ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ

ΑΠΟΣΤΟΛΗ ΠΑΠΑΔΟΓΙΑΝΝΑΚΗ

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΚΑΙ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

ΒΑΣΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**:**

ΜΑΝΟΛΗΣ ΚΑΤΣΟΠΡΙΝΑΚΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά και Εκπαίδευση».

Επιβλέπων Καθηγητής ήταν ο κ. Μανόλης Κατσοπρινάκης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Μανόλης Κατσοπρινάκης

Μιχάλης Λάμπρου

Σουζάννα Παπαδοπούλου

Αντί προλόγου

Με την εργασία που ακολουθεί, ολοκληρώνεται ο μεταπτυχιακός κύκλος σπουδών μου. Ευρισκόμενος σ' αυτήν την ευχάριστη θέση, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και τους καθηγητές του, για την υποστήριξη που μου προσέφεραν κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ιδιαίτερη μνεία θα ήθελα να κάνω στον δάσκαλό μου και ταυτόχρονα υπεύθυνο της εργασίας που ακολουθεί, ***Μανόλη Κατσοπρινάκη***. Η βοήθειά του για την ολοκλήρωση και την αρτιότητα της εργασίας ήταν καταλυτική. Πιο σημαντικό αποτέλεσμα της συνεργασίας μας, για εμένα, όμως ήταν η εμβάθυνση στην Ανάλυση καθώς και το περαιτέρω ξεκαθάρισμα ορισμένων εννοιών της. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω και για όλα όσα μου πρόσφερε, από τον καιρό που ήμουν μαθητής Λυκείου μέχρι σήμερα.

Ευχαριστώ επίσης τα ***μέλη της επιτροπής*** για την τιμή που μου έκαναν, καθώς και για τις υποδείξεις τους και τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Τέλος ευχαριστώ την ***οικογένειά μου***, η οποία με την αμέριστη ενθάρρυνση, συμπαράσταση και υποστήριξη που μου προσέφερε, βοήθησε στην ολοκλήρωση της προσπάθειας αυτής.

Φεβρουάριος 2005

Αποστόλης Παπαδογιαννάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην Ευρώπη, από τον καιρό του Ναπολέοντα (και αργότερα και στην Αμερική) τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρέμεναν προσηλωμένα στο τρίπτυχο:

- Στοιχειώδης Αριθμητική και Άλγεβρα.
- Ευκλείδεια Γεωμετρία.
- Τριγωνομετρία.

Μόνο μετά το δεύτερο μισό του Εικοστού αιώνα, οι αλματώδεις εξελίξεις των Θετικών επιστημών καθώς και η εκτόξευση του Sputnik από τους Σοβιετικούς, οδήγησαν στην εισαγωγή των, όπως επικράτησε να λέγονται, «*Νέων, ή Μοντέρνων, Μαθηματικών*», στα σχολεία των αναπτυγμένων δυτικών χωρών.

Η εισαγωγή αυτή ξεκίνησε από τις Η.Π.Α. την δεκαετία του 1950 και επεκτάθηκε αμέσως μετά και στην Ευρώπη. Την διαδικασία που γέννησε τα «Νέα Μαθηματικά» καθώς και την λογική που συνόδευε αυτές τις αλλαγές, μπορεί να βρει κανείς π.χ. στα [19], [28], [37], όπως και σε πληθώρα άλλων άρθρων στα περιοδικά *Μαθηματική Επιθεώρηση* και *Ευκλείδης Γ'* της Ε.Μ.Ε., όπου και εκτενώς παρουσιάζονται οι κριτικές, που αυτά έχουν δεχθεί κατά καιρούς.

Σε γενικές γραμμές, τα Νέα αυτά Μαθηματικά διατήρησαν από την παραδοσιακή ύλη το θεωρητικό μέρος της Τριγωνομετρίας, το οποίο και ενοποίησαν με τη βασική Αριθμητική και Άλγεβρα, αφαίρεσαν, ή τουλάχιστον υποβάθμισαν, την Ευκλείδεια Γεωμετρία και πρόσθεσαν μεταξύ άλλων:

- Στοιχεία από τη Θεωρία Συνόλων και τη Λογική.
- Στοιχεία Αλγεβρικών Δομών.
- Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας.
- Αναλυτική Γεωμετρία και
- Μαθηματικό Λογισμό (Στοιχειώδη Ανάλυση).

Οι προσδοκίες από την εισαγωγή των Νέων Μαθηματικών ήταν πολλές. Ενώ στα «*Παλαιά Μαθηματικά*» δινόταν έμφαση περισσότερο στην «*αλγοριθμική*» διαδικασία, δηλαδή να μπορεί ο μαθητής να κάνει πράξεις με γράμματα και αριθμούς χρησιμοποιώντας σωστά τους «*κανόνες*», στα Νέα Μαθηματικά το κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στους ίδιους τους «*κανόνες*», δηλαδή να καταλάβει ο μαθητής γιατί πρέπει να ενεργήσει με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, να μάθει ακόμη και τα θεμέλια της «*δομής*» μέσα στην οποία δουλεύει και με αυστηρές διατυπώσεις, ακριβή γλώσσα (δηλαδή συμβολισμό) και πλήρεις αποδεικτικές διαδικασίες να οικοδομήσει το σύνολο της ύλης, που προέβλεπαν τα νέα αναλυτικά προγράμματα. Αναμενόταν έτσι να κατανοήσουν οι μαθητές τουλάχιστον ένα μεγάλο μέρος από τις νέες γνώσεις, να μάθουν να σκέπτονται με σύστημα και οργάνωση και να αποκτήσουν περισσότερη ωριμότητα στην μαθηματική τους σκέψη, οπότε να είναι και πιο έτοιμοι για τις σπουδές τους στο Πανεπιστήμιο και πολλά άλλα.

Οι προσδοκίες αυτές, όπως διαπιστώθηκε δυστυχώς πολύ γρήγορα, φαίνεται ότι δεν επαληθεύτηκαν. Τα Νέα Μαθηματικά δεν επέφεραν βέβαια καταστροφικά αποτελέσματα στον μαθητικό πληθυσμό και ίσως να ωφέλησαν και μία μικρή μειοψηφία μαθητών, των προικισμένων με μαθηματικό ταλέντο, όμως οι στόχοι που τέθηκαν για την πλειοψηφία των μαθητών σαφέστατα δεν επετεύχθησαν. Η αυστηρή διατύπωση στα Σχολικά βιβλία, ο υπερβολικός συμβολισμός και φορμαλισμός, που συχνά καταντούσαν να θεωρούνται σημαντικότερα των ιδεών που έπρεπε να διδαχτούν, δημιούργησαν πολλά προβλήματα όχι μόνο στην πλειοψηφία των μαθητών, αλλά και την ίδια την εκπαιδευτική διαδικασία από διδακτική και παιδαγωγική σκοπιά.

Παρ' όλα αυτά, και ενώ σε Ευρώπη και Αμερική οι μελέτες έδειχναν ότι τα πράγματα δεν πήγαιναν όπως αναμενόταν, ενώ πλήθαιναν τα επικριτικά άρθρα, που μιλούσαν για τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν από την υιοθέτηση των Νέων Μαθηματικών (σε αντίθεση με τα πολύ λιγότερα υποστηρικτικά άρθρα), στην Ελλάδα έχομε την *ολοκληρωτική* είσοδό τους στα σχολεία μας, με την **εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1979-80**.

Εδώ πρέπει να εξηγήσουμε για λίγο το τι ακριβώς έγινε τότε. Η μεταρρύθμιση του 1979-80 ακολούθησε τις γενικές προδιαγραφές μιας σειράς εκπαιδευτικών μέτρων (μεταξύ των οποίων και η *κατάργηση των τόνων*), τα οποία περιελάμβαναν τόσο την αναμόρφωση της ύλης και των αναλυτικών προγραμμάτων όλων των μαθημάτων για το Γυμνάσιο και το Λύκειο, όσο και την ιδιαίτερης σημασίας, όπως θα δούμε και παρακάτω, αλλαγή του συστήματος πρόσβασης στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, των λεγομένων και *Εισαγωγικών Εξετάσεων*.

Το 1979, τα νέα αυτά αναλυτικά προγράμματα είχαν ήδη εισαχθεί στο Γυμνάσιο και τώρα έπρεπε να εισαχθούν και στο Λύκειο. Πράγματι, το 1979-80, η εισαγωγή τους άρχισε με το νέο βιβλίο της Άλγεβρας Α' Λυκείου (βλέπε [8]), αλλά ολοκληρώθηκε με την έκδοση των νέων βιβλίων Β' Λυκείου (βλέπε [10]) και Γ΄ Λυκείου το 1983, όπου εκτός του βιβλίου της Ανάλυσης (βλέπε [12]), έχουμε και τα βιβλία της Άλγεβρας (βλέπε [11]) και της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τους ίδιους συγγραφείς. Στο ενδιάμεσο, 1980-81-82, η νέα ύλη διδασκόταν από τα παλαιά βιβλία, σε συνδυασμό με κάποια άλλα, όπως π.χ. το [20] και η συνέχειά του (Τεύχος Β', που εκδόθηκε το 1979), αλλά και βοηθήματα, που δεν ήταν του ΟΕΔΒ, όπως τα «*Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Ίδρυμα Ευγενίδου, 1981» του Γ. Τσάγκα.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι ουσιαστικά η περισσότερη νέα ύλη προστέθηκε όχι τόσο στην Ανάλυση, όπου ο υπερβολικός συμβολισμός και επιμέρους τμήματα της νέας ύλης είχαν ήδη εισαχθεί νωρίτερα, όσο στην Άλγεβρα (Γραμμική Άλγεβρα, Αλγεβρικές Δομές κ.λπ.), ενώ στην Γεωμετρία μπήκε η Αναλυτική Γεωμετρία, με παράλληλη υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας, όπως ακριβώς απαιτούσαν τα Νέα Μαθηματικά.

Σχετικά με την Ανάλυση, η οποία θα μας απασχολήσει αποκλειστικά από εδώ και πέρα, η μεγάλη διαφορά με τα όσα διδασκόταν μέχρι τότε, συνίσταται όχι τόσο στην διαφοροποίηση της διδασκόμενης ύλης, αλλά στην παρουσίασή της, η οποία έπρεπε τώρα, σύμφωνα με τις νέες απαιτήσεις, να γίνει *αξιωματικά* και με αυστηρές *αποδεικτικές διαδικασίες*, όπως θα δούμε και στην συνέχεια της εργασίας αυτής. Αυτό βέβαια, έπρεπε να γίνει από την αρχή, δηλαδή από την στιγμή που ο μαθητής μαθαίνει για το σύνολο των Πραγματικών αριθμών κ.λπ., και έτσι προέκυψε το νέο βιβλίο της Α' Λυκείου [8], για το οποίο θα έχουμε την ευκαιρία να μιλήσουμε εκτενώς στα επόμενα Κεφάλαια.

Θα περίμενε βέβαια κανείς ότι αφού ακολουθήσαμε μια εξέλιξη με πάνω από δεκαπέντε χρόνια καθυστέρηση, να είχαμε τουλάχιστον αποφύγει μερικά βασικά λάθη, τα οποία είχαν οδηγήσει σε αποτυχία τα Νέα Μαθηματικά σε άλλες χώρες. Τέτοια λάθη ήταν π.χ. η έλλειψη σωστής προετοιμασίας και ευκαιριών για την συνεχή επιμόρφωση των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ώστε να μπορούν να διδάξουν απρόσκοπτα τη νέα ύλη, το ένα και μοναδικό σχολικό εγχειρίδιο, η αποκοπή των Μαθηματικών από τις άλλες επιστήμες (των οποίων τα προβλήματα έδωσαν και δίδουν ώθηση στα Μαθηματικά), η επιδίωξη να διδαχθούν τα «συγκεκριμένα» Μαθηματικά (και όχι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, πράγμα που θα ήταν πιο φυσιολογικό) με πλήρη *αξιωματική θεμελίωση* και *λεπτομερή αποδεικτική διαδικασία*, δηλαδή με τη «λογική» τους σειρά και αποξενωμένα από την ιστορική τους εξέλιξη, ο άκρατος συμβολισμός και φορμαλισμός και πολλά άλλα.

Φαίνεται όμως ότι η εμπειρία των άλλων χωρών δεν απετέλεσε αφετηρία των δικών μας πειραματισμών. Επαναλήφθηκε έτσι και στην Ελλάδα το φαινόμενο να μάθουν πολλοί καθηγητές τα Νέα Μαθηματικά, για πρώτη τους φορά, από το σχολικό εγχειρίδιο. Αρκετοί από αυτούς έπρεπε να αντιμετωπίσουν την δυσκολία να διδάξουν πράγματα τα οποία και οι ίδιοι δεν γνώριζαν κατά βάθος. Άρθρα, όπως τα [27], [28], [37] και πάρα πολλά άλλα παρόμοια, που εμφανίστηκαν τότε στο περιοδικό της

Ε.Μ.Ε. «*Μαθηματική Επιθεώρηση*», είναι ενδεικτικά του προβλήματος που είχε δημιουργηθεί. Μάλιστα, το 1983 η Ε.Μ.Ε., «*με στόχο την πολύπλευρη βοήθεια του καθηγητή της μέσης εκπαίδευσης, εγκαινιάζει*» την έκδοση του νέου περιοδικού «*Ευκλείδης Γ'*», το οποίο για αρκετά χρόνια διέθετε και ειδική στήλη «*με σκοπό να απαντά σε ερωτήσεις και απορίες μαθηματικού περιεχομένου*» των καθηγητών Μέσης εκπαίδευσης (π.χ. βλέπε [23] και [24]), παράλληλα με την δημοσίευση των άρθρων με τις απόψεις, σκέψεις και ιδέες των ίδιων των καθηγητών (π.χ. βλέπε [13], [19], [26], [38] και [46]).

Κατά το ίδιο χρονικό διάστημα (1980) έχουμε και την ιδιαίτερης σημασίας, όπως είπαμε παραπάνω, αλλαγή του εξεταστικού συστήματος πρόσβασης στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Το τελευταίο, μέχρι το 1979, σύστημα Εισαγωγικών Εξετάσεων, ήταν αυτό των λεγομένων <u>κύκλων</u> σπουδών, όπως Πολυτεχνικός-Φυσικομαθηματικός-Γεωπονοδασολογικός κύκλος, Οικονομικός κύκλος και λοιποί κύκλοι. Τώρα, τα έτη 1980-81-82, έχουμε τις <u>Πανελλήνιες εξετάσεις</u> Β' και Γ' Λυκείου, που από το 1983, θα γίνουν <u>Γενικές εξετάσεις</u> ή <u>Δέσμες</u> (1$^{\eta}$, 2$^{\eta}$, 3$^{\eta}$ και 4$^{\eta}$ Δέσμη). Αν και οι Δέσμες καταργήθηκαν μόνο πρόσφατα, με την **εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1998-99** και αντικαταστάθηκαν με τις <u>Πανελλαδικές εξετάσεις</u> Β' και Γ' Λυκείου, ενδιάμεσα είχαμε μία ακόμα **εκπαιδευτική μεταρρύθμιση το 1989-90**, όπως θα δούμε και παρακάτω.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονίσουμε ότι, στην εργασία αυτή δεν έχουμε σκοπό να ασχοληθούμε ιδιαίτερα, πέρα από κάποιες γενικές διαπιστώσεις, με την κριτική των μεταρρυθμίσεων αυτών, ούτε με την αξιολόγησή τους. Σε μερικά από τα άρθρα της βιβλιογραφίας μας και των περιοδικών, που ήδη έχουμε αναφέρει, μπορεί ο κάθε ενδιαφερόμενος να διαβάσει σκέψεις και απόψεις σχετικές με τα θέματα αυτά.

Νομίζουμε όμως ότι, η διόγκωση της ύλης, η δυσκολία των νέων εννοιών, η υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όσο και της Τριγωνομετρίας και της βασικής Άλγεβρας και όλοι οι άλλοι λόγοι, που συνήθως επιστρατεύονται για να δικαιολογήσουν το γιατί τα πράγματα δεν πάνε καθόλου καλά και στην Ελλάδα μετά το 1980, αλλά αντίθετα χειροτερεύουν αντί να καλυτερεύουν, παρά τις δύο νεώτερες διορθωτικές εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, δεν είναι ούτε η μοναδικές, ούτε η σημαντικότερες αιτίες αυτού του φαινομένου. Κατά την γνώμη μας, πολύ σημαντικότερο ρόλο κατέχουν δύο άλλοι παράγοντες της Ελληνικής πραγματικότητας. Ο ένας είναι οι κοινωνικές και οι πολιτικές αλλαγές των χρόνων αυτών, τις οποίες όμως δεν μπορούμε να σχολιάσουμε εδώ, αν και πιστεύουμε ότι όλοι έχουμε διαπιστώσει την όλο και μεγαλύτερη απαξίωση του ρόλου του εκπαιδευτικού και του Σχολείου, παρά τις κατά καιρούς αντίθετες διαβεβαιώσεις. Ο άλλος, που δεν είναι ανεξάρτητος του προηγουμένου, έχει να κάνει με την αλλαγή του συστήματος των Εισαγωγικών Εξετάσεων στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση το 1980, γι' αυτό και την χαρακτηρίσαμε προηγουμένως ως «αλλαγή ιδιαίτερης σημασίας».

Μέχρι το 1979 δεν υπήρχε ουσιαστικά <u>εξεταστέα ύλη</u> στις εξετάσεις αυτές. Ο υποψήφιος σπουδαστής έπρεπε πραγματικά να ξέρει <u>όλα</u> όσα έμαθε σε όλη την διάρκεια της μαθητικής του ζωής και εάν μπορούσε (ή αν ήθελε κάποιες «καλές» σχολές) να μάθει και σχεδόν ο,τιδήποτε άλλο προσφερόταν τότε από την εξωσχολική βοήθεια. Για παράδειγμα υπήρχαν μεταφράσεις έγκυρων ξένων βιβλίων, αλλά και πληθώρα άλλων Ελληνικών σχολικών βιβλίων-βοηθημάτων, με ύλη και περιεχόμενα πολύ πέραν εκείνων, που ο μαθητής θα μπορούσε να μάθει από το σχολικό βιβλίο. Τότε δηλαδή, το εξωσχολικό βοήθημα κρινόταν με βάση πόσο «διαφορετικό» από το σχολικό βιβλίο ήταν, σε αντίθεση με τα σημερινά βοηθήματα, που και πάλι υπάρχουν σε αφθονία, τα οποία όμως, αν δεν έχουν επαρκώς διαφημίσει την «παράγραφο προς παράγραφο» ταύτισή τους με το αντίστοιχο σχολικό βιβλίο, θεωρούνται άχρηστα.

Το 1980, το πιο κρίσιμο και κομβικό σημείο του Εκπαιδευτικού μας μηχανισμού, δηλαδή το εξεταστικό σύστημα για την πρόσβαση στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλάζει πλήρως. Από εδώ και στο εξής η εξεταστέα ύλη είναι αυστηρά καθορισμένη και μόνο μέσα από το ένα και μοναδικό Σχολικό βιβλίο. Αν το βιβλίο αυτό έχει και κάποιες αβλεψίες ή ακόμη καμιά φορά και λάθη, ο υποψήφιος πρέπει να τα αναπαράγει στις απαντήσεις του, αν θέλει να βαθμολογηθεί «αντικειμενικά». Επιπλέον, το νέο αυτό εξεταστικό σύστημα, όχι μόνο δεν επηρεάστηκε από τις δύο επόμενες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, αλλά αντίθετα «βελτιώθηκε» περαιτέρω, με νέες αφαιρέσεις εξεταστέας ύλης, μέχρι ακόμα και του τραγελαφικού σημείου, να ζητείται π.χ. «από την παράγραφο τάδε να εξετάζονται μόνο οι ασκήσεις, αλλά όχι η θεωρία»!

Φυσικά, το αναπόφευκτο αποτέλεσμα, ήταν και είναι η *παπαγαλία* και σιγά-σιγά η πνευματική στείρωση, παρ' όλο που η καταβαλλόμενη προσπάθεια των μαθητών, σε σύγκριση με αυτήν των μαθητών της δεκαετίας του 1970 και προηγουμένως, θα έλεγε κανείς ότι όχι μόνο δεν μειώθηκε, αλλά μάλλον αυξήθηκε.

Ας επανέλθουμε όμως στους στόχους της εργασίας αυτής, οι οποίοι κάλλιστα θα μπορούσαν να περιοριστούν μόνο στην παρουσίαση και επεξεργασία των άρθρων, τα οποία αναφέρονται στα Κεφάλαια 4 και 5 παρακάτω. Αυτός εξ' άλλου ήταν και ο αρχικός σκοπός μας. Όμως, μετά από όσα είδαμε παραπάνω, θα ήταν μάλλον μεγάλη παράληψή μας να μην αναφερθούμε πρώτα στην αντίστοιχη, με εκείνη των άρθρων αυτών, ύλη της Στοιχειώδους Ανάλυσης και να δούμε το πώς αυτή εντάχθηκε και διαμορφώθηκε κατά τα τελευταία 35 περίπου χρόνια στην σχολική μας πραγματικότητα. Έτσι ο αναγνώστης, πρώτον θα πληροφορηθεί για το τι ακριβώς περιλαμβάνεται στα διάφορα Σχολικά μας βιβλία καθώς και σε κάποια άλλα συγγράμματα, σχετικά με τα θέματα που θα μας απασχολήσουν εδώ. Δεύτερον, θα ενημερωθεί πλήρως γι' αυτά, τόσο από την παρουσίασή τους στα επόμενα δύο Κεφάλαια, όσο και από τα σχετικά αντίγραφα των Σχολικών βιβλίων, τα οποία παραθέτουμε στα Παραρτήματα Α, Β και Γ, στο τέλος της εργασίας αυτής. Τέλος, θα έχει την ευκαιρία να διαμορφώσει την προσωπική του άποψη, σχετικά με τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις των χρόνων αυτών, παρακολουθώντας συγχρόνως και την ιστορική τους εξέλιξη. Επίσης, στην αρχή κάθε Κεφαλαίου, όπως και κάθε φορά που θα μας δίνεται η ευκαιρία, σε διάφορα άλλα μέρη της εργασίας αυτής, θα εξηγούμε τον σκοπό και τον στόχο των όσων παρουσιάζονται εκεί. Προς το παρόν ας δούμε μία συνοπτική παρουσίαση των όσων θα ακολουθήσουν.

Στα Κεφάλαια 2 και 3 της εργασίας αυτής, θα δούμε εκτενώς τις αλλαγές και τις τροποποιήσεις της διδακτέας ύλης στο Λύκειο, που προήλθαν από την κρίσιμη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1979-80 και αφορούσαν το πιο προχωρημένο Μαθηματικά μέρος της, την Ανάλυση. Βέβαια, οι αναφορές μας θα ανατρέχουν συγχρόνως, τόσο προς τα πίσω, συγκρίνοντας με ό,τι διδασκόταν μέχρι τότε, όσο και στις μετέπειτα εξελίξεις, με τις δύο επόμενες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις.

Με την μεταρρύθμιση του 1989-90, έχουμε μια νέα αναδιάρθρωση της διδακτέας ύλης, όπου πολλά στοιχεία της προηγούμενης περιόδου παραλείπονται ή αλλάζει ο τρόπος παρουσίασής τους, ταυτόχρονα με μία σταδιακή υποχώρηση από την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και πολλά άλλα.

Η ολοκληρωτική υποχώρηση από την αξιωματική θεμελίωση και την αυστηρή αποδεικτική διαδικασία θα έλθει τελικά με την πιο πρόσφατη μεταρρύθμιση του 1998-99, η οποία συνοδεύεται και με ένα ακόμη νέο στοιχείο, την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αύξηση του αριθμού των εισακτέων φοιτητών στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με το εάν υπήρχαν ή όχι οι υποδομές και όλες οι άλλες απαραίτητες προϋποθέσεις για να πραγματοποιηθεί αυτό το τελευταίο, αλλά από ότι ήδη φαίνεται, θα αποτελέσει και αυτό, στο πολύ άμεσο μέλλον, ένα ακόμη πρόβλημα μαζί με τα τόσα αλλά προβλήματα της Παιδείας μας.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4, θα παρουσιάσουμε έξι εργασίες, οι οποίες δημοσιεύθηκαν στις στήλες τις σχετικές με τα θέματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών (στήλες των Classroom Notes και The Teaching of Mathematics), στο περιοδικό της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας «*The American Mathematical Monthly*», κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ του 1957 έως το 1991.

Οι πέντε πρώτες από αυτές, έχουν στόχο να ενοποιήσουν και να απλοποιήσουν ένα μεγάλο αριθμό αποδείξεων σημαντικών θεωρημάτων της Ανάλυσης. Αυτό επιτυγχάνεται, σε κάθε μία από τις εργασίες αυτές, με τη βοήθεια ενός, όπως θα το λέμε παρακάτω, *Βασικού Λήμματος*, το οποίο αποδεικνύεται με την βοήθεια κάποιου αξιώματος της πληρότητας των Πραγματικών αριθμών.

Η έκτη και τελευταία εργασία αναφέρεται στην *Παρατήρηση του Καραθεοδωρή* (όπως έχει επικρατήσει να λέγεται αυτή στην Ελληνική βιβλιογραφία – βλέπε [31], σελ. 335 και [32], σελ. 79). Η παρατήρηση αυτή, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας εναλλακτικός ορισμός της παραγώγου, έχει επίσης πολλές και σπουδαίες εφαρμογές, όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 4 και 5 παρακάτω.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, σε κάθε μία από τις πέντε πρώτες εργασίες του Κεφαλαίου 4, αποδεικνύεται, με την βοήθεια του Βασικού της Λήμματος, κάποιο αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, συνήθως διαφορετικό από εκείνο που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του ίδιου του Λήμματος. Έτσι έχουμε ουσιαστικά την ισοδυναμία καθενός από τα πέντε Βασικά Λήμματα, με τα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς και τα ίδια τα πέντε Βασικά Λήμματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Το γεγονός αυτό, μας οδήγησε να αναζητήσουμε μια απ' ευθείας απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας. Μια τέτοια απόδειξη, που να συμπεριλαμβάνει όλα τα Λήμματα, δεν μπορέσαμε να βρούμε στην βιβλιογραφία, γι' αυτό θα δώσουμε μία δική μας στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου αυτού.

Στο δεύτερο και τελευταίο μέρος του Κεφαλαίου αυτού (και της εργασίας μας), θα δώσουμε και άλλες εφαρμογές των πέντε Βασικών Λημμάτων και της Παρατήρησης του Καραθεοδωρή, πέραν εκείνων, που θα δούμε στο Κεφάλαιο 4.

Σημείωση: Για τους αναγνώστες, που δεν διαθέτουν τα διάφορα Σχολικά βιβλία, στα οποία παραπέμπουμε συχνά, παραθέτουμε συνήθως ορισμένα χαρακτηριστικά αποσπάσματά τους.

Ιδιαίτερα όμως, για τα Θεωρήματα της Συνέχειας, των Παραγώγων και των Ολοκληρωμάτων, ο αναγνώστης θα βρει, στα Παραρτήματα Α, Β και Γ, στο τέλος της εργασίας αυτής, αντίγραφα από τα τρία τελευταία Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης, στα οποία θα αναφερόμαστε συχνά. Τα βιβλία αυτά είναι κατά χρονολογική σειρά τα [12], [21] και[6].

Το Παράρτημα Α περιλαμβάνει τα Θεωρήματα της συνέχειας και από τα τρία αυτά βιβλία. Επειδή, όπως είπαμε, η σειρά που ακολουθούμε είναι η χρονολογική, τα αποσπάσματα αυτά δείχνουν εύγλωττα την πορεία, που ακολούθησε το μάθημα της Ανάλυσης στο Λύκειο, τα τελευταία χρόνια. Οι συγκρίσεις, μεταξύ των διαφόρων μερών της ύλης που παραθέτουμε, είναι εύκολες, αρκεί να παρατηρήσει κανείς, σε τι διαφέρει κάθε φορά το ίδιο κομμάτι της ύλης, από βιβλίο σε βιβλίο.

Στα Παραρτήματα Β και Γ, έχουμε κάνει την ίδια ακριβώς εργασία, αλλά για τα Θεωρήματα που αφορούν την παράγωγο και το ολοκλήρωμα αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την ύλη εκείνη της στοιχειώδους Ανάλυσης, με την οποία θα πρέπει να έχει εξοικειωθεί, όσο μπορεί καλύτερα, όποιος πρόκειται να ασχοληθεί με τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου κ.λπ. και με τις συνέπειές τους. Η ύλη αυτή θα μπορούσε να ήταν αρκετά εκτεταμένη, αλλά εδώ θα δεχτούμε πολλά πράγματα ως γνωστά (π.χ. τα περί συνόλων και άλλα, που θα δει ο αναγνώστης παρακάτω) και θα περιορισθούμε μόνο σε ότι αφορά το σύνολο των Πραγματικών αριθμών και τις πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Ακόμη, δεν είναι σκοπός μας εδώ να υπεισέλθομε στις λεπτομέρειες της κατασκευής του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Εκείνο που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι οι <u>ιδιότητες</u> των στοιχείων του, καθώς και η <u>ορολογία</u> που συνήθως χρησιμοποιείται και όχι το πώς κατασκευάζεται αυτό και το «τι είναι» τα στοιχεία του, δηλαδή «οι αριθμοί». Η διαδικασία αυτή είναι λίγο-πολύ γνωστή σε όλους μας. Τόσο στα Μαθηματικά του Σχολείου, όσο και στα διάφορα Μαθήματα Ανάλυσης, πάντοτε υπάρχει μια μικρή ή μεγάλη εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς, θεωρώντας τους σαν δεδομένα αντικείμενα που ικανοποιούν κάποια αξιώματα. Από τα αξιώματα αυτά, εξάγονται στη συνέχεια όλες οι άλλες τους ιδιότητες και ορίζονται και όλες οι έννοιες της Ανάλυσης, που θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

Παράλληλα με την σύντομη αυτή ανακεφαλαίωση της παραπάνω ύλης, θα αναφερόμαστε ταυτόχρονα και στα συγκεκριμένα εκείνα μέρη της, που παρουσιάζονται στα *αντίστοιχα* Σχολικά Βιβλία, σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα των Εκπαιδευτικών Μεταρρυθμίσεων, που έγιναν, τα τελευταία 35 περίπου χρόνια, στην χώρα μας. Βέβαια, όταν λέμε *αντίστοιχα* Σχολικά Βιβλία, εννοούμε τα βιβλία εκείνα τα οποία απευθυνόταν στους μαθητές της ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ κατεύθυνσης, όπως αυτή λεγόταν αρχικά και μετά έγινε ΘΕΤΙΚΗ κατεύθυνση, μετά ΠΡΩΤΗ ΔΕΣΜΗ και τελευταία ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ κατεύθυνση.

2.1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1.1. Πράξεις και Διάταξη στο σύνολο των Πραγματικών

Ο συντομότερος τρόπος για να περιγράψει κανείς την Αλγεβρική Δομή του συνόλου $\mathbb{R}$ των Πραγματικών αριθμών είναι ο ακόλουθος:

Το σύνολο των Πραγματικών αριθμών είναι εφοδιασμένο με δύο (εσωτερικές) πράξεις, $+$, $\cdot$, και μια σχέση ολικής (ή γραμμικής) διάταξης, $\leq$, ώστε το $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ να είναι ένα ολικά διατεταγμένο σώμα.

Εδώ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι:

(1) Το βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ» του Β. Στάϊκου, στις πρώτες εκδόσεις του, παρουσίαζε το σύνολο $\mathbb{R}$ των Πραγματικών αριθμών με αυτόν τον τρόπο (βλέπε [44], σελ. 38). Στην συνέχεια και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 80, οι επόμενες εκδόσεις του βιβλίου αυτού δεν περιλαμβάνουν αυτήν την αναφορά (βλέπε [45]). Ενδιάμεσα, το 1978, εισάγεται στην Β’ Λυκείου, ως ύλη επιλογής, το κεφάλαιο των Αλγεβρικών Δομών, όπου αναφέρεται και πάλι το $\mathbb{R}$ ως Σώμα (βλέπε [20], σελ. 66).

(2) Τα Κεφάλαια 2 και 3, του βιβλίου, «ΑΛΓΕΒΡΑ – Α' ΛΥΚΕΙΟΥ» (βλ. [8]), που ακολούθησε τα νέα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών το 1979-80, περιγράφουν επίσης το $\mathbb{R}$ με αυτόν τον τρόπο. Το ίδιο επαναλαμβάνεται στο βιβλίο «ΑΝΑΛΥΣΗ – Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ» (βλέπε [12]), στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1 και επίσης αναφέρεται ως παράδειγμα σώματος και στο [11], σελ. 82.

(3) Στην συνέχεια, κατά τις νεώτερες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις των ετών 1989-90 και 1998-99, κάθε αναφορά στο ότι το σύνολο των Πραγματικών είναι διατεταγμένο σώμα απουσιάζει. Τώρα το κέντρο βάρους της διδασκαλίας έχει πλήρως μετατοπιστεί από την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και την πλήρη αποδεικτική διαδικασία, στο να εμπεδώσουν οι μαθητές τις ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης και στη σωστή χρήση τους. Οι αποδείξεις των περισσοτέρων ιδιοτήτων (π.χ. κανόνας προσήμων του πολλαπλασιασμού, νόμοι διαγραφής, κ.λπ.) έχουν παραλειφθεί (βλέπε [2] και [4]). Επίσης, από εδώ και στο εξής θα καταβληθεί μια συστηματική προσπάθεια ώστε τα Σχολικά Μαθηματικά όλων των τάξεων να απαλλαγούν από τον φορμαλισμό και τον άκρατο συμβολισμό, που τα χαρακτήριζε μέχρι τότε.

Ας μείνουμε όμως για λίγο, μια και θα μας απασχολήσει πολλές φορές και στην συνέχεια, στην μεταρρύθμιση του 1979-80 στο Λύκειο, η οποία, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 1, ήταν επέκταση εκείνης που ήδη εφαρμοζόταν στο Γυμνάσιο. Οι ειδικότερες επιδιώξεις της διδασκαλίας των νέων Μαθηματικών προγραμμάτων ήταν, όπως αναφέρεται στον πρόλογο του παραπάνω βιβλίου της Α' Λυκείου (βλέπε [8]):

«*να εμπεδώσει και να διευρύνει σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο*» και «*να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει μαθηματική σκέψη*».

Οι επιδιώξεις αυτές οδήγησαν, μεταξύ άλλων, σε ένα εισαγωγικό κεφάλαιο (Κεφάλαιο 1 του [8]) με στοιχεία από τη Μαθηματική Λογική και στην αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των Πραγματικών αριθμών.

Στο κεφάλαιο της Μαθηματικής Λογικής γίνεται αναφορά και στις πράξεις των συνόλων, οι οποίες ορίζονται ως σύνολα αληθείας κατάλληλων προτασιακών τύπων. Επίσης υπάρχει και χωριστή παράγραφος για τις διάφορες «*μεθόδους αποδείξεων*», μεταξύ των οποίων είναι και η Μαθηματική Επαγωγή. Βέβαια, οι συγγραφείς του βιβλίου, στον Πρόλογό τους, αναφέρουν για το κεφάλαιο αυτό ότι:

«Πρόκειται για το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειάζεται ο μαθητής για να συνθέτει, να αναλύει και να ελέγχει συλλογισμούς, δηλαδή να συνειδητοποιεί κάθε φορά το πώς συλλογίζεται. Στα επόμενα κεφάλαια συνεχώς δίνονται ευκαιρίες για αναφορά σε έννοιες και μεθόδους που περιέχονται στο Κεφ. 1. Η διδασκαλία, λοιπόν, αυτού του κεφαλαίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά πρέπει να ανταποκρίνεται στην ιδιομορφία του. Αρκεί στην αρχή μια γενική, σύντομη και πρακτική ενημέρωση των μαθητών για το περιεχόμενό του, κυρίως με τα παραδείγματα και τις εφαρμογές του. Η πλήρης αφομοίωση εννοιών και μεθόδων και η εξοικείωση με το συμβολισμό θα γίνει βαθμιαία κατά τη διδασκαλία των επομένων».

Σύμφωνα λοιπόν με το πνεύμα αυτό, είναι απορίας άξιον το γιατί το κεφάλαιο αυτό, ή κάτι ανάλογό του, δεν ξαναεμφανίστηκε σε κανένα άλλο βιβλίο Μαθηματικών στις επόμενες μεταρρυθμίσεις.

Στη συνέχεια, στα επόμενα δύο κεφάλαια του [8], παρουσιάζεται το σύνολο των Πραγματικών αριθμών ως *αντιμεταθετικό σώμα* (Κεφ. 2) και κατόπιν ως *διατεταγμένο σώμα* (Κεφ. 3). Παρόλο που οι μαθητές ήδη χρησιμοποιούσαν από το Γυμνάσιο τις πράξεις και τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, εδώ ο στόχος που τίθεται είναι σαφής και μεγάλος. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκεται να συνειδητοποιήσει ο μαθητής ότι μερικές μόνο από τις ιδιότητες των πραγματικών που γνωρίζει, αρκούν για να αποδειχθούν οι υπόλοιπες. Επιλέγοντας λοιπόν αυτές τις ιδιότητες το Σχολικό βιβλίο, τις δέχεται ως αξιώματα και με αυστηρή αποδεικτική διαδικασία αποδεικνύει τις υπόλοιπες ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης των Πραγματικών αριθμών. Στα κεφάλαια αυτά ορίζονται και μελετώνται επίσης, οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη, οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις και ανισώσεις και η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού με τις ιδιότητές της.

Δέκα χρόνια μετά, η αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών (στην ουσία ο ακρογωνιαίος λίθος της μεταρρύθμισης του 1979-80) εξαφανίζεται από τα βιβλία της Α’ Λυκείου και κατ’ επέκταση απ’ όλο το Λύκειο, όπως αναφέραμε ήδη. Επίσης, είδαμε παραπάνω ότι στα νέα αυτά βιβλία έχει παραλειφθεί εξ ολοκλήρου και το Κεφάλαιο της Λογικής. Μόνο στο [2], αφιερώνεται μια παράγραφος στο σύμβολο της ισοδυναμίας (σελ. 12), αλλά και αυτή θα παραλειφθεί στην επόμενη αλλαγή (βλέπε [4]).

2.1.2. Φυσικοί, Ακέραιοι, Ρητοί και Άρρητοι αριθμοί

Όταν ορίζουμε το σύνολο των Πραγματικών αριθμών ως ένα διατεταγμένο σώμα, τότε τα σύνολα των

φυσικών αριθμών: $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3,\ldots\}$, $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3,\ldots\}$,
ακεραίων αριθμών: $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$, $\mathbb{Z}^*=\{\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
ρητών: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}$: m ακέραιος, n μη μηδενικός φυσικός, Μ.Κ.Δ.(m, n)=1$\}$
και των **αρρήτων** $\mathbb{Q}^c=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ορίζονται να είναι κάποια κατάλληλα υποσύνολά του. Συνήθως,

<u>ορίζουμε</u> το σύνολο των φυσικών αριθμών να είναι η <u>τομή</u> όλων των <u>επαγωγικών</u> υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, δηλαδή, όλων εκείνων των υποσυνόλων Ε του $\mathbb{R}$, που έχουν την ιδιότητα:

«$0\in E$ και (εάν $\alpha\in E$ τότε και $\alpha+1\in E$)»

(π.χ. το ίδιο το $\mathbb{R}$, το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών κ.λπ.) και μετά τα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ ορίζονται εύκολα.

Αν σκεφτούμε λίγο τον παραπάνω ορισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο των Φυσικών αριθμών είναι το <u>μικρότερο</u> επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πράγμα που είναι ισοδύναμο με την <u>Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής</u>, όπως αυτή διατυπώνεται στα [33] σελ. 32, [34] σελ. 32, [35] σελ. 21, [21] σελ.11, [31] σελ. 12, αλλά και η «*Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής*» που αναφέρεται στα [5], σελ. 201 και [1], σελ. 137, είναι έμμεσα το ίδιο πράγμα.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονίσουμε ότι παρουσιάζεται ένα σοβαρό **κενό** στα βιβλία εκείνα του Σχολείου, τα οποία περιγράφουν το σύνολο των Πραγματικών αριθμών ως διατεταγμένο σώμα, αφού κανένα τους δεν ορίζει το σύνολο των Φυσικών αριθμών, απ' όπου θα οριστούν μετά και όλα τα παραπάνω υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος να φθάσει κανείς στο $\mathbb{R}$, ξεκινά με τον ορισμό του $\mathbb{N}$ είτε συνολοθεωρητικά ή με τα αξιώματα Peano (βλέπε [33] σελ. 31, [34] σελ. 31, [35] σελ. 20, αλλά όχι το [36]) και μετά προχωρεί στην κατασκευή των $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$. Για όλα τα προηγούμενα ο αναγνώστης θα βρει πολλές λεπτομέρειες στα [31], Τόμος I, σελ. 11, [39] σελ. 5 και Παράρτημα, [40], σελ. 24 και [43], Κεφάλαιο 2.

2.1.3. Το Αξίωμα της Πληρότητας

Έως εδώ έχουμε δει ότι το $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σώμα. Παρατηρούμε τώρα ότι και το $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ είναι επίσης ένα ολικά διατεταγμένο σώμα. Η ειδοποιός διαφορά των $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}$ θα φανεί παρακάτω με ένα επιπλέον αξίωμα με το οποίο θα εφοδιάσουμε το $\mathbb{R}$.

Πριν φθάσουμε όμως σ' αυτό και ακολουθώντας το [22], ας σταματήσουμε λίγο στην επόμενη αρχή:

Αρχή Ευδόξου–Αρχιμήδη: ***Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο (ή ισοδύναμα: $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$, $x>0$, $\exists n\in\mathbb{N}$: $nx>y$, ή ακόμα και $\lim\frac{1}{n}=0$, κ.λπ.).***

Η αρχή αυτή δεν χαρακτηρίζει βέβαια το $\mathbb{R}$, όμως έχει πολλές και σπουδαίες συνέπειες. Για παράδειγμα χωρίς καμιά δυσκολία και χωρίς πολύ σκέψη, θα έλεγε κανείς ότι ένα μη κενό πάνω φραγμένο υποσύνολο των ακεραίων αριθμών έχει μέγιστο στοιχείο. Αν προσπαθήσει όμως, να το αποδείξει αυτό χωρίς την παραπάνω αρχή, τότε θα εμφανιστούν οι πραγματικές δυσκολίες. Φυσικά, θα σκεφθεί την «*Αρχή της καλής διάταξης του* $\mathbb{N}$», ή όπως λέμε διαφορετικά, «*Αρχή του ελαχίστου φυσικού*», που είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής και λέει ότι:

«Κάθε μη κενό υποσύνολο των Φυσικών έχει
ένα (ακριβώς) ελάχιστο στοιχείο»

(στα Σχολικά βιβλία, υπάρχει μόνο στο [35], σελ. 25. Βλέπε επίσης [31], Τόμος Ι,σελ. 13 και [43], σελ. 19-20). Αλλά αυτό δεν αρκεί, όπως μπορεί να διαπιστώσει, κάνοντας μία πρώτη προσπάθεια, ο αναγνώστης. Εξάλλου, αν ήταν έτσι τα πράγματα, τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό, θα θέταμε

$$[x]=\max\{\mathbb{Z}\cap(-\infty, x]\}$$

και θα είχαμε ορίσει το **ακέραιο μέρος** ενός πραγματικού αριθμού χωρίς την χρήση της αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη, βγάζοντας έτσι άχρηστα όλα τα έγκυρα σχετικά συγγράμματα, καθώς και το σχολικό βιβλίο της Α' Λυκείου, το οποίο περιέχει λεπτομερείς αποδείξεις των παραπάνω ([8], σελ. 121-123).

Άλλες συνέπειες της αρχής αυτής (πέρα από την ύπαρξη του ακέραιου μέρους πραγματικού αριθμού) είναι:

(1) Το $\mathbb{Q}$ είναι **πυκνό** στο $\mathbb{R}$: Δηλαδή, για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς α,β, με α<β, υπάρχει ρητός ρ, ώστε α<ρ<β, ή, κάθε πραγματικός αριθμός x είναι όριο ακολουθίας ρητών αριθμών (π.χ. $x=\lim_n \frac{[nx]}{n}$). Σ' αυτό το τελευταίο υπάρχει και έμεση αναφορά (με τις δεκαδικές προσεγγίσεις ενός αριθμού–βλέπε και (2) παρακάτω) στα [3], σελ. 107, [5], σελ. 123, [21], σελ. 120, [12], σελ. 65 και [8], παράγραφος 5.3 («Εφαρμογές του αξιώματος του κιβωτισμού»–βλέπε παρακάτω Π_6). Στο [31], Τόμος Ι, σελ. 34, η απόδειξη γίνεται με χρήση της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ και της Αρχιμήδειας ιδιότητας του $\mathbb{R}$, όπως και στο [40], σελ. 12.

(2) Έστω $r\geq 2$, ένας φυσικός αριθμός. Τότε, κάθε x, $0\leq x\leq 1$, έχει ένα ανάπτυγμα ως προς τη βάση r. Δηλαδή, υπάρχει μια ακολουθία φυσικών αριθμών $\{\alpha_n\}$, $0\leq \alpha_n\leq r-1$, n=1,2,3,..., ώστε

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{r^n} := 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots_{<r>}.$$

Το <r> δεν το βάζουμε στον παραπάνω συμβολισμό όταν r=10 (**δεκαδική παράσταση του x**), ή όταν προηγούμενα έχουμε αναφέρει τη βάση του συστήματος αρίθμησης που χρησιμοποιούμε. Υποδείξεις για την απόδειξη αυτού, βλέπε [31] σελ. 88, [39] σελ. 314, [40] σελ. 15.

Χρησιμοποιώντας την δεκαδική παράσταση των πραγματικών αριθμών μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι δεκαδικός περιοδικός αριθμός}\}.$$

Μια υπόδειξη για την απόδειξη του παραπάνω, μπορεί κανείς να βρει στο [39], σελ. 319. Βέβαια, σήμερα στο Λύκειο και σύμφωνα με τα όσα έχει διδαχθεί ο μαθητής στο Γυμνάσιο, οι ρητοί διακρίνονται σε <u>δεκαδικούς αριθμούς</u> (δηλαδή, σε αυτούς που το δεκαδικό τους μέρος τερματίζεται) και σε <u>περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς</u>, χωρίς πολλές πολλές λεπτομέρειες (βλέπε [2], σελίδα 9). Αντίθετα, παλαιότερα το θέμα αυτό αντιμετωπιζόταν με κάθε λεπτομέρεια από το Γυμνάσιο ([30], κεφ. ΙΙΙ, σελ. 43, [7] σελ. 105).

Ας επανέλθουμε τώρα στο τελευταίο αξίωμα του $\mathbb{R}$, το οποίο δεν θα αληθεύει *εν γένει στο* $\mathbb{Q}$. Λέγοντας *εν γένει στο* $\mathbb{Q}$, εννοούμε ότι, αν στις παρακάτω προτάσεις, στην θέση του $\mathbb{R}$ βάλουμε το $\mathbb{Q}$, τότε το συμπέρασμα κάθε μιάς από αυτές δεν ισχύει *εν γένει*, εφόσον δουλεύουμε <u>μόνο</u> μέσα στο $\mathbb{Q}$. Θεωρούμε λοιπόν το $\mathbb{R}$ ως ένα ολικά διατεταγμένο σώμα, που έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα. Τότε, οποιαδήποτε από τις επόμενες προτάσεις μπορεί να πάρει την θέση του τελευταίου αξιώματος και να χαρακτηρίσει πλήρως το $\mathbb{R}$.

Π_1. Κάθε μη κενό και πάνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum (ελάχιστο πάνω φράγμα). (βλέπε [12] σελ. 13, [21] σελ. 305, [31], Τόμος Ι, σελ. 27, [39] σελ. 5, [40] σελ. 12, [43] σελ. 107 και [27], σελ. 111).

Π_2. Κάθε αύξουσα και πάνω φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}$ συγκλίνει. (βλέπε [33] σελ. 169, [34] σελ. 169, [35] σελ. 84, [36] σελ. 40, [44] σελ. 81, [45] σελ. 57, [31], Τόμος Ι, σελ. 48, [39] σελ. 22, [40] σελ. 85, [43] σελ. 379 και [27], σελ. 111).

Π_3. Κάθε φραγμένη ακολουθία του συνόλου $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ή, κάθε μη πεπερασμένο (άπειρο) και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης (Bolzano – Weierstrass). (βλέπε [31], Τόμος Ι, σελ. 67, [39] σελ. 22, [40] σελ. 62 και 79, [43] σελ. 380 και [27], σελ. 111).

Π_4. Κάθε ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}$ είναι συγκλίνουσα (ή, το $\mathbb{R}$ σαν μετρικός χώρος είναι πλήρης). ([31], Τόμος Ι, σελ. 69-70, [39] σελ. 309, [40] σελ. 83, [43] σελ. 381 και [27], σελ. 111).

Π_5. Κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ έχει μη κενή τομή (Cantor). ([31], Τόμος Ι, σελ. 49, [27], σελ. 111).

Π_6. Κάθε κιβωτισμένη ακολουθία κλειστών διαστημάτων του $\mathbb{R}$, έχει τομή μονοσύνολο. (Αξίωμα Κιβωτισμού). ([8] σελ. 120, [12] σελ. 13, [31], Τόμος Ι, σελ. 49, [40] σελ. 82, [27], σελ. 111 και [38], σελ. 77).

Π_7. Κάθε κάλυψη ενός συμπαγούς υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ με ανοικτά σύνολα έχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη (Borel–Lebesgue ή Heine–Borel) ([31], Τόμος Ι, σελ. 253, [40], σελ. 60).

Μερικά σχόλια σχετικά με τις παραπάνω προτάσεις είναι τώρα απαραίτητα:

(1) Η Π_1 είναι γνωστή ως Αξίωμα Πληρότητας ή συνέχειας του $\mathbb{R}$, αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το ίδιο όνομα και για τις Π_2 έως Π_7, ή όποια άλλη πρόταση μπορεί να τις αντικαταστήσει. Πολλές τέτοιες προτάσεις έχουν και άλλα ονόματα (για τις παραπάνω, αυτά είναι γραμμένα εντός παρενθέσεων) αλλά πάντοτε λέμε ότι χαρακτηρίζουν την **πληρότητα (ή συνέχεια) του** $\mathbb{R}$.

(2) Είναι γνωστό (βλέπε απόδειξη στα [31], Τόμος Ι, σελ. 32, [39] σελ. 8, [40] σελ. 12, [43] σελ. 111,) ότι η Π_1 συνεπάγεται την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, ενώ εμείς την υποθέσαμε στα Αξιώματα του $\mathbb{R}$. Αυτό έγινε διότι μερικές από τις παραπάνω προτάσεις δεν συνεπάγονται την ιδιότητα αυτή (π.χ. Π_4, Π_5). Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει κανείς στο [27]. Η Π_6 συνεπάγεται την ιδιότητα αυτή αν ορίσομε

κατάλληλα τα κιβωτισμένα διαστήματα (π.χ. βλέπε [8], σελ. 121, [24], σελ. 120-121), διαφορετικά όχι (π.χ. [12] σελ. 13, [23], σελ. 106-108). Συγκεκριμένα στο [8] έχουμε τον εξής ορισμό των κιβωτισμένων διαστημάτων:

«*Τα κλειστά διαστήματα της ακολουθίας* $[\alpha_0,\beta_0],[\alpha_1,\beta_1],\ldots,[\alpha_\nu,\beta_\nu],\ldots$, *ονομάζονται κιβωτισμένα, όταν έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Για κάθε* $\nu\in\mathbb{N}^*$, $[\alpha_\nu,\beta_\nu]\subseteq[\alpha_{\nu-1},\beta_{\nu-1}]$
2. *Αν δοθεί ένας φυσικός αριθμός μ (οσοδήποτε μεγάλος), τότε υπάρχει διάστημα της ακολουθίας με πλάτος μικρότερο του* $\frac{1}{\mu}$. *Δηλαδή,* $\forall\mu\in\mathbb{N}^*,\ \exists\nu\in\mathbb{N},\ \beta_\nu-\alpha_\nu\leq\frac{1}{\mu}$.»

Όμως, στο [12] έχουμε τον εξής διαφορετικό ορισμό (η διαφορά εντοπίζεται στην ιδιότητα 2) των κιβωτισμένων διαστημάτων:

«*Κιβωτισμένα διαστήματα είναι κλειστά διαστήματα* $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ *με τα εξής χαρακτηριστικά:*

1. *Για κάθε φυσικό αριθμό ν,* $[\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}]\subseteq[\alpha_\nu,\beta_\nu]$
2. *Για κάθε ε>0 υπάρχει διάστημα της ακολουθίας με πλάτος μικρότερο από το ε.*»

(3) Η Π_1 εμφανίζεται στα Σχολικά βιβλία από την Α’ έκδοση του [12] το 1983. Στο [12], σελ. 13, διατυπώνεται ως εξής:

« Για κάθε φραγμένο άνω (κάτω) υποσύνολο Ε του $\mathbb{R}$***, το σύνολο των άνω (κάτω) φραγμάτων του έχει ελάχιστο (μέγιστο) στοιχείο. Αυτό το ελάχιστο άνω φράγμα s=supE (μέγιστο κάτω φράγμα t=infE) χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:***

(i) $\forall x\in E,\ x\leq s$ $\qquad$ $(\forall x\in E,\ x\geq t)$

(ii) $\forall\varepsilon>0, \exists\ x\in E,\ x>s-\varepsilon.$ $\qquad$ $(\forall\varepsilon>0, \exists\ x\in E,\ x<t-\varepsilon)$.**»**

Σημειώνουμε ότι πουθενά στο [12] δεν αναφέρεται ο περιορισμός ότι το σύνολο Ε πρέπει να είναι <u>μη κενό</u>. Αντίθετα, στο [21], σελ. 305, τα supE και infE ορίζονται σωστά για <u>μη κενό</u> Ε, και αναφέρονται και ως *ανώτερο* και *κατώτερο πέρας* του Ε, αντίστοιχα. Μετά την τελευταία μεταρρύθμιση όμως, η ύλη αυτή δεν υπάρχει πλέον στα Σχολικά βιβλία, όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Τέλος, αν $A\subseteq\mathbb{R}$ όχι πάνω φραγμένο, τότε συμφωνούμε να γράφουμε $\sup A=+\infty$. Όμοια, αν $A\subseteq\mathbb{R}$ όχι κάτω φραγμένο γράφουμε $\inf A=-\infty$.

2.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μετά την εισαγωγή του συνόλου των Πραγματικών αριθμών, τόσο στο Σχολείο, όσο και στα διάφορα μαθήματα στοιχειώδους Ανάλυσης, το επόμενο βήμα είναι να μιλήσει κανείς για τις *συναρτήσεις* (καμιά φορά μιλάμε και για *αντιστοιχίες* ή *απεικονίσεις* κ.λπ.). Η έννοια της συνάρτησης προσεγγίστηκε κατά το παρελθόν από πολλές και διάφορες κατευθύνσεις και μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα διευρύνθηκε και γενικεύτηκε αρκετές φορές, για να φτάσει στη μορφή που την ξέρουμε και την διδάσκουμε σήμερα, μόνο στις αρχές του προηγούμενου αιώνα. Μετά το 1990, στο Γυμνάσιο και το Λύκειο, ο μόνος ορισμός συνάρτησης που συναντάει κανείς, είναι ο πιο απλός και περισσότερο διαισθητικός, παρά Μαθηματικά αυστηρός, ορισμός. Ο ορισμός αυτός μιας συνάρτησης f, με **πεδίο ορισμού** ένα σύνολο Α και τιμές σ' ένα σύνολο Β, την περιγράφει ως **μία διαδικασία, ένα κανόνα**, που σε κάθε στοιχείο x του Α αντιστοιχεί (απεικονίζει) **ένα και μόνο ένα** στοιχείο y του Β, το οποίο συνήθως συμβολίζουμε με f(x) και το ονομάζουμε **τιμή** της f στο x. Π.χ. στο [2] διαβάζουμε στην παράγραφο 2.2 (σελ. 65):

«*Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β*».

Βέβαια, στην συνέχεια ο στόχος του Σχολείου είναι η μελέτη των **πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής**, πράγμα που σημαίνει ότι τα σύνολα Β και Α παραπάνω, είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αντίστοιχα. Γι' αυτό και στο [21] συναντάμε στην παράγραφο 1.1 μόνο τον ορισμό αυτού του είδους των συναρτήσεων (βλέπε και [6], σελ. 133).

Πριν μερικά χρόνια όμως, τα Σχολικά βιβλία παρουσίαζαν τις συναρτήσεις, ορίζοντας πρώτα την έννοια της **διμελούς σχέσεως** και τα **είδη** διμελών σχέσεων, ένα των οποίων (οι *μονοσήμαντες* σχέσεις) είναι οι συναρτήσεις ([30] σελ. 35, [8] σελ. 90). Ο συνολοθεωρητικός αυτός τρόπος παρουσίασης, που μπορούμε να πούμε ότι είναι διαισθητικά πιο κοντά στην έννοια της **γραφικής παράστασης (ή το γράφημα)** της συνάρτησης, είναι κατά πολύ δυσκολότερος, αλλά και ταυτόχρονα, ο πιο σύγχρονος και ο πιο αυστηρός από Μαθηματικής σκοπιάς, ορισμός της συνάρτησης. Επίσης οι μαθητές διδασκόταν έτσι, μεταξύ άλλων, και τις σχέσεις ισοδυναμίας, τις σχέσεις διάταξης κ.λπ. ([30] σελ. 30, [44] σελ. 21, [8] σελ.19). Βέβαια στα [44], σελ. 14 και [45], σελ. 15 βρίσκομε επίσης τον ορισμό της συνάρτησης ως ειδικής περίπτωσης σχέσης ή αντιστοιχίας. Όμως, εδώ η σχέση δεν ορίζεται συνολοθεωρητικά αλλά πάλι ως διαδικασία (κανόνας), όπως ο προηγούμενος ορισμός της συνάρτησης.

Περιοριζόμενοι τώρα στις Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, θα θεωρήσουμε ως γνωστά τα σχετικά περί της ισότητας συναρτήσεων, του περιορισμού και της επέκτασης μιας συνάρτησης, των πράξεων μεταξύ συναρτήσεων, της σύνθεσης, της μονοτονίας και των ακρότατων των συναρτήσεων, όπως επίσης και τα περί συναρτήσεων ένα-προς-ένα και αντίστροφης συνάρτησης. Για όλα αυτά ο αναγνώστης θα βρει ότι χρειάζεται σε όλα τα σχετικά βιβλία της βιβλιογραφίας μας. Στη συνέχεια θα είναι έτοιμος για να προχωρήσει στις θεμελιώδεις και δυσκολότερες έννοιες της στοιχειώδους Ανάλυσης, του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου κ.λπ. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία μας, μπορεί κανείς από εδώ και πέρα να ακολουθήσει δύο δρόμους:

(1) <u>Ο δρόμος τον οποίο ακολουθούν και τα Σχολικά βιβλία</u>

Από την πρώτη στιγμή (δεκαετία του 1960), που ουσιαστικά εισάγονται οι βασικές έννοιες της Ανάλυσης στο Λύκειο, η έννοια του ορίου κυριαρχεί σε όλη την έκταση της διδασκόμενης ύλης. Σε αυτήν στηρίζονται οι ορισμοί όλων των άλλων εννοιών. Όμως, κατ' αρχήν και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1980, δεν εμφανίζεται πουθενά στην σχολική ύλη ο *ε-δ ορισμός του ορίου συνάρτησης*. Εκείνο που προτιμήθηκε κατά την περίοδο αυτή ήταν το εξής:

(α) Εισαγωγή και μελέτη σε βάθος των <u>Ακολουθιών</u> πραγματικών αριθμών και των ορίων τους (με εψιλοντικό ορισμό). Έτσι στα [33] σελ. 144, [34] σελ. 144, [35] Κεφ. IV, [36] Κεφ. I, [44] Κεφ. IV, [45] Κεφ. III, βλέπουμε εκτενή κεφάλαια περί Ακολουθιών, όπου ως Αξίωμα

Πληρότητας των Πραγματικών αριθμών οι συγγραφείς δέχονται το Π_2 της προηγούμενης παραγράφου 2.1.3.

(β) Στη συνέχεια, στα τότε Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης ακολουθεί το Κεφάλαιο της Σύγκλισης συναρτήσεων (βλέπε [44] σελ. 89, [45] σελ. 70), όπου οι διάφοροι ορισμοί δίνονται με την βοήθεια των ορίων των ακολουθιών. Αυτό σημαίνει ότι για να ορίσουμε το όριο συνάρτησης σε ένα *σημείο συσσώρευσης* a του πεδίου ορισμού της (όπου το a μπορεί να είναι και το $+\infty$ ή το $-\infty$) αρκεί να μετατρέψουμε, με τον κατάλληλο Μαθηματικό συμβολισμό, σε ένα ορισμό την επόμενη πρόταση:

Η συνάρτησή μας συγκλίνει στο b (όπου το b μπορεί να είναι και το $+\infty$ ή το $-\infty$) αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία σημείων του πεδίου ορισμού της, η οποία συγκλίνει στο a, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης συγκλίνει στο b.

(γ) Περιοριζόμενοι τώρα σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων, η έννοια του ορίου, που ορίστηκε προηγουμένως, επαρκεί για να οριστούν οι έννοιες της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Όμως, οι αποδείξεις πολλών ιδιοτήτων των ορίων, καθώς και εκείνων των συνεχών συναρτήσεων, των παραγώγων κ.λπ., παρουσιάζουν αρκετές τεχνικές δυσκολίες, λόγω της ανάπτυξης της θεωρίας μόνο με χρήση ακολουθιών (βλέπε [44], [45]).

Με την **εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1979-80**, τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα προβλέπουν την εισαγωγή του ε-δ ορισμού του ορίου συνάρτησης. Έτσι, με τα νέα βιβλία Ανάλυσης το 1983, ο *εψιλοντικός ορισμός* του ορίου, που κυριαρχεί στο Κεφάλαιο 2 των Ακολουθιών, μεταφέρεται και στο Κεφάλαιο 3 των ορίων και της συνέχειας συναρτήσεων.

Για παράδειγμα, στο [12], σελ. 110, ένας από τους ορισμούς του ορίου που δίνεται είναι ο παρακάτω:

«Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και f συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού A περιέχει τουλάχιστο ένα ανοικτό διάστημα με άκρο x_0. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο:

(1) το $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0, ώστε

$\forall\ x \in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

(2) το $+\infty$, όταν για κάθε Μ>0 υπάρχει δ>0, ώστε
$\forall\ x \in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

(3) το $-\infty$, όταν για κάθε Μ>0 υπάρχει δ>0, ώστε
$\forall\ x \in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$.»

Στο ίδιο βιβλίο και στις σελίδες 127-128 (αλλά και στο [21], σελ.80) δίνονται οι παρακάτω ορισμοί για τη συνέχεια της f στο x_0:

(α) ***Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.***

(β) ***Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0, ώστε***
$\forall\ x \in A,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Βλέπουμε ότι στα [12] και [21] δίνονται δύο ορισμοί για τη συνέχεια συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, ο πρώτος με την βοήθεια του ορίου και ο δεύτερος εψιλοντικός. Αν μελετήσει κανείς προσεκτικά τους δύο ορισμούς, θα διαπιστώσει ότι <u>δεν</u> είναι ισοδύναμοι γενικά.

Συγκεκριμένα, οι δύο αυτοί ορισμοί είναι ισοδύναμοι όταν το x_0 είναι *σημείο συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού της f. Όμως, όταν το x_0 είναι *μεμονωμένο σημείο* του πεδίου ορισμού της f, τότε με βάση τον εψιλοντικό ορισμό (β), η f είναι συνεχής στο x_0, ενώ ο πρώτος ορισμός δεν εφαρμόζεται.

Σημειώνουμε τώρα ότι, παρόλο που στο [12], σελ. 118 γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ σημείων συσσώρευσης και μεμονωμένων σημείων του πεδίου ορισμού συνάρτησης και αναφέρεται π.χ. ότι

«το όριο συνάρτησης έχει νόημα μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της»,

ενώ στο [21], σελ. 79 αναφέρεται ότι

«για να αποφύγουμε εξεζητημένες περιπτώσεις θα περιορίσουμε τη μελέτη μας μόνο σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων»,

εντούτοις <u>δεν</u> υπάρχει καμία παρατήρηση σχετικά με την ισοδυναμία ή όχι των δύο αυτών ορισμών. Αντίθετα, περισσότερο αφήνεται να εννοηθεί ότι είναι ισοδύναμοι.

Επίσης τονίζουμε εδώ ότι, από το 1999 και μετά (βλέπε αμέσως παρακάτω για την τελευταία μεταρρύθμιση του 1998-99), στην σχολική ύλη έχει απομείνει μόνο ο ορισμός (α) (βλέπε [6], σελ.188).

Κατά την **επόμενη μεταρρύθμιση του 1989-90**, όπου η Αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών παραλείπεται, το νέο Σχολικό βιβλίο [21] (ΑΝΑΛΥΣΗ - Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ), παρουσιάζει αμέσως στα Κεφάλαια 2 έως 4 τα όρια και την συνέχεια συναρτήσεων και αφιερώνει το μικρότερο Κεφάλαιο 5 στις Ακολουθίες κ.λπ., τις οποίες θεωρεί ως ειδική περίπτωση συναρτήσεων.

Τέλος, κατά την **τελευταία μεταρρύθμιση του 1998-99** τα περί πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων συρρικνώνονται στο [6], σε ένα μικρό μέρος του Κεφαλαίου 1, το οποίο κυρίως αναφέρεται στα όρια και τη συνέχεια των συναρτήσεων, ενώ οι ακολουθίες σχεδόν εξαφανίζονται. Ταυτόχρονα ο εψιλοντικός ορισμός του ορίου δίνεται περισσότερο μόνο για ενημέρωση των μαθητών, αφού η όλη ύλη παρουσιάζεται όσο γίνεται πιο διαισθητικά, ενώ οι ιδιότητες του ορίου δίνονται υπό μορφή καταλόγου και για μερικές υπάρχει σχήμα για διαισθητική κατανόηση. Το ίδιο διαισθητικά παρουσιάζεται μετά και η συνέχεια συναρτήσεων (μόνο με τον ορισμό (α), όπως είπαμε και παραπάνω) και τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων. Στην ουσία ο σκοπός είναι να φτάσουμε στο τέλος του δρόμου, δηλαδή να μελετηθούν διεξοδικότερα η παράγωγος, το ολοκλήρωμα και οι εφαρμογές τους.

(2) Ο δρόμος της Ιστορίας

Τα περισσότερα συγγράμματα στοιχειώδους Ανάλυσης, συνήθως ακολουθούν τον δρόμο που αναπτύξαμε προηγουμένως στο (1), όπου η έννοια του ορίου συνάρτησης έχει πρωτεύουσα και κυρίαρχη θέση, προκειμένου να μελετηθούν πρώτα τα σχετικά περί Παραγώγων και στη συνέχεια τα περί Ολοκληρωμάτων. Υπάρχουν όμως και συγγράμματα, τα οποία υποστηρίζουν ότι ακόμη και από Διδακτικής σκοπιάς, η εναρμόνιση της ανάπτυξης των εννοιών και των ιδεών του Απειροστικού Λογισμού σύμφωνα με την Ιστορική τους εξέλιξη, είναι κατά πολύ προσφορότερη. Αυτό σημαίνει ότι η Ολοκλήρωση προηγείται της Διαφόρισης, σύμφωνα με τα ιστορικά δεδομένα, αφού π.χ. η Μέθοδος της Εξάντλησης του Ευδόξου και του Αρχιμήδη, που εννοιολογικά δεν διαφέρει από την Ολοκλήρωση κατά Riemann, προηγείται του έργου των Newton και Leibniz. Ένα τέτοιο σύγγραμμα είναι π.χ. το [31], όπου τα περί Ορίων συναρτήσεων αναφέρονται στο Κεφάλαιο 16, Τόμος Ι, μετά την Συνέχεια των συναρτήσεων και την Ολοκλήρωση, ενώ η Παράγωγος παρουσιάζεται μόνο στο τελευταίο Κεφάλαιο 17 του Τόμου Ι. Φυσικά, η συνέχεια συνάρτησης ορίζεται με τον εψιλοντικό ορισμό, που είδαμε παραπάνω στο (1), ο οποίος όπως παρατηρήσαμε εκεί δεν είναι εν γένει ισοδύναμος με τον ορισμό της συνέχειας με την βοήθεια της έννοιας του ορίου.

Παρά το ότι η έννοια του ορίου συνάρτησης εισάγεται στα συγγράμματα, τα οποία ακολουθούν τον δρόμο αυτό (όπως το παραπάνω), σχεδόν στο τέλος της ύλης που θέλουμε να παρουσιάσουμε στην Στοιχειώδη Ανάλυση, θα έλεγε κανείς ότι αυτό είναι τελικά αναπόφευκτο, ώστε να ολοκληρωθεί η παρουσίαση της θεωρίας και οι εφαρμογές της. Όμως, όπως θα δούμε και παρακάτω στην εργασία αυτή, μπορεί κανείς να ολοκληρώσει τουλάχιστον το θεωρητικό μέρος όλης της ύλης (ορισμός παραγώγου, κανόνες παραγώγισης, βασικά θεωρήματα παραγώγων κ.λπ.), χωρίς να ορίσει όρια συναρτήσεων. Προς τούτο η συνέχεια ορίζεται εψιλοντικά (όπως προηγουμένως) και μετά χρησιμοποιείται «**η παρατήρηση του Καραθεοδωρή**» για τον ορισμό της παραγώγου. Η παρατήρηση αυτή, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας, διαφορετικός από τον συνηθισμένο, ορισμός της παραγώγου, ο οποίος όμως, όπως θα δούμε και στα Κεφάλαια 4 και 5, έχει σαν αποτέλεσμα αφ' ενός την απλούστευση των αποδείξεων των διαφόρων θεωρημάτων των παραγώγων και αφ' ετέρου παρακάμπτει, κατά κάποιο τρόπο, την χρήση των ορίων για την διδασκαλία των παραγώγων.

Στην πραγματικότητα, ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873-1950) παρουσίασε αυτό τον εναλλακτικό χαρακτηρισμό της παραγώγου, σε σχέση με την Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής, στο τελευταίο σύγγραμμά του (βλέπε Theory of Functions of a Complex Variable, 2 τόμοι, Εκδόσεις Chelsea, New York, μετάφραση από τα γερμανικά, πρώτη έκδοση 1954, δεύτερη 1960), όμως η παρατήρησή του αυτή μπορεί να μεταφερθεί αυτούσια και στην περίπτωση των Πραγματικών Συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Ο ίδιος πάντως, δεν την αναφέρει στο προηγούμενο (από το 1918) σύγγραμμά του για τις Πραγματικές Συναρτήσεις (βλέπε Vorlesungen über Reele Functionen, Chelsea, New York, 1968).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΕΧΕΙΑ, ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα συνοψίσουμε μερικά από τα πιο ουσιώδη αποτελέσματα της Στοιχειώδους Ανάλυσης, τα οποία αναφέρονται στις βασικές έννοιες της συνέχειας, της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Θα δούμε βέβαια πρώτα τους αντίστοιχους ορισμούς και το πως παρουσιάζονται αυτοί στα διάφορα Σχολικά βιβλία της βιβλιογραφίας μας. Κατόπιν θα αναφερθούμε στα βασικά θεωρήματα, που αφορούν την κάθε έννοια, καθώς και στο ποια από αυτά είναι αποδεδειγμένα σε αυτά τα Σχολικά βιβλία, με κάποια σύντομα σχόλια για τον τρόπο απόδειξης του καθενός. Ιδιαίτερα, τόσο για τους αναγνώστες, που δεν διαθέτουν όλα τα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης των τριών τελευταίων μεταρρυθμίσεων, όσο και προς αποφυγή μακροσκελών επί μέρους σχολιασμών, παραθέτουμε στα Παραρτήματα Α, Β και Γ αντίγραφα επιλεγμένων μερών των παραπάνω Σχολικών βιβλίων.

Για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, δεν είναι απαραίτητο να ασχοληθούμε με συναρτήσεις, οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού ένα τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ, είναι οι ιδιότητες και η συμπεριφορά πραγματικών συναρτήσεων, των οποίων έχουμε περιορίσει το πεδίο ορισμού σε ένα διάστημα. Έτσι, ακόμα και στην πολύ συνηθισμένη περίπτωση, όπου μία συνάρτηση ορίζεται σε μία ένωση ξένων διαστημάτων, εμείς θα εξετάζουμε μόνο τον περιορισμό της σε ένα από τα διαστήματα αυτά (εκείνο φυσικά, που μας ενδιαφέρει στην συγκεκριμένη περίπτωση). Γενικότερα βέβαια, αυτό μπορεί να γίνει για καθένα ξεχωριστά από τα διαστήματα αυτά, όμως χρειάζεται προσοχή στο κατά πόσο οι ιδιότητες της συνάρτησής μας στα επί μέρους διαστήματα ισχύουν και στην ένωση τους. Για παράδειγμα, εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως μονότονη (και μάλιστα γνησίως φθίνουσα, δηλαδή του ίδιου είδους μονοτονίας) σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι μονότονη στην ένωση τους $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τους ορισμούς των βασικών εννοιών, που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα.

3.1.1. Συνέχεια συναρτήσεων σε διάστημα

Έχουμε δει ήδη (παράγραφος 2.2) τον *τοπικό* ορισμό της *συνέχειας* μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το πεδίο αυτό ορισμού της f θα είναι από εδώ και πέρα ένα διάστημα, όπως είπαμε παραπάνω, συνεπώς *ο ε-δ ορισμός της συνέχειας* (όπου, ως γνωστόν, το δ εξαρτάται και από το ε και από το x_0) είναι ισοδύναμος με τον *ορισμό της συνέχειας με όρια*.

Αν τώρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος Δ=(a,b), τότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ.

Ο ορισμός αυτός ισχύει και όταν Δ=[a,b], ή Δ=[a,b), ή Δ=(a,b], μόνο που τότε η συνέχεια στα άκρα, που περιέχονται στο Δ, ταυτίζεται με την *πλευρική συνέχεια* στο συγκεκριμένο άκρο. Δηλαδή, αν για παράδειγμα το a περιέχεται στο Δ, τότε:

Η f είναι συνεχής στο a, αν και μόνο αν για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0: $x \in [a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ή, ισοδύναμα:

Η f είναι συνεχής στο a, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

όπου, το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας παριστά το όριο της f καθώς το x πλησιάζει το a από δεξιά, δηλαδή από μεγαλύτερες του a τιμές.

3.1.2. Παράγωγος συνάρτησης σε διάστημα

Ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης, τόσο στα Σχολικά βιβλία, όσο και στα εγχειρίδια του Απειροστικού Λογισμού, δίνεται με την βοήθεια της έννοιας του ορίου. Εδώ Θα ακολουθήσουμε ένα από τα βιβλία της ΑΝΑΛΥΣΗΣ – Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (βλέπε [12], σελ. 163) για ένα λόγο που θα δούμε μετά τον επόμενο ορισμό:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0, όταν ο λόγος μεταβολής $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ έχει πεπερασμένο όριο στο x_0. Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος αριθμός της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}.$$

παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ. Στην περίπτωση αυτή, οι παράγωγοι αριθμοί ορίζουν μία νέα συνάρτηση στο Δ, η οποία λέγεται παράγωγος της f στο Δ.

Αν τώρα το $x_0 \in \Delta$, είναι άκρο του διαστήματος Δ, τότε ως παράγωγο αριθμό στο άκρο αυτό εννοούμε την *πλευρική παράγωγο* στο x_0, για τον υπολογισμό της οποίας αρκεί να βρούμε το παραπάνω όριο καθώς το x τείνει στο x_0, μόνο από τα δεξιά ή μόνο από τα αριστερά, αντίστοιχα.

Ο λόγος, για τον οποίο ακολουθήσαμε το παραπάνω Σχολικό βιβλίο, είναι το ότι για πρώτη και τελευταία φορά (στα βιβλία του Σχολείου) η «παράγωγος της f στο x_0» ονομάζεται «παράγωγος αριθμός». Η δικαιολογία για την διαφοροποίηση αυτή, που δίνεται από τους συγγραφείς είναι η εξής (βλέπε [12], σελ. 159):

«*Η μικρή και προσωρινή απόκλιση από την καθιερωμένη ορολογία, που υιοθετείται εδώ, αποβλέπει στη σαφή διάκριση των δυο εννοιών. Η πρώτη έννοια – παράγωγος αριθμός – είναι όριο πεπερασμένο, δηλαδή είναι πράγματι αριθμός˙ η δεύτερη – παράγωγος – είναι συνάρτηση που ορίζεται εκ των υστέρων με βάση την πρώτη*».

Στο ίδιο βιβλίο ([12], σελίδα 163) αποδεικνύεται η ισότητα του παραπάνω ορίου με το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ενώ στα υπόλοιπα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης, η ισότητα αυτή μόνο αναφέρεται.

3.1.3. Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, θα δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ=[a,b] (*ορισμένο ολοκλήρωμα* της f στο διάστημα Δ).

Λέγοντας ολοκλήρωμα εδώ, εννοούμε *ολοκλήρωμα–Riemann*, ή *Riemann–ολοκλήρωμα*, όπως λέμε συχνά, προς διάκριση από άλλου είδους ολοκληρώματα, τα οποία συναντάει κανείς σε πιο προχωρημένα μαθήματα. Ο Riemann όρισε το ολοκλήρωμα αυτό το 1854, αλλά η πρώτη δημοσίευση της σχετικής εργασίας του έγινε το 1868, δύο χρόνια μετά το θάνατό του. Ο ορισμός του Riemann υπήρξε ο πρώτος ιστορικά ακριβής ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος φραγμένης συνάρτησης (παρόμοιος ορισμός είχε δοθεί και νωρίτερα από τον Cauchy, αλλά μόνο για συνεχείς συναρτήσεις) και σε ε-δ διατύπωση, έχει ως εξής (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [39], σελ. 171):

Μία <u>φραγμένη</u> συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα Δ=[a,b], λέγεται ολοκληρώσιμη στο Δ, αν υπάρχει ένας αριθμός Ι (που θα τον λέμε ολοκλήρωμα της f στο Δ και θα τον συμβολίζουμε με $\int_a^b f$ *), με την ιδιότητα:*

Για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0, ώστε, για κάθε <u>διαμέριση</u> $P=\{a=x_0< x_1< x_2< \ldots < x_n=b\}$ *του διαστήματος Δ και για κάθε <u>επιλογή</u> σημείων* $E=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$*, με* $\xi_\kappa\in[x_{k-1}, x_k]$*, k=1, 2, . . ., n, να ισχύει ότι:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) - I\right|<\varepsilon,$$

όταν το <u>πλάτος</u> d ($d=\max\{x_1-x_0, \ldots, x_n-x_{n-1}\}$) *της διαμέρισης P, ικανοποιεί την d<δ.*

Επιπλέον, τα αθροίσματα που εμφανίζονται στον παραπάνω ορισμό λέγονται και <u>αθροίσματα Riemann</u> της συνάρτησης f.

Λίγο μετά τον Riemann, ο Darboux (το 1875) έδωσε ένα <u>ισοδύναμο</u> ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, εισάγοντας τα λεγόμενα πάνω και κάτω αθροίσματα της συνάρτησης f.

Συγκεκριμένα, έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα Δ=[a,b] και $P=\{a=x_0< x_1< x_2< \ldots < x_n=b\}$ μια διαμέριση του Δ. Με M_k και m_k συμβολίζουμε αντίστοιχα τους πραγματικούς (αφού η f είναι φραγμένη) αριθμούς:

$$M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\} \quad \text{και} \quad m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Τότε, ο αριθμός $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$ λέγεται *το πάνω άθροισμα της f για την διαμέριση P*, και ο αριθμός $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ *το κάτω άθροισμα της f για την διαμέριση P*.

Είναι εύκολο, αλλά βασικό για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας, να δείξει κανείς ότι το σύνολο των πάνω αθροισμάτων της f (ως προς όλες τις διαμερίσεις του Δ) είναι κάτω φραγμένο (π.χ. από ένα οποιοδήποτε κάτω άθροισμα), συνεπώς έχει infimum, το οποίο και λέγεται *το πάνω ολοκλήρωμα της f στο Δ* και συμβολίζεται με $\overline{\int_a^b} f$.

Ανάλογα, το σύνολο των κάτω αθροισμάτων της f (ως προς όλες τις διαμερίσεις του Δ) είναι πάνω φραγμένο (π.χ. από ένα οποιοδήποτε πάνω άθροισμα), συνεπώς έχει supremum, το οποίο και λέγεται *το κάτω ολοκλήρωμα της f στο Δ* και συμβολίζεται με $\underline{\int_a^b} f$.

Τέλος, λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο Δ και το ολοκλήρωμα της είναι ένας αριθμός I, αν και μόνο αν, το πάνω και το κάτω ολοκλήρωμα της f στο Δ συμπίπτουν και είναι ίσα με τον αριθμό I.

Την απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών Darboux και Riemann θα βρει ο αναγνώστης στα [31] σελ. 226, [39] σελ. 327, [40] σελ. 192, αλλά όχι και στο [43], όπου στο Παράρτημα 1 του Κεφαλαίου 13 (σελ. 233), αποδεικνύει ένα σχετικό Θεώρημα, αλλά μόνο για συνεχείς συναρτήσεις. Στα ίδια συγγράμματα υπάρχει και το επόμενο κριτήριο, το οποίο μας δίνει και ένα από τους λόγους της προτίμησης από πολύ κόσμο, του ορισμού του Darboux.

Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας: *Έστω f μία φραγμένη στο Δ=[a,b] συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο Δ, αν και μόνο αν, για κάθε ε>0, υπάρχει διαμέριση του Δ, ώστε η διαφορά των πάνω και κάτω αθροισμάτων της f, για την διαμέριση αυτή, να είναι μικρότερη του ε.*

Για παράδειγμα με το Κριτήριο αυτό, και λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων αριθμών στο $\mathbb{R}$, βλέπει κανείς αμέσως, ότι η *συνάρτηση Dirichlet*, δηλαδή *η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών αριθμών*, όπως και η *χαρακτηριστική των αρρήτων*, που στο Σχολικό βιβλίο [21], σελ. 15, ονομάζεται επίσης (αλλά μάλλον λανθασμένα) συνάρτηση Dirichlet, δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες σε κανένα διάστημα Δ.

Τώρα, στα Σχολικά βιβλία, οι αντίστοιχοι ορισμοί του ορισμένου ολοκληρώματος ποικίλουν.

Στα πιο παλιά (βλέπε [44] σελ. 154, [45] σελ. 153), ο ορισμός που δίνεται, αφορά συνεχείς στο Δ συναρτήσεις. Συγκεκριμένα αναφέρεται σε αυτά, ότι για μία συνεχή συνάρτηση στο διάστημα Δ, αποδεικνύεται στην Μαθηματική Ανάλυση ότι έχει *παράγουσα (ή αρχική συνάρτηση ή αντιπαράγωγο)* στο διάστημα αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι:

Μία συνάρτηση F λέγεται παράγουσα της συνάρτησης f στο Δ, όταν ισχύει ότι F'(x)=f(x), για κάθε x στο Δ.

Στη συνέχεια ορίζουν το ολοκλήρωμα μόνο για συνεχείς στο Δ συναρτήσεις ως εξής:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ=[a,b], τότε λέμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο Δ την διαφορά F(b)–F(a), όπου F είναι μία παράγουσα της f.

Η εκλογή της παράγουσας F δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα (αφού δύο παράγουσες της f στο ίδιο διάστημα διαφέρουν κατά μία σταθερά) και αυτό αποδεικνύεται στα παραπάνω βιβλία.

Στα επόμενα δύο νεώτερα βιβλία ([12] σελ. 230 και [21] σελ. 231), ο ορισμός του ολοκληρώματος δίνεται πάλι για συνεχείς στο Δ=[a,b] συναρτήσεις.

Σε αυτά, ορίζονται πρώτα, για διαμέριση P του Δ, οι «ακολουθίες»:

$$S_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k - x_{k-1}), \qquad s_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

όπου M_k, m_k έχουν την ίδια έννοια όπως παραπάνω, μόνο που τώρα, λόγω συνέχειας σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο αντίστοιχο $[x_{k-1},x_k]$ (βλέπε παρακάτω, Θεώρημα 3.2.6).

Μετά αναφέρεται ότι για συνεχείς συναρτήσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι οι «ακολουθίες» $\{S_\nu\}$ και $\{s_\nu\}$ «συγκλίνουν» στον ίδιο πραγματικό αριθμό, όταν $\lim\limits_{\nu\to\infty} d_\nu=0$, όπου με d_ν συμβολίζεται το μεγαλύτερο από τα πλάτη των διαστημάτων της διαμέρισης P του Δ, δηλαδή το πλάτος της P

και το κοινό αυτό όριο, ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της f στο Δ.

Επίσης, στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύουν ότι αν στα αθροίσματα που ορίζουν τις $\{s_\nu\}$ και $\{S_\nu\}$ βάλουμε αντί των m_k και M_k αντίστοιχα, οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_\kappa)$ της f, με $\xi_\kappa \in [x_{k-1}, x_k]$, η αντίστοιχη «ακολουθία» των αθροισμάτων Riemann, που προκύπτει έτσι, «συγκλίνει» και αυτή στο ίδιο όριο, δηλαδή στο ολοκλήρωμα της f στο Δ (τονίζουμε και πάλι εδώ την παραπομπή μας στο [39], σελ. 171, όπου ο αναγνώστης θα βρει τον λόγο για τον οποίο βάλαμε ορισμένες λέξεις παραπάνω σε εισαγωγικά).

Τέλος, στο πιο πρόσφατο σχολικό βιβλίο, [6], σελ. 330, το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο Δ ορίζεται και πάλι για f συνεχή συνάρτηση, αλλά, πρώτον χρησιμοποιούνται μόνο *ισοδιαμερίσεις* του Δ, δηλαδή το Δ χωρίζεται σε ισομήκη υποδιαστήματα (χωρίς να αναφέρεται ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο) και δεύτερον, δίνεται ο ορισμός του ολοκληρώματος κατευθείαν με αθροίσματα Riemann, με την παρατήρηση ότι μπορεί να αποδειχθεί η «ύπαρξη» του $\lim_{\nu\to\infty}(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))$, για f συνεχή στο Δ συνάρτηση.

3.2. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα συγκεντρώσουμε τις πιο σημαντικές συνέπειες της συνέχειας των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ.

Το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, στο διάστημα Δ, θα το συμβολίζουμε παρακάτω με C(Δ). Φυσικά, μερικά από τα επόμενα θεωρήματα αληθεύουν και όταν οι συναρτήσεις μας έχουν πεδίο ορισμού ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αλλά, όπως έχουμε πει, εδώ περιοριζόμαστε πάντοτε σε ένα διάστημα. Όμως, καλό θα ήταν ο αναγνώστης να διερευνήσει σε ποια από τα παρακάτω θεωρήματα, η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις μας είναι ορισμένες σε διάστημα είναι ουσιώδης και εάν έχει σημασία το είδος του διαστήματος.

Θεώρημα 3.2.1: *Έστω $f, g \in C(\Delta)$ και λ, μ πραγματικοί αριθμοί. Τότε έχουμε ότι:*

(α) $\lambda f + \mu g \in C(\Delta)$, (β) $fg \in C(\Delta)$ και (γ) $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in C(\Delta)$ (με την προϋπόθεση βέβαια ότι η g δεν μηδενίζεται στο Δ).

Σημείωση: Από το (α) και τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων έχουμε ότι το C(Δ), εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί συνάρτηση, είναι ένας *Γραμμικός Χώρος πάνω από το* $\mathbb{R}$. Ακόμη, το C(Δ) εφοδιασμένο και με τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων, λόγω των (α), (β) και των ιδιοτήτων των πράξεων, είναι ένας *αντιμεταθετικός Δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο*, υποδακτύλιος του δακτυλίου όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Δ (βλέπε και παρακάτω την *Σημείωση* μετά το Θ. 3.3.2). Επίσης, λόγω των προηγουμένων και της ιδιότητας κ(fg)=(κf)g=f(κg), για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ και για κάθε f,g στο C(Δ), ο προηγούμενος χώρος C(Δ) είναι, όπως λέμε στα Μαθηματικά, μία *Άλγεβρα συναρτήσεων πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος, είναι, για την περίπτωση μας, όπου έχουμε πεδίο ορισμού ένα διάστημα, απλή συνέπεια των αντιστοίχων ιδιοτήτων των ορίων και περιέχεται σε όλα τα συγγράμματα της βιβλιογραφίας μας, καθώς και σε όλα τα Σχολικά βιβλία.

Ιδιαίτερα, στα πιο παλιά από αυτά (βλέπε [44], σελ. 107 και [45], σελ. 91), οι αποδείξεις των διαφόρων περιπτώσεων δίνονται με τη χρήση του εξής χαρακτηρισμού της συνέχειας στο x_0:

Η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του Δ, αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία $\{x_\nu\}$, με $x_\nu\in\Delta$, ν=1,2,3,..., και $x_\nu\to x_0$ ισχύει $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(x_\nu)=f(x_0)$.

Μια απόδειξη της παραπάνω ισοδυναμίας μπορεί να δει κανείς π.χ. στο [39], σελ. 49-50. Η απόδειξη από αριστερά προς τα δεξιά, γίνεται με εφαρμογή του ορισμού της συνέχειας στο x_0, αλλά δίνεται και παρακάτω (βλέπε *Σημείωση* μετά το Θ. 3.2.3 και το *Πόρισμα* πριν από το Θεώρημα αυτό, από τα οποία φαίνεται και το ότι η συνέχεια της f είναι απαραίτητη εδώ, ώστε να ισχύει το συμπέρασμα για κάθε $\{x_\nu\}$ όπως παραπάνω).

Για την απόδειξη της αντίθετης κατεύθυνσης, δείχνουμε ότι αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία σημείων $\{x_\nu\}$ του Δ, που τείνει στο x_0 και ταυτόχρονα, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της f δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$, πράγμα άτοπο. Αξίζει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι, για την επιλογή των όρων x_ν της ακολουθίας αυτής, κάνουμε χρήση του **αξιώματος επιλογής** ως εξής:

Αφού η f δεν είναι συνεχής στο x_0, θα υπάρχει ένα $\varepsilon_0>0$, ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει x στο Δ με την ιδιότητα:

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{και} \quad |f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0,$$

οπότε για $\delta=1/\nu$, $\nu=1,2,3,\ldots$, τα σύνολα της μη-κενής οικογένειας

$$A_\nu=\{\, x\in\Delta : |x-x_0|<\frac{1}{\nu}, |f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0 \,\},$$

είναι μη-κενά. Τότε, το *αξίωμα επιλογής* μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός x_ν στο αντίστοιχο A_ν, για κάθε $\nu=1,2,3,\ldots$, όπως θέλαμε.

<u>Θεώρημα 3.2.2</u>: *Έστω $f,g\in C(\Delta)$. Τότε οι συναρτήσεις: $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f^+=\max\{f,0\}$ και $f^-=\max\{-f,0\}$ (οπότε ισχύει και ότι $f=f^+-f^-$ και $|f|=f^++f^-$) είναι συνεχείς.*

Για την απόδειξη της συνέχειας της $|f|$ ισχύουν όσα είπαμε παραπάνω για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Μετά οι τύποι:

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2},$$

μαζί με το Θεώρημα 3.2.1, δίδουν άμεσα το υπόλοιπο της απόδειξης. Στα Σχολικά βιβλία συναντάμε την συνέχεια της απόλυτης τιμής και σε κάποια από αυτά και τους παραπάνω τύπους (στα [33], [34], είναι λυμένο παράδειγμα (σελ. 47 και στα δύο), ενώ στο [35] του ίδιου συγγραφέα λίγα χρόνια αργότερα, είναι άσκηση στη σελ. 31). Το *θετικό* (f^+) και *αρνητικό* (f^-) *μέρος συνάρτησης*, φυσικά δεν εμφανίζεται σ' αυτά.

Το Θεώρημα που ακολουθεί αφορά την συνέχεια της σύνθεσης δύο συνεχών συναρτήσεων. Η απόδειξή του στα παλιά βιβλία (βλέπε [44], σελ. 102 και [45], σελ. 92) γίνεται απλά, αφού, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σ' αυτά τα όρια και η συνέχεια των συναρτήσεων ορίζονται με την χρήση ακολουθιών. Στο [12], σελ. 133-135, το Θεώρημα αυτό, όσο και το Θεώρημα <u>ορίου</u> σύνθετης συνάρτησης, κατέχουν βασική θέση στο αντίστοιχο Κεφάλαιο. Ο λόγος γι' αυτό, είναι η δυνατότητα την οποία παρέχουν τα δύο αυτά Θεωρήματα, για τον υπολογισμό των ορίων και την απόδειξη της συνέχειας πλήθους συναρτήσεων. Το Θεώρημα του ορίου σύνθετης συνάρτησης στο [12], σελ. 134, είναι το εξής:

«*Έστω ότι:*

- *Η συνάρτηση g έχει στο σ όριο $σ_1$.*
- *Η συνάρτηση f έχει στο $σ_1$ όριο L.*

Αν σε μια περιοχή του σ ορίζεται η $f\circ g$ και είναι $g(x)\neq σ_1$, τότε

$$\lim_{σ} f\circ g = L».$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος αυτού, όπως και του επόμενου Πορίσματός του, το οποίο είναι και πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές του, βλέπε, στο τέλος της εργασίας αυτής, Παράρτημα Α, σελίδες I-II.

<u>Πόρισμα</u>: *Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α έχει στο σ όριο L, τότε για κάθε ακολουθία $\{α_ν\}$ με $α_ν\in A$, $α_ν\neq σ$ ($ν>κ\in\mathbb{N}$) και $\lim\limits_{ν\to\infty} α_ν=σ$, η αντίστοιχη ακολουθία $f(α_ν)$ των τιμών της συνάρτησης έχει επίσης όριο L.*

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι για να ισχύει το συμπέρασμα, η προϋπόθεση «*σε μια περιοχή του σ να ισχύει ότι $g(x)\neq σ_1$*» είναι απαραίτητη. Το ίδιο ισχύει και για την προϋπόθεση «*$α_ν\neq σ$ ($ν>κ\in\mathbb{N}$)*» στο προηγούμενο Πόρισμα. Ένα παράδειγμα, που επιβεβαιώνει τον παραπάνω ισχυρισμό, είναι το επόμενο:

Αν g(x)=1 και f(x)=1 για $x\neq 1$, αλλά f(1)=2, τότε f(g(x))=f(1)=2
και για σ=1 έχουμε $σ_1=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$, οπότε $L=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$,
ενώ $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))=2\neq 1$.

<u>Θεώρημα 3.2.3</u> (Συνέχεια σύνθετης συνάρτησης): *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και η g συνεχής στο <u>διάστημα</u> f(Δ), τότε και η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο Δ.*

<u>Σημείωση</u>: Επειδή το πεδίο ορισμού οποιασδήποτε ακολουθίας είναι το $\mathbb{N}$ (ή ένα υποσύνολό του) και συνεπώς αποτελείται από <u>μεμονωμένα</u> μόνο σημεία, έπεται, όπως είδαμε στην σελίδα 24, ότι κάθε ακολουθία είναι συνεχής (θεωρούμενη ως συνάρτηση) στο πεδίο ορισμού της. Άρα, από το παραπάνω Θεώρημα έχουμε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο σ του πεδίου ορισμού της Α, τότε το προηγούμενο Πόρισμα αληθεύει *για κάθε ακολουθία $\{α_ν\}$ με $α_ν\in A$ και $\lim\limits_{ν\to\infty} α_ν=σ$, <u>χωρίς τον περιορισμό</u> $α_ν\neq σ$ ($ν>κ\in\mathbb{N}$).*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3 γίνεται στο [12] με χρήση του παραπάνω Θεωρήματος για το όριο (βλέπε Παράρτημα Α, σελ. II), ενώ, για το ότι το f(Δ) είναι *διάστημα*, βλέπε παρακάτω Θεώρημα 3.2.5. Στα μεταγενέστερα Σχολικά βιβλία [21] και [6], απλά αναφέρεται χωρίς απόδειξη. Το προηγούμενο Θεώρημα, για το όριο σύνθετης συνάρτησης, αναφέρεται χωρίς απόδειξη στα βιβλία αυτά, αλλά το Πόρισμά του, μόνο στο [21].

Παρόμοια είναι η αντιμετώπιση και του επόμενου θεωρήματος από τα ίδια βιβλία. Στα παλαιότερα Σχολικά βιβλία, [44] και [45], το Θεώρημα αυτό δεν υπάρχει. Επίσης, επειδή θα μας χρειαστεί και αργότερα, δίνουμε πρώτα τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός: *Η συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται Darboux συνεχής στο Δ, αν για κάθε α,β στο Δ και για κάθε γ μεταξύ των f(α) και f(β), υπάρχει ξ μεταξύ των α και β, ώστε f(ξ)=γ.*

Θεώρημα 3.2.4 (Θεωρήματα Bolzano και Ενδιαμέσων Τιμών): *Έστω $f\in C(\Delta)$ και Δ=[a,b]. Τότε έχουμε ότι:*

(Bolzano) Αν f(a)f(b)<0, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(a,b)$, ώστε f(ξ)=0. Ισοδύναμα:

(Ενδιαμέσων Τιμών) Αν $f(a)\neq f(b)$, τότε για κάθε τιμή c μεταξύ των f(a) και f(b), υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(a,b)$, ώστε f(ξ)=c (ή, με άλλα λόγια, η f είναι Darboux συνεχής στο Δ).

Στα [12] σελ. 141, [21] σελ. 89 και [6] σελ. 194, το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών αποδεικνύεται, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano στην συνάρτηση f(x)–c.

Το Θεώρημα Bolzano, στο [12] (σελ. 139) αποδεικνύεται με το αξίωμα του κιβωτισμού (βλέπε Παράρτημα Α, σελ. III), ενώ στα δύο πιο πρόσφατα Σχολικά βιβλία Ανάλυσης, [21] και [6] αναφέρεται χωρίς απόδειξη. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς το θεώρημα Bolzano είναι ισοδύναμο με τα αξιώματα της πληρότητας των Πραγματικών αριθμών (βλέπε π.χ. [26]). Έτσι, η απόδειξη του θεωρήματος αυτού δεν είναι δυνατή, καθώς στις δύο τελευταίες εκδόσεις των Σχολικών βιβλίων δεν αναφέρεται τίποτε για την πληρότητα των Πραγματικών, σε αντίθεση με τα [8] και [12]. Βέβαια, οι συγγραφείς των τελευταίων αυτών Σχολικών βιβλίων, διερευνούν και τονίζουν την αναγκαιότητα των προϋποθέσεων για την ισχύ των παραπάνω Θεωρημάτων (Bolzano και Ενδιαμέσων Τιμών), με την βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων (βλέπε Παράρτημα Α).

Θεώρημα 3.2.5 (Θεώρημα συνεκτικότητας και Θεώρημα συνέχειας της αντίστροφης συνάρτησης): *Έστω* $f\in C(\Delta)$. *Τότε έχουμε ότι:*

(Συνεκτικότητα) Το $f(\Delta)$ *είναι διάστημα ή μονοσύνολο (αν η* f *είναι σταθερή στο* Δ*).*

(Συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης) Αν η f *είναι επιπλέον 1-1 στο* Δ*, τότε η* f *είναι γνήσια μονότονη στο* Δ *και η* $f^{-1}: f(\Delta)\to\Delta$ *είναι επίσης συνεχής συνάρτηση και του ίδιου είδους μονοτονίας με την* f*.*

Το πρώτο μέρος του Θεωρήματος αυτού αποδεικνύεται στο [12] ως πόρισμα του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών και της επόμενης χαρακτηριστικής ιδιότητας των διαστημάτων ([12], σελ. 142):

«Ένα σύνολο Ε, υποσύνολο των πραγματικών, είναι διάστημα αν και μόνο αν, για κάθε $\eta_1,\eta_2\in E$ *είναι* $[\eta_1, \eta_2]\subseteq E$*».*

Στα [21] και [6], το πρώτο αυτό μέρος απλά αναφέρεται στις σελίδες 89 και 194, αντίστοιχα. Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος αναφέρεται χωρίς απόδειξη στο [12], σελ. 142 και [21], σελ. 90, ενώ στο [6] δεν αναφέρεται καθόλου. Στα [44] και [45] το Θεώρημα δεν περιέχεται. Απόδειξη του δεύτερου μέρους του, μπορεί να δει κανείς στο [31], Τόμος Ι, σελ. 178, [39] σελ. 105, [40] σελ. 137 και [43], σελ. 196-197.

Τα επόμενα δύο σημαντικά Θεωρήματα, λόγω του Θεωρήματος της συνεκτικότητας, είναι ουσιαστικά το ίδιο Θεώρημα, αλλά πάλι, όπως και άλλα προηγούμενα, δεν έχουν την ίδια αντιμετώπιση από τα διάφορα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης, γι’ αυτό και τα διαχωρίζουμε.

Θεώρημα 3.2.6 (Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής): *Έστω* $\Delta=[a,b]$ *και* $f\in C(\Delta)$*. Τότε, η* f *είναι φραγμένη στο* Δ *και μάλιστα υπάρχουν σημεία* ξ_1 *και* ξ_2 *στο* Δ*, στα οποία η* f *παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο* Δ*, αντίστοιχα.*

Το Θεώρημα αυτό δεν υπάρχει στα [44], [45], ενώ απλά αναφέρεται χωρίς απόδειξη στο [12], σελ. 143, στο [21], σελ. 90 και στο [6], σελ.

195. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει αποδείξεις του στα [31] σελ. 160-161, [39] σελ. 53, [40] σελ. 136 και [43] σελ. 110. Στα συγγράμματα αυτά, δίνονται συνήθως περισσότερες της μιας αποδείξεις του βασικού αυτού Θεωρήματος και βέβαια, σε όλες χρησιμοποιείται κάποιο αξίωμα της πληρότητας των Πραγματικών αριθμών. Στα επόμενα Κεφάλαια της εργασίας αυτής, θα δούμε και άλλες αποδείξεις του. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο το παρακάτω ευφυέστατο επιχείρημα:

Αφού αποδείξει κανείς το ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο Δ και συνεπώς υπάρχει το M=supf(x) στο Δ, τότε, αν υποθέσει ότι η f δεν παίρνει την τιμή M θα καταλήξει σε άτοπο, αρκεί να παρατηρήσει ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, $x\in\Delta$, είναι καλά ορισμένη, συνεχής στο Δ, αλλά όχι φραγμένη! (Αν ήταν φραγμένη, θα είχαμε, για κάποιον θετικό αριθμό K, ότι για κάθε x στο Δ:

$$\frac{1}{M-f(x)}\le K, \text{ απ' όπου έπεται ότι } f(x)\le M-\frac{1}{K}<M,$$

πράγμα που αντιφάσκει με τον ορισμό του M).

Το άλλο Θεώρημα, που λέγαμε παραπάνω, είναι απλή συνέπεια των Θεωρημάτων Μεγίστης–Ελαχίστης τιμής και της Συνεκτικότητας, ή των Ενδιαμέσων Τιμών. Έτσι, το Θεώρημα αυτό εμφανίζεται στο [12] (σελ. 143), ως Πόρισμα των παραπάνω, αλλά δεν αναφέρεται καθόλου στο [21], ενώ στο [6] αναφέρεται μόνο σαν σχόλιο ([6], σελ. 195 – βλέπε και Παράρτημα Α).

<u>Θεώρημα 3.2.7</u> (Θεώρημα συμπάγειας): *Η εικόνα ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα.*

Δηλαδή, σε συνδυασμό με το προηγούμενο Θεώρημα, ισχύει ότι αν Δ=[a,b] και ξ_1,ξ_2 είναι σημεία του Δ, στα οποία η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, αντίστοιχα, τότε $f(\Delta)=[f(\xi_1),f(\xi_2)]$. Διαφορετικά, αν m και M είναι αντίστοιχα, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο Δ, τότε έχουμε ότι f(Δ)=[m, M].

Για το επόμενο Θεώρημα θα πούμε περισσότερα παρακάτω, στην παράγραφο 3.4 των βασικών Θεωρημάτων των Ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.2.8 (Συνέχεια και ολοκλήρωμα): *Έστω $f\in C(\Delta)$, $\Delta=[a,b]$. Τότε έχουμε ότι:*

- *Η f είναι ολοκληρώσιμη (Riemann) στο Δ.*
- *Η f έχει παράγουσα F στο Δ και μάλιστα $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, για κάθε x στο Δ (τότε, $F'(x)=f(x)$ για κάθε x στο Δ - Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού).*
- *Αν F είναι μία οποιαδήποτε παράγουσα της f στο Δ, τότε αληθεύει ότι $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (απλή ειδική περίπτωση του Δεύτερου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού).*

Τα επόμενα τρία θεωρήματα δεν τα συναντάει κανείς στα Σχολικά βιβλία. Ανήκουν περισσότερο στην ύλη ενός μαθήματος Ανάλυσης, που ακολουθεί μετά από ένα μάθημα Στοιχειώδους Λογισμού. Έχουμε όμως την γνώμη ότι, τουλάχιστον τα δύο πρώτα εξ' αυτών, πρέπει οπωσδήποτε να τα ξέρει καλά ένας καθηγητής του Λυκείου και ας είναι θέματα τα οποία δεν πρόκειται ποτέ να θίξει στα μαθήματά του. Ο ίδιος όμως, πρέπει για παράδειγμα, να γνωρίζει ότι το πρώτο από αυτά είναι το «κλειδί» της απόδειξης του πρώτου ισχυρισμού του παραπάνω Θεωρήματος 3.2.8 (βλέπε σελίδα 97) , ενώ το δεύτερο είναι το «μέσον» για την κατασκευή κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Θα χρειαστούμε όμως πρώτα δύο ορισμούς.

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο E, αν και μόνο αν,

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$, *ώστε* $\forall x,y\in E$ *με* $|x-y|<\delta$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Έστω $\{f_n\}$, $n=1,2,3,\dots$, μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο E. Θα λέμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση f στο E, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει φυσικός αριθμός N, ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n με $n\geq N$, να ισχύει ότι $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, για κάθε $x\in E$.

Μπορούμε τώρα να δούμε τα τρία αυτά τελευταία Θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2.9: *Έστω Δ=[a,b] και* $f \in C(\Delta)$. *Τότε η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Δ.*

Κάποιες αποδείξεις του Θεωρήματος αυτού θα δούμε στο Θεώρημα 5.2.ii παρακάτω στην παράγραφο 5.2.1. Άλλες αποδείξεις μπορεί να δει ο αναγνώστης στα συγγράμματα της βιβλιογραφίας μας ([31], σελ. 158, [39], σελ. 333, [40], σελ. 138, και [43], σελ. 117).

Θεώρημα 3.2.10: *Αν μία ακολουθία* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *συνεχών συναρτήσεων σε ένα διάστημα Δ, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f στο Δ, τότε η f είναι συνεχής στο Δ, ή, όπως λέμε καμιά φορά, η Άλγεβρα C(Δ) είναι ομοιόμορφα κλειστή.*

Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος είναι πολύ απλή και γι' αυτό δεν υπάρχει λόγος να παραπέμψουμε στην βιβλιογραφία. Αρκεί κανείς να χρησιμοποιήσει την επόμενη προφανή ανισότητα

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$$

και τους ορισμούς της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n στην f και της συνέχειας των f_n.

Θεώρημα 3.2.11 (Προσεγγιστικό Θεώρημα Weierstrass): *Έστω* $f \in C([a,b])$. *Τότε, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *ώστε* $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ *ομοιόμορφα στο Δ=[a,b]. Λέμε τότε ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο C([a,b]), ή ότι ο χώρος C([a,b]) είναι η ομοιόμορφη κλειστότητα του συνόλου των πολυωνύμων στο Δ.*

Απόδειξη του Θεωρήματος αυτού, αλλά και της γενίκευσής του (Θεώρημα Stone-Weierstrass), θα βρει ο αναγνώστης στο [40], σελ. 242. Άλλες αποδείξεις του υπάρχουν στο [31], Τόμος ΙΙβ, σελ. 579 και μετά.

3.3. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τα σημαντικότερα Θεωρήματα των παραγώγων. Θεωρούμε εδώ και πάλι, συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και θα συμβολίζουμε με D(Δ) το σύνολο εκείνων των συναρτήσεων, που είναι παραγωγίσιμες στο Δ.

Το πρώτο Θεώρημα, που δείχνει πόσο ουσιαστικός είναι ο ρόλος της συνέχειας για την ύπαρξη παραγώγου, αποδεικνύεται σε όλα τα Σχολικά βιβλία Ανάλυσης. Η απόδειξή του είναι απλή εφαρμογή του ορισμού της παραγώγου και των ιδιοτήτων των ορίων.

Θεώρημα 3.3.1: *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε είναι και συνεχής στο x. Συνεπώς, το σύνολο D(Δ) είναι υποσύνολο του C(Δ).*

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, με προφανές αντιπαράδειγμα την $f(x)=|x|$, η οποία είναι μεν συνεχής, αλλά όχι και παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Τονίζουμε επίσης εδώ, ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης, σε ένα σημείο x_0, εξασφαλίζεται και με λιγότερες προϋποθέσεις. Πραγματικά, ισχύει ότι για να έχουμε συνέχεια στο x_0, αρκεί η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων στο x_0 (δηλαδή, τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της συνάρτησης στο x_0 να είναι πραγματικοί αριθμοί, ακόμη και αν αυτοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους). Τα σημεία αυτά λέγονται πολλές φορές *γωνιακά*. Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, αρκεί να επαναλάβει κανείς δύο φορές την απλή απόδειξη του προηγουμένου Θεωρήματος, χωριστά για κάθε μία πλευρική παράγωγο.

Θεώρημα 3.3.2: *Έστω $f,g\in D(\Delta)$ και λ, μ πραγματικοί αριθμοί. Τότε έχουμε ότι:*
(α) Το D(Δ) εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί συνάρτηση είναι ένας Γραμμικός Χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ (όπως και το C(Δ)), δηλαδή, $\lambda f+\mu g\in D(\Delta)$ και μάλιστα ισχύει ότι $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.
(β) $fg\in D(\Delta)$ και μάλιστα ισχύει ότι $(fg)'=f'g+fg'$.

Το (α) του Θεωρήματος αυτού, προκύπτει και πάλι άμεσα από τον ορισμό της παραγώγου και τις ιδιότητες των ορίων. Το (β), απαιτεί και το προηγούμενο Θεώρημα, που εξασφαλίζει την συνέχεια των συναρτήσεων μας και επιπλέον, το πολύ διδακτικό τέχνασμα, της προσθαφαίρεσης μιας κατάλληλης ποσότητας στον αριθμητή του λόγου μεταβολής της fg (βλέπε και Παράρτημα Β, σελ. I–II, XV–XVI, XXVI–XXVII).

Σημείωση: Εδώ μπορούμε να σημειώσουμε ότι στο [12] αναφέρεται ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ αποτελούν (όπως και το C(Δ)) *δακτύλιο* ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Μάλιστα αναφέρεται ότι αποτελούν υποδακτύλιο του δακτυλίου των συνεχών συναρτήσεων με το ίδιο πεδίο ορισμού (βλέπε και Παράρτημα Β, σελίδα III), όπως προκύπτει και από το Θεώρημα 3.2.1.

Θεώρημα 3.3.3: *Αν f, $g\in D(\Delta)$ και $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε και $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}\in D(\Delta)$ και μάλιστα ισχύει ότι $(\frac{1}{g})'=-\frac{g'}{g^2}$, $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.*

Και αυτού του Θεωρήματος η απόδειξη βασίζεται στον ορισμό της παραγώγου, τις ιδιότητες των ορίων καθώς και την συνέχεια της g. Στα Σχολικά βιβλία, υπάρχει η απόδειξή του στα [44] σελ. 121, [45] σελ. 119 και [12] σελ. 176, ενώ στα [21] και [6], η απόδειξη παραλείπεται. Συνήθως, πρώτα αποδεικνύεται η παραγωγισιμότητα της $\frac{1}{g}$, και μετά της $\frac{f}{g}$, την οποία θεωρούμε ως γινόμενο των f και $\frac{1}{g}$ και εφαρμόζουμε το (β) του προηγουμένου Θεωρήματος (βλέπε και Παράρτημα Β, σελ. III–IV).

Θεώρημα 3.3.4 (κανόνας της αλυσίδας): *Έστω $f\in D(\Delta)$ και έστω ότι I είναι ένα διάστημα με $f(\Delta)\subseteq I$. Αν $g:I\to\mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε, $g\circ f\in D(\Delta)$ και ισχύει ότι $(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]f'(x)$, για κάθε x του Δ.*

Το σημαντικό αυτό Θεώρημα έχει στα παλαιότερα Σχολικά βιβλία, [44], [45] και [12], μια μακροσκελέστατη απόδειξη, η οποία όμως, είναι σε όλα με αστερίσκο, δηλαδή εκτός ύλης (βλέπε και Παράρτημα Β, σελ. V), ενώ στα νεώτερα [21] και [6], η απόδειξη παραλείπεται. Στα επόμενα Κεφάλαια της εργασίας μας, θα δώσουμε απλούστερες αποδείξεις όλων των προηγούμενων Θεωρημάτων, καθώς και του επομένου, με χρήση της παρατήρησης του Καραθεοδωρή.

Θεώρημα 3.3.5: *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο ανοικτό διάστημα Δ, που περιέχει το c, και επιπλέον υπάρχει η f'(c) και ισχύει ότι* $f'(c) \neq 0$, *τότε η* $g=f^{-1}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $d=f(c)$ *και* $g'(d)=[f'(c)]^{-1}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος αυτού μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα [31] σελ. 339, [39] σελ. 107 και [43] σελ. 199. Η απόδειξη, αν και κάπως σύντομη, εντούτοις κάνει ουσιαστική χρήση πολλών συμπερασμάτων από τα Θεωρήματα, τα οποία έχουμε δει μέχρι τώρα. Σε μερικές από τις αποδείξεις αυτές, εξετάζεται και το τι συμβαίνει όταν $f'(c)=0$, πέρα από το ότι η αντίστροφη συνάρτηση δεν είναι τότε παραγωγίσιμη στο σημείο c. Το Θεώρημα αυτό δεν αναφέρεται στα Σχολικά βιβλία Ανάλυσης.

Στα επόμενα τέσσερα Θεώρημα, συμπεριλαμβάνουμε τα Θεμελιώδη Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού και κάποιες από τις εφαρμογές τους. Σχεδόν όλα, με τις αποδείξεις τους, ή, τουλάχιστον με αρκετά εκτεταμένους σχολιασμούς, αναφέρονται στα διάφορα Σχολικά βιβλία της βιβλιογραφίας μας. Βλέπε επίσης και τα άρθρα [13], [26], [38]. Σε πια ακριβώς από τα νεώτερα Σχολικά βιβλία, [12], [21] και [6], υπάρχουν αποδείξεις τους, ή απλώς σχόλια, μπορεί ο αναγνώστης να δει στο Παράρτημα Β, γι’ αυτό και δεν θα επεκταθούμε σε πολλές-πολλές περαιτέρω διευκρινήσεις παρακάτω.

Θεώρημα 3.3.6 (Θεώρημα Fermat): *Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο* x_0 *του Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο* x_0, *τότε* $f'(x_0)=0$.

Θεώρημα 3.3.7 (Rolle και Μέσης Τιμής): *Αν η συνάρτηση f είναι:*

- *συνεχής στο κλειστό διάστημα [a,b] και*
- *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b), τότε:*

(Θ. Rolle) *Αν επιπλέον* $f(a)=f(b)$, *τότε υπάρχει* $\xi \in (a,b)$, *ώστε* $f'(\xi)=0$.

(Θ.Μ.Τ. κατά Lagrange) *Υπάρχει* $\xi \in (a,b)$, *ώστε* $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Θ.Μ.Τ. κατά Cauchy) *Αν και η συνάρτηση g, είναι, όπως και η f, συνεχής στο [a,b] και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει* $\xi \in (a,b)$, *ώστε:*

$$[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi).$$

Το Θεώρημα αυτό μας δίνει τώρα την δυνατότητα να διερευνήσουμε περαιτέρω την σχέση μεταξύ συνέχειας, παραγώγου και ορίου. Είδαμε ήδη, ότι από μόνη της η συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη παραγώγου στο σημείο αυτό. Όμως τώρα, μπορεί κανείς να βεβαιωθεί για την αλήθεια των επόμενων, περισσότερο διαφωτιστικών, ισχυρισμών:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, *τότε:*

(α) Η συνέχεια της f στο x_0, *<u>δεν</u> συνεπάγεται υποχρεωτικά την ύπαρξη της* $f'(x_0)$.

(β) Επίσης, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell$, *<u>δεν</u> έπεται υποχρεωτικά ότι υπάρχει και η* $f'(x_0)$.

(γ) Όμως, αν η f είναι συνεχής στο x_0 *και* $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell$, *τότε υποχρεωτικά ισχύει και ότι* $f'(x_0)=\ell$.

<u>Θεώρημα 3.3.8</u>: (α) *Αν* $f\in D(\Delta)$ *και* $f'(x)=0$, *για κάθε* $x\in\Delta$, *τότε η f είναι σταθερή στο Δ, ή, αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους σε ένα <u>διάστημα</u> Δ, τότε διαφέρουν στο Δ κατά μία σταθερά.*

(β) *Έστω* $f\in D(\Delta)$. *Αν* $f'(x)\geq 0$ (≤ 0), $\forall x\in\Delta$, *τότε η f είναι αύξουσα (αντιστοίχως φθίνουσα) στο Δ και αντίστροφα.*

(γ) *Αν* $f\in D(\Delta)$ *και* $f'(x)>0$ (<0), $\forall x\in\Delta$, *τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ.*

<u>Σημείωση</u>: Τονίζουμε εδώ ότι, στο προηγούμενο Θεώρημα, το ότι το Δ είναι διάστημα, είναι ουσιαστικό (γι' αυτό και η υπογράμμιση στο (α) του Θεωρήματος). Μάλιστα, ο αναγνώστης καλείται να δει την πιο προσεκτική διατύπωση των παραπάνω προτάσεων στα νεώτερα Σχολικά βιβλία, [21] και [6], στο Παράρτημα Β, σελ. XXIII και XXXI. Επίσης, στο (γ) η αντίστροφη κατεύθυνση δεν ισχύει. Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι ένα συνηθισμένο αντιπαράδειγμα. Αυτή, παρότι η παράγωγός της στο $x_0=0$, ισούται με μηδέν, εντούτοις, ως γνωστόν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Γενικότερα, η πρώτη παράγωγος μπορεί να μηδενίζεται σε <u>μεμονωμένα</u> σημεία του Δ και στα υπόλοιπα να διατηρεί πρόσημο. Τότε

η συνάρτησή μας είναι γνησίως μονότονη στο Δ (γνησίως αύξουσα-γνησίως φθίνουσα, αναλόγως του προσήμου της παραγώγου).

Θεώρημα 3.3.9 (Κριτήρια τοπικών ακροτάτων): *Για μια συνάρτηση f, έχουμε τα επόμενα κριτήρια τοπικών ακροτάτων με χρήση παραγώγων:*

(Πρώτης παραγώγου) *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο* $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ *και συνεχής στο* x_0, *τότε:*

(α) Αν $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,x_0)$ *και* $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0,b)$, *τότε το* $f(x_0)$ *είναι τοπικό μέγιστο της f.*

(β) Αν $f'(x)<0,\ \forall x\in(a,x_0)$ *και* $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0,b)$, *τότε το* $f(x_0)$ *είναι τοπικό ελάχιστο της f.*

(Δεύτερης παραγώγου) *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και* x_0 *είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ, για το οποίο ισχύει* $f'(x_0)=0$ *και υπάρχει η* $f''(x_0)$, *τότε:*

(α) Αν $f''(x_0)<0$, *τότε το* $f(x_0)$ *είναι τοπικό μέγιστο της f.*

(β) Αν $f''(x_0)>0$, *τότε το* $f(x_0)$ *είναι τοπικό ελάχιστο της f.*

Παρατήρηση: Για το προηγούμενο Θεώρημα ακολουθήσαμε την διατύπωση των νεωτέρων Σχολικών βιβλίων (βλέπε [21] και [6]), όμως αδυνατούμε να καταλάβουμε, γιατί οι ανισότητες στα (α) και (β) του Κριτηρίου της πρώτης παραγώγου, απαιτούνται γνήσιες. Αντιθέτως, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τους ορισμούς των τοπικών ακροτάτων στα βιβλία αυτά, πιστεύουμε ότι το σωστό είναι οι ανισότητες αυτές να είναι μη-γνήσιες, όπως π.χ. στο [12], σελ. 202.

Το επόμενο Θεώρημα δεν υπάρχει σε κανένα από τα Σχολικά βιβλία μας. Απόδειξή του μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα [22], σελ. 10, [31], ΤόμοςΙΙα, σελ. 6, [39], σελ. 325 και [40], σελ. 164, αλλά και εμείς θα το αποδείξουμε παρακάτω. Ο λόγος για τον οποίο το αναφέρουμε εδώ, είναι διότι περιγράφει μία χαρακτηριστική ιδιότητα των παραγώγων, δηλαδή, το ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ, ικανοποιεί στο Δ το συμπέρασμα του Θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών, ή ισοδύναμα, είναι Darboux συνεχής στο Δ. Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να παραπλανήσει κανένα και ιδιαίτερα τους μαθητές του Λυκείου και να τους δώσει την εντύπωση, ή ακόμα και να τους κάνει να πιστέψουν ότι κάθε συνάρτηση, που είναι παράγωγος μιας άλλης, υποχρεωτικά είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της (εξάλλου, υπάρχουν και διάφορες σχετικές *αποδείξεις*, οι οποίες φυσικά είναι όλες λάθος, όπως π.χ. η επόμενη:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(x),$$

η οποία χρησιμοποιεί τον κανόνα του De l' Hospital, χωρίς να έχει εξασφαλίσει εκ των προτέρων, ότι υπάρχει το τελευταίο όριο).

Αυτά συμβαίνουν διότι αν για την f' ισχύει το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα Δ, τότε αυτή, αν έχει ασυνέχεια στο σημείο x_0 του Δ, αυτή θα είναι ουσιώδης ασυνέχεια. Όμως, στο Λύκειο σήμερα, δεν διδάσκονται παραδείγματα συναρτήσεων με τέτοιου είδους ασυνέχεια, αν και παλιότερα υπήρχαν, π.χ. η άσκηση 40, στην σελίδα 154 του [12], ή το επόμενο παράδειγμα της σελίδας 157 του [21]:

Αν $f(x)=x^2ημ\frac{1}{x}$, όταν $x\neq 0$ και $f(0)=0$, τότε έχουμε παράγωγο την

$f'(x)=2xημ\frac{1}{x}-συν\frac{1}{x}$, για $x\neq 0$ και $f'(0)=0$.

Η παράγωγος αυτή, έχει ουσιώδη ασυνέχεια στο μηδέν, καθώς το όριό της στο μηδέν δεν υπάρχει. Ερχόμαστε τώρα στο ίδιο το Θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.10: *Αν $f\in D(Δ)$, τότε η f' είναι Darboux συνεχής στο Δ, δηλαδή, για κάθε α,β στο Δ και για κάθε γ μεταξύ των $f'(α)$ και $f'(β)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ μεταξύ των α και β, ώστε $f'(ξ)=γ$.*

Απόδειξη:

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ισχύει $f'(α)<γ<f'(β)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-γx$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], άρα, από το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, θα υπάρχει ξ στο [α,β], ώστε $g(ξ)=\min\{g(x): x \text{ στο } [α,β]\}$. Όμως, $g'(x)=f'(x)-γ$, οπότε $g'(α)=f'(α)-γ<0$, $g'(β)=f'(β)-γ>0$, απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι το ξ ανήκει στο ανοικτό διάστημα (α,β). Τότε, από το Θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $g'(ξ)=0$, δηλαδή $f'(ξ)=γ$, όπως θέλαμε.

Κλείνουμε και την παράγραφο αυτή με μία Πρόταση, που επίσης δεν υπάρχει στα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης, αλλά που είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις και που θα χρειαστεί και σε εμάς αργότερα.

Πρόταση 3.3.11: *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ενός διαστήματος $\Delta=[a,b]$, τότε:*

Για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, ώστε, για κάθε x,y στο Δ,
με $x\neq y$ και $x_0-\delta<x\leq x_0\leq y<x_0+\delta$ να ισχύει ότι:

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-f'(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Από τους ορισμούς του ορίου και της παραγώγου, έπεται ότι υπάρχει $\delta>0$, ώστε, για κάθε x,y στο Δ, με $x_0-\delta<x\leq x_0\leq y<x_0+\delta$, να έχουμε ότι (το «=» ισχύει παρακάτω, μόνο όταν $x=x_0$, $y=x_0$):

$$\left|f(x_0)-f(x)-f'(x_0)(x_0-x)\right|\leq \varepsilon(x_0-x) \quad \text{και}$$

$$\left|f(y)-f(x_0)-f'(x_0)(y-x_0)\right|\leq \varepsilon(y-x_0).$$

Τότε, αν $x\neq y$, η μία τουλάχιστον των παραπάνω ανισοτήτων είναι γνήσια, οπότε προσθέτοντας τις ανισότητες αυτές και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

3.4. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Με το Κεφάλαιο της Ολοκλήρωσης κλείνουν όλα τα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης. Έτσι και εμείς εδώ, θα κλείσουμε το Κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζοντας τα σημαντικότερα θεωρήματα των ολοκληρωμάτων. Στα επόμενα, θα συμβολίζουμε το σύνολο των (Riemann) ολοκληρωσίμων συναρτήσεων σε ένα διάστημα $\Delta=[a,b]$ με $R(\Delta)$, ή με $R([a,b])$.

Υπενθυμίζουμε ότι στο Λύκειο διδάσκεται μόνο το *ορισμένο ολοκλήρωμα* συνεχούς συνάρτησης, γι' αυτό και στα διάφορα Σχολικά βιβλία, η ύλη έχει προσαρμοστεί έτσι που να καλύπτει μόνο αυτή την ειδική περίπτωση (βλέπε και Παράρτημα Γ). Στην γενική πάντως περίπτωση, τα επόμενα Θεωρήματα σε συνδυασμό με τα Θεωρήματα των προηγουμένων παραγράφων, μας εξασφαλίζουν ότι ο χώρος R(Δ) (που είναι και δακτύλιος κ.λπ.) συνδέεται με τους προηγούμενους γνωστούς μας χώρους, C(Δ) και D(Δ), ως εξής:

$$D(\Delta)\subset C(\Delta)\subset R(\Delta)$$

και επιπλέον, οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι γνήσιοι.

Θεώρημα 3.4.1: *Έστω $f,g\in R([a,b])$. Τότε έχουμε ότι:*

(α) Αν λ,μ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε το σύνολο R([a,b]), εφοδιασμένο με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί συνάρτηση, είναι ένας Γραμμικός Χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, δηλαδή:

$\lambda f+\mu g\in R([a,b])$ και μάλιστα ισχύει ότι $\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$.

(β) $fg\in R([a,b])$ (οπότε, ο χώρος R([a,b]) είναι και Δακτύλιος κ.λπ.).

(γ) Αν $|g(x)|\geq c>0$, για κάθε x στο [a,b], τότε $\frac{1}{g},\frac{f}{g}\in R([a,b])$.

Για συνεχείς συναρτήσεις, το (α) του Θεωρήματος αυτού, βρίσκεται σε όλα τα Σχολικά βιβλία. Στα παλαιότερα από αυτά, [44] και [45] (σελ. 155), αποδεικνύεται με χρήση αρχικών συναρτήσεων (αφού, ο ορισμός του ολοκληρώματος εκεί, είναι διαφορετικός όπως έχουμε δει). Στο [12], σελ. 235 και στο [21], σελ.237, βρίσκουμε επίσης αποδείξεις του (α). Στο [6] τέλος, σελ. 332, απλά αναφέρεται το (α) χωρίς να αποδεικνύεται (βλέπε και Παράρτημα Γ). Για την γενική περίπτωση, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα [31], [39], [40] και [43].

Το (β), δεν υπάρχει στα Σχολικά βιβλία. Στο [40], αποδεικνύεται πρώτα (σελ. 199) ότι αν $f\in R([a,b])$, τότε και $f^2\in R([a,b])$ και κατόπιν η $fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$ μας δίδει το ζητούμενο, με την βοήθεια, βέβαια, του προηγούμενου Θεωρήματος. Στο [31] (Τόμος Ι, σελ. 223) αποδεικνύεται με χρήση του Κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας της παραγράφου 3.1.3, ενώ στα [39] και [43] αφήνεται ως άσκηση. Μια σημαντική διαφορά του (β), από το ανάλογό του Θεώρημα 3.3.2(β) για παραγώγους, είναι το ότι εδώ ναι μεν αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα της fg στο [a,b], όταν οι f και g ανήκουν στο R([a,b]), αλλά σε αντίθεση με την παράγωγο του γινομένου fg, που δίνεται από ένα τύπο συναρτήσει των παραγώγων των f και g, το ολοκλήρωμα της fg δεν δίνεται από κανένα τέτοιο τύπο. Ούτε μπορεί να υπολογισθεί από τα ολοκληρώματα των f και g στο διάστημα [a,b], εκτός ίσως από πολύ ειδικές περιπτώσεις (π.χ. η μία των συναρτήσεων να είναι σταθερή). Εντούτοις, ένα συνηθισμένο λάθος, που βλέπει συχνά κανείς είναι το επόμενο: «*το ολοκλήρωμα του γινομένου (πηλίκου) δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο (πηλίκο) των ολοκληρωμάτων τους*». Βέβαια, το μειονέκτημα της μη ύπαρξης τύπου για το ολοκλήρωμα του γινομένου δύο συναρτήσεων, ουσιαστικά εξαφανίζεται με την *Μέθοδο ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες*, για την οποία όμως δεν θα επεκταθούμε άλλο εδώ.

Τέλος, το (γ), όχι μόνο δεν υπάρχει στα Σχολικά βιβλία, αλλά σπάνια θα το βρει κανείς και σε άλλα συγγράμματα (για μία απόδειξή του, πάλι με το Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, βλέπε [31], Τόμος Ι, σελ. 224). Να τονίσουμε εδώ, ότι αν δύο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες σε ένα διάστημα Δ, δεν υπάρχει Θεώρημα ανάλογο των Θεωρημάτων 3.2.1(γ) και 3.3.3, για το πηλίκο τους (π.χ. η συνάρτηση g(x)=x, για x στο (0,1] και g(0)=1, είναι διάφορη του μηδενός και ολοκληρώσιμη στο [0,1], αλλά η 1/g δεν είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1], αφού δεν είναι φραγμένη). Όσον αφορά τα ανάλογα των Θεωρημάτων 3.2.3 και 3.3.4, για την σύνθεσή τους, αυτή μπορεί επίσης να μην είναι ολοκληρώσιμη στο Δ συνάρτηση (βλέπε [31], Τόμος Ι, Παράδειγμα, σελ. 238 και [43], άσκηση 36, σελ. 231). Μία περίπτωση, που η σύνθεση $f \circ g$ δύο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, είναι η περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής (βλέπε [31], Τόμος Ι, σελ. 237). Στις περιπτώσεις πάντως, που το ολοκλήρωμα του πηλίκου ή της σύνθεσης συναρτήσεων υπάρχει, ο υπολογισμός του επιτυγχάνεται συνήθως με την βοήθεια κάποιας *Μεθόδου ολοκλήρωσης*, π.χ. *με ανάλυση σε Απλά κλάσματα, την Μέθοδο αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης* κ.λπ., αλλά, για όλα αυτά δεν θα υπεισέλθουμε και πάλι σε λεπτομέρειες.

Το επόμενο Θεώρημα ισχύει και γενικότερα για τρία (και επαγωγικά για παραπάνω) τυχαία σημεία, που ανήκουν σε ένα διάστημα στο οποίο η συνάρτησή μας είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Θεώρημα 3.4.2</u>: *Αν a<c<b, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο [a,b], αν και μόνο αν, η f είναι ολοκληρώσιμη στα [a,c] και [c,b]. Στην περίπτωση αυτή ισχύει και το ότι* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Σε όλα τα Σχολικά βιβλία το Θεώρημα αυτό αναφέρεται, αλλά χωρίς την απόδειξή του. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει αποδείξεις του στα διάφορα συγγράμματα της βιβλιογραφίας μας.

Το επόμενο Θεώρημα μας εξασφαλίζει, μεταξύ άλλων, ότι υπάρχουν πάρα πολλές συναρτήσεις, που είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

<u>Θεώρημα 3.4.3</u>: *Έστω Δ=[a,b]. Τότε:*

(α) Κάθε μονότονη στο Δ συνάρτηση, είναι ολοκληρώσιμη στο Δ.

(β) Κάθε συνεχής στο Δ συνάρτηση, είναι ολοκληρώσιμη στο Δ.

(γ) Αν αλλάξουμε την τιμή μιας ολοκληρώσιμης στο Δ συνάρτησης σε ένα σημείο (και επαγωγικά σε πεπερασμένο πλήθος σημείων), τότε η νέα συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο Δ και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την αρχική.

(δ) Για $f,g\in R(\Delta)$, *έχουμε ότι και οι συναρτήσεις:* $|f|$, $max\{f,g\}$, $min\{f,g\}$, $f^{+}=max\{f,0\}$ *και* $f^{-}=max\{-f,0\}=-min\{f,0\}$, *είναι ολοκληρώσιμες στο Δ. Επίσης ισχύει ότι:*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}(b-a).$$

Από το Θεώρημα αυτό μόνο το (β) (χωρίς απόδειξη) και μέρος του (δ) αναφέρεται στα Σχολικά βιβλία (βλέπε Παράρτημα Γ). Για τα υπόλοιπα παραπέμπουμε στα διάφορα συγγράμματα της βιβλιογραφίας μας. Για άλλες αποδείξεις του (β), βλέπε παράγραφος 5.2.1 παρακάτω. Στο σημείο αυτό, ας τονίσουμε ότι η τελευταία ανισότητα, στο (δ) του παραπάνω Θεωρήματος, αληθεύει για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις όταν $a \le b$. Για a>b, το δεύτερο μέλος της είναι αρνητικό, συνεπώς η ανισότητα όπως έχει δεν αληθεύει, ισχύει όμως τότε ότι:

$$\left|\int_a^b f\right| \le \left|\int_a^b |f|\right| \le sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}(a-b).$$

Στο επόμενο Θεώρημα συμπεριλαμβάνουμε και το λεγόμενο *Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού* (περιπτώσεις (β) και (γ)). Στην μορφή (β), αποδεικνύεται σε όλα τα Σχολικά βιβλία ([44] σελ. 156, [45] σελ. 155, [12] σελ. 239, [21] σελ. 242 και στο [6], σελ. 340 (βλέπε και Παράρτημα Γ, σελ. IV, XI–XII, XIX).

<u>Θεώρημα 3.4.4</u>: *Αν $f,g\in R([a,b])$, τότε έχουμε ότι:*

(α) Αν $m\le f(x)\le M$, για κάθε $x\in[a,b]$, τότε υπάρχει αριθμός μ στο $[m,M]$, ώστε $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\mu$, ή ισοδύναμα, $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

Ειδικότερα, αν $f(x)\ge 0$, για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f\ge 0$ και φυσικά, αν $f(x)\le g(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f\le\int_a^b g$.

(β) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι <u>συνεχής</u> στο $\Delta=[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi\in\Delta$, ώστε $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

(γ) Αν η f είναι <u>συνεχής</u> στο $\Delta=[a,b]$ και $g(x)\ge 0$, για κάθε x στο Δ, (ή, $g(x)\le 0$, για κάθε x στο Δ), τότε υπάρχει $\xi\in\Delta$, ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

(δ) Αν $f(x)\ge 0$, για κάθε $x\in[a,b]$ και η f είναι <u>συνεχής</u> σε ένα σημείο x_0 του $[a,b]$, με $f(x_0)>0$, τότε $\int_a^b f>0$.

Κλείνουμε και την παράγραφο αυτή με ένα τελευταίο Θεώρημα, στο οποίο συμπεριλαμβάνουμε την συνέχεια του ολοκληρώματος και τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού. Τέλος, με μια ακόμη Παρατήρηση κλείνουμε και το Κεφάλαιο αυτό.

<u>Θεώρημα 3.4.5</u>: *Έστω f μία <u>ολοκληρώσιμη</u> στο $\Delta=[a,b]$ συνάρτηση. Τότε έχουμε ότι:*

(α) Αν F είναι η συνάρτηση με τύπο $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$, τότε η F είναι συνεχής στο Δ.

(β) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a,b]$, τότε η συνάρτηση F του (α) είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $F'(x_0)=f(x_0)$. (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού).

(γ) Αν αληθεύει ότι $f=g'$ για κάποια συνάρτηση g στο [a,b], τότε ισχύει και ότι $\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$. (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού).

Το Θεώρημα αυτό δεν υπάρχει στα παλαιότερα Σχολικά βιβλία [44] και [45], τα οποία όμως χρησιμοποιούσαν, αλλά μόνο για συνεχείς συναρτήσεις, το (γ), ως ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Στα νεώτερα Σχολικά βιβλία, το (β) αποδεικνύεται στη σελ. 240 του [12], ενώ στο [21], η απόδειξη είναι στο παράρτημα (σελ. 308). Σήμερα, στο [6] αναφέρεται μόνο, χωρίς απόδειξη. Η ειδική περίπτωση του (γ), για συνεχείς μόνο συναρτήσεις, που έχει πολύ απλή απόδειξη, βρίσκεται σε όλα τα νεώτερα Σχολικά βιβλία ([12] σελ. 242, [21] σελ. 255 και [6] σελ. 335 - βλέπε και Παράρτημα Γ). Η γενική περίπτωση, για f ολοκληρώσιμη συνάρτηση, υπάρχει στα [31], Τόμος ΙΙα, σελ. 66, [40] σελ. 205 και [43], σελ. 242.

<u>Παρατήρηση</u>:

Η ύλη που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο αυτό, περιλαμβάνει, στα διάφορα Σχολικά βιβλία της Ανάλυσης, και άλλα σχετικά θέματα, που δεν εξετάζονται εδώ. Για παράδειγμα, δεν αναφέραμε τίποτα για την γεωμετρική και την κινηματική ερμηνεία της παραγώγου, τον ρυθμό μεταβολής, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής συνάρτησης, για τις ασύμπτωτες, τον κανόνα του de l' Hospital και τις απροσδιόριστες μορφές, για τα αόριστα ολοκληρώματα, τα εμβαδά κ.λπ.

Οι κυριότεροι λόγοι για τις παραλείψεις αυτές, είναι πρώτον το ότι, αυτά που θα δούμε παρακάτω στην εργασία αυτή, σχετίζονται περισσότερο με τα θέματα, τα οποία παρουσιάσαμε εδώ και δεύτερον το ότι, η παρουσίαση πολλών από τα θέματα, τα οποία παραλείψαμε, θα απαιτούσε τόση έκταση, που μάλλον θα ήταν καλύτερα να αποτελέσουν το περιεχόμενο μιας άλλης εργασίας.

Για παράδειγμα, αν πάρει κανείς τον κανόνα του Hospital, που υπάρχει σε όλα τα Σχολικά βιβλία της βιβλιογραφίας μας και ο οποίος, όπως όλοι γνωρίζουμε, είναι προσφιλέστατος τόσο στους μαθητές όσο και στους φοιτητές, θα τον βρει ως Θεώρημα με διάφορες περιπτώσεις, μεταξύ των οποίων είναι π.χ. και οι επόμενες:

(1) Στα παλαιότερα Σχολικά βιβλία ([44] και [45], σελ. 140):

«Έστω f και g συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού ένα σύνολο της μορφής (a,x_0) ή (x_0,b) ή $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, οι οποίες παραγωγίζονται.
Τότε, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell$.»

(2) Στο [12] (σελ. 195):

«Έστω ότι f και g είναι συναρτήσεις για τις οποίες υποθέτουμε ότι:
- σε μια περιοχή του x_0 είναι παραγωγίσιμες με $g'(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.»

(3) Στα [21], σελ. 213 και [6], σελ. 282:

«Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, πεπερασμένο ή άπειρο, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.»

Βλέπουμε τότε, ότι μόνο στο (2) υπάρχει η υπόθεση «*σε μια περιοχή του x_0 είναι παραγωγίσιμες με $g'(x)\neq 0$*», χωρίς την οποία <u>δεν</u> είναι δυνατόν να αποδείξει κάνεις τα (1) και (3)! Γι' αυτόν, αλλά και για διάφορους άλλους λόγους, η μελέτη και παρουσίαση μόνο του κανόνα αυτού, θα μπορούσε να αποτελέσει το αντικείμενο μιας άλλης εργασίας.

Τέλος, ας επανέλθουμε και πάλι στο Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, το οποίο έχουμε αναφέρει παραπάνω στην παράγραφο 3.1.3. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ρίχνοντας μια ματιά στις αποδείξεις των διαφόρων Θεωρημάτων, που αφορούν τα ολοκληρώματα, ότι σε πάρα πολλές από αυτές υπεισέρχεται αυτό το Κριτήριο. Η χρήση του, όχι μόνο κάνει δυνατή την απόδειξη των Θεωρημάτων αυτών, αλλά και σε αρκετές περιπτώσεις πάρα πολύ εύκολη. Βέβαια, υπάρχουν και ιδιότητες, που η απόδειξή τους μπορεί να γίνει απλούστερα, αν αντί των πάνω και κάτω αθροισμάτων, χρησιμοποιήσουμε τα αθροίσματα Riemann.

Ακόμη, υπάρχει στην Ανάλυση, όχι όμως την Στοιχειώδη, αλλά την πολύ προχωρημένη, και ένα άλλο Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας κατά Riemann, το *Θεμελιώδες Θεώρημα Riemann-ολοκληρωσιμότητας του Lebesgue*. Με το Κριτήριο αυτό, κάποιες αποδείξεις είναι σχεδόν άμεσες και τελείως προφανείς και κάποιες άλλες μπορούν να γίνουν πιο εύκολα και απλά. Επίσης, απαντά πλήρως και στο ερώτημα:

Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $Δ=[α,β]$, να είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο Δ;

Παραθέτουμε το Θεμελιώδες αυτό Θεώρημα, μόνο ενημερωτικά και μόνο για όσους από τους αναγνώστες συμβαίνει να γνωρίζουν τι σημαίνει το να ισχύει μία ιδιότητα *σχεδόν παντού* σε ένα σύνολο.

<u>Θεώρημα</u>: *Έστω f μία φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $Δ=[a,b]$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο Δ, αν και μόνο αν, η f είναι σχεδόν παντού συνεχής στο Δ.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΑ ΠΕΝΤΕ ΒΑΣΙΚΑ ΛΗΜΜΑΤΑ ΚΑΙ Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε έξι εργασίες, οι οποίες δημοσιεύθηκαν στις στήλες τις σχετικές με τα θέματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών (στήλες των Classroom Notes και The Teaching of Mathematics), στο περιοδικό της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας «*The American Mathematical Monthly*», κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ του 1957 έως το 1991.

Οι πέντε πρώτες από αυτές έχουν στόχο να ενοποιήσουν και να απλουστεύσουν ένα μεγάλο αριθμό αποδείξεων σημαντικών θεωρημάτων της Ανάλυσης και, χρονολογικά, είναι οι εξής εργασίες της βιβλιογραφίας μας:

[17] του 1957, [18] του 1966, [29] του 1968,
[41] του 1972 και [14] του 1987.

Ο αναγνώστης, που θέλει να διερευνήσει περισσότερο και βαθύτερα τις Μαθηματικές εκείνες αρχές στις οποίες στηρίζονται αυτές οι εργασίες, μπορεί να δει στο ίδιο περιοδικό το άρθρο [16] του 1957. Αν επιπλέον ενδιαφέρεται για περισσότερες εφαρμογές ή γενικεύσεις των *Βασικών Λημμάτων* των παραπάνω εργασιών, πέρα από αυτά που θα βρει παρακάτω στην εργασία μας αυτή, θα πρέπει να ανατρέξει στην βιβλιογραφία των παραπάνω άρθρων. Επίσης, να αναφέρουμε ότι στο [15] (του 1989) μπορεί να βρει εφαρμογές σε θέματα, τα οποία δεν συναντάει κανείς στην ύλη της Στοιχειώδους Ανάλυσης, ενώ γενικεύσεις υπάρχουν και στο [42] (του 1974) καθώς και στις τελευταίες παραγράφους των [17] και [41].

Η έκτη εργασία ([25] του 1991), που θα παρουσιάσουμε εδώ, αναφέρεται στην *Παρατήρηση του Καραθεοδωρή* (όπως έχει επικρατήσει να λέγεται αυτή στην Ελληνική βιβλιογραφία – βλέπε [31], σελ. 335 και [32], σελ. 79).

Η παρατήρηση αυτή, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας εναλλακτικός ορισμός της παραγώγου, όπως αναφέραμε ήδη στην παράγραφο 2.2. Ένας ορισμός όμως, που πέρα από όσα είπαμε γι' αυτόν στην παραπάνω παράγραφο του Κεφαλαίου 2, έχει και άλλα θεωρητικά πλεονεκτήματα, αφού ενοποιεί και απλοποιεί κατά πολύ τις αποδείξεις των θεωρημάτων, τα οποία αναφέρονται στις παραγώγους, όπως θα δούμε και παρακάτω στη παράγραφο 4.6 καθώς και στο πέμπτο Κεφάλαιο.

Πρακτικά όμως, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, ο άλλος ορισμός της παραγώγου (με τα όρια) συνήθως είναι καταλληλότερος.

Τώρα, η δομή των πέντε πρώτων εργασιών είναι παρόμοια σε όλες και έχει ως εξής:

Πρώτα διατυπώνεται ένα κεντρικό Θεώρημα, το οποίο και αποδεικνύεται με την βοήθεια κάποιου αξιώματος της πληρότητας των Πραγματικών αριθμών. Το κεντρικό αυτό Θεώρημα καθεμιάς από αυτές τις εργασίες, το αναφέρουμε παρακάτω ως το *Βασικό της Λήμμα.*

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται ως παραδείγματα οι αποδείξεις μερικών βασικών θεωρημάτων της Ανάλυσης, για να φανεί ο ενιαίος τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων θεμάτων με την χρήση του Βασικού Λήμματος και μάλιστα οι νέες αυτές αποδείξεις συνήθως είναι απλούστερες και κομψότερες από τις γνωστές μας αντίστοιχες κλασικές αποδείξεις.

Συγκεκριμένα, όπως αναφέρουν και οι συγγραφείς των παραπάνω εργασιών, σε αρκετές από τις κλασικές αποδείξεις της Ανάλυσης, ορίζει κανείς ένα υποσύνολο Ε ενός διαστήματος Δ, με μία κατάλληλη ιδιότητα, με σκοπό να αποδείξει μετά, ότι το Ε συμπίπτει με ολόκληρο το διάστημα. Συνήθως, για να πετύχουμε κάτι τέτοιο, υποθέτουμε ότι το Ε δεν είναι ολόκληρο το διάστημα και μετά, θεωρώντας π.χ. το supE ή επινοώντας κάποιο άλλο τέχνασμα, προσπαθούμε να καταλήξουμε σε αντίφαση (άτοπο).

Η χρήση αυτής της μεθόδου οδηγεί συχνά σε επανάληψη παρόμοιων επιχειρημάτων, η λογική των οποίων όμως δεν είναι καθόλου προφανής για κάποιον που συναντά αυτές τις αποδείξεις για πρώτη φορά, με αποτέλεσμα να υπάρχουν μάλλον πολλές δυσκολίες στην κατανόηση τους. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας τα Βασικά Λήμματα, μπορούμε, όπως θα δούμε και παρακάτω, να αποφύγουμε αυτή την επανάληψη και να απλοποιήσουμε πολλές από αυτές τις αποδείξεις. Στην πραγματικότητα βέβαια, πιο σωστό είναι μάλλον το ότι ο τελευταίος αυτός ισχυρισμός αληθεύει για τις περισσότερες από τις παραπάνω εργασίες, αλλά ίσως όχι για όλες.

Τέλος, σε κάθε μία από τις εργασίες αυτές, αποδεικνύεται, με την βοήθεια και πάλι του Βασικού της Λήμματος, κάποιο αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, συνήθως διαφορετικό από εκείνο που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του ίδιου του Λήμματος. Έτσι έχουμε ουσιαστικά την ισοδυναμία καθενός από τα πέντε Βασικά Λήμματα με τα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς και τα ίδια τα πέντε Βασικά Λήμματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό, μας οδήγησε να αναζητήσουμε μια απ' ευθείας απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας. Μια τέτοια απόδειξη, που να συμπεριλαμβάνει όλα τα Λήμματα, δεν μπορέσαμε να βρούμε στην βιβλιογραφία, γι' αυτό θα δώσουμε μία δική μας στο πέμπτο Κεφάλαιο.

<u>Παρατήρηση</u>: Μία πιο <u>έμμεση</u> απόδειξη της ισοδυναμίας καθενός από τα πέντε Βασικά Λήμματα με τα διάφορα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, είναι το ότι με την βοήθεια των Λημμάτων

αυτών αποδεικνύονται κάποια από τα κλασικά θεωρήματα της Ανάλυσης (Bolzano, Rolle, κ.λπ.), τα οποία είναι ισοδύναμα με τα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών (βλέπε π.χ. [26], [27]).

4.1. ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση της πρώτης χρονολογικά εργασίας (βλέπε [17]), που έχει συγγραφέα τον L.R. Ford και τίτλο «*Interval-additive propositions*». Το τι ακριβώς σημαίνει αυτός ο τίτλος, θα φανεί αμέσως παρακάτω, όπου θα δώσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς. Όπως αναφέρει στην εισαγωγή του ο συγγραφέας, οι έννοιες, που εισάγονται με τους ορισμούς αυτούς, πιστεύει ότι είναι πιο κατανοητές από εκείνους που κάνουν τα πρώτα τους βήματα στην Ανάλυση και γενικότερα πιο εύκολο να εφαρμοστούν στις διάφορες αποδείξεις.

<u>Ορισμός 4.1.1</u>**:** *Μία <u>πρόταση</u> (παρακάτω θα λέμε καλύτερα <u>ιδιότητα</u>) P, η οποία αφορά διαστήματα, θα λέγεται <u>προσθετική σε διαστήματα</u> (interval-additive proposition), αν κάθε φορά που η P αληθεύει σε καθένα από δύο επικαλυπτόμενα διαστήματα (τα οποία έχουν κοινά εσωτερικά σημεία), έπεται ότι η P αληθεύει και στην ένωσή τους.*

Η χρησιμότητα της παραπάνω έννοιας έγκειται στο ότι η «*προσθετικότητα σε διαστήματα*» είναι μάλλον διαδεδομένο φαινόμενο. Επίσης, το να δείξει κανείς τον προσθετικό χαρακτήρα μιας ιδιότητας, συχνά είναι τόσο προφανές, ώστε πολλές φορές αρκεί αυτό απλά και μόνο να αναφερθεί.

Για παράδειγμα, μπορεί να δει κανείς αμέσως ότι οι παρακάτω ιδιότητες είναι προσθετικές σε διαστήματα.

1. *Το μήκος ενός διαστήματος είναι μεγαλύτερο της μονάδας.*
2. *Για δοσμένο πραγματικό αριθμό M, η συνάρτηση f ικανοποιεί την σχέση $f(x)<M$.*

3. *Η συνάρτηση f είναι θετική, ή γνησίως μονότονη, ή συνεχής, ή φραγμένη, ή ολοκληρώσιμη, ή φραγμένης κύμανσης σε ένα διάστημα.*
4. *Έστω S ένα σύνολο σημείων. Οι προτάσεις «ένα διάστημα δεν περιέχει κανένα σημείο του S», ή «ένα διάστημα περιέχει πεπερασμένου πλήθους σημεία του S», είναι προσθετικές.*

Αντίθετα, οι παρακάτω ιδιότητες, όπως εύκολα πάλι βλέπει κανείς, <u>δεν</u> είναι προσθετικές σε διαστήματα.

1. *Το μήκος ενός διαστήματος είναι μικρότερο της μονάδας.*
2. *Το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f σε ένα διάστημα είναι μικρότερο του δοσμένου πραγματικού αριθμού M.*
3. *Ένα διάστημα περιέχει ακριβώς ν σημεία ενός συνόλου S.*

<u>Ορισμός 4.1.2</u>: *Θα λέμε ότι <u>μία ιδιότητα P αληθεύει σε ένα σημείο x ενός διαστήματος</u> Δ=[a,b], αν υπάρχει ένα υποδιάστημα $Δ_0$ (ανοικτό ή κλειστό κ.λπ.) του Δ, που έχει το x εσωτερικό σημείο και η P αληθεύει στο $Δ_0$. Όμως, αν x=a ή x=b, τα οποία δεν μπορούν να είναι εσωτερικά σημεία υποδιαστήματος, τότε ως $Δ_0$ θεωρούμε ένα υποδιάστημα που αρχίζει ή τελειώνει στο άκρο αυτό αντίστοιχα, και το περιέχει. Αν τώρα η P αληθεύει σε <u>κάθε</u> σημείο του Δ, τότε θα λέμε ότι η P είναι μία <u>τοπική στο Δ ιδιότητα</u>.*

Η επόμενη τώρα Πρόταση, την οποία εδώ θα ονομάσουμε *Βασικό Λήμμα 1*, είναι εκείνη που μας επιτρέπει να περνάμε από την αλήθεια σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος μιας <u>τοπικής ιδιότητας</u>, στην αλήθεια της ίδιας ιδιότητας σε <u>όλο</u> το διάστημα, αρκεί και μόνο η ιδιότητα αυτή να είναι <u>προσθετική σε διαστήματα</u>.

<u>Βασικό Λήμμα 1</u>: *Αν μια τοπική στο Δ=[a,b] ιδιότητα P είναι και προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα, τότε η P αληθεύει σε όλο το Δ.*

<u>Απόδειξη</u>:

Από την υπόθεση, η P είναι τοπική στο Δ, συνεπώς αληθεύει στο a, οπότε αληθεύει και σε κάποια διάστημα της μορφής [a,c). Έστω u=supc, το οποίο προφανώς υπάρχει και είναι μικρότερο ή ίσο του b.

Αν $u<b$, τότε, αφού η P είναι τοπική, υπάρχει υποδιάστημα (d,c_0) του Δ, που περιέχει το u σαν εσωτερικό σημείο και η P αληθεύει σ' αυτό. Λόγω προσθετικότητας της P, η P αληθεύει και στην ένωση των $[a,u)$ και (d,c_0), δηλαδή αληθεύει στο $[a,c_0)$, άτοπο, αφού τότε $u=\sup c<c_0$ και το c_0 είναι κάποιο από τα c. Άρα $u=b$ και η P αληθεύει στο $\Delta=[a,b]$ ή στο $[a,b)$. Στην τελευταία όμως περίπτωση, αφού το b είναι σημείο του Δ και P τοπική, υπάρχει $(d,b]$ όπου η P αληθεύει. Αφού $b=\sup c$, υπάρχει c_1, $d<c_1<b$, ώστε η P να αληθεύει στο $[a,c_1)$. Συνδυάζοντας τα διαστήματα $[a,c_1)$ και $(d,b]$ (αφού P προσθετική), έχουμε ότι η P αληθεύει στο $\Delta=[a,b]$. □

Μια άμεση συνέπεια του Βασικού αυτού Λήμματος είναι το επόμενο πόρισμα:

<u>Πόρισμα 4.1.3</u>: *Αν η P είναι μία προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα και δεν αληθεύει σ' ένα κλειστό διάστημα Δ, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ του Δ, τέτοιο ώστε η P <u>δεν</u> αληθεύει σε κανένα υποδιάστημα του Δ που περιέχει το ξ.*

Μερικές εφαρμογές τώρα θα μας δείξουν αυτό που στο άρθρο του ισχυρίζεται ο συγγραφέας, δηλαδή ότι με τα παραπάνω μπορεί κανείς να ενοποιήσει και συγχρόνως να απλοποιήσει τις αποδείξεις ενός μεγάλου αριθμού θεωρημάτων που συνδέονται με κλειστά διαστήματα.

Εδώ θα δούμε κάποια θεωρήματα, που αναφέρονται πρώτον, σε κάποιες από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων (για τις υπόλοιπες θα μιλήσουμε στο Κεφάλαιο 5) και δεύτερον, σε σύνολα σημείων, για να διαπιστώσουμε ότι πραγματικά το Βασικό μας Λήμμα είναι ισοδύναμο με τα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

(1) Είδαμε παραπάνω ότι η ιδιότητα P:

«*Η f είναι μία φραγμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα*»,

είναι προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα.

Έστω τώρα ότι η f είναι μία συνεχής στο κλειστό διάστημα Δ συνάρτηση. Αν x_0 είναι ένα τυχαίο σημείο του Δ, τότε για κάθε $\varepsilon>0$, π.χ. ε=1, υπάρχει δ>0, ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \Delta$ να ισχύει: $|f(x) - f(x_0)| < 1$, ή $f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1$, δηλαδή η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0. Συνεπώς, η P είναι και τοπική ιδιότητα στο Δ, οπότε το Βασικό Λήμμα 1 συνεπάγεται το ακόλουθο γνωστό θεώρημα:

<u>Θεώρημα 4.1.4</u>: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

<u>Παρατήρηση</u>: Σημειώνουμε ότι η τοπικότητα της ιδιότητας P στο Δ μπορεί να προκύψει και από συνθήκες ασθενέστερες της συνέχειας της f στο Δ (εξ' άλλου δεν υποθέσαμε παραπάνω ότι το ε μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό, αντίθετα πήραμε ε=1), άρα το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και για κλάσεις συναρτήσεων ορισμένων στο κλειστό διάστημα Δ, ευρύτερες της κλάσης των συνεχών στο Δ συναρτήσεων.

(2) Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι μία συνεχής στο κλειστό διάστημα Δ συνάρτηση έχει φραγμένο σύνολο τιμών. Συνεπώς, υπάρχει το M=supf(x) και το μ=inff(x), στο Δ. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν σημεία ξ και η στο Δ, ώστε M=f(ξ) και μ=f(η).

<u>Απόδειξη</u>:

Θεωρούμε την ιδιότητα P:

«*Οι τιμές f(x) μιας συνάρτησης είναι μικρότερες από ένα αριθμό μικρότερο του δοσμένου αριθμού M*»,

η οποία είναι προφανώς προσθετική σε διαστήματα. Τώρα, για μία f συνεχή συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα Δ, αν υποθέσουμε ότι για κάθε x στο Δ, ισχύει ότι f(x)<M=supf(x) στο Δ, τότε η παραπάνω ιδιότητα P είναι και τοπική στο Δ. Πραγματικά, για κάθε x_0 στο Δ, η συνέχεια της f συνεπάγεται ότι σε μία περιοχή του x_0, ισχύει ότι $f(x)<M_0<M$, όπου π.χ. $2M_0=M+f(x_0)$ ή $M_0=\frac{1}{2}(M+f(x_0))$. Άρα, από το Βασικό μας Λήμμα, η ιδιότητα P ισχύει σε όλο το διάστημα Δ, άτοπο, διότι τότε δεν θα ήταν M=supf(x). Με κατάλληλες τροποποιήσεις της

παραπάνω απόδειξης, έχουμε και την απόδειξη του ότι υπάρχει η στο Δ, ώστε μ=f(η), ή διαφορετικά, εφαρμόζουμε το προηγούμενο συμπέρασμα στην συνάρτηση –f. □

Δείξαμε έτσι και πάλι το γνωστό μας (βλέπε Θ. 3.2.6) Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής:

Θεώρημα 4.1.5: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε υπάρχουν σημεία ξ και η στο Δ, στα οποία η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Δ, αντίστοιχα.*

(3) Τις αποδείξεις δύο ακόμη γνωστών θεωρημάτων, του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (βλ. Θ. 3.2.4) και του Θεωρήματος 3.2.9 τα οποία ο συγγραφέας παρουσιάζει στην συνέχεια του άρθρου αυτού, θα δούμε, μαζί με άλλα παραδείγματα εφαρμογών των Βασικών μας Λημμάτων, στο επόμενο Κεφάλαιο 5.

(4) Κλείνουμε, όπως είπαμε παραπάνω, την παράγραφο αυτή με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.6 (Bolzano – Weierstrass): *Κάθε μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.*

Απόδειξη:

Αφού το σύνολο S είναι φραγμένο, υπάρχει διάστημα Δ=[a,b], που το περιέχει.

Θεωρούμε τώρα την ιδιότητα P:

«ένα διάστημα περιέχει πεπερασμένου πλήθους σημεία του S»,

η οποία, όπως έχουμε δει στην αρχή αυτής της παραγράφου, είναι μία προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα. Όμως, η P δεν ισχύει στο παραπάνω διάστημα Δ, αφού το S είναι μη πεπερασμένο σύνολο. Άρα, από το παραπάνω Πόρισμα 4.1.3, το Δ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ, ώστε η P δεν αληθεύει σε κανένα υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το ξ. Δηλαδή, κάθε υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το ξ, περιέχει και άπειρα σημεία του S. Συνεπώς, το ξ είναι οριακό σημείο του S. □

4.2. ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Συνεχίζουμε με την παρουσίαση της δεύτερης χρονολογικά εργασίας (βλέπε [18]), που έχει συγγραφέα τον Gerald Jungck και τίτλο «*Interval Induction*» (Θα λέγαμε κάτι σαν *Επαγωγή σε* ή *με διαστήματα*). Ο στόχος και εδώ του συγγραφέα είναι ο ίδιος με εκείνο του Ford (βλέπε § 4.1). Η μορφή όμως του κεντρικού θεωρήματος, που εισάγει και αποδεικνύει, θυμίζει την μαθηματική επαγωγή, απ' όπου και ο τίτλος του άρθρου. Το θεώρημα αυτό, που εδώ θα το πούμε *Βασικό λήμμα 2*, είναι το ακόλουθο:

Βασικό Λήμμα 2: ***Έστω P(A) μια ιδιότητα, που αφορά μη κενά υποσύνολα A ενός διαστήματος Δ=[a,b]. Αν***
(α) Η P({a}) είναι αληθής και
(β) Αν η υπόθεση

«$c\in Δ$ και για κάθε ε>0 υπάρχει x στο (c-ε,c], ώστε η P([a,x]) να είναι αληθής»

συνεπάγεται ότι

«υπάρχει δ>0, ώστε η $P([a,c+δ]\cap[a,b])$ να είναι αληθής»,

τότε, η P(Δ) είναι αληθής.

Απόδειξη:

Έστω $S=\{x\in[a,b]$: η $P([a,x])$ να είναι αληθής$\}$.

Από το (α) έχουμε ότι η P([a,a]) είναι αληθής, άρα το S δεν είναι κενό σύνολο. Επιπλέον το S είναι πάνω φραγμένο από το b, άρα υπάρχει το supS, έστω $c\in[a,b]$. Για κάθε ε>0, έχουμε τότε ότι $S\cap(c-ε,c]\neq\varnothing$ και επομένως υπάρχει x στο (c-ε,c], τέτοιο ώστε η P([a,x]) να είναι αληθής. Συνεπώς, από το (β), υπάρχει δ>0, ώστε η $P([a,c+δ]\cap[a,b])$ να είναι αληθής.

Αν c<b και d=min{c+δ,b}, τότε η P([a,d]) είναι αληθής, άτοπο, αφού d>c και c=supS. Άρα c=b και η P(Δ) είναι αληθής. □

Ας δούμε τώρα τις αποδείξεις των θεωρημάτων 4.1.5, 4.1.6, της παραγράφου 4.1 και του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (βλ. Θ. 3.2.4) με χρήση του Βασικού Λήμματος 2.

Θεώρημα 4.2.1 (Θεώρημα 4.1.5): *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε υπάρχουν σημεία ξ και η στο Δ, στα οποία η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Δ, αντίστοιχα.*

Απόδειξη:

Θα κάνουμε την απόδειξη για την μέγιστη τιμή της f στο Δ. Η απόδειξη για την ελάχιστη τιμή είναι παρόμοια, ή, πιο απλά, έπεται αμέσως αν εφαρμόσουμε το συμπέρασμά μας στην συνάρτηση –f.

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο Δ και έστω P(A) η ακόλουθη ιδιότητα, για μη κενά υποσύνολα A του Δ:

«*Υπάρχει ένα σημείο y στο Δ, ώστε f(y)>f(x) για κάθε x στο A*».

Αφού η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο Δ, έπεται ότι η P({a}) είναι αληθής, συνεπώς έχουμε το (α) του παραπάνω Λήμματος.

Για το (β) τώρα έχουμε: Έστω c ένα σημείο του Δ για το οποίο ισχύει η υπόθεση του (β).

Αφού η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο Δ, υπάρχει y στο Δ, ώστε f(y)>f(c), οπότε η συνέχεια της f στο c, μας εξασφαλίζει ένα δ>0, ώστε f(y)>f(x) για κάθε x στο [c-δ,c+δ] και x στο Δ. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι υπάρχει ένα σημείο x_1 στο (c-δ,c] και ένα y_1 στο Δ, ώστε $f(y_1)>f(x)$ για κάθε x στο $[a,x_1]$. Συνεπώς, αν $f(z)=\max\{f(y), f(y_1)\}$, τότε f(z)>f(x) για κάθε x στο Δ και στο [a,c+δ], δηλαδή η $P([a,c+\delta]\cap\Delta)$ είναι αληθής.

Από το Βασικό Λήμμα 2 έχουμε τότε ότι η P(Δ) είναι αληθής, που συνεπάγεται ότι για κάποιο y στο Δ ισχύει ότι f(y)>f(y), άτοπο. Άρα, υποχρεωτικά υπάρχει ξ στο Δ, στο οποίο η f παίρνει μέγιστη τιμή. □

Σημείωση: Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι με την παραπάνω απόδειξη παρακάμπτουμε το Θεώρημα 4.1.4, το οποίο μας εξασφαλίζει το ότι η συνάρτησή μας είναι φραγμένη στο Δ και συνεπώς έχει μέγιστο κάτω και ελάχιστο πάνω φράγμα σ’ αυτό. Αντίθετα, με την νέα αυτή απόδειξη, τα παραπάνω έπονται ως άμεσο πόρισμά της.

Θα δείξουμε τώρα το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Θ. 3.2.4), αλλά με την ακόλουθη μορφή, η οποία συμπεριλαμβάνει τόσο το προηγούμενο

Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής, όσο και το Θεώρημα της συμπάγειας (βλέπε Θ. 3.2.7), προαπαιτεί όμως το Θεώρημα 4.1.4.

Θεώρημα 4.2.2: *Έστω $M=\sup f(x)$ και $\mu=\inf f(x)$ στο κλειστό διάστημα $\Delta=[a,b]$, μιας συνεχούς στο Δ συνάρτησης f. Αν γ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $[\mu,M]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο Δ, ώστε $f(\xi)=\gamma$.*

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ξ στο Δ, ώστε $f(\xi)=\gamma$. Έστω τότε $f(a)<\gamma$ (η περίπτωση $f(a)>\gamma$ εξετάζεται παρόμοια) και έστω $P(A)$ η ακόλουθη ιδιότητα, για μη κενά υποσύνολα A του Δ:

«*Υπάρχει ένα $\varepsilon>0$, ώστε $f(x)<\gamma-\varepsilon$ για κάθε x στο A*».

Αφού $f(a)<\gamma$, έπεται άμεσα ότι η $P(\{a\})$ είναι αληθής, συνεπώς έχουμε το (α) του παραπάνω Λήμματος.

Για το (β) τώρα έχουμε: Έστω c ένα σημείο του Δ για το οποίο ισχύει η υπόθεση του (β), δηλαδή για κάθε $\delta>0$, υπάρχει ένα x στο $(c-\delta,c]$, ώστε η $P([a,x])$ να είναι αληθής. Αν ίσχυε ότι $f(c)>\gamma$, η συνέχεια της f στο c θα έδινε ένα $\delta>0$, ώστε $f(x)>\gamma$ για κάθε x στο $[c-\delta,c+\delta]\cap\Delta$, πράγμα που αντιβαίνει την παραπάνω υπόθεσή μας. Συνεπώς, $f(c)<\gamma$, αφού η f δεν παίρνει την τιμή γ στο Δ, οπότε η συνέχεια της f και πάλι μας εξασφαλίζει ένα $\delta>0$, ώστε $f(x)<\gamma-e$ για κάθε x στο $[c-\delta,c+\delta]\cap\Delta$, όπου $2e=\gamma-f(c)$ ή $e=\frac{1}{2}(\gamma-f(c))$.

Από την υπόθεσή μας τώρα, έχουμε ότι υπάρχει ένα σημείο x' στο διάστημα $(c-\delta,c]$ και ένα $\varepsilon>0$, ώστε $f(x)<\gamma-\varepsilon$ για κάθε x στο $[a,x']$. Άρα, αν $\varepsilon'=\max\{\varepsilon,e\}$, τότε $f(x)<\gamma-\varepsilon'$ για κάθε x στο $[a,c+\delta]\cap\Delta$, δηλαδή η $P([a,c+\delta]\cap\Delta)$ είναι αληθής.

Από το Βασικό Λήμμα 2 έχουμε τότε ότι η $P(\Delta)$ είναι αληθής, το οποίο συνεπάγεται ότι για κάποιο $\varepsilon>0$ ισχύει ότι $f(x)<\gamma-\varepsilon<\gamma\leq M$, για κάθε x στο Δ. Αυτό όμως αντιφάσκει με το ότι $M=\sup f(x)$ στο Δ. Συνεπώς, υποχρεωτικά υπάρχει ξ στο Δ, στο οποίο η f παίρνει την τιμή γ. □

Κλείνουμε και την παράγραφο αυτή, με το επόμενο θεώρημα, που μας δίνει την ισοδυναμία του Βασικού Λήμματος 2 με τα διάφορα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 4.2.3 (Θεώρημα 4.1.6): *Κάθε φραγμένο και άπειρο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο (Bolzano – Weierstrass).*

Απόδειξη:

Έστω ότι το E δεν έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$. Αφού το E είναι φραγμένο, υπάρχει διάστημα Δ=[a,b], που το περιέχει. Για υποσύνολα A του Δ, θεωρούμε την ιδιότητα P(A):

«*Το σύνολο $E \cap A$ είναι πεπερασμένο*».

Τότε:

(α) Η P({a}) είναι προφανώς αληθής (αφού $E \cap \{a\} = \{a\}$ ή $\varnothing$).

(β) Έστω c τυχαίο σημείο του [a,b]. Αφού το E δεν έχει σημείο συσσώρευσης, υπάρχει ε>0 ώστε το σύνολο $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap E$ να είναι πεπερασμένο. Τώρα, αν το c ικανοποιεί την υπόθεση (β) του Βασικού Λήμματος 2, θα υπάρχει $x \in (c-\varepsilon, c]$, ώστε η P([a,x]) να είναι αληθής, δηλαδή το $E \cap [a,x]$ είναι επίσης πεπερασμένο. Τότε, έχουμε ότι και το σύνολο $[a, c+\varepsilon] \cap E$ είναι πεπερασμένο, πράγμα που σημαίνει ότι η $P([a,c+\varepsilon] \cap [a, b])$ είναι αληθής.

Ικανοποιούνται έτσι τα (α) και (β) του Βασικού Λήμματος 2, συνεπώς η P(Δ) είναι αληθής, ή ισοδύναμα το σύνολο $E \cap \Delta = E$ είναι πεπερασμένο. Άτοπο, αφού το E είναι απειροσύνολο.

Άρα το E έχει σημείο συσσώρευσης. □

4.3. ΤΟ ΤΡΙΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Η τρίτη χρονολογικά εργασία (βλέπε [29]), έχει συγγραφείς τους R.M.F. Moss και G.T. Roberts και τίτλο «*A creeping lemma*». Στο άρθρο αυτό οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα *Βασικό Λήμμα* ανάλογο των προηγουμένων, έχοντας τους ίδιους στόχους, που ήδη έχουμε περιγράψει παραπάνω. Η εμφάνιση μιας μεταβατικής σχέσης σ σε ένα διάστημα Δ, δηλαδή, μιας σχέσης σ στο Δ, για την οποία έχουμε ότι: αν $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ και ασβ και βσγ τότε ασγ, φαίνεται να είναι ο λόγος για τον τίτλο «*Ένα έρπον λήμμα*» της εργασίας. Το Βασικό αυτό Λήμμα είναι το εξής:

<u>Βασικό Λήμμα 3</u>: *Έστω Δ=[a,b] και σ μία μεταβατική σχέση στο Δ. Αν κάθε x στο Δ έχει μία περιοχή (διάστημα) N_x, ώστε $\forall u \in [a,x] \cap N_x$ και $\forall v \in N_x \cap [x,b]$ να ισχύει ότι uσv, τότε aσb.*

<u>Σημείωση</u>: Δεχόμαστε ότι $x \in \overset{o}{N}_x$, εκτός αν x=a ή x=b οπότε το x είναι άκρο της N_x. Επίσης, από τις υποθέσεις του Λήμματος, έπεται αμέσως ότι η σχέση σ είναι και αυτοπαθής, δηλαδή xσx για κάθε x στο Δ.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $E=\{x \in \Delta$: aσx$\}$. Από την προηγούμενη σημείωση έχουμε ότι το E είναι ένα μη-κενό υποσύνολο του Δ και φυσικά πάνω φραγμένο από το b. Συνεπώς, υπάρχει το supE=κ και $\kappa \in \Delta$, οπότε έχει μία περιοχή N_κ, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος.

Έστω δ>0, ώστε $[\kappa-\delta,\kappa+\delta] \subseteq N_\kappa$. Αφού κ=supE, υπάρχει $u \in E$ (δηλαδή ισχύει ότι aσu), ώστε κ-δ<u<κ, οπότε και $u \in [a,\kappa] \cap N_k$. Αν $b \notin N_k$, τότε, για v=κ+δ, έχουμε $v \in N_k \cap [\kappa, b]$, άρα uσv και επειδή και aσu, η μεταβατικότητα της σ συνεπάγεται ότι και aσv ή $v \in E$, άτοπο, αφού v=κ+δ>κ=supE. Άρα $b \in N_\kappa$. Τότε $b \in N_\kappa \cap [\kappa,b]$, οπότε uσb. Λόγω της aσu και της μεταβατικότητας της σ, έπεται τότε ότι aσb. □

Θα δούμε τώρα τις αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων, μερικά εκ των οποίων είναι τα ίδια με κάποια από αυτά που δείξαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, αλλά τώρα θα κάνουμε χρήση του παραπάνω Λήμματος.

<u>Θεώρημα 4.3.1</u>: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

<u>Απόδειξη</u>:

Στο διάστημα Δ θεωρούμε την σχέση σ που ορίζεται ως εξής:

«*Για u,v στο Δ, $u \le v$, ισχύει ότι uσv αν και μόνο αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα [u, v]*».

Προφανώς η σ είναι μεταβατική και, λόγω της συνέχειας της f, έχουμε ότι αν x_0 είναι ένα τυχαίο σημείο του Δ, τότε για κάθε ε>0, π.χ. ε=1, υπάρχει δ>0, ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \Delta$ να ισχύει: $|f(x)-f(x_0)|<1$, ή $f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1$, δηλαδή, στην παραπάνω περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Συνεπώς, για κάθε $u \in (x_0-\delta, x_0]$ και $v \in [x_0, x_0+\delta)$ έχουμε uσv. Άρα από το Βασικό Λήμμα 3 έχουμε ότι aσb, δηλαδή η f είναι φραγμένη στο Δ. □

Στην συνέχεια, με την βοήθεια πάντοτε του παραπάνω Λήμματος, θα δούμε μία απόδειξη του Θεωρήματος του Bolzano (άρα και του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών – βλέπε Θεώρημα 3.2.4) καθώς και ενός Θεωρήματος (βλέπε Θεώρημα 4.3.3 παρακάτω), το οποίο έπεται βέβαια άμεσα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλέπε Θεώρημα 3.3.7), αλλά και αντίστροφα, μπορεί να πάρει κανείς από αυτό, αλλά όχι και τόσο άμεσα, το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Θεώρημα 4.3.2 (Bolzano): *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\Delta=[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, ώστε $f(x_0)=0$.*

Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ και θεωρούμε στο Δ την σχέση σ, που ορίζεται ως εξής:

«*Για u,v στο Δ ισχύει ότι uσv αν και μόνο αν $f(u)f(v)>0$*».

Προφανώς η σ είναι μεταβατική σχέση στο Δ. Επίσης, αφού η f δεν μηδενίζεται στο Δ, έπεται ότι για κάθε x στο Δ υπάρχει, λόγω συνέχειας, μία περιοχή του x στην οποία η f διατηρεί πρόσημο, δηλαδή ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματός μας. Συνεπώς, aσb, που σημαίνει ότι $f(a)f(b)>0$, άτοπο. □

Θεώρημα 4.3.3: *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta=[a,b]$ και $m<f'(x)<M$, $\forall x \in \Delta$, τότε $m(b-a)<f(b)-f(a)<M(b-a)$.*

Απόδειξη:

Θεωρούμε στο Δ την σχέση σ, που ορίζεται ως εξής:

$$«u\sigma v \Leftrightarrow u=v \text{ ή } m(v\text{-}u)<f(v)\text{-}f(u)<M(v\text{-}u)».$$

Όπως προκύπτει άμεσα η σ είναι μεταβατική σχέση στο Δ.

Έστω τώρα ένα x στο Δ. Για $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{f'(x)-m, M-f'(x)\}$, έχουμε, από την $m< f'(x)<M$, ότι $\varepsilon>0$ και ότι $m< f'(x)-\varepsilon< f'(x)+\varepsilon<M$. Για το ε αυτό, έχουμε επίσης (βλέπε Πρόταση 3.3.11) ότι υπάρχει περιοχή N_x του x, ώστε $\forall u\in[a,x]\cap N_x$ και $\forall v\in N_x\cap[x,b]$ να ισχύει:

$$-\varepsilon(v-u)<f(v)-f(u)- f'(x)\,(v-u)<\varepsilon(v-u),$$

ή ισοδύναμα

$$(f'(x)-\varepsilon)(v-u)<f(v)-f(u)<(f'(x)+\varepsilon)(v-u),$$

από την οποία, λόγω της εκλογής του ε και του ότι $v-u>0$, προκύπτει ότι $m(v-u)<f(v)-f(u)<M(v-u)$, δηλαδή uσv.

Συνεπώς, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Βασικού Λήμματος 3, άρα aσb ή $m(b-a)<f(b)-f(a)<M(b-a)$. □

Κλείνουμε και αυτή την παράγραφο με το επόμενο Θεώρημα:

<u>Θεώρημα 4.3.4 (Bolzano – Weierstrass)</u>: *Κάθε μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.*

<u>Απόδειξη</u>:

Αφού το σύνολο S είναι φραγμένο, υπάρχει διάστημα $\Delta=[a,b]$, που το περιέχει.

Θεωρούμε τώρα την σχέση σ, η οποία ορίζεται στο Δ ως εξής:

«Για u,v στο Δ, $u\le v$, ισχύει ότι uσv αν και μόνο αν
το σύνολο $[u,v]\cap S$ είναι πεπερασμένο».

Προφανώς η σ είναι μεταβατική στο Δ και επίσης δεν αληθεύει ότι aσb, αφού $\Delta\cap S=S$.

Συνεπώς, από το Βασικό μας Λήμμα, έπεται ότι υπάρχει ξ στο Δ, για το οποίο ισχύει ότι κάθε περιοχή του περιέχει άπειρα σημεία του S, δηλαδή το ξ είναι οριακό σημείο του S. □

4.4. ΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Στο άρθρο «*A unified proof of several basic Theorems of Real Analysis*» (βλέπε [41]) ο συγγραφέας του, Patrick Shanahan, παρουσιάζει ένα νέο *Βασικό Λήμμα*. Η λογική και η χρήση του είναι ανάλογη των προηγούμενων λημμάτων, όπως φαίνεται αμέσως και από τον τίτλο του άρθρου. Για να το παρουσιάσουμε θα χρειαστούμε πρώτα δύο ορισμούς.

Ορισμός 4.4.1: *Έστω **C** μία οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του $\Delta=[a,b]$. Λέμε την **C** τοπική οικογένεια, αν $\forall x\in \Delta$, υπάρχει υποδιάστημα $[c,d]$ του Δ, ώστε $[c,d]\in \mathbf{C}$ και $x\in [c,d]$. Ιδιαίτερα, αν $x\in (a,b)$, τότε $x\in (c,d)$.*

Ορισμός 4.4.2: *Έστω **C** οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του $\Delta=[a,b]$. Λέμε την **C** προσθετική οικογένεια, αν για κάθε $C_1,C_2\in \mathbf{C}$ με $C_1\cap C_2\neq \varnothing$, έπεται ότι και $C_1\cup C_2\in \mathbf{C}$.*

Βασικό Λήμμα 4: ***Αν η C είναι τοπική και προσθετική οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του $\Delta=[a,b]$, τότε $\Delta\in$ C.***

Απόδειξη:

Έστω $A=\{x\in \Delta: [a,x] \in \mathbf{C}\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $b\in A$.

Αφού η **C** είναι τοπική και $a\in \Delta$, υπάρχει υποδιάστημα του Δ $[a,c]\in \mathbf{C}$, άρα $A\neq \varnothing$. Επίσης, το A είναι υποσύνολο του Δ, άρα είναι φραγμένο. Συνεπώς, υπάρχει το $\sup A=d\in \Delta$.

Έστω $d<b$. Επειδή η **C** είναι τοπική οικογένεια και $d\in \Delta$, υπάρχει $[d_1,d_2]\in \mathbf{C}$ και $d\in (d_1,d_2)$. Αφού $d=\sup A$, υπάρχει $d_0\in A$, με $d_1<d_0<d$, οπότε $[a,d_0]\in \mathbf{C}$ και λόγω προσθετικότητας της οικογένειας **C** έχουμε $[a,d_0]\cup [d_1,d_2]=[a,d_2]\in \mathbf{C}$, δηλαδή $d_2\in A$ και $d_2>d=\sup A$, άτοπο. Άρα $d=b$. Μία επανάληψη τώρα του προηγούμενου συλλογισμού δίνει και το ότι $b\in A$, όπως θέλαμε. □

Στην συνέχεια, θα δούμε τις αποδείξεις μερικών θεωρημάτων, τα οποία δείξαμε και στις προηγούμενες παραγράφους, αλλά τώρα θα κάνουμε χρήση του παραπάνω λήμματος.

Θεώρημα 4.4.3: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη:

Έστω **C** η οικογένεια *όλων των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ στα οποία η f είναι φραγμένη*.

Προφανώς η **C** είναι προσθετική οικογένεια, αφού αν C_1, C_2 είναι στοιχεία της **C** με μη κενή τομή, τότε η ένωσή τους είναι κλειστό διάστημα και η f είναι φραγμένη σ' αυτό, άρα η $C_1 \cup C_2$ ανήκει στη **C**.

Επίσης η **C** είναι τοπική οικογένεια, διότι αν x_0 είναι ένα τυχαίο σημείο του Δ, τότε, λόγω της συνέχειας της f, για κάθε ε>0, π.χ. ε=1, υπάρχει δ>0, ώστε για κάθε $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap \Delta$ να ισχύει: $|f(x) - f(x_0)| < 1$, ή $f(x_0)-1 < f(x) < f(x_0)+1$, δηλαδή υπάρχει κλειστό υποδιάστημα, που περιέχει το x_0 και στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Άρα από το Βασικό μας Λήμμα το Δ ανήκει στη **C**, δηλαδή η f είναι φραγμένη στο Δ. □

Θεώρημα 4.4.4 (Bolzano): *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b] και f(a)f(b)<0, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, ώστε $f(x_0)=0$.*

Απόδειξη:

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στο Δ. Θεωρούμε τότε την οικογένεια **C** *όλων των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, σε κάθε ένα των οποίων η f διατηρεί σταθερό πρόσημο*. Τότε:

Η C είναι τοπική οικογένεια διότι: Αν $x_0 \in \Delta$ μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε και ότι $f(x_0)>0$. Από την συνέχεια τότε της f έχουμε εύκολα ότι υπάρχει [c,d], ώστε $x \in [c,d]$ και $f(x)>0$, $\forall x \in [c,d]$. Δηλαδή η f διατηρεί πρόσημό στο [c,d], άρα $[c,d] \in$ **C**.

Η **C** είναι προσθετική οικογένεια διότι: Αν C_1 και C_2 είναι δύο κλειστά υποδιαστήματα του Δ, στα οποία η f διατηρεί πρόσημο και $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, τότε, αν $x \in C_1 \cap C_2$, το πρόσημο της f στο κλειστό υποδιάστημα $C_1 \cup C_2$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του f(x). Άρα $C_1 \cup C_2 \in$ **C**.

Από το Βασικό Λήμμα 4 έχουμε τότε ότι $\Delta \in$ **C**, δηλαδή η f διατηρεί πρόσημο στο Δ, άτοπο, αφού f(a)f(b)<0. Άρα, η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, b). □

Κλείνουμε και την παράγραφο αυτή αποδεικνύοντας και πάλι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass καθώς και ένα Πόρισμα ανάλογο του Πορίσματος 4.1.3, παρόλο που τα δύο αυτά αποτελέσματα δεν αναφέρονται στην εργασία που παρουσιάζουμε εδώ. Αντί αυτών, στην τελευταία παράγραφο της εργασίας του, ο συγγραφέας, γενικεύοντας τα παραπάνω, αποδεικνύει προτάσεις της μορφής:

«*Αν X είναι ένας μη-κενός συνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι μέλος κάθε τοπικής και προσθετικής οικογένειας υποσυνόλων του*» κ.λπ.

Το επόμενο τώρα πόρισμα προκύπτει άμεσα από το Βασικό μας Λήμμα.

Πόρισμα 4.4.5: *Αν **C** είναι μία προσθετική οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του Δ=[a,b], που δεν περιέχει το Δ, τότε η **C** δεν είναι τοπική οικογένεια. Δηλαδή, υπάρχει τότε σημείο ξ του Δ, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα υποδιάστημα της οικογένειας.*

Έχουμε τότε:

Θεώρημα 4.4.6 (Bolzano – Weierstrass): *Κάθε μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.*

Απόδειξη:

Αφού το σύνολο S είναι φραγμένο, υπάρχει διάστημα Δ=[a,b], που το περιέχει.

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια *όλων εκείνων των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, καθένα των οποίων περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων του S*, η οποία προφανώς είναι μία προσθετική οικογένεια που δεν περιέχει το Δ. Συνεπώς, από το παραπάνω Πόρισμα 4.4.5, το Δ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα υποδιάστημα της οικογένειας αυτής. Δηλαδή, κάθε υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το ξ, περιέχει και άπειρα σημεία του S. Άρα το ξ είναι οριακό σημείο του S. □

4.5. ΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Η τελευταία χρονολογικά από τις πρώτες πέντε εργασίες, που παρουσιάζουμε εδώ, έχει τίτλο «*A unified treatment of various theorems in elementary Analysis*» (βλέπε [14]). Ο συγγραφέας της, Michael W. Botsko, παρουσιάζει σ' αυτήν την δική του εκδοχή για την ενοποίηση και την απλούστευση των αποδείξεων μιας σειράς θεωρημάτων της Ανάλυσης. Θα χρειαστούμε ένα ακόμη ορισμό, ο οποίος μαζί με το *Βασικό Λήμμα* προέρχονται από την εργασία: «*On full covering properties*, Real Analysis Exchange, 6 (1980-81), σελ. 77-93», του B.S. Thomson. Γι' αυτό και ο συγγραφέας, στο επόμενο άρθρο του (βλέπε [15]), ονομάζει το Λήμμα αυτό «*Λήμμα του Thomson*». Η αλήθεια πάντως είναι ότι το Λήμμα αυτό, με διάφορες ισοδύναμες μορφές, είχε χρησιμοποιηθεί ήδη στην βιβλιογραφία από τα τέλη του $19^{ου}$-αιώνα, όπως αναφέρει ότι διαπίστωσε και ο ίδιος ο συγγραφέας εκ των υστέρων.

<u>Ορισμός 4.5.1</u>: *Έστω Δ=[a,b]. Λέμε <u>πλήρη κάλυψη του Δ</u> κάθε συλλογή **C** από κλειστά υποδιαστήματά του, με την ιδιότητα: Σε κάθε x του Δ αντιστοιχεί ένας θετικός αριθμός δ(x), ώστε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x), να ανήκει στη **C**.*

<u>Παρατηρήσεις</u>: Στο [15] ο συγγραφέας επεκτείνει τον ορισμό αυτό και σε υποσύνολα του Δ. Δηλαδή, αν X είναι ένα υποσύνολο του Δ, τότε η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του X, αν ο θετικός αριθμός δ(x), αντιστοιχεί τώρα σε κάθε x <u>του X</u> και κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x), να ανήκει στη **C**. Στην συνέχεια παρατηρεί ότι:

(α) Αν X και Y είναι υποσύνολα του Δ, με πλήρεις καλύψεις **A** και **B**, αντίστοιχα, τότε η ένωσή τους $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, είναι πλήρης κάλυψη της $X\cup Y$.

(β) Αν **A** είναι μία κάλυψη του X από ανοικτά σύνολα και **C** είναι η συλλογή όλων των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, καθένα των οποίων περιέχεται σε κάποιο ανοικτό σύνολο της **A**, τότε η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του X. (<u>Υπόδ</u>. Κάθε x στο X ανήκει σε κάποιο σύνολο A της **A**. Αφού το A είναι ανοικτό, θα υπάρχει δ(x)>0, ώστε $(x-\delta(x),x+\delta(x))\subseteq A$. Έστω τώρα ένα κλειστό υποδιάστημα Δ_1 του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο από δ(x). Τότε $\Delta_1 \subset (x-\delta(x),x+\delta(x)) \subseteq A$, άρα το Δ_1 ανήκει στη **C** και επομένως η **C** είναι πλήρης κάλυψη του X.)

(γ) Κάθε πλήρης κάλυψη του X είναι και κάλυψη του X κατά Vitali, αλλά όχι και αντίστροφα. Για καλύψεις κατά Vitali έχουμε το γνωστό, αλλά με αρκετά δύσκολη απόδειξη, Λήμμα του Vitali, ενώ για τις πλήρεις καλύψεις έχουμε το επόμενο πολύ ευκολότερο Βασικό Λήμμα, το οποίο διατυπώνουμε εδώ για το ίδιο το διάστημα Δ=[a,b], αφού αυτό μόνο θα χρειαστούμε παρακάτω:

Βασικό Λήμμα 5: ***Αν C είναι μια πλήρης κάλυψη του Δ, τότε η C περιέχει μια διαμέριση του Δ, δηλαδή υπάρχουν $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, ώστε τα διαστήματα $I_\kappa=[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ της διαμέρισης να ανήκουν στη C, για κάθε κ=1,2,…,n.***

Απόδειξη:

Έστω ότι η **C** δεν περιέχει διαμέριση του Δ=[a,b].

Τότε, με συνεχόμενες διχοτομήσεις του Δ=[a,b], προκύπτει μια ακολουθία $\{I_n\}$, κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, ώστε $I_n \supseteq I_{n+1}$ για κάθε n, $|I_n| \to 0$ και η **C** δεν περιέχει διαμέριση κανενός I_n (εδώ $|I|$ σημαίνει το μήκος του I).

Από το αξίωμα του κιβωτισμού, έπεται ότι υπάρχει ένα σημείο x του Δ, που ανήκει στην τομή των I_n.

Αφού η **C** είναι πλήρης κάλυψη του Δ, υπάρχει δ(x)>0, ώστε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ με μήκος μικρότερο από δ(x), το οποίο περιέχει το x, να ανήκει στη **C**. Όμως, $|I_n| \to 0$, άρα υπάρχει φυσικός αριθμός N, ώστε $|I_N|<\delta(x)$, δηλαδή το I_N ανήκει στη **C** και η **C** περιέχει μια προφανή διαμέριση του I_N (αν π.χ. $I_N=[u,v]$, τότε $[u,v]=[u,x]\cup[x,v]$, όπου [u,x], [x,v] ανήκουν στη **C,** αφού περιέχουν το x και έχουν μήκος<δ(x)), άτοπο, αφού η **C** δεν περιέχει διαμέριση κανενός I_n. Συνεπώς, η **C** περιέχει διαμέριση του [a,b]. □

Ας δούμε τώρα τις αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων, τα οποία δείξαμε και στις προηγούμενες παραγράφους, αλλά με την χρήση του παραπάνω Λήμματος.

<u>Θεώρημα 4.5.2</u>: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b], τότε είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω

C={*I: I κλειστό υποδιάστημα του Δ και η f είναι φραγμένη στο I*}.

Θα δείξουμε ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ.

Έστω x∈Δ. Από την συνέχεια της f στο x και παίρνοντας π.χ. ε=1, έπεται (όπως έχουμε δει και άλλες φορές μέχρι τώρα) ότι υπάρχει δ(x)>0, ώστε η f να είναι φραγμένη στο (x-δ(x),x+δ(x)). Αν το x είναι άκρο του Δ, τότε τροποποιούμε το παραπάνω διάστημα κατάλληλα. Τώρα για κάθε υποδιάστημα I του Δ, με x∈I και $|I|$<δ(x) έχουμε I⊆(x-δ(x),x+δ(x)), άρα η f είναι φραγμένη στο I, δηλαδή το I ανήκει στη **C**. Συνεπώς, η **C** είναι πλήρης κάλυψη του Δ και από το Βασικό μας Λήμμα έπεται ότι η **C** περιέχει μια διαμέριση του Δ. Αφού η f είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα της διαμέρισης αυτής, έπεται ότι η f είναι φραγμένη και στο Δ. □

Στην συνέχεια ας ξαναδούμε το θεώρημα Bolzano (άρα και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής–βλέπε Θεώρημα 3.2.4).

<u>Θεώρημα 4.5.3</u>: *Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο Δ=[a,b] και f(a)f(b)<0, τότε υπάρχει x_0∈(a,b), ώστε f(x_0)=0.*

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω ότι η f δεν μηδενίζεται στο Δ και έστω

C={*I: I κλειστό υποδιάστημα του Δ, όπου η f διατηρεί πρόσημο*}.

Επειδή η f είναι συνεχής σε κάθε x του Δ και f(x)≠0, υπάρχει δ(x)>0, ώστε η f να διατηρεί το πρόσημό της στο (x-δ(x),x+δ(x)). Για οποιοδήποτε κλειστό υποδιάστημα I του Δ, που περιέχει το x, με μήκος μικρότερο του δ(x), έχουμε ότι I⊂(x-δ(x),x+δ(x)), άρα η f διατηρεί το πρόσημό της στο I, δηλαδή το I ανήκει στη **C**. Επομένως η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ (βλέπε και παρατήρηση (β) παραπάνω).

Τότε από το Λήμμα μας, η **C** περιέχει μια διαμέριση του Δ. Επειδή η f διατηρεί το πρόσημό της σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα της διαμέρισης, έπεται ότι η f διατηρεί πρόσημο σ' ολόκληρο το Δ, άτοπο, αφού $f(a)f(b)<0$. Άρα, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, ώστε $f(x_0)=0$. □

Κλείνουμε και την παράγραφο αυτή με μία ακόμη εφαρμογή του Βασικού μας Λήμματος. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δούμε και άλλες αποδείξεις θεωρημάτων με την βοήθεια τόσο του παραπάνω όσο και των προηγουμένων Βασικών Λημμάτων.

Θεώρημα 4.5.4 (Bolzano – Weierstrass): *Κάθε μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.*

Απόδειξη:

Αφού το S είναι φραγμένο, υπάρχει Δ=[a,b] που το περιέχει.
Ας υποθέσουμε ότι το S δεν έχει κανένα οριακό σημείο.

Θεωρούμε την συλλογή **C** *των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, που περιέχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων του S.*

Έστω x σημείο του Δ. Αφού το S δεν έχει οριακό σημείο, υπάρχει $\delta(x)>0$, ώστε το ανοικτό διάστημα $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ να περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων του S.

Τότε, οποιοδήποτε κλειστό υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος$<\delta(x)$, είναι υποσύνολο του διαστήματος $(x-\delta(x),x+\delta(x))$, οπότε περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων του S. Άρα η **C** είναι πλήρης κάλυψη του Δ και συνεπώς περιέχει μία διαμέριση του Δ. Όμως, κάθε υποδιάστημα αυτής της διαμέρισης περιέχει πεπερασμένο πλήθος σημείων του S και το S είναι υποσύνολο του Δ, άρα και το S είναι πεπερασμένο σύνολο, άτοπο. Συνεπώς, το S έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο. □

4.6. Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

Η έκτη εργασία (βλέπε [25]), με τίτλο «*The derivative á la Carathéodory*» (Η παράγωγος κατά τον Καραθεοδωρή), με την οποία είπαμε ότι θα κλείσουμε το Κεφάλαιο αυτό, διαφέρει μεν ως προς το περιεχόμενο από τις προηγούμενες πέντε, όμως έχει κοινό στόχο με αυτές.

Ο συγγραφέας της, Stephen Kuhn, σημειώνει ότι, όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.2, η παρατήρηση του Καραθεοδωρή δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας διαφορετικός από τον συνηθισμένο ορισμός της παραγώγου, ο οποίος όμως, όπως θα δούμε και παρακάτω, έχει σαν αποτέλεσμα αφενός την απλούστευση των αποδείξεων των διαφόρων θεωρημάτων των παραγώγων και αφετέρου παρακάμπτει, κατά κάποιο τρόπο, την χρήση των ορίων για την διδασκαλία των παραγώγων. Επίσης παρατηρεί ότι, παρά την απλότητα και την ευκολία στη χρήση της παρατήρησης Καραθεοδωρή, λίγα βιβλία Λογισμού την αναφέρουν διεθνώς. Στην Ελληνική βιβλιογραφία υπάρχουν π.χ. τα [31] (βλέπε Πρόταση 17.3, σελ. 335) και [32] (Πρόταση 3.12, σελ. 79).

Παρατήρηση Καραθεοδωρή: ***Η συνάρτηση f, ορισμένη στο ανοικτό διάστημα Δ, είναι παραγωγίσιμη στο $a\in\Delta$, αν και μόνο αν, υπάρχει συνάρτηση φ_a , που είναι συνεχής στο a και ικανοποιεί την σχέση $f(x)-f(a)=\varphi_a(x)(x-a)$, για όλα τα $x\in\Delta$. Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε: $f'(a)=\varphi_a(a)$.***

Η επόμενη πρόταση μας δίνει την ισοδυναμία του κλασικού ορισμού της παραγώγου με τον παραπάνω.

Πρόταση 4.6.1: *Ο ορισμός της παραγώγου της παραγράφου 3.1.2 είναι ισοδύναμος με αυτόν της παρατήρησης Καραθεοδωρή.*

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο ανοικτό διάστημα Δ, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο a του Δ, τότε η συνάρτηση με τύπο

$$\varphi_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \text{όταν}\ x\in\Delta-\{a\} \quad \text{και} \quad \varphi_a(a)=f'(a),$$

είναι συνεχής στο a (από τον κλασικό ορισμό της παραγώγου) και προφανώς ικανοποιεί την σχέση της παρατήρησης Καραθεοδωρή.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι στο Δ υπάρχει συνάρτηση φ_a, συνεχής στο σημείο a του Δ, η οποία ικανοποιεί τη σχέση της παρατήρησης του Καραθεοδωρή. Τότε, για $x \neq a$ έχουμε:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \varphi_a(x) = \varphi_a(a)$ (από την συνέχεια της φ_a στο a),

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο a, με $f'(a)=\varphi_a(a)$. □

Άμεσο πόρισμα των παραπάνω είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα 4.6.2: *Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο ανοικτό διάστημα Δ, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο a του Δ, τότε η συνάρτηση φ_a της παρατήρησης Καραθεοδωρή είναι μοναδική. Επίσης, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο a, αλλά το αντίστροφο, όπως γνωρίζουμε, δεν ισχύει.*

Θα δούμε τώρα μερικές αποδείξεις με χρήση της παρατήρησης του Καραθεοδωρή. Ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει πόσο απλή γίνεται η απόδειξη του *κανόνα της αλυσίδας* (βλέπε παρακάτω Θεώρημα 4.6.5) με την βοήθεια της παρατήρησης αυτής, σε σύγκριση με τις κλασικές αποδείξεις, που ήδη έχουμε αναφέρει (βλέπε Θεώρημα 3.3.4).

Επίσης, όπως έχουμε πει στην παράγραφο 2.2, μπορεί κανείς να ολοκληρώσει τουλάχιστον το θεωρητικό μέρος όλης της διδακτέας ύλης (ορισμός παραγώγου, κανόνες παραγώγισης, βασικά θεωρήματα των παραγώγων κ.λπ.), χωρίς να ορίσει όρια συναρτήσεων. Οι παρακάτω εφαρμογές της παρατήρησης του Καραθεοδωρή, μαζί με τα υπόλοιπα θεωρήματα των παραγώγων, τα οποία θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5 με την βοήθεια της παρατήρησης αυτής, θα δείξουν καθαρά, ότι πραγματικά αυτό είναι εφικτό σε μεγάλο βαθμό. Φυσικά, χωρίς την χρήση των ορίων, τόσο ο υπολογισμός της παραγώγου κάποιων συναρτήσεων, όσο και κάποια ακόμα θεωρητικά θέματα θα είναι δύσκολο να αντιμετωπισθούν.

Τώρα, πριν αποδείξουμε κανένα θεώρημα, ας δούμε πρώτα, με την παρατήρηση του Καραθεοδωρή, πόσο άμεσα μπορεί κανείς να βρει τις παραγώγους των πιο στοιχειωδών συναρτήσεων. Το μόνο που έχει να κάνει είναι να ρίξει μια ματιά σε κάποιες απλές αλγεβρικές ταυτότητες όπως παρακάτω:

f(x)	Ταυτότητα	$\varphi_a(x)$	$f'(a)$
c	c-c=0(x- a)	0	0
x	x-a=1(x-a)	1	1
x^2	$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$	x+a	2a
x^3	$x^3-a^3=(x^2+ax+a^2)(x-a)$	x^2+ax+a^2	$3a^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^n	$x^n-a^n=(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+$ $+xa^{n-2}+a^{n-1})(x-a)$	$x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}$	na^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}-\sqrt{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}$	$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sqrt[\nu]{x}$	$\sqrt[\nu]{x}-\sqrt[\nu]{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\ldots+\sqrt[\nu]{a^{\nu-1}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\ldots+\sqrt[\nu]{a^{\nu-1}}}$	$\dfrac{1}{\nu\sqrt[\nu]{a^{\nu-1}}}$

Υποθέτουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στα επόμενα θεωρήματα, είναι ορισμένες σε ένα ανοικτό διάστημα, το οποίο περιέχει το σημείο, το οποίο αναφέρεται κάθε φορά στο αντίστοιχο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 4.6.3</u>: *Αν οι* f *και* g *είναι παραγωγίσιμες στο σημείο* a*, τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό κ, έχουμε:*

(α) *Η* κf+g *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και ισχύει ότι* $(\kappa f+g)'(a)=\kappa f'(a)+g'(a)$

(β) *Η* fg *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και ισχύει ότι* $(fg)'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$

(γ) *Η* $\dfrac{f}{g}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *(με την προϋπόθεση ότι ισχύει* $g(x)\neq 0$, *για κάθε* x *σε μια γειτονιά του* a*).*

Απόδειξη:

Αφού οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο a, υπάρχουν (μοναδικές) συναρτήσεις φ_a, ψ_a, συνεχείς στο a, ώστε

$$f(x)-f(a)=\varphi_a(x)(x-a) \quad \text{και} \quad g(x)-g(a)=\psi_a(x)(x-a),$$

για όλα τα x που ανήκουν στο $U\cap V$, όπου U, V τα ανοικτά διαστήματα, στα οποία ορίζονται οι f και g αντίστοιχα. Επιπλέον

$$\varphi_a(a)= f'(a) \quad \text{και} \quad \psi_a(a)=g'(a).$$

Τώρα, για κάθε $x\in U\cap V$ έχουμε:

(α) $$\begin{aligned}(\kappa f+g)(x)-(\kappa f+g)(a)&=\kappa f(x)+g(x)-\kappa f(a)-g(a)=\\&=\kappa(f(x)-f(a))+g(x)-g(a)=\\&=\kappa\varphi_a(x)(x-a)+\psi_a(x)(x-a)=\\&=[\kappa\varphi_a(x)+\psi_a(x)](x-a).\end{aligned}$$

Αφού οι ψ_a, φ_a είναι συνεχείς στο a, έπεται ότι και η συνάρτηση $\kappa\varphi_a(x)+\psi_a(x)$ είναι συνεχής στο a. Άρα, η f+g είναι παραγωγίσιμη στο a και μάλιστα ισχύει ότι $(\kappa f+g)'(a)=\kappa f'(a)+g'(a)$.

(β) $$\begin{aligned}(fg)(x)-(fg)(a)&=f(x)g(x)-f(a)g(a)=\\&=f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)=\\&=f(x)[g(x)-g(a)]+g(a)[f(x)-f(a)]=\\&= f(x)\psi_a(x)(x-a)+g(a)\varphi_a(x)(x-a)=\\&=[f(x)\psi_a(x)+\varphi_a(x)g(a)](x-a).\end{aligned}$$

Αφού οι f, g, ψ_a, φ_a είναι συνεχείς στο a, έπεται ότι και η συνάρτηση $f(x)\psi_a(x)+\varphi_a(x)g(a)$ είναι συνεχής στο a. Άρα, η fg είναι παραγωγίσιμη στο a και μάλιστα ισχύει ότι $(fg)'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$.

(γ) $$\begin{aligned}(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(a)&=\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}=\\&=\frac{f(x)g(a)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}=\end{aligned}$$

$$=\frac{[f(x)-f(a)]g(x)-f(x)[g(x)-g(a)]}{g(x)g(a)}=$$

$$=\frac{\varphi_a(x)(x\text{-}a)g(x)\text{-}f(x)\psi_a(x)(x-a)}{g(x)g(a)}=$$

$$=\frac{\varphi_a(x)g(x)-f(x)\psi_a(x)}{g(x)g(a)}(x\text{-}a).$$

Αφού οι f, g, ψ_a, φ_a είναι συνεχείς στο a, έπεται ότι και η συνάρτηση $\frac{\varphi_a(x)g(x)-f(x)\psi_a(x)}{g(x)g(a)}$ είναι συνεχής στο a. Άρα, η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο a και μάλιστα $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$. □

Άμεσο πόρισμα των (α) και (γ) του προηγούμενου Θεωρήματος είναι το επόμενο:

<u>Πόρισμα 4.6.4</u>: *Αν οι* f *και* g *είναι παραγωγίσιμες στο σημείο* a*, τότε, έχουμε ότι:*

(α) *Η* f-g *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και ισχύει ότι* $(f\text{-}g)'(a)=f'(a)\text{-}g'(a)$.

(β) *Η* $\frac{1}{g}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και ισχύει ότι* $(\frac{1}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$*, (με την προϋπόθεση ότι αληθεύει* $g(x)\neq 0$*, για κάθε* x *σε μια γειτονιά του* a*).*

Φυσικά, μπορούμε να αποδείξουμε κατευθείαν από την παρατήρηση του Καραθεοδωρή το (β) του Πορίσματος αυτού και μετά σε συνδυασμό με το (β) του Θεωρήματος 4.6.3 (όπως γίνεται συνήθως), να πάρουμε το (γ) του ίδιου Θεωρήματος.

Κλείνοντας την παράγραφο και μαζί και το Κεφάλαιο αυτό, ας δούμε πόσο εύκολη και απλή γίνεται πραγματικά, η απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας, με την βοήθεια της παρατήρησης αυτής.

<u>Θεώρημα 4.6.5 (κανόνας αλυσίδας)</u>: *Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και η* g *είναι παραγωγίσιμη στο* f(a)*, τότε η σύνθεσή τους* $g\circ f$ *είναι παραγωγίσιμη στο* a *και ισχύει ότι* $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$.

Απόδειξη:

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο a, υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση φ_a, ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα V, που περιέχει το a και η οποία είναι συνεχής στο a, ώστε

$$f(x)-f(a)=\varphi_a(x)(x-a), \text{ για κάθε } x\in V.$$

Επίσης, επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο b=f(a), υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση ψ_b, ορισμένη σε ανοικτό διάστημα U, που περιέχει το b=f(a) και η οποία είναι συνεχής στο b, ώστε

$$g(y)- g(f(a))=\psi_b(y)(y-f(a)), \text{ για κάθε } y \in U.$$

Τότε, η συνάρτηση $(\psi_b\circ f)\varphi_a$ είναι συνεχής στο a, σαν σύνθεση και γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων ψ_b, f και φ_a. Επίσης, για όλα τα $x\in V$ με $f(x)\in U$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)&=g(f(x))-g(f(a))=\\ &=\psi_b(f(x))(f(x)-f(a))=\\ &=(\psi_b\circ f)(x)\varphi_a(x)(x-a),\end{aligned}$$

απ’ όπου έπεται ότι η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο a και μάλιστα ισχύει ότι $(g\circ f)'(a)= g'(f(a))f'(a)$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΙΑ ΑΜΕΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΒΑΣΙΚΩΝ ΛΗΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΚΟΜΗ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

Κάθε ένα από τα πέντε Βασικά Λήμματα, που είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, είναι, όπως προκύπτει από τις εκεί αποδείξεις, ισοδύναμο με τα υπόλοιπα αξιώματα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς και τα ίδια τα πέντε αυτά Λήμματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Στο Κεφάλαιο αυτό, πρώτα θα δώσουμε μια κατ' ευθεία απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας. Η απόδειξη αυτή, που δεν την συναντήσαμε στην βιβλιογραφία, θα γίνει κυκλικά ακολουθώντας μία σειρά συνεπαγωγών, αρχίζοντας από ένα αξίωμα της πληρότητας των Πραγματικών αριθμών και τελειώνοντας σε ένα άλλο, ισοδύναμό του. Εδώ συγκεκριμένα, επιλέξαμε από την παράγραφο 2.1.3, ως πρώτο το Π_1 (supremum) και τελευταίο το Π_3 (Bolzano-Weierstrass), αφού γι' αυτά έχουμε κάποιες αποδείξεις έτοιμες από το Κεφάλαιο 4. Ενδιάμεσα, θα έχουμε τα πέντε Λήμματα, σε μία *διάταξη*, η οποία θα καθορίσει και την σειρά των υπολοίπων, προς απόδειξη, συνεπαγωγών. Επειδή οι δυνατές *διατάξεις* των 5 Βασικών Λημμάτων, είναι 5!=120, θεωρήσαμε, ως το πιο φυσιολογικό, να επιλέξουμε προς απόδειξη την πρώτη εξ' αυτών, δηλαδή

Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Λήμμα 5.

Την απόδειξη αυτή, παραθέτουμε ως *δεύτερη* παρακάτω, λόγω της κάπως αυθαίρετης, κατά την γνώμη μας, ολοκλήρωσης της απόδειξης της συνεπαγωγής: Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Λήμμα 2 (βλέπε παρακάτω σελίδα 85).

Κατόπιν τούτων, επιλέξαμε μία τυχαία άλλη διάταξη, την

Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Λήμμα 5,

η οποία όμως και πάλι μας παρουσίασε πρόβλημα στην συνεπαγωγή: Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Λήμμα 5. Έτσι καταλήξαμε στην επόμενη διάταξη, την οποία και παραθέτουμε ως *πρώτη απόδειξη*.

Πληρότητα των πραγματικών $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 5 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Πληρότητα των πραγματικών.

Στην συνέχεια, μετά από τις δύο επόμενες αποδείξεις, θα δώσουμε μερικά ακόμη παραδείγματα εφαρμογών, τόσο των πέντε Βασικών Λημμάτων, όσο και της παρατήρησης του Καραθεοδωρή.

5.1. Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΛΗΜΜΑΤΩΝ

5.1.1. <u>Πρώτη Απόδειξη</u>

Οι προτάσεις των οποίων θέλουμε να δείξουμε την ισοδυναμία είναι κατά σειρά οι εξής:

(i) Πληρότητα των πραγματικών αριθμών: *Κάθε μη κενό, πάνω φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *έχει supremum.*

(ii) Βασικό Λήμμα 2: *Έστω P(A) μια ιδιότητα, που αφορά μη κενά υποσύνολα A ενός διαστήματος Δ=[a,b]. Αν*
(α) Η P({a}) είναι αληθής και

(β) Αν η υπόθεση

«$c\in\Delta$ <u>και</u> για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $x\in(c-\varepsilon,c]$,
ώστε η $P([a,x])$ να είναι αληθής»

συνεπάγεται ότι

«υπάρχει $\delta>0$, ώστε η $P([a,c+\delta]\cap[a,b])$ να είναι αληθής»,

τότε, η $P(\Delta)$ είναι αληθής.

(iii) Βασικό Λήμμα 4: *Αν η **C** είναι τοπική και προσθετική οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του $\Delta=[a,b]$, τότε $\Delta\in$ **C**.*

(iv) Βασικό Λήμμα 1: *Αν μια τοπική στο $\Delta=[a,b]$ ιδιότητα P είναι και προσθετική σε διαστήματα, τότε η P αληθεύει σε όλο το Δ.*

(v) Βασικό Λήμμα 5: *Αν **C** είναι μια πλήρης κάλυψη του Δ, τότε η **C** περιέχει μια διαμέριση του Δ, δηλαδή υπάρχουν $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, ώστε τα διαστήματα $I_\kappa=[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ της διαμέρισης να ανήκουν στη **C**, για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,n$.*

(vi) Βασικό Λήμμα 3: *Έστω $\Delta=[a,b]$ και σ μία μεταβατική σχέση στο Δ. Αν κάθε x στο Δ έχει μία περιοχή N_x, ώστε $\forall u\in[a,x]\cap N_x$ και $\forall v\in N_x\cap[x,b]$ να ισχύει ότι $u\sigma v$, τότε $a\sigma b$.*

(vii) Πληρότητα των πραγματικών αριθμών: *Κάθε μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο (Bolzano – Weierstrass).*

<u>Απόδειξη:</u>

(i)$\Rightarrow$(ii) (Πληρότητα των πραγματικών $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 2)

Η απόδειξη έγινε στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε Βασικό λήμμα 2).

(ii)$\Rightarrow$(iii) (Βασικό Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 4)

Έστω **C** μία τοπική και προσθετική οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του Δ=[a,b]. Με την βοήθεια του (ii), θέλουμε να δείξουμε ότι $\Delta\in$**C**.

Ορίζουμε τότε, για μη-κενά υποσύνολα I του Δ, μία ιδιότητα P(I) ως εξής:

(1) *Όταν $I=\{x\}\subset\Delta$, τότε η P(I) είναι αληθής αν και μόνο αν υπάρχει $[c,d]\in\boldsymbol{C}$, ώστε $x\in[c,d]$.*

(2) *Όταν $I=[c,d]\subset\Delta$, τότε η P(I) είναι αληθής αν και μόνο αν $[c,d]\in\boldsymbol{C}$.*

Από το (1) και την τοπικότητα της **C** έχουμε τότε ότι η P({a}) είναι αληθής, δηλαδή ισχύει το (α) του (ii).

Έστω τώρα ένα $c\in(a,b]$, για το οποίο αληθεύει η υπόθεση του (β) της (ii), δηλαδή, $\forall\,\varepsilon>0$ να υπάρχει $x\in(c-\varepsilon,c]$, ώστε η P([a,x]) να είναι αληθής, ή, λόγω του (2), $[a,x]\in\mathbf{C}$.

Επειδή η **C** είναι τοπική οικογένεια, έπεται ότι υπάρχει $[c_1,d]\in\mathbf{C}$, ώστε $c\in[c_1,d]$. Επίσης (βλέπε Ορισμός 4.4.1) $c>a\Rightarrow c_1<c\leq d$, οπότε για $\varepsilon<c-c_1$ παραπάνω, θα έχουμε τελικά ότι $[a,x]\cap[c_1,d]\neq\varnothing$. Όμως η **C** είναι προσθετική οικογένεια, συνεπώς $[a,x]\cup[c_1,d]=[a,d]\in\mathbf{C}$. Άρα, υπάρχει $\delta=d-c\geq 0$, ώστε η $P([a,c+\delta]\cap\Delta)$ να είναι αληθής.

Αν $\delta>0$, τότε από το (ii) έχουμε ότι η P(Δ) είναι αληθής, δηλαδή $\Delta\in\mathbf{C}$, όπως θέλαμε.

Αν $\delta=0$, τότε $c=d=b$ (βλέπε και πάλι τον Ορισμό 4.4.1), άρα $\Delta=[a,b]=[a,d]\in\mathbf{C}$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) (Βασικό Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 1)

Έστω P μία ιδιότητα στο Δ=[a,b], τοπική και προσθετική σε διαστήματα. Θέλουμε να δείξουμε, με την βοήθεια του (iii), ότι η P(Δ) είναι αληθής. Προς τούτο, θεωρούμε στο Δ την οικογένεια:

$$\boldsymbol{C}=\{[c,d]\subseteq\Delta\text{: η } P \text{ αληθεύει στο } [c,d]\}.$$

Τότε, η τοπικότητα της P συνεπάγεται αμέσως και το ότι η **C** είναι τοπική οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του Δ.

Έστω τώρα $C_1,C_2\in\mathbf{C}$ με $C_1\cap C_2\neq\varnothing$. Τότε η P αληθεύει στα C_1 και C_2 και, αν αυτά έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε, λόγω της προσθετικότητας της P, θα αληθεύει και στην $C_1\cup C_2$, δηλαδή $C_1\cup C_2\in\mathbf{C}$. Αν όμως $\overset{o}{C_1}\cap\overset{o}{C_2}=\varnothing$, τότε πρέπει να είναι $C_1=[c_1,c_2]$, και $C_2=[c_2,c_3]$, με $a<c_2<b$. Από την τοπικότητα της P και τον ορισμό της $\mathbf{C}$, μπορούμε να βρούμε $C_3\in\mathbf{C}$ με $c_2\in C_3$ και $\overset{o}{C_1}\cap\overset{o}{C_3}\neq\varnothing$ και $\overset{o}{C_3}\cap\overset{o}{C_2}\neq\varnothing$. Αν επαναλάβουμε τώρα δύο φορές τον προηγούμενο συλλογισμό, έχουμε εύκολα και πάλι ότι $C_1\cup C_2\in\mathbf{C}$. Συνεπώς η $\mathbf{C}$ είναι και προσθετική οικογένεια.

Από το (iii) έπεται τότε ότι $\Delta\in\mathbf{C}$, δηλαδή η P αληθεύει στο Δ.

(iv)$\Rightarrow$(v) (Βασικό Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 5)

Έστω $\mathbf{C}$ μια πλήρης κάλυψη του Δ=[a,b], δηλαδή, σε κάθε x του Δ αντιστοιχεί ένας θετικός αριθμός δ(x), ώστε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο από δ(x), να ανήκει στην $\mathbf{C}$. Προφανώς, εκτός από τα παραπάνω, η $\mathbf{C}$ μπορεί να περιέχει και άλλα κλειστά υποδιαστήματα του Δ. Όμως, αν υπάρχουν τέτοια επιπλέον υποδιαστήματα, μπορούμε να τα παραλείψουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας και αυτό ακριβώς υποθέτουμε παρακάτω. Θέλουμε τότε να δείξουμε, με την βοήθεια της (iv), ότι υπάρχει διαμέριση του Δ από διαστήματα που ανήκουν στην $\mathbf{C}$. Προς τούτο, θεωρούμε μία ιδιότητα P για κλειστά υποδιαστήματα του Δ, που ορίζεται ως εξής:

*Η P αληθεύει στο κλειστό υποδιάστημα I=[u,v] του Δ, αν και μόνο αν, υπάρχει διαμέριση του I, που αποτελείται από διαστήματα της **C**.*

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η P είναι τοπική και προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα.

Έστω $x\in\Delta$. Αφού η $\mathbf{C}$ είναι πλήρης κάλυψη του Δ, υπάρχει δ(x)>0, ώστε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x) να ανήκει στη $\mathbf{C}$. Τότε προφανώς για I=[u,v], που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x), ισχύει ότι τα [u,x], [x,v] ανήκουν στην $\mathbf{C}$ και αποτελούν διαμέριση του I, αφού $[u,v]=[u,x]\cup[x,v]$, δηλαδή η P αληθεύει στο I. Άρα, η P είναι τοπική στο Δ ιδιότητα.

Για την απόδειξη της προσθετικότητας της P θα χρειαστούμε τα παρακάτω:

Έστω $[\beta,\gamma]$ και $[c,d]$, με $\beta<c<\gamma<d$, δύο υποδιαστήματα του Δ, που ανήκουν στην **C**. Τότε, για κάποια $x_1\in[\beta,\gamma]$, $x_2\in[c,d]$, υπάρχουν $\delta(x_1)>0$ και $\delta(x_2)>0$, ώστε $\gamma-\beta<\delta(x_1)$ και $d-c<\delta(x_2)$. Έχουμε τότε τις επόμενες περιπτώσεις:

(1) Αν το x_1 ανήκει στο $[\beta,c]$, τότε προφανώς $c-\beta<\delta(x_1)$, άρα το $[\beta,c]$ ανήκει στην **C** και $[\beta,d]=[\beta,c]\cup[c,d]$, δηλαδή, υπάρχει διαμέριση του $[\beta,d]$ από διαστήματα της **C**.

(2) Όμοια, αν το x_2 ανήκει στο $[\gamma,d]$, υπάρχει και πάλι διαμέριση του $[\beta,d]=[\beta,\gamma]\cup[\gamma,d]$ από διαστήματα της **C**.

(3) Έστω τώρα ότι τα x_1,x_2 ανήκουν στο $[c,\gamma]$. Διακρίνουμε τότε τις εξής υποπεριπτώσεις:

(α) Αν $x_1\leq x_2$, εύκολα και πάλι βλέπουμε ότι υπάρχει διαμέριση του $[\beta,d]=[\beta,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,d]$ από διαστήματα της **C**.

(β) Αν $x_2<x_1$, τότε θέτουμε $\delta=\max\{d-x_2,\ x_1-\beta\}$.

Αν $\delta=d-x_2$, τότε $x_2-\beta<\delta<\delta(x_2)$, άρα το $[\beta,x_2]$ ανήκει στην **C**, οπότε και πάλι υπάρχει διαμέριση του $[\beta,d]=[\beta,x_2]\cup[x_2,d]$ από διαστήματα της **C**.

Αν $\delta=x_1-\beta$, τότε $d-x_1<\delta<\delta(x_1)$, άρα το $[x_1,d]$ ανήκει στην **C**, οπότε και πάλι υπάρχει διαμέριση του $[\beta,d]=[\beta,x_1]\cup[x_1,d]$ από διαστήματα της **C**.

Μπορούμε τώρα εύκολα να δείξουμε την προσθετικότητα της P. Έστω ότι η P αληθεύει στα υποδιαστήματα I_1 και I_2 (με $\overset{o}{I}_1\cap\overset{o}{I}_2\neq\emptyset$) του Δ, δηλαδή, υπάρχουν διαμερίσεις των I_1 και I_2 από διαστήματα της **C**. Εξαιρώντας κάποιες τετριμμένες περιπτώσεις, επιλέγουμε, στην μόνη περίπτωση που ουσιαστικά έχουμε να εξετάσουμε, ένα υποδιάστημα $[\beta,\gamma]$ από την διαμέριση του I_1 και ένα υποδιάστημα $[c,d]$ από εκείνη του I_2, ώστε $\beta<c<\gamma<d$. Τότε όμως, όπως είδαμε προηγουμένως, υπάρχει διαμέριση του $[\beta,d]$ από διαστήματα της **C**. Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση και της ένωσης $I_1\cup I_2$ από διαστήματα της **C**, δηλαδή, η P αληθεύει στην ένωση των υποδιαστημάτων αυτών, όπως θέλαμε.

Από το (iv) έπεται τότε, ότι η P αληθεύει στο Δ, δηλαδή, υπάρχει διαμέριση του Δ από διαστήματα της **C**.

(v)$\Rightarrow$(vi) (Βασικό Λήμμα 5 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 3)

Έστω σ μία μεταβατική σχέση στο $\Delta=[a,b]$, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Βασικού Λήμματος 3. Θέλουμε, με την βοήθεια του (v), να δείξουμε ότι $a\sigma b$. Προς τούτο, θεωρούμε την επόμενη οικογένεια κλειστών υποδιαστημάτων του Δ ($x\in\Delta$):

$$\boldsymbol{C}=\{I_x\text{: } I_x \text{ κλειστό υποδιάστημα του } \Delta,\ x\in I_x \text{ και } I_x\subseteq N_x\},$$

όπου, N_x είναι η περιοχή του x, για την οποία ισχύει η υπόθεση του Λήμματος 3. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε υποδιάστημα $I_x=[u,v]$, που ανήκει στην **C**, έχουμε ότι $u\in[a,x]\cap N_x$ και $v\in N_x\cap[x,b]$, άρα και $u\sigma v$.

Θα δείξουμε τώρα, ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ. Έστω x ένα εσωτερικό σημείο του Δ και έστω $N_x=(\beta,\gamma)$ η παραπάνω περιοχή του x (για τις περιπτώσεις x=a και x=b, η απόδειξη είναι παρόμοια, αλλά ας υπενθυμίσουμε στο σημείο αυτό και την *Σημείωση* της παραγράφου 4.3). Θέτουμε τώρα, $\delta(x)=\min\{x-\beta,\gamma-x\}$. Τότε, αφού κάθε κλειστό διάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x), ανήκει στην N_x, έπεται ότι ανήκει και στην **C**. Άρα η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ (σύγκρινε και με την Παρατήρηση (β) της παραγράφου 4.5).

Από το (v) έχουμε τότε, ότι υπάρχει διαμέριση του Δ, έστω $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, με $[x_{k-1},x_k]$ να ανήκουν στη **C** για όλα τα $k=1,2,\ldots,n$. Τότε όμως, όπως είδαμε παραπάνω, για όλα τα k ισχύει ότι $x_{k-1}\sigma x_k$, πράγμα που συνεπάγεται, λόγω της μεταβατικότητας της σ, ότι $x_0\sigma x_n$, δηλαδή $a\sigma b$, όπως θέλαμε.

(vi)$\Rightarrow$(vii) (Βασικό Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Πληρότητα πραγματικών)

Η απόδειξη έγινε στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε θεώρημα 4.3.4). □

5.1.2. <u>Δεύτερη Απόδειξη</u>

Θα δούμε τώρα την δεύτερη απόδειξη της ισοδυναμίας των πέντε Βασικών Λημμάτων, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή του Κεφαλαίου αυτού. Εδώ, η διάταξη των Λημμάτων ακολουθεί την χρονολογική σειρά δημοσίευσής τους, δηλαδή είναι η εξής:

Πληρότητα των πραγματικών $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 5 $\Rightarrow$ Πληρότητα των πραγματικών.

Απόδειξη:

Πληρότητα των πραγματικών $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 1

Η απόδειξη έγινε στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε Βασικό λήμμα 1).

Βασικό Λήμμα 1 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 2

Έστω P(A) μια ιδιότητα, που αφορά μη κενά υποσύνολα A ενός διαστήματος $\Delta=[a,b]$ και ικανοποιεί τα (α) και (β) του Λήμματος 2. Με την βοήθεια του Λήμματος 1, θέλουμε να δείξουμε ότι η P(Δ) είναι αληθής. Προς τούτο, ορίζουμε για υποδιαστήματα του Δ, μία άλλη ιδιότητα P_1, ως εξής:

Αν Ι είναι ένα υποδιάστημα του Δ και β είναι το αριστερό άκρο του, τότε η $P_1(I)$ είναι αληθής, αν και μόνο αν, η αλήθεια της $P([a,\beta])$ συνεπάγεται την αλήθεια $P([a,\gamma])$, για κάθε γ στο Ι.

Προφανώς η P_1 είναι προσθετική σε διαστήματα, αλλά για την απόδειξη της τοπικότητά της θα χρειαστούμε μια, κάπως αυθαίρετη κατά την γνώμη μας, επιπλέον παραδοχή, την οποία θα δούμε σε λίγο παρακάτω. Έστω c ένα τυχαίο σημείο του Δ. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει διάστημα Ι, που το περιέχει (σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.2) και η $P_1(I)$ να είναι αληθής. Αν υποθέσουμε τώρα, ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $x\in(c-\varepsilon,c]$, ώστε η $P([a,x])$ να είναι αληθής, τότε, από το (β) του Λήμματος 2, θα υπάρχει $\delta>0$, ώστε η $P([a,c+\delta]\cap\Delta)$ να είναι αληθής. Θέτοντας τότε, $y=\min\{c+\delta,b\}$, έχουμε ότι το c ανήκει στο διάστημα $[x,y]$ και η $P_1([x,y])$ είναι αληθής, αν δεχτούμε την επιπλέον παραδοχή, ότι η αλήθεια των $P([a,x])$ και $P([a,y])$ συνεπάγεται και το ότι η $P([a,\gamma])$ είναι αληθής για κάθε γ στο (x,y). Παίρνοντας τότε $I=[x,y]$, έχουμε ότι η P_1 είναι και τοπική ιδιότητα.

Το Βασικό Λήμμα 1 συνεπάγεται τότε ότι αληθεύει η $P_1(\Delta)$, δηλαδή η αλήθεια της P({a}) συνεπάγεται την αλήθεια της P([a,γ]) για κάθε γ στο Δ. Όμως, από το (α) του Λήμματος 2, έχουμε ότι η P({a}) είναι αληθής. Συνεπώς, η P([a,γ]) είναι αληθής για κάθε γ στο Δ, απ' όπου για γ=b έπεται και η αλήθεια της P(Δ), όπως θέλαμε.

Οι επόμενες συνεπαγωγές δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα και γι' αυτό δίνουμε μόνο κάποιες σύντομες υποδείξεις γι' αυτές.

Βασικό Λήμμα 2 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 3

Αν υποθέσει κανείς ότι έχει μία μεταβατική σχέση σ στο Δ=[a,b], η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3, τότε, για να αποδείξει με την βοήθεια του Λήμματος 2, ότι ισχύει aσb, αρκεί να θεωρήσει, για μη κενά υποσύνολα του Δ, την επόμενη ιδιότητα P και να λάβει υπ' όψιν του και την *Σημείωση* της παραγράφου 4.3.

Η ιδιότητα P ορίζεται τώρα ως εξής:

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του Δ, τότε η P(A) είναι αληθής, αν και μόνο αν a*σβ για κάθε β στο A.*

ή και ως εξής:

Αν I=[u,v] είναι ένα υποδιάστημα του Δ, τότε η P(I) είναι αληθής, αν και μόνο αν ισχύει uσv.

Βασικό Λήμμα 3 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 4

Εδώ, αν υποθέσει κανείς ότι έχει μία τοπική και προσθετική οικογένεια **C**, κλειστών υποδιαστημάτων του Δ=[a,b], τότε, για να αποδείξει με την βοήθεια του Λήμματος 3, ότι ισχύει $\Delta \in \mathbf{C}$, αρκεί να θεωρήσει την επόμενη σχέση σ στο Δ, η οποία, όπως προκύπτει εύκολα, είναι μεταβατική και ικανοποιεί και τις υπόλοιπες υποθέσεις του Λήμματος 3.

*Αν $u \leq v$ είναι δύο σημεία του Δ, τότε uσv αν και μόνο αν το διάστημα [u,v] περιέχεται σε ένα τουλάχιστον διάστημα της **C**.*

Βασικό Λήμμα 4 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 5

Έστω **C** μία πλήρης κάλυψη του Δ=[a,b]. Τότε, για να αποδείξει κανείς με την βοήθεια του Λήμματος 4, ότι η **C** περιέχει διαμέριση του Δ, αρκεί να θεωρήσει εκείνη την οικογένεια των κλειστών υποδιαστημάτων του Δ, για καθένα των οποίων η **C** περιέχει μία διαμέρισή του. Τότε, η συνέχεια της απόδειξης είναι πανομοιότυπη με εκείνη της συνεπαγωγής (iv)$\Rightarrow$(v), της παραγράφου 5.1.1.

Σημείωση: Μία απόδειξη της συνεπαγωγής

«*Βασικό Λήμμα 5 $\Rightarrow$ Βασικό Λήμμα 4*»

μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο [15] (βλέπε THEOREM 1, σελ. 329).

Βασικό Λήμμα 5 $\Rightarrow$ Πληρότητα των πραγματικών

Η απόδειξη έγινε στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε θεώρημα 4.5.6). □

5.2. ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε μερικά ακόμη από τα θεωρήματα του Κεφαλαίου 3, χρησιμοποιώντας τις νέες προτάσεις του Κεφαλαίου 4. Στο πρώτο μέρος θα κάνουμε χρήση των πέντε Βασικών Λημμάτων και στο δεύτερο της παρατήρησης του Καραθεοδωρή.

5.2.1. Εφαρμογές των Βασικών Λημμάτων

Στο Κεφάλαιο 3, μεταξύ άλλων, σχολιάσαμε και την παρουσίαση των βασικών Θεωρημάτων της συνέχειας, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων στα διάφορα Σχολικά μας βιβλία. Στα Παραρτήματα Α, Β και Γ, τα οποία αναφέρονται στην Συνέχεια, την Παράγωγο και το Ολοκλήρωμα, αντίστοιχα, παραθέτουμε και αυτούσια αντίγραφα από τα βιβλία [12], [21] και [6]. Στην συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4, είδαμε τις νέες αποδείξεις μερικών από αυτά τα Θεωρήματα, με τρόπους, που σε πολλές περιπτώσεις ήταν απλούστεροι των ήδη γνωστών μας, όμως, το πιο σημαντικό ίσως είναι το ότι, καθένας από αυτούς προσφέρεται για μία «ενοποιημένη μέθοδο» αντιμετώπισης των αποδείξεων αυτών των Θεωρημάτων, όπως έχουμε ήδη ξαναπεί.

Στην παράγραφο αυτή, θα ολοκληρώσουμε την προσπάθεια της απόδειξης των σπουδαιότερων από τα παραπάνω Θεωρήματα καθώς και μερικών άλλων, με τη βοήθεια των νέων αυτών μεθόδων. Συγκεκριμένα, το επόμενο πλάνο μας δείχνει τι έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα και τι θα δείξουμε παρακάτω.

Θεωρήματα Συνέχειας

- Θ.3.2.4 (*Bolzano και Ενδιαμέσων Τιμών*): Έχει αποδειχθεί με τα Βασικά Λήμματα 3, 4 και 5 (βλ. Θ.4.3.2, Θ.4.4.4, Θ.4.5.3, αντίστοιχα) και ουσιαστικά και με το Βασικό Λήμμα 2 (βλέπε Θ.4.2.2). Παρόμοια, η απόδειξη του παρακάτω Θ.5.2.i, είναι ουσιαστικά και η απόδειξή του, με το Βασικό Λήμμα 1.
- Θ.3.2.6 (*Μέγιστης–Ελάχιστης τιμής*) και Θ.3.2.7 (*Συμπάγειας*): Έχουν αποδειχθεί με τα Βασικά Λήμματα 1 και 2 (βλ. Θ.4.1.4, Θ.4.1.5, Θ.5.2.i και Θ.4.2.1, Θ.4.2.2, αντίστοιχα), ενώ, με τα υπόλοιπα Βασικά Λήμματα, έχουν αποδειχθεί τα Θ.4.3.1, Θ.4.4.3 και Θ.4.5.2 (όλα ίδια ακριβώς με το Θ.4.1.4), τα οποία συνεπάγονται το Θ.3.2.6 (βλ. και σελ. 40), άρα και το Θ.3.2.7.
- Θ.3.2.8 (*Ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων*): Το «κλειδί» για την κλασική απόδειξη αυτού του Θεωρήματος, είναι, όπως έχουμε ξαναπεί, το Θ.3.2.9, το οποίο θα δείξουμε παρακάτω στο Θ.5.2.ii, με όλα τα Βασικά Λήμματα. Μία απόδειξη, χωρίς χρήση του Θ.3.2.9, υπάρχει στο [43], σελίδα 247. Για άλλες αποδείξεις, όπως και για τα Θ.Θ.Α. Λογισμού, που αναφέρονται στο Θ.3.2.8, βλέπε παρακάτω (Θεωρήματα Ολοκληρωμάτων).

Θεωρήματα Παραγώγων

- Τις αποδείξεις των βασικών Θεωρημάτων Θ.3.3.1, Θ.3.3.2, Θ.3.3.3 και Θ.3.3.4, έχουμε ήδη δώσει με την βοήθεια της Παρατήρησης του Καραθεοδωρή, στην παράγραφο 4.6 του προηγουμένου Κεφαλαίου. Στην επόμενη και τελευταία παράγραφο 5.2.2, θα δούμε και τις αποδείξεις των Θ.3.3.5, και Θ.3.3.6, πάλι με την Παρατήρηση αυτή.

- Θ.3.3.7 (*Rolle και Μέσης Τιμής*): Ως γνωστόν, το Θεώρημα αυτό, προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Fermat και εκείνο της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής (βλέπε και Παράρτημα Β). Από αυτά, το πρώτο έχει απόδειξη, με την Παρατήρηση του Καραθεοδωρή (Θ.5.2.β παρακάτω) και το άλλο, με τα Βασικά Λήμματα. Συνεπώς, το παραπάνω Θεώρημα είναι και αυτό μια από τις συνέπειες των νέων μας μεθόδων. Υπενθυμίζουμε επίσης, ότι έχουμε ακόμη αποδείξει και το σχετικό Θ.4.3.3.
- Θ.3.3.8 και Θ.3.3.9 (*Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.* και *Κριτήρια τοπικών ακροτάτων*): Με χρήση των Βασικών Λημμάτων θα δούμε παρακάτω το Θ.5.2.iii και το Θ.5.2.iv. Το πρώτο εξ’ αυτών είναι το (α) του Θ.3.3.8, ενώ το δεύτερο είναι μία από τις δυνατές γενικεύσεις των (β) και (γ) του ίδιου Θεωρήματος. Για το Θ.3.3.9, η απόδειξη του Κριτηρίου πρώτης παραγώγου είναι τετριμμένη, ενώ μία απόδειξη του Κριτηρίου δεύτερης παραγώγου, θα δούμε, με την Παρατήρηση Καραθεοδωρή, στην επόμενη παράγραφο 5.2.2.
- Θ.3.3.10 (*Darboux συνέχεια της παραγώγου*): Ισχύουν και εδώ ακριβώς όσα είπαμε παραπάνω για το Θ.3.3.7.

Θεωρήματα Ολοκληρωμάτων

- Θ.3.4.3 (*Ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων*): Στις γνωστές αποδείξεις του (β) αυτού του Θεωρήματος έχουμε ήδη αναφερθεί (βλέπε Θ.3.2.8 παραπάνω). Άλλες αποδείξεις του, με χρήση των Βασικών Λημμάτων, θα δούμε στο Θ.5.2.v παρακάτω.
- Θ.3.4.5 (*Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού*): Το (γ) του Θεωρήματος αυτού (Δεύτερο Θ.Θ.Α.) θα δείξουμε, με την βοήθεια των Βασικών Λημμάτων, στο Θ.5.2.vi παρακάτω. Τα (α) και (β) του Θ.3.4.5, υπάρχουν και στα Σχολικά βιβλία (βλ. Παράρτημα Γ).

Άλλα Θεωρήματα

- Την παράγραφο αυτή θα κλείσουμε αποδεικνύοντας, με την βοήθεια και πάλι κάποιων από τα Βασικά Λήμματα, μερικά ακόμη σημαντικά Θεωρήματα. Τα δύο πρώτα εξ’ αυτών, σχετίζονται και πάλι με τα αξιώματα της πληρότητας και είναι το Θ.5.2.vii, που αφορά το αξίωμα του Κιβωτισμού (πιο συγκεκριμένα, όχι ακριβώς το $Π_6$, αλλά το $Π_5$ – Cantor) και το Θ.5.2.viii, που αφορά το $Π_7$ (Borel–Lebesgue ή Heine–Borel).

- Τέλος, το Θ.52.ix αφορά το Κριτήριο μονοτονίας Dini για την ομοιόμορφη σύγκλιση, ενώ το Θ.5.2.x, το αναφέρουμε μόνο για ενημέρωση.

Για το πρώτο Θεώρημα που θα δείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το Βασικό Λήμμα 1 και η σωστή θέση του είναι αμέσως μετά τα Θ.4.1.4 και Θ.4.1.5, τα οποία εξασφαλίζουν τα m και M της εκφώνησής του.

Θεώρημα 5.2.i: *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ=[a,b], τότε παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στην ελάχιστη (m) και την μέγιστη (M) τιμή της.*

Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν παίρνει την ενδιάμεση τιμή η. Τότε η συνάρτηση f(x)–η δεν μηδενίζεται πουθενά στο Δ.

Θεωρούμε τώρα την επόμενη ιδιότητα P:

Η συνεχής συνάρτηση f(x)–η, διατηρεί το πρόσημό της σε ένα διάστημα,

η οποία προφανώς είναι προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα. Επίσης, αφού η f(x)–η δεν μηδενίζεται στο Δ, η συνέχειά της, εύκολα θα μας δώσει (όπως έχουμε δει και άλλες φορές μέχρι τώρα), ότι η P είναι και τοπική ιδιότητα. Έπεται τότε από το Βασικό Λήμμα 1, ότι η P αληθεύει σε όλο το Δ. Συνεπώς έχουμε ότι, είτε f(x)–η>0, για κάθε x στο Δ, είτε f(x)–η<0, για κάθε x στο Δ, πράγμα άτοπο, αφού m–η<0 και M–η>0.

Άρα, η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των m και M. □

Στη συνέχεια θα δούμε το Θεώρημα 3.2.9, δηλαδή, το ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης στο κλειστό διάστημα Δ=[a,b], συνεπάγεται την ομοιόμορφη συνέχειά της στο Δ. Υπενθυμίζουμε ότι, αυτό είναι το «κλειδί» για την κλασική απόδειξη του ότι, κάθε συνάρτηση f, συνεχής στο Δ, είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

Πραγματικά, έστω ε>0. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f στο Δ, υπάρχει δ>0, ώστε, για κάθε $x,y \in Δ$ με $|x-y|<δ$, να ισχύει ότι

$\left|f(x)-f(y)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Έστω τώρα ότι $\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots< x_n=b\}$ είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του Δ με πλάτος μικρότερο του δ. Τότε, η διαφορά των πάνω και κάτω αθροισμάτων της f για την διαμέριση αυτή ισούται με $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$. Όμως, από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής και την παραπάνω ανισότητα, έχουμε ότι το άθροισμα αυτό, είναι τελικά μικρότερο από $\dfrac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=\dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$. Συνεπώς, από το γνωστό μας Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, έπεται ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο Δ. □

<u>Θεώρημα 5.2.ii</u>: *Έστω $f\in C(\Delta)$ και $\Delta=[a,b]$ (δηλαδή, το Δ είναι κλειστό και φραγμένο). Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Δ.*

<u>Απόδειξη με το Βασικό Λήμμα 1</u>:

(Από την εργασία [17], σελ. 107): Έστω ένα ε>0.

Θεωρούμε, για υποδιαστήματα του Δ, την επόμενη ιδιότητα P:

Αν $I=[\beta,\gamma]\subseteq\Delta$, τότε η P αληθεύει στο I, αν υπάρχει διαμέριση του I, ώστε, για όλα τα σημεία x,y οποιουδήποτε υποδιαστήματος της διαμέρισης αυτής, να ισχύει ότι $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon/2$.

Η ιδιότητα P είναι προφανώς προσθετική σε διαστήματα, αφού αν η P αληθεύει σε δυο επικαλυπτόμενα διαστήματα του Δ, τότε θα ισχύει και στην ένωσή τους, όπως προκύπτει εύκολα θεωρώντας την διαμέριση, που περιέχει όλα τα σημεία των δυο αρχικών διαμερίσεων.

Επίσης, η P είναι και τοπική ιδιότητα, διότι αν x_0 είναι ένα σημείο του Δ, λόγω της συνέχειας της f, για $\varepsilon_0<\dfrac{\varepsilon}{4}$, υπάρχει δ>0, ώστε, για κάθε $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap\Delta$, να ισχύει ότι $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon_0$. Τότε, το διάστημα $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap\Delta$, δεν χρειάζεται περαιτέρω διαμέριση, αφού, για κάθε $x,y\in I$, ισχύει ότι $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|f(x)-f(x_0)\right|+\left|f(x_0)-f(y)\right|<\varepsilon_0+\varepsilon_0<\varepsilon/2$.

Άρα, η P αληθεύει σε όλο το Δ, οπότε η ομοιόμορφη συνέχεια της f, αποδεικνύεται εύκολα, παίρνοντας για δ το μήκος του μικρότερου από τα υποδιαστήματα της διαμέρισης, την οποία εγγυάται η P. Πράγματι, για x,y σημεία του Δ με $|x-y|<\delta$, αυτά θα βρίσκονται στο ίδιο ή σε δύο διαδοχικά υποδιαστήματα της διαμέρισης, συνεπώς $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$, ή $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(y)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, όπου x_i είναι το κοινό σημείο των δύο διαδοχικών υποδιαστημάτων που περιέχουν τα x,y.

Στην συνέχεια μπορούμε εύκολα να τροποποιήσουμε κατάλληλα την προηγούμενη απόδειξη, ώστε να πάρουμε τις αποδείξεις του παραπάνω Θεωρήματος και με τα υπόλοιπα Βασικά Λήμματα. Π.χ.

Απόδειξη με το Βασικό Λήμμα 5:

Έστω ε>0. Θεωρούμε την συλλογή:

$$\boldsymbol{C}=\{I: I \text{ κλειστό υποδιάστημα του } \Delta, \text{ με } |f(y)-f(z)|<\varepsilon/2,\ \forall\ y,z\in I\}.$$

Θα δείξουμε ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ.

Έστω $x\in\Delta$. Λόγω της συνέχειας της f στο x, υπάρχει δ(x)>0, ώστε, για κάθε $y\in(x-\delta(x),x+\delta(x))$, να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$. Έστω τώρα I ένα υποδιάστημα του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x). Τότε, $I\subseteq(x-\delta(x),x+\delta(x))$ και επομένως για κάθε $y,z\in I$ έχουμε $|f(y)-f(z)| \leq |f(x)-f(y)|+|f(x)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα $I\in\boldsymbol{C}$, δηλαδή η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ. Από το Βασικό Λήμμα 5, υπάρχει τότε διαμέριση του Δ από στοιχεία της **C**.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται τώρα ακριβώς όπως στην προηγούμενη απόδειξη με το Βασικό Λήμμα 1. □

Το επόμενο θεώρημα (Θ.3.3.8(α)), προκύπτει συνήθως άμεσα ως συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού. Εδώ θα το δείξουμε με χρήση του Βασικού Λήμματος 5. Αποδείξεις με την βοήθεια των υπολοίπων Βασικών Λημμάτων, ας αναζητήσει μόνος του ο αναγνώστης.

<u>Θεώρημα 5.2.iii</u>: *Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta=[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.*

<u>Απόδειξη</u>:

Θα δείξουμε ότι για το τυχόν γ του (a,b] ισχύει f(γ)=f(a).
Έστω ε>0. Θεωρούμε την συλλογή:

$$\boldsymbol{C}=\{I:\ I \text{ κλειστό υποδιάστημα του } [a,\gamma], \text{ με } |f(I)|<\varepsilon|I|\},$$

όπου f(I) συμβολίζει την διαφορά f(d)–f(c), όταν I=[c,d] και $|I|=d-c$. Θα δείξουμε ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Γ=[a,γ].

Πραγματικά, έστω ένα $x\in\Gamma$. Αφού $f'(x)=0$, θα υπάρχει δ(x)>0 ώστε $\left|\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\right|<\varepsilon$, για όλα τα y,z στο Γ με $y\neq z$ και $x-\delta(x)<y\leq x\leq z<x+\delta(x)$ (βλέπε Πρόταση 3.3.11). Συνεπώς, για κάθε κλειστό υποδιάστημα I του Γ, με I=[c,d], το οποίο περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του δ(x), θα ισχύει επίσης ότι $\left|\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}\right|<\varepsilon$, δηλαδή $|f(I)|<\varepsilon|I|$. Άρα το I θα ανήκει στην **C**, δηλαδή, η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Γ.

Από το Λήμμα 5, θα υπάρχει τότε διαμέριση $x_0=a<x_0<\ldots<x_n=\gamma$ του Γ, όπου τα διαστήματα $I_\kappa=[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ θα ανήκουν στην **C**. Τότε, έχουμε ότι

$$|f(\gamma)-f(a)|\leq\sum_{k=1}^{n}|f(I_k)|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\varepsilon(\gamma-a).$$

Αφού το ε είναι τυχαίο, έπεται ότι f(γ)=f(a), όπως θέλαμε. □

Τώρα, αντί των (β) και (γ) του ίδιου Θεωρήματος 3.3.8, θεωρούμε πιο σημαντικό να αποδείξουμε εδώ, κάποιο από τα πολλά Θεωρήματα, τα οποία γενικεύουν τα (β) και (γ) του Θ.3.3.8. Για τον σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό:

Έστω ξ ένα κοινό σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού Δ μιας συνάρτησης f και του πεδίου ορισμού της παραγώγου της f. Γι' αυτό το ξ, *θεωρούμε την συνάρτηση* $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, *η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του συνόλου Δ -{ξ}. Τότε, υπάρχει στο* $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *το* $\liminf\limits_{\xi}\varphi(x)$, *που συμβολίζεται με* $\underline{D}f(\xi)$ *και ονομάζεται* <u>*κατώτερη παράγωγος*</u> *της f στο ξ, δηλαδή,* $\underline{D}f(\xi)=\sup\limits_{\delta}\{\inf\limits_{A_\delta}\varphi(x): x$ *στο* $A_\delta=\Delta\cap(\xi-\delta,\xi+\delta)-\{\xi\}, \delta>0\}$.

(Ανάλογους ορισμούς έχουμε και για την <u>*ανώτερη παράγωγο*</u> *της f – limsup αντί liminf – και τους* <u>*αριθμούς ή παραγώγους Dini*</u>*, αλλά εδώ δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω επ' αυτών).*

<u>Θεώρημα 5.2.iv</u>: *Αν η κατώτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός για κάθε x ενός διαστήματος Δ=[a,b], τότε η f είναι αύξουσα συνάρτηση στο Δ.*

<u>Απόδειξη:</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία σημεία α,β στο Δ, με α<β, ισχύει ότι $f(\alpha)\le f(\beta)$.

Πραγματικά, έστω ε>0. Θεωρούμε την συλλογή:

$$\boldsymbol{C}=\{I: I \text{ κλειστό υποδιάστημα του } [\alpha,\beta] \text{ και } f(I)>-\varepsilon|I|\},$$

όπου f(I) παριστάνει τη διαφορά f(d)-f(c), όταν I=[c,d] και $|I|=d-c$. Θα δείξουμε ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Α=[α,β]. Για το τυχόν x του Α, ισχύει ότι $\underline{D}f(x)\ge 0>-\varepsilon$. Άρα υπάρχει δ(x)>0, ώστε, για κάθε y στο Δ, με $0<|y-x|<\delta(x)$, να ισχύει ότι $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>-\varepsilon$. Έστω τώρα ένα τυχαίο κλειστό υποδιάστημα I=[c,d] του Α, που περιέχει το x και έχει $|I|<\delta(x)$. Τότε,

$$f(I) = f(d)-f(c) = [f(d)-f(x)]-[f(c)-f(x)] >$$

$$>-\varepsilon(d-x)-[-\varepsilon(c-x)] = -\varepsilon(d-x-c+x) = -\varepsilon(d-c) = -\varepsilon|I|.$$

Άρα το I ανήκει στη **C**, δηλαδή, η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Α. Από το Βασικό Λήμμα 5, υπάρχει τότε διαμέριση $\{\alpha=x_0<x_1<\ldots<x_n=\beta\}$ του Α, ώστε κάθε $I_\kappa=[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ να ανήκει στη **C**. Έχουμε τότε,

$$f(\beta)–f(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(I_k) > –\varepsilon \sum_{k=1}^{n} |I_k| = –\varepsilon(\beta–\alpha)$$ και αφού το ε είναι τυχαίο, έπεται ότι $f(\beta)–f(\alpha) \geq 0$, όπως θέλαμε. □

Ανάλογα Θεωρήματα μπορεί να διατυπώσει και να αποδείξει κανείς και για την ανώτερη παράγωγο μιας συνάρτησης κ.λπ.

Το πρώτο, από τα επόμενα δύο Θεωρήματα, αφορά και πάλι την ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το πλάνο που εκθέσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου και το δεύτερο, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Θεώρημα 5.2.v: *Κάθε συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα Δ=[a,b], είναι ολοκληρώσιμη στο Δ.*

Απόδειξη:

Είδαμε παραπάνω, πριν από την απόδειξη του Θ.5.2.ii, την κλασική απόδειξη του βασικού αυτού Θεωρήματος. Εδώ θα δούμε την απόδειξή του, με την βοήθεια των Βασικών Λημμάτων και χωρίς την χρήση του Θ.5.2.ii. Θα χρειαστούμε όμως δύο άλλα πράγματα. Το πρώτο είναι το γνωστό μας Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής και φυσικά το ότι η συνάρτησή μας είναι φραγμένη στο Δ. Συνεπώς, για κάθε κλειστό υποδιάστημα Ι του Δ, υπάρχουν τα πάνω και κάτω ολοκληρώματά της στο Ι. Το δεύτερο είναι, το ότι για τα πάνω και κάτω αυτά ολοκληρώματα εξακολουθεί να ισχύει ο τύπος του Θ.3.4.2, όπως αναφέρεται και στο [43], σελ. 247, όπου υπάρχει και μια άλλη απόδειξη, που αποφεύγει επίσης το Θ.5.2.ii, όπως έχουμε ξαναπεί.

Τώρα, θα δώσουμε εδώ τα κεντρικά σημεία της απόδειξής μας. Μετά, μπορεί να ορίσει κανείς και στην συνέχεια να αποδείξει ό,τι άλλο απαιτείται, ανάλογα με πιο Βασικό Λήμμα σκοπεύει να χρησιμοποιήσει, είτε μία ιδιότητα P, για υποδιαστήματα του Δ, είτε μία σχέση σ στο Δ, είτε μία οικογένεια υποδιαστημάτων του Δ, μετατρέποντας κατάλληλα τις επόμενες γενικές υποδείξεις.

Έστω ε>0. Τότε:

(α) Για τον ορισμό της ιδιότητας P, ή της οικογένειας **C**, ή της σχέσης σ, που θα χρειαστεί κανείς, μπορεί να χρησιμοποιήσει το εξής:

(*) *Αν I=[α,β] είναι ένα υποδιάστημα του Δ, τότε θα αληθεύει η P(I), ή το I θα ανήκει στην **C**, ή ασβ, αν για κάθε υποδιάστημα [γ,δ] του I, η διαφορά του πάνω και κάτω ολοκληρώματος της f στο [γ,δ] είναι ίση ή μικρότερη του ε(δ–γ).*

(β) Για ένα τυχαίο σημείο x του Δ, υπάρχει, λόγω της συνέχειας της f, περιοχή I=[α,β] του x, στην οποία η διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής M και της ελάχιστης τιμής m, της f, να είναι μικρότερη ή ίση του ε. Άρα, για κάθε υποδιάστημα [γ,δ] του I, έχουμε ότι:

$$\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f - \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f \leq M(\delta-\gamma)-m(\delta-\gamma)=(M-m)(\delta-\gamma)\leq \varepsilon(\delta-\gamma),$$

δηλαδή, το υποδιάστημα I ικανοποιεί την (*).

(γ) Έστω $I_1=[\alpha_1,\beta_1]$ και $I_2=[\alpha_2,\beta_2]$ δύο υποδιαστήματα του Δ, για τα οποία ισχύει η (*) και έχουν μη-κενή τομή. Αν $I=I_1\cup I_2$, τότε η (*) ισχύει και στο I. Πραγματικά, αυτό είναι προφανές αν το ένα εξ' αυτών περιέχεται στο άλλο, γι' αυτό ας υποθέσουμε ότι $\alpha_1<\alpha_2\leq\beta_1<\beta_2$. Έστω τώρα ότι [γ,δ] είναι ένα υποδιάστημα του I, το οποίο δεν περιέχεται μόνο στο I_1, ή μόνο στο I_2, αφού τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Άρα, η περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν $\gamma<\alpha_2\leq\beta_1<\delta$, οπότε $[\gamma,\alpha_2]\subset I_1$ και $[\alpha_2,\delta]\subset I_2$. Συνεπως,

$$\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f - \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f = \overline{\int_{\gamma}^{\alpha_2}} f + \overline{\int_{\alpha_2}^{\delta}} f - \underline{\int_{\gamma}^{\alpha_2}} f - \underline{\int_{\alpha_2}^{\delta}} f \leq \varepsilon(\alpha-\gamma)+\varepsilon(\delta-\alpha)=\varepsilon(\delta-\gamma),$$

όπως θέλαμε.

Από τα (β) και (γ) τα Βασικά λήμματα 1,2,3 και 4, θα δώσουν ότι το ίδιο το Δ ικανοποιεί την (*) και ιδιαίτερα έχουμε τότε ότι:

$$\overline{\int_{a}^{b}} f - \underline{\int_{a}^{b}} f \leq \varepsilon(b-a),$$

για κάθε ε>0, πράγμα που σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο Δ. Όσο για το Λήμμα 5, η οικογένεια **C,** που θα ορίσουμε, θα αποδειχθεί ότι είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ, μόνο με την βοήθεια του (α) παραπάνω. Μετά, η διαμέριση του Δ από στοιχεία της **C**, που εγγυάται το Λήμμα 5, θα μας δώσει το ζητούμενο, με τρόπο παρόμοιο, αλλά πολύ ευκολότερο και πιο άμεσο (χωρίς περιπτώσεις), με αυτόν του (β) παραπάνω. □

Θεώρημα 5.2.vi: *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα Δ=[a,b] και ισχύει ότι f=g' στο Δ, για κάποια συνάρτηση g, τότε ισχύει και*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a).$$

Απόδειξη:

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους επόμενους συμβολισμούς: $J=\int_a^b f(x)dx$, $\mathscr{P}$ για τις διάφορες διαμερίσεις του Δ, $\mathscr{E}$ για τις διάφορες επιλογές ενδιαμέσων σημείων από τα υποδιαστήματα μιας διαμέρισης, $\|\mathscr{P}\|$ για το πλάτος της εν λόγω διαμέρισης και $\Sigma(f,\mathscr{P},\mathscr{E})$ για το άθροισμα Riemann της f, που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη διαμέριση και την συγκεκριμένη επιλογή ενδιαμέσων σημείων.

Τότε, η ολοκληρωσιμότητα της f στο Δ, συνεπάγεται ότι:

(*) *Για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0, ώστε $|\Sigma(f,\mathscr{P},\mathscr{E})-J|<\varepsilon$, για κάθε διαμέριση $\mathscr{P}$ του Δ και για κάθε επιλογή ενδιαμέσων σημείων $\mathscr{E}$, με $\|\mathscr{P}\|<\delta$.*

Θεωρούμε τώρα ένα ε>0 και έστω δ>0, το αντίστοιχο δ, το οποίο μας δίδει η (*) όταν βάλουμε ε(b–a) αντί απλά ε. Για να αποδείξουμε το Θεώρημά μας, με την βοήθεια των Βασικών Λημμάτων 1 και 2, αρκεί να ορίσουμε, για κλειστά υποδιαστήματα του Δ, την επόμενη ιδιότητα P:

Αν $I=[\beta,\gamma]\subseteq\Delta$, τότε η P αληθεύει στο I, αν υπάρχει μία διαμέριση $\mathscr{P}=\{\beta=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\gamma\}$ του I και μία επιλογή ενδιαμέσων σημείων $\mathscr{E}=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$, με ξ_k στο $[x_{k-1},x_k]$, ώστε, $\|\mathscr{P}\|<\delta$ και $|g(x_k)-g(x_{k-1})-g'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|<\varepsilon(x_k-x_{k-1})$, $\forall$ k=1,2,...,n.

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι:

(α) Για κάθε $\xi\in\Delta$, υπάρχει, από την Πρόταση 3.3.11, ένα $\delta(\xi)>0$, ώστε, για κάθε x,y στο Δ, με $x\neq y$ και $\xi-\delta(\xi)<x\leq\xi\leq y<\xi+\delta(\xi)$, να ισχύει ότι: $\left|\dfrac{g(y)-g(x)}{y-x}-g'(\xi)\right|<\varepsilon$. Τότε, κάθε υποδιάστημα $I=[\beta,\gamma]$ του Δ, που περιέχει το ξ και έχει μήκος $\gamma-\beta<\min\{\delta,\delta(\xi)\}$, προφανώς ικανοποιεί την $|g(\gamma)-g(\beta)-g'(\xi)(\gamma-\beta)|<\varepsilon(\gamma-\beta)$. Δηλαδή, ισχύει η ιδιότητα P(I), χωρίς περαιτέρω διαμέριση του I.

(β) Αν η ιδιότητα P αληθεύει για δύο κλειστά υποδιαστήματα του Δ, με μη–κενή τομή, τότε, με ένα συλλογισμό πανομοιότυπο με εκείνο της συνεπαγωγής (iv)$\Rightarrow$(v), της παραγράφου 5.1.1, έχουμε ότι η P αληθεύει και στην ένωσή τους.

Από τα (α) και (β) τώρα, έπεται άμεσα ότι η P είναι τοπική και προσθετική σε διαστήματα ιδιότητα, οπότε, από το Βασικό Λήμμα 1, η P(Δ) είναι επίσης αληθής. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Βασικό Λήμμα 2, αρκεί στην ανισότητα, που εμφανίζεται στην P, να βάλουμε μικρότερο ή ίσον αντί απλά μικρότερο, ώστε να αληθεύει η P({a}).

Τώρα, η P(Δ) σημαίνει ότι υπάρχει διαμέριση $\mathscr{P}$ του Δ, που ορίζει τα υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, του Δ και επιλογή $\mathscr{E}=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιαμέσων σημείων της, ώστε να ισχύουν οι ανισότητες, που αναφέρει η διατύπωση της P. Έχουμε τότε, λόγω και της τριγωνικής ανισότητας, ότι:

$$|\Sigma(f,\mathscr{P},\mathscr{E})-[g(b)-g(a)]|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-[g(b)-g(a)]\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\{g'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-[g(x_i)-g(x_{i-1})]\}\right|<\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a).$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι το J δεν είναι ίσο με το $d=g(b)-g(a)$, τότε, από την (*) (υπενθυμίζουμε με $\varepsilon(b-a)$ αντί ε) και την τελευταία ανισότητα, έχουμε, για $\varepsilon=|J-d|/2(b-a)$, με πρόσθεση κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (όπου και οι δύο αναφέρονται στα τελευταία $\mathscr{P}$ και $\mathscr{E}$) και χρήση της τριγωνικής ανισότητας, ότι $|J-d|<|J-d|$, πράγμα άτοπο.

Τροποποιώντας τώρα κατάλληλα την προηγούμενη απόδειξη και χρησιμοποιώντας, αντί της ιδιότητας P, την

Αν $\beta<\gamma$, β,γ δύο σημεία του Δ, τότε $\beta\sigma\gamma$, αν υπάρχει μία διαμέριση $\mathscr{P} = \{\beta=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\gamma\}$ του I και μία επιλογή ενδιαμέσων σημείων $\mathscr{E}=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$, με ξ_k στο $[x_{k-1},x_k]$, ώστε, $\|\mathscr{P}\|<\delta$ και $\left|g(x_k)-g(x_{k-1})-g'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\varepsilon(x_k-x_{k-1})$, $\forall\ k=1,2,\ldots,n$,

ή την

$\boldsymbol{C} = \{I\colon I=[\beta,\gamma]\subseteq\Delta$ και αληθεύει ότι, υπάρχει μία διαμέριση $\mathscr{P} = \{\beta=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\gamma\}$ του I και μία επιλογή ενδιαμέσων σημείων $\mathscr{E}=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$, με ξ_k στο $[x_{k-1},x_k]$, ώστε, $\|\mathscr{P}\|<\delta$ και $\left|g(x_k)-g(x_{k-1})-g'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\varepsilon(x_k-x_{k-1})$, $\forall\ k=1,2,\ldots,n\}$,

έχουμε την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος, με την βοήθεια των Βασικών Λημμάτων 3 και 4, αντίστοιχα.

Τέλος, για το Βασικό Λήμμα 5, θεωρούμε, αντί της ιδιότητας P, μία συλλογή κλειστών υποδιαστήματων του Δ, που ορίζεται ως εξής:

$\boldsymbol{C}=\{I\colon I=[\beta,\gamma]\subseteq\Delta$, με $|\gamma-\beta|<\delta$ και υπάρχει ξ στο I, ώστε να ισχύει ότι $\left|g(\gamma)-g(\beta)-g'(\xi)(\gamma-\beta)\right|<\varepsilon(\gamma-\beta)$.

Η παραπάνω παρατήρηση (α) τότε, μας εξασφαλίζει ότι η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ, άρα υπάρχουν τα κατάλληλα $\mathscr{P}$ και $\mathscr{E}$, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, όπως προηγουμένως. □

Θα δείξουνε τώρα την επόμενη μορφή του αξιώματος Π_5 (Cantor).

<u>Θεώρημα 5.2.vii</u>: *Αν $\{F_n\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων του διαστήματος $\Delta=[\alpha,\beta]$, η τομή των οποίων είναι το κενό σύνολο, τότε κάποιο F_n, από τα σύνολα αυτά, είναι κενό.*

<u>Απόδειξη</u>:

Για να αποφύγουμε την επανάληψη των ίδιων επιχειρημάτων πολλές φορές, θα δείξουμε το Θεώρημα αυτό με ένα από τα Βασικά Λήμματα. Η απόδειξη με τα υπόλοιπα είναι παρόμοια και πολύ εύκολα μπορεί κανείς να την επαναλάβει. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Βασικό Λήμμα 3. Γι' αυτό, θεωρούμε μια σχέση σ στο Δ, ώστε, για δύο σημεία u,v του Δ, με

$u \leq v$, να ισχύει $u\sigma v$, αν και μόνο αν, υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε $[u,v] \cap F_n=\varnothing$.

Η σχέση σ είναι μεταβατική, αφού, αν $u\sigma v$ και $v\sigma w$, τότε υπάρχουν n,m, ώστε να ισχύει $[u,v] \cap F_n=\varnothing$ και $[v,w] \cap F_m=\varnothing$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $n<m$. Τότε, $F_m \subseteq F_n$, άρα $[u,v] \cap F_m=\varnothing$ και $[v,w] \cap F_m=\varnothing$, επομένως και $[u,w] \cap F_m=\varnothing$, δηλαδή $u\sigma w$.

Έστω τώρα ένα τυχαίο $x \in \Delta$. Αφού το x δεν ανήκει στην τομή των κλειστών F_n, η οποία είναι το κενό σύνολο, θα υπάρχει κάποιο F_k, που δεν περιέχει το x, άρα το x αυτό ανήκει στο συμπλήρωμα του F_k, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Συνεπώς, υπάρχει περιοχή N_x του x που περιέχει το x και $N_x \cap F_n=\varnothing$. Τώρα προφανώς, για κάθε $u \in N_x \cap [a,x]$ και $v \in N_x \cap [x,b]$, έχουμε ότι $[u,v] \cap F_n=\varnothing$. Από το Βασικό Λήμμα 3 έπεται τότε ότι $a\sigma b$, δηλαδή $[a,b] \cap F_n=\varnothing$, για κάποιο F_n, όπως θέλαμε. □

Ακολουθεί μια απόδειξη του αξιώματος Π_7 (ιδιότητα των Borel–Lebesgue, ή καμιά φορά και θεώρημα Heine-Borel), για την περίπτωση που το συμπαγές σύνολο είναι ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα.

<u>Θεώρημα 5.2.viii</u>: *Αν $\mathscr{C}$ είναι μια κάλυψη του Δ=[a,b] από ανοικτά σύνολα, τότε η $\mathscr{C}$ περιέχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη του Δ.*

<u>Απόδειξη</u>:

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα αυτό με την βοήθεια του Βασικού Λήμματος 5, αλλά ισχύουν και εδώ όσα είπαμε στην αρχή της απόδειξης του προηγουμένου Θεωρήματος. Θεωρούμε την συλλογή:

C*={I: I κλειστό υποδιάστημα του Δ, το οποίο περιέχεται σε κάποιο σύνολο της $\mathscr{C}$}.*

Τώρα, κάθε σημείο x του Δ ανήκει σε κάποιο σύνολο της $\mathscr{C}$, το οποίο είναι ανοικτό, άρα, για κάποιο ε>0, το διάστημα (x–ε,x+ε) θα ανήκει στην $\mathscr{C}$. Τότε, κάθε κλειστό υποδιάστημα I του Δ, που περιέχει το x και έχει μήκος μικρότερο του ε, θα περιέχεται στο (x-ε, x+ε), άρα το I θα ανήκει στη **C**. Συνεπώς, η **C** είναι μία πλήρης κάλυψη του Δ και επομένως περιέχει μια διαμέριση του Δ. Όμως, κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης αυτής περιέχεται σε ένα σύνολο της $\mathscr{C}$, που σημαίνει ότι η $\mathscr{C}$ περιέχει πεπερασμένο αριθμό συνόλων, τα οποία καλύπτουν το Δ. □

Θεώρημα 5.2.ix: (Κριτήριο του Dini) *Αν $\Delta=[a,b]$ και $\{f_n\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, οι οποίες συγκλίνουν κατά σημείο στο μηδέν στο Δ, τότε αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν στο Δ.*

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η ακολουθία των παραπάνω συναρτήσεων φθίνει, κατά σημείο, στο μηδέν, έπονται τα εξής:

Πρώτον, ισχύει ότι $f_n \geq 0$ και δεύτερον, αν για ένα x στο Δ, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n, για τον οποίο ισχύει ότι $f_n(x)<\varepsilon$, τότε η ανισότητα αυτή θα ισχύει και για όλους τους μεγαλύτερους του n φυσικούς αριθμούς, δηλαδή, η ύπαρξη ενός φυσικού αριθμού, για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα, συνεπάγεται την σύγκλιση στο μηδέν της ακολουθίας, στο σημείο αυτό.

Θεωρούμε τώρα την σχέση σ στο Δ, ώστε, για δύο σημεία του Δ, με $u\leq v$, να ισχύει uσv, αν και μόνον αν, υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε $f_n(x)<\varepsilon$, $\forall x\in[u,v]$ (πράγμα, που ουσιαστικά σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση).

Τότε, οι uσv και vσw εξασφαλίζουν δύο φυσικούς αριθμούς n_1 και n_2, εκ των οποίων ο μεγαλύτερος, μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός n, που, με την σειρά του εξασφαλίζει την uσw, δηλαδή, η σχέση σ είναι μεταβατική.

Επίσης, αν $x\in\Delta$, η $f_n(x)\to 0$, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός φυσικού αριθμού n, ώστε να ισχύει $f_n(x)<\frac{\varepsilon}{2}$. Από την άλλη, λόγω της συνέχειας της f_n, υπάρχει $\delta>0$, ώστε $\forall$ $s\in(x-\delta,x+\delta)$, να ισχύει $|f_n(s)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε, για κάθε $u\in(x-\delta,x]$ και για κάθε $v\in[x,x+\delta)$, έχουμε ότι uσv, διότι $f_n(s)=|f_n(s)| \leq |f_n(s)-f_n(x)|+|f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, για κάθε $s\in[u,v]$.

Συνεπώς, από το Βασικό Λήμμα 3, έπεται ότι ισχύει και η aσb, δηλαδή, η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν στο Δ, όπως θέλαμε.

Βέβαια και εδώ η παραπάνω απόδειξη μπορεί να τροποποιηθεί, ώστε να ολοκληρωθεί με κάποιο από τα άλλα Βασικά Λήμματα. □

Το επόμενο και τελευταίο Θεώρημα αυτής της παραγράφου, το αναφέρουμε μόνο για ενημέρωση και φυσικά για εκείνους τους αναγνώστες, οι οποίοι γνωρίζουν τις έννοιες που εμφανίζονται σ' αυτό. Σημειώνουμε όμως ότι, με την βοήθεια των Βασικών μας Λημμάτων, η απόδειξή του είναι ελάχιστα δυσκολότερη από τις αποδείξεις των ίδιων Θεωρημάτων, τα οποία είδαμε παραπάνω και στα οποία αντί «σχεδόν παντού» και «απολύτως συνεχής», είχαμε «παντού» και «συνεχής» στο Δ, αντίστοιχα. Από την άλλη μάλιστα, μια τέτοια απόδειξή του (βλέπε π.χ. [15], σελ.331-332), είναι μάλλον κατά πολύ ευκολότερη από τις συνήθεις αποδείξεις του, που υπάρχουν στα προχωρημένα συγγράμματα της Ανάλυσης.

Θεώρημα 5.2.x: (α) *Αν η f είναι φραγμένη στο Δ=[α,β] και σχεδόν παντού συνεχής στο Δ, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο Δ.*

(β) *Αν η f είναι απολύτως συνεχής στο Δ=[α,β] και επιπλέον* $f'(x)=0$ *σχεδόν παντού στο Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.*

5.2.2. Εφαρμογές της παρατήρησης του Καραθεοδωρή

Στη παράγραφο αυτή θα δώσουμε, με χρήση της παρατήρησης του Καραθεοδωρή, τις αποδείξεις των βασικών εκείνων Θεωρημάτων, τα οποία αναφέραμε στο πλάνο της αρχής της προηγούμενης παραγράφου.

Θεώρημα 5.2.α: *Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο ένα ανοικτό διάστημα Δ και c είναι ένα σημείο του Δ, στο οποίο υπάρχει η f'(c) και είναι* $f'(c)\neq 0$*, τότε η* $g=f^{-1}$ *είναι παραγωγίσιμη στο d=f(c) και ισχύει ότι* $g'(d)=[f'(c)]^{-1}$.

Απόδειξη:

Όπως γνωρίζουμε, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο ανοικτό διάστημα Δ, έπεται ότι θα είναι και 1-1, με σύνολο τιμών f(Δ), επίσης ένα ανοικτό διάστημα, το οποίο θα είναι και το πεδίο ορισμού της, επίσης συνεχούς, συνάρτησης $g=f^{-1}$. Από την παρατήρηση του Καραθεοδωρή, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο c, θα υπάρχει συνάρτηση φ, που είναι συνεχής στο c και ικανοποιεί, για όλα τα x του Δ, την σχέση $f(x)-f(c)=\varphi(x)(x-c)$ και επιπλέον ισχύει ότι $\varphi(c)=f'(c)$. Επειδή $f'(c)\neq 0$ και η f είναι 1-1, έπεται τότε ότι και $\varphi(x)\neq 0$, για κάθε x στο Δ.

Τώρα, για κάθε $y\in f(I)$, έχουμε ότι:

$$y-d=f(f^{-1}(y))-f(c)=\varphi[f^{-1}(y)][f^{-1}(y)-c)],$$

ή

$$f^{-1}(y)-f^{-1}(d)=\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y-d),$$

αφού $\varphi(x)\neq 0$ στο Δ.

Επιπλέον, η συνέχεια των συναρτήσεων f^{-1} στο d και φ στο $c=f^{-1}(d)$, συνεπάγεται την συνέχεια της $\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ στο d. Άρα, από Καραθεοδωρή και πάλι, η f^{-1} είναι επίσης παραγωγίσιμη στο d και μάλιστα $(f^{-1})'(d)=\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(d))}=\dfrac{1}{\varphi(c)}=\dfrac{1}{f'(c)}$, όπως θέλαμε. □

Στη συνέχεια θα δούμε μία απόδειξη του θεωρήματος του Fermat με χρήση και πάλι της παρατήρησης του Καραθεοδωρή.

<u>Θεώρημα 5.2.β</u> (Θεώρημα Fermat): *Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο α του Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε f'(α)=0.*

<u>Απόδειξη</u>:

Θα δείξουμε το θεώρημα όταν το f(α) είναι τοπικό μέγιστο (όταν στο α η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, η απόδειξη είναι ανάλογη, ή, πιο καλά, εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην συνάρτηση –f). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο α, θα υπάρχει συνάρτηση φ, συνεχής στο α, με $\varphi(\alpha)=f'(\alpha)$ και $f(x)-f(\alpha)=\varphi(x)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Επίσης, υπάρχει περιοχή N_α του α στο Δ, ώστε, για κάθε $x\in N_\alpha$, να ισχύει ότι $f(x)\leq f(\alpha)$. Εύκολα τότε έχουμε ότι, για $x\in N_\alpha$ με $x<\alpha$, ισχύει ότι $\varphi(x)\leq 0$, ενώ, για $x\in N_\alpha$ με $x>\alpha$, ισχύει ότι $\varphi(x)\geq 0$. Από την συνέχεια τώρα της φ στο α, έπεται άμεσα ότι $\varphi(\alpha)=0$, δηλαδή, $f'(\alpha)=0$. □

Κλείνουμε και αυτή την παράγραφο και συγχρόνως και την εργασία μας, με την απόδειξη του Κριτηρίου δευτέρας παραγώγου και πάλι με την Παρατήρηση του Καραθεοδωρή.

Θεώρημα 5.2.γ: *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ, για το οποίο ισχύει $f'(x_0)=0$ και υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε:*

(α) Αν $f''(x_0)<0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

(β) Αν $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Απόδειξη:

Προφανώς, αρκεί να δείξουμε μόνο το (α) του Θεωρήματος αυτού. Για ευκολία στον συμβολισμό θα αντικαταστήσουμε το x_0 με α, άρα, θα δείξουμε ότι οι $f'(α)=0$ και $f''(α)<0$, συνεπάγονται, μαζί με τις υπόλοιπες υποθέσεις του Θεωρήματος, ότι η f(α) είναι τιμή τοπικού μεγίστου της f. Πραγματικά, από την Παρατήρηση Καραθεοδωρή, έχουμε ότι υπάρχει συνάρτηση φ, συνεχής στο α, με $φ(α)=f''(α)$ και η οποία ικανοποιεί την σχέση: $f'(x)–f'(α)=φ(x)(x–α)$, για κάθε x του Δ, ή, αφού $f'(α)=0$, έχουμε τελικά ότι $f'(x) = φ(x)(x–α)$, για κάθε x του Δ.

Επειδή, $φ(α)=f''(α)<0$ και η φ είναι συνεχής στο α, θα υπάρχει ένα ανοικτό υποδιάστημα Ι του Δ, για κάθε x του οποίου, θα ισχύει $φ(x)<0$. Συνεπώς, για x στο Ι, με $x<α$, η παραπάνω σχέση δίδει $f'(x)>0$, ενώ, όταν είναι $x>α$, θα έχουμε $f'(x)<0$. Τότε, το Κριτήριο της πρώτης παραγώγου δίδει άμεσα το ζητούμενο. □

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Κ., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Μαθηματικά Β' Λυκείου, Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*, ΟΕΔΒ, 2002.

[2] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Άλγεβρα, Α' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1993.

[3] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Άλγεβρα, Β' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1993.

[4] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Άλγεβρα, Α' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1999.

[5] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Άλγεβρα, Β' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1999.

[6] Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., *Μαθηματικά, Γ' Ενιαίου Λυκείου, Θετικής Κατεύθυνσης*, ΟΕΔΒ, 1999.

[7] Βαβαλέσκος Θ., Μπούσγος Γ., *Μαθηματικά, Δ' Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως), Τόμος πρώτος*, ΟΕΔΒ, 1972.

[8] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Αλεξανδρής Ν., Παπακωνσταντίνου Δ.Α., Παπαμικρούλης Α., *Μαθηματικά, Άλγεβρα, Α' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1980.

[9] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Αλεξανδρής Ν., Παπακωνσταντίνου Δ.Α., Παπαμικρούλης Α., *Μαθηματικά, Α' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1987.

[10] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Φωτόπουλος Σ., *Μαθηματικά, Β' Λυκείου, Άλγεβρα, 1^{ο} τεύχος*, ΟΕΔΒ, 1983.

[11] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Φωτόπουλος Σ., Σολδάτος Κ., *Μαθηματικά, Γ' Λυκείου, Άλγεβρα*, ΟΕΔΒ, Ε έκδοση, 1987.

[12] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Γιαννίκος Χ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Φωτόπουλος Σ., Σολδάτος Κ., *Μαθηματικά, Γ' Λυκείου*, *Ανάλυση*, ΟΕΔΒ, 1985.

[13] Βερροίου Κ., *Μια συνέπεια του αξιώματος κιβωτισμού των πραγματικών αριθμών*, Ευκλείδης Γ', (5), Τόμος 3, τεύχος 1, (1984), σελ. 25–30.

[14] Botsko Michael W., *A unified treatment of various theorems in elementary analysis*, The American Mathematical Monthly, vol. 94, (1987), σελ. 450–452.

[15] Botsko Michael W., *The use of full covers in real analysis*, The American Mathematical Monthly, vol. 96, (1989), σελ. 328-333.

[16] Duren W. L., Jr, *Mathematical Induction in sets*, The American Mathematical Monthly, vol. 64, (1957), σελ. 19–22.

[17] Ford L. R., *Interval additive propositions*, The American Mathematical Monthly, vol.64, (1957), σελ.106–108.

[18] Jungck Gerald, *Interval Induction*, The American Mathematical Monthly, vol.73, (1966), σελ. 295–297.

[19] Θωμαΐδης Γ., *Προβλήματα διδασκαλίας της Άλγεβρας στην Α' Λυκείου*, Ευκλείδης Γ', τόμος 3, τεύχος 7, (1985), σελ. 4–11.

[20] Ιορδανίδης Κ., Καραγεώργος Δ., Κωστάκης Κ., Μακρίδης Α., Νασόπουλος Β., *Μαθηματικά, Β' Λυκείου, Επιλογής, τεύχος Α'*, ΟΕΔΒ, 1978.

[21] Κατσαργύρης Β., Μέντης Κ., Παντελίδης Γ., Σούρλας Κ., *Μαθηματικά, Γ' Λυκείου, Ανάλυση*, ΟΕΔΒ, 1993.

[22] Κατσοπρινάκης Μ., *Θέματα Ανάλυσης, Πραγματικές Συναρτήσεις*, σημειώσεις μαθήματος, Τμήμα Μαθηματικών, Παν/μιο Κρήτης.

[23] Κατσοπρινάκης Μ., Λάμπρου Μ., *Ο Ευκλείδης Γ' σας απαντά*, Ευκλείδης Γ', (5), Τόμος 3, τεύχος 1, (1984), σελ. 106.

[24] Κατσοπρινάκης Μ., Λάμπρου Μ., *Ο Ευκλείδης Γ' σας απαντά*, Ευκλείδης Γ', Τόμος 2, τεύχος 2(4), (1984), σελ. 120.

[25] Kuhn Stephen, *The Derivative a la Caratheodory*, The American Mathematical Monthly, vol. 98, (1991), σελ. 40-44.

[26] Μαυρογιάννης Νίκος Σ., *Τα θεωρήματα των Weierstrass, Bolzano, Rolle και η δομή του* $\mathbb{R}$, Ευκλείδης Γ', τεύχος 8, (1985), σελ. 37–47.

[27] Μαυρογιάννης Νίκος Σ., *Τα αξιώματα συνέχειας*, Μαθηματική Επιθεώρηση, Τόμος Δ, τεύχος 24, (1981) σελ. 94–126.

[28] Μητακίδης Γ., *Τα «Νέα Μαθηματικά»*, Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 25, (1983), σελ. 85–100.

[29] Moss R. M. F. and G. T. Roberts, *A creeping lemma*, The American Mathematical Monthly, vol. 75, (1968), σελ. 649-652.

[30] Μπούσγος Γ., Ταμβακλής Ι., *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*, *Τόμος πρώτος*, ΟΕΔΒ, 1968.

[31] Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμοι Ι, ΙΙα, ΙΙβ, εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, 1988.

[32] Νεγρεπόντης Σ., *Θεωρία Μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής*, Αθήνα, 1985.

[33] Ντζιώρας Η., *Μαθηματικά, Ε' Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως), Τόμος πρώτος*, ΟΕΔΒ, 1970.

[34] Ντζιώρας Η., *Μαθηματικά, Ε' Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως), Τόμος πρώτος*, ΟΕΔΒ, 1975.

[35] Ντζιώρας Η., *Μαθηματικά, Β' Λυκείου, Άλγεβρα*, ΟΕΔΒ, 1978.

[36] Ντζιώρας Η., Πανάκης Ι., *Μαθηματικά, Άλγεβρα, Τριγωνομετρία, Β' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1980.

[37] Παπασταυρίδη Σταύρου, *Η αξιωματική μέθοδος στα Μαθηματικά της Μέσης Εκπαίδευσης: Μας είναι πράγματι απαραίτητη;,* Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 25, (1983), σελ. 1–17.

[38] Πετρίδης Γ., *Η αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και το Θεώρημα του Rolle*, Ευκλείδης Γ', Τόμος 3, τεύχος 7, (1985), σελ. 76–83.

[39] Πηχωρίδης Σ. Κ., *Απειροστικός Λογισμός Ι (Πρόχειρες σημειώσεις)*, εκδόσεις Σύγχρονη Εποχή, Αθήνα, 1996.

[40] Rudin Walter, *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα, 2000.

[41] Shanahan Patrick, *A unified proof of several basic theorems of real Analysis*, The American Mathematical Monthly, vol. 79, (1972), σελ. 895–899.

[42] Shanahan Patrick, *Addendum to "A unified proof of several basic theorems of real Analysis*, The American Mathematical Monthly, vol. 81, (1974), σελ. 890–891.

[43] Spivak Michael, *Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1991.

[44] Στάικος Β., *Μαθηματικά, ΣΤ' Γυμνασίου (θετικής κατευθύνσεως), τόμος πρώτος*, ΟΕΔΒ, 1968, 1969.

[45] Στάικος Β., *Μαθηματικά, Γ' Λυκείου*, ΟΕΔΒ, 1979.

[46] Ταμπάκης Β., *Το αξίωμα της πληρότητας στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών*, Ευκλείδης Γ', Τόμος 2, τεύχος 1, (1984), σελ. 54–79.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

- **[12], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. I-VII**
- **[21], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. VIII-X**
- **[6], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. XI-XIV**

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ [12]

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το βασικό θεώρημα

3.18 Έστω g μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A, σ ένα σημείο συσσωρεύσεως του A και

$$\lim_{x\to\sigma} g(x) = \sigma_1$$

Έστω ακόμη μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού B, του οποίου σημείο συσσωρεύσεως είναι το σ_1. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{y\to\sigma_1} f(y) = L \qquad (2)$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει γενικά το όριο της $f\circ g$ στο σ και είναι L. Υπό τον όρο φυσικά ότι

η $f\circ g$ ορίζεται τουλάχιστο σε μια περιοχή του σ (α)

δηλαδή σ' ένα σύνολο A_1 της μορφής $(\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\}$.
Περιορίζοντας την $f\circ g$ καθώς και τη g στο A_1, η απόδειξη για την περίπτωση $\sigma,\ \sigma_1,\ L \in \mathbb{R}$ γίνεται ως εξής:

- * Υποθέτουμε πρώτα ότι *η f είναι συνεχής στο σ_1*. Τότε $L = f(\sigma_1)$ και η (2) σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε:

  (για κάθε $y \in B$) $$|y-\sigma_1| < \delta_1 \Rightarrow |f(y)-L| < \varepsilon \qquad (3)$$

  Εξάλλου η (1) σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

  (για κάθε $x \in A_1$) $$0 < |x-\sigma| < \delta \Rightarrow |g(x)-\sigma_1| < \delta_1 \qquad (4)$$

  και επειδή για κάθε $x \in A_1$, $g(x) \in B$, έχουμε λόγω της (3)

  $$0 < |x-\sigma| < \delta \Rightarrow |f(g(x))-L| < \varepsilon \qquad (5)$$

  που σημαίνει

  $$\lim_{x\to\sigma} (f\circ g)(x) = L$$

- Στη γενική περίπτωση (π.χ. όταν η f δεν ορίζεται στο σ_1) αντί της (3) έχουμε από τη (2):

  $$0 < |y-\sigma_1| < \delta_1 \Rightarrow |f(y)-L| < \varepsilon \qquad (3')$$

  Η απόδειξη συνεχίζεται όπως προηγουμένως αλλά με την **πρόσθετη προϋπόθεση** ότι για κάθε $x \in A_1$ είναι

  $$g(x) \neq \sigma_1 \qquad (\beta)$$

Η απόδειξη στις άλλες περιπτώσεις γίνεται με ανάλογη εργασία.
Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι:**

- **Η συνάρτηση g έχει στο σ όριο σ_1.**
- **Η συνάρτηση f έχει στο σ_1 όριο L.**

Αν σε μια περιοχή του σ ορίζεται η $f\circ g$ και είναι $g(x) \neq \sigma_1$, τότε

$$\lim_{\sigma} f\circ g = L$$

Το θεώρημα εφαρμόζεται (εφόσον εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις του) και όταν ειδικότερα μια τουλάχιστο από τις g, f είναι ακολουθία. Έστω π.χ. ότι η g είναι μια ακολουθία (α_ν). Έχουμε $A = \mathbb{N}$, $\sigma = +\infty$ και $\lim \alpha_\nu = \sigma_1$. Εξάλλου $\lim\limits_{y\to\sigma_1} f(y) = L$.

II

Ακόμη, σε μια περιοχή του $+\infty$, δηλαδή για $\nu > \kappa$, οι όροι α_ν ανήκουν στο B και είναι $\alpha_\nu \neq \sigma_1$. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, είναι και $\lim\limits_{\nu \to +\infty} f(\alpha_\nu) = L$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας για λόγους απλότητας το σ_1 με το σ και το B με A, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει στο σ όριο L, τότε για κάθε ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu \in A$, $\alpha_\nu \neq \sigma$ $(\nu > \kappa \in \mathbb{N})$ και $\lim \alpha_\nu = \sigma$, η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ των τιμών της συνάρτησης έχει επίσης όριο L[1].**

Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι, αν υπάρχει ακολουθία (α_ν) με όριο σ, τέτοια ώστε η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ **να μην έχει όριο,** τότε και η συνάρτηση f **δεν έχει όριο** στο σ.
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) με όριο σ, ενώ οι $f(\alpha_\nu)$ και $f(\beta_\nu)$ έχουν **διαφορετικά όρια.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα στην ειδική περίπτωση $\sigma = +\infty$ και $\alpha_\nu = \nu$ καταλήγουμε (επειδή $\lim \nu = +\infty$) στη συνεπαγωγή

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim f(\nu) = L}$$

Έτσι το όριο μιας ακολουθίας $f(\nu)$ μπορεί να βρεθεί ως όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$. (Όπως π.χ. θα δούμε στην εφαρμογή της § 4.20).

Συνέχεια και σύνθεση

$\boxed{3.19}$ Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος τη προηγούμενης § 3.18, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\sigma_1 = \lim\limits_{\sigma} g$, επειδή $\lim\limits_{\sigma_1} f = f(\sigma_1)$, θα έχουμε

$$\lim_{\sigma} (f \circ g) = f(\sigma_1)$$

Αν επιπλέον και η g είναι συνεχής στο σ, τότε θα είναι $\sigma_1 = g(\sigma)$ και συνεπώς

$$\lim_{\sigma} (f \circ g) = f(g(\sigma)) = (f \circ g)(\sigma)$$

που σημαίνει ότι η $f \circ g$ είναι συνεχής στο σ. Υποτίθεται φυσικά ότι ισχύει η (α) της § 3.18 που εδώ σημαίνει ότι η $f \circ g$ ορίζεται τουλάχιστο σε ένα διάστημα Δ με $\sigma \in \Delta$.

(1) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος αυτού.

Έτσι έχουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο σ του πεδίου ορισμού της και η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο g(σ) του πεδίου ορισμού της, τότε και σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι συνεχής στο σ.**

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ένα βασικό θεώρημα

3.21 Στο σχήμα 16 από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λείπει το τμήμα μεταξύ των σημείων με τετμημένες α και β για τα οποία είναι

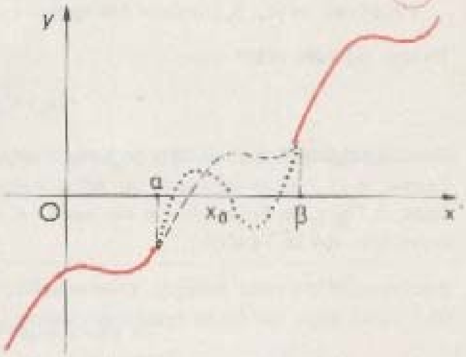
$$f(\alpha) < 0 \qquad \text{και} \qquad f(\beta) > 0$$

Αν θελήσουμε να συμπληρώσουμε με **συνεχή** γραμμή το τμήμα που λείπει, φαίνεται αναπόφευκτο ότι θα τμήσουμε υποχρεωτικά τον άξονα x΄x. Δηλαδή θα υπάρχει σημείο x_0 μεταξύ α και β με

$$f(x_0) = 0$$

Γενικά μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

16



ΘΕΩΡΗΜΑ ***Έστω ότι η συνάρτηση f:***

- ***είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β]***
- ***έχει τιμές ετερόσημες στα άκρα α και β, δηλαδή***

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$$

Τότε η f μηδενίζεται σ᾽ ένα τουλάχιστο σημείο του (α, β)

Απόδειξη. Έστω ότι είναι $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$. Θα προσδιορίσουμε $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε το κέντρο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του $[\alpha, \beta]$. Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Διαφορετικά:

- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0$, θέτουμε $\frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha_1$ και $\beta = \beta_1$
- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$, θέτουμε $\alpha = \alpha_1$ και $\frac{\alpha+\beta}{2} = \beta_1$

Και στις δύο περιπτώσεις ορίζεται διάστημα $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$ με:

$$f(\alpha_1) < 0, \qquad f(\beta_1) > 0 \qquad \text{και} \qquad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Εργαζόμαστε τώρα με το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ όπως προηγουμένως με το $[\alpha, \beta]$. Δηλαδή, αν είναι $f\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$

Στην αντίθετη περίπτωση ορίζουμε το κέντρο του $[\alpha_1, \beta_1]$ και όπως προηγουμένως βρίσκουμε διάστημα $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ με:

$$f(\alpha_2) < 0, \qquad f(\beta_2) > 0 \qquad \text{και} \qquad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2^2}$$

Συνεχίζοντας τις διαδοχικές αυτές «διχοτομήσεις» διαπιστώνουμε ότι:

- ή ένα από τα κέντρα των διαστημάτων είναι το x_0
- ή ορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, με πλάτος $\frac{\beta-\alpha}{2^\nu}$, τα οποία είναι κιβωτισμένα, αφού για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}] \subset [\alpha_\nu, \beta_\nu] \quad \text{και} \quad \lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = \lim \frac{\beta-\alpha}{2^\nu} = (\beta-\alpha) \lim \frac{1}{2^\nu} = 0$$

Επομένως, τα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ ορίζουν ένα αριθμό x_0.

Επίσης για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$f(\alpha_\nu) < 0, \quad f(\beta_\nu) > 0 \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα με άνω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $l \leqslant x_0$. Επίσης η (β_ν) είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $m \geqslant x_0$. Επειδή όμως $\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) = 0$, θα έχουμε $l = m$ και αφού $l \leqslant x_0 \leqslant m$ θα είναι $l = x_0 = m$. Δηλαδή το x_0 είναι το κοινό όριο των (α_ν) και (β_ν).

Επειδή τώρα η f είναι συνεχής, οι ακολουθίες με γενικούς όρους $f(\alpha_\nu)$ και $f(\beta_\nu)$ έχουν κοινό όριο $f(x_0)$. Αλλά λόγω των (1) θα έχουμε συγχρόνως

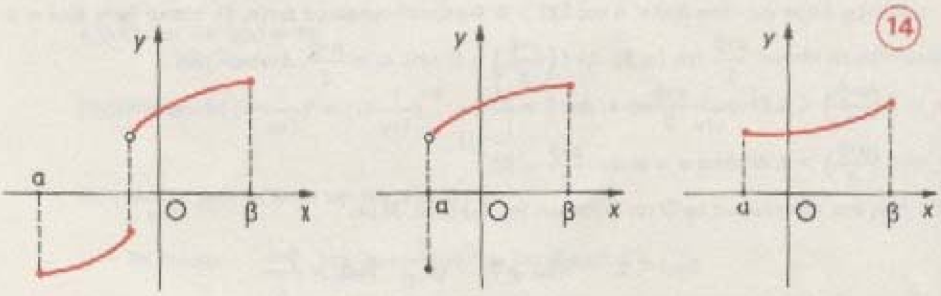
$$f(x_0) \leqslant 0 \qquad \text{και} \qquad f(x_0) \geqslant 0$$

και συνεπώς $f(x_0) = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να ισχύει το θεώρημα πρέπει να πληρούνται και οι δυο προϋποθέσεις του. Έτσι π.χ. στα σχήματα 14α,β έχουμε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

14



$f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$
f ασυνεχής στο $[\alpha, \beta]$
α

$f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$
f συνεχής στο $(\alpha, \beta]$
β

$f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$
f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μπορούμε να εντοπίσουμε μια ρίζα της εξίσωσης $x^4+30x-29 = 0$.

V

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = x^4+30x-29$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχουμε $f(0) = -29 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$. Επομένως υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0,1)$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(0,9) = 0,9^4+27-29 < 1+27-29 = -1 < 0$ και επειδή $f(1) > 0$ υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης μεταξύ 0,9 και 1. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε ως x_0 το 0,9 με προσέγγιση δεκάτου.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

3.22 Άμεση συνέπεια του θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου είναι το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f:**

- **είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με**
- **$f(\alpha) \neq f(\beta)$**

Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

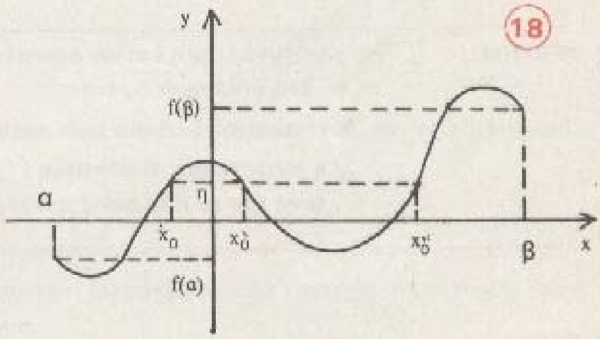
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι είναι $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\eta\in(f(\alpha), f(\beta))$ υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$ (σχ. 18)

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x)-\eta$$

η οποία:

- είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με
- $g(\alpha) = f(\alpha)-\eta < 0$,
  $g(\beta) = f(\beta)-\eta > 0$



Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$. Τότε θα είναι $f(x_0)-\eta = 0$ και συνεπώς $f(x_0) = \eta$.

Η περίπτωση $f(\alpha) > f(\beta)$ εξετάζεται ομοίως.

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως **θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών** και ισχύει, όπως το θεώρημα της §3.21, μόνο όταν η f είναι συνεχής σε **κλειστό** διάστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Μια μη σταθερή συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα Δ** (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) **σε διάστημα.**

Πράγματι, αν η_1, η_2 είναι δυο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου $f(\Delta)$, τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$, τέτοια ώστε $f(\alpha) = \eta_1$ και $f(\beta) = \eta_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα, αν π.χ. $f(\alpha) < f(\beta)$, στο $f(\Delta)$ περιέχεται το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)] = [\eta_1, \eta_2]$. Αυτή η ιδιότητα του $f(\Delta)$ είναι χαρακτηριστική των διαστημάτων(1) και συνεπώς το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.

Σημείωση

Είναι φανερό ότι, αν η f είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή π.χ. c, απεικονίζει το Δ στο μονομελές σύνολο $\{c\}$.

Μονοτονία και συνέχεια

3.23 Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη, συνεχή και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο). Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η f απεικονίζει το Δ στο **διάστημα** $f(\Delta)$. Αν θεωρήσουμε ως σύνολο αφίξεως της f το $f(\Delta)$, η f είναι συνάρτηση «επί» αλλά και (§ 1.11) «1 - 1».
Αποδεικνύεται(2) ότι και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.
Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε:**

- **είναι μια «1 - 1 και επί» απεικόνιση του Δ στο διάστημα $f(\Delta)$.**
- **η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη *(με το ίδιο είδος μονοτονίας)* στο $f(\Delta)$.**

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

3.24 Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ορισμένη σε **κλειστό** διά-

(1) Αποδεικνύεται, δηλαδή, ότι ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα, αν και μόνο αν, για κάθε $\eta_1, \eta_2 \in E$ είναι $[\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Η απόδειξη παραλείπεται.

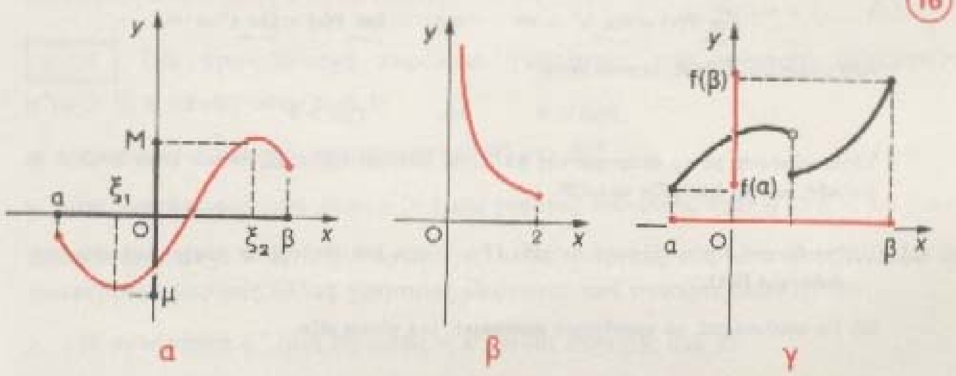
στημα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο των τιμών της έχει και *μέγιστο* και *ελάχιστο*. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται[1] το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β]. Τότε υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να ισχύει:**

$$f(\xi_1) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, στο διάστημα [α,β] η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο $M = f(\xi_2)$ και ελάχιστο $\mu = f(\xi_1)$. Αλλά σύμφωνα με το θεώρημα της §3.22, αν υποθέσουμε $\mu \neq M$, η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ μ και Μ (σχ. 16α). Άρα η εικόνα του [α,β] με την f είναι το [μ,Μ].

16



Σημείωση

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και στην ειδική περίπτωση $\mu = M$, που τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο [α,β].

Έχουμε λοιπόν το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνεχή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα της μορφής (α, β) ή (α, β] ή [α, β), δεν παρουσιάζει πάντοτε μέγιστο ή ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (σχ. 16β) είναι συνεχής στο διά-

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

στημα (0,2], ενώ δεν έχει μέγιστο.

Το ίδιο συμβαίνει και με την ταυτοτική συνάρτηση $\iota(x) = x$ στο (0,1).

2. Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος με μια συνάρτηση f μπορεί να είναι κλειστό διάστημα, χωρίς η f να είναι συνεχής (σχ. 16γ).

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ [21]

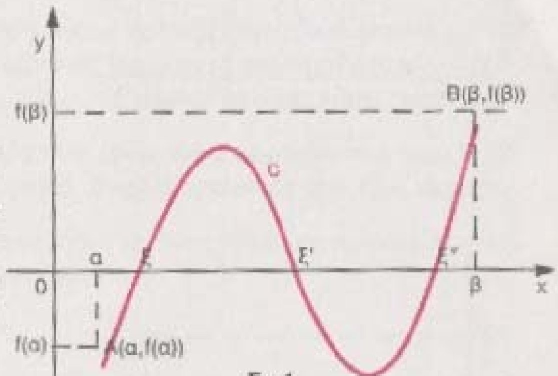
3.4 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες που είναι χρήσιμες για τις εφαρμογές. Οι ιδιότητες αυτές εποπτικά είναι προφανείς, οι αποδείξεις τους όμως, γενικά είναι δύσκολες.

• Θεώρημα Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση C μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$ η C θα τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Συγκεκριμένα ισχύει:



Σχ.1

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f
- είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

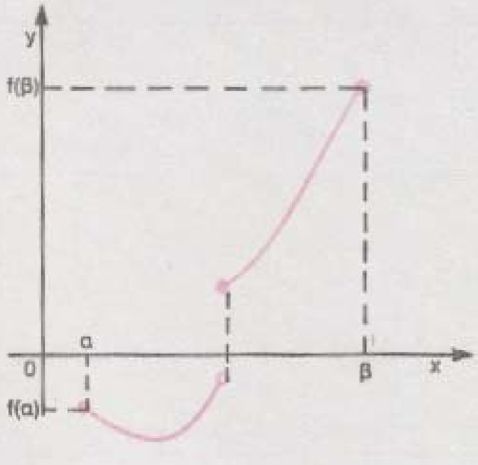
$$f(\xi)=0$$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

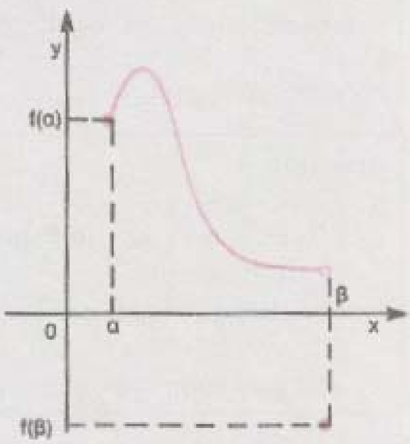
Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες από μία ρίζες της, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

2. Όταν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, όπως φαίνεται στα σχήματα 2 και 3.



Σχ.2



Σχ.3

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano, είναι γνωστό ως **θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής** και δίνει εποπτικά αυτό που συνήθως εννοούμε με τον όρο συνεχής συνάρτηση ή συνεχής καμπύλη.

Θεώρημα

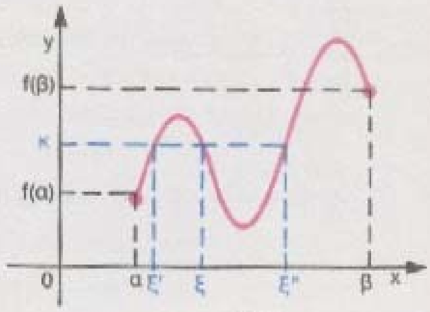
Αν μια συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό k μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = k$.

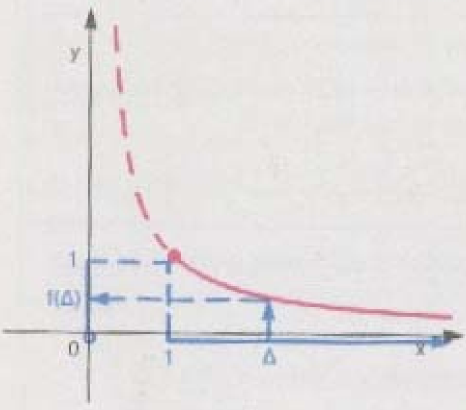
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε $f(\alpha) < k < f(\beta)$ (Σχ.4).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - k$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για την οποία ισχύουν
$g(\alpha) = f(\alpha) - k < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - k > 0$,
δηλαδή $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = f(\xi) - k = 0$, δηλαδή $f(\xi) = k$. ∎

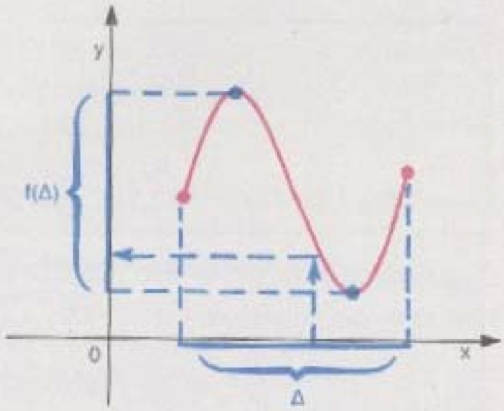


Σχ.4

Στα παρακάτω σχήματα 5 και 6 φαίνεται ότι η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.



Σχ.5



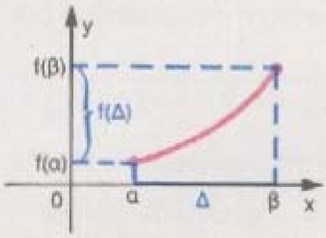
Σχ.6

Πράγματι με τη βοήθεια του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής αποδεικνύεται ότι:

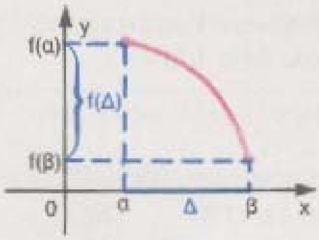
Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ, το $f(\Delta)$ είναι μονοσύνολο.

Είναι φανερό ότι αν η f είναι συνεχής και μονότονη στο $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε

- $f(\Delta)=\left[f(\alpha),\ f(\beta)\right]$, αν f αύξουσα (Σχ.8).
- $f(\Delta)=\left[f(\beta),\ f(\alpha)\right]$, αν f φθίνουσα (Σχ.9).



Σχ.8

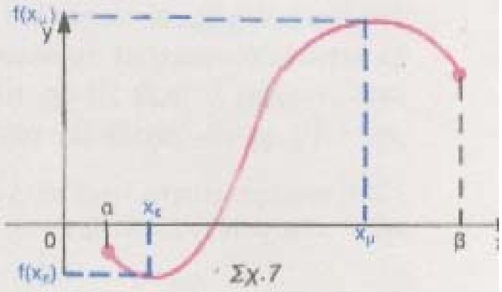


Σχ.9

• Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής

Στο σχήμα (7) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στο x_ε και μέγιστη τιμή στο x_μ.

Γενικά ισχύει:



Σχ.7

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_\varepsilon,\ x_\mu\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$f(x_\varepsilon)\le f(x)\le f(x_\mu),\ \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta],$$

δηλαδή η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Επισημαίνουμε ότι το προηγούμενο θεώρημα ισχύει μόνο στην περίπτωση κλειστών διαστημάτων. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(1,2)$, όμως σε κανένα σημείο του διαστήματος δεν παίρνει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Η επόμενη πρόταση συνδέει τη **συνέχεια** και τη **μονοτονία.**

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

Η απόδειξη παραλείπεται.

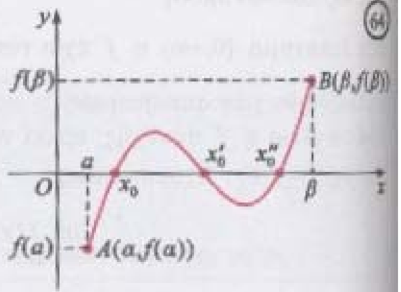
Υπενθυμίζουμε ότι η f^{-1} υπάρχει, αφού η f είναι γνησίως μονότονη.

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ [6]

Δυο βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε διαστήματα εκφράζοντα από τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

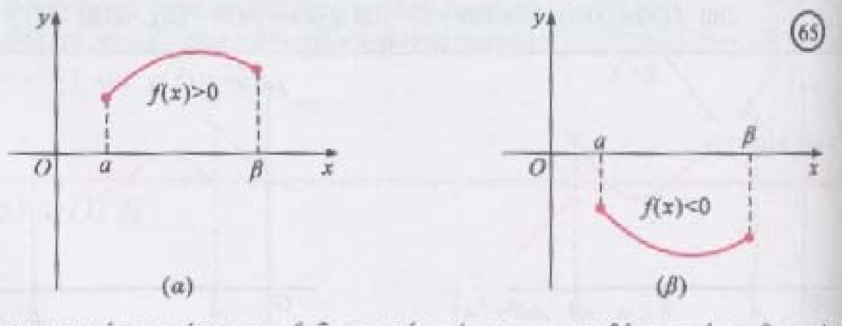
$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτ διάστημα (α,β).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζετα σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

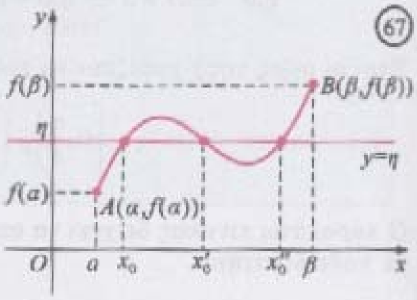
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

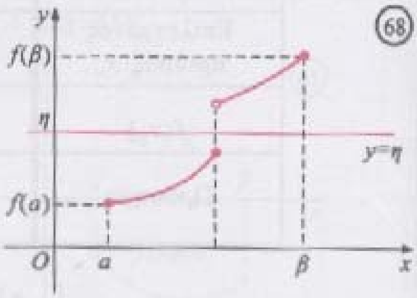
$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■

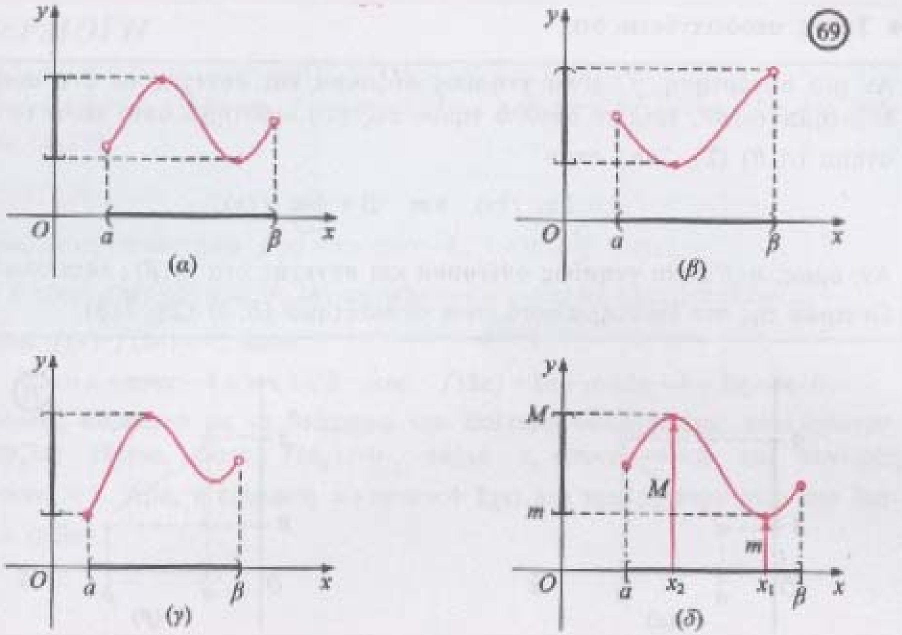
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

> Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

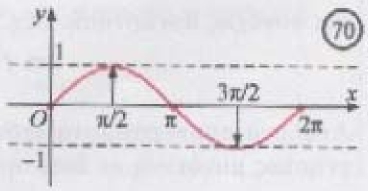
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [\alpha, \beta].$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.

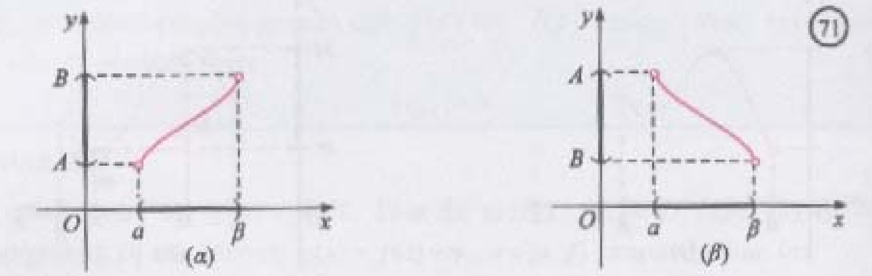


- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

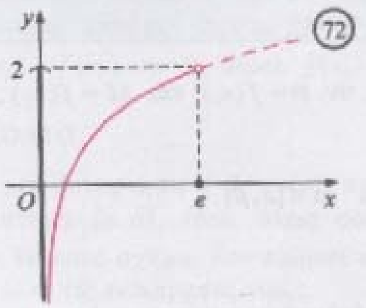
Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).

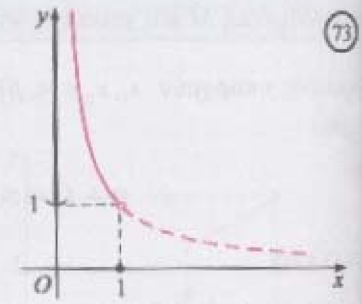


Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x+1$, $x\in(0,e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty,2)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x)=2.$$





— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=1.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

I

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ [12]

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

4.9 Στα επόμενα θα θεωρήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο $x_0 \in \Delta$. Για το άθροισμα δυο τέτοιων συναρτήσεων έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της f+g μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε και οι f+g, $f_1+f_2+...+f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

- $(f+g)' = f'+g'$
- $(f_1+f_2+...+f_k)' = f_1'+f_2'+...+f_k'$

Η δεύτερη περίπτωση του πορίσματος αποδεικνύεται επαγωγικά.

Παράγωγος γινομένου

4.10 Επίσης για το γινόμενο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της $f\cdot g$ μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.7) συνεχής και συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Εξάλλου, επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από την παραπάνω ισότητα θα έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)\right]+\lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, τότε και οι $f\cdot g$, λf, $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k$, f^k είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

1. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
2. $(\lambda\cdot f)' = \lambda f'$
3. $(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k)' = \sum\limits_{i=1}^{k}(f_1\cdot\ldots\cdot f_{i-1}f_i'f_{i+1}\cdot\ldots\cdot f_k)$
4. $(f^k)' = kf^{k-1}f'$

Πράγματι, η περίπτωση 1 προκύπτει άμεσα από το θεώρημα και η 2 από την 1, όταν η g είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή λ. Η περίπτωση 3 αποδεικνύεται επαγωγικά, ενώ η 4 είναι συνέπεια της 3.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

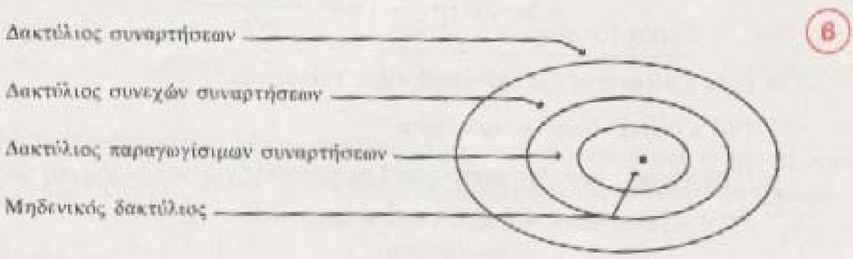
Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα της § 4.9 έχουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ

είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

Επειδή ακόμη το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Δ είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό, συμπεραίνουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ᾽ ένα κοινό διάστημα Δ είναι δακτύλιος.



Τα ίδια συμβαίνουν και με το σύνολο των συναρτήσεων που είναι 2, 3, ..., ν φορές παραγωγίσιμες στο Δ, καθώς και γενικότερα για τις συνεχείς συναρτήσεις στο Δ (§ 3.14).

Στο σχήμα 6 φαίνονται όλοι οι παραπάνω «υποδακτύλιοι» του δακτυλίου $F_Δ$ των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

Παράγωγος πηλίκου

4.11 Για το πηλίκο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in Δ$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και είναι**

1. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

IV

Απόδειξη

1. Ο λόγος μεταβολής της $\frac{1}{g}$ μεταξύ x_0, $x_0+h\in\Delta$ με $h\neq 0$ είναι

$$\lambda(x_0+h)=\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)-\frac{1}{g}(x_0)}{h}=\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}=\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+h)}$$

$$=-\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι συνεχής και συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h)=g(x_0)$. Έτσι από την προηγούμενη ισότητα θα έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=-\frac{1}{g(x_0)\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=-\frac{1}{[g(x_0)]^2}\cdot g'(x_0).$$

2. Έχουμε $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$

$$=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $g(x)\neq 0$, τότε και οι $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και**

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2},\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

V

Για την παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων θα αποδείξουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω g και f δυο συναρτήσεις από τις οποίες η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και**

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

***Απόδειξη.** Έστω Δ ένα διάστημα στο οποίο ορίζεται η $f \circ g$. Ο λόγος μεταβολής της $f \circ g$ μεταξύ x_0, $x \in \Delta$ γράφεται για κάθε $x \neq x_0$:

$$\lambda(x) = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \quad (1)$$

- Όταν $g(x) \neq g(x_0)$, η (1) γράφεται

$$\lambda(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Όταν $g(x) = g(x_0)$, τότε $\lambda(x) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση F ορισμένη στο πεδίο ορισμού της f με

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & \text{αν } y \neq y_0 \\ f'(y_0), & \text{αν } y = y_0 \end{cases}$$

Τότε η (2) γράφεται

$$\lambda(x) = F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

- Αλλά η (3) εξακολουθεί να ισχύει και όταν $g(x) = g(x_0)$ επειδή το δεύτερο μέλος της μηδενίζεται.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\lim_{x \to x_0} \lambda(x)$ από την (3).

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, έχουμε $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$

Εξάλλου η F είναι συνεχής στο $y_0 = g(x_0)$ επειδή

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = F(y_0)$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της § 3.19, η $F \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 και

$$\lim_{x \to x_0} F(g(x)) = F(g(x_0)) = f'(g(x_0))$$

Επομένως έχουμε τελικά:

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \lambda(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, τότε (§ 3.22, Πόρισμα) το $g(\Delta)$ είναι επίσης διάστημα. Αν λοιπόν και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

τα γειτονικά σημεία, εκατέρωθεν του M_0, είναι «κάτω» από την εφαπτομένη που διέρχεται από το M_0, το οποίο έχει τη μέγιστη τεταγμένη. Έτσι η εφαπτομένη πρέπει να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x που σημαίνει ότι $f'(x_0) = 0$.

Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f:**

- **ορίζεται σ' ένα *ανοικτό* διάστημα Δ**
- **παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$**
- **είναι παραγωγίσιμη στο x_0**

τότε $$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Τότε, αφού το Δ είναι ανοικτό διάστημα, θα υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subseteq \Delta$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ να είναι $f(x) \leqslant f(x_0)$

ή
$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$$

Ειδικότερα, αν $x_0 < x < x_0+\delta$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.5)

$$f'(x_0) = f'_\delta(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

δηλαδή
$$f'(x_0) \leqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως είναι $x_0-\delta < x < x_0$, θα έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και συνεπώς

$$f'(x_0) = f'_\alpha(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

δηλαδή
$$f'(x_0) \geqslant 0 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f'(x_0) = 0$

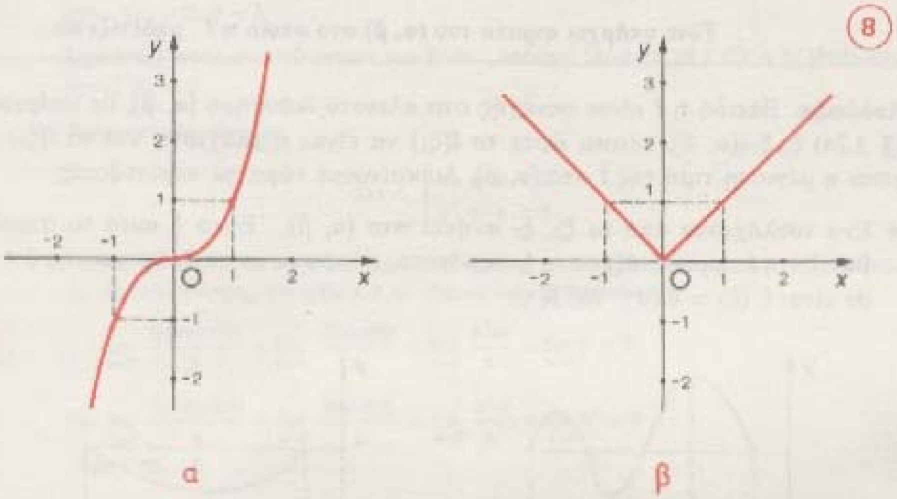
Ανάλογη είναι η απόδειξη για την περίπτωση τοπικού ελαχίστου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο **ανοικτού** διαστήματος είναι αναγ-

καία. Π.χ. η συνάρτηση $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+1$, έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$, γιατί για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) = 2x+1 \leqslant 2 \cdot 1+1 = 3 = f(1)$, αλλά η παράγωγός της στο σημείο αυτό είναι $f'(1) = 2 \neq 0$.

2. Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ (σχ. 8α) έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ που η τιμή της στο $x_0 = 0$ είναι $f'(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 < 0$, ενώ για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = x^3 > 0$.



3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (§ 4.4, πρδ. 3). Όμως έχει ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) = |x| \geqslant 0 = \varphi(0)$ (σχ. 8β).

Ασκήσεις: 39

Θεώρημα Rolle

4.14 Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αναζήτηση ενός τοπικού ακροτάτου της f σ' ένα διάστημα Δ, αν εξαιρέσουμε τα άκρα του διαστήματος και τα σημεία στα οποία η f' δεν ορίζεται, θα πρέπει να γίνει μεταξύ των σημείων εκείνων στα οποία μηδενίζεται η παράγωγός της. Στα επόμενα μαθήματα θα φανεί η ολοένα και μεγαλύτερη σημασία της παραγώγου για τη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ένα πρώτο βήμα αποτελεί το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *Rolle* **Έστω η συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι:**

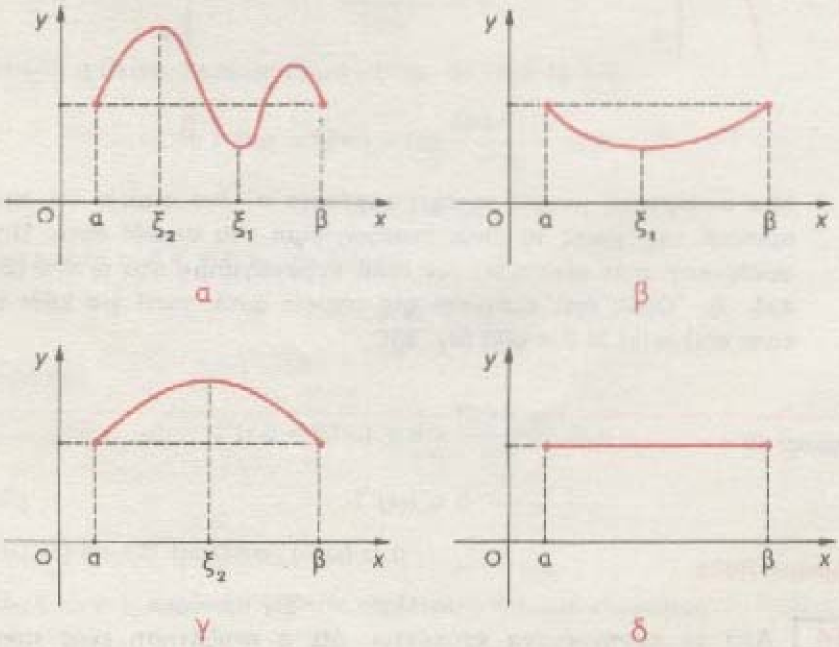
- **είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β],**
- **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)**
- **$f(\alpha) = f(\beta)$**

Τότε υπάρχει σημείο του (α, β) στο οποίο η f΄ μηδενίζεται.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], θα υπάρχουν (§ 3.24) $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε το $f(\xi_1)$ να είναι η ελάχιστη και το $f(\xi_2)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f στο [α, β]. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Ένα τουλάχιστο από τα ξ_1, ξ_2 ανήκει στο (α, β). Έστω ξ αυτό το σημείο. Επειδή η f παρουσιάζει στο ξ ακρότατο, σύμφωνα με το θεώρημα της § 4.13 θα είναι $f'(\xi) = 0$ (σχ. 9α, β, γ)

9



- Τα ξ_1, ξ_2 δεν ανήκουν στο (α, β), οπότε είναι τα άκρα α, β του διαστήματος. Τότε, επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f συμπίπτουν και

συνεπώς η f θα είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή f(α) (σχ. 9δ). Έτσι όμως (§ 4.8, II) θα είναι

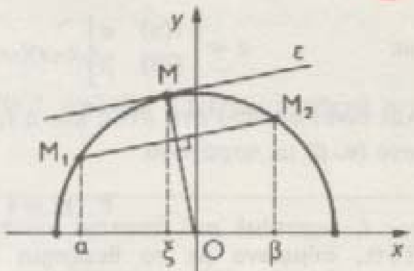
$$\forall x \in (\alpha, \beta), \quad f'(x) = 0$$

Θεώρημα μέσης τιμής

4.15 Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι μια προϋπόθεση για να ισχύει το θεώρημα του Rolle είναι $f(\alpha) = f(\beta)$. Θα εξετάσουμε γενικά την περίπτωση που τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ μπορεί να είναι και διαφορετικά με ένα απλό γεωμετρικό παράδειγμα. Το ημικύκλιο $x^2+y^2 = \rho^2$, $y \geqslant 0$ (σχ. 12) είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

12

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$$



η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(-\rho, \rho)$. Αν $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$, με $\alpha < \beta$, είναι δυο σημεία του ημικυκλίου, τότε η ευθεία M_1M_2 θα έχει συντελεστή διευθύνσεως

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Από τη γεωμετρία ξέρουμε, ότι η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο μέσο M του τόξου M_1M_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2. Αν ξ είναι η τετμημένη του M, θα είναι $\alpha < \xi < \beta$ και ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι $f'(\xi)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Ειδικότερα, αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f'(\xi) = 0$, συμπέρασμα που συμφωνεί με το θεώρημα Rolle.

Γενικά θα αποδείξουμε το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, που αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Rolle, και είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *μέσης τιμής*

Αν η συνάρτηση f είναι

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),**

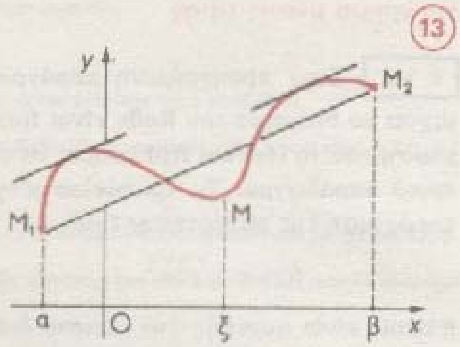
τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \tag{3}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση F με[1]

(1) Η ορίζουσα παριστάνει το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου M_1MM_2 και φυσικά είναι μηδέν, όταν $M = M_1$ ή $M = M_2$.

X



$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

για την οποία είναι $F(\alpha) = F(\beta)[=0]$.

Είναι όμως

$$F(x) = f(x)(\alpha-\beta)-x[f(\alpha)-f(\beta)]+c$$

με $$c = \begin{vmatrix} f(\alpha) & \alpha \\ f(\beta) & \beta \end{vmatrix}$$

και είναι φανερό ότι, όπως και η f, είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$F'(x) = f'(x)(\alpha-\beta) + f(\beta)-f(\alpha) \qquad (4)$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$, ή λόγω της (4), $0 = f'(\xi)(\alpha-\beta) + f(\beta) - f(\alpha)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ισότητα (3) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot f'(\xi)}$$

2. Το θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης C της f, υπάρχει ξ μεταξύ α και β τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2 (σχ. 13).

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51, 52

Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

4.16 Πριν δούμε τις πολλές και χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα αναφέρουμε μερικές άμεσες συνέπειές του. Συγκεκριμένα:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.**

Απόδειξη. Έστω x_1, x_2 δυο *οποιαδήποτε* σημεία του Δ. Τότε η f ικανοποιεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής και συνεπώς θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

Επειδή όμως $f'(x_0) = 0$, θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες στο Δ**
- $f' = g'$

Τότε υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$f = g + u$$

Πράγματι, έχουμε για κάθε $x \in \Delta$:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow (f' - g')(x) = 0 \Rightarrow (f-g)'(x) = 0$$

Συνεπώς η f-g είναι μια σταθερή στο Δ συνάρτηση u. Άρα $f = g + u$.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

4.21 Στην § 1.10είδαμε ότι το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης f σ' ένα **διάστημα** Δ καθορίζεται από το πρόσημο του λόγου μεταβολής της. Π.χ. αν η f είναι αύξουσα στο Δ, τότε για κάθε $x_0, x \in \Delta$ θα είναι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, τότε από την (1) προκύπτει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0 \in \Delta$.

Αντιστρόφως, αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$, τότε η f θα είναι αύξουσα στο Δ. Πράγματι, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, θα υπάρχει ξ μεταξύ x_1 και x_2, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

και επειδή $f'(\xi) \geqslant 0$, θα είναι $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0$, που σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα στο Δ.

Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε, όταν η f είναι στο Δ φθίνουσα. Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Τότε η f είναι:**

- **αύξουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$**
- **φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) \leqslant 0$**

Ειδικότερα αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) > 0$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, λόγω της (2), θα είναι επίσης και $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, που σημαίνει ότι η f είναι γνη-

σίως αύξουσα στο Δ.

Ομοίως βρίσκουμε ότι, αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Έχουμε λοιπόν και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι:**

- **$f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ**
- **$f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ**

(Για $x = 0$ έχουμε ελάχιστο της φ, γιατί $0 \leq \varphi(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του θεωρήματος 2 δεν αληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$, ενώ είναι $f'(0) = 0$.

Ασκήσεις: 61, 62

Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

4.22 Με βάση τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να εντοπίσουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα** ***ανοικτό*** **διάστημα[1] (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Η f παρουσιάζει στο x_0**

1. τοπικό μέγιστο, αν

$$\forall\, x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad \forall\, x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \leq 0$$

2. τοπικό ελάχιστο, αν

$$\forall\, x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad \forall\, x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \geq 0$$

Απόδειξη

1. Αφού $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$, η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και συνεπώς

$$\forall\, x \in (\alpha, x_0], \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Ομοίως, η f είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ και συνεπώς

$$\forall\, x \in [x_0, \beta), \quad f(x_0) \geq f(x)$$

Δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) \leq f(x_0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

2. Εργαζόμαστε ομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$ έχει παράγωγο f' με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

(1) Δεν αποκλείονται οι περιπτώσεις $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$.

4.23 Ένα άλλο κριτήριο για την εύρεση των ακροτάτων[1] μιας συνάρτησης (αν υπάρχουν) αποτελεί και το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Λ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Lambda$ είναι $f'(x_0) = 0$.**

1. **Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.**
2. **Αν $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.**

Απόδειξη

Έχουμε: $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ και επειδή $f'(x_0) = 0$

(1) Συνήθως το τοπικό ακρότατο αναφέρεται απλούστερα ως ακρότατο.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

1. Έστω $f''(x_0) > 0$. Τότε από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει (§ 3.11, 6) ότι υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ με $x \neq x_0$ να είναι:

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Έτσι για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ θα έχουμε $f'(x) < 0$, ενώ για κάθε $x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ θα έχουμε $f'(x) > 0$. Και επειδή $f'(x_0) = 0$, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, το $f(x_0)$ θα είναι ελάχιστο της f.

2. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ομοίως.

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ ΤΟ [21]

6.6 Κανόνες παραγώγισης

Στα παραπάνω παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό για να υπολογίσουμε την παράγωγο ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων. Οι προτάσεις που ακολουθούν μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τις παραγώγους και άλλων πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.
Στα παρακάτω θεωρούμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Δ, που είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

• Παράγωγος αθροίσματος

Πρόταση 1
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_o \in \Delta$ τότε και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει

$$(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$$

Απόδειξη

Για $x \in \Delta$, με $x \neq x_o$ ισχύει

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, έχουμε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)+g'(x_o)$$

που σημαίνει ότι

$$(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o) \quad \blacksquare$$

Προφανώς, αν οι f, g είναι παραγωγισίμες στο Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$\boxed{\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)}$$

Αν οι $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε γενικότερα ισχύει

$$(f_1+f_2+\ldots+f_\kappa)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_\kappa'(x), \quad \kappa \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $(x^5+\eta\mu x)'=(x^5)'+(\eta\mu x)'=5x^4+\sigma\upsilon\nu x\,,\ x \in \mathbb{R}$
- $(\ln x+\sigma\upsilon\nu x+x^3+2)'=(\ln x)'+(\sigma\upsilon\nu x)'+(x^3)'+(2)'=\frac{1}{x}-\eta\mu x+3x^2,\ x>0.$

• Παράγωγος γινομένου

Πρόταση 2

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_o \in \Delta$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o)$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \Delta$, με $x \neq x_o$, ισχύει

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x) + f(x_o) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot g(x) + f(x_o) \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o},$$

οπότε επειδή οι f,g είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς στο x_o έχουμε

$$\lim_{x \to x_o} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim_{x \to x_o} g(x) + f(x_o) \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o).$$ ■

Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$(x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1, \quad x \in (0, +\infty).$

Ανάλογος τύπος ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις π.χ. για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)}$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$(x^2 \ln x\, \eta\mu x)' = (x^2)' \ln x\, \eta\mu x + x^2 (\ln x)'\, \eta\mu x + x^2 \ln x (\eta\mu x)' =$

$\quad = 2x\ln x\, \eta\mu x + x\, \eta\mu x + x^2 \ln x\, \sigma\upsilon\nu x$

• Παράγωγος Πηλίκου

Πρόταση 3

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει:

i) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

ii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$, είναι $g(x) \neq 0$, τότε

(i) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

(ii) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

6.7 Παράγωγος σύνθετης-αντίστροφης συνάρτησης

• Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν με τη βοήθεια των προηγούμενων κανόνων παραγώγισης προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^8$ και $g(x) = \ln(x^2 + 1)$, θα διαπιστώσουμε ότι ο υπολογισμός των $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι πολύ επίπονος.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων συναρτήσεων όπως οι παραπάνω, που είναι σύνθεση άλλων συναρτήσεων, ισχύει η επόμενη πρόταση της οποίας η απόδειξη παραλείπεται.

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο f(x), τότε και η σύνθεσή τους g∘f είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)^{(1)}$$

Επισημαίνουμε ότι στον παραπάνω τύπο με $g'(f(x))$ εννοούμε το $\left.\frac{dg(u)}{du}\right|_{u=f(x)}$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Πρόταση 2

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x_o)\neq 0$, $x_o\in\Delta$, τότε υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_o)$.

Η απόδειξη παραλείπεται.

• Θεώρημα Fermat

Η επόμενη πρόταση εκφράζει την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, σημείο τοπικού ακροτάτου.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση $f:\Delta\rightarrow\mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_o του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε

$$f'(x_o)=0$$

Απόδειξη

Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο. Τότε υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο, ώστε $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)\subset\Delta$, (αφού το x_o είναι εσωτερικό σημείο) και για κάθε $x\in(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$ να ισχύει

$$f(x)\leq f(x_o) \quad \text{ή} \quad f(x)-f(x_o)\leq 0$$

Επομένως

• αν $x\in(x_o-\delta, x_o)$, τότε $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\geq 0$, ενώ

• αν $x\in(x_o,\ x_o+\delta)$, τότε $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\leq 0$.

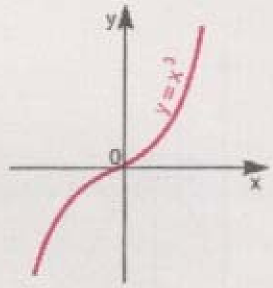
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύουν

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\geq 0 \quad \text{και} \quad f'(x_o)=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\leq 0$$

που σημαίνει ότι $f'(x_o)=0$. ■

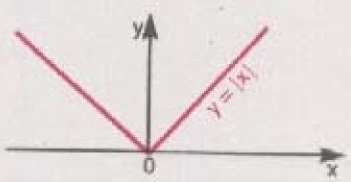
Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, αφού για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ ισχύει $f'(0)=0$ χωρίς αυτή να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο 0 (Σχ.2).



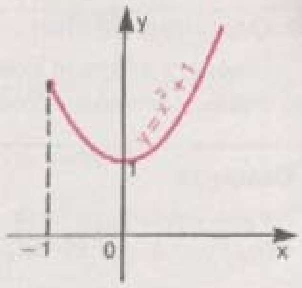
Σχ.2

2. Μια συνάρτηση είναι δυνατόν να παρουσιάζει ακρότατο σ' ένα σημείο x_o χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, αλλά παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο αυτό (Σχ.3).



Σχ.3

3. Τέλος, όταν το σημείο ακροτάτου είναι άκρο του διαστήματος ορισμού της συνάρτησης, τότε η παράγωγος μπορεί να μη μηδενίζεται σε αυτό, π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$, $x \geq -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0=-1$, ενώ $f'(-1)=-2 \neq 0$. (Σχ.4).

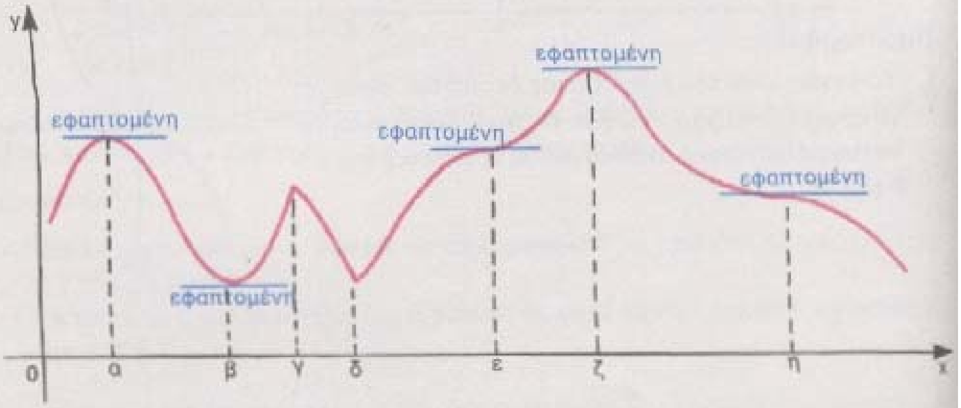


Σχ.4

Για μια συνεχή συνάρτηση f τα εσωτερικά σημεία x του διαστήματος Δ, όπου $f'(x)=0$ ονομάζονται **στάσιμα σημεία** της f[1]. Τα στάσιμα σημεία καθώς και τα σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της f. Επομένως:

> Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), τότε τα σημεία τοπικών ακροτάτων θα αναζητηθούν μεταξύ των στάσιμων σημείων της f, δηλαδή μεταξύ των σημείων μηδενισμού της παραγώγου.

Στο σχήμα 5 φαίνονται διάφορες μορφές κρίσιμων σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης.



Σχ.5

(1) Ο όρος στάσιμο σημείο προήλθε από το ότι στη συνάρτηση θέσης η παράγωγος εκφράζει την ταχύτητα του κινητού, η οποία στην περίπτωση αυτή είναι 0.

Από αυτά τα α, β, γ, δ, ζ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων ενώ τα α, β, ε, ζ, η, είναι στάσιμα σημεία.

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι:

> Οι θέσεις των **πιθανών τοπικών ακροτάτων** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $\Delta=[\alpha,\beta]$, είναι τα κρίσιμα σημεία της και τα άκρα του Δ.

Έτσι, για μια συνάρτηση f, που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ έχουμε το σχεδιάγραμμα:

Θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων → Άκρα διαστήματος

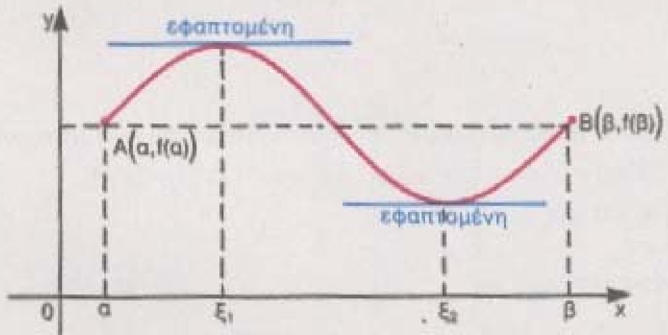
Θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων → Κρίσιμα σημεία

Κρίσιμα σημεία → Στάσιμα σημεία ($f'(x)=0$)

Κρίσιμα σημεία → Σημεία όπου δεν υπάρχει η $f'(x)$

• Θεώρημα Rolle

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης f παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη μελέτη της, αφού ως γνωστόν αποτελούν θέσεις πιθανών ακροτάτων της. Στα σημεία αυτά ισχύει $f'(x)=0$, που γεωμετρικά σημαίνει ότι η εφαπτομένη στα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης της f, είναι παράλληλη στον άξονα x'x. Στο Σχ.6 όπου ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ η ύπαρξη τέτοιων σημείων εποπτικά είναι προφανής.



Σχ.6

Το θεώρημα του Rolle που ακολουθεί επιβεβαιώνει τη διαπίστωσή μας αυτή

> **Θεώρημα Rolle**
> Αν μια συνάρτηση f είναι
> i) συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$,
> ii) παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και
> iii) $f(\alpha)=f(\beta)$,
> τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Απόδειξη

- Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f'(\xi)=0$ για κάθε $\xi\in[\alpha,\beta]$.
- Αν η f δεν είναι σταθερή, τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής υπάρχουν σημεία $x_\epsilon, x_\mu \in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύουν

$$f(x_\epsilon)\le f(x)\le f(x_\mu) \quad \text{με} \quad f(x_\epsilon)\ne f(x_\mu)$$

Τα σημεία x_ϵ, x_μ δεν μπορεί να είναι τα δύο άκρα του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, διότι π.χ. αν ήταν $x_\epsilon=\alpha$ και $x_\mu=\beta$, τότε θα ήταν

$$f(\alpha)=f(x_\epsilon)<f(x_\mu)=f(\beta)$$

που είναι αδύνατον, αφού $f(\alpha)=f(\beta)$.

Επομένως ένα τουλάχιστον από αυτά είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος, έστω το x_ϵ. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_\epsilon\in(\alpha,\beta)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει $f'(x_\epsilon)=0$, δηλαδή το x_ϵ είναι το ζητούμενο σημείο ξ. ■

Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Rolle. Λόγω των πολλών και σημαντικών εφαρμογών του θεωρείται ένα από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της Ανάλυσης.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι

i) συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και

ii) παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β),

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha) \qquad (1)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση

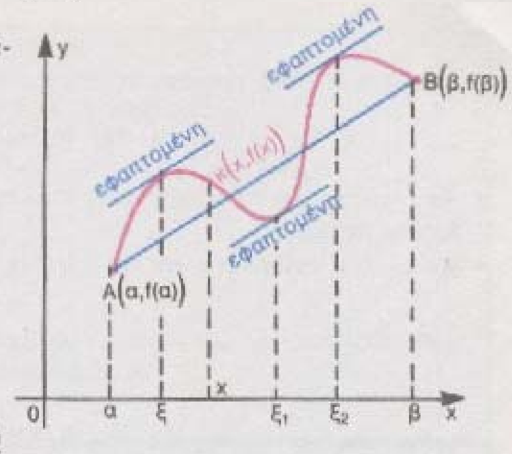
$$g(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha),$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

και ισχύει

$$g(\alpha)=f(\alpha)=g(\beta).$$



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή

$$f'(\xi)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0 \text{ ή } f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

6.11 Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής αποδεικνύουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Συγκεκριμένα ισχύει

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Απόδειξη

Έστω x_o ένα σταθερό σημείο του διαστήματος Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_o$, π.χ. $x > x_o$, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_o, x]$. Επομένως υπάρχει σημείο $\xi \in (x_o, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x) - f(x_o) = f'(\xi)(x - x_o).$$

Επειδή $f'(\xi) = 0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_o) = 0 \quad ή \quad f(x) = f(x_o),$$

που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Άμεση συνέπεια της πρότασης είναι το επόμενο πόρισμα, στο οποίο θα αναφερθούμε συχνά στα επόμενα.

Πόρισμα

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

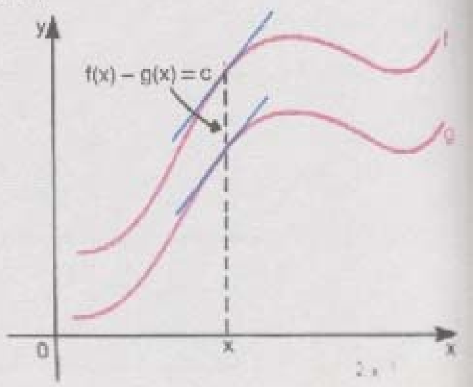
$$f(x) = g(x) + c \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = 0$ οπότε, σύμφωνα με την πρόταση (1), η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ, δηλαδή

$f(x) - g(x) = c \quad ή \quad f(x) = g(x) + c$

για κάθε $x \in \Delta$. ■



Παρατηρήσεις

1. Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο. Αυτές διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά c. (Σχ.1).

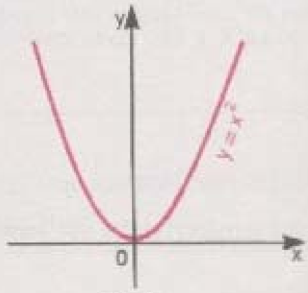
2. Η πρόταση και το πόρισμα ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Π.χ. για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

• Μονοτονία συναρτήσεων

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ (Σχ.2) διαπιστώνουμε ότι:

— Στο διάστημα $(-\infty,0)$, όπου η παράγωγος $f'(x)=2x$ είναι **αρνητική**, η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα**.

— Στο διάστημα $(0,+\infty)$, όπου η $f'(x)=2x$ είναι **θετική**, η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**.



Σχ.2

Γενικά ισχύει

Πρόταση 2

Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύουν:

i) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$

ii) Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

Για δυο οποιαδήποτε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$, με $x_1<x_2$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[x_1,x_2]$. Επομένως υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1),$$

i) Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$ ή $f(x_1)<f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Ανάλογα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. ■

Παρατηρήσεις:

1. Η πρόταση (2) ισχύει και στην περίπτωση που το διάστημα είναι της μορφής $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ ή (α,β). Έτσι, π.χ. η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση (2), η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

2. Το αντίστροφο της πρότασης (2) δεν ισχύει γιατί για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ χωρίς όμως να ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-1,1)$, αφού $f'(0)=3\cdot0^2=0$.

Γενικά ισχύει

Πρόταση

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο (α,β) και συνεχής στο $x_o \in (\alpha,\beta)$.

i) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_o) και γνησίως φθίνουσα στο (x_o,β), τότε το $f(x_o)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β).

ii) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,x_o) και γνησίως αύξουσα στο (x_o,β), τότε το $f(x_o)$ είναι ελάχιστο της f στο (α,β).

Απόδειξη

i) Αν υποθέσουμε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι μέγιστο, τότε θα υπάρχει $\gamma \in (\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$ με
$$f(\gamma) > f(x_o) \qquad (1)$$
Έστω $\gamma \in (\alpha,x_o)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_o), για κάθε $x \in (\gamma,x_o)$ θα ισχύει $f(\gamma) < f(x)$, οπότε λόγω της (1) είναι
$$f(x_o) < f(\gamma) < f(x), \text{ για κάθε } x \in (\gamma,x_o).$$
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o, έχουμε
$$f(x_o) < f(\gamma) \leq \lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o),$$
δηλαδή $f(x_o) < f(x_o)$, που είναι άτοπο.
Αν $\gamma \in (x_o,\beta)$ τότε με ανάλογους συλλογισμούς καταλήγουμε επίσης σε άτοπο. Επομένως το $f(x_o)$ είναι μέγιστο.

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη ■

Σημείωση: Η πρόταση ισχύει και όταν η μονοτονία δεν είναι γνήσια.

Άμεση συνέπεια της πρότασης αυτής και της πρότασης (2) § 6.11 είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα (1ης παραγώγου)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$ και συνεχής στο x_o.

i) Αν $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_o) \\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(x_o,\beta) \end{cases}$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο

ii) Αν $\begin{cases} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_o) \\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(x_o,\beta) \end{cases}$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο

Παρατηρήσεις

1. Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, για μια συνάρτηση f, η οποία είναι **συνεχής στο διάστημα (α,β)**, τα σημεία του (α,β) εκατέρωθεν των οποίων η παράγωγος f′ αλλάζει πρόσημο είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

• Κριτήριο 2ης παραγώγου

Όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β),τα τοπικά ακρότατα, όπως έχουμε αναφέρει, θα αναζητηθούν μεταξύ των στάσιμων σημείων της. Το κριτήριο της 1ης παραγώγου εφαρμόζεται όταν εκατέρωθεν του x_o είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε διαστήματα όπου η f' αλλάζει πρόσημο.

Όταν ο προσδιορισμός τέτοιων διαστημάτων είναι δύσκολος ή αδύνατος, τότε είναι δυνατόν να μας βοηθήσει το παρακάτω θεώρημα που αποτελεί το κριτήριο της 2ης παραγώγου.

Θεώρημα (2ης παραγώγου)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_o εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f'(x_o)=0$ και υπάρχει η $f''(x_o)$.

i) Αν $f''(x_o)<0$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο.

ii) Αν $f''(x_o)>0$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Απόδειξη

Επειδή $f'(x_o)=0$ έχουμε

$$f''(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)-f'(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{x-x_o}$$

i) Αν $f''(x_o)<0$, τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{x-x_o}<0$, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 2

της § 2.4, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(x)}{x-x_o}<0 \text{ για κάθε } x\in(x_o-\delta,x_o)\cup(x_o,x_o+\delta).$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι

- αν $x\in(x_o-\delta,x_o)$, τότε $f'(x)>0$, ενώ
- αν $x\in(x_o,x_o+\delta)$, τότε $f'(x)<0$.

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο της 1ης παραγώγου, το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο.

ii)Η απόδειξη είναι ανάλογη.

Παρατηρήσεις

1. Σε ένα στάσιμο σημείο x_o, όπου $f'(x_o)=0$, είναι δυνατόν να ισχύει και $f''(x_o)=0$, οπότε το κριτήριο της 2ης παραγώγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να καταφύγουμε στο κριτήριο της 1ης παραγώγου.

Έτσι π.χ. για τη συνάρτηση $f(x)=x^4$ είναι $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, οπότε $f'(0)=f''(0)=0$. Επειδή $f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

2. Υπάρχει κριτήριο που αναφέρεται στο πρόσημο παραγώγου ανώτερης τάξης, το οποίο δεν θα παρουσιάσουμε εδώ.

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ ΤΟ [6]

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε

$$(f_1+f_2+\cdots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_k'(x).$$

Παράγωγος γινομένου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο x_0, έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= \left[\left(f(x)g(x)\right) \cdot h(x)\right]' = \left(f(x)g(x)\right)' \cdot h(x) + \left(f(x)g(x)\right) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

Για παράδειγμα,

$$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2.$$

Παράγωγος πηλίκου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

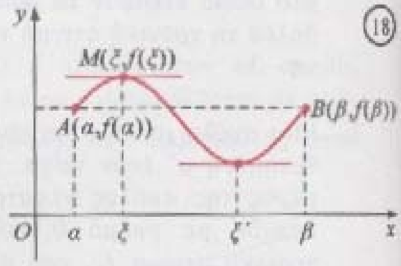
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

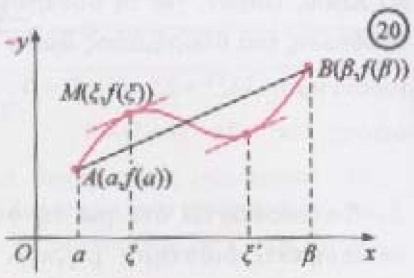
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

εωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει να, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η φαπτομένη της γραφικής παράστασης της στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλλη-η της ευθείας AB.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

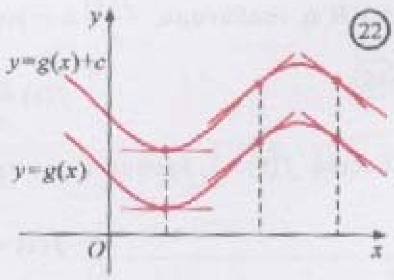
$$f(x)=g(x)+c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

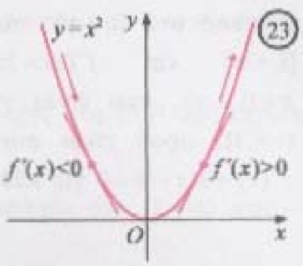
Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. ■



ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Μονοτονία συνάρτησης



Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty,0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x)=2x<0$, ενώ στο διάστημα $(0,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)=2x>0$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

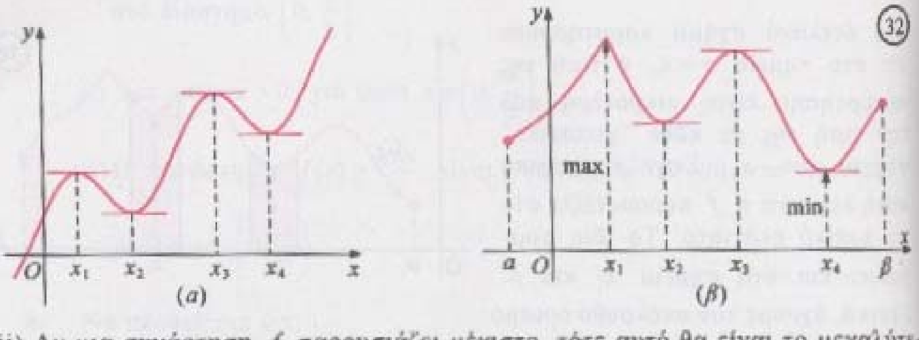
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Με μια προσεκτική παρατήρηση του σχήματος 32β βλέπουμε ότι αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0)=0$. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat.**

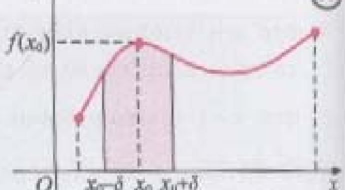
ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε



$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και

$f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \quad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. Επομένως, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α, x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). (Σχ. 35γ).

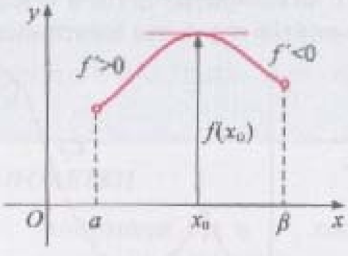
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

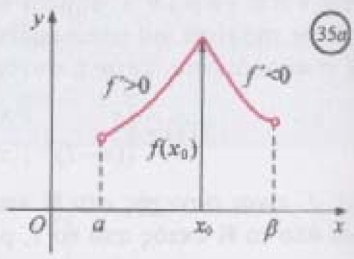
i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0, \beta). \quad (2)$$



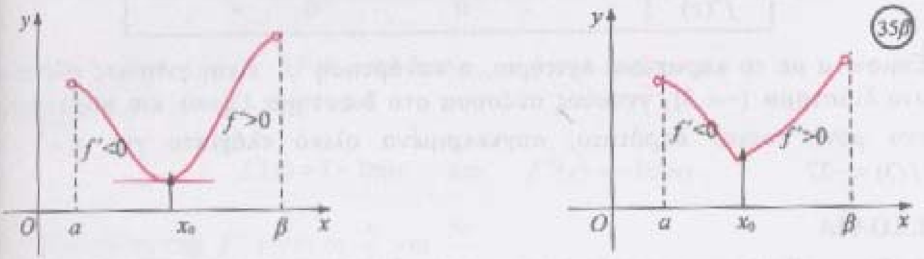


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

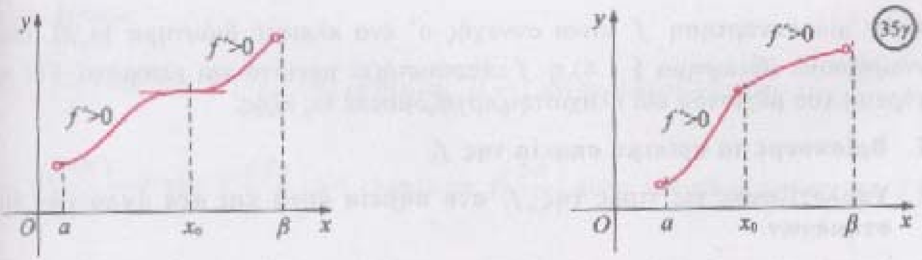
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



(35β)

iii) Έστω ότι

$$f'(x)>0\,,\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$



(35γ)

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. ■

ΣΧΟΛΙΑ

• Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α,β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α,β).

• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8),η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x+19$, $x\in[0,5]$. Έχουμε $f'(x)=6x^2-30x+24$, $x\in[0,5]$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι $x=1$, $x=4$. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x=1$, $x=4$. Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος $[0,5]$ είναι

$$f(1)=30,\quad f(4)=3,\quad f(0)=19\quad \text{και}\quad f(5)=14.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο $[0,5]$ είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται για $x=1$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για $x=4$.

• Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0. Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) και x_0 ένα σημείο του (α,β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

• Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

• Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

- **[12], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. I-VIII**
- **[21], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. IX-XV**
- **[6], ΑΝΑΛΥΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΣΕΛ. XVI-XIX**

I

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ [12]

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Γραμμικότητα

5.5 Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β]. Τότε και η f+g είναι συνεχής στο [α, β]. Αν θεωρήσουμε λοιπόν τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, τότε (§ 5.4) έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx &= \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} [f(\xi_k) + g(\xi_k)]\} \\ &= \lim \{d_\nu [\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) + \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)]\} \\ &= \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\} + \lim \{ d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)\} \\ &= \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx\end{aligned}$$

Επίσης, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ η λf είναι συνεχής στο [α, β], οπότε έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lim [d_\nu \lambda \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \lim [d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Αποδείξαμε λοιπόν τις ισότητες

$$\boxed{\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx} \quad (1)$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx} \quad (2)$$

Αν $\gamma \in [\alpha, \beta]$, άποδεικνύεται[1] ακόμη ότι αληθεύει η ισότητα (σχέση Chasles)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx} \quad (3)$$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει, με επαγωγή, ότι:

1. $$\int_\alpha^\beta [\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_k f_k(x)]dx = \lambda_1\int_\alpha^\beta f_1(x)dx + \lambda_2\int_\alpha^\beta f_2(x)dx+\ldots+\lambda_k\int_\alpha^\beta f_k(x)dx$$

2. Αν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ είναι *οποιαδήποτε* σημεία του $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx+\ldots+\int_{\gamma_k}^{\beta} f(x)dx$$

Ασκήσεις: 4, 5

Ολοκλήρωμα και διάταξη

5.6 Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$, και τη διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x)\geqslant 0$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\geqslant 0$$

Επομένως θα είναι και $d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\geqslant 0$, οπότε (§ 2.11)

$$\lim\,[d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)]\geqslant 0 \quad ή \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx\geqslant 0$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x)\geqslant 0$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geqslant 0$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού αποδεικνύεται και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Έστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β]. Αν για κάθε x∈[α, β] είναι f(x) ≤ g(x), τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση h με $h(x) = g(x)-f(x)$, θα είναι $h(x) \geqslant 0$ για κάθε x∈[α, β]. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1, θα είναι

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx \geqslant 0 \text{ ή } \int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx \geqslant 0 \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Άρα
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Απόλυτη τιμή

5.7 Στην § 5.3 είδαμε ότι για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Αλλά (§ 1.4)
$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

και αφού $x_k-x_{k-1} > 0$,

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) \qquad (1)$$

Επειδή η |f| είναι και αυτή συνεχής, θα είναι

$$\lim \sum_{k=1}^{\nu} |f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1}) = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

Επίσης
$$\lim \left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| = \left|\lim \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$$

Έτσι έχουμε, λόγω της (1)

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Ώστε: **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε**

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι $\frac{\pi}{100} \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$

Επειδή γιά κάθε $t\in[0, \frac{\pi}{4}]$ είναι $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \text{συν}t \leqslant 1$, θα έχουμε

$$3+\sqrt{2} \leqslant 3+2\text{συν}t \leqslant 5$$

$$\frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{1}{(3+\sqrt{2})^2} < \frac{1}{19}$$

οπότε (§ 5.6)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{25}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{1}{19}\,dt$$

Άρα

$$\frac{\pi}{100} \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\text{συν}t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$$

Ασκήσεις: 6

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

Θεώρημα μέσης τιμής

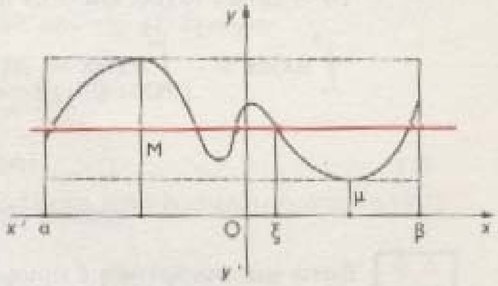
5.8 Είναι γνωστό (§ 5.3) ότι, αν μ και M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε

$$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta-\alpha) \tag{1}$$

V

Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τα γινόμενα $\mu(\beta-\alpha)$ και $M(\beta-\alpha)$ δίνουν τα εμβαδά των ορθογωνίων που έχουν κοινή βάση β-α και ύψη μ και M αντιστοίχως (σχ. 4).

4



Από την (1) προκύπτει ότι το εμβαδό που δίνεται από το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ περιέχεται μεταξύ των εμβαδών των δυο ορθογωνίων. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει λ μεταξύ των μ και M, τέτοιος ώστε[1]

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lambda(\beta-\alpha) \qquad (2)$$

Πράγματι, θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου αριθμού και μάλιστα χωρίς τον περιορισμό $f(x) \geqslant 0$. Από την (1) προκύπτει η

$$\mu \leqslant \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \leqslant M$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των μ και M. Επομένως υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιος ώστε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *«θεώρημα μέσης τιμής»* του ολοκληρωτικού λογισμού

(1) Τα παραπάνω δεν αποτελούν απόδειξη, γιατί στηρίζονται στην ενορατική αντίληψη της έννοιας του εμβαδού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ξ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό (σχ. 4)
2. Το θεώρημα ισχύει και όταν $\alpha \geqslant \beta$. Πράγματι, τότε είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = -f(\xi)(\alpha-\beta) = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα

5.9 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, και ένα σημείο $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Τότε σε κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την τιμή του $\int_{\gamma}^{x} f(t)dt$.
Έτσι ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt$$

Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, την παράγωγο της F. Έστω ένα σημείο x_0 του $[\alpha, \beta]$. Σχηματίζουμε το λόγο μεταβολής της F μεταξύ x_0 και $(x_0+h) \in [\alpha, \beta]$ και έχουμε

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x_0} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x_0+h τέτοιος ώστε

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(\xi)(x_0+h-x_0) = h\, f(\xi)$$

Άρα
$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\cdot hf(\xi) = f(\xi) \qquad (1)$$

Για κάθε $h \in [\alpha-x_0, \beta-x_0]$ εκλέγουμε ένα αντίστοιχο ξ (μπορεί να υπάρχουν περισσότερα). Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση φ με $\varphi(h) = \xi$. Τότε, επειδή

$$x_0 < \varphi(h) < x_0+h \quad (\text{ή } x_0+h < \varphi(h) < x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}(x_0+h) = x_0$$

θα είναι (§ 3.11)

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = x_0 \tag{2}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα είπαμε στην § 3.19, από την (1) έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\varphi(h)) = f(x_0)$$

ή

$$F'(x_0) = f(x_0) \tag{3}$$

Επειδή η (3) ισχύει για κάθε $x_0 \in [\alpha, \beta]$, έχουμε γενικά

$$F' = f$$

δηλαδή η F είναι μια παράγουσα της f. Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε η συνάρτηση F με $F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$, $(\gamma \in [\alpha, \beta])$, είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $F'(x) = f(x)$.**

Αν επαναλάβουμε την ίδια εργασία με ένα άλλο σημείο $\gamma \in [\alpha, \beta]$, ορίζουμε μια άλλη παράγουσα της f.

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10

Σχέση ολοκληρώματος και παράγουσας

5.10 Οι παράγουσες της συνάρτησης f μας διευκολύνουν στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$$

Απόδειξη. Έστω F μια παράγουσα της f. Η συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι επίσης παράγουσα της f, οπότε (§ 4.17) θα είναι

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x)+c \qquad (1)$$

Η ισότητα αυτή για $x = \alpha$ γίνεται (§ 5.3)

$$0 = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = F(\alpha)+c \quad \text{άρα} \quad c = -F(\alpha)$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x)-F(\alpha)$$

η οποία για $x = \beta$ γίνεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha) \qquad (2)$$

Τη διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ τη συμβολίζουμε $[F(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η (2) γράφεται και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της παράγουσας F. Πράγματι, για κάθε άλλη παράγουσα F_1 είναι $F_1(x) = F(x)+c$, οπότε

$$F_1(\beta)-F_1(\alpha) = [F(\beta)+c] - [F(\alpha)+c] = F(\beta) - F(\alpha)$$

5.11 Το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Στον υπολογισμό αυτό θα μας βοηθήσει και ο πίνακας της § 4.17, που δίνει τις παράγουσες ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\int_{2}^{4} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2}^{4} = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ ΤΟ [21]

7.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Στο τρίτο κεφάλαιο έχουμε αποδείξει ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε και οι συναρτήσεις

$$f\pm g,\quad \lambda\cdot f\ (\lambda\in\mathbb{R}),\quad |f|\ ,\ f\cdot g,\quad f^{\nu},\quad \frac{f}{g}\ (g(x)\neq 0,\ x\in[\alpha,\beta])\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}\ \ (f(x)\geq 0,\ x\in[\alpha,\beta])$$

είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.
Επομένως είναι **ολοκληρώσιμες** στο $[\alpha,\beta]$.

Ειδικότερα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες που διευκολύνουν τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

• Γραμμικότητα του ολοκληρώματος

Πρόταση 1

Αν f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, τότε ισχύουν

i) $$\int_{\alpha}^{\beta}\big(\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)\big)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

ii) $$\int_{\alpha}^{\beta}\lambda\cdot f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

Απόδειξη

i) Αν P_{ν} είναι μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{\nu}\}$ είναι ένα σύνολο ενδιάμεσων σημείων της, τότε από τις ισότητες

$$(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(\xi_{\kappa})=\lambda\cdot f(\xi_{\kappa})+\mu\cdot g(\xi_{\kappa}),\qquad \kappa=1,2,\ldots,\nu$$

παίρνουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(\xi_{\kappa})\Delta x=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\Big(\lambda\cdot f(\xi_{\kappa})\Delta x+\mu\cdot g(\xi_{\kappa})\Delta x\Big)=$$

$$=\lambda\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_{\kappa})\Delta x+\mu\sum_{\kappa=1}^{\nu}g(\xi_{\kappa})\Delta x\qquad(1)$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι ολοκληρώσιμες υπάρχουν τα όρια των αθροισμάτων (1) και ισχύει

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Big(\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(\xi_{\kappa})\Delta x\Big)=\lambda\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\Big(\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_{\kappa})\Delta x\Big)+\mu\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\Big(\sum_{\kappa=1}^{\nu}g(\xi_{\kappa})\Delta x\Big)$$

που σύμφωνα με την πρόταση 2 της παραγρ. 7.2 σημαίνει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}\big[\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)\big]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

ii) Προκύπτει από την (i) για $\mu=0$. ■

• Μονοτονία του ολοκληρώματος

Πρόταση 3

Για δύο συναρτήσεις f,g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύουν:

i) Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

ii) Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\leq g(x)$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

iii) $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

Απόδειξη

i) Για κάθε διαμέριση, P_ν του $[\alpha,\beta]$ και κάθε σύνολο ενδιάμεσων σημείων της $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\nu\}$ είναι $\Delta x\geq 0$ και $f(\xi_\kappa)\geq 0$, $\kappa=1,2,\ldots,\nu$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \geq 0,$$

οπότε και

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)\geq 0.$$

ii) Επειδή $g(x)-f(x)\geq 0$, από την (i) προκύπτει

$$0\leq \int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

iii) Επειδή για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύουν οι ανισότητες $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$ και οι συναρτήσεις $f(x)$ και $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμες, σύμφωνα με την (ii) έχουμε

$$-\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx,$$

που σημαίνει ότι

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \qquad \blacksquare$$

• Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Με τη βοήθεια της πρότασης (3) μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό ως **θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.**

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

i) Υπάρχουν m, $M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$.

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$.

Απόδειξη

i) Αν m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύουν $m\le f(x)\le M$.
Επομένως σύμφωνα με την πρόταση 3 έχουμε

$$\int_\alpha^\beta m\,dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta M\,dx \quad ή \quad m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$$

ii) Επειδή $\alpha<\beta$ η (i) γράφεται

$$m\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M,$$

• Αν $m=M$, τότε $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(x_\varepsilon)=f(x_\mu)$ (όπου $f(x_\varepsilon)=m$ και $f(x_\mu)=M$)

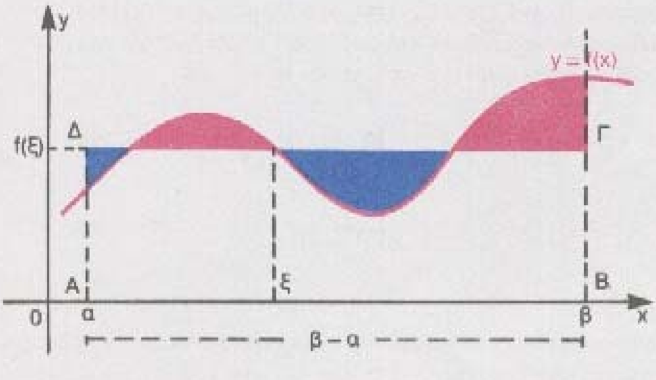
οπότε $\xi=x_\varepsilon$ ή $\xi=x_\mu$.

• Αν $m\ne M$, τότε επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ο αριθμός $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ βρίσκεται μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της f, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής (§ 3.4), υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι γνωστό ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει η γραφική παράσταση της f, οι ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και ο άξονας $x'x$.



Στο παραπάνω σχήμα το εμβαδόν των μπλε χωρίων είναι ίσο με το εμβαδόν των κόκκινων χωρίων. Αυτό είναι φανερό αφού το εμβαδόν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν $f(\xi)(\beta-\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

7.6 Η ύπαρξη μιας αρχικής συνεχούς συνάρτησης

Σε αντίθεση με την εύρεση της παραγώγου, υπάρχουν σχετικά πολύ λίγοι κανόνες για να υπολογίσουμε γρήγορα μια αρχική. Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μια αρχική συνεχούς συνάρτησης, ο οποίος μάλιστα δίνει παραστατικά την εσωτερική σχέση που συνδέει την παράγωγο με το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ, φραγμένο ή μη, ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \Delta \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

όπου α είναι ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό σημείο του Δ.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x$, $\Delta = (-\infty, +\infty)$ και $\alpha \in \Delta$, τότε

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} tdt = \frac{1}{2}(x^2 - \alpha^2), \quad x \in \Delta$$

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει αφενός την ύπαρξη μιας αρχικής συνάρτησης και αφετέρου μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της για κάθε συνεχή συνάρτηση.

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ, δηλ. $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Η απόδειξη παρατίθεται στο παράρτημα.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος (1) είναι:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right) = f(x), \quad x \in \Delta.} \qquad (1)$$

Στα προηγούμενα οι έννοιες ορισμένο ολοκλήρωμα και αρχική συνάρτηση ορίστηκαν με εντελώς διαφορετικούς τρόπους. Ωστόσο το θεώρημα (1) αποδεικνύει ότι προκειμένου για συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε διάστημα Δ οι δύο αυτές έννοιες συνδέονται μεταξύ τους.

Εξάλλου, η ισότητα (1) δηλώνει ότι η ολοκλήρωση αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, πορεία αντίστροφη της παραγώγισης.

Στο επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό ως **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**, φαίνεται η ιδιαίτερη σημασία της αρχικής συνάρτησης στον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 2

Αν F είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα (1), μια αρχική της f στο Δ είναι η συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Επομένως, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) + c. \qquad (1)$$

Για $x=\alpha$ παίρνουμε

$$0 = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = F(\alpha) + c, \quad \text{δηλ.} \quad c = -F(\alpha),$$

οπότε η (1) γράφεται

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha)$$

Από την τελευταία ισότητα για $x=\beta$ παίρνουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha) \qquad \blacksquare$$

Πολλές φορές για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας συμβολίζουμε τη διαφορά $F(\beta) - F(\alpha)$ με $\left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του θεωρήματος (2) γράφεται:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Πρακτική οδηγία

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, βρίσκουμε πρώτα μια οποιαδήποτε αρχική συνάρτηση της f και ύστερα εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.

7.6 Η ύπαρξη μιας αρχικής συνεχούς συνάρτησης

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x\in\Delta,$$

είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ, δηλ. $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Απόδειξη

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0\in\Delta$ ισχύει $F'(x_0)=f(x_0)$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε t, με $|t-x_0|<\delta$, να ισχύει $\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Έτσι από τις ισότητες

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt\right)-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)dt=$$

$$=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt-\int_{x_0}^{x} f(x_0)dt\right)=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))dt\right),$$

προκύπτει ότι για κάθε x με $|x-x_0|<\delta$ ισχύει

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))dt\right|\le\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(t)-f(x_0)\right|dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon dt\right|=\frac{|x-x_0|}{|x-x_0|}\cdot\varepsilon=\varepsilon, \quad \text{δηλαδή}$$

$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$.

Επομένως για κάθε $x_0\in\Delta$ ισχύει $F'(x_0)=f(x_0)$. ■

ΑΝΤΙΓΡΑΦΑ ΑΠΟ ΤΟ [6]

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι *συνεχής* σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3+7=4.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

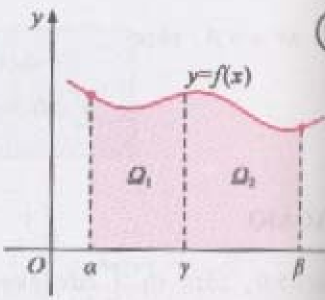
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx, \quad E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$



13

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια *συνεχής* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ κατευθείαν από τον ορισμό είναι συνήθως μία δύσκολη και πολύ κοπιαστική διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων χωρίς τη χρήση του ορισμού. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει το γνωστό, ως *θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού*. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\,,\quad x\in\Delta\,,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

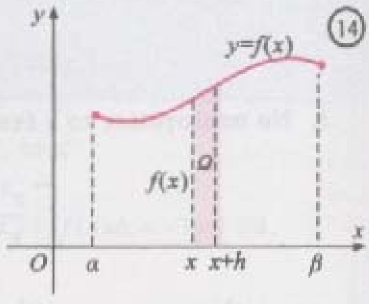
$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

Για παράδειγμα

$$\left(\int_{0}^{x}\eta\mu^{2}t\,dt\right)'=\eta\mu^{2}x \quad\text{και}\quad \left(\int_{1}^{x}\ln t\,dt\right)'=\ln x\,.$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:



$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_{x}^{x+h} f(t)dt\\&=\text{Εμβαδόν του χωρίου }\Omega.\\&\approx f(x)\cdot h\,,\quad \text{για μικρά}\quad h>0\,.\end{aligned}$$

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)\,,$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

- Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))\cdot g'(x)\,,$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Εστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c\,. \tag{1}$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)\,. \qquad \blacksquare$$

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta)-G(\alpha)$ με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = \left[\int f(x)dx\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

3.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως *Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $F'(x)=f(x)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}. \tag{1}$$

Είναι όμως,

$$F'(\xi)=f(\xi),\qquad F(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \text{και} \quad F(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(t)dt=0.$$

Επομένως, η ισότητα (1) γράφεται $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=f(\xi)(\beta-\alpha). \quad \blacksquare$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ο αριθμός $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$ λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με $\bar{f}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\bar{f}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου που έχει βάση το $[\alpha,\beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 15).