ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

*Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 232156, Fax: (081) 234516*

# Ἐξετάσεις εἰσαγωγῆς στό Μεταπτυχιακό Τμῆμα

## Μέρος Α'

Παρασκευή 12 Ἰουλίου 1996

Ἡ Ἐπιτροπή

Γ. Κοσιώρης

Μ. Παπαδημητράκης

Ν. Τζανάκης

# Θέματα Απειροστικού Λογισμού

1. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$ ισχύει
$$n^n < (n!)^2$$
(β) Ακολουθία $\{a_n\}$ ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο
$$a_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad 3a_{n+1} = 2 + a_n^3$$
Αποδείξτε ότι $a_n \to 1$.

2. Έστω πραγματικές συναρτήσεις $f, g$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, \alpha)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f', g' > 0$ στο $(0, \alpha)$. Αποδείξτε ότι
(i) αν $f' \uparrow$ τότε $\frac{f(x)}{x} \uparrow$.
(ii) αν $\frac{f'}{g'} \uparrow$ τότε $\frac{f}{g} \uparrow$.

3. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό την σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.
(β) Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

4. Βρείτε τον $n$-διάστατο όγκο του
$$\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1 \}.$$

5. Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \beta-} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

6. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \cdots + \frac{1}{5n} \to \log \frac{5}{3}$.

# Θέματα Γραμμικής Άλγεβρας.

1. (α) Κάνοντας απλούστευση μόνο αναπτύξεις οριζουσών, υπολογίστε την τιμή της ορίζουσας
$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a & a \\ a & a+b & a & a & a \\ a & a & a+b & a & a \\ a & a & a & a+b & a+b \\ a & a & a & a & a \end{vmatrix}.$$

(β) Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha$ για τις οποίες το παρακάτω σύστημα έχει λύσεις:
$$x + 2y + z = \alpha^2$$
$$x + y + 3z = \alpha$$
$$3x + 4y + 7z = 8$$

2. (α) Αποδείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν το $0$ δεν είναι ιδιοτιμή του.

(β) Διαγωνοποιώντας τον $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ υπολογίστε τον $A^{100}$.

(γ) Εξετάστε αν ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται.

Αν όχι δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας· αν ναι, βρείτε ένα διαγωνοποιούντα πίνακα.

3. Δίνονται οι γραμ. μετασχηματισμοί $T : V_4(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ με τύπο $T(a,b,c,d) = (a+b+c,\ b+c+d)$ και $S : V_2(\mathbb{R}) \to V_5(\mathbb{R})$ με τύπο $S(a,b) = (a, a+b, 0, a-b, b)$.

(α) Αποδείξτε ότι τα $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (-1,0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (0,1,0,1)$ και $w_1 = (-3,2)$, $w_2 = (-2,1)$ αποτελούν βάσεις των $V_4(\mathbb{R})$ και $V_2(\mathbb{R})$ αντιστοίχως.

(β) Βρείτε τον πίνακα του $T$ ως προς τις βάσεις $\{v_1, \dots, v_4\}$ και $\{w_1, w_2\}$ και τον πίνακα του $S$ ως προς τις βάσεις

$\{w_1, w_2\}$ και $\{e_1, \ldots, e_5\}$, όπου $e_1, \ldots, e_5$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $V_5(\mathbb{R})$.

(γ) Βρείτε τον πίνακα του $ST : V_4(\mathbb{R}) \to V_5(\mathbb{R})$ ως προς τις βάσεις $\{v_1, \ldots, v_4\}$, $\{e_1, \ldots, e_5\}$.

(δ) Το αποτέλεσμα του (γ) χρησιμοποιήστε το για να βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων $Im(ST)$ του $V_5(\mathbb{R})$ και $Ker(ST)$ του $V_4(\mathbb{R})$.

4. (α) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram – Schmidt, του ορθογώνιου συμπληρώματος του $S \subset \mathbb{R}^4$, όπου $S$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα $(1,0,1,1), (0,1,0,1)$, $(1,-2,1,-1)$, $(2,1,2,3)$.

(β) Να συμπληρωθεί η τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα ώστε να είναι ορθοκανονικός και να βρεθεί ο αντίστροφός του

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & c_1 \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & c_2 \\ \cos\theta & -\sin\theta & c_3 \end{pmatrix}.$$