Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Μαθηματικά και Εφαρμογές τους»

Μεταπτυχιακή εργασία

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ:
ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΣ ΣΥΝΤΟΜΑ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΝΤΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Εμμανουήλ Τζιρίτας του Ιωάννου

Επιβλέπων Καθηγητής

Χρήστος Κουρουνιώτης

Ηράκλειο, Φεβρουάριος 2011

University of Crete

Faculty of Sciences and Engineering

Interdepartmental Program of Postgraduate Study

"Mathematics and their Applications"

Master Thesis

ANALYTIC GEOMETRY:
A SHORT REVIEW OF ITS DEVELOPMENT AND A DIDACTIC APPROACH TO ITS INSTRUCTION IN THE GREEK UPPER HIGH SCHOOL (LYKEION)

Emmanouil I. Tziritas

Supervisor

Christos Kourouniotis

Heraklion, February 2011

Η παρούσα μεταπτυχιακή πραγματοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Κρήτης την περίοδο 2010-2011, στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» και υπεβλήθη το Φεβρουάριο του 2011.

Την επιτροπή αξιολόγησης της παρούσας εργασίας αποτέλεσαν οι:

Κουρουνιώτης Χρήστος (επιβλέπων)

Λάμπρου Μιχαήλ

Τζανάκης Κωνσταντίνος

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρήστο Κουρουνιώτη, όχι μόνο για την καθοδήγηση και την ουσιαστική επιστημονική βοήθεια που μου παρείχε, αλλά και για την υπομονή που επέδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Μιχαήλ Λάμπρου και κ. Κωνσταντίνο Τζανάκη τόσο για τις συμβουλές τους, όσο και γιατί με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου. Αισθάνομαι ιδιαίτερη ανάγκη να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Ελένη και τα παιδιά μου Δημήτρη και Σοφία, για την βοήθεια και την κατανόηση που επέδειξαν όλο αυτό το χρονικό διάστημα. Τέλος ευχαριστώ την Πόπη και τον Μανόλη για τις χρήσιμες συμβουλές τους.

Φεβρουάριος 2011

Εμμανουήλ Τζιρίτας

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αρχικά επιχειρείται συνοπτική περιγραφή της θεμελίωσης και εξέλιξης της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στη συνέχεια και μέσα από την εξέταση διδακτικών εγχειριδίων, περιγράφεται η εισαγωγή της Αναλυτικής Γεωμετρίας ως αντικείμενο Εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Τις τέσσερις τελευταίες δεκαετίες η πρώτη επαφή των μαθητών με το αντικείμενο αυτό πραγματοποιείται στο Λύκειο. Στο πλαίσιο της προσπάθειας να διερευνηθεί ο βαθμός κατανόησης του νέου αυτού αντικειμένου, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε μαθητές της Β΄ Λυκείου (έρευνα δράσης), η οποία αποτελεί και το βασικό στόχο της μελέτης αυτής, με βάση την οποία αποδεικνύεται ότι υπάρχουν προβλήματα που σχετίζονται με την κατανόηση των εννοιών (ευθεία, κωνικές τομές), αλλά και του πλαισίου διαπραγμάτευσής τους. Τα βασικά προβλήματα που εμφανίζονται είναι στη σύνδεση των λύσεων της εξίσωσης μιας γραμμής με τα σημεία της γραμμής, καθώς επίσης και στις αναγκαίες μετατροπές των αναπαραστάσεων των εννοιών που πραγματοποιούνται στο σύνθετο αυτό πλαίσιο. Σε μία σύντομη διδακτική παρέμβαση (μια διδακτική ώρα) επιχειρήθηκε να διορθωθούν τα προβλήματα αυτά, διαχωρίζοντας τα πλαίσια αναπαράστασης των εννοιών (ορισμός, εξίσωση, σχήμα), δίνοντας τους απαραίτητους συνδέσμους μεταξύ των πλαισίων αναπαράστασης και εκπαιδεύοντας τους μαθητές στις μετατροπές των εννοιών. Οι παραπάνω δράσεις βελτίωσαν, σε ένα βαθμό, τις επιδόσεις των μαθητών στο χειρισμό των εννοιών στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Λέξεις κλειδιά: Αναλυτική Γεωμετρία, αναπαραστάσεις, εξισώσεις ευθείας – κύκλου – κωνικών τομών, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, συναρτήσεις.

Abstract

The present study begins with a concise description of the foundation and the development of Analytic Geometry. The introduction of Analytic Geometry as an object of education in Greece is then described, through the investigation of instructive handbooks. During the last four decades the students' first contact with this subject takes place in the Lykeion (upper high school). In an attempt to investigate the level of comprehension of this new subject, a research (action research) was undertaken with 11^{th} grade students from two schools (Lykeion) in Greece. This constitutes the main objective of this study. It is shown that there exist problems related to the comprehension of concepts (straight line, conic sections), but also with the frame of their negotiation. The basic problems presented are in the connection of solutions of the equation of a line with the points of the line, as well as in the necessary transformations of representations of concepts that are effected in this complex framework. In a short intervention (45 minutes) it was attempted to correct these problems, separating the frames of representation of concepts (definition, equation, shape), giving the essential contacts between the frames of representation and educating the students in the transformations of concepts. The intervention improved, to some extent, the ability of the students to handle concepts in the frame of Analytic Geometry.

Keywords: Analytic Geometry, representations, equations of straight line – circle – conic sections, Cartesian coordinate system, functions.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η εισαγωγή των μαθητών στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας ή Γεωμετρίας των συντεταγμένων, όπως αναφέρεται τελευταία, γίνεται τις τελευταίες δεκαετίες στο Λύκειο. Την τελευταία δεκαετία η εισαγωγή αυτή πραγματοποιείται στην Β΄ τάξη. Μετά από την εισαγωγή στο διανυσματικό λογισμό, το αντικείμενο της μελέτης είναι η ευθεία, ο κύκλος και οι κωνικές τομές. Η ευθεία και ο κύκλος ως γεωμετρικά μαθηματικά αντικείμενα είναι γνωστά από πριν στους μαθητές. Όμως οι κωνικές τομές είναι ουσιαστικά καινούργια γεωμετρικά αντικείμενα, αφού η παραβολή και η υπερβολή, που έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου, μελετήθηκαν ως γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χωρίς καμία αναφορά σε γεωμετρικό ορισμό των εννοιών. Η όλη προσπάθεια συνίσταται στον εφοδιασμό του επιπέδου με ένα σύστημα αξόνων, το οποίο εφοδιάζει τα σημεία με συντεταγμένες, και τις γραμμές με εξισώσεις. Εγείρονται διάφορα ερωτήματα σε σχέση με την προσπάθεια αυτή. Ένα πρώτο ερώτημα σχετίζεται με τη θεμελίωση του καινούργιου πλαισίου. Γίνεται σαφές στους μαθητές ότι ο εφοδιασμός του επιπέδου με ένα σύστημα συντεταγμένων, μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε τις γεωμετρικές έννοιες μέσα από αλγεβρικές εξισώσεις; Τι σχέση έχουν, για τους μαθητές, οι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης με τα σημεία του σχήματος; Πόσο ικανοί είναι να επεξεργάζονται το σχήμα και την εξίσωση; Μπορούν, για τις έννοιες που διαπραγματεύονται, με ευκολία να μετατρέπουν τη μια αναπαράσταση της έννοιας σε μια άλλη αναπαράσταση της ίδιας έννοιας (ορισμός, εξίσωση, σχήμα); Ποιες είναι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν προχωρούν σε τέτοιου είδους μετατροπές; Η έννοια της συνάρτησης εμπλέκεται άμεσα (τουλάχιστον διδακτικά αφού για παράδειγμα η ευθεία διδάσκεται ως γραφική παράσταση συνάρτησης στην Α΄ Λυκείου) στη μελέτη των παραπάνω εννοιών. Έχει γίνει η απαιτούμενη σύνδεση, αλλά και η αξιοποίηση της έννοιας αυτής, στο βαθμό που αυτή έχει κατανοηθεί από τους μαθητές, στη μελέτη των εννοιών αυτών;

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται, κατ’ αρχή, συνοπτική παρουσίαση της θεμελίωσης και εξέλιξης της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ουσιαστικά η περιγραφή των ιστορικών γεγονότων ξεκινάει από τον Descartes. Περιγράφονται τα ιστορικά γεγονότα, που διαδραματίστηκαν σε χρονικό διάστημα δύο αιώνων περίπου, τα οποία συνδέονται με την θεμελίωση και ανάπτυξη του συγκεκριμένου μαθηματικού κλάδου, εστιάζοντας περισσότερο σε θέματα που αφορούν τις μεθόδους, όπως αναπτύχθηκαν διαχρονικά, αλλά και τη συνάφεια των μαθηματικών αντικειμένων, με τα αντικείμενα που σχετίζονται με την παρούσα εργασία.

Στη δεύτερη ενότητα περιγράφεται η εισαγωγή της Αναλυτικής Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα. Για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από τα βιβλία που διδάχτηκαν ή διδάσκονται ακόμα, επιχειρείται προσέγγιση του αντικειμένου μελέτης των μαθητών τις τελευταίες δεκαετίες, σε σχέση με το θέμα αυτό. Για την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, πάλι μέσα από τα βιβλία, γίνεται προσπάθεια να σκιαγραφηθούν οι πρώτες προσπάθειες εισαγωγής του αντικειμένου. Οι προσπάθειες αυτές έγιναν στο τέλος του $18^{ου}$ αιώνα και τον $19^{ο}$ αιώνα. Από τις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα και μετά, η Αναλυτική Γεωμετρία διδάσκεται συστηματικά στα Πανεπιστήμια της Ελλάδας.

Στην τρίτη ενότητα επιχειρείται περιγραφή τεσσάρων από τις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί και σχετίζονται με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Κατ' αρχήν, αναπτύσσονται οι απόψεις των David Tall και Shlomo Vinner (1981) αναφορικά με τις «*εννοιολογικές εικόνες και στους εννοιολογικούς ορισμούς*» που αναπτύσσει το άτομο για ένα μαθηματικό αντικείμενο. Στη συνέχεια περιγράφεται ο *δυισμός διεργασίας — αντικειμένου* και η θεωρία της *υποστασιοποίησης* στα Μαθηματικά, με πηγή πληροφόρησης τις εργασίες της Sfard (1991) και των Sfard και Linchevski (1994). Επίσης γίνεται αναφορά στη θεωρία APOS (*action, process, object, schema*) ή (*δράση, διεργασία, αντικείμενο, σχήμα*) του Dubinsky (1991) και των συνεργατών του. Τέλος περιγράφεται η *οντο-σημειωτική* προσέγγιση στη γνώση και τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών των Godino — Batanero — Font (2007), Font — Godino — D' Amore (2007) και των Font — Contreras (2008). Όλες οι παραπάνω προσεγγίσεις έχουν ως σκοπό να ερμηνεύσουν, τον τρόπο που το άτομο αντιλαμβάνεται τις μαθηματικές έννοιες, τις δομεί και αναπτύσσει ικανότητα χειρισμού τους. Αναπτύσσουν πλήθος μεθοδολογικών εργαλείων που είναι χρήσιμα στη διερεύνηση της κατανόησης-χρήσης των εννοιών από τους μαθητές, αλλά και στο σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων για θεραπεία τυχόν προβλημάτων που σχετίζονται με την κατανόηση-χρήση των εννοιών. Συμπληρώνοντας το θεωρητικό πλαίσιο, παρουσιάζονται οι απόψεις διαφόρων επιστημόνων για τις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων. Πιο συγκεκριμένα γίνεται ειδική αναφορά στις σημειωτικές αναπαραστάσεις, αλλά και στις απόψεις των υποστηριχτών της οντο-σημειωτικής προσέγγισης για τις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων.

Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα περιγράφεται η έρευνα που έγινε στους μαθητές της Β΄ Λυκείου, με αντικείμενο την κατανόηση των εννοιών που διδάσκονται στο πλαίσιο του μαθήματος «Μαθηματικά Κατεύθυνσης» και ειδικά τη μελέτη της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών. Ειδικά έγινε προσπάθεια να απαντηθούν τα ερωτήματα που τέθηκαν στην πρώτη παράγραφο της εισαγωγής. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε λέγεται έρευνα δράσης. Στο πλαίσιο αυτής της μεθόδου αφού προσδιορίστηκε η ταυτότητα των προβλημάτων, αναγνωρίστηκαν τα προβλήματα μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών σε ένα ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας, αλλά και μέσα από αποτελέσματα σχετικών εργασιών. Στη συνέχεια, αφού κατασκευάστηκε ένα γενικό πλάνο, σχεδιάστηκε μια ωριαία διδακτική παρέμβαση που είχε στόχο τη θεραπεία των παραπάνω προβλημάτων. Τέλος, αξιολογήθηκε η αποτελεσματικότητα της παρέμβασης αυτής μέσω ενός δεύτερου ερωτηματολογίου — φύλλου εργασίας. Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο παρατηρήθηκε μεταστροφή (σε μικρό ή μεγάλο ποσοστό) των απόψεων των μαθητών σε κάποια από τα θέματα που μας απασχόλησαν, ενώ σε άλλα παρατηρήθηκε στασιμότητα. Έγινε προσπάθεια να ερμηνευτεί η συμπεριφορά αυτή με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που αναφέρεται στην τρίτη ενότητα, αλλά και τα αποτελέσματα συναφών εργασιών που έχουν εκπονηθεί. Επίσης, μέσα από την εμπειρία αυτή, προέκυψαν διάφορες προτάσεις που πιθανά είναι χρήσιμες για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.

1. Επισκόπηση της εξέλιξης της Αναλυτικής Γεωμετρίας

Μια πλήρης περιγραφή των προσπαθειών που κατέβαλαν οι Μαθηματικοί για τη θεμελίωση και ανάπτυξη του κλάδου της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ξεφεύγει από τα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας. Για το λόγο αυτό, επιχειρείται η περιγραφή των προσπαθειών κάποιων Μαθηματικών που συνεισέφεραν στην ανάπτυξη του κλάδου, χωρίς καμία πρόθεση για υποβάθμιση της συνεισφοράς των υπόλοιπων. Δύο είναι τα βασικά κριτήρια επιλογής των μαθηματικών αντικειμένων που περιγράφονται. Το πρώτο είναι η παρουσίαση των μεθόδων της Αναλυτικής Γεωμετρίας, όπως αναπτύχθηκαν διαχρονικά και το δεύτερο η συνάφεια των μαθηματικών αντικειμένων που επιλέχθηκαν με τα μαθηματικά αντικείμενα που σχετίζονται με την παρούσα εργασία.

Υπάρχει ένα βασικό ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί, πριν ξεκινήσει αυτή η σύντομη ιστορική αναφορά σ' αυτόν τον κλάδο των μαθηματικών. Τι ακριβώς εννοούμε, όταν αναφέρουμε τις λέξεις «Αναλυτική Γεωμετρία». Ο Forbes (1977) αναφέρει ότι σύμφωνα με την άποψη του Gunther (1877), υπάρχουν τρία διαχωρισμένα μεταξύ τους νοητικά στάδια, τα οποία έπρεπε εξελικτικά να επιτευχθούν για να μπορούμε να μιλάμε για ύπαρξη αυτού του κλάδου των μαθηματικών. Τα τρία αυτά στάδια είναι:

- Ο προσδιορισμός της θέσης πάνω σε μια επιφάνεια με αναφορά σε δύο άξονες.
- Η γραφική αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής.
- Η ανακάλυψη ενός κανόνα, ή μιας αλγεβρικής εξίσωσης που αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική καμπύλη.

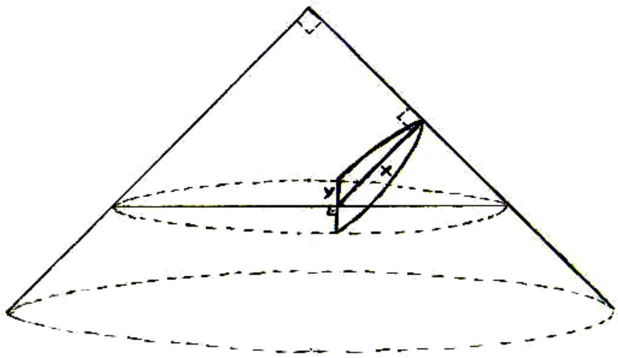
Παρόμοια περιγράφει την παραπάνω θέση και ο Coolidge (1936) και προσθέτει ότι κατά τον Gunther, όταν βρίσκουμε ένα παράδειγμα από το τρίτο στάδιο, χωρίς τα άλλα δύο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε ένα περίσσευμα εξυπνάδας από τη μεριά του συγγραφέα, αλλά όχι να θεωρείται ότι αυτό είναι Αναλυτική Γεωμετρία.

1.1. Πριν από τον Descartes

Ο Coolidge (1936) δεν αποδέχεται την παραπάνω άποψη και προσπαθεί να τεκμηριώσει τη θέση, ότι ο θεμελιωτής της Αναλυτικής Γεωμετρίας δεν είναι ο Descartes. Στην προσπάθεια του αυτή αναφέρεται, στη δημιουργία συστήματος συντεταγμένων για την ουράνια σφαίρα από τον Ίππαρχο και τη γραφική αναπαράσταση κανόνων μεταξύ της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής από τον Nicholas Oresme (14^{o} αιώνας). Παρατηρεί δε, ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί η καταγωγή της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τα δύο πρώτα στάδια.

Η θέση που παίρνει είναι ότι, η ουσία της επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι η μελέτη των γεωμετρικών τόπων, μέσα από τη μελέτη των εξισώσεων τους. Επισημαίνει δε, ότι αυτού του είδους η προσέγγιση ήταν γνωστή στους Έλληνες και αποτελούσε βάση για τη μελέτη των κωνικών τομών. Για να τεκμηριώσει την παραπάνω θέση αναφέρει, μεταξύ άλλων, και ένα μέρος από το επιστημονικό έργο του Μέναιχμου.

Το πρόβλημα που απασχόλησε το Μέναιχμο, ήταν ο διπλασιασμός του κύβου (Δήλιο πρόβλημα) και μια μικρή γενίκευσή του, που περιλαμβάνει την παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δοσμένων αριθμών. Ο διπλασιασμός του κύβου επιτυγχάνεται με την παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων μεταξύ των αριθμών a και $2a$, όπου a είναι η πλευρά του κύβου του οποίου ο όγκος ζητείται να διπλασιαστεί. Το πρόβλημα αυτό οδηγεί στις εξισώσεις $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, άρα και στην εξίσωση $x^3=2a^3$. Ενώ η γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, με a και b τους δύο δοσμένους αριθμούς, οδηγεί στις εξισώσεις $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, άρα και στις εξισώσεις $x^2=ay$, $y^2=bx$, $xy=ab$, $x^2+y^2-ax-by=0$. Καθώς ο Μέναιχμος δεν ήξερε τίποτε από Άλγεβρα, αντιλαμβάνονταν όλα αυτά γεωμετρικά και είχε προσπαθήσει να βρει τι είδους καμπύλες αντιστοιχούν σ' αυτές τις εξισώσεις (ενδεχομένως σχέσεις για το Μέναιχμο). Σύμφωνα με τον Coolidge (1936) ο Μέναιχμος έλυσε το πρόβλημα, βρίσκοντας τις τομές του κύκλου και της παραβολής που προκύπτουν από τις αρχικές εξισώσεις (για παράδειγμα ο κύκλος $x^2+y^2-ax-2ay=0$ και η παραβολή $y^2=2ax$). Όμως πώς προσδιόρισε ότι η σχέση $y^2=2ax$ παριστάνει παραβολή; Η παραβολή είναι μια επίπεδη καμπύλη, που προκύπτει από την τομή ορθογώνιου κώνου (η γωνία της κορυφής του κώνου είναι ορθή) με επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρα του κώνου. Αν πάρουμε τον άξονα συμμετρίας της παραβολής ως τον x-άξονα, οι τεταγμένες y μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι κάθετες σ' αυτόν. Τότε y^2 είναι η δύναμη του σημείου $(x,0)$ ως προς τον κύκλο, που προκύπτει από τομή ενός επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(x,0)$ και είναι κάθετο στο ύψος του κώνου, με τον κώνο. Εκφράζοντας τη δύναμη του σημείου, με όρους ευθυγράμμων τμημάτων της διαμέτρου του κύκλου που διέρχεται από το σημείο, και με χρήση αναλογιών που προκύπτουν από ομοιότητα τριγώνων, θα βρούμε την εξίσωση $y^2 = 2mx$.



Σχήμα 1: Η εύρεση της εξίσωσης της παραβολής

Ο van der Waerden (1961, σελ. 283) επισημαίνει ότι «ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος και οι περισσότεροι αρχαίοι συγγραφείς εκφράζουν τις κωνικές τομές συστηματικά μέσω των «συμπτωμάτων», δηλαδή μέσω των εξισώσεων, που συχνά αναφέρονται σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, αλλά μερικές φορές επίσης σε πλαγιογώνιο».

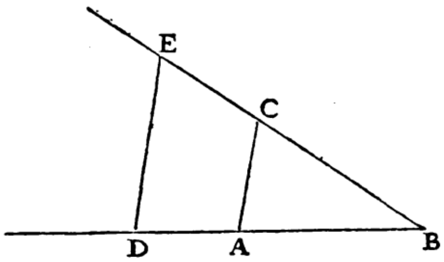
Τέλος, σύμφωνα με τον Bell (1965, $1^{ος}$ τόμος, σελ. 7), ο Descartes ήταν ο άνθρωπος που αποκρυστάλλωσε τη μέθοδο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αν και στη συνέχεια δηλώνει ότι δε θέλει να πει ότι η Αναλυτική Γεωμετρία ξεπήδησε σε όλη της την ορμή από το κεφάλι του Descartes. Πολλοί πριν απ’ αυτόν είχαν κάνει σημαντικά βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση (θέση με την οποία συμφωνεί και ο Forbes (1977)), αλλά αυτός ήταν που έκανε το τελικό βήμα, καθιστώντας τη μέθοδο κατάλληλο εργαλείο της γεωμετρικής απόδειξης, ανακάλυψης και επινόησης. Αλλά ακόμη και ο Descartes πρέπει να μοιραστεί την τιμή αυτή με τον Fermat.

Επειδή η αναζήτηση των ριζών της Αναλυτικής Γεωμετρίας δεν είναι το αντικείμενο της παρούσας μελέτης, η περιγραφή των ιστορικών γεγονότων θα αρχίσει από τον κορυφαίο Γάλλο μαθηματικό René Descartes (1596-1650).

1.2. Descartes

Όπως αναφέρουν οι Boyer και Merzbach (1989, κεφάλαιο 17), ο Descartes είχε επαναστατικές απόψεις όσον αφορά τη Φιλοσοφία και τη Φυσική. Όσον αφορά τα Μαθηματικά συνέχισε την παράδοση, η οποία επέβαλε την επιστροφή στο παρελθόν, που έφερε ως αποτέλεσμα την Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία ήταν η βασική συνεισφορά του Descartes στα Μαθηματικά. Με αφορμή το πρόβλημα των τεσσάρων ευθειών του Πάππου, ο Descartes εφάρμοσε τις νέες μεθόδους του, έλυσε το πρόβλημα με ευκολία, συνειδητοποίησε τη δύναμη και τη γενικότητα της μεθόδου του και στη συνέχεια έγραψε το διάσημο έργο του «La Géométrie» (τρία βιβλία), το οποίο έκανε την Αναλυτική Γεωμετρία γνωστή της σύγχρονους του. Το La Géométrie εμφανίστηκε το 1637 ως παράρτημα σε μια μεγαλύτερη και γνωστότερη φιλοσοφική εργασία με τίτλο: «Discours de la Méthode pour Bien Conduire Sa Raison, et Chercher la Verité dans les Sciences».

Όμως τι γράφει ο ίδιος ο Descartes στο έργο του La Géométrie; Ο στόχος του Descartes (1637) αναφέρεται στην πρώτη φράση του πρώτου βιβλίου: «Κάθε πρόβλημα της Γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθυγράμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή (της λύσης) του» (σελ. 2). Αμέσως μετά ασχολείται με την αντιστοίχηση των πέντε αριθμητικών πράξεων (πρόσθεση-αφαίρεση- πολλαπλασιασμό- διαίρεση- εξαγωγή ρίζας) με απλές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη, δικαιολογώντας έτσι την εισαγωγή αριθμητικών όρων στη Γεωμετρία. Στο παράδειγμα για τον πολλαπλασιασμό λέει: αν πάρουμε σαν μονάδα το AB και απαιτείται να πολλαπλασιάσουμε το BD με το BC, τότε αρκεί να ενώσουμε τα σημεία A και C και να φέρουμε την DE παράλληλη στην CA, τότε το BE είναι το γινόμενο των BD και BC (σελ. 5 στη μετάφραση και σελ. 298 στο πρωτότυπο).

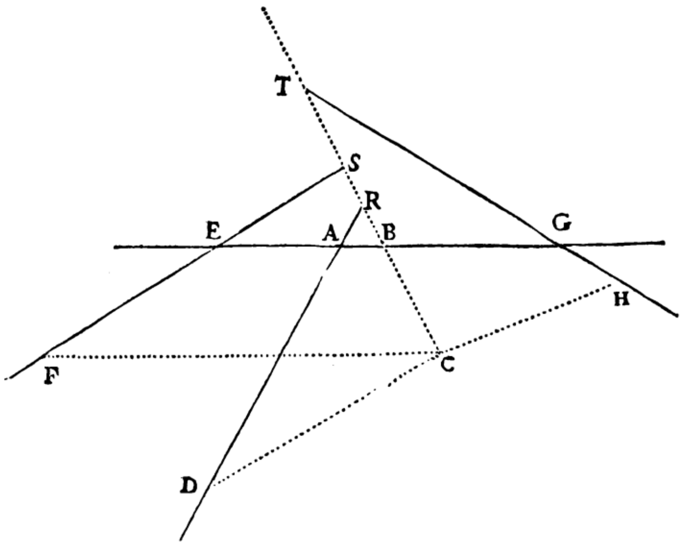


Σχήμα 2: Ο πολλαπλασιασμός ευθυγράμμων τμημάτων (La Géométrie, 1637)

Έτσι, σύμφωνα με τον Coolidge (1940, σελ. 126), ο Descartes έκανε ένα πελώριο βήμα μπροστά απελευθερώνοντας τον εαυτό του από την πρόληψη της ομοιογένειας (π.χ. στην εξίσωση $x^3+3ax=b$ το a θεωρείται επίπεδο και το b στερεό) και τις διακρίσεις μεταξύ γραμμικών, επίπεδων και στερεών μεγεθών. Δηλαδή η έκφραση x^2 δεν είναι απαραίτητα το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς x, αλλά ο τέταρτος όρος της αναλογίας $1:x=x:x^2$.

Οι Boyer και Merzbach (1989, σελ. 377) σημειώνουν ότι ξέφυγε από την ελληνική παράδοση που θεωρούσε ότι το x^3 παριστάνει όγκο, ταυτόχρονα όμως διατήρησε τη γεωμετρική σημασία των πράξεων, όπως θα δούμε παρακάτω, σε αντίθεση με τον Viète που υποστήριζε σ' όλα τα έργα του την αρχή της ομοιογένειας.

Ο Descartes (1637) χρησιμοποίησε μια νέα μέθοδο για τη λύση του προβλήματος του Πάππου. Η διατύπωση της πρότασης βρίσκεται στη σελίδα 325 του δεύτερου βιβλίου (ή στη σελίδα 60 της μετάφρασης). Συγκεκριμένα θεωρεί τέσσερις συνεπίπεδες ευθείες AB, AD, EF, GH και τέσσερις γωνίες. Ψάχνει το γεωμετρικό τόπο των σημείων C του επιπέδου έτσι ώστε, αν τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα CB, CD, CF, CH σχηματίζουν τις δοσμένες γωνίες με τις τέσσερις ευθείες, το γινόμενο των CB και CF να ισούται με το γινόμενο των CH και CD (Ο van der Waerden (1961, σελ. 276), διατυπώνει το πρόβλημα του Πάππου διαφορετικά αλλά ισοδύναμα. Συγκεκριμένα αναφέρεται σε αποστάσεις του σημείου από τις τέσσερις ευθείες, δηλαδή θεωρεί όλες τις γωνίες ορθές και τα γινόμενα δεν είναι απαραίτητα ίσα, αλλά ο λόγος των γινομένων είναι σταθερός). Στη συνέχεια προχωρεί στη λύση και διερεύνηση του προβλήματος. Ο τρόπος που διαπραγματεύτηκε την εύρεση της εξίσωσης είναι ο παρακάτω (ένα μέρος των παρακάτω ενεργειών, ο Descartes (1637) τις κάνει στο πρώτο κεφάλαιο, αμέσως μετά τη διατύπωση της παραπάνω πρότασης στη γενική της μορφή δηλαδή όταν έχουμε οποιοδήποτε πλήθος ευθειών (σελ. 26-27):



Σχήμα 3: Το πρόβλημα του Πάππου (La Géométrie, 1637)

Ο Descartes (1637) θέτει $AB = x$ και $BC = y$, θεωρώντας στην ουσία μόνο την AB ως άξονα, αφού το BC στη γενική περίπτωση ανήκει σε παράλληλες ευθείες για τις διάφορες θέσεις του C στο επίπεδο. Λέει ότι οι γωνίες του τριγώνου ARB είναι γνωστές, άρα ο λόγος των πλευρών AB και BR είναι γνωστός, οπότε θέτει $AB : BR = z : b$. Άρα έχουμε $RB = \frac{bx}{z}$ και $CR = y + \frac{bx}{z}$ (αν το R είναι μεταξύ των C και B τότε $CR = y - \frac{bx}{z}$ και αν το C είναι μεταξύ των B και R τότε $CR = -y + \frac{bx}{z}$). Επίσης οι γωνίες του τριγώνου DRC είναι γνωστές, άρα και ο λόγος των πλευρών CR και CD είναι γνωστός και θέτει $CR : CD = z : c$ (μπορεί να το κάνει αφού υπάρχει c έτσι ώστε ο γνωστός λόγος να είναι ίσος με τον $z : c$). Άρα $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2} = \frac{zcy + bcx}{z^2}$ αφού $CR = y - \frac{bx}{z}$. Ομοίως, θέτοντας το $AE = k$ και κάνοντας ανάλογους χειρισμούς έχουμε $CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$ και θέτοντας $AG = l$ έχουμε $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$ όπου τα γράμματα d, e, f, g ορίζουν ποσότητες που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αναλογίες πλευρών τριγώνων που οι γωνίες τους είναι γνωστές. Η διερεύνηση των σχετικών θέσεων των σημείων οδηγεί στην αλλαγή των προσήμων των παραστάσεων και όχι της μορφής τους. Γνωρίζοντας ότι $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ έχουμε την εξίσωση

$$y^2 = \frac{(cfglz - dckz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

Στο πλαίσιο της διερεύνησης της παραπάνω εξίσωσης ο Descartes θέτει $2m = \frac{cf\lg z - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}$ και $\frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται $y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$ η οποία έχει ρίζα την $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}$. Τέλος θέτει: $\frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}$ και $o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$ και καταλήγει στην εξίσωση

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2} \ .$$

Στη συνέχεια κατασκευάζει γεωμετρικά τη λύση του και διερευνά τις διάφορες καμπύλες που μπορεί να παριστάνει η παραπάνω εξίσωση. Ειδικά, πότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία ή κύκλο (ειδική περίπτωση της έλλειψης) και πότε παριστάνει παραβολή, έλλειψη ή υπερβολή (ανάλογα αν ο όρος $\frac{p}{m}x^2$ είναι μηδέν, αρνητικός ή θετικός).

Όσον αφορά το θέμα της κάθετης-εφαπτόμενης μιας καμπύλης ο Descartes έλεγε (σελ. 100 έως 111) ότι για να βρούμε την κάθετη μιας καμπύλης, σε ένα σταθερό σημείο της P, πρέπει να θεωρήσουμε ένα μεταβλητό σημείο Q της καμπύλης και στη συνέχεια να βρούμε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο τον άξονα των συντεταγμένων (διότι χρησιμοποιούσε μόνο ένα άξονα τετμημένων), ο οποίος να διέρχεται από τα P και Q. Κατόπιν, θέτοντας ίση με μηδέν τη διακρίνουσα της εξίσωσης που ορίζει τα σημεία τομής κύκλου και καμπύλης, βρίσκουμε το κέντρο του κύκλου άρα και την κάθετη της καμπύλης στο P (συμπίπτει με το Q) ως ακτίνα του κύκλου.

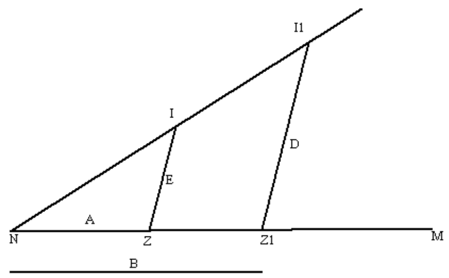
Στα βιβλία του ο Descartes ασχολείται επίσης, με την ταξινόμηση των γεωμετρικών προβλημάτων ανάλογα με το βαθμό της εξίσωσης που αυτά οδηγούν, τα ωοειδή τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην οπτική και τέλος με την κατασκευή των ριζών μιας εξίσωσης (και παραπάνω από 2ου βαθμού). Το μαθηματικό κείμενο μπορεί εύκολα να διαβαστεί σήμερα, αφού το μόνο σχεδόν σύμβολο που διαφέρει από τα σημερινά, είναι το σύμβολο της ισότητας. Ακριβέστερα γίνεται χρήση του «∝» αντί για το «=» για την ισότητα. Βέβαια η κατανόηση του κειμένου από τους σύγχρονους του Descartes δεν ήταν εύκολη υπόθεση. Σύμφωνα με τους Boyer και Merzbach (1989, σελ. 383), η παράλειψη των περισσοτέρων στοιχειωδών λεπτομερειών, έκανε το έργο ιδιαίτερα δυσανάγνωστο για τους συγχρόνους του.

Γενικότερα κατά τον Molland (1976), η προσπάθεια του Descartes ήταν να δημιουργήσει ένα νέο πλαίσιο το οποίο θα μπορούσε να διερευνήσει πιο σύνθετες καμπύλες απ' αυτές που εισήγαγαν οι αρχαίοι. Άρα, ήταν μια προσπάθεια επέκτασης των αντικειμένων τα οποία περιέχονται στη Γεωμετρία και όχι μια απόπειρα να προσδιορίσει τα πεδία της Άλγεβρας και Γεωμετρίας.

1.3. Fermat

Ο δεύτερος κορυφαίος Γάλλος μαθηματικός, που συνέβαλε στην ανάπτυξη του κλάδου της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ήταν ο Pierre de Fermat (1601-1665). Σύμφωνα με τους Boyer και Merzbach (1989, σελ. 387), ενώ ο Descartes είχε ξεκινήσει με την ανάλυση του προβλήματος του Πάππου, χρησιμοποιώντας μια από τις ευθείες ως άξονα των τετμημένων, ο Fermat ξεκίνησε με τη γραμμική εξίσωση και επέλεξε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων, επάνω στο οποίο τη σχεδίασε.

Ας δούμε πως ενεργεί ο ίδιος ο Fermat με πηγή πληροφόρησης το βιβλίο του Mahoney (1973, σελ. 84) και αναφορά στη μελέτη του Fermat με τίτλο «Ad locos planos et solidos isagoge» (Εισαγωγή στους Γεωμετρικούς Τόπους του Επιπέδου και του Χώρου), που σύμφωνα με τον Loria (1931, 2^{ος} τόμος, σελ. 256) γράφτηκε πριν το 1637.



Σχήμα 4: Η ευθεία από τον Fermat

Θεωρεί την εξίσωση $D \cdot A = B \cdot E$ και με τη δικιά του σημειογραφία λέει: έστω NZM μια ευθεία σε μια δοσμένη θέση, της οποίας το σημείο N είναι δοσμένο. Έστω ότι το NZ είναι ίσο με την άγνωστη ποσότητα A, και έστω το τμήμα ZI ορθωμένο σε μια δοσμένη γωνία NZI, ίσο με την άλλη άγνωστη ποσότητα E. Αν D φορές το A είναι ίσο με B φορές το E, τότε το σημείο I θα κείται σε ευθεία σε μια δεδομένη θέση.

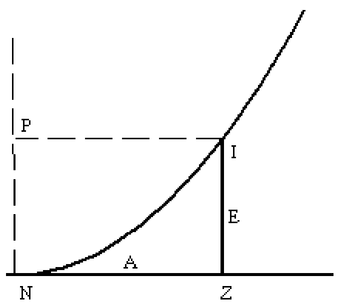
Αυτό ισχύει γιατί ότι μέρος του D είναι το B, είναι και το A του E. Άρα ο λόγος του A προς E είναι δοσμένος και η γωνία Z είναι δοσμένη. Άρα ο τύπος του τριγώνου NZI είναι δοσμένος και η γωνία INZ είναι δοσμένη. Επίσης το σημείο N είναι δοσμένο και η ευθεία γραμμή NZ είναι σε μια δοσμένη θέση. Συνεπώς, η NI θα είναι σε μια συγκεκριμένη θέση. Η σύνθεση είναι εύκολη. Βέβαια με το συγκεκριμένο τρόπο ορίζει ημιευθεία με άκρο την αρχή των αξόνων, γιατί ο Fermat όπως και ο Descartes, δε χρησιμοποιούσε αρνητικές συντεταγμένες.

Τη γενικότερη μορφή γραμμικής εξίσωσης $ax+by=c^2$ (ας σημειωθεί ότι ο Fermat διατήρησε την ομοιογένεια του Viète), τη σχεδίασε ως ένα ευθύγραμμο τμήμα στο πρώτο τεταρτημόριο το οποίο περιορίζεται από τους άξονες συντεταγμένων.

Ο Fermat αφιερώνει το μεγαλύτερο μέρος από την *Εισαγωγής* του στο ακόλουθο θεώρημα: «οι απροσδιόριστες αλγεβρικές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους καθορίζουν καμπύλες, οι οποίες είναι μέλη της γενικής οικογένειας των κωνικών τομών» (Mahoney, 1973, σελ. 82). Χωρίζει την οικογένεια των πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων με δύο αγνώστους σε επτά υποοικογένειες, που η καθεμία εκπροσωπείται από μια εξίσωση. Δείχνει για κάθε υποοικογένεια την επίπεδη ευθεία ή καμπύλη στην οποία αντιστοιχεί. Οι επτά εξισώσεις είναι (Mahoney, 1973, σελ. 83):

$$ax=by,\ xy=b,\ x^2\pm xy=ay^2,\ x^2=ay,\ b^2-x^2=y^2,\ b^2-x^2=ay^2,\ b^2+x^2=ay^2.$$

Ήξερε από τους Έλληνες ότι οι παρακάτω τύποι εξισώσεων $y^2=2mx$, $y^2=\pm\frac{b^2}{a^2}(2a-x)$, $xy=c$ αντιστοιχούν σε μια κωνική τομή (Coolidge 1940, σελ. 124). Σύμφωνα με τον Mahoney (1973, σελ. 85-86), για την παραβολή είπε: «αν Aq είναι ίσο με $D\cdot E$, τότε το σημείο I ανήκει σε μια παραβολή». Η απόδειξη ξεκινάει εμπλέκοντας κατ' αρχήν τις κάθετες γραμμές NZ και ZI και με σταθερό το σημείο N .



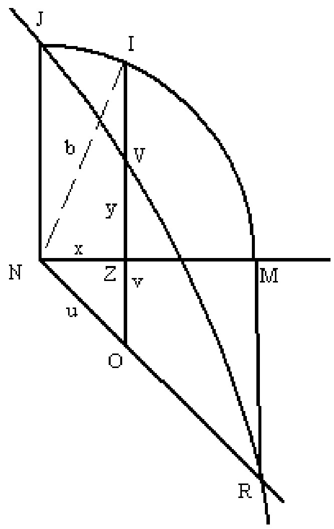
Σχήμα 5: Η παραβολή από τον Fermat

Ο Fermat σχεδιάζει την NP παράλληλη στη ZI και με τον NP ως άξονα περιγράφει την παραβολή της οποίας το ορθόν πλάτος (latus rectum) είναι ίσο με D και την τετμημένη PI παράλληλη στην NZ. Η πρόταση του ήταν ότι, από κατασκευή, $D\cdot NP=PI^2$ ($D\cdot y=x^2$), $A=NZ=PI$ και $E=ZI=NP$, άρα το σημείο I ανήκει στην παραβολή. Το ορθόν πλάτος για την παραβολή της μορφής $x^2=py$ είναι το p (van der Waerden, 1961, σελ. 291).

Σύμφωνα με τον Mahoney (1973, σελ. 88-89), το πρόβλημα του ήταν να αντιστοιχήσει κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση με δύο μεταβλητές, η οποία αναπαριστά ένα γεωμετρικό τόπο, όχι κύκλο ή ευθείες, με έναν από τους παραπάνω βασικούς τύπους των Ελλήνων. Ο Fermat επιλέγει ως ειδικό παράδειγμα της γενικής τεχνικής του την εξίσωση $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$. Κατ' αρχάς προσαρμόζει την εξίσωση που περιέχει μεταβλητές τα x, y σε μια με μεταβλητές τα x, $x + y$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτή η προσαρμογή δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα:

$$b^2 - x^2 = (x + y)^2.$$

Παίρνοντας, στο σύστημα αξόνων του, το NZ ως x και το ZI ως $x + y$, ο Fermat φέρνει κύκλο με κέντρο το N και ακτίνα b. Αλλά το ZI που αναπαριστά το $x + y$ έχει το άκρο I στον κύκλο και όχι την καμπύλη. Στην προσπάθεια του να αλλάξει μεταβλητή φέρνει ευθεία NR που σχηματίζει γωνία 45^{o} με τη NM και προεκτείνει την IZ κατά ZO, όπου O το



Σχήμα 6: Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης της έλλειψης

σημείο τομής με την NR. Επειδή το τρίγωνο NZO είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, έχουμε ότι $ZO = NZ = x$ άρα $OV = x + y$. Θεωρώντας άξονες τους NR και OI και ξέροντας ότι $NO = x\sqrt{2}$, θέτει $u = x\sqrt{2}$ και $v = x + y$, και καταλήγει στην εξίσωση $b^2 - \frac{u^2}{2} = v^2$ ή

$$2b^2 - u^2 = 2v^2,$$

η οποία είναι εξίσωση μιας έλλειψης.

Με τον παραπάνω τρόπο ο Fermat προσδιορίζει το γεωμετρικό τόπο που αντιστοιχεί στη γενική εξίσωση με τύπο: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$, στην οποία όλοι οι συντελεστές είναι διάφοροι του μηδενός. Η διαστολή του άξονα και η γωνία μεταξύ των NZ και NO ποικίλει ως συνάρτηση των β και γ.

Τέλος σύμφωνα με τον Coolidge (1940, σελ. 124), χρησιμοποιώντας τις κωνικές έλυσε εξισώσεις με ένα άγνωστο μεγαλύτερου βαθμού. Για παράδειγμα την εξίσωση $x^4 - c^3x = d^4$, αφού τη μετασχημάτισε στη μορφή $(x^2 - b^2)^2 = b^4 - 2b^2x^2 + c^3x + d^4$, την έλυσε μέσω των σημείων τομής της παραβολής $x^2 - b^2 = \sqrt{2}by$ και του κύκλου $2b^2y^2 = b^4 - 2b^2x^2 + c^3x + d^4$. Επίσης ασχολήθηκε με στερεομετρία γράφοντας διάφορα θεωρήματα, όλα γνωστά στον Αρχιμήδη, για κώνους, κυλίνδρους κ.α. χωρίς αποδείξεις.

1.4. Τα χρόνια των ερμηνευτικών σχολίων

Σύμφωνα με τον Boyer (1956, κεφάλαιο VI), η Αναλυτική Γεωμετρία του Descartes και του Fermat δεν προκάλεσε μια γρήγορη μετατροπή των μαθηματικών. Ο λόγος ήταν η κλασική διαμάχη μεταξύ των μοντέρνων και αυτών που υπερεκτιμούσαν τις κλασικές μεθόδους της αρχαιότητας. Επίσης ο Descartes δεν ήταν αρκετά επεξηγηματικός, δεν ταξινόμησε την εργασία του με συστηματικό τρόπο, ούτε προχώρησε σε λεπτομέρειες που θα ξεκαθάριζαν τη λεπτότητα των επιχειρημάτων του. Μάλιστα, στο τέλος της εργασίας του αιτιολογεί την ανεπάρκεια της παρουσίασης με ένα αδόκιμο σχόλιο, ότι έχει αφήσει πολλά που δεν είπε, για να μην κλέψει τη χαρά της ανακάλυψης απ’ αυτόν που θα διαβάσει την εργασία του. Τα παραπάνω προκάλεσαν ένα χείμαρρο ερμηνευτικών σχολίων από επαγγελματίες γεωμέτρες με αξιοσημείωτη ικανότητα. Ένας παραπάνω λόγος είναι ότι η εργασία του Fermat, που τα Μαθηματικά ήταν γι’ αυτόν μόνο χόμπι, εμφανίστηκε πολύ αργότερα (1679) από αυτήν του Descartes με αποτέλεσμα να εκληφθεί με κάποια αδιαφορία (αφού είχαν προηγηθεί ή δρομολογηθεί οι εργασίες των μαθηματικών πάνω στο καινοτόμο που κόμιζε ο Descartes).

Σύμφωνα με τον Boyer (1956, κεφάλαιο VI), ένας σύγχρονος των παραπάνω μαθηματικών που συνέλαβε το νόημα της εργασίας του Descartes ήταν ο Gilles Personne de Roberval (1602-1675). Το βιβλίο του Roberval με τίτλο «De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolution», είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα Αναλυτικής Γεωμετρίας στο πνεύμα του Descartes. Ασχολείται με δύο προβλήματα: την αναπαράσταση των γεωμετρικών τόπων με εξισώσεις και τη χρήση των τομών των γεωμετρικών τόπων για τη λύση εξισώσεων. Ο Roberval εκφράζει την ουσία της Καρτεσιανής γεωμετρίας όταν γράφει ότι «έχει ειπωθεί, ότι κάθε γεωμετρικός τόπος μπορεί να μετατραπεί σε μια αναλυτική εξίσωση, στην οποία έχουμε μια, δύο, ή τρεις το πολύ άγνωστες ποσότητες».

Ασχολείται με τις εξισώσεις απλών και οικείων καμπυλών, όπως κύκλου, έλλειψης, κ.α. αλλά δεν υπάρχει καμία αναφορά στην ευθεία γραμμή.

Μια αξιοσημείωτη εργασία εκείνη την εποχή έγινε από τον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1616-1703). Ο Wallis αντικατέστησε, όπου ήταν δυνατόν, τις γεωμετρικές έννοιες με αριθμητικές, σημειώνοντας ότι οι αποδείξεις με αλγεβρικούς υπολογισμούς είναι τόσο έγκυρες, όσο τα συμπεράσματα με χρήση γεωμετρικών γραμμών. Στο βιβλίο του με τίτλο «Tractatus de sectionibus conicis», που κυκλοφόρησε το 1655, εκφράζει για πρώτη φορά τις γνωστές (στον Απολλώνιο και πιθανά στο Μέναιχμο) ιδιότητες (συμπτώματα) ως εξισώσεις. Στη συνέχεια ορίζει για πρώτη φορά τις κωνικές με βάση την εξίσωσή τους. Για παράδειγμα ορίζει την έλλειψη ως το επίπεδο σχήμα που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ όπου e είναι η τεταγμένη, d η τετμημένη, l το ορθόν πλάτος και t η «διάμετρος» ή άξονας (η ίδια εξίσωση αποδίδεται στον Απολλώνιο από τον van der Waerden (1961, σελ. 291) που με σύγχρονο συμβολισμό είναι $y^2 = x\{p-(p:a)x\}$ όπου το p είναι το ορθόν πλάτος και το a είναι το latus transversum). Στη συνέχεια παίρνοντας δεδομένες τις εξισώσεις, αποδεικνύει ότι οι καμπύλες που ορίζονται απ' αυτές είναι οι κωνικές τομές των αρχαίων και μέσα από τις εξισώσεις παράγει άλλες ιδιότητες, όπως εφαπτόμενες και συζυγείς διαμέτρους.

Μια αξιόλογη μελέτη σύνθεσε ο Jan de Witt (1623-1672) όταν ήταν είκοσι τριών ετών, με τίτλο «Elementa curvarum». Η προσέγγισή του μοιάζει με αυτή του Fermat αφού ξεκινάει με εξισώσεις και όχι με καμπύλες και γεωμετρικούς τόπους. Στη συνέχεια λειτουργώντας συμπληρωματικά από τον Wallis, παράγει τις ιδιότητες των κωνικών γεωμετρικά και στη συνέχεια δείχνει αναλυτικά ότι οι δευτέρου βαθμού εξισώσεις αναπαριστούν καμπύλες με αυτές τις ιδιότητες.

Ο René de Sluse (1622-1685), το 1659, με το έργο του «Mesolabum» (Των μέσων), βοήθησε στην εξάπλωση της Γεωμετρίας του Descartes. Ασχολήθηκε με τη γεωμετρική κατασκευή των ριζών των εξισώσεων και απέδειξε ότι δεδομένης οποιασδήποτε κωνικής τομής, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις ρίζες κάθε κυβικής και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης μέσω της τομής της κωνικής και ενός κύκλου.

Ο Philipe de l'Hire (1640-1718), στο έργο του «Nouveaux élémens des section coniques» (Νέα στοιχεία των κωνικών τομών) που κυκλοφόρησε το 1679, προσεγγίζει μετρικά και διδιάστατα και προχωρεί, στην περίπτωση της έλλειψης και της υπερβολής, από τους ορισμούς συναρτήσει του αθροίσματος και της διαφοράς των εστιακών ακτινών και, στην περίπτωση της παραβολής, την εξίσωση των αποστάσεων από την εστία και τη διευθετούσα. Μετέφερε όρους από τη γλώσσα του Desargues, όπως ο άξονας των τετμημένων ήταν ο «κορμός», τα σημεία του ήταν οι «κόμβοι» και οι τεταγμένες ήταν οι «κλάδοι». Ήταν μια πρώτη προσπάθεια για τη δημιουργία κατάλληλης τεχνικής γλώσσας όσον αφορά την Αναλυτική Γεωμετρία, αν και το μόνο που επέζησε, ήταν ο όρος «αρχή των αξόνων». Ο l'Hire παρουσίασε ένα από τα πρώτα παραδείγματα μιας επιφάνειας εκφρασμένης αναλυτικά, με τη βοήθεια μιας εξίσωσης με τρεις αγνώστους, το οποίο ήταν ένα από τα πρώτα βήματα προς τη στερεά Αναλυτική Γεωμετρία.

Ο Jacques Ozanam (1640-1717), αν και πρόσθεσε λίγα πράγματα στην Αναλυτική Γεωμετρία, βοήθησε να καθιερωθεί η τριπλή διαίρεση της νέας Γεωμετρίας. Το έργο που παρουσίασε το 1687 ήταν χωρισμένο σε τρία μέρη. Το πρώτο ασχολούνταν με την κατασκευή μιας θεωρίας για τις κωνικές τομές, στο δεύτερο μελετούσε εξισώσεις και στο τρίτο έλυνε εξισώσεις με τομές καμπυλών.

Επίσης ασχολήθηκαν με την Αναλυτική Γεωμετρία ο Jacques Bernoulli (1654-1705), που για πρώτη φορά βλέπουμε την ιδέα των πολικών συντεταγμένων και ο Jean Bernoulli (1667-1748), που σπάει την παράδοση με ένα εναλλακτικό τρόπο κατασκευής των εξισώσεων. Ο τελευταίος σε μια επιστολή του στον Leibniz στις 3 Απριλίου του 1697, σχεδιάζει μια τεταρτοβάθμια καμπύλη και δείχνει ότι οι τομές της με τον άξονα των τετμημένων δίνουν τις ρίζες της εξίσωσης. Εδώ κάποιος βλέπει τη μοντέρνα γραφική επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης. Επίσης ο Jean Bernoulli ασχολήθηκε με επιφάνειες.

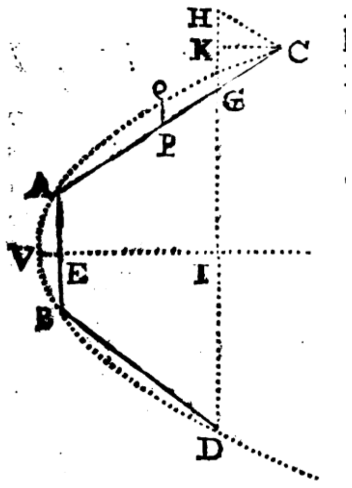
1.5. Από τον Newton στον Euler

Ένας μεγάλος μαθηματικός που ασχολήθηκε με την Αναλυτική Γεωμετρία είναι ο Isaac Newton (1642-1727). Το πρώτο έργο του Newton που σχετίζεται με το θέμα μας έχει τίτλο «Enumeratio linearum tertii ordinis» (Απαρίθμηση των καμπυλών τρίτου βαθμού). Άρχισε να γράφεται το 1676, τελείωσε το 1695 και δημοσιεύτηκε το 1704 ως παράρτημα της «Οπτικής». Ο Newton μ' αυτή τη μελέτη, δίνει ένα παράδειγμα μεθοδικής εφαρμογής του αλγεβρικού λογισμού στη μελέτη και ταξινόμηση μιας νέας κατηγορίας γεωμετρικών σχημάτων, που αγνοούνταν προηγούμενα σε όλη τους τη γενικότητα (Loria 1931, 2^{ος} τόμος, σελ. 385). Σύμφωνα με τον Boyer (1956, κεφάλαιο VII), ο Newton, παρουσίασε εβδομήντα δύο είδη κυβικών καμπυλών (παραλείπει έξι) και σε κάθε περίπτωση τις σχεδιάζει προσεκτικά. Είναι η πρώτη φορά που συναντάμε τη συστηματική χρήση δύο αξόνων, αν και η δεύτερη γραμμή αναφέρεται ως κύρια τεταγμένη και δε χρησιμοποιείται με την ίδια σημασία όπως ο άξονας των τετμημένων. Επίσης δε δίστασε να χρησιμοποιήσει αρνητικές τιμές για τις συντεταγμένες. Οι άξονες, όπως στις περισσότερες εργασίες εκείνη την περίοδο, γενικά θεωρούνται πλάγιοι και οι μεταφορές των αξόνων δε δίνονται συγκεκριμένα, αλλά ο Newton τις χρησιμοποιεί όταν θέλει να μετατρέψει την εξίσωση σε κανονική μορφή. Τέλος, περιγράφει τις καμπύλες ως μη αλγεβρικές ή αλγεβρικές ανάλογα με το αν κάποια ευθεία τέμνει ή όχι την καμπύλη σε άπειρα σημεία, πραγματικά ή φανταστικά.

Το δεύτερο έργο του Newton που σχετίζεται με το θέμα μας είναι το «Method of fluxions» (Μέθοδος των Ρυθμών Μεταβολής), γραμμένο στα λατινικά γύρω στο 1671, αλλά εκδόθηκε το 1736 από τον Colson. Σ’ αυτό το έργο συναντούμε οκτώ καινούρια είδη συστημάτων συντεταγμένων. Ένα απ’ αυτά είναι το γνωστό σε μας, σύστημα πολικών συντεταγμένων.

Τέλος, στο έργο του «Arithmetica Universalis» (Γενική Αριθμητική) που ήταν γραμμένο από το 1673 αλλά δημοσιεύτηκε το 1707, ο Newton (ο Loria (1931, 2^{ος} τόμος, σελ. 388) ισχυρίζεται ότι το έγραψε ο διάδοχος του στην καθηγητική έδρα του Πανεπιστημίου και μάλιστα αμφιβάλει αν αυτό έγινε με τη συγκατάθεση του ίδιου του Newton) σύμφωνα με τον Coolidge (1940, σελ. 128), είναι ο πρώτος συγγραφέας που είχε το πλεονέκτημα της μεγάλης απλοποίησης, που προέρχεται από τη δυνατότητα των συντεταγμένων να παίρνουν αρνητικές τιμές. Πρώτα δηλώνει το πρόβλημα γεωμετρικά και εμφανίζει αλγεβρικούς τύπους και χειρισμούς όταν είναι χρήσιμοι. Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό είναι η παρουσίαση της μεθόδου των απροσδιόριστων συντελεστών (είχε αναφέρει αλλά δεν είχε υλοποιήσει ο Descartes). Ένα παράδειγμα υλοποίησης της παραπάνω μεθόδου είναι ο προσδιορισμός της εξίσωσης της παραβολής, όταν γνωρίζουμε τέσσερα σημεία της.

«Η περιγραφή μιας παραβολής που διέρχεται από τέσσερα σημεία» (πρόβλημα LIV (σελ. 209-211) στο πρωτότυπο και πρόβλημα LVIII (σελ. 336-338) στη μετάφραση από τον Ralphson το 1728) από τον Newton (1707) είναι η εξής:



Σχήμα 7: Η εύρεση της εξίσωσης της παραβολής (Newton, 1707)

Έστω ότι τα δοσμένα σημεία είναι τα A, B, C, D. O Newton φέρνει το ευθύγραμμο τμήμα AB και θεωρεί E το μέσο του. Από το E φέρνει ευθεία γραμμή VE, η οποία θεωρεί ότι είναι διάμετρος της παραβολής και το σημείο V είναι η κορυφή της. Στο τέλος της περιγραφής αναφέρει τον τρόπο κατασκευής της VE (η VE είναι παράλληλη στη CK, όπου DK είναι μέσο ανάλογο των DG και DH, όπου CH παράλληλη στην BD), αποδεικνύοντας ότι το V είναι όντος η κορυφή της παραβολής. Φέρνει το ευθύγραμμο τμήμα AC και από το D φέρνει ευθεία DG παράλληλη στην AB, με G σημείο της AC. Θέτει $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$ και $GD = d$. Επί του AC θεωρεί σημείο P και φέρνει PQ παράλληλη στην AB, όπου Q σημείο της παραβολής. Θέτει $AP = x$, $PQ = y$ και λέει «πάρε κάθε εξίσωση που εκφράζει την παραβολή, η οποία μπορεί να υπολογίζει τη σχέση μεταξύ των AP και PQ, όπως $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Τώρα, αν το AP ή το x είναι ίσο με 0, τότε το P συμπίπτει με το A και το PQ ή y θα είναι ίσο με μηδέν, ή με $-AB$. Γράφοντας την υποτιθέμενη εξίσωση με 0 στη θέση του x, θα έχουμε $y = e \pm \sqrt{gg}$ ή $y = e \pm g$. Η μεγαλύτερη τιμή για το y είναι το 0 και η μικρότερη το $-a$, άρα $e + g = 0$ και $e - g = -a$ οπότε $e = -g$ και $-2g = -a$ ή $g = \frac{1}{2}a$ και έτσι η εξίσωση γίνεται $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + hx}$. Στην προσπάθεια του να υπολογίσει τους άλλους δύο συντελεστές τοποθετεί το P κατ' αρχήν στη θέση του C, οπότε το ένα μέρος της εξίσωσης (παίρνει τον κλάδο με το θετικό πρόσημο στη ρίζα, γιατί μόνο γι' αυτόν μπορεί να προσδιορίσει το y) γίνεται $0=-\frac{1}{2}a+fb+\sqrt{\frac{1}{4}aa+hb}$ και υψώνοντας κατάλληλα στο τετράγωνο καταλήγει στη σχέση $h=-af+ffb$, δηλαδή η εξίσωση γίνεται

$$y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}\,.$$

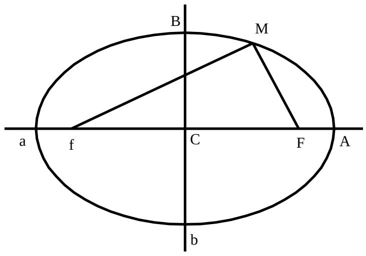
Για να προσδιορίσει το f, τοποθετεί το P στη θέση του G. Στην περίπτωση αυτή όμως θα έχουμε $x=c$ και $y=-GD=-d$ για το άλλο μέρος της εξίσωσης (παίρνει τον κλάδο με το αρνητικό πρόσημο στη ρίζα, γιατί μόνο γι' αυτόν μπορεί να προσδιορίσει το y) οπότε έχουμε $-d=-\frac{1}{2}a+fc-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$ και με υψώνοντας κατάλληλα στο τετράγωνο καταλήγει στην εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς f: $ff=\frac{2d}{b-c}f+\frac{dd-ad}{bc-cc}$. Θέτει $b-c=k$ φτάνοντας την εξίσωση στη μορφή: $ff=\frac{2d}{k}f+\frac{dd-ad}{kc}$, για την οποία παρατηρεί ότι είναι τριώνυμο και έχει ρίζες: $f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Άρα το f, λέει ο Newton, έχει προσδιοριστεί, άρα έχει προσδιοριστεί πλήρως η εξίσωση της παραβολής και είναι:

$$y=\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}\,.$$

Σ' αυτή τη μελέτη περιλαμβάνονται, εκτός των άλλων, οι λεγόμενες «ταυτότητες του Newton» για τα αθροίσματα των δυνάμεων των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και χρησιμοποιείται βελτιωμένο συμβολικό αλγεβρικό σύστημα ως προς τη σταθερή χρήση εκθετών. Επίσης, σύμφωνα με τον Loria (1931, 2^{ος} τόμος, σελ. 389), δε λείπουν οι σελίδες που είναι αφιερωμένες στις εξισώσεις με δύο αγνώστους και ειδικά με την πράξη που σήμερα ονομάζουμε «απαλοιφή». Ο Newton παρατηρεί ότι αυτή εκτελείται μέσω αντικαταστάσεων, όταν ο ένας άγνωστος εισέρχεται γραμμικά σε μια από τις δοθείσες εξισώσεις και ακόμη όταν, με κατάλληλο συνδυασμό των εξισώσεων, μπορούμε να φτάσουμε σε μια εξίσωση αυτού του είδους (εννοεί γραμμική εξίσωση).

Ο Marquis de l'Hospital (1661-1704) στο έργο του «Traité analytique des sections coniques» (Αναλυτική πραγματεία των κωνικών τομών), που δημοσιεύτηκε το 1707, διαπραγματεύεται τις κωνικές τομές εκτεταμένα και με σύγχρονο τρόπο. Αν και εμφανίζει στους άξονες συντεταγμένων τα πρόσημα + και – (Loria, 1931, $2^{ος}$ τόμος, σελ. 443), διστάζει να χρησιμοποιήσει τις αρνητικές συντεταγμένες. Κάνει χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος ως τύπο απόστασης (Boyer, 1956, σελ. 151). Ας δούμε πως περιγράφει ο Boyer (1956, σελ. 151-152), την εύρεση της εξίσωσης της έλλειψης από τον L'Hospital.

Έστω M είναι ένα σημείο της έλλειψης με κέντρο C, τα σημεία F, f είναι οι εστίες ενώ τα σημεία A, a, B, και b είναι οι κορυφές της. Θέτει το μεγάλο άξονα ίσο με $2t$, το μικρό ίσο με 2c και την εστιακή απόσταση ίση με $2m$. Στη συνέχεια θέτει $MF = t - z$ και $Mf = t + z$ και γράφει $MF^2 = t^2 - 2tz + z^2 = y^2 + m^2 - 2mx + x^2$ και $Mf^2 = t^2 + 2tz + z^2 = y^2 + m^2 + 2mx + x^2$, χρησιμοποιώντας Πυθαγόρειο θεώρημα για τις αποστάσεις.

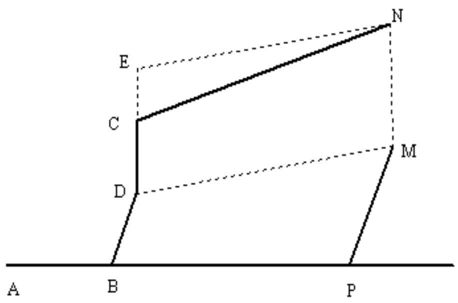


Σχήμα 8: Η εύρεση της εξίσωσης της έλλειψης από τον L'Hospital.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις βρίσκουμε ότι $z = \frac{mx}{t}$ και αντικαθιστώντας στην μια από τις δύο εξισώσεις καταλήγουμε στην εξίσωση $y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2}$, όπου $c^2 = t^2 - m^2$. Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι για τις θέσεις που μπορεί να πάρει το M «στην άλλη μεριά του κέντρου» (ο L'Hospital αποφεύγει να αναφέρεται στον άξονα των τεταγμένων), ο L'Hospital γράφει $MF = t + z$ και $Mf = t - z$, υπονοώντας ότι οι τιμές του x πρέπει να λαμβάνονται θετικές απ' όπου και αν μετράμε, σε σχέση με το κέντρο.

Ο Alexis Claude Clairaut (1713-1765) σε ηλικία δέκα έξι ετών παρουσίασε στην Ακαδημία Επιστημών το έργο του «Recherches sur les courbes à double courbure» (Μελέτη των καμπυλών διπλής καμπυλότητας), το οποίο δημοσιεύτηκε δύο χρόνια αργότερα. Ο Clairaut μελετά τις καμπύλες του χώρου, μέσω των προβολών τους σε δύο επίπεδα συντεταγμένων. Το αξιοσημείωτο για την παρούσα εργασία είναι η εμφάνιση του τύπου απόστασης δύο σημείων για τις δύο και τρεις διαστάσεις.

Ο Boyer (1956, σελ. 169), αναφέρει ότι οι τύποι αυτοί εμφανίστηκαν συμπτωματικά στον προσδιορισμό της εξίσωσης της σφαιρικής επιφάνειας: Έστω C το κέντρο της σφαίρας με συντεταγμένες $AB=\pm a$, $BD=\pm b$ και $DC=\pm c$ με αναφορά στον άξονα AB και επίπεδο βάσης το ABD και N ένα οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας με συντεταγμένες $AP=x$, $PM=y$ και $MN=z$. Ο Clairaut έγραψε ότι $EN=MD=\sqrt{\overline{x\mp a}^2+\overline{y\mp b}^2}$.



Σχήμα 9: Οι τύποι απόστασης από τον Clairaut

Συνέχισε με ανάλογο τύπο για τον τρισδιάστατο χώρο

$$f=CN=\sqrt{\overline{x\mp a}^2+\overline{y\mp b}^2+\overline{y\mp c}^2} .$$

Αυτή πιθανά είναι η πρώτη φορά που εμφανίζονται τυπωμένοι αυτοί οι τύποι. Οι τύποι του διαφέρουν ελαφρά από τους σύγχρονους στο ότι, αποτυγχάνουν να θεωρήσουν τις ποσότητες που εκφράζονται από τα a, b και c ανεξάρτητα από το πρόσημό τους.

Ένας πολύ σημαντικός μαθηματικός που ασχολήθηκε με την Αναλυτική Γεωμετρία είναι ο Leonhard Euler (1707-1783). Στο έργο του με τίτλο «Introductio in analysin infinitorum» που δημοσιεύτηκε το 1748, στο δεύτερο τόμο, ασχολείται με τη μελέτη των καμπυλών μέσω των εξισώσεών τους. Το βιβλίο αυτό καθιέρωσε τις συντεταγμένες ως τη βάση της συστηματικής μελέτης καμπυλών κι επιφανειών, στις δύο και τρεις διαστάσεις. Αντί να συγκεντρώσει την προσοχή του στις κωνικές τομές, ο Euler παρουσίασε μια θεωρία καμπυλών γενικότερα, βασισμένη στην έννοια της συνάρτησης που ήταν το θέμα του πρώτου τόμου (Boyer, Merzbach, 1989, σελ. 512).

Σύμφωνα με τον Loria (1931, 3ος τόμος, σελ. 131), ο Euler δε θεωρεί τα σημεία μεμονωμένα, αλλά ότι αποτελούν συνεχείς σημειοσειρές και γι’ αυτό αποκλείονται προβλήματα που έχουν να κάνουν με προσδιορισμό γωνιών και αποστάσεων. Δεν υπάρχει η γενική έκφραση της απόστασης δύο σημείων, αν και σε μερικές περιπτώσεις παράγεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Όμως συναντάμε τους συμβατικούς κανόνες σήμανσης των καρτεσιανών συντεταγμένων και οι τύποι αλλαγής συντεταγμένων απέκτησαν πλέον όλη τους τη γενικότητα (σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 185), βλέπουμε για πρώτη φορά τις εξισώσεις μετασχηματισμών από ορθογώνιες σε πολικές συντεταγμένες στη σύγχρονη αυστηρή τους μορφή: $x = z\cos\varphi$ και $y = z\sin\varphi$). Από αυτά παράγει δύο σημαντικά συμπεράσματα, δηλαδή ότι οι συντεταγμένες είναι μεγέθη που έχουν την ίδια φύση και ότι οι ευθείες του επιπέδου παριστάνονται από γραμμικές εξισώσεις (σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 182), ο Euler καλύπτει όλους τους τύπους ευθειών, δίνοντας τη γενική εξίσωση $ax + by + c = 0$, σημειώνοντας τα σημεία τομής με τους άξονες και διερευνώντας τις διάφορες περιπτώσεις εκτός της περίπτωσης $b = c = 0$, πιθανά επειδή χρησιμοποιούσε ένα μοναδικό άξονα). Από το ουσιώδες αυτό συμπέρασμα ο Euler κατανοεί τη γεωμετρική σημασία του βαθμού μιας εξίσωσης και ταξινομεί τις καμπύλες με βάση το βαθμό τους. Επειδή οι γραμμές 1[ου] βαθμού είναι γνωστές, διερευνά τις 2[ου] βαθμού, όπου φυσικά καταλήγει στις κωνικές τομές. Ασχολείται με τις τομές καμπυλών και τη γραφική λύση εξισώσεων (σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 181), το Introductio είναι η πρώτη διατριβή που έχει αριθμούς στο γράφημα συγκεκριμένων καμπυλών, με αριθμητικούς συντελεστές, δείχνοντας καθαρά τη χρήση μονάδας στον άξονα των τετμημένων).

Ένα ενδιαφέρον θέμα που συναντάμε στο βιβλίο αυτό, είναι η μελέτη των καμπυλών μέσω των παραμετρικών εξισώσεών τους. Σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 187), ο Descartes στην παρουσίαση της βασικής αρχής της Αναλυτικής Γεωμετρίας είχε σημειώσει ότι, για μια καμπύλη, πρέπει κάποιος να έχει ένα παραπάνω άγνωστο απ' ότι συνθήκες ή εξισώσεις. Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι μια ειδική περίπτωση αυτής της αρχής. Ο Euler συστηματοποίησε αυτή τη μέθοδο και επισήμανε τα πλεονεκτήματα τέτοιων τύπων.

Οι υπερβατικές καμπύλες δεν αγνοούνται, όπως συνηθιζόταν, έτσι ώστε, εδώ, για πρώτη φορά η γραφική μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελούσε μέρος της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Συμπεριλαμβάνονται, επίσης, και άλλες κοινές καμπύλες καθώς και ορισμένες όχι τόσο συνηθισμένες όπως οι $y = x^x$, $y^x = x^y$ και $y = (-1)^x$. Τέλος σε ένα μεγάλο παράρτημα του Introductio, ασχολείται με τη στερεά Αναλυτική Γεωμετρία, όπου σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 188) είναι η πρώτη εκτεταμένη περιγραφή του αντικειμένου που συναντάμε σε βιβλίο.

1.6. Ο οριστικός σχηματισμός του κλάδου

Σύμφωνα με τον Boyer (1956, κεφάλαιο VIII), τα πρώτα αποφασιστικά βήματα για την εφαρμογή της Άλγεβρας στα προβλήματα της στοιχειώδους Γεωμετρίας, έγιναν στον τριδιάστατο χώρο και όχι στις δύο διαστάσεις. Η ιστορία του σημείου και της γραμμής στη στερεά Αναλυτική Γεωμετρία διαφέρει για προφανείς λόγους απ’ αυτήν του επιπέδου. Η ευθεία στο χώρο δεν οδηγεί άμεσα στην κατασκευή με το καρτεσιανό νόημα ή τη χάραξη σημείο προς σημείο με βάση το νόημα που έδιναν οι Fermat, Newton και Euler. Επιπρόσθετα, δεδομένων δύο σημείων ή δύο γραμμών στο επίπεδο, οι σχέσεις απόστασης και διεύθυνσης είναι προφανείς στην αντιμετώπιση τους, άσχετα από σύστημα συντεταγμένων. Αυτό δεν είναι αλήθεια γι’ αυτά τα στοιχεία όταν τα βλέπουμε στον τριδιάστατο χώρο ή στις επίπεδες προβολές τους. Οι σχετικές θέσεις τους ξεκαθαρίζουν όταν τα αναφέρουμε σε σχέση με ένα οικείο σχηματισμό, όπως ένα σύστημα αξόνων.

Τα παραπάνω δικαιολογούν το μεγάλο άλμα στη σκέψη των Lagrange και Monge. Ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813), σ’ ένα άρθρο με τίτλο «Solutions analytiques de quelques problems sur les pyramides triangulaires» (Αναλυτικές λύσεις ορισμένων προβλημάτων για τις τριγωνικές πυραμίδες), που δημοσιεύτηκε το 1775, διαπραγματεύεται με αναλυτικό τρόπο θέματα που αφορούν τη Στερεομετρία. Ο ίδιος αναφέρει ότι «Κολακεύομαι, διότι πιστεύω ότι οι λύσεις που θα παρουσιάσω ενδιαφέρουν τους γεωμέτρες όχι μόνο ως προς τα αποτελέσματα αλλά και ως προς τις μεθόδους. Οι λύσεις αυτές είναι καθαρά αναλυτικές και μπορεί να γίνουν κατανοητές ακόμη και χωρίς σχήματα» (Boyer, 1956, σελ. 201). Συνεπής στα λόγια του, στο έργο του δεν συναντάμε ούτε ένα διάγραμμα. Είναι χαρακτηριστικό ότι ξεκινάει το έργο του θεωρώντας συντεταγμένες για τις τέσσερις κορυφές του τετραέδρου και υπολογίζει τις ακμές του τετραέδρου με τον τύπο της απόστασης. Σύμφωνα με τον Loria (1931, 3^{ος} τόμος, σελ. 187), πριν από τον Lagrange οι έρευνες τέτοιας φύσεως συνδέονταν αναπόσπαστα με τη θεώρηση του σχετικού σχήματος, είχαν ως προϋπόθεση την κατάλληλη εκλογή αξόνων και απαιτούσαν κοπιώδεις εφαρμογές της ομοιότητας και του Πυθαγορείου θεωρήματος. Ο Lagrange κατέστησε φανερό ότι επιτυγχάνουμε περισσότερη ασφάλεια και ταχύτητα όταν έχουμε εκ των προτέρων γενικούς τύπους, οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε δυνατή διάταξη του σχήματος.

Σύμφωνα με τον Boyer (1956, σελ. 203-204), η Αναλυτική Γεωμετρία του Lagrange είναι πιο κοντά στη σύγχρονη μορφή του αντικειμένου, απ' όλους τους προκάτοχους του. Ήταν στοιχειώδης Γεωμετρία με αναλυτική γλώσσα. Οι αναλυτικοί τύποι αντικαθιστούν τις γεωμετρικές οντότητες και οι πράξεις εκτελούνται με πλήρη γενικότητα.

Παρόμοια εργασία μ' αυτή του Lagrange έκανε και ο Gaspard Monge (1746-1818) στη Στερεομετρία. Ο Monge ασχολήθηκε με την Αναλυτική Γεωμετρία στα πλαίσια της διδασκαλίας του στην École Polytechnique ενός μαθήματος που ήταν εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία. Για το μάθημα αυτό έγραψε και τύπωσε τα «Feuilles d' analyse» (Φύλλα της ανάλυσης) για τους φοιτητές του. Σ' αυτό το σημείο η Αναλυτική Γεωμετρία των τριών διαστάσεων αναπτύχθηκε σε όλο της το μεγαλείο. Αυτό ήταν το μάθημα, πάνω στο οποίο βασίστηκαν τα σημερινά προγράμματα σπουδών της στερεάς Αναλυτικής Γεωμετρίας. Επίσης σ' ένα άρθρο του Monge με τίτλο «Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais» που δημοσιεύτηκε το 1784, δίνεται ρητά ο σύγχρονος τύπος της εξίσωσης (σημείο-κλίση) της ευθείας στο επίπεδο. Συγκεκριμένα δηλώνεται ότι «η εξίσωση μιας (ευθείας) γραμμής είναι γενικά του τύπου $y = ax + b$ και αν κάποιος θέλει να εκφράσει ότι αυτές οι γραμμές διέρχονται από το σημείο Μ το οποίο έχει συντεταγμένες x' και y', το οποίο προσδιορίζει την ποσότητα b, η παραπάνω εξίσωση γίνεται $y - y' = a(x - x')$, στην οποία το a είναι η εφαπτομένη της γωνίας που η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα των x». Αν και οι μαθηματικοί από τον πρώτο καιρό που αναπτύχτηκε η Αναλυτική Γεωμετρία ήταν εξοικειωμένοι με την ιδιότητα που εκφράζει αυτή η εξίσωση, ότι «η ευθεία κείται μεταξύ των άκρων της», το σημαντικό της παραπάνω δήλωσης είναι η τάση τυποποίησης της ευθείας με αναλυτικά σύμβολα, στην κατεύθυνση που ο Lagrange είχε προτείνει στους γεωμέτρες.

Ότι έκανε ο Lagrange και ο Monge στις τρεις διαστάσεις, έκανε ο Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843), μαθητής και συνάδελφος του Monge, στις δύο διαστάσεις. Ο Lacroix έγραψε δύο εργασίες που σημαδεύουν το τελικό στάδιο στην ιστορία της στοιχειώδους επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας. Οι εργασίες αυτές είναι η «Traité de calcul» (Μελέτη των λογισμών) το 1797 και η «Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algébre à la géométrie» (Στοιχειώδης μελέτη της ευθύγραμμης και σφαιρικής τριγωνομετρίας και εφαρμογή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία) το 1798-1799.

Στην εισαγωγή της πρώτης εργασίας, ο Lacroix αναφέρει ότι «αποφεύγοντας, με προσοχή, κάθε γεωμετρική κατασκευή θα έκανα τον αναγνώστη να συνειδητοποιήσει ότι υπάρχει ένας τρόπος θεώρησης της Γεωμετρίας, τον οποίο θα μπορούσαμε να ονομάσουμε Αναλυτική Γεωμετρία, ο οποίος συνίσταται στο συμπερασμό των ιδιοτήτων της επέκτασης από το μικρότερο δυνατό αριθμό αρχών με καθαρά αναλυτικές μεθόδους, όπως έκανε και ο Lagrange στη Μηχανική του, όσον αφορά στις ιδιότητες της ισορροπίας και της κίνησης» (Boyer, 1956, σελ. 211). Πίστευε ότι η Άλγεβρα και η Γεωμετρία «πρέπει να αντιμετωπίζονται χωριστά, κρατώντας όσο το δυνατόν μεγαλύτερη την απόσταση μεταξύ τους, και τα αποτελέσματα της καθεμιάς πρέπει να χρησιμοποιούνται για αμοιβαία διευκρίνηση, κάτι αντίστοιχο, για παράδειγμα, με το κείμενο ενός βιβλίου και τη μετάφρασή του» (Boyer, 1956, σελ. 212). Σ' ένα άλλο απόσπασμα προσθέτει ότι «η Άλγεβρα είναι μια γλώσσα κατάλληλη για προτάσεις» και εκ νέου ότι «η εφαρμογή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία δεν περιορίζεται στη χρήση της Άλγεβρας για τη μελέτη των επεκτάσεων» (η άποψη του Descartes), «κάποιος βλέπει σ' αυτό επίσης όλες τις ιδιότητες που υποδηλώνει μια αλγεβρική έκφραση». Σημείωσε την εργασία του Lagrange για το τετράεδρο ως μια περίπτωση αυτής της άποψης, αλλά πίστευε ότι ο Monge ήταν «ο πρώτος που σκέφτηκε να παραστήσει με αυτόν τον τρόπο, την εφαρμογή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία» (Boyer, 1956, σελ. 212).

Το αποτέλεσμα αυτής της οπτικής του Lacroix, ήταν μια Αναλυτική Γεωμετρία που μοιάζει εντυπωσιακά στα σύγχρονα βιβλία. Στο κεφάλαιο «Théorie des lignes curbes» του Traité de calcul παρουσιάζει ρητά, σε πολλές περιπτώσεις για πρώτη φορά, τα περισσότερα από τα στοιχεία που εμφανίζονται σε κάθε σύγχρονο κείμενο. Ένα χρόνο αργότερα ο Lacroix δημοσιεύει τα ίδια στοιχεία στο βιβλίο του για την Τριγωνομετρία και την εφαρμογή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία. Ο τύπος απόστασης, για παράδειγμα, δίνεται με το γνωστό τύπο $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$. Η εξίσωση της ευθείας (σημείο-κλίση) παρουσιάζεται συστηματικά, μαζί με το σχετικό τύπο για δύο σημεία $y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$. Η εφαπτόμενη του κύκλου $x^2+y^2=r^2$ από το σημείο του (α,β), δίνεται ως $y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$. Το εμβαδόν ενός τριγώνου με κορυφές $(0,0)$, (α,β) και (α',β') δίνεται από τον τύπο $\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2}$. Η απόσταση του σημείου (α,β) από την ευθεία $y=ax+b$, δίνεται από τον τύπο $\frac{\beta-a\alpha-b}{\sqrt{1+a^2}}$.

Υπήρχαν τύποι για το ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη μιας γωνίας θ μεταξύ δύο ευθειών: $\sin\theta=\frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$, $\cos\theta=\frac{r(1-aa')}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$, $\tan\theta=\frac{a'-a}{1-aa'}$, όπου τα a και a' είναι οι κλίσεις και r η ακτίνα. Η αλλαγή συντεταγμένων γίνεται με απλό τυπικό τρόπο. Επίσης δίνεται η γενική εξίσωση του κύκλου. Η εξίσωση του κύκλου ήταν μεν ήδη γνωστή, αλλά εδώ για πρώτη φορά εμφανίζεται μια συστηματική θεώρηση του κύκλου, γιατί η Αναλυτική Γεωμετρία ήταν απορροφημένη με τις κωνικές και ανώτερες επίπεδες καμπύλες. Οι καμπύλες και οι γεωμετρικοί τόποι, με έμφαση στις κωνικές παρουσιάζονται από τον Lacroix σχεδόν όπως σήμερα.

Η συνεχής έμφαση που δίνει στη σχεδόν αυτοματοποιημένη εφαρμογή των τύπων, κάνει το αντικείμενο να μοιάζει με αλγόριθμο, με ανεξάρτητες αναφορές στις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων. Η βασική αρχή της Αναλυτικής Γεωμετρίας δηλώνεται ρητά: «η εξίσωση μιας καμπύλης λαμβάνεται εκφράζοντας αναλυτικά μια από τις ιδιοτητές της» και αμοιβαία, «μέσω της εξίσωσης μιας καμπύλης γίνονται γνωστές οι ιδιότητες από τις οποίες είναι φτιαγμένη» (Boyer, 1956, σελ. 214).

Αν και ο Lacroix δε χρησιμοποίησε στον τίτλο των εργασιών του τον όρο Αναλυτική Γεωμετρία, ο όρος αυτός άρχισε να εμφανίζεται με αυξανόμενη συχνότητα. Το όνομα «Αναλυτική Γεωμετρία» εμφανίζεται το 1779 ως τίτλος στο έργο Method of Fluxions του Newton στα Opera που εκδόθηκε από τον Horsley, και στους τίτλους δύο εργασιών του Fuss το 1780 και 1781 και στη συνέχεια σιγά-σιγά καθιερώνεται ως όρος που περιγράφει το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Ο επόμενος μεγάλος σταθμός της Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι οι ομογενείς συντεταγμένες. Σύμφωνα με τον Boyer (1956, κεφάλαιο IX), ο Julius Plücker (1801-1868), το 1829 σε ένα άρθρο του με τίτλο «Über ein neues Coordinatensystem» (σχετικά με ένα νέο σύστημα συντεταγμένων), ανακάλυψε εκ νέου ένα σύστημα συντεταγμένων που είχε επινοηθεί από τον A. F. Möbius (1790-1860), τον Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) και τον École Bobillier (1798-1840) στο παρελθόν. Ο Plücker στην αρχή θεώρησε τρεις συντεταγμένες p, q και r ενός σημείου M του επιπέδου ως τα τρία μήκη των ευθειών που φέρνει από το M προς τρεις ευθείες αναφοράς, ανά δύο όχι παράλληλες, οι οποίες σχηματίζουν συγκεκριμένες γωνίες με τις ευθείες αναφοράς. Αργότερα υιοθετεί αποστάσεις (κάθετες), που αντιστοιχούν στις γνωστές τριγραμμικές συντεταγμένες.

Στη συνέχεια όμως το 1831, στο δεύτερο τόμο της Analytisch-geometrische Abhandlungen, έδωσε τον πιο συνηθισμένο ορισμό των ομογενών συντεταγμένων ως ένα σύνολο διατεταγμένων τριάδων (x, y, t) σχετικών με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (X, Y) του P έτσι ώστε $x = Xt$ και $y = Yt$. Είναι προφανές ότι οι ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου P δεν είναι μοναδικές, διότι οι τριάδες (x, y, t) και (kx, ky, kt) για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$, αντιστοιχούν στο ίδιο καρτεσιανό ζεύγος $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$.

Το 1829 ο Plücker παρουσίασε μια επαναστατική άποψη, η οποία άλλαξε πλήρως την ιδέα ότι οι συντεταγμένες παριστάνουν ευθύγραμμα τμήματα. Την αρχική περίοδο δημιουργίας της Αναλυτικής Γεωμετρίας, οι παράμετροι a, b και c στην εξίσωση $ax + by = c^2$, ήταν κατανοητές ως ορισμένα ευθύγραμμα τμήματα, στα πλαίσια της διατήρησης της ιδέας της ομοιογένειας (κάθε γινόμενο παριστάνει εμβαδό). Βαθμιαία οι συντελεστές αποκτούσαν υπόσταση γνήσιων αριθμών. Τη εποχή που γεωμετρική ομοιογένεια εξαφανίζονταν, εμφανίστηκαν οι ομογενείς συντεταγμένες, οδηγώντας όχι στην επιστροφή στις γεωμετρικές έννοιες, αλλά στην πλήρη αριθμητικοποίηση.

Ξεκινώντας με την εξίσωση της ευθείας $Ax + By + C = 0$, ο Plücker χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες τη μετέτρεψε στη μορφή $aA + bB + cC = 0$. Οι τρεις συντελεστές (A, B, C) καθορίζουν την ευθεία, ακριβώς όπως οι ομογενείς συντεταγμένες (a, b, c) καθορίζουν το σημείο. Υπάρχει δηλαδή, μια αναλογία μεταξύ των ποσοτήτων των δύο συνόλων (τριάδες που καθορίζουν την ευθεία και τριάδες που καθορίζουν το σημείο). Αν οι (a, b, c) καλούνται συντεταγμένες, η ίδια φρασεολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τις (A, B, C). Ο Plücker αξιοποίησε το πλεονέκτημα αυτής της κατάστασης και κάλεσε την τελευταία τριάδα «συντεταγμένες ευθείας». Οι συντεταγμένες της ευθείας στο άπειρο, για παράδειγμα, είναι $(0, 0, C)$ και οι συντεταγμένες των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι του τύπου $(A, B, 0)$.

Για να την προσαρμόσει στην καρτεσιανή σύμβαση, όπου οι άγνωστοι (μεταβλητές) σημειώνονται από γράμματα κοντά στο τέλος του αλφαβήτου, ο Plücker ξανάγραψε την εξίσωση του ως $au + bv + cw = 0$. Αν (a, b, c) είναι οι συντεταγμένες ενός μεταβλητού σημείου και τα u, v, w είναι σταθερά, η εξίσωση αναπαριστά την ευθεία που περιέχει όλα τα παραπάνω σημεία. Αν (u,v,w) είναι οι συντεταγμένες μιας μεταβλητής ευθείας γραμμής και τα a,b,c είναι σταθερά, η εξίσωση παριστά το σημείο που είναι κοινό σε όλες τις ευθείες. Δηλαδή μια πρώτου βαθμού εξίσωση σε συντεταγμένες σημείων αναπαριστά μια ευθεία, ενώ σε συντεταγμένες ευθειών μια τέτοια εξίσωση αναπαριστά σημείο. Για παράδειγμα η εξίσωση $2x+3y+4t=0$ αν το (x,y,t) είναι συντεταγμένες σημείου αναπαριστά ευθεία και αν το (x,y,t) είναι συντεταγμένες ευθείας αναπαριστά σημείο. Έτσι ο Plücker ανακάλυψε ένα αναλυτικό αντίγραφο της γεωμετρικής αρχής του δυϊσμού. Η εναλλαγή των λέξεων «σημείο» και «ευθεία», απλά αντιστοιχεί στην εναλλαγή των λέξεων «σταθερά» και «μεταβλητή», όσον αφορά τις ποσότητες a,b,c και u,v,w. Αλλά η αλγεβρική διεργασία παραμένει η ίδια και έτσι κάθε θεώρημα εμφανίζεται αμέσως σε δύο τύπους που ο ένας είναι δυϊκός του άλλου.

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σύντομη και περιληπτική περιγραφή των προσπαθειών των μαθηματικών σε διάστημα δύο αιώνων, για τον πλήρη προσδιορισμό του μαθηματικού αντικειμένου που σήμερα ονομάζουμε Αναλυτική Γεωμετρία, θα αναφερθούμε σε τρία σχόλια του Boyer (1956, σελ. 266) όσον αφορά την εξέλιξη και το μέλλον του κλάδου. Το πρώτο είναι ότι «ο θάνατος του Plücker δε φέρνει και το τέλος της ανάπτυξης της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αφού όπως πολλοί μεγάλοι άνδρες, είχε παθιασμένους οπαδούς». Το δεύτερο σχόλιο, που σχετίζεται και με τις απόψεις του Coolidge (1940), είναι ότι « η ιστορία δείχνει ότι η γενική τάση (στη Γεωμετρία σαν σύνολο, όπως επίσης και στην Αναλυτική Γεωμετρία) ήταν ολοένα και περισσότερη γενίκευση (και αφαίρεση όσον αφορά τις μαθηματικές μεθόδους κατά τον Coolidge), αν και οι συνεισφορές των ατόμων έτειναν στην αντίθετη κατεύθυνση». Το τρίτο σχόλιο είναι μια παρουσίαση του προβληματισμού του Wieleitner από τον Boyer, ο οποίος αναφέρει ότι «πιθανόν σε εκατό ή διακόσια χρόνια από τώρα η Αναλυτική Γεωμετρία θα είναι τόσο διαφορετική από τη δικιά μας, όσο διαφορετική είναι η δικιά μας από αυτήν του Descartes και του Fermat».

2. Η Αναλυτική Γεωμετρία στη Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια Εκπαίδευση της Ελλάδας

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται προσέγγιση στη διδασκαλία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την περιληπτική περιγραφή σχετικών βιβλίων.

Όσον αφορά τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, εξετάζονται πέντε βιβλία. Το πρώτο βιβλίο χρησιμοποιήθηκε τη δεκαετία του εβδομήντα στο τότε εξατάξιο Γυμνάσιο. Τα υπόλοιπα τέσσερα βιβλία χρησιμοποιήθηκαν στο Λύκειο. Τα τρία απ' αυτά ως διδακτικά εγχειρίδια στην Γ΄ τάξη και το τέταρτο χρησιμοποιείται, ακόμα και σήμερα, στη Β΄ τάξη του Λυκείου. Η εισαγωγή της Αναλυτικής Γεωμετρίας ως εκπαιδευτικό αντικείμενο προσδιορίζεται τη δεκαετία του εβδομήντα. Σίγουρα όμως από τη δεκαετία του ογδόντα και μέχρι σήμερα, διδάσκεται συστηματικά στο Λύκειο.

Όσον αφορά την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, περιγράφονται τα πρώτα βιβλία που εμφανίστηκαν στα ελληνικά και χρησιμοποιήθηκαν ως διδακτικά εγχειρίδια. Ας σημειωθεί ότι εδώ και ένα περίπου αιώνα η Αναλυτική Γεωμετρία διδάσκεται συστηματικά στα Πανεπιστήμια και έχουν εκδοθεί πλήθος βιβλίων και σημειώσεων στο αντικείμενο αυτό. Το πρώτο νεοελληνικό βιβλίο που περιείχε στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας, είναι τα Στοιχεία Μαθηματικών (Μόσχα 1798-1799) του Νικηφόρου Θεοτόκη, ενώ το βιβλίο με τίτλο Των Κωνικών Τομών Αναλυτική Πραγματεία (Βιέννη 1803) του Σπυρίδωνα Ασάνη είναι το πρώτο αυτοτελές βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην Αθήνα το 1857, τυπώθηκε βιβλίο με τίτλο Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας του Αντισυνταγματάρχη Πυροβολικού Μιχάλη Σοφιανού για τη Σχολή Ευελπίδων. Όσον αφορά το Πανεπιστήμιο Αθηνών, που ιδρύθηκε το 1837, τα μαθηματικά στην αρχή ήταν μέρος των σπουδών της Φιλοσοφικής Σχολής. Η ανεξαρτησία του Μαθηματικού και Φυσικού τμήματος πραγματοποιήθηκε το 1904 (επίσημη ιστοσελίδα του Πανεπιστημίου Αθηνών). Ο Ιωάννης Ν. Χατζηδάκης, καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών, έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο Αναλυτική Γεωμετρία και πιθανή χρονολογία έκδοσης το 1879. Οι σημειώσεις από τις διαλέξεις του καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Κυπάρισσου Στέφανου, στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο το 1915, μας βεβαιώνουν ότι η Αναλυτική Γεωμετρία διδάσκονταν συστηματικά την εποχή εκείνη στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Τέλος ο Νικόλαος Β. Γεννηματάς, τακτικός καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου

Πολυτεχνείου, έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο «Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία» το οποίο τυπώθηκε σε δύο τεύχη το πρώτο το 1924 και το δεύτερο το 1925.

Για τα βιβλία του Θεοτόκη και του Ασάνη η περιγραφή στηρίζεται σε άρθρο των Καστάνη και Λάμπρου (2003), ενώ για τα υπόλοιπα βιβλία η πηγή πληροφόρησης είναι τα ίδια τα βιβλία.

2.1. Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Το πρώτο βιβλίο που θα γίνει αναφορά είναι τα «Μαθηματικά» Ε΄ Γυμνασίου (Θετικής κατεύθυνσης) του Ηλία Β. Ντζιώρα, από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1972. Το τέταρτο και τελευταίο μέρος του παραπάνω βιβλίου, που είχε γραφτεί από τον Ιωάννη Πανάκη, αναφέρεται σε θέματα Αναλυτικής Γεωμετρίας αν και, με βάση προφορικές πηγές πληροφόρησης, το μέρος αυτό δε διδάσκονταν συχνά στους μαθητές.

Στο μέρος αυτό του βιβλίου, γίνεται σπουδή του Διανυσματικού Λογισμού και στη συνέχεια ορίζεται διανυσματικά η ευθεία στο επίπεδο. Μετά την εύρεση των παραμετρικών εξισώσεων, ο συγγραφέας καταλήγει στην καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας. Αποδεικνύει μέσω των παραμετρικών εξισώσεων ότι «ένα σύνολο σημείων αποτελεί ευθεία όταν, και μόνο όταν, οι συντεταγμένες (x, y) των σημείων αυτών ικανοποιούν την εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, όπου οι συντελεστές A και B δε μηδενίζονται ταυτόχρονα» (σελ. 387). Αφού διερευνά τη γενική εξίσωση ευθείας, περιορίζει στο πέμπτο κεφάλαιο την παραπάνω μελέτη σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και παράγει τύπους όπως για παράδειγμα, συνθήκη καθετότητας, απόσταση σημείου από ευθεία. Μελετά γραφικά τη λύση ανισώσεων και τέλος, αφού εισάγει τις πολικές συντεταγμένες, βρίσκει την εξίσωση της ευθείας σε αυτές.

Τα επόμενα βιβλία που περιγράφονται, με βάση τα οποία διδάσκονταν και διδάσκονται Αναλυτική Γεωμετρία οι μαθητές του Λυκείου, είναι τα

- Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας του Γρηγορίου Φ. Τσάγκα, από τις εκδόσεις του Ιδρύματος Ευγενίδου, 1981.
- Μαθηματικά Ι, Γ΄ Λυκείου (Αναλυτική Γεωμετρία) των Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλου, Χ. Γιαννίκου, Α. Μπέση, Δ. Νοταρά, Κ. Σολδάτου και Σ. Φωτόπουλου, από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1991.

- Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου (Άλγεβρα- Αναλυτική Γεωμετρία- Πιθανότητες) των Σ. Ανδρεαδάκη, Ν. Κουσέρα, Σ. Μέτη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1993.
- Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, Β΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου των Λ. Αδαμόπουλου, Β. Βισκαδουράκη, Δ. Γαβαλά, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 2003 (διδάσκεται σήμερα).

Στόχος είναι να περιγραφεί ο τρόπος που διαπραγματεύονται κάποιες έννοιες τα παραπάνω βιβλία, έννοιες που σχετίζονται κυρίως με την έρευνα που περιγράφεται στις επόμενες ενότητες. Και τα τέσσερα βιβλία διαπραγματεύονται, μεταξύ άλλων, την ευθεία, τον κύκλο και τις κωνικές τομές στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Με χρήση των εργαλείων που προσφέρει ο παραπάνω κλάδος, αποδεικνύονται διάφορες ιδιότητες των καμπύλων και λύνονται διάφορα προβλήματα που εμπλέκουν τις παραπάνω έννοιες. Προηγείται ο διανυσματικός λογισμός, ο οποίος χρησιμοποιείται στη συνέχεια στον ορισμό της ευθείας και στις αποδείξεις διαφόρων προτάσεων. Στα βιβλία του Τσάγκα (1979) και των Βαρουχάκη κ.α. (1991) υπάρχει κεφάλαιο που ασχολείται με τον τριδιάστατο χώρο, και μάλιστα, στο βιβλίο του Τσάγκα (1979) έχουμε συστηματική μελέτη των εξισώσεων της ευθείας και του επιπέδου. Να σημειώσουμε ότι τα τρία βιβλία διδάσκονταν στη Γ΄ Λυκείου, ενώ το τελευταίο διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου.

Το πρώτο σχετικό θέμα είναι η έννοια της εξίσωσης μιας γραμμής (ευθείας-καμπύλης) γενικά. Το βιβλίο του Τσάγκα (1979) αναφέρει ότι «μια εξίσωση $f(x,y)=0$, παριστάνει μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ και αν οι εξισώσεις $x=\varphi_1(t)$ και $y=\varphi_2(t)$, όπου t παράμετρος, πληρούν την $f(x,y)=0$, τότε λέμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης C» (σελ. 46). Εκφράζει τη διανυσματική ακτίνα του τυχαίου σημείου της καμπύλης, ως προς τις φ_1 και φ_2 , την οποία καλεί διανυσματική εξίσωση της C. Τέλος αναφέρει ότι αν απαλείψουμε την παράμετρο t, εφ' όσον είναι αυτό δυνατόν, θα πάρουμε την εξίσωση $f(x,y)=0$ χωρίς παράμετρο.

Το βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), ασχολείται κατ' αρχήν με τη γραφική παράσταση συνάρτησης, την οποία συνδέει με τις λύσεις της εξίσωσης $y=f(x)$. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να γενικεύσει την παραπάνω ιδέα, αναφέρει ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρεί τον κύκλο C κέντρου (0,0) και ακτίνας 2 και αποδεικνύει ότι οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου του κύκλου επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και, αντίστροφα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση, τότε αυτό το σημείο ανήκει στον κύκλο. Αφού παρατηρεί ότι ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση, διατυπώνει σε πλαίσιο τον κανόνα, για το πότε μια εξίσωση $\varphi(x, y) = 0$ λέγεται εξίσωση μιας γραμμής (ευθύ και αντίστροφο). Συγκεκριμένα αναφέρει ότι «η εξίσωση $\varphi(x, y) = 0$ θα λέγεται εξίσωση της γραμμής C (ή εξίσωση του σημειοσυνόλου C) όταν:

- Οι συντεταγμένες x, y κάθε σημείου M της C επαληθεύουν την $\varphi(x, y) = 0$ και
- Κάθε σημείο που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την $\varphi(x, y) = 0$ ανήκει στη C» (σελ. 71).

Ειδικά για τις λύσεις και τα σημεία, τα αντιμετωπίζει ως διαφορετικές οντότητες, σημειώνοντας τη σχέση μεταξύ τους, δηλαδή ότι: «…οι λύσεις προσδιορίζουν τα σημεία…». Τέλος, σημειώνει ότι με τις εξισώσεις των γραμμών, μπορούμε με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους, να μελετάμε γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίζουμε διάφορα άλλα συναφή προβλήματα και ότι αυτό ακριβώς είναι το αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Το βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993) έχει μια παρόμοια προσέγγιση με το βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991). Αναφέρει στην αρχή το παραπάνω παράδειγμα του κύκλου και το διαπραγματεύεται με τον ίδιο τρόπο. Στη συνέχεια διατυπώνει ως ορισμό, για το πότε θα λέμε ότι μια εξίσωση είναι εξίσωση μιας γραμμής, χωρίς όμως να διακρίνει το ευθύ και το αντίστροφο, αφού απλά διατυπώνει την ισοδυναμία, δηλαδή ότι: « … όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνον αυτές την επαληθεύουν» (σελ. 139). Δεν κάνει σαφή τον οντολογικό διαχωρισμό μεταξύ λύσεων και σημείων, αφού δεν αναφέρεται χωριστά στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης και στα σημεία που αυτές αντιστοιχούν στο γεωμετρικό πεδίο αναπαράστασης της έννοιας. Επίσης διατυπώνει την ίδια παρατήρηση που αναφέρεται στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), σε σχέση με το αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τέλος θέλοντας να συνδέσει τις παραπάνω εξισώσεις με τις συναρτήσεις, αναφέρει ότι πολλές φορές η εξίσωση μιας γραμμής μπορεί να λυθεί ως προς y, δηλαδή μπορεί να πάρει τη μορφή $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση του x και το πράττει σε μια ευθεία και στον παραπάνω κύκλο, αφού πρώτα τον χωρίσει σε δύο ημικύκλια.

Το βιβλίο των Αδαμόπουλου κ.α. (2003), αναφέρει κατ' αρχήν ένα άλλο παράδειγμα. Θεωρεί την εξίσωση $y = x^2$. Αφού λέει ότι λύση της εξίσωσης είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει, αναφέρει μερικά παραδείγματα λύσεων, όλες με θετική τιμή για το x. Έχει το σχήμα της παραβολής σχεδιασμένο στο επίπεδο και πάνω σ' αυτό κάποια σημεία άσχετα με τις προαναφερθείσες λύσεις. Στη συνέχεια διατυπώνεται η εξής πρόταση: «Αν τώρα σε ένα σύστημα αξόνων παραστήσουμε με σημεία όλες τις λύσεις της εξίσωσης $y = x^2$, τότε θα προκύψει η γραμμή C, του διπλανού σχήματος που, όπως γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις, λέγεται παραβολή» (σελ. 57). Δε διατυπώνει ρητά, την αντιστοίχηση των λύσεων της εξίσωσης με τις συντεταγμένες των σημείων. Επειδή το παράδειγμα που χρησιμοποιεί, δεν προσφέρεται για απόδειξη στο σημείο αυτό, απλά παρατηρεί ότι: «Επειδή οι συντεταγμένες (x, y) των σημείων $M(x, y)$ της παραβολής C, και μόνο αυτές, επαληθεύουν την εξίσωση $y = x^2$, γι' αυτό η εξίσωση $y = x^2$ λέγεται εξίσωση της παραβολής C» (σελ. 57). Ομοίως με το βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993) δε γίνεται σαφής οντολογικός διαχωρισμός, μεταξύ λύσεων και σημείων. Αφού γενικεύσει τον παραπάνω ορισμό, διατυπώνει την ίδια παρατήρηση που αναφέρεται στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), σε σχέση με το αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Το δεύτερο σχετικό θέμα είναι η χρήση της έννοιας της συνάρτησης στη διαπραγμάτευση των θεμάτων από τα παραπάνω βιβλία. Όπως είδαμε παραπάνω, τα βιβλία των Βαρουχάκη κ.α. (1991) και των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993) εμπλέκουν τις συναρτήσεις από την αρχή. Είναι βέβαια βιβλία που απευθύνονται σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Όμως, και στη Β΄ Λυκείου η έννοια της συνάρτησης δεν είναι άγνωστη στους μαθητές. Στην Α΄ Λυκείου, υπάρχει ένα ολόκληρο κεφάλαιο που διαπραγματεύεται διάφορες συναρτήσεις.

Όσον αφορά το βιβλίο του Τσάγκα (1979), οι καμπύλες δεν αντιμετωπίζονται ως γράφημα συνάρτησης. Μια αναφορά σε συναρτήσεις γίνεται όταν ορίζονται οι παραμετρικές εξισώσεις μιας γραμμής. Το βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), αν και αρχικά εισάγει την εξίσωση μιας γραμμής μέσα από τη σύνδεση της με τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$, στη συνέχεια δεν αναφέρεται πουθενά η λέξη συνάρτηση. Στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993), η έννοια της συνάρτησης είναι συσχετισμένη με τις εξισώσεις των γραμμών και χρησιμοποιείται ουσιαστικά. Για παράδειγμα για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης της παραβολής, χρησιμοποιείται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης. Στο βιβλίο των Αδαμόπουλου κ.α. (2003), η λέξη συνάρτηση αναφέρεται μόνο στην περίπτωση της παραβολής $x^2 = 2py$ και μόνο για να θυμίσει στους μαθητές τη συνάρτηση που έχουν μάθει στην Α΄ Λυκείου.

Το επόμενο θέμα είναι η μετάβαση από μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε μια άλλη. Συγκεκριμένα, θα διερευνηθεί η μετάβαση από τον ορισμό μιας έννοιας ως γεωμετρικό τόπο, στην εξίσωση που αναπαριστά την έννοια και αντίστροφα η μετάβαση από την εξίσωση στον ορισμό, στις αποδείξεις που έχουν τα βιβλία για τον κύκλο και τις κωνικές τομές.

Στο βιβλίο του Τσάγκα (1979), η μετάβαση από τον ορισμό του κύκλου ως γεωμετρικό τόπο σημείων, στην εξίσωση γίνεται με το μετασχηματισμό της διανυσματικής εξίσωσης $\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| = R$, όπου $\vec{r}, \vec{r}_0, R$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες του τυχαίου σημείου του κύκλου, του κέντρου του κύκλου και η ακτίνα του κύκλου, στην αναλυτική εξίσωση του κύκλου. Το αντίστροφο δε διατυπώνεται και η πρόταση που χρησιμοποιείται για την ισοδυναμία των δύο εξισώσεων είναι «η εξίσωση $\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| = R$ με τη βοήθεια των συντεταγμένων των σημείων μεταβάλλεται στην εξίσωση του κύκλου» (σελ. 64), η οποία φυσικά δεν παραπέμπει απαραίτητα, στην ισοδυναμία των δύο εξισώσεων. Όσον αφορά τις κωνικές τομές, η μετάβαση από τον γεωμετρικό ορισμό στην εξίσωση γίνεται με πλήρη απόδειξη. Στις περιπτώσεις της έλλειψης και της υπερβολής η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή η μετάβαση από την εξίσωση στο γεωμετρικό ορισμό αποδεικνύεται συστηματικά, ενώ για την παραβολή, το αντίστροφο απλά σημειώνεται, χωρίς να γίνεται η απόδειξη του.

Στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), η μετάβαση από τον ορισμό του κύκλου ως γεωμετρικό τόπο σημείων στην εξίσωση και αντίστροφα, γίνεται με την απόδειξη της ισοδυναμίας του ορισμού του κύκλου με την εξίσωση του (με χρήση της λέξης ισοδύναμα ή του συμβόλου της ισοδυναμίας). Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζεται και η παραβολή, ενώ για την έλλειψη και την υπερβολή, γίνεται χωριστά η απόδειξη του αντίστροφου, δηλαδή ότι οι λύσεις της εξίσωσης αντιστοιχούν σε συντεταγμένες σημείων της αντίστοιχης κωνικής τομής, με βάση τον ορισμό της.

Στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993), όσον αφορά τον κύκλο έχουμε την ίδια αντιμετώπιση με το βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. (1991), στην παραβολή όμως διατυπώνεται ρητά η ισοδυναμία του γεωμετρικού ορισμού με τη σχέση $d(M,\delta) = d(M,E)$, όπου M είναι το τυχαίο σημείο της παραβολής, E η εστία της και δ η διευθετούσα, αλλά για τη μετάβαση από την παραπάνω εξίσωση στην αναλυτική εξίσωση της παραβολής χρησιμοποιείται η έκφραση: «έχουμε διαδοχικά» (σελ. 174). Στις περιπτώσεις της έλλειψης και της υπερβολής, αποδεικνύεται η εξίσωση από το γεωμετρικό ορισμό, αλλά η αντίστροφη πρόταση απλά σημειώνεται, χωρίς να γίνεται η απόδειξη της. Μια παρατήρηση που θα μπορούσε να γίνει όσον αφορά π.χ. τη διατύπωση του αντίστροφου, είναι ότι η έκφραση: «το σημείο $M(x, y)$ που επαληθεύει την εξίσωση» προϋποθέτει την ταυτοποίηση των λύσεων μιας εξίσωσης και (των συντεταγμένων) των σημείων του σχήματος που αυτή αναπαριστά.

Στο βιβλίο των Αδαμόπουλου κ.α. (2003), το παραπάνω θέμα αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993), με μόνη διαφορά ότι διαχωρίζει τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων, από τον κύκλο με κέντρο οποιοδήποτε σημείο. Επίσης, στη διατύπωση της αντίστροφης πρότασης για την έλλειψη και την υπερβολή, χρησιμοποιείται η έκφραση «το σημείο $M(x, y)$, του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση» (σελ. 103), που κάνει πιο σαφή τη διάκριση μεταξύ σημείων του σχήματος και λύσεων της εξίσωσης.

Το τελευταίο θέμα είναι η εφαπτομένη καμπύλης, αν και δεν αφορά άμεσα την παρούσα εργασία. Και στα τέσσερα βιβλία η εφαπτόμενη του κύκλου σε ένα σημείο του, ορίζεται ως η ευθεία που είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από το σημείο αυτό. Στα βιβλία του Τσάγκα (1979) και των Βαρουχάκη κ.α. (1991), η εφαπτομένη σε οποιαδήποτε κωνική ορίζεται με αλγεβρικό τρόπο, δηλαδή με την απαίτηση η ευθεία που διέρχεται από το σημείο της κωνικής, να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη, πράγμα που οδηγεί στη διπλή ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (που είναι σωστό τις κωνικές τομές, αλλά δεν ισχύει για οποιαδήποτε καμπύλη). Στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. (1993), η εφαπτομένη στις κωνικές τομές ορίζεται με χρήση παραγώγων (η Αναλυτική Γεωμετρία διδασκόταν παράλληλα με την Ανάλυση), αφού αρχικά οι παραπάνω καμπύλες θεωρούνται ως γραφικές παραστάσεις μιας ή δύο συναρτήσεων. Τέλος, στο βιβλίο των Αδαμόπουλου κ.α. (2003, σελ. 93-94) για την παραβολή, έχουμε μια προσέγγιση που μοιάζει με αυτή που θα δούμε παρακάτω να χρησιμοποιείται από τον Μιχάλη Σοφιανό και τον Ιωάννη Χατζηδάκη. Συγκεκριμένα ορίζει την εξίσωση της τέμνουσας ευθείας σε δύο σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ της παραβολής ($y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$). Στη συνέχεια με αλγεβρικούς χειρισμούς των σχέσεων $y_1^2 = 2px_1$ και $y_2^2 = 2px_2$ εκφράζει διαφορετικά το συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας ($\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$). Κάνει την αντικατάσταση της σχέσης αυτής στην εξίσωση της τέμνουσας και καταλήγει στην εξίσωση $(y_2 + y_1)(y - y_1) = 2p(x - x_1)$. Στη συνέχεια σημειώνει ότι αν το σημείο $M_2(x_2, y_2)$, κινούμενο πάνω στην παραβολή, τείνει να συμπέσει με το σημείο $M_1(x_1, y_1)$, τότε το y_2 τείνει να γίνει ίσο με το y_1, οπότε η εξίσωση της τέμνουσας τείνει να πάρει τη μορφή $(y_1 + y_1)(y - y_1) = 2p(x - x_1)$ δηλαδή τη μορφή $yy_1 = p(x + x_1)$. Αφού επαναλαμβάνει ότι η εξίσωση που βρήκε παριστάνει μια ευθεία που είναι οριακή θέση της τέμνουσας, γράφει ότι η ευθεία αυτή ($yy_1 = p(x + x_1)$) λέγεται εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης και της υπερβολής απλά σημειώνονται, συνοδευόμενες από το σχόλιο ότι πράττουμε ομοίως με την παραβολή.

2.2. Τριτοβάθμια Εκπαίδευση

Σύμφωνα με τους Καστάνη και Λάμπρου (2003), το πρώτο νεοελληνικό βιβλίο που περιέχει Αναλυτική Γεωμετρία (όχι ως αυτοτελές έργο), είναι τα Στοιχεία Μαθηματικών (Μόσχα 1798-1799) του Νικηφόρου Θεοτόκη (1731-1800). Ο Θεοτόκης δίδαξε στο «Κοινόν Φροντιστήριον» της Κέρκυρας και στην Ηγεμονική Ακαδημία του Ιασίου. Στον τρίτο τόμο του έργου του, με αντικείμενο την Άλγεβρα, παρουσιάζει με αναλυτικό τρόπο τον κύκλο και τις κωνικές τομές. Παράγει τις εξισώσεις του κύκλου, της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής με τη βοήθεια ενσωματωμένων συστημάτων αναφοράς, και συγκεκριμένα μια πρωταρχική διάμετρό τους έχοντας ως αρχή το σημείο τομής ή ένα από τα σημεία τομής αυτής της διαμέτρου με την εκάστοτε καμπύλη. Επίσης, προσδιορίζει τις εφαπτόμενες των κωνικών καμπυλών από τις εξισώσεις τους με τη βοήθεια διαφορικών. Δηλαδή, έχουμε σε αυτό το σημείο την πρώτη χρήση παραγώγων σε ελληνικό μαθηματικό έντυπο της εποχής της Τουρκοκρατίας.

Το δεύτερο βιβλίο, σύμφωνα με τους Καστάνη και Λάμπρου (2003) που χρησιμοποιεί τα εργαλεία της Αναλυτικής Γεωμετρίας έχει ελληνικό τίτλο: «Των Κωνικών Τομών Αναλυτική Πραγματεία» (Βιέννη 1803) και είναι μετάφραση που έγινε από το Σπυρίδωνα Ασάνη (1749-1833) του έργου του Nicolas Louis De La Caille (1713-1762), με τίτλο: «Tractatus Analyticus de Sectionibus Conicis». Ο Ασάνης δίδαξε στα Αμπελάκια την περίοδο 1799-1804. Το βιβλίο αυτό αποτελεί σταθμό στην ιστορία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Ένας λόγος για την παραπάνω θεώρηση είναι οι, ξεχασμένες σήμερα, τεχνικές της Απειροστικής Γεωμετρίας.

Ξεκινάει με μια μεταβλητή την οποία ονομάζει «ποσότητα» και δίνει παραδείγματα παραστάσεων, όπως $\frac{1}{2}a$, a^2, $\sqrt{a}$ κ.τ.λ., της μεταβλητής a τις οποίες ονομάζει «συνεκθέσεις». Εισάγει άξονες συντεταγμένων και ορίζει τις τιμές στο θετικό άξονα ως «καταφατικές», ενώ στον αρνητικό ως «ἀποφατικές». Η αρχή των αξόνων ονομάζεται «Ἀρχή», ο άξονας των x είναι η «Γραμμή τῶν Ἀποτετμημένων» και των y η «Γραμμή τῶν Τεταγμένων». Οι άξονες είναι, εν γένει, πλάγιοι. Για το γράφημα μιας συνάρτησης σημειώνει «Καμπύλη ὁποιαδήποτε ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένη, ὡς σειρὰ θεωρεῖται τῶν ἐκ τῶν ἀκαριαίων προβάσεων ἰχνῶν ἄγε σημεῖον συνεχῶς κινούμενον ἐν ἐπιπέδῳ σημειοῖ διά τινος ἀπαρατρέπτου κανόνος» (επηρεασμένος από τον Euler). Ασχολείται με την εύρεση των εξισώσεων καμπυλών, τις οποίες κατηγοριοποιεί με βάση το βαθμό τους. Αντιμετωπίζει θέματα εφαπτόμενων, καμπυλότητας και εμβαδού με τη μέθοδο των απειροστών. Για παράδειγμα, για την εύρεση του κύκλου καμπυλότητας μιας καμπύλης σε ένα σημείο της M, παίρνει δύο σημεία A και B της καμπύλης εκατέρωθεν του M και επιχειρηματολογεί ότι $AM = MB$ λέγοντας «ἴσαι ἀλλήλοις ὡς ἀπειράκις ἐλάχισται οὖσαι». Βρίσκει τον κύκλο που διέρχεται από τα τρία σημεία και στη συνέχεια προσδιορίζει τον κύκλο καμπυλότητας, παίρνοντας (με δική μας ορολογία και μεθοδολογία) το όριο όταν τα A και B τείνουν στο M.

Το βιβλίο με τίτλο «Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας», είχε γραφτεί από τον Αντισυνταγματάρχη του Πυροβολικού Μιχάλη Σοφιανό, καθηγητή της Σχολής των Ευελπίδων, για χρήση των μαθητών του και τυπώθηκε στην Αθήνα το 1857. Το βιβλίο χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος ασχολείται με το επίπεδο και το δεύτερο με τις τρείς διαστάσεις.

Στην αρχή του βιβλίου ορίζει την Αναλυτική Γεωμετρία, λέγοντας ότι είναι το μέρος των Μαθηματικών που πραγματεύεται τη χρήση της Άλγεβρας στις γεωμετρικές έρευνες. Επίσης διατυπώνει απλά γεωμετρικά προβλήματα και στη συνέχεια πιο σύνθετα, τα οποία λύνει με χρήση αλγεβρικών μεθόδων. Ορίζει ομογενή εξίσωση, αυτήν που όλοι οι όροι είναι ισοβάθμιοι (ομοιογένεια του Viète). Κατασκευάζει γεωμετρικά αλγεβρικές εκφράσεις π.χ την $x = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ όπου τα μ και ν είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

Ορίζει άξονες συντεταγμένων δύο ευθείες που τέμνονται υπό γνωστή γωνία (συνήθως ορθή). Ορίζει τη θέση κάθε σημείου του επιπέδου, με βάση τα σημεία τομής των αξόνων και των παραλλήλων που φέρνει από το σημείο προς τους άξονες. Τις προσανατολισμένες αποστάσεις των σημείων αυτών από το σημείο τομής των αξόνων, ονομάζει τετμημένη και τεταγμένη, και προσθέτει ότι πρέπει να θεωρούνται ποσότητες μεταβλητές που μπορούν να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές. Αναφέρει ότι η εξίσωση εκφέρει με γενικό τρόπο τη σχέση των συντεταγμένων της γραμμής, η δε γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης. Διαπραγματεύεται τη γραφική παράσταση εξισώσεων, όπως για παράδειγμα την $\psi=\chi^2$, μέσω πίνακα τιμών. Ενώνει τα σημεία επικαλούμενος τη μεταβολή του χ κατά συνεχή τρόπο, το οποίο δηλώνει ότι συμβαίνει και για το ψ. Δίδει τύπους για μεταφορά και στροφή των αξόνων και παρατηρεί το αναλλοίωτο του βαθμού της εξίσωσης ως προς τους παραπάνω μετασχηματισμούς. Κατατάσσει τις αλγεβρικές καμπύλες με βάση το βαθμό τους και ασχολείται με τις εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού. Επίσης δίνει τους τύπους απόστασης δύο σημείων.

Αφού αποδεικνύει γεωμετρικά ότι η $\psi=\alpha\chi$ είναι εξίσωση ευθείας, γενικεύει και στη συνέχεια διερευνά τη γενική εξίσωση της ευθείας. Όσον αφορά τις δευτεροβάθμιες καμπύλες, ξεκινάει στο κεφάλαιο ΣΤ΄ από τη γενική εξίσωση $\mathrm{A}\psi^2+\mathrm{B}\chi\psi+\Gamma\chi^2+\Delta\psi+\mathrm{E}\chi+\mathrm{Z}=0$ την οποία για $\mathrm{A}\neq 0$ τη μετασχηματίζει στη μορφή $y=\alpha\chi+\beta\pm\frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{\nu\chi^2+2\pi\chi+\kappa}$, όπου διακρίνοντας περιπτώσεις για το $\nu=\mathrm{B}^2-4\mathrm{A}\Gamma$ ορίζει την έλλειψη ($\nu<0$), την υπερβολή ($\nu>0$) και την παραβολή ($\nu=0$).

Ασχολείται σε τέσσερα κεφάλαια με τον κύκλο και τις κωνικές τομές, όπου αποδεικνύει αναλυτικά διάφορες ιδιότητες τους. Το πρόβλημα της εφαπτομένης το αντιμετωπίζει και στις τέσσερις καμπύλες με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα, στον κύκλο με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=\alpha^2$ θεωρεί σημεία M και M' του κύκλου, με συντεταγμένες χ',ψ' και χ'',ψ'' και την εξίσωση της τέμνουσας MM': $\psi-\psi'=\frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}(\chi-\chi')$. Από τις σχέσεις που προκύπτουν μέσω της επαλήθευσης των συντεταγμένων των σημείων στην εξίσωση του κύκλου, παράγει την ταυτότητα: $\frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}=-\frac{\chi'+\chi''}{\psi'+\psi''}$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση της τέμνουσας καταλήγει στην εξίσωση: $\psi-\psi'=-\frac{\chi'+\chi''}{\psi'+\psi''}(\chi-\chi')$. Αναφέρει ότι, αν το M

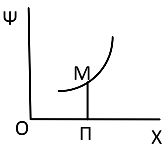
ταυτιστεί με το M', τότε $\chi' = \chi''$ και $\psi' = \psi''$ και η τέμνουσα παίρνει τη θέση της εφαπτόμενης με εξίσωση $\psi - \psi' = -\frac{\chi'}{\psi'}(\chi - \chi')$ δηλαδή $\psi'\psi + \chi'\chi = \alpha^2$ (σελ. 131-132). Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί όρια για να βρει τις ασύμπτωτες $\psi = \pm\frac{\beta}{\alpha}\chi$ της υπερβολής $\alpha^2\psi^2 - \beta^2\chi^2 = -\alpha^2\beta^2$. Τέλος αποδεικνύει ότι οι καμπύλες αυτές είναι οι ίδιες που προκύπτουν από την τομή κώνου ή κυλίνδρου με ένα επίπεδο και αναφέρει διάφορες εφαρμογές των κωνικών τομών, μεταξύ άλλων και τα περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας (διπλασιασμό κύβου, τριχοτόμηση γωνίας).

Το δεύτερο τμήμα του βιβλίου είναι αφιερωμένο στη Στερεομετρία. Ο συγγραφέας παράγει την εξίσωση του επιπέδου και της ευθείας. Δίνει τύπους μετασχηματισμών συντεταγμένων. Ασχολείται με τη σφαιρική, κυλινδρική, κωνική, κωνοειδή επιφάνεια και με τις επιφάνειες εκ περιστροφής. Διερευνά τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού και βρίσκει το εφαπτόμενο επίπεδο σε μια τέτοια επιφάνεια.

Ο Ιωάννης Ν. Χατζηδάκης (1844-1921), που διορίστηκε τακτικός καθηγητής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών το 1884 και καθηγητής του Πολυτεχνείου στην Έδρα της Θεωρητικής Μηχανικής το 1888 (Οδηγός Προπτυχιακών Σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου), έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο «Αναλυτική Γεωμετρία» με πιθανό έτος έκδοσης το 1879. Επίσης έγραψε ένα δεύτερο βιβλίο με τίτλο «Στερεά Αναλυτική Γεωμετρία» με έτος έκδοσης το 1880.

Αναφορικά με το πρώτο βιβλίο, στην εισαγωγή του προσδιορίζεται το αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας ως η σπουδή των γεωμετρικών σχημάτων δια της Άλγεβρας. Ορίζει τον τρόπο που μπορούν να παρασταθούν τα σημεία δεδομένης ευθείας με ένα πραγματικό αριθμό και γενικεύει για τα σημεία του επιπέδου. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι «κάθε σημείο σ' ένα δοσμένο επίπεδο μπορεί να παρασταθεί από ένα ζεύγος αριθμών» και «τα σημεία του επιπέδου αντιστοιχούν προς τους πραγματικούς αριθμούς, αν τους πάρουμε ανά δύο˙ ένα σημείο προς ένα ζεύγος αριθμών και αντίστροφα» (σελ. 4). Οι συντεταγμένες των σημείων συμβολίζονται όπως και σήμερα, για παράδειγμα η αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες $(0,0)$. Οι άξονες είναι κάθετοι ή πλάγιοι.

Για την γεωμετρική παράσταση των εξισώσεων αναφέρει ότι, αν δώσουμε μια τιμή στη x, τότε μέσω της εξίσωσης μπορούμε να βρούμε την y. Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι αν $\mathrm{O\Pi} = x$ τότε αν υπάρχει λύση (ή λύσεις) έχουμε $\mathrm{\Pi M} = y$.



Σχήμα 10: Η γεωμετρική παράσταση των εξισώσεων

Θεωρεί το ΠM να κινείται παράλληλα προς τον $O\Psi$ άξονα και αναφέρει ότι το σημείο M του οποίου οι συντεταγμένες σε κάθε θέση επαληθεύουν την εξίσωση, θα γράψει (σελ. 23):

- γραμμή, αν όπως συνήθως συμβαίνει το x μεταβληθεί συνεχώς μεταξύ δύο τιμών οπότε και το y κάνει το ίδιο, ή
- μεμονωμένα σημεία, αν μόνο για μεμονωμένες τιμές x του η εξίσωση δίνει τιμές στο y και τέλος
- κανένα σημείο, αν για οποιαδήποτε τιμή του x δεν υπάρχουν τιμές του y που να επαληθεύουν την εξίσωση.

Ορίζει τις αλγεβρικές καμπύλες και αποδεικνύει ότι ο βαθμός τους παραμένει αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς των αξόνων.

Αποδεικνύει ότι κάθε εξίσωση πρώτου βαθμού παριστάνει ευθεία και αντίστροφα. Ερμηνεύει τους συντελεστές και ασχολείται με διάφορα προβλήματα σχετικά με τις ευθείες. Διαπραγματεύεται τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Παράγει την εξίσωση του κύκλου από τον τύπο της απόστασης, αλλά και με χρήση γεωμετρικών προτάσεων. Διερευνά τη γενική εξίσωση του κύκλου και λύνει, με αναλυτικές μεθόδους, διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με τον κύκλο. Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι κωνικές τομές. Ορίζονται ως γεωμετρικός τόπος σημείων που έχουν μια ιδιότητα, π.χ. για την έλλειψη ότι είναι «ο τόπος των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από δύο δοθέντα σημεία έχουν άθροισμα δεδομένη ευθεία». Το θέμα της εφαπτομένης των καμπυλών το αντιμετωπίζει παρόμοια με το Σοφιανό, αφού παρατηρεί ότι η εξίσωση της τέμνουσας καταστρέφεται αν ταυτίσουμε τα σημεία. Διερευνά τη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού και αποδεικνύει ότι οι καμπύλες δευτέρου βαθμού είναι τομές κώνου και αντίστροφα. Αποδεικνύει, ότι πέντε σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά, προσδιορίζουν μια μοναδική κωνική τομή (μέσω της εξίσωσής της). Επίσης διαθέτει ένα κεφάλαιο στις ομογενείς συντεταγμένες και παράγει την εξίσωση της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών σ' αυτές.

Με χρήση ορίων προσδιορίζει τις ασύμπτωτες της υπερβολής και με παραγώγους μελετά τις καμπύλες, βρίσκοντας για παράδειγμα μέγιστα και ελάχιστα. Επίσης υπολογίζει εμβαδά χωρίων με χρήση αθροισμάτων. Στην προτελευταία παράγραφο του βιβλίου με τίτλο «Παραβολικαί καμπύλαι», για την καμπύλη $y = \sigma(x)$, όπου το $\sigma(x)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο, βρίσκει το εμβαδόν κάνοντας χρήση της αντιπαραγώγου.

Ο Κυπάρισσος Στέφανος (1857-1917) διορίστηκε ως καθηγητής της Αναλυτικής Γεωμετρίας και της Ανώτερης Άλγεβρας στο Πανεπιστήμιο Αθηνών το 1884 (Οδηγός Προπτυχιακών Σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου). Ίσως δεν έγραψε κάποιο βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας, αλλά δίδασκε Αναλυτική Γεωμετρία, γεγονός που πιστοποιείται από την ύπαρξη των Σημειώσεων Αναλυτικής Γεωμετρίας από τις παραδόσεις του στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο το 1915.

Στις σημειώσεις αφού εισάγει την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος, ορίζει συντεταγμένες στην ευθεία, στο επίπεδο και στο χώρο. Χαρακτηριστικά σημειώνει τη μονάδα μέτρησης και στους δύο άξονες στην περίπτωση του επιπέδου. Δίνει τύπους για μεταφορά των αξόνων, αλλά και στροφής των ορθογώνιων αξόνων. Εισάγει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, τους οποίους και χρησιμοποιεί για την εισαγωγή των πολικών συντεταγμένων, τη στροφή των αξόνων, αλλά και στις εκφράσεις διαφόρων τύπων που σχετίζονται με πλάγιους άξονες συντεταγμένων. Όσον αφορά την εξίσωση που παριστάνει μια γραμμή στο επίπεδο, σημειώνει ότι: «εξίσωση της γραμμής θα καλούμε, την εξίσωση που εκφράζει την ικανή και αναγκαία συνθήκη, στην οποία πρέπει να υπόκεινται οι συντεταγμένες ενός σημείου του επιπέδου, για να βρίσκεται το σημείο αυτό πάνω στη γραμμή» (σελ. 13).

Ένα μέρος των σημειώσεων είναι αφιερωμένο στα επίπεδα σχήματα. Αποδεικνύει τις εξισώσεις της ευθείας, του κύκλου, των κωνικών τομών και πολλές άλλες ιδιότητες των καμπύλων αυτών. Στο θέμα της εφαπτομένης, για τον κύκλο θεωρεί την κάθετη στην ακτίνα, ενώ, για παράδειγμα στην έλλειψη, για να βρει την εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο, θεωρεί ένα κύκλο που η έλλειψη είναι η προβολή του και φέρνει την εφαπτόμενη του κύκλου στο αντίστοιχο σημείο, την οποία στη συνέχεια προβάλει στο επίπεδο της έλλειψης. Κάνει χρήση των οριζουσών για την παράσταση της εξίσωσης της ευθείας και του εμβαδού τριγώνου.

Στο χώρο αποδεικνύει τις εξισώσεις του επιπέδου και της ευθείας. Επίσης ασχολείται με τη σφαίρα, της οποίας μεταξύ άλλων, βρίσκει το εφαπτόμενο επίπεδο σ' ένα σημείο της από το γεγονός ότι είναι κάθετο στην ακτίνα. Επίσης ασχολείται και βρίσκει εξισώσεις για κωνικές, κυλινδρικές και κωνοειδείς επιφάνειες, καθώς και για επιφάνειες εκ περιστροφής, όπως ελλειψοειδή, υπερβολοειδή και παραβολοειδή.

Το τελευταίο βιβλίο, που επιχειρείται περιληπτική περιγραφή του, είναι του Νικολάου Β. Γεννηματά (1875-1932), τακτικού καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Το βιβλίο αυτό τυπώθηκε σε δύο τεύχη με τίτλο: «Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία». Το πρώτο τεύχος τυπώθηκε στην Αθήνα το 1924 και διαπραγματεύεται την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου. Το δεύτερο τεύχος τυπώθηκε στην Αθήνα το 1925 και μελετά την Αναλυτική Γεωμετρία του χώρου και Διανυσματική Γεωμετρία.

Στην εισαγωγή του πρώτου τεύχους ο συγγραφέας δίνει διάφορους ορισμούς όπως ότι «σημειοσειρά είναι το σύνολο των σημείων μιας ευθείας» (σελ. 1) και επεκτείνοντας την έννοια των γεωμετρικών στοιχείων ορίζει για παράδειγμα, το «επ' άπειρον σημείο της ευθείας να είναι ταυτόσημο με την έννοια της διεύθυνσης της ευθείας» (σελ. 2). Στη συνέχεια ασχολείται με ορισμούς και την πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων.

Το πρώτο μέρος του πρώτου τεύχους είναι η επιπεδομετρία. Εισάγει άξονες συντεταγμένων, στους οποίους οι θετικοί ημιάξονες σημειώνονται ως διανύσματα που ορίζουν τη θετική φορά. Οι συντεταγμένες του σημείου M ορίζονται ως η αλγεβρική τιμή των προβολών του $\overrightarrow{OM}$ στους άξονες (O είναι η αρχή των αξόνων), λαμβάνοντας υπ' όψιν τη θετική ή αρνητική φορά των διανυσμάτων. Ορίζει τις πολικές συντεταγμένες και δίνει τύπους για μεταφορά και στροφή αξόνων.

Μελετά την ευθεία, την οποία και διερευνά πλήρως σε ευθύγραμμες και πολικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια ασχολείται με τον κύκλο και τις κωνικές τομές. Βρίσκει τις εξισώσεις τους και ορίζει παραμετρικές εξισώσεις, που τις ονομάζει «δεσμικές εξισώσεις». Για παράδειγμα, στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=r^2$ ορίζει ως παραμετρικές εξισώσεις (σελ. 64) τις

$$\begin{cases} y=\mu(x-r) \\ y=-\dfrac{1}{\mu}(x+r) \end{cases}.$$

Αποδεικνύει διάφορες ιδιότητες και λύνει διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με το κύκλο και τις κωνικές, κάνοντας χρήση και των παραμετρικών εξισώσεων. Το θέμα της εφαπτομένης του κύκλου, το λύνει θεωρώντας την εφαπτομένη κάθετη στην ακτίνα. Για την έλλειψη όμως, για παράδειγμα με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, θεωρεί τις «δεσμικές εξισώσεις» $\begin{cases} y-y_0=\mu(x-x_0) \\ y+y_0=-\frac{\beta^2}{\alpha^2\mu}(x+x_0) \end{cases}$, όπου $A(x_0,y_o)$ ένα σημείο της έλλειψης. Δηλαδή τις εξισώσεις δύο ευθειών που διέρχονται από τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία A και A' και τέμνονται σε σημείο Σ της έλλειψης. Διατυπώνει δε ότι όταν η μια ευθεία συμπέσει με τη διάμετρο AA', τότε η άλλη γίνεται εφαπτόμενη της έλλειψης. Με αυτό τον τρόπο, προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της $A(x_0,y_o)$ (σελ. 130-131). Επίσης διερευνά τη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στο δεύτερο τεύχος ασχολείται με το χώρο. Ορίζει ανάλογα τις συντεταγμένες, και μελετά το επίπεδο και την ευθεία στο χώρο, μέσα από τις εξισώσεις τους. Στη συνέχεια ασχολείται με τη σφαίρα και διάφορες επιφάνειες, όπως ελλειψοειδή, παραβολοειδή και άλλα. Τέλος μελετά περαιτέρω τα διανύσματα, βρίσκει τις διανυσματικές εξισώσεις της ευθείας, του επιπέδου και ορίζει πράξεις όπως το εσωτερικό, το εξωτερικό και το μικτό γινόμενο διανυσμάτων.

3. Θεωρίες για τον τρόπο που αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση και τη διδασκαλία μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Godino, Batanero και Font (2007), η *Διδακτική των Μαθηματικών* ή *Μαθηματική Εκπαίδευση (Mathematics Education)*, ως επιστημονικός κλάδος, έχει στόχο να μελετήσει τους παράγοντες που επιδρούν στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, και να αναπτύξει προγράμματα που να βελτιώνουν τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Στην προσπάθεια αυτή διάφοροι επιστημονικοί κλάδοι, όπως Ψυχολογία, Παιδαγωγική, Κοινωνιολογία, Φιλοσοφία, κ.τ.λ., έχουν συνεισφέρει και συνεχίζουν να βοηθούν στην επίτευξη του παραπάνω στόχου. Η χρήση των παραπάνω συνεισφορών στη Διδακτική των Μαθηματικών, πρέπει να βασίζεται σε μία ανάλυση της φύσης των μαθηματικών και των μαθηματικών εννοιών και στην ατομική και πολιτιστική τους ανάπτυξη. Μια τέτοια επιστημολογική ανάλυση είναι ουσιαστική στη διδακτική των Μαθηματικών, γιατί θα ήταν πολύ δύσκολο να μελετηθούν κατάλληλα, η διδασκαλία και η διαδικασία μάθησης απροσδιόριστων και ασαφών αντικειμένων. Μερικά φιλοσοφικά ερωτήματα, που δεν μπορούν να αγνοηθούν στην προσπάθεια αυτή είναι τα παρακάτω:

- Ποια είναι η φύση των μαθηματικών αντικειμένων;
- Ποιος είναι ο ρόλος της ανθρώπινης δραστηριότητας και της κοινωνικό-πολιτιστικής διεργασίας στην ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών;
- Στα μαθηματικά ανακαλύπτουμε ή εφευρίσκουμε;
- Οι τυπικοί ορισμοί και οι δηλώσεις καλύπτουν το πλήρες νόημα των εννοιών και των προτάσεων;
- Ποιος είναι ο ρόλος των νοημάτων που αποδίδουμε στα μαθηματικά αντικείμενα, στη σχέση τους με άλλα αντικείμενα, σε προβλήματα στα οποία χρησιμοποιούνται και στις διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις τους;

Η σχετικά πρόσφατη ανάπτυξη του κλάδου ως επιστημονικού πεδίου, εξηγεί την απουσία μιας παγιωμένης και κυρίαρχης ερευνητικής σχολής. Ποικίλες θεωρητικές προσεγγίσεις έχουν αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Στην ενότητα αυτή επιχειρείται η περιγραφή τεσσάρων από τις προσπάθειες αυτές. Κατ’ αρχήν αναπτύσσονται οι απόψεις των David Tall και Shlomo Vinner (1981) σε σχέση με τις εννοιολογικές εικόνες και τους εννοιολογικούς ορισμούς των εννοιών στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια περιγράφεται ο δυϊσμός διεργασίας-αντικειμένου και η θεωρία της υποστασιοποίησης της Sfard (1991). Επίσης γίνεται αναφορά στη θεωρία APOS (Action-Process-Object-Schema) του Dubinsky (1991) και των συνεργατών του. Τέλος περιγράφεται η οντο-σημειωτική προσέγγιση στη Διδακτική των Μαθηματικών των Godino, Batanero, Font (2007). Επίσης συμπληρώνοντας το θεωρητικό πλαίσιο γίνεται αναφορά στις αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών. Οι αναπαραστάσεις έχουν κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη, αλλά και στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αφού τις μαθηματικές έννοιες τις αντιλαμβανόμαστε μέσα από τις αναπαραστάσεις τους. Ειδικά γίνεται εκτενής αναφορά στις σημειωτικές αναπαραστάσεις και το ρόλο τους στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Επίσης γίνεται εκτενής αναφορά στις απόψεις των εμπνευστών της οντο-σημειωτικής προσέγγισης, όσον αφορά τις πολλαπλές αναπαραστάσεις ενός μαθηματικού αντικειμένου, καθώς επίσης και στη χρήση ενός αντικειμένου ως γένιο στοιχείο.

3.1. Εννοιολογικές εικόνες και εννοιολογικοί ορισμοί

Σ' αυτή την ενότητα περιγράφονται οι απόψεις των David Tall και Shlomo Vinner από την εργασία τους με τίτλο: «Εννοιολογικές εικόνες και εννοιολογικοί ορισμοί εννοιών στα Μαθηματικά με συγκεκριμένες αναφορές στα όρια και στη συνέχεια» (1981).

Σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981), συγκρινόμενα με άλλα πεδία της ανθρώπινης σκέψης, τα Μαθηματικά συνήθως θεωρούνται ένα πεδίο μεγάλης ακρίβειας, στο οποίο έννοιες μπορούν να οριστούν με μεγάλη ακρίβεια, εφοδιάζοντας τη μαθηματική θεωρία με σταθερά θεμέλια. Στην πραγματικότητα τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά. Πολλές μαθηματικές έννοιες τις έχουμε συναντήσει με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, πριν να οριστούν τυπικά και μια σύνθετη γνωστική δομή υπάρχει στο μυαλό του κάθε ατόμου, όταν γίνεται αναφορά σε μια έννοια.

Ο όρος *εννοιολογική εικόνα* (*concept image*) περιγράφει τη συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με μια έννοια. Περιλαμβάνει όλες τις διανοητικές εικόνες και συσχετίζει ιδιότητες και διεργασίες. Αναπτύσσεται διαχρονικά μέσα από εμπειρίες όλων των ειδών και μεταβάλλεται όταν το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και φύσεις των εννοιών. Η εννοιολογική εικόνα δεν είναι συνεκτική καθώς αναπτύσσεται. Γι' αυτό δύναται να περιέχει πάντα το σπόρο μιας πιθανής μελλοντικής σύγκρουσης.

Ο *εννοιολογικός ορισμός* (*concept definition*) είναι μια σειρά λέξεων, που χρησιμοποιούνται για να ορίσουν μια έννοια. Μπορεί δε να διαχωριστεί σε:

- *Ατομικό εννοιολογικό ορισμό,* που γενικεύει την ατομική εννοιολογική εικόνα και σε
- *Φορμαλιστικό εννοιολογικό ορισμό* που είναι αποδεκτός από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα.

Για παράδειγμα ο φορμαλιστικός εννοιολογικός ορισμός για τη συνάρτηση είναι: μια σχέση με την οποία αντιστοιχίζουμε σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου Β. Για τον ατομικό εννοιολογικό ορισμό της συνάρτησης μπορούμε να έχουμε τον τύπο, το γράφημα, τον πίνακα τιμών, ένα κανόνα αντιστοίχησης και άλλα.

Η έλλειψη συνδετικών κρίκων ανάμεσα στις εννοιολογικές εικόνες ή ακόμα σοβαρότερα η σύγκρουση μιας εννοιολογικής εικόνας με τον εννοιολογικό ορισμό, δημιουργούν γνωστική σύγχυση. Έτσι μιλάμε για δυνητικούς παράγοντες σύγκρουσης ή για γνωστικούς παράγοντες σύγκρουσης. Οι τελευταίοι παρουσιάζονται όταν διαφορετικές εννοιολογικές εικόνες ανακαλούνται ταυτόχρονα.

Ένα παράδειγμα έλλειψης συνδετικών κρίκων που αναφέρουν οι συγγραφείς είναι όταν σε έρευνα που έγινε σε πρωτοετείς φοιτητές, τους ζητήθηκε να υπολογίσουν το παρακάτω όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)$$

και να βρουν τη σχέση διάταξης ανάμεσα στους αριθμούς $0,\overline{9}$ και 1. Οι 14 στους 36 που βρίσκουν το όριο της ακολουθίας σωστά, απαντούν λάθος στη σχέση διάταξης. Οι φοιτητές δε συνδέουν το $0,\overline{9}$ με τη δεκαδική του αναπαράσταση και κατά συνέπεια με το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου ή το όριο ακολουθίας. Όταν τους ζητήθηκε να γράψουν το $0,\overline{9}$ με δεκαδική αναπαράσταση και να ξαναβρούν τη σχέση διάταξης, τότε 13 από τους 14 απάντησαν σωστά.

Ένα δεύτερο παράδειγμα έλλειψης συνδετικών κρίκων στο πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που μπορεί να παρατεθεί αφορά τις λύσεις των εξισώσεων που παριστάνουν ευθείες ή καμπύλες. Οι μαθητές έχουν συνηθίσει να λύνουν εξισώσεις με ένα άγνωστο και να παράγουν λύσεις οι οποίες προσδιορίζονται από έναν αριθμό π.χ. x=3. Έτσι δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι οι λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους, αν υπάρχουν, είναι ζευγάρια τιμών δηλαδή δύο αριθμοί προσδιορίζουν μια τέτοια λύση (αυτό προκύπτει από τα αποτελέσματα της έρευνας που ακολουθεί). Ένας τρόπος να συνδεθεί το x με το y είναι βέβαια το σχήμα, δηλαδή η ταυτοποίηση των λύσεων με τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος, αλλά υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος σύνδεσης, η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση εξ ορισμού συνδέει το x με το y και παρέχει στο μαθητή τη δυνατότητα να αντιλαμβάνεται αυτές τις δύο ποσότητες άμεσα συνδεδεμένες (για κάθε x υπάρχει ένα μόνο y). Βέβαια τα σχήματα των καμπυλών δεν αποτελούν απαραίτητα γραφήματα συναρτήσεων, όμως μπορούν να παρασταθούν από γραφήματα συναρτήσεων κάποια μέρη των καμπυλών (π.χ. το ημικύκλιο).

Σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981), προκύπτει ένα παράδειγμα γνωστικής σύγκρουσης, όταν ορίζουμε ένα μιγαδικό αριθμό x+iy σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y). Η ταυτοποίηση του x+0i =(x,0) με τον πραγματικό αριθμό x, είναι ένας πιθανός παράγοντας σύγχυσης. Σε ερωτηματολόγιο που δόθηκε, οι μαθητές απαντούν ότι το $\sqrt{2}$ δεν είναι μιγαδικός, παρά το γεγονός ότι είχαν ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς ως «μιγαδικούς με φανταστικό μέρος μηδέν». Έτσι θεωρούν το $\sqrt{2}$ πραγματικό, ενώ το $\sqrt{2}+0i$ μιγαδικό. Εδώ έχουμε ένα πιθανό παράγοντα σύγχυσης από τη συνολοθεωρητική σκοπιά, ότι το στοιχείο x είναι διαφορετικό από το διατεταγμένο ζεύγος (x,0).

Ένα δεύτερο παράδειγμα γνωστικής σύγκρουσης που δίνουν οι συγγραφείς, έχει σχέση με την έννοια του ορίου συνάρτησης. Συγκεκριμένα για την έννοια $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ χρησιμοποιώντας τους όρους «τείνει, πλησιάζει, προσεγγίζει» ή ακόμα τη διαισθητική εικόνα του ότι «όταν το x πλησιάζει στο α, τότε το f(x) πλησιάζει το c» πιθανά να δημιουργήσουμε τη λανθασμένη εννοιολογική εικόνα ότι $f(x)\neq c$. Επίσης εισάγοντας το όριο με παραδείγματα τύπων όπως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ δίνεται η εντύπωση ότι ο περιορισμός $x\neq 1$ προκύπτει από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και όχι από το φορμαλιστικό ορισμό του ορίου: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$ που πρέπει να τονίζεται ότι $x\neq a$. Αυτός ο δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης μπορεί να γίνει γνωστικός στην περίπτωση της σύνθεσης συναρτήσεων. Για παράδειγμα, στην ερώτηση σωστούλάθους $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \kappa\alpha\iota\\ \lim\limits_{y\to b} g(y)=c\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$, οι 20 στους 21 φοιτητές απαντούν ότι είναι σωστό. Αν για παράδειγμα πάρουμε $f(x)=0, x\in\mathbb{R}$ και $g(y)=\begin{cases}0, y\neq 0\\ 1, y=0\end{cases}$ τότε εύκολα μπορεί κάποιος να δει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=g(0)=1$. Όμως για τους φοιτητές που πιστεύουν ότι μπορεί $x=0$ και $f(x)\neq 0$ προκύπτει άμεσα ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$ που είναι λάθος.

Τέλος, ένα παράδειγμα γνωστικής σύγκρουσης που αφορά την Αναλυτική Γεωμετρία, είναι η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες στον $y'y$ άξονα ($x=a$). Οι μαθητές γνωρίζουν ότι η λύση της εξίσωσης $2x+5=0$ είναι $x=-\frac{5}{2}$. Δεν μπορούν πιθανά να αντιληφθούν, ότι η ίδια εξίσωση περιγράφει τις συντεταγμένες των άπειρων σημείων μιας ευθείας $(-\frac{5}{2}, y)$, $y\in\mathbb{R}$ στο επίπεδο.

3.2. Ο δυϊσμός διεργασίας — αντικειμένου και η θεωρία της υποστασιοποίησης

Σ' αυτή την ενότητα αναπτύσσονται οι απόψεις που περιγράφονται στις εργασίες της Sfard (1991) και των Sfard και Linchevski (1994). Στην αρχή γίνεται αναφορά στο δυϊσμό *διεργασία — αντικείμενο* και στη συνέχεια περιγράφονται τα τρία στάδια σχηματισμού μιας έννοιας: η *εσωτερίκευση* (*interiorization*), η *συμπύκνωση* (*condensation*) και η *υποστασιοποίηση* (*reification*).

Συμφώνα με τη Sfard (1991), τις μαθηματικές έννοιες μπορούμε να τις δούμε ως αφηρημένα αντικείμενα ή ως διεργασίες. Όταν αναφερόμαστε στην έννοια ως αφηρημένο αντικείμενο, τότε έχουμε *δομική αντίληψη (structural conception)* της έννοιας, δηλαδή αναφερόμαστε σε μια στατική δομή, στιγμιαία και ολοκληρωμένη. Για παράδειγμα, ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί, ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δοθέν σημείο. Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην έννοια ως διεργασία, τότε έχουμε *λειτουργική αντίληψη (operational conception)* της έννοιας, δηλαδή ενασχόληση κυρίως με διεργασίες, αλγορίθμους και δράσεις. Για παράδειγμα, ο κύκλος σ' αυτή τη περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια καμπύλη, που προκύπτει αν περιστρέψω το διαβήτη γύρω από ένα σταθερό σημείο ή ως ένα σύνολο σημείων, που οι συντεταγμένες τους προκύπτουν ως λύσεις μιας εξίσωσης στο πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί, ότι οι δύο παραπάνω τρόποι προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών είναι φαινομενικά αμοιβαία αποκλειόμενοι, στην πραγματικότητα όμως είναι συμπληρωματικοί. Οι όροι δομική και λειτουργική επινόηση, αναφέρονται σε δύο αδιαχώριστες όψεις της έννοιας και γι' αυτό αναφερόμαστε σε δυϊκότητα και όχι σε διχοτόμηση. Η διαδικασία της μάθησης και της επίλυσης προβλημάτων, απαιτεί συνδυασμό δομικής και λειτουργικής προσέγγισης της ίδιας έννοιας. Η ίδια η Sfard δίνει έμφαση στη δυϊκότητα (διεργασία — αντικείμενο) των εννοιών και σημειώνει ότι «για να κατακτήσει κάποιος το νόημα σε μαθηματικές έννοιες ανωτέρου επιπέδου, χρειάζεται να είναι ικανός να σκέπτεται συγχρόνως λειτουργικά και δομικά» (Sfard 1991).

Στην αριθμητική, μπορεί κάποιος να θεωρήσει το 2+3 σαν μία πράξη ή να το βλέπει σαν την ποσότητα 5. Μπορεί δηλαδή να εστιάσει στη διεργασία ή στο αποτέλεσμα (αντικείμενο) της πράξης. Ένας τέτοιος διαχωρισμός είναι αδύνατον να συμβεί στην Άλγεβρα με εκφράσεις, όπως α+β ή 3χ+1. Εδώ δεν μπορεί να υπάρξει διεργασία, οπότε δεν υπάρχει αποτέλεσμα και ένα άτομο πρέπει να αντιλαμβάνεται τις εκφράσεις αυτές δομικά. Ένα δεύτερο παράδειγμα που μπορεί να παρατηρηθεί ο παραπάνω δυϊσμός, είναι στην περίπτωση της εξίσωσης ψ=2χ+4. Μπορεί να θεωρηθεί ως υπολογιστική διαδικασία για παραγωγή λύσεων ή ως το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών (συνάρτηση- αντικείμενο) ή ως το σύνολο των σημείων μιας ευθείας-αντικείμενο (τα ζευγάρια των λύσεων αποτελούν τις συντεταγμένες των σημείων).

Η Sfard εικάζει μέσω ιστορικών παραδειγμάτων (π.χ. η εξέλιξη της έννοιας του αριθμού) και υπό το φώς γνωστικών θεωριών (Piaget και άλλων), ότι η λειτουργική επινόηση είναι για τους περισσότερους ανθρώπους το πρώτο βήμα για την κατάκτηση μιας νέας μαθηματικής έννοιας. Η Sfard (1991) όρισε τρία στάδια στην ανάπτυξη των εννοιών: την *εσωτερίκευση (interiorization),* την *συμπύκνωση (condensation)* και την *υποστασιοποίηση (reification)*.

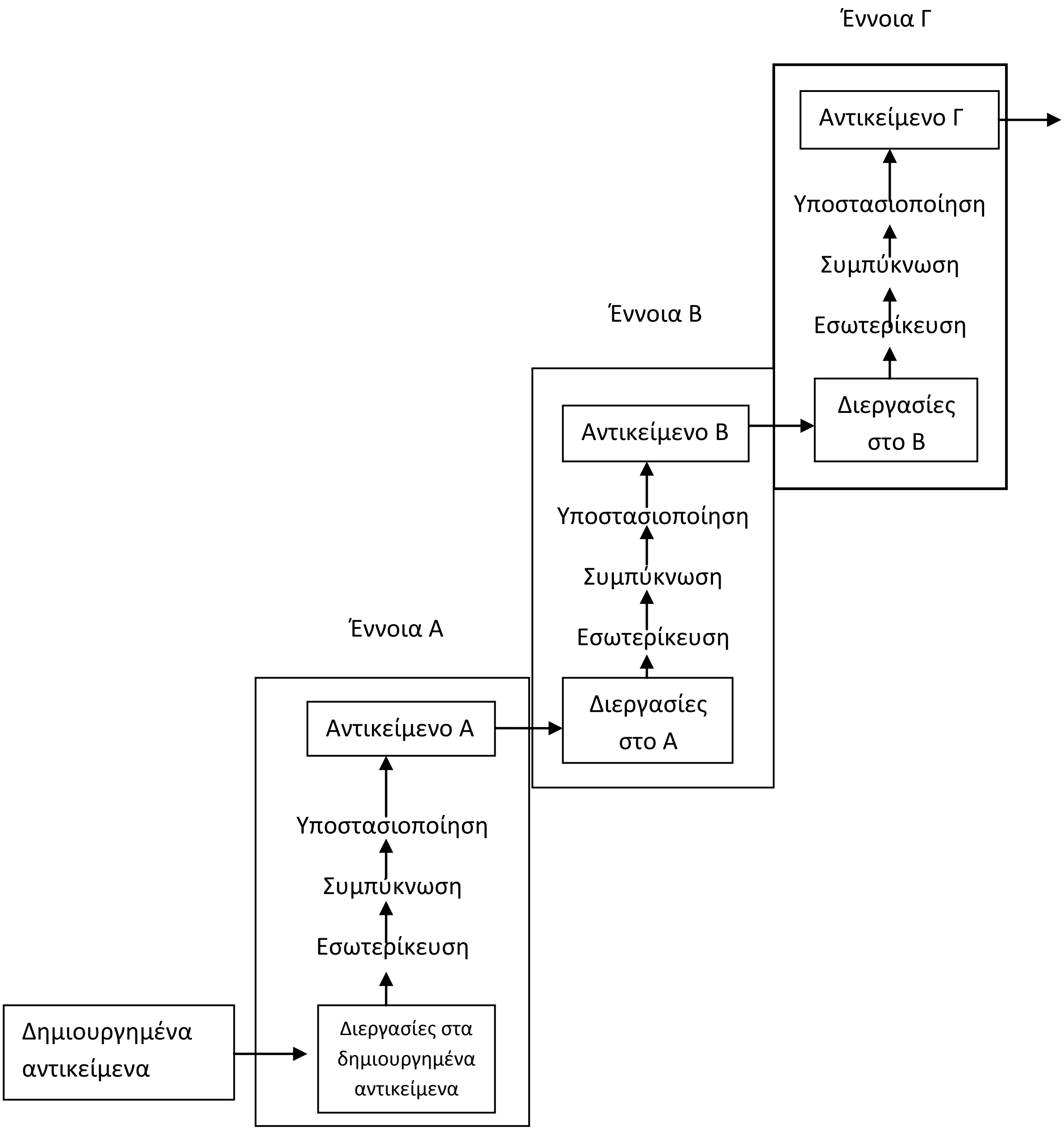
Στο επίπεδο της *εσωτερίκευσης,* το άτομο αρχίζει να εξοικειώνεται με διεργασίες που θα προκαλέσουν μια νέα έννοια (όπως η μέτρηση οδηγεί στους φυσικούς αριθμούς, η αφαίρεση οδηγεί στους αρνητικούς αριθμούς ή οι αλγεβρικοί χειρισμοί στις συναρτήσεις). Αυτές οι διεργασίες, είναι λειτουργίες που εκτελούνται σε χαμηλότερου επιπέδου μαθηματικά αντικείμενα (σε σχέση μ' αυτά που προκύπτουν). Βαθμιαία το άτομο εξοικειώνεται με την εκτέλεση αυτών των διεργασιών. Οι διεργασίες έχουν εσωτερικευθεί, αν μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω νοητικών αναπαραστάσεων και προκειμένου να εξεταστούν, αναλυθούν και συγκριθούν, δεν υπάρχει ανάγκη στην πραγματικότητα να εκτελεστούν. Η συγγραφέας αναφέρει δύο παραδείγματα. Στην περίπτωση των αρνητικών αριθμών, το στάδιο αυτό πραγματώνεται όταν το άτομο αποκτά επιδεξιότητα στην εκτέλεση αφαιρέσεων. Στην περίπτωση των συναρτήσεων το στάδιο αυτό πραγματώνεται όταν η έννοια της μεταβλητής έχει κατανοηθεί και έχει αποκτηθεί από το άτομο η ικανότητα χρησιμοποιώντας τον τύπο να βρίσκει τιμές για την εξαρτημένη μεταβλητή.

Το στάδιο της *συμπύκνωσης,* είναι η περίοδος κατά την οποία μεγάλες σε μήκος ακολουθίες λειτουργιών συμπυκνώνονται σε πιο εύκολες στο χειρισμό μονάδες. Σε αυτό το στάδιο, το άτομο γίνεται ολοένα και πιο ικανό να σκεφτεί τη συγκεκριμένη διεργασία ή μέρος αυτής, ως μια ολότητα, χωρίς να αισθάνεται την ανάγκη να υπεισέλθει σε λεπτομέρειες. Σ΄ αυτή τη συμπυκνωμένη ολότητα δίνεται ένα όνομα και «αυτό είναι το σημείο στο οποίο μια καινούργια έννοια, επισήμως, γεννιέται». Στο στάδιο αυτό το άτομο ευκολότερα συνδυάζει διαδικασίες, κάνει συγκρίσεις και γενικεύει. Μια σπουδαία πλευρά της συμπύκνωσης, είναι η αυξανόμενη ικανότητα του ατόμου για εναλλαγή μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας. Στο παράδειγμα των αρνητικών αριθμών, η συμπύκνωση μπορεί να αξιολογηθεί μέσω της ικανότητας του ατόμου, να συνδυάζει τη συμπυκνωμένη διεργασία με άλλες υπολογιστικές πράξεις, δηλαδή να μπορεί να εκτελεί μαθηματικούς υπολογισμούς, όπως πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό θετικών και αρνητικών αριθμών. Στην περίπτωση της συνάρτησης, η συμπύκνωση είναι το στάδιο εκείνο στο οποίο το άτομο έχει αποκτήσει την ικανότητα να βλέπει και να χειρίζεται το γράφημα ως ολότητα, χωρίς να κοιτάξει τις συγκεκριμένες τιμές. Μπορεί να μελετά συναρτήσεις, να σχεδιάζει γραφήματα, να συνδυάζει ζεύγη συναρτήσεων, ακόμα και να βρίσκει την αντίστροφη μιας συνάρτησης.

Το στάδιο της συμπύκνωσης διαρκεί, όσο η καινούρια οντότητα παραμένει στενά συνδεδεμένη με τη συγκεκριμένη διεργασία. Μόνο όταν το άτομο γίνει ικανό, να δει την έννοια σαν ένα ολοκληρωμένο αντικείμενο, λέμε ότι έχει επιτευχθεί η *υποστασιοποίηση*. Έτσι η υποστασιοποίηση ορίζεται ως μια οντολογική αλλαγή, μια ξαφνική δυνατότητα να δούμε κάτι οικείο από μια εντελώς διαφορετική σκοπιά. Ενώ η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση είναι βαθμιαίες, ποσοτικές παρά ποιοτικές αλλαγές, η υποστασιοποίηση είναι ένα στιγμιαίο άλμα: η διεργασία παγιώνεται ως αντικείμενο, μετατρέπεται σε μια στατική κατασκευή. Πολλές αναπαραστάσεις της έννοιας ενοποιούνται σε μια αφηρημένη και καθαρά φανταστική κατασκευή. Η νέα οντότητα, σύντομα αποσπάται από τη διεργασία που την παρήγαγε και αρχίζει να αποκτά νόημα σαν μέλος μιας συγκεκριμένης κατηγορίας. Η κατηγορία αυτή, γίνεται τελικά η βάση για ισχυρισμούς που αφορούν το καινούργιο αντικείμενο. Το άτομο μπορεί να ερευνήσει γενικές ιδιότητες αυτής της κατηγορίας και ποικίλες σχέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων της. Μπορεί να λύνει προβλήματα που σχετίζονται με την εύρεση όλων των παραδειγμάτων από την κατηγορία, που ικανοποιούν μια δοθείσα υπόθεση. Καινούργια μαθηματικά αντικείμενα μπορούν πλέον να κατασκευαστούν από το παρόν αντικείμενο. Για τους αρνητικούς αριθμούς, το στάδιο της υποστασιοποίησης πραγματοποιείται, όταν το άτομο αποκτά την ικανότητα να χειρίζεται τους αρνητικούς αριθμούς ως ένα υποσύνολο του δακτυλίου των ακεραίων. Όσον αφορά τις συναρτήσεις, το στάδιο αυτό επιτυγχάνεται, όταν το άτομο μπορεί να λύνει εξισώσεις, στις οποίες οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις, να μιλά για γενικές ιδιότητες διαφορετικών διεργασιών που εκτελούνται σε συναρτήσεις και να αναγνωρίζει ότι η δυνατότητα υπολογισμού δεν είναι απαραίτητο χαρακτηριστικό του συνόλου των διατεταγμένων ζευγαριών, τα οποία θεωρούνται ως συναρτήσεις.

Ένα ακόμα παράδειγμα σχετικό με την παρούσα εργασία, είναι η ευθεία ως αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στο στάδιο της *εσωτερίκευσης,* το άτομο έχει κατανοήσει το ρόλο των μεταβλητών — αγνώστων στην εξίσωση και έχει αποκτήσει την ικανότητα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση, να βρίσκει ζευγάρια λύσεων για διάφορες τιμές των μεταβλητών — αγνώστων, π.χ. για $x=3$ βρίσκω το y, άρα και σημεία του σχήματος. Στο στάδιο της *συμπύκνωσης,* το άτομο βλέπει το σχήμα ως ολότητα χωρίς να ενδιαφέρεται για συγκεκριμένες λύσεις-σημεία. Μπορεί μελετώντας την κλίση τους, να βρίσκει τη σχετική τους θέση (παράλληλες, τεμνόμενες, κάθετες, κ.α.). Επίσης μελετώντας το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα, σε συνδυασμό με την κλίση, να καταλήξει σε συμπεράσματα σε σχέση με παράλληλη μεταφορά ευθειών και ίσως για απόσταση δύο ευθειών. Στο στάδιο της *υποστασιοποίησης,* μπορεί να παράγει νέες ευθείες, μέσα από το συσχετισμό ήδη υπαρχουσών ευθειών (μεσοπαράλληλη, διχοτόμο, κ.α.). Επίσης μπορεί να μελετά σύνολα ευθειών, για παράδειγμα τη δέσμη ευθειών που περιγράφεται από τις εξισώσεις $y=mx+1$ με $m\in\mathbb{R}$ και την εξίσωση $x=0$, βρίσκοντας χαρακτηριστικές ιδιότητες τους.

Το γενικό μοντέλο σχηματισμού μιας έννοιας, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 11: Γενικό μοντέλο διαμόρφωσης των εννοιών (Sfard, 1991)

Η Sfard (1991) υπογραμμίζει την αναγκαιότητα του διπλού τρόπου προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, δηλαδή τη λειτουργική και τη δομική. Οι πληροφορίες που μπορούμε να αποκτήσουμε με λειτουργικές διεργασίες, είναι απαραίτητες και τις περισσότερες φορές επαρκείς για τη λύση προβλημάτων. Όμως δεν μπορούν εύκολα να εξελιχθούν. Βασικός λόγος είναι η μικρή χωρητικότητα της ανθρώπινης μνήμης και η δυσκολία στην αφομοίωση της γνώσης. Έτσι, το άτομο είναι απαραίτητο να σπάει τις περίπλοκες διεργασίες σε απλούστερα μέρη και να χρησιμοποιεί τα αφηρημένα αντικείμενα ως ένα τρόπο μετάβασης από το ένα μέρος στο άλλο. Επιπλέον, η μετάβαση από τις μηχανιστικές διεργασίες στα αφηρημένα αντικείμενα, αυξάνει το βαθμό κατανόησης των μαθηματικών.

Για παράδειγμα, η αναγκαιότητα του διπλού τρόπου προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, προκύπτει στη λύση του συστήματος: $\left\{\begin{matrix} 2(x-3)=1-y \\ 2x+y=7 \end{matrix}\right\}$ (Sfard και Linchevski, 1994). Χωρίς τη λειτουργική προσέγγιση στον αλγεβρικό τύπο του συστήματος, δεν είναι εύκολο κάποιος να αντιληφθεί ότι το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις. Όμως, προσεγγίζοντας το σύστημα δομικά, μπορεί να αντιληφθεί ότι πρόκειται για δύο συναρτήσεις που είναι ίσες ή για δύο ευθείες που συμπίπτουν και έτσι να ερμηνεύσει τη σχέση 0=0, που συνήθως προκύπτει και ταυτόχρονα να αντιληφθεί ότι οι λύσεις του συστήματος είναι η συνάρτηση ή οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας.

Τέλος, αναφερόμενη στη σχέση όλων των παραπάνω με την εκπαιδευτική πράξη, θεωρεί ότι ο μαθητής πρέπει να εκπαιδεύεται στο να χειρίζεται αλγοριθμικές διαδικασίες, δηλαδή να προσεγγίζει τις έννοιες λειτουργικά, προκειμένου περνώντας από τα τρία στάδια να κατακτήσει την έννοια που περιγράφεται στον αλγόριθμο. Από την άλλη, πρέπει να προσεγγίζει τις έννοιες δομικά, ώστε να έχει μια καλύτερη κατανόηση της έννοιας και ο αλγόριθμος να μην είναι χωρίς νόημα και δύσκολο να απομνημονευτεί. Το βασικό πρόβλημα που προκύπτει στην εκπαιδευτική πρακτική, είναι η δυσκολία στο να επιτευχθεί από το μαθητή το στάδιο της *υποστασιοποίησης*, καθώς απαιτεί πολύ προσπάθεια και κάποιες φορές έρχεται σαν μια ξαφνική αναλαμπή. Αυτή η καθυστέρηση της υποστασιοποίησης μπορεί να δημιουργήσει ένα μόνιμο κακό: την πεποίθηση στο μαθητή ότι δεν μπορεί να μάθει Μαθηματικά, να χάσει την υπομονή του και να απογοητευτεί.

3.3. Η θεωρία APOS

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφεται η θεωρία APOS (Action — Process — Object — Schema) του Dubinsky και των συνεργατών του, σύμφωνα με τις εργασίες του Dubinsky (1991) και των Dubinsky, Dautermann, Leron και Zazkis (1994). Επίσης, μέσα από παραδείγματα, γίνεται προσπάθεια να φωτιστούν οι διάφοροι θεωρητικοί ισχυρισμοί, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας αυτής.

Η κύρια πηγή της θεωρίας αυτής, είναι η θεωρία της μάθησης του Piaget από τη νηπιακή ηλικία στην εφηβεία και η προσπάθεια της εφαρμογής του μηχανισμού της στοχαστικής αφαίρεσης, στην εκμάθηση των μαθηματικών πιο πέρα από τη μέση εκπαίδευση, στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη.

Σύμφωνα με τους συγγραφείς, ο Piaget διακρίνει τρία είδη αφαίρεσης, την *εμπειρική αφαίρεση* (*empirical abstraction*), τη *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση* (*pseudo-empirical abstraction*) και τη *στοχαστική αφαίρεση* (*reflective abstraction*). Στην *εμπειρική αφαίρεση*, η γνώση παράγεται από τις ιδιότητες των αντικειμένων. Αυτό το είδος της αφαίρεσης, οδηγεί σε εξαγωγή των κοινών ιδιοτήτων των αντικειμένων και εκτεταμένες γενικεύσεις, που έχουν την έννοια του περάσματος από το «μερικό» στο «όλο», από το «ειδικό» στο «γενικό». Η *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση*, είναι το ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ της εμπειρικής και στοχαστικής αφαίρεσης και αναφέρεται στην αφιέρωση χρόνου για την εύρεση πληροφοριών ή του νοήματος των ιδιοτήτων, που οι ενέργειες του ατόμου έχουν συναντήσει στα αντικείμενα. Τέλος η *στοχαστική αφαίρεση*, περιγράφεται απ' αυτό που ο Piaget αναφέρει ως γενικοί συντονισμοί των δράσεων και ως τέτοια έχει ως κύρια πηγή το άτομο και αποτελεί αποκλειστικά εσωτερική διεργασία. Αυτό το είδος της αφαίρεσης οδηγεί σε ένα πολύ διαφορετικό τύπο γενίκευσης, που είναι εποικοδομητικός και αυτό που συμβαίνει είναι μια νέα σύνθεση, στο επίκεντρο της οποίας ειδικοί κανόνες λαμβάνουν νέο νόημα. Ένα παράδειγμα αυτού είναι ο ευκλείδειος δακτύλιος που είναι σίγουρα μια αφαίρεση και γενίκευση. Μπορεί να θεωρείται, όμως, ότι προέρχεται από ένα μοναδικό παράδειγμα, τους ακέραιους.

Ο Dubinsky (1991) οριοθετεί τη στοχαστική αφαίρεση όσον αφορά τη θεωρία του, στην κατασκευή νοητικών αντικειμένων και νοητικών δράσεων πάνω σ' αυτά τα αντικείμενα, και θεωρεί πέντε είδη κατασκευών στα πλαίσια της στοχαστικής αφαίρεσης (τα τέσσερα πρώτα σύμφωνα με τον Piaget):

- *Εσωτερίκευση (interiorization)*: η δημιουργία εσωτερικών διεργασιών αναπαράστασης των λειτουργιών που εκτελεί το άτομο, με στόχο να κατανοήσει τα φαινόμενα που αντιλαμβάνεται.
- *Σύνθεση ή συντονισμός (composition or coordination)* δύο ή περισσοτέρων διεργασιών για την κατασκευή μιας νέας διεργασίας.

- *Ενθυλάκωση (encapsulation)* ή μετατροπή μιας (δυναμικής) διεργασίας σε ένα (στατικό) αντικείμενο.
- *Γενίκευση (generalization)* π.χ. μιας συγκεκριμένης διεργασίας σημαίνει την εφαρμογή της σε μια ευρύτερη συλλογή φαινομένων.
- *Αντιστροφή (reversal)*: δηλαδή κατασκευή μιας νέας διεργασίας αντιστρέφοντας την αρχική διεργασία.

Η θεωρία «APOS» υποστηρίζει, ότι όταν ένα άτομο αντιμετωπίζει καταστάσεις προβληματισμού σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο, τότε θα αντιμετωπίσει τις καταστάσεις αφομοιώνοντας τες στο υπάρχον σχήμα που είναι διαθέσιμο ή χρησιμοποιώντας στοχαστική αφαίρεση, θα αναδημιουργήσει αυτά τα σχήματα σε υψηλότερο επίπεδο εκλέπτυνσης. Δηλαδή, η εξέλιξη πραγματοποιείται μέσα από νέες κατασκευές, που αν και διατηρούν σημεία ομοιότητας με τις προηγούμενες, διαφέρουν σε επίπεδο εκλέπτυνσης. Όμως τι είδους κατασκευές κάνουν τα άτομα; Οι υποστηριχτές αυτής της θεωρίας τις χωρίζουν σε τέσσερα είδη: *δράση (action), διεργασίες (processes), αντικείμενα (objects), σχήματα (schemas)*.

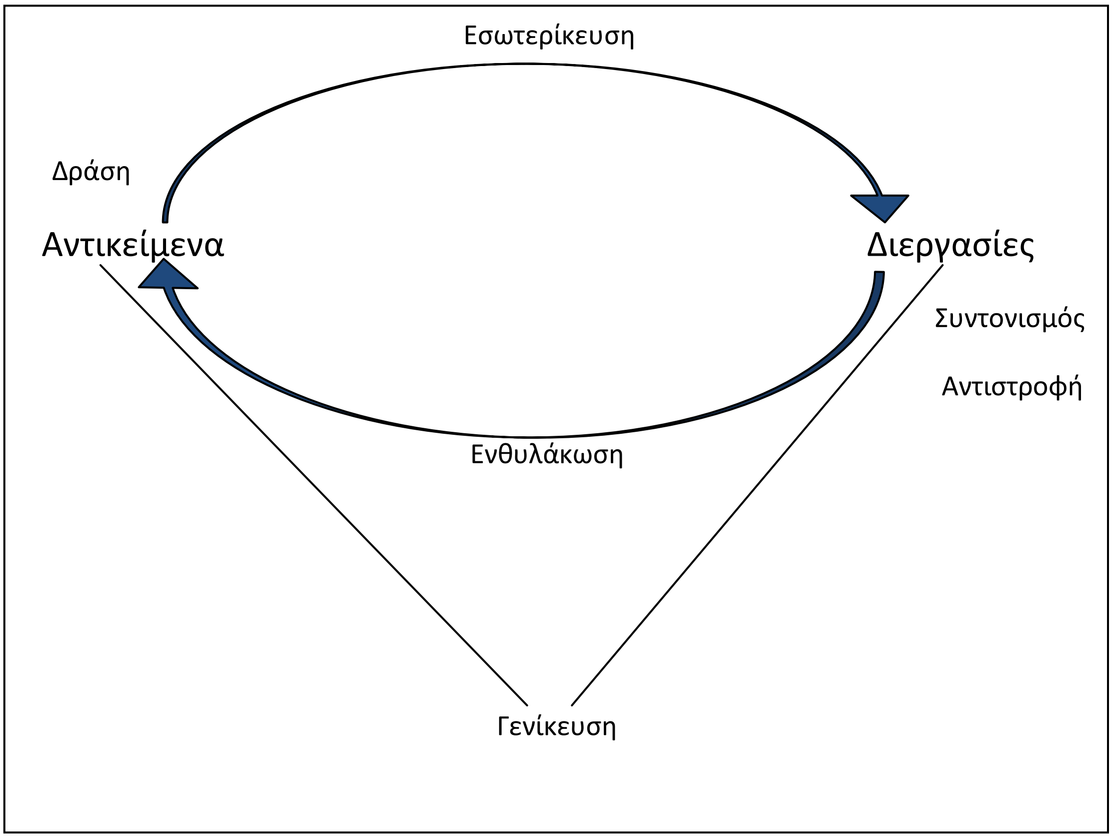
Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία, η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ξεκινά με τη *δράση*, που ορίζεται ως ο κάθε επαναλαμβανόμενος φυσικός ή νοητικός χειρισμός, που μετασχηματίζει αντικείμενα με κάποιο τρόπο. Ένα παράδειγμα εννοιολογικής δράσης, είναι η εύρεση λύσεων των εξισώσεων με δύο αγνώστους. Δηλαδή όταν έχουμε την εξίσωση του κύκλου: $x^2+(y-1)^2=4$ και για κάποιες τιμές του x (π.χ. $x \in A=\{-2,-1,0,1,2\}$) υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του y.

Όταν η ολική δράση, μπορεί να γίνει πλήρως στο μυαλό του ατόμου ή να φαντάζεται ότι γίνεται, χωρίς απαραίτητα να αναπαράγει όλα τα βήματα, θα λέμε ότι η δράση έχει εσωτερικευθεί σε *διεργασία*. Είναι πιθανό για το άτομο, να χρησιμοποιήσει τη διεργασία για να φτιάξει νέες διεργασίες, αν για παράδειγμα τη συντονίσει με άλλες διεργασίες, δηλαδή να συνδυάσει δύο ή περισσότερες διεργασίες και να φτιάξει μια καινούρια. Επίσης αντιστρέφοντας μια διεργασία μπορεί να φτιάξει μια νέα διεργασία. Στο παραπάνω παράδειγμα αυτό σημαίνει ότι το άτομο έχει στο μυαλό του τη διεργασία εύρεσης λύσεων της εξίσωσης, χωρίς απαραίτητα να κάνει την εκτέλεση των πράξεων. Συνδυάζοντας την παραπάνω διεργασία με την επίλυση τύπου μπορεί να οδηγηθεί κάποιος στην εύρεση του συνόλου τιμών των συναρτήσεων που προκύπτουν ($f_1(x) = y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $f_2(x) = y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$) με πεδίο ορισμού π.χ. το A. Επίσης αντιστρέφοντας τη διεργασία, αν γνωρίζει τρία σημεία του κύκλου, δηλαδή τρία ζευγάρια λύσεων μπορεί να προσδιορίσει τον κύκλο μέσα από την εξίσωση του, αφού βέβαια λύσει το αντίστοιχο σύστημα.

Όταν το άτομο βλέπει μια συγκεκριμένη διεργασία ως ολότητα, στοχάζεται πάνω σ' αυτήν, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και είναι ικανό να κατασκευάζει κατάλληλους μετασχηματισμούς ή όταν μια διεργασία είναι πιθανόν να μετασχηματιστεί από κάποια δράση, τότε θα λέμε ότι έχει ενθυλακωθεί (encapsulated) και έχει γίνει *αντικείμενο*. Τα αντικείμενα, αν χρειαστεί μπορούν να από-ενθυλακωθούν στις διεργασίες από τις οποίες προέρχονται. Στο παράδειγμα μας, το αντικείμενο που γεννιέται είναι οι λύσεις της εξίσωσης. Δηλαδή όταν η διεργασία συσχετισμού δύο συνόλων, μέσω της εξίσωσης, ενθυλακωθεί τότε έχουμε τη δημιουργία ενός νέου αντικειμένου, τα ζευγάρια τιμών (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης. Φυσικά, όταν χρειαστεί, το αντικείμενο από-ενθυλακώνεται σε διεργασία υπολογισμού ζευγαριών τιμών.

Τέλος οι διεργασίες και τα αντικείμενα οργανώνονται σε *σχήματα*. Δηλαδή από θεωρητική άποψη, τα σχήματα είναι οι δομές στις οποίες υπάρχουν οι έννοιες στο μυαλό του ατόμου. Στο παράδειγμα μας, οι λύσεις της εξίσωσης συνδέονται με τα σημεία του κύκλου και το γράφημα των συναρτήσεων. Στα πλαίσια της οργάνωσης ενός σχήματος πρέπει ενδεχομένως, να γίνει η αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχηση των λύσεων της εξίσωσης και των σημείων του κύκλου, μέσω του μετασχηματισμού «οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και αντίστροφα», με στόχο να αποτυπωθούν οι λύσεις της εξίσωσης στο επίπεδο, εφοδιασμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Το αποτέλεσμα είναι η σύνδεση δύο διαφορετικών μαθηματικών κλάδων, της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας που επιτυγχάνεται στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στο πλαίσιο διαχείρισης αυτού του αντικείμενου και με δεδομένη την αντιστοίχηση — ταυτοποίηση των λύσεων των εξισώσεων με τα σημεία του επιπέδου, το άτομο μπορεί να εξηγήσει το πλήθος των λύσεων ενός συστήματος, π.χ. το σύστημα $\begin{Bmatrix} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ 2x + y = 1 \end{Bmatrix}$ έχει δύο λύσεις, αφού η ευθεία τέμνει τον κύκλο. Επίσης μπορεί να γίνει η ταυτοποίηση του γραφήματος της f_1 με το ημικύκλιο, άρα με το σύνολο των λύσεων (x, y) με $y \geq 1$ και αντίστοιχα για την f_2, με αποτέλεσμα να υπάρχει δυνατότητα εμπλοκής ενός ακόμα κλάδου των μαθηματικών, του Απειροστικού Λογισμού, για τη μελέτη της καμπύλης.

Μια σχηματική περιγραφή των σχημάτων και των κατασκευών τους, περιγράφεται στο σχήμα 12, το οποίο δεν μπορεί κάποιος να το σκέφτεται στατικά, αλλά ως μια δυναμική δραστηριότητα. Η περιγραφή που βλέπουμε είναι απαραίτητα γραμμική και σπάει σε κάποιο σημείο. Μπορεί, όμως να περιγράψει τα πέντε είδη κατασκευών που χαρακτηρίζουν τη στοχαστική αφαίρεση.



Σχήμα 12: Το σχήμα και οι κατασκευές του (Dubinsky, 1991)

Πρώτα ξεκινάμε με τα αντικείμενα. Τέτοια στα Μαθηματικά είναι οι αριθμοί, οι μεταβλητές, οι εξισώσεις, οι συναρτήσεις, τα σύνολα, τα διανύσματα κ.α., οτιδήποτε δηλαδή μπορεί να κατασκευαστεί από το άτομο κατά τη διάρκεια της μαθηματικής του ανάπτυξης. Κάθε στιγμή, πραγματοποιούνται μια σειρά από δράσεις του ατόμου πάνω σε αυτά τα αντικείμενα. Αυτές οι δράσεις, πρέπει να εσωτερικευθούν σε διεργασίες, προκαλώντας συνειδητοποίηση των ενεργειών του ατόμου. Τέλος, η ενθυλάκωση των διεργασιών σε νέα αντικείμενα κλείνει τον κύκλο, δημιουργώντας μια διαρκεί δράση που οδηγεί στην κατάκτηση της γνώσης.

3.4. Η οντο-σημειωτική προσέγγιση για έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

Σ' αυτή την ενότητα, επιχειρείται η περιγραφή «μιας ενοποιημένης προσέγγισης στη μαθηματική γνώση και διδασκαλία», με πηγές πληροφόρησης τις εργασίες των Godino — Batanero — Font (2007), Font — Godino — D' Amore (2007) και των Font — Contreras (2008). Οι συγγραφείς πιστεύουν ότι είναι αναγκαίο και πιθανό, να κτιστεί μια ενοποιημένη προσέγγιση στη μαθηματική γνώση και διδασκαλία, η οποία να επιτρέπει την υπερνίκηση των διλημμάτων που τίθενται από τα διάφορα είδη ανταγωνιστικών κοινωνικών σχολών: ρεαλισμός — πραγματισμός, ατομισμός — θεσμική γνώση, κονστρουκτιβισμός — συμπεριφορισμός, κ.α. Η πρόοδος σ' αυτή την κατεύθυνση, θα πρέπει να λάβει υπ' όψιν κάποια νοητικά και μεθοδολογικά εργαλεία από ολιστικούς επιστημονικούς κλάδους, όπως Σημειωτική, Ανθρωπολογία και Οικολογία, αρθρώνοντας τες συνεκτικά με άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως η Ψυχολογία και Παιδαγωγική, οι οποίες παραδοσιακά εμπλέκονται με τη διδακτική των μαθηματικών. Ειδικά δίνεται έμφαση, στο μέρος της παραπάνω προσέγγισης που αφορά τη μαθηματική γνώση και τους τρόπους που αυτή γίνεται αντιληπτή από το άτομο.

Πιο συγκεκριμένα ορίζουν τις *μαθηματικές πρακτικές (mathematical practices)*, ως οποιαδήποτε ενέργεια ή εκδήλωση (γλωσσική ή άλλη), που πραγματοποιείται από κάποιον για να λύση μαθηματικά προβλήματα, για να διαβιβάσει τη λύση σε άλλους ανθρώπους και έτσι, να επικυρώσει και να γενικεύσει αυτή τη λύση σε άλλα πλαίσια και προβλήματα. Οι πρακτικές είναι ιδιοσυγκρασιακές ενός ατόμου ή θεσμικές στα πλαίσια της λειτουργίας ενός θεσμού (Σχολείο, Πανεπιστήμιο, κ.α.). Ο διαχωρισμός αυτός επιτρέπει την κατηγοριοποίηση τους. Όσον αφορά τις θεσμικές πρακτικές, τις κατηγοριοποιούν ως εξής:

- *Εφαρμοσμένες* (*implemented*): το σύστημα των πρακτικών που ο δάσκαλος εφαρμόζει αποτελεσματικά σε μια συγκεκριμένη διδασκαλία.
- *Αξιολογικές* (*assessed*): το σύστημα των πρακτικών που ένας δάσκαλος χρησιμοποιεί για να αξιολογήσει τη μάθηση των μαθητών του.
- *Σκόπιμες* (*intended*): το σύστημα των πρακτικών που περιλαμβάνονται στο σχεδιασμό της διεργασίας μάθησης.

- *Αναφερόμενες* (*referential*): το σύστημα των πρακτικών που χρησιμοποιείται ως αναφορά π.χ. αυτό που περιέχεται στο πρόγραμμα σπουδών.

Όσον αφορά τις ατομικές πρακτικές, τις κατηγοριοποιούν ως εξής:

- Ολικές (*global*): το σύνολο των προσωπικών πρακτικών, που ένα άτομο είναι δυνητικά ικανό να πραγματοποιήσει, συσχετισμένες με ένα συγκεκριμένο αντικείμενο.
- *Δηλωμένες* (*declared*): προσωπικές πρακτικές που δείχνουν αποτελεσματικά το σωστό ή το λάθος από τη θεσμική σκοπιά.
- *Επιτυχημένες* (*achieved*): προσωπικές πρακτικές που ταιριάζουν με το θεσμικό νόημα που εκφράζει ο δάσκαλος.

Στις μαθηματικές πρακτικές εμφανίζονται *δεικτικά αντικείμενα* (ostensive), π.χ. σύμβολα, γραφήματα και *μη δεικτικά αντικείμενα* (εμφανίζονται στο μυαλό, όταν κάνεις Μαθηματικά). Όταν οι μαθηματικές πρακτικές αναπτύσσονται στα πλαίσια ενός θεσμού (σχολείο), τότε τα αναδυόμενα αντικείμενα μπορούν να θεωρούνται *θεσμικά*, ενώ στις ατομικές πρακτικές θεωρούνται *ατομικά αντικείμενα*. Οι συγγραφείς προτείνουν έξι κατηγορίες πρωταρχικών μαθηματικών αντικειμένων:

- Γλώσσα (όροι, εκφράσεις, σημειογραφία, γραφικά).
- Καταστάσεις (προβλήματα, εφαρμογές, ασκήσεις, κ.α.).
- Έννοιες δοσμένες από ορισμούς ή περιγραφές (αριθμός, σημείο, ευθεία, συνάρτηση, κ.α.).
- Προτάσεις, ιδιότητες ή γνωρίσματα.
- Διαδικασίες (πράξεις, αλγόριθμοι, τεχνικές).
- Επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται για να επικυρώσουν και να εξηγήσουν τις προτάσεις και τις διαδικασίες.

Αυτά τα αντικείμενα είναι οργανωμένα σε πιο σύνθετες οντότητες, όπως εννοιολογικά σχήματα, θεωρίες κ. α. Οι έξι αρχικοί τύποι διαστέλλουν την παραδοσιακή διάκριση μεταξύ εννοιολογικών και διαδικαστικών οντοτήτων, που κατά την άποψη των συγγραφέων είναι ανεπαρκής στο να περιγράψει τα αντικείμενα που παρεμβαίνουν ή αναδύονται από τη μαθηματική δραστηριότητα. Για τη φύση των αντικειμένων απαντούν με τον παρακάτω τρόπο. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «τι είναι αριθμητικός μέσος», οι συγγραφείς απαντούν ότι «είναι το σύστημα των πρακτικών, που ένα άτομο εκφέρει (προσωπικό νόημα) ή στα πλαίσια ενός θεσμού εκφέρεται (θεσμικό νόημα), για να λύσει ένα τύπο προβλήματος στον οποίο είναι αναγκαίο να βρει μια αντιπροσωπευτική τιμή ενός συνόλου δεδομένων».

Οι *σημειωτικές λειτουργίες (semiotic functions)*, είναι αυτές που καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων και ορίζονται ως η εξάρτηση μεταξύ του κειμένου και των συστατικών του ή των συστατικών μεταξύ τους, δηλαδή η αντιστοιχία μεταξύ του προγενέστερου (έκφραση, σημαίνον) και της συνέπειας (περιεχόμενο, σημαινόμενο). Για τους συγγραφείς οι σχέσεις εξάρτησης μπορούν να είναι:

- *Αναπαραστάσιμες (representational)*, δηλαδή ένα αντικείμενο τοποθετείται στη θέση ενός άλλου.
- *Εργαλειακές (instrumental)*, δηλαδή ένα αντικείμενο χρησιμοποιεί ένα άλλο αντικείμενο σαν εργαλείο.
- *Δομικές (structural)*, δηλαδή δύο ή περισσότερα αντικείμενα δημιουργούν ένα σύστημα, από το οποίο νέα αντικείμενα αναδύονται.

Τα μαθηματικά αντικείμενα διαμορφώνουν *σχηματισμούς (configuration)*, οι οποίοι ορίζονται ως δίκτυα αντικειμένων, που περιλαμβάνονται και προκύπτουν από τα συστήματα πρακτικών. Οι σχηματισμοί μπορεί να είναι *επιστημικοί (epistemic)*, δηλαδή δίκτυο θεσμικών αντικειμένων ή *γνωστικοί (cognitive)*, δηλαδή δίκτυο προσωπικών αντικειμένων.

Τα μαθηματικά αντικείμενα, που επεμβαίνουν στις μαθηματικές πρακτικές ή αναδύονται απ’ αυτές, μπορούν να εξεταστούν από τις επόμενες δυϊκές διαστάσεις ή πλευρές.

Προσωπικά — θεσμικά (personal — institutional). Τα θεσμικά αντικείμενα αναδύονται, από συστήματα πρακτικών που άπτονται του πλαισίου λειτουργίας ενός ιδρύματος, ενώ τα ατομικά αντικείμενα, αναδύονται από συγκεκριμένες πρακτικές ενός ατόμου. Προσωπική γνώση είναι αποτέλεσμα ατομικής σκέψης και δραστηριότητας, ενώ θεσμική γνώση είναι αποτέλεσμα διαλόγου, συμφωνίας και κανονισμού μέσα στην ομάδα των ατόμων που αποτελούν το θεσμό (Σχολείο, Πανεπιστήμιο, κ.α.).

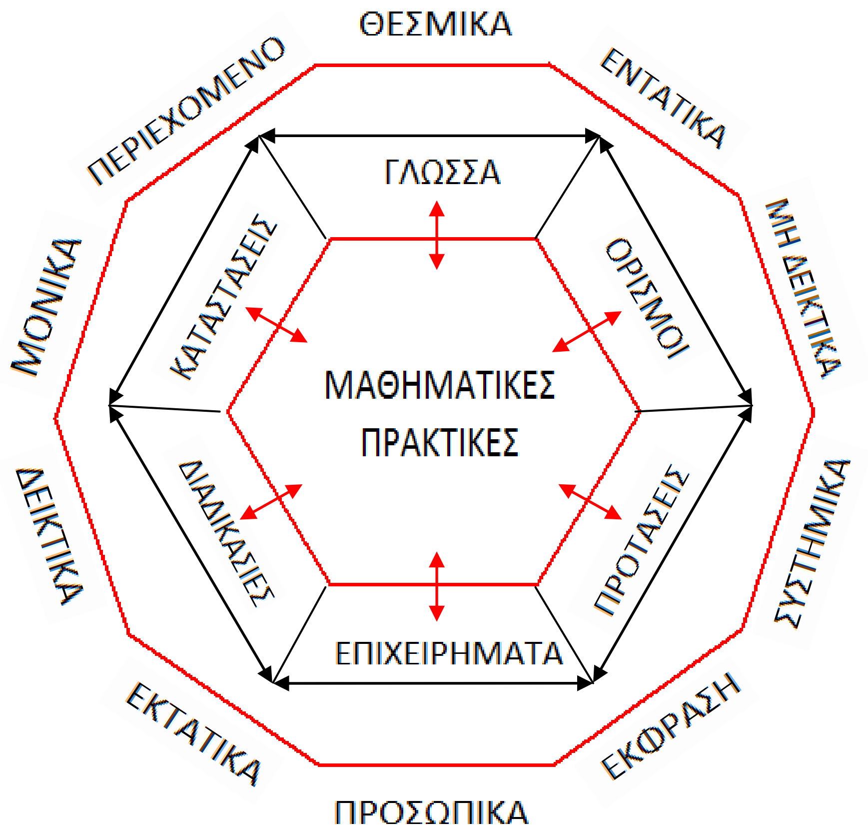
Δεικτικά — μη δεικτικά (ostensive — non-ostensive), (υλοποιημένα — εξιδανικευμένα). Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι γενικά αισθητά, όμως στις δημόσιες πρακτικές τα αντιλαμβανόμαστε μέσα από τις δεικτικές αναπαραστάσεις τους (όπως εκφράσεις, σύμβολα, γραφήματα, κ.τ.λ.). Δεικτικά αντικείμενα μπορούν επίσης να γίνουν σκέψεις, που φαντάζεται ένα άτομο ή υποκρυπτόμενα στο δημόσιο διάλογο (για παράδειγμα το σύμβολο του πολλαπλασιασμού στην Άλγεβρα). Για παράδειγμα μια ευθεία σχεδιασμένη (που έχει πάχος και πεπερασμένο μήκος) είναι η δεικτική αναπαράσταση της εξιδανικευμένης ευθείας (που δεν έχει πάχος και έχει άπειρο μήκος).

Εντατικά — εκτατικά (intensive — extensive), (τύπος — παράδειγμα). Ένα εκτατικό αντικείμενο χρησιμοποιείται ως μια ειδική περίπτωση (π.χ. η ευθεία $y=2x+1$), από μία γενική ομάδα (π.χ. οι ευθείες $y=mx+n$ με $m,n\in\mathbb{R}$), η οποία είναι ένα εντατικό αντικείμενο. Η δυϊκότητα εντατικό — εκτατικό, χρησιμοποιείται για να εξηγήσει ένα βασικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής δραστηριότητας, τη χρήση γένιων (generic) στοιχείων (βλέπε στην παράγραφο 3.5.2). Αυτή η δυϊκότητα, μας επιτρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο γενικό και το ειδικό.

Μονικά — συστημικά (unitary — systemic). Σε κάποιες περιπτώσεις, τα μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιούνται ως μονικές (έχει επέλθει η υποστασιοποίηση) οντότητες, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, τα βλέπουμε ως συστήματα, που μπορούν να αναλυθούν για να μελετηθούν. Π.χ. η πρόσθεση και η αφαίρεση, αλγόριθμοι, δεκαδικό σύστημα αριθμών θεωρούνται στις μεγαλύτερες τάξεις ως κάτι γνωστό ή ως μονικές οντότητες. Τα ίδια αντικείμενα, στις πρώτες τάξεις αντιμετωπίζονται συστημικά και θεωρούνται σύνθετα αντικείμενα μάθησης. Ένα δεύτερο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η εξίσωση $x^2+y^2=1$. Η συστημική αντιμετώπιση της εξίσωσης αυτής θα μπορούσε να περιλαμβάνει, ένα αλγόριθμο εύρεσης των λύσεων ή την αναγνώριση του κύκλου, τη δυνατότητα εύρεσης του κέντρου και της ακτίνας, ακόμα και την εύρεση της σχετικής θέσης του κύκλου με μια άλλη καμπύλη, καθώς επίσης και τη μετάβαση από μια αναπαράσταση του κύκλου σε μια άλλη. Ότι κάποιος αντιλαμβάνεται μονικά την παραπάνω εξίσωση σημαίνει, ότι βλέπει την εξίσωση αυτή ως ένα αντικείμενο μιας γενικότερης κατηγορίας εξισώσεων (π.χ. $x^2+y^2=\rho^2$) την οποία μπορεί να μελετά και να λύνει προβλήματα που σχετίζονται με την εύρεση των κύκλων αυτής της κατηγορίας που ικανοποιούν μια δοθείσα υπόθεση.

Έκφραση — περιεχόμενο (expression — content), (προγενέστερα — επακόλουθα). Είναι τα προηγούμενα και οι συνέπειες των σημειωτικών λειτουργιών. Η μαθηματική δραστηριότητα είναι ουσιαστικά συσχετιστική, ενόσω τα διάφορα αντικείμενα που περιγράφονται δεν είναι απομονωμένα, αλλά είναι συσχετισμένα στη μαθηματική γλώσσα και δραστηριότητα, κάτω από το νόημα των σημειωτικών λειτουργιών. Κάθε τύπος αντικειμένου, μπορεί να παίξει το ρόλο του προγενέστερου ή επακόλουθου σε μια σημειωτική λειτουργία που εκτελεί ένα άτομο.

Οι συγγραφείς με το παρακάτω σχήμα συνοψίζουν τις παραπάνω απόψεις τους για τις μαθηματικές πρακτικές. Τα έξι είδη μαθηματικών αντικειμένων και τα πέντε είδη δυϊκών πλευρών που αυτά τα αντικείμενα μπορούν να περιγραφούν, φαίνονται στο σχήμα αρκετά παραστατικά.



Σχήμα 13: Η οντο-σημειωτική προσέγγιση (Godino, Batanero, Font, 2007)

Δε βλέπουν την κατανόηση ως μια νοητική διεργασία, αλλά ως ικανότητα. Κάποιος λέγεται ότι κατάλαβε ένα μαθηματικό αντικείμενο, όταν μπορεί να το χρησιμοποιήσει με αποτελεσματικό τρόπο σε διαφορετικές πρακτικές. Όταν κάποιος μιλάει για γνώση, είναι ισοδύναμο να μιλάει για το περιεχόμενο των σημειωτικών λειτουργιών και η διαφορετικότητα των τύπων της γνώσης αντιστοιχεί στην ποικιλία των σημειωτικών λειτουργιών, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν στις ποικίλες οντότητες που συναντάει κάποιος σ’ ένα θεωρητικό μοντέλο.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ανάλυσης των σημειωτικών λειτουργιών, που χρησιμοποιήθηκαν στην διδακτική παρέμβαση που έγινε στο πλαίσιο της εργασίας αυτής (βλέπε παράρτημα Β: κύκλος). Στο πρώτο τμήμα του φύλλου εργασίας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης ($f(x)=\sqrt{4-x^2}$) και το πεδίο ορισμού ($-2 \leq x \leq 2$). Στο δεύτερο τμήμα ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις τιμές της συνάρτησης για κάποιες δοσμένες τιμές του x. Στο ίδιο τμήμα υπάρχει ερώτηση σχετικά με το πλήθος των τιμών που μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Στο επόμενο τμήμα, ζητείται να γράψουν οι μαθητές τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που αντιστοιχούν στις τιμές που έχουν προσδιοριστεί, ενώ στο τέλος υπάρχει ερώτηση για το πλήθος των σημείων της γραφικής παράστασης. Στο επόμενο μέρος του φύλλου εργασίας πρέπει να συμπληρωθεί η εξίσωση, της οποίας οι λύσεις είναι οι συντεταγμένες των σημείων που έχουν βρεθεί προηγουμένως. Στη συνέχεια πρέπει τα σημεία αυτά να βρεθούν στο επίπεδο και να ενωθούν, φτιάχνοντας ένα ημικύκλιο. Τέλος στο τελευταίο τμήμα πρέπει να περιγραφεί λεκτικά το σύνολο των σημείων που βρήκαμε. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι σημειωτικές λειτουργίες που πιθανά πρέπει να εκτελέσει κάποιος συμπληρώνοντας το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας.

Οι σημειωτικές λειτουργίες (ΣΛ) που χρησιμοποιήθηκαν μπορούν να αναλυθούν σε διάφορα επίπεδα. Οι δύο αριθμοί που χρησιμοποιηθήκαν δηλώνουν:

Ο πρώτος, αν είναι από 1 έως 4, τη μετάβαση από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο με αναπαραστατική σημειωτική λειτουργία και συγκεκριμένα:

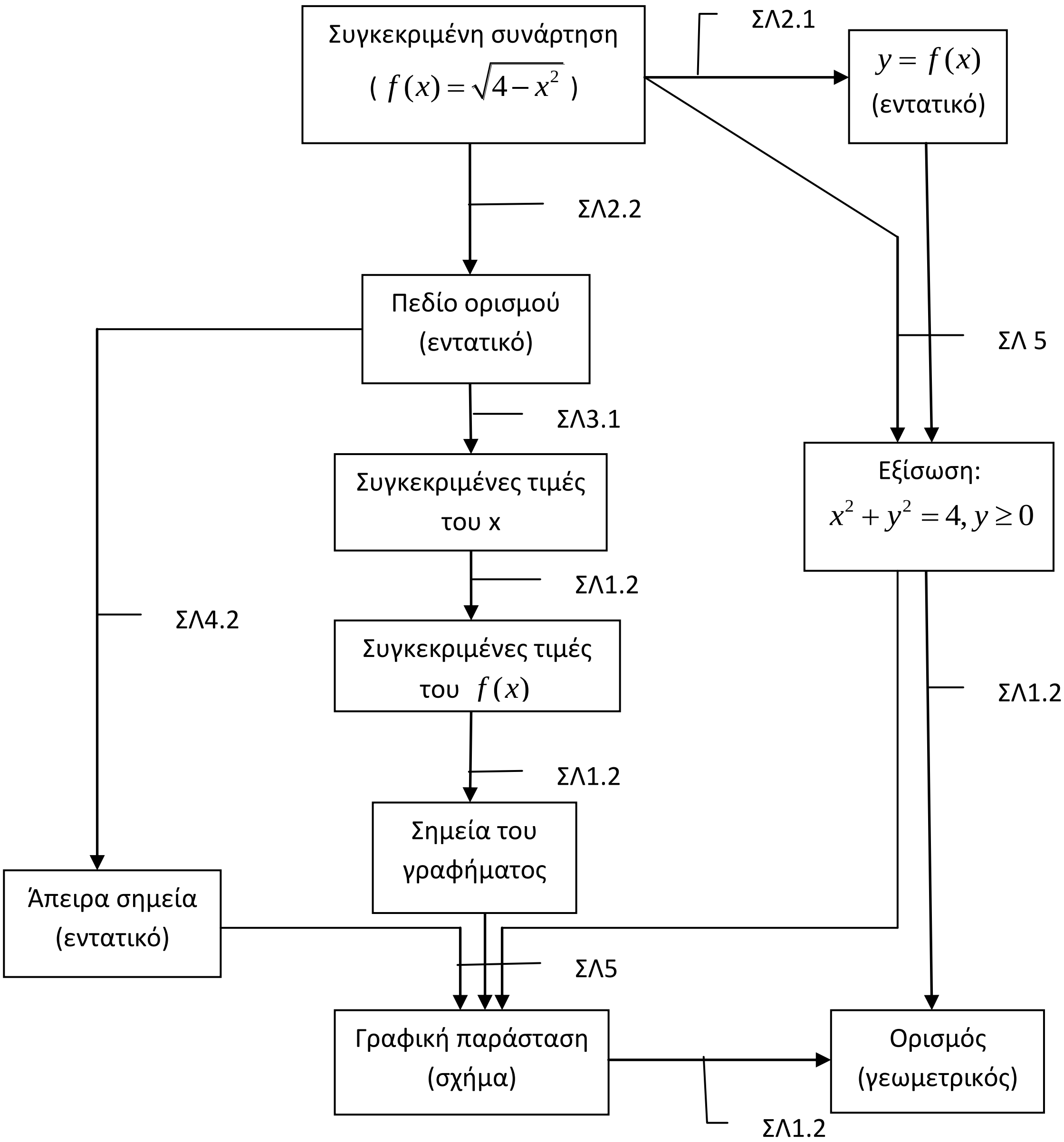
1. ΣΛ1 Τη μετάβαση από το εκτατικό στο εκτατικό.
    - ΣΛ1.1 σχετίζει ένα αντικείμενο με ένα άλλο της ίδιας ομάδας.
    - ΣΛ1.2 σχετίζει ένα αντικείμενο με ένα άλλο που δεν ανήκουν στην ίδια ομάδα.
2. ΣΛ2.Τη μετάβαση από το εκτατικό στο εντατικό.
    - ΣΛ2.1 σχετίζει ένα αντικείμενο με την ομάδα στην οποία ανήκει.
    - ΣΛ2.2 σχετίζει ένα αντικείμενο με μια ομάδα στην οποία δεν ανήκει.

3. ΣΛ3.Την μετάβαση από το εντατικό στο εκτατικό.

    - ΣΛ3.1 σχετίζει μια ομάδα με ένα παράδειγμα που ανήκει στην ομάδα.
    - ΣΛ3.2 σχετίζει μια ομάδα με ένα αντικείμενο που δεν ανήκει στην ομάδα.

4. ΣΛ4.Τη μετάβαση από το εντατικό στο εντατικό.

    - ΣΛ4.1 Αυτή η σημειωτική λειτουργία ορίζει μια ομάδα αντικειμένων με ένα διαφορετικό τρόπο.
    - ΣΛ4.2 Αυτή η σημειωτική λειτουργία σχετίζει μια εντατική οντότητα με μια άλλη διαφορετική εντατική οντότητα.



Σχήμα 14: Οι σημειωτικές λειτουργίες για τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας για τον κύκλο

Αν ο πρώτος είναι 5, πρόκειται για δομική σημειωτική λειτουργία.

Η ανάλυση θα γινόταν πιο σύνθετη, αν εμπλεκόταν η έννοια της εργαλειακής σημειωτικής λειτουργίας, η οποία συμβαίνει π.χ. στο σημείο που βρίσκουμε τις τιμές της f, χρησιμοποιώντας τον τύπο της. Με το παραπάνω σχήμα γίνονται σαφείς οι σημειωτικές λειτουργίες που πρέπει να εκτελεστούν και φαίνονται καθαρά οι δύο δρόμοι που μπορεί να επιλέξει κάποιος για να φτάσει στον ορισμό. Η χρήση των δύο εντατικών αντικειμένων, δηλαδή του πεδίου ορισμού και τα άπειρα σημεία που προκύπτουν απ' αυτό, δίνουν τη δυνατότητα, τουλάχιστον διαισθητικά, να αντιληφθούν οι μαθητές γιατί ενώνουμε τα σημεία στο σχήμα. Ο τρόπος που τα ενώνουμε καθορίζεται από το είδος της καμπύλης, που έχουμε ωστόσο βρει ότι είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Το τρίτο εντατικό αντικείμενο, δηλαδή η εξίσωση $y = f(x)$, συνδέει τις συναρτήσεις με τις εξισώσεις και επιτρέπει την επανάληψη του συλλογισμού και σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις. Έτσι, η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιείται ως γένιο (generic) παράδειγμα με στόχο την ενοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων του κύκλου.

Το γένιο παράδειγμα (generic example), είναι μια ειδική περίπτωση που επιλέγεται με στόχο την ευκολία στους χειρισμούς, όμως διατηρεί τα γενικά χαρακτηριστικά της κατηγορίας του (γένος), με αποτέλεσμα τη δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων (αυτών που σχετίζονται με τα γενικά χαρακτηριστικά) σε όλη την κατηγορία. Η διαδικασία γενίκευσης μ' αυτόν τον τρόπο, ονομάστηκε γένια αφαίρεση (generic abstraction) από τους Harel και Tall(1989). Συγκεκριμένα, ορίστηκε ως γένια αφαίρεση «η επιτυχής διεργασία, η οποία συντελείται, όταν ένα άτομο βλέποντας ένα ή δύο συγκεκριμένα παραδείγματα ως τυπικά μιας ευρύτερης κατηγορίας παραδειγμάτων, ενσαρκώνει μια αφηρημένη έννοια» (Harel, Tall, 1989).

Επιστρέφοντας στην οντο-σημειωτική προσέγγιση, και όσον αφορά τα διδακτικά προβλήματα οι συγγραφείς παρουσιάζουν το *διδακτικό σχήμα (didactical configuration)* ως την πρωταρχική μονάδα για διδακτική ανάλυση. Αυτό αποτελείται από την αλληλεπίδραση δασκάλου — μαθητή όταν μελετάται ένα μαθηματικό αντικείμενο. Κάθε εκπαιδευτική διεργασία αναπτύσσεται σε δοσμένο χρόνο διαμέσου μιας ακολουθίας διδακτικών σχημάτων. Ένα διδακτικό σχήμα περιέχει ένα *επιστημικό σχήμα (epistemic configuration)*, δηλαδή ένα μαθηματικό πρόβλημα, τη γλώσσα και τις δράσεις που απαιτούνται για να το λύσεις, κανόνες και επιχειρήματα που θεωρούνται αληθή από το δάσκαλο, τους μαθητές, ή και τους δύο. Επίσης υπάρχει ένα *εκπαιδευτικό σχήμα (instructional configuration)* που αποτελείται από το δάσκαλο, τους μαθητές και τα ενδιάμεσα αντικείμενα (διαφορετικές πηγές) που σχετίζονται με το μαθηματικό περιεχόμενο που μελετάται. Τέλος η μάθηση κτίζεται μέσα από μια διαδικασία, που μπορεί κάποιος να τη θεωρήσει ως ένα σύνολο *γνωστικών σχημάτων*, δηλαδή ένα δίκτυο αντικειμένων που αναδύονται ή εμπλέκονται σ' ένα σύστημα προσωπικών πρακτικών που οι μαθητές εμφανίζουν κατά τη διάρκεια της εφαρμογής ενός επιστημικού σχήματος.

Τέλος συμπληρώνουν τις θεωρητικές έννοιες που περιγράφηκαν, με την έννοια της *διδακτικής καταλληλότητας (didactical suitability)*, την οποία ορίζουν ως τη συνεκτική και συστημική άρθρωση των έξι παρακάτω συνιστωσών:

- *Επιστημική καταλληλότητα (epistemic suitability)*: αντιπροσωπευτικότητα των θεσμικά εφαρμοσμένων νοημάτων, ως απαιτήσεις των αναφερόμενων νοημάτων που έχουν οριστεί από πριν.
- *Γνωστική καταλληλότητα (cognitive suitability)*: ευρύτητα με την οποία τα θεσμικά εφαρμοζόμενα νοήματα περιλαμβάνονται στη «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» και η εγγύτητα των προσωπικών νοημάτων με τα εφαρμοζόμενα.
- *Διαδραστική καταλληλότητα (interactive suitability)*: η ευρύτητα με την οποία τα διδακτικά σχήματα και οι τροχιές επιτρέπουν την αναγνώριση και επίλυση σημειωτικών συγκρούσεων, οι οποίες μπορούν να συμβούν κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας.
- *Καταλληλότητα των μέσων/πηγών (media/resources suitability)*: διαθεσιμότητα και επάρκεια των υλικών και ιστορικών πηγών που χρειάζονται για να αναπτυχθεί η διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης.
- *Συναισθηματική καταλληλότητα (emotional suitability)*: η εμπλοκή (ενδιαφέρον, κινητοποίηση) των μαθητών στη διαδικασία μάθησης.
- *Οικολογική καταλληλότητα (ecological suitability)*: το εύρος με το οποίο η διδασκαλία και η μάθηση ταιριάζουν στο εκπαιδευτικό έργο, στο σχολείο και την κοινωνία και λαμβάνουν υπ' όψιν τους καθοριστικούς παράγοντες της διάταξης στην οποία έχουν αναπτυχθεί.

Οι συγγραφείς συνοψίζοντας αναφέρουν ότι τα θεωρητικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν στην οντο-σημειωτική προσέγγιση στη μαθηματική γνώση και διδασκαλία, μπορούν να εφαρμοστούν στην ανάλυση της διαδικασίας διδασκαλίας και μάθησης, εφαρμοζόμενα σε μια συγκεκριμένη διδασκαλία, στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη μιας διδακτικής μονάδας, ή σε πιο γενικό επίπεδο, στο σχεδιασμό και την πραγματοποίηση μιας σειράς μαθημάτων ή στα πλαίσια μιας εισήγησης για το πρόγραμμα σπουδών. Επίσης μπορούν να φανούν χρήσιμα στην ανάλυση επιμέρους θεμάτων της διαδικασίας της μελέτης όπως, διδακτικές πηγές, βιβλία, απαντήσεις μαθητών σε εργασίες, κ.τ.λ.

3.5. Αναπαραστάσεις

Σύμφωνα με τον Dreyfus (1991), αναπαριστώ μια έννοια σημαίνει, ότι δημιουργώ ένα στιγμιότυπο, ένα δείγμα, ένα παράδειγμα, μια εικόνα της έννοιας αυτής. Αλλά αυτού του είδους η περιγραφή είναι ανεπαρκής, γιατί δεν προσδιορίζει ακριβώς αν το στιγμιότυπο είναι συμβολικό ή νοητικό, ούτε δεικνύει τι σημαίνει «δημιουργώ» σε σχέση με τη διεργασία, από την οποία οι νοητικές αναπαραστάσεις παράγονται και πως αναπτύσσονται. Μια συμβολική αναπαράσταση εμφανίζεται εξωτερικά, γράφοντας ή μιλώντας και συνήθως έχει σκοπό να κάνει ευκολότερη την επικοινωνία για την έννοια. Ο συμβολισμός είναι απαραίτητος στα Μαθηματικά. Όμως υπάρχουν κίνδυνοι παρανοήσεων. Για παράδειγμα όταν γράφουμε την εξίσωση της ευθείας $y = 2x + 1$ στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, τα x και y είναι άγνωστες ποσότητες ή μεταβλητές; Μια νοητική αναπαράσταση, από την άλλη μεριά, αναφέρεται σε εσωτερικά σχήματα ή πλαίσια αναφοράς, το οποία χρησιμοποιεί το άτομο για να αλληλεπιδρά με τον εξωτερικό κόσμο. Δηλαδή, όταν μας απασχολεί ένα μαθηματικό αντικείμενο ή διεργασία, καθ’ ένας από μας το σχετίζει με κάτι που έχει στο νου του. Βέβαια αυτό που έρχεται στο νου του καθενός μπορεί να διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο. Για παράδειγμα, από την παραπάνω αλγεβρική σχέση μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει την εξίσωση μιας ευθείας, ενώ κάποιος άλλος τη συνάρτηση που ορίζει η σχέση αυτή.

Σύμφωνα με τον Dreyfus (1991), για να είσαι επιτυχημένος στα Μαθηματικά είναι σημαντικό να έχεις στη διάθεση σου πολλές νοητικές αναπαραστάσεις των εννοιών, όμως η ύπαρξη τους και μόνο, δεν αρκεί για την ευέλικτη χρήση των εννοιών στη λύση προβλημάτων. Χρειάζεται η δυνατότητα εναλλαγής από μια αναπαράσταση σε μια άλλη, η οποία είναι πιο αποτελεσματική για το επόμενο βήμα που θέλουμε να κάνουμε, αλλά αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη επιτυχών και ισχυρών συνδέσμων μεταξύ των αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα ο συγγραφέας βλέπει τη διεργασία μάθησης να περιέχει τέσσερα στάδια:

- Χρήση μιας απλής αναπαράστασης.
- Παράλληλη χρήση παραπάνω από μιας αναπαραστάσεων.
- Δημιουργία συνδέσμων μεταξύ παράλληλων αναπαραστάσεων.
- Ενοποίηση αναπαραστάσεων και ευέλικτη εναλλαγή τους.

Όταν η παραπάνω διεργασία ολοκληρωθεί, τότε έχουμε το σχηματισμό αφαιρετικής αντίληψης της έννοιας, που οδηγεί στον ελεγχόμενο τρόπο χρήσης των αναπαραστάσεων της έννοιας στη λύση μαθηματικών προβλημάτων, στα οποία εμφανίζεται η έννοια. Επειδή επίσης, η εμπλοκή πολλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές, ο συγγραφέας προτείνει τη συστηματική χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας στη διδασκαλία και να δίνεται έμφαση στην εναλλαγή των αναπαραστάσεων από την αρχή.

Επειδή κάθε έννοια είναι ενταγμένη σ’ ένα πλαίσιο μαθηματικής δραστηριότητας, θεωρούμε ότι είναι καταλληλότερο να αναφερόμαστε όχι σε αναπαραστάσεις, αλλά σε συστήματα ή μοντέλα αναπαράστασης. Όμως από τι αποτελείται ένα σύστημα αναπαράστασης; Σύμφωνα με τον Goldin (1998), ένα τέτοιο σύστημα κατ’ αρχήν αποτελείται από πρωτόγονους χαρακτήρες ή σημάδια (λέξεις που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας εναλλακτικά), ενσαρκωμένα με κάποιο τρόπο. Αυτοί μπορεί να είναι ιδιαίτερες οντότητες που περιέχονται σ’ ένα καλά ορισμένο σύνολο, όπως για παράδειγμα, χαρακτήρες στη συμβολική λογική, ειπωμένες λέξεις, γράμματα του αλφαβήτου, σημεία στίξης, ψηφία, σύμβολα αριθμητικών πράξεων. Μπορεί επίσης να είναι λιγότερο καλά ορισμένες οντότητες, όπως φυσικά αντικείμενα και οι ιδιότητες τους. Τέλος μπορεί να είναι αφηρημένες μαθηματικές ή φυσικές οντότητες, όπως αριθμοί, διανύσματα, πίνακες, ταχύτητες ή δυνάμεις. Επιπρόσθετα, ένα αναπαραστατικό σύστημα περιλαμβάνει κανόνες για συνδυασμό των συμβόλων σε επιτρεπόμενους σχηματισμούς. Τυπικά ένα αναπαραστατικό σύστημα έχει πολύ μεγαλύτερη δομή απ’ αυτή. Περιέχει κανόνες (μερικές φορές διφορούμενους) για μετακίνηση από ένα επιτρεπόμενο σχηματισμό σ’ ένα άλλο, ή από ένα σύνολο σχηματισμών σ’ ένα άλλο, καθιερώνοντας ένα είδος δομικού δικτύου. Ο βασικός λόγος που καλούμε αυτά τα συστήματα αναπαραστατικά είναι γιατί χαρακτήρες, σχηματισμοί, ή δομές σ’ ένα τέτοιο σύστημα, μπορούν να κωδικοποιήσουν, ενεργοποιήσουν, παραγάγουν, αποτελέσουν βάση, αναπαραστήσουν, ή συμβολίσουν αυτούς σ’ ένα άλλο σύστημα, σύμφωνα με κανόνες (συχνά αμφίσημους).

Ο Goldin (1998) ορίζει ως εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα, τα κοινά, αντιπροσωπευτικά συστήματα που αναπτύχθηκαν από την ανθρώπινη κοινωνική διεργασία και περιλαμβάνουν φυσικές γλώσσες, συστήματα μαθηματικών σημειογραφιών και συμβάσεις, διαχωρίζοντάς τα από τα εσωτερικά αναπαραστατικά συστήματα που είναι ατομικά. Τα εσωτερικά αναπαραστατικά συστήματα κατά το συγγραφέα, είναι το γλωσσικό, το εικονικό (που συνδέεται με τη φαντασία), του χειρισμού των τυπικών σημειογραφικών συστημάτων, του προγραμματισμού — παρακολούθησης — εκτελεστικού ελέγχου, το συναισθηματικό. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις προσδιορίζονται από τις ικανότητες που έχει ένα άτομο, στο πλαίσιο των παραπάνω αναπαραστατικών συστημάτων, να εκτελεί μια δράση.

Όμως υπάρχουν και άλλες απόψεις για το διαχωρισμό των αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Duval (2000), ο όρος αναπαραστάσεις «συχνά χρησιμοποιείται αναφερόμενος σε νοητικές οντότητες: εικόνα, κάτι μακρινό ή κάτι που απουσιάζει, το οποίο ανακαλείται στο νου και, τελικά, αυτό που καταλαβαίνουν τα υποκείμενα». Στο πλαίσιο αυτό, οι νοητικές αναπαραστάσεις θεωρούνται ως το αντίθετο των συμβόλων, τα οποία πρέπει να είναι μόνο «υλικά» ή «εξωτερικά» σύμβολα. Ο διαχωρισμός σε εσωτερικές (νοητικές) και εξωτερικές (υλικές) αναπαραστάσεις είναι παραπλανητικός και προκαλεί δύο καταστροφικές συγχύσεις. Η πρώτη είναι ότι ο διαχωρισμός σε νοητικές/εξωτερικές αναφέρεται στον τρόπο παραγωγής τους και όχι στη φύση ή τον τύπο τους. Με βάση αυτό, τα σύμβολα δεν είναι ούτε νοητικές, ούτε φυσικές ή εξωτερικές οντότητες. Η σημασία ενός συμβόλου δεν καθορίζεται από την κατανόησή του ως υλικό αντικείμενο, αλλά από τις σχέσεις αντίθεσης που έχει με άλλα σύμβολα. Η δεύτερη είναι ότι, όπως συμβαίνει και με τη γλώσσα, η χρήση ενός σημειωτικού συστήματος μπορεί να είναι νοητική ή γραπτή (αυτό είναι το εξωτερικό). Για παράδειγμα όταν κάποιος κάνει αριθμητική με το νου του, χρησιμοποιεί το ίδιο σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιεί και όταν κάνει υπολογισμούς γράφοντας, όχι όμως και την ίδια στρατηγική γιατί έχει γνωστικό κόστος. Για τον Duval (2000), υπάρχουν δύο είδη γνωστικών αναπαραστάσεων. Αυτές που σκόπιμα παράγονται χρησιμοποιώντας κάποιο σημειωτικό σύστημα: προτάσεις, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα, σχέδια… Η παραγωγή τους μπορεί να είναι εξίσου νοητική ή εξωτερική. Και αυτές, που είναι αιτιολογικά και αυτόματα παραγόμενες από ένα οργανικό σύστημα (οπτικές εικόνες ονείρου ή μνήμης) ή από ένα φυσικό μηχανισμό (αντανακλάσεις, φωτογραφίες). Στην πρώτη κατηγορία, το περιεχόμενο μιας αναπαράστασης υποδηλώνει το αναπαριστώμενο αντικείμενο. Είναι μια ρητή επιλογή, γιατί κάθε δηλωτική μονάδα απορρέει από μια επιλογή. Στη δεύτερη κατηγορία, το περιεχόμενο των αναπαραστάσεων είναι η έκβαση μιας φυσικής δράσης του αναπαριστώμενου αντικειμένου, σε κάποιο οργανικό σύστημα ή σε κάποιο φυσικό μηχανισμό. Δηλαδή ο Duval (2000) προτείνει τη διαίρεση των αναπαραστάσεων σε σημειωτικές και σε φυσικές/οργανικές και όχι σε νοητικές αναπαραστάσεις και εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως συχνά χρησιμοποιείται στις γνωστικές επιστήμες. Στη συνέχεια επιχειρείται περαιτέρω μελέτη των σημειωτικών αναπαραστάσεων.

3.5.1. Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις

Αυτό το οποίο διαχωρίζει τη μαθηματική σκέψη από άλλες μορφές γνώσης, αυτό που την ξεχωρίζει, κατά κάποιο τρόπο, δεν είναι η χρησιμοποίηση σημείων, συμβόλων και αναπαραστάσεων που επιτρέπουν την έκφραση μέσα από εικόνες, αλλά είναι το γεγονός ότι αυτή η χρησιμοποίηση είναι απολύτως απαραίτητη για να προσεγγίζουμε τα αντικείμενα τα οποία μελετά (αριθμούς, συναρτήσεις, γεωμετρικές ιδιότητες, κ.α.) και για να εργαστούμε με αυτά τα αντικείμενα, ή πάνω σε αυτά τα αντικείμενα. Δηλαδή οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι ενδογενείς στην άσκηση της μαθηματικής σκέψης και γι’ αυτό τα Μαθηματικά ανέπτυξαν μια ποικιλία σημειωτικών συστημάτων αναπαραστάσεων, τις οποίες δε βρίσκουμε στις άλλες επιστημονικές περιοχές (Duval, 2003).

Επειδή η ποικιλία των συστημάτων σημειωτικών αναπαραστάσεων είναι μεγάλη στα Μαθηματικά, ο Duval (2003) προτείνει την ακόλουθη ταξινόμηση: Όλα τα συστήματα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά παρουσιάζουν δύο τύπους χαρακτηριστικών. Από τη μία, μπορεί να είναι πολυ-λειτουργικά, ή μονο-λειτουργικά. Από την άλλη, μπορεί να χρησιμοποιούν ή να μην χρησιμοποιούν κάποια γλώσσα (discursive ή non-discursive). Ένα σύστημα είναι πολυ-λειτουργικό όταν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξυπηρετήσει πολύ διαφορετικές λειτουργίες: τη λειτουργία της επικοινωνίας προφανώς, αλλά επίσης λειτουργίες επεξεργασίας, αντικειμενικοποίησης, εικονογράφησης, προσομοίωσης, κτλ. Ένα σύστημα είναι μονο-λειτουργικό, όταν δεν μπορεί να εξυπηρετήσει παρά μόνο μια λειτουργία. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν κάποια γλώσσα χαρακτηρίζονται από τη συντακτική γραμμικότητα συνδυασμών νοηματικών ενοτήτων και από την αλληλουχία των επιπέδων νοηματικής διάρθρωσης (αλγεβρικές παραστάσεις-αλγεβρικός λογισμός). Αντιθέτως, οι αναπαραστάσεις που δε χρησιμοποιούν κάποια γλώσσα χαρακτηρίζονται από μια, σχεδόν άμεση, συνοπτική αντίληψη και από την απουσία συντακτικών δεσμεύσεων διάταξης για να τις διατρέξουμε ή να τις εξερευνήσουμε (σχήματα, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις).

Για τα Μαθηματικά ένα τέτοιο σύστημα (μονο-λειτουργικό), είναι ένα σύστημα επεξεργασίας. Οι επεξεργασίες είναι μετασχηματισμοί που πραγματοποιούνται μέσα στο ίδιο πεδίο: π.χ. ο αριθμητικός ή αλγεβρικός υπολογισμός. Όλες οι επεξεργασίες που πραγματοποιούνται σ' ένα μονο-λειτουργικό πεδίο μπορούν να δώσουν αφορμή για ένα αλγόριθμο. Για παράδειγμα, αν δει κάποιος την εύρεση του σημείου τομής δύο ευθειών ως λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, τότε περιορίζεται στο επίπεδο των αλγεβρικών χειρισμών (μονο-λειτουργικό) και η λύση του συστήματος γίνεται αλγοριθμικά.

Αντίθετα στα πολύ-λειτουργικά αναπαραστατικά συστήματα, οι επεξεργασίες δεν μπορούν να δώσουν αφορμή για ένα αλγόριθμο. Δεν υπάρχει αλγόριθμος για να μάθουμε να βλέπουμε πάνω σ' ένα γεωμετρικό σχήμα τη λύση ενός προβλήματος. Δεν υπάρχει αλγόριθμος για να επιχειρηματολογήσουμε, ή για να αποδείξουμε όσο βρισκόμαστε μέσα στο πεδίο της φυσικής γλώσσας.

Ένα σύστημα χρησιμοποιεί κάποια γλώσσα, όταν πληροί τα διάφορα είδη λειτουργιών, που μπορούμε να κάνουμε με κάποια γλώσσα. Έτσι, οποιοδήποτε σύστημα που μπορεί να πραγματοποιεί υπολογισμούς, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι σύστημα που χρησιμοποιεί μια γλώσσα (Αριθμητική, Άλγεβρα). Και όλες οι αναπαραστάσεις οι οποίες δεν παράγονται από μια γλώσσα, θα λέγονται αναπαραστάσεις που δε χρησιμοποιούν γλώσσα. Μια παρατήρηση που κάνει ο συγγραφέας είναι ότι, σ' αυτό το σημείο δεν αντιπαραθέτει απλά γλώσσα και εικόνα. Διότι υπάρχουν πολλές αναπαραστάσεις μη προερχόμενες από κάποια γλώσσα, οι οποίες δεν είναι, ή δε λειτουργούν σαν τις εικόνες, π.χ. τα σχήματα, γεωμετρικά, ή όχι.

Έτσι με συνδυασμό των δύο παραπάνω κατηγοριοποιήσεων, έχουμε τέσσερεις μεγάλες τάξεις συστημάτων σημειωτικών αναπαραστάσεων. Τις ονομάζει πεδία αναπαράστασης και παρατηρεί ότι επιτρέπουν μετατροπές των αναπαραστάσεων που έχουν παραχθεί σε άλλες αναπαραστάσεις.

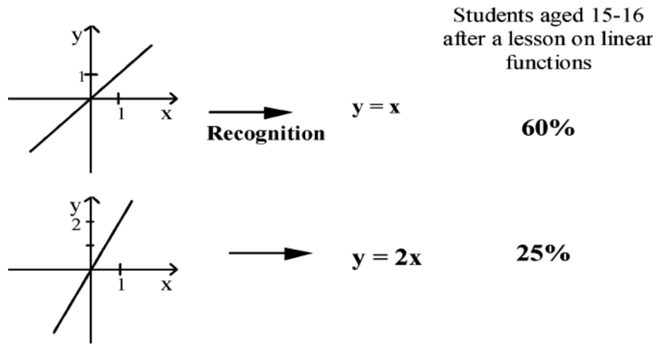
Μετατροπή είναι η αλλαγή της αναπαράστασης ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης η οποία δημιουργήθηκε σ' ένα πεδίο, σε μια άλλη αναπαράσταση του ίδιου αντικειμένου, αλλά που δημιουργήθηκε μέσα σ' ένα άλλο πεδίο και είναι μια δράση γνωστικά σύνθετη.

Για παράδειγμα, ο κύκλος έχει ως γεωμετρική αναπαράσταση το επίπεδο σχήμα που μετατρέπεται σε εξίσωση, που είναι μια αναπαράσταση του κύκλου στο αλγεβρικό πεδίο που προσφέρει η Αναλυτική Γεωμετρία. Σε παλαιότερη δημοσιευμένη εργασία ο Duval (2000) παρατηρεί ότι, η εμφανιζόμενη έλλειψη ομοιότητας (σύμπτωσης) μεταξύ των δύο περιεχομένων των αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου, εμφανίζεται λόγω του γεγονότος ότι το περιεχόμενο της αναπαράστασης δεν εξαρτάται κύρια από το αντικείμενο που αναπαρίσταται, αλλά από το σύστημα που ενεργοποιείται για να παράγει την αναπαράσταση. Κατά τον Duval (2003) δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, μέσα σε δύο διαφορετικά πεδία, δεν έχουν το ίδιο περιεχόμενο. Είναι δύσκολο κάποιες φορές να βρεθούν οι αντιστοιχίες ανάμεσα στα δύο περιεχόμενα και επομένως ν' αναγνωρίσουμε ότι, στην πραγματικότητα, είναι το ίδιο αντικείμενο που αναπαρίσταται. Βέβαια, αφού δεν υπάρχει άλλη πιθανή πρόσβαση προς το αντικείμενο, πέραν της σημειωτικής, υπάρχει μια γνωστική αδυναμία στο διαχωρισμό των σημειωτικών αναπαραστάσεων από το αρχικό αντικείμενο που αναπαρίσταται, με αποτέλεσμα, κάποιες φορές, δύο αναπαραστάσεις ενός αντικειμένου να θεωρούνται ως δύο μαθηματικά αντικείμενα (Duval, 2006). Η δυνατότητα ή η μη-δυνατότητα να πραγματοποιήσουμε αυτή τη δράση, εξαρτάται από το συντονισμό μέσα στο άτομο δύο πεδίων αναπαράστασης.

Σύμφωνα με τους Γκαγκάτση, Ηλία και Αντρέου (2003), η έλλειψη δυνατότητας από το μαθητή, όταν εργάζεται σε ένα πεδίο αναπαράστασης να επικοινωνεί τις ιδέες του με επιτυχία σε ένα άλλο πεδίο αναπαράστασης ορίζεται ως «στεγανοποίηση». Σε έρευνα τους, που έγινε σε μεγάλο πληθυσμό μαθητών Γυμνασίου (183 μαθητές) και Λυκείου (404 μαθητές) στην Ελλάδα με αντικείμενο έρευνας τη χρήση των αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (π.χ. $y=-x$, $y=3/2$, $y=x-2$) και συγκεκριμένα τη μετάβαση από μία αναπαράσταση σε μια άλλη (γραφική παράσταση, λεκτική έκφραση, αλγεβρική έκφραση), παρατηρήθηκε η «στεγανοποίηση».

Σύμφωνα με τον Duval (2003), η μετατροπή δεν είναι γνωστικά αναστρέψιμη διαδικασία, αφού δεν πρόκειται για τις ίδιες δράσεις. Για παράδειγμα, όταν έχουμε το σχήμα μιας παραβολής, με άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και κορυφή την αρχή των αξόνων, που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, τότε για να βρούμε την εξίσωση της, μπορούμε να θεωρήσουμε τη γενική εξίσωση που παριστάνει την παραβολή αυτή ($y^2=2px$) και στη συνέχεια, αφού το σημείο A είναι σημείο της, θα επαληθεύει τη γενική εξίσωση, οπότε απ' αυτήν την επαλήθευση μπορούμε να βρούμε το p, άρα και την εξίσωση. Το αντίστροφο, δηλαδή αν γνωρίζουμε την εξίσωση και θέλουμε να βρούμε το σχήμα, συνήθως αντιμετωπίζεται γνωστικά διαφορετικά, π.χ. με εύρεση, μέσω της εξίσωσης, ικανού αριθμού σημείων τα οποία ενώνουμε, γνωρίζοντας ότι σχεδιάζουμε μια παραβολή.

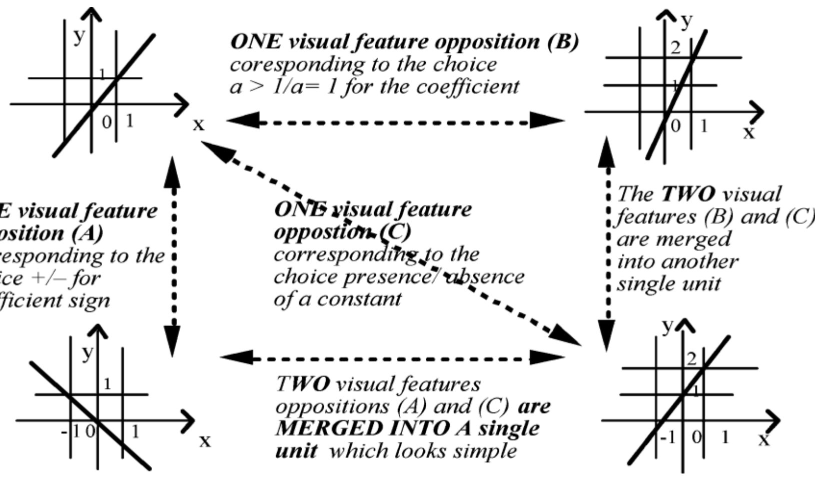
Ο Duval (2006), αναφερόμενος σε εργασία του (1988), δίνει ένα παράδειγμα συμπεριφοράς των μαθητών ηλικίας 15-16 ετών στο παραπάνω θέμα, σε σχέση με τις εξισώσεις ευθειών. Αναφερόμενος στην κατασκευή ενός γραφήματος, σημειώνει ότι αρκεί να έχουμε μόνο τον ακόλουθο κανόνα: στο επίπεδο εφοδιασμένο με άξονες συντεταγμένων, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα σημείο, με συντεταγμένες το διατεταγμένο ζεύγος αριθμών. Η κατασκευή γραφημάτων που αντιστοιχεί σε γραμμικές εξισώσεις, φαίνεται ότι δε δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές. Όμως για την αντίστροφη διαδικασία, ο κανόνας δεν είναι λειτουργικός ούτε επαρκεί.



Σχήμα 15: Η αναγνώριση των ευθειών (Duval, 2006)

Αυτό που είχαν να κάνουν οι μαθητές ήταν απλά να αναγνωρίσουν και όχι να κατασκευάσουν ή να διαβάσουν συντεταγμένες σημείων. Για παράδειγμα, ερώτηση για την πρώτη ευθεία ήταν να διαλέξουν μεταξύ των εξισώσεων $y = x$, $y = -x$, $y = x + 1$, αυτή που αντιστοιχεί στο γράφημα. Ο συγγραφέας σημειώνει ότι αν τους είχε ζητηθεί να κατασκευάσουν τα δύο γραφήματα, τότε το ποσοστό επιτυχίας θα είχε ανέλθει στο 90%.

Ο Duval (2000), αναφερόμενος στο συντονισμό μεταξύ πεδίων αναπαράστασης παρατηρεί, ότι τα πεδία αναπαράστασης μιας έννοιας δεν είναι ισόμορφα και δεν είναι αποδοτικό να δείχνεις μαζί δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, με στόχο να δημιουργήσεις συσχετισμούς. Προσπαθώντας να ορίσει το συντονισμό μεταξύ πεδίων αναπαράστασης γράφει ότι, «για να μάθεις Μαθηματικά πρέπει να μάθεις να ξεχωρίζεις και να συνδυάζεις σημειωτικά συστήματα αναπαράστασης, με στόχο να γίνεις ικανός για κάθε μετασχηματισμό της αναπαράστασης». Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ευθείας ο Duval (2006) αναφέρει ότι, ο συντονισμός απαιτεί την ικανότητα να διακρίνει ο μαθητής, πως δύο γραφήματα, που οπτικά μοιάζουν, είναι διαφορετικά από μαθηματικής άποψης. Θεωρεί ότι δεν είναι προφανής η οπτική διάκριση των γραφημάτων και προτείνει την παρακάτω κατηγοριοποίηση, ως ένα δίκτυο στο οποίο κάθε εικονική ιδιότητα ταιριάζει με μια κατηγορία της αλγεβρικής έκφρασης $y = ax + b$.



Σχήμα 16: Οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις για την ευθεία (Duval, 2006)

Η διάκριση των περιπτώσεων γίνεται με βάση την $y = x$ και τις εικονικές αντιθέσεις που σχετίζονται με το πρόσημο του a , την κλίση για $a > 1$ και τη διαφοροποίηση του συντελεστή b (από $b = 0$ σε $b = 1$). Κατά το συγγραφέα, ερευνώντας τη διακύμανση των αναπαραστάσεων στο ένα πεδίο σε σχέση με το άλλο, οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τι είναι μαθηματικά σχετικό σε μια αναπαράσταση, να επιτύχουν τη μετατροπή σε ένα άλλο πεδίο και να διαχωρίσουν το αναπαριστάμενο αντικείμενο από το περιεχόμενο αυτών των αναπαραστάσεων.

Με βάση τα προαναφερθέντα για τις μετατροπές, ο συγγραφέας αναφέρει ότι:

- Πρέπει να υπάρχει συνειδητοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στο περιεχόμενο της αναπαράστασης και το αναπαριστώμενο αντικείμενο.
- Λαμβάνοντας υπ’ όψιν το ζεύγος αναπαράσταση-αντικείμενο, να γνωρίζουμε ότι το πρώτο ποικίλει ανάλογα το πεδίο αναπαράστασης, ενώ το δεύτερο, κατά κάποιο τρόπο, είναι το αναλλοίωτο στοιχείο της μετατροπής. Και αυτό σημαίνει ότι τα περιεχόμενα δύο αναπαραστάσεων ενός αντικειμένου είναι οπωσδήποτε διαφορετικά.

Άρα, πρέπει η μαθηματική δραστηριότητα να έχει τις δύο ακόλουθες βασικές διαδικασίες:

- Την ενεργοποίηση δύο τουλάχιστον διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας(εσωτερικά σε καθένα από τα ενεργοποιημένα πεδία).
- Την εκ περιτροπής, ή παράλληλη διεξαγωγή των δύο τύπων (επεξεργασία, μετατροπή) μετασχηματισμών αναπαράστασης (η επεξεργασία εσωτερικά σε καθένα από τα ενεργοποιημένα πεδία και η μετατροπή για το πέρασμα από το ένα πεδίο στο άλλο).

Η ενεργοποίηση δύο διαφορετικών πεδίων μπορεί να είναι σαφής, όπως στη Γεωμετρία όπου ενεργοποιούμε συγχρόνως δύο πεδία (τουλάχιστον) και τα περάσματα μεταξύ λόγου και σχημάτων είναι διαρκή. Αλλά τις περισσότερες φορές παραμένει έμμεση, όταν, για παράδειγμα, λύνουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, δουλεύουμε σε ένα μονό-λειτουργικό σύστημα τηρώντας ένα αλγόριθμο. Για να κατανοήσουμε τη δράση μας αυτή, πρέπει να ενεργοποιήσουμε και ένα δεύτερο πεδίο αναπαράστασης (παριστάνουν καμπύλες στο επίπεδο) έτσι ώστε να γίνει κατανοητή σε βάθος η ενέργεια μας αυτή (βρίσκουμε σημεία τομής των καμπυλών).

3.5.2. Η οντο-σημειωτική προσέγγιση για τις αναπαραστάσεις

Οι Font, Godino, D' Amore (2007), σε σχετικό άρθρο με τίτλο «An onto-semiotic approach to representations in mathematics education», αναφέρονται στη φύση των αντικειμένων που παρεμβαίνουν στις αναπαραστάσεις, στο πρόβλημα της αναπαράστασης *γένιων στοιχείων* (generic elements) και στο ρόλο που παίζει η αναπαράσταση ενός αντικειμένου. Όσον αφορά τη φύση των αντικειμένων, επαναλαμβάνουν όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω.

Όσον αφορά τα γένια στοιχεία, δίνουν τον παρακάτω ορισμό: «γένια στοιχεία (κλάση μαθηματικών αντικειμένων) είναι ένα σύνολο ή σύστημα από στοιχεία που θεωρούνται ως μια μονάδα» (Font — Godino — D' Amore, 2007). Το γένιο στοιχείο (generic element) ορίζεται ως ο εκπρόσωπος της μονάδας. Ποιος όμως, κατά περίπτωση, εκπροσωπεί τη μονάδα; Όταν θεωρήσουμε την κλάση των ρητών αριθμών $\{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$, τότε οποιοσδήποτε αριθμός, π.χ. το $\frac{1}{2}$ εκπροσωπεί την κλάση. Όταν αναφερόμαστε στην ιδιότητα των τριγώνων, ότι τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε πρέπει να αναφερόμαστε σε όλα τα πιθανά τρίγωνα και όχι σε κάποιο συγκεκριμένο. Στην περίπτωση αυτή, ο κατάλληλος εκπρόσωπος, δηλαδή το γένιο στοιχείο, είναι το τυχαίο τρίγωνο, δηλαδή ένα οποιοδήποτε τρίγωνο, αρκεί να ενδιαφερόμαστε για τα γενικά χαρακτηριστικά του και όχι για τις ειδικές πλευρές του συγκεκριμένου τριγώνου που επιλέξαμε.

Η διαλεκτική σχέση μεταξύ του γένιου στοιχείου και του γενικού στοιχείου συχνά προκαλεί μια μεγάλη γνωστική πολυπλοκότητα. Ο μαθηματικός συλλογισμός μετάβασης από το γενικό (general) στο γενικό συναντά μια ενδιάμεση φάση, που περιέχει το στοχασμό ενός ατομικού αντικειμένου. Αν ο συλλογισμός πρέπει να εφαρμόζεται σ’ ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, είναι αναγκαίο να υπάρχει μια εγγύηση ότι ο συλλογισμός ισχύει για κάθε αντικείμενο της κλάσης. Το συγκεκριμένο αντικείμενο κανονικά αποτελεί μέρος μιας αλυσίδας, στην οποία οι προηγούμενοι σύνδεσμοι είναι γένια στοιχεία. Την ίδια στιγμή, το συγκεκριμένο αντικείμενο, για να θεωρηθεί ως γένιο, πρέπει να μετατραπεί σε προηγούμενους συνδέσμους μιας νέας συγκεκριμένης περίπτωσης. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ευθειών $y=2x+b$ με $b\in\mathbb{R}$, είναι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο που συνδέεται με τα γένια στοιχεία $y=f(x)$ και $f(x)=mx+b$ με $m,b\in\mathbb{R}$, ενώ ταυτόχρονα μπορεί να θεωρείται ως γένια στοιχεία (κλάση) της συγκεκριμένης ευθείας $y=2x+1$. Επειδή το συγκεκριμένο αντικείμενο σχετίζεται με την αναπαράσταση του, το πρόβλημα είναι πότε η αναπαράσταση αναφέρεται στο συγκεκριμένο αντικείμενο και πότε στη γενική έννοια. Κατά τους συγγραφείς, η δυϊκότητα εκτατικό — εντατικό παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Η χρήση των γένιων στοιχείων, σχετίζεται με ένα σύνθετο δίκτυο σημειωτικών λειτουργιών (άρα και αναπαραστάσεων) που σχετίζουν τα εντατικά με τα εκτατικά αντικείμενα. Όταν χρησιμοποιούμε μια αναπαράσταση στις μαθηματικές πρακτικές ως γένιο στοιχείο, δρούμε σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά τοποθετούμε τους εαυτούς μας σε ένα γλωσσικό παιχνίδι, στο οποίο είναι κατανοητό ότι ενδιαφερόμαστε για τα γενικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου και αγνοούμε τις συγκεκριμένες πλευρές του.

Στο παράδειγμα με τον κύκλο, που αναλύθηκε σε προηγούμενη ενότητα (3.4.), η χρήση των τριών εντατικών αντικειμένων εξασφαλίζει τη γενικότητα του συλλογισμού, αφού αναφερόμαστε στα γενικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων. Συγκεκριμένα η εξίσωση $y=f(x)$, μας διαβεβαιώνει για τη δυνατότητα επανάληψης της διαδικασίας, για το σύνολο των συναρτήσεων που εκφράζονται με τύπο και οδηγεί στην άμεση συσχέτιση των συναρτήσεων με τις εξισώσεις (θυμίζουμε ότι οι μαθητές της Β Λυκείου διδάσκονται τις εξισώσεις χωρίς αναφορά στις συναρτήσεις). Κάθε συνάρτηση έχει το πεδίο ορισμού της. Οι συναρτήσεις που έχουν γραφήματα τις καμπύλες που διαπραγματευόμαστε ή τμήματα αυτών (που αντιστοιχούν σε συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και όχι φυσικά μονοσύνολα), είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων πραγματικών αριθμών, άρα μπορούμε να ενώνουμε πάντα τα πεπερασμένα σημεία της γραφικής παράστασης όταν αυτά αντιστοιχούν σε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού. Ο τρόπος που τα ενώνουμε καθορίζεται από το είδος της καμπύλης, που έχουμε ωστόσο βρει ότι είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Συνολικά μπορεί να θεωρηθεί το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας ότι λειτουργεί ως γένιο στοιχείο της διαδικασίας μετατροπών που περιγράφει, τουλάχιστον για τις συναρτήσεις που η γραφική τους παράσταση είναι μια καμπύλη όπως αυτές που διαπραγματευόμαστε ή ένα συνεκτικό τμήμα της.

Το πρόβλημα των πολλαπλών αναπαραστάσεων, αντιμετωπίζεται από τους συγγραφείς όχι μόνο στο επίπεδο των διαφορετικών αναπαραστάσεων, που μπορεί να έχει ένα μαθηματικό αντικείμενο (αλγεβρικά, γραφικά, κ.α.) αλλά και στο επίπεδο της ιστορικής εξέλιξης του αντικειμένου, που δείχνει πόσο σύνθετες είναι οι σχέσεις που διαμορφώθηκαν μεταξύ του αντικειμένου, των συσχετισμένων μ’ αυτό δεικτικών αναπαραστάσεων του και των περιστάσεων που το αντικείμενο χρησιμοποιήθηκε.

Σύμφωνα με τους Font, Godino, D’ Amore (2007), ένα κεντρικό ζήτημα στη διδασκαλία των μαθηματικών για κάποιους συγγραφείς είναι να κάνουν τους μαθητές τους ικανούς να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη: «η μετατροπή των αναπαραστάσεων είναι ένα καίριο πρόβλημα όταν μαθαίνεις Μαθηματικά» (Duval, 2002, μέσα από την εργασία των Font, Godino, D’ Amore (2007)) . Θεωρούν αφελή τον παραπάνω τρόπο να συλλάβει κάποιος το ρόλο των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά και στην επινοητική διαδικασία. Για τους συγγραφείς είναι αρκετό να κοιτάξει κάποιος ιστορικά ένα οποιοδήποτε μαθηματικό αντικείμενο για να δει την πολυπλοκότητα των σχέσεων οι οποίες είχαν δημιουργηθεί μεταξύ του μαθηματικού αντικειμένου, των σχετιζόμενων μ’ αυτό δεικτικών αναπαραστάσεων και καταστάσεων στις οποίες το αντικείμενο είχε χρησιμοποιηθεί για να οργανώσει φαινόμενα.

Το παράδειγμα που αναφέρουν οι συγγραφείς είναι η κισσοειδής. Η καμπύλη ορίζεται ως γεωμετρικός τόπος στη Συνθετική Γεωμετρία και μπορούμε να την αναπαραστήσουμε σχεδιάζοντάς την. Στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μπορούμε να έχουμε ακόμα μια αναπαράσταση της κισσοειδούς μέσα από την εξίσωση $x^3 + x^2 y - ay^2 = 0$. Αυτή η μετάβαση, από την καμπύλη στην εξίσωση, είναι μια τεχνική που μόνη της δεν μπορεί να λειτουργήσει. Πρέπει να πλαισιωθεί από το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο, που αιτιολογεί τη μετάβαση και δίνει νόημα στη μετάβαση αυτή. Το ερευνητικό πρόγραμμα, που εγκαινιάστηκε από το Descartes είναι ένα ολικό πρόγραμμα, στο οποίο δεν είναι εφικτή η τοπική μελέτη. Αν θέλουμε να μελετήσουμε τοπικά την κισσοειδή, τότε το κατάλληλο εργαλείο είναι οι δυναμοσειρές.

Για τη διδακτική των μαθηματικών, είναι σημαντικό, να θεωρούμε τις δεικτικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων απλά ως διαφορετικά νοήματα του ίδιου αντικειμένου. Όμως αυτή η θεώρηση, μας οδηγεί να υποτιμήσουμε τη σπουδαιότητα των διαφορετικών δεικτικών αναπαραστάσεων, τους σχηματισμούς των αντικειμένων και τις μεταβάσεις που πραγματοποιούνται από τη μια στην άλλη, για την παραγωγή ενός ολικού νοήματος για το αντικείμενο.

Οι συγγραφείς, επισημαίνουν τρείς επιπτώσεις του γεγονότος ότι οι δεικτικές αναπαραστάσεις έχουν φτιαχτεί σε ερευνητικά προγράμματα, τα οποία υποδηλώνουν τη χρήση σχηματισμών ή σύνθετων δικτύων.

1. Οι αναπαραστάσεις δεν μπορούν να κατανοηθούν μόνες τους. Μια εξίσωση, ένας τύπος, ένα γράφημα αποκτά νόημα σαν μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος, με καθιερωμένα νοήματα και μεταφορές.
2. Ενόσω το ίδιο αντικείμενο μπορεί να καταταχθεί σε δύο διαφορετικά ερευνητικά προγράμματα, το καθένα από τα οποία έχει το δικό του σύστημα αναπαραστάσεων, κάθε αναπαράσταση μπορεί να μετατραπεί σε «αναπαραστατικό αντικείμενο» της αναπαράστασης του άλλου ερευνητικού προγράμματος. Δηλαδή η καμπύλη (π.χ. η παραβολή) είναι η γεωμετρική αναπαράσταση της εξίσωσης ή η εξίσωση είναι ένας αλγεβρικός συμβολισμός της καμπύλης. Αυτό το γεγονός οδηγεί στην άποψη ότι η παραβολή, αναπαριστάται μέσω της καμπύλης στη Γεωμετρία και μέσω της εξίσωσης στην Αναλυτική Γεωμετρία.
3. Μια δεικτική αναπαράσταση έχει αναπαραστατική αξία, δηλαδή είναι κάτι που μπορεί να μπει στη θέση ενός άλλου και από την άλλη έχει εργαλειακή αξία, δηλαδή επιτρέπει να εμφανιστούν συγκεκριμένες πρακτικές, που με ένα άλλο τύπο αναπαράστασης δε θα ήταν δυνατόν να εμφανιστούν. Ο πρώτος τύπος μας οδηγεί

στη μονική κατανόηση του αντικειμένου, ενώ ο δεύτερος στη συστημική κατανόηση του αντικειμένου.

Με βάση τη μονική — συστημική δυϊκότητα οι συγγραφείς θεωρούν ότι μπορούν να επαναδιατυπώσουν την άδολη άποψη ότι «υπάρχει ένα αντικείμενο με διαφορετικές αναπαραστάσεις». Κατά τη γνώμη τους αυτό που υπάρχει είναι ένα σύνθετο σύστημα πρακτικών στο οποίο κάθε ένα από τα διαφορετικά ζευγάρια αντικείμενο/αναπαράσταση (χωρίς να τα διαχωρίζουμε) κάνει ενεργό ένα υποσύνολο του συνόλου των πρακτικών, το οποίο θεωρείται να είναι το νόημα του αντικειμένου. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα αντικείμενα που αναδύονται από ένα σύστημα πρακτικών μπορούν να θεωρούνται ως μονικά και με ένα ολιστικό νόημα, όμως σε κάθε υποσύνολο αυτών των πρακτικών το ζευγάρι αντικείμενο/αναπαράσταση είναι διαφορετικό, γιατί ενεργοποιεί πιθανά διαφορετικές πρακτικές.

Συμπερασματικά αναφέρουν ότι προσεγγίζοντας τις αναπαραστάσεις και τα νοήματα με ολιστική ματιά, βοηθάει να καταλάβουμε τις αναπαραστάσεις και τα νοήματα ως την ορατή πλευρά ενός «σύνθετου παγόβουνου», στη βάση του οποίου βρισκόμαστε μπροστά σε ένα δίκτυο αντικειμένων, πρακτικών και συσχετισμένων δεικτικών αντικειμένων, δομημένων σε επιστημικούς (και γνωστικούς) σχηματισμούς. Επίσης θεωρούν ότι η κατανόηση των αναπαραστάσεων με όρους σημειωτικών λειτουργιών, έχει το πλεονέκτημα ότι δε διαχωρίζεται το αντικείμενο από την αναπαράστασή του. Η κατανόηση του όρου «αναπαράσταση» δεν περιορίζεται μόνο στο ότι ένα αντικείμενο μπαίνει στη θέση ενός άλλου. Η έκφραση και το περιεχόμενο μια σημειωτικής λειτουργίας μπορεί να είναι κάθε είδους αντικείμενο και η σχέση τους δεν είναι μόνο αναπαραστατική, αλλά για παράδειγμα μπορεί να «σχετίζεται με», «είναι μέρος του», «είναι περίπτωση του/αιτία για».

4. Η μεθοδολογία έρευνας και η έρευνα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η μεθοδολογία, με βάση την οποία εκπονήθηκε η παρούσα έρευνα. Επίσης αναφέρονται γενικές πληροφορίες που σχετίζονται με το χρόνο και τον τόπο διεξαγωγής της έρευνας. Ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου, περιγράφονται αναλυτικά οι προβληματισμοί, οι δράσεις που αναλήφθηκαν και τα αποτελέσματα που εξήχθησαν. Τέλος, στο πλαίσιο της αναθεώρησης του γενικού πλάνου έρευνας, διατυπώνονται απόψεις για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.

4.1. Η μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είναι γνωστή ως «έρευνα δράσης» (Action Research). Ο Elliott (1991), στο βιβλίο του με τίτλο «Action research for educational change», στο δεύτερο μέρος και στην 6η ενότητα, περιγράφει το παραπάνω μοντέλο ως σπειροειδή ανάπτυξη κύκλων. Ο πρώτος κύκλος περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- Προσδιορισμός της ταυτότητας και αποσαφήνιση της αρχικής ιδέας.
- Αναγνώριση του θέματος (διερευνώντας και αναλύοντας), περιγράφοντας και εξηγώντας τα γεγονότα που συμβαίνουν σε μια κατάσταση.
- Κατασκευή ενός γενικού πλάνου. Το γενικό πλάνο περιλαμβάνει τη γενική ιδέα, τους παράγοντες που προτίθεσαι να αλλάξεις ή να τροποποιήσεις με στόχο τη βελτίωση της κατάστασης, τις δράσεις που πρέπει να αναλάβεις σ’ αυτή την κατεύθυνση, τις διαπραγματεύσεις που πρέπει να γίνουν με τους άλλους, τις πηγές που χρειάζονται για να επιχειρήσεις την προτεινόμενη σειρά δράσεων και το ηθικό πλαίσιο που ρυθμίζει την πρόσβαση και απελευθέρωση των πληροφοριών.
- Ανάπτυξη (με ακρίβεια) των βημάτων δράσης.
- Εφαρμογή των βημάτων δράσης.
- Παρακολούθηση της εφαρμογής και των επιπτώσεων.
- Αναγνώριση, εξηγώντας κάθε αποτυχία της εφαρμογής και των επιπτώσεων.
- Αναθεώρηση της γενικής ιδέας.

Η αναθεώρηση της γενικής ιδέας προκαλεί τη δημιουργία του δεύτερου κύκλου (και κάθε φορά του επόμενου κύκλου) που περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- Τροποποιημένο πλάνο με βάση την αναθεωρημένη γενική ιδέα και τα αντίστοιχα βήματα δράσης.
- Ανάπτυξη (με ακρίβεια) των βημάτων δράσης.
- Εφαρμογή των βημάτων δράσης.
- Παρακολούθηση της εφαρμογής και των επιπτώσεων.
- Αναγνώριση, εξηγώντας κάθε αποτυχία της εφαρμογής και των επιπτώσεων.
- Αναθεώρηση της γενικής ιδέας.

Για την παρούσα εργασία εφαρμόστηκε ο πρώτος κύκλος, λόγο περιορισμών του χρονικού πλαισίου που τίθενται στο πλαίσιο μιας μεταπτυχιακής εργασίας.

4.2. Γενικές πληροφορίες για την έρευνα

Η έρευνα έγινε την άνοιξη του 2010 σε δύο σχολεία του Νομού Ηρακλείου και διεξήχθη σε τρείς φάσεις. Στην πρώτη φάση συμπληρώθηκε ένα ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας από τους μαθητές, στη δεύτερη φάση έγινε μια διδακτική παρέμβαση και στην τρίτη φάση συμπληρώθηκε ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας. Οι μαθητές που συμμετείχαν ανήκαν σε δύο τμήματα της τεχνολογικής κατεύθυνσης και σε ένα τμήμα θετικής κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου. Το σύνολο των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν στην πρώτη φάση ήταν 59. Όμως και στις τρείς φάσεις της έρευνας από τα δύο τμήματα τεχνολογικής συμμετείχαν 30 μαθητές και μαθήτριες και από το τμήμα θετικής 20 μαθητές και μαθήτριες. Οι καθηγητές των μαθηματικών που δίδασκαν τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου στα παραπάνω τμήματα είχαν δέκα, είκοσι πέντε και τριάντα χρόνια προϋπηρεσία στη Δημόσια Εκπαίδευση. Επίσης τήρησαν τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος. Το πρώτο ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές το τρίτο δεκαήμερο του Μαρτίου, αφού είχαν σχεδόν ολοκληρώσει τη μελέτη όλων των εννοιών που αφορούσαν την έρευνά μας. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων και ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης έγινε σε διάστημα είκοσι ημερών (μεσολάβησαν οι διακοπές του Πάσχα). Στα μέσα του Απριλίου, όπου είχε ολοκληρωθεί πλήρως η μελέτη των κωνικών τομών, έγινε η διδακτική παρέμβαση και την επόμενη ημέρα, στο πλαίσιο πάντα των ωρών του μαθήματος, οι μαθητές συμπλήρωσαν το δεύτερο ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας. Και οι τρείς δράσεις είχαν διάρκεια από μια διδακτική ώρα. Τα ερωτηματολόγια — φύλλα εργασίας συμπληρώθηκαν στην τάξη παρουσία του ερευνητή και του καθηγητή της τάξης. Η διδακτική παρέμβαση στο ένα σχολείο έγινε στην αίθουσα ιστορίας, ενώ στο άλλο σχολείο στην αίθουσα του Σχολικού Επαγγελματικού Προσανατολισμού (δεν υπήρχαν αίθουσες Μαθηματικών). Για τη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε φορητός υπολογιστής και βιντεοπροβολέας, καθώς επίσης φωτοτυπίες που δόθηκαν και κάποιες απ' αυτές συμπληρώθηκαν από τους μαθητές, πίνακας και μαρκαδόροι.

4.3. Η αρχική ιδέα

Ο ερευνητής από το 1990, σχεδόν ανελλιπώς, διδάσκει στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση την Αναλυτική Γεωμετρία στον ιδιωτικό τομέα (φροντιστήριο) και από το 2002 στο Δημόσιο Σχολείο. Το χειμερινό εξάμηνο του Ακαδημαϊκού Έτους 2009-2010 ήταν βοηθός στο εισαγωγικό μάθημα «Επίπεδο και Χώρος» που προσφέρεται στους πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης, στο πρώτο εξάμηνο των σπουδών τους. Το μάθημα αυτό ασχολείται με τους Μιγαδικούς Αριθμούς και την Αναλυτική Γεωμετρία σε δύο και τρείς διαστάσεις. Κατά την διάρκεια του εξαμήνου παρατήρησε ότι οι φοιτητές είχαν παρόμοια προβλήματα με τους μαθητές της Β΄ Λυκείου (τα τελευταία χρόνια), όσον αφορά την Αναλυτική Γεωμετρία. Τα προβλήματα αυτά, που θεώρησε ότι οφείλονταν στην ανωριμότητα των μαθητών, παρατήρησε ότι συνεχίζονταν.

Τα προβλήματα που είχε παρατηρήσει ήταν:

- Η άγνοια για την ύπαρξη του συνόλου των λύσεων ως διαφορετικό σύνολο σε σχέση με τα σημεία του σχήματος. Ακόμα και οι συγγραφείς των βιβλίων δημιουργούν σύγχυση σ' αυτό το θέμα όταν αναφέρουν τα σημεία ως λύσεις της εξίσωσης. Αυτό οδηγεί, σε ασκήσεις που χρειάζεται να πάρουμε μεταβλητό σημείο της καμπύλης, το μαθητή στην έλλειψη κατανόησης της ύπαρξης αυτού του ζεύγους αριθμών και της ταυτοποίησης του με τις συντεταγμένες του μεταβλητού σημείου.

- Η αδυναμία κατανόησης ότι οι λύσεις μιας εξίσωσης 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού με δύο αγνώστους αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος. Η συγκεκριμένη αδυναμία φαίνεται όταν ζητάμε κοινά σημεία δύο γραμμών.

- Η αδυναμία μιας μερίδας μαθητών να μεταβεί από τον ορισμό μιας καμπύλης στην εξίσωση ή στο σχήμα και αντίστροφα.

- Η έλλειψη συσχέτισης των γεωμετρικών ιδιοτήτων με τις αντίστοιχες αλγεβρικές. Για παράδειγμα η αξονική συμμετρία ενός σχήματος με την εμφάνιση ενός δευτεροβάθμιου όρου στην εξίσωση.

- Η αδυναμία μιας μερίδας μαθητών να συσχετίσει την έννοια της συνάρτησης με τις έννοιες που διδάσκονται στην Αναλυτική Γεωμετρία. Στο βιβλίο απουσιάζει η συσχέτιση των εννοιών που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις οι μαθητές, με το αντικείμενο που διδάσκονται. Για παράδειγμα, την ευθεία την έχουν διδαχτεί ως γραφική παράσταση συνάρτησης πολύ αναλυτικά στην Α΄ Λυκείου. Για κάποιους μαθητές, με βάση προφορικές πηγές πληροφόρησης, η ευθεία που διδάσκονται στην Α΄ Λυκείου θεωρείται διαφορετικό μαθηματικό αντικείμενο, από την ευθεία που διδάσκονται στη Β΄ Λυκείου.

Τα παραπάνω προβλήματα συζήτησε με τον καθηγητή του Χρήστο Κουρουνιώτη και αποφάσισαν να προχωρήσουν στην περαιτέρω διερεύνηση του ζητήματος.

4.4. Προσδιορισμός της ταυτότητας και αποσαφήνιση της αρχικής ιδέας

Σύμφωνα με τον Bell (1965, 1ος τόμος, σελ. 5) υπάρχει πρόβλημα στη γρήγορη κατανόηση του αντικειμένου της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ο ίδιος το χαρακτηρίζει ως το φαινόμενο της «αργής εξέλιξης» ή της υποσυνείδητης αφομοίωσης: όταν για πρώτη φορά μελετάται κάτι, οι λεπτομέρειες είναι τόσες πολλές και μπερδεμένες και δε μένει στο μυαλό μια ευκρινής αντίληψη του όλου. Επιστρέφοντας μετά από μια σύντομη ανάπαυση, το κάθε πράγμα φαίνεται να είναι στη σωστή θέση με την πρέπουσα έμφαση, σαν να πρόκειται για την εμφάνιση φωτογραφικού φιλμ. Αυτό το συναίσθημα δοκιμάζει η πλειοψηφία όσων με σοβαρότητα αντιμετωπίζουν την Αναλυτική Γεωμετρία για πρώτη φορά. Είναι όμως αυτός ο ισχυρισμός αληθής;

Το θεωρητικό πλαίσιο για την παρούσα εργασία περιγράφεται στην 3η ενότητα. Συνοψίζοντας, το αναπαραστατικό πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι ένα καινούριο πλαίσιο για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου. Στο πλαίσιο αυτό γίνεται ενοποίηση δύο άλλων αναπαραστατικών πλαισίων, της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Η διαδικασία ενοποίησης των δύο πλαισίων, απαιτεί μεγάλη προσοχή στη διάκριση των μαθηματικών αντικειμένων (τι είναι αλγεβρικό και τι γεωμετρικό αντικείμενο), αλλά και στη σχέση που αναπτύσσουν τα αντικείμενα αυτά στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, το σχολικό βιβλίο με βάση το οποίο διδάσκονται οι μαθητές το αντικείμενο αυτό, δεν ξεκαθαρίζει πλήρως τα νοήματα και τις μεταφορές που γίνονται στο καινούργιο αυτό πλαίσιο. Συγκεκριμένα:

- Τα επίπεδα σχήματα που διαπραγματευόμαστε είναι γεωμετρικά αντικείμενα και οι εξισώσεις, που αναπαριστούν τα σχήματα, είναι αλγεβρικά αντικείμενα. Ένα επίπεδο σχήμα αποτελείται από σημεία. Το σύνολο των λύσεων, αν υπάρχει, μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους, είναι ένα σύνολο που αποτελείται από διατεταγμένα ζευγάρια τιμών, που επαληθεύουν την εξίσωση. Μια εξίσωση λέμε ότι αναπαριστά ένα επίπεδο σχήμα αν, έχοντας εφοδιάσει το επίπεδο με ένα σύστημα αξόνων, οι λύσεις της εξίσωσης βρίσκονται σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα σημεία του σχήματος, μέσω της απεικόνισης που αντιστοιχεί κάθε λύση της εξίσωσης, με το σημείο που έχει ως συντεταγμένες αυτή τη λύση. Στο βιβλίο δε γίνεται σαφής οντολογικός διαχωρισμός μεταξύ των λύσεων μιας εξίσωσης και των σημείων της ευθείας ή καμπύλης που αυτή παριστάνει στο επίπεδο. Για την ακρίβεια οι συγγραφείς αρχικά, χωρίς να αναφέρουν την απεικόνιση, αναφέρονται γενικά σε «λύσεις που παριστάνονται με σημεία» και «συντεταγμένες σημείων που επαληθεύουν την εξίσωση», προκαλώντας σύγχυση σε σχέση με το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης. Στη συνέχεια κάνουν χρήση εκφράσεων όπως, «η εξίσωση επαληθεύεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ …», θεωρώντας ότι οι μαθητές γνωρίζουν την αντιστοιχία και μπορούν να αντιληφθούν το νόημα της έκφρασης αυτής. Για τους Μαθηματικούς αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να φαίνεται αυτονόητος, δεν είναι απαραίτητο ότι ισχύει το ίδιο και για τους μαθητές.

- Η ισοδυναμία μεταξύ του γεωμετρικού ορισμού και της εξίσωσης, δεν αποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση. Ακόμα και εκεί που δίνονται αποδείξεις από το σχολικό βιβλίο, σε αρκετές περιπτώσεις, σύμφωνα με τις υποδείξεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, που θα δούμε παρακάτω, δε διδάσκονται. Για την ακρίβεια αποδείξεις διδάσκονται μόνο στην περίπτωση της ευθείας και του κύκλου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, οι μαθητές να μην έχουν την ευκαιρία να δουν πώς υλοποιείται η μετάβαση από τον ορισμό στην εξίσωση και αντίστροφα, για τις κωνικές τομές.

- Η έννοια της συνάρτησης δεν εμπλέκεται στη διαπραγμάτευση των εννοιών, με αποτέλεσμα να χάνουμε την ευκαιρία της σύνδεσης των εννοιών με προηγούμενα αποκτημένες γνώσεις των μαθητών, αλλά και τη σύνδεση με μαθηματικά αντικείμενα που θα διδαχτούν στο μέλλον. Οι μαθητές διδάσκονται την ευθεία, την παραβολή και την υπερβολή ως γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων στην Α΄ Λυκείου, ενώ στη Γ΄ Λυκείου ασχολούνται με τη μελέτη συναρτήσεων. Μη δίνοντας τους απαραίτητους συσχετισμούς, είναι σαν να λέμε στους μαθητές ότι η ευθεία που γνώρισαν ως γράφημα συνάρτησης στην προηγούμενη τάξη, είναι διαφορετικό μαθηματικό αντικείμενο από την ευθεία που διδάσκονται τη χρονιά αυτή. Επίσης χάνουμε την ευκαιρία, κάνοντας ουσιαστική χρήση του ορισμού της συνάρτησης, να βοηθήσουμε τους μαθητές να συσχετίσουν το x με το y στις λύσεις των εξισώσεων.

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής, θα περιγραφούν οι διδακτικοί στόχοι που θέτει για τους μαθητές το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, όσον αφορά τα κεφάλαια που αναφέρονται στην Αναλυτική Γεωμετρία.

4.4.1. Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Στο βιβλίο των οδηγιών για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007—2008, δίνονται οι κατευθύνσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών. Όσον αφορά το συγκεκριμένο μάθημα και για το πρώτο κεφάλαιο που αφορά το διανυσματικό λογισμό οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι: «η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους».

Για την περίπτωση της ευθείας τίθενται οι παρακάτω διδακτικοί στόχοι για τους μαθητές:

- Να γνωρίσουν την εξίσωση της ευθείας και να μελετήσουν με αλγεβρικές μεθόδους τις ιδιότητές της στο επίπεδο.

- Να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας.
- Να κατανοήσουν τις δυνατότητες και τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

Για την περίπτωση του κύκλου και των κωνικών τομών τίθενται οι παρακάτω διδακτικοί στόχοι για τους μαθητές:

- Να διευρύνουν το πεδίο των γεωμετρικών τους γνώσεων και με άλλη κατηγορία γραμμών εκτός της ευθείας και του κύκλου.
- Να γνωρίσουν τις βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών. Να έρθουν σε επαφή με την ποικιλία των εφαρμογών των κωνικών τομών.

Όσον αφορά τη διδακτέα ύλη οι οδηγίες αναφέρουν ότι δε θα διδαχτούν οι αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου. Επίσης δε θα διδαχτούν οι αποδείξεις των εξισώσεων της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής, καθώς και η απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης της παραβολής και των ασύμπτωτων της υπερβολής. Δε θα διδαχτούν ακόμα οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης και οι αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις. Με βάση τις οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών, για το σχολικό έτος 2010—2011, εκτός των παραπάνω επισημαίνεται ότι από την παράγραφο που αναφέρεται στη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού ($\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\Gamma x+\Delta y+\mathrm{E}=0$) θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος: «σχετική θέση Ευθείας και Κωνικής» για τις κωνικές που έχουν διδαχθεί οι μαθητές. Ο στόχος διδασκαλίας της παραπάνω παραγράφου, σύμφωνα με τις οδηγίες είναι: «να γνωρίσουν οι μαθητές την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής». Βέβαια δεν είναι σαφές τι εννοούν οι συγγραφείς των οδηγιών, όταν αναφέρουν το γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης των κωνικών τομών (εκτός της περίπτωσης του κύκλου). Γεωμετρικός ορισμός της εφαπτόμενης δε δίνεται από το σχολικό βιβλίο.

4.5. Αναγνώριση

Δε βρέθηκαν εργασίες που να ασχολούνται με τη διδασκαλία της επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όμως, βρέθηκαν εργασίες που ασχολούνται με μετατροπές των αναπαραστάσεων των εννοιών (συναρτήσεων και ειδικά ευθείας) ή θέτουν κοινά ερωτήματα με την παρούσα εργασία, όπως για παράδειγμα, αν ο κύκλος είναι γράφημα συνάρτησης. Επίσης, βρέθηκε μια εργασία που ασχολείται με την εικόνα που έχουν οι καθηγητές για τις λύσεις των εξισώσεων και μάλιστα σε μία περίπτωση, η εξίσωση είναι με δύο αγνώστους.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω εργασιών. Στη συνέχεια περιγράφονται τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης της παρούσας έρευνας. Συγκεκριμένα αναλύονται οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στα ερωτήματα του πρώτου ερωτηματολογίου — φύλλου εργασίας. Η ανάλυση γίνεται κατ' αρχήν για κάθε ερώτηση χωριστά και στη συνέχεια συνοψίζοντας ομαδοποιούνται τα αποτελέσματα. Ο στόχος της ενέργειας αυτής είναι να διαπιστωθούν οι απόψεις και η στάση των μαθητών αναφορικά με τους προβληματισμούς που τίθενται αρχικά.

4.5.1. Αποτελέσματα σχετικών εργασιών

Δύο σχετικές εργασίες που αφορούν τις μετατροπές των αναπαραστάσεων των εννοιών, έχουν ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 3.5.1. Ο Knuth (2000) πραγματοποίησε έρευνα με στόχο να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν μια πλευρά της καρτεσιανής σύμβασης, δηλαδή ότι οι συντεταγμένες κάθε σημείου μιας γραμμής ικανοποιούν την εξίσωση της γραμμής, όταν το πρόβλημα απαιτεί τη χρήση της. Στην έρευνα συμμετείχαν 178 μαθητές όλων των τάξεων ενός μεγάλου Λυκείου (high school), που βρίσκεται σε προάστιο του Madison στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Εκτός από ένα, όλα τα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές αφορούσαν γραμμικές συναρτήσεις. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δείχνουν, ότι οι μαθητές δεν έχουν εμπεδώσει τους συνδέσμους μεταξύ της αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης των εννοιών. Ειδικότερα οι μαθητές αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν ή να δημιουργήσουν τη σύνδεση, όταν πρέπει από το γράφημα να οδηγηθούν στην εξίσωση. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν θεωρούν ότι η επιλογή κάθε σημείου στο γράφημα μιας γραμμής, αποτελεί (αντιστοιχεί σε) μια λύση της εξίσωσης της γραμμής.

Οι Tall και Bakar (1992), ασχολούνται με τα νοητικά πρότυπα των μαθητών-φοιτητών της Αγγλίας, για τις συναρτήσεις και τα γραφήματα. Στην έρευνα συμμετείχαν 28 μαθητές και 109 φοιτητές του πρώτου έτους που δεν είχαν διδαχθεί στο Πανεπιστήμιο την έννοια της συνάρτησης. Μεταξύ άλλων ασχολούνται με την περίπτωση του κύκλου. Κατ' αρχήν η πρώτη σχετική ερώτηση ήταν αν ο κύκλος είναι γράφημα συνάρτησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα τα 2/3 περίπου των μαθητών του σχολείου αλλά και των φοιτητών του Πανεπιστημίου, βλέπουν τον κύκλο να είναι γράφημα συνάρτησης. Οι συγγραφείς αποδίδουν τη στάση αυτή στην εξοικείωση των μαθητών — φοιτητών με τη γραφική παράσταση η οποία φέρνει στο νου την έννοια της συνάρτησης, αλλά και στη γλώσσα που χρησιμοποιείται στις τάξεις των μαθηματικών και συγκεκριμένα αναφέρουν ότι πολλοί καθηγητές χρησιμοποιούν τον όρο «πεπλεγμένη συνάρτηση», για να περιγράψουν μια τέτοια σχέση και ο κύκλος είναι ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου. Η δεύτερη σχετική ερώτηση ήταν, αν στην αλγεβρική εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ μπορεί το y να εκφραστεί μέσω μιας συνάρτησης με μεταβλητή το x. Από τους φοιτητές το 62% απαντάει ναι. Συγκρίνοντας τις απαντήσεις βρήκαν ότι το 52% των φοιτητών απαντάει ότι είναι συνάρτηση και στις δύο παραπάνω σχετικές ερωτήσεις, ενώ μόλις το 25% των φοιτητών απαντάει ότι δεν είναι συνάρτηση και στις δύο αυτές ερωτήσεις.

Σε μία ανάλογη εργασία του Hitt (1998), που διεξήχθη στο Μεξικό, σε τριάντα καθηγητές μαθηματικών, που άρχιζαν την παρακολούθηση μιας σειράς μεταπτυχιακών μαθημάτων πάνω στη διδακτική των μαθηματικών, παρατηρήθηκε ότι περίπου το 33% των καθηγητών διαπράττουν το λάθος να θεωρούν ότι ο κύκλος και οι κωνικές τομές (με κύριο άξονα τον $x'x$) είναι συναρτήσεις. Η εξήγηση που δίνει ο συγγραφέας για τη στάση αυτή είναι, ότι η ύπαρξη μιας αλγεβρικής έκφρασης που σχετίζεται με την καμπύλη, οδήγησε τους συγκεκριμένους καθηγητές να εγκαταλείψουν τον ορισμό της συνάρτησης. Κανείς απ’ αυτούς δε χρησιμοποίησε τον ορισμό της συνάρτησης ή την κατακόρυφη γραμμή στο συλλογισμό του.

Η επόμενη σχετική εργασία έγινε από τους Elia, Panaoura, Eracleous, Gagatsi (2007), με αντικείμενο τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών των μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για τις συναρτήσεις και τη λύση προβλήματος σε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Συμμετείχαν σ’ αυτήν 179 δεκαεξάχρονοι μαθητές από την Κύπρο. Μεταξύ άλλων, παρατηρήθηκε ότι το 80% περίπου των μαθητών απαντούν ότι από την αλγεβρική εξίσωση $x^2 + y^2 = 2$, $x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις. Επειδή η ερώτηση ήταν κλειστού τύπου (ναι ή όχι) δεν είναι φανερό γιατί οι μαθητές απαντούν με αυτόν τον τρόπο. Για την αλγεβρική εξίσωση $7x + 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, περίπου το 65% των μαθητών πάλι απαντούν ότι μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις από τη συγκεκριμένη συμβολική έκφραση. Δεν είναι φανερό τι συνειρμούς μπορεί να έκαναν οι μαθητές για να απαντήσουν στην ερώτηση αυτή, η οποία σημειώνεται ότι ήταν και αυτή κλειστού τύπου. Ένας τρόπος να οριστεί μια μη τετριμμένη συνάρτηση από τη συγκεκριμένη εξίσωση είναι να οριστεί μια συνάρτηση του τύπου $x = f(y)$, και συγκεκριμένα η $f(y) = -\frac{3}{7}$, $y \in \mathbb{R}$, αν και τουλάχιστον για την ελληνική πραγματικότητα αυτό είναι απίθανο να το σκεφτεί η πλειονότητα των μαθητών, αφού στην Ελλάδα οι μαθητές διδάσκονται να βλέπουν το πεδίο ορισμού στον άξονα $x'x$ και το σύνολο τιμών στον $y'y$ άξονα.

Η τελευταία εργασία που θα αναφερθεί είναι της Attor (2003) με τίτλο «οι εικόνες των καθηγητών για την έννοια της εξίσωσης». Η έρευνα έγινε σε 10 καθηγητές στη Σουηδία, με τους μισούς απ’ αυτούς να έχουν λιγότερο από ένα χρόνο διδακτικής εμπειρίας, ενώ οι υπόλοιποι είχαν από 10 έως 32 χρόνια διδακτική εμπειρία. Μεταξύ άλλων, ζητήθηκε από τους καθηγητές να λύσουν την εξίσωση $2x + 5y = \sqrt{a}$. Ως αποτέλεσμα της έρευνας αυτής αναφέρεται, ότι μερικοί απ’ αυτούς δε θεώρησαν την παραπάνω έκφραση ως εξίσωση, γιατί σκέφτηκαν ότι είναι αδύνατο να τη λύσουν αφού δεν ξέρουν τις τιμές των άλλων παραγόντων. Ας δούμε δύο χαρακτηριστικές απαντήσεις. Ο πρώτος καθηγητής αναφέρει ότι «δεν είμαι και πολύ σίγουρος αν μπορώ να τη λύσω…. Αισθάνομαι ότι υπάρχουν τρείς άγνωστες μεταβλητές. Μπορεί να είναι ένας τύπος, αλλά δεν μπορείς να τη λύσεις γιατί δεν ξέρεις καθόλου τιμές των μεταβλητών». Ο δεύτερος καθηγητής αναφέρει ότι τα « x και y είναι άγνωστοι. Χρειάζομαι άλλη μία εξίσωση για να το λύσω».

4.5.2. Αποτελέσματα της πρώτης φάσης της έρευνας

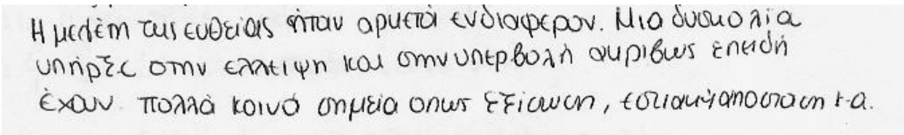
Τα αποτελέσματα αφορούν τις απαντήσεις των 59 μαθητών που συμμετείχαν στη συμπλήρωση του πρώτου ερωτηματολογίου – φύλλου εργασίας.

4.5.2.1. Ανάλυση του πρώτου ερωτηματολογίου — φύλλου εργασίας

1η ερώτηση

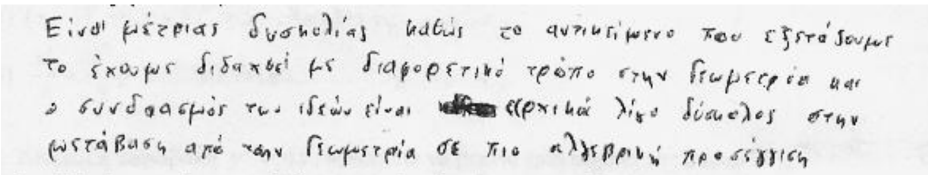
Η πρώτη ερώτηση ήταν: «Η μελέτη της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών είναι για σένα εύκολη, μέτριας δυσκολίας ή δύσκολη δραστηριότητα; Αν αντιμετώπισες κάποια δυσκολία, τι είδους ήταν αυτή;». Ο στόχος της ερώτησης αυτής ήταν να διερευνηθεί, ο βαθμός δυσκολίας που αισθάνονται οι μαθητές όταν μελετούν το συγκεκριμένο αντικείμενο και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην προσπάθειά τους αυτή.

Για το πρώτο σκέλος της ερώτησης υπήρξαν απαντήσεις και για τις τρείς δυνατές επιλογές που τους δίνονταν, δηλαδή *εύκολη* με κωδικό 1.1.1, *μέτριας δυσκολίας* (1.1.2), *δύσκολη* (1.1.3), αλλά και απαντήσεις εκτός των τριών αυτών επιλογών που χαρακτηρίστηκαν με την έκφραση *άλλη* (1.1.4) και είναι απαντήσεις όπως «δεν ήταν αρκετά δύσκολη δραστηριότητα, απλά υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις που δυσκολεύουν τα πράγματα» ή όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση είναι ενδιαφέρουσα δραστηριότητα.



Η μελέτη της ευθείας ήταν αρκετά ενδιαφέρον. Μια δυσκολία υπήρξε στην ελλειψη και στην υπερβολή ακριβως επειδή έχουν πολλά κοινά σημεία οπως εξίσωση, εστιακή απόσταση κ.α.

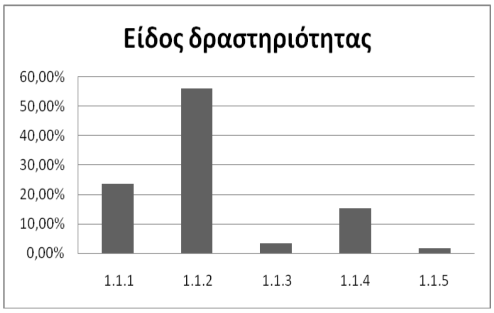
Για το δεύτερο σκέλος της ερώτησης υπήρξαν διάφορες απαντήσεις. Η κυρίαρχη απάντηση, όπως είναι φυσικό, ήταν η *δυσκολία στις ασκήσεις* (1.2.1). Όμως υπήρχαν και απαντήσεις όπως, *με δυσκολεύουν οι πράξεις ή οι τύποι* (1.2.2), *μπερδεύομαι από τις ομοιότητες των κωνικών τομών όσον αφορά τους τύπους και τα στοιχεία τους* (βλέπε την προηγούμενη απάντηση) (1.2.3). Επίσης κάποιοι μαθητές *δυσκολεύονται από την αλγεβρική προσέγγιση της Γεωμετρίας* (1.2.4) όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

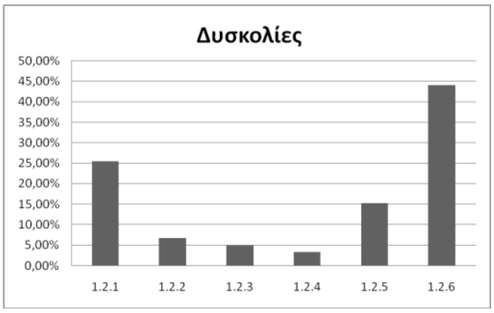


Είναι μέτριας δυσκολίας καθώς το αντικείμενο που εξετάζουμε το έχουμε διδαχθεί με διαφορετικό τρόπο στην Γεωμετρία και ο συνδυασμός των ιδεών είναι αρχικά λίγο δύσκολος στην μετάβαση από την Γεωμετρία σε πιο αλγεβρική προσέγγιση

Τέλος, στην κατηγορία *διάφορες άλλες απαντήσεις* (1.2.5), ομαδοποιήθηκαν διάφορες απαντήσεις, όπως αντιμετωπίζω δυσκολία στα σχήματα ή αντιμετωπίζω δυσκολία στον κύκλο.

Τα αποτελέσματα για την πρώτη ερώτηση φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων, όπου η τελευταία ράβδος αντιστοιχεί σε αυτούς που δεν απαντούν στο ερώτημα.





Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει για τα παραπάνω αποτελέσματα είναι, ότι πάνω από το 60% των μαθητών τη θεωρούν όχι εύκολη δραστηριότητα, αθροίζοντας αυτούς που τη θεωρούν μέτριας δυσκολίας ή δύσκολη δραστηριότητα. Όσον αφορά τις δυσκολίες, ένας στους τέσσερις περίπου (25,42%) δυσκολεύεται στις ασκήσεις. Ένα ποσοστό που αγγίζει το 45% (για την ακρίβεια 44,07% ή 26 μαθητές) δεν εστιάζει σε κάποιες δυσκολίες, αν και παραπάνω από τους μισούς (25% περίπου ή 15 μαθητές) δεν έχουν δηλώσει ότι είναι εύκολη δραστηριότητα (παράρτημα Δ).

2η ερώτηση

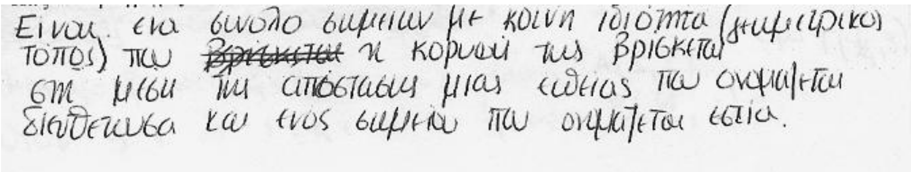
Η δεύτερη ερώτηση ήταν: «Πώς θα περιέγραφες σ' ένα συμμαθητή σου την παραβολή;», με στόχο να διαπιστωθεί το είδος και η ορθότητα του εννοιολογικού ορισμού που θα χρησιμοποιούσαν οι μαθητές. Για την ερώτηση αυτή, κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις με βάση τις απόψεις των David Tall και Shlomo Vinner για τον εννοιολογικό ορισμό. Έτσι έγινε διαχωρισμός των απαντήσεων στις εξής κατηγορίες:

- *Σωστός φορμαλιστικός ορισμός* (2.1).
- *Σωστή περιγραφή με βάση τις άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας* (2.2).
- *Ελλιπής φορμαλιστικός ορισμός* (2.3).
- *Διάφορες ελλιπείς περιγραφές* (2.4).
- *Λάθος φορμαλιστικός ορισμός* (2.5).
- *Διάφορες λάθος περιγραφές* (2.6).
- *Δεν απάντησαν* (2.7).

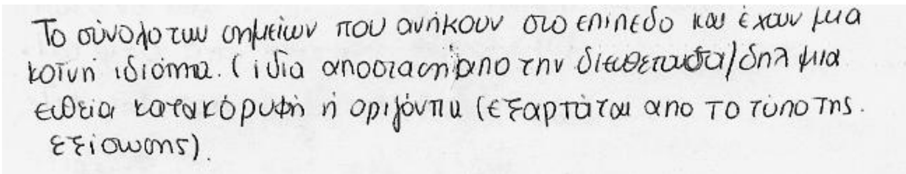
Ποιες απαντήσεις εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία;

- Για την πρώτη κατηγορία εννοείται ο ορισμός που δίνει το βιβλίο για την παραβολή, ως «το γεωμετρικό τόπο σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια ευθεία (τη διευθετούσα) και ένα σημείο (την εστία) που δεν ανήκει στην ευθεία», αν και υπήρξαμε επιεικείς με τον όρο «επίπεδο». Επίσης σε δύο απαντήσεις, υπήρξε η ισοδύναμη με το λεκτικό ορισμό αλγεβρική σχέση $d(M,E)=d(M,\delta)$, όπου M το τυχαίο σημείο της παραβολής, E η εστία και δ η διευθετούσα, η οποία συνοδεύεται από το αντίστοιχο σχήμα, στο οποίο σημειώνονται η εστία και η διευθετούσα.

- Για τη δεύτερη κατηγορία η απάντηση δίνεται μέσω της εξίσωσης, του σχήματος, ή και των δύο.
- Για την τρίτη κατηγορία επιχειρείται να δοθεί ο φορμαλιστικός ορισμός, αλλά δεν είναι πλήρης. Στη συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων, που εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή, το μόνο τμήμα του ορισμού που απουσιάζει είναι αυτό που αναφέρει ότι η εστία δεν πρέπει να ανήκει στη διευθετούσα. Όμως δε λείπουν και οι απαντήσεις, όπως η παρακάτω:

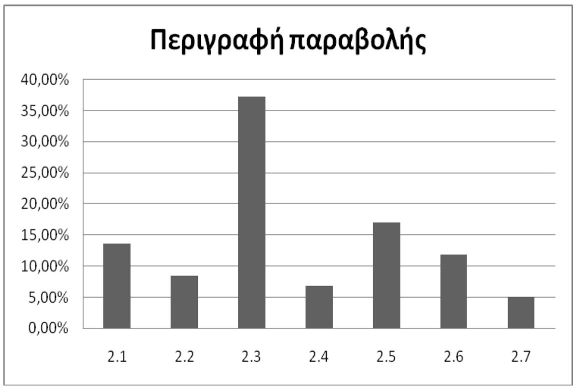

Είναι ένα σύνολο σημείων με κοινή ιδιότητα (γεωμετρικός τόπος) που ~~βρίσκεται~~ η κορυφή της βρίσκεται στη μέση της απόστασης μιας ευθείας που ονομάζεται διευθετούσα και ενός σημείου που ονομάζεται εστία.

- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν διάφορες ελλιπείς απαντήσεις που δε σχετίζονται με τον ορισμό, όπως: «θα έλεγα πως είναι μια καμπύλη που η θέση της εξαρτάται από την εξίσωσή της ή απλά θα τη σχημάτιζα σε ένα χαρτί» ή «ένα γεωμετρικό τόπο σημείων σε ένα επίπεδο».
- Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις που σχετίζονται με τον ορισμό της παραβολής, όμως έχουν λάθη στη διατύπωση. Δύο τέτοια παραδείγματα είναι ότι: «η παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν ίση απόσταση από τις εστίες» ή όπως στην παρακάτω απάντηση.


Το σύνολο των σημείων που ανήκουν στο επίπεδο και έχουν μια κοινή ιδιότητα. (ίδια απόσταση απο την διευθετούσα/δηλ μια ευθεία κατακόρυφη ή οριζόντια (εξαρτάται απο το τύπο της εξίσωσης).

- Στην έκτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν διάφορες λάθος απαντήσεις που δε σχετίζονται με τον ορισμό, όπως: «η παραβολή είναι μια από τις κωνικές τομές με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και έχει τη μορφή ημικυκλίου» ή « η παραβολή είναι μια καμπύλη που έχει δύο εστίες στο επίπεδο και μια ευθεία τη διευθετούσα. Ένα ημικύκλιο». Σε τρείς απ’ αυτές γράφεται η λέξη «ημικύκλιο».

Τα αποτελέσματα για τη δεύτερη ερώτηση φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Το 22,03% των μαθητών κάνει μια πλήρη περιγραφή της παραβολής, μέσα από τον ορισμό ή τις άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας. Εντυπωσιακό είναι το ποσοστό (67,80%) των μαθητών που επιχειρούν την περιγραφή με βάση το φορμαλιστικό ορισμό, σε σχέση με το ποσοστό (20,33%) που επιλέγει να περιγράψει την παραβολή διαφορετικά. Από το 37,29% των μαθητών, που απαντούν με τον ελλιπή φορμαλιστικό ορισμό, το 91% (δηλαδή 20 στους 22 μαθητές) αναφέρουν τον ορισμό της παραβολής, ξεχνώντας να γράψουν ότι η εστία δεν πρέπει να ανήκει στη διευθετούσα. Τέλος, απ’ αυτούς που απαντούν με βάση το φορμαλιστικό ορισμό το 20% επιτυγχάνει πλήρη περιγραφή της παραβολής, ενώ απ’ αυτούς που απαντούν διαφορετικά το 31,25% την περιγράφει πλήρως και σωστά.

3^{η} ερώτηση

Η τρίτη ερώτηση ήταν: «Τι είναι για σένα οι λύσεις (αν υπάρχουν) μιας εξίσωσης με δύο άγνωστες ποσότητες x και y ;». Με την ερώτηση αυτή, γίνεται προσπάθεια να διερευνηθεί αν, και με ποιο τρόπο, αντιλαμβάνονται το σύνολο των λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης οι μαθητές.

Οι απαντήσεις που υπήρξαν ήταν οι παρακάτω:

- *Ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση* (3.1).
- *Συντεταγμένες σημείων* (3.2).
- *Σημεία* (3.3).
- *Αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση* (3.4).
- *Αριθμοί* (3.5).
- *Αποτέλεσμα μιας διαδικασίας* (3.6).
- *Διάφορες «άσχετες» απαντήσεις* (3.7).
- *Δεν απάντησαν* (3.8).

Αναλυτικότερα για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στη πρώτη κατηγορία εντάχθηκε η απάντηση ενός μαθητή που γράφει ότι, οι λύσεις μια εξίσωσης είναι «τιμές που παίρνει το x και y που ταυτόχρονα επαληθεύουν την εξίσωση», παραπέμποντας ευθέως σε ζευγάρια τιμών που την επαληθεύουν.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν απαντήσεις του τύπου: «Μπορεί να είναι συντεταγμένες σημείου!» ή «Αν η εξίσωση αυτή αποτελεί ευθεία, κύκλο ή κωνική τομή τότε αυτές αποτελούν τις συντεταγμένες ενός σημείου το οποίο ανήκει σ’ αυτή».
- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν απαντήσεις όπως: «είναι σημεία πάνω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο επίπεδο)» ή όπως την παρακάτω απάντηση.

  > ~~[illegible]~~ ειναι τα σημεια απο τα οποια διερχεται μια ευθεια, μια παραβολη, μια υπερβολη, μια ελλειψη ή ειν κυκλος.

- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις όπως: «είναι οι τιμές τις οποίες μπορούν να πάρουν οι άγνωστοι ώστε να επαληθεύεται η εξίσωση» ή όπως η παρακάτω απάντηση.

  > Οι λύσεις είναι οι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση.

- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν απαντήσεις όπως: «συνήθως τα x και y συμβολίζουν δυο αριθμούς σε μια εξίσωση» ή «είναι 2 πραγματικοί αριθμοί».
- Στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν δύο ειδών απαντήσεις, που αντιμετωπίζουν συστημικά τις εξισώσεις. Στο πρώτο είδος απαντήσεων, επιζητείται και δεύτερη εξίσωση και οι λύσεις θα προκύψουν από τη λύση του συστήματος, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση (παρατηρείται ότι η ίδια απάντηση δόθηκε από κάποιον καθηγητή στην εργασία της Attor (2003)).

  > Αφού έχω μια εξίσωση με 2 αγνώστους τότε χρειάζομαι άλλη 1 για να λύσω το σύστημα και να βρω τις τιμές του x,y.

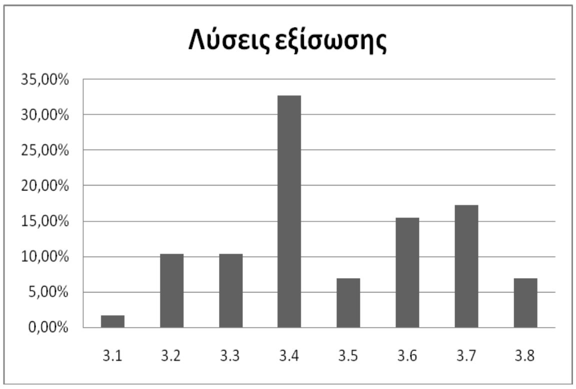
  Στο δεύτερο είδος οι μαθητές ταύτισαν τις λύσεις με την επίλυση της εξίσωσης ως προς ένα άγνωστο, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

> Οι λύσεις μιας εξίσωσης με δύο άγνωστες ποσότητες είναι να λύσουμε την εξίσωση ως προς τον ένα άγνωστο για να βρούμε το αποτέλεσμα.

- Στην έβδομη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις όπως: «είναι απλά κάποιες συνηθισμένες λύσεις» ή όπως στην παρακάτω απάντηση.

> Είναι σαν να μαθαίνω τι βρίσκεται πίσω απ' το x και το y. Σημαντική όμως είναι και η διαδικασία της λύσης της εξίσωσης.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Ένας μόνο μαθητής (1,69%) αναφέρει ως λύσεις τα ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση, παραπέμποντας άμεσα στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης, ως ένα διαφορετικό από τα σημεία σύνολο. Μόνο μια στις πέντε (ακριβέστερα 22,03%) απαντήσεις ανήκει στις τρείς πρώτες κατηγορίες, συνδέοντας το x με το y απευθείας ή μέσω των (συντεταγμένων) σημείων, αντιμετωπίζοντας τα ως ζευγάρι. Το μεγαλύτερο ποσοστό (περίπου 39%) απαντάει ότι οι λύσεις είναι αριθμοί ή αριθμοί που επαληθεύουν, χωρίς να δίνει ενδείξεις ότι συνδέει με κάποιο τρόπο το x με το y. Από το 15,25% (9 μαθητές) που αναφέρονται σε αποτέλεσμα μιας διαδικασίας, τα 2/3 (6 μαθητές) επιζητούν και δεύτερη εξίσωση για να λύσουν σύστημα.

4η ερώτηση

Η τέταρτη ερώτηση ήταν: «Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μια ευθεία με μια έλλειψη;» και απευθύνεται ουσιαστικά στη γεωμετρική εποπτεία των μαθητών, με στόχο να συσχετιστεί με την 12η ερώτηση που επαναλαμβάνει το ίδιο ερώτημα, αλλά έχοντας την εξίσωση μιας ευθείας και μιας έλλειψης ως σύστημα.

Οι απαντήσεις που υπήρξαν είναι οι παρακάτω:

- *Κανένα, ένα ή δύο σημεία* (4.1).
- *Ένα ή δύο σημεία* (4.2).
- *Κανένα ή δύο σημεία* (4.3).
- *Δύο σημεία* (4.4).
- *Ένα σημείο* (4.5).
- *Ένα, δύο ή τρία σημεία* (4.6).
- *Ένα, δύο ή άπειρα σημεία* (4.7).
- *Δεν απάντησαν* (4.8).

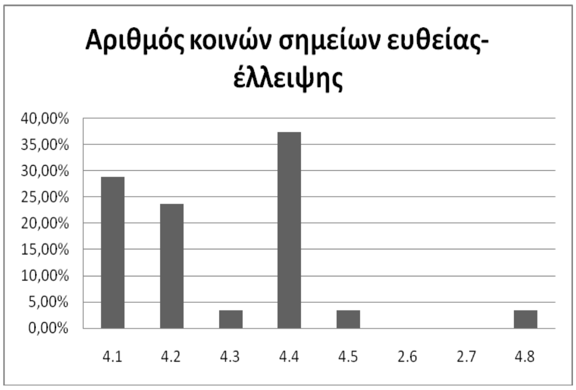
Πιο αναλυτικά μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία, συνήθως διακρίνουν περιπτώσεις, δε λείπουν βέβαια και οι πιο λιτές απαντήσεις της μορφής: «το πολύ δύο κοινά σημεία».
- Οι απαντήσεις που εντάχθηκαν στη δεύτερη κατηγορία, δε συμπεριλαμβάνουν την περίπτωση η ευθεία να μην τέμνει την έλλειψη, αν και στις περισσότερες απαντήσεις επιχειρείται διερεύνηση.
- Στην τρίτη κατηγορία έχουμε δύο πανομοιότυπες απαντήσεις. Η μια απ’ αυτές φαίνεται στο παρακάτω κείμενο.

  > Μια ευθεία με μια έλλειψη μπορεί να έχει
  > 2 κοινά σημεία, αν εφάπτεται η ευθεία στην έλλειψη.
  > Αλλιως δεν έχουν κανενα κοινο σημείο.

- Στην τέταρτη κατηγορία οι απαντήσεις είναι συνήθως μονολεκτικές και φυσικά δεν επιχειρείται διερεύνηση του ερωτήματος.
- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν δύο απαντήσεις, που σε μια πρόταση διατυπώνουν την άποψη ότι μια ευθεία και μια έλλειψη έχουν ένα κοινό σημείο, χωρίς καμία επεξήγηση.
- Για την έκτη και έβδομη κατηγορία, υπήρξαν απαντήσεις μόνο στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Κατ' αρχήν παρατηρείται ότι κάτω από 30% των μαθητών απαντούν σωστά, ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό (37,29%) απαντούν δύο σημεία. Από την ομάδα των μαθητών και μαθητριών, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στις τρείς πρώτες κατηγορίες (55,93%), περίπου ένας στους τρείς (για την ακρίβεια 12 στους 33 ή 36,36%) διερευνά το πρόβλημα πριν απαντήσει. Οι υπόλοιποι μαθητές, που ανήκουν στις άλλες κατηγορίες, απαντούν χωρίς να διερευνούν το πρόβλημα.

5η ερώτηση

Η πέμπτη ερώτηση ήταν: «Μέσα από τις εξισώσεις της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών, μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις; Αν ναι, σε ποιες περιπτώσεις;», με στόχο να διαπιστωθεί ο βαθμός συσχέτισης των παραπάνω εννοιών με τις συναρτήσεις. Λόγω κακής διατύπωσης της ερώτησης, 19 από τους 59 μαθητές απαντούν στο ερώτημα, αν τα σχήματα της ευθείας, του κύκλου ή των κωνικών τομών μπορούν να είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να χωριστούν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Ναι, εξηγώντας με κάποιο τρόπο* (5.1).
- *Ναι, με λάθος επεξηγήσεις* (5.2).
- *Ναι, χωρίς επεξηγήσεις* (5.3).
- *Όχι, χωρίς επεξηγήσεις* (5.4).
- *Σωστά κατά περίπτωση (όχι απαραίτητα όλες οι περιπτώσεις) είναι ή δεν είναι συναρτήσεις, η ευθεία, ο κύκλος και οι κωνικές τομές* (5.5).

- *Είναι συναρτήσεις* (5.6).
- *Δεν απάντησαν* (5.7).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

➢ Μια μαθήτρια και ένας μαθητής έδωσαν απαντήσεις που εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία. Οι απαντήσεις τους ήταν οι εξής:

Μπορούμε να ορίσουμε ημισυναρτήσεις και όχι συναρτήσεις καθώς για ~~να~~ μια τιμή λόγου χάρη του x αντιστοιχούν δυο y. Παραδείγματος χάρη η ημισυνάρτηση του κύκλου είναι το ημικύκλιο.

και

Μπορούμε να ορίσουμε ~~[illegible]~~ συναρτήσεις αν λάβουμε τους απαραίτητους περιορισμούς. Άνο για παράδειγμα πάρουμε το ημικύκλιο στο οποίο το $y>0$

➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν απαντήσεις όπως: «μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις, όταν όμως δε μηδενίζουν τα x και y ταυτόχρονα» ή όπως:

Μπορούμε όταν οι ποσότητες ψ, x ορίζονται και με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε τι γραφικές τους παραστάσεις

➢ Στην τρίτη και τέταρτη κατηγορία είναι σαφές τι εννοείται. Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, που προσπαθούν να εξηγήσουν σε ποιες περιπτώσεις έχουμε γραφική παράσταση συνάρτησης και σε ποιες όχι. Οι απαντήσεις τους δεν είναι πάντα πλήρεις. Δύο χαρακτηριστικές απαντήσεις απ' αυτή την κατηγορία είναι οι παρακάτω.

Η ευθεία ορίζεται ως συνάρτηση μόνο όταν δεν είναι κατακόρυφη
Από την εξίσωση του κύκλου δεν μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση διότι αν φέρουμε μια ~~κατακόρυφο~~ κάθετη στον x'x τότε αυτή θα τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία, επομένως δεν είναι ~~γραφική παράσταση~~ συνάρτηση
Από τις κωνικές τομές η παραβολή είναι συνάρτηση μόνο όταν είναι της μορφής $x^2=2py$, δηλ. η εστία της βρίσκεται στον y'y.
Η έλλειψη ~~στον~~ πρακτικά δεν μπορεί να αποτελέσει συνάρτηση για τον ίδιο λόγο με τον κύκλο (θεωρητικά αν πάρει την μορφή της ευθείας και δεν είναι κατακόρυφη μπορεί).

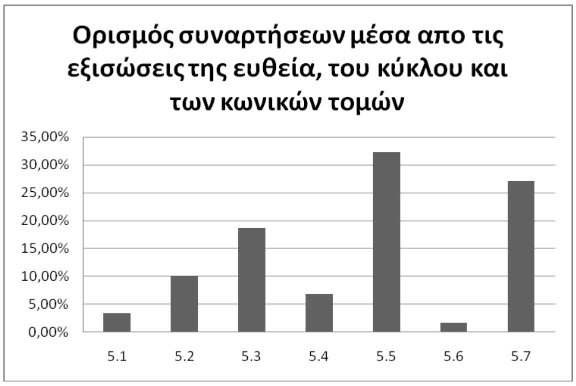
και

> Ναι γίνεται να ορίσουμε, λύνοντας την εξίσωση ως προς $y = f(x)$ δημιουργούν συναρτήσεις αρκεί να πληρούνται οι περιορισμοί, τα πεδία ορισμού και πρέπει καθε x να αντιστοιχεί σε ένα y. οπότε η ευθεία μπορεί να γίνει συνάρτηση, ο κύκλος οχι και η παραβολή όταν $y'y$ γίνεται.

- Τέλος στην έκτη κατηγορία εντάχθηκε η απάντηση ενός μαθητή που μας διαβεβαιώνει ότι:

> αν οι κωνικές τομές σχεδιαστών σε άξονες ή είναι συναρτήσης

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Παρά την αστοχία της ερώτησης είναι δυνατόν να παρατηρηθεί ότι από τους 23 μαθητές (38,98%) που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στις τέσσερις πρώτες κατηγορίες, μόνο δύο προσεγγίζουν το θέμα βεβαιωμένα σωστά. Για τα (11) άτομα που οι απαντήσεις τους ανήκουν στην κατηγορία με κωδικό 5.3 δεν υπάρχει δυνατότητα να διαγνωστεί αν η απάντησή τους βασίζεται σε σωστά επιχειρήματα. Από τους 19 μαθητές (32,20%), που απαντούν αν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης η ευθεία, ο κύκλος και οι κωνικές τομές, μόνο 7 μαθητές απαντούν πλήρως κάνοντας διερεύνηση των περιπτώσεων ή απαντώντας σιβυλλικά: «για κάθε x πρέπει να υπάρχει ένα μόνο y». Οι υπόλοιποι απλά αναφέρονται σε κάποιες απ’ αυτές τις έννοιες για να δηλώσουν ότι είναι ή δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Τέλος είναι η μοναδική ερώτηση, όπου από τα 16 άτομα που δεν απαντούν τα 5 γράφουν: «δεν ξέρω».

$6^{η}$ ερώτηση

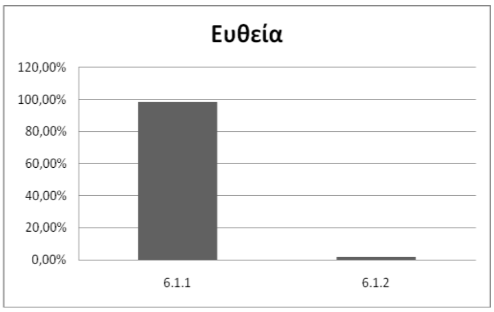
Στην έκτη ερώτηση, ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν σε ποια επίπεδη γραμμή αντιστοιχούν οι παρακάτω εξισώσεις:

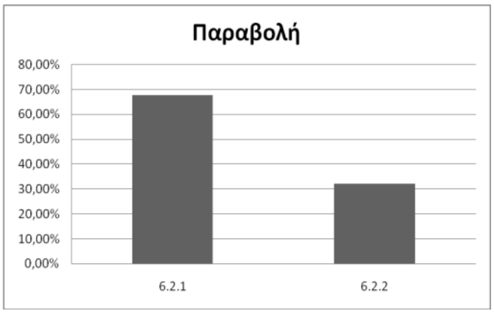
α) $2x - y + 5 = 0$ β) $x^2 = y$ γ) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ δ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

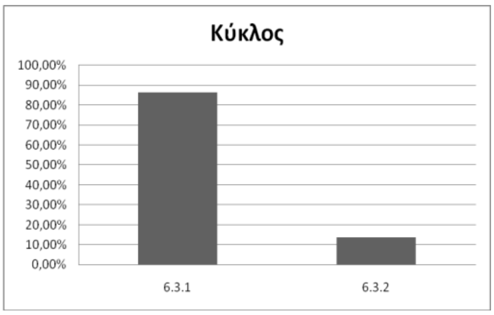
Ο στόχος της ερώτησης αυτής, ήταν η διάγνωση της δυνατότητας ταυτοποίησης του ονόματος της γραμμής, που εκφράζεται από τις παραπάνω εξισώσεις.

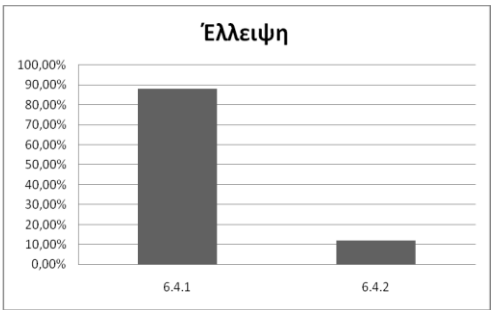
Όλοι οι μαθητές απάντησαν τη συγκεκριμένη ερώτηση. Στο πρώτο ερώτημα μάλιστα, απάντησαν όλοι ότι είναι *ευθεία* (6.1.1), εκτός από ένα μαθητή που έδωσε *άλλη απάντηση* (6.1.2). Στο δεύτερο ερώτημα, εκτός από την απάντηση *παραβολή* (6.2.1), υπήρξαν και διάφορες *άλλες απαντήσεις* (6.2.2), όπως ευθεία, υπερβολή, ή απλά σημειώνεται ότι πρόκειται για καμπύλη. Στο τρίτο ερώτημα, εκτός από την απάντηση κύκλος (6.3.1), υπήρξαν και διάφορες άλλες απαντήσεις (6.3.2), όπως ευθεία, παραβολή ή απλά σημειώνεται ότι πρόκειται για καμπύλη. Τέλος στο τέταρτο ερώτημα, εκτός από την απάντηση έλλειψη (6.4.1), υπήρξαν και διάφορες άλλες απαντήσεις (6.4.2), όπως κύκλος ή απλά σημειώνεται ότι πρόκειται για καμπύλη.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.









Τα ποσοστά των επιτυχών απαντήσεων είναι αναμενόμενα υψηλά. Εξαίρεση αποτελεί το ερώτημα που αφορά την παραβολή που το ποσοστό των «άλλων απαντήσεων» ξεπερνά το

30%, δημιουργώντας ένα προβληματισμό για την αναγνώριση από τους μαθητές της εξίσωσης αυτής.

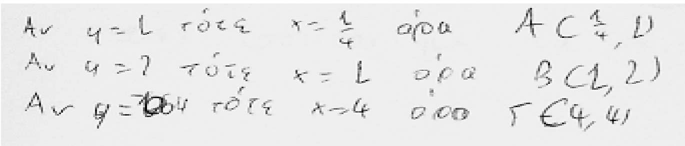
7η ερώτηση

Η έβδομη ερώτηση ήταν: «Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Μπορείτε να βρείτε τρία σημεία της παραβολής;». Με την ερώτηση αυτή επιχειρείται η μέτρηση της δυνατότητας που πιθανά έχουν οι μαθητές, χρησιμοποιώντας την εξίσωση συστημικά, να μεταβαίνουν από την εξίσωση, ως μια αναπαράσταση της παραβολής, σε ένα υποσύνολο του συνόλου των λύσεων που είναι μια άλλη αναπαράσταση της παραβολής. Οι απαντήσεις στην παραπάνω ερώτηση εμπίπτουν στις ακόλουθες κατηγορίες:

- *Σωστά και συμμετρικά* (7.1).
- *Σωστά με μη αρνητικές συντεταγμένες* (7.2).
- *Λάθος σημεία* (7.3).
- *Δεν απάντησαν* (7.4).

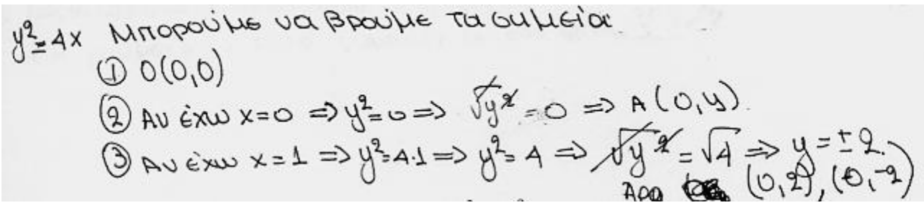
Πιο αναλυτικά σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που εκτός από το σημείο $(0,0)$ ή κάποιο άλλο, εμφανίζουν δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον $x'x$ άξονα λύνοντας την εξίσωση για μια μόνο (συγκεκριμένη) τιμή του x.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, στις οποίες δε λύνεται πλήρως (βρίσκουν μόνο τη θετική λύση) η εξίσωση για την τιμή του x που είναι διάφορη του μηδενός και τα δύο άλλα σημεία αναζητούνται με τον ίδιο τρόπο για μια άλλη τιμή του x (ίσως και το μηδέν) ή με αντικατάσταση θετικών τιμών στο y παράγονται οι αντίστοιχες τιμές του x όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

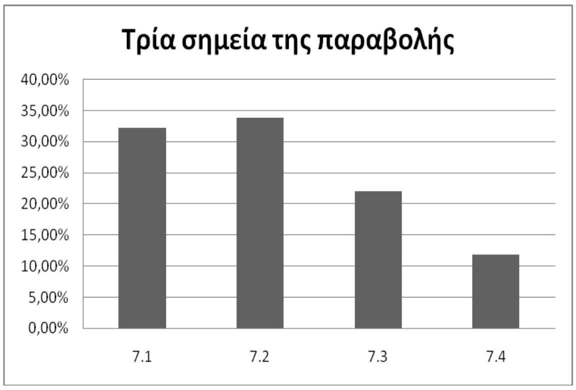

Αν $y=1$ τότε $x=\frac{1}{4}$ άρα $A(\frac{1}{4}, 1)$
Αν $y=2$ τότε $x=1$ άρα $B(1,2)$
Αν $y=4$ τότε $x=4$ άρα $\Gamma(4,4)$

- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν όλες τις απαντήσεις που ένα τουλάχιστον σημείο είναι λάθος. Συνήθως δε φαίνεται η διαδικασία εύρεσης των συντεταγμένων, άρα και δεν είναι ορατό το σημείο που γίνεται το λάθος. Σε πέντε απαντήσεις η εστία λαμβάνεται ως σημείο της παραβολής όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

Μια (περίεργη) περίπτωση λάθους φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Ένας στους τρείς (32,20%) αξιοποιεί το δευτεροβάθμιο παράγοντα, εμφανίζοντας συμμετρικά σημεία ως προς το $x'x$ άξονα. Επίσης ένας στους τρείς (33,90%) περίπου μαθητές παράγουν σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες αγνοώντας το δευτεροβάθμιο παράγοντα ή αντικαθιστώντας τιμές στο y, οπότε έχει να λύσει μια πρωτοβάθμια ως προς x εξίσωση. Συνολικά λοιπόν, το 66,10% των μαθητών μπορεί να βρει σωστά ένα υποσύνολο του συνόλου των λύσεων. Τέλος ένας στους πέντε περίπου μαθητές (22,03%) βρίσκουν τουλάχιστον ένα σημείο λάθος. Μερικοί απ' αυτούς πιθανά κάνουν λάθη σε πράξεις, όμως το 38,46% (5 στους 13) από τους μαθητές αυτούς σημειώνει την εστία ως σημείο της παραβολής.

8η ερώτηση

Η όγδοη ερώτηση ήταν: «Το σημείο $A(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ ανήκει σε έλλειψη της μορφής: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Μπορείς να βρεις τρία ακόμη σημεία που ανήκουν στην έλλειψη;», ζητώντας ουσιαστικά από τους μαθητές να βρουν τα συμμετρικά ως προς τους άξονες και το κέντρο σημεία, αφού οι δύο δευτεροβάθμιοι όροι της εξίσωσης της έλλειψης εξασφαλίζουν αυτές τις συμμετρίες. Ο στόχος για την παραπάνω ερώτηση ήταν η διάγνωση του επιπέδου χρήσης της έννοιας που εκφράζεται με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση (εξίσωση). Η παραπάνω συνθήκη ορίζει μια οικογένεια ελλείψεων που διέρχονται από το A.

Οι απαντήσεις στην ερώτηση αυτή εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Τα συμμετρικά του A ως προς τους άξονες και το κέντρο* (8.1).
- *Εύρεση σημείων με συντεταγμένες εκφρασμένες συναρτήσει των α και β* (8.2).
- *Εύρεση λάθος σημείων* (8.3).
- *Διάφορες ανεπιτυχείς προσπάθειες εύρεσης σημείων μέσα από τον προσδιορισμό των α και β* (8.4).
- *Δεν απάντησαν* (8.5).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που, με (8 μαθητές) ή χωρίς αιτιολόγηση τις συμμετρίες της καμπύλης, αναφέρουν τα συμμετρικά σημεία του A ως προς τους άξονες και το κέντρο. Επίσης, δύο μαθητές προβληματίστηκαν εργαζόμενοι πάνω στην εξίσωση για να καταλήξουν στην εύρεση των σημείων, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2x^2 + a^2y^2 = a^2\beta^2 \Leftrightarrow 3\beta^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2\beta^2$ $\quad B(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

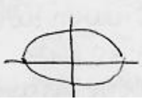
$\beta^2x^2 + a^2y^2 = 3\beta^2 + \frac{1}{4}a^2$ $\quad$ Άρα $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ $\quad \Gamma(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

$y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}$ $\quad \Delta(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

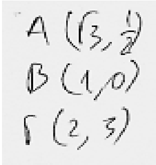
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, που οι συντεταγμένες των σημείων είναι εκφρασμένες συναρτήσει των α και β όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

Αφού $A \in (C) \Rightarrow \frac{3}{a^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow 3\beta^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2\beta^2 \Leftrightarrow 12\beta^2 + a^2 = 4a^2\beta^2$

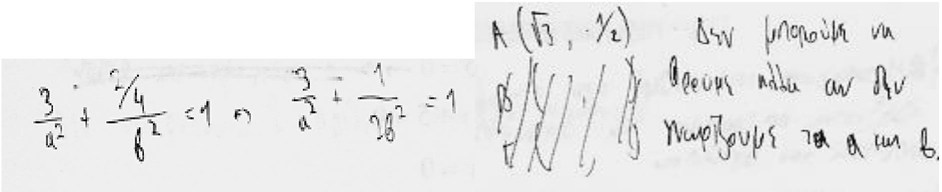
Ακωμα $B(a,0)$, $\Gamma(-a,0)$, $\Delta(0,\beta)$.



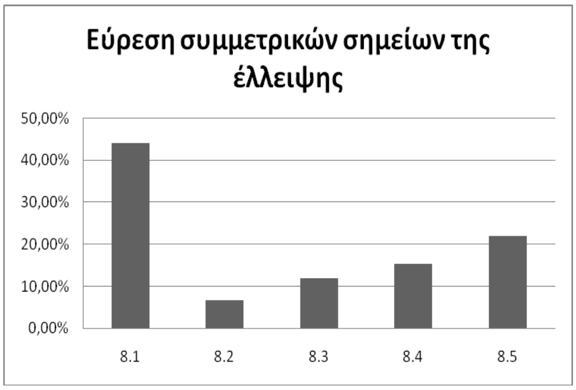
- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν κάποια σημεία που δεν ανήκουν στην έλλειψη, όπως για παράδειγμα η παρακάτω απάντηση.



- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, στις οποίες γίνεται προσπάθεια προσδιορισμού των α και β μέσα από την επαλήθευση των συντεταγμένων του A στην εξίσωση. Σε κάποιες απ’ αυτές η διαδικασία σταματάει στην αντικατάσταση, αλλά σε κάποιες άλλες διαπιστώνεται η αδυναμία εύρεσης σημείων, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Ένας στους δύο περίπου (44,07%) μαθητές βρίσκουν τα τρία συμμετρικά σημεία. Απ’ αυτούς οι δύο στους τρείς περίπου (16 στους 26) μαθητές απλά αναφέρουν τα σημεία, ενώ ένας στους τρείς περίπου (8 στους 26) μαθητές επικαλείται τη συμμετρία. Δύο μαθητές καταλήγουν στα σημεία επεξεργαζόμενοι την εξίσωση. Ένας στους τρείς μαθητές δε βρίσκει τα σημεία, αν και προσπαθούν να τα βρουν με διάφορους τρόπους. Από τους μαθητές που στην προηγούμενη ερώτηση βρήκαν σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες, το 55% (11 στους 20) δεν καταφέρνουν να προσδιορίσουν τα συμμετρικά σημεία (παράρτημα Δ). Τέλος, οι 8 μαθητές (ποσοστό 13,56% επί του συνόλου των μαθητών) που βρίσκουν τα σημεία επικαλούμενοι τις συμμετρίες ίσως βρίσκονται στο στάδιο της συμπύκνωσης, αφού δεν προσπαθούν μέσω της χρήσης της εξίσωσης να βρουν τα σημεία, αλλά στηρίζονται στις ιδιότητες της καμπύλης.

9η ερώτηση

Η ένατη ερώτηση ήταν: «Τι αποτελεί το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν εξίσου από το σημείο $\mathrm{E}(1,0)$ και την ευθεία $x=-1$; Ποία είναι η εξίσωση που περιγράφει την καμπύλη αυτή;». Στο πρώτο μέρος της ερώτησης ζητείται η αναγνώριση του γεωμετρικού τόπου και στη συνέχεια η εύρεση της εξίσωσης που τον περιγράφει. Μέσω αυτής της ερώτησης γίνεται προσπάθεια να μετρηθεί η δυνατότητα μετάβασης από το φορμαλιστικό ορισμό της παραβολής στην εξίσωση της.

Η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων ως προς το πρώτο μέρος της ερώτησης έγινε ως εξής:

- *Παραβολή* (9.1.1).
- *Είναι γεωμετρικός τόπος* (9.1.2).
- *Άλλος γεωμετρικός τόπος* (9.1.3).
- *Δεν απάντησαν* (9.1.4).

Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

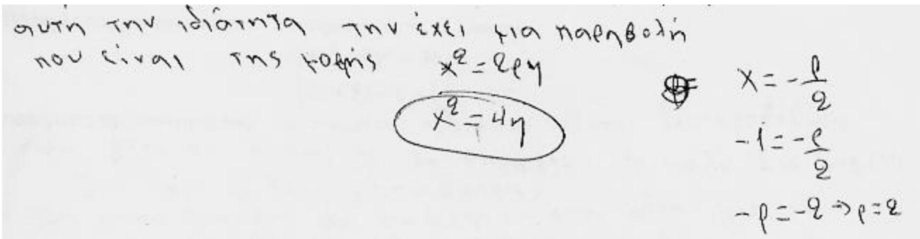
- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν την παραβολή ως το σύνολο των σημείων που έχουν την παραπάνω ιδιότητα.
- Για τη δεύτερη κατηγορία ένας μαθητής αναφέρει απλά ότι πρόκειται για ένα γεωμετρικό τόπο.
- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί έλλειψη, ευθεία ή υπερβολή.

Για το δεύτερο μέρος της ερώτησης που αφορά την εξίσωση, δημιουργήθηκαν οι εξής κατηγορίες απαντήσεων:

- *Εξίσωση της παραβολής* (9.2.1).
- *Γενική εξίσωση παραβολής για τη συγκεκριμένη περίπτωση* (9.2.2).
- *Λάθος εξίσωση παραβολής* (9.2.3).
- *Άλλη εξίσωση* (9.2.4).
- *Δεν απάντησαν* (9.2.5).

Αναλυτικότερα:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που βρίσκουν την εξίσωση $y^2 = 4x$ της παραβολής (εκτατικό αντικείμενο), με προσδιορισμό της παραμέτρου ρ της γενικής εξίσωσης $y^2 = 2\rho x$ (εντατικό αντικείμενο).
- Στις απαντήσεις της δεύτερης κατηγορίας γράφεται απλά η γενική εξίσωση $y^2 = 2\rho x$.
- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν απαντήσεις στις οποίες η εξίσωση προσδιορίζεται λάθος, είτε λόγο λάθους (ξεχνάνε το 2) στη γενική εξίσωση ή στον προσδιορισμό του ρ, είτε λόγο της επιλογής , σε δύο περιπτώσεις, της εξίσωσης $x^2 = 2\rho y$, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.


αυτή την ιδιότητα την έχει μια παραβολή που είναι της μορφής $x^2 = 2\rho y$

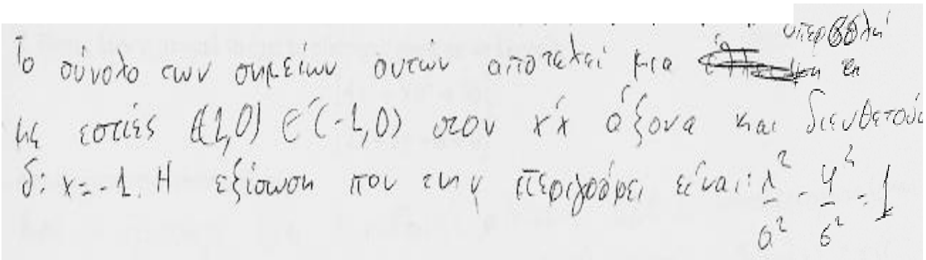
$x^2 = 4y$

$x = -\frac{\rho}{2}$

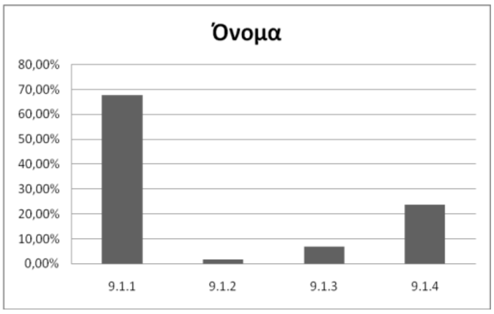
$-1 = -\frac{\rho}{2}$

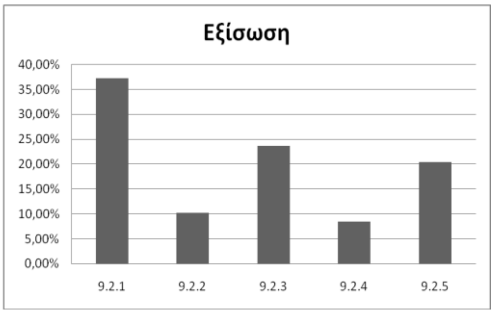
$-\rho = -2 \rightarrow \rho = 2$

- Τέλος στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρονται σε εξισώσεις, όπως ευθείας, έλλειψης, υπερβολής. Ας δούμε μια απ’ αυτές.


Το σύνολο των σημείων αυτών αποτελεί μια ~~...~~ υπερβολή με εστίες Ε(1,0) Ε΄(-1,0) στον x'x άξονα και διευθετούσα δ: x=-1. Η εξίσωση που την περιγράφει είναι: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.





Όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης, έτσι και στην περίπτωση του ορισμού η ταυτοποίηση του ονόματος του γεωμετρικού τόπου επιτυγχάνεται από υψηλό ποσοστό (67,80%) των μαθητών. Όμως το ποσοστό πέφτει περίπου στο μισό (37,29%), όταν εξετάζουμε τη δυνατότητα μετάβασης από τον ορισμό στην εξίσωση, που προκύπτει για το συγκεκριμένο γεωμετρικό τόπο. Ακόμα και αν προστεθεί το ποσοστό αυτών που αναφέρουν απλά τη γενική εξίσωση, δε θα υπερβαίνεται το 50% (για την ακρίβεια 47,46%). Τέλος είναι αξιοσημείωτο ότι ένας στους τέσσερις περίπου (23,73%), ενώ στη συντριπτική τους πλειοψηφία (12 στους 14 μαθητές) έχουν πει ότι είναι παραβολή (παράρτημα Δ), καταλήγουν να προσδιορίζουν μια λάθος εξίσωση παραβολής.

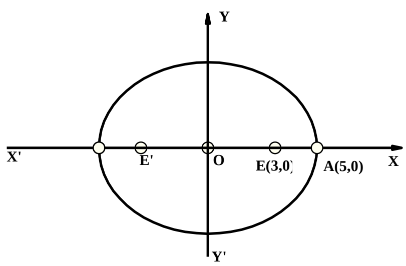
10η ερώτηση

Στη δέκατη ερώτηση δόθηκε το σχήμα μιας έλλειψης στο επίπεδο εφοδιασμένο με ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και ζητήθηκε, εκτός από το όνομα της καμπύλης, η εξίσωσή της και ο προσδιορισμός της ιδιότητας που έχουν τα σημεία της καμπύλης, δηλαδή ο ορισμός της καμπύλης ως γεωμετρικός τόπος. Η εκφώνηση της ερώτησης ήταν η εξής:

α) Ποιο είναι το όνομα της καμπύλης στο παρακάτω σχήμα;

β) Ποια είναι η εξίσωση που οι λύσεις της είναι τα σημεία της καμπύλης μας;

γ)Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της καμπύλης;



Ο στόχος για την ερώτηση αυτή, ήταν η διάγνωση της δυνατότητας μετατροπής των αναπαραστάσεων της έλλειψης. Ειδικά τη μετατροπή του σχήματος σε εξίσωση και του σχήματος ή της εξίσωσης σε ορισμό.

Για το όνομα της καμπύλης οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Έλλειψη* (10.1.1).
- *Λάθος όνομα* (10.1.2).
- *Δεν απάντησαν* (10.1.3).

Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις τριών μαθητών στις οποίες αναφέρουν το όνομα παραβολή, αλλά στη συνέχεια γράφουν την εξίσωση της έλλειψης και μια απάντηση που αναφέρει τη λέξη κύκλος, στην οποία ο μαθητής απαντάει το δεύτερο ερώτημα με την εξίσωση του κύκλου.

Για την εξίσωση της έλλειψης κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις ως εξής:

- *Εξίσωση της έλλειψης* (10.2.1).
- *Γενική εξίσωση έλλειψης* (10.2.2).
- *Λάθος εξίσωση* (10.2.3).
- *Δεν απάντησαν* (10.2.4).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που με υπολογισμό ή όχι των παραμέτρων α και β της γενικής εξίσωσης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ καταλήγουν στην εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν μόνο τη γενική εξίσωση της έλλειψης, χωρίς να προσδιορίζουν τα α και β.
- Τέλος στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν δύο απαντήσεις, η μια αναφέρει την εξίσωση του κύκλου και η άλλη την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης, όπως φαίνεται παρακάτω.

$C: x^2+y^2=\rho^2$ και $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

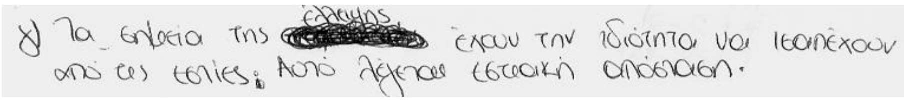
Για την ιδιότητα που έχουν τα σημεία της έλλειψης, οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Εξειδικευμένος ορισμός* (10.3.1).
- *Γενικός ορισμός* (10.3.2).
- *Άλλες ιδιότητες* (10.3.3).
- *Λάθος απαντήσεις* (10.3.4).
- *Δεν απάντησαν* (10.3.5).

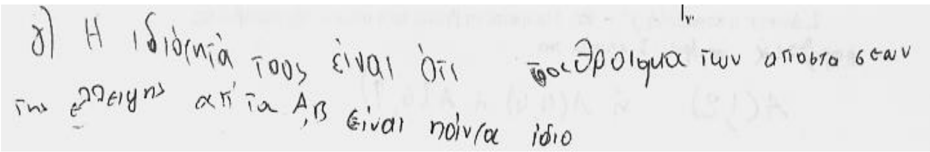
Πιο αναλυτικά:

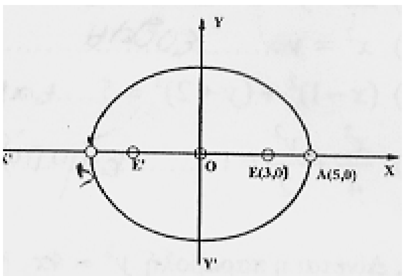
- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι, το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της έλλειψης από τις εστίες είναι 10 (εκτατικό αντικείμενο).
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι, το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της έλλειψης από τις εστίες είναι ίσο με 2α ή απλά σταθερό με κάποιες απαντήσεις να αναφέρουν ότι πρέπει αυτό το άθροισμα να είναι και μεγαλύτερο της εστιακής απόστασης (εντατικό αντικείμενο).
- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν άλλες ιδιότητες, που δε χαρακτηρίζουν την έλλειψη (αφού είναι ιδιότητες και άλλων καμπυλών), όπως η συμμετρία ή η ανακλαστική ιδιότητα. Επίσης εντάχθηκαν απαντήσεις που αναφέρουν ότι τα σημεία της έλλειψης επαληθεύουν την εξίσωσή της.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν διάφορες λάθος προτάσεις που γράφτηκαν από τους μαθητές, στην προσπάθεια τους να αναπαράγουν τον ορισμό. Μερικές απ' αυτές είναι οι παρακάτω.

  Η πρώτη απάντηση απέχει από τον ορισμό.

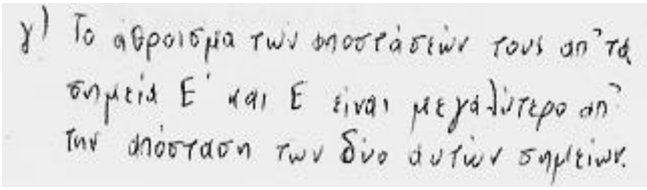

γ) Τα σημεία της έλλειψης έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις εστίες. Αυτό λέγεται εστιακή απόσταση.

  Η δεύτερη απάντηση πλησιάζει τον ορισμό της έλλειψης, αλλά αντί τις εστίες χρησιμοποιεί τις κορυφές της έλλειψης που αντιστοιχούν στο μεγάλο άξονα.

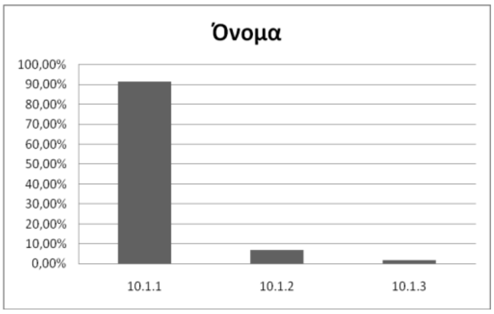

γ) Η ιδιότητα τους είναι ότι το άθροισμα των αποστάσεων της έλλειψης απ' τα Α,Β είναι πάντα ίδιο

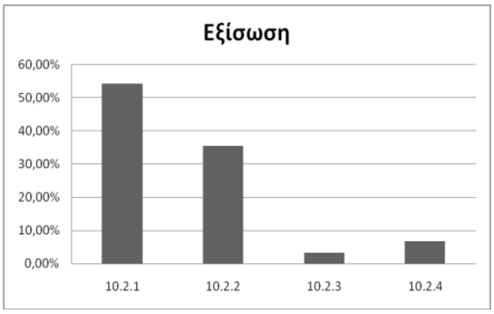


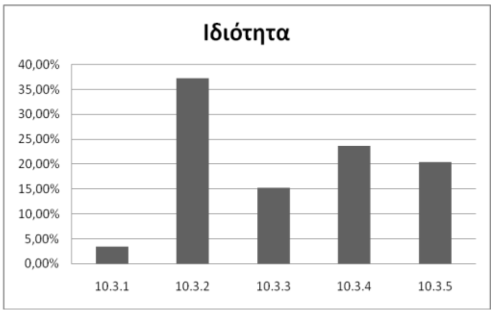
  Η τελευταία απάντηση που παρατίθεται είναι ακόμα πιο κοντά στον ορισμό της έλλειψης. Οι λέξεις που λείπουν «…είναι **σταθερό και** μεγαλύτερο…», δημιουργούν ως γεωμετρικό τόπο όλο το επίπεδο, εκτός των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ΕΕ΄.


γ) Το άθροισμα των αποστάσεών τους απ' τα σημεία Ε' και Ε είναι μεγαλύτερο απ' την απόσταση των δύο αυτών σημείων.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Εννιά στους δέκα περίπου (91,53%) βρίσκουν το όνομα της καμπύλης, από το σχήμα αυτή τη φορά. Δεν ισχύει το ίδιο για την εξίσωση και τον ορισμό. Για την εξίσωση το ποσοστό πέφτει στο 54,54%, δηλαδή ένας στους δύο περίπου προσδιορίζει την εξίσωση της συγκεκριμένης έλλειψης. Βέβαια ένας στους τρείς περίπου (35,59%) αναφέρει την γενική εξίσωση της έλλειψης, οπότε κάποιος θα μπορούσε να προσθέσει το δύο ποσοστά και να δεχτεί ότι και στην περίπτωση αυτή το ποσοστό είναι υψηλό (89,83%). Η τελευταία ενέργεια δεν πρέπει να θεωρηθεί σωστή γιατί οι μαθητές που αναφέρουν τη γενική εξίσωση απλά γράφουν τον τύπο χωρίς να προσδιορίζουν την εξίσωση της δεδομένης καμπύλης, δηλαδή παραμένουν στο εντατικό αντικείμενο χωρίς ενδεχόμενα να έχουν τη δυνατότητα προσδιορισμού του αντίστοιχου εκτατικού αντικειμένου που τους ζητείται. Στη διαδικασία μετάβασης από το σχήμα ή την εξίσωση στον ορισμό τα ποσοστά επιτυχίας πέφτουν ακόμα περισσότερο. Μόνο δύο μαθητές (3,39%) απαντούν εξειδικεύοντας τον ορισμό, οι οποίοι φυσικά έχουν απαντήσει σωστά σε σχέση με το όνομα και την εξίσωση της έλλειψης (παράρτημα Δ). Από το 37,29% που αναφέρουν το γενικό ορισμό, λιγότεροι από τους μισούς (10 στους 22 ή 45,45%) μαθητές αναφέρουν ότι το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες είναι 2α και απ' αυτούς οι μισοί (5 στους 10) έχουν προσδιορίσει το α από το προηγούμενο ερώτημα, αλλά δε χρησιμοποιούν αυτή την αριθμητική τιμή. Επίσης ένας στους τέσσερις περίπου (23,73%) μαθητές προσπαθεί ανεπιτυχώς να αναπαραγάγει τον ορισμό. Τέλος, καθώς προχωρούμε από το πρώτο προς το τρίτο ερώτημα, παρατηρείται ένα αυξανόμενο ποσοστό μαθητών (από 1,69% σε 20,34%) που δεν απαντούν, γεγονός που μάλλον οφείλεται σε αδυναμία και όχι σε αδιαφορία των μαθητών.

11η ερώτηση

Στην ενδέκατη ερώτηση, ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν τις λύσεις των εξισώσεων: $a) 2x+5=0$, $\beta) 2x-y+5=0$, $\gamma) x^2-y=0$. Η ερώτηση αυτή είχε ως στόχο να διαπιστωθεί αν στην πράξη μπορούν οι μαθητές να περιγράψουν, με κάποιο τρόπο, τις λύσεις μιας εξίσωσης και συσχετίζεται με την τρίτη ερώτηση, που ζητήθηκε να πουν τι είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης. Βέβαια, ήταν γνωστό ότι δεν έχουν διδαχθεί ουσιαστικά την περιγραφή του συνόλου των λύσεων με αλγεβρικό τρόπο, π.χ. για την ευθεία $2x-y+5=0$ το σύνολο των λύσεων μπορεί να περιγραφεί ως το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών αριθμών $(x,y)=(x,2x+5)$ με $x\in\mathbb{R}$ (συνάρτηση), οπότε το σύνολο των απαντήσεων περιορίζεται.

Για την πρώτη εξίσωση, οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας* $x=-\frac{5}{2}$ (11.1.1).
- $x=-\frac{5}{2}$ (11.1.2).
- *Η λύση είναι μοναδική* (11.1.3).
- *Η λύση είναι σημείο* (11.1.4).
- *Περιγραφή επίλυσης* (11.1.5).
- *Λάθος λύση* (11.1.6).
- *Δεν απάντησαν* (11.1.7).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις οκτώ μαθητών που περιγράφουν τις λύσεις της εξίσωσης ως σημεία της ευθείας $x = -\frac{5}{2}$.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που απλά λύνουν σωστά την εξίσωση.
- Στην τρίτη κατηγορία οι απαντήσεις αναφέρουν απλά τη μοναδικότητα της λύσης.
- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, που απλά αναφέρουν ότι η λύση είναι σημείο, χωρίς να διευκρινίζουν αν αναφέρονται σε σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών ή όχι.
- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις τριών μαθητών, που παρερμηνεύοντας την ερώτηση, περιγράφουν τη διαδικασία επίλυσης της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.
- Τέλος στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν οι λάθος απαντήσεις $x = \frac{5}{2}$.

Για τη δεύτερη εξίσωση, οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας ή η ευθεία* (11.2.1).
- *Οι λύσεις είναι άπειρες* (11.2.2).
- *Μια λύση της εξίσωσης* (11.2.3).
- *Επίλυση η περιγραφή επίλυσης* (11.2.4).
- *Διάφορες σωστές προτάσεις* (11.2.5).
- *Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις* (11.2.6).
- *Δεν απάντησαν* (11.2.7).

Πιο αναλυτικά σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες:

- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, που αναφέρουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα σημεία της ευθείας ή η ευθεία $2x - y + 5 = 0$, χωρίς να υπάρχει απάντηση που να αναφέρει τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας.
- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, που απλά δηλώνουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι άπειρες.
- Στην τρίτη κατηγορία οι απαντήσεις αναφέρουν ότι η εξίσωση έχει μία λύση, ένα ζεύγος λύσεων ή εμφανίζουν μία λύση. Για παράδειγμα τη λύση:

$x = -3 \quad y = 1$

- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν δύο είδη απαντήσεων. Στο πρώτο είδος οι μαθητές επιλύουν την εξίσωση ως προς x ή ως προς y. Οι περισσότεροι λύνουν ως προς x, μιμούμενοι τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις. Στο δεύτερο είδος απλά περιγράφουν τη διαδικασία επίλυσης.
- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι σωστές προτάσεις που διατυπώθηκαν από τους μαθητές, που όμως δεν απαντούν στο ερώτημα, όπως φαίνεται στις παρακάτω απαντήσεις.

Το x εξαρταται απο το y ή οι λύσεις επαληθεύουν την εξίσωση.

- Στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν οι διάφορες λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις, όπως αδυναμία εύρεσης λύσεων ή ανάγκη για δεύτερη εξίσωση με σκοπό τη δημιουργία συστήματος. Ας δούμε μερικές από τις απαντήσεις. Στην πρώτη απάντηση που παρατίθεται, ο μαθητής δηλώνει απλά την αδυναμία λύσης.

β) δεν μπορούμε να λύσουμε εξίσωση με 2 αγνώστους

Στη δεύτερη απάντηση ο μαθητής δηλώνει την ανάγκη ύπαρξης και δεύτερης εξίσωσης για να λύσει σύστημα. Συγκεκριμένα λέει: «για το 2ο ερώτημα έχουμε δύο αγνώστους άρα χρειαζόμαστε άλλη μία εξίσωση για να προσδιορίσουμε τις διάφορες τιμές που μπορούν να πάρουν τα x και y».

Στη τρίτη απάντηση που παρατίθεται, ο μαθητής λύνει σύστημα με την πρώτη εξίσωση.

β) Απ'το προηγούμενο ερώτημα $x = -\frac{5}{2}$

$2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - y + 5 = 0 \Rightarrow -5 - y + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Στην τέταρτη απάντηση ο μαθητής λύνει σύστημα της εξίσωσης με τον εαυτό της, αντικαθιστώντας λάθος το y με $-2x-5$. Αν το αντικαθιστούσε σωστά, τότε θα κατέληγε σε ταυτότητα. Βέβαια κάνει ένα ακόμα αλγεβρικό λάθος στο πρόσημο, πριν ολοκληρώσει τη λύση του.

$-y = \boxed{-2x-5} \rightarrow 2x-(-2x-5)+5=0$

$2x+2x+5+5=0$

$4x=10 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{10}{4}}$

μπορεί όμως να λυθεί;
ως προς το φ

Για την τρίτη εξίσωση, οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία της παραβολής ή η παραβολή* (11.3.1).
- *Οι λύσεις είναι άπειρες* (11.3.2).
- *Μια λύση της εξίσωσης* (11.2.3).
- *Επίλυση η περιγραφή επίλυσης* (11.2.4).
- *Διάφορες σωστές προτάσεις* (11.2.5).
- *Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις* (11.2.6).
- *Δεν απάντησαν* (11.2.7).

Αναλυτικότερα:

- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, που περιγράφουν τις λύσεις ως σημεία της παραβολής ή ως παραβολή, χωρίς κάποιος μαθητής να αναφέρεται σε συντεταγμένες σημείων.
- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, που απλά αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι άπειρες.
- Στην τρίτη κατηγορία οι (δύο) απαντήσεις αναφέρουν μία λύση της εξίσωσης.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που περιγράφεται η επίλυση της εξίσωσης ως προς ένα άγνωστο ή επιλύεται η εξίσωση ως προς ένα άγνωστο (σωστά ή λάθος). Μερικά παραδείγματα φαίνονται παρακάτω.

$x = \pm\sqrt{\varphi}$

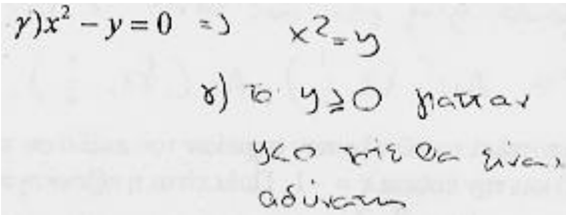
ή

$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$ με $y \geq 0$

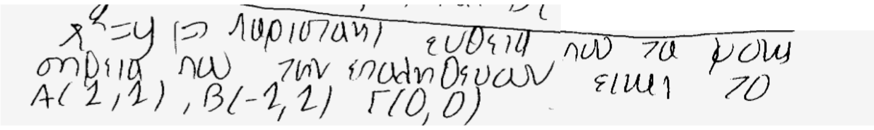
ή

$x^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm y$

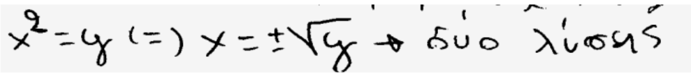
➢ Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν οι δύο απαντήσεις που αναφέρουν την ίδια σωστή πρόταση, χωρίς όμως μέσα απ’ αυτή να προσδιορίζεται ακριβώς το σύνολο των λύσεων.



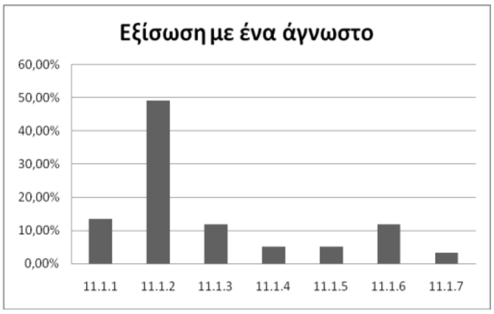
➢ Στην έκτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι διάφορες λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις όπως, ότι η εξίσωση περιγράφει ένα κύκλο ή μια ευθεία, ή ότι έχει δύο λύσεις αντίθετες. Τρία παραδείγματα τέτοιων προτάσεων φαίνονται παρακάτω. Στο πρώτο παράδειγμα η μαθήτρια δηλώνει ότι η εξίσωση «περιγράφει έναν κύκλο». Στο δεύτερο παράδειγμα ο μαθητής γράφει:

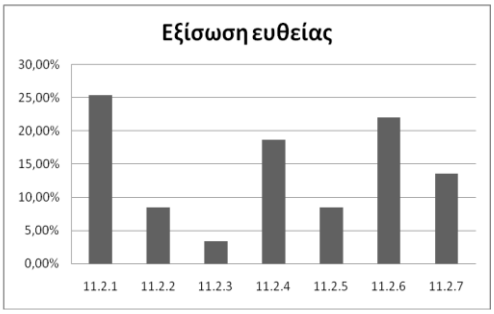


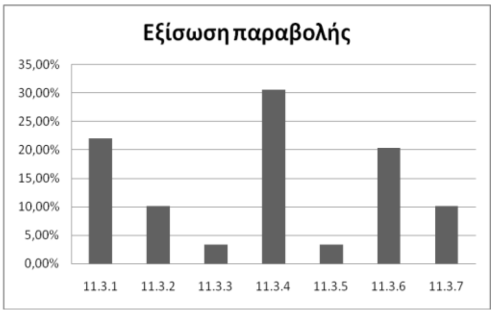
Στο τρίτο παράδειγμα φαίνεται η σύγχυση που προκύπτει, σε σχέση με τις λύσεις, από την επίλυση της εξίσωσης ως προς x.



Τα αποτελέσματα για την ενδέκατη ερώτηση, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Όσον αφορά την πρώτη εξίσωση, το 13,56% των μαθητών βλέπει τη λύση σε δύο διαστάσεις, θεωρώντας ότι είναι σημεία της ευθείας $x = -\frac{5}{2}$. Περίπου οι μισοί (49,15%) λύνουν την εξίσωση σωστά, δίνοντας την απάντηση $x = -\frac{5}{2}$. Αθροίζοντας τα δύο παραπάνω ποσοστά, το 62,71% των μαθητών λύνουν σωστά την εξίσωση. Τέλος το 11,86% των μαθητών σημειώνει απλά ότι η λύση είναι μοναδική και ο ίδιος αριθμός μαθητών λύνει λάθος την εξίσωση. Όσον αφορά τη δεύτερη εξίσωση, μόνο ένας στους τέσσερις μαθητές περίπου (25,42%) περιγράφει τις λύσεις ως σημεία της ευθείας, ενώ πέντε μαθητές (8,47%) απλά δηλώνουν ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Ενώ για την πρώτη εξίσωση τρείς μαθητές περιγράφουν την επίλυσή της, στη δεύτερη εξίσωση ο αριθμός των μαθητών, που περιγράφουν την επίλυση ή επιλύουν την εξίσωση ως προς ένα άγνωστο, αυξάνεται πολύ (11 μαθητές ή 18,64%). Μεγάλος επίσης είναι ο αριθμός (13 μαθητές ή 22,03%) των μαθητών, που εκφράζουν αδυναμία εύρεσης λύσεων ή αναζητούν άλλη μια εξίσωση για να λύσουν σύστημα. Για την τρίτη εξίσωση πέφτει ελαφρά το ποσοστό (22,03%) των μαθητών, που θεωρούν ότι τα σημεία της παραβολής περιγράφουν τις λύσεις της εξίσωσης, ενώ αυξάνεται ελαφρά το ποσοστό (10,17%) αυτών, που δηλώνουν απλά ότι έχει άπειρες λύσεις. Αυξάνεται περαιτέρω το ποσοστό (30,51%) αυτών που επιλύουν την εξίσωση ως προς ένα άγνωστο, με το 38,88% απ' αυτούς να επιλύουν την εξίσωση λάθος, μάλλον δείχνοντας την αδυναμία των μαθητών να προβούν σε οποιαδήποτε άλλη ενέργεια. Τέλος, παραμένει περίπου ίδιο το ποσοστό (20,34%) των μαθητών που προσεγγίζουν λάθος το θέμα, με τους μισούς απ' αυτούς να βλέπουν δύο λύσεις της εξίσωσης ($x = \sqrt{y}$ ή $x = -\sqrt{y}$).

12η ερώτηση

Η ερώτηση αυτή ζητούσε να απαντήσουν οι μαθητές αιτιολογημένα στην παρακάτω ερώτηση: «Πόσες λύσεις **μπορεί** να έχει το σύστημα(χωρίς να το λύσετε);

$$\left\{\begin{matrix} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 2x + 5y - 6 = 0 \end{matrix}\right\}».$$

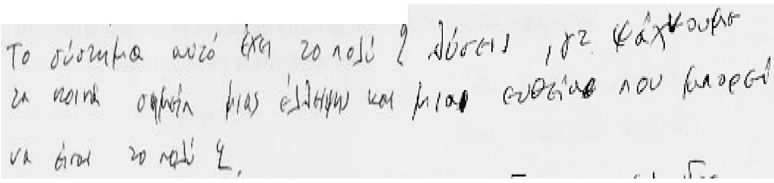
Ο στόχος της ερώτησης ήταν να διαπιστωθεί, αν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τα γεωμετρικά σχήματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω εξισώσεις, προσεγγίζοντας δομικά το σύστημα, και με βάση αυτά, σε συνδυασμό με την τέταρτη ερώτηση, να απαντήσουν.

Οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε επτά κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές είναι:

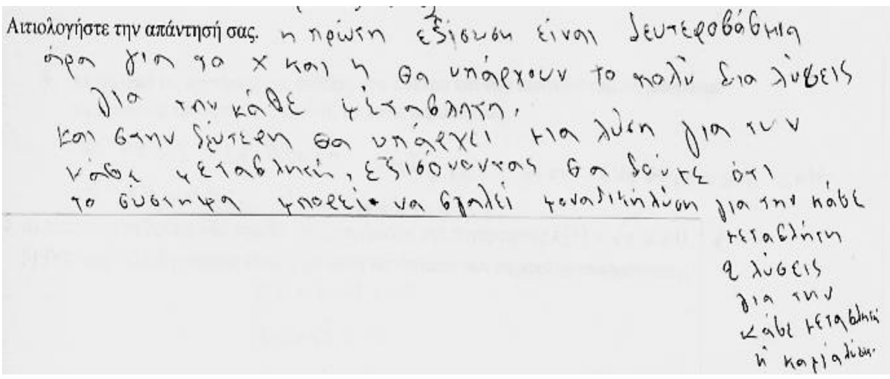
- *Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση γεωμετρική* (12.1).
- *Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση αλγεβρική* (12.2).
- *Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση* (12.3).
- *Λάθος απάντηση επιχειρώντας γεωμετρική αιτιολόγηση* (12.4).
- *Λάθος απάντηση επιχειρώντας αλγεβρική αιτιολόγηση* (12.5).
- *Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση* (12.6).
- *Δεν απάντησαν* (12.7).

Πιο αναλυτικά:

- Οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι το σύστημα έχει καμία, μία ή δύο λύσεις, ή ότι μπορεί να έχει μέχρι δύο λύσεις, γιατί ουσιαστικά οι λύσεις του συστήματος αντιστοιχούν στα σημεία τομής μιας έλλειψης και μιας ευθείας, εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία. Μια απ' αυτές τις απαντήσεις είναι η εξής:


Το σύστημα αυτό έχει το πολύ 2 λύσεις, γτ ψάχνουμε τα κοινά σημεία μιας έλλειψης και μιας ευθείας που μπορεί να είναι το πολύ 2.

- Οι απαντήσεις που αναφέρουν το ίδιο με την προηγούμενη κατηγορία πλήθος λύσεων, αλλά η αιτιολόγηση είναι αλγεβρική, εντάχθηκαν στη δεύτερη κατηγορία. Η μία απάντηση, ίσως όχι πολύ σαφής στη θεώρηση των λύσεων ως ζεύγη τιμών, είναι:


Αιτιολογήστε την απάντησή σας. η πρώτη εξίσωση είναι δευτεροβάθμια άρα για το x και y θα υπάρχουν το πολύ δυο λύσεις για την κάθε μεταβλητη.
και στην δεύτερη θα υπάρχει μια λύση για την κάθε μεταβλητή, εξισώνοντας θα δούμε ότι το σύστημα μπορεί να βγάλει μοναδική λύση για την κάθε μεταβλήτη 2 λύσεις για την κάθε μεταβλητή ή καμία λύση.

- Σωστή απάντηση, χωρίς αιτιολόγηση υπήρξε επίσης μία, η οποία και παρατίθεται.

Αφού δεν το έχω λύσει υποθέτω πως μπορεί να έχει [redacted] μία διπλή ρίζα, δύο λύσεις ή να μην έχει πραγματικές ρίζες.

- Στην τέταρτη κατηγορία τοποθετήθηκαν οι λάθος απαντήσεις που δόθηκαν, επιχειρηματολογώντας γεωμετρικά. Σ' αυτήν την κατηγορία δεν υπήρξαν απαντήσεις στο πρώτο ερωτηματολόγιο.
- Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν μια ποικιλία διαφορετικών λάθος απαντήσεων. Επιχειρώντας αλγεβρικά να αιτιολογήσουν οι μαθητές, ανεβάζουν τον αριθμό των λύσεων μέχρι το οκτώ, με δημοφιλέστερο τον αριθμό δύο φυσικά. Ο επόμενος σε συχνότητα εμφάνισης αριθμός είναι το τέσσερα, λαμβάνοντας τις λύσεις όχι σαν ζευγάρια αριθμών αλλά μετρώντας το x και το y χωριστά. Παρατίθενται μερικές απ' αυτές τις απαντήσεις. Στην πρώτη απάντηση η μαθήτρια δηλώνει ότι θα έχει μία λύση, αφού δεν είναι δευτεροβάθμιες και οι δύο εξισώσεις.

  μία διότι στη μία εξίσωση έχουμε τετράγωνο και στην άλλη όχι.

  Στη δεύτερη απάντηση η μαθήτρια δηλώνει ότι θα έχει δύο λύσεις, θεωρώντας ότι μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει πάντα δύο λύσεις.

  θα έχει 2 λύσεις διότι τα x και y στην μια εξίσωση είναι υψωμένα στο τετράγωνο

  Στην τρίτη απάντηση ο μαθητής λέει ότι έχει δύο λύσεις για το x και δύο για το y, χωρίς να είναι σαφές ότι συνδέει το x με το y.

  δυο λυσεις για το x και δύο για το ψ καθώς είναι υψωμένα στο τετράγωνο

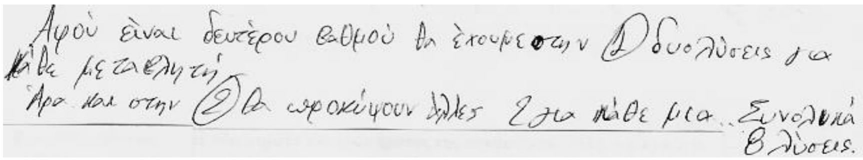
  Στην τέταρτη απάντηση η μαθήτρια δηλώνει ότι θα έχει τρείς λύσεις, αφού προσθέτει τον υποτιθέμενο αριθμό λύσεων των δύο εξισώσεων.

  π.χ. 3 λύσεις. Η πρώτη εξίσωση έχει 2 λύσεις κι η δεύτερη εξίσωση έχει μια λύση.

  Στην πέμπτη απάντηση ο μαθητής μετράει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών που παίρνει το x και το y.

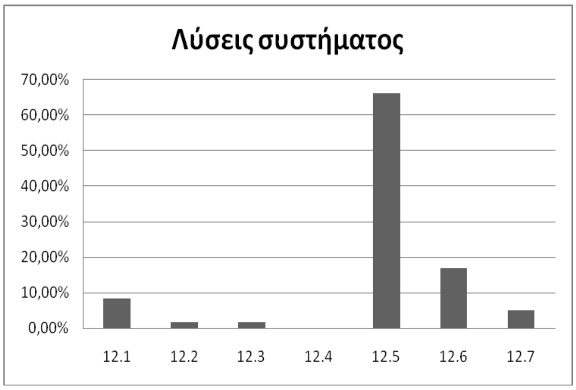
  4, γιατί αφού είναι 2ου βαθμού, παίρνει 2 τιμές το x και 2 το y, οι οποίες συνδυάζονται μεταξύ τους και δίνουν 4 ζεύγη λύσεων.

  Στην τελευταία απάντηση ο μαθητής θεωρεί ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο λύσεις για κάθε άγνωστο (φυσικά η συγκεκριμένη έχει άπειρο πλήθος λύσεων διατεταγμένων ζευγαριών αριθμών, που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των σημείων της έλλειψης). Για κάθε μία απ' αυτές (τις τέσσερις λύσεις), από την πρωτοβάθμια εξίσωση θα προκύψει μία ακόμα λύση για τον άλλο άγνωστο. Αθροίζοντάς τις όλες (χωρίς να συνδέει καθόλου το x με το y) προκύπτει ο αριθμός οκτώ.



- Τέλος στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν λάθος απαντήσεις όπως: «4 λύσεις», «τουλάχιστον 2 λύσεις» ή «δεν έχει λύσεις». Στις απαντήσεις αυτές δεν υπήρχε κανενός είδους αιτιολόγηση.

Τα αποτελέσματα για τη δωδέκατη ερώτηση, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Το 11,85% των μαθητών απαντάει σωστά και απ' αυτούς το 71,43% (5 στους 7 μαθητές) αιτιολογεί γεωμετρικά. Δηλαδή, όσον αφορά το στόχο που είχε τεθεί, είναι φανερό ότι μόλις το 8,47% (5 στους 59) των μαθητών αναγνώρισαν τα γεωμετρικά σχήματα που παρίσταναν οι εξισώσεις, προσεγγίζοντας δομικά και όχι λειτουργικά το σύστημα. Όλοι που αναγνώρισαν τα γεωμετρικά σχήματα απάντησαν σωστά. Το 66,10% των μαθητών απαντάει λάθος σκεπτόμενοι αλγεβρικά. Από τους 39 μαθητές που απαντούν με αυτό τον τρόπο μόλις 11 (το 28,20%) λένε ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, ενώ αν αθροιστούν οι μαθητές που απαντούν καμία με αυτούς που απαντούν μία και αυτούς που απαντούν δύο λύσεις προκύπτουν 18 (46,15%) μαθητές. Δηλαδή λιγότεροι από τους μισούς μαθητές προσδιορίζουν το πλήθος των λύσεων με αριθμό μικρότερο ή ίσο του δύο. Επίσης 8 στους 39 μαθητές, δηλαδή το 20,52% απαντούν τέσσερις λύσεις και αθροίζοντας αυτούς που αναφέρουν περισσότερες από δύο λύσεις, φτάνουμε στον αριθμό 16 (41,03%). Τέλος 5 στους 39, δηλαδή το 12,82%, απαντούν ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις για το x και δύο για το y, χωρίς να συνδέουν απαραίτητα το x με το y, με αποτέλεσμα να μην είναι σαφές αν εννοούν δύο ή τέσσερις λύσεις.

13η ερώτηση

Η δέκατη τρίτη και τελευταία ερώτηση αφορούσε τις συναρτήσεις που τα γραφήματά τους είναι ευθείες, καμπύλες ή τμήματα καμπυλών (γνωστών στους μαθητές) και είχε δύο σκέλη. Στο πρώτο σκέλος, ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν δύο σημεία του γραφήματος της συνάρτησης $k(x)=\sqrt{x}, x \geq 0$. Στο δεύτερο σκέλος, ζητήθηκε να πουν τι είδους επίπεδη γραμμή είναι, η γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} &f(x)=3x-7, x \in \mathbb{R} \\ &k(x)=\sqrt{x}, x \geq 0 \\ &g(x)=\sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}.$$

Ο σκοπός της ερώτησης αυτής ήταν να διαπιστωθεί σε τι ποσοστό οι μαθητές, χειριζόμενοι τον τύπο της συνάρτησης, μπορούν να προσδιορίσουν σημεία του γραφήματος της. Επίσης σε τι βαθμό αναγνωρίζουν την ευθεία ή τις καμπύλες, που έχουν ως γραφική παράσταση οι συναρτήσεις αυτές. Η χρήση του εντατικού αντικειμένου $y=f(x)$ και η λειτουργική αντιμετώπιση της εξίσωσης που προκύπτει (ύψωση στο τετράγωνο) για τη δεύτερη και τρίτη συνάρτηση, οδηγούν στις εξισώσεις που παραπέμπουν στην ευθεία, την παραβολή και τον κύκλο.

Όσον αφορά το πρώτο σκέλος της ερώτησης, δημιουργήθηκαν τρείς κατηγορίες απαντήσεων:

- *Βρίσκουν δύο σημεία που ανήκουν στο γράφημα* (13.1.1).
- *Βρίσκουν δύο σημεία που δεν ανήκουν στο γράφημα* (13.1.2).
- *Δεν απάντησαν* (13.1.3).

Στην παραπάνω κατηγοριοποίηση η δεύτερη κατηγορία απαντήσεων έχει ενδιαφέρον, αφού στις περισσότερες απαντήσεις που εντάχθηκαν σ' αυτή γίνεται ένα συγκεκριμένο λάθος. Οι μαθητές στην προσπάθεια να βρουν, για παράδειγμα, την τιμή $k(1)$ γράφουν:

« $k(1)=\sqrt{1}=\pm 1$ », οπότε βρίσκουν τα σημεία $A(1,1)$ και $B(1,-1)$. Μια τέτοια απάντηση είναι η παρακάτω.

α) $\kappa(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$ Για $x=9 \Rightarrow \kappa(9)=\sqrt{9}=\pm 3$

$A(3,3)$ κ' $A'(-3,-3)$

Βέβαια υπήρξαν και απαντήσεις, που απλά έδιναν σημεία που δεν ανήκουν στο γράφημα της συνάρτησης.

Στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης και για τη συνάρτηση f, δημιουργήθηκαν οι παρακάτω κατηγορίες απαντήσεων:

- *Ευθεία* (13.2.1).
- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (13.2.2).
- *Δεν απάντησαν* (13.2.3).

Αναλυτικότερα:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν απλά ότι η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία και μία απάντηση ενός μαθητή ο οποίος, όπως φαίνεται παρακάτω, κάνει χρήση του τύπου $y=f(x)$ και καταλήγει στην εξίσωση της ευθείας.

  $y=3x-7$ ευθεία

- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή, κύκλος ή όπως λέει ο μαθητής, επιμένοντας να λύνει εξισώσεις, ότι είναι το σημείο $x=\dfrac{7}{3}$.

Για τη συνάρτηση k, οι κατηγορίες που δημιουργήθηκαν είναι οι εξής:

- *Τμήμα παραβολής* (13.3.1).
- *Παραβολή* (13.3.2).
- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (13.3.3).
- *Δεν απάντησαν* (13.3.4).

Πιο αναλυτικά:

➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν το τμήμα της παραβολής προσδιορίζοντας το y, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση:

τμήμα παραβολής με $y \geq 0$, $x \geq 0$

Ή το προσδιορίζουν με βάση τα τεταρτημόρια:

ημισυνάρτηση παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο

Βέβαια ο όρος «ημισυνάρτηση» δεν είναι δόκιμος.

➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν απλά τη λέξη παραβολή και την απάντηση του ίδιου (με παραπάνω) μαθητή, όπου με χρήση της εξίσωσης $y = k(x)$ καταλήγει στην εξίσωση της παραβολής, όπως φαίνεται παρακάτω.

$\psi = \sqrt{x} \Leftrightarrow \underset{x \geq 0}{\psi^2 = x}$ παραβολ

➢ Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις όπως έλλειψη, κύκλος, ευθεία ή υπερβολή.

Για τη συνάρτηση g, κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις ως εξής:

- *Ημικύκλιο* (13.4.1).
- *Κύκλος* (13.4.2).
- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (13.4.3).
- *Δεν απάντησαν* (13.4.4).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες:

➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:

τμήμα κύκλου με $y \geq 0$ και $x \in [-2,2]$

Ή απλά αναφέρουν ότι είναι ημικύκλιο.

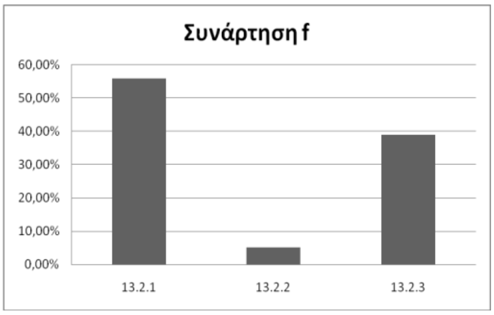
➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών, που απλά αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση είναι κύκλος και την απάντηση του (ίδιου με παραπάνω) μαθητή, όπου με χρήση του τύπου $y = g(x)$, καταλήγει στην εξίσωση του κύκλου, όπως φαίνεται παρακάτω.

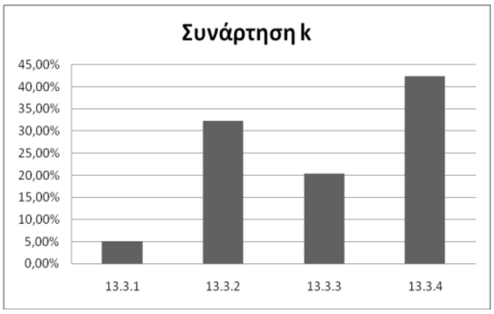
$\psi = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \psi^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow \psi^2 + x^2 = 4$

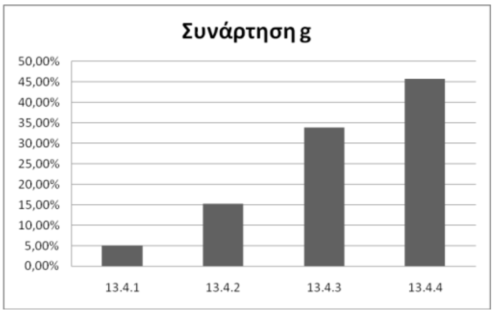
κύκλος

- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις όπως ευθεία, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι το μεγάλο ποσοστό μαθητών που δεν απάντησαν (38,98% έως 45,76%). Ένας λόγος για την παραπάνω στάση, μπορεί να είναι ότι αυτή είναι η τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου. Ένας άλλος λόγος, μπορεί να είναι ότι οι μαθητές δεν ακούνε συχνά τη λέξη συνάρτηση, όταν διδάσκονται τα κεφάλαια αυτά στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών. Όσον αφορά την εύρεση των σημείων, απαντάει το 55,93% των μαθητών. Απ’ αυτούς, ένας στους τρείς περίπου (36,36%), βρίσκει σημεία που δεν ανήκουν στο γράφημα της συνάρτησης, κάνοντας λάθος στον υπολογισμό των συντεταγμένων. Για τη συνάρτηση f απαντάει το 61,01% των μαθητών και απ’ αυτούς η συντριπτική πλειοψηφία (33 στους 36 μαθητές ή 91,66%) γράφει ότι η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία. Για τη συνάρτηση k, απαντάει το 57,62% των μαθητών. Απ’ αυτούς, μόνο το 8,82% αναφέρει ότι το γράφημα της συνάρτησης είναι τμήμα παραβολής, ενώ το 55,88% αναφέρει τη λέξη παραβολή, χωρίς να προσδιορίζει αν αναφέρεται σε όλο το σχήμα ή σε μέρος του. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ένας στους τρείς περίπου (35,29%) απ’ αυτούς που απάντησαν γράφει το όνομα μιας άλλης γραμμής. Για τη συνάρτηση g, απάντησαν το 54,24% των μαθητών. Απ’ αυτούς, μόνο τρείς μαθητές (9,38%) δίνουν απάντηση το ημικύκλιο, ενώ το 28,13% (9 μαθητές) απαντούν ότι είναι κύκλος. Η πλειοψηφία (20 μαθητές ή 62,50%) των μαθητών που απάντησαν αναφέρουν κάποιο άλλο όνομα για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Είναι τέλος χαρακτηριστικό ότι μόνο ένας στους πενήντα εννέα μαθητές κάνει χρήση του εντατικού αντικειμένου $y = f(x)$ και οδηγείται στις εξισώσεις της ευθείας, της παραβολής και του κύκλου. Αυτός ίσως είναι και ο λόγος των σχετικά χαμηλών ποσοστών σωστών απαντήσεων που υπήρξαν ειδικά στις συναρτήσεις k και g, αφού η ευθεία ως γραφική παράσταση συνάρτησης έχει διδαχθεί στους μαθητές σε προηγούμενες τάξεις.

4.5.2.2. Συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων

Η ενασχόληση με την ευθεία, τον κύκλο και τις κωνικές τομές δεν είναι εύκολη δραστηριότητα για την πλειοψηφία των μαθητών. Από τις δυσκολίες που αναφέρουν οι μαθητές, οι δυσκολίες στις ασκήσεις εμφανίζουν τη μεγαλύτερη συχνότητα (25,42%). Σημαντικό είναι βέβαια το ποσοστό (44,07%) των μαθητών που δεν εστιάζουν σε κάποια δυσκολία.

Ένας στους πενήντα εννέα μαθητές αναφέρει την ύπαρξη του συνόλου των λύσεων μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους ως ένα διαφορετικό από τα σημεία σύνολο, ενώ ένας στους πέντε βλέπει τις λύσεις ως σημεία ή συντεταγμένες σημείων συσχετίζοντας το x με το y. Όταν τους ζητείται δε να περιγράψουν τις λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους τα αποτελέσματα δε διαφοροποιούνται πολύ. Για την περίπτωση της ευθείας, περίπου ένας στους τέσσερις μαθητές (25,42%) περιγράφουν τις λύσεις ως σημεία της ευθείας ή ως ευθεία, ενώ για την περίπτωση της παραβολής, περίπου ένας στους πέντε μαθητές (22,03%) περιγράφουν τις λύσεις ως σημεία της παραβολής ή ως παραβολή. Βέβαια τα ποσοστά αναγνώρισης της ευθείας και της παραβολής μέσα από τις εξισώσεις τους είναι πολύ υψηλότερα (98,31% για την ευθεία και 67,80% για την παραβολή), όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα της 6ης ερώτησης. Κατά συνέπεια, βρισκόμαστε μπροστά σε μια αδυναμία ενός μεγάλου αριθμού μαθητών να περιγράψουν τις λύσεις μιας εξίσωσης, που όμως οι ίδιοι, για παράδειγμα, αναφέρουν ότι πρόκειται για εξίσωση ευθείας. Τέλος, υπάρχει ένα ποσοστό των μαθητών (13,56%), που βλέπει τις λύσεις της εξίσωσης $2x+5=0$ ως σημεία της ευθείας $x=-\frac{5}{2}$, τοποθετώντας την εξίσωση αυτή στο πλαίσιο της επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας και όχι στο πλαίσιο της Άλγεβρας.

Το 20,03% των μαθητών κάνει μια πλήρη περιγραφή της παραβολής, μέσα από τον ορισμό ή τις άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας. Στην προσπάθεια να περιγράψουν την παραβολή, οι περισσότεροι (67,80%) επιχειρούν με βάση το φορμαλιστικό ορισμό. Όμως, οι περισσότεροι (8 στους 10 μαθητές) απ’ αυτούς αποτυγχάνουν την πλήρη περιγραφή της έννοιας. Βέβαια οι μισοί απ’ αυτούς που επιχειρούν να περιγράψουν την παραβολή με τον ορισμό, είναι πολύ κοντά στην πλήρη περιγραφή της έννοιας, αφού το μόνο που λείπει είναι το τμήμα του ορισμού που αναφέρει ότι η εστία δεν πρέπει να ανήκει στη διευθετούσα. Συνεπώς, η πολυπλοκότητα του ορισμού αποτελεί εμπόδιο στην πλήρη περιγραφή της έννοιας. Ομοίως, και απ’ αυτούς (20,33%) που επιχειρούν με βάση άλλες περιγραφές της παραβολής, οι περισσότεροι (7 στους 10 περίπου) πάλι αποτυγχάνουν στην περιγραφή της παραβολής.

Για τα κοινά σημεία ευθείας και έλλειψης, περίπου ένας στους τρείς απαντάει σωστά, συνήθως διακρίνοντας περιπτώσεις. Οι υπόλοιποι παραβλέποντας κάποιες περιπτώσεις δίνουν ελλιπείς απαντήσεις. Όσον αφορά το αντίστοιχο σύστημα, μόνο το 8,47% των μαθητών το προσεγγίζει δομικά, με αποτέλεσμα ένα αρκετά χαμηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων (11,85%), στο ερώτημα για τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός που δηλώνει το πλήθος των λύσεων του συστήματος $\left\{\begin{matrix} 4x^2+9y^2=36 \\ 2x+5y-6=0 \end{matrix}\right\}$.

Η αστοχία στην κατανόηση της ερώτησης, που αφορούσε τον ορισμό συναρτήσεων μέσα από τις εξισώσεις της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών, δε μας επιτρέπει να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα. Παρά το γεγονός αυτό, μόνο δύο στους είκοσι τρείς μαθητές που δείχνουν να κατανοούν την ερώτηση, απαντούν σωστά δίνοντας κάποια αιτιολόγηση. Επίσης οι έντεκα στους είκοσι τρείς μαθητές που απλά απαντούν ότι μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις, δε δίνουν περαιτέρω επεξηγήσεις. Αντίστροφα, πάνω από τους μισούς (55,93%) μαθητές αναγνωρίζουν την ευθεία ως γραφική παράσταση συνάρτησης. Όσο δε αφορά το τμήμα της παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο ($k(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$), μόνο τρία άτομα το αναγνωρίζουν, ενώ το 32,20% των μαθητών αναφέρει ότι είναι παραβολή. Για το ημικύκλιο ως γραφική παράσταση συνάρτησης πάλι μόνο τρείς μαθητές το αναγνωρίζουν, ενώ το 28,13% των μαθητών αναφέρει ότι είναι κύκλος.

Λιγότεροι από τους μισούς (44,07%) καταφέρνουν, χρησιμοποιώντας στην πράξη τις συμμετρίες της έλλειψης, να βρουν τα τρία σημεία που τους ζητήθηκαν έχοντας ως δεδομένο το σημείο $A(\sqrt{3},\frac{1}{2})$. Οι 8 μαθητές (13,56%) που επικαλούμενοι τις συμμετρίες της έλλειψης, απαντούν σωστά ίσως να βρίσκονται στο στάδιο της συμπύκνωσης της έννοιας. Απ' αυτούς που δεν καταφέρνουν να προσδιορίσουν τα σημεία, οι περισσότεροι επιχειρούν με αλγεβρικούς χειρισμούς να τα προσδιορίσουν και φυσικά αποτυγχάνουν.

Η εύρεση τριών σημείων της παραβολής $y^2 = 4x$ επιτεύχθηκε από το 66,10% των μαθητών, αν και οι μισοί περίπου βρίσκουν σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες (όπως θα δούμε δεύτερο ερωτηματολόγιο αυτό το γεγονός οδηγεί σε συγχύσεις όσον αφορά τη θέση του σχήματος της καμπύλης). Για την εύρεση δύο σημείων της συνάρτησης, το ποσοστό των μαθητών (35,59%) είναι αισθητά χαμηλότερο για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι το μεγάλο ποσοστό (44,07%) αυτών που δεν απάντησαν και ο δεύτερος, ένα λάθος (π.χ. $\sqrt{1} = \pm 1$) που έκαναν αρκετοί (πέντε ή 8,47%) μαθητές. Και στα δύο παραπάνω ερωτήματα παρατηρούνται προβλήματα που προέρχονται από χειρισμούς στο πλαίσιο της Άλγεβρας.

Τα ποσοστά όσον αφορά την ταυτοποίηση του ονόματος της καμπύλης από την εξίσωση, τον ορισμό ή το σχήμα είναι αρκετά υψηλά και κυμάνθηκαν από 67,80% για την παραβολή (και τις δύο φορές που ζητήθηκε) έως 98,31% για την ευθεία. Για την επιτυχή μετάβαση από τη μία αναπαράσταση της έννοιας στην άλλη, τα ποσοστά επιτυχίας είναι σαφώς μικρότερα. Όσον αφορά το ποσοστό για την επιτυχή μετάβαση από τον ορισμό στην εξίσωση, για την παραβολή, είναι 37,29%. Αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό (54,24%) μαθητών, πετυχαίνει τη μετάβαση από το σχήμα στην εξίσωση της έλλειψης. Τέλος ένα πολύ μικρό ποσοστό (3,39%), μεταβαίνει επιτυχώς από την εξίσωση ή το σχήμα της έλλειψης στον ορισμό της, ενώ ένα μεγαλύτερο ποσοστό (37,29%) αναφέρει το γενικό ορισμό της έλλειψης, χωρίς να θεωρεί σκόπιμο να προσδιορίσει τη σταθερή ποσότητα ($2a = 10$).

4.6. Κατασκευή ενός γενικού πλάνου

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρείται ότι, οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται με περιορισμένο τρόπο το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους. Επίσης, παρατηρείται αδυναμία στην επιτυχή μετάβαση από μια αναπαράσταση της έννοιας σε μια άλλη και ειδικά όταν η αναπαράσταση που θέλουμε να παραχθεί είναι ο ορισμός της έννοιας. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν, κατά πλειοψηφία, λειτουργικά τις εξισώσεις, γεγονός που δεν τους επιτρέπει να ερμηνεύουν γεωμετρικά τις ιδιότητές τους. Τέλος, αν και δεν έγινε απόλυτα σαφές, λόγο αστοχίας της συγκεκριμένης ερώτησης, ο ρόλος των συναρτήσεων στη μελέτη των εννοιών αυτών είναι αρκετά περιορισμένος.

Με στόχο τη θεραπεία των αδυναμιών που εμφανίστηκαν, θεωρήθηκε ότι πρέπει να τεθούν οι παρακάτω διδακτικοί στόχοι:

- Να έρθουν σε επαφή οι μαθητές, ίσως για πρώτη φορά οι περισσότεροι απ' αυτούς, με το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους, ως ξεχωριστό από τα σημεία σύνολο και φυσικά να συνδεθεί το σύνολο αυτό με τα σημεία του σχήματος.

- Κατανόηση από μέρους των μαθητών ότι κάθε έννοια, απ' αυτές που διαπραγματευόμαστε, αναπαρίσταται με διάφορους τρόπους, που ισοδύναμα μπορούν να περιγράψουν ή να προσδιορίσουν την έννοια. Ενίσχυση της ικανότητας μετάβασης από την μια αναπαράσταση σε μια άλλη για τις έννοιες αυτές.

- Διευκρίνηση του ρόλου των συναρτήσεων στη μελέτη των εννοιών που σχετίζονται με την έρευνά μας.

- Ενίσχυση της δομικής αντίληψης των εξισώσεων. Με τη φράση «δομική αντίληψη των εξισώσεων» εννοούμε ότι, η εμφάνιση της εξίσωσης προκαλεί την άμεση ενεργοποίηση του αντίστοιχου σχήματος.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, σχεδιάστηκε μια διδακτική παρέμβαση 45 λεπτών. Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε να έχει τρία μέρη, τα οποία στην επόμενη ενότητα ονομάζονται βήματα δράσης και αναλύονται διεξοδικά. Είχε εξασφαλιστεί η συναίνεση των καθηγητών των τάξεων, οι οποίοι ήταν πρόθυμοι να βοηθήσουν και ήταν παρόντες καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Οι μαθητές επίσης ήταν πρόθυμοι να συμμετέχουν. Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει από τη σε μεγάλο ποσοστό συμμετοχή των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, αλλά και από τα αποτελέσματα του δεύτερου ερωτηματολογίου όπου κατά πλειοψηφία χαρακτήρισαν τη διδακτική παρέμβαση ως ευχάριστη και δημιουργική. Τέλος υπήρχε η άδεια χρήσης, από τον κατασκευαστή, του προγράμματος Δυναμικής Γεωμετρίας EucliDraw.

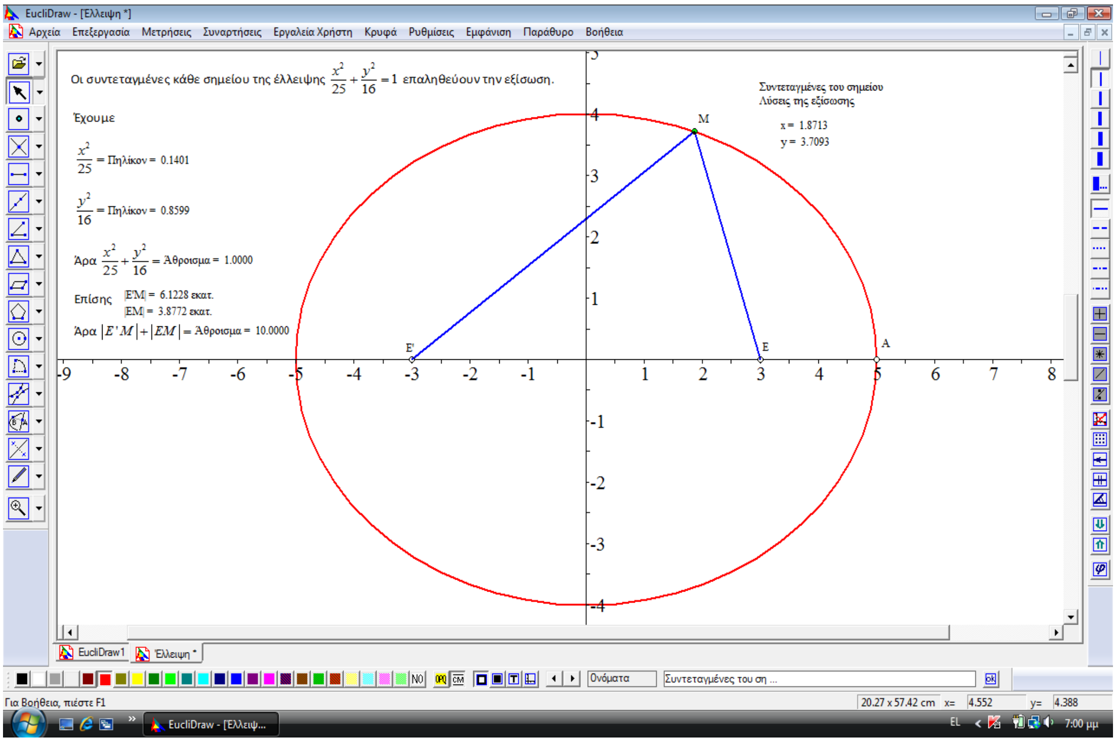
4.7. Ανάπτυξη (με ακρίβεια) των βημάτων δράσης

1ο βήμα

Το πρώτο βήμα ήταν η παρουσίαση, μέσω του ηλεκτρονικού προγράμματος Δυναμικής Γεωμετρίας EucliDraw, μιας εφαρμογής που δείχνει τις συντεταγμένες του μεταβλητού σημείου μιας κωνικής τομής (έλλειψης) να επαληθεύουν την εξίσωση της και ταυτόχρονα να ικανοποιείται ο ορισμός της συγκεκριμένης κωνικής τομής. Στόχος της συγκεκριμένης ενέργειας ήταν, η εμφάνιση στην οθόνη του συνόλου των λύσεων μιας εξίσωσης και η σύνδεσή τους με τα σημεία του αντίστοιχου σχήματος.

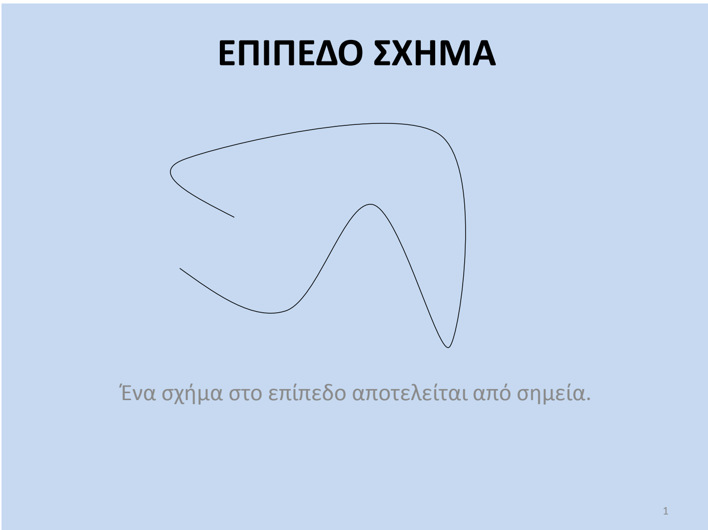
Το EucliDraw, με δημιουργό τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης Πάρη Πάμφιλο, είναι μια εξέλιξη του προγράμματος Isoptikon που δημιούργησε ο ίδιος και εκδόθηκε πρώτη φορά το 1999. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται από το EucliDraw, ονομάστηκε EUCLA και είναι μια παραλλαγή της γλώσσας προγραμματισμού C. Η λειτουργικότητα του προγράμματος, μεταξύ άλλων, καλύπτει: στοιχειώδη σχήματα όπως ευθείες, κύκλους, τρίγωνα, κ.τ.λ., αλλά και πιο σύνθετα, όπως κωνικές τομές, συναρτήσεις, παραμετρικές καμπύλες, γεωμετρικούς τόπους, περιβάλλουσες. Όλα τα σχήματα έχουν τη δυνατότητα δυναμικής αλλαγής, πράγμα που οδηγεί σε ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις και ανακάλυψη νέων ιδιοτήτων.

Για παράδειγμα στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η εφαρμογή που έγινε στην περίπτωση της έλλειψης και παρουσιάστηκε στους μαθητές. Η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και μεγάλο άξονα με μήκος 10. Στο δεξιό μέρος της οθόνης φαίνονται οι συντεταγμένες του μεταβλητού σημείου Μ της έλλειψης, άρα και οι λύσεις της εξίσωσης. Στο αριστερό μέρος της οθόνης φαίνονται η εξίσωση της συγκεκριμένης έλλειψης και η επαλήθευση της εξίσωσης από τις συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της. Επίσης φαίνεται ότι κάθε σημείο ικανοποιεί τον ορισμό, δηλαδή ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της έλλειψης από τις εστίες της είναι σταθερό και ίσο με 10, αριθμός που είναι μεγαλύτερος από την εστιακή απόσταση που είναι 6. Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατόν να φτιαχτούν εφαρμογές για όλες τις κωνικές τομές.



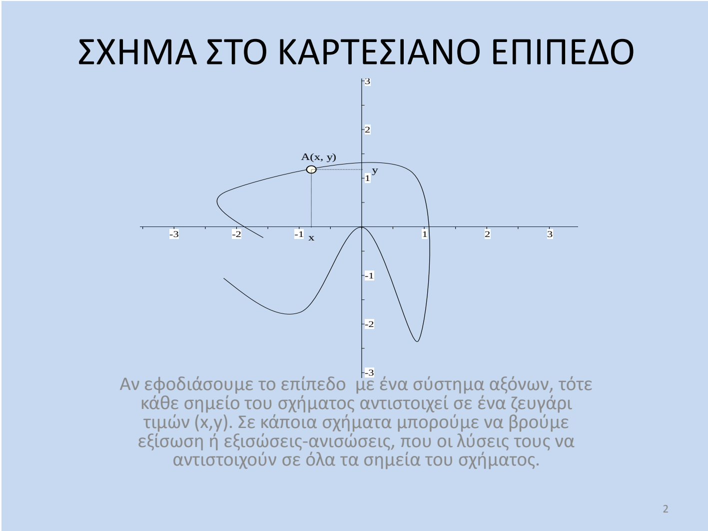
2^{o} βήμα

Το δεύτερο βήμα ήταν η παρουσίαση πέντε διαφανειών. Στην πρώτη διαφάνεια παρουσιάζεται ένα τυχαίο επίπεδο σχήμα. Αν το επίπεδο δεν είναι εφοδιασμένο με ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε κάποιος απλά έχει τη δυνατότητα να αναφέρεται σε σημεία του σχήματος.



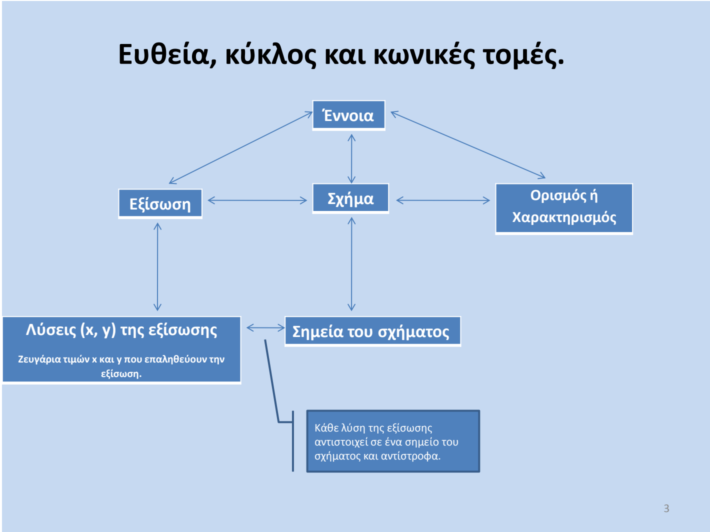
1^{η} διαφάνεια

Αν όμως, εφοδιαστεί το επίπεδο με ένα σύστημα αξόνων, τότε κάθε σημείο του σχήματος αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι τιμών (x, y). Στη συνέχεια επισημαίνεται ότι για κάποια σχήματα υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης της εξίσωσης ή των εξισώσεων-ανισώσεων, που οι λύσεις τους να αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία του σχήματος. Μ’ αυτό τον τρόπο περιγράφεται η βασική αρχή της Αναλυτικής Γεωμετρίας.



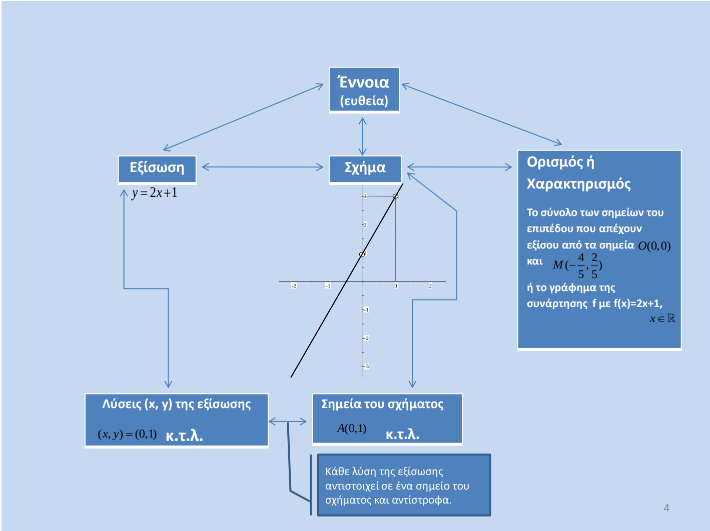
2η διαφάνεια

Στη τρίτη διαφάνεια, με την προϋπόθεση ότι έχει εφοδιαστεί το επίπεδο με ένα (για τους μαθητές ορθοκανονικό) σύστημα αξόνων, εμφανίζονται οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που μπορούμε να έχουμε για τις έννοιες της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που εμφανίζονται είναι: ο ορισμός ή χαρακτηρισμός, το σχήμα, τα σημεία του σχήματος, η εξίσωση και οι λύσεις της εξίσωσης. Ο ορισμός συνήθως δίνεται γεωμετρικά, χωρίς να αποκλείεται ένας διαφορετικός τρόπος ορισμού της έννοιας. Το σχήμα με τα σημεία του είναι γεωμετρικά αντικείμενα, ενώ η εξίσωση με τις λύσεις της είναι αντικείμενα της Άλγεβρας. Με βέλη επισημαίνεται η αμφίδρομη σχέση των αναπαραστάσεων και η δυνατότητα μετάβασης από τη μια στην άλλη. Ειδικά για τα σημεία του σχήματος, σε σχέση με τις λύσεις της εξίσωσης, επισημαίνεται η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία τους. Η ταυτόχρονη εμφάνιση όλων των σημειωτικών αναπαραστάσεων των εννοιών σε μία διαφάνεια, έχει στόχο να δείξει στους μαθητές ότι, μία είναι η έννοια και όλες αυτές οι δυνατές αναπαραστάσεις της. Επίσης να συνδέσει μεταξύ τους τις αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας, αφού αναπαριστούν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, αλλά και να επισημάνει τη δυνατότητα μετάβασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης, αφού ένας μόνο μαθητής απαντάει ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι ζευγάρια τιμών που την επαληθεύουν.



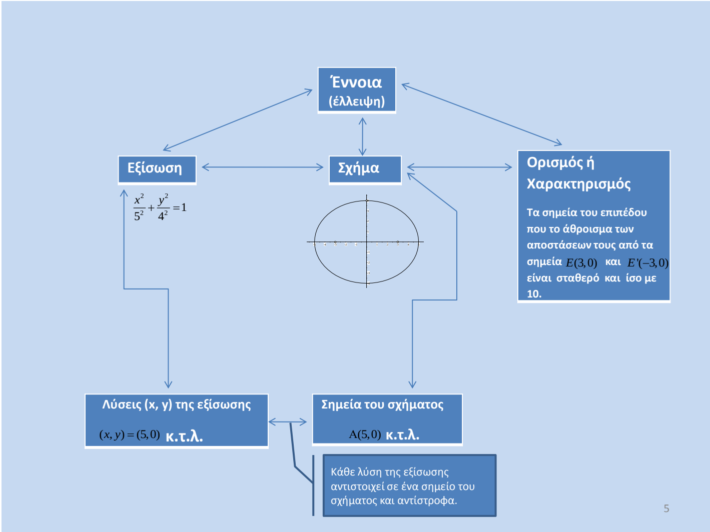
3η διαφάνεια

Στην τέταρτη διαφάνεια αναπαράχθηκε η τρίτη διαφάνεια, σημειώνοντας τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συγκεκριμένης ευθείας. Η εξίσωση της ευθείας που χρησιμοποιήθηκε ήταν η $y = 2x + 1$. Δίπλα, υπάρχει το σχήμα της στο επίπεδο εφοδιασμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Η συγκεκριμένη ευθεία ορίστηκε με δύο τρόπους. Γεωμετρικά, ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν εξίσου από τα σημεία $O(0,0)$ και $K(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, αλλά και ως το γράφημα της συνάρτησης f με $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Όσον αφορά το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης, δίνεται ένα παράδειγμα στοιχείου του συνόλου αυτού και όχι όλο το σύνολο. Αυτές οι ενέργειες επιλέχθηκαν γιατί δε θεωρήθηκε σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν έννοιες που οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι. Η περιγραφή αυτού του συνόλου μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ο πιο οικείος, για τους μαθητές, τρόπος περιγραφής του συνόλου αυτού είναι, κάνοντας χρήση της έννοιας της συνάρτησης, να περιγραφεί το σύνολο αυτό, ως σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών τιμών $(x, y) = (x, 2x + 1)$ με $x \in \mathbb{R}$. Επίσης δίνεται το σημείο που αντιστοιχεί στη λύση που είχε αναφερθεί ως παράδειγμα, τονίζοντας ότι κάθε λύση της εξίσωσης αντιστοιχεί σε ένα σημείο και αντίστροφα. Επισημαίνεται τέλος, ότι οι άπειρες λύσεις της συγκεκριμένης εξίσωσης αντιστοιχούν στα άπειρα σημεία του σχήματος.



4η διαφάνεια

Στην πέμπτη και τελευταία διαφάνεια επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία στην περίπτωση μιας έλλειψης. Η εξίσωση της έλλειψης που δίνεται είναι η $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. Δίνεται επίσης το σχήμα και ο γεωμετρικός ορισμός ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ είναι σταθερό και ίσο με 10. Όσον αφορά τις λύσεις, για τον ίδιο λόγο με την περίπτωση της ευθείας, δίνεται πάλι ένα παράδειγμα του συνόλου και όχι όλο το σύνολο των λύσεων. Οι μαθητές δεν είχαν διδαχτεί τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, με αποτέλεσμα να μην μας δίνεται η ευκαιρία, με τον τρόπο αυτό, να περιγράψουμε το σύνολο πλήρως. Σ’ αυτό το σημείο αξίζει να επισημανθεί ότι, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου προτείνεται να μην διδαχτούν «οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης και οι αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις». Δίνεται επίσης το αντίστοιχο στη λύση σημείο και επισημαίνεται ότι οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης αντιστοιχούν στα άπειρα σημεία του σχήματος.



5η διαφάνεια

3ο βήμα

Το τρίτο βήμα ήταν η συμπλήρωση με την καθοδήγηση του ερευνητή τεσσάρων φύλλων εργασίας (βλέπε παράρτημα Β). Ο στόχος ήταν η υλοποίηση της μετατροπής των αναπαραστάσεων των εννοιών, δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν πράξη αυτό που προηγούμενα είχε διατυπωθεί θεωρητικά, δηλαδή ότι μπορούν να μετατρέπουν την μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε μία άλλη αναπαράσταση της ίδιας έννοιας, για κάθε έννοια απ’ αυτές που διαπραγματεύονται. Και τα τέσσερα φύλλα εργασίας είχαν στόχο να χρησιμοποιηθούν ως γένιο παράδειγμα ή γένιο στοιχείο αφού οι δράσεις που σχεδιάστηκαν αφορούσαν μεν συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους, αλλά η εμπλοκή εντατικών αντικειμένων όπως το πεδίο ορισμού, η απειρία σημείων ή η εξίσωση $y=f(x)$, θεωρείται ότι δίνουν τη δυνατότητα επανάληψης της διαδικασίας σε κάθε περίπτωση (με μόνη εξαίρεση την ευθεία $x=a$).

Το πρώτο φύλλο εργασίας αφορούσε την ευθεία, το δεύτερο την έλλειψη, το τρίτο τον κύκλο και το τέταρτο την παραβολή. Και στα τέσσερα φύλλα εργασίας γίνεται πράξη η μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, με στόχο τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών, να πραγματοποιούν τέτοιες μεταβάσεις, καθώς επίσης και να αναγνωρίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας.

Η εμπλοκή των συναρτήσεων γίνεται για τρείς λόγους. Ο πρώτος είναι ότι η ευθεία (εκτός της $x=a$) και η παραβολή (με άξονα συμμετρίας τον $y'y$), έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου ως γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι, ο ορισμός της συνάρτησης ως μονοσήμαντη αντιστοιχία αριθμών ή τα σημεία $(x,y)=(x,f(x))$ του γραφήματος, συνδέουν άμεσα το x με το y, με αποτέλεσμα να βοηθούν στην κατανόηση του συνόλου (x, y) των λύσεων μιας εξίσωσης. Ο τρίτος λόγος είναι η δυνατότητα παρέμβασης στο σχήμα χωρίζοντας το σε μέρη που αποτελούν γράφημα συνάρτησης, ενισχύοντας τη δομική αντίληψη των εννοιών.

Ένα σημαντικό σημείο στο οποίο δόθηκε έμφαση, ήταν το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης και η ταυτοποίηση του με τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος. Επίσης τα σημεία που προκύπτουν από τον υπολογισμό πεπερασμένου πλήθους λύσεων της εξίσωσης ή τιμών της συνάρτησης ενώνονταν, γνωρίζοντας ότι πρόκειται για το σχηματισμό της συγκεκριμένης ευθείας ή καμπύλης, σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης αντιστοιχούν στα άπειρα σημεία του σχήματος.

Το φύλλο εργασίας που αναφέρεται στον κύκλο έχει αναλυθεί στην 3η ενότητα. Το φύλλο εργασίας που αφορούσε τη έλλειψη, είναι χωρισμένο σε έξι μέρη. Στο πρώτο μέρος δίνεται ο ορισμός της έλλειψης, ως τα σημεία του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ είναι σταθερό και ίσο με 10. Στο δεύτερο μέρος ζητείται να βρεθεί η εξίσωση αφού πρώτα προσδιοριστούν οι παράμετροι γ, α και β. Ο προσδιορισμός του γ και του α γίνεται άμεσα από τον ορισμό της έλλειψης, αφού οι μαθητές γνωρίζουν ότι η εστιακή απόσταση είναι 2γ και ότι το μήκος του μεγάλου άξονα, που είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες, είναι ίσο με 2α. Για τον προσδιορισμό του β οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τη γνωστή σχέση που συνδέει τις τρείς παραμέτρους $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (εντατικό αντικείμενο). Αφού προσδιοριστεί η εξίσωση της έλλειψης ($\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$) έπρεπε στο τρίτο μέρος να βρεθούν αρκετές λύσεις. Στο φύλλο εργασίας ζητείται να συμπληρωθούν οκτώ λύσεις, δίνοντας τα x και ζητώντας να υπολογιστούν τα αντίστοιχα y, εκτός της περίπτωσης $x = 3$ όπου δινόταν και το αντίστοιχο y, για οικονομία στο χρόνο εύρεσης των λύσεων. Οι τιμές που επιλέχτηκαν για το x ήταν μέσα στο σύνολο των λύσεων, και απλά έγινε μια παρατήρηση για τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει αυτός ο άγνωστος, αν θέλει κάποιος να έχει λύση η εξίσωση. Τέλος, έπρεπε να απαντηθεί από τους μαθητές η ερώτηση για το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης, συσχετίζοντας την απάντησή τους με το πλήθος των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει το x (άπειρες τιμές αφού $x \in [-5, 5]$). Το επόμενο μέρος του φύλλου εργασίας, έπρεπε να συμπληρωθεί με σημεία της έλλειψης. Τα σημεία προέκυπταν αμέσως, με βάση τις λύσεις που είχαν βρεθεί, απαντώντας την ερώτηση που αφορούσε τη σχέση των σημείων με τις λύσεις της εξίσωσης. Πριν προχωρήσουν στο επόμενο μέρος, ζητούνταν από τους μαθητές να αναφέρουν το πλήθος των σημείων της έλλειψης, συσχετίζοντάς το με τις άπειρες λύσεις της εξίσωσης. Στο πέμπτο μέρος, έπρεπε να προσδιορίσουν τα σημεία που είχαν βρει πάνω στο επίπεδο και με χρήση της παρατήρησης ότι τα σημεία είναι άπειρα, να ενωθούν και να φτιαχτεί το σχήμα. θεωρήθηκε ότι οι μαθητές καλύπτονται, τουλάχιστον διαισθητικά, με την παραπάνω ενέργεια. Στο έκτο και τελευταίο μέρος του φύλλου εργασίας, επιλύοντας την εξίσωση ως προς y, οδηγούνται στον τύπο $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{5^2-x^2}$. Από τον τύπο αυτό, με χρήση της εξίσωσης $y=f(x)$, δημιουργούνται δύο συναρτήσεις, η f_1 με $f_1(x)=\frac{4}{5}\sqrt{5^2-x^2}$, $x\in[-5,5]$ και η f_2 με $f_2(x)=-\frac{4}{5}\sqrt{5^2-x^2}$, $x\in[-5,5]$, οι οποίες έχουν σαν γράφημα, η μεν f_1 το μέρος της έλλειψης που βρίσκεται στο 1^o και 2^o τεταρτημόριο, η δε f_2 το μέρος της έλλειψης που βρίσκεται στο 3^o και 4^o τεταρτημόριο. Με τον τρόπο αυτό έγινε χωρισμός του σχήματος σε δύο μέρη. Επειδή οι μαθητές δεν είναι τόσο εξοικειωμένοι με τις συναρτήσεις δε θεωρήθηκε σκόπιμο να τροποποιηθεί το πεδίο ορισμού της μίας συνάρτησης για να μην υπάρχει αλληλοεπικάλυψη των δύο κορυφών της έλλειψης. Άλλωστε ο στόχος ήταν να δουν οι μαθητές το σχήμα της έλλειψης ως ένωση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων και όχι να μπούνε στη διαδικασία να ψάξουν πως μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις που η τομή των γραφημάτων τους είναι κενή ή με πόσους τρόπους θα μπορούσε κάποιος να ορίσει συναρτήσεις από την έλλειψη.

Ποιες είναι όμως οι σημειωτικές λειτουργίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδακτική παρέμβαση για την έλλειψη, με βάση την οντο-σημειωτική προσέγγιση; Χρησιμοποιούνται οι ίδιες κατηγορίες σημειωτικών λειτουργιών που χρησιμοποιήθηκαν στην 3^η ενότητα για να αναλυθεί το φύλλο εργασίας που αφορούσε τον κύκλο. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται δηλώνουν:

- Ο πρώτος αριθμός, αν είναι από 1 έως 4, τη μετάβαση από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο με αναπαραστατική σημειωτική λειτουργία και συγκεκριμένα:

5. ΣΛ1 Τη μετάβαση από το εκτατικό στο εκτατικό.

- ΣΛ1.1 σχετίζει ένα αντικείμενο με ένα άλλο της ίδιας ομάδας.
- ΣΛ1.2 σχετίζει ένα αντικείμενο με ένα άλλο που δεν ανήκουν στην ίδια ομάδα.

6. ΣΛ2.Τη μετάβαση από το εκτατικό στο εντατικό.

- ΣΛ2.1 σχετίζει ένα αντικείμενο με την ομάδα στην οποία ανήκει.
- ΣΛ2.2 σχετίζει ένα αντικείμενο με μια ομάδα στην οποία δεν ανήκει.

7. ΣΛ3.Τη μετάβαση από το εντατικό στο εκτατικό.

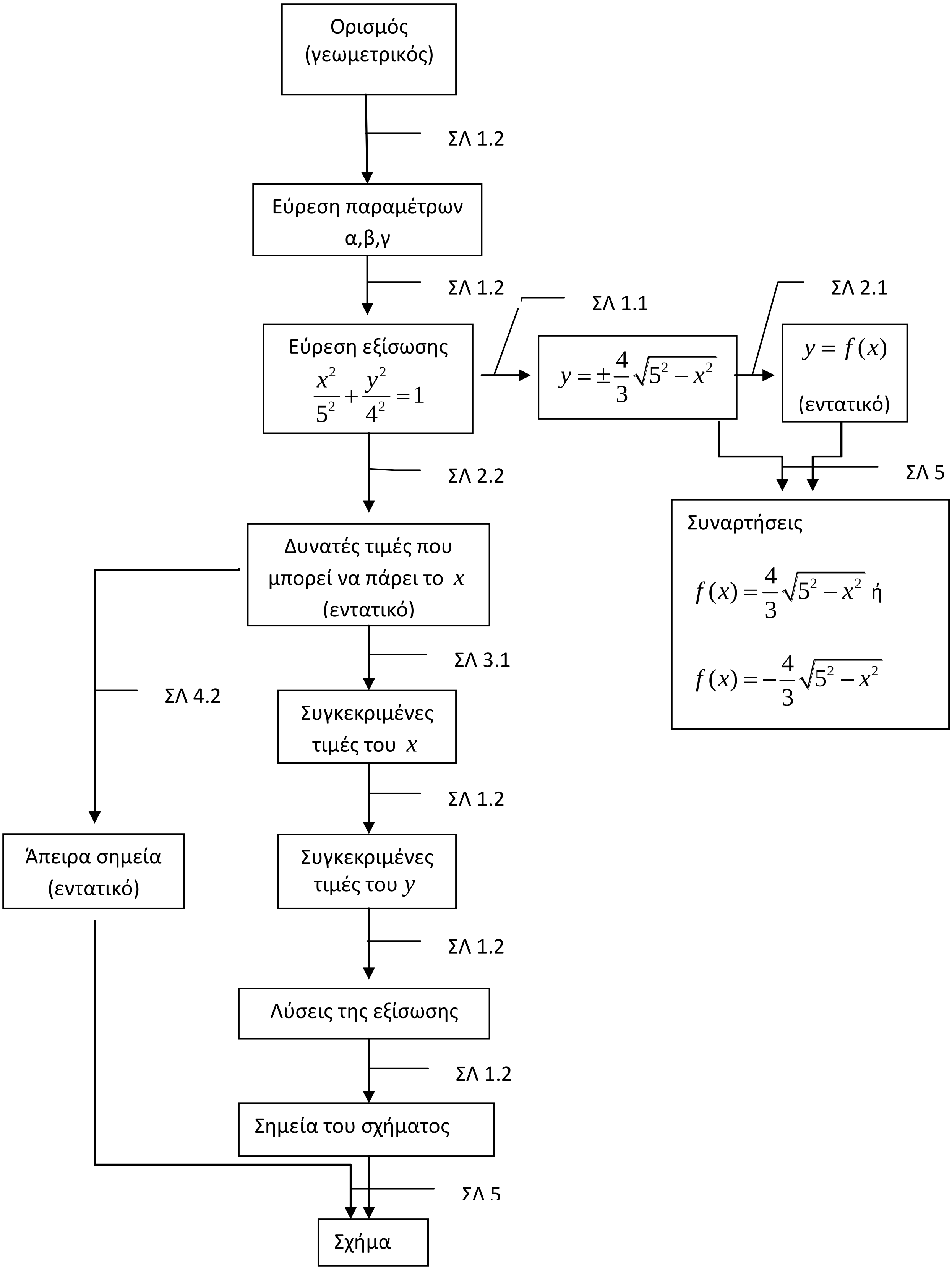
- ΣΛ3.1 σχετίζει μια ομάδα με ένα παράδειγμα που ανήκει στην ομάδα.
- ΣΛ3.2 σχετίζει μια ομάδα με ένα αντικείμενο που δεν ανήκει στην ομάδα.

8. ΣΛ4.Τη μετάβαση από το εντατικό στο εντατικό.

- ΣΛ4.1 Αυτή η σημειωτική λειτουργία ορίζει μια ομάδα αντικειμένων με ένα διαφορετικό τρόπο.
- ΣΛ4.2 Αυτή η σημειωτική λειτουργία σχετίζει μια εντατική οντότητα με μια άλλη διαφορετική εντατική οντότητα.

➢ Ο πρώτος αριθμός, αν είναι 5, ότι πρόκειται για δομική σημειωτική λειτουργία.

Η μετάβαση από τον ορισμό στην εξίσωση γίνεται σε δύο βήματα. Και τα δύο βήματα γίνονται με αναπαραστατικές σημειωτικές λειτουργίες που το εκτατικό αντικείμενο (π.χ. ορισμός) αναπαριστάται με ένα άλλο εκτατικό αντικείμενο (π.χ. εξίσωση). Δε σημειώνεται, όμως γίνεται εργαλειακή χρήση του εντατικού αντικειμένου $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ για τον προσδιορισμό του β, καθώς επίσης και της γενικής εξίσωσης της έλλειψης (εντατικό αντικείμενο). Η επόμενη αναπαραστατική σημειωτική λειτουργία οδηγεί σε ένα εντατικό αντικείμενο, που είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το x έτσι ώστε να έχει λύσεις η εξίσωση. Το θέμα αυτό δεν αντιμετωπίστηκε αλγεβρικά (χειρισμός της εξίσωσης) όπως το βιβλίο, αλλά γεωμετρικά χρησιμοποιώντας ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη με εστίες στον $x'x$ άξονα και μεγάλο άξονα μήκους 10 (εννοείται ότι το κέντρο της έλλειψης είναι η αρχή των αξόνων για τους μαθητές, αφού δε διδάσκονται μεταφορά των αξόνων). Η παραπάνω ενέργεια είχε στόχο την ενίσχυση της δομικής αντίληψης της εξίσωσης (παριστάνει μια έλλειψη). Στην επόμενη αναπαραστατική σημειωτική λειτουργία, γίνεται



Σχήμα 17: Οι σημειωτικές λειτουργίες για την συμπλήρωση του φύλλου εργασίας για την έλλειψη

επιλογή πέντε στοιχείων από το προηγούμενο εντατικό αντικείμενο. Τα τρία απ’ αυτά σχετίζονται με τις κορυφές της έλλειψης, ενώ τα υπόλοιπα είναι δύο τυχαίες ακέραιες τιμές. Για τη μετάβαση από τα x στα y, αν και πρόκειται για αναπαραστατική σημειωτική λειτουργία, γίνεται με εργαλειακή χρήση της εξίσωσης. Η επόμενη σημειωτική λειτουργία είναι αναπαραστατική, αφού για κάθε y φτιάχνεται η αντίστοιχη λύση, όμως μπορεί να θεωρηθεί και ως δομική αφού συνδυάζοντας δύο αντικείμενα παράγεται ένα τρίτο αντικείμενο διαφορετικού είδους. Η επόμενη σημειωτική λειτουργία είναι καθαρά αναπαραστατική και οδηγεί από τις συγκεκριμένες λύσεις της εξίσωσης στα σημεία που αντιστοιχούν αυτές οι λύσεις. Στη συνέχεια μια δομική σημειωτική λειτουργία, που συνδυάζει τα οκτώ σημεία του σχήματος με το γεγονός ότι η γραμμή μας έχει άπειρα σημεία (εντατικό αντικείμενο), οδηγεί στην κατασκευή του σχήματος γνωρίζοντας βέβαια ότι πρόκειται για έλλειψη. Για να παραχθεί ένα ζευγάρι συναρτήσεων που οι γραφικές τους παραστάσεις συνθέτουν την έλλειψη, έπρεπε κατ' αρχήν να γίνει επεξεργασία της εξίσωσης αναπαριστώντας την διαφορετικά (επίλυση της εξίσωσης ως προς y). Στη συνέχεια μεταβαίνοντας σε ένα εντατικό αντικείμενο (την εξίσωση $y = f(x)$) και συνδυάζοντας τις δύο αυτές αναπαραστάσεις με μια δομική σημειωτική λειτουργία, παράγεται το ζευγάρι των ζητούμενων συναρτήσεων.

Η παρουσία εντατικών αντικειμένων εξασφαλίζει τη γενικότητα του συλλογισμού. Η εργαλειακή χρήση του εντατικού αντικειμένου $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αλλά και της γενικής εξίσωσης της έλλειψης, μας βεβαιώνει για τη δυνατότητα επανάληψης της διαδικασίας για κάθε έλλειψη. Μπορούμε πάντα να ενώνουμε τα πεπερασμένα σε πλήθος σημεία που έχουμε βρει, όταν αναφερόμαστε σε καμπύλες αυτού του είδους, γνωρίζοντας βέβαια εκ των προτέρων το είδος της καμπύλης. Τέλος με χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$, μπορούμε πάντα να συνδέουμε τις εξισώσεις με τις συναρτήσεις, των οποίων η γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην καμπύλη που αναπαρίσταται μέσω της εξίσωσης ή ένα συνεκτικό τμήμα της. Συνολικά μπορεί να θεωρηθεί ότι το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας ως γένιο στοιχείο της διαδικασίας μετατροπών που περιγράφει, τουλάχιστον για κάθε έλλειψη.

Τα φύλλα εργασίας που αφορούν την ευθεία και την παραβολή, μπορούν να αναλυθούν ομοίως. Ειδικά για την παραβολή, στο έκτο μέρος του φύλλου εργασίας ζητούνταν η επίλυση της εξίσωσης $y^2 = 4x$ ως προς y για τη δημιουργία δύο συναρτήσεων, δηλαδή των $f_1(x) = 2\sqrt{x}$ με $x \geq 0$ και $f_2(x) = -2\sqrt{x}$ με $x \geq 0$. Η επιλογή αυτού του τρόπου εμπλοκής των συναρτήσεων έγινε για δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι, ότι θεωρήθηκε ότι έπρεπε οι μαθητές να συνδέσουν αυτές τις συναρτήσεις με την παραβολή. Ο δεύτερος λόγος είναι, ότι δεν υπήρξε πρόθεση να θεωρηθεί η παραβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(y)=\frac{1}{4}y^2$ με $y\in\mathbb{R}$, που προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης $y^2=4x$ ως προς x, αφού για τους μαθητές ο κύριος άξονας (ο άξονας που αποτυπώνεται το πεδίο ορισμού) για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ο $x'x$.

Σε σχέση με την ενίσχυση της δομικής αντίληψης των εξισώσεων, θεωρείται ότι σχεδόν όλη η διδακτική παρέμβαση βοηθάει προς την κατεύθυνση αυτή. Η ταυτόχρονη εμφάνιση των εξισώσεων με τα αντίστοιχα σ’ αυτές σχήματα, η επισήμανση ότι η έννοιες μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα από την εξίσωση ή το σχήμα, η μετατροπή της εξίσωσης στο αντίστοιχο σχήμα, αλλά και του σχήματος στην εξίσωση που αντιστοιχεί και η αντιστοίχηση των λύσεων της εξίσωσης με τα σημεία του σχήματος, ενισχύουν τη δομική αντίληψη των εξισώσεων. Η βασική ιδέα, ότι μία είναι η έννοια και όλες αυτές είναι οι αναπαραστάσεις της, οδηγεί στην ενοποίηση των αναπαραστάσεων της έννοιας άρα και την ενοποίηση του σχήματος με την εξίσωση. Ο χωρισμός των σχημάτων σε μέρη που αποτελούν γράφημα συνάρτησης, παρεμβαίνοντας ουσιαστικά στο σχήμα, ενισχύει τη δομική αντίληψη των εννοιών, άρα και τη δομική αντίληψη των εξισώσεων, ως μία από τις ενοποιημένες αναπαραστάσεις της έννοιας.

4.8. Εφαρμογή των βημάτων δράσης

Ο παραπάνω σχεδιασμός υλοποιήθηκε και στα τρία τμήματα. Για τα δύο πρώτα βήματα αφιερώθηκαν περίπου δέκα λεπτά. Κατ’ αρχήν έγινε παρουσίαση της εφαρμογής του EucliDraw για την έλλειψη, δίνοντας τις σχετικές επεξηγήσεις όσον αφορά το περιεχόμενο της εφαρμογής. Στη συνέχεια έγινε η προβολή των πέντε διαφανειών, οι οποίες σχολιάστηκαν δίνοντας έμφαση στην ποικιλία των σημειωτικών αναπαραστάσεων που έχει μια τέτοια έννοια, καθώς όλες αυτές εμφανίζονταν ταυτόχρονα σε μία διαφάνεια. Κατά τη διάρκεια της εφαρμογής των δύο πρώτων βημάτων, τέθηκαν ερωτήσεις κυρίως για τον ορισμό της ευθείας ως μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, οι οποίες απαντήθηκαν χωρίς επέκταση στο θέμα του γεωμετρικού ορισμού της ευθείας. Στη συνέχεια και για περίπου 25 λεπτά, πραγματοποιήθηκε η συμπλήρωση των φύλλων εργασίας. Δυστυχώς παρά τον αρχικό σχεδιασμό και την έγκαιρη ενημέρωση των μαθητών, ο διαθέσιμος χρόνος και στα τρία τμήματα ήταν περίπου 35 λεπτά, δέκα λεπτά λιγότερα από το χρόνο που διατίθεται για μια διδακτική ώρα στα σχολεία. Ο βασικός λόγος που συνέβη αυτό είναι ότι η διδακτική παρέμβαση έγινε σε ειδική αίθουσα διδασκαλίας και όχι στην αίθουσα διδασκαλίας του τμήματος. Το γεγονός αυτό δεν επέτρεψε την ολοκλήρωση της συμπλήρωσης και των τεσσάρων φύλλων εργασίας. Στα δύο τμήματα συμπληρώθηκαν τα τρία πρώτα φύλλα εργασίας δηλαδή αυτά που αφορούσαν την ευθεία, την έλλειψη και τον κύκλο. Στο τρίτο τμήμα ξεκίνησε, αλλά δεν ολοκληρώθηκε η συμπλήρωση του φύλλου εργασίας που αφορούσε την παραβολή. Τα φύλλα εργασίας συμπληρώνονταν από τους μαθητές, οι οποίοι εργάζονταν ατομικά ή ανά δύο, αφού οι αντικειμενικές συνθήκες (χρόνος και χώρος) δεν επέτρεπαν την ομαδική εργασία. Ο ρόλος του ερευνητή περιορίστηκε σε τεχνικές οδηγίες και στην απάντηση διαφόρων ερωτημάτων, που σχετίζονταν με την εργασία που είχαν να επιτελέσουν. Για λόγους οικονομίας χρόνου κάθε φορά που μια μερίδα μαθητών (πάνω από 20% και σε κάποιες εύκολες ερωτήσεις πάνω από 50%) ολοκλήρωναν τη συμπλήρωση ενός μέρους του φύλλου εργασίας, γραφόταν στον πίνακα οι σωστές απαντήσεις που υπαγόρευε κάποιος από τους μαθητές που είχε ολοκληρώσει τη συμπλήρωση του συγκεκριμένου μέρους του φύλλου εργασίας. Οι καθηγητές της τάξης, οι οποίοι ήταν παρόντες καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, περιορίστηκαν σε ρόλο απλού παρατηρητή, αφού μετά από υπόδειξη δε συμμετείχαν ενεργά στη διαδικασία (δε βοηθούσαν τους μαθητές).

4.9. Παρακολούθηση των επιπτώσεων της εφαρμογής

Η αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης, έγινε μέσω ενός δεύτερου ερωτηματολογίου, με το οποίο μετρήθηκαν οι διαφοροποιήσεις στις απόψεις των μαθητών. Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο αναλύονται οι απαντήσεις 50 μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν και στις τρείς δράσεις. Τα συγκριτικά αποτελέσματα προκύπτουν από τις απαντήσεις αυτών των μαθητών στο πρώτο ερωτηματολόγιο, σε σχέση με τις απαντήσεις τους στο δεύτερο (σε κάθε ερωτηματολόγιο ο μαθητής έγραφε το όνομα του). Αυτός είναι και ο λόγος της μικρής διαφοράς στα ποσοστά, όσον αφορά το πρώτο ερωτηματολόγιο, που εμφανίζονται όταν το δείγμα περιορίζεται στους 50 μαθητές, σε σχέση με το αρχικό δείγμα των 59 μαθητών. Η αντιστοιχία των ερωτήσεων μεταξύ πρώτου και δευτέρου ερωτηματολογίου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

1^{ο} ερωτηματολόγιο	**2^{η}**	**3^{η}**	**4^{η}**	**5^{η}**	**6^{η}**	**7^{η}**	**10^{η}**	**12^{η}**	**13^{η}**
2^{ο} ερωτηματολόγιο	3^{η}	1^{η}	2^{η}	4^{η}	8^{η}	5^{η}	6^{η}	9^{η}	10^{η}

4.9.1. Ανάλυση του δεύτερου ερωτηματολογίου — φύλλου εργασίας

1η ερώτηση

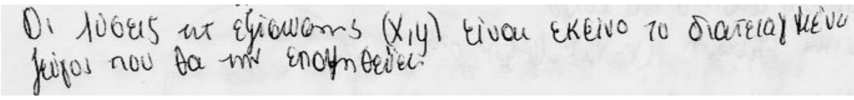
Η πρώτη ερώτηση ήταν: «Τι είναι για σένα οι λύσεις (αν υπάρχουν) μιας εξίσωσης με δύο άγνωστες ποσότητες x και y;», και είναι ίδια με την 3η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου. Ο στόχος της ερώτησης αυτής ήταν η διάγνωση της τροποποίησης των απόψεων, σε σχέση με το σύνολο των λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης, μετά τη διδασκαλία που προηγήθηκε και αφορούσε και αυτό το θέμα.

Η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων έγινε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, σε σχέση με την αντίστοιχη ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου, με στόχο το συσχετισμό των αποτελεσμάτων. Οι κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

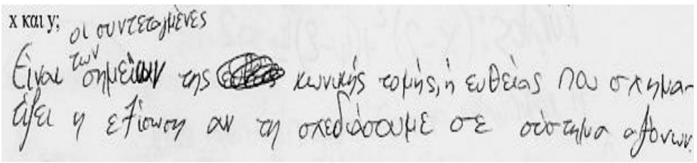
- *Ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση* (1.1).
- *Συντεταγμένες σημείων* (1.2).
- *Σημεία* (1.3).
- *Αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση* (1.4).
- *Αριθμοί* (1.5).
- *Αποτέλεσμα μιας διαδικασίας* (1.6).
- *Διάφορες «άσχετες» απαντήσεις* (1.7).
- *Δεν απάντησαν* (1.8).

Αναλυτικότερα, σε σχέση με τις απαντήσεις που εντάχθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες, μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

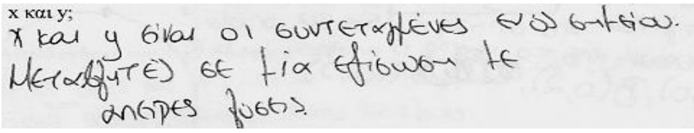
- Για την πρώτη κατηγορία, αυτή τη φορά, υπήρξαν παραπάνω από μία απαντήσεις. Οι απαντήσεις αυτές προσδιόρισαν τις λύσεις ως «ζεύγη τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση» ή ως διατεταγμένο ζεύγος τιμών (x, y) που επαληθεύουν την εξίσωση, όπως φαίνεται και στην παρακάτω απάντηση.



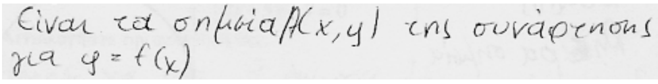
- Στη δεύτερη κατηγορία, οι απαντήσεις που εντάχθηκαν, κατά πλειοψηφία, αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι συντεταγμένες σημείων που επαληθεύουν την εξίσωση, χωρίς να λείπουν και απαντήσεις που απλά αναφέρουν ότι είναι συντεταγμένες σημείων ή όπως η παρακάτω.


x και y; οι συντεταγμένες
Είναι των σημείων της κωνικής τομής, η ευθείας που σχηματίζει η εξίσωση αν τη σχεδιάσουμε σε σύστημα αξόνων.

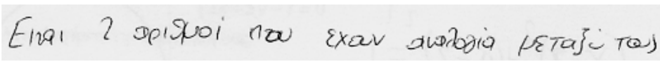
Επίσης μια απάντηση αναφέρεται ίσως σε συντεταγμένες μεταβλητού σημείου, όπως φαίνεται παρακάτω.


x και y;
x και y είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου. Μεταβλητές σε μία εξίσωση με άπειρες λύσεις.

- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι, οι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης είναι σημεία ή σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση. Τρείς μαθητές εμπλέκουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων λέγοντας ότι είναι σημεία της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.


Είναι τα σημεία A(x,y) της συνάρτησης για y = f(x)

- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, όπως και στην αντίστοιχη κατηγορία του πρώτου ερωτηματολογίου, που αναφέρουν ότι «οι λύσεις είναι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση».
- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν τρείς απαντήσεις. Οι δύο αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι αριθμοί και η τρίτη, η οποία παραπέμπει στην ευθεία $y = mx$, αναφέρει ότι:

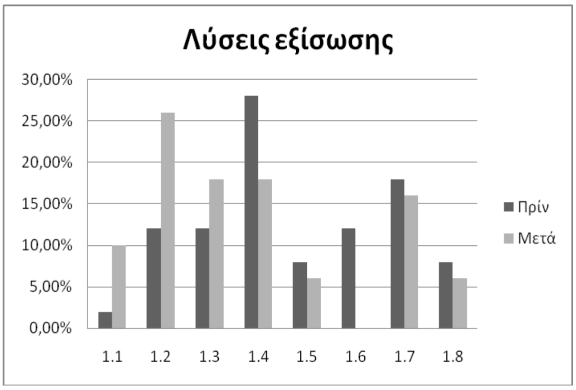

Είναι 2 αριθμοί που έχουν αναλογία μεταξύ τους.

  Ο συγκεκριμένος μαθητής με τον τρόπο που απαντά φαίνεται να συσχετίζει το x με το y.

- Στην έκτη κατηγορία δεν είχαμε απαντήσεις, αφού δεν υπήρξε μαθητής ή μαθήτρια που να αναφέρθηκε σε επίλυση της εξίσωσης ή λύση συστήματος.
- Στην έβδομη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις όπως, «λύσεις είναι η ανταμοιβή μου όταν λύνω ένα πρόβλημα», ή είναι «οι λύσεις στο ερώτημά μας», ή ακόμα «οι λύσεις είναι άπειρες». Η τελευταία απάντηση που δόθηκε από τρείς μαθητές εντάχθηκε σ' αυτήν την κατηγορία αφού οι παραπάνω μαθητές δεν εξέφρασαν

άποψη σε σχέση με το είδος του αντικειμένου, αλλά μόνο για το πλήθος των λύσεων.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, συσχετισμένα με τα αποτελέσματα της τρίτης ερώτησης του 1ου ερωτηματολογίου, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, φαίνεται μια αύξηση των ποσοστών στις τρείς πρώτες κατηγορίες και μείωση στις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα παρατηρείται αύξηση 8% (από 2% πριν σε 10% μετά) στις απαντήσεις των μαθητών, που αναφέρουν ότι οι λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους είναι ζευγάρια τιμών που την επαληθεύουν. Αύξηση 14% (από 12% πριν σε 26% μετά) στο ποσοστό των μαθητών, που βλέπουν τις λύσεις ως συντεταγμένες σημείων. Επίσης παρατηρείται αύξηση 6% (από 12% πριν σε 18% μετά) στο ποσοστό των μαθητών, που θεωρούν ότι οι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης είναι σημεία. Συνολικά αθροίζοντας τα παραπάνω ποσοστά παρατηρείται αύξηση 28% (από 26% πριν σε 54% μετά) στο ποσοστό των μαθητών, που βλέπουν τις λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης με τα x και y συσχετισμένα μεταξύ τους. Συμπερασματικά λοιπόν, ένας στους δύο περίπου μαθητές βλέπει τις λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης με τα x και y συσχετισμένα, ενώ ένας στους δέκα πιθανά θεωρεί το σύνολο των λύσεων ως ένα διαφορετικό (από τα σημεία) σύνολο (οι μαθητές που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία). Επίσης, θέλοντας να διερευνηθεί η σταθερότητα των απόψεων των μαθητών, που οι απαντήσεις τους είχαν καταταχθεί στις τρείς πρώτες κατηγορίες, του πρώτου ερωτηματολογίου, παρατηρείται ότι όλοι απάντησαν ξανά. Εκτός από έναν, οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν πάλι στις τρείς πρώτες κατηγορίες και μάλιστα 7 στους 13 μαθητές έδωσαν την ίδια ακριβώς απάντηση (παράρτημα Δ). Τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει στροφή των μαθητών σε πιο σωστές απαντήσεις, ενώ οι μαθητές που αρχικά είχαν απαντήσει πιο σωστά από τους άλλους διατήρησαν την ορθότητα στις απόψεις τους. Τέλος, από το 40% των μαθητών που απαντάει διαφορετικά ($4^η$, $5^η$ και $7^η$ κατηγορία), υπήρξαν μαθητές που οι απόψεις τους πιθανά επηρεάστηκαν από τη διδακτική παρέμβαση, όπως αυτοί που απαντούν ότι οι λύσεις είναι άπειρες.

$2^η$ ερώτηση

Η δεύτερη ερώτηση ήταν η εξής: «Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μια ευθεία με ένα κύκλο (περιπτώσεις);» και συσχετίζεται άμεσα με την τέταρτη ερώτηση του $1^{ου}$ ερωτηματολογίου, με τη διαφορά ότι προτρέπει τους μαθητές να διακρίνουν περιπτώσεις. Βέβαια η παραπάνω ερώτηση δόθηκε και σε σχέση με την ένατη ερώτηση η οποία αναλύεται παρακάτω και η οποία επαναλαμβάνει το ίδιο ερώτημα, αλλά έχοντας την εξίσωση μιας ευθείας και ενός κύκλου σε σύστημα.

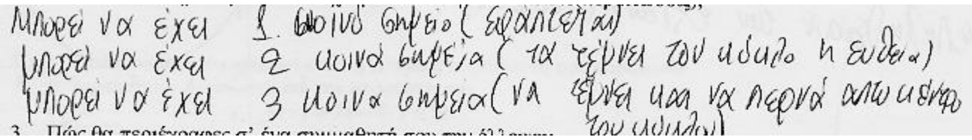
Διατηρήθηκαν οι ίδιες κατηγορίες απαντήσεων με την τέταρτη ερώτηση του $1^{ου}$ ερωτηματολογίου, για να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων, παρά το γεγονός ότι δεν είχαμε απαντήσεις για δύο από τις παρακάτω κατηγορίες.

- *Κανένα, ένα ή δύο σημεία* (2.1).
- *Ένα ή δύο σημεία* (2.2).
- *Κανένα ή δύο σημεία* (2.3).
- *Δύο σημεία* (2.4).
- *Ένα σημείο* (2.5).
- *Ένα, δύο ή τρία σημεία* (2.6).
- *Ένα, δύο ή άπειρα σημεία* (2.7).
- *Δεν απάντησαν* (2.8).

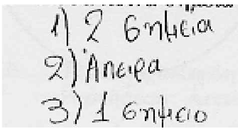
Όσον αφορά τα είδη των απαντήσεων που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία, αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία, διακρίνουν τις τρείς περιπτώσεις αιτιολογώντας ότι η ευθεία, στην πρώτη περίπτωση δεν τέμνει τον κύκλο, στη δεύτερη περίπτωση εφάπτεται στον κύκλο και στην τρίτη περίπτωση τον τέμνει σε δύο σημεία. Μόνο δύο από τις απαντήσεις που εντάχθηκαν, αναφέρουν απλά το πλήθος των κοινών σημείων κατά περίπτωση, χωρίς γεωμετρική αιτιολόγηση.

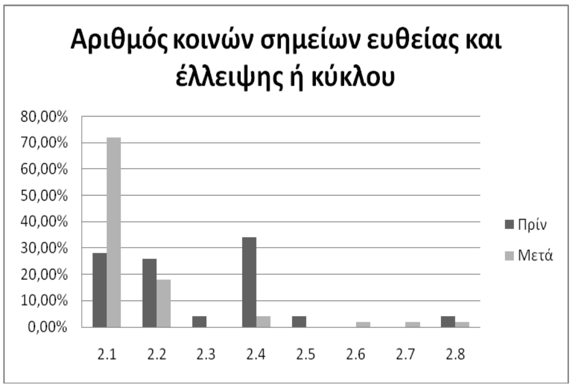
- Για τη δεύτερη κατηγορία, όπως και στην αντίστοιχη ερώτηση του 1ου ερωτηματολογίου, συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που κάνουν διερεύνηση του θέματος, αλλά ξεχνάνε την περίπτωση ο κύκλος να μην έχει κοινά σημεία με την ευθεία.
- Δεν υπήρξαν απαντήσεις σ’ αυτό το ερωτηματολόγιο για να ενταχθούν στην τρίτη κατηγορία.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν δύο απαντήσεις που απλά αναφέρουν ότι ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία.
- Δεν υπήρξαν απαντήσεις σ’ αυτό το ερωτηματολόγιο για να ενταχθούν στην πέμπτη κατηγορία.
- Στην έκτη κατηγορία εντάχθηκε η απάντηση ενός μαθητή που, θεωρώντας το κέντρο του κύκλου ως σημείο του, γράφει ότι:


Μπορει να έχει 1. κοινό σημειο (εφαπτεται)
μπορει να έχει 2 κοινα σημεία (τα τέμνει του κύκλο η ευθεία)
μπορει να έχει 3 κοινα σημεια (να τέμνει και να περνά απο κεντρο του κυκλου)

- Ενώ ο μαθητής που η απάντησή του ανήκει στην έβδομη κατηγορία απλά λέει:


1) 2 σημεια
2) Απειρα
3) 1 σημειο

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, συσχετισμένα με τα αποτελέσματα της τρίτης ερώτησης του 1ου ερωτηματολογίου, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Παρατηρείται υπερδιπλασιασμός του ποσοστού των σωστών απαντήσεων (από 28% πριν σε 72% μετά). Το γεγονός αυτό πιθανά οφείλεται στην προτροπή, μέσω της υπόδειξης, των μαθητών να διακρίνουν περιπτώσεις. Παρά το γεγονός αυτό, υπάρχει ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (26%), που ακόμα και μετά την υπόδειξη, δεν απαντάει σωστά.

3η ερώτηση

Η τρίτη ερώτηση ήταν: «Πώς θα περιέγραφες σ' ένα συμμαθητή σου την έλλειψη;», με στόχο να διερευνηθεί αν οι μαθητές εμμένουν στο φορμαλιστικό ορισμό (ορισμός ως γεωμετρικός τόπος) της έννοιας ή αν υπάρχει μεταστροφή των μαθητών σε άλλες αναπαραστάσεις της, καθώς επίσης και την ορθότητα του εννοιολογικού ορισμού που χρησιμοποιούν για την περιγραφή της έννοιας αυτής.

Διατηρήθηκαν οι ίδιες κατηγορίες απαντήσεων με τη δεύτερη ερώτηση του 1ου ερωτηματολογίου, για να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων.

- *Σωστός φορμαλιστικός ορισμός* (3.1).
- *Σωστή περιγραφή με βάση τις άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας* (3.2).
- *Ελλιπής φορμαλιστικός ορισμός* (3.3).
- *Διάφορες ελλιπείς περιγραφές* (3.4).
- *Λάθος φορμαλιστικός ορισμός* (3.5).
- *Διάφορες λάθος περιγραφές* (3.6).
- *Δεν απάντησαν* (3.7).

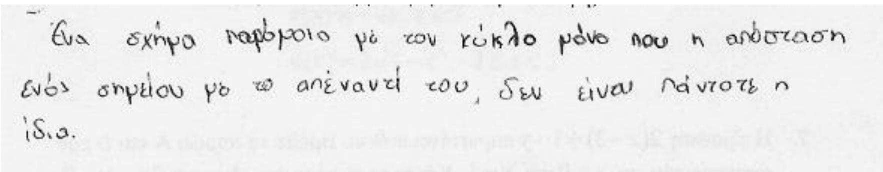
Σχολιάζοντας το είδος των απαντήσεων που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία, μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που περιγράφουν την έλλειψη, ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο σημεία (εστίες) είναι σταθερό (ίσο με 2α) και μεγαλύτερο από την εστιακή απόσταση (2γ), αν και πάλι υπήρξε επιείκεια με τον όρο «επίπεδο». Μια τέτοια απάντηση είναι η παρακάτω.

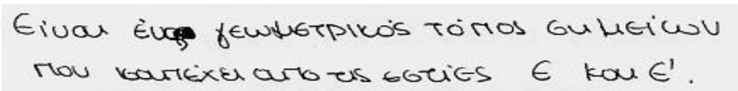
  > Είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεών τους από 2 σταθ. σημεία είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των 2 σταθ. σημείων.

- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που περιγράφουν την έλλειψη μέσα από την εξίσωσή της ή το σχήμα της.

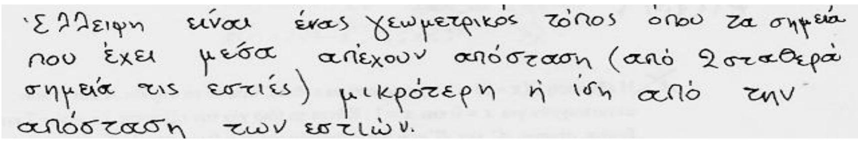
- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις που επιχειρούν να περιγράψουν την έλλειψη με βάση τον ορισμό, αλλά ελλιπώς. Η έλλειψη που παρατηρήθηκε σε όλες τις απαντήσεις αυτής της κατηγορίας είναι ότι, δεν αναφέρεται ότι το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες πρέπει να είναι μεγαλύτερο της εστιακής απόστασης.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν διάφορες ελλιπείς περιγραφές που δε σχετίζονται με τον ορισμό της έλλειψης, όπως «η έλλειψη είναι ένας πιεσμένος κύκλος» ή «η τροχιά των πλανητών γύρω από τον ήλιο» ή ότι είναι απλά ένας γεωμετρικός τόπος ή όπως στην παρακάτω απάντηση.


Ένα σχήμα παρόμοιο με τον κύκλο μόνο που η απόσταση ενός σημείου με το απέναντί του, δεν είναι πάντοτε η ίδια.

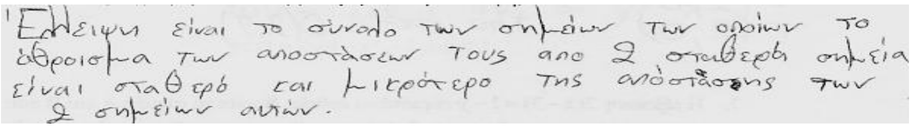
- Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις που επιχειρούνται με βάση τον ορισμό της έλλειψης, αλλά με διάφορα λάθη στη διατύπωση. Μερικά παραδείγματα τέτοιων απαντήσεων είναι τα παρακάτω. Η πρώτη απάντηση, αν θεωρήσουμε ότι αναφέρεται σε επίπεδο γεωμετρικό τόπο, παραπέμπει στη μεσοκάθετο του ΕΕ΄.


Είναι ένας γεωμετρικός τόπος σημείων που απέχει από τις εστίες Ε και Ε'.

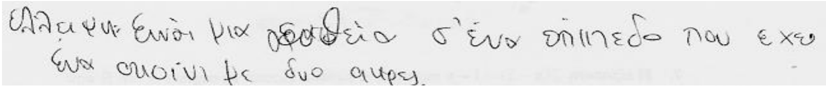
Η δεύτερη απάντηση, για επίπεδο γεωμετρικό τόπο, περιγράφει τα κοινά σημεία δύο κυκλικών δίσκων, με κέντρα τις εστίες και ακτίνα την εστιακή απόσταση.


Έλλειψη είναι ένας γεωμετρικός τόπος όπου τα σημεία που έχει μέσα απέχουν απόσταση (από 2 σταθερά σημεία τις εστίες) μικρότερη ή ίση από την απόσταση των εστιών.

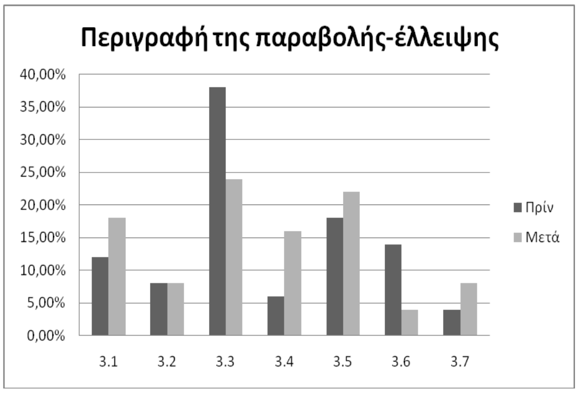
Η τρίτη απάντηση δεν περιγράφει κάποιο σύνολο σημείων στο επίπεδο, αφού δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σημεία να είναι μικρότερο από την απόσταση των δύο σημείων.


Έλλειψη είναι το σύνολο των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από 2 σταθερά σημεία είναι σταθερό και μικρότερο της απόστασης των 2 σημείων αυτών.

- Τέλος στην έκτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν δύο λάθος περιγραφές που δε σχετίζονται με το ορισμό. Στη μία απάντηση περιγράφεται η έλλειψη με την εξίσωση και το σχήμα της υπερβολής. Στην άλλη απάντηση γίνεται μια προσπάθεια περιγραφής της έλλειψης με βάση μια από τις κατασκευές της που περιγράφεται στο σχολικό βιβλίο, χωρίς όμως να μπορεί να χαρακτηριστεί ελλιπείς αφού δεν παραπέμπει καθόλου στην έννοια, όπως φαίνεται παρακάτω.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, συσχετισμένα με τα αποτελέσματα της δεύτερης ερώτησης του 1^{ου} ερωτηματολογίου, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Το συνολικό ποσοστό των μαθητών που επιτυγχάνουν πλήρη περιγραφή είναι 20% για την παραβολή και 26% για την έλλειψη. Παρατηρείται μια μικρή αύξηση, κατά 6% (από 12% σε 18%), του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά, με βάση τον ορισμό που δίνει το σχολικό βιβλίο. Βέβαια πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν, το γεγονός ότι και στις δύο περιπτώσεις οι απαντήσεις που χαρακτηρίστηκαν ελλιπείς (3.3), είναι πολύ κοντά στον ορισμό, αφού για την περίπτωση της παραβολής, αυτό που απουσιάζει είναι μόνο το τμήμα του ορισμού που αναφέρει, ότι η εστία δεν πρέπει να ανήκει στη διευθετούσα και αντίστοιχα για την έλλειψη, απουσιάζει το μέρος της πρότασης που αναφέρει, ότι το άθροισμα πρέπει να είναι μικρότερο της εστιακής απόστασης. Περίπου ο ίδιος αριθμός μαθητών (68% για το πρώτο ερωτηματολόγιο και 64% για το δεύτερο ερωτηματολόγιο) και στα δύο ερωτηματολόγια, προτιμάει την περιγραφή των εννοιών με βάση τον ορισμό του βιβλίου. Συγκεκριμένα το 81,25% (26 στους 32 μαθητές) των μαθητών, που επιλέγουν να περιγράψουν την έλλειψη με βάση τον ορισμό, έχει πράξει με το ίδιο και στο πρώτο ερωτηματολόγιο (παράρτημα Δ) για την παραβολή. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι, για την περιγραφή μιας έννοιας δεν υπήρξε μεταστροφή των μαθητών προς άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας. Στην περίπτωση της παραβολής, απ' αυτούς που επιλέγουν να απαντήσουν με βάση τον ορισμό, το 17,64% επιτυγχάνει πλήρη περιγραφή, ενώ στην έλλειψη το αντίστοιχο ποσοστό αυξάνεται στο 28,13%. Τέλος απ' αυτούς που δεν επιλέγουν τον ορισμό για την περιγραφή της έννοιας, για την παραβολή και για την έλλειψη περιγράφουν πλήρως την έννοια σε ποσοστό 28,57%.

4η ερώτηση

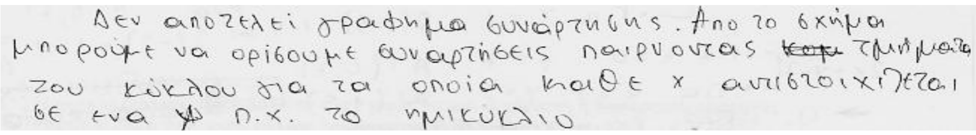
Η τέταρτη ερώτηση ήταν: «Ο κύκλος αποτελεί γράφημα συνάρτησης; Αν όχι, από το σχήμα του κύκλου μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις; Δώστε παράδειγμα.» και έχει σχέση με την πέμπτη ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου, αν και η ερώτηση αυτή επικεντρώνεται στην περίπτωση του κύκλου. Ο στόχος της ερώτησης είναι διπλός. Κατ' αρχήν, να διαπιστωθεί το ποσοστό των μαθητών που πιστεύουν ότι ο κύκλος δεν αποτελεί γράφημα συνάρτησης και κατά δεύτερον, αν αντιλαμβάνονται οι μαθητές τον τρόπο που μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις. Υπενθυμίζοντας εδώ ότι, στη διδακτική παρέμβαση που προηγήθηκε ο κύκλος κατασκευάστηκε ως γράφημα δύο συναρτήσεων (ημικύκλια).

Η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων έγινε ως εξής:

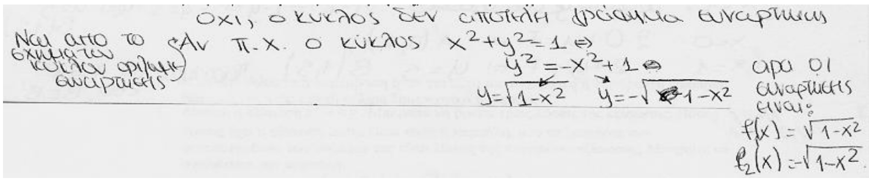
- *Όχι, αλλά μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις (με παράδειγμα)* (4.1).
- *Όχι, αλλά μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις (χωρίς παράδειγμα)* (4.2).
- *Όχι* (4.3).
- *Όχι και δεν μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις* (4.4).
- *Ναι* (4.5).
- *Δεν απάντησαν* (4.6).

Όμως τι είδους απαντήσεις εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία;

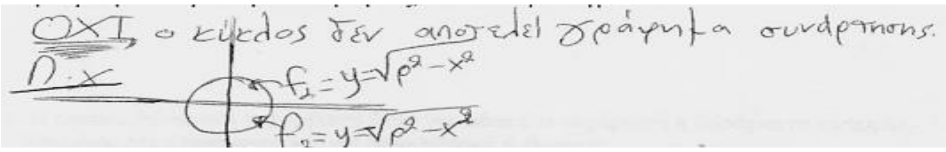
- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν ότι ο κύκλος δεν αποτελεί γράφημα συνάρτησης, αλλά από το σχήμα του μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις. Τα παραδείγματα που αναφέρουν οι μαθητές είναι τριών ειδών. Στο πρώτο είδος παραδειγμάτων, οι μαθητές αναφέρονται στο σχήμα και δίνουν παράδειγμα το ημικύκλιο ή τα ημικύκλια, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.


Δεν αποτελει γραφημα συναρτησης. Απο το σχήμα μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις παιρνοντας τμήματα του κύκλου για τα οποία καθε x αντιστοιχίζεται σε ενα π.χ. το ημικυκλιο

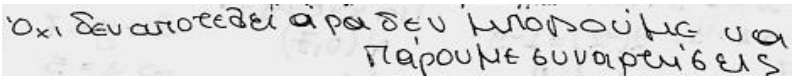
Στο δεύτερο είδος παραδειγμάτων, οι μαθητές αναφέρονται στην εξίσωση και οι τύποι των συναρτήσεων παράγονται από την επίλυση της εξίσωσης, όπως βλέπουμε στην παρακάτω απάντηση.



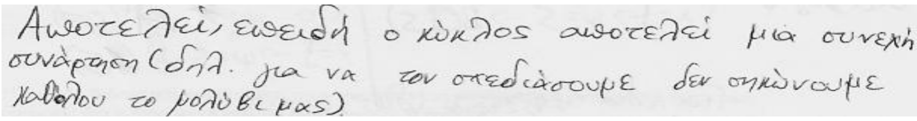
Και σε κάποιες απαντήσεις οι μαθητές σχετίζουν τους τύπους με το σχήμα.



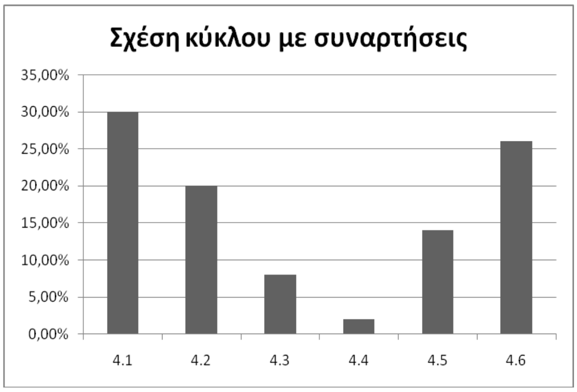
- Στη δεύτερη κατηγορία, εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι ο κύκλος δεν είναι γράφημα συνάρτησης, αλλά μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις από το σχήμα του. Δεν αναφέρουν όμως κάποιο παράδειγμα, όπως τους ζητείται. Δύο απ' αυτούς επισημαίνουν ότι «μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις εάν ο κύκλος είναι πάνω σε καρτεσιανό επίπεδο».
- Στην τρίτη κατηγορία, συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι ο κύκλος δεν είναι γράφημα συνάρτησης, χωρίς καμία περαιτέρω αναφορά.
- Μία απάντηση αναφέρει ότι ο κύκλος δεν αποτελεί γράφημα συνάρτησης και ταυτόχρονα ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις, όπως φαίνεται παρακάτω. Η απάντηση αυτή εντάχθηκε στην τέταρτη κατηγορία.



- Στην πέμπτη κατηγορία, εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν απλά ότι ο κύκλος αποτελεί γράφημα συνάρτησης και μάλιστα δύο απ' αυτές αναφέρουν ότι ο κύκλος είναι συνεχής συνάρτηση, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό (30%) των μαθητών απαντάει σωστά και με πληρότητα στην ερώτηση αυτή, σε σχέση με το 4% των μαθητών (βλέπε παράρτημα Γ) που απαντάει μ' αυτόν τον τρόπο στο πρώτο ερωτηματολόγιο και στην αντίστοιχη ($5^{η}$) ερώτηση, αν και, όπως έχει αναφερθεί η ερώτηση αυτή στο πρώτο ερωτηματολόγιο είχε παρερμηνευθεί από πολλούς μαθητές. Βέβαια παρατηρώντας τον πίνακα των αποτελεσμάτων (παράρτημα Δ), μπορεί να σημειωθεί ότι οι 13 από τους 14 μαθητές που είχαν παρερμηνεύσει την ερώτηση τώρα οι απαντήσεις τους ανήκουν στις κατηγορίες 4.1 (9 μαθητές) και 4.2 (4 μαθητές). Ακόμα και αν προστεθούν οι 9 μαθητές με τους 2 που απαντούν πλήρως στο πρώτο ερωτηματολόγιο το ποσοστό των μαθητών, που ενδεχομένως θα απαντούσαν σωστά, θα φτάσει στο 22%. Άρα υπήρξε αύξηση του ποσοστού, τουλάχιστον κατά 8%, των μαθητών που απαντούν σωστά και με πληρότητα. Ένας στους δύο μαθητές πιστεύουν ότι μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις από το σχήμα του κύκλου. Το 60% των μαθητών αναφέρουν σωστά ότι ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, ενώ το 14% των μαθητών γράφουν ότι είναι συνάρτηση, παρά το γεγονός ότι είδαν στη διδακτική παρέμβαση, ότι υπήρξε ανάγκη να χρησιμοποιηθούν δύο συναρτήσεις για να φτιαχτεί ο κύκλος.

$5^{η}$ ερώτηση

Η πέμπτη ερώτηση ήταν: «Δίνεται η εξίσωση $x^2 = 4y$. Μπορείτε να βρείτε τρείς λύσεις της εξίσωσης; Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή; Ποια είναι η καμπύλη, που τα ζευγάρια των συντεταγμένων των σημείων της είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης; Μπορείτε να σχεδιάσετε την καμπύλη;» και είχε ως κύριο στόχο να διαπιστωθεί, αν η εύρεση των συντεταγμένων κάποιων σημείων της παραβολής οδηγεί στο σωστό σχεδιασμό της. Η παρατήρηση, που έγινε με βάση τα αποτελέσματα της αντίστοιχης ερώτησης του πρώτου ερωτηματολογίου, ότι αρκετοί μαθητές βρίσκουν σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες, δημιούργησε υποψίες ότι αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει παράγοντα που επηρεάζει τη μετάβαση σε μια άλλη αναπαράσταση της έννοιας, όπως είναι το σχήμα.

Οι κατηγορίες απαντήσεων σε σχέση με τις λύσεις είναι οι ίδιες μ’ αυτές της 7ης ερώτησης του πρώτου ερωτηματολογίου, λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι εδώ ζητούνται λύσεις, ενώ στο πρώτο ερωτηματολόγιο ζητούνταν σημεία. Το αποτέλεσμα είναι μια λεκτική τροποποίηση των κατηγοριών, όπως φαίνεται παρακάτω:

- *Σωστές και αντιστοιχούν σε συμμετρικά σημεία* (5.1.1).
- *Σωστές με μη αρνητικές τιμές για το* x (5.1.2).
- *Λάθος λύσεις* (5.1.3).
- *Δεν απάντησαν* (5.1.4).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που βρίσκουν τουλάχιστον μία λύση με αρνητική τιμή του x. Κάποιες απ’ αυτές έχουν σαν λύση τη (0,0) και κάποιες όχι.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που στις λύσεις που δίνονται, το x έχει μόνο μη αρνητικές τιμές. Συνήθως θέτουν μια θετική τιμή για το x και βρίσκουν το αντίστοιχο y.
- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν τρείς απαντήσεις που μία από τις λύσεις που γράφουν είναι λάθος. Οι άλλες δύο είναι σωστές και στις τρείς λύσεις όμως τα x είναι θετικά. Επίσης εντάχθηκε μία απάντηση που το μοναδικό σημείο που βρίσκει ο μαθητής είναι η εστία, αλλά και αυτή τη βρίσκει λάθος.

Οι απαντήσεις σε σχέση με το πλήθος των λύσεων, ήταν οι εξής:

- *Άπειρες λύσεις* (5.2.1).
- *Δεν απάντησαν* (5.2.2).

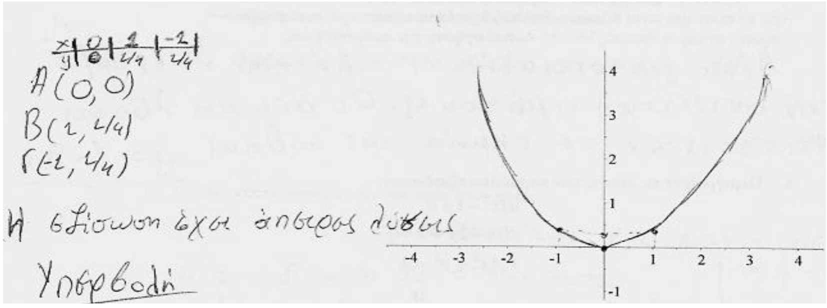
Δεν υπήρξε άλλη απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Όσον αφορά το όνομα της καμπύλης, δόθηκαν οι παρακάτω απαντήσεις:

- *Παραβολή* (5.3.1).
- *Υπερβολή* (5.3.2).

- *Δεν απάντησαν* (5.3.3).

Αναλυτικότερα, όσοι μαθητές απάντησαν, προσδιόρισαν ότι η καμπύλη είναι παραβολή, εκτός ένα μαθητή που την ονομάζει υπερβολή, αλλά στα υπόλοιπα ερωτήματα απαντάει σωστά, όπως φαίνεται παρακάτω.

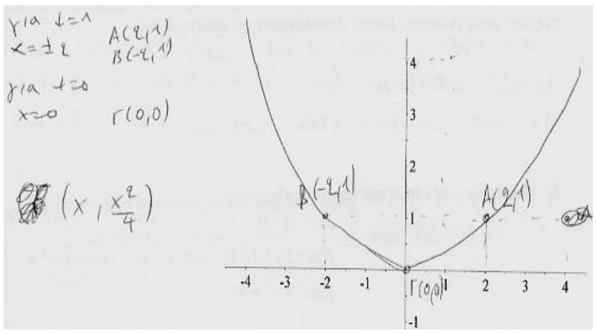


Τέλος όσον αφορά το σχήμα, οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

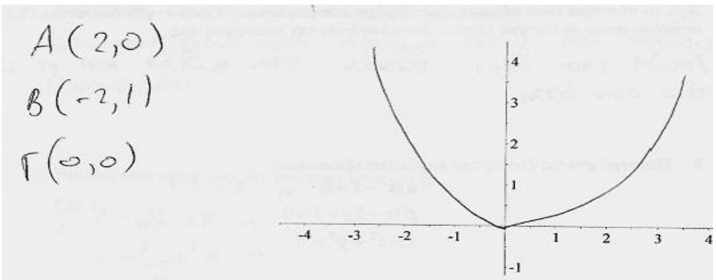
- *Σωστό σχήμα* (5.4.1)
- *Ημιτελές σχήμα, μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο* (5.4.2).
- *Λάθος προσανατολισμένο σχήμα (άξονας συμμετρίας ο $x'x$)* (5.4.3).
- *Λάθος σχήμα* (5.4.4).
- *Δεν απάντησαν* (5.4.5).

Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

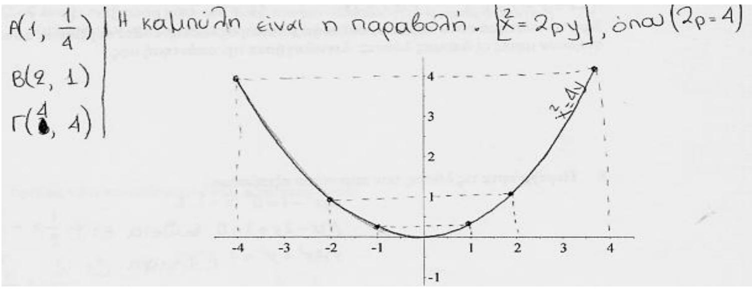
- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που έχουν σωστό σχήμα, χρησιμοποιώντας τα σημεία που αντιστοιχούν στις λύσεις που έχουν βρει ή χωρίς τη χρήση αυτών των σημείων. Τρείς τέτοιες απαντήσεις είναι οι παρακάτω. Στην πρώτη απάντηση, ο μαθητής αφού βρει τα σημεία στο επίπεδο, σχηματίζει την παραβολή. Επίσης, στην απάντηση αυτή παρατηρείται ότι εκφράζεται όλο το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης, αν και λείπει ότι το x διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς.



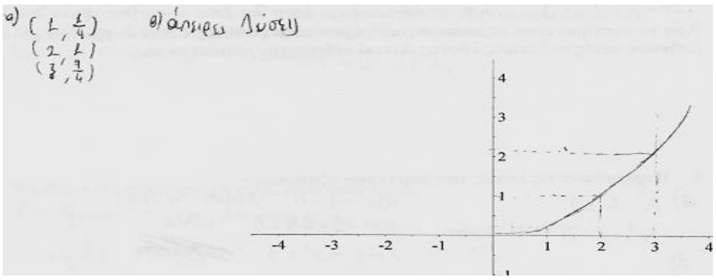
➢ Στη δεύτερη απάντηση, ο μαθητής σχηματίζει την παραβολή χωρίς να λάβει υπ’ όψιν του τα σημεία που αντιστοιχούν στις λύσεις που έχει βρει.



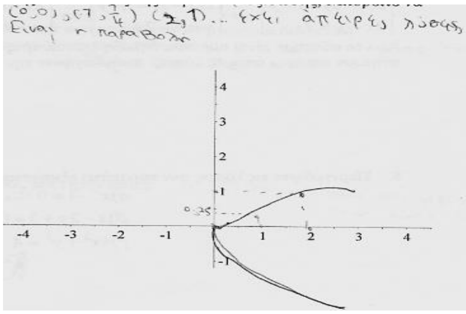
Στην τρίτη απάντηση, ο μαθητής έχει στο νου του τα συμμετρικά σημεία και φτιάχνει το σχήμα με βάση όλα τα σημεία.



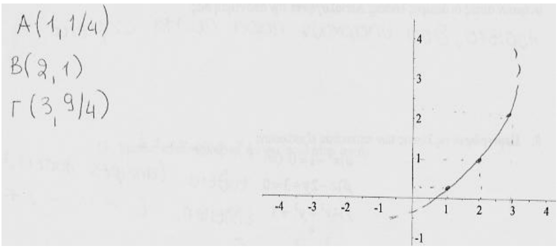
➢ Οι μαθητές, των οποίων οι απαντήσεις εντάχθηκαν στη δεύτερη κατηγορία, φτιάχνουν το σχήμα, αλλά μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο, όπως βλέπουμε στην παρακάτω απάντηση.



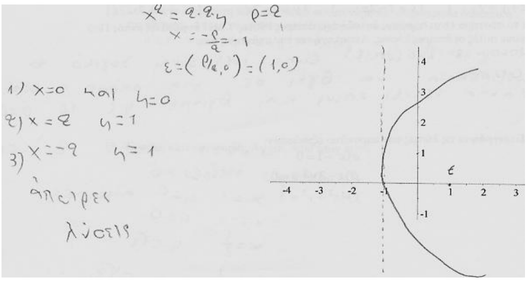
➢ Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών, στις οποίες το σχήμα έχει κατασκευαστεί με άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Στην απάντηση που φαίνεται παρακάτω, ο μαθητής προσπαθεί να σχηματίζει την καμπύλη με βάση τις λύσεις που έχει βρει. Αγνοεί όμως τη μορφή της εξίσωσης, με αποτέλεσμα να οδηγείται σε λάθος σχήμα.



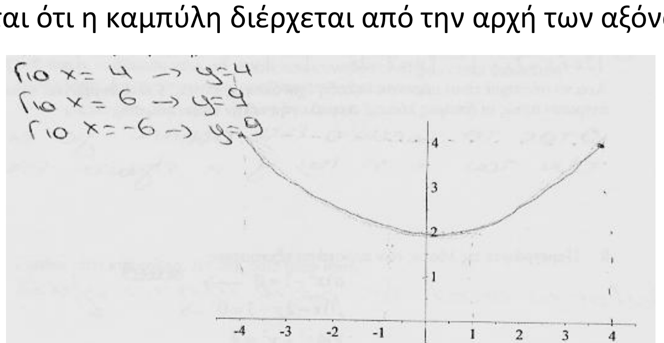
- Τέλος, στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις που το σχήμα είναι λάθος. Είναι λάθος, γιατί ο μαθητής απλά ενώνει με καμπύλη τα σημεία που βρήκε.



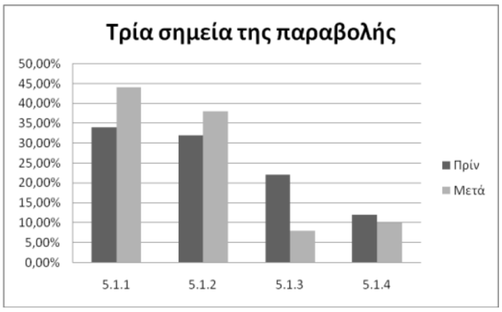
Είναι λάθος, γιατί δε λαμβάνει υπ' όψιν του τα σημεία που βρήκε, αλλά προσδιορίζει λάθος την εστία και τη διευθετούσα ($y=-1$ είναι η διευθετούσα και $E(0,1)$ η εστία) και στη συνέχεια φτιάχνει το σχήμα λάθος (έπρεπε η κορυφή να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) και σε σχέση με την εστία και τη διευθετούσα που έχει βρει.

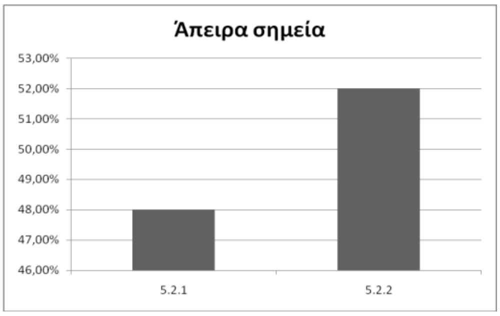


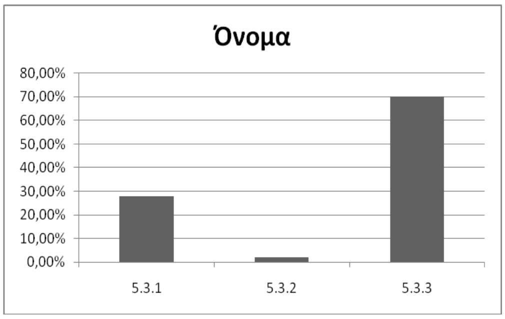
Είναι λάθος, γιατί λαμβάνει υπ' όψιν κάποια σημεία που βρήκε, αλλά και κάποια άλλα που έχει στο μυαλό του (τα σημεία με συντεταγμένες (1,2) και (-1,2)), χωρίς όμως να διανοείται ότι η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

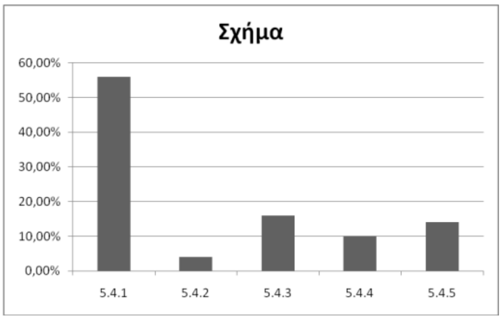


Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων. Στο πρώτο από τα ραβδογράμματα, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της 7ης ερώτησης του πρώτου ερωτηματολογίου.









Παρατηρείται, μια αύξηση (16%) του ποσοστού των απαντήσεων στις δύο πρώτες κατηγορίες, για την εύρεση τριών σημείων της παραβολής και αντίστοιχα μείωση (14%) του ποσοστού των λάθος απαντήσεων. Αυτό μπορεί να οφείλεται, στην αυξημένη προσοχή που επέδειξαν οι μαθητές στη διαδικασία εύρεσης λύσεων-σημείων της εξίσωσης, μετά τη διδακτική παρέμβαση (στην οποία ασχολήθηκαν με εύρεση λύσεων-σημείων μιας εξίσωσης), αφού οι δύο εξισώσεις ($x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$) που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πανομοιότυπες. Περίπου οι μισοί (48%) απαντούν ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι άπειρες, ενώ μόλις το 28% των μαθητών αναφέρουν ότι πρόκειται για παραβολή. Και στις δύο αυτές ερωτήσεις η πλειοψηφία των μαθητών δείχνει να τις αγνοεί αφού απλά δεν απαντάει. Στην τελευταία ερώτηση, που αφορά το σχήμα, μόνο το 14% των μαθητών δεν απαντάει. Περισσότεροι από τους μισούς (56%) μαθητές φτιάχνουν σωστά το σχήμα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις λύσεις-σημεία που έχουν βρει ή όχι. Περίπου ένας στους τρείς (15 μαθητές ή 30%), αν και προσπαθεί, δε φτιάχνει σωστά το σχήμα και με πληρότητα. Απ' αυτούς, οι δύο μαθητές φτιάχνουν το σχήμα μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο και προέρχονται από την κατηγορία των μαθητών που βρίσκουν λύσεις με μη αρνητικές τιμές για το x. Από την ίδια κατηγορία, προέρχονται και οι τέσσερις από τους πέντε μαθητές, που φτιάχνουν το σχήμα με λάθος προσανατολισμό. Επίσης, από την ίδια κατηγορία προέρχονται και οι μισοί (4 στους 8 μαθητές) απ’ αυτούς, που κάνουν το σχήμα λάθος, τοποθετώντας την κορυφή της παραβολής σε σημείο εκτός της αρχής των αξόνων (δεν έχουν βρει το (0,0) ως λύση) και προσανατολίζοντάς τη σωστά ή λάθος (παράρτημα Δ). Αθροίζοντας τους παραπάνω μαθητές, παρατηρείται ότι δύο στους τρείς (δέκα στους δεκαπέντε) που δε φτιάχνουν σωστό σχήμα, έχουν βρει λύσεις που αντιστοιχούν σε σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες. Οπότε, όταν οι μαθητές πιθανά είναι στο στάδιο της εσωτερίκευσης των εννοιών, η Άλγεβρα (λύση εξίσωσης) μπορεί να επηρεάσει καταλυτικά τις δράσεις τους. Τέλος, το 42,10% (8 στους 19) των μαθητών που παρά το γεγονός ότι οι λύσεις τους δεν παραπέμπουν σε συμμετρικά σημεία, φτιάχνουν το σχήμα σωστά έχοντας στο μυαλό τους (ή και στο σχήμα οι μισοί απ’ αυτούς) τα σημεία αυτά (παράρτημα Δ). Το γεγονός αυτό είναι ένδειξη ότι οι παραπάνω μαθητές μπορεί να βρίσκονται στο στάδιο της συμπύκνωσης της έννοιας.

6η ερώτηση

Στην έκτη ερώτηση, δίνεται το σχήμα ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $O(2,2)$ και ακτίνα ίση με 2 και ζητείται το όνομα και η εξίσωση της καμπύλης. Επίσης, ζητείται να βρεθεί το πλήθος των σημείων της καμπύλης και να προσδιοριστούν τρία απ’ αυτά. Τέλος έπρεπε να προσδιοριστεί η ιδιότητα που έχουν τα σημεία της καμπύλης αυτής. Ο σκοπός της ερώτησης ήταν η διάγνωση της δυνατότητας μετάβασης από τη μια αναπαράσταση του κύκλου (σχήμα) σε άλλες αναπαραστάσεις (εξίσωση, σημεία, ορισμός).

Για το όνομα της καμπύλης δημιουργήθηκαν οι παρακάτω κατηγορίες απαντήσεων:

- *Κύκλος* (6.1.1).
- *Λάθος όνομα* (6.1.2).
- *Δεν απάντησαν* (6.1.3).

Αν και δεν υπήρξαν απαντήσεις για τη δεύτερη κατηγορία, εντάχθηκε στην κατηγοριοποίηση για να γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων με την 10η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου, που αφορούσε το σχήμα της έλλειψης.

Για την εξίσωση του κύκλου κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις ως εξής:

- *Εξίσωση του κύκλου* (6.2.1).
- *Γενική εξίσωση του κύκλου* (6.2.2).

- *Λάθος εξίσωση* (6.2.3).
- *Δεν απάντησαν* (6.2.4).

Οι παραπάνω κατηγορίες, είναι οι ίδιες που δημιουργήθηκαν για την αντίστοιχη ερώτηση που αφορούσε την έλλειψη στο 1ο ερωτηματολόγιο. Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν την εξίσωση του κύκλου που είναι σχεδιασμένος, δηλαδή την εξίσωση $(x-2)^2+(y-2)^2=2^2$ (εκτατικό αντικείμενο).
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν την γενική εξίσωση του κύκλου (εντατικό αντικείμενο). Μία απ’ αυτές είναι:

  $c : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις που αναφέρουν την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο με συντεταγμένες $(0,0)$. Επίσης συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που κάνουν λάθος την ακτίνα ή το πρόσημο ανάμεσα στους δύο δευτεροβάθμιους όρους, ενώ μία μαθήτρια κάνει λάθος και τα δύο.

  Η καμπύλη λέγεται κύκλος
  Η εξίσωση είναι $(x-2)^2-(y-2)^2=1^2$

Οι απαντήσεις στο ερώτημα που αφορούσε το πλήθος των σημείων της καμπύλης εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Άπειρα σημεία* (6.3.1).
- *Άλλη απάντηση* (6.3.2).
- *Δεν απάντησαν* (6.3.3).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, στις οποίες γίνεται απλή αναφορά ότι τα σημεία του κύκλου είναι άπειρα.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν έξι απαντήσεις. Δύο απ’ αυτές αναφέρουν συγκεκριμένο αριθμό σημείων (τρία και τέσσερα). Μια μαθήτρια λέει ότι αποτελείται από σχεδόν άπειρα σημεία, όπως φαίνεται παρακάτω.

> Αποτελείται από πάρα πολλά σημεία... σχεδόν άπειρα.

Οι υπόλοιποι μαθητές αναφέρουν ότι το x και το y παίρνουν τιμές από το μηδέν έως το τέσσερα και ένας απ’ αυτούς συμπληρώνει ότι δεν μπορεί να απαντήσει ακριβώς, όπως βλέπουμε στην παρακάτω απάντηση.

> β) δεν μπορώ να απαντήσω ακριβώς αλλά παίρνουν τιμές x από 0 - 4 και y από 0-4

Για την εύρεση τριών σημείων του κύκλου, κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις ως εξής:

- *Βρίσκουν τρία σημεία του κύκλου* (6.4.1).
- *Βρίσκουν δύο σημεία του κύκλου* (6.4.2).
- *Βρίσκουν σημεία που δεν ανήκουν στον κύκλο* (6.4.3).
- *Δεν απάντησαν* (6.4.4).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στις απαντήσεις που συμπεριελήφθησαν στην πρώτη κατηγορία, προσδιορίζονται τα δύο σημεία επαφής του κύκλου με τους άξονες και το τρίτο σημείο είναι ένα από τα δύο συμμετρικά των παραπάνω σημείων, ως προς το κέντρο του κύκλου.
- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν τρείς απαντήσεις, που δεν προσδιορίζουν τρίτο σημείο του κύκλου. Τα δύο σημεία που προσδιόρισαν είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τους άξονες.
- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που κάποιο ή κάποια σημεία που αναφέρονταν, δεν ανήκαν στον κύκλο. Από τις εννέα απαντήσεις, που εντάχθηκαν σ’ αυτήν την κατηγορία, οι πέντε αναφέρουν δύο σημεία του κύκλου και ένα που δεν ανήκει σ’ αυτόν, και μάλιστα σε δύο από τις παραπάνω απαντήσεις το τρίτο σημείο ήταν το κέντρο του κύκλου. Στις υπόλοιπες απαντήσεις προσδιορίζονται δύο ή ολότελα τρία σημεία που δεν ανήκουν στον κύκλο.

Για την ιδιότητα που έχουν τα σημεία του κύκλου, οι απαντήσεις κατατάχθηκαν, όπως και στην περίπτωση της έλλειψης, στις παρακάτω κατηγορίες:

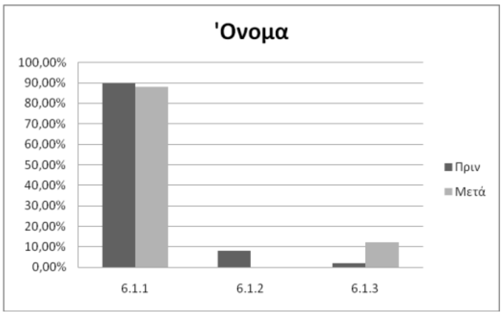
- *Εξειδικευμένος ορισμός* (6.5.1).
- *Γενικός ορισμός* (6.5.2).

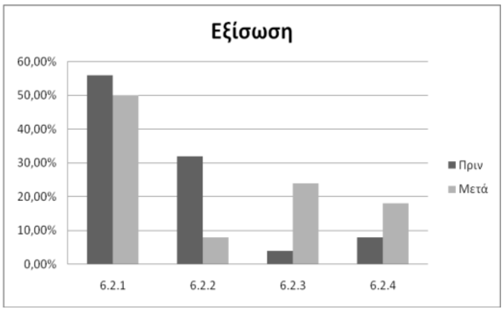
- *Άλλες ιδιότητες* (6.5.3).
- *Λάθος απαντήσεις* (6.5.4).
- *Δεν απάντησαν* (6.5.5).

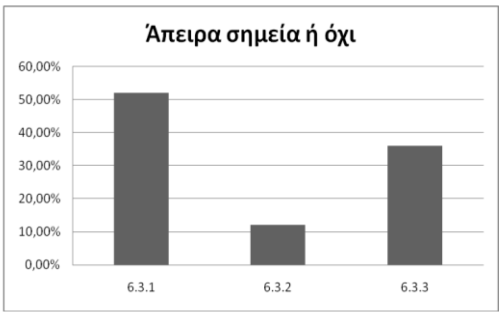
Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

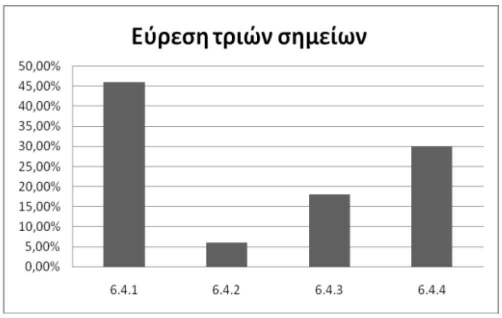
- Οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι, τα σημεία της καμπύλης έχουν την ιδιότητα να απέχουν απόσταση 2 από το κέντρο (εκτατικό αντικείμενο), εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το κέντρο ή «ισαπέχουν από το κέντρο απόσταση ρ», χωρίς να προσδιορίζεται σαφώς το μήκος της ακτίνας ή γράφουν απλά ότι «απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο» (εντατικό αντικείμενο).
- Δύο απαντήσεις που αναφέρουν ότι «τα σημεία επαληθεύουν την εξίσωση», εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία.
- Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκε η απάντηση μιας μαθήτριας, που διατυπώνει μια ιδιότητα που δεν ισχύει στον κύκλο, δηλαδή ότι «τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν μεταξύ τους».

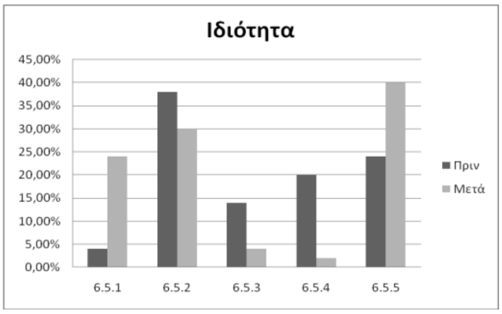
Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.











Για ακόμα μία φορά, η ταυτοποίηση του ονόματος της καμπύλης έχει πολύ υψηλό ποσοστό (90% πριν και 88% μετά). Στην εύρεση της εξίσωσης υπήρξε διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων. Όσον αφορά αυτούς που γράφουν την εξίσωση του συγκεκριμένου γεωμετρικού τόπου, τα ποσοστά είναι περίπου τα ίδια (56% πριν και 50% μετά) και μάλιστα το 82,14% των μαθητών που είχαν βρει την εξίσωση της έλλειψης, βρίσκουν και την εξίσωση του κύκλου (παράρτημα Δ). Παρατηρείται όμως μια σημαντική πτώση των ποσοστών (16% πριν και 4% μετά) των μαθητών που απαντούν με τη γενική εξίσωση και αντίστοιχα μια μεγάλη αύξηση του ποσοστού (4% πριν και 24% μετά) των μαθητών που γράφουν λάθος την εξίσωση. Οι παραπάνω διαφορές οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στους έξι μαθητές (12%), που στην απάντησή τους δίνουν την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ένας στους δύο περίπου (52%) απαντάει ότι τα σημεία του κύκλου είναι άπειρα, ενώ έξι μαθητές (12%) δίνουν διαφορετική απάντηση, μερικοί εκ των οποίων εκφράζοντας τον προβληματισμό τους σε σχέση με το πλήθος των σημείων του κύκλου. Λιγότεροι από τους μισούς (46%) βρίσκουν τρία σημεία του κύκλου, ενώ τρείς μαθητές δεν καταφέρνουν να βρουν τρίτο σημείο και περιορίζονται στα δύο σημεία. Ένα σημαντικό ποσοστό (18%) των μαθητών, αναφέρουν σημεία που όλα ή μέρος αυτών δεν ανήκουν στον κύκλο, ενώ δύο απ' αυτούς συμπεριλαμβάνουν το κέντρο του κύκλου στα σημεία του. Όσον αφορά την περιγραφή της ιδιότητας των σημείων της καμπύλης, παρατηρείται μια αύξηση του ποσοστού (4% πριν και 24% μετά) των απαντήσεων που αναφέρουν τον εξειδικευμένο ορισμό της καμπύλης και μείωση των ποσοστών στις άλλες κατηγορίες. Ειδικά, παρατηρείται μια ελαφριά κάμψη του ποσοστού (38% πριν και 30% μετά) των μαθητών που αναφέρουν το γενικό ορισμό, χωρίς να τον εξειδικεύουν για τη συγκεκριμένη καμπύλη. Αθροιστικά υπάρχει αύξηση (από 42% σε 54%) του ποσοστού των μαθητών που οι απαντήσεις τους ανήκουν στις δύο πρώτες κατηγορίες. Βέβαια από τους 21 μαθητές που δίνουν τον ορισμό ή το γενικό ορισμό για την έλλειψη μόνο οι 15 (το 71,43%) απαντούν και στην περίπτωση του κύκλου με τον ορισμό ή το γενικό ορισμό, ενώ ένα μεγάλο σχετικά ποσοστό (23,81%) δεν απαντάει καθόλου στην περίπτωση του κύκλου (παράρτημα Δ). Επίσης, πολύ λιγότεροι (14% πριν και 4% μετά) μαθητές αναφέρονται σε άλλες ιδιότητες της καμπύλης στην περίπτωση του κύκλου και ακόμα πιο λίγοι (20% πριν και 2% μετά) δίνουν λάθος απαντήσεις, γεγονός το οποίο πιθανά οφείλεται στην εξοικείωση των μαθητών με το σχήμα του κύκλου, σε σχέση με αυτό της έλλειψης. Παρατηρώντας τον πίνακα των αποτελεσμάτων (παράρτημα Δ), μπορεί να σημειωθεί ότι το 75% των μαθητών, που έχουν γράψει τον εξειδικευμένο ορισμό του κύκλου έχουν βρει και την εξίσωσή του, ενώ το 25% δείχνει να παράγει τον ορισμό από το σχήμα, αφού έχει βρει λάθος την εξίσωση ή γράφει την γενική εξίσωση ή δε βρίσκει κάποια εξίσωση. Δηλαδή οι μετατροπές δεν ακολουθούν την πορεία που προδιαγράφεται από την ερώτηση (σχήμα → εξίσωση → ορισμός), αλλά πιθανά ο μαθητής ενεργεί με βάση ποια μετατροπή είναι πιο βολική γι' αυτόν. Τέλος, όσον αφορά το ποσοστό των μαθητών που δεν απάντησαν, παρατηρείται ότι καθώς προχωράμε στα ερωτήματα αυτό αυξάνεται (από 6% στο πρώτο έως 40% στο τελευταίο), με εξαίρεση το τέταρτο ερώτημα (φαινομενικά εύκολο για τους μαθητές). Αυτό ίσως δείχνει την αδυναμία απάντησης σε κάποια ερωτήματα και όχι απαραίτητα την αδιαφορία των μαθητών να απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα.

7η ερώτηση

Η έβδομη ερώτηση ήταν η εξής: «Η εξίσωση $2(x-3)=1-y$ παριστάνει ευθεία. Βρείτε τα σημεία A και B που αντιστοιχούν για $x=0$ και $x=1$. Κάντε το ίδιο για την εξίσωση $2x+y=7$ και βρείτε σημεία A' και B' που αντιστοιχούν για $x=0$ και $x=1$. Τι παρατηρείτε; Στην προσπάθεια να λύσουμε το σύστημα $\begin{Bmatrix} 2(x-3)=1-y \\ 2x+y=7 \end{Bmatrix}$ έχουμε: $\begin{Bmatrix} 2(x-3)=1-y \\ 2x+y=7 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2(x-3)=1-y \\ y=7-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-6=1-7+2x \\ y=7-2x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0=0 \\ y=7-2x \end{Bmatrix}$. Άρα το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. **Γιατί συμβαίνει αυτό;** Πού ανήκουν αυτές οι άπειρες λύσεις; **Αιτιολογήστε** την απάντησή σας.».

Το παραπάνω σύστημα βρέθηκε στη εργασία των Sfard, Linchevski (1994). Στην εργασία αυτή το σύστημα χαρακτηρίζεται ως ιδιόμορφο και ζητείται η λύση του. Οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι «αν τα γράμματα στην εξίσωση αντιπροσωπεύουν άγνωστους αλλά σταθερούς αριθμούς, πως μπορεί οποιοσδήποτε να περιμένει ότι ο ένας ή και οι δύο απ' αυτούς τους σταθερούς αριθμούς μπορεί να είναι "κάθε αριθμός"». Στη συνέχεια αναφέρουν το σύνολο λύσεων είναι μια συνάρτηση και καταλήγουν ότι «για να είναι προετοιμασμένος γι' αυτήν την πιθανότητα, ο μαθητής πρέπει να αντιληφθεί ότι κάθε μία απ' αυτές τις εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ότι αναπαριστούν μια συνάρτηση και τα γραφήματα δύο συναρτήσεων μπορούν να ταυτίζονται σε πεπερασμένο αλλά και άπειρο πλήθος σημείων». Για να βοηθηθούν οι μαθητές να αντιληφθούν τις εξισώσεις με βάση την παραπάνω παρατήρηση, έγινε διαφοροποίηση της διατύπωσης του προβλήματος. Χωρίστηκε το πρόβλημα σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος ζητήθηκε η εύρεση δύο σημείων των ευθειών, με σκοπό η ενέργεια αυτή να στρέψει τους μαθητές στη γεωμετρική αναπαράσταση των εξισώσεων. Στη συνέχεια, λύθηκε το σύστημα για να αποφευκτούν αλγεβρικά λάθη, ζητώντας απ' αυτούς να αιτιολογήσουν τις άπειρες λύσεις του συστήματος. Τέλος, τους ζητήθηκε να πουν που ανήκουν αυτές οι άπειρες λύσεις, επιθυμώντας να διαπιστωθεί αν είναι κατανοητό το σύνολο των λύσεων ενός τέτοιου συστήματος, που συμπίπτει με το σύνολο των λύσεων κάθε μιας από τις εξισώσεις του.

Όσον αφορά την εύρεση σημείων, δημιουργήθηκαν οι παρακάτω κατηγορίες απαντήσεων:

- *Βρίσκουν τα σημεία* (7.1.1).
- *Βρίσκουν λάθος σημεία* (7.1.2).
- *Δεν απάντησαν* (7.1.3).

Αναλυτικότερα, σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που βρίσκουν τα σημεία που ζητούνται σωστά. Δηλαδή το πρώτο σημείο είναι το $A(0,7)$ και το δεύτερο το $B(1,5)$, ενώ τα άλλα δύο σημεία απλά συμπίπτουν με τα πρώτα.
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών, που κάνοντας αλγεβρικά λάθη, οδηγούνται σε εύρεση λάθος σημείων.

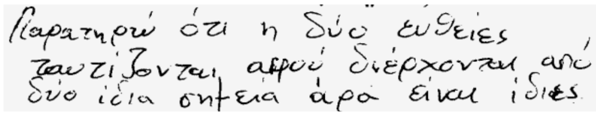
Οι απαντήσεις στην ερώτηση «τι παρατηρείτε;», κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- *Ταύτιση ευθειών* (7.2.1).
- *Ταύτιση εξισώσεων* (7.2.2).
- *Ταύτιση σημείων* (7.2.3).
- *Διάφορες άλλες παρατηρήσεις* (7.2.4).

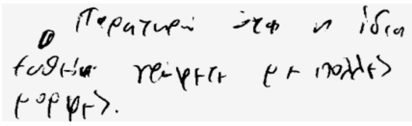
- *Δεν απάντησαν* (7.2.5).

Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες, μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

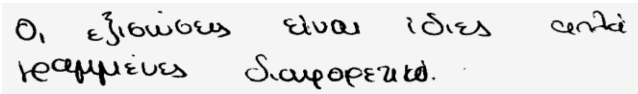
- Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία, παρατηρούν την ταύτιση των ευθειών απλά ή ως συνέπεια της ταύτισης των σημείων ή ως συνέπεια της ταύτισης των εξισώσεων. Δύο τέτοιες απαντήσεις είναι οι παρακάτω. Στη πρώτη απάντηση ο μαθητής παρατηρεί ότι οι ευθείες ταυτίζονται, ως συνέπεια του γεγονότος ότι έχουν δύο κοινά σημεία, όπως βλέπουμε παρακάτω.


Παρατηρώ ότι η δύο ευθείες ταυτίζονται αφού διέρχονται από δύο ίδια σημεία άρα είναι ίδιες.

  Στην δεύτερη απάντηση ο μαθητής επικεντρώνεται στην εξίσωση και παρατηρεί ότι είναι η ίδια ευθεία, αφού έχει την ίδια εξίσωση, όπως βλέπουμε στην παρακάτω απάντηση.


Παρατηρώ ότι η ίδια ευθεία γράφεται με πολλές μορφές.

- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που παρατηρούν την ταύτιση των εξισώσεων, όπως φαίνεται και στην παρακάτω απάντηση.


Οι εξισώσεις είναι ίδιες απλά γραμμένες διαφορετικά.

- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που περιορίζονται στην παρατήρηση της ταύτισης των σημείων.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν διάφορες απαντήσεις που δεν ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες. Από τους τέσσερις μαθητές που βρίσκουν λάθος τα σημεία, οι τρείς παρατηρούν ότι: «για κάθε τιμή του x αντιστοιχεί ένα y» ή «για κάθε x έχω ένα ζεύγος σημείων» ή ότι «οι ευθείες είναι κάθετες» (ο τέταρτος βλέπει ότι οι εξισώσεις είναι ίδιες). Οι υπόλοιπες απαντήσεις προέρχονται από μαθητές που έχουν βρει σωστά τα σημεία, αλλά οι παρατηρήσεις τους είναι αυτονόητες προτάσεις, όπως ότι: «τα σημεία της ευθείας επαληθεύουν την εξίσωση» ή «για τα ίδια x έχουν ίδιες λύσεις» ή όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση:

παρατηρώ ότι βγήκε το ίδιο αποτέλεσμα και στις δύο εξισώσεις.

Οι κατηγορίες, για την αιτιολόγηση της πρότασης ότι το σύστημα είναι αόριστο, είναι οι παρακάτω:

- *Συμπίπτουν οι ευθείες* (7.3.1).
- *Είναι η ίδια εξίσωση* (7.3.2).
- *Διάφορες αιτιολογήσεις* (7.3.3).
- *Δεν απάντησαν* (7.3.4).

Αναλυτικότερα για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών, που αποδίδουν το γεγονός ότι το σύστημα είναι αόριστο στην ταύτιση των ευθειών. Για παράδειγμα ένας μαθητής λέει ότι:

  αυτό συμβαίνει γιατί η μία ευθεία "βρίσκεται πάνω" στην άλλη, δηλαδή ταυτίζονται άρα έχουν άπειρες κοινές λύσεις που δίνονται είτε από τη μία είτε από την άλλη εξίσωση

- Στην δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, που αντιμετωπίζοντας το σύστημα αλγεβρικά, αιτιολογούν τις άπειρες λύσεις ως συνέπεια της ταύτισης των εξισώσεων. Μία απ' αυτές τις απαντήσεις είναι:

  Κάνοντας στην πρώτη εξίσωση επιμεριστική ιδιότητα βγήκε ότι $2(x-3)=1-y \Rightarrow 2x-6=1-y \Rightarrow 2x+y=7$.

- Οι υπόλοιπες αιτιολογήσεις, που δε σχετίζονται με τις δύο παραπάνω κατηγορίες, εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία. Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή, στο προηγούμενο ερώτημα δεν είχαν παρατηρήσει ταύτιση ευθειών ή εξισώσεων (παράρτημα Δ), εκτός από έναν που είχε παρατηρήσει ταύτιση ευθειών και στη συνέχεια αποδίδει ότι το σύστημα είναι αόριστο, στο ότι η μία εξίσωση γίνεται ταυτότητα μετά την αντικατάσταση. Από τις υπόλοιπες απαντήσεις, κάποιες είναι λάθος, όπως «οι ευθείες είναι παράλληλες» ή «οι δύο εξισώσεις δεν έχουν κοινές λύσεις», ενώ κάποιες άλλες δεν είναι πλήρεις (προέρχονται από μαθητές που είχαν παρατηρήσει ταύτιση σημείων), όπως ότι «υπάρχουν πάρα πολλά σημεία» ή ότι «έχουν κοινά σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο».

Οι απαντήσεις στην ερώτηση, που ανήκουν οι άπειρες λύσεις του συστήματος, εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- Στην ευθεία (αφού συμπίπτουν οι δύο ευθείες) (7.4.1).
- Λάθος απαντήσεις (7.4.2).
- Δεν απάντησαν (7.4.3).

Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες, μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχτηκαν στην πρώτη κατηγορία, απλά διατυπώνουν ότι οι λύσεις του συστήματος ανήκουν στην ευθεία, αφού έχουν αντιληφθεί ότι οι ευθείες συμπίπτουν και γνωρίζουν ότι ψάχνουν τα κοινά σημεία των δύο ευθειών. Μια τέτοια απάντηση είναι η παρακάτω.

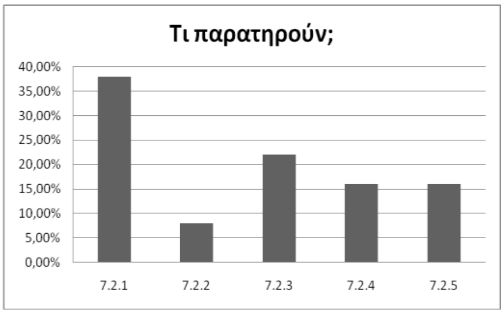
  > Το συστημα είναι αόριστο γιατί οι δυο ευθείες ταυτίζονται και έτσι έχουν άπειρα κοινα σημεια, Αυτές οι άπειρες λύσεις ανήκουν στην ευθεία γιατί οι λύσεις επαληθεύουν και τις δυο ευθείες που ουσιαστικά είναι μια.

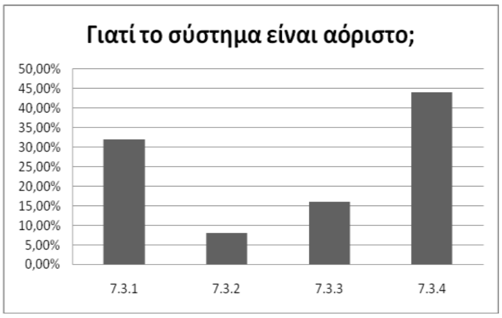
  Ο συγκεκριμένος μαθητής φαίνεται να έχει ταυτίσει τις λύσεις της εξίσωσης με τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος, άρα και με τα σημεία του σχήματος.

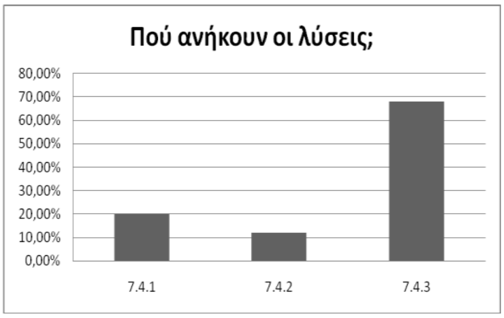
- Στην δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν έξι λάθος απαντήσεις, που τοποθετούν τις άπειρες λύσεις του συστήματος σε άλλα σύνολα. Οι μαθητές που απάντησαν λάθος σ' αυτό το ερώτημα δεν ανήκουν στην κατηγορία των μαθητών που ταύτισαν τις ευθείες ή τις εξισώσεις (παράρτημα Δ). Μια μαθήτρια, αφού έχει βρει σωστά τα σημεία γράφει ότι «οι λύσεις ανήκουν στις δύο ευθείες, οι οποίες είναι παράλληλες αφού δεν τέμνονται». Ένας άλλος μαθητής θεωρεί ότι οι άπειρες λύσεις πρέπει να ανήκουν στο σύνολο των ακεραίων και τέλος μια μαθήτρια αναφέρει ότι λύσεις ενός αόριστου συστήματος είναι όλα τα ζευγάρια πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.

  > Όταν το συστημα είναι αοριστο για οποιαδηποτε τιμη του x ή του y η εξίσωση επαληθευεται.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Ένα πολύ μεγάλο ποσοστό (84%) των μαθητών βρίσκουν σωστά τα σημεία, όμως πολύ λιγότεροι (38%) συμπεραίνουν ότι ταυτίζονται οι ευθείες. Τέσσερις μαθητές (8%) παρατηρούν ότι οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται σκεπτόμενοι αλγεβρικά, ενώ ένας σημαντικός αριθμός μαθητών (22%) απλά παρατηρεί την ταύτιση των σημείων. Όσον αφορά το δεύτερο μέρος της ερώτησης, το ποσοστό των μαθητών που αιτιολογούν τις άπειρες λύσεις του συστήματος, από το γεγονός ότι οι ευθείες συμπίπτουν, είναι ακόμα μικρότερο (32%). Από τους παραπάνω μαθητές οι περισσότεροι (75% ή τρείς στους τέσσερις) έχουν παρατηρήσει ότι οι ευθείες συμπίπτουν από το προηγούμενο ερώτημα και το επαναλαμβάνουν ως αιτία των άπειρων λύσεων του συστήματος (παράρτημα Δ). Τέσσερις μαθητές (8%) δίνουν ως αιτία των άπειρων λύσεων του συστήματος ότι οι εξισώσεις ταυτίζονται, όμως κανείς απ’ αυτούς δεν απαντάει στο τελευταίο ερώτημα(παράρτημα Δ). Δηλαδή οι μαθητές που σκέφτονται αλγεβρικά, δεν μπορούν ενδεχομένως να διανοηθούν το σύνολο των λύσεων του συστήματος. Μόνο το 20% των μαθητών καταλήγει να γράψει ότι οι λύσεις ανήκουν στην ευθεία (αφού συμπίπτουν οι δύο ευθείες). Οι μαθητές αυτοί πιθανά έχουν αντιληφθεί και ταυτίσει το σύνολο λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης, με τα σημεία του σχήματος ως μια διαφορετική αναπαράσταση της ίδιας έννοιας. Όλοι, εκτός από έναν, οι παραπάνω μαθητές έχουν αιτιολογήσει τις άπειρες λύσεις ως συνέπεια της ταύτισης των ευθειών. Ο μαθητής που αποτελεί την εξαίρεση, δεν απάντησε στο προηγούμενο ερώτημα, αλλά είχε παρατηρήσει την ταύτιση των ευθειών αρχικά (παράρτημα Δ). Και σε αυτή την ερώτηση υπάρχει σταδιακή αύξηση των ποσοστών των μαθητών που δεν απαντούν, με αποκορύφωση το 68% για το τελευταίο ερώτημα, γεγονός που δείχνει την ολοένα αυξανόμενη δυσκολία των μαθητών να ανταποκριθούν στα διαδοχικά ερωτήματα που τίθενται.

8^{η} ερώτηση

Στην ερώτηση αυτή ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

$$a) x^2 - 1 = 0,\ \beta) x - 2y + 3 = 0,\ \gamma) 4x^2 + y^2 = 4$$

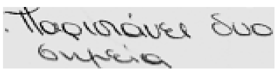
Η ερώτηση αυτή είχε ως στόχο, όπως και η 11^{η} ερώτηση του 1^{ου} ερωτηματολογίου, να διαπιστωθεί αν στην πράξη μπορούν οι μαθητές να περιγράψουν, με κάποιο τρόπο, τις λύσεις μιας εξίσωσης.

Οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν με όμοιο τρόπο για να συγκριθούν με τις απαντήσεις του 1^{ου} ερωτηματολογίου. Για την πρώτη εξίσωση οι απαντήσεις εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία των ευθειών* $x = 1$ ή $x = -1$ (8.1.1).
- $x = 1$ ή $x = -1$ (8.1.2).
- *Έχει δύο λύσεις* (8.1.3).
- *Η λύση είναι δύο σημεία* (8.1.4).
- *Περιγραφή επίλυσης* (8.1.5).
- *Λάθος λύση* (8.1.6).
- *Δεν απάντησαν* (8.1.7).

Για τις δύο πρώτες κατηγορίες απαντήσεων, είναι σαφές το είδος των απαντήσεων που εντάχθηκαν. Για τις υπόλοιπες, πιο αναλυτικά, έχουμε τα εξής:

- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν μόνο το πλήθος των λύσεων (σωστά), χωρίς να λύνουν την εξίσωση.
- Οι μαθητές, που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην τέταρτη κατηγορία, αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι δύο σημεία, όπως φαίνεται παρακάτω:



- Ένας μαθητής επιμένει να περιγράφει τον τρόπο που επιλύουμε εξισώσεις, χωρίς να καταλαβαίνει την ερώτηση. Η απάντηση αυτή καταγράφηκε στην πέμπτη κατηγορία.

- Τέλος, ένας μαθητής λύνει λάθος την εξίσωση. Η απάντησή του καταγράφηκε στην έκτη κατηγορία. Ας δούμε πως λύνει λάθος την εξίσωση.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x(x-1)=0$$
$$x=0 \qquad x=1$$

Για τη δεύτερη εξίσωση, οι κατηγορίες απαντήσεων είναι ακριβώς τις ίδιες με την αντίστοιχη ερώτηση στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο.

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας ή η ευθεία* (8.2.1).
- *Οι λύσεις είναι άπειρες* (8.2.2).
- *Μια λύση της εξίσωσης* (8.2.3).
- *Επίλυση ή περιγραφή επίλυσης* (8.2.4).
- *Διάφορες σωστές προτάσεις* (8.2.5).
- *Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις* (8.2.6).
- *Δεν απάντησαν* (8.2.7).

Αναλυτικότερα για τις παραπάνω κατηγορίες, μπορούν να αναφερθούν τα παρακάτω:

- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών, που περιγράφουν τις λύσεις της εξίσωσης ως σημεία της ευθείας ή η ευθεία $x-2y+3=0$. Δύο μάλιστα απ’ αυτούς περιγράφουν τις λύσεις ως συντεταγμένες σημείων που ανήκουν στην ευθεία, ενώ ένας τρίτος μαθητής γράφει ότι «οι λύσεις αντιστοιχούν σε σημεία που βρίσκονται πάνω στη ευθεία $x-2y+3=0$». Οι τρείς αυτοί μαθητές, με τις εκφράσεις που χρησιμοποιούν δείχνουν να αντιλαμβάνονται το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης ως ένα διαφορετικό, από τα σημεία του σχήματος, σύνολο. Μία απ’ αυτές τις απαντήσεις είναι η παρακάτω.

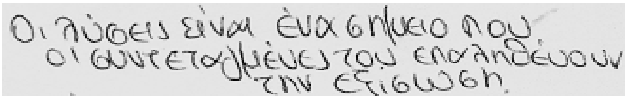
Είναι συντεταγμένες σημείων που ανήκουν στην ίδια ευθεία.

- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, που απλά αναφέρουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι άπειρες.
- Δύο μαθητές βρίσκουν μία λύση της εξίσωσης. Η απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία.

➢ Οι απαντήσεις τεσσάρων μαθητών, που επιλύουν απλά την εξίσωση ως προς ένα άγνωστο ή περιγράφουν την παραπάνω διαδικασία, παρερμηνεύοντας την ερώτηση, συμπεριελήφθησαν στην τέταρτη κατηγορία.

➢ Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν δύο απαντήσεις. Στην πρώτη απάντηση η μαθήτρια γράφει ότι «η εξίσωση έχει παραπάνω από μία λύση», χωρίς να διευκρινίζει το πλήθος των λύσεων. Στη δεύτερη απάντηση απλά περιγράφει η μαθήτρια το είδος της εξίσωσης που έχουμε λέγοντας ότι «είναι μια εξίσωση πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους».

➢ Σε τρείς από τις τέσσερις απαντήσεις, που συμπεριελήφθησαν στην έκτη κατηγορία, διαπιστώνεται αδυναμία εύρεσης λύσεων. Για παράδειγμα ο ένας από τους τρείς μαθητές γράφει ότι η εξίσωση είναι «αδύνατη, διότι δεν ξέρουμε έναν από τους δύο αγνώστους x και y». Στην τέταρτη απάντηση ο μαθητής σκεπτόμενος σωστά γράφει για σημείο που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση, αλλά προσδιορίζει λάθος το πλήθος των λύσεων αφού αναφέρεται σε ένα σημείο. Ας δούμε την απάντηση αυτή.


Οι λύσεις είναι ένα σημείο που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση.

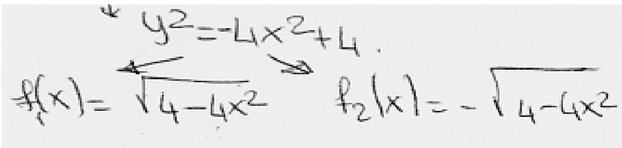
Για την εξίσωση της έλλειψης, η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων έγινε ομοίως με την εξίσωση της παραβολής του 1ου ερωτηματολογίου. Οι κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

- *Οι λύσεις είναι τα σημεία της έλλειψης ή η έλλειψη* (8.3.1).
- *Οι λύσεις είναι άπειρες* (8.3.2).
- *Μια ή δύο λύσεις της εξίσωσης* (8.2.3).
- *Επίλυση η περιγραφή επίλυσης* (8.2.4).
- *Διάφορες σωστές προτάσεις* (8.2.5).
- *Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις* (8.2.6).
- *Δεν απάντησαν* (8.2.7).

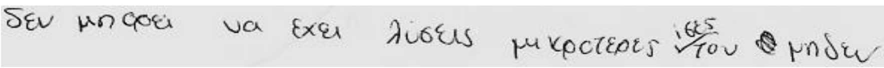
Αναλυτικότερα για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν ότι η έλλειψη $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ή τα σημεία της έλλειψης είναι οι λύσεις της εξίσωσης, χωρίς να λείπουν οι απαντήσεις (έχουμε τρείς τέτοιες) που αναφέρονται σε συντεταγμένες σημείων της έλλειψης ή ότι οι λύσεις αντιστοιχούν σε σημεία της έλλειψης.

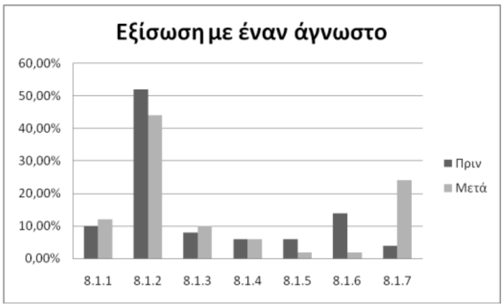
- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που απλά αναφέρουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι άπειρες.
- Ένας μαθητής βρίσκει μία λύση της εξίσωσης, ενώ ένας άλλος βρίσκει δύο λύσεις. Οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία.
- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν δύο απαντήσεις. Στην πρώτη γίνεται περιγραφή επίλυσης, ενώ στη δεύτερη, όπως φαίνεται παρακάτω, επιλύεται η εξίσωση ως προς y και η μαθήτρια γράφει τις δύο σχέσεις ως συναρτήσεις.

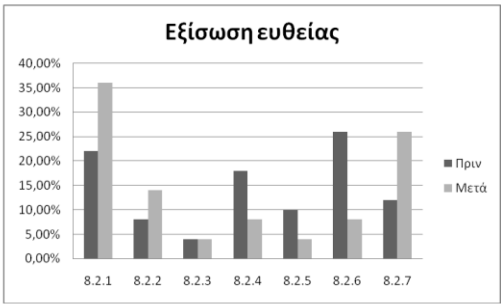


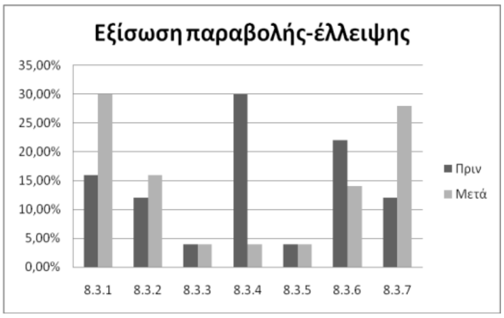
- Στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν δύο απαντήσεις. Στην πρώτη απάντηση η μαθήτρια απλά ξαναγράφει την εξίσωση στη μορφή $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, χωρίς να συμπληρώνει την απάντησή της δηλώνοντας ότι πρόκειται για εξίσωση έλλειψης. Στη δεύτερη απάντηση, απλά περιγράφει η μαθήτρια το είδος της εξίσωσης που έχουμε λέγοντας ότι «είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους».
- Στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν επτά απαντήσεις. Οι τρείς απ’ αυτές αναφέρονται σε άλλες καμπύλες, όπως υπερβολή, κύκλο και παραβολή. Σε δύο απ’ αυτές δηλώνεται η πεποίθηση ότι «δεν μπορούμε να έχουμε λύσεις γιατί έχουμε δύο μεταβλητές». Επίσης σε μία απάντηση αναφέρεται ότι «οι λύσεις είναι δύο σημεία». Τέλος υπάρχει και μία απάντηση που περιορίζει τις λύσεις να είναι θετικές, όπως φαίνεται παρακάτω.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, σε σχέση με τα αντίστοιχα της ενδέκατης ερώτησης του 1^{ου} ερωτηματολογίου, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Όσον αφορά την εξίσωση με ένα άγνωστο, παρατηρείται μια πολύ μικρή αύξηση (2%) του ποσοστού τω μαθητών που βλέπουν τις λύσεις της ως ευθείες στο επίπεδο. Όμως το ποσοστό που την λύνουν σωστά μειώθηκε στο 44% από 52%, σε 2% από 14% μειώθηκε επίσης το ποσοστό αυτών που τη λύνουν λάθος, ενώ αυξήθηκε σε 24% από 4% το ποσοστό των μαθητών που δεν απαντούν, γεγονός που μάλλον οφείλεται σε δυσκολίες των μαθητών να λύσουν την εξίσωση αυτή. Άλλωστε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, ενώ στο πρώτο ερωτηματολόγιο ήταν πρώτου βαθμού. Όσον αφορά την εξίσωση της ευθείας, υπάρχει αύξηση, κατά 14%, του ποσοστού (από 22% πριν σε 36% μετά) των μαθητών, που βλέπουν τις λύσεις της εξίσωσης ως σημεία της ευθείας (ή συντεταγμένες σημείων της ευθείας ή αντιστοιχούν σε σημεία της ευθείας), καθώς επίσης και μία αύξηση, κατά 6%, του ποσοστού (από 8% πριν σε 14% μετά) των μαθητών που αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι άπειρες, γεγονός που οφείλεται, κατά πάσα πιθανότητα, στη διδακτική παρέμβαση, στην οποία επισημάνθηκαν επανειλημμένα τα παραπάνω. Το ερώτημα έγινε πιο κατανοητό, αφού μειώθηκε το ποσοστό (από 18% πριν σε 8% μετά) αυτών που επιλύουν την εξίσωση, καθώς επίσης μειώθηκαν και οι λάθος απόψεις και προσεγγίσεις (από 26% πριν σε 8% μετά). Τέλος αυξήθηκαν οι μαθητές που δεν απαντούν στο ερώτημα. Όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια μεταστροφή των μαθητών σε σωστότερες απόψεις (ακόμα και η αύξηση του ποσοστού αυτών που δεν απαντούν, ενδεχομένως δείχνει περισσότερη ωριμότητα από τη μεριά τους). Για την παραβολή-έλλειψη τα αποτελέσματα δείχνουν να επιβεβαιώνουν την τάση που εμφανίστηκε παραπάνω στην περίπτωση της ευθεία. Σχεδόν διπλασιάστηκε το ποσοστό των μαθητών (από 16% πριν σε

30% μετά) που βλέπει τις λύσεις ως σημεία της έλλειψης, ενώ αυξήθηκε το ποσοστό αυτών (από 12% πριν σε 16% μετά) που αναφέρουν ότι έχει άπειρες λύσεις. Πιθανά, και λόγο του τύπου της εξίσωσης της έλλειψης, σε σχέση με την εξίσωση της παραβολής, μειώθηκε πάρα πολύ το ποσοστό των μαθητών (από 30% πριν σε 4% μετά) που επιλύουν την εξίσωση ως προς ένα άγνωστο. Μειώθηκε το ποσοστό των μαθητών (από 22% πριν σε 14% μετά) που προσεγγίζουν λάθος το θέμα, ενώ αυξήθηκε και πάλι το ποσοστό αυτών (από 12% πριν σε 28% μετά) που δεν απάντησαν. Παρατηρείται μια σταθερότητα στις απόψεις των μαθητών, που απάντησαν σωστά στο δεύτερο και τρίτο ερώτημα της αντίστοιχης ερώτησης του πρώτου ερωτηματολογίου. Συγκεκριμένα παρατηρείται, όσον αφορά την εξίσωση της ευθείας, ότι όλοι, εκτός από έναν, που περιγράφουν τις λύσεις ως σημεία της ευθείας στο πρώτο ερωτηματολόγιο, πράττουν το ίδιο και στο δεύτερο, ενώ στην περίπτωση της παραβολής-έλλειψης, όλοι οι μαθητές που περιγράφουν τις λύσεις της εξίσωσης ως σημεία της παραβολής στο πρώτο ερωτηματολόγιο, περιγράφουν τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης ως σημεία της έλλειψης (παράρτημα Δ).

9^η ερώτηση

Η ερώτηση αυτή, που έπρεπε να απαντηθεί αιτιολογημένα, ήταν: «Πόσες λύσεις **μπορεί** να έχει το σύστημα (χωρίς να το λύσετε);

$$\left\{\begin{matrix} (x-1)^2+(y+2)^2=36 \\ 2x+5y-7=0 \end{matrix}\right\}».$$

Ο στόχος της ερώτησης αυτής, ήταν να διαπιστωθεί αν υπήρξε αλλαγή του τρόπου αντίληψης των εξισώσεων ενός τέτοιου συστήματος (αλγεβρικό αντικείμενο), άρα και των λύσεων του και συγκεκριμένα αν μετά τη διδακτική παρέμβαση αυξήθηκε ο αριθμός των μαθητών που, μεταβαίνοντας από μία αναπαράσταση σε μία άλλη, αναγνωρίζουν τις καμπύλες ή ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις αυτές και απαντούν με βάση τη γεωμετρική αντίληψη που έχουν για τα αντικείμενα αυτά (στη 2^η ερώτηση του 2^{ου} ερωτηματολογίου, ρωτούσαμε ακριβώς το ίδιο πράγμα).

Διατηρήθηκαν οι ίδιες κατηγορίες απαντήσεων, μ' αυτές που είχαν δημιουργηθεί για την 12^η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου, με στόχο να συγκριθούν τα αποτελέσματα. Οι κατηγορίες αυτές είναι:

- *Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση γεωμετρική* (9.1).

- *Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση αλγεβρική* (9.2).
- *Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση* (9.3).
- *Λάθος απάντηση επιχειρώντας γεωμετρική αιτιολόγηση* (9.4).
- *Λάθος απάντηση επιχειρώντας αλγεβρική αιτιολόγηση* (9.5).
- *Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση* (9.6).
- *Δεν απάντησαν* (9.7).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που σκεπτόμενοι γεωμετρικά και διακρίνοντας περιπτώσεις, προσδιορίζουν το πλήθος των λύσεων από καμία έως και δύο. Μία απ' αυτές είναι:

Εφόσον η πρώτη εξίσωση παριστάνει κύκλο και η δεύτερη ευθεία και οι λύσεις του συστήματος είναι τα κοινά τους σημεία, το σύστημα μπορεί να έχει καμία, μία ή δύο λύσεις.

➢ Δύο μαθητές, που οι απαντήσεις τους συμπεριελήφθησαν στη δεύτερη κατηγορία, απαντούν σωστά σκεπτόμενοι αλγεβρικά το θέμα. Ας ακολουθήσουμε τη σκέψη του ενός απ' αυτούς.

Διότι αν αντικαταστήσουμε τον ένα άγνωστο ως προς τον άλλο θα έχει μια δευτεροβάθμια που αν η
$\Delta = 0 \rightarrow$ μια διπλή λύση.
$\Delta < 0 \rightarrow$ καμία λύση
$\Delta > 0 \rightarrow$ δύο διαφορετικές λύσεις

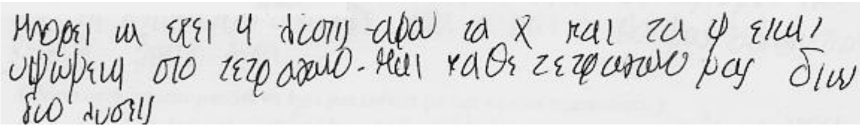
➢ Οι απαντήσεις δύο μαθητών εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία. Ο πρώτος απλά αναφέρει ότι το σύστημα μπορεί να έχει μέχρι δύο λύσεις, ενώ ο δεύτερος αναφέρεται σε πλήθος σημείων, όπως φαίνεται παρακάτω, δίνοντας μια ένδειξη ότι αντιμετώπισε το θέμα γεωμετρικά.

1 κοινό σημείο, 2 κοινά σημεία ή κανένα

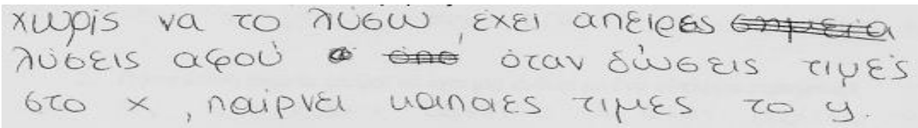
➢ Στην τέταρτη κατηγορία εντάχθηκε η απάντηση ενός μαθητή που αντιμετωπίζει το θέμα γεωμετρικά, αλλά χωρίς να λαμβάνει υπ' όψιν του μία περίπτωση, με αποτέλεσμα να μην απαντάει σωστά στο ερώτημα.

Το σύστημα αυτό μπορεί να έχει μία ή δύο λύσεις γιατί αποτελείται από τις εξισώσεις ενός κύκλου και μιας ευθείας.

- Στην πέμπτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν τρία είδη απαντήσεων. Στο πρώτο είδος, που συμπεριλαμβάνει επτά απαντήσεις, οι μαθητές, μετρώντας χωριστά τα x και y, ανεβάζουν το πλήθος των λύσεων του συστήματος στον αριθμό τέσσερα, με αιτιολόγηση το γεγονός ότι η μία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού. Μια χαρακτηριστική απάντηση είναι η παρακάτω:

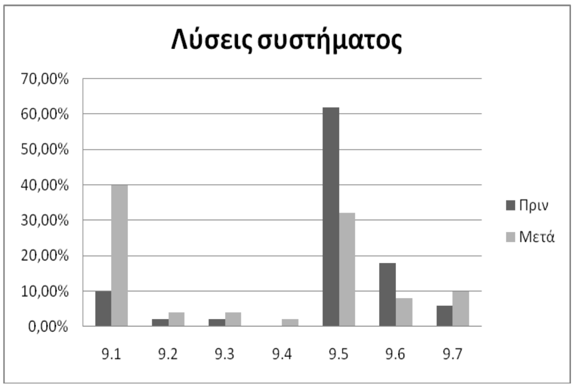
  
  Μπορει να εχει 4 λυσεις αφου τα x και τα y ειναι υψωμενα στο τετραγωνο - και καθε τετραγωνο μας διει διο λυσεις

  Στο δεύτερο είδος, συμπεριλαμβάνονται πέντε απαντήσεις, στις οποίες το πλήθος των λύσεων γίνεται άπειρο. Προφανώς οι μαθητές που απάντησαν κατ' αυτόν τον τρόπο ήταν επηρεασμένοι από τη διδακτική παρέμβαση, στην οποία το πλήθος των λύσεων-σημείων των εξισώσεων που διαπραγματευτήκαμε ήταν άπειρο. Μία απ' αυτές είναι:

  
  χωρis να το λυσω, εχει απειρες ~~σημεια~~ λυσεις αφου ~~απο~~ οταν δωσεις τιμες στο x, παιρνει καποιες τιμες το y.

  Τέλος, στο τρίτο είδος συμπεριλαμβάνονται τέσσερις απαντήσεις, όπου με αιτία τη δευτεροβάθμια εξίσωση, αναφέρουν ότι τα σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Στην έκτη κατηγορία εντάχθηκαν τέσσερις απαντήσεις. Στις τρείς απ' αυτές αναφέρεται μόνο η λέξη «άπειρες» χωρίς επεξηγήσεις, ενώ στην τέταρτη ο μαθητής αναφέρει ότι έχουμε έξι λύσεις, τρείς για το x και τρείς για το y, αθροίζοντας πιθανά τους βαθμούς των εξισώσεων ως προς κάθε άγνωστο, χωρίς όμως να αιτιολογεί την απάντησή του.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, σε σχέση με τα αντίστοιχα της δωδέκατης ερώτησης του 1ου ερωτηματολογίου, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Σε 30% ανέρχεται η αύξηση του ποσοστού (από 10% πριν σε 40% μετά) των μαθητών, που μεταβαίνοντας από την εξίσωση στο σχήμα απαντούν σωστά στην ερώτηση. Να σημειωθεί εδώ ότι το 80% (16 από τους 20 μαθητές) των μαθητών που οι απαντήσεις τους ανήκουν στην πρώτη κατηγορία, είχαν απαντήσει σωστά στην 2η ερώτηση, που αφορούσε το πλήθος των κοινών σημείων μιας ευθείας και ενός κύκλου (παράρτημα Δ). Επίσης, οι τέσσερις από τους πέντε μαθητές που στο πρώτο ερωτηματολόγιο απαντούν σωστά προσεγγίζοντας το θέμα γεωμετρικά, πράττουν το ίδιο και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, ενώ ο πέμπτος απαντάει σωστά προσεγγίζοντας το θέμα αλγεβρικά (παράρτημα Δ). Αθροίζοντας τα ποσοστά των κατηγοριών 9.1 και 9.2 προκύπτει ότι περίπου οι μισοί μαθητές (48%) να απαντούν σωστά αυτή τη φορά, έναντι του μικρού σχετικά ποσοστού (14%) των σωστών απαντήσεων στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Το ποσοστό των μαθητών που φέρνουν στο μυαλό τους τα σχήματα, που παριστάνουν οι εξισώσεις, πριν απαντήσουν, αυξήθηκε κατά 32% (10% πριν και 42% μετά) και είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό αυτών που επιχειρούν αλγεβρικά να απαντήσουν (42% έναντι 36%). Απ’ αυτούς που επιχειρούν αντιμετωπίζοντας το θέμα γεωμετρικά το 95,24% απαντάει σωστά, ενώ απ’ αυτούς που επιχειρούν αλγεβρικά μόνο το 11,11% απαντάει σωστά. Δηλαδή, η αύξηση του ποσοστού των μαθητών που μεταβαίνουν από την εξίσωση στο σχήμα, πριν απαντήσουν, ήταν ο καθοριστικός παράγοντας της βελτίωσης της επίδοσης των μαθητών στην ερώτηση αυτή.

10η ερώτηση

Στην δέκατη ερώτηση, ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν αιτιολογημένα το είδος της επίπεδης γραμμής, που είναι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x)=3x-7, x\in\mathbb{R} \text{ και } k(x)=-\sqrt{x}, x\geq 0 \text{ και } g(x)=2\sqrt{4-x^2}, -2\leq x\leq 2$$

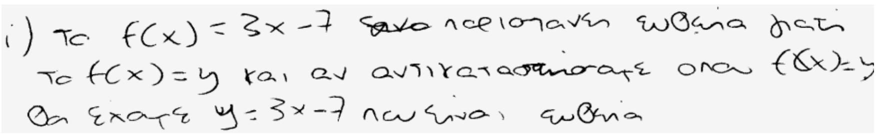
Ο σκοπός της ερώτησης αυτής, ήταν να διαπιστωθεί αν βελτιώθηκε η επίδοση των μαθητών, όσον αφορά την αναγνώριση της ευθείας και των καμπύλων ως γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Η απαίτηση να απαντήσουν αιτιολογημένα οι μαθητές, ουσιαστικά είχε στόχο να τους προτρέψει να κάνουν χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$, για να φτιάξουν στην εξίσωση της ευθείας ή της καμπύλης που προκύπτει.

Οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν, με τον ίδιο τρόπο που κατηγοριοποιήθηκαν στην 13η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου. Οι κατηγορίες για τη συνάρτηση f είναι οι παρακάτω:

- *Ευθεία* (10.1.1).
- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (10.1.2).
- *Δεν απάντησαν* (10.1.3).

Αναλυτικότερα για τις κατηγορίες αυτές μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν τρία είδη απαντήσεων. Στο πρώτο είδος, οι μαθητές απλά αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία (12 μαθητές), ενώ στο δεύτερο είδος οι μαθητές καταλήγουν στην εξίσωση της ευθείας μέσω της χρήσης της εξίσωσης $y = f(x)$ (18 μαθητές). Μια τέτοια απάντηση είναι η παρακάτω.

  i) Το $f(x)=3x-7$ ~~σαν~~ παριστανει ευθεια γιατι
  το $f(x)=y$ και αν αντικαταστησατε οπου $f(x)=y$
  θα εχατε $y=3x-7$ πω ειναι ευθεια

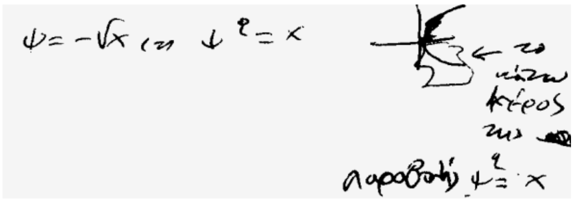
  Τέλος τρείς μαθητές δικαιολογούν ότι είναι ευθεία γιατί είναι $1^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο.
- Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν τρείς απαντήσεις, που στις δύο απ' αυτές αναφέρεται ότι πρόκειται για έλλειψη, ενώ στην τρίτη ότι είναι παραβολή.

Οι κατηγορίες για τη συνάρτηση k είναι οι παρακάτω:

- *Τμήμα παραβολής* (10.2.1).
- *Παραβολή* (10.2.2).
- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (10.2.3).
- *Δεν απάντησαν* (10.2.4).

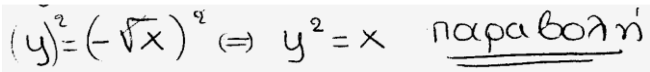
Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι πρόκειται για τμήμα παραβολής. Στις περισσότερες δείχνεται στο σχήμα όπως φαίνεται στην παρακάτω απάντηση.



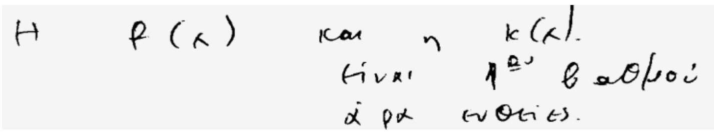
Κάποιοι προσδιορίζουν το τμήμα καμπύλης από τη σχέση $y \leq 0$, ενώ μια μαθήτρια όπως και στο πρώτο ερωτηματολόγιο αναφέρεται σε «ημισυνάρτηση» παραβολής. Από τους επτά μαθητές που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή, μόνο δύο δεν κάνουν χρήση της εξίσωσης $y = k(x)$.

➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή. Οι μισοί (6 στους 12) μαθητές κάνουν χρήση του τύπου $y = k(x)$ για να καταλήξουν στην εξίσωση της παραβολής. Ένα παράδειγμα είναι το παρακάτω.



Οι υπόλοιποι απλά αναφέρουν το όνομα.

➢ Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν διάφορες απαντήσεις. Δύο μαθητές γράφουν σωστά ότι πρόκειται για καμπύλη, χωρίς να διευκρινίζουν περαιτέρω την άποψή τους. Έξι μαθητές απάντησαν ότι είναι ευθεία και μάλιστα ένας απ' αυτούς, όπως φαίνεται παρακάτω, δικαιολογεί την άποψη του θεωρώντας, λαθεμένα βέβαια, ότι είναι πρώτου βαθμού.



Οι υπόλοιποι μαθητές γράφουν ότι είναι σημείο, έλλειψη ή υπερβολή.

Για τη συνάρτηση g δημιουργήθηκαν οι παρακάτω κατηγορίες, σε αντιστοιχία με τις κατηγορίες που είχαν δημιουργηθεί για την αντίστοιχη συνάρτηση (ημικύκλιο) στο 1ο ερωτηματολόγιο.

- *Τμήμα έλλειψης* (10.3.1).
- *Έλλειψη* (10.3.2).

- *Διάφορες άλλες απαντήσεις* (10.3.3).
- *Δεν απάντησαν* (10.3.4).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- Οι τέσσερις στους πέντε μαθητές που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν σ’ αυτήν την κατηγορία με χρήση του τύπου $y = g(x)$ καταλήγουν στην εξίσωση της έλλειψης. Στη συνέχεια αναφέρουν ότι πρόκειται για τμήμα έλλειψης, με δύο απ’ αυτούς να κάνουν και το σχετικό σχήμα. Ο πέμπτος χωρίς καμία αιτιολόγηση γράφει ότι: «είναι κομμάτι έλλειψης με εστίες στον $y'y$ και $y \geq 0$».
- Στη δεύτερη κατηγορία όλες οι απαντήσεις, εκτός μίας που απλά ανέφερε ότι έχουμε έλλειψη, είναι πανομοιότυπες. Ας δούμε μία απ’ αυτές.

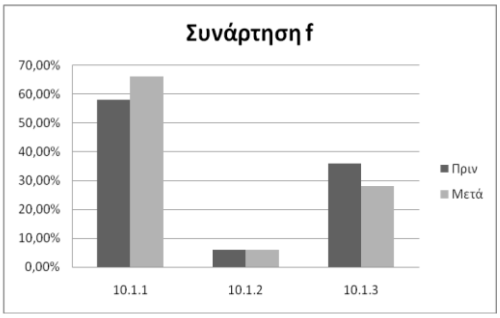
  έλλειψη γιατί αν υψώσουμε γίνεται
  $y^2 = 4(4-x^2) \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 16$
  $\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

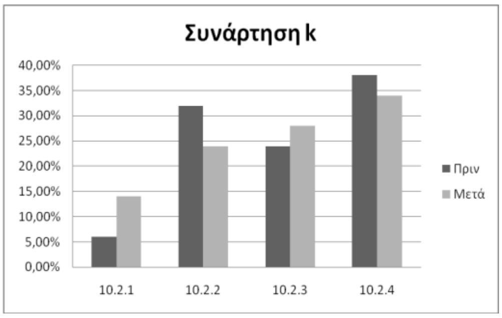
- Στην τρίτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν διάφορες απαντήσεις. Προφανώς επηρεασμένοι από τη διδακτική παρέμβαση, που μελετήθηκε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2$, περισσότεροι από τους μισούς (11 στους 21) μαθητές απαντούν κύκλος ή ημικύκλιο, χωρίς οι περισσότεροι να προσπαθήσουν να διαπιστώσουν αν όντως είναι κύκλος. Δε λείπουν βέβαια και τα αλγεβρικά λάθη (ξέχασε το 2 που υπήρχε πριν από τη ρίζα και το τετράγωνο για την f) που οδηγούν σε λάθος απαντήσεις, όπως φαίνεται παρακάτω.

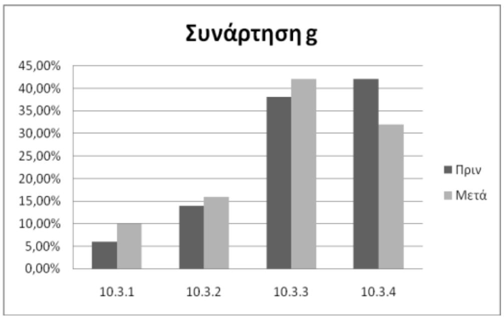
  κύκλος διότι $f(x) = y^2 = 16 - x^2$

  Τέσσερις μαθητές απαντούν σωστά ότι πρόκειται για καμπύλη και μάλιστα δύο απ’ αυτούς αιτιολογούν την άποψή τους λέγοντας ότι είναι δευτέρου βαθμού (βλέπουν το x^2). Οι υπόλοιπες απαντήσεις είναι υπερβολή, ευθεία ή ακόμα και σημείο. Τρείς από τους μαθητές κάνουν χρήση του τύπου $y = g(x)$.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, σε σχέση με τα αντίστοιχα της 13ης ερώτησης του 1ου ερωτηματολογίου, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.







Παρατηρείται μια μικρή σχετικά αύξηση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων και για τις τρείς συναρτήσεις, ενώ ακόμη και αν, για τις k και g , αθροίσουμε τα ποσοστά των δύο πρώτων κατηγοριών, τότε για την k δεν υπάρχει διαφορά από το πρώτο ερωτηματολόγιο, ενώ για την g έχουμε μια μικρή αύξηση. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση της ευθείας υπάρχει μια μικρή αύξηση (8%) στο ποσοστό των μαθητών που δίνουν τη σωστή απάντηση, ενώ περισσότεροι από τους μισούς (18 στους 33 μαθητές), απ' αυτούς που απαντούν σωστά, κάνουν χρήση του εντατικού αντικειμένου $y = f(x)$, για να οδηγηθούν στην εξίσωση της ευθείας. Για τη δεύτερη συνάρτηση παρατηρείται υπερδιπλασιασμός (14% μετά έναντι 6% πριν) των σωστών απαντήσεων. Οι μαθητές που αναφέρονται σε τμήμα παραβολής στην πλειοψηφία τους (5 στους 7) προέρχονται από την κατηγορία των μαθητών που στο πρώτο ερωτηματολόγιο απαντούν παραβολή (παράρτημα Δ). Επίσης πέντε από τους επτά μαθητές κάνουν χρήση του τύπου $y = k(x)$ για να φτάσουν στην εξίσωση της παραβολής. Μειώθηκε το ποσοστό (από 32% σε 24%) των απαντήσεων που αναφέρουν ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή, με τους μισούς μαθητές να βρίσκουν την εξίσωση πριν απαντήσουν. Αν αθροιστούν τα ποσοστά (6%+32%=14%+24%=38%) των απαντήσεων των δύο αυτών κατηγοριών, τότε προκύπτει ότι το ποσοστό δεν αλλάζει μεταξύ του πρώτου και δεύτερου ερωτηματολογίου. Όμως δεν είναι οι ίδιοι μαθητές που απαντούν μ' αυτόν τον τρόπο και στα δύο ερωτηματολόγια. Για την πρώτη συνάρτηση, το 78% των μαθητών έχουν απαντήσει τουλάχιστον μία φορά ότι είναι ευθεία, ενώ το 46% και τις δύο φορές απαντάει ότι είναι ευθεία (παράρτημα Δ). Από το 20% των μαθητών που απαντούν για πρώτη φορά σωστά στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, το 60% κάνει χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$, πριν απαντήσει. Για τη δεύτερη συνάρτηση, το 48% των μαθητών έχουν απαντήσει ότι είναι παραβολή ή τμήμα παραβολής τουλάχιστον μία φορά, ενώ το 28% και τις δύο φορές απαντάει με αυτόν τον τρόπο (παράρτημα Δ). Από το 10% των μαθητών, που απαντούν πρώτη φορά μ' αυτόν τον τρόπο στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, πάλι το 60% κάνει χρήση της εξίσωσης $y = k(x)$, πριν απαντήσουν. Η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια μικρή μερίδα (12% για την ευθεία και 10% για την παραβολή) μαθητών μετακινήθηκε από σωστότερες σε πιο λαθεμένες απόψεις, αλλά και στο συμπέρασμα ότι, πάνω από τους μισούς μαθητές, που για πρώτη φορά στο δεύτερο ερωτηματολόγιο εκφράστηκαν πιο σωστά, κάνουν χρήση του εντατικού αντικειμένου $y = f(x)$ πριν διατυπώσουν την άποψή τους. Τέλος για τη συνάρτηση g υπάρχει αύξηση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων κατά 4% (από 6% πριν σε 10% μετά), ενώ αθροιστικά έχουμε αύξηση κατά 6% των ποσοστών (από 20% σε 26%) των μαθητών που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στις δύο πρώτες κατηγορίες. Επίσης παρατηρείται αύξηση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν διαφορετικά, με τους περισσότερους απ' αυτούς να απαντούν κύκλος ή ημικύκλιο. Το τελευταίο οφείλεται μάλλον στην επιρροή της διδακτικής παρέμβασης στους μαθητές (ο κύκλος φτιάχτηκε ως γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων, που οι τύποι τους μοιάζουν με τον τύπο της g). Από τους μαθητές που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στις δύο πρώτες κατηγορίες απαντούν με τον ίδιο τρόπο (οι απαντήσεις ανήκουν στις δύο πρώτες κατηγορίες) το 70%. Παρατηρείται μεγάλη αύξηση της χρήσης του εντατικού αντικειμένου $y = f(x)$, αν και οι περισσότεροι μαθητές απαντούν, χωρίς να επιχειρούν με τη χρήση του να φτάσουν στην εξίσωση της γραμμής. Συγκεκριμένα κάνουν χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$, για την ευθεία 18 από τους 36 μαθητές που απάντησαν, για την παραβολή 11 (6 μαθητές από την κατηγορία 10.2.1 και 5 μαθητές από την 10.2.2) από τους 33 μαθητές που απάντησαν και τέλος στην έλλειψη 14 (4 μαθητές από την κατηγορία 10.3.1, 7 μαθητές από την 10.3.2 και 3 μαθητές από την 10.3.3) από τους 34 μαθητές που απάντησαν. Στο πρώτο ερωτηματολόγιο ένας μόνο μαθητής κάνει χρήση της εξίσωσης αυτής. Θεωρείται ότι η μεγάλη αύξηση της χρήσης της εξίσωσης $y = f(x)$ οφείλεται σε δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι υπήρξε προτροπή στους μαθητές να αιτιολογήσουν την άποψή τους και ο δεύτερος είναι η εκτεταμένη χρήση της εξίσωσης στη διδακτική παρέμβαση. Παρά την αύξηση της χρήσης της εξίσωσης, τα ποσοστά χρήσης της (από 22% έως 36%) παραμένουν χαμηλά και αυτός ίσως να είναι και ο λόγος που και τα ποσοστά αναγνώρισης της ευθείας ή καμπύλης που έχουν ως γραφικές παραστάσεις οι παραπάνω συναρτήσεις παραμένουν και αυτά αρκετά χαμηλά. Δηλαδή, πολλοί μαθητές απαντούν με βάση την αίσθηση που έχουν και όχι με βάση κάποιο συλλογισμό που προέρχεται από το χειρισμό του τύπου της συνάρτησης, παρά το γεγονός ότι στο δεύτερο ερωτηματολόγιο η ερώτηση συμπληρώθηκε ζητώντας να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, με στόχο να αναγκαστούν να επεξεργαστούν τον τύπο της συνάρτησης, σε συνδυασμό με το εντατικό αντικείμενο $y = f(x)$. Τέλος, αρκετοί μαθητές που καταλήγουν στις εξισώσεις της παραβολής ή της έλλειψης, δε λαμβάνουν υπ' όψιν τους περιορισμούς που θα τους οδηγούσαν στη σωστή απάντηση.

11^{η} ερώτηση

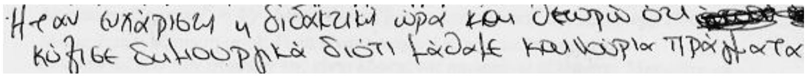
Η ενδέκατη ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να γράψουν, αν η ωριαία διδακτική παρέμβαση ήταν ευχάριστη ή δυσάρεστη εμπειρία και αν κύλισε δημιουργικά ή βαρετά. Ο στόχος της ερώτησης ήταν να διαγνωστεί το συναίσθημα (ευχαρίστηση ή δυσφορία) που άφησε στους μαθητές αυτή η παρέμβαση και ταυτόχρονα αν θεωρούν ότι απασχολήθηκαν δημιουργικά την ώρα αυτή ή όχι.

Επειδή κάποιοι μαθητές εκφράστηκαν εκτός των πλαισίων της ερώτησης, κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις ως εξής:

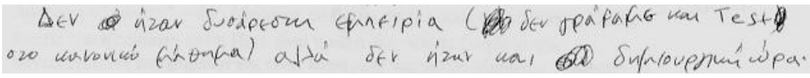
- *Ευχάριστη και δημιουργική εμπειρία* (11.1).
- *Ευχάριστη εμπειρία* (11.2).
- *Δημιουργική εμπειρία* (11.3).
- *Βαρετά* (11.4).
- *Άλλη απάντηση (11.5).*
- *Δεν απάντησαν* (11.6).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

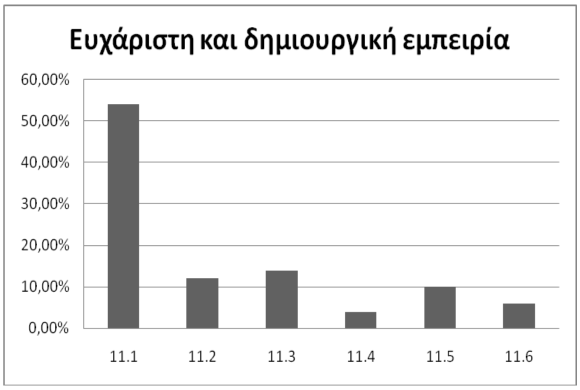
- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι η διδακτική παρέμβαση ήταν ευχάριστη και δημιουργική εμπειρία. Σε κάποιες απ' αυτές τις απαντήσεις και στο πλαίσιο της αιτιολόγησης της άποψής τους, οι μαθητές αναφέρουν ότι έμαθαν καινούρια πράγματα ή έκαναν μια καλή επανάληψη ή ότι ξεκαθάρισαν πράγματα. Μία απ’ αυτές είναι:


Ηταν ευχάριστη η διδακτική ώρα και θεωρώ ότι κύλισε δημιουργικά διότι μάθαμε καινούρια πράγματα

- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που περιορίστηκαν να δηλώσουν ότι ήταν μια ευχάριστη εμπειρία, χωρίς να απαντούν στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης.
- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, που απαντώντας στο άλλο σκέλος της ερώτησης, αναφέρουν ότι η διδακτική παρέμβαση ήταν δημιουργική εμπειρία.
- Για την τέταρτη κατηγορία έχουμε δύο απαντήσεις που αναφέρουν ότι η ώρα κύλισε βαρετά.
- Πέντε μαθητές επέλεξαν να διατυπώσουν την άποψή τους διαφορετικά. Οι τέσσερις απ’ αυτούς χαρακτηρίζουν την εμπειρία τους αυτή ως ενδιαφέρουσα για διάφορους λόγους ο καθένας. Ο πέμπτος μαθητής γράφει:


Δεν ήταν δυσάρεστη εμπειρία (δεν γράψαμε και Test στο κανονικό μάθημα) αλλά δεν ήταν και δημιουργική ώρα.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Η εμπειρία ήταν ευχάριστη για το 66% των μαθητών, ενώ η διδακτική παρέμβαση κύλισε δημιουργικά για το 68% των μαθητών. Τέσσερις μαθητές (8%) χαρακτήρισαν την εμπειρία ως ενδιαφέρουσα, ενώ δύο μαθητές (4%) εκφράστηκαν αρνητικά (τη χαρακτήρισαν βαρετή).

12η ερώτηση

Η ερώτηση αυτή ήταν: «Σου έκανε εντύπωση κάτι, απ’ αυτά που συνέβησαν στην ωριαία διδακτική παρέμβαση; Αν ναι, ποιο ήταν αυτό που σε εντυπωσίασε;». Ο στόχος της ερώτησης ήταν η διάγνωση του συμβάντος εκείνου που εντυπωσίασε τους μαθητές, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Εντυπωσιάστηκαν ή όχι οι μαθητές; Οι κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

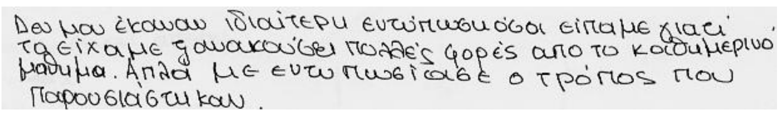
- Ναι (12.1.1).
- Όχι (12.1.2).
- Δεν απάντησαν (12.1.3).

Όμως ποιο ήταν αυτό που τους εντυπωσίασε; Οι απαντήσεις των μαθητών, εμπίπτουν στις παρακάτω κατηγορίες:

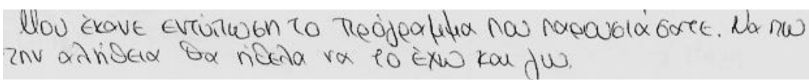
- Η παρουσίαση (12.2.1).
- Το πρόγραμμα EucliDraw (12.2.2).
- Η σχέση του συνόλου των λύσεων με τα σημεία του σχήματος (12.2.3).
- Η σύνδεση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές (12.2.4).
- Διάφορες άλλες απαντήσεις (12.2.5).
- Δεν απάντησαν (12.2.6).

Αναλυτικότερα σε σχέση με τη δεύτερη κατηγοριοποίηση έχουμε:

- Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που εντυπωσιάστηκαν από την παρουσίαση συνολικά ή από τον τρόπο που παρουσιάστηκαν τα μαθηματικά αντικείμενα. Ας δούμε μια τέτοια απάντηση.


Δεν μου έκαναν ιδιαίτερη εντύπωση όσα είπαμε γιατί τα είχαμε ξανακούσει πολλές φορές απο το καθημερινό μάθημα. Απλά με εντυπωσίασε ο τρόπος που παρουσιάστηκαν.

- Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που εντυπωσιάστηκαν με το πρόγραμμα EucliDraw.


Μου έκανε εντύπωση το πρόγραμμα που παρουσιάσατε. Να πω την αλήθεια θα ήθελα να το έχω και γω.

- Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις τριών μαθητών, που εντυπωσιάστηκαν όταν συνειδητοποίησαν, ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι συντεταγμένες των σημείων του σχήματος.

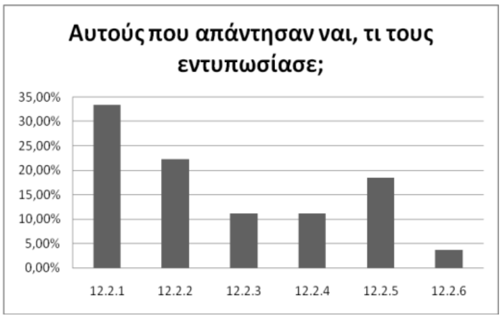
Μου άρεσαν τα θεματα που αναλυσαμε στην αιθουσα στο υπογειο και εντυπωσιαστηκα οταν συνειτδοποιησα οτι καθε συντεταγμενη π.χ. της ελλειψης ειναι και για λυση ενω το ηξερα ειχε το συνειτδοποιησα.

- Στην τέταρτη κατηγορία συμπεριελήφθησαν τρείς απαντήσεις που αναφέρουν, ότι η σχέση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές είναι εντυπωσιακή. Μία απ' αυτές είναι:

εντυπωσιακη ηταν η εκφραση των κωνικων τομων σε μια η δυο συναρτησεις.

- Τέλος στην πέμπτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις πέντε μαθητών, που δεν μπορούσαν να ενταχθούν στις παραπάνω κατηγορίες. Για παράδειγμα, κάποιον απ' αυτούς τον εντυπωσίασε η ευκολία που δόθηκαν οι έννοιες, ενώ κάποιον άλλο τον εντυπωσίασαν οι ερωτήσεις που διατυπώθηκαν την ώρα της διδακτικής παρέμβασης.

Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.



Περίπου οι μισοί μαθητές (54%) δηλώνουν ότι εντυπωσιάστηκαν, ενώ ένας στους τέσσερις περίπου (24%) γράφει ότι δεν εντυπωσιάστηκε. Από τους μαθητές που εντυπωσιάστηκαν έχουμε έναν στους τρείς (33,33%) να δηλώνει ότι του έκανε εντύπωση η παρουσίαση ή ο τρόπος παρουσίασης των μαθηματικών αντικειμένων, χωρίς να υπεισέρχεται σε επιμέρους θέματα της παρουσίασης. Το δεύτερο πιο εντυπωσιακό πράγμα που θεωρούν οι μαθητές είναι το πρόγραμμα EucliDraw με ποσοστό 22,22%, απ' αυτούς που εντυπωσιάστηκαν. Τέλος από την ίδια κατηγορία μαθητών ένα σχετικά μικρό ποσοστό (11,11%) εντυπωσιάστηκαν, με τη σχέση του συνόλου των λύσεων μιας εξίσωσης και των συντεταγμένων των σημείων του σχήματος και το ίδιο ποσοστό εντυπωσιάστηκαν με τη σχέση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές.

$13^{η}$ ερώτηση

Η $13^{η}$ και τελευταία ερώτηση ήταν: «Έμαθες κάτι καινούριο; Αν ναι, ποιο ήταν αυτό;», με στόχο να διαπιστωθεί αν οι μαθητές θεωρούν ότι προστέθηκε κάτι καινούριο στις γνώσεις τους, και ποιο ήταν αυτό.

Έμαθαν κάτι καινούργιο ή όχι; Οι κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

- Ναι (13.1.1).
- Όχι (13.1.2).
- Δεν απάντησαν (13.1.3).

Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

- ➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι έμαθαν κάτι καινούργιο.
- ➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις, εκείνων των μαθητών, που δηλώνουν οι δεν έμαθαν κάτι καινούργιο. Μερικοί απ' αυτούς (περίπου οι μισοί), συμπληρώνουν την απάντησή τους με δηλώσεις του τύπου: «ξεκαθάρισα πράγματα» ή «έκανα μια καλή επανάληψη». Μια τέτοια απάντηση είναι η παρακάτω.

Βασικά έγινε μια επανάληψη, με ένα πιο ιδιαίτερο τρόπο.

Ποιο ήταν το καινούργιο που έμαθαν; Οι κατηγορίες απαντήσεων που δημιουργήθηκαν είναι οι παρακάτω:

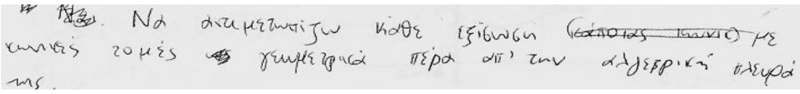
- Τη σύνδεση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές (13.2.1).
- Τη σχέση του συνόλου των λύσεων με τα σημεία του σχήματος (13.2.2).
- Διάφορες άλλες απαντήσεις (13.2.3).
- Δεν απάντησαν (13.2.4).

Πιο αναλυτικά για τις παραπάνω κατηγορίες μπορούν να αναφερθούν τα εξής:

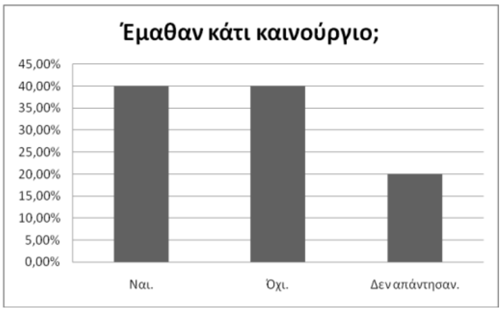
- ➢ Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν ότι, το καινούργιο που έμαθαν είναι η σχέση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές.
- ➢ Στη δεύτερη κατηγορία συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρουν, τη σχέση των λύσεων μιας εξίσωσης δύο αγνώστων με τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος.

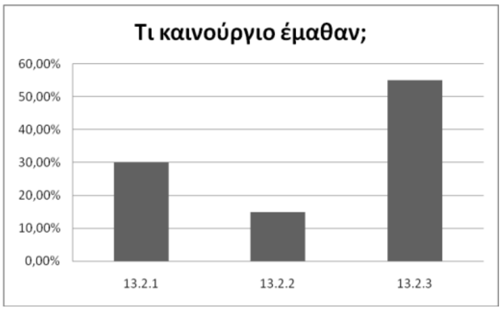
➢ Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν διάφορες απαντήσεις. Σε κάποιες απ' αυτές δεν είναι σαφές το καινούργιο, αφού αναφέρουν ότι έμαθαν κάποιες λεπτομέρειες που τους διέφευγαν χωρίς να προσδιορίζουν ποιες είναι αυτές. Επίσης κάποιοι δηλώνουν γενικά ότι «έμαθα κάτι» ή «κατανόησα κάποια πράγματα». Ένας μαθητής απαντάει με χιούμορ:

Υπάρχουν βέβαια και απαντήσεις που το καινούργιο συγκεκριμενοποιείται. Δυο μαθητές δηλώνουν, ότι το καινούργιο που έμαθαν είναι ότι «η ευθεία μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία». Τέλος, ένας μαθητής αναφέρει ότι έμαθε να αντιμετωπίζει και γεωμετρικά τις εξισώσεις, όπως βλέπουμε στην παρακάτω απάντηση.



Τα αποτελέσματα για την ερώτηση αυτή, φαίνονται στα παρακάτω ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων. Στο δεύτερο ραβδόγραμμα, φαίνονται τα ποσοστά των 20 μαθητών που στο αρχικό ερώτημα είχαν απαντήσει ότι έμαθαν κάτι καινούργιο.





Τέσσερις στους δέκα μαθητές, δηλώνουν ότι έμαθαν κάτι καινούργιο και το ίδιο ποσοστό απαντάει αρνητικά. Από τους μαθητές που απάντησαν θετικά, το 30% (6 μαθητές) αναφέρει την εμπλοκή των συναρτήσεων στη μελέτη των εννοιών ως νέα γνώση, ενώ το 15% (3 μαθητές) στη σχέση του συνόλου των λύσεων με τα σημεία του σχήματος. Επίσης τρείς μαθητές (15% επί του συνόλου των μαθητών που απαντούν θετικά), που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην κατηγορία 13.2.3, συγκεκριμενοποιούν το καινούργιο που έμαθαν, ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών αυτής της κατηγορίας (οκτώ μαθητές ή 40% απ' αυτούς που απαντούν θετικά) δε συγκεκριμενοποιούν την απάντηση τους.

4.9.2. Συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων

Για τους περισσότερους μαθητές η ωριαία διδακτική παρέμβαση ήταν ευχάριστη και δημιουργική. Πάνω από τους μισούς μαθητές εντυπωσιάστηκαν από κάτι που συνέβη την ώρα αυτή. Αυτούς, κατά φθίνουσα σειρά προτίμησης, τους εντυπωσίασαν η παρουσίαση, το πρόγραμμα EucliDraw, η σχέση των λύσεων μιας εξίσωσης με τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος κ.α. Λιγότεροι από τους μισούς μαθητές δηλώνουν ότι έμαθαν κάτι καινούργιο, αλλά ένα μεγάλο ποσοστό (40%) απ' αυτούς, δεν το προσδιορίζουν. Απ' αυτούς που το προσδιορίζουν οι περισσότεροι αναφέρονται στην εμπλοκή των συναρτήσεων στη μελέτη των εννοιών αυτών.

Για τις λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους διαπιστώθηκε μια αύξηση, κατά 22%, των μαθητών που αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση (αύξηση 8%), ή συντεταγμένες σημείων (αύξηση 14%). Αν προστεθεί και η αύξηση 6% αυτών που αναφέρουν ότι οι λύσεις είναι σημεία, τότε η συνολική αύξηση σ' αυτές τις κατηγορίες απαντήσεων είναι 28%. Έτσι φτάνουμε το 54% των μαθητών (26% πριν) να συσχετίζει το x με το y όταν αναφέρεται στις λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης. Επίσης στην 8η ερώτηση που ζητούσε από τους μαθητές να υλοποιήσουν τις απόψεις τους περί των λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης, παρατηρήθηκε αύξηση (14% και στις δύο εξισώσεις) του ποσοστού των απαντήσεων που περιγράφουν τις λύσεις των συγκεκριμένων εξισώσεων, ως σημεία της ευθείας και της έλλειψης αντίστοιχα.

Επιμένουν (σε ποσοστό 64%, έναντι 68% στην παραβολή), όπως και στην παραβολή, να προσπαθούν να περιγράφουν την έλλειψη με βάση το φορμαλιστικό ορισμό. Παρατηρήθηκε μια μικρή αύξηση (6%) του ποσοστού των μαθητών που περιγράφουν πλήρως την έννοια της έλλειψης, έναντι αυτών που περιγράφουν πλήρως την παραβολή.

Η προτροπή που έγινε στους μαθητές να διακρίνουν περιπτώσεις, εκτόξευσε στο 72%, έναντι του 28% πριν, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων για το πλήθος των κοινών σημείων, που μπορεί να έχει μια ευθεία με ένα κύκλο. Η αύξηση της δομικής προσέγγισης (μετάβαση από την εξίσωση στο σχήμα) των εξισώσεων κατά 32%, προκάλεσε ουσιαστικά την αύξηση, κατά 32% (30% με γεωμετρική αιτιολόγηση και 2% με αλγεβρική αιτιολόγηση) των σωστών απαντήσεων, στην ερώτηση που ζητούσε να προσδιοριστεί το πλήθος των λύσεων, που μπορεί να έχει ένα σύστημα εξισώσεων μιας ευθείας και ενός κύκλου.

Το 30% των μαθητών απαντάει σωστά και με πληρότητα στην ερώτηση αν ο κύκλος είναι γράφημα συνάρτησης και αν μπορούμε από το σχήμα του κύκλου να ορίσουμε συναρτήσεις, βελτιώνοντας σαφώς τα αποτελέσματα της 5ης ερώτησης του πρώτου ερωτηματολογίου (αν και η ερώτηση στο πρώτο ερωτηματολόγιο παρερμηνεύτηκε από πολλούς μαθητές). Στην 10η ερώτηση που ζητούσε από τους μαθητές να αναφέρουν το είδος της επίπεδης γραμμής που είναι οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων (ευθεία, τμήμα παραβολής, τμήμα έλλειψης), παρατηρήθηκε μια μικρή αύξηση των σωστών απαντήσεων κατά 4% ή 8%. Παρατηρήθηκαν στοιχεία που δείχνουν ότι οι μαθητές απαντούν στη συγκεκριμένη ερώτηση με βάση τη διαίσθησή τους. Πάντως η χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$, πιθανών να βοήθησε στη βελτίωση της επίδοσης, αλλά σίγουρα βοήθησε οι μαθητές να απαντήσουν πιο συνειδητά.

Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές (56%) μεταβαίνουν σωστά από την εξίσωση της παραβολής στο σχήμα (5η ερώτηση). Όμως η χρήση του τύπου για την εύρεση σημείων του σχήματος στην παραβολή, δεν εξασφαλίζει ότι κάποιος θα οδηγηθεί στο σωστό σχήμα. Δύο στους τρείς που φτιάχνουν λάθος σχήμα, έχουν βρει σημεία με μη αρνητικές συντεταγμένες. Βέβαια 8 στους 19 μαθητές, που βρίσκουν λύσεις που δεν παραπέμπουν σε συμμετρικά σημεία, φτιάχνουν το σχήμα σωστά, αφού πιθανά βρίσκονται στο στάδιο της συμπύκνωσης των εννοιών, με αποτέλεσμα να μην έχουν την ανάγκη των σημείων με αρνητική τετμημένη για να φτιάξουν σωστά το σχήμα.

Όσον αφορά τη μετάβαση από το σχήμα στην εξίσωση και τον ορισμό στην περίπτωση του κύκλου, έναντι της έλλειψης στο πρώτο ερωτηματολόγιο, παρατηρούνται παρόμοια ποσοστά (50% μετά και 56% πριν) επιτυχούς μετάβασης από το σχήμα στην εξίσωση. Βέβαια υπάρχει μείωση κατά 24%, στο ποσοστό αυτών που αναφέρουν τη γενική εξίσωση. Αυτό πιθανά οφείλεται στην αύξηση κατά 20%, του ποσοστού των μαθητών που γράφουν λάθος την εξίσωση του κύκλου. Για τη μετάβαση στον εξειδικευμένο ορισμό υπάρχει αύξηση κατά 20%, για τον κύκλο έναντι της έλλειψης. Μείωση των ποσοστών στις υπόλοιπες κατηγορίες απαντήσεων, με τη μεγαλύτερη μείωση (18%) να παρατηρείται στις λάθος απαντήσεις, όμως υπάρχει αύξηση του ποσοστού (16%) των μαθητών που δεν απάντησαν σ’ αυτό το ερώτημα.

Τέλος, για την 7η ερώτηση που σχετίζεται με το αόριστο σύστημα, παρά το γεγονός ότι με τον τρόπο που τέθηκαν τα ερωτήματα υπήρχε σκοπιμότητα να στραφούν οι μαθητές σε δομική προσέγγιση των εξισώσεων, μόνο το 32% αιτιολογεί τις άπειρες λύσεις ως συνέπεια τις ταύτισης των ευθειών και μόλις το 20% των μαθητών αναφέρει ότι οι λύσεις ανήκουν στην ευθεία. Η σταδιακή αύξηση (από 8% για την εύρεση σημείων σε 68% για την ερώτηση που ανήκουν οι λύσεις) του ποσοστού των μαθητών που δεν απαντούν στην ερώτηση αυτή δείχνει αδυναμία απάντησης στα ερωτήματα.

4.10. Συμπεράσματα

Όσον αφορά τον πρώτο στόχο που τέθηκε, παρατηρείται αύξηση, κατά 8%, του ποσοστού των μαθητών που βλέπουν τις λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους ως ξεχωριστό σύνολο (ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση). Αθροιστικά παρατηρείται αύξηση 28%, φτάνοντας στο 54%, στο ποσοστό των μαθητών που αντιλαμβάνονται τις λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης, με τα x και y συσχετισμένα (ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση, συντεταγμένες σημείων ή σημεία). Βέβαια, υπάρχει και το 40% των μαθητών που, από τις απαντήσεις τους, δε φαίνεται να έχουν αντιληφθεί τις λύσεις όπως οι παραπάνω. Για το 95% απ' αυτούς, το ίδιο συνέβαινε και πριν τη διδακτική παρέμβαση. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι, για παράδειγμα, ότι το 80% αυτών των μαθητών δεν αναγνωρίζει τις λύσεις της εξίσωσης $x-2y+3=0$ στα σημεία της αντίστοιχης ευθείας (παράρτημα Δ). Επίσης, παρατηρείται αύξηση κατά 14% του ποσοστού των μαθητών που περιγράφουν της λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης ως σημεία μιας ευθείας ή καμπύλης, φτάνοντας το ποσοστό της επιτυχούς περιγραφής στο 36% για την ευθεία και στο 30% για την έλλειψη. Τα ποσοστά αυτά δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά, αν σκεφτούμε ότι την εξίσωση της ευθείας και τις εξισώσεις των καμπυλών, τις αναγνωρίζουν ένα πολύ μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών (98% την ευθεία, 88% για την έλλειψη). Για τους περισσότερους μαθητές, δεν είναι δεδομένο ότι οι λύσεις της εξίσωσης της ευθείας έχουν σχέση με την ευθεία. Τέλος, στην 7η ερώτηση υπάρχει ένα σχετικά μικρό ποσοστό (20%) μαθητών που καταλήγουν ότι οι λύσεις του συστήματος ανήκουν στην ευθεία (αφού οι ευθείες συμπίπτουν). Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, παρά την αύξηση των ποσοστών, οι περισσότεροι μαθητές δεν ξεκαθάρισαν πλήρως, από τη διδακτική παρέμβαση, τι είναι το σύνολο των λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης και σε τι αντιστοιχεί. Βέβαια, ο τρόπος που παρουσιάστηκε (μέσω παραδειγμάτων) δεν τους επέτρεψε να δουν όλο το σύνολο και κατ' επέκταση να αντιληφθούν ότι το σύνολο αυτό βρίσκεται σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία του σχήματος. Η συγκεκριμένη ιδιότητα απλά επισημάνθηκε, χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις, αφού δεν είχε παρουσιαστεί όλο το σύνολο των λύσεων. Ίσως αυτός να είναι ένας λόγος που οι άπειρες λύσεις του συστήματος δεν αντιστοιχήθηκαν με τα σημεία της ευθείας.

Βέβαια, υπάρχει και το θέμα της έννοιας της εξίσωσης που εμπλέκεται εδώ. Τι καταλαβαίνουν οι μαθητές όταν ακούν τη λέξη εξίσωση και αντίστοιχα λύσεις της εξίσωσης; Η διδασκαλία των εξισώσεων, στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, αρχίζει από το δημοτικό. Μέχρι και την Α΄ Λυκείου οι εξισώσεις, οι οποίες γίνονται αντικείμενο μελέτης από τους μαθητές, περιέχουν ένα άγνωστο και έχουν σχεδόν πάντα πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Ψάχνοντας τη σχετική βιβλιογραφία, βρέθηκαν δεκάδες δημοσιευμένες εργασίες με θέμα τις εξισώσεις και τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια αυτή. Όμως, οι εργασίες αυτές περιορίζονται σε εξισώσεις με ένα άγνωστο. Για παράδειγμα σε μία απ' αυτές (Dreyfus, Hoch, 2004), φαίνεται τι μπορεί να σημαίνει μια εξίσωση για ένα μαθητή. Η έρευνα έγινε σε μια επιλεγμένη ομάδα (μάθαιναν Μαθηματικά πιο πάνω από το μέσο επίπεδο) από μαθητές Λυκείου στο Ισραήλ. Ερωτήθηκαν τι σκέπτονται ότι είναι μια εξίσωση. Μερικές από τις απαντήσεις που πήραν είναι:

- Μια άσκηση που ο στόχος είναι να βρεις το x.
- Μια άσκηση που έχει μια λύση, δηλαδή μια άσκηση πριν τη λύσεις και στο τέλος κάνοντας κάτι σ' αυτήν, να βρεις τη λύση.
- Το x είναι στη μία μεριά, οι αριθμοί στην άλλη και μεταξύ τους να υπάρχει το σύμβολο της ισότητας, πρέπει να βρεθεί το x.
- Μια έκφραση που περιλαμβάνει δύο μεριές, το σύμβολο της ισότητας και το x να είναι σημειωμένο σε μια ή παραπάνω από μια θέσεις.
- Δυο μέρη συνδεόμενα με το σύμβολο της ισότητας και ορισμένους κανόνες για λύση.

Πόσο έτοιμος, μπορεί να είναι κάποιος από τους παραπάνω μαθητές, να δεχτεί ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις, τις οποίες και βέβαια δεν μπορεί να βρει (τουλάχιστον όλες), αφού δεν του δίνουμε κατάλληλους κανόνες; Ο μόνος κανόνας (και αυτός δε διατυπώνεται σαφώς, τουλάχιστον στο βιβλίο) που δίνεται είναι ότι, οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε σημεία της ευθείας ή της καμπύλης που παριστάνει η εξίσωση. Αυτός ίσως είναι ο βασικός λόγος της μεγάλης διαφοράς, μεταξύ του ποσοστού αναγνώρισης της εξίσωσης μιας γραμμής και της επιτυχούς περιγραφής των λύσεων αυτής της εξίσωσης. Επίσης πως μπορεί να δεχτεί, έχοντας τις παραπάνω πεποιθήσεις, ότι λύνοντας την εξίσωση ως προς x δεν παράγει κάποιο αποτέλεσμα, αλλά απλά επαναδιατυπώνει την εξίσωση; Δεν είναι τυχαίο ότι το 18% των μαθητών πριν και το 8% μετά, στην προσπάθεια να περιγράψει τις λύσεις μιας εξίσωσης ευθείας, προσπαθεί να την επιλύσει ως προς έναν άγνωστο. Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο πέρασμα από τις αλγεβρικές εξισώσεις με ένα άγνωστο, στις εξισώσεις που συναντούμε στην Αναλυτική Γεωμετρία. Αναφερόμαστε με τον ίδιο όρο, για δύο διαφορετικού είδους μαθηματικά αντικείμενα.

Όμως τι γίνεται από την πλευρά των καθηγητών; Υπάρχουν και σ' αυτούς προβλήματα. Όπως αναφέρεται στην ενότητα 4.5.1. κάποιος καθηγητής θέλει άλλη μια εξίσωση για να λύσει την $2x+5y=\sqrt{a}$, ενώ ένας άλλος δηλώνει ότι δεν μπορεί να τη λύσει. Σε εργασία των Attorps, Tossavainen (2007), το 44% των μελλοντικών καθηγητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και το 38% των μελλοντικών, μετά τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, καθηγητών, που συμμετείχαν στην έρευνα, η οποία έγινε στη Σουηδία, δεν αναγνωρίζουν την $x=2$ ως εξίσωση. Επίσης πάνω από τους μισούς συμμετέχοντες στην έρευνα (10 καθηγητές και 75 εκπαιδευόμενοι καθηγητές μαθηματικών όλων των βαθμίδων), θεωρούν ότι η $V=\frac{4\pi r^3}{3}$ δεν είναι εξίσωση. Οι συγγραφείς επισημαίνουν, ότι οι καθηγητές και οι εκπαιδευόμενοι καθηγητές «προτιμούν να βλέπουν την έννοια της εξίσωσης ως μια υπολογιστική διαδικασία (λύνω την εξίσωση), παρά ως μία στατική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων». Είναι όμως αυτός ο τρόπος αντίληψης κατάλληλος για τις εξισώσεις που προκύπτουν για την ευθεία και τις καμπύλες στην Αναλυτική Γεωμετρία; Επίσης, με βάση την παραπάνω έρευνα, οι καθηγητές και οι εκπαιδευόμενοι καθηγητές «βλέπουν τις μεταβλητές στην εξίσωση ως άγνωστες ποσότητες». Αν κάποιος καθηγητής έχει αυτή την αντίληψη, είναι ίσως φυσιολογικό να μην μπορεί να δώσει τις λύσεις μιας εξίσωσης όπως η $2x+5y=\sqrt{a}$. Βέβαια αν ζητούσαν από τον παραπάνω καθηγητή να περιγράψει τι παριστάνει αυτή η εξίσωση στην Αναλυτική Γεωμετρία, ίσως να απαντούσε σωστά.

Σε μία συνάντηση που είχε ο ερευνητής με έναν καθηγητή του Πανεπιστημίου Κρήτης, έγραψε στον πίνακα τη σχέση $y=2x+1$, την οποία αποκάλεσε εξίσωση. Αμέσως ο καθηγητής τον διόρθωσε, λέγοντας ότι η συγκεκριμένη σχέση ορίζει μία συνάρτηση. Εδώ βρισκόμαστε μπροστά σε ένα γνωστό στους μαθηματικούς πρόβλημα. Είναι η αμφισημία των σημειωτικών αναπαραστάσεων των εννοιών. Μια σχέση όπως η $y=2x+1$, περιγράφει μια εξίσωση ευθείας, τις οποίας οι λύσεις είναι οι συντεταγμένες των σημείων της, στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όμως η σχέση αυτή ορίζει ταυτόχρονα μια συνάρτηση, στο πλαίσιο της Ανάλυσης, που βέβαια η γραφική της παράσταση είναι η παραπάνω ευθεία. Συνεπώς, εδώ χρειάζεται μια προσέγγιση με βάση το πλαίσιο που κινείται κάποιος και όχι απλά ρωτώντας αν η σχέση $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ είναι εξίσωση ή όχι. Ένα ακόμα παράδειγμα αυτής της αμφισημίας είναι η εξίσωση $2x+5=0$ που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Στο πλαίσιο της Άλγεβρας η εξίσωση αυτή έχει μία λύση. Στο πλαίσιο της επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας έχει ως λύσεις τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας $x = -\frac{5}{2}$, ενώ στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου έχει ως λύσεις τις συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου $x = -\frac{5}{2}$. Δεν οριοθετήθηκε το πλαίσιο, με αποτέλεσμα οι μαθητές να απαντούν ανάλογα με το πλαίσιο που εκείνη τη στιγμή είχαν στο μυαλό τους. Δυστυχώς η ίδια παράβλεψη έγινε και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, με αποτέλεσμα την πολύ μικρή διαφοροποίηση του αποτελέσματος. Το θέμα αυτό πρέπει κατ' αρχήν να είναι ξεκάθαρο στους καθηγητές και στη συνέχεια να επιχειρούμε κάνοντας σαφές κάθε φορά το πλαίσιο που κινούμαστε.

Σε σχέση με την ικανότητα αναπαράστασης μιας έννοιας και μετάβασης από μία αναπαράσταση σε μία άλλη, παρατηρούνται μικρές μεταβολές στα ποσοστά των επιτυχών απαντήσεων των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ο βασικός λόγος που συνέβη αυτό είναι ότι στη διδακτική παρέμβαση έγινε αναφορά στην ισοδυναμία των αναπαραστάσεων των εννοιών, δόθηκαν οι σύνδεσμοι των πεδίων αναπαράστασης (π.χ. $y = f(x)$, αντιστοίχηση λύσεων της εξίσωσης με τα σημεία του αντίστοιχου σχήματος) και παρουσιάστηκε ένας τρόπος μετάβασης από μια αναπαράσταση σε μία άλλη, ακολουθώντας κάθε φορά μια διαφορετική διαδρομή. Όμως αυτό δε λύνει το πρόβλημα. Οι μαθητές μπορεί να συμμετείχαν πρόθυμα στην υλοποίηση της παραπάνω ιδέας, αλλά όταν δούλεψαν μόνοι τους εμφανίστηκαν αδυναμίες, εκτός από τη χρήση των συνδέσμων, στο χειρισμό των εννοιών, αλλά και των ίδιων των συστημάτων αναπαράστασης.

Ας δούμε κατ' αρχήν τα προβλήματα που σχετίζονται με τα συστήματα αναπαράστασης. Όταν ζητείται η κατασκευή του σχήματος, τότε ένα ικανοποιητικό ποσοστό (56% για την παραβολή) μπορεί επιτυχώς να κατασκευάσει το σχήμα. Ποια είναι η αιτία που το 30% των μαθητών αποτυγχάνει να σχεδιάσει σωστά την παραβολή; Ένα μεγάλο μερίδιο ευθύνης υπάρχει στα σημεία που έχουν βρει οι μαθητές. Η έλλειψη κατανόησης του ρόλου του δευτεροβάθμιου όρου της εξίσωσης στα πλαίσια της Άλγεβρας για την παραγωγή συμμετρικών σημείων, οδηγεί τους μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο της εσωτερίκευσης των εννοιών σε λάθος σχήμα. Βέβαια για τους μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο της συμπύκνωσης των εννοιών, δεν αποτελεί εμπόδιο η μη εύρεση των κατάλληλων σημείων, αλλά αυτοί έχουν κατακτήσει ένα υψηλότερο επίπεδο αντίληψης του συστήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Επίσης όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν την εξίσωση του κύκλου στην $6^{η}$ ερώτηση, κάποιοι μαθητές γράφουν λάθος την ακτίνα, ενώ στη συνέχεια που ζητήθηκε να βρουν τρία σημεία του κύκλου, το 24% των μαθητών αποτυγχάνει, με τα 2/3 απ' αυτούς να βλέπουν τις συντεταγμένες των δύο σημείων επαφής του κύκλου με τους άξονες, αλλά να μην βλέπουν ένα τρίτο σημείο ή να γράφουν λάθος τις συντεταγμένες του τρίτου σημείου. Δηλαδή οι παραπάνω μαθητές δεν μπορούν σε ικανοποιητικό βαθμό, να αντλήσουν πληροφορίες από το σχήμα, κάνοντας τους απαραίτητους συσχετισμούς στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας (γεωμετρικό σχήμα σε επίπεδο εφοδιασμένο με σύστημα αξόνων). Στο σημείο αυτό ίσως αξίζει να σημειωθεί, ότι οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να βλέπουν τις συντεταγμένες σημειωμένες πάνω στους άξονες, πριν απαντήσουν την ερώτηση αυτή. Στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες που να σχετίζονται με το παραπάνω θέμα, θεωρώντας ότι οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με το καρτεσιανό επίπεδο. Στο πλαίσιο της γενικότητας των σχημάτων, δε σημειώνονται καν οι συντεταγμένες στους άξονες. Όμως ακόμα και στις περιπτώσεις που τα σχήματα είναι συγκεκριμένα (εφαρμογές 1 και 2 σελ 63, εφαρμογές 1 και 2 σελ 85-86) οι συγγραφείς αποφεύγουν να σημειώσουν τις συντεταγμένες πάνω στους άξονες και περιορίζονται να τις σημειώνουν δίπλα σε κάθε σημείο που εμπλέκεται στο σχήμα. Θεωρούν δηλαδή ότι οι μαθητές βλέποντας τους άξονες, αναγνωρίζουν τις συντεταγμένες πάνω σ' αυτούς και έχουν την ικανότητα να συλλογιστούν με βάση αυτό.

Υπάρχουν όμως προβλήματα και με τις ίδιες τις έννοιες. Κάποιες έννοιες έχουν πιο απλό (σε διατύπωση) ορισμό σε σχέση με άλλες. Επίσης κάποιες έννοιες είναι πιο οικείες στους μαθητές σε σχέση με άλλες. Η παραβολή και η έλλειψη έχουν σαφώς πιο σύνθετο ορισμό από τον κύκλο. Ο κύκλος είναι μία έννοια πιο οικεία στους μαθητές αφού τη διδάσκονται από μικρή ηλικία. Η πολυπλοκότητα των ορισμών της παραβολής και της έλλειψης είναι ο βασικός λόγος που οι περισσότεροι μαθητές αποτυγχάνουν να περιγράψουν την έννοια όταν επιλέγουν να την περιγράψουν με τον τρόπο αυτό. Ας μην ξεχνάμε ότι οι απαντήσεις αρκετών μαθητών βρίσκονται πολύ κοντά στον ορισμό της έννοιας (ξεχνάνε ένα μικρό μέρος της πρότασης). Βέβαια όταν ζητείται ο προσδιορισμός της ιδιότητας των σημείων της έλλειψης, επειδή δεν χρειάζεται να αναφέρουν ότι το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου από τις εστίες είναι μεγαλύτερο της εστιακής απόστασης, ένα μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών (42%) απαντάει σωστά (εξειδικευμένος και γενικός ορισμός). Το ποσοστό αυτό αυξάνεται (54%) περισσότερο όταν ζητείται ο προσδιορισμός της ιδιότητας των σημείων του κύκλου, αφού ο ορισμός του είναι απλούστερος και πιο οικείος στους μαθητές. Για την έλλειψη οι μαθητές μαθαίνουν μία εξίσωση που αναπαριστά την έννοια, ενώ για τον κύκλο δύο (το βιβλίο διαχωρίζει τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων, από τη γενική εξίσωση κύκλου). Η ύπαρξη δύο εξισώσεων για τον κύκλο, σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα της γενικής εξίσωσης του κύκλου ($(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$), οδηγεί σε αύξηση κατά 20% του ποσοστού των μαθητών να γράφουν λάθος εξίσωση για τον κύκλο σε σχέση με την έλλειψη. Δύο μαθητές θεωρούν το κέντρο του κύκλου ως σημείο του, ενώ τρείς μαθητές βλέπουν την παραβολή ως ημικύκλιο, γεγονός που δηλώνει ότι υπάρχει πρόβλημα με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις έννοιες γεωμετρικά.

Υπάρχει ακόμα ένα θέμα που πρέπει να μας απασχολήσει. Το θέμα αυτό σχετίζεται με τον τρόπο που απαντούν οι μαθητές. Κάποιοι επιλέγουν να απαντήσουν με βάση εντατικά μαθηματικά αντικείμενα (γενική εξίσωση, γενικός ορισμός), ενώ κάποιοι άλλοι με εκτατικά μαθηματικά αντικείμενα (εξειδικευμένη εξίσωση, εξειδικευμένος ορισμός). Αυτοί που απαντούν με εντατικά αντικείμενα, ίσως δε θεωρούν αναγκαίο να προσδιορίσουν το συγκεκριμένο εκτατικό αντικείμενο. Αυτό φαίνεται σε μια μερίδα μαθητών, που ενώ έχουν βρει το a της έλλειψης (10η ερώτηση στο πρώτο ερωτηματολόγιο), στον ορισμό γράφουν ότι το άθροισμα των αποστάσεων είναι $2a$, χωρίς να αντικαθιστούν την τιμή που βρήκαν παραπάνω. Όμως, στην περίπτωση του κύκλου περισσότεροι μαθητές γράφουν τον εξειδικευμένο ορισμό (24% στον κύκλο, έναντι 4% στην έλλειψη). Αυτό ίσως να οφείλεται στην επιρροή που άσκησε η διδακτική παρέμβαση στη συγκεκριμενοποίηση των ορισμών (οι ορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν ήταν συγκεκριμένοι και αφορούσαν τον συγκεκριμένο γεωμετρικό τόπο). Βέβαια, μπορεί να οφείλεται και σε άλλους παράγοντες. Ένας απ' αυτούς μπορεί να είναι, ότι ένας στους τέσσερις μαθητές παράγουν τον ορισμό από το σχήμα, χωρίς να βρουν (τουλάχιστον σωστά) την εξίσωση, και το γεγονός αυτό δείχνει ότι αυτοί οι μαθητές αντλούν πληροφορίες από το σχήμα, στο οποίο φαίνεται το κέντρο και η ακτίνα παράγεται με ένα απλό συσχετισμό των στοιχείων της έννοιας.

Συμπερασματικά, θα μπορούσε κάποιος να συμφωνήσει με την άποψη των υποστηριχτών της οντο-σημειωτικής προσέγγισης για τη γνώση, που λέει ότι οι αναπαραστάσεις δεν μπορούν να κατανοηθούν από μόνες τους. Αποκτούν νόημα σαν μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος (Άλγεβρα, Γεωμετρία, Αναλυτική Γεωμετρία), με καθιερωμένα νοήματα και μεταφορές. Συνεπώς η διδακτική παρέμβαση θεωρείται ότι παρενέβη σε ένα βαθμό στο ξεκαθάρισμα των εννοιών (λύσεις εξίσωσης-σημεία του σχήματος) στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Λιγότερο αποτελεσματικά παρενέβη στις αναγκαίες μεταφορές που γίνονται στο πλαίσιο αυτό. Η βελτίωση στην ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε μια άλλη, έχει σχέση με την ικανότητα χειρισμών στα πλαίσια των αναπαραστατικών συστημάτων και όχι μόνο με την ικανότητα χειρισμού της συγκεκριμένης έννοιας. Οι μαθητές που απαντούν, χωρίς να χρησιμοποιούν τα εργαλεία που παρέχει η Αναλυτική Γεωμετρία, δείχνουν να μην έχουν εμπεδώσει τον τρόπο χρήσης των εργαλείων αυτών, στις μετατροπές των εννοιών σ' αυτό το πλαίσιο. Τα εμπόδια που τίθενται από τα άλλα αναπαραστατικά συστήματα (Άλγεβρα, Γεωμετρία) που εμπλέκονται, φυσικά επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών. Βέβαια δεν υπήρχε πρόθεση να γίνει παρέμβαση στα παραπάνω συστήματα, φέρνοντας αποτελέσματα που θα τροποποιούσαν τη συμπεριφορά των μαθητών στο πλαίσιο αυτών των συστημάτων. Όμως, η όποια παρέμβαση στο πλαίσιο του χειρισμού μιας έννοιας, μπορεί να δώσει πληροφορίες για τη λειτουργία του πλαισίου.

Σε σχέση με τις συναρτήσεις, παρατηρείται αύξηση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων. Βέβαια, η εμπλοκή της έννοιας της συνάρτησης πιθανά βοήθησε και στον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις λύσεις των εξισώσεων. Η αύξηση του ποσοστού των μαθητών, που βλέπουν τις λύσεις μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους, με τα x και y συσχετισμένα, θεωρείται (αν και δε μετρήθηκε) ότι οφείλεται σε ένα βαθμό, στην εμπλοκή της έννοιας της συνάρτησης, η οποία συνδέει εξ ορισμού τις δύο αυτές ποσότητες. Μια ένδειξη για τον παραπάνω ισχυρισμό είναι οι απαντήσεις τριών μαθητών που θεωρούν ότι οι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης είναι τα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Μια δεύτερη ένδειξη είναι η συμπεριφορά των 15 μαθητών που απαντούν σωστά και με πληρότητα (κατηγορία 4.1) στην 4η ερώτηση του δεύτερου ερωτηματολογίου που αφορούσε τη σχέση του κύκλου με τις συναρτήσεις. Οι 13 απ' αυτούς θεωρούν τις λύσεις μιας εξίσωσης με τα x και y συσχετισμένα, και μάλιστα 8 από τους 13 άλλαξαν άποψη σε σχέση με το πρώτο ερωτηματολόγιο, βελτιώνοντας τις απαντήσεις τους (παράρτημα Δ). Το ποσοστό του 30%, που απαντάει σωστά και με πληρότητα για το πώς μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις από τον κύκλο, μπορεί να θεωρηθεί αρκετά ικανοποιητικό, αν λάβει κανείς υπ' όψιν του τις επιδώσεις των μαθητών στο πρώτο ερωτηματολόγιο και το γεγονός ότι δε γίνεται χρήση της έννοιας της συνάρτησης στη διδασκαλία των εννοιών αυτών. Επίσης έξι στους δέκα μαθητές γράφουν ότι ο κύκλος δεν αποτελεί γράφημα συνάρτησης, ξεπερνώντας κατά πολύ το ποσοστό των μαθητών αλλά και των φοιτητών στην έρευνα των Tall και Bakar (1992). Πάντως η χρήση της εξίσωσης $y = f(x)$ (από 22% έως 36% στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, έναντι του ενός μαθητή στο πρώτο), ως συνδέσμου μεταξύ των αναπαραστάσεων των εννοιών, βοήθησε στην ωρίμανση των απόψεων των μαθητών σε σχέση με τι παριστάνουν γεωμετρικά οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της 10ης ερώτησης. Βέβαια τα αποτελέσματα στην ερώτηση αυτή, αν και δείχνουν μια μικρή αύξηση των ποσοστών των σωστών απαντήσεων, παραμένουν αρκετά χαμηλά. Επίσης, στην ερώτηση αυτή έχουμε ένα ποσοστό μαθητών, που ενώ στο πρώτο ερωτηματολόγιο απαντάει «σωστά», στο δεύτερο δεν ανταποκρίνεται με τον ίδιο τρόπο, δείχνοντας έλλειψη σταθερότητας στις πεποιθήσεις τους. Δηλαδή πολλοί μαθητές απαντούν με βάση την αίσθηση που έχουν και όχι με βάση κάποιο συλλογισμό που προέρχεται από το χειρισμό του τύπου της συνάρτησης, παρά το γεγονός ότι στο δεύτερο ερωτηματολόγιο η ερώτηση συμπληρώθηκε ζητώντας να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, με στόχο να αναγκαστούν να επεξεργαστούν τον τύπο της συνάρτησης, σε συνδυασμό με το εντατικό αντικείμενο $y = f(x)$. Θεωρείται ότι η αύξηση του ποσοστού χρήσης της εξίσωσης $y = f(x)$, θα μπορούσε να οδηγήσει περισσότερους μαθητές σε σωστότερες απαντήσεις.

Σε σχέση με τον τέταρτο στόχο που τέθηκε, δηλαδή την ενίσχυση της δομικής αντίληψης των εξισώσεων, παρατηρείται αύξηση κατά 32% του ποσοστού των μαθητών που, πίσω από τις εξισώσεις του συστήματος της 9ης ερώτησης (κύκλος- ευθεία), είδαν την καμπύλη και την ευθεία που αναπαριστούν και συλλογίστηκαν με βάση αυτό. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει μια βελτίωση της απόδοσης των μαθητών στη μετατροπή της εξίσωσης στο αντίστοιχο σχήμα, στην περίπτωση που δε γίνεται αναφορά στα σχήματα. Βέβαια το ποσοστό παραμένει κάτω από 50% (για την ακρίβεια 42%), γεγονός που επιβάλει την ανάπτυξη δράσεων που θα ενισχύσουν περαιτέρω τη δομική αντίληψη των εξισώσεων.

4.11. Προτάσεις

Η χρήση της έννοιας της συνάρτησης, με τον τρόπο που παρουσιάστηκε στη διδακτική παρέμβαση, είδαμε ότι βοήθησε στην ωρίμανση των απόψεων των μαθητών, αλλά πιθανόν να βοήθησε και συνολικά στην κατανόηση των εννοιών που διαπραγματευόμαστε. Θεωρείται ότι το επόμενο βήμα πρέπει να είναι η ουσιαστικότερη χρήση της έννοιας της συνάρτησης. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις, να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης. Συγκεκριμένα, για την ευθεία στη γενική περίπτωση ($y = mx + b$), μπορεί να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων, μέσω της έννοιας της συνάρτησης ($f(x) = mx + b$, $x \in \mathbb{R}$), δηλαδή των διατεταγμένων ζευγαριών τιμών $(x, y) = (x, f(x)) = (x, mx + b)$ με $x \in \mathbb{R}$. Για την περίπτωση της ευθείας $x = a$, το σύνολο των λύσεων δίνεται εύκολα από τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, y) = (a, y)$ με $y \in \mathbb{R}$. Η παραπάνω ιδέα, μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σχετικά εύκολα στην περίπτωση της παραβολής. Ακόμα και στην περίπτωση της $y^2 = 2\rho x$, αφού οριστούν οι δύο συναρτήσεις ($f_1(x) = \sqrt{2\rho x}$ με $x > 0$, $f_2(x) = -\sqrt{2\rho x}$ με $x \geq 0$), μπορούν να περιγραφούν οι λύσεις της εξίσωσης μέσα από τις συναρτήσεις αυτές. Φυσικά πιο εύκολα στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε κάποιος να περιγράψει το σύνολο των λύσεων, ως τη συνάρτηση $(x, y) = (f(y), y) = (\frac{1}{2\rho} y^2, y)$ με $y \in \mathbb{R}$, όμως θα κινδύνευε να προκαλέσει σύγχυση και πολλά ερωτηματικά στους μαθητές. Για τις υπόλοιπες καμπύλες, θα μπορούσε να δοθεί το σύνολο των λύσεων με όμοιο τρόπο, αν και οι συναρτήσεις που προκύπτουν έχουν ακόμα πιο σύνθετο τύπο. Όμως και η διδασκαλία των παραγράφων που σχετίζονται με τις παραμετρικές εξισώσεις κύκλου και έλλειψης, θα βοηθούσε στην κατανόηση και θα αύξανε τη δυνατότητα χρήσης του συνόλου των λύσεων.

Η δυνατότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση σε μια άλλη για μια έννοια, είδαμε ότι σχετίζεται φυσικά με την ίδια την έννοια, αλλά σχετίζεται και με την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται τα εργαλεία του αναπαραστατικού πλαισίου. Οι παρεμβάσεις στα δύο αναπαραστατικά πλαίσια (Άλγεβρα, Γεωμετρία) δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές, ειδικά αν πιεζόμαστε χρονικά, λόγο της ευρύτητας των αναπαραστατικών πλαισίων. Μπορεί όμως για παράδειγμα, να επισημανθεί ο ρόλος ενός δευτεροβάθμιου όρου στην εξίσωση. Δηλαδή ο όρος y^2 στην εξίσωση $y^2 = 2\rho x$, εξασφαλίζει την συμμετρία της καμπύλης ως προς τον $x'x$ άξονα.

Στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μπορεί δίνοντας έμφαση στην αλγεβρική έκφραση των ορισμών, να δημιουργηθούν εναλλακτικές λύσεις στις εκφράσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Να σημειωθεί εδώ ότι μόνο δύο μαθητές και μόνο στην περίπτωση της παραβολής, χρησιμοποίησαν την έκφραση $d(M,E) = d(M,\delta)$, όπου M το τυχαίο σημείο της παραβολής, E η εστία και δ η διευθετούσα, για να περιγράψουν την παραβολή. Στην περίπτωση της έλλειψης ούτε ένας μαθητής χρησιμοποίησε την αντίστοιχη αλγεβρική έκφραση.

Πρέπει με κατάλληλες δραστηριότητες να αυξηθεί η ικανότητα των μαθητών να αντλούν πληροφορίες από τα σχήματα στο καρτεσιανό επίπεδο. Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι η εύρεση των συντεταγμένων σημείων μιας γραμμής, με απλή παρατήρηση, αλλά και με χρήση συλλογισμών που προκύπτουν από τις ιδιότητες της γραμμής. Μια δεύτερη δραστηριότητα μπορεί να είναι ο υπολογισμός της απόστασης δύο σημείων, χωρίς ίσως την χρήση του αντίστοιχου τύπου, αλλά με χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος. Η τελευταία δραστηριότητα στοχεύει στη γεωμετρική αντίληψη των συντεταγμένων (οι συντεταγμένες παριστάνουν μήκη), που θεωρείται ότι είναι αναγκαία για την κατανόηση του πλαισίου της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Άλλωστε, όπως αναφέρεται στην πρώτη ενότητα, οι μαθηματικοί εργάζονταν για δύο αιώνες περίπου, μετά τον Descartes, θεωρώντας τις συντεταγμένες ως μήκη. Άρα, η οδός για την πλήρη αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας περνάει μέσα από την αντίληψη των συντεταγμένων ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι πολλές εξισώσεις μπερδεύουν τους μαθητές, όπως είδαμε στην περίπτωση του κύκλου. Όπου είναι δυνατόν, πρέπει οι εξισώσεις να έχουν ένα «νόημα» για τους μαθητές. Δηλαδή πρέπει να γίνει προσπάθεια να συνδεθεί η καινούρια γνώση με εμπεδωμένες μαθηματικές πρακτικές των μαθητών. Στο πλαίσιο αυτό, θα μπορούσε να επισημανθεί ότι η εξίσωση του κύκλου δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος, δείχνοντας βέβαια το κατάλληλο ορθογώνιο τρίγωνο, ενισχύοντας περαιτέρω τη γεωμετρική αντίληψη των συντεταγμένων, αλλά και τη δομική αντίληψη των εξισώσεων αφού η εξίσωση θα παραπέμπει άμεσα σε σχήμα. Στην περίπτωση της ευθείας (γενική περίπτωση), επιβάλλεται η σύνδεσή της με τις συναρτήσεις. Όμως, μπορεί να συνδεθεί η εξίσωση της ευθείας με την κλίση της. Οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν γεωμετρικά ότι η κλίση μιας ευθείας είναι σταθερή, δηλαδή αν $A(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της ευθείας και $B(x, y)$ ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της, τότε ο λόγος $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\lambda$, που μπορεί να θεωρηθεί και ως λόγος ευθυγράμμων τμημάτων, είναι σταθερός και εκφράζει αυτή την ιδιότητα της ευθείας. Η παραπάνω σχέση, που είναι ουσιαστικά η εξίσωση της ευθείας (στις λύσεις της απλά δε συμπεριλαμβάνεται το $A(x_1, y_1)$), θα μπορούσε να αποτελεί την εξίσωση της ευθείας, δίνοντας νόημα σ' αυτό που γράφουν οι μαθητές.

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί η διαφορά του πλαισίου αναπαράστασης, μεταξύ των εξισώσεων με ένα άγνωστο και αυτών με δύο αγνώστους, κάνοντας τον απαραίτητο διαχωρισμό-κατηγοριοποίηση, αλλά και τις απαιτούμενες γενικεύσεις. Για να παρασταθούν οι λύσεις των εξισώσεων της πρώτης κατηγορίας αρκεί ένας άξονας, αν και, μπορούν να παρασταθούν οι λύσεις στο επίπεδο, τον χώρο, κ.τ.λ. Για τη δεύτερη κατηγορία μπορεί κάποιος να ξεκινήσει από το επίπεδο και φυσικά να γενικεύσει σε περισσότερες διαστάσεις. Άρα όταν αναφερόμαστε στο πλαίσιο της επίπεδης Αναλυτικής Γεωμετρίας, πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές, ότι οι λύσεις μιας εξίσωσης παριστάνονται με γραμμές, στη γενική περίπτωση, άρα είναι φυσιολογικό να είναι άπειρες. Γενικά, αφού οι λύσεις μιας εξίσωσης καθορίζονται από το πλαίσιο που τις αναζητούμε, θα πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα να επιλέγουν (αν δεν είναι καθορισμένο) κάθε φορά, το κατάλληλο είδος πλαισίου που πρέπει να εργαστούν. Με βάση αυτό το πλαίσιο, καθορίζονται τα κατάλληλα εργαλεία για να βρουν τις λύσεις της εξίσωσης και γίνεται σαφής ο τρόπος που μπορούν να αναπαραστήσουν αυτές τις λύσεις.

Παράρτημα Α

Το πρώτο ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας.

1. Η μελέτη της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών είναι για σένα εύκολη, μέτριας δυσκολίας ή δύσκολη δραστηριότητα; Αν αντιμετώπισες κάποια δυσκολία, τι είδους ήταν αυτή;

2. Πώς θα περιέγραφες σ' ένα συμμαθητή σου την παραβολή;

3. Τι είναι για σένα οι λύσεις (αν υπάρχουν) μιας εξίσωσης με δύο άγνωστες ποσότητες x και y;

4. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μια ευθεία με μια έλλειψη;

5. Μέσα από τις εξισώσεις της ευθείας, του κύκλου και των κωνικών τομών, μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις; Αν ναι, σε ποιες περιπτώσεις;

6. Συμπληρώστε σε ποια επίπεδη γραμμή (καμπύλη ή ευθεία) αντιστοιχούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x - y + 5 = 0$ ……………………

β) $x^2 = y$ ………………………………

γ) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ……………………….

δ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ………………………………….

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Μπορείτε να βρείτε τρία σημεία της παραβολής;

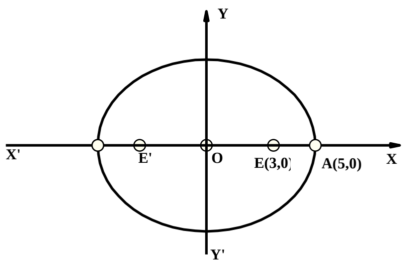
8. Το σημείο $A(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ ανήκει σε έλλειψη της μορφής: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Μπορείς να βρεις τρία ακόμη σημεία που ανήκουν στην έλλειψη;

9. Τι αποτελεί το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν εξίσου από το σημείο $\mathrm{E}(1,0)$ και την ευθεία $x=-1$; Ποία είναι η εξίσωση που περιγράφει την καμπύλη αυτή;

10. α) Ποιο είναι το όνομα της καμπύλης στο παρακάτω σχήμα;

β) Ποια είναι η εξίσωση που οι λύσεις της είναι τα σημεία της καμπύλης μας;

γ)Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της καμπύλης;



11. Περιγράψτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

$$a)2x+5=0$$
$$\beta)2x-y+5=0$$
$$\gamma)x^2-y=0$$

12. Πόσες λύσεις **μπορεί** να έχει το σύστημα(χωρίς να το λύσετε);

$$\left\{\begin{matrix} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 2x + 5y - 6 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

13. α) Μπορείτε να βρείτε δύο σημεία του γραφήματος της συνάρτησης: $k(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

β) Τι είδους επίπεδη γραμμή είναι η γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων;

$$f(x) = 3x - 7, x \in \mathbb{R}$$
$$k(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$
$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$$

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο — φύλλο εργασίας.

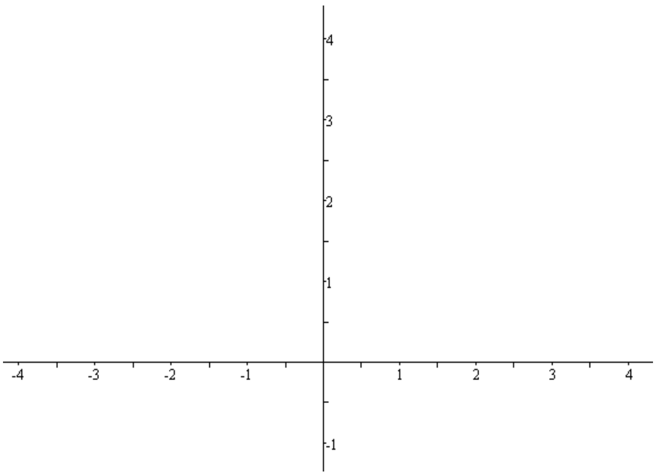
1. Τι είναι για σένα οι λύσεις (αν υπάρχουν) μιας εξίσωσης με δύο άγνωστες ποσότητες x και y;

2. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μια ευθεία με ένα κύκλο(περιπτώσεις);

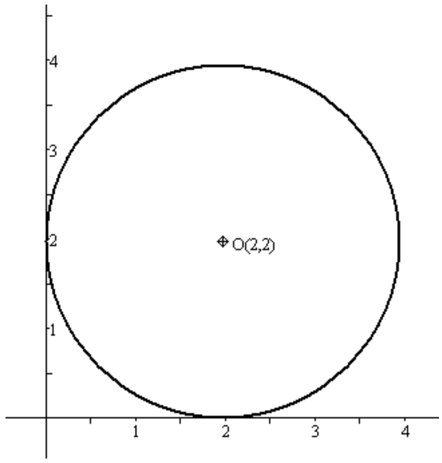
3. Πώς θα περιέγραφες σ’ ένα συμμαθητή σου την έλλειψη;

4. Ο κύκλος αποτελεί γράφημα συνάρτησης; Αν όχι, από το σχήμα του κύκλου μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις; Δώστε παράδειγμα.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 = 4y$. Μπορείτε να βρείτε τρείς λύσεις της εξίσωσης; Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή; Ποια είναι η καμπύλη, που τα ζευγάρια των συντεταγμένων των σημείων της είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης; Μπορείτε να σχεδιάσετε την καμπύλη;



6. Δίνεται η παρακάτω καμπύλη. Ποιο είναι το όνομα και ποια είναι η εξίσωση της καμπύλης αυτής; Από πόσα σημεία αποτελείται αυτή η καμπύλη; Μπορείτε να βρείτε τρία απ' αυτά; Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της καμπύλης αυτής;



7. Η εξίσωση $2(x-3)=1-y$ παριστάνει ευθεία. Βρείτε τα σημεία Α και Β που αντιστοιχούν για $x=0$ και $x=1$. Κάντε το ίδιο για την εξίσωση $2x+y=7$ και βρείτε σημεία A' και B' που αντιστοιχούν για $x=0$ και $x=1$. Τι παρατηρείτε;

Στην προσπάθεια να λύσουμε το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 2(x-3)=1-y \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ έχουμε:

$\left\{\begin{array}{l} 2(x-3)=1-y \\ 2x+y=7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-3)=1-y \\ y=7-2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-6=1-7+2x \\ y=7-2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=0 \\ y=7-2x \end{array}\right\}$ Άρα το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. **Γιατί συμβαίνει αυτό;** Πού ανήκουν αυτές οι άπειρες λύσεις; **Αιτιολογήστε** την απάντησή σας.

8. **Περιγράψτε** τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

$$a)x^2-1=0$$
$$\beta)x-2y+3=0$$
$$\gamma)4x^2+y^2=4$$

9. Πόσες λύσεις **μπορεί** να έχει το σύστημα(χωρίς να το λύσετε);

$$\begin{Bmatrix}(x-1)^2+(y+2)^2=36\\ 2x+5y-7=0\end{Bmatrix}$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

10. Τι είδους επίπεδη γραμμή είναι η γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων; **Αιτιολογήστε** την απάντηση σας.

$$f(x)=3x-7, x\in\mathbb{R}$$
$$k(x)=-\sqrt{x}, x\geq 0$$
$$g(x)=2\sqrt{4-x^2}, -2\leq x\leq 2$$

11. Η ωριαία διδακτική παρέμβαση ήταν για σένα μια ευχάριστη ή δυσάρεστη εμπειρία; Θεωρείς ότι η ώρα αυτή κύλισε δημιουργικά ή βαρετά;

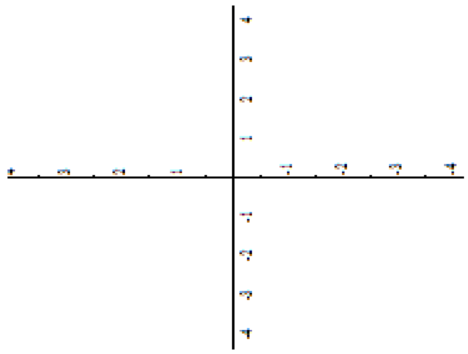
12. Σου έκανε εντύπωση κάτι, απ' αυτά που συνέβησαν στην ωριαία διδακτική παρέμβαση; Αν ναι, ποιο ήταν αυτό που σε εντυπωσίασε;

13. Έμαθες κάτι καινούριο; Αν ναι, ποιο ήταν αυτό;

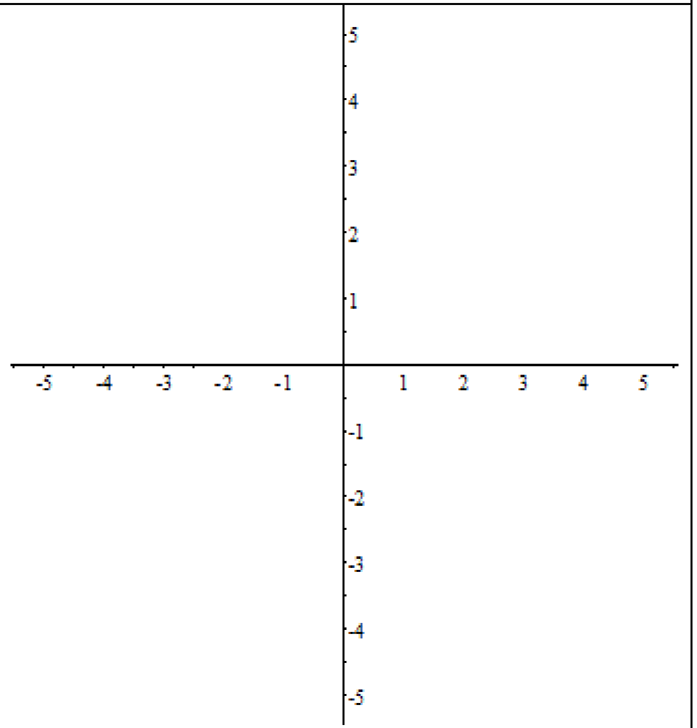
Παράρτημα Β

Τα τέσσερα φύλλα εργασίας που συμπλήρωσαν οι μαθητές, κατά τη διάρκεια της ωριαίας διδακτικής παρέμβασης, για την ευθεία, την έλλειψη, τον κύκλο και την παραβολή.

ΕΥΘΕΙΑ

Συνάρτηση	Εύρεση τιμών της f	Σημεία της γραφικής παράστασης της f (x,y) ή $(x,f(x))$	Ποια είναι η εξίσωση που έχει λύσεις τις συντεταγμένες των σημείων αυτών;	Που βρίσκονται αυτά τα σημεία(σχήμα);	Λεκτική διατύπωση(ορισμός)
$f(x)=2x+1$, $x \in \mathbb{R}$	Για $x=0$ έχω Για $x=1$ έχω Πόσες τιμές μπορώ να πάρω;	Πόσα σημεία έχει η γραφική παράσταση της f ;	Είναι τα σημεία αυτά λύσεις της εξίσωσης;		

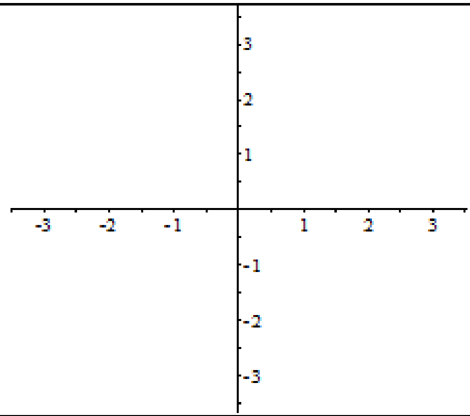
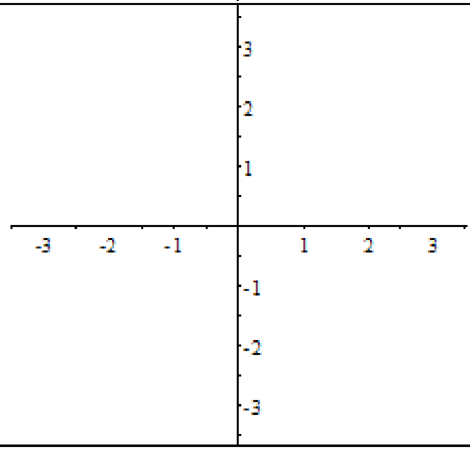
ΕΛΛΕΙΨΗ

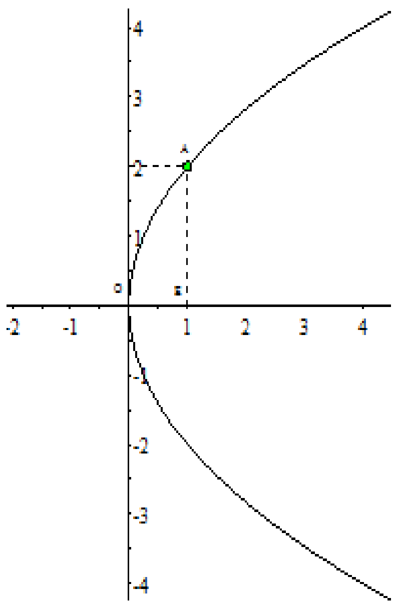
Λεκτική διατύπωση (ορισμός)	Εύρεση της εξίσωσης	Λύσεις της εξίσωσης. (ζευγάρια τιμών (x,y))	Σημεία της έλλειψης	Που βρίσκονται αυτά τα σημεία(σχήμα);
Το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου Α της έλλειψης από τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ είναι ίσο με 10.	γ= 2α= β=	Για χ=0 έχω y= άρα $(x,y)=$ $(x,y)=$ Για χ=5 έχω y= άρα $(x,y)=$ Για χ=-5 έχω y= άρα $(x,y)=$ Για χ=3 έχω y= άρα $(x,y)=$ $(x,y)=$ Για χ=-3 έχω y= άρα $(x,y)=$ $(x,y)=$ Πόσες λύσεις μπορώ να βρω;	Τι σχέση έχουν τα σημεία αυτά με τις λύσεις της εξίσωσης; Πόσα σημεία έχει η έλλειψη;	

Επίλυση της εξίσωσης ως προς y

Δημιουργία δύο συναρτήσεων

ΚΥΚΛΟΣ

Συνάρτηση	Εύρεση τιμών της f	Σημεία της γραφικής παράστασης της f (x,y) ή $(x,f(x))$	Ποια είναι η εξίσωση που έχει λύσεις τις συντεταγμένες των σημείων αυτών;	Που βρίσκονται αυτά τα σημεία(σχήμα);	Λεκτική διατύπωση(ορισμός)
$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ με $-2 \le x \le 2$	Για χ=0 έχω Για χ=1 έχω Για χ=2 έχω Για χ=-1 έχω Για χ=-2 έχω Πόσες τιμές μπορώ να πάρω;	Πόσα σημεία έχει η γραφική παράσταση της f;			
$f(x)=-\sqrt{4-x^2}$ με $-2 \le x \le 2$	Για χ=0 έχω Για χ=1 έχω Για χ=2 έχω Για χ=-1 έχω Για χ=-2 έχω Πόσες τιμές μπορώ να πάρω;	Πόσα σημεία έχει η γραφική παράσταση της f;			

ΠΑΡΑΒΟΛΗ					
Σχήμα	Εύρεση της εξίσωσης	Λύσεις της εξίσωσης. (ζευγάρια τιμών (x, y))	Σημεία της παραβολής	Λεκτική διατύπωση(ορισμός)	Επίλυση της εξίσωσης ως προς y Δημιουργία δύο συναρτήσεων
	Ποια είναι η εστία και ποια η διευθετούσα;	Για χ=0 έχω y= άρα $(x, y) =$ $(x, y) =$ Για χ=1 έχω y= άρα $(x, y) =$ $(x, y) =$ Για χ=2 έχω y= άρα $(x, y) =$ $(x, y) =$ Πόσες λύσεις μπορώ να βρω;	Τι σχέση έχουν τα σημεία αυτά με τις λύσεις της εξίσωσης; Πόσα σημεία έχει η παραβολή;		

Παράρτημα Γ

Συγκεντρωτικοί πίνακες των αποτελεσμάτων, ανά ερώτηση, του πρώτου ερωτηματολογίου. Στις δύο πρώτες στήλες με αποτελέσματα, αναφέρονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων των 50 μαθητών που συμμετείχαν και στις τρεις φάσεις της έρευνας.

1η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
1.1.1	Εύκολη.	11	22,00%	14	23,73%
1.1.2	Μέτρια.	29	58,00%	33	55,93%
1.1.3	Δύσκολη.	2	4,00%	2	3,39%
1.1.4	Άλλη.	7	14,00%	9	15,25%
1.1.5	Δεν απάντησαν.	1	2,00%	1	1,69%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
1.2.1	Δυσκολία στις ασκήσεις.	13	26,00%	15	25,42%
1.2.2	Δυσκολία με τις πράξεις ή με τους τύπους.	4	8,00%	4	6,78%
1.2.3	Μπερδεύομαι από τις ομοιότητες των κωνικών τομών όσον αφορά τους τύπους και τα στοιχεία τους.	2	4,00%	3	5,08%
1.2.4	Δυσκολίες από την αλγεβρική προσέγγιση της Γεωμετρίας.	1	2,00%	2	3,39%
1.2.5	Διάφορες δυσκολίες.	8	16,00%	9	15,25%
1.2.6	Δεν απάντησαν.	22	44,00%	26	44,07%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

2η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
2.1	Σωστός φορμαλιστικός ορισμός.	6	12,00%	8	13,56%
2.2	Σωστή περιγραφή με βάση άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας.	4	8,00%	5	8,47%
2.3	Ελλιπής φορμαλιστικός ορισμός.	19	38,00%	22	37,29%
2.4	Διάφορες ελλιπείς περιγραφές.	3	6,00%	4	6,78%
2.5	Λάθος φορμαλιστικός ορισμός.	9	18,00%	10	16,95%
2.6	Διάφορες λάθος περιγραφές.	7	14,00%	7	11,86%
2.7	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	3	5,08%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

3η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
3.1	Ζευγάρια αριθμών που επαληθεύουν.	1	2,00%	1	1,72%
3.2	Συντεταγμένες σημείων.	6	12,00%	6	10,34%
3.3	Σημεία.	6	12,00%	6	10,34%
3.4	Αριθμοί που επαληθεύουν.	14	28,00%	19	32,76%
3.5	Αριθμοί.	4	8,00%	4	6,90%
3.6	Αποτέλεσμα μιας διαδικασίας.	6	12,00%	9	15,52%
3.7	Διάφορες "άσχετες" απαντήσεις.	9	18,00%	10	17,24%
3.8	Δεν απάντησαν.	4	8,00%	4	6,90%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

4η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
4.1	Κανένα, ένα ή δύο σημεία.	14	28,00%	17	28,81%
4.2	Ένα ή δύο σημεία.	13	26,00%	14	23,73%
4.3	Κανένα ή δύο σημεία.	2	4,00%	2	3,39%
4.4	Δύο σημεία.	17	34,00%	22	37,29%
4.5	Ένα σημείο.	2	4,00%	2	3,39%
2.6	Ένα, δύο ή τρία σημεία.	0	0,00%	0	0,00%
2.7	Ένα, δύο ή άπειρα σημεία.	0	0,00%	0	0,00%
4.8	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	2	3,39%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

5η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
5.1	Ναι, εξηγώντας με κάποιο τρόπο.	2	4,00%	2	3,39%
5.2	Ναι, με λάθος επεξηγήσεις.	4	8,00%	6	10,17%
5.3	Ναι, χωρίς επεξηγήσεις.	10	20,00%	11	18,64%
5.4	Όχι, χωρίς επεξηγήσεις.	4	8,00%	4	6,78%
5.5	Σωστά κατά περίπτωση είναι ή δεν είναι συναρτήσεις.	14	28,00%	19	32,20%
5.6	Είναι συναρτήσεις.	1	2,00%	1	1,69%
5.7	Δεν απάντησαν.	15	30,00%	16	27,12%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

6^η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.1.1	Ευθεία.	49	98,00%	58	98,31%
6.1.2	Άλλη απάντηση.	1	2,00%	1	1,69%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.2.1	Παραβολή.	35	70,00%	40	67,80%
6.2.2	Άλλες απαντήσεις.	15	30,00%	19	32,20%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.3.1	Κύκλος	43	86,00%	51	86,44%
6.3.2	Άλλες απαντήσεις.	7	14,00%	8	13,56%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.4.1	Έλλειψη	44	88,00%	52	88,14%
6.4.2	Άλλες απαντήσεις.	6	12,00%	7	11,86%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

7^η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
7.1	Σωστά και συμμετρικά.	17	34,00%	19	32,20%
7.2	Σωστά, με μη αρνητικές συντεταγμένες.	16	32,00%	20	33,90%
7.3	Λάθος σημεία.	11	22,00%	13	22,03%
7.4	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	7	11,86%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

8^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
8.1	Τα συμμετρικά του Α ως προς τους άξονες και το κέντρο.	25	50,00%	26	44,07%
8.2	Εύρεση σημείων με συντεταγμένες εκφρασμένες συναρτήσει των α και β.	2	4,00%	4	6,78%
8.3	Εύρεση λάθος σημείων.	5	10,00%	7	11,86%
8.4	Διάφορες ανεπιτυχείς προσπάθειες εύρεσης σημείων μέσα από τον προσδιορισμό των α και β.	7	14,00%	9	15,25%
8.5	Δεν απάντησαν.	11	22,00%	13	22,03%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

9^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
9.1.1	Παραβολή.	35	70,00%	40	67,80%
9.1.2	Ένα γεωμετρικό τόπο.	1	2,00%	1	1,69%
9.1.3	Άλλο γεωμετρικό τόπο.	3	6,00%	4	6,78%
9.1.4	Δεν απάντησαν.	11	22,00%	14	23,73%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
9.2.1	Εξίσωση της παραβολής.	19	38,00%	22	37,29%
9.2.2	Γενική εξίσωση παραβολής για τη συγκεκριμένη περίπτωση.	6	12,00%	6	10,17%
9.2.3	Λάθος εξίσωση παραβολής .	12	24,00%	14	23,73%
9.2.4	Άλλη εξίσωση .	3	6,00%	5	8,47%
9.2.5	Δεν απάντησαν.	10	20,00%	12	20,34%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

10^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.1.1	Έλλειψη.	45	90,00%	54	91,53%
10.1.2	Λάθος όνομα.	4	8,00%	4	6,78%
10.1.3	Δεν απάντησαν.	1	2,00%	1	1,69%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.2.1	Εξίσωση της έλλειψης.	28	56,00%	32	54,24%
10.2.2	Γενική εξίσωση έλλειψης.	16	32,00%	21	35,59%
10.2.3	Λάθος εξίσωση.	2	4,00%	2	3,39%
10.2.4	Δεν απάντησαν.	4	8,00%	4	6,78%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.3.1	Εξειδικευμένος ορισμός.	2	4,00%	2	3,39%
10.3.2	Γενικός ορισμός.	19	38,00%	22	37,29%
10.3.3	Άλλες ιδιότητες.	7	14,00%	9	15,25%
10.3.4	Λάθος απαντήσεις.	10	20,00%	14	23,73%
10.3.5	Δεν απάντησαν.	12	24,00%	12	20,34%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

$11^{η}$ ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
11.1.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας x=-5/2.	5	10,00%	8	13,56%
11.1.2	x=-5/2.	26	52,00%	29	49,15%
11.1.3	Η λύση είναι μοναδική.	4	8,00%	7	11,86%
11.1.4	Οι λύσεις είναι σημείο.	3	6,00%	3	5,08%
11.1.5	Περιγραφή επίλυσης.	3	6,00%	3	5,08%
11.1.6	Λάθος λύση.	7	14,00%	7	11,86%
11.1.7	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	2	3,39%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
11.2.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας ή η ευθεία.	11	22,00%	15	25,42%
11.2.2	Οι λύσεις είναι άπειρες.	4	8,00%	5	8,47%
11.2.3	Μια λύση της εξίσωσης.	2	4,00%	2	3,39%
11.2.4	Επίλυση ή περιγραφή επίλυσης.	9	18,00%	11	18,64%
11.2.5	Διάφορες σωστές προτάσεις.	5	10,00%	5	8,47%
11.2.6	Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις.	13	26,00%	13	22,03%
11.2.7	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	8	13,56%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
11.3.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της παραβολής ή η παραβολή.	8	16,00%	13	22,03%
11.3.2	Οι λύσεις είναι άπειρες.	6	12,00%	6	10,17%
11.3.3	Μια λύση της εξίσωσης.	2	4,00%	2	3,39%
11.3.4	Επίλυση ή περιγραφή επίλυσης.	15	30,00%	18	30,51%
11.3.5	Διάφορες σωστές προτάσεις.	2	4,00%	2	3,39%
11.3.6	Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις.	11	22,00%	12	20,34%
11.3.7	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	6	10,17%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

12^η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
12.1	Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση γεωμετρική.	5	10,00%	5	8,47%
12.2	Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση αλγεβρική.	1	2,00%	1	1,69%
12.3	Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.	1	2,00%	1	1,69%
12.4	Λάθος απάντηση επιχειρώντας γεωμετρική αιτιολόγηση.	0	0,00%	0	0,00%
12.5	Λάθος απάντηση επιχειρώντας αλγεβρική αιτιολόγηση.	31	62,00%	39	66,10%
12.6	Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.	9	18,00%	10	16,95%
12.7	Δεν απάντησαν.	3	6,00%	3	5,08%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

13^η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.1.1	Βρίσκουν δύο σημεία που ανήκουν στο γράφημα.	18	36,00%	21	35,59%
13.1.2	Βρίσκουν δύο σημεία που δεν ανήκουν στο γράφημα.	12	24,00%	12	20,34%
13.1.3	Δεν απάντησαν.	20	40,00%	26	44,07%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.2.1	Ευθεία.	29	58,00%	33	55,93%
13.2.2	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	3	6,00%	3	5,08%
13.2.3	Δεν απάντησαν.	18	36,00%	23	38,98%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.3.1	Τμήμα παραβολής.	3	6,00%	3	5,08%
13.3.2	Παραβολή.	16	32,00%	19	32,20%
13.3.3	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	12	24,00%	12	20,34%
13.3.4	Δεν απάντησαν.	19	38,00%	25	42,37%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.4.1	Ημικύκλιο.	3	6,00%	3	5,08%
13.4.2	Κύκλος.	7	14,00%	9	15,25%
13.4.3	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	19	38,00%	20	33,90%
13.4.4	Δεν απάντησαν.	21	42,00%	27	45,76%
	Σύνολα	50	100,00%	59	100,00%

Συγκεντρωτικοί πίνακες αποτελεσμάτων, ανά ερώτηση, του δεύτερου ερωτηματολογίου. Στα κοινά ερωτήματα του πρώτου και δεύτερου ερωτηματολογίου, εμφανίζονται τα αποτελέσματα του πρώτου ερωτηματολογίου φέροντας την ένδειξη «πριν» και του δεύτερου ερωτηματολογίου με την ένδειξη «μετά».

1η ερώτηση

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
1.1	Ζευγάρια αριθμών που επαληθεύουν.	1	2,00%	5	10,00%
1.2	Συντεταγμένες σημείων.	6	12,00%	13	26,00%
1.3	Σημεία.	6	12,00%	9	18,00%
1.4	Αριθμοί που επαληθεύουν.	14	28,00%	9	18,00%
1.5	Αριθμοί.	4	8,00%	3	6,00%
1.6	Αποτέλεσμα μιας διαδικασίας.	6	12,00%	0	0,00%
1.7	Διάφορες "άσχετες" απαντήσεις.	9	18,00%	8	16,00%
1.8	Δεν απάντησαν.	4	8,00%	3	6,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

2η ερώτηση

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
2.1	Κανένα, ένα ή δύο σημεία.	14	28,00%	36	72,00%
2.2	Ένα ή δύο σημεία.	13	26,00%	9	18,00%
2.3	Κανένα ή δύο σημεία.	2	4,00%	0	0,00%
2.4	Δύο σημεία.	17	34,00%	2	4,00%
2.5	Ένα σημείο.	2	4,00%	0	0,00%
2.6	Ένα, δύο ή τρία σημεία.	0	0,00%	1	2,00%
2.7	Ένα, δύο ή άπειρα σημεία.	0	0,00%	1	2,00%
2.8	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	1	2,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

3^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
3.1	Σωστός φορμαλιστικός ορισμός.	6	12,00%	9	18,00%
3.2	Σωστή περιγραφή με βάση άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας.	4	8,00%	4	8,00%
3.3	Ελλιπής φορμαλιστικός ορισμός.	19	38,00%	12	24,00%
3.4	Διάφορες ελλιπείς περιγραφές.	3	6,00%	8	16,00%
3.5	Λάθος φορμαλιστικός ορισμός.	9	18,00%	11	22,00%
3.6	Διάφορες λάθος περιγραφές.	7	14,00%	2	4,00%
3.7	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	4	8,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

4^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
4.1	Όχι, αλλά μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις (με παράδειγμα).	15	30,00%
4.2	Όχι, αλλά μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις (χωρίς παράδειγμα).	10	20,00%
4.3	Όχι.	4	8,00%
4.4	Όχι και δεν μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις.	1	2,00%
4.5	Ναι.	7	14,00%
4.6	Δεν απάντησαν.	13	26,00%
	Σύνολα	50	100,00%

5^{η} ερώτηση

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
5.1.1	Σωστές και αντιστοιχούν σε συμμετρικά σημεία.	17	34,00%	22	44,00%
5.1.2	Σωστές με μη αρνητικές τιμές για το x.	16	32,00%	19	38,00%
5.1.3	Λάθος λύσεις.	11	22,00%	4	8,00%
5.1.4	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	5	10,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
5.2.1	Άπειρες.	24	48,00%
5.2.2	Δεν απάντησαν.	26	52,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
5.3.1	Παραβολή.	14	28,00%
5.3.2	Υπερβολή.	1	2,00%
5.3.3	Δεν απάντησαν.	35	70,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
5.4.1	Σωστό σχήμα.	28	56,00%
5.4.2	Ημιτελές σχήμα (μόνο στο 1ο τεταρτημόριο).	2	4,00%
5.4.3	Λάθος προσανατολισμένο σχήμα (άξονας συμμετρίας ο χ'χ).	8	16,00%
5.4.4	Λάθος σχήμα.	5	10,00%
5.4.5	Δεν απάντησαν.	7	14,00%
	Σύνολα	50	100,00%

$6^{η}$ ερώτηση

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.1.1	Έλλειψη-κύκλος.	45	90,00%	44	88,00%
6.1.2	Λάθος όνομα.	4	8,00%	0	0,00%
6.1.3	Δεν απάντησαν.	1	2,00%	6	12,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.2.1	Εξίσωση της έλλειψης-κύκλου.	28	56,00%	25	50,00%
6.2.2	Γενική εξίσωση έλλειψης-κύκλου.	16	32,00%	4	8,00%
6.2.3	Λάθος εξίσωση.	2	4,00%	12	24,00%
6.2.4	Δεν απάντησαν.	4	8,00%	9	18,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.3.1	Άπειρα σημεία	26	52,00%
6.3.2	Άλλη απάντηση.	6	12,00%
6.3.3	Δεν απάντησαν.	18	36,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.4.1	Βρίσκουν τρία σημεία του κύκλου.	23	46,00%
6.4.2	Βρίσκουν δύο σημεία του κύκλου.	3	6,00%
6.4.3	Βρίσκουν σημεία που δεν ανήκουν στον κύκλο.	9	18,00%
6.4.4	Δεν απάντησαν.	15	30,00%
	Σύνολα	50	100,00%

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
6.5.1	Εξειδικευμένος ορισμός.	2	4,00%	12	24,00%
6.5.2	Γενικός ορισμός.	19	38,00%	15	30,00%
6.5.3	Άλλες ιδιότητες.	7	14,00%	2	4,00%
6.5.4	Λάθος απαντήσεις.	10	20,00%	1	2,00%
6.5.5	Δεν απάντησαν.	12	24,00%	20	40,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

7^{η} ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
7.1.1	Βρίσκουν τα σωστά σημεία.	42	84,00%
7.1.2	Βρίσκουν λάθος σημεία.	4	8,00%
7.1.3	Δεν απάντησαν.	4	8,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
7.2.1	Ταύτιση ευθειών.	19	38,00%
7.2.2	Ταύτιση εξισώσεων.	4	8,00%
7.2.3	Ταύτιση σημείων.	11	22,00%
7.2.4	Διάφορες άλλες παρατηρήσεις.	8	16,00%
7.2.5	Δεν απάντησαν.	8	16,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
7.3.1	Συμπίπτουν οι ευθείες.	16	32,00%
7.3.2	Είναι η ίδια εξίσωση.	4	8,00%
7.3.3	Διάφορες αιτιολογήσεις.	8	16,00%
7.3.4	Δεν απάντησαν.	22	44,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
7.4.1	Στην ευθεία (αφού συμπίπτουν οι δύο ευθείες).	10	20,00%
7.4.2	Λάθος απαντήσεις.	6	12,00%
7.4.3	Δεν απάντησαν.	34	68,00%
	Σύνολα	50	100,00%

8η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
8.1.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας x=-5/2 ή των ευθειών (x=1 ή x=-1).	5	10,00%	6	12,00%
8.1.2	x=-5/2 ή (x=1 ή x=-1).	26	52,00%	22	44,00%
8.1.3	Η λύση είναι μοναδική ή έχει δύο λύσεις.	4	8,00%	5	10,00%
8.1.4	Οι λύσεις είναι σημείο ή σημεία.	3	6,00%	3	6,00%
8.1.5	Περιγραφή επίλυσης.	3	6,00%	1	2,00%
8.1.6	Λάθος λύση.	7	14,00%	1	2,00%
8.1.7	Δεν απάντησαν.	2	4,00%	12	24,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
8.2.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της ευθείας ή η ευθεία.	11	22,00%	18	36,00%
8.2.2	Οι λύσεις είναι άπειρες.	4	8,00%	7	14,00%
8.2.3	Μια λύση της εξίσωσης.	2	4,00%	2	4,00%
8.2.4	Επίλυση ή περιγραφή επίλυσης.	9	18,00%	4	8,00%
8.2.5	Διάφορες σωστές προτάσεις.	5	10,00%	2	4,00%
8.2.6	Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις.	13	26,00%	4	8,00%
8.2.7	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	13	26,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
8.3.1	Οι λύσεις είναι τα σημεία της παραβολής-έλλειψης ή η παραβολή-έλλειψη.	8	16,00%	15	30,00%
8.3.2	Οι λύσεις είναι άπειρες.	6	12,00%	8	16,00%
8.3.3	Μια ή δύο λύσεις της εξίσωσης.	2	4,00%	2	4,00%
8.3.4	Επίλυση ή περιγραφή επίλυσης.	15	30,00%	2	4,00%
8.3.5	Διάφορες σωστές προτάσεις.	2	4,00%	2	4,00%
8.3.6	Λάθος απόψεις ή προσεγγίσεις.	11	22,00%	7	14,00%
8.3.7	Δεν απάντησαν.	6	12,00%	14	28,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

9η ερώτηση

		Πριν		Μετά	
Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
9.1	Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση γεωμετρική.	5	10,00%	20	40,00%
9.2	Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση αλγεβρική.	1	2,00%	2	4,00%
9.3	Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.	1	2,00%	2	4,00%
9.4	Λάθος απάντηση επιχειρώντας γεωμετρική αιτιολόγηση.	0	0,00%	1	2,00%
9.5	Λάθος απάντηση επιχειρώντας αλγεβρική αιτιολόγηση.	31	62,00%	16	32,00%
9.6	Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.	9	18,00%	4	8,00%
9.7	Δεν απάντησαν.	3	6,00%	5	10,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

10^η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.1.1	Ευθεία.	29	58,00%	33	66,00%
10.1.2	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	3	6,00%	3	6,00%
10.1.3	Δεν απάντησαν.	18	36,00%	14	28,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.2.1	Τμήμα παραβολής.	3	6,00%	7	14,00%
10.2.2	Παραβολή.	16	32,00%	12	24,00%
10.2.3	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	12	24,00%	14	28,00%
10.2.4	Δεν απάντησαν.	19	38,00%	17	34,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Πριν		Μετά	
		Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
10.3.1	Ημικύκλιο-τμήμα έλλειψης.	3	6,00%	5	10,00%
10.3.2	Κύκλος-έλλειψη.	7	14,00%	8	16,00%
10.3.3	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	19	38,00%	21	42,00%
10.3.4	Δεν απάντησαν.	21	42,00%	16	32,00%
	Σύνολα	50	100,00%	50	100,00%

11η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
11.1	Ευχάριστη και δημιουργική εμπειρία.	27	54,00%
11.2	Ευχάριστη εμπειρία.	6	12,00%
11.3	Δημιουργική εμπειρία.	7	14,00%
11.4	Βαρετά.	2	4,00%
11.5	Άλλη απάντηση.	5	10,00%
11.6	Δεν απάντησαν.	3	6,00%
	Σύνολα	50	100,00%

12η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
12.1.1	Ναι.	27	54,00%
12.1.2	Όχι.	12	24,00%
12.1.3	Δεν απάντησαν.	11	22,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
12.2.1	Η παρουσίαση.	9	33,33%
12.2.2	Το πρόγραμμα EucliDraw.	6	22,22%
12.2.3	Η σχέση του συνόλου των λύσεων με τα σημεία του σχήματος.	3	11,11%
12.2.4	Η σύνδεση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές.	3	11,11%
12.2.5	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	5	18,52%
12.2.6	Δεν απάντησαν.	1	3,70%
	Σύνολα	27	100,00%

13η ερώτηση

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.1.1	Ναι.	20	40,00%
13.1.2	Όχι.	20	40,00%
13.1.3	Δεν απάντησαν.	10	20,00%
	Σύνολα	50	100,00%

Κωδικός απάντησης	Απάντηση	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
13.2.1	Τη σύνδεση των συναρτήσεων με τις κωνικές τομές.	6	30,00%
13.2.2	Τη σχέση του συνόλου των λύσεων με τα σημεία του σχήματος.	3	15,00%
13.2.3	Διάφορες άλλες απαντήσεις.	11	55,00%
	Σύνολα	20	100,00%

Παράρτημα Δ

Στους δύο παρακάτω πίνακες εμφανίζονται οι κωδικοί απαντήσεων για κάθε μαθητή και για κάθε ερώτηση του πρώτου και δεύτερου ερωτηματολογίου. Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται ο αριθμός που δηλώνει την ταυτότητα του μαθητή. Στην πρώτη γραμμή εμφανίζεται το πρώτο μέρος του κωδικού απάντησης που αντιστοιχεί στον αριθμό της ερώτησης, λαμβάνοντας υπ’ όψιν τα διαφορετικά ερωτήματα που απαρτίζουν την ερώτηση. Στα υπόλοιπα κελιά εμφανίζεται το τελευταίο ψηφίο του κωδικού απάντησης ανά μαθητή και ανά ερώτημα, που αντιστοιχεί σε μια από τις κατηγορίες απαντήσεων του αντίστοιχου ερωτήματος.

Αναλυτικός πίνακας αποτελεσμάτων για το πρώτο ερωτηματολόγιο.

ερωτήσεις / μαθητές	1.1	1.2	2	3	4	5	6.1	6.2	6.3	6.4	7	8	9.1	9.2	10.1	10.2	10.3	11.1	11.2	11.3	12	13.1	13.2	13.3	13.4
1	2	4	2	4	2	2	1	1	1	1	3	5	2	5	1	2	3	2	6	4	5	3	3	4	4
2	2	1	3	4	2	7	1	1	1	1	3	3	1	3	1	1	5	2	5	2	5	1	3	4	4
3	2	6	1	4	4	6	1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	2	2	4	4	5	1	1	2	2
4	2	1	3	4	4	7	1	1	1	1	3	4	1	2	1	2	4	5	4	4	5	2	1	3	4
5	2	1	4	4	2	3	1	1	1	1	3	4	1	5	1	2	5	4	1	6	5	2	1	2	4
6	2	1	3	7	2	2	1	1	1	1	2	4	1	3	1	2	4	5	6	6	5	1	2	3	3
7	2	6	5	8	4	3	1	2	2	1	2	5	3	5	1	4	3	6	4	4	6	3	3	4	4
8	2	5	1	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	6	4	5	2	1	2	3
9	1	6	3	3	2	5	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	5	6	6	6	5	1	1	2	3
10	2	6	6	2	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2
11	2	5	3	6	8	7	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	5	6	2	1	5	3	3	4	4
12	2	6	3	3	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1	2	2	4	1	1	5	1	1	1	1
13	4	5	3	3	2	5	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	4	2	1	4	5	1	1	2	3
14	1	6	2	7	2	2	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	2	2	6	7	5	2	1	2	3
15	2	3	5	2	4	7	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	5	2	4	4	5	1	3	4	4
16	2	5	6	7	2	3	1	2	2	2	3	3	4	4	1	2	3	5	5	4	5	2	1	2	3
17	4	2	6	6	2	5	1	1	2	1	2	1	3	4	2	2	3	6	5	4	5	3	1	3	3
18	1	6	3	3	1	5	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	3	1	1	1	1	2	1	2	2
19	2	5	6	4	4	5	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	2	1	1	5	1	1	2	3
20	2	6	3	1	4	3	1	1	1	1	1	4	1	2	1	2	2	2	4	4	5	2	1	3	3
21	5	6	5	5	5	7	1	2	2	2	4	5	4	5	1	4	5	6	7	7	6	3	3	4	4
22	2	2	5	5	4	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	6	3	1	3	3
23	1	6	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	1	1	1	2	6	6	5	5	3	3	4	4
24	4	6	7	7	4	7	1	2	1	1	4	4	4	5	1	4	5	6	7	7	6	3	3	4	4
25	1	6	3	6	1	5	1	2	1	1	2	1	1	2	2	3	4	3	5	2	5	3	3	4	4
26	2	5	3	2	4	7	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	6	5	5	3	3	4	4
27	1	6	1	2	4	5	1	1	1	1	3	1	1	1	1	2	4	2	6	2	6	2	1	2	3
28	2	1	3	8	3	4	1	2	2	2	4	5	4	5	2	2	3	2	7	4	6	3	3	4	4
29	2	5	6	6	4	7	1	2	1	1	4	3	4	5	1	2	5	2	4	4	5	3	3	4	4
30	4	6	3	5	1	7	1	2	2	2	3	1	4	5	1	3	3	4	1	6	5	3	3	4	4
31	2	2	5	5	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	6	3	2	3	3
32	2	6	3	7	4	5	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	6	5	3	1	3	3
33	3	3	3	8	3	4	1	2	2	2	4	5	4	5	2	2	5	2	7	7	6	3	3	4	4
34	1	6	1	4	4	5	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2
35	4	1	1	6	1	5	1	1	1	1	1	4	1	3	1	1	1	3	2	2	5	1	1	3	3
36	1	1	3	4	4	5	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	2	2	5	6	7	1	1	2	3
37	2	2	5	4	1	5	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	2	2	6	6	5	1	1	1	1
38	2	6	5	7	5	7	1	1	1	1	3	5	4	3	1	2	5	2	6	6	5	3	1	3	3
39	4	1	5	4	2	5	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	4	2	6	6	5	1	1	2	2
40	2	1	4	7	2	7	1	1	1	1	2	5	4	5	1	1	4	7	7	7	7	3	3	4	4
41	3	5	7	8	8	7	1	2	1	1	4	5	4	3	3	4	5	7	7	7	7	3	3	4	4
42	1	6	3	4	1	3	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	4	3	6	6	2	2	1	3	3
43	4	1	3	3	1	7	1	2	1	2	3	1	1	1	1	1	2	1	1	6	5	1	3	3	4
44	1	6	3	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2
45	2	1	4	4	1	7	1	2	1	1	2	5	1	1	1	2	2	2	4	4	3	2	1	4	4
46	2	1	6	7	1	3	1	1	1	1	2	5	1	1	1	1	5	2	6	2	5	1	1	3	3
47	2	1	2	2	4	7	1	1	1	1	2	1	3	4	1	1	1	2	4	4	5	2	2	4	3
48	2	6	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
49	2	6	6	7	2	3	1	1	1	1	1	5	1	3	1	1	4	3	2	2	6	3	3	4	4
50	1	6	2	6	4	3	1	1	1	1	3	3	1	2	1	1	4	2	4	4	5	2	1	2	2
51	2	4	1	4	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	5	1	1	2	3
52	4	1	1	4	4	7	1	2	1	1	2	4	4	5	1	2	4	2	7	4	6	3	3	4	4
53	1	6	7	6	2	3	1	2	2	1	2	5	4	4	1	2	2	2	4	4	5	3	3	4	4
54	2	1	2	6	4	5	1	1	1	1	3	5	1	3	1	2	3	2	4	4	5	3	3	4	4
55	1	6	3	4	1	5	1	1	1	1	2	3	1	3	1	2	4	3	1	1	5	1	1	2	2
56	4	5	4	6	4	2	1	1	1	1	4	3	3	4	1	1	3	1	1	1	5	3	3	4	4
57	2	6	3	4	4	5	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	1	1	5	1	1	2	2
58	1	5	5	4	1	5	1	2	1	2	3	4	4	5	1	2	4	3	7	1	5	3	1	4	4
59	2	6	3	7	4	5	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2	6	5	3	3	4	4

Αναλυτικός πίνακας αποτελεσμάτων για το δεύτερο ερωτηματολόγιο.

Οι πρώτοι 50 μαθητές που συμμετείχαν στο πρώτο ερωτηματολόγιο είναι οι μαθητές που συμμετείχαν και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο. Η ταυτοποίησή τους έγινε με βάση το όνομα που ήταν υποχρεωμένοι να αναγράφουν και στα δύο ερωτηματολόγια.

ερωτήσεις / μαθητές	1	2	3	4	5.1	5.2	5.3	5.4	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	7.1	7.2	7.3	7.4	8.1	8.2	8.3	9	10.1	10.2	10.3	11	12.1	12.2	13.1	13.2
1	5	1	6	2	1	2	3	4	1	2	3	3	2	2	4	4	2	7	7	7	2	1	4	4	1	1	1	3	4
2	4	1	7	5	2	1	3	3	1	1	1	1	5	1	5	3	2	3	5	6	1	1	3	3	1	1	1	2	4
3	5	1	4	2	1	2	3	1	1	3	3	4	5	1	1	1	3	2	3	3	1	3	3	3	1	3	6	3	4
4	2	7	4	6	4	2	3	5	1	3	1	1	2	3	5	4	3	7	7	7	1	3	4	4	5	1	5	1	3
5	2	1	5	4	1	1	1	1	1	3	1	4	5	1	3	1	3	7	7	7	5	1	4	3	1	1	1	2	4
6	7	1	5	6	2	2	3	3	1	1	3	4	2	1	3	2	3	5	2	2	6	3	4	4	2	1	5	2	4
7	5	1	7	2	3	2	3	1	3	3	3	4	5	1	2	1	1	2	4	5	3	1	3	3	1	1	1	2	4
8	2	1	5	5	1	2	3	1	1	1	1	1	2	1	4	2	3	2	1	6	5	1	2	2	2	3	6	2	4
9	3	1	5	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4	4	1	1	1	1	5	3	6	1	1
10	3	1	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	3	4
11	7	1	6	5	2	2	3	3	1	3	3	4	5	1	5	4	3	7	7	1	5	3	4	4	1	1	2	1	3
12	2	1	3	1	1	1	1	1	1	3	1	4	1	1	1	1	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	4	2	4
13	3	1	5	1	2	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	4	2	1	1	1	1	1	2	2	3	1	2	1	1
14	7	6	2	5	1	2	1	1	1	1	3	1	3	1	1	2	3	2	2	2	5	1	3	3	3	2	6	2	4
15	2	2	5	6	2	2	3	4	1	1	2	2	1	1	3	3	3	2	1	1	5	1	2	2	3	3	6	3	4
16	4	2	5	2	2	1	3	1	1	2	1	3	5	1	2	4	3	2	6	6	5	1	3	3	3	1	3	1	2
17	1	2	4	1	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	3	4	3	2	6	6	5	1	3	3	5	1	2	2	4
18	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	4	1	1
19	3	1	3	1	1	1	2	1	1	3	1	3	5	2	4	3	3	1	1	1	5	1	2	2	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	2	1	1	3	1	2	1	1	1	1	1	4	3	2	4	7	1	1	3	3	3	1	1	1	2
21	4	8	4	6	2	2	3	5	3	4	3	4	5	1	1	4	3	7	5	5	1	3	4	4	1	3	6	1	1
22	3	1	1	5	1	2	3	5	3	4	3	4	5	1	3	3	3	2	7	7	6	2	3	3	1	1	1	2	4
23	2	1	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	4	3	3	6	1	7	1	1	2	3	6	3	6	2	4
24	2	1	5	3	4	2	3	5	3	4	3	4	5	3	5	4	3	7	7	7	7	3	4	4	1	3	6	3	4
25	7	1	3	1	2	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	4	3	2	1	1	1	1	4	3	6	3	6	3	4
26	2	1	3	1	2	1	3	4	1	3	1	3	4	1	4	4	3	2	1	1	3	1	4	4	2	2	6	1	3
27	2	1	3	1	2	2	3	1	1	3	1	1	2	1	5	2	3	2	1	1	1	1	2	3	1	3	6	1	3
28	8	2	3	2	2	2	3	1	1	3	2	3	5	1	5	4	3	7	1	6	1	3	4	4	1	2	6	3	4
29	7	4	7	6	3	1	3	1	1	4	2	1	5	1	1	4	3	4	1	6	5	3	4	4	3	2	6	2	4
30	3	1	1	6	2	1	3	2	1	4	2	2	1	1	1	4	3	4	1	1	5	3	4	4	1	2	6	2	4
31	3	1	1	5	3	2	3	5	1	4	3	4	5	1	3	3	3	7	7	7	7	2	2	3	1	1	6	2	4
32	7	2	3	2	1	1	3	3	1	1	1	3	1	1	4	3	2	2	2	2	5	1	3	3	1	2	6	1	2
33	8	2	3	2	2	2	3	2	1	3	2	3	5	1	3	4	3	2	7	7	1	3	4	4	1	1	3	3	4
34	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	5	1	3
35	3	1	3	2	1	1	3	1	1	1	3	2	1	1	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	1	1	1	1	3
36	3	1	5	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	2	5	1	2	3	1	1	5	3	4
37	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	2	2	5	1	2	2	1	1	2	1	3
38	7	2	4	6	4	2	3	4	1	4	3	4	2	1	4	4	3	2	6	6	7	2	3	3	4	2	6	2	4
39	1	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	3	6	2	1	1	1	1	1	1	4	2	4
40	4	1	2	6	2	2	3	1	1	1	1	4	2	1	1	4	1	7	7	7	5	3	4	4	5	1	3	1	3
41	4	2	7	6	4	2	3	5	3	4	3	4	5	1	3	4	3	7	7	7	7	3	4	4	3	2	6	2	4
42	4	1	3	6	1	1	3	4	1	1	1	1	5	1	1	1	3	2	2	2	5	1	3	3	2	2	6	2	4
43	4	1	2	6	3	2	3	4	1	1	3	4	5	1	1	3	3	2	1	1	5	1	3	2	2	1	5	1	3
44	2	1	5	1	1	2	3	1	1	1	3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3	6	1	1
45	4	1	4	5	1	1	3	1	1	1	2	1	3	1	4	4	2	2	3	3	6	3	4	4	1	2	6	2	4
46	7	1	4	3	2	2	3	4	1	1	3	3	5	1	3	4	2	2	7	7	6	1	3	3	1	1	1	1	3
47	1	2	2	6	2	1	3	4	1	1	1	1	2	1	1	1	3	2	4	4	4	1	2	3	1	1	2	2	4
48	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	2	6	2	4
49	2	1	5	1	1	2	3	1	1	1	1	3	2	3	5	4	3	7	7	7	1	1	2	4	2	2	6	1	3
50	8	4	1	6	4	2	3	5	3	4	3	4	5	3	5	4	3	7	7	7	7	3	4	4	6	3	6	3	4

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ξένη Βιβλιογραφία

Attorps I., (2003). Teachers' images of the 'equation' concept. Proceedings of the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Attorps I., Tossavainen T., (2007). Is there equality in equation? Proceedings of the Fifth Conference of the European society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.

Bell E., (1965). Οι μαθηματικοί. Μετάφραση από τον Μανόλη Μαγειρόπουλο. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1992).

Boyer C., (1956). History of Analytic Geometry. Ανατύπωση το 2004 από τις Dover Publication, Inc. New York.

Boyer C., Merzbach U.,(1989). Η ιστορία των Μαθηματικών. Ανανεωμένη έκδοση από τον Uta C. Merzbach το 1989, του βιβλίου του Carl B. Boyer με τίτλο A History of Mathematics (1968). Μετάφραση Βίβιαν Κουσουλάκου. Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού (1997).

Coolidge J., (1940). A History of Geometrical Methods. Dover Publications, Inc. New York.

Coolidge J., (1936). The Origin of Analytic Geometry. Osiris, 1, 231-250.

Descartes R., (1637). La géométrie. Μετάφραση με τίτλο «The geometry of René Descartes», από τα Γαλλικά και τα Λατινικά στα Αγγλικά από τους Smith D. και Latham M. Dover Publications, Inc. New York (1954).

Dreyfus T., (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In David Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinking (σελ. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus T., Hoch M., (2004). Equations- a structural approach. Proceedings of PME 28 Conference, Vol. 1, 152-155, Bergen, Norway.

Dubinsky E., (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinking (σελ. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky E., Leron U., Dautermann J., Zazkis R., (1994). On learning fundamental concepts of group theory. Educational Studies in Mathematics*, 27*(3), 267-305.

Duval R., (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. Proceedings of PME 24 Conference, Vol. 1, 55-69, Hiroshima University, Japan.

Duval R., (2003). Γλώσσα(ες) και αναπαράσταση(εις) στη διδασκαλία των μαθηματικών: δύο και μια τρίτη πρακτικές. Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, Ρέθυμνο.

Duval R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics*,* 61, 103-131.

Elia I., Panaoura A., Eracleous A., Gagatsis A., (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representation. International Journal of Science and Mathematics Education, 5, 533-556.

Elliott J., (1991). Action research for educational change. Open University Press, Milton Keynes, Philadelphia.

Font V., Contreras A., (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics*,* 69, 33-52.

Font V., Godino J., D'Amore B., (2007). The onto-semiotic approach to representation in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27, 458-477.

Forbes E., (1997). Descartes and the birth of Analytic Geometry. Historia Mathematica, 4, 141-151.

Godino J., Batanero C., Font V., (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 39, 127-135.

Goldin G., (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Harel G., Tall D., (1989). The General, the Abstract, and the Generic. For the Learning of Mathematics, 11 (1), 38-42.

Hitt F., (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 123-134.

Knuth E., (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory study. Journal for the Research in Mathematics Education, 31 (4), 500-507.

Loria G., (1931). Ιστορία των Μαθηματικών. Μετάφραση Μ. Κωβαίος. Αθήναι. Ελληνική Μαθηματική Εταιρία. Εκδόσεις Παπαζήση 1971.

Mahoney M., (1973). The Mathematical Career of Pierre de Fermat. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Molland A., (1976). Shifting the foundation: Descartes's transformation of ancient geometry. Historia Mathematica, 3, 21-49.

Newton I., (1728)Universal arithmetic : or, a treatise of arithmetical composition and resolution : to which is added Dr. Halley's Method of finding the roots of equation arithmetically / tr. from Latin by Mr. Ralphson ; revised ... Mr. Cunn. London.

Newton I., (1707). Arithmetica Universalis. London.

Sfard A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sfard A., Linchevski L., (1994). The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, 191-228.

Tall D., Bakar M., (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 23(1), 39-50.

Tall D., Vinner S., (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Van Der Waerden B., (1961). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Μετάφραση Γιάννης Χριστιανίδης. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2000).

Ελληνική Βιβλιογραφία.

Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (2003). Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης (Β΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου). Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

Ανδρεαδάκης Σ., Κουσέρας Ν., Μέτης Σ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (1993). Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου (Άλγεβρα- Αναλυτική Γεωμετρία- Πιθανότητες). Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Γιαννίκος Χ., Μπέσης Α., Νοταράς Δ., Σολδάτος Κ., Φωτόπουλος Σ., (1991). Μαθηματικά Ι, (Γ΄ Λυκείου-Αναλυτική Γεωμετρία). Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

Γαγάτσης Α., Ηλία Ι., Ανδρέου Σ., (2003). Αναπαραστάσεις και Μάθηση των Μαθηματικών: Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή. Ευκλείδης γ΄, 59, 5-34.

Γεννηματάς Ν., (1924). Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία. Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου. Αθήνα.

Γεννηματάς Ν., (1925). Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία. Αναλυτική Γεωμετρία του χώρου και Διανυσματική Γεωμετρία. Αθήνα.

Κοντογιάννης Δ., Παπαδόπουλος Γ., Σκούρας Α., Πολύζος Γ., Χιονίδου Μ., (2007). Οδηγίες για την διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007- 2008. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

Λάμπρου Μ., Καστάνης Ν., (2003). Κωνικές τομές. Στο κεφάλαιο για τα Μαθηματικά και ειδικά για την Γεωμετρία του βιβλίου «Ιστορία και φιλοσοφία των επιστημών στον Ελληνικό χώρο (17^{ος}-19^{ος} αιώνας)». Εκδόσεις Μεταίχμιο.

Ντζιώρα Η., (1972). Μαθηματικά (Ε΄ Γυμνασίου — Θετικής κατεύθυνσης). Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Σοφιανός Μ., (1857). Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας. Αθήνα.

Στέφανος Κ., (1915). Σημειώσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας. Αθήνα.

Χατζηδάκης Ι., (1879). Αναλυτική Γεωμετρία. Αθήνα.

Τσάγκας Γ., (1979). Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας. Εκδόσεις Ίδρυμα Ευγενίδου. Αθήνα.