ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

Θέματα Εισαγωγικών Εξετάσεων
Μεταπτυχιακών Φοιτητών

Ιούλιος 1991.

Η Επιτροπή

Σ. Αργυρός
Α. Τερτίκας
Ν. Τζανάκης

1) (α) Δίδεται $A \subset \mathbb{R}$ ώστε $(A, <)$ νά είναι καλά διατεταγμένο. Δείξτε ότι τό A είναι τό πολύ άριθμήσιμο. Λογισμ. 6ο ΕΞ

(β) Έστω $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ άκολουθία ύποσυνόλων τού $\mathbb{N}$ μέ $|A_k| = n$. Δείξτε ότι ύπάρχει $A \subset \mathbb{N}$ καί ύπακολουθία $(A_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$ ώστε γιά $s_1 < s_2$ $A_{k_{s_1}} \cap A_{k_{s_2}} = A$.

2) (α) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση μέ $|f'(x)| \leq M$. Άν $\int_0^\infty f(x)\,dx$ ύπάρχει τότε $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Εισαγ. μέτρο. Απρ. 85 (β) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης f ώστε $\int_0^\infty f(x)\,dx$ νά ύπάρχει ένώ $\lim_{x \to \infty} f(x)$ νά μήν ύπάρχει.

3) (α) Δείξτε ότι γιά $a > 1$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = -i \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

(β) Γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ ύπολογίστε τό όλοκλήρωμα

$$\int_{C(1,1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz.$$

4) Έστω K κλειστό ύποσύνολο τού $[0,1]$ καί $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι ύπάρχει $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής έπέκταση τής f μέ $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. Έπί πλέον δείξτε ότι ύπάρχει $T : C(K) \to C[0,1]$ γραμμική ίσομετρία ώστε $T(f)|_K = f$ γιά κάθε $f \in C(K)$

(Υποδ: Χρησιμοποιείστε ότι κάθε $U \subset [0,1]$ άνοικτό είναι ή ένωση ξένων άνά δύο άνοικτών διαστημάτων.)

5) Για $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ θέτουμε $\operatorname{osc} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \operatorname{diam} f[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στό x_0 άν $\operatorname{osc} f(x_0)=0$.

(β) Θεωρούμε $f_n:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

(i) Δείξτε ότι τό σύνολο $K_\varepsilon = \{x : \operatorname{osc} f(x) \geq \varepsilon\}$ είναι κλειστό και επίσης $K_\varepsilon^\circ = \emptyset$.

(Υποδ: Για $K_\varepsilon^\circ=\emptyset$ χρησιμοποιείστε κατάλληλα τό Θεώρημα κατηγορίας τού Baire).

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $D\subset[0,1]$ πυκνό υπεραριθμήσιμο ώστε γιά κάθε $x_0\in D$ η f είναι συνεχής στό x_0.

6) Θεωρούμε τόν χώρο $\{a,b\}$ με τήν διακριτή τοπολογία

(α) Δείξτε ότι ό $X=\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και περιγράψτε μία μετρική του.

(β) Δείξτε ότι ό X έχει μία βάση τής τοπολογίας του πού συνίσταται από "ανοικτά - κλειστά" σύνολα

(γ) Δείξτε ότι κάθε $V\subset X$ "ανοικτό - κλειστό" είναι τής μορφής $L\times\{a,b\}^{\mathbb{N}-S}$ όπου $S\subset\mathbb{N}$ πεπερασμένο και $L\subset\{a,b\}^S$

7) Έστω $f_n:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς και $F_n(t)=\int_0^t f_n(x)\,dx$

(α) Άν $D\subset[0,1]$ πυκνό και $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει γιά κάθε x στό D δείξτε ότι η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

(β) Χρησιμοποιείστε τό (α) ώστε νά δείξετε ότι γιά κάθε $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μία υπακολουθία πού συγκλίνει ομοιόμορφα.

8) Έστω p πρώτος καί n θετικός ακέραιος. Αποδείξτε ότι

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] \pmod{p}.$$

9) Έστω G ομάδα καί H υποομάδα της G μέ $[G:H]=2$. Δείξτε ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G.

Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξεως 6, ή οποία δέν είναι κυκλική, έχει στοιχείο τάξεως 3.

10) Έστω $\mathbb{Z}_m$ οί κλάσεις τών ακεραίων modulo m. (m ακέραιος > 1).

(i) Δείξτε ότι τό υποσύνολο H του $\mathbb{Z}_m$, πού αποτελείται από τίς κλάσεις μέ στοιχεία αριθμούς πρώτους πρός τό m, εφοδιασμένο μέ τόν πολ/σιασμό κλάσεων, είναι ομάδα.

(ii) Ποιό είναι τό H γιά $m=15$; Έστω K ή υποομάδα τής $(H,\cdot)$, ή οποία παράγεται από τό $\hat{11}$ (Τό ^ δηλώνει "κλάση" στό $\mathbb{Z}_{15}$). Θεωρούμε επίσης τήν ομάδα $(\mathbb{Z}_{12},+)$, συμβολίζοντας τίς κλάσεις της μέ ‾. Αποδείξτε ότι

$$(H,\cdot)/K \cong (\mathbb{Z}_{12},+)/\langle \bar{4} \rangle.$$

11) Δείξτε ότι μία επιφάνεια, τής οποίας όλα τά σημεία είναι ομφαλικά, είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας. Ειδ

Ἔστω K σῶμα καὶ $p(x) \in K[x]$ ἀνάγωγο πολυώνυμο.

i) Ἂν $f(x) \in K[x]$, ἀποδεῖξτε ὅτι ἢ τό $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τό $p(x)$, ἢ $p(x) \mid f(x)$.

ii) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἄν τά $p(x)$ καί $f(x)$ ἔχουν κοινή ρίζα σέ κάποια ἐπέκταση τοῦ K (π.χ. ἄν $K = \mathbb{Q}$ καί τά $p(x)$, $f(x)$ ἔχουν κοινή μιγαδική ρίζα) τότε $p(x) \mid f(x)$ (στό $K[x]$).

iii) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ δακτύλιος-πηλίκο $L = K[x]/\langle p(x) \rangle$ εἶναι σῶμα καί ὅτι τό K ἐμφυτεύεται ἰσόμορφα στό L (δηλ. ὑπάρχει μονομορφισμός σωμάτων $\phi : K \longrightarrow L$).

iv) Ἔστω $\deg p(x) > 1$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο p δέν ἔχει ρίζα στό K, ἀλλά ἔχει ρίζα στό L. (Ὑπόδειξη: Γιά ἀποφυγή σύγχυσης στούς συμβολισμούς, χρησιμοποιῆστε τό γράμμα y γιά τή μεταβλητή τῶν πολυωνύμων μέ συντελεστές ἀπ' τό L· αὐτό, φυσικά, δέν εἶναι ἀπαραίτητο).

13)

Ἔστω W ὁ χῶρος τῶν $n \times n$ πραγματικῶν πινάκων καί W_0 ὁ ὑπόχωρος τοῦ W πού παράγεται ἀπ' τούς πίνακες τῆς μορφῆς $AB-BA$. Δεῖξτε ὅτι ὁ W_0 ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν $n \times n$ πινάκων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴχνος 0.
(Ὑπόδειξη: Προσδιορίστε τή διάσταση τοῦ ὑποχώρου τῶν $n \times n$ πινάκων ἴχνους 0. Χρησιμοποιεῖστε τούς πίνακες μέ ἕνα μόνο διάφορο τοῦ μηδενός στοιχεῖο, γιά νά κατασκευάσετε ἐπαρκή ἀριθμό ἀνεξαρτήτων πινάκων τῆς μορφῆς $AB-BA$).

14)

(i) Βρεῖτε ἕνα γραμμικό μετασχηματισμό τοῦ $\mathbb{R}^3$, ὁ ὁποῖος ν' ἀφήνει ἀναλλοίωτες τίς τρεῖς εὐθεῖες μέ διευθύνσεις ἐκεῖνες τῶν διανυσμάτων $(1,1,0)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,2)$ καί νά μετασχηματίζει τή μοναδιαία σφαῖρα στό ἐλλειψοειδές μέ ἄξονες συμμετρίας αὐτές τίς τρεῖς εὐθεῖες καί ἀντίστοιχα μήκη ἀξόνων a, b, c.

(ii) Προσδιορίστε τόν πίνακα τοῦ παραπάνω μετασχηματισμοῦ ὡς πρός τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση. Ὁ πίνακας αὐτός εἶναι διαγωνοποιήσιμος; Ἄν ναί, ποιός εἶναι ὁ ἀντίστοιχος διαγώνιος πίνακας; Ἄν ὄχι, δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

15). Έστω $c \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ και θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad ,$$
$$u(x,0) = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = g(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε πως η λυση u, δινεται απο τον τυπο

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$$

Υπόδειξη: Θεωρειστε τη λυση ως προς τις συντεταγμενες $a = x-ct$, $\beta = x+ct$ και αποδειξτε αρχικα οτι $\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial \beta} u = 0$.

16). Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συναρτηση Rieamann ολοκληρωσιμη σε καθε διαστημα της μορφης $[0,a]$ $\forall a>0$, που ικανοποιει επιπροσθετα:

$$(*) \quad f^2(t) = \int_0^t f(s)\,ds \quad , t>0 \quad .$$

a) Προσδιορστε ολες τις διαφορισιμες συναρτησεις f

β) Προσδιοριστε ολες τις συνεχεις συναρτησεις f

γ) Βρειτε μια απολυτα ολοκληρωσιμη στο $[0,\infty)$ συναρτηση Rieamann f, που να ικανοποιει την $(*)$ και επιπροσθετα υπαρχει ακολουθια $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \to \infty$ ωστε

$$\int_{t_n}^{\infty} |f(s)|\,ds > 0$$

17). Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ συνεχης συναρτηση, που ειναι παραγωγισιμη στο $(0,\infty)$ και ικανοποιει:

$$f'(t) = t - \sqrt{f(t)} \quad , t>0$$
$$f(0) = 0$$

Αποδειξτε πως υπαρχει το πολυ μια τετοια συναρτηση, την οποια προσδιοριστε στη συνεχεια.

18) Εστω $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Αν $L_i \in \mathbb{P}_n$ ειναι τα πολυωνυμα Lagrange ως προς τα σημεια $x_0,\dots,x_n$, δηλ. τετοια ωστε

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , i,j = 0,1,\dots,n$$

δειξτε οτι:

i) $$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$$

ii) $$\sum_{i=0}^{n} L_i(0)(x_i)^k = \begin{cases} 0 & k = 1,2,\dots,n \\ (-1)^n x_0 \cdots x_n & k = n+1 \end{cases}$$

19) Εστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ενας συμμετρικος και θετικα ορισμενος πινακας. Κανοντας ενα βημα στην απαλοιφη του Gauss για ενα γραμμικο συστημα $Ax = b$ παιρνουμε ενα συστημα της μορφης

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & \tilde{A} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{b}.$$

Δειξτε οτι ο $\tilde{A}$ ειναι συμμετρικος και θετικα ορισμενος.
<u>Υποδειξη</u> Εστω $y = (y_1,\dots,y_n)^T$ με $|y_2| + \dots + |y_n| > 0$. Θετοντες $y' = (y_2,\dots,y_n)$ εκφραστε το $(y')^T \tilde{A} y'$ με τη βοηθεια του $y^T A y$ και επιλεξτε καταλληλα το y_1.

20) Το 1% των ατομων ενος πληθυσμου ειναι φορεις μεσογειακης αναιμιας. Ενα παιδι που γεννιεται απο γονεις, που ειναι και οι δυο φορεις, ειναι υγιες με πιθανοτητα 1/4, ειναι φορεας με πιθανοτητα 1/2 και εχει την ασθενεια με πιθανοτητα 1/4. Αν μονο ενας απο τους γονεις ειναι φορεας, τοτε το παιδι ειναι με πιθανοτητα 1/2 υγιες και με πιθανοτητα 1/2 φορεας.

Ένα ανδρόγυνο απέκτησε ένα παιδί που είναι φορέας. Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο παιδί τους να έχει την μεσογειακή αναιμία;

21) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς 1. Διαλέγουμε τυχαία 2 σημεία πάνω σε 2 διαφορετικές πλευρές του τριγώνου. Τα 2 σημεία χωρίζουν το αρχικό τρίγωνο σ' ένα "μικρό" τρίγωνο και σε ένα τετράπλευρο. Να βρεθεί η μέση τιμή του εμβαδού του "μικρού" τριγώνου.