Ἐξέταση Μαθηματικῶν ὑποψηφίων μεταπτυχιακῶν φοιτητῶν Πανεπιστημίου Κρήτης (Τμῆμα Μαθηματικό).

Ἀπρίλιος 85.

Ἀπαντῆστε σέ ὅσα ἐρωτήματα μπορεῖτε σέ 4 ὧρες. Τά ἐρωτήματα προέρχονται ἀπό διάφορους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν καί ὑπάρχει χρόνος γιά νά ἀπαντήσετε σέ ὅλα ἀλλά αὐτό δέν εἶναι ἀπαραίτητο. Οἱ ἀπαντήσεις πρέπει νά δοθοῦν μέ σαφήνεια καί πληρότητα ἀλλά χωρίς περιττές πολυλογίες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Θέμα 1ον: Γράψτε (συνοπτικά) στοιχεῖα γιά τήν ἱστορία ἑνός κλάδου τῶν Μαθηματικῶν τῆς ἀρεσκείας σας δίνοντας ταυτόχρονα δύο-τρία ἀπό τά ὀνόματα τῶν Μαθηματικῶν πού συνέβαλαν σημαντικά στήν ἀνάπτυξη τοῦ κλάδου καί κατά προσέγγιση χρονολογίες. (ὄχι πάνω ἀπό μία σελίδα).

Θέμα 2ον: Βρῆτε (ἄν ὑπάρχουν) συνεχεῖς συναρτήσεις $f : [0,\infty) \to R$ τέτοιες ὥστε $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ καί

α) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

β) Νά μήν ἰσχύει: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

γ) $\int_0^\infty |f(x)|\log(1+|f(x)|)\,dx = \infty$

Θέμα 3ον: α) Βρῆτε ἀντιστρέψιμο πίνακα (ἄν ὑπάρχει) $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ τέτοιο ὥστε ὁ πίνακας $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ νά εἶναι διαγώνιος.

β) Δίνονται τρία γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ὑπάρχει διάνυσμα $\bar{x}$ τοῦ $\mathbb{R}^3$ τέτοιο ὥστε i) νά σχηματίζη ἀμβλεία γωνία μέ καθένα ἀπό τά $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$; ἤ ii) ὀξεία γωνία μέ τά $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ καί ἀμβλεία μέ τό $\bar{\gamma}$;

Θέμα 4ον: α) Βρῆτε μέ προσέγγιση δεκάτου χιλιοστοῦ τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{0.1}\cos(x^5)\,dx$

β) Δίνονται κ+1 ἀριθμοί $c_0, c_1, c_2, \dots, c_\kappa$ $\kappa \geq 1$. Δείξτε ὅτι ὑπάρχει τό πολύ ἕνα πολυώνυμο P βαθμοῦ $\leq \kappa$ τέτοιο ὥστε $P(0)=c_0,\ P'(1)=c_1, \dots, P^{(\kappa)}(\kappa)=c_\kappa$

γ) (συνέχεια τοῦ β) Δείξτε ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἕνα τέτοιο πολυώνυμο χρησιμοποιώντας τίς συναρτήσεις

$B_0(x)=1, \quad B_n(x)=\dfrac{x(x-n)^{n-1}}{n!} \quad n\geq 1$

(Ὑπόδειξη: Δείξτε πρῶτα ὅτι $B_n'(x)=B_{n-1}(x-1)$ ἀπό ὅπου μπορεῖτε νά βρῆτε τίς τιμές $B_n^{(p)}(p)$, $p=0,1,2\cdots$)

Θέμα 5ον: α) Σέ ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα ἰσχύει $\alpha^2=\alpha$ γιά κάθε α. Δείξτε ὅτι $\alpha=-\alpha$ γιά κάθε α καί ὅτι κάθε $\alpha\,(\neq 0,1)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ μηδενός.

β) Δίνονται δύο ὑποομάδες A, B μιᾶς ὁμάδας G. Γιά κάθε x στό G γράφομε AxB γιά τό σύνολο $\{axb: a\in A, b\in B\}$. Σωστό ἤ λάθος: Τά AxB, $x\in G$ εἶναι ξένα ἤ ταυτίζονται.

γ) "Αν $p_1<p_2<\dots<p_n<\dots$ είναι οι πρώτοι αριθμοί γραμμένοι σαν μιά αύξουσα ακολουθία δείξτε ότι $p_n \le 2^{2^n}$, $n=1,2,\dots$ (υπόδειξη: χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι ο αριθμός $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ διαιρείται με ένα πρώτο διαφορετικό από τους $p_1, p_2, \dots p_n$)

Θέμα 6ο: α) Βρείτε σε πολικές συντεταγμένες την εξίσωση των καμπυλών που τέμνουν τις ευθείες που περνούν από την αρχή υπό σταθερά γωνία.

β) Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z=|f(x+iy)|^2$, όπου $f(x+iy)$ ολόμορφη συνάρτηση, σχηματίζει με το επίπεδο x,y γωνία θ τέτοια ώστε $|\tan\theta| = 2|f(x+iy)||f'(x+iy)|$

γ) Δίνονται δύο διαφορίσιμες συμπαγείς πολλαπλότητες M,N, μιά διαφορίσιμη συνάρτηση $f: M \to N$ και ένα σημείο $y \in N$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in f^{-1}(\{y\})$ η Df είναι αντιστρέψιμη. Δείξτε ότι υπάρχει γειτονιά V του y τέτοια ώστε ο πληθικός αριθμός του συνόλου $f^{-1}(\bar{y})$ είναι πεπερασμένος και σταθερός για κάθε $\bar{y} \in V$.

Θέμα 7ο Δίνονται n διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots a_n$. Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα της $f(x)=\frac{1}{x-a_1}+\dots+\frac{1}{x-a_n}$ $x \in \mathbb{R}-\{a_1,\dots a_n\}$ και

α) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες αν $y\neq 0$. Πόσες έχει για $y=0$;

β) Τι μορφή έχει το σύνολο $\{x: f(x)>y\}$ και ποιο είναι το συνολικό μήκος του $(y>0)$.

(Υπόδειξη: Μετασχηματίστε την εξίσωση $f(x)=y$ σε πολυωνυμική).

Θέμα 8 : Βρῆτε (ἂν ὑπάρχει) μιά ὁλόμορφη συνάρτηση $f(z)$, $|z|<2$ τέτοια ὥστε $f(0)=1$, $|f(z)|<20$ γιά $|z|<2$ καί

(i) $\operatorname{Re} f(z) = e^{x}\cos y$ γιά $1 > \operatorname{Re} z > 0$ $(z=x+iy)$

(ii) $\operatorname{Re} f(z) > 18$ γιά $z=e^{i\theta}$ $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$.

Θέμα 9 α) Ἕνα ὑποσύνολο A μιᾶς πεπερασμένης ὁμάδας G περιέχει πιό πολλά ἀπό τά μισά στοιχεῖα τῆς G. Δεῖξτε ὅτι κάθε στοιχεῖο τῆς ὁμάδας γράφεται σάν γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ A.

β) Ἕνας τελεστής $T: V \to V$ πάνω σέ ἕνα γραμμικό χῶρο V ἔχει τήν ἰδιότητα $T^2=0$. Δεῖξτε ὅτι $I-2T$ εἶναι ἀντιστρέψιμος.

Θέμα 10 α) Ἔστω X τοπολογικός χῶρος Hausdorff μέ ἄπειρα στοιχεῖα. Δεῖξτε ὅτι ὁ X περιέχει μιά ἀπειρία ξένων ἀνά δύο ἀνοιχτῶν ὑποσυνόλων.

β) Θεωροῦμε τό μετρικό χῶρο $C[0,1]$ τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων στό $[0,1]$ μέ ἀπόσταση d πού ὁρίζεται ἀπό τη σχέση $f,g \in C[0,1]$, $d(f,g)=\max_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$ καί τό ὑποσύνολο του $C'[0,1]$ τῶν στοιχείων τοῦ $C[0,1]$ πού ἔχουν παράγωγο στό $(0,1)$. Εἶναι τό $C'[0,1]$ ~~ἀνοιχτό~~ ἀνοιχτό; κλειστό; συνεκτικό;

Θέμα 11 Ἕνας Μαθηματικός χρησιμοποιεῖ δύο κουτιά σπίρτα μέ n σπίρτα τό καθένα. Γιά νά ἀνάψη τσιγάρο ἐκλέγη στήν τύχη ἕνα κουτί καί ἀνάβει ἕνα σπίρτο. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὅταν ἀνακαλύψη ὅτι τό ἕνα κουτί εἶναι ἄδειο τό ἄλλο νά περιέχει $r\ (\le n)$ σπίρτα β) Μία τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Βρείτε ένα $a>0$ τέτοιο ώστε η πιθανότητα δύο ανεξάρτητες παρατηρήσεις της X να δώσουν αποτέλεσμα με $|X|>a$ να είναι $< 1/2$.

Θέμα 12ο: Θεωρούμε τους αριθμούς $x_k = k\frac{1}{N}$, $k=-N^2,\dots,N^2$ (N ακέραιος θετικός) και το σύνολο Q_N των μιγαδικών συναρτήσεων φ οι οποίες είναι 0 έξω από το διάστημα $[-N,N)$ και σταθερές σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1})$, $k=-N^2,\dots,N^2-1$. Ορίζουμε τώρα τον τελεστή $T: Q_N \to Q_N$ (θεωρώντας το Q_N σαν γραμμικό χώρο πάνω στους μιγαδικούς) ως εξής: Για κάθε $\varphi \in Q_N$ $T\varphi$ είναι εκείνη η συνάρτηση του Q_N που έχει τιμή $x_k \varphi(x_k)$ στο διάστημα $[x_k, x_{k+1})$, $k=-N^2,\dots,N^2-1$.

α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του T

β) Η σχέση $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον Q_N. Σκιαγραφήστε την απόδειξη αυτού του γεγονότος και ~~β)~~ βρείτε τον συζυγή του T δηλ. τον τελεστή T^* που ικανοποιεί για κάθε $\varphi,\psi \in Q_N$ $(T\varphi,\psi) = (\varphi, T^*\psi)$.