Το διαγωνισμα εχει 23 ερωτηματα. Προφανως, δεν περιμενουμε να τα γραψετε ολα. Απαντηστε σε οσα μπορειτε μεσα σε 4 ωρες με σαφηνεια και πληροτητα, αλλα χωρις περιττες φλυαριες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Δουγαλης

Χ. Κουρουνιωτης

Σ. Παπαδοπουλου

29/7/88

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

29. 7. 88

1. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και x αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, αποδείξτε ότι ο πίνακας $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k}$ έχει το λ^k σαν ιδιοτιμή και το x σαν αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Δώστε παράδειγμα ενός πίνακα A, ενός ιδιοδιανύσματος x του A^k, και ενός ιδιοδιανύσματος του A που δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

2. Σε μια ομάδα G τα στοιχεία a, b ικανοποιούν τη σχέση $ba = a^m b^n$ για κάποια $m, n \in \mathbb{Z}$.

Αποδείξτε ότι τα στοιχεία $a^m b^{n-2}$, $a^{m-2} b^n$, ab^{-1} έχουν την ίδια τάξη

3. Για ενα πρωτο αριθμο $p \neq 2$ θεωρουμε το σωμα $\mathbb{Z}_p$ των ακεραιων mod p.

α) Αποδειξτε οτι μονον οι μισοι απο τους αριθμους $1, 2, \dots, p-1$ ειναι τελεια τετραγωνα στο $\mathbb{Z}_p$.

β) Αποδειξτε οτι υπαρχει ενα αναγωγο πολυωνυμο βαθμου 2 στο $\mathbb{Z}_p[x]$.

4. Αποδειξτε οτι: αν p, q, r ειναι πολυωνυμα βαθμου ≤ 3, τοτε η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}$$

ειναι πολυωνυμο βαθμου ≤ 3.

5. Δινεται ενα πολυωνυμο p με πραγματικους συντελεστες τετοιο ωστε: για καθε $a > 0$ το πολυωνυμο $p + a$ εχει μονο πραγματικες ριζες. Αποδειξτε οτι ο βαθμος του p ειναι ≤ 2.

6. Ενα ευθυγραμμο τμημα ΑΒ εχει μηκος 1. Ενα υλικο σημειο ξεκιναει τη χρονικη στιγμη $t=0$ απο το σημειο Α, διατρεχει το ευθυγραμμο τμημα και φθανει στο σημειο Β τη χρονικη στιγμη $t=1$. Οταν βρισκεται στα σημεια Α και Β, η ταχυτητα του ειναι 0. Αποδειξτε οτι υπαρχει καποιο σημειο του ΑΒ, στο οποιο η απολυτη τιμη της επιταχυνσης του σημειου ειναι ≥ 4.

7. Η συναρτηση $f(x)$, $x \geq 0$, ειναι φθινουσα και $f \geq 0$. Αποδειξτε οτι: εαν υπαρχει το ολοκληρωμα $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, τοτε $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$

8. Δινονται τα τετραγωνικα πολυωνυμα p, q. Το q δεν εχει πραγματικες ριζες. Αποδειξτε οτι: οι τιμες της συναρτησης $\frac{p(x)}{q(x)}$ στις θεσεις τοπικων ακροτατων ειναι ακριβως τα $k \in \mathbb{R}$, για τα οποια το πολυωνυμο $p(x) - k\,q(x)$ ειναι τελειο τετραγωνο. (δηλ. μονο $\Delta = 0$)

9. Η συναρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ εχει συνεχη παραγωγο. Αποδειξτε οτι:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)\,dx \longrightarrow \frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)$$

10. Οι συναρτησεις $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$, ειναι μονοτονες και η ακολουθια (f_n) συγκλινει κατα σημειο σε μια συναρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν η f ειναι <u>συνεχης</u>, αποδειξτε οτι η συγκλιση της ακολουθιας (f_n) ειναι ομοιομορφη.

11. Για καθενα απο τα συνολα A, B εξεταστε αν ειναι ομοιομορφικο με καποιο υποσυνολο του $\mathbb{R}$.

$$A = \{ z\in\mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

$$B = \{ z\in\mathbb{C} : |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q} \}$$

12. Ενας τοπολογικος χωρος του Hausdorff ονομαζεται <u>τοπικα συμπαγης</u>, αν καθε σημειο του εχει μια περιοχη, της οποιας η κλειστοτητα ειναι συμπαγες συνολο. Αποδειξτε οτι ο χωρος $\mathbb{Q}$ των ρητων αριθμων με τη συνηθη τοπολογια δεν ειναι τοπικα συμπαγης.

13. Δινεται ενας χωρος Banach X. Με $B(X)$ συμβολιζουμε το χωρο των φραγμενων τελεστων στον X, στον οποιο οριζουμε τη νορμα $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.

Εστω A το συνολο των αντιστρεψιμων τελεστων στο $B(X)$, δηλαδη

$$A = \{T \in B(X) : \exists \ S \in B(X) \ \text{με} \ ST = TS = I\}$$

(I ειναι ο ταυτοτικος τελεστης).

Αποδειξτε οτι το συνολο A ειναι ανοιχτο στον $B(X)$.

14. Ενας λαγος αρχιζει να τρεχει απο το σημειο $(0,0)$ κατα μηκος του αξονα των y με σταθερη ταχυτητα $a > 0$. Την ιδια στιγμη ενας σκυλος αρχιζει να κυνηγα τον λαγο απο το σημειο $(1,0)$ με ταχυτητα σταθερου μετρου b. Βρειτε την εξισωση της τροχιας του σκυλου και το σημειο οπου ο σκυλος θα πιασει το λαγο αν $b > a$. (Βεβαιωθειτε οτι ο σκυλος δεν θα πιασει ποτε το λαγο, αν $b \leq a$.)

15. Εστω $u(x)$, $x>0$, μια μη τετριμμενη λυση της διαφορικης εξισωσης

$$u''(x) + \frac{k}{x^2}\, u(x) = 0.$$

Αποδειξτε οτι η u εχει απειρο πληθος μηδενικων αν $k > \frac{1}{4}$ και πεπερασμενο πληθος (ή κανενα) αν $k \leq \frac{1}{4}$.

16. Δινεται μια αναλυτικη συναρτηση $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$, $|z| < 2$. Ο περιορισμος της f στο δισκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ειναι 1-1. Αποδειξτε οτι το εμβαδον του συνολου $f(D)$ ειναι

$$\pi \left(|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 + \cdots \right)$$

17. Αποδειξτε οτι υπαρχει ενας αριθμος $\rho \in (1,2)$, τετοιος ωστε η ακολουθια (x_n), $n \geq 0$, που οριζεται με την αναδρομικη σχεση

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 1}{3x_n^2 - 3},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, να συγκλινει στο ρ για καθε αρχικη τιμη $x_0 \in (1,2)$.

18. Η συναρτηση $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $x \geq 0$, ειναι κεντρικης σημασιας στη θεωρια των πιθανοτητων. Αυξανεται μονοτονικα με το x και ειναι γνωστο οτι $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Ειναι επισης γνωστο οτι δεν υπολογιζεται αναλυτικα με τροπο κλειστο που μας ενδιαφερει. Στην ασκηση αυτη μας ενδιαφερει να υπολογισουμε αριθμητικα την τιμη του $F(x)$ ω.χ. για $x = 10$.

α) Ολοκληρωνοντας κατα μελη τη σειρα Taylor της e^{-t^2} αποδειξτε οτι η $F(x)$ παριστανεται σε μορφη δυναμοσειρας ως εξης

$$(*) \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

Αποδειξτε οτι αυτη η δυναμοσειρα συγκλινει για καθε $x \in \mathbb{R}$. Θα ηταν λοιπον λογικο να προσεγγισουμε την $F(x)$ παιρνοντας μερικα αθροισματα των ορων αυτης της σειρας. Γιατί ο τροπος αυτος υπολογισμου, ω.χ. της τιμης $F(10)$, ειναι κακος, οταν οι πραξεις γινονται με αριθμητικη πεπερασμενης ακριβειας, δηλαδη με σφαλματα στρογγυλευσης;

β) Θετοντας $F(x)=e^{-x^2}g(x)$, αποδειξτε οτι η $g(x)$ ικανοποιει το προβλημα αρχικων τιμων

$$(**)\quad \begin{cases} g' = 2xg + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,, & x>0 \\[2ex] g(0)=0 \end{cases}$$

Λυστε το προβλημα (**) εκφραζοντας την $g(x)$ σαν δυναμοσειρα της μορφης $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$. Βρειτε το a_0 και αναδρομικο τυπο για το a_n συναρτησει του a_{n-1}, τον οποιο χρησιμοποιησετε για να βρειτε εναν υπολογιστικα καλο (δικαιολογηση!) αλγοριθμο για τον προσδιορισμο του $F(10)$.

19. Ενα μικροβιο εχει τις εξης δυο δυνατοτητες: να χωρισθει σε δυο νεα μικροβια ή να πεθανει χωρις να αφησει απογονους. Η πρωτη δυνατοτητα εχει πιθανοτητα p.

α) Αν P_n, $n = 2, 3, \ldots$, παριστανει την πιθανοτητα να υπαρχει καποιος απογονος του μικροβιου στη n-οστη γενεα, αποδειξτε οτι

$$P_{n+1} = p\left[1 - (1 - P_n)^2\right]$$

β) Βρειτε την πιθανοτητα να υπαρχουν επ' απειρον απογονοι του μικροβιου

20. Μια μηχανη τιθεται σε λειτουργια καθε πρωϊ. Τη στιγμη αυτη εχει πιθανοτητα $\frac{1}{2}$ να χαλασει. Η μηχανη δεν μπορει-του σε καμμια αλλη φορα.

Μια βιοτεχνια εχει δυο τετοιες μηχανες που τις θετει σε λειτουργια καθε μερα.

α) Ποια ειναι η πιθανοτητα οι δυο μηχανες να χαλασουν την ιδια μερα;

β) Ποια ειναι η πιθανοτητα η μια μηχανη να αντεξει τουλαχιστον 2 μερες περισσοτερο απο την αλλη;

21. Δινεται ενα σημειο O στο επιπεδο και ενας θετικος αριθμος k. Η <u>αντιστροφη</u> (O, k) ειναι η απεικονιση, η οποια σε καθε σημειο A του επιπεδου, διαφορετικο απο το O, αντιστοιχει το σημειο B πανω στην ημιευθεια OA, για το οποιο ισχυει $OB \cdot OA = k^2$.

Εστω (O, k) μια αντιστροφη, που απεικονιζει τον κυκλο ω στον κυκλο ω'. Αν το $A \in \omega$ απεικονιζεται στο $B \in \omega'$, αποδειξτε οτι καθε κυκλος γ, που περνα απο τα A, B, τεμνει τους κυκλους ω, ω' υπο ισες γωνιες. Επισης, αποδειξτε οτι ο γ ειναι αναλλοιωτος ως προς την αντιστροφη.

22. Αποδειξτε οτι δεν υπαρχει ισοπλευρο τριγωνο στο επιπεδο, τετοιο ωστε και οι δυο συντεταγμενες καθε κορυφης του να ειναι ακεραιοι αριθμοι. Ειναι αυτο δυνατο στο χωρο;

23. Γραψτε (οχι περισσοτερο απο μια σελιδα) τι γνωριζετε για το εργο ενος απο τους παρακατω μαθηματικους:

Αρχιμηδης, Euler, Hilbert.