ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Ηράκλειο 20-1-90

Τά θέματα τῆς ἐξέτασης εἶναι 31. Μήν τρομάξετε μέ τήν πληθώρα τῶν θεμάτων! Προφανῶς δέν περιμένουμε νά τά γράψετε ὅλα. Απλῶς θέλουμε νά σᾶς δώσουμε τήν δυνατότητα νά επιλέξετε μέ μεγαλύτερη ἄνεση θέματα ἀπό ἐκεῖνες τίς περιοχές τῶν Μαθηματικῶν μέ τίς ὁποῖες ἔχετε μεγαλύτερη οἰκειότητα.

Παρακαλοῦμε οἱ λύσεις νά εἶναι διατυπωμένες μέ συντομία, σαφήνεια καί πληρότητα.

Καλή ἐπιτυχία!

Η Επιτροπή

Β. Δουγαλῆς

Κ. Σκανδάλης

Ν. Τζανάκης

1. Γιά θετικό α δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ x\le y\le \sqrt{2-x^2}}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy .$$

3 (α) Δείξτε ότι δέν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \sin n$.

(β) Για ποιά $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)\, x^n$;

4. Έστωσαν $f_1, f_2, \ldots, f_n$ πραγματικές συναρτήσεις, συνεχείς στο $[0,1]$. Θέτουμε
$$\alpha_{k\ell} = \int_0^1 f_k(t) f_\ell(t)\,dt, \quad k,\ell=1,2,\ldots,n.$$

Αποδείξτε ότι οι $f_1,\ldots,f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

5. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x=\cos x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι για οποιοδήποτε $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, η ακολουθία $\{x_n\}$, που ορίζεται από $x_{n+1} = \dfrac{\cos x_n + x_n \sin x_n}{1 + \sin x_n}$, $n \geq 0$, συγκλίνει. Βρείτε το όριό της.

6. (α) Αποδείξτε ότι για $x > -1$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} - \log n\right)$.

7. Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, της οποίας υπάρχει το όριο σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f έχει, το πολύ, αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών.

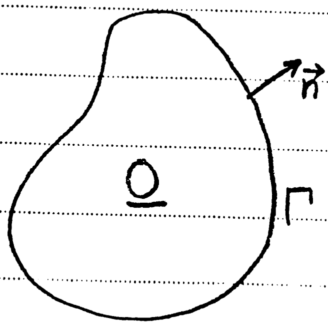
8 (α). Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση (δηλ. τέτοια ώστε, γιά οποιαδήποτε $x, y \in [a,b]$, $0 \leq \theta \leq 1$, $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$). Γιά $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $q_1, q_2, \dots, q_n \geq 0$ μέ $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, δείξτε ότι

$$(*) \quad f(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_n f(x_n).$$

(β) Εφαρμόζοντας κατάλληλα τήν $(*)$ γιά τήν κυρτή συνάρτηση $-\log x$ δείξτε, γιά $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, ότι

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

9. Δίδεται ανοιχτό, φραγμένο σύνολο $\underline{O}$ στόν R^3 με ομαλό σύνορο Γ. Έστω $\vec{n}$ τό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στήν επιφάνεια Γ μέ κατεύθυνση προς το εξωτερικό τού $\underline{O}$.



Δίδονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \overline{O} \to \mathbb{R}$, $g: \Gamma \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τό εξής πρόβλημα:
Νά βρεθεί συνάρτηση $u: \overline{O} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $u \in C^2(\underline{O}) \cap C^1(\overline{O})$, και να ικανοποιεί

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f & \text{γιά } (x,y,z) \in \underline{O}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{γιά } (x,y,z) \in \Gamma, \end{cases}$$

όπου με $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ συμβολίζουμε τήν κατά κατεύθυνση $\vec{n}$ παράγωγο τής u στό Γ.

(α). Τό πρόβλημα (*) έχει μοναδική λύση;

(β). Ποιά αναγκαία συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τά $\iiint_\Omega f\,dxdydz$, $\iint_\Gamma g\,ds$, αν τό πρόβλημα (*) έχει λύση;

10. Έστω $n>1$ ακέραιος. Για $1\le k\le n$, $u=(u_1,\dots,u_{n-k})^T\in\mathbb{R}^{n-k}$, θεωρείστε τον $n\times n$ πίνακα $M_k(u)$ της μορφής

$$M_k(u)=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & k\ \text{στήλη} & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & \bigcirc & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & u_1 & 1 & & & \\
 & \bigcirc & & u_2 & & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \bigcirc & \ddots & \\
 & & & u_{n-k} & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

(α) Αν $1\le k,\ell\le n$, $u\in\mathbb{R}^{n-k}$, $v\in\mathbb{R}^{n-\ell}$, υπολογίστε τον πίνακα $M_k(u)M_\ell(v)$.

(β) Αν $1\le k\le n$, $u\in\mathbb{R}^{n-k}$, υπολογίστε τον πίνακα $(M_k(u))^{-1}$.

(γ) Έστω A $n\times n$ πίνακας. Τι σχέση έχουν γινόμενα της μορφής $M_k(u)A$ με τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss;

11. Έστω ότι $z_1, \ldots, z_\nu \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε $\left|\frac{z_k - i}{z_k + i}\right| < 1 \quad \forall k = 1, \ldots, \nu$.
Αποδείξτε ότι τότε $\left|\frac{z_1 + \cdots + z_\nu - i}{z_1 + \cdots + z_\nu + i}\right| < 1$.

12. Έστω ότι $u, v \in \mathbb{Z}$, $(u, 2v) = 1$, $x = u^2$, $y = v^2 - 2$, $z = 2v^2$.
Αποδείξτε ότι ο ΜΚΔ των τριών αριθμών $2x + 3y - z$, $4x + 7y + 2z$, $5x + 4y + z$ είναι 1.

13. Νά υπολογιστεί η ορίζουσα

$$(n+1)\times(n+1) \quad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

14. Γιά ποιές τιμές των παραμέτρων του είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a' & b' \\ 0 & 0 & 2 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Έστω (x_n) $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία θετικών όρων. Δείξτε ότι
$$\limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

16. Βρείτε τήν ακτίνα σύγκλισης τής σειράς Taylor μέ κέντρο $z_0 = -1 + i$ ενός ολόμορφου κλάδου του λογαρίθμου του z στόν τόπο $\mathbb{C} - \{z : z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$.

17. Υπολογίστε τά μιγαδικά ολοκληρώματα

$$\int_C \frac{dz}{(z - 2 + \frac{1}{2}i) z^3} \qquad \text{όταν} \quad C = \begin{cases} \text{κύκλος κέντρου } 2+i \text{ καί ακτίνος } 2 \\ \text{κύκλος κέντρου } 0 \text{ καί ακτίνας } 2 \end{cases}$$

καθώς καί τό

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+1)\,dz}{z(|z|^2 + 1)}.$$

18. Θεωρούμε τους εξής υποχώρους τού $\mathbb{R}$ (μέ τήν σχετική τοπολογία): $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$, $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$. Αποδείξτε ότι δέν υπάρχει μεταξύ τους ζεύγος ομοιομορφικών χώρων.

19. Εστω $(\mathcal{X}, \rho)$ συνεκτικός μετρικός χώρος με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Δείξτε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι υπεραριθμήσιμος.

20. Αποδείξτε ότι είναι πληθικά ισοδύναμα:

(α) Τό σύνολο $\mathbb{N}$ τών φυσικών αριθμών μέ τό $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

(β) Τό δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ τού $\mathbb{N}$ με το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών με τιμές στό $\mathbb{N}$.

21. Δώστε ένα ορισμό της συνεπαγωγής μέσω της σύζευξης και της άρνησης. Αποδείξτε ότι η συνεπαγωγή δεν ορίζεται μέσω της διάζευξης καί της σύζευξης.

22. Αν $\alpha(t)$ είναι μια καμπύλη με καμπυλότητα $\kappa(t)>0$ και κύρια κάθετο $N(t)$, η <u>κεντρική καμπύλη</u> $\alpha^*(t)$ της $\alpha(t)$ είναι η καμπύλη που αποτελείται από τα κέντρα καμπυλότητας τής α,

$$\alpha^*(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t).$$

Βρείτε τήν κεντρική καμπύλη της κυκλικής έλικας $\beta_{p,q}(t) = \left(p\cos\frac{t}{c},\ p\sin\frac{t}{c},\ q\frac{t}{c}\right)$ όπου $c=(p^2+q^2)^{1/2}$. Ποιά είναι η κεντρική καμπύλη τής $\beta^*_{p,q}$;

23. Ἔστω G μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα (τήν πράξη μεταξύ δύο στοιχείων g_1, g_2 τῆς G θά συμβολίζομε $g_1 g_2$ δίχως τελεία ἀνάμεσα στά στοιχεῖα).
Ἔστω $X \neq \emptyset$ τυχόν σύνολο. Ἄν ὑπάρχει ἀπεικόνιση $\cdot\ G \times X \longrightarrow X$ μέ τίς ἰδιότητες: $1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in X$ καί $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G,\ \forall\, x \in X$, τότε λέμε ὅτι ἡ G δρᾶ ἐπί τοῦ X.
Δοθέντος τοῦ $x \in X$, τό σύνολο $T_x = \{ g \cdot x \,/\, g \in G \} \subseteq X$ λέγεται τροχιά τοῦ x καί τό $\Sigma_x = \{ g \in G : g \cdot x = x \}$ λέγεται σταθεροποιητής τοῦ x καί (προφανῶς) εἶναι ὑποομάδα τῆς G.
α) Βρεῖτε μιά ἀμφιμονοσήμαντη „ἐπί" ἀπεικόνιση $G/\Sigma_x \longrightarrow T_x$ καί συμπεράνετε ὅτι $|G| = |\Sigma_x| \cdot |T_x|$ (G/Σ_x μπορεῖ νά παριστάνει τό σύνολο τῶν ἀριστερῶν εἴτε τό σύνολο τῶν δεξιῶν κλάσεων modulo Σ_x).
β) Ἔστω ὅτι ἡ G εἶναι p-ὁμάδα (δηλ. $|G|$ = δύναμη τοῦ $p > 1$, ὅπου p πρῶτος) καί X πεπερασμένο σύνολο μέ πληθάριθμο πρῶτο πρός τόν p. Δεῖξτε ὅτι $\exists\, x \in X$ τέτοιο ὥστε $|T_x| = 1$ καί συμπεράνετε ὅτι ἡ δράση τῆς G ἐπί τοῦ X ἔχει σταθερό σημεῖο · δηλ. ὑπάρχει $x \in G$ τέτοιο ὥστε $gx = x \quad \forall\, g \in G$.
γ) Θεωρῆστε τή „δράση ἐσωτερικῶν αὐτομορφισμῶν" τῆς G ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ της δηλ. ἐκείνη πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: $g \cdot x = g x g^{-1} \quad \forall\, x, g \in G$.
Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν ἡ G εἶναι p-ὁμάδα, τότε τό κέντρο της

$$Z(G) \overset{\text{ορσ}}{=} \{ z \in G : gz = zg \quad \forall\, g \in G \}$$

εἶναι ὑποομάδα μέ τουλάχιστον p στοιχεῖα.
(Ὑπόδειξη. Θεωρῆστε κατάλληλο ὑποσύνολο X τῆς G καί τή δράση ἐσωτερικῶν αὐτομορφισμῶν τῆς G ἐπί τοῦ X.)

24. (Σ' αὐτό τό θέμα μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε ἀναπόδεικτα τά ἑξῆς ἀποτελέσματα: Ἄν τό K εἶναι σῶμα καί τό $p(X) \in K[X]$ ἀνάγωγο, τότε γιά κάθε $f(X) \in K[X]$, ἤ $p(X) \mid f(X)$ ἤ τά $p(X)$, $f(X)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους. Ἀκόμη, ἄν ὁ ΜΚΔ τῶν $f(X), g(X) \in K[X]$ εἶναι $d(X)$, τότε ὑπάρχουν $F(X), G(X) \in K[X]$, τέτοια ὥστε $F(X) \cdot f(X) + G(X) \cdot g(X) = d(X)$. Τέλος, κάθε ἰδεῶδες τοῦ $K[X]$ εἶναι τῆς μορφῆς $f(X) \cdot K[X]$).

α) Ἔστω R ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα. Ἕνα ἰδεῶδες I τοῦ R χαρακτηρίζεται maximal ἄν τό μόνο ἰδεῶδες τοῦ R, τό ὁποῖο περιέχει γνησίως τό I, εἶναι τό R. Δεῖξτε ὅτι ἄν τό I εἶναι maximal, τότε ὁ δακτύλιος-πηλίκο R/I εἶναι σῶμα.

β) Ἄν τό K εἶναι σῶμα καί $p(X) \in K[X]$ ἀνάγωγο, τότε τό ἰδεῶδες $p(X) \cdot K[X]$ εἶναι maximal.

γ) Ἔστω $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ἀνάγωγο καί θ ρίζα τοῦ $p(X)$. Προφανῶς τό σύνολο $\mathbb{Q}[\theta]$ τῶν πολυωνυμικῶν παραστάσεων τοῦ θ μέ συντελεστές ρητούς εἶναι δακτύλιος (π.χ. ὑποδακτύλιος τοῦ $\mathbb{C}$). Θεωρῆστε τόν φυσιολογικό ὁμομορφισμό $\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[\theta]$ καί μέ τή βοήθεια αὐτοῦ καί τῶν (α), (β) δεῖξτε ὅτι ὁ $\mathbb{Q}[\theta]$ εἶναι σῶμα. Μήπως θά μπορούσατε νά τό ἀποδεικνύατε αὐτό πιό ἄμεσα;

25. α) Ἔστω V ἕνας $\mathbb{C}$-διαν. χῶρος καί $\{T_i\}_{i \in I}$ οἰκογένεια γραμμικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ V μέ τήν ἰδιότητα. Γιά κάθε ζεῦγος μή μηδενικῶν διανυσμάτων x, y τοῦ V ὑπάρχει T_i τέτοιος ὥστε $T_i(y) = x$. Ἔστω S ἕνας γραμμικός μετασχηματισμός τοῦ V, ὁ ὁποῖος ἀντιμετατίθεται μέ ὅλους τούς T_i. Δεῖξτε ὅτι $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ὥστε $S(x) = \lambda \cdot x \quad \forall\, x \in V$.

β) Δεῖξτε μέ ἀντιπαράδειγμα ὅτι ἄν στό (α) ἀντικατασταθεῖ τό $\mathbb{C}$ ἀπό τό $\mathbb{R}$, ὁ ἰσχυρισμός δέν ἀληθεύει.

26. Αν μία επιφάνεια S δίνεται από την σχέση $f(x,y,z)=0$, η σφαιρική εικόνα της S είναι το υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας, που αποτελείται από τα σημεία

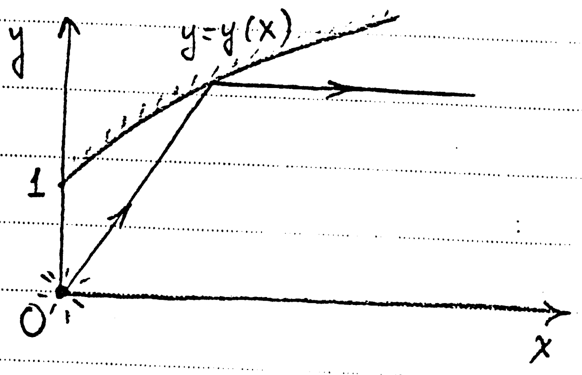
$$\frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} \text{ για } (x,y,z)\in S.$$

Τό μονόφυλλο υπερβολοειδές είναι η επιφάνεια

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 = 1 \quad , \quad \alpha>0 .$$

Βρείτε την σφαιρική εικόνα του μονόφυλλου υπερ-βολοειδούς για $\alpha>0$, καί εξετάστε τί συμβαίνει όταν $\alpha\downarrow 0$ καί όταν $\alpha\to+\infty$.

27. Να βρεθεί η εξίσωση του κατόπτρου $y=y(x)$ για $x\geq 0$, μέ



$y(0)=1$, $\frac{dy}{dx}(0)>0$, τέτοιου ώστε οι ακτίνες που προέρχονται από φωτεινή πηγή στό O να ανακλώνται σε οριζόντια κατεύθυνση.

28. Δίδεται η κυβική εξίσωση

$$(*) \quad x^3 + 3px + 2q = 0 ,$$

όπου υποθέτουμε ότι p,q πραγματικοί καί $p^3+q^2>0$.

(α). Δείξτε ότι τότε η $(*)$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ρ_1.

(β) Δείξτε ότι η ρ_1 δίνεται από τον τύπο του Cardano:

$$\rho_1 = u - v, \text{ όπου } u = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{1/3}, \quad v = \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{1/3}.$$

(γ) Υποθέστε ότι $p^3 \gg q^2$. Στην πράξη παρατηρούμε ότι ο τύπος του Cardano έχει προβλήματα λόγω σφάλματος στρογγύλευσης, όταν οι υπολογισμοί γίνονται με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας. Γιατί;

(δ) Δώστε ένα άλλο τρόπο προσέγγισης της ρ_1, όταν $p^3 \gg q^2$.

29. Έστω A αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και υποθέστε ότι υπάρχουν κάτω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας L με μοναδιαία διαγώνια στοιχεία, και άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας U τέτοιοι ώστε $A = LU$.

(α). Δείξτε ότι το ζευγάρι των L, U με τις παραπάνω ιδιότητες είναι μοναδικό.
(β). Βρείτε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει τα στοιχεία των L, U συναρτήσει των στοιχείων του A.
(γ). Υποθέστε επιπλέον ότι ο A είναι συμμετρικός. Δείξτε ότι $U = DL^T$, όπου ο D είναι $n \times n$ διαγώνιος πίνακας.

30. Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνεχή συνάρτηση πυκνότητας f. Έστω ότι για τον αριθμό μ ισχύει:

$$E(|X-\mu|) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} E(|X-\alpha|) \qquad (E(X) = \text{μέση τιμή της } X).$$

Αποδείξτε ότι $P(X \leq \mu) = 1/2$.

31. Τέσσερα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4 διαλέγονται τυχαία και ανεξάρτητα πάνω σε μια περιφέρεια. Αποδείξτε ότι η πιθανότητα να τέμνονται οι χορδές P_1P_2 και P_3P_4 είναι $1/3$.

(*) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Αν $\forall\, c \geq 0$ το πολυώνυμο $f(x)+c$ έχει όλες τις ρίζες του στο $\mathbb{R}$ τότε $\deg f \leq 2$.