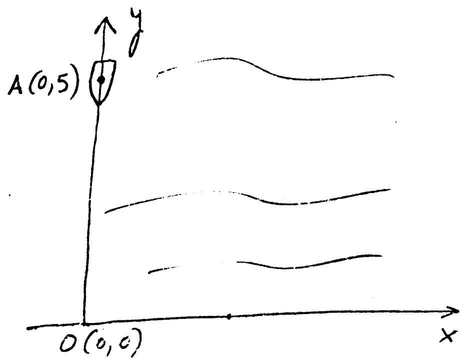
4) α) Βρειτε για ποια $x,y\in\mathbb{R}$ υπαρχει το ολοκληρωμα $\int_0^1 t^x(1-t)^y\,dt$.

β) Βρειτε τα ορια

$$\lim_{x\to -1}\int_0^1 t^x(1-t)^y\,dt, \quad \lim_{x\to +\infty}\int_0^1 t^x(1-t)^y\,dt$$

5) Ενα ποτηρι εχει κυλινδρικο σχημα. Το βαρος του ειναι 100 gr και το κεντρο βαρους του βρισκεται 5 cm πανω απο τον εσωτερικο πυθμενα του. Η χωρητικοτητα του σε νερο ειναι 250 gr, που αντιστοιχουν σε υψος 15 cm. Μεχρι ποιο υψος πρεπει να γεμισει με νερο, ωστε να εχει την καλυτερη ευσταθεια (δηλαδη το κεντρο βαρους να βρισκεται οσο γινεται πιο χαμηλα);

6) Ενα παιδι βρισκεται στη θεση O της οχθης Ox της λιμνης $\{(x,y): y>0\}$ και κραταει την ακρη ενος σχοινιου μηκους 5 m, στην αλλη ακρη



A του οποιου (βλ. σχημα) ειναι δεμενη μια βαρκουλα. Το παιδι περπατα κατα τη διευθυνση $\overrightarrow{Ox}$ της οχθης κρατωντας το σχοινι τεντωμενο. Ποσο απεχει το παιδι απο το O οταν η βαρκα βρεθει σε αποσταση 3 m απο την οχθη; (Ισως χρειασθει: $\int \frac{dt}{\sin t} = \log\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right| + C$)

7) Αποδειξτε οτι η σειρα συναρτησεων

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(x+n)\, e^{y-n}$$

συγκλινει για καθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $x>-2$. Ειναι η συγκλιση ομοιομορφη στο συνολο $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>-2\}$; Στο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$;

8) Δυο κυκλικοι κυλινδροι εχουν ακτινα 1 και οι αξονες τους τεμνονται καθετα. Βρειτε τον ογκο της τομης τους.

9) Δινεται μια συναρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχως παραγωγισιμη και τετοια ωστε $|f'(x)|\le M<\infty$ για $-\infty<x<\infty$. Οριζουμε τη συναρτηση u σαν πεπλεγμενη συναρτηση των x και t μεσω της εξισωσης $u=f(x+tu)$. Δειξτε οτι η $u(x,t)$ ικανοποιει το προβλημα αρχικων τιμων

$$\begin{cases} u_t = u\,u_x, & -\infty<x<\infty,\ 0<t<\alpha,\ \alpha \text{ αρκετα μικρο} \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

Ποσο μεγαλο μπορει να γινει το α;

10) Αποδείξτε ότι: αν γ είναι μια λεία καμπύλη στο επίπεδο και P, Q δύο σημεία της, τότε υπάρχει κάποιο σημείο της καμπύλης ανάμεσα στα P, Q, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα P, Q.

Είναι το ίδιο σωστό για μια καμπύλη στο χώρο;

11) Αν γ είναι το κομμάτι μιας περιφέρειας με κέντρο το O, που βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x, αποδείξτε ότι

$$\left| \int_\gamma e^{iz}\, dz \right| \leq 4$$

12) Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$, και γ είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια με κέντρο το $\frac{\pi^2}{4}$ και ακτίνα 1, υπολογίστε το $\int_\gamma \frac{dz}{f(z)}$.

(Υπόδειξη: $f(z^2) = ;$)

13) Το φανάρι μιας διασταύρωσης είναι επί 30 sec πράσινο και επί 30 sec κόκκινο. Αν η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το χρόνο αναμονής σ' αυτό το φανάρι, βρείτε

α) τη συνάρτηση κατανομής της X

β) τη μέση τιμή της.

14) Ένας κηπουρός φυτεύει μια μέρα 10 φυτά. Την επόμενη μέρα διαπιστώνει για κάθε φυτό αν το φύτεμα πέτυχε ή αν το φυτό πρόκειται να ξεραθεί. Στη δεύτερη περίπτωση το ξεριζώνει και φυτεύει άλλο στη θέση του. Συνεχίζει αυτή τη διαδικασία μέχρις ότου πετύχει το φύτεμα και των 10 φυτών. Κάθε φύτεμα έχει πιθανότητα 2/3 να πετύχει. Βρείτε την πιθανότητα:

α) Η διαδικασία στην πρώτη θέση να τελειώσει μέσα σε 5 μέρες

β) Όλη η διαδικασία να τελειώσει ακριβώς σε 5 μέρες

γ) Να μην τελειώσει ποτέ η διαδικασία.

15) Θεωρουμε το διανυσματικο χωρο V_n των τριγωνομετρικων πολυωνυμων της μορφης

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

με πραγματικους συντελεστες a_k, b_k, $1 \le k \le n$, καθως και το γραμμικο τελεστη D της παραγωγισης

$D: s(x) \longrightarrow s'(x)$ πανω στον V_n. Να βρεθει ο πινακας που παριστανει τον D ως προς τη βαση

$\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$

του V_n, ο αντιστροφος του (αν υπαρχει) και οι ιδιοτιμες του.

16) Εστω K ενα σωμα. Να αποδειχτει οτι τα διανυσματα $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ του K^4 ειναι γραμμικα εξαρτημενα εαν και μονον εαν η χαρακτηριστικη του σωματος K ειναι 3.

17) α) Θεωρειστε το εξης προγραμμα FORTRAN

```
      EPS = 1.0
10    EPS = EPS/2.0
      EPSP1 = EPS+1.0
      IF(EPSP1.GT.1.0) GØ TØ 10
      END
```

Εκτελουμε το προγραμμα αυτο σ'εναν υπολογιστη. Η εκτελεση του θα τελειωσει σε πεπερασμενο χρονο ή οχι; Αν ναι, τι σημασια εχει για τους υπολογισμους η τιμη του EPS κατα την εξοδο;

β) Σ' ενα προγραμμα FORTRAN, στο οποιο η μεταβλητη X παιρνει τιμες πολυ κοντα στο μηδεν, υπαρχει η εντολη

Z = X - SIN(X). Υπαρχει κανενα προβλημα σ'αυτη την εντολη; Αν ναι, πως μπορειτε να υπολογισετε καλυτερα το Z;

18. α) Αν A ειναι ενα υποσυνολο ενος τοπολογικου χωρου X, αποδειξτε οτι $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$

β) Αν το A ειναι κλειστο, ισχυει παντα $A = \overline{\mathring{A}}$;

19. Εστω G μια αβελιανη ομαδα, της οποιας το ουδετερο στοιχειο συμβολιζεται με e.
Ειναι το συνολο
$T = \{x \in G \mid \exists\ n \in \mathbb{N}$ με $x^n = e\}$
υποομαδα της G;

20. Αν H ειναι μια υποομαδα της ομαδας G και D η τομη ολων των συζυγων ομαδων της H, να αποδειχτει οτι η D ειναι αναλλοιωτη υποομαδα της G.

21. Εστω $(K,+,\bullet)$ υποσωμα του σωματος των πραγματικων αριθμων $\mathbb{R}$. Θεωρουμε το συνολο $\Lambda = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in K\}$. Ειναι η $(\Lambda,+)$ ομαδα; Ειναι το $(\Lambda,+,\cdot)$ σωμα; Ποια ειναι η ελαχιστη (ως γνωστον υπαρχει!) επεκταση M του $\mathbb{Q}$ που περιεχει την $\sqrt[3]{2}$; Βρειτε τη διασταση και μια βαση του M σαν διανυσματικου χωρου πανω στο $\mathbb{Q}$.

22. α) Γραψτε για μια περιοχη των Μαθηματικων που αναπτυχθηκε με αφορμη προβληματα Φυσικης.

β) Γραψτε για μια περιοχη που αναπτυχθηκε μεσα στα Μαθηματικα και αργοτερα βρηκε σημαντικες εφαρμογες σε αλλες επιστημες.

(Οχι περισσοτερο απο μια σελιδα.)