Τα θέματα των εξετάσεων είναι 29. Προφανώς δεν περιμένουμε να τα γράψετε όλα. Απαντείστε σε όσα θέματα μπορείτε. Οι λύσεις σας πρέπει να είναι σαφείς και πλήρεις. Αποφεύγετε τις περιττές πολυλογίες. Διάρκεια Εξετάσεων: 4 ώρες.

Καλή Επιτυχία

Γ. Ακρίβης

Π. Πάμφιλος

Κ. Σκανδάλης

24/7/67

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Μαθηματικό Τμήμα

24-7-87

Εξετάσεις υποψηφίων Μεταπτυχιακών Φοιτητών

1. Έστω O, O' δύο διαμετρικά αντιποδικές κορυφές ενός κύβου. Δείξτε ότι τα μέσα των ~~πλευρών~~ ακμών του κύβου που δεν περιέχουν κανένα από τα σημεία O, O' είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

2. Έστω A και B δύο (διαφορετικά) σημεία ενός κύκλου κ. Υποθέστε ότι ένα τόξο κ' ενός άλλου κύκλου ℓ ενώνει τα A και B και χωρίζει το εσωτερικό του κ σε δύο ισεμβαδικά μέρη. Δείξτε ότι το μήκος του τόξου κ' είναι μεγαλύτερο από το μήκος της διαμέτρου του κ.

3. Θεωρούμε την επιφάνεια $z = xy$.

i. Προσδιορίστε το εφαπτόμενο επίπεδό της στα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.

ii. Προσδιορίστε τις κύριες καμπυλότητες της στο $(0,0,0)$.

iii. Δείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι παντού αρνητική.

4. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο χωρίζουμε τυχαία σε τρία τμήματα. Ποιά είναι η πιθανότητα τα τμήματα αυτά να αποτελούν πλευρές τριγώνου;

5. Έστω ℓ^∞ το σύνολο των πραγματικών φραγμένων ακολουθιών. Για $x, y \in \ell^\infty$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ θέτουμε $\rho(x,y) := \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$.

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο ℓ^1 του ℓ^∞ που ορίζεται ως εξής: $\ell^1 := \{ x \in \ell^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty \}$. Εξετάστε αν ο ℓ^1 είναι ανοικτό, κλειστό ή κανένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (ℓ^∞, ρ).

6. Έστω $(H, (\cdot,\cdot))$ ένας πραγματικός χώρος Hilbert, και M ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Θεωρούμε $x \in H$, $y \in M$. Δείξτε ότι είναι ισοδύναμα:

i. $\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$

ii. $\forall z \in M \quad (y - x, y - z) \leq 0$.

($\forall u \in H \quad \|u\| := (u,u)^{1/2}$).

7. Έστω $(H, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος Hilbert, και $T : H \to H$ ένας φραγμένος αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| .$$

8. i. Αν οι θετικοί ακέραιοι n, m διαιρούμενοι διά του 28 δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 3 και 2, δείξτε ότι ο αριθμός $2^n + 3^m + 12$ είναι διαιρετός διά του 29.

ii. Προσδιορίστε (όχι με δοκιμές!) τους δύο (μοναδικούς) ακέραιους a, b οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες

$$a>b>100, \quad ab = 84672, \quad \text{ΕΚΠ}(a,b) = 7056.$$

9. Δείξτε ότι για $n>2$ το κέντρο της συμμετρικής ομάδας S_n είναι η $\{e\}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιείστε το ότι κάθε $\sigma \in S_n$ γράφεται σαν γινόμενο ξένων κυκλικών μεταθέσεων.

10. Έστω p πρώτος. Θεωρούμε το σύνολο A_p των ακολουθιών ακεραίων της μορφής

$$(x_n) = (a_0,\ a_0+a_1 p,\ a_0+a_1 p+a_2 p^2,\ \dots),$$

όπου $0 \le a_i < p$. Δείξτε ότι:

i. $(x_n)\equiv(y_n)$ όταν $x_n \equiv y_n \mod p^{n+1}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A_p.

ii. Το σύνολο των κλάσεων αποτελεί δακτύλιο $\mathcal{D}$ ως προς τις κατά όρο πράξεις.

iii. Στον $\mathcal{D}$ η $[(x_i)]$ είναι αντιστρέψιμη, τότε και μόνον τότε αν $x_0 \not\equiv 0 \mod p$.

11. Προσδιορίστε μιά συνάρτηση $y \in C^1[0,\infty)$ τέτοια ώστε

$$y''(x)+y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

12. Έστω $-\infty<a<b<\infty$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, και $y, z \in C^2[a,b]$ τέτοια ώστε

$$x\,y''(x) + y'(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad a \le x \le b$$

$$x\,z''(x) + z'(x) + \mu\, z(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

και $y(a)=y(b)=z(a)=z(b)=0.$

Δείξτε ότι $\displaystyle\int_a^b y(t)\, z(t)\, dt = 0$.

13. Προσδιορίστε μιά αναλυτική συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_x(x,t) + 1 & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

14. Έστω $X := \{ u \in C[0,2] : u(x) = \dfrac{\alpha + \beta x}{1 + \gamma x} \}$, $x_k := k$, $k = 0, 1, 2$, και $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ποιά σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, έτσι ώστε το πρόβλημα παρεμβολής

$$u \in X \qquad u(x_k) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2,$$

να λύνεται μονοσήμαντα;

15. Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου Legendre βαθμού n. Αν ℓ_k, $k = 1, \dots, n$, είναι τα πολυώνυμα Lagrange ως προς $x_1, \dots, x_n$, $\ell_k(x) := \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{x - x_i}{x_k - x_i}$, δείξτε ότι

$$\int_{-1}^{1} \ell_k(x)\, dx = \int_{-1}^{1} [\ell_k(x)]^2\, dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

16. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$I_n := \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx.$$

i. Δείξτε ότι η ακολουθία $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

ii. Για τα I_n ισχύει

$$I_n = (-1)^{n+1} n! \left\{ \frac{1}{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right\}.$$

Για σταθερό n υπολογίζουμε το I_n ως εξής: Υπολογίζουμε τα

$$s_{-1} := \frac{1}{e},$$

$$s_k := s_{k-1} - \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

και στη συνέχεια το I_n δια

$$I_n = (-1)^{n+1}\, n!\, s_n .$$

Είναι ο τρόπος αυτός κατάλληλος για τον υπολογισμό του I_n όταν οι πράξεις γίνονται σε έναν υπολογιστή με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας;

iii. Προσδιορίστε έναν αναδρομικό τύπο για να δίνει το I_k συναρτήσει του I_{k-1} (υπολογίστε αναλυτικά το I_1). Είναι ο τύπος αυτός κατάλληλος (δηλ. ευσταθής) για τον υπολογισμό του I_n στον υπολογιστή;

17. Έστω A, B πραγματικοί $n \times n$ πίνακες, τέτοιοι ώστε $A^{n-1} \neq 0$, $B^{n-1} \neq 0$, και $A^n = B^n = 0$.

Δείξτε ότι:

i. Υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\{x, Ax, \ldots, A^{n-1}x\}$, $\{y, By, \ldots, B^{n-1}y\}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^n$.

ii. Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

18. Έστω V ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως και $S : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

i. Δείξτε ότι

$$\operatorname{Im} S \cap \ker S = \{0\} \iff (SSv = 0 \Rightarrow Sv = 0).$$

ii. Δώστε V και S τέτοια ώστε

$$\ker S = \operatorname{Im} S.$$

iii. Υπάρχει για κάθε V μια S τέτοια ώστε

$$\ker S = \operatorname{Im} S.$$

19. Υπολογίστε το συντελεστή του x^{n-2} του πολυωνύμου p_n,

$$p_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix}.$$

20. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{1+z^2}{z\,|4+z^2|}\, dz \right| < 3.$$

21. i. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα: Για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ και για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ υπάρχει $z \in \{ t z_1 + (1-t) z_2 : t \in [0,1] \}$ τέτοιο ώστε

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) f'(z).$$

ii. Για ποιά $z \in \mathbb{C}$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \, ;$$

22. Έστω $x \in (0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μια ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$2 \le n_1 \le n_2 \le n_3 \le \cdots,$$

και

$$x = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + \cdots.$$

23. Έστω $f\in C^2(\mathbb{R})$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\alpha)\neq 0$.
Για κάθε $h\in\mathbb{R}$ υπάρχει (ως γνωστόν) ένα $\vartheta(h)\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha+h)-f(\alpha)=h\,f'(\alpha+\vartheta(h)\,h)$.

Αποδείξτε ότι:

i. Υπάρχει ένα $\delta>0$ έτσι ώστε: Για κάθε h με $|h|<\delta$ υπάρχει ακριβώς ένα $\vartheta(h)$ με την ανωτέρω ιδιότητα.

ii. $\lim\limits_{h\to 0}\vartheta(h)=\frac{1}{2}$.

24. Έστω $f\in C[0,\infty)$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}\,dx.$$

25. Για $\alpha\in\mathbb{R}$ ορίζουμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διά:

$$\begin{cases} x_1 := \alpha \\ x_{n+1}-2x_n = 2^n, & n\geq 1. \end{cases}$$

Προσδιορίστε το γενικό όρο x_n συναρτήσει των n και α.

26. Προσδιορίστε $y\in C[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$y(x)=1+\int_0^1(60xt^2+12x^2t)\,y(t)\,dt,\quad 0\leq x\leq 1.$$

27. Έστω $k\in\mathbb{N}$.

i. Πόσες είναι οι διατεταγμένες n-άδες μη αρνητικών ακεραίων $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ για τις οποίες ισχύει $\alpha_1+\dots+\alpha_n=k$.

ii. Προσδιορίστε τη διάσταση του γραμμικού χώρου $\mathbb{P}_{k,n}$ των πολυωνύμων n μεταβλητών συνολικού βαθμού το πολύ k.

28. Έστω $\langle T, \prec \rangle$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο, και $(F_t)_{t\in T}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$t \prec s \Rightarrow F_t \supsetneq F_s .$$

Αποδείξτε ότι το T είναι αριθμήσιμο.

29. i. Αποδείξτε ότι σε κάθε μη κενό αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχει μεμονωμένο σημείο.

ii. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ ένας τρόπος να εκφρασθεί το F σαν ένωση δύο ξένων συνόλων $F = T \cup A$, όπου το T είναι τέλειο (ή κενό) και το A είναι αριθμήσιμο.