Τα θέματα των εξετάσεων είναι 23. Προφανώς δεν περιμένουμε να τα γράψετε όλα. Απαντείστε σε όσα θέματα μπορείτε. Οι λύσεις σας πρέπει να είναι σαφείς και πλήρεις. Αποφεύγετε τις περιττές πολυλογίες.

Καλή Επιτυχία

Γ. Λυρίδης

Ι. Αντωνιάδης

Εμμ. Κατσοπρινάκης

28/7/89

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Μαθηματικό Τμήμα

28-7-89

Εξετάσεις Υποτροφιών Μεταπτυχιακών Φοιτητών

1. i. Έστω A σταθερό σημείο της πλευράς Ox οξείας γωνίας $x\hat{O}y$. Μεταβλητός κύκλος K εφάπτεται της Ox στο A και τέμνει την Oy στα B_K, Γ_K. Δείξτε ότι η διχοτόμος της γωνίας $B_K\hat{A}\Gamma_K$ παραμένει σταθερή.

ii. Τα κάθετα επίπεδα μιάς καμπύλης (γ) του χώρου $(\mathbb{R}^3)$ διέρχονται από ένα σταθερό σημείο. Δείξτε ότι η (γ) βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια μιάς σφαίρας.

2. Δείξτε ότι $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,dx > \frac{1}{3}$.

3. Έστω $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f(a)=f(b)$. Αν $\lambda > 0$, δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + \lambda f'(\xi_2) = 0$.

Υπόδειξη Θέστε $c := a + \dfrac{b-a}{\lambda+1}$.

4. Εξετάστε αν οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ καί $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x - n\sin\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Θεωρήστε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $E : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Γιά μιά κατηγορία τέτοιων γραμμικών συναρτησοειδών ισχύει: Υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε

$$\forall f \in C^k[a,b] \;\; \exists c_k \in \mathbb{R} \;\; \exists \xi = \xi(f,k) \in (a,b). \quad E(f) = c_k f^{(k)}(\xi).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο συγκεκριμένο E ισχύει το ανωτέρω για δύο διαφορετικές τιμές του k, έστω k_1 και k_2. Δείξτε τώρα ότι για $f \in C^{k_1}[a,b]$ $\quad E(f)=0$.

6. Έστω $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$, και $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$,
$f(x,y) := \dfrac{x^2+2y^2}{(x+y)^2}$. Προσδιορίστε τα ακρότατα της f.

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

i. $\displaystyle\iint_A e^{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\,dy$ $\quad$ όπου $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2-x\}$.

ii. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{1+|z+1|^2}{z}\,dz$.

8. Για $t>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,t) = \begin{cases} a(t) & , \quad x=0 \\ \dfrac{x^t-1}{\ln x} & , \quad 0<x<1 \\ b(t) & , \quad x=1 \end{cases} .$$

Αν $\quad F(t) := \begin{cases} 0 & , \ t=0 \\ \int_0^1 f(x,t)\,dx & , \ t>0 \end{cases}$, προσδιορίστε τις a, b

έτσι ώστε $\quad F'(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

Με τη βοήθεια του ανωτέρω υπολογίστε το $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$.

9. 25 φοιτητές έλυσαν τουλάχιστον ένα από τρία συνολικά προβλήματα A, B, Γ. Απ' αυτούς που δεν έλυσαν το A εκείνοι που έλυσαν το B ήταν διπλάσιοι εκείνων που έλυσαν το Γ. Όσοι έλυσαν μόνο το A ήταν κατά έναν περισσότεροι εκείνων που έλυσαν το A και άλλα προβλήματα. Απ' αυτούς

και έλυσαν μόνο ένα πρόβλημα οι μισοί δεν έλυσαν το A. Πόσοι φοιτητές έλυσαν μόνο το πρόβλημα B;

10. Έστω $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, και Π_2 ο πραγματικός γραμμικός χώρος των 2×2 πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Αν $T : \Pi_2 \longrightarrow \Pi_2$, $T(X) := XA - AX$, προσδιορίστε:

i. Μια βάση του $\ker T$ (πυρήνα του T)

ii. Έναν πίνακα και τον βαθμό του T (βαθμός $T = \dim(\operatorname{Im} T)$).

11. Έστω

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

i. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές του A.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $B^3 = A$.

iii. Λόγω της συμμετρικότητας του A τα ιδιοδιανύσματά του έχουν κάποιες ειδικές ιδιότητες. Αναφέρετε ορισμένες από αυτές.

12. Έστω $N \in \mathbb{N}$, και $C > 0$. Στον $\mathbb{R}_0^{N+2} := \{ x = (x_0, x_1, \dots, x_{N+1}) : x_0 = x_{N+1} = 0 \}$ θεωρούμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$, δηλ.

$$\|x\| := \Big(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}_0^{N+2}.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}_0^{N+2}$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad x_j - y_j = C\,(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) \qquad j = 1, \dots, N.$$

i. Δείξτε ότι $\|x\| \le \|y\|$.

ii. Έστω y δεδομένο. Δείξτε ότι το x ορίζεται μονοσήμαντα από τις $(*)$.

13. Έστω $\delta, C, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ θετικοί αριθμοί.

i. Αν $\alpha_{n+1} \leq (1+\delta)\alpha_n + C$, $n \in \mathbb{N}_0$, δείξτε ότι

$$\alpha_n \leq \alpha_0 e^{n\delta} + C\,\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

ii. Αν $\alpha_{n+1} \leq (1+\delta)\alpha_n + \delta\alpha_{n-1} + C$, $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\alpha_n \leq (\alpha_1 + \delta\alpha_0)\, e^{2n\delta} + C\,\frac{e^{2n\delta}-1}{2\delta}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

14. Για $n \in \mathbb{N}$ έστω: $\sigma(n)$ το άθροισμα των θετικών διαιρετών του n, $d(n)$ το πλήθος των θετικών διαιρετών του n και $\varphi(n)$ το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n και πρώτοι με τον n. Δείξτε ότι

p θετικός πρώτος $\iff \sigma(p) + \varphi(p) = p\, d(p)$.

Υπόδειξη: Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε τύπους για τα σ, d και φ.

15. Έστω $(\Delta, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος με $\mathbb{1}$. Αν για κάποιο $a \in \Delta$ υπάρχει μοναδικό $a' \in \Delta$ τέτοιο ώστε $a a' = \mathbb{1}$, δείξτε ότι:

i. $x \in \Delta$, $ax = 0 \implies x = 0$

ii. Το a' είναι αντίστροφο του a.

16. Έστω $\mathbb{T} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$, και $G \subset \mathbb{T}$, G απειροσύνολο.

i. Δείξτε ότι $\mathbb{T}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

ii. Αν το σύνολο G είναι υποομάδα της $\mathbb{T}$, δείξτε ότι το G είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{T}$.

iii. Περιγράψτε όλες τις κλειστές υποομάδες του $\mathbb{T}$.

iv. Δείξτε ότι οι συμπαγείς υποομάδες της πολ/κής ομάδας $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ συμπίπτουν με αυτές που περιγράψατε στο iii.

17. Έστω Ω ένα μη-κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Έστω $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4\, |f'(z)|^2$.

ii. Αν $u(x,y)$, $v(x,y)$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $f(z)$ αντίστοιχα, δείξτε ότι οι μονοπαραμετρικές οικογένειες των καμπυλών $u(x,y) = c_1$ και $v(x,y) = c_2$ είναι ορθογώνιες μεταξύ των.

18. Στον $C[0,1]$ θεωρούμε τις μετρικές ρ_∞, ρ_1,

$$\rho_\infty(f,g) := \max_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)| \qquad f, g \in C[0,1]$$

$$\rho_1(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \qquad f, g \in C[0,1].$$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $T, S : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) := \int_0^1 f(t)\,dt$, $S(f) := f(\frac{1}{2})$. Δείξτε ότι η T είναι συνεχής ως προς τις μετρικές ρ_1 και ρ_∞ και εξετάστε αν αληθεύει αυτό και για την S.

Ως εφαρμογή των ανωτέρω δείξτε το (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό) γεγονός ότι όταν ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$ μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο $[0,1]$ σειρά, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης.

19. Έστω $(H, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος Hilbert πάνω στο $\mathbb{R}$, και $\|v\| := (v,v)^{1/2}$, $v \in H$. Έστω $f : H \to \mathbb{R}$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, και $a : H \times H \to \mathbb{R}$ μία συμμετρική διγραμμική μορφή τέτοια ώστε

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \quad \forall\, u, v \in H \quad |a(u,v)| \leq C\|u\|\,\|v\|$$

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, u \in H \quad a(u,u) \geq c\|u\|^2 .$$

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, v \in H \quad a(u,v) = f(v).$$

20. i. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ στο $[0,2]$.

Για $0 \leq t < 1$ η μοναδική λύση αυτού του προβλήματος είναι $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Συνεπώς δεν υπάρχει λύση στο διάστημα $[0,2]$. Πώς εξηγείται αυτό το γεγονός;

ii. Έστω $u : [0,1] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση τέτοια ώστε $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ $\quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση φ, $\varphi(t) := \int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx$ είναι φθίνουσα.

21. Σε ένα διαγώνισμα δίνονται 10 ερωτήσεις και οι 10 σωστές απαντήσεις αλλά με διαφορετική σειρά. Ένας εξεταζόμενος δεν γνωρίζει ποιά απάντηση αντιστοιχεί σε κάθε ερώτηση και αποφασίζει να απαντήσει στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να δώσει σε μία τουλάχιστον ερώτηση τη σωστή απάντηση; Αν οι ερωτήσεις και οι απαντήσεις ήταν 100 θα άλλαζε <u>πρακτικά</u> η ανωτέρω πιθανότητα;

22. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας f, $f(x) := \begin{cases} a\, e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. Προσδιορίστε:

i. Τη σταθερά a.

ii. Τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Τις πιθανότητες $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(-5 < X \leq 3)$.

23. Έστω $f \in C^2[-1,1]$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $s \in C^2[-1,1]$ η οποία σε κάθε ένα των διαστημάτων $[-1,0]$ και $[0,1]$ είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού 3 τέτοια ώστε

$$s(-1) = f(-1), \quad s(0) = f(0), \quad s(1) = f(1) \quad \text{και} \quad s''(-1) = s''(1) = 0.$$

i. Δείξτε ότι $\int_{-1}^{1} [f''(x)]^2 \, dx = \int_{-1}^{1} [f''(x) - s''(x)]^2 \, dx + \int_{-1}^{1} [s''(x)]^2 \, dx$.

ii. Έστω $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Phi := \{ \varphi \in C^2[-1,1] \; : \; \varphi(-1) = y_0, \; \varphi(0) = y_1, \; \varphi(1) = y_2 \}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία $\psi \in \Phi$ τέτοια ώστε

$$\int_{-1}^{1} [\psi''(x)]^2 \, dx = \inf_{\varphi \in \Phi} \int_{-1}^{1} [\varphi''(x)]^2 \, dx$$

και χαρακτηρίστε αυτήν τη συνάρτηση ψ.