ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ"
ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΠΟΡΩΔΗ ΥΛΙΚΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ Μ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΤΑΘΗΣ ΦΙΛΙΠΠΑΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2007

Την επιτροπή κρίσης της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας αποτέλεσαν οι
Α. Τερτίκας
Α. Τερσένοβ
Σ. Φίλιππας.

Ευχαριστίες:
Πρώτ΄ απ΄ όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου κύριο Στάθη Φίλιππα για την βοήθειά του με τις γνωσεις του και για την υπομονή του.
Ευχαριστώ την οικογένειά μου για την μακροχρόνια ηθική και οικονομική υποστήριξη.
Τέλος, να ευχαριστήσω τους φίλους που με βοήθησαν στη φοιτητική μου σταδιοδρομία και αυτούς που με προστάτευσαν απο την πλήξη και την απομόνωση.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Κεντρικό θέμα της εργασίας αυτής είναι η εξίσωση Porous Medium:

$$u_t = \Delta(u^m), \quad m > 1, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

Η εξίσωση με τον ίδιο τύπο για $m < 1$, λέγεται fast diffusion και πολλά από τα αποτελέσματα που θα δούμε στην εργασία αφορούν και αυτή την περίπτωση. Αρχικά, θα δούμε φυσικά προβλήματα που μοντελοποιεί η εξίσωση αυτή. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ορίσουμε τί εννοούμε λέγοντας λύση της εξίσωσης και θα αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης για την περίπτωση $m > 1$. Θα μας απασχολήσει στη συνέχεια η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλους χρόνους. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε βασίζεται σε κάποιο συναρτησιακό Lyapunov για την εξίσωση και σε κάποιες ανισότητες τύπου Gagliardo-Nirenberg. Έτσι, στο τρίτο κεφάλαιο θα αποδείξουμε τις ανισότητες τύπου Gagliargo-Nirenberg με βέλτιστη σταθερά. Η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς θα γίνει στο τέταρτο κεφάλαιο και τα απότελέσματα που θα συναχθούν αφορούν και τις δύο περιπτώσεις $m > 1$ και $m < 1$.

Η εξίσωση porous medium είναι μια εξίσωση που προκύπτει φυσιολογικά στη μοντελοποίηση διαφόρων φυσικών προβλημάτων, μερικά από τα οποία θα αναφέρουμε αμέσως.

1.1 Προβλήματα που μοντελοποιούνται από την Porous Medium

Ροή σε πορώδη υλικά. Μια από τις βασικές εφαρμογές της εξίσωσης είναι η περιγραφή της κίνησης ιδεατού ρευστού μέσα σε πορώδες μέσο, στο οποίο οφείλεται και η ονομασία της εξίσωσης. Για την περιγραφή του μοντέλου, ακολουθούμε τα [13],[1]. Θα περιγράψουμε την κίνηση αυτή σε μακροσκοπικό επίπεδο, κάτω από την υπόθεση ότι το ρευστό είναι συνεχές μέσο. Η ανάγκη για την υπόθεση αυτή, προκύπτει από την αδυναμία να λύσουμε εξισώσεις για την κίνηση αν ασχοληθούμε με την κίνηση των μορίων του ρευστού. Παρόμοια προβλήματα προκύπτουν, αν προσπαθήσουμε να λύσουμε τις συνηθισμένες εξισώσεις κίνησης, βάζοντας την γεωμετρία του πορώδους μέσου για σύνορο.

Για το λόγο αυτό, πρέπει να κάνουμε ανάλογη υπόθεση για το μέσο. Στην περίπτωση του ρευστού, το πρόβλημα ξεπεράστηκε χρησιμοποιώντας την πυκνότητα, δηλαδή το λόγο της μάζας του ρευστού ανα μονάδα όγκου. Το ίδιο θα κάνουμε και για το πορώδες μέσο. Ορίζουμε την έννοια του πορώδους (porosity) ενός μέσου, που θα συμβολίζουμε με ε, ως το λόγο του όγκου που μένει ελεύθερος για το ρευστό ανά μονάδα όγκου. Είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή μπορεί να μην είναι σταθερή σε όλο το χώρο. Με την έννοια αυτή, θα λέμε ένα μέσο ομογενές αν το ε είναι σταθερό σε όλο το χώρο και μη ομογενές, αν το ε δεν είναι σταθερό. Περισσότερα για την έννοια του (porosity) στο [2].

Ας προχωρήσουμε τώρα στην κατασκευή των εξισώσεων κίνησης. Θα συμβολίζουμε με ρ την πυκνότητα του ρευστού, με p την πίεση που δέχεται το ρευστό και με $\mathbf{v}$ την ταχύτητα του ρευστού. Το ρευστό μας δεν θεωρείται ομογενές, άρα η πυκνότητα είναι συνάρτηση και του χώρου (x) και του χρόνου (t). Επίσης, το μέσο στο οποίο γίνεται η κίνηση θεωρείται ομογενές. Πριν συνεχίσουμε, ας κάνουμε μια παρατήρηση για αυτό που ονομάσαμε ταχύτητα $\mathbf{v}$. Στην πραγματικότητα, δεν είναι η γνωστή μας ταχύτητα αλλά ένα μέγεθος με διαστάσεις ταχύτητας, που ονομάζεται ροή όγκου (βλ.[14]). Όταν δεν έχουμε ροή μέσα σε πορώδες μέσο, η ταχύτητα και η ροή όγκου ταυτίζονται. Για να καταλάβουμε τη διαφορά των δύο μεγεθών και τη χρησιμότητα της ροής όγκου στην περίπτωσή μας, ας δούμε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε μια επίπεδη επιφάνεια, εμβαδού S, δια μέσου της οποίας ρέει ρευστό. Αν το ρευστό σε χρόνο Δt προχωρήσει κατά Δx, τότε λέμε ότι κινήθηκε με ταχύτητα $\mathbf{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Τότε ο όγκος του ρευστού που διαπέρασε την επιφάνεια είναι $\Delta V = S\Delta x$. Η ροή όγκου είναι ο ρυθμός που ρέει ο όγκος του ρευστού δια μέσου της επιφάνειας, δηλαδή $\mathbf{v} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Τώρα, στην περίπτωση που έχουμε ροή σε πορώδες μέσο, η ταχύτητα δεν αλλάζει, δηλαδή μένει πάλι $\mathbf{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Ο όγκος του ρευστού που διαπέρασε την επιφάνεια όμως, δεν μένει ίδιος καθως ένα κομμάτι του όγκου καταλαμβάνεται απο το πορώδες μέσο. Έτσι ο όγκος του ρευστού που διαπερνάει το ρευστό, είναι $V = \varepsilon S\Delta x$. Έτσι, βλέπουμε ότι η σχέση που συνδέει την ταχύτητα του ρευστού με τη ροή όγκου είναι $\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{u}$.

Για την αρχή διατήρησης μάζας, λέμε ότι η μεταβολή της μάζας σε ένα όγκο είναι ίση με τη μάζα που εισρέει και εκρέει από το σύνορο. Από την συζήτηση για τη διαφορά ταχύτητας και ροής όγκου, βλέπουμε ότι το μέγεθος που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε γαι τη μάζα που εισρέει και εκρέει από το σύνορο είναι η ροή όγκου. Έτσι, η γνωστή από τα ρευστά εξίσωση συνέχειας, γίνεται

$$\varepsilon\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{1.1}$$

Η συνηθισμένη εξίσωση για τα ρευστά Navier-Stokes, αντικαθίσταται στην περίπτωση της κίνησης σε πορώδες μέσο από τον πειραματικό νόμο του Darcy, που θα γράφουμε ως

$$\mu\mathbf{v} = -k\nabla p. \tag{1.2}$$

Η παράμετρος μ είναι το ιξώδες του ρευστού και η παράμετρος k είναι η διαπερατότητα του μέσου. Οι παράμετροι αυτοί θεωρούνται σταθερές και θετικές, μια παραδοχή που είναι λογική στις περισσότερες περιπτώσεις.

Μια γενική υπόθεση για τα ρευστά είναι ότι η πίεση εξαρτάται από την πυκνότητα του ρευστού, δηλαδή θεωρούμε $p = p(\rho)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.2) και μετά την

(1.2) στην (1.1), καταλήγουμε

$$\varepsilon\rho_t - \frac{k}{\mu}\mathrm{div}\big(\rho\nabla p(\rho)\big) = 0. \tag{1.3}$$

Για ένα πολυτροπικό αέριο, έχουμε για την πίεση

$$p(\rho) = p_0\rho^\gamma,$$

όπου $\gamma \geq 1$ ο πολυτροπικός εκθέτης. Για ισοθερμικές διαδικασίες έχουμε $\gamma = 1$, ενώ για αδιαβατικές $\gamma > 1$. Στην περίπτωση λοιπόν ενός πολυτροπικού αερίου, η (1.3) γίνεται

$$\rho_t = c\Delta(\rho^m),$$

όπου $m = 1 + \gamma$ και $c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma+1)\varepsilon\mu}$. Η σταθερά c δεν μας αφορά στη μαθηματική μελέτη, καθώς μπορεί να εξαλειφθεί εύκολα. Για παράδειγμα, θέτοντας $t' = ct$.

Μη γραμμική διάχυση θερμότητας. Μια δεύτερη πολύ σημαντική εφαρμογή της εξίσωσης είναι στην μελέτη της διάδοσης θερμότητας (βλ.[13] και το μέρος X του [15]). Αυτό είναι κάτι που περιμένουμε βλέποντας τη μορφή της εξίσωσης, αφού για $m = 1$, η εξίσωσή μας γίνεται η εξίσωση θερμότητας. Η εξίσωση που περιγράφει τη διαδικασία μεταφοράς θερμότητας σε ένα μέσο, χωρίς την παρουσία πηγών ή καταβοθρών θερμότητας στο μέσο, είναι

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa\nabla T), \tag{1.4}$$

όπου T είναι η θερμοκρασία, που είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου, c είναι η ειδική θερμότητα και ρ είναι η πυκνότητα του μέσου που διαδίδεται η θερμότητα. Η παράμετρος κ είναι η θερμική αγωγιμότητα του μέσου. Όταν οι μεταβολές της θερμοκρασίας είναι μικρές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παράμετροι c, ρ, κ είναι σταθερές. Σ' αυτήν την περίπτωση, καταλήγουμε στην γνωστή εξίσωση θερμότητας. Στις περιπτώσεις όμως μεγάλων μεταβολών της θερμοκρασίας, η υπόθεση αυτή δεν ισχύει. Οι μεγάλες αλλαγές της θερμοκρασίας δηλαδή, επηρεάζουν τις παραμέτρους αυτές. Έτσι, είναι λογικό να μην έχουμε γραμμική διάχυση θερμότητας. Η απλούστερη υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε, είναι να θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία επηρεάζει τη θερμική αγωγιμότητα, δηλαδή $\kappa = \kappa(T)$. Τότε, η (1.4) γίνεται:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa(t)\nabla T),$$

ενώ αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η εξάρτηση του κ από την θερμοκρασία δίνεται από $\kappa(t) = aT^n$, με a και $n > 0$ σταθερές, παίρνουμε

$$T_t = C\Delta T^m, \quad \text{με} \quad m = n + 1,$$

με C σταθερά που μπορεί να εξαλειφθεί πάλι.

Υπόγεια ροή και διύλιση ρευστού. Θα δούμε στη συνέχεια ένα ακόμα πρόβλημα στη μηχανική ρευστών, που αφορά υπόγεια ροή και διύλιση ρευστού, στο οποίο προκύπτει φυσιολογικά η εξίσωση porous medium με εκθέτη $m = 2$(βλ.[13]). Θα μελετήσουμε την οριζόντια ροή υγρού μέσα από ένα στρώμα πορώδους μέσου, ύψους H που κείται πάνω σε μια αδιαπέραστη επίπεδη επιφάνεια. Αγνοούμε την εγκάρσια κίνηση στην κατεύθυνση y δηλαδή έχουμε κίνηση οριζόντια και κατακόρυφη. Στο ύψος της αδιαπέραστης επιφάνειας ορίζουμε $z = 0$, επομένως το μέγιστο ύψος που φτάνει το ύψος του στρώματος είναι $z = H$. Καθώς έχουμε ροή στην κατεύθυνση x, η επίδραση της βαρύτητας θα προκαλεί πτώση του υγρού, δηλαδή κίνηση στην κατεύθυνση z. Έτσι, το υγρό που διυλίζεται θα καταλαμβάνει μια περιοχή

$$\Omega = \{(x, z) \in R \times R\ |z \leq h(x, t)\},$$

δημιουργείται δηλαδή ένα ελεύθερο σύνορο $h,\ 0 \leq h(x, t) \leq H$, που διαχωρίζει την περιοχή που υπάρχει υγρό από την περιοχή που δεν υπάρχει. Σ′ αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι έχουμε θεωρήσει πως δεν υπάρχει περιοχή μερικώς διαποτισμένη από το υγρό. Μια σημαντική υπόθεση που κάνουμε για την απλοποίηση του μοντέλου είναι η σχεδόν οριζόντια κίνηση ($\mathbf{v} \sim (\mathrm{v}, 0)$), έτσι ώστε να μήν έχουμε απότομες μεταβολές του h. Τότε, στην εξίσωση κίνησης

$$\rho(\frac{d\mathrm{v}_z}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathrm{v}_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

μπορούμε να αγνοήσουμε το αριστερό μέλος και ολοκληρώνοντας ώς προς z, θα πάρουμε ότι η ποσότητα $p + \rho g z$ είναι σταθερή. Για να υπολογίσουμε την τιμή της θα πρέπει να δούμε τί γίνεται στο ελεύθερο σύνορο. Αν υποθέσουμε συνέχεια εκεί και θεωρώντας πως η πίεση στην ελεύθερη περιοχή ($z > h(x, t)$) είναι $p = 0$, τότε καταλήγουμε

$$p + \rho g z = \rho g h \Longleftrightarrow p = \rho g(h - z). \tag{1.5}$$

Η ταχύτητα $\mathbf{v}$ ικανοποιεί το νόμο του Darcy, αλλά τώρα λαμβάνουμε υπ′ όψιν μας και τις βαρυτικές επιδράσεις,

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla(p + \rho g z). \tag{1.6}$$

Η εξίσωση porous medium θα εμφανιστεί για την h μέσα από την αρχή διατήρησης μάζας. Η πυκνότητα είναι σταθερή, αφού είναι ομογενές ρευστό, άρα θα απαλειφθεί από την εξίσωση. Έτσι, για μια περιοχή $S = (x, x + a) \times (0, h)$, θα γίνει

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+a}\int_0^h dz dx = -\int_{\partial S}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl \tag{1.7}$$

Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα, έχουμε ότι στη δεξιά πλευρική επιφάνεια $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \approx (\mathrm{v}, 0) \cdot (1, 0) = \mathrm{v}$, ενώ στην αριστερή όμοια έχουμε $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\mathrm{v}$. Από τη σχέση (1.6) μπορούμε να δούμε ότι $v = -\frac{k}{\mu}p_x$. Το p από την άλλη δίνεται από τη σχέση (1.5). Αντικαθιστώντας αυτά στην (1.7) και παραγωγίζοντας ως προς x, παίρνουμε:

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz.$$

Καταλήγουμε έτσι στην εξίσωση

$$h_t = \frac{\rho g k}{2\varepsilon\mu}(h^2)_{xx},$$

που είναι η porous medium στη μία διάσταση με $m = 2$. Αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε παραπάνω διαστάσεις

$$h_t = \Delta(h^2).$$

Μοντέλο βιολογικών πληθυσμών. Τέλος, η εξίσωση εμφανίζεται στην περιγραφή μοντέλου βιολογικών πληθυσμών (βλ.[8]). Συμβολίζουμε με $\rho(x,t)$ την πυκνότητα του πληθυσμού, δηλαδή το πλήθος των ατόμων ανά μονάδα όγκου στο συγκεκριμένο σημείο τη συγκεκριμένη στιγμή. Με σ θα συμβολίζουμε το ρυθμό με τον οποίο αυξομειώνεται ο πληθυσμός από γεννήσεις και θανάτους. Η ταχύτητα με την οποία κινούνται τα άτομα σε μια συγκεκριμένη στιγμη τη συμβολίζουμε με $\mathbf{v}$. Με τους συμβολισμούς αυτούς, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή του πλυθυσμού σε μια περιοχή B ισούται με την εισροή ατόμων από το σύνορό του, συν την μεταβολή του από γεννήσεις ή θανάτους. Μαθηματικά μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho dx = \int_B \sigma dx - \int_{\partial B} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_B \sigma dx - \int_B \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})dx. \tag{1.8}$$

Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε, αν υποθέσουμε οτι έχουμε ομαλές συναρτήσεις,

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \sigma. \tag{1.9}$$

Να παρατηρήσουμε εδώ, οτι η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση συνέχειας που έχουμε για τα ρευστά αλλά με μή ομογενή όρο. Η ύπαρξη αυτού του όρου οφείλεται στην υπόθεση ότι έχουμε γεννήσεις και θανάτους, που παίζουν το ρόλο πηγών ή καταβοθρών αν αντιστοιχίσουμε με τα ρευστά.

Χρειαζόμαστε κάποιες υποθέσεις για τις συναρτήσεις σ και $\mathbf{v}$. Μια λογική υπόθεση, είναι ότι ένας βασικό λόγος για τη μετακίνηση πληθυσμών είναι ο υπερπληθυσμός. Υπάρχει δηλαδή η τάση να μετακινούνται από περιοχές με μεγάλη πυκνότητα σε περιοχές με μικρότερη πυκνότητα. Για το $\mathbf{v}$, δηλαδή, υποθέτουμε

$$\mathbf{v} = -k(\rho)\nabla\rho, \quad \text{με} \quad k(\rho) > 0.$$

Θα υποθέσουμε στη συνέχεια $k(\rho) = C\rho^m$, με $m \geq 2$. Για το σ, μπορούμε από τη βιολογία να κάνουμε διάφορες επιλογές. Θα επιλέξουμε τη γραμμική εξάρτηση από το ρ που προτείνει ο νόμος του Malthus.

$$\sigma(\rho) = \mu\rho, \qquad (\mu = \text{σταθερά}).$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις συναρτήσεις στην (1.9) παίρνουμε

$$\rho_t = \Delta(\rho^m) + \mu\rho.$$

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών $\left(\rho = ue^{\mu t}, \quad \tau = \frac{1}{\mu(m-1)}(e^{\mu(m-1)t} - 1)\right)$, καταλήγουμε στην

$$u_\tau = \Delta(u^m).$$

Φυσικά, αυτό είναι ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο, καθώς δεν λαμβάνει υπ΄ όψιν του τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ειδών, ούτε της ηλικίας των ατόμων, καθώς και άλλους παράγοντες που περιπλέκουν το μοντέλο.

1.2 Ειδική λύση και γενικές ιδιότητες

Θα ήταν χρήσιμο για την καλύτερη μελέτη της εξίσωσης να δούμε κάποιες γενικές ιδιότητες των λύσεων που προκύπτουν από την ίδια την εξίσωση. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με μια cutoff συνάρτηση ζ και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε από ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t \zeta dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^m \Delta \zeta dx.$$

Αφήνοντας $\zeta \uparrow 1$, βλέπουμε το αμετάβλητο της συνολικής μάζας στο χρόνο.

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} u dx = \text{σταθερά}.$$

Για να επιδέχεται μια διαφορική εξίσωση self-similar λύση, πρέπει να μένει αμετάβλητη κάτω από κλιμάκωση. Αυτό θέλουμε να εξετάσουμε στην εξίσωσή μας. Ορίζουμε λοιπόν μια νέα χωρική μεταβλητή $\tilde{x} = kx$, με k μια θετική πραγματική σταθερά. Η νέα συνάρτηση, για να διατηρήσει την ίδια μάζα πρέπει να είναι $\tilde{u} = k^{-d}u$. Από την άλλη, για να λύνει η μετασχηματισμένη συνάρτηση την ίδια εξίσωση, πρέπει να βρούμε $\tilde{t}(t)$, ώστε

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \Delta(\tilde{u}^m) \iff k^{-d} u_t \frac{1}{\tilde{t}'(t)} = k^{-(md+2)} \Delta(u^m).$$

Για να ισχύει αυτό, πρέπει $\tilde{t} = k^{d(m-1)+2} t$.
Βλέπουμε δηλαδή, ότι αν έχουμε μια λύση, τότε μπορούμε να πάρουμε μια οικογένεια λύσεων. Για να πάρουμε ένα συνδυασμό χωρικών μεταβλητών και χρόνου που να μένει αμετάβλητος, εισάγουμε μια νέα μεταβλητή που απαιτούμε να είναι αμετάβλητη κάτω από το μετασχηματισμό. Έτσι, ψάχνουμε a τέτοιο ώστε:

$$y = \frac{x}{t^a} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}^a}.$$

Το μοναδικό a για το οποίο συμβαίνει αυτό είναι $a = (d(m-1)+2)^{-1}$. Κατα κάποιο τρόπο δηλαδή, έχουμε εισαγάγει μια μονάδα μήκους που μας επιτρέπει να κλιμακώνουμε τη λύση μας. Μ΄ αυτό τον τρόπο μπορούμε να βάλουμε και στις δύο συναρτήσεις την ίδια χωρική μεταβλητή y, στη θέση των x και $\tilde{x}$. Έτσι, ψάχνοντας για λύσεις με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών, μπορούμε να γράψουμε

$$u(x,t) = g(t)f(y) \quad \text{και} \quad \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = g(\tilde{t})f(y), \quad \text{ενώ} \quad \tilde{u} = k^{-d}u.$$

Από τις σχέσεις αυτές, μπορούμε να δούμε ότι $g(t) = t^{-da}$. Άρα η λύση είναι της μορφής

$$u(x,t) = t^{-da} \cdot f(\frac{x}{t^a}).$$

Έχοντας βρεί τη self-similarity της εξίσωσης, μένει να βρούμε την f, για να έχουμε μια λύση. Υποθέτουμε ότι η f είναι ακτινικά συμμετρική, $f(|y|) = v(r)$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να πάρουμε:

$$\big(r^{d-1}(v^m)'\big)' + a\big(r^d v\big)' = 0 \implies r^{d-1}(v^m)' + ar^d v = C, \quad C = \text{σταθερά}.$$

Αν υποθέσουμε $\lim\limits_{r\to+\infty} v = \lim\limits_{r\to+\infty} v' = 0$, θα πάρουμε $C = 0$. Επομένως,

$$(v^m)' = -arv \iff (v^{m-1})' = -\frac{m-1}{m}ar \iff v^{m-1} = \sigma^2 - \frac{m-1}{2m}ar^2, \quad \text{όπου} \quad \sigma^2 = \text{σταθερά}.$$

Αντικαθιστώντας, τις αλλαγές μεταβλητών που έχουμε κάνει και φροντίζοντας η λύση μας να παραμένει μη αρνητική για να αποφύγουμε εκφυλισμό της, συνάγουμε την επονομαζόμενη λύση
Barenblatt:

$$\mathcal{U}(x,t) = t^{-da}\big(\sigma^2 - \frac{m-1}{2m}a\frac{|x|^2}{t^{2a}}\big)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Το σ^2 είναι μια σταθερά, η οποία μπορεί να επιλεγεί ελεύθερα, ωστε να καθορίζει τη συνολική μάζα. Η λύσεις αυτές έχουν το χαρακτηριστικο, ότι τα αρχικά τους δεδομένα είναι Dirac. Επίσης, έχουν εξέχουσα σημασία στη συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλους χρόνους, καθώς δρουν σαν ελκυστές τους. Δηλαδή, για μια λύση της εξίσωσης με αρχικά δεδομένα u_0, αν επιλέξουμε το σ, ώστε η μάζα της $\mathcal{U}$ να είναι ίδια με τη μάζα του u_0, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης περιγράφεται από τη $\mathcal{U}$. Συγκεκριμένα, έχουμε τα εξής αποτελέσματα για $m > 1$ ή $(d-2)/d < m < 1$:

$$\lim_{t\to+\infty} ||u(t,\cdot) - \mathcal{U}(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{t\to+\infty} t^{da}||u(t,\cdot) - \mathcal{U}(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.10}$$

Αυτά τα απότελέσματα τα θεωρούμε γνωστά. Η πρώτη τους εμφάνιση σημειώθηκε αρκετα παλιότερα και για την απόδειξή τους παραπέμπουμε στην πρόσφατη δουλειά [12]

Κεφάλαιο 2

Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσης για την εξίσωση Porous Medium σε φραγμένο χωρίο και σε όλο το χώρο. Για την πορεία των αποδείξεων, ακολουθήσαμε το [11].

2.1 Πρόβλημα Dirichlet

Στην παράγραφο αυτη θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών σε φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d > 1$. Δηλαδή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα

$$u_t = \Delta u^m, \quad \text{στο} \quad Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{στο} \quad \Sigma_T, \tag{2.3}$$

όπου $m > 1$ και $Q_T = \Omega \times [0,T]$. Η u_0 είναι μη αρνητική, τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο Ω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d,\ d \geq 1$ με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2+\alpha},\ \alpha \in (0,1)$. Ο χρόνος Τ μπορεί να είναι είτε πεπερασμένος είτε άπειρος.

Θέλουμε αρχικά να δώσουμε έναν ορισμό ασθενούς λύσης για το πρόβλημα (2.1)-(2.3).

Ορισμός 1. Μια μη αρνητική συνάρτηση u ορισμένη στο Q_T θα λέγεται ασθενής λύση του (2.1)-(2.3) αν

1. $u^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

2. Η u ικανοποιεί

$$\int\int_{Q_T} \nabla u^m \nabla\varphi - u\varphi_t dxdt = \int_{\Omega} u_0(x)\varphi(x,0)dx, \tag{2.4}$$

για όλες τις συναρτήσεις $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ που μηδενίζονται στο Σ και για $t = T$.

Αρχικά, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για να έχει νόημα η εξίσωση (2.4) θα πρέπει τουλάχιστον $u_0 \in L^1(\Omega)$. Επισης, δεν απαιτούμε από τις παραγώγους στην (2.1) να είναι πραγματικες συναρτήσεις αλλά μόνο να ικανοποιούνται με την ασθενή έννοια.

Θεώρημα 1. *Το πρόβλημα (2.1)-(2.3) έχει το πολύ μία ασθενή λύση*

Απόδειξη. Έστω ότι έχει δύο λύσεις u_1, u_2 τότε από (2.4) έχουμε

$$\int\int_{Q_T} \big(\nabla(u_1^m - u_2^m)\nabla\varphi - (u_1 - u_2)\varphi_t\big) dxdt = 0 \quad \forall \varphi \in C(\bar{Q_T}). \tag{2.5}$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη συνάρτηση τεστ. Έστω

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int_t^T (u_1^m(x,s) - u_2^m(x,s))ds, & 0 < t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}.$$

όπου $T > 0$. Ακόμη κι αν η η δεν έχει την απαιτούμενη ομαλότητα μπορούμε να την προσεγγίσουμε με ομαλοποιητές. Αν λοιπόν η^ε ομαλοποίηση της η, τότε θα έχουμε από (2.5)

$$\int\int_{Q_T} \big(\nabla(u_1^m - u_2^m)\nabla\eta^\varepsilon - (u_1 - u_2)\eta_t^\varepsilon\big) dxdt = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

και για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\int\int_{Q_T} \big(\nabla(u_1^m - u_2^m)\nabla\eta - (u_1 - u_2)\eta_t\big) dxdt = 0.$$

Δηλάδή η (2.5) ικανοποιείται και για $\varphi = \eta$ αφού

$$\eta_t = -(u_1^m - u_2^m) \in L^2(Q_T),$$

$$\nabla\eta = \int_t^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds \in L^2(Q_T),$$

και επιπλέον $\eta(t) \in H_0^1(\Omega)$ και $\eta(T) = 0$. Επομένως

$$\int\int_{Q_T} (u_1^m - u_2^m)(u_1 - u_2) dxdt + \int\int_{Q_T} \big(\nabla(u_1^m - u_2^m)\big)\Big(\int_t^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds\Big) dxdt = 0,$$

$$\Leftrightarrow \int\int_{Q_T} (u_1^m - u_2^m)(u_1 - u_2) dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\int_t^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds\Big)^2 dx = 0.$$

Βλέπουμε τώρα ότι και τα δύο ολοκληρώματα διατηρούν πρόσημο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $u_1 = u_2$ σχεδόν παντού στο Q_T. Άρα το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση. □

Θεώρημα 2. *Έστω $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Τότε το πρόβλημα (2.1) έχει ασθενή λύση με $T = +\infty$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα χωριστεί σε βήματα. Θα ξεκινήσουμε με λείες συναρτήσεις και θα ελαττώνουμε ανα βήμα την ομαλότητα.

1^o βήμα: Θεωρούμε u_0 είναι μη αρνητική και C^∞ λεία συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο Ω. Θα κατασκευάσουμε ακολουθία που να προσεγγίζει τα αρχικά μας δεδομένα, χωρίς να μηδενίζονται για να αποφύγουμε τον εκφυλισμό της εξίσωσης. Γι΄ αυτό θεωρούμε

$$u_{0_n}(x) = u_0(x) + \frac{1}{n},$$

και τώρα έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$(u_n)_t = \Delta(u_n^m) \quad \text{στο} \quad Q, \tag{2.6}$$

$$u_n(x,0) = u_{0_n}(x) \quad \text{στο} \quad \bar{\Omega}, \tag{2.7}$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n} \quad \text{στο} \quad \Sigma = \partial\Omega \times [0,\infty). \tag{2.8}$$

Από Αρχή Μεγίστου και κοιτάζοντας τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα, περιμένουμε φραγμένες λύσεις

$$\frac{1}{n} \le u_n(x,t) \le M + \frac{1}{n} \quad \text{στο} \quad Q, \tag{2.9}$$

όπου $M = sup(u_0)$.
Τώρα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (2.6) με

$$(u_n)_t = \operatorname{div}\big(a_n(u)\nabla u\big), \tag{2.10}$$

όπου $a_n(u) = mu^{m-1}$. Η $a_n(u)$ είναι θετική και λεία συνάρτηση στο $[1/n, M+1/n]$. Το πρόβλημα (2.10), (2.7), (2.8) έχει μοναδική λύση στο χώρο $C^{2,1}(\bar{Q})$ από θεωρία ημιγραμμικών ελλειπτικών εξισώσεων. Μάλιστα, με επαναλαμβανόμενη παραγώγιση η λύση είναι $C^\infty(Q)$. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε κλασσική λύση για το πρόβλημα (2.6)-(2.8). Επιπλέον, από την Αρχή Μεγίστου έχουμε

$$u_{n+1}(x,t) \le u_n(x,t) \quad \text{στο} \quad \bar{Q},$$

για κάθε $n \ge 1$, δηλαδή η ακολουθία μας είναι φθίνουσα και συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Τότε, η u_n συγκλίνει στη u στον $L^p(\Omega)$ για όλα τα $1 \le p < \infty$. Μενει να δείξουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του (2.1)-(2.3). Για να μπορέσουμε να περάσουμε στο όριο, στα ολοκληρώματα της ασθενούς λύσης, χρειαζόμαστε κάποιες εκτιμήσεις. Από τη σχέση (2.9) παίρνουμε

$$0 \le u \le M \quad \text{στο} \quad Q.$$

Χρειαζόμαστε φράγμα και για το $\nabla(u^m)$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.6) με $\varphi_n = u_n^m - (\frac{1}{n})^m$ και ολοκληρώνουμε στο Q_T.

$$\int\int_{Q_T} (u_n)_t\big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)dxdt = \int\int_{Q_T} \big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)\Delta(u_n^m)dxdt.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά μέρη γίνεται

$$\begin{aligned}
A &= \int\int_{Q_T} (u_n)_t\big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)dxdt = \int_\Omega u_n\big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)\Big|_0^T dx - \int\int_{Q_T} u_n(u_n^m)_t dxdt \\
&= \int_\Omega u_n\big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)\Big|_0^T dx - m\int\int_{Q_T} u_n^m(u_n)_t + m\int\int_{Q_T}(u_n)_t(\frac{1}{n})^m dxdt \\
&\quad - m\int\int_{Q_T}(u_n)_t(\frac{1}{n})^m dxdt.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (m+1)A = \int_\Omega u_n\big(u_n^m - (\frac{1}{n})^m\big)\Big|_0^T dx - m\int_\Omega \frac{1}{n^m}u_n\Big|_0^T dx.$$

Ετσι,

$$\begin{aligned}
A &= \int_\Omega \frac{1}{m+1}u_n(x,T)\big(u_n^m(x,T) - \frac{1}{n^m}\big)dx - \int_\Omega \frac{1}{m+1}u_{0_n}(u_{0_n}^m - \frac{1}{n^m})dx \\
&\quad - \frac{m}{(m+1)n^m}\int_\Omega u_n(x,T)dx + \frac{m}{(m+1)n^m}\int_\Omega u_{0_n}dx \\
&= \int_\Omega u_n(x,T)\big(\frac{1}{m+1}u_n^m(x,T) - \frac{1}{n^m}\big) - \int_\Omega (\frac{1}{m+1}u_{0_n}^m - \frac{1}{n^m})dx.
\end{aligned}$$

Από την άλλη το δεύτερο ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά μέρη, γίνεται

$$B = \int\int_{Q_T}(u_n^m - \frac{1}{n^m})\Delta(u^m) = \int_{\Sigma_T}(u_n^m - \frac{1}{n^m})\nabla u_n^m \bar{\nu} dSdt - \int\int_{Q_T}|\nabla u_n^m|^2 dxdt.$$

Όμως η παρένθεση του δεύτερου ολοκληρώματος μηδενίζεται,αφού $u_n = \frac{1}{n}$ στο Σ_T
Αφού λοιπόν A=B παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int\int_{Q_T}|\nabla u_n^m|^2 dxdt &= \int_\Omega(\frac{1}{m+1}u_{0_n}^m - \frac{1}{n^m})u_{0_n}dx - \int_\Omega(\frac{1}{m+1}u_n^m(x,T) - \frac{1}{n^m})u_n(x,T)dx \\
&\le \frac{1}{m+1}\int_\Omega(u_0(x) + \frac{1}{n})^{m+1}dx + \frac{1}{n^m}(M + \frac{1}{n})\int_\Omega dx.
\end{aligned}$$

Άρα $\nabla(u_n^m)$ ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^2(Q)$, δηλαδή υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ασθενώς σε κάποια συνάρτηση ψ. Όμως ξέρουμε ότι $u_n^m \to u^m$, επομένως $\psi = \nabla u^m$ με την ασθενή έννοια. Τώρα η ανισότητα μπορεί να γραφεί

$$\int\int_{Q_T}|\nabla u_n^m|^2 dxdt + \int_\Omega(\frac{1}{m+1}u_n^m(x,T) + \frac{1}{n^m})u_n(x,T)dx \le \frac{1}{m+1}\int_\Omega(u_0(x) + \frac{1}{n})^m + 1dx,$$

και παίρνοντας όριο, έχουμε την εκτίμηση

$$(m+1)\int\int_{Q_T}|\nabla u^m|^2 dxdt + \int_\Omega u^{m+1}(x,T)dx \le \int_\Omega u_0^{m+1}(x)dx, \tag{2.11}$$

που ονομάζουμε Εκτίμηση Ενέργειας (Energy Estimate). Από την άλλη, έχουμε ότι $u_n \in C(\bar{Q})$, $u_n = \frac{1}{n}$ στο Σ και $0 \leq u \leq u_n$, επομένως έχουμε

$$\lim_{(x,t)\to\Sigma} u(x,t) = 0,$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση. Επομένως, $u^m(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)$ σχεδόν για κάθε $t > 0$. Τελικά, εφόσον η u_n είναι κλασσική λύση, είναι και ασθενής. Επομένως ικανοποιεί την (2.4) αν αντικαταστήσουμε το u_0 με u_{0_n}.

$$\int\int_{Q_T} \nabla u_n^m \nabla\varphi - u_n\varphi_t dxdt = \int_\Omega u_{0_n}(x)\varphi(x,0)dx.$$

Παίρνοντας λοιπόν όριο, καταλήγουμε

$$\int\int_{Q_T} \nabla u^m \nabla\varphi - u\varphi_t dxdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx.$$

Άρα η u είναι ασθενής λύση του (2.1)-(2.3). Έχουμε λοιπόν αποδείξει ύπαρξη λύσης στην περίπτωση $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι αν εχουμε δυο αρχικά δεδομένα τέτοια ώστε $u_0 \leq \hat{u_0}$,τότε με την προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε παράγουμε διατεταγμένες ακολουθίες $u_{0_n} \leq \hat{u_{0_n}}$ και από Αρχη Μεγίστου, θα έχουμε $u_n \leq \hat{u_n}$ $\forall n \geq 1$, άρα στο όριο θα πάρουμε $u \leq \hat{u}$.

2^o βήμα: Θεωρούμε u_0 φραγμένη που εξαφανίζεται κοντα στο σύνορο. Η μέθοδος είναι ίδια με αυτην του πρώτου βήματος. Τώρα οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι $u_n \in C^\infty(Q) \cap C^{2,1}(Q \cup \Sigma)$ και δεν είναι συνεχείς στο $t = 0$, εκτός κι αν είναι τα αρχικά δεδομένα. Τα αρχικά δεδομένα τα παίρνουν στους L^p $\forall p < \infty$. Αυτό όμως δεν αλλάζει απολύτως τίποτα στην πορεία της απόδειξης.

3^o βήμα: Γενική περίπτωση. Στην περίπτωση $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$, θα πάρουμε μια αύξουσα ακολουθία από cutoff συναρτήσεις ζ_k που εξαφανίζονται κοντά στο Γ, και για να προσεγγίσουμε τα αρχικά δεδομένα θεωρούμε την ακολουθία

$$u_{0_k} = min\{u_0(x)\zeta_k(x), k\}.$$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε το δεύτερο βήμα, με αρχικά δεδομένα u_{0_k} έχουμε μοναδική u_k ασθενη λύση του (2.1)-(2.3). Επίσης, από την παρατήρηση στο τέλος του πρώτου βήματος, έχουμε $u_{k+1} \geq u_k$ στο Q. Έχουμε δηλαδη αύξουσα ακολουθία. Από την άλλη, η εκτίμηση (2.11) μας εξασφαλίζει ότι η $\{u_k\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $\{L^\infty(0,\infty) : L^{m+1}(\Omega)\}$ και η ∇u_k^m στον $L^2(Q)$. Έτσι, έχουμε εξασφαλίσει σχεδόν παντού σύγκλιση της $\{u_k\}$ σε μία συνάρτηση $u \in \{L^\infty(0,\infty) : L^{m+1}\}$ και ∇u_k^m να συγκλίνει ασθενώς στον $L^2(Q)$ στην ∇u^m. Έτσι, η u ικανοποιεί την (2.11) και τελικά $u^m \in \{L^2(0,\infty : H_0^1(\Omega))\}$. Έτσι, ικανοποιείται και η (2.4) και καταλήγουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του (2.1)-(2.3). □

Έχουμε λοιπόν ολοκληρώσει την απόδειξη για ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης στο πρόβλημα Dirichlet.

Τώρα που έχουμε εξασφαλίσει μια λύση, μας ενδιαφέρει να δούμε κατά πόσο μια τέτοια λύση μπορεί να είναι κλασσική. Θα δείξουμε στην επόμενη πρόταση, ότι αν τα αρχικά δεδομένα μας είναι λεία και θετικά στο Ω, τότε η λύση μας είναι κλασσική.

Πρόταση 1. *Έστω $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ είναι θετική στο Ω και μηδενίζεται στο Γ και u η ασθενής λύση του προβλήματος. Τότε $u \in C^\infty(Q) \cap C(\bar{Q})$ είναι θετική στο Q και μηδενίζεται στο Σ.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε πως $\forall x_0 \in \Omega$ όπου $u_0(x_0) > 0$ θα έχουμε $u(x_0, t) > 0 \; \forall t > 0$. Αυτό θα γίνει με σύγκριση τη λύσης μας με μια γνωστή λύση. Αν $B = B_r(x_0)$ είναι μια μπάλα ακτίνας r και κέντρου x_0, που η u_0 είναι θετική, $u_0 \geq c > 0 \quad \forall x \in B$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\tilde{u} = \mathcal{U}(x - x_0, t + 1; C) \quad (\text{όπου}\ \mathcal{U} \quad \text{η λύση} \quad Barenblatt).$$

Μπορούμε να διαλέξουμε C τέτοιο ώστε $u_0(x) \geq \tilde{u}(x, 0)$ στη B και ο φορέας της $\tilde{u}$ να περιέχεται στο Q_T για δοσμένο T. O φορέας θα είναι της μορφής $\mathcal{S} = \{(x,t) : c|x - x_0|^\alpha < t + 1\}$ όπου $\alpha = d(m-1) + 2$. Γνωρίζουμε ότι η $\tilde{u} \in C^\infty(\mathcal{S})$ και εξαφανίζεται στο σύνορο του $\mathcal{S}$.
Αν εφαρμόσουμε την Αρχή Μεγίστου στο σύνολο $\mathcal{S} \cap Q_T$ για τη $\tilde{u}$ και μια λεία προσέγγιση της λύσης μας, καταλήγουμε $u \geq \tilde{u}$ στο $\mathcal{S}$. Βλέπουμε μ' αυτόν τον τρόπο ότι κρατάμε τη λύση μας μακριά από το 0 σε μια περιοχή $N = B \times (0, T)$. Επομένως, στην προσέγγιση που κάνουμε στο Θεώρημα 2 μπορούμε να εφαρμόσουμε στο N τη θεωρία ημιγραμμικών παραβολικών εξισώσεων και να συμπεράνουμε πως $u \in C^\infty(N)$ και τα αρχικά δεδομένα λαμβάνονται με συνεχή τρόπο. Το ότι η u μηδενίζεται με συνεχή τρόπο στο Σ φαίνεται αν δούμε στην προσέγγιση που κάνουμε ότι, $u \leq u_n, \quad u_n \in C^\infty(\bar{Q})$ και $u_n = \frac{1}{n}$ στο Σ. □

Προτού προχωρήσουμε στο πρόβλημα Cauchy που είναι και αυτο που θα μας απασχολήσει τελικα, ας δούμε κάποιες ιδιότητες των λύσεων.

Πρώτα, θα δούμε μια σημαντική εκτίμηση, που θα μας δώσει κάποια αποτελέσματα ευστάθειας της λύσης στον L^1.

Πρόταση 2. *Έστω $u_0, \hat{u}_0$ δύο αρχικά δεδομένα στον $L^{m+1}(\Omega)$ και έστω $u, \hat{u}$ οι αντίστοιχες ασθενείς λύσεις. Τότε για κάθε $t > \tau \geq 0$*

$$\int [u(x,t) - \hat{u}(x,t)]^+ dx \leq \int [u(x,\tau) - \hat{u}(x,\tau)]^+ dx \leq \int [u_0(x) - \hat{u}_0(x)]^+ dx, \qquad (2.12)$$

και συνεπώς,

$$||u(t) - \hat{u}(t)||_1 \leq ||u(\tau) - \hat{u}(\tau)||_1 \leq ||u_0 - \hat{u}_0||_1. \qquad (2.13)$$

Απόδειξη. Έστω $p \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \leq p \leq 1, \; p(s) = 0$ για $s < 0, \; p'(s) > 0$ για $s > 0$ και ας θεωρήσουμε $u_n, \hat{u}_n$ τις προσεγγιστικές λύσεις της απόδειξης του θεωρήματος ύπαρξης, με το ίδιο n. Έχουμε τότε για $t > 0$

$$(u_n - \hat{u}_n)_t = \Delta(u_n^m - \hat{u}_n^m),$$

$$(u_n - \hat{u}_n)_t p(u_n^m - \hat{u}_n^m) = \Delta(u_n^m - \hat{u}_n^m) p(u_n^m - \hat{u}_n^m),$$

$$\int (u_n - \hat{u}_n)_t p(u_n^m - \hat{u}_n^m) dx = \int \Delta(u_n^m - \hat{u}_n^m) p(u_n^m - \hat{u}_n^m) dx,$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι $p(u_n^m - \hat{u}_n^m) = 0$ στο Σ, αφού είναι $u_n = \hat{u}_n = \frac{1}{n}$ στο Σ. Έτσι, με ολοκλήρωση κατά μέρη στο δεύτερο μελος, έχουμε

$$\int (u_n - \hat{u}_n)_t p(u_n^m - \hat{u}_n^m)dx = -\int |\nabla(u_n^m - \hat{u}_n^m)|^2 p'(u_n^m - \hat{u}_n^m)dx \leq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα, πως $\frac{d}{dt}[u_n - \hat{u}_n]^+ = (u_n - \hat{u}_n)_t sign_0^+(u_n - \hat{u}_n)$ και πως μπορούμε να πάρουμε
$p \to sign_0^+$, όπου

$$sign_0^+(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Άρα λοιπόν, η ανισότητα γίνεται

$$\frac{d}{dt}\int [u_n - \hat{u}_n]^+ dx \leq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.12) για $u_n, \hat{u}_n$. Περνώντας στο όριο παίρνουμε την (2.12). Η απόδειξη της, δεν αλλαζει αν την εφαρμόσουμε αντίστροφα,για $[\hat{u}_n - u_n]^+$ και από αυτήν την παρατήρηση συμπεραίνουμε την (2.13). □

Εδώ, να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση αυτή μας δίνει δύο ενδιαφέροντα πορίσματα.Το πρώτο έχει να κάνει με σύγκριση λύσεων, ενώ το δεύτερο με συνέχεια των λύσεων στον L^1

Πόρισμα 1. *Αν $u_0 \leq \hat{u}_0$ σχεδόν παντου στο Ω, τότε $u \leq \hat{u}$ σχεδόν παντού στο Q.*

Πόρισμα 2. *Η ασθενής λύση του προβλήματος(2.1)-(2.3) μπορει να θεωρηθεί σαν μια συνεχής καμπύλη στον L^1.Δηλαδή, $u \in C([0,\infty) : L^1(\Omega))$.*

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι όταν η $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ είναι θετική και εξαφανίζεται στο $\partial\Omega$ τότε, $u \in C([0,T] : L^1(\Omega))$. Για τυχαία u_0 θα την προσεγγίσουμε με $\hat{u}_0 \in C(\bar{\Omega})$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την πρόταση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||u(\tau) - u_0||_1 &\leq ||u(\tau) - \hat{u}(\tau)||_1 + ||u_0 - \hat{u}_0||_1 + ||\hat{u}_0(\tau) - \hat{u}_0||_1 \leq \\ &\leq 2||u_0 - \hat{u}_0||_1 + ||\hat{u}(\tau) - \hat{u}_0||_1. \end{aligned}$$

Έτσι, αν πάρουμε $\hat{u}_0 \to u_0$ και $\tau \to 0$ παίρνουμε $u(\tau) \to u_0$. Δηλαδή, έχουμε συνέχεια στο 0. Για να δούμε ότι είναι συνεχής και σε οποιοδήποτε άλλο $t > 0$, μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία στους χρόνους t και $t + \tau$.Καταλήγουμε λοιπόν, $u \in C([0,\infty) : L^1(\Omega))$. □

2.2 Πρόβλημα Cauchy

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών τιμών σε όλο τον $\mathbb{R}^d$, με αρχικά δεδομένα, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $u_0 \geq 0$. Τώρα, με Q θα συμβολίζουμε το $Q = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ και $Q_T = \mathbb{R}^d \times (0,T)$. Θα δείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης για το πρόβλημα

$$u_t = \Delta(u^m) \text{ στο } Q \tag{2.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ για } x \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

όπου $m > 1$ και $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad u_0 \geq 0$.
Ας δώσουμε πρώτα έναν ορισμό ισχυρής λύσης του προβλήματός μας

Ορισμός 2. Μια μη αρνητική συνάρτηση $u \in C([0,\infty) : L^1(\mathbb{R}^d))$ θα λέγεται ισχυρη λύση του προβλήματος (2.14)-(2.15) αν

1. $u^m, \ u_t, \ \Delta(u^m) \in L^1_{loc}(0,\infty : L^1(\mathbb{R}^d))$
2. $u_t = \Delta(u^m)$ σχεδόν παντού στο Q
3. $u(0) = u_0$.

Αρχικά,θα δούμε ένα λήμμα για τη διάταξη των λύσεων που θα μας δώσει τελικά τη μοναδικότητα της λύσης.

Λήμμα 1. *Έστω u_1, u_2 δύο ισχυρές λύσεις του (2.14)-(2.15) στο Q_T. Για κάθε $0 < t_1 < t_2$ έχουμε*

$$\int [u_1(x,t_2) - u_2(x,t_2)]_+ dx \leq \int [u_1(x,t_1) - u_2(x,t_1)]_+ dx.$$

Απόδειξη. Έστω $p \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $p(s) = 0$ για $s \leq 0$, $p\prime(s) > 0$ για $s > 0$ και $0 \leq p \leq 1$ και έστω $j(r) = \int_0^r p(s)ds$ μια παράγουσα της p. Βλέπουμε ότι η p μπορεί να είναι μια προσέγγιση της

$$sign_0^+(r) = \begin{cases} 1, & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases},$$

και τότε η j θα προσεγγίζει την $s \mapsto [s]_+$.
Επιπλέον, θεωρούμε cutoff συνάρτηση $\zeta_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ όπου $0 \leq \zeta_0 \leq 1, \quad \zeta_0(x) = 1$ για $|x| \leq 1, \quad \zeta_0(x) = 0$ αν $|x| \geq 2$ και έστω $\zeta_n(x) = \zeta_0(\frac{x}{n})$. Η ακολουθία είναι τέτοια ώστε καθώς
$n \to \infty, \quad \zeta_n \uparrow 1$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι λύσεις μας, έχουμε

$$(u_1 - u_2)_t = \Delta w,$$

όπου $w = u_1^m - u_2^m$. Τώρα πολλαπλασιάζοντας με $p(w)\zeta_n$ και ολοκληρώνοντας στο $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times [t_1, t_2]$ παίρνουμε

$$\int\int (u_1 - u_2)_t p(w)\zeta_n = \int\int \Delta w p(w)\zeta_n. \tag{2.16}$$

Τώρα προσεγγίζουμε τη w με συνελίξεις της με λείους πυρήνες $\rho_k, \ w_k = w * \rho_k$. Έχουμε $w_k \to w, \ \nabla w_k \to \nabla w$ και $\Delta w_k \to \Delta w$ στον $L^1_{loc}(Q)$ και σχεδόν παντού για κάποια υπακολουθία. Έτσι $p(w_k) \to p(w)$ σχεδόν παντού. Επιπλέον, από ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\int\int p(w_k)\Delta w_k \zeta_n = -\int\int p\prime(w_k)|\nabla w_k|^2 \zeta_n - \int\int p(w_k)\nabla w_k \nabla \zeta_n,$$

δηλαδή, το

$$\int\int p\prime(w_k)|\nabla w_k|^2\zeta_n = -\int\int p(w_k)\Delta w_k\zeta_n - \int\int p(w_k)\nabla w_k\nabla\zeta_n,$$

και από λήμμα $Fatou$, στέλνοντας το $k\to+\infty$,

$$\int\int p\prime(w)|\nabla w|^2\zeta_n \le -\int\int p(w)\Delta w\zeta_n - \int\int p(w)\nabla w\nabla\zeta_n.$$

Επιστρέφοντας τώρα στην (2.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int\int(u_1-u_2)_t p(w)\zeta_n &\le -\int\int p\prime(w)|\nabla w|^2\zeta_n - \int\int p(w)\nabla w\nabla\zeta_n\\ &\le -\int\int p(w)\nabla w\nabla\zeta_n = \int\int \nabla j(w)\nabla\zeta_n = \int\int j(w)\Delta\zeta_n\\ &\le \int\int |w||\Delta\zeta_n|,\end{aligned}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στο $\mathcal{S}$.
Αν αφήσουμε τώρα την $p\to sign_0^+$ και παρατηρήσουμε ότι $\frac{d}{dt}[u_1-u_2]_t = sign_0^+(u_1-u_2)\frac{d}{dt}(u_1-u_2)$, τότε έχουμε

$$\int[u_1(x,t_2)-u_2(x,t_2)]_+\zeta_n dx \le \int[u_1(x,t_1)-u_2(x,t_2)]_+\zeta_n dx + ||\Delta\zeta_n||_\infty\int\int_{\mathcal{S}\cap\{x>n\}}|w(x,t)|dxdt.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται έτσι, αφού το $\Delta\zeta_n$ ζεί στο $[n,2n]$.

Τώρα, έχουμε ότι $w\in L^1(t_1,t_2:L^1(\mathbb{R}^d))$ και $||\Delta\zeta_n||_\infty = \frac{||\Delta\zeta_0||_\infty}{n^2}$, μπορούμε να αφήσουμε το $n\to\infty$ και τότε $\zeta_n\to1$ και τελικά

$$\int[u_1(x,t_2)-u_2(x,t_2)]_+dx \le \int[u_1(x,t_1)-u_2(x,t_1)]_+dx.$$

□

Το αποτελεσμα αυτό θα μας δώσει άμεσα τη μοναδικότητα της λύσης.

Θεώρημα 3. *Το πρόβλημα(2.14)-(2.15) έχει το πολύ μία ισχυρή λύση. Αν u_1,u_2 είναι ισχυρές λύσεις με αρχικά δεδομένα u_{01},u_{02} αντίστοιχα και $u_{01}\le u_{02}$ στον $\mathbb{R}^d$, τότε $u_1\le u_2$ σχεδόν παντού στο Q. Πιο συγκεκριμένα, αν $u_{01}=u_{02}$ σχεδόν παντού, τότε $u_1=u_2$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Έστω $u_{01}\le u_{02}$ στον $\mathbb{R}^d$. Από το λήμμα, έχουμε για τις αντίστοιχες λύσεις

$$\int[u_1(x,t_2)-u_2(x,t_2)]_+dx \le \int[u_1(x,t_1)-u_2(x,t_1)]_+dx,$$

$\forall\ 0 < t_1 < t_2$. Ξέρουμε όμως από τον ορισμό της ισχυρής λύσης ότι $u_1, u_2 \in C([0,\infty) : L^1(\mathbb{R}^d))$, άρα μπορούμε να αφήσουμε το $t_1 \to 0$ και να πάρουμε

$$\int [u_1(x,t) - u_2(x,t)]_+ dx \leq \int [u_{01} - u_{02}]_+ dx = 0.$$

Άρα, $u_1 \leq u_2$ σχεδόν παντού στο Q. Για τον ίδιο λόγο, και εφαρμόζοντας το ίδιο και για $[u_2 - u_1]_+$, καταλήγουμε ότι $u_1 = u_2$ σχεδόν παντού στο Q. $\square$

Θα δούμε στη συνέχεια την απόδειξη για ύπαρξη ισχυρής λύσης του προβλήματος και θα χρειαστουμε γι΄ αυτό τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου.

Θεώρημα 4. *Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ υπάρχει ισχυρή λύση του προβλήματος (2.14)-(2.15).*

Απόδειξη. 1ο βήμα: Αρχικά θα δώσουμε την απόδειξη για αρχικά δεδομένα, που εκτός από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος θα είναι γνήσια θετικά C^∞ και με όλες τις παραγώγους φραγμένες στον $\mathbb{R}^d$. Κατασκευάζουμε τότε τα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών

$$(P_n) \quad \begin{cases} u_t = \Delta(u^m) \quad \text{στο} \ , & Q_n = B_n(0) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_{0_n}(x) \quad \text{για} \ , & |x| = n, t \geq 0 \\ u(x,t) = 0 \quad \text{για} \ , & |x| = n, t \geq 0. \end{cases} .$$

όπου $u_{0_n} = u_0 \zeta_n$, και η $\{\zeta_n\}$ είναι μια συνάρτηση cutoff που ικανοποιεί τα εξής: $\zeta_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \zeta_n(x) = 1$ για $|x| \leq n-1, \zeta_n(x) = 0$ για $|x| \geq n,\ 0 \leq \zeta_n(x) \leq 1$, για $n - 1 < |x| < n$, και οι παράγωγοί τους μέχρι δεύτερης τάξης είναι ομοιόμορφα φραγμένοι στον $\mathbb{R}^d$ και $n \geq 2$. Τέλος, $\Delta(\zeta_n^{m-1})$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένο από κάτω.
Από την προηγούμενη παράγραφο ξέρουμε οτι τα (P_n) έχουν μοναδική κλασσικη λύση $u_n \in C^\infty(Q_n) \cap C(\bar{Q_n})$. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η u_{n+1} θα είναι και κλασσική λύση της εξίσωσης στο Q_n με θετικά συνοριακά δεδομένα και αρχικά δεδομένα μεγαλύτερα από u_{0_n}. Από Αρχή Μεγίστου συμπεραίνουμε ότι $u_{n+1} \geq u_n$ έχουμε δηλαδή αύξουσα ακολουθία.
Επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις:
u_n στον $L^\infty(0,\infty : L^p(B_n(0))), 1 \leq p \leq \infty$,
$(u_n)_t$ στον $L^\infty(0,\infty : L^1(B_n(0))) \cap L^p_{loc}(Q_n)$,
u_n^m στον $L^2(0,\infty : H^1_0(B_n(0)))$.
Έτσι μπορούμε να περάσουμε στο όριο για $n \to \infty$ και να πάρουμε μια θετική συνάρτηση $u \in L^\infty(0,\infty : L^p(B_n(0))), 1 \leq p \leq \infty$, και οι $u_t, u^m, \Delta(u^m)$ να ανήκουν στους αντίστοιχους χώρους, και να ικανοποιεί την (2.14) στο Q.
Στην πραγματικότητα η u έχει καλύτερη ομαλότητα. Παρατηρούμε ότι σε μια περιοχή $N \subset \bar{Q}$ καθενός σημείου $(x_0,t) \in \bar{Q}$ έχουμε ότι $u_n(x, t \geq c > 0 \quad \forall (x,t) \in N$, επομένως από θεωρία ημιγραμμικών παραβολικών εξισώσεων, έχουμε ομοιόμορφα φράγματα για μια μικρότερη περιοχή. Έτσι τελικά στο όριο θα πάρουμε $u \in C^\infty(\bar{Q})$, και για $t = 0, u(x,t) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^d$.

Έχουμε λοιπόν δει ότι η u είναι κλασσική λύση του (2.14)-(2.15).
2ο βήμα: Αν $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ δεν ικανοποιεί τις παραπάνω προυποθέσεις, προσεγγίζεται όμως από u_{0_n} όπως στο (i) τέτοιες ώστε $||u_{0_n}||_1 \leq ||u_0||_1, ||u_{0_n}||_\infty \leq ||u_0||_\infty$ και $u_{0_n} \to u_0$ στον $L^1(\mathbb{R}^d)$.
Έτσι, αν u_n είναι λύση με αρχικά δεδομένα u_{0_n} τότε

$$(u_n)_t = \Delta(u_n^m),$$
$$u_n(0) = u_{0_n},$$

και στο όριο $u_n \to u$ στο $C([0,\infty) : L^1(\mathbb{R}^d))$ και $u(0) = u_0$. Έτσι, αφού οι εκτιμήσεις συνεχίζουν να ισχύουν, τότε αυτή η συνάρτηση είναι ισχυρή λύση του προβλήματος Cauchy.
$\square$

Κεφάλαιο 3

Ανισότητες Gagliardo-Nirenberg

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε κάποιες ανισότητες τύπου Gagliardo-Nirenberg , στις οποίες όμως έχουμε τις βέλτιστες σταθερές, και αυτό θα μας δώσει τελικά κάποιες εκτιμήσεις που μας βοηθούν στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων της εξίσωσης porous medium, (βλ.κεφάλαια 2,3 του [6])

3.1 Ανισότητες Gagliardo-Nirenberg

Σ΄ αυτή την ενότητα θα δούμε κάποια θεωρήματα ελαχιστοποίησης, τα οποία στην πορεία θα αποδειχθεί ότι είναι ισοδύναμα με τις ανισότητες που θέλουμε τελικά να καταλήξουμε.

Εφόσον θα δούμε προβλήματα ελαχιστοποίησης ας ορίσουμε και τους χώρους όπου θα κοιτάμε για ελαχιστοποιητές. Ορίζουμε λοιπόν

$$\mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d) = \{w \in L^{p+1}(\mathbb{R}^d) : \nabla w \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ και } |w|^{2p} \in L^1(\mathbb{R}^d)\},$$

και $\mathcal{X} = \{w \in \mathcal{D}^p : \frac{1}{2p}\int_{R^d} |w|^{2p}dx = J_\infty\}$, όπου

$$J_\infty := \frac{\pi^{d/2}}{2p}\Big(\frac{2p}{d-p(d-2)}\Big)^{y+1}\frac{(d-y-1)^d}{p^{d/2}}\frac{\Gamma(y+1-d/2)}{\Gamma(y+1)}, \tag{3.1}$$

και $y = (p+1)/(p-1)$.
Ας θεωρήσουμε τώρα το συναρτησιακό

$$G(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{1+p}\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{1+p}dx,$$

και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

$$\mathcal{I}_\infty \equiv \inf_{w\in\mathcal{X}} G(w).$$

Θεώρημα 5. *Έστω $p > 1$ και $p < \frac{d}{d-2}$ αν $d \geq 3$. Τότε το $\mathcal{I}_\infty$ υλοποιείται. Επιπλέον, για κάθε ελαχιστοποιητή $\bar{w} \in \mathcal{X}$, υπάρχει $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε*

$$\bar{w}(x) = \Big(\frac{a}{b + |x - \bar{x}|^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

όπου

$$a = 2\frac{2p - d(p-1)}{(p-1)^2} \text{ και } b = \frac{(2p - d(p-1))^2}{p(p-1)^2}. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Από ανισότητα παρεμβολής έχουμε ότι $||w||_{L^{2p}} \leq ||w||^\theta_{L^{p+1}} ||w||^{(1-\theta)}_{L^{2d/(d-2)}}$ και από ανισότητα Sobolev ξέρουμε ότι $||w||_{L^{2d/(d-2)}} \leq C||\nabla w||_{L^2}$. Άρα, $0 < (2pJ_\infty)^{1/2p} = ||w||_{L^{2p}} \leq C||w||^\theta_{L^{p+1}} ||\nabla w||^{1-\theta}_{L^2}$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{I}_\infty > 0$, γιατί αν υπήρχε ακολουθία ώστε $G(w_k) \to 0$, τότε θα είχαμε

$$||w_k||^\theta_{L^{p+1}} ||w_k||^{(1-\theta)}_{L^{2d/(d-2)}} \to 0,$$

άτοπο.

Για κάθε $R > 0$, θεωρούμε B_R μια μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R και $\mathcal{X}_R = \mathcal{X} \cap H^1_0(B_R)$. Ας θεωρήσουμε τώρα την οικογένεια των ελαχίστων

$$\mathcal{I}_R = \inf_{w \in \mathcal{X}_R} G(w).$$

Το $\mathcal{I}_R$ φθίνει με το R, ενώ από πυκνότητα $\lim_{R\to\infty} \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_\infty$.
Ας δούμε τώρα κατά πόσο υλοποιείται το ίδιο το $\mathcal{I}_R$. Έστω ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{X}_R, G(w_k) \to \mathcal{I}_R$. Από τον ορισμό του $G(w)$ βλέπουμε ότι:

1. Το G είναι κυρτό ως προς το ∇w, το οποίο μας εξασφαλίζει κάτω ημισυνέχεια για το G,

2. $G(w) \geq \int_{B_R} |\nabla w|^2 dx$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, εύκολα ότι για $k = 1, 2, ...$

$$||\nabla w_k||_2 < C \tag{3.3}$$

και από την ανισότητα Poincare καταλήγουμε ότι

$$||w_k||_q < C \quad \forall\, 1 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}. \tag{3.4}$$

Τότε όμως, αφού $p < d/(d-2)$ μπορούμε να πάρουμε μια υπακολουθία, την οποία θα ονομάζουμε πάλι w_k, για την οποία θα υπάρχει w τέτοια ώστε $w_k \to w$ ισχυρά στους $L^{p+1}(B_R)$ και $L^{2p}(B_R)$, ενώ $\nabla w_k \rightharpoonup \nabla w$ στον $L^2(B_R)$. Έτσι, από κάτω ημισυνέχεια του $G(w)$, καταλήγουμε ότι

$$G(w) \leq \mathcal{I}_R \text{ και } w \in \mathcal{X}_R,$$

δηλαδή, το $\mathcal{I}_R$ υλοποιείται.

Ο ελαχιστοποιητής w_R ικανοποιεί στην B_R την εξίσωση

$$-\Delta w_R + w_R^p = \mu_R w_R^{2p-1},$$

όπου μ_R ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Από γνωστά αποτελέσματα (βλ. Θεώρημα 1 στο [3]), η λύση της εξίσωσης αυτής είναι μη αρνητική, ακτινικά συμμετρική και φθίνουσα. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με w και ολοκληρώνοντας, παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w_R|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |w_R|^{1+p} dx = \mu_R \int_{\mathbb{R}^d} |w_R|^{2p} dx = 2p\mu_R J_\infty.$$

Έτσι,

$$\frac{2p}{p+1}\mu_R J_\infty \leq \mathcal{I}_R \leq p\mu_R J_\infty,$$

και βλέπουμε ότι το μ_R είναι ομοιόμορφα φραγμένο, άνω και κάτω, και κάποια υπακολουθία τουλάχιστον συγκλίνει σε κάποιο $\mu_\infty > 0$. Από (3.3),(3.4), η H^1 νόρμα του w_R είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή υποσύνολα της B_R. Από την εξίσωση που ικανοποιεί το w_R και γνωστές ελλειπτικές προσεγγίσεις, παίρνουμε ομοιόμορφο έλεγχο στη $C^{2,\alpha}$ νόρμα. Έτσι, περνώντας σε μια υπακολουθία $R \to \infty$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι w_R συγκλίνει ομοιόμορφα με τη C^2 έννοια στα συμπαγή σε μια ακτινική συνάρτηση w. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι,

$$w_R \rightharpoonup w \text{ ασθενώς στον } L^{p+1}(\mathbb{R}^d),$$

$$\nabla w_R \rightharpoonup \nabla w \text{ ασθενώς στον } L^2(\mathbb{R}^d),$$

και

$$w_R \rightharpoonup w \text{ ασθενώς στον } L^{2p}(\mathbb{R}^d). \tag{3.5}$$

Επιπλέον, η w_R λαμβάνει μέγιστο στο 0 (αφού είναι ακτινικά συμμετρική και φθίνουσα), επομένως $\Delta w_R(0) < 0$. Από την εξίσωση παρατηρούμε ότι

$$-\Delta w_R(0) = w_R^p(0)(\mu_R w_R^{p-1}(0) - 1),$$

και εφόσον $w_R(0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$1 \leq \mu_R w_R^{p-1}(0).$$

Αυτό σημαίνει ότι η συναρτήσεις δεν εκφυλίζονται στο όριο. Έτσι, η w είναι μια θετική και ακτινικά φθίνουσα συνάρτηση που ικανοποιεί

$$-\Delta w + w^p = \mu_\infty w^{2p-1},$$

σε όλον τον $\mathbb{R}^d$ και $w(|x|) \to 0$ καθώς $x \to \infty$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί

$$-\Delta w + \frac{1}{2}w^p = w^p(\mu_\infty w^{p-1} - \frac{1}{2}).$$

Έτσι, αφου η σύγκλιση του w_R στο w ομοιόμορφη στα συμπαγή, και w_R, ακτινικά φθίνουσα, μπορούμε να διαλέξουμε ρ αρκετά μεγάλο αλλά σταθερό, τέτοιο ώστε η w_R να ικανοποιεί

$$-\Delta w + \frac{1}{2}w^p \leq 0,$$

στο $\rho < |x| < R$.
Από την άλλη, αφού $p < \frac{d}{d-2}$ η συνάρτηση

$$\zeta(x) = \frac{C}{|x|^{2/(p-1)}},$$

είναι

$$-\Delta \zeta + \frac{1}{2}\zeta^p = [\frac{2(d-1)C}{p-1} - \frac{2(p+1)C}{(p-1)^2} + \frac{1}{2}C^p]r^{-2p/(p-1)},$$

που ικανοποιεί για αρκετά μεγάλο C,

$$-\Delta \zeta + \frac{1}{2}\zeta^p \geq 0.$$

Επιλέγοντάς το C έτσι ώστε $w_R(\rho) < \zeta(\rho)$ για όλα τα αρκετά μεγάλα R, τότε από σύγκριση καταλήγουμε ότι

$$w_R(x) < \frac{C}{|x|^{2/(p-1)}}, \quad |x| > \rho.$$

Τώρα, εφόσον $\frac{2p}{p-1} > d$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{M<|x|<R} |w_R|^{2p}dx &< \int_{M<|x|<R} \frac{C^{2p}}{|x|^{4p/(p-1)}}dx < C\int_{M<|x|<R} \frac{1}{|x|^{2d}}dx \\ &= C\int_M^R \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{r^{2d}}r^{d-1}dSdr = C\int_M^R \frac{1}{r^{2d}}r^{d-1}dr = C\int_M^R r^{-(d+1)}dr \\ &= C\big(-\frac{1}{d}\big)r^{-d}\Big|_M^R\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{R>M}\int_{M<|x|<R} |w_R|^{2p}dx = 0.$$

Τελικά, κοιτάζοντας τη σχέση αυτή και την (3.5), για $\varepsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε αρκετά μεγάλο M, και υπάρχει R_0 ώστε $\forall R > R_0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |w-w_R|^{2p}dx &= \int_{|x|<M} |w-w_R|^{2p}dx + \int_{|x|>M} |w-w_R|^{2p}dx \\ &\leq \int_{|x|<M} |w-w_R|^{2p}dx + \int_{|x|>M} |w|^{2p}dx + \int_{|x|>M} |w_R|^{2p}dx < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Άρα, $w_R \to w$ ισχυρά στον $L^{2p}(\mathbb{R}^d)$. Δηλαδή, $w \in \mathcal{X}$ και έχουμε. $G(w_R) = \mathcal{I}_R$ και στο όριο, από κάτω ημισυνέχεια, $G(w) \leq \mathcal{I}_\infty$, το οποίο μας εγγυάται την ύπαρξη ενός ελαχιστοποιητή.

Τέλος, έστω w ελαχιστοποιητής του G στο $\mathcal{X}$. Τότε, ικανοποιεί την εξίσωση

$$-\Delta w + w^p = \mu_\infty w^{2p-1}.$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι ακτινικές γύρω από κάποιο σημείο (βλ.[3]). Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε την αρχή. Από την άλλη, υπάρχει μοναδική επιλογή θετικής παραμέτρου λ, τέτοια ώστε $\bar{w}(x) = \lambda^{2/(p-1)} w(\lambda x)$ να ικανοποιεί την

$$-\Delta \bar{w} + \bar{w}^p = \bar{w}^{2p-1},$$

Αφού

$$-\Delta \bar{w} + \bar{w}^p = \lambda^{2p/p-1}(-\Delta w + w^p) = \lambda^{2p/p-1} \mu_\infty w^{2p-1} = \lambda^{-2} \mu_\infty \bar{w}^{2p-1},$$

Άρα, αρκεί $\mu_\infty = \lambda^2$. Από αποτελέσματα μοναδικότητας θετικών λύσεων ([10],[4]) για ημιγραμμικές ελλειπτικές εξισώσεις, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση. Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής

$$\bar{w} = \Big(\frac{a}{b + |x|^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση, βρίσκουμε τις σταθερές όπως στο (3.2). Τελικά, το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} dx = J_\infty,$$

μας εξασφαλίζει την τιμή του λ, $\lambda = 1$, άρα και $\mu_\infty = 1$ το οποίο μας εξασφαλίζει και τη μοναδικότητα του ορίου της ακολουθίας $\{\mu_\infty\}$. Αν υπήρχε υπακολουθία που συνέκλινε σε κάποιο $\mu \neq \mu_\infty$, τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία θα παίρναμε πάλι $\mu = 1$. $\square$

Για να δούμε το ανάλογο θεώρημα για την περίπτωση $0 < p < 1$ θα θεωρήσουμε το συναρτησιακό

$$\tilde{G}(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |w|^{2p} dx,$$

και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\tilde{\mathcal{I}}_\infty \equiv \inf_{w \in \tilde{\mathcal{X}}} \tilde{G}(w),$$

όπου

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{w \in \mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |w|^{p+1} dx = \tilde{\mathcal{J}}_\infty\},$$

και

$$\tilde{\mathcal{J}}_\infty = \frac{\pi^{d/2}}{p+1} \Big(\frac{2p}{d - p(d-2)}\Big)^{1-y} \frac{(d+y-1)^d}{p^{d/2}} \frac{\Gamma(1+y)}{\Gamma(1+y+d/2)},$$

με $y = \frac{p+1}{1-p}$. Τότε θα πάρουμε

Θεώρημα 6. *Έστω $0 < p < 1$. Τότε το $\tilde{\mathcal{I}}_\infty$ υλοποιείται από την ακτινικά συμμετρική συνάρτηση*

$$\tilde{w}(x) = a^{-\frac{1}{1-p}}(b-|x|^2)_+^{\frac{1}{1-p}},$$

όπου a και b δίνονται από τη σχέση (3.2). Επιπλέον, αν $p > \frac{1}{2}$, για κάθε ελαχιστοποιητή w, υπάρχει $\tilde{x}$ τέτοιο ώστε $w(x) = \tilde{w}(x-\tilde{x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του προηγούμενου θεωρήματος και παραλείπεται. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα θεωρήματα αυτά είναι ουσιαστικά ισοδύναμα με τις ανισότητες που χρειαζόμαστε.

Θεώρημα 7. *Έστω $d \geq 2$. Αν $p > 1$ και $p \leq \frac{d}{d-2}$ για $d \geq 3$, τότε για κάθε συνάρτηση $w \in \mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d)$, ισχύει η εξής ανισότητα:*

$$||w||_{2p} \leq A||\nabla w||_2^\theta ||w||_{p+1}^{1-\theta}, \tag{3.6}$$

όπου

$$A = \Big(\frac{y(p-1)^2}{2\pi d}\Big)^{\frac{\theta}{2}}\Big(\frac{2y-d}{2y}\Big)^{\frac{1}{2p}}\Big(\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y-d/2)}\Big)^{\frac{\theta}{d}},$$

και

$$\theta = \frac{d(p-1)}{p(d+2-(d-2)p)}, \qquad y = \frac{p+1}{p-1}.$$

Το A είναι βέλτιστη σταθερά και η (3.6) γίνεται ισότητα αν και μόνο αν η w είναι πολλαπλάσια μιας εκ των

$$w_{\sigma,\bar{x}}(x) = \Big(\frac{1}{\sigma^2+|x-\bar{x}|^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

με $\sigma > 0$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Έστω $w \in \mathcal{D}^p$ που ικανοποιεί τον περιορισμό

$$J(w) := \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)|^{2p}dx = J_\infty,$$

με το J_∞ όπως ορίζεται στην (3.1). Για $\lambda > 0$ θεωρούμε την κλιμακωμένη συνάρτηση

$$w_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2p}}w(\lambda x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} J(w_\lambda) &= \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|w_\lambda(x)^{2p}|dx = \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|\lambda^{\frac{d}{2p}}w(\lambda x)|^{2p}dx = \frac{\lambda^d}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|w(\lambda x)|^{2p}dx \\ &= \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|w(y)|^{2p}dy = J\infty. \end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda > 0$ θα ισχύει

$$G(w_\lambda) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx \cdot \lambda^{d/p-(d-2)} + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{p+1} dx \cdot \lambda^{-d(p-1)/2p} \geq \mathcal{I}_\infty.$$

Τότε και το ελάχιστο ως προς λ του $G(w_\lambda)$,θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\mathcal{I}_\infty$.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}G(w_{\lambda_0}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 = \Big(\lambda_* \int_{\mathbb{R}^d} |w|^{p+1} dx\Big)^r \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx\Big)^{-r},$$

όπου

$$\lambda_* = \frac{d}{d-p(d-2)}\frac{p-1}{p+1} \qquad \text{και} \qquad r = \frac{2p}{4p-d(p-1)}.$$

Παρατηρούμε ότι $r \cdot (d/p - d + 2) = r \cdot (-d(p-1)/2p) + 1$. Στο $G(w_{\lambda_0})$ οι εκθέτες των ολοκληρωμάτων είναι κοινοί και στους δύο όρους. Δηλαδή με την κλιμάκωση που κάναμε, μετατρέψαμε την ανισότητα από άθροισμα σε γινόμενο, και το σημαντικότερο, απο μη ομογενή σε ομογενή. Έτσι, η $G(w_{\lambda_0}) \geq \mathcal{I}_\infty$ γίνεται

$$G(w_{\lambda_0}) = C_*[||\nabla w||_2^\theta ||w||_{p+1}^{1-\theta}]^\delta \geq \mathcal{I}_\infty,$$

με

$$C_* = \frac{1}{2}\lambda_*^{r(d/p-d+2)} + \frac{1}{p+1}\lambda_*^{r(-d(p-1)/2p)},$$

$$\delta = 2p\frac{d+2-p(d-2)}{4p-d(p-1)} \qquad \text{και} \qquad \theta = \frac{d(p-1)}{p(d+2-p(d-2))}.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για $w \in \mathcal{X}$. Για $w \in \mathcal{D}^p$ θέτουμε $u = \frac{w}{||w||_{2p}}(2pJ_\infty)^1/2p$ και τότε εφαρμόζουμε την ανισότητα στην $u \in \mathcal{X}$, και καταλήγουμε

$$||\nabla w||_2^\theta ||w||_{p+1}^{1-\theta} \geq \Big(\frac{\mathcal{I}_\infty}{C_*}\Big)^{1/\delta} \frac{||w||_{2p}}{(2pJ_\infty)^{1/2p}}.$$

που ισχύει για κάθε $w \in \mathcal{D}^p$, με βέλτιστη σταθερά

$$A = (2pJ_\infty)^{1/2p}\Big(\frac{\mathcal{I}_\infty}{C_*}\Big)^{1/\delta}.$$

Η σταθερά είναι βέλτιστη γιατί όπως είδαμε στο Θεώρημα 5 το $\mathcal{I}_\infty$ υλοποιείται από κάποια w στο $\mathcal{X}$.

□

Παρατήρηση 1. Για να πάρουμε την έκφραση της βέλτιστης σταθεράς, όπως δίνεται στο Θεώρημα 7, μπορούμε να γράψουμε

$$A = \frac{||\bar{w}_{a,b}||_{2p}}{||\nabla \bar{w}_{a,b}||_2^\theta ||\bar{w}_{a,b}||_{p+1}^{1-\theta}}, \tag{3.7}$$

όπου $\bar{w}_{a,b}$ ο ελαχιστοποιητής που είδαμε στο Θεώρημα 5. Η ανισότητα όμως εκτός από ομογενης, είναι και αμετάβλητη στην κλιμάκωση $w(x) \mapsto w(\frac{x}{\lambda})$. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά A για

$$\bar{w}_{a,b}(x) = \Big(\frac{a}{b+|x|^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

με τυχαίες σταθερές a, b. Έστω λοιπόν $a = b = 1$:

1.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \bar{w}|^2 dx &= \frac{4}{(p-1)^2} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{1}{1+|x|^2}\Big)^{\frac{2p}{p-1}} |x|^2 dx \\ &= \frac{4}{(p-1)^2} \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \Big(\frac{1}{1+r^2}\Big)^{y+1} r^2 dS dr,\end{aligned}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{1}{1+r^2}$ καταλήγουμε,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \bar{w}|^2 dx = \frac{2d\pi^{d/2}}{(p-1)^2 \Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int_0^1 t^{y-\frac{d}{2}-1} (1-t)^{\frac{d}{2}} dt = \frac{2d\pi^{d/2}}{y(p-1)^2} \frac{\Gamma(y-\frac{d}{2})}{\Gamma(y)}.$$

2.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\bar{w}|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{1}{1+|x|^2}\Big)^{\frac{p+1}{p-1}} dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \Big(\frac{1}{1+r^2}\Big)^{y} dS dr,$$

Με την ίδια αλλαγή μεταβλητών παίρνουμε,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\bar{w}|^{p+1} dx = \frac{d\pi^{d/2}}{2\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int_0^1 t^{y-\frac{d}{2}-1} (1-t)^{\frac{d}{2}-1} dt = \pi^{d/2} \frac{\Gamma(y-\frac{d}{2})}{\Gamma(y)}.$$

3.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\bar{w}|^{2p} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{1}{1+|x|^2}\Big)^{\frac{2p}{p-1}} dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \Big(\frac{1}{1+r^2}\Big)^{y+1} dS dr,$$

και όμοια με πρίν,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\bar{w}|^{2p} = \frac{d\pi^{d/2}}{2\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int_0^1 t^{y-\frac{d}{2}} (1-t)^{\frac{d}{2}-1} dt = \pi^{d/2} \frac{2y-d}{2y} \frac{\Gamma(y-\frac{d}{2})}{\Gamma(y)}.$$

Παρατηρώντας πως $\frac{1}{2p} - \frac{\theta}{2} - \frac{1-\theta}{p+1} = -\frac{\theta}{d}$ και με αντικατάσταση στην (3.7) παίρνουμε την A όπως γράφεται στο Θεώρημα 7.

Όπως αναμένουμε, ανάλογες εκτιμήσεις ισχύουν και για την περίπτωση $0 < p < 1$.

Θεώρημα 8. *Έστω $d \geq 2$ και $0 < p < 1$. Τότε για κάθε συνάρτηση $w \in \mathcal{D}^p(\mathbb{R}^d)$ ισχύει η εξής ανισότητα:*

$$||w||_{p+1} \leq A||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{2p}^{1-\theta}, \tag{3.8}$$

όπου

$$A = \Big(\frac{y(p-1)^2}{2\pi d}\Big)^{\frac{\theta}{2}}\Big(\frac{2y}{2y+d}\Big)^{\frac{1-\theta}{2p}}\Big(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1+y)}{\Gamma(1+y)}\Big)^{\frac{\theta}{d}},$$

με

$$\theta = \frac{d(1-p)}{(1+p)(d-p(d-2))}, \quad y = \frac{p+1}{1-p}.$$

Η σταθερά A είναι βέλτιστη και η (3.8) γίνεται ισότητα με τις συμπαγούς φορέα συναρτήσεις

$$w_{\sigma,\bar{x}}(x) = (\sigma^2 - |x-\bar{x}|^2)_+^{\frac{1}{1-p}},$$

με $\sigma > 0$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με του προηγούμενου θεωρήματος. Για κάθε συνάρτηση $w \in \mathcal{D}^p$ που ικανοποιεί

$$\tilde{J}(w) := \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)|^{p+1}dx = \tilde{J}_\infty,$$

και για κάθε $\lambda > 0$, τώρα θεωρούμε την κλιμακωμένη συνάρτηση $w_\lambda(x) = \lambda^{d/(p+1)}w(\lambda x)$ Τότε,

$$\begin{aligned}\tilde{J}(w_\lambda) &= \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d}|\lambda^{\frac{d}{p+1}}w(\lambda x)|^{p+1}dx = \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^d|w(\lambda x)|^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d}w(y)dy = \tilde{J}_\infty.\end{aligned}$$

Άρα, η κλιμακωμένη συνάρτηση είναι πάλι στοιχείο του $\tilde{\mathcal{X}}$. Για κάθε $\lambda > 0$ θα ισχύει

$$\tilde{G}(w_\lambda) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla w|^2dx \cdot \lambda^{\frac{2d}{p+1}-(d-2)} + \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|w|^{2p}dx \cdot \lambda^{\frac{d(p-1)}{p+1}} \geq \mathcal{I}_\infty.$$

Ελαχιστοποιώντας πάλι ως προς λ παίρνουμε

$$\tilde{G}(w_{\lambda_0}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 = \Big(\lambda_*\int_{\mathbb{R}^d}|w|^{2p}dx\Big)^r\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla w|^2dx\Big)^{-r},$$

όπου

$$\lambda_* = \frac{1-p}{p}\frac{d}{d+2-p(d-2)} \text{ και } r = \frac{p+1}{2(d+1-p(d-1))}.$$

Παρατηρώντας ότι $r(\frac{2d}{p+1}-(d-2)) = r(\frac{d(p-1)}{p+1})+1$ παίρνουμε

$$\tilde{C}_*[||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{2p}^{1-\theta}]^{\tilde{\delta}} \geq \tilde{\mathcal{I}_\infty},$$

όπου

$$\tilde{C}_* = \frac{1}{2}\lambda_*^{r(\frac{2d}{p+1}-d+2)} + \frac{1}{2p}\lambda_*^{r(-d\frac{1-p}{p+1})},$$

$$\tilde{\delta} = \frac{(1+p)(d-p(d-2))}{d+1-p(d-1)} \text{ και } \theta = \frac{d(1-p)}{(p+1)(d-p(d-2))}.$$

Όμοια με πρίν, αν $w \in \mathcal{D}^p$ θέτουμε $u = \frac{w}{||w||_{p+1}}((p+1)\tilde{J_\infty})^1/(p+1)$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα για $u \in \mathcal{X}$ για να πάρουμε

$$||\nabla w||_2^\theta ||w||_{2p}^{1-\theta} \geq \Big(\frac{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}{\tilde{C}_*}\Big)^{1/\tilde{\delta}} \frac{||w||_{p+1}}{\big((p+1)\tilde{J}_\infty\big)^{\frac{1}{p+1}}}.$$

που ισχύει για κάθε $w \in \mathcal{D}^p$ με βέλτιστη σταθερά

$$A = \big((p+1)\tilde{J}_\infty\big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\frac{\tilde{C}_*}{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}\Big)^{1/\tilde{\delta}}.$$

Η έκφραση της σταθεράς όπως φαίνεται στο Θεωρημα 8 βρίσκεται, αν λάβουμε υπ'οψιν μας πως η ανισότητα είναι ομογενής και αμετάβλητη από την κλιμάκωση $w(x) \mapsto w(\lambda x)$, από

$$A = \frac{||\bar{w}_{a,b}||_{p+1}}{||\nabla \bar{w}_{a,b}||_2^\theta ||\bar{w}_{a,b}||_{2p}^{1-\theta}},$$

με ελεύθερες σταθερές a, b όπου

$$\bar{w}_{a,b}(x) = \Big(\frac{b-|x|^2}{a}\Big)_+^{1/(1-p)}.$$

□

3.2 Πορίσματα

Στην ενότητα αυτή, θα ξαναγράψουμε τις ανισότητες Gagliardo-Nirenberg των θεωρημάτων 7,8 σε μία μοναδική ανισότητα, μή ομογενή, με βέλτιστες σταθερές επίσης. Στη συνέχεια θα δούμε και κάποια πορίσματα των ανισοτήτων αυτών, τα οποία συνδέουν τις ανισότητες, με ένα συναρτησιακό Lyapunov για την εξίσωση porous medium. Η ύπαρξη του συναρτησιακού είναι γνωστή από πιο παλιά (βλ. [9],ςιτεΡα84). Για τις συγκεκριμένες εκτιμήσεις που θα δούμε εδώ και τη σύνδεση με τις ανισότητες Gagliardo-Nirenberg βλ.[6].

Πρόταση 3. *Έστω $d \geq 2, \tau > 0$ και $p > 0$ τέτοια ώστε $p \neq 1$, και $p \leq \frac{d}{d-2}$ αν $d \geq 3$. Τότε, για κάθε συνάρτηση $w \in \mathcal{D}^p$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:*

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w||_{1+p}^{1+p} - \frac{\varepsilon}{2p}K||w||_{2p}^{\delta} \geq 0, \tag{3.9}$$

όπου ε είναι το πρόσημο του $p-1$,

$$\delta = 2p\frac{d+2-p(d-2)}{4p-d(p-1)},$$

και $K > 0$ είναι βέλτιστη σταθερά. Για $p > \frac{1}{2}, p \neq 1$, οι βέλτιστες συναρτήσεις για την ανισότητα (3.9) δίνονται όλες από την οικογένεια των συναρτήσεων

$$x \mapsto \tau^{-\frac{d}{2p}}\bar{w}(\frac{x-\bar{x}}{\tau}).$$

όπου

$$\bar{w}(x) = \Big(\frac{a}{b+\varepsilon|x|^2}\Big)_+^{\frac{1}{p-1}},$$

με a, b όπως δίνονται στη 3.2. Για $0 < p \leq \frac{1}{2}$, η (3.9) υλοποιείται από την ίδια οικογένεια συναρτήσεων. Η ακριβής μορφή της σταθεράς K θα δοθεί σε παρακάτω παρατήρηση.

Απόδειξη. 1. $1 < p \leq \frac{d}{d-2}$, άρα $\varepsilon = 1$. Θα δείξουμε πρώτα την ανισότητα (3.9) για $\tau = 1$. Από το Θεώρημα 7 έχουμε ότι

$$||w||_{2p} \leq A||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{p+1}^{1-\theta} \Longleftrightarrow ||w||_{2p}^{\delta} \leq A^{\delta}\big[||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{p+1}^{1-\theta}\big]^{\delta}.$$

Άπο την απόδειξη του θεωρήματος υπενθυμίζουμε ότι

$$C_*\big[||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{p+1}^{1-\theta}\big]^{\delta} \leq \frac{1}{2}||\nabla w||_2^2 \cdot \lambda^{\frac{d}{p}-d+2} + \frac{1}{1+p}||w||_{p+1}^{p+1} \cdot \lambda^{-d\frac{p-1}{2p}} \quad \forall \lambda > 0.$$

Άρα και για $\lambda = 1$, το οποίο μας δίνει την ανισότητα 3.9 με $K = C_* A^{-\delta},\ \tau = 1$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την κλιμάκωση

$$w \mapsto \tau^{\frac{d}{2p}}w(\tau\cdot),$$

καταλήγουμε στην (3.9) και ολοκληρώνεται η απόδειξη για $p > 1$.

2. $0 < p < 1$, άρα $\varepsilon = -1$. Για την περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα δεν είναι τόσο άμεσο από το αντίστοιχο θεώρημα. Θα χρειαστεί να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 8. Θεωρούμε την κλιμακωμένη συνάρτηση

$$w_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{p+1}}w(\lambda x).$$

Τότε,

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w_\lambda||_2^2 + \frac{K}{2p}||w_\lambda||_{2p}^{\delta} = \frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 \cdot \lambda^{\frac{2d}{p+1}-d+2} + \frac{K}{2p}||w||_{2p}^{\delta} \cdot \lambda^{d\frac{p-1}{p+1}\frac{\delta}{2p}}.$$

Ελαχιστοποιώντας το δεύτερο μέλος ως προς λ, παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w_\lambda||_2^2 + \frac{K}{2p}||w_\lambda||_{2p}^{\delta} \geq K^{\frac{1}{2}\frac{4p-d(p-1)}{2p-dp-1}}C\big[||\nabla w||_2^{\theta}||w||_{2p}^{1-\theta}\big]^{p+1} \quad \forall \lambda > 0,$$

όπου C, κάποια συγκεκριμένη σταθερά που η ακριβής της έκφραση δεν χρειάζεται εδώ. Ξαναγράφοντας τώρα την ανισότητα αυτή για $\lambda = 1$, για κατάλληλο K και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 8, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 + \frac{K}{2p}||w||_{2p}^{\delta} \geq \tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w||_{p+1}^{p-1}.$$

□

Παρατήρηση 2. Η συνάρτηση $\bar{w} = \bar{w}_{a,b}$ όπως την ορίσαμε παραπάνω είναι μια μή αρνητική ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης $-\Delta w + \varepsilon w^p = \varepsilon w^{2p-1}$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με w και $(x \cdot \nabla w)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε το σύστημα

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |w|^{1+p} dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} dx, \tag{3.10}$$

$$\frac{d-2}{2d}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx + \frac{\varepsilon}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{1+p} dx = \frac{\varepsilon}{2p}\int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} dx. \tag{3.11}$$

Λύνοντας, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 dx = \varepsilon \frac{d(p-1)}{p(2p+2-d(p-1))}\int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} w^{p+1} dx = \frac{p+1}{p}\frac{2p-d(p-1)}{2p+2-d(p-1)}\int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} dx.$$

Από την άλλη, η ίδια συνάρτηση ελαχιστοποιεί την ανισότητα (3.9), δηλαδή

$$\frac{1}{2}||\nabla w||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}||w||_{1+p}^{1+p} = \frac{\varepsilon}{2p}K||w||_{2p}^{\delta} \tag{3.12}$$

Αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος, καταλήγουμε οτι μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά K ως

$$K = \frac{4p-d(p-1)}{2p+2-d(p-1)}||\bar{w}||^{2p-\delta}.$$

Στη συνέχεια, η ανισότητα (3.9) θα γραφτεί με τρόπο που θα περιέχει ένα συναρτησιακό Lyapunov. Η ανισότητα θα είναι πάλι βέλτιστη, ενώ η μορφή αυτή θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο, στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων της εξίσωσης porous medium.

Πόρισμα 3. *Έστω $d \geq 2$, $m \geq \frac{d-1}{d}(m > \frac{1}{2}$ αν $d = 2), m \neq 1$ και v μια μη αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε $\nabla v^{m-\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^d), x \mapsto |x|^2 v(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και*

$$\begin{cases} v \in L^1(\mathbb{R}^d) & \text{αν } m > 1, \\ v^m \in L^1(\mathbb{R}^d) & \text{αν } m < 1. \end{cases}$$

Τότε,

$$0 \le L[v] - L[v_\infty] \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla(v^{m-1})\Big|^2 dx, \tag{3.13}$$

$$\textit{όπου} \qquad L[v] = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(v\frac{|x|^2}{2} - \frac{1}{1-m}v^m\Big)dx,$$

και

$$v_\infty(x) = \Big(\sigma^2 + \frac{1-m}{2m}|x|^2\Big)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

με το σ τέτοιο ώστε $M := ||v||_1 = ||v_\infty||_1$. Η ανισότητα είναι βέλτιστη και γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $v = v_\infty$.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με μια παρατήρηση για το δεξί σκέλος (B) της ανισότητας (3.13). Αναπτύσσοντας το τετράγωνο μεσα στο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla(v^{m-1})\Big|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2} + \frac{m}{m-1}vx\nabla(v^{m-1}) + \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2 v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx. \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη στον δεύτερο όρο του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\begin{aligned} B = &\int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2}dx - \frac{m}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} x(\nabla v)v^{m-1} - \frac{md}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx \\ &+ \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο δεύτερο ολοκλήρωμα $mv^{m-1}\cdot\nabla v = \nabla(v^m)$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες πάλι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} B = &\int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2}dx - \frac{1}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} x\nabla(v^m)dx - \frac{md}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx \\ &+ \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx \\ = &\int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2}dx - \frac{d}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx - \frac{md}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx + \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx \\ = &\int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2}dx - d\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx + \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx, \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} L[v] = &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla(v^{m-1})\Big|^2 dx - \frac{1-d(1-m)}{1-m}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx \\ &- \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx. \end{aligned}$$

Μετά από απλές πράξεις, μπορούμε να δουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla(v^{m-1})\Big|^2 dx = 0, \quad \text{όταν} \quad v = v_\infty,$$

(από το οποίο παρεμπιπτόντως βλέπουμε και ότι η ανισότητα (3.13) που θα αποδείξουμε είναι βέλτιστη). Τότε, το να δείξουμε ότι

$$L[v] - L[v_\infty] \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla(v^{m-1})\Big|^2 dx,$$

είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι

$$\frac{1-d(1-m)}{1-m}\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx - \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v|\nabla(v^{m-1})|^2 dx \geq,$$
$$\frac{1-d(1-m)}{1-m}\int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx - \frac{1}{2}\big(\frac{m}{m-1}\big)^2\int_{\mathbb{R}^d} v_\infty|\nabla(v_\infty^{m-1})|^2 dx.$$

Τώρα, αν ξαναγράψουμε την ανισότητα αυτή με

$$v = w^{2p}, \quad v_\infty = w_\infty^{2p} \quad \text{και} \quad m = \frac{p+1}{2p},$$

χρησιμοποιώντας ότι $v|\nabla v^{m-1}|^2 = (p-1)^2|\nabla w|^2$, παίρνουμε

$$\frac{2p-d(p-1)}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d} w^{p+1}dx - \frac{1}{2}(p+1)^2\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla w|^2 dx \geq$$
$$\frac{2p-d(p-1)}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d} w_\infty^{p+1}dx - \frac{1}{2}(p+1)^2\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla w_\infty|^2 dx,$$

Θέτουμε τώρα

$$\tau^{-\frac{1}{2p}(4p-d(p-1))} = \frac{2p-d(p-1)}{|p^2-1|},$$

και παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w||_{1+p}^{1+p} \geq \frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w_\infty||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w_\infty||_{1+p}^{1+p}.$$

Χρησιμοποιώντας πως $||w||_{2p} = ||w_\infty||_{2p}$, μπορούμε να προσθέσουμε σε κάθε μέλος της ανισότητας το αντίστοιχο. Βλέπουμε όμως, ότι η συνάρτηση w_∞ είναι ελαχιστοποιούσα συνάρτηση της ανισότητας (3.9). Άρα,

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w||_{1+p}^{1+p} - \frac{\varepsilon}{2p}K||w||_{2p}^{\delta} = 0,$$

για $w = w_\infty$. Έτσι, αρκεί τελικά να δείξουμε

$$\frac{1}{2}\tau^{\frac{d}{p}-d+2}||\nabla w||_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\tau^{-d\frac{p-1}{2p}}||w||_{1+p}^{1+p} - \frac{\varepsilon}{2p}K||w||_{2p}^{\delta} \geq 0,$$

που είναι ακριβώς η ανισότητα (3.9). $\square$

Κεφάλαιο 4

Ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλους χρόνους

Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $u(x,t)$ τη λύση του προβλήματος Cauchy (2.14)-(2.15). Επίσης, θα συμβολίζουμε

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx.$$

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε το κατάλληλο scaling που συνδέει τις λύσεις του προβλήματος μας, με αυτές της μη γραμμικής εξίσωσης Fokker-Planck

$$v_\tau = \Delta(v^m) + \nabla \cdot (xv), \quad \tau > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.1}$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η συνάρτηση v_∞, όπως ορίστηκε στο πόρισμα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελεί λύση της εξίσωσης αυτής.
Από το scaling της εξίσωσης ψάχνουμε αλλαγή μεταβλητών της μορφής

$$u(x,t) = R(t)^{-d} \cdot v\Big(\tau(t), \frac{x}{R(t)}\Big). \tag{4.2}$$

και ψάχνουμε επομένως κατάλληλες συναρτήσεις $R(t), \tau(t)$ ώστε αν η u είναι λύση της (2.14) η v να είναι λύση της (4.1). Αντικαθιστώντας στη σχέση $u_t = \Delta u^m$, καταλήγουμε

$$R(t)^{-d}\dot{\tau} v_\tau = \dot{R}(t)R(t)^{-d-1}\nabla(xv) + R(t)^{-md-2}\Delta v^m.$$

Άρα, θέλουμε οι συναρτήσεις τ, R να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\dot{R}(t) = R(t)^{(1-m)d-1} \tag{4.3}$$

$$\dot{\tau}(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{4.4}$$

Έτσι, για την τ βλέπουμε αμέσως ότι $\tau(t) = \log R(t)$. Θέλουμε η v να ικανοποιεί την εξίσωση (4.1) με αρχικά δεδομένα ίδια με της u.

$$v(x, \tau = 0) = u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Έτσι, παίρνουμε για $t = 0, \quad \tau(0) = 0 \Rightarrow \quad R(0) = 1$. Τώρα για την R, λύνουμε την εξίσωση με αρχικά δεδομένα $R(0) = 1$ και βρίσκουμε

$$R(t) = \big(1 + (2 - d(1-m))t\big)^{\frac{1}{2-d(1-m)}}.$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι όταν $m > d/(d-2), \quad R(t) > 0$ και $R(t) \to +\infty$. Επίσης, από τον τρόπο που ορίσαμε την v, βλέπουμε ότι η L^1 νόρμα διατηρείται.

$$||u(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = ||v\big(\tau(t),\cdot\big)||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστρέφεται και παίρνουμε

$$v(x,t) = e^{dt}u(e^t x, a(e^{t/k} - 1)).$$

Για $u = \mathcal{U}$, παίρνουμε

$$\mathcal{V}(x,t) = e^{dt}\Big[a^{-da}(e^{t/a} - 1)^{-da}\big(\sigma^2 - \frac{m-1}{2m}a\frac{e^2 t|x|^2}{a^{2a}(e^{t/a}-1)^{2a}}\big)^{\frac{1}{m-1}}\Big],$$

που λύνει την (4.1). Με το συμβολισμό, όπως στην Εισαγωγή, καθώς

$$t \to +\infty, \quad R(t) \sim t^a, \quad u(t,\cdot) \sim \mathcal{U}(t,\cdot),$$

και σύμφωνα με την (1.10) το γεγονός ότι $u(t,\cdot) \sim \mathcal{U}(t,\cdot)$, στην καινούρια κλίμακα, γίνεται $v(t,\cdot) \sim \mathcal{V}(t,\cdot)$ και τελικά, αφού $\mathcal{V} \sim v_\infty$,

$$v(\tau,x) \to v_\infty(x) \text{ για } \tau \to +\infty,,$$

και ομοιόμορφα και με την L^1 έννοια. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μετατρέπουμε ένα αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της μίας εξίσωσης σε αντίστοιχη συμπεριφορά των λύσεων της άλλης. Για τη σύνδεση των δύο εξισώσεων, παραπέμπουμε και στο [5]

Θα δούμε στη συνέχεια ότι το

$$v \mapsto L[v] = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(v\frac{|x|^2}{2} - \frac{1}{1-m}v^m\Big)dx,$$

ορίζει συναρτησιακό Lyapunov για την εξίσωση (4.1)

Πρόταση 4. *Έστω $m > \frac{d}{d+2}$ και u_0 μια μη αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε $(1+|x|^2)u_0$ και u_0^m να ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R}^d)$. Έστω v λύση της (4.1) με αρχικά δεδομένα u_0. Τότε,*

$$\frac{d}{d\tau}L[v(\tau,\cdot)] = -\int_{\mathbb{R}^d} v(\tau,\cdot)\Big|x + \frac{m}{m-1}\nabla v(\tau,\cdot)^{m-1}\Big|^2 dx, \tag{4.5}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} L[v(\tau.\cdot)] = L[v_\infty], \tag{4.6}$$

και αν $\frac{d-1}{d} \le m < 1$ για $d \ge 3$, $\frac{1}{2} < m < 1$ αν $d = 2$, ή $m > 1$, τότε

$$0 \le L[v(\tau,\cdot)] - L[v_\infty] \le \big(L[u_0] - L[v_\infty]\big)\cdot e^{-2\tau}. \tag{4.7}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι τα αρχικά δεδομένα $u_0(x)$ είναι λεία και με συμπαγή φορέα, ας πούμε μέσα στην μπάλα $B(0,\rho)$ για κάποιο $\rho > 0$. Θα δούμε πρώτα για

$$\frac{d}{d+2} < m < 1.$$

Η λύση είναι λεία σύμφωνα με το [7]. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνάρτηση

$$w_\rho(x) = \Big(\frac{1-m}{2m}\Big)^{-\frac{1}{1-m}} \big(|x|^2 - \rho^2\big)^{-\frac{1}{1-m}},$$

είναι λύση της (4.1) στην περιοχή $|x| > \rho$. Η συνάρτηση αυτή απειρίζεται στο $\partial B(0,\rho)$. Δηλαδή $v(\tau,x) \leq w_\rho(x) \quad \forall \tau > 0$ στο $\partial B(0,\rho)$. Και οι συναρτήσεις v, w είναι λύσεις της (4.1) στο $|x| > \rho$. Έτσι, από σύγκριση βλέπουμε ότι $v(\tau,x) \leq w_\rho(x) \;\; \forall \tau > 0$. Επομένως,

$$v(x,\tau) = O\big(|x|^{-\frac{2}{1-m}}\big) \tag{4.8}$$

ομοιόμορφα ώς προς $\tau > 0$. Ας σταθεροποιήσουμε ένα $R > 0$. Έχουμε τότε από ολοκλήρωση κατα μέρη:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B(0,R)} v\frac{|x|^2}{2}dx &= \int\limits_{B(0,R)} \frac{|x|^2}{2}\nabla\cdot\big(\nabla v^m + xv\big)dx \\
&= -\int\limits_{B(0,R)} x\cdot\big(\nabla v^m + xv\big)dx + \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{|x|^2}{2}\big(\nabla v^m + xv\big)\cdot\frac{x}{|x|}dS \\
&= -\int\limits_{B(0,R)} x\cdot\nabla v^m dx - \int\limits_{B(0,R)} |x|^2 v dx + \frac{R}{2}\int\limits_{\partial B(0,R)} \big(\nabla v^m + xv\big)\cdot x dS \\
&= d\int\limits_{B(0,R)} v^m dx - \int\limits_{B(0,R)} |x|^2 v dx - R^2\int\limits_{\partial B(0,R)} v^m dS + \frac{R}{2}\int\limits_{\partial B(0,R)} \big(\nabla v^m + xv\big)\cdot x dS.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς τ, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,R)} \big(v(x,\tau) - u_0(x)\big)\frac{|x|^2}{2}dx &= d\int_0^\tau \int\limits_{B(0,R)} v^m(x,s)dxds - \int_0^\tau \int\limits_{B(0,R)} |x|^2 v dxds \\
&+ \frac{R}{2}\int_0^\tau \int\limits_{\partial B(0,R)} \big(\nabla v^m(x,s)\cdot x + v(x,s)R^2\big)dSds - R^2\int_0^\tau \int\limits_{\partial B(0,R)} v^m dS.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Τώρα, για σταθερό τ και από την εκτίμηση(4.8), θα δούμε ότι καθώς $R \to \infty$ τα ολοκληρώματα με τους συνοριακούς όρους τείνουν να μηδενιστουν. Έχουμε λοιπόν:

$$R^3\int_0^\tau \int\limits_{\partial B(0,R)} v(x,s)dSds = O\big(R^{d+2-\frac{2}{1-m}}\big),$$

$$R^2\int_0^\tau \int\limits_{\partial B(0,R)} v^m dSds = O\big(R^{d+1-\frac{2m}{1-m}}\big).$$

Δηλαδή, εφόσον $m > \frac{d}{d+2}$ το τελευταίο ολοκλήρωμα και ο δεύτερος όρος του προτελευταίου στην (4.9) μηδενίζονται καθώς $R\to\infty$. Από την άλλη, η τελευταία εκτίμηση, μπορεί να γραφεί

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} \int_0^\tau v^m(Rz,s)dsdS = O\big(R^{-\frac{2m}{1-m}}\big).$$

Έτσι, για μια ακολουθία $R_n \to +\infty$, έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial R}\int\limits_{\partial B(0,1)} \int_0^\tau v^m(Rz,s)dsdS|_{R=R_n} = O\big(R_n^{-\frac{2m}{m-1}-1}\big).$$

Ισοδύναμα,

$$R_n^{-d}\int\limits_{\partial B(0,R_n)} \int_0^\tau \nabla v^m(x,s)\cdot xdsdS = O\big(R_n^{-\frac{2m}{1-m}-1}\big),$$

δηλαδή,

$$R_n\int_0^\tau \int\limits_{\partial B(0,R)} \nabla v^m\cdot xdSds = O\big(R_n^{d-\frac{2m}{1-m}}\big).$$

Καταλήγουμε λοιπόν, ότι εφόσον $m>\frac{d}{d+2}$, όλοι οι συνοριακοί όροι της (4.9) μηδενίζονται καθώς $R_n\to+\infty$. Άρα, γίνεται

$$\int_{\mathbb{R}^d}\big(v(x,\tau)-u_0(x)\big)\frac{|x|^2}{2}dx = d\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} v^m(x,s)dxds - \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2 vdxds. \tag{4.10}$$

Με τον ίδο τρόπο, θα εκτιμήσουμε και τον όρο $\int \frac{1}{1-m}v^m dx$. Έχουμε,

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B(0,R)}\frac{1}{1-m}v^m dx = \frac{1}{1-m}\int\limits_{B(0,R)} mv^{m-1}u_\tau dx = \frac{m}{1-m}\int\limits_{B(0,R)} v^{m-1}\nabla\cdot\big(\nabla v^m + xv\big)dx$$

$$= \frac{m}{m-1}\int\limits_{B(0,R)}\nabla v^{m-1}\cdot\big(\nabla v^m+xv\big)dx + \frac{m}{1-m}\int\limits_{\partial B(0,R)} v^{m-1}\big(\nabla v^m + xv\big)\cdot\frac{x}{R}dS$$

$$= \int\limits_{B(0,R)}\frac{4m^2}{(2m-1)^2}\big|\nabla v^{m-\frac12}\big|^2dx + \int\limits_{B(0,R)} x\cdot\nabla v^m dx + \frac{m}{1-m}\int\limits_{\partial B(0,R)} v^{m-1}\big(\nabla v^m+xv\big)\cdot\frac{x}{R}dS$$

$$= \int\limits_{B(0,R)}\frac{4m^2}{(2m-1)^2}\big|\nabla v^{m-\frac12}\big|^2dx - d\int\limits_{B(0,R)} v^m dx$$

$$+ R\int\limits_{\partial B(0,R)} v^m\cdot xdS + \frac{m}{1-m}\int\limits_{\partial B(0,R)} v^{m-1}\big(\nabla v^m+xv\big)\cdot\frac{x}{R}dS$$

Ολοκληρώνοντας πάλι ως προς τ και με παρόμοιες πράξεις, βλέπουμε ότι για κάποια ακολουθία $R_n \to +\infty$ οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται. Έτσι, καταλήγουμε

$$\frac{1}{1-m}\int_{\mathbb{R}^d}\big(v^m(x,\tau)-u_0(x)\big)dx = \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d}\big(\frac{4m^2}{(2m-1)^2}\big|\nabla v^{m-\frac{1}{2}}\big|^2 - dv^m\big)dxds. \tag{4.11}$$

Αφαιρώντας από την (4.10) την (4.11) και παραγωγίζοντας ως προς τ, καταλήγουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}L[v(\tau,\cdot)] &= -\int_{\mathbb{R}^d}\big(\frac{4m^2}{(2m-1)^2}\big|\nabla v^{m-\frac{1}{2}}\big|^2 + 2dv^m - |x|^2 v\big)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} v(\tau,\cdot)\Big|x+\frac{m}{m-1}\nabla v(\tau,\cdot)^{m-1}\Big|^2 dx.\end{aligned}$$

Όταν $m>1$, η λύση έχει συμπαγή φορέα για κάθε $\tau>0$, άρα μπορούμε να παραγωγίσουμε το $L[v(\tau,\cdot)]$ άμεσα, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}L[v(\tau,\cdot)] &= \frac{d}{d\tau}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(v\frac{|x|^2}{2}-\frac{1}{1-m}v^m\Big)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(v_\tau\frac{|x|^2}{2}-\frac{1}{1-m}\frac{d}{d\tau}(v^m)\Big)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(v_\tau\frac{|x|^2}{2}-\frac{m}{1-m}v^{m-1}v_\tau\Big)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\big(\Delta(v^m)+\nabla\cdot(xv)\big)\Big(\frac{|x|^2}{2}-\frac{m}{1-m}v^{m-1}\Big)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\big(\nabla v^m + xv\big)\Big(\frac{|x|^2}{2}-\frac{m}{1-m}v^{m-1}\Big)dx\end{aligned}$$

που με ολοκλήρωση κατα παράγοντες και αντικαθιστώντας $xv+\nabla v^m = v(x+\frac{m}{m-1}\nabla v^{m-1})$, καταλήγουμε

$$\frac{d}{d\tau}L[v(\tau,\cdot)] = -\int_{\mathbb{R}^d} v\Big|x+\frac{m}{m-1}\nabla v(\tau,\cdot)^{m-1}\Big|^2 dx.$$

Έχουμε δηλαδή δείξει την σχέση (4.5). Η απαίτηση για u_0 λεία και με συμπαγή φορέα μπορεί να εξαλειφθεί καθώς οι λείες, με συμπαγή φορέα, συναρτήσεις είναι πυκνές στο χώρο που απαιτούμε να είναι η u_0.
Για να συμπεράνουμε την (4.7) για $\frac{d-1}{d}\le m<1$ για $d\ge 3$, $\frac{1}{2}<m<1$ αν $d=2$, ή $m>1$, θα αντικαταστήσουμε το δεύτερο σκέλος από την (3.13). Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}L[v] &\le -2(L[v]-L[v_\infty])\\ \frac{d}{d\tau}L[v]+2L[v] &\le 2L[v_\infty]\\ \frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}L[v]) &\le \frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}L[v_\infty])\\ e^{2\tau}L[v(\tau,\cdot)]-L[u_0] &\le e^{2\tau}L[v_\infty]-L[v_\infty]\\ L[v(\tau,\cdot)]-L[v_\infty] &\le (L[u_0]-L[v_\infty])e^{2\tau}\end{aligned}$$

Στις περιπτώσεις αυτές, η (4.6) είναι προφανής.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της πρότασης μένει να δείξουμε την (4.6) όταν $\frac{d}{d+2} < m < \frac{d-1}{d}$. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του v είναι πεπερασμένη και ότι το $L[v(\cdot,\tau)]$ είναι φθίνων και επομένως ομοιόμορφα φραγμένο από πάνω ως προς τ. Θα δούμε ξεχωριστά τα όρια για κάθε όρο του $L[v]$, επομένως θα χρειαστούμε άνω φράγματα για τα

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(\tau,x)|x|^2dx \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^d} v^m(\tau,x)dx.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder στο $v^m v_\infty^{-m(1-m)} \cdot v_\infty^{m(1-m)}$:

$$\int\limits_\omega v^m dx \leq \Big[\int\limits_\omega v\Big(\sigma^2+\frac{1-m}{2m}|x|^2\Big)dx\Big]^m \cdot \Big[\int\limits_\omega v_\infty^m\Big]^{1-m}, \tag{4.12}$$

για κάθε $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Από τη σχέση αυτή και τον ορισμό του $L[v]$ παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^d} v|x|^2dx - \frac{1}{1-m}\Big[\int_{\mathbb{R}^d} v\Big(\sigma^2+\frac{1-m}{2m}|x|^2\Big)dx\Big]^m \cdot \Big[\int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx\Big]^{1-m} \leq L[v] \tag{4.13}$$

Έτσι για το $\int_{\mathbb{R}^d} v|x|^2dx$, έχουμε μια σχέση της μορφής

$$A-(C_1+A)^m \leq C_2,$$

που μας δίνει ομοιόμορφο φράγμα και αυτό με τη σειρά του μας δίνει ομοιόμορφο φράγμα για το $\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx$. Έχουμε τελικά εκτιμήσεις για τα

$$\int_{\mathbb{R}^d} v\frac{|x|^2}{2}dx \quad \text{και} \quad ||v^m||_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

που εξαρτώνται μόνο από τα m, M και $L[v]$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx \to \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^d} v|x|^2dx \to \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty|x|^2dx \quad \text{για} \quad \tau\to+\infty.$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι $v \to v_\infty$ στον $L^1(\mathbb{R}^d)$. Από αυτό μπορούμε να πάρουμε $v^m \rightharpoonup v_\infty^m$ στον $L^{1/m}(\mathbb{R}^d)$. Πράγματι αν $g \in L^{1/(1-m)}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} v^m g dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m g dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d}\big(v^m-v_\infty^m\big)gdx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^d}\big|v^m-v_\infty^m\big|gdx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\big|v-v_\infty\big|^m g dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d}|v-v_\infty|dx\Big)^m\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g^{\frac{1}{1-m}}dx\Big)^{1-m} \to 0\end{aligned}$$

Επιλέγοντας την $g=\chi_{B(0,R)}$, μπορούμε να πάρουμε

$$\int_{B(0,R)} v^m dx \to \int_{B(0,R)} v_\infty^m dx \quad \text{για} \quad \tau\to+\infty, \quad \forall R>0.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την (4.12) για $\omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| > R\}$, βλέπουμε εύκολα ότι

$$\int_{|x|>R} v^m dx \to 0 \quad \text{για} \quad R \to +\infty.$$

Έτσι, έχουμε

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} v^m dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx \Big| \leq \Big| \int_{|x|<R} v^m - \int_{|x|<R} v_\infty^m dx \Big| + \Big| \int_{|x|>R} v^m dx \Big| + \Big| \int_{|x|>R} v_\infty^m dx \Big|,$$

και για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε τ_0 ώστε για κάθε $\tau > \tau_0$

$$\Big| \int_{|x|<R} v(\tau, \cdot)^m - \int_{|x|<R} v_\infty^m dx \Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ενώ μπορούμε να βρούμε R_0, ώστε για κάθε $R > R_0$

$$\int_{|x|>R} v^m dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{και} \quad \int_{|x|>R} v_\infty^m dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Άρα τελικά

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} v^m dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx \Big| < \varepsilon.$$

Από την άλλη,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} v|x|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty |x|^2 dx \Big| \leq R^2 \int_{|x|<R} |v - v_\infty| dx + \int_{|x|>R} |x|^2 v dx + \int_{|x|>R} |x|^2 v_\infty dx,$$

και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τ_0 ώστε $\forall \tau > \tau_0$

$$\int_{|x|<R} |v - v_\infty| dx < \frac{\varepsilon}{2R^2},$$

και εφόσον τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα, μπορούμε να πάρουμε R_0 ώστε για $R > R_0$

$$\int_{|x|>R} |x|^2 v dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \int_{|x|>R} |x|^2 v_\infty dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Βλέπουμε λοιπόν τελικά ότι

$$\lim_{\tau \to +\infty} L[v(\tau, x)] = L[v_\infty].$$

□

Στη συνέχεια θα δούμε μια εκτίμηση για τη διαφορά των v, v_∞ ως προς το L. Για την απόδειξη του αποτελέσματος θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο είναι μια παραλλαγή της ανισότητας Csiszar-Kullback.

Λήμμα 2. *Υποθέτουμε ότι* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *και* s *είναι μια κυρτή και μη αρνητική συνάρτηση στο* $\mathbb{R}_+$, *τέτοια ώστε* $s(1) = 0$ *και* $s'(1) = 0$. *Αν* μ *είναι ένα μή αρνητικό μέτρο στο* Ω *και* f *και* g *είναι μή αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στο* Ω *ώς προς* μ, *τότε*

$$\int_{\Omega} s\Big(\frac{f}{g}\Big) g d\mu \geq \frac{K}{\max\{\int_{\Omega} f d\mu,\ \int_{\Omega} g d\mu\}} \cdot ||f-g||^2_{L^1(\Omega,d\mu)}, \tag{4.14}$$

όπου $K = \frac{1}{2} \cdot \min\{K_1, K_2\}$,

$$K_1 = \min_{\eta \in (0,1)} s''(\eta) \quad \textit{και} \quad K_2 = \min_{\theta \in (0,1), h>0} s''(1+\theta, h)(1+h),$$

όταν όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι f, g είναι γνήσια θετικές συναρτήσεις. Θέτουμε $h = (f-g)/g$, έτσι $f/g = 1+h$. Αν ω είναι ένα υποσύνολο του Ω και k μια θετική, ολοκληρώσιμη στο ω συνάρτηση, τότε από ανισότητα Cauchy-Schwarz για την συνάρτηση $\frac{|f-g|}{k^{1/2}}$, παίρνουμε:

$$\int_{\omega} \frac{|f-g|}{k} d\mu \geq \frac{\big(\int_{\omega} |f-g|\ d\mu\big)^2}{\int_{\omega} k\ d\mu}. \tag{4.15}$$

Στη συνέχεια θα πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της $s(t)$ γύρω από το $t = 1$. Εφόσον έχουμε από υπόθεση $s(1) = s'(1) = 0$, παίρνουμε

$$s\Big(\frac{f}{g}\Big) = s(1+h) = \frac{1}{2} s''(1+\theta h) h^2,$$

για κάποια συνάρτηση $x \mapsto \theta(x)$ με τιμές στο (0,1). Για την απόδειξη της (4.14) θέλουμε εκτιμήσεις από κάτω για το

$$\int_{\omega} s''(1+\theta h) g h^2 d\mu.$$

Θα πάρουμε εκτιμήσεις ξεχωριστά για $\{f<g\}$ και για $\{f>g\}$.
Για $\{f<g\}$ έχουμε ότι $h<0$ και αφού f, g θετικές συναρτήσεις $(1+\theta h) \in (0,1)$, άρα:

$$\int\limits_{\{f<g\}} s''(1+\theta h) g h^2 d\mu = \int\limits_{\{f<g\}} s''(1+\theta h) \frac{|f-g|^2}{g} d\mu \geq K_1 \int\limits_{\{f<g\}} \frac{|f-g|^2}{g} d\mu.$$

Εφαρμόζοντας την (4.15) για $k = g$ παίρνουμε

$$\int\limits_{\{f<g\}} s''(1+\theta h) g h^2 d\mu \geq K_1 \frac{\big(\int_{\{f<g\}} |f-g| d\mu\big)^2}{\int_{\{f<g\}} g d\mu}.$$

Για $\{f>g\}$ έχουμε ότι $h>0$ και $\theta \in (0,1)$ οπότε έχουμε

$$\int\limits_{\{f>g\}} s''(1+\theta h) g h^2 d\mu = \int\limits_{\{f>g\}} s''(1+\theta h)(1+h) \frac{|f-g|^2}{f} d\mu \geq K_2 \int\limits_{\{f>g\}} \frac{|f-g|^2}{f} d\mu.$$

Εφαρμόζουμε την (4.15) για $k = f$ για να πάρουμε την εκτίμηση

$$\int\limits_{\{f>g\}} s''(1+\theta h) g h^2 d\mu \geq K_2 \frac{\left(\int_{\{f>g\}} |f-g| d\mu\right)^2}{\int_{\{f>g\}} f \ d\mu}.$$

Αν αθροίσουμε τις εκτιμήσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega s\Big(\frac{f}{g}\Big) g d\mu &\geq \int\limits_{\{f<g\}} s\Big(\frac{f}{g}\Big) g d\mu + \int\limits_{\{f>g\}} s\Big(\frac{f}{g}\Big) g d\mu \\
&\geq K_1 \frac{\left(\int_{\{f<g\}} |f-g| d\mu\right)^2}{\int_{\{f<g\}} g d\mu} + K_2 \frac{\left(\int_{\{f>g\}} |f-g| d\mu\right)^2}{\int_{\{f>g\}} f \ d\mu} \\
&\geq \frac{K}{\max\{\int_\Omega f d\mu, \ \int_\Omega g d\mu\}} ||f-g||^2_{L^1(\Omega, d\mu)}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

□

Με βάση αυτό το λήμμα, θα πάρουμε άμεσα τις εκτιμήσεις με την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 5. *Υποθέτουμε $d \geq 2$. Έστω v μια μή αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε $x \mapsto (1+|x|^2)v$ και v^m να ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και η v_∞ όπως έχει οριστεί στο πόρισμα του προηγούμενου κεφαλαίου.*

1. *Αν $\frac{d-2}{d} \leq m \leq 1, \quad m > \frac{1}{2}$, τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα $m, \ M = \int_{\mathbb{R}^d} v dx$ και $L[v]$ τέτοια ώστε*

$$C||v^m - v_\infty^m||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq L[v] - L[v_\infty].$$

2. *Αν $1 < m \leq 2$ και $R = \sqrt{\frac{2m}{m-1}\sigma^2}$, τότε*

$$C||(v - v_\infty) v_\infty^{m-1}||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq L[v] - L[v_\infty].$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε άμεσα το λήμμα για κατάλληλη κυρτή συνάρτηση s και κατάλληλο μέτρο μ.

Για $m < 1$ παίρνουμε

$$s(t) = \frac{m t^{1/m} - t}{1-m} + 1 \quad \text{και} \quad d\mu(x) = dx.$$

Για την s, βλέπουμε εύκολα ότι $s(1) = s'(1) = 0$ και $K_1 = K_2 = \frac{1}{m}$. Εφαρμόζουμε το λήμμα για $f = v^m, \ g = v_\infty^m$ για να πάρουμε:

$$A[v] = \int_{\mathbb{R}^d} s\Big(\frac{v^m}{v_\infty^m}\Big) v_\infty^m dx \geq \frac{1}{2m \cdot \max\{\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx\}} ||v^m - v_\infty^m||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \qquad (4.17)$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$A[v] = \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \frac{m}{1-m} v v_\infty^{m-1} - \frac{1}{1-m} v^m + v_\infty^m \Big\} dx.$$

Αντικαθιστώντας το v_∞ από τον ορισμό του στον πρώτο όρο του ολοκληρώματος και από τον ορισμό του $L[v]$ καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} A[v] &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{m\sigma^2}{1-m} v dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1-m} v^m dx + \int_{\mathbb{R}^d} v \frac{|x|^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{m\sigma^2}{1-m} v dx + L[v] + \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx, \end{aligned}$$

άρα τελικά

$$A[v] = \frac{m\sigma^2 M}{1-m} + L[v] + \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx.$$

Από την άλλη, έχουμε ότι $A[v_\infty] = 0$ αφού $s(1) = 0$. Άρα, μπορούμε να πάρουμε

$$\frac{m\sigma^2 M}{1-m} + L[v_\infty] + \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx = 0 \Longrightarrow \frac{m\sigma^2 M}{1-m} + \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx = -L[v].$$

Άρα, $A[v] = L[v] - L[v_\infty]$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.17) παίρνουμε

$$\frac{1}{2m \cdot \max\{\int_{\mathbb{R}^d} v^m dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} v_\infty^m dx\}} ||v^m - v_\infty^m||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq L[v] - L[v_\infty].$$

Και εφόσον έχουμε φράγμα για το $||v^m||_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ που εξαρτάται από τα $m, M, L[v]$ η σταθερά στο πρώτο μέλος της ανισότητας εξαρτάται επίσης από αυτά. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για $m < 1$.

Για $1 < m < 2$, το v_∞ έχει εξ' ορισμού συμπαγή φορέα. Συγκεκριμένα ο φορέας του είναι μπάλα με κέντρο την αρχή και ακτίνα $R = \sqrt{\frac{2m}{m-1}\sigma^2}$.

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε το λήμμα για

$$s(t) = \frac{t^m - mt}{m-1} + 1 \quad \text{και} \quad d\mu(x) = v_\infty^{m-1} dx.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του λήμματος και $K_1 = K_2 = m$. Για $f = v,\ g = v_\infty$, παίρνουμε

$$A[v] = \int_{\mathbb{R}^d} s\Big(\frac{v}{v_\infty}\Big) v_\infty d\mu(x) \geq C||v - v_\infty||^2_{L^1(\mathbb{R}^d, \mu)} \tag{4.18}$$

Κοιτάζοντας πάλι το $A[v]$, με δεδομένο τον φορέα της v_∞, έχουμε

$$\begin{aligned} A[v] &= \int_{B(0,R)} \frac{1}{m-1} v^m - \frac{m}{m-1} \int_{B(0,R)} v\sigma^2 dx + \int_{B(0,R)} v \frac{|x|^2}{2} dx \\ &= L[v] - \int_{B(0,R)^c} \Big(v\frac{|x|^2}{2} + \frac{1}{m-1} v^m \Big) dx - \frac{m}{m-1} \sigma^2 \int_{B(0,R)} v dx \end{aligned}$$

Έχουμε επίσης ότι:

$$A[v_\infty]=0 \Longleftrightarrow -L[v_\infty]=-\frac{m}{m-1}\sigma^2\int_{B(0,R)} v_\infty dx=\frac{m}{m-1}\sigma^2\int_{\mathbb{R}^d} vdx,$$

αφού $M=\int_{B(0,R)} v_\infty dx=\int_{\mathbb{R}^d} vdx$. Τελικά η (4.18) γίνεται

$$L[v]-L[v_\infty]\geq C||(v-v_\infty)v_\infty^{m-1}||_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\int_{B(0,R)^c} v\Big(\frac{|x|^2}{2}-\frac{m}{m-1}\sigma^2\Big)dx+\frac{1}{m-1}\int_{B(0,R)^c} v^m dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μεγαλύτερο από μηδέν. Το πρότελευταίο είναι επίσης θετικό αν δούμε το χωρίο που ολοκληρώνουμε:

$$|x|>\sqrt{\frac{2m}{m-1}\sigma^2}\Longleftrightarrow \frac{|x|^2}{2}\geq\frac{m}{m-1}\sigma^2,$$

Καταλήγουμε έτσι στη σχέση που θέλαμε να δείξουμε με το C να εξαρτάται μόνο από τα $m, M, L[v]$. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δούμε και να αποδείξουμε το τελικό Θεώρημα για τη συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλους χρόνους. Συγκεκριμένα,

Θεώρημα 9. *Υποθέτουμε ότι τα αρχικά δεδομένα u_0 είναι μια μη αρνητική συνάρτηση με*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(1+|x|^2)dx+\int_{\mathbb{R}^d} u_0^m dx<+\infty.$$

Αν η u είναι λύση του προβλήματος (2.14)-(2.15) και

$$\mathcal{U}(x,t)=t^{-da}\cdot\Big(\sigma^2-\frac{m-1}{2m}a\frac{|x|^2}{t^{2a}}\Big)_+^{\frac{1}{m-1}},\quad a=(2-d(1-m))^{-1},$$

ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{U}(t,x)dx=\int_{\mathbb{R}^d} u_0 dx,$$

τότε ισχύουν:

1. *Αν $\frac{d-1}{d}<m<1,\quad m>\frac{1}{2}$, τότε*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{1-d(1-m)}{2-d(1-m)}}||u^m(t,\cdot)-\mathcal{U}^m(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R}^d)}<+\infty.$$

2. *Αν $1<m<2$, τότε*

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{1+d(m-1)}{2+d(m-1)}}||[u(t,\cdot)-\mathcal{U}(t,\cdot)]\mathcal{U}^{m-1}(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R}^d)}<+\infty.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα μας δοθεί από την πρόταση που μόλις είδαμε και την εκτίμηση (4.7). Έτσι, για $m < 1$, έχουμε

$$C||v^m(\cdot,\tau) - v_\infty^m||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \big(L[u_0] - L[v_\infty]\big) \cdot e^{-2\tau} \quad \forall \tau > 0,$$

ενώ για $m > 1$

$$C||\big(v(\cdot,\tau) - v_\infty\big)v_\infty^{m-1}||^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \big(L[u_0] - L[v_\infty]\big) \cdot e^{-2\tau}.$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το v από τον ορισμό του όπως δίνεται στην (4.2), το $\tau(t) = \log R(t)$ και γράφοντας ανάλογα

$$u_\infty(t,x) = R(t)^{-d} v_\infty\Big(\frac{x}{R(t)}\Big),$$

παίρνουμε για $m < 1$

$$CR(t)^{1-d(1-m)}||u^m - u_\infty^m||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \big(L[u_0] - L[v_\infty]\big)^{\frac{1}{2}},$$

και για $m > 1$

$$CR(t)^{1+d(m-1)}||(u - u_\infty)u_\infty^{m-1}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \big(L[u_0] - L[v_\infty]\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Τώρα,εφόσον $R(t) \sim t^a$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$u_\infty \sim \mathcal{U} \quad \text{καθώς} \quad t \to +\infty.$$

Άρα, καταλήγουμε στις σχέσεις που θέλαμε να δείξουμε στο Θεώρημα. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] D.G. Aronson. *The Porous Medium Equation. Nonlinear Diffusion Problems.* Springer-Verlag, 1985.

[2] J. Bear. *Dynamics of fluids in Porous Media.* Dover Publications, 1988.

[3] L.Nirenberg B.Gidas, W.M. Ni. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Physics*, 68:209–243, 1979.

[4] Tang J. Serinn, M. Uniqueness for ground states for quasilinear elliptic operators. *Indiana Univ. Math. Journal*, 3(49):897–923, 2000.

[5] G. Toscani J.A. Carrillo. Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana Univ. Math. Journal*, 49(1), 2000.

[6] J. Dolbeault M. Del Pino. Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions. *J. Math. Pures Appl.*, 81:847–875, 2002.

[7] M.Pierre M.A. Herrero. The cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$. *Trans. Amer. Math. Soc*, 1(291):145–158, 1985.

[8] R.C. MacCamy M.E. Gurtin. On the diffusion of biological populations. *Math. Biosciences*, 33:35–49, 1977.

[9] W.I. Newman. A Lyapunov functional for the evolution of solutions to the porous medium equation to self-similarity i. *J. Math. Phys*, 25(10):3120–3123, 1984.

[10] J. Serrin P. Pucci. Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic operators. *Indiana Univ. Math. Journal*, 2(47):501–528, 1998.

[11] J.L. Vazquez. *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. Shape optimization and free boundaries. 347-389*, 1992.

[12] J.L. Vazquez. Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space. *J. Evol. Equ.*, 3(1), 2003.

[13] J.L Vazquez. *The Porous Medium Equation.* Oxford University Press, 2006.

[14] E.L. Roetman W.B. Fulks, R.B. Guenther. Equations of motion and continuity for fluid flow in a porous medium. *Acta Mechanica*, 12:121–129, 1971.

[15] Yu.P. Raizer Ya.B. Zel'dovich. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Dover Puplications, 2002.