Ἀπαντῆστε σέ ὅσα ἐρωτήματα μπορεῖτε σέ 4 ὧρες.

Ὑπάρχει χρόνος γιά νά γράψετε ὅλα τά θέματα ἀλλά αὐτό ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ.

Οἱ ἀπαντήσεις πρέπει νά δοθοῦν μέ σαφήνεια καί πληρότητα ἀλλά χωρίς περιττές πολυλογίες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Δουγαλῆς

Σ. Πηχωρίδης

20/7/84

Εξετάσεις υποψηφίων μεταπτυχιακών Π.Κ.
(Μαθηματικά) 20/7/84

1ο) Γιά ποιές πραγματικές τιμές τού α συγκλίνει ή σειρά $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\cdots$ καί γιά ποιές όχι.
$\alpha>0$ ΝΑΙ, $\alpha\leq 0$ ΟΧΙ

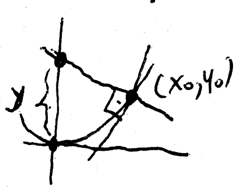
2ο) Υπολογίστε τήν $n\times n$ ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & x & \cdots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

3ο) Ένα εργοστάσιο παράγει λυχνίες τίς οποίες θεωρούμε σκάρτες άν ή διάρκεια ζωής τους είναι μικρότερη από 1000 ώρες. Από μιά μεγάλη σειρά μετρήσεων γνωρίζουμε ότι ή πιθανότητα σκάρτης λυχνίας είναι 0,1. Ποιά είναι ή μέση τιμή καί ποιά ή τυπική απόκλιση τών μέσων τιμών δειγμάτων 100 λυχνιών. Ποιά ή πιθανότητα νά έχουμε περισσότερες από 8 (>8) σκάρτες λυχνίες σέ ένα τέτοιο δείγμα καί ποιά ή πιθανότητα νά έχουμε λιγότερες από 25 (Ζητείται αριθμητικό αποτέλεσμα).

4ο) Βρήτε τίς επίπεδες καμπύλες μέ τήν ιδιότητα: Γιά κάθε σημείο M τής καμπύλης τό τρίγωνο μέ κορυφές M, τήν προβολή τού M πάνω στόν άξονα τών x καί τό σημείο τομής τού άξονα τών x καί τής εφαπτομένης στό M, έχει σταθερό εμβαδον.

$y=\frac{1}{\lambda x+\beta}$



5ο) Θεωρούμε τά σώματα $\{x+y\sqrt{7}: x,y \text{ ρητοί}\}$, $\{x+y\sqrt{5}: x,y \text{ ρητοί}\}$ μέ τίς συνήθεις πράξεις. Είναι ισόμορφα; **ΟΧΙ**

6ο) Νά υπολογισθεί τό επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_A (x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k})\vec{n}\,ds$$

όπου A τό τρίγωνο μέ κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,6)$ καί $\vec{n}$ τό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στό A προσανατολισμένο πρός τήν πλευρά πού δέν περιέχει τήν αρχή.

7ο) Ή καμπύλη $y=f(x)$ περνάει από τό $(0,0)$ καί εφάπτεται τού άξονα τών x στό $(0,0)$. Δείξτε ότι ή ακτίνα καμπυλότητας στό $(0,0)$ είναι

$$R=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$$

(μπορείτε νά υποθέσετε ότι ή f έχει συνεχείς παραγώγους οποιασδήποτε τάξης χρειαστεί)

$x_0=x$

$$y=f(x_0)+\frac{x_0}{f'(x_0)} \Rightarrow R=\lim_{x_0\to 0} y \Leftrightarrow$$

$$R=\cancel{f(0)}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{f'(x)} \Leftrightarrow R=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$$

$$f(x)=0+0\cdot x+\frac{f''(x)}{2}x^2+\cdots$$

8ον) Γιά μιγαδικό z ἔστω $P_\nu(z)$ τό πολυώνυμο βαθμοῦ $\le \nu-1$ τό ὁποῖο παρεμβάλλεται στίς τιμές τῆς συνάρτησης $f(z)=\frac{1}{z}$ στίς ν νοστές ρίζες τῆς μονάδας (δηλ. οἱ τιμές τοῦ P_ν στά σημεῖα αὐτά συμπίπτουν μέ τίς τιμές τῆς f).

Δεῖξτε ὅτι $P_\nu(z)=z^{\nu-1}$ καί ὅτι τό P_ν εἶναι μοναδικό μεταξύ τῶν πολυωνύμων βαθμοῦ $\le \nu-1$. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι $\max_{|z|=1}|P_\nu(z)-f(z)|$ δέν τείνει στό 0 γιά $\nu\to\infty$ (δηλ. γιά μεγάλα ν τό P_ν δέν εἶναι καλή προσέγγιση τῆς f).

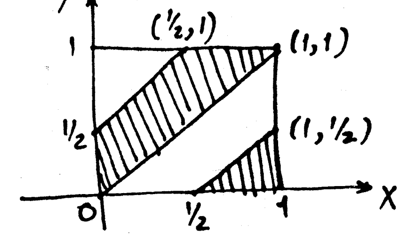
9ον) Δίνεται μιά ὁμάδα G καί μία σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ μεταξύ τῶν στοιχείων της. Ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι $x\sim y$ καί $\alpha\sim\beta \Rightarrow \alpha x\sim\beta y$.

Δεῖξτε ὅτι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῆς $\sim$ εἶναι οἱ πλευρικές κλάσεις μιᾶς κανονικῆς ὑποομάδας τοῦ G.

10ον) Δίδεται συνάρτηση f(x) συνεχής στό $[0,\infty)$ πού ἔχει σταθερά τιμή σέ μιά γειτονιά τοῦ 0. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $xy'+3y=f(x)$, $x>0$, ἔχει ἀκριβῶς μιά λύση πού εἶναι φραγμένη στή γειτονιά τοῦ 0. Βρῆτε τό ὅριο τῆς λύσης αὐτῆς γιά $x\to 0^+$.

11ον) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1+|z+1|^2}{z}dz$.

12ον) Δύο τυχαῖες μεταβλητές X, Y ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἡ τυχαία μεταβλητή (X,Y) εἶναι ὁμοιόμορφα κατανεμημένη στό χωρίο Ω (≡ τό διαγραμμισμένο κομμάτι τοῦ σχήματος). Αὐτό φυσικά σημαίνει ὅτι γιά κάθε ὑποσύνολο A τοῦ ἐπιπέδου ἡ πιθανότητα τό (X,Y) νά ἀνήκει στό A ἰσοῦται μέ $\{\text{εμβ}(A\cap\Omega)\}/\{\text{εμβ. }\Omega\}$.



Βρῆτε τίς πυκνότητες πιθανότητας τῶν X, Y καί X+Y. Εἶναι ἀνεξάρτητες οἱ μεταβλητές X, Y;

13ον) Θέλουμε νά προσεγγίσουμε τή συνάρτηση $f(x)=\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ μέ μία γραμμική συνάρτηση τῆς μορφῆς: $y=\lambda x$.

α) Βρῆτε τό λ πού ἐλαχιστοποιεῖ τό σφάλμα

$$e(\lambda)=\int_0^{\pi/2}(\sin x-\lambda x)^2\,dx$$

β) Ποιά σχέση πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τό λ πού ἐλαχιστοποιεῖ τό σφάλμα

$$E(\lambda)=\max_{0\le x\le \pi/2}|\sin x-\lambda x| \;;$$

14ον) Δίνεται διανυσματικός χῶρος X πεπερασμένης διάστασης. Τί σχέση πρέπει νά ὑπάρχει μεταξύ δύο ὑποχώρων A καί B τοῦ X ἔτσι ὥστε ἡ διάσταση τοῦ μικρότερου ὑπόχωρου Γ πού τούς περιέχει νά ἰσοῦται μέ max(dim A, dim B);

$A\subset B$ ἤ $B\subset A$

15ο) Συγκλίνει ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^n$ ὁμοιόμορφα στό σύνολο $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$;

16ο) Θεωρεῖστε τόν διανυσματικό χῶρο P_n τῶν πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές βαθμοῦ τό πολύ $n-1$ καί τό γραμμικό τελεστή D τῆς παραγώγισης $D: p \to p'$ πάνω στόν P_n.

α) Νά βρεθῆ ὁ πίνακας πού παριστάνει τόν D ὡς πρός τή βάση $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οἱ ἰδιοτιμές καί τά ἰδιοανύσματα του.

β) Ἄν $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ ὁρίζουμε

$$\|p\| = \max_{0\le i\le n-1} |a_i| .$$

Βεβαιωθεῖτε ὅτι ἡ $\|\cdot\|$ εἶναι νόρμα στόν P_n καί βρῆτε τή νόρμα τοῦ D σάν τελεστή στό χῶρο $(P_n, \|\cdot\|)$.

17ο) Γράψτε (ὄχι περισσότερο ἀπό μία σελίδα) τί γνωρίζετε γιά τό ἔργο ἑνός ἀπό τούς παρακάτω Μαθηματικούς: Gauss, Newton, Riemann.

18ο) α) Σέ ἕνα πρόγραμμα FORTRAN στό ὁποῖο ἡ πραγματική μεταβλητή X μπορεῖ νά πάρει τιμές κοντά στό 0 ὑπάρχει ἡ ἐντολή

```
Z = SQRT(X**4 + 4.0) - 2.0
```

Ὑπάρχει κανένα πρόβλημα σ' αὐτή τήν ἐντολή; ἐάν ναί ξαναγράψτε την καλλίτερα.

β) Οἱ συναρτήσεις τοῦ Bessel $J_n(x)$, $n=0,1,2,\dots$, $x>0$, ἱκανοποιοῦν τή σχέση $|J_n(x)| \le 1/\sqrt{2}$, $n \ge 1$ καί τήν ἀναδρομική σχέση

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) .$$

Χρησιμοποιώντας αὐτή τή σχέση καί ὅτι κατά προσέγγιση $J_0(1) \cong 0{,}7651976865$, $J_1(1) \cong 0{,}4400505857$ μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τίς τιμές $J_2(1), J_3(1), \dots$ μέ δέκα δεκαδικά ψηφία. Παρατηροῦμε ὅτι γιά κάποιο n, $|J_n(1)| > 1$. Ποιά νομίζετε ὅτι εἶναι ἡ πιθανώτερη αἰτία γι' αὐτό;

19ο) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα: $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{z^2+1}{z+i} e^{-\pi |z|^2} dx dy$, ὅπου $z = x+iy$.

20ο) Δεῖξτε ὅτι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ περιέχονται στό δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| \le 5\}$.

21ο) Δῶστε μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν Τοπολογικῶν χώρων.

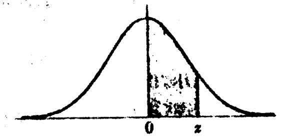
α) $\{[-1,1]\times[0,1]\}/\sim$, ὅπου $\sim$ σχέση ἰσοδυναμίας τέτοια ὥστε $(x,0)\sim(-x,1)$ γιά ὅλα τά x.

β) $\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}\times[0,1]\right)/\sim$, ὅπου $\sim$ σχέση ἰσοδυναμίας τέτοια ὥστε: $y=y'=1 \Rightarrow (x,y)\sim(x,y')$.

22ο) Δεῖξτε ὅτι ἄν $P_0, P_1, \dots, P_n$ εἶναι πολυώνυμα καί: $e^{nx}P_n(x) + e^{(n-1)x}P_{n-1}(x) + \dots + e^{x}P_1(x) + P_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε τά $P_0, \dots, P_n$ εἶναι ταυτοτικά ἴσα μέ 0.

Appendix II

AREAS under the STANDARD NORMAL CURVE from 0 to z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·0000	0·0040	0·0080	0·0120	0·0160	0·0199	0·0239	0·0279	0·0319	0·0359
0·1	0·0398	0·0438	0·0478	0·0517	0·0557	0·0596	0·0636	0·0675	0·0714	0·0754
0·2	0·0793	0·0832	0·0871	0·0910	0·0948	0·0987	0·1026	0·1064	0·1103	0·1141
0·3	0·1179	0·1217	0·1255	0·1293	0·1331	0·1368	0·1406	0·1443	0·1480	0·1517
0·4	0·1554	0·1591	0·1628	0·1664	0·1700	0·1736	0·1772	0·1808	0·1844	0·1879
0·5	0·1915	0·1950	0·1985	0·2019	0·2054	0·2088	0·2123	0·2157	0·2190	0·2224
0·6	0·2258	0·2291	0·2324	0·2357	0·2389	0·2422	0·2454	0·2486	0·2518	0·2549
0·7	0·2580	0·2612	0·2642	0·2673	0·2704	0·2734	0·2764	0·2794	0·2823	0·2852
0·8	0·2881	0·2910	0·2939	0·2967	0·2996	0·3023	0·3051	0·3078	0·3106	0·3133
0·9	0·3159	0·3186	0·3212	0·3238	0·3264	0·3289	0·3315	0·3340	0·3365	0·3389
1·0	0·3413	0·3438	0·3461	0·3485	0·3508	0·3531	0·3554	0·3577	0·3599	0·3621
1·1	0·3643	0·3665	0·3686	0·3708	0·3729	0·3749	0·3770	0·3790	0·3810	0·3830
1·2	0·3849	0·3869	0·3888	0·3907	0·3925	0·3944	0·3962	0·3980	0·3997	0·4015
1·3	0·4032	0·4049	0·4066	0·4082	0·4099	0·4115	0·4131	0·4147	0·4162	0·4177
1·4	0·4192	0·4207	0·4222	0·4236	0·4251	0·4265	0·4279	0·4292	0·4306	0·4319
1·5	0·4332	0·4345	0·4357	0·4370	0·4382	0·4394	0·4406	0·4418	0·4429	0·4441
1·6	0·4452	0·4463	0·4474	0·4484	0·4495	0·4505	0·4515	0·4525	0·4535	0·4545
1·7	0·4554	0·4564	0·4573	0·4582	0·4591	0·4599	0·4608	0·4616	0·4625	0·4633
1·8	0·4641	0·4649	0·4656	0·4664	0·4671	0·4678	0·4686	0·4693	0·4699	0·4706
1·9	0·4713	0·4719	0·4726	0·4732	0·4738	0·4744	0·4750	0·4756	0·4761	0·4767
2·0	0·4772	0·4778	0·4783	0·4788	0·4793	0·4798	0·4803	0·4808	0·4812	0·4817
2·1	0·4821	0·4826	0·4830	0·4834	0·4838	0·4842	0·4846	0·4850	0·4854	0·4857
2·2	0·4861	0·4864	0·4868	0·4871	0·4875	0·4878	0·4881	0·4884	0·4887	0·4890
2·3	0·4893	0·4896	0·4898	0·4901	0·4904	0·4906	0·4909	0·4911	0·4913	0·4916
2·4	0·4918	0·4920	0·4922	0·4925	0·4927	0·4929	0·4931	0·4932	0·4934	0·4936
2·5	0·4938	0·4940	0·4941	0·4943	0·4945	0·4946	0·4948	0·4949	0·4951	0·4952
2·6	0·4953	0·4955	0·4956	0·4957	0·4959	0·4960	0·4961	0·4962	0·4963	0·4964
2·7	0·4965	0·4966	0·4967	0·4968	0·4969	0·4970	0·4971	0·4972	0·4973	0·4974
2·8	0·4974	0·4975	0·4976	0·4977	0·4977	0·4978	0·4979	0·4979	0·4980	0·4981
2·9	0·4981	0·4982	0·4982	0·4983	0·4984	0·4984	0·4985	0·4985	0·4986	0·4986
3·0	0·4987	0·4987	0·4987	0·4988	0·4988	0·4989	0·4989	0·4989	0·4990	0·4990
3·1	0·4990	0·4991	0·4991	0·4991	0·4992	0·4992	0·4992	0·4992	0·4993	0·4993
3·2	0·4993	0·4993	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4995	0·4995	0·4995
3·3	0·4995	0·4995	0·4995	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4997
3·4	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4998
3·5	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998
3·6	0·4998	0·4998	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·7	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·8	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·9	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000