ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΑΝΔΡΕΑ ΠΑΝΤΕΡΗ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
ΙΣΤΟΡΙΑ – ΤΕΧΝΙΚΕΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΑΜΠΡΟΥ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

1. Ι Σ Τ Ο Ρ Ι Α

1.1 ΑΡΧΑΙΑ ΑΙΓΥΠΤΟΣ - ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ

Οι Μαθηματικές γνώσεις των Αρχαίων Αιγυπτίων ήρθαν στο φώς, από την αποκρυπτογράφηση ενός σημαντικού εγγράφου, το οποίο αποτελεί την πιο σημαντική πηγή για τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά, γνωστού με τον τίτλο **Πάπυρος του Rhind (ή του Αχμή)**[1]. Στο οποίο εκτός από αριθμητικές πράξεις και την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων, υπάρχουν στοιχεία τα οποία πιστοποιούν τις εμπειρικές γνώσεις των Αιγυπτίων στη Γεωμετρία. Το Πρόβλημα 51 του Αχμή μας δίνει το σωστό αποτέλεσμα για το εμβαδόν του τριγώνου. Στο Πρόβλημα 52 με συγκεκριμένους αριθμούς βρίσκει το σωστό εμβαδόν για το τραπέζιο, αλλά δεν προτείνεται κάποιος συγκεκριμένος τύπος. Σε κάποιες συμβολαιογραφικές πράξεις 1500 χρόνια περίπου μετά τον Αχμή φαίνεται ότι υπολόγιζαν το εμβαδόν τετραπλεύρου με πλευρές α, β, γ, δ με ένα τρόπο που παραπέμπει στον τύπο[2],

$$\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2}$$

Στο Πρόβλημα 50 φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου. Ο γραφέας υποθέτει ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού χωραφιού διαμέτρου εννέα μονάδων ισούται με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς οκτώ μονάδων. Συγκρίνοντας την υπόθεση αυτή με το τύπο $E = \pi\rho^2$ προκύπτει,

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \simeq 3{,}1604$$

μία καλή προσέγγιση της τιμής του π.

Σε ένα άλλο πάπυρο τον πάπυρο του Kahun[3], ο οποίος βρίσκεται στο Λονδίνο, ο συγγραφέας βρίσκει τον όγκο ενός κυλίνδρου με το γνωστό τύπο $V = \pi r^2 h$. Ο υπολογισμός του εμβαδού της βάσης γίνεται όπως παρουσιάζεται στο πάπυρο του Αχμή, πράγμα που σημαίνει ότι η τιμή κατά Αχμή του π χρησιμοποιείτο και από άλλους Αιγυπτίους[4].

---

[1] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 12. Ένας Σκωτζέζος συλλέκτης, ο Henry Rhind τον αγόρασε το 1858 σε μία απομακρυσμένη πόλη του Νείλου, και από τότε είναι γνωστός είτε με το όνομα του κατόχου του ή ως πάπυρος του Αχμή προς τιμή του γραφέα που τον αντέγραψε, ο οποίος φαίνεται ότι είναι ο πρώτος στην ιστορία της ανθρωπότητας που έγραψε μαθηματικό κείμενο.

[2] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομ. 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 34.

[3] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομ. 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 32. Ανακαλύφθηκε στη πόλη Καχούν του Αφγανιστάν, και έχει ερμηνευτεί από τον Griffiths.

[4] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons , New York 1968, σελ. 20.

Στο πάπυρο του Rhind γίνεται χρήση του π για τον υπολογισμό όγκων αποθηκών οι οποίες ορίζονται από επιφάνειες που δεν είναι όλες επίπεδες.

Άλλη σημαντική πηγή για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων είναι και ένας άλλος πάπυρος, γνωστός με το όνομα **Πάπυρος της Μόσχας**[5], ο οποίος έχει μήκος περίπου 6 μέτρα και πλάτος 8 εκατοστά. Περιέχει 25 παραδείγματα για διάφορα πρακτικά γεωμετρικά προβλήματα. Ξεχωρίζει το Πρόβλημα 56 στο οποίο με υπολογισμούς συγκεκριμένων αριθμών μπορούμε να υποθέσουμε ότι, ο υπολογισμός του όγκου κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας, δίνεται με σύγχρονα σύμβολα

$$V = \frac{h(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3},$$

όπου h το ύψος και α, β οι πλευρές των βάσεων. Αν θεωρήσουμε ότι $\beta = 0$, όπως φαίνεται στις συμβολαιογραφικές πράξεις του Έντφου[6], γίνεται ο γνωστός τύπος υπολογισμού του όγκου τετραγωνικής πυραμίδας.

Από την άλλη πλευρά οι Μεσοποτάμιοι υπολόγισαν το εμβαδόν του κύκλου πολλαπλασιάζοντας το τρία με το τετράγωνο της ακτίνας, προφανώς μία προσέγγιση κατώτερη των Αιγυπτίων[7]. Σε μία πλάκα όμως η οποία ανασύρθηκε από μία ανασκαφή στα Σούσα (1936) υπάρχουν πίνακες στις οποίες συγκρίνουν τα εμβαδά και τα τετράγωνα των πλευρών κανονικών πολυγώνων με τρεις, τέσσερις, πέντε, έξι και επτά πλευρές. Στον ίδιο πίνακα ο συγγραφέας μας δίνει τον αριθμό $57+\frac{36}{60}$ ως το λόγο της περιμέτρου κανονικού εξαγώνου προς το μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου, από το οποίο προκύπτει π = 3,125 η οποία είναι εξίσου καλή με των Αιγυπτίων[8]. Επίσης οι Μεσοποτάμιοι μαθηματικοί υπολόγιζαν τον όγκο ενός κόλουρου κώνου ή μιας κόλουρης πυραμίδας, πολλαπλασιάζοντας το ύψος με τον αριθμητικό μέσο των βάσεων, δηλαδή

$$V = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)h.$$ [9]

Επίσης χρησιμοποιούσαν ένα τύπο ισοδύναμο με τον

---

[5] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons , New York 1968, σελ. 20. Αγοράστηκε στην Αίγυπτο το 1893, έχει μήκος περίπου 6 μέτρα και πλάτος 8 εκατοστά. Αγνώστου γραφέα περί το 1890 π.Χ.

[6] Στο ίδιο, σελ. 21.

[7] Στο ίδιο, σελ. 41.

[8] Στο ίδιο σελ. 41.

[9] Στο ίδιο σελ. 42.

$$V = h\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right],$$

για τον υπολογισμό του όγκου της κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας, ο οποίος συμφωνεί με αυτόν που ήξεραν οι Αιγύπτιοι.[10]
Παρόλη όμως την ανάπτυξη μεθόδων οι οποίες προσεγγίσουν αρκετά καλά τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών, ούτε οι Βαβυλώνιοι ούτε οι Αιγύπτιοι έφθασαν στην μαθηματική αφαίρεση, στη διατύπωση υποθέσεων και συμπερασμάτων, μαθηματικών προτάσεων (Θεωρημάτων).

1. 2 ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ

Οι αρχαίοι Έλληνες μέσα από την Γεωμετρία έθεσαν τις βάσεις για το σημαντικότερο εργαλείο της ανθρώπινης νόησης (Τα Μαθηματικά). Ειδικότερα μέσα από την Γεωμετρία, επινόησαν και τελειοποίησαν την *«Μέθοδο της εξάντλησης»* πού είναι ο πρόδρομος του σημερινού Ολοκληρωτικού Λογισμού.
Πρωτοπόροι της μεθόδου αυτής είναι **ο Ιπποκράτης ο Χίος (470 – 410 π.Χ.)** στον οποίο **ο Εύδημος** αποδίδει, αλλά κάτι τέτοιο ήταν μάλλον αδύνατο για την εποχή αυτή, το παρακάτω θεώρημα:

«τὰ γὰρ ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα, διότι καὶ οἱ ὅμοιοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα»[11].

«Ο λόγος των εμβαδών ομοίων κυκλικών τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των βάσεων τους »

Όπως υποστηρίζει ο Εύδημος, ο Ιπποκράτης απέδειξε το θεώρημα δείχνοντας ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων, είναι ίσος προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Η απόδειξη αυτή απαιτεί κάποια διαδικασία εξάντλησης, αλλά δεν έχουμε τίποτα το οποίο να μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι κατείχε ένα τέτοιο εργαλείο. Η απόδειξη που αναφέρεται στο βιβλίο XII.2 *των Στοιχείων του Ευκλείδη*, οφείλεται μάλλον στον Εύδοξο, ο οποίος έζησε μετά από τον Ιπποκράτη και πριν από τον Ευκλείδη. Πάντως ο Ιπποκράτης είναι ο πρώτος στην ιστορία των μαθηματικών πού έκανε το τετραγωνισμό μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας (τετραγω-

---

[10] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons , New York 1968, σελ. 42.

[11] Musaios, Εύδημος, Fragment 140, line 174

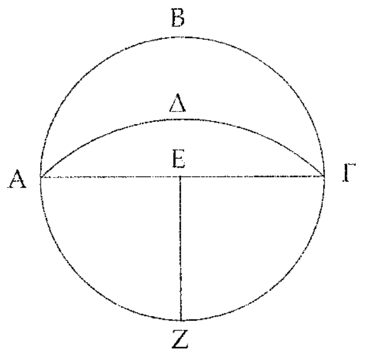
νισμός των μηνίσκων), όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα από τον Σιμπλίκιο.

«καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφη σάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν. ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει (τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις)»

Οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων, που λόγω της ομοιότητας του με τον κύκλο δεν είναι από τα απλά σχήματα, επιτεύχθησαν πρώτα από τον Ιπποκράτη και θεωρήθηκαν ότι ήταν σωστά παρουσιασμένοι, γιαυτό και εμείς θα ασχοληθούμε με αυτούς και θα τους διεξέλθουμε δια μακρών. Άρχισε λοιπόν θέτοντας ως πρώτο μεταξύ των θεωρημάτων που χρησιμεύουν για το σκοπό του, ότι τα όμοια τμήματα των κύκλων έχουν μεταξύ τους τον αυτό λόγο με τα από τις βάσεις τους τετράγωνα. Αυτό δε το απέδειξε δείχνοντας πρώτα ότι τα τετράγωνα από τις διαμέτρους έχουν τον αυτό λόγο με τους κύκλους.

Θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση στο πνεύμα των προηγουμένων προτάσεων.[12]

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου (Σχήμα 1), ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την ακτίνα του κύκλου.



Σχήμα 1

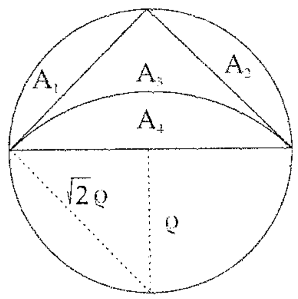
Έστω ότι τα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι κυκλικά τόξα με κέντρα Ε και Ζ αντίστοιχα.

- Ισχύει ως γνωστό ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με το λόγο του τετραγώνου των ακτίνων.
- Από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

[12] Historical Highlights, σελ. 6

α) Ο λόγος των εμβαδών δύο κυκλικών τομέων με ίσες τις επίκεντρες γωνίες ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ακτίνων.
β) Τα κυκλικά τμήματα δύο κύκλων με ίσες τις επίκεντρες γωνίες έχουν λόγο ίσο με το λόγο του τετραγώνου των ακτίνων.

Οπότε μπορούμε να κάνουμε την απόδειξη ως εξής: *(Σχήμα 2)*



Σχήμα 2

Από το (γ) προκύπτει ότι , $\dfrac{A_1}{A_4} = \dfrac{\varrho^2}{\left(\sqrt{2}\varrho\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ οπότε $A_1 = \dfrac{1}{2}A_4$ και όμοια

$A_2 = \dfrac{1}{2}A_4$.

Επομένως: $A_1 + A_2 = A_4$

$(ΑΒΓΔ) = A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_3 =$ (εμβαδόν τριγώνου) =

$\dfrac{1}{2}(2\varrho)(2\varrho) = \varrho^2 =$ (εμβαδόν τετραγώνου)

1.2.1 Ο Δημόκριτος (460 – 370 π.Χ.) ο οποίος ήταν πολύ υπερήφανος για τα μαθηματικά του λέγοντας ότι ούτε οι «αρπεδονάπτες» της Αιγύπτου δεν τον ξεπερνούσαν, φαίνεται ότι είχε ασχοληθεί με μαθηματικά προβλήματα τα οποία απαιτούσαν κάποιο είδος απειροστικής αντιμετώπισης. Είδαμε παραπάνω ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν ότι ο όγκος μιας πυραμίδας ισούται με το ένα τρίτο του γινομένου της βάσης και του ύψους της. Ο Αρχιμήδης αναφέρει αργότερα ότι το αποτέλεσμα αυτό, όπως επίσης και το ότι ο όγκος του κώνου είναι ίσος με το ένα τρίτο του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου) με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, ήταν γνωστά και στο Δημόκριτο αλλά δεν τα απόδειξε αυστηρά. Ο Εύδοξος ήταν αυτός πού είχε κάνει πρώτος την απόδειξη.

... Διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν

τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ[13]...
Ένεκα του οποίου και για τα θεωρήματα αυτά, των οποίων ο Εύδοξος βρήκε πρώτος την απόδειξη, περί του κώνου δηλαδή και της πυραμίδας, ότι είναι το ένα τρίτο ο μεν κώνος του κυλίνδρου, η δε πυραμίδα του πρίσματος, των εχόντων την ίδια βάση και ίσα ύψη, ουχί μικρό μέρος πρέπει να αποδοθεί στον Δημόκριτο, ο οποίος πρώτος εξήγγειλε την εκφώνηση περί του ειρημένου σχήματος χωρίς την απόδειξη

Ιστορικά επιβεβαιωμένο είναι πάντως ότι πατέρας της *«**Μεθόδου της εξάντλησης**»* είναι ο **Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.)**[14], ο οποίος εκτός από τους υπολογισμούς του όγκου της τριγωνικής πυραμίδας και του όγκου του κόλουρου κώνου, στο Δωδέκατο Βιβλίο των *Στοιχείων* του *Ευκλείδη* απέδειξε ότι:

1) *(Πρόταση 2)* Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα

Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων με διαμέτρους δ, Δ είναι ίσος με το λόγο $\frac{\delta^2}{\Delta^2}$.

2) *(Πρόταση 5)* Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Δύο πυραμίδες (τριγωνικές και μετά πολυγωνικές) με ίσα ύψη είναι ανάλογες των βάσεων τους.

3) *(Πρόταση 6)* Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ισοδύναμες τριγωνικές πυραμίδες.

4) Ο λόγος δύο όμοιων τριγωνικών πυραμίδων ανάγεται σε λόγο παραλληλεπιπέδων, για να αποδειχθεί *(Πρόταση 8)* ότι ισούται με τον κύβο του λόγου δύο ομολόγων ακμών τους.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

5) Στην *(Πρόταση 11)* αποδεικνύεται ότι αν δύο κώνοι (ή κύλινδροι) έχουν ίσα ύψη , τότε είναι ανάλογοι των βάσεων τους.

---

[13] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 386.
[14] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομ. 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε, σελ. 60. C. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons 1968, σελ. 100.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὧν αἱ βάσεις.

6) Τέλος στην *(Πρόταση 17)* αποδεικνύεται ότι
Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

« ο λόγος των όγκων δυο σφαιρών με ακτίνες ρ_1, ρ_2 *είναι ίσος με το λόγο*

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3$$

Στο Πέμπτο βιβλίο των *Στοιχείων του Ευκλείδη* ο ορισμός που έδωσε τέρμα στην αμηχανία που προκάλεσε η ανακάλυψη των αρρήτων μεγεθών, και ισχύει για σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη είναι:

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

« τέσσερα μεγέθη λέμε ότι έχουν τον ίδιο λόγο το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με τα ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου, με οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό, είναι μεγαλύτερα ή ίσα ή μικρότερα όταν αυτά ληφθούν με την αντίστοιχη τάξη»

Με σύγχρονο συμβολισμό ο ορισμός αυτός διατυπώνεται ως εξής:
« Έστω τέσσερα μεγέθη α, β, γ, δ τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ *αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς* μ *και* ν,

Όταν $\mu\alpha > \nu\beta$ τότε $\mu\gamma > \nu\delta$
ή
Όταν $\mu\alpha = \nu\beta$ τότε $\mu\gamma = \nu\delta$
ή
Όταν $\mu\alpha < \nu\beta$ τότε $\mu\gamma < \nu\delta$.

Ο ορισμός αυτός δεν απέχει πολύ από τους ορισμούς του δέκατου ενάτου αιώνα για τους πραγματικούς αριθμούς. Οι τομές Dedekind είναι ακριβώς ο ορισμός αυτός.
Έτσι δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία αυτή η ιστορική συγκυρία της σύγχρονης θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών και του Ολοκληρωτικού Λογισμού από το ίδιο άτομο, τον Εύδοξο.

Η άμεση εξάρτηση και σχέση του Ολοκληρωτικού Λογισμού, από την κατανόηση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών είναι φανερή σε κάθε βήμα της θεωρίας Ολοκλήρωσης.

Από άνισα μεγέθη το μεγαλύτερο υπερέχει του μικρότερου κατά τέτοιο μέγεθος όπως αυτό που, όταν προστεθεί στον εαυτό του, να μπορεί να υπερέχει οποιουδήποτε προκαθορισμένου μεγέθους του ίδιου είδους.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ
δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Από το αξίωμα των Αρχιμήδη – Ευδόξου προκύπτει μία πρόταση η οποία αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης.

Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο από το μισό του, και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε τμήμα πάλι μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν η διαδικασία αυτή των αφαιρέσεων συνεχιστεί, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

Η πρόταση αυτή την οποία θα αποκαλούμε «ιδιότητα της εξάντλησης» μπορεί να διατυπωθεί με σύγχρονους όρους ως εξής:

Έστω Μ ένα μέγεθος και ε ένα προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους και r ένας ρητός αριθμός τέτοιος ώστε $\frac{1}{2} \leq r < 1$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος Ν τέτοιος ώστε, $M(1-r)^n < \varepsilon$ για καθε θετικο ακέραιο $n > N$.
Δηλαδή η «ιδιότητα της εξάντλησης» είναι ισοδύναμη με την πρόταση

$$\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0 .$$

Θα αποδείξουμε εδώ τη παρακάτω πρόταση από τα *Στοιχεία του Ευκλείδη (Στοιχεία XII.2)* σε εφαρμογή της «Μεθόδου της Εξάντλησης»

Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων με διαμέτρους δ, Δ είναι *ίσος με το λόγο* $\frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι c, C με εμβαδά α, Α και διαμέτρους δ, Δ αντίστοιχα.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{\alpha}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι δεν ισχύουν οι δύο άλλες δυνατές περιπτώσεις, $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ και $\frac{\alpha}{A} < \frac{\delta^2}{\Delta^2}$.

Ας υποθέσουμε ότι $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$, τότε θα υπάρχει $\alpha^* < \alpha$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha^*}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}. \quad (1)$$

Έστω $\alpha - \alpha^* = \varepsilon > 0$ εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα με εμβαδά p_n, P_n στους κύκλους c, C . Διπλασιάζουμε τις πλευρές των κανονικών πολυγώνων, άρα θα αφαιρέσουμε από τα ενδιάμεσα εμβαδά περισσότερο από το μισό τους. Οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα της εξάντλησης, τα ενδιάμεσα εμβαδά με διαδοχικούς διπλασιασμούς των αριθμών των πλευρών μπορούν να ελαττωθούν μέχρι να είναι $\alpha - p_n < \varepsilon$.

Αφού όμως $\alpha - \alpha^* = \varepsilon > 0$, θα είναι και $p_n > \alpha^*$ (2).

Γνωρίζουμε όμως ότι $\frac{p_n}{P_n} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ και λόγω της (1) θα είναι $\frac{\alpha^*}{A} = \frac{p_n}{P_n}$, οπότε λόγω της (2) θα πρέπει $P_n > A$ άτοπο, γιατί το P_n είναι το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με εμβαδόν A.

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει η $\frac{\alpha}{A} < \frac{\delta^2}{\Delta^2}$, και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.

Η πρόταση πού αποδείξαμε προηγουμένως είναι το πρώτο θεώρημα για μεγέθη καμπυλόγραμμων σχημάτων, και δίνει επάξια στον Εύδοξο, το τίτλο του πατέρα του ολοκληρωτικού λογισμού.

1.2.2 Πέρασε περίπου ένας αιώνας από την εποχή πού έζησε ο Εύδοξος για να εμφανιστεί ο **Αρχιμήδης (287 – 212π.Χ.).**

Από το τεράστιο έργο του, θα αναφερθούμε εν συντομία σε εκείνα στα οποία καταδεικνύεται η τεράστια επίδραση που είχε το έργο του σε όλους τους μεταγενέστερους θεμελιωτές του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

1.2.2.α Στο έργο του ***Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου α' και β'*** ανάμεσα σε πολλά άλλα έχει ανακαλύψει και αποδείξει ότι:

1) *Πρόταση 13*[15]: Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

---

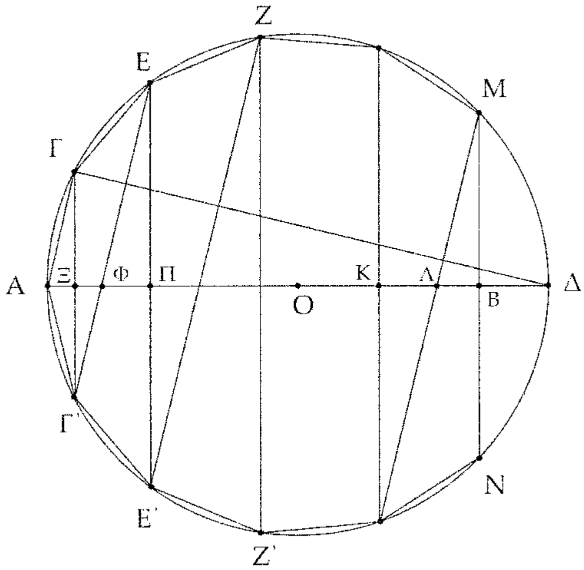
[15] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 48.

Παντός ορθού κυλίνδρου η επιφάνεια χωρίς τη βάση είναι ίση με κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι μέση ανάλογος της πλευράς του κυλίνδρου (του ύψους) και της διαμέτρου της βάσης του κυλίνδρου.

2) *Πρόταση 33*[16]: Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μεγίστου κύκλου αυτής. (Σχήμα 3)

Απόδειξη



Σχήμα 3

α) Θα χρειαστούμε το τύπο,

$$E = \pi \ell (R + r) \quad (*),$$

που δίνει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας, ενός κόλουρου κώνου ακτίνων R, r και γενέτειρας ℓ.

β) Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου ΜΑΝ κατά 360^0 περί την ΑΔ.

γ) Χωρίζουμε το τόξο ΜΑΝ σε 2n ίσα τόξα μήκους ℓ το καθένα (*Σχήμα 3*), και φέρουμε τις χορδές $\Gamma'\Gamma$, $E'E$,..., $M'M$, οι οποίες είναι κάθετες στη διάμετρο ΑΔ στα σημεία Ξ, Π,..., Β αντίστοιχα.

Θέτουμε $\Gamma\Xi = y_1$, $E\Pi = y_2, \ldots, MB = y_n$.

---

[16] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 114.

Το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που παράγεται προσεγγίζεται από το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών κόλουρων κώνων, που προκύπτουν από την περιστροφή της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας, η οποία λόγω της (*) θα είναι,

$$E = \pi(2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\ell \quad (1)$$

Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης ενώνει τις απέναντι διαγώνιες κορυφές όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Φ το σημείο τομής των ΞΠ, Γ'Ε, τότε από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΞ, ΦΞΓ', προκύπτει ότι $ΑΞ = ΞΦ = x_1$, όμοια $ΦΠ = x_2, \ldots, ΖΛ = x_{n-1}$, $ΒΛ = x_n$.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ είναι όμοιο με κάθε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα, ΑΓΞ, ΦΕΠ, . . . , ΛΒΜ, οπότε:

$$\frac{2x_1}{2y_1} = \frac{2x_2}{2y_2} = \frac{2x_3}{2y_3} = \cdots = \frac{2x_{n-1}}{2y_{n-1}} = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\ell}{ΓΔ},$$

άρα,

$$\frac{2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n}{2y_1 + 2y_2 + \cdots 2y_{n-1} + y_n} = \frac{\ell}{ΓΔ} = \frac{\ell}{ΓΔ}.$$

Αφού όμως $2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = ΑΒ$ η (1) γράφεται,

$$E = \pi \cdot ΓΔ \cdot ΑΒ$$

Αν τώρα το $n \to \infty$, τότε $\ell \to 0$ οπότε $E_{σφαίρας} = 4\pi R^2$.

Παρατήρηση: Επειδή ο αριθμός των πλευρών του παραπάνω πολυγώνου είναι 2n αν υποθέσουμε ότι το τόξο ΜΑΝ είναι α rad, τότε ισχύει:

$$2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n = 2R\sin\frac{\alpha}{n} + 2R\sin\frac{2\alpha}{n} + \cdots + 2R\sin\frac{(n-1)\alpha}{n} + \sin\alpha$$

άρα ο Αρχιμήδης μπορούσε να υπολογίσει το $\sum_{k=1}^{n} \sin k\omega$.

Για R=1 έχουμε,

$$\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\alpha}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\alpha}{n} = \frac{1-\cos\alpha}{2}\cot\frac{\alpha}{2n}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $\frac{\alpha}{n}$, τότε το πρώτο μέλος είναι ένα άθροισμα του Riemann για τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$ στο διάστημα $[0,\pi]$, και αφού $\lim_{n\to\infty}(1-\cos\alpha)\frac{\alpha}{2n}\cot\frac{\alpha}{2n} = 1 - \cos\alpha$ θα ισχύει,

$$\int_0^{\alpha} \sin x dx = 1 - \cos\alpha.$$

3) *Πρόταση 34*[17]: Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστω κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Κάθε σφαίρα είναι τετραπλάσια του κώνου πού έχει βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος ίσο με την ακτίνα της.

Πορίσματα:
Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας[18].

Αφού απεδείχθησαν αυτά είναι φανερό ότι κάθε κύλινδρος που έχει βάση το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας, είναι τα 3/2 του όγκου της σφαίρας, και η κυρτή επιφάνεια αυτού μαζί με τις βάσεις είναι επίσης τα 3/2 της επιφάνειας της σφαίρας.

Έτσι συνέκρινε το εμβαδόν και τον όγκο μίας σφαίρας και ενός κυλίνδρου ο οποίος ήταν περιγεγραμμένος γύρω από αυτήν. Το διάγραμμα *(Σχήμα 4)* του φημισμένου αυτού θεωρήματος, έχει χαραχθεί στον τάφο του που βρίσκεται στη Σικελία.

Σχήμα 4

4) *Προτάσεις 42, 43*[19]: Παντὸς τμήματος σφαίρας ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας.

---

[17] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 118.
[18] Στο ίδιο σελ. 124.
[19] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 150, 154.

Καὶ ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

Η επιφάνεια παντός τμήματος σφαίρας μικρότερου (ή μεγαλύτερου) ημισφαιρίου είναι ίση με το κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα πού άγεται από την κορυφή του τμήματος της σφαίρας μέχρι τη περιφέρεια του κύκλου, ο οποίος είναι βάση του σφαιρικού τμήματος.

Τα θεωρήματα για εμβαδά και όγκους τα απέδειξε με τη «Μέθοδο της εξάντλησης», χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ευθύγραμμα σχήματα για να «μαντέψει» το αποτέλεσμα και μετά, όπως ο Ευκλείδης με τη μέθοδο της άτοπο απαγωγής ολοκλήρωνε την απόδειξη.

1.2.2.β Στο έργο του ***Περί Κύκλου Μέτρησης***, σώζονται τρία μόνο θεωρήματα.

1) Πρόταση 1[20]*:* Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Κάθε κύκλος είναι ίσος προς ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο έχει τη μία κάθετο ίση με την ακτίνα του κύκλου, και την βάση του ίση με την περιφέρεια του κύκλου.

Είναι μάλλον απίθανο να ανακάλυψε ο Αρχιμήδης το Θεώρημα αυτό γιατι έχει προαπαιτούμενο τον τετραγωνισμό του κύκλου.

2) Πρόταση 2[21]*:* Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

Ο κύκλος προς το τετράγωνο της διαμέτρου έχει λόγο, ίσο 11 προς 14.

3) Πρόταση 3[22]*:* Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Παντός κύκλου η περιφέρεια είναι ολίγο μικρότερη του τρία και ένα έβδομο της διαμέτρου, και μεγαλύτερη του τρία και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής.

$$\text{Δηλαδή } 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

αποτέλεσμα που το θεώρησε επαρκές για τους υπολογισμούς του, και άφησε το δρόμο ανοικτό για όποιον ήθελε καλλίτερη προσέγγιση.

[20] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1970, σελ. 218.
[21] Στο ίδιο, σελ. 220.
[22] Στο ίδιο, σελ. 222.

1.2.2.γ Στο έργο του ***Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων*** βρήκε το εμβαδόν της έλλειψης, και μας έδειξε τον τρόπο για να υπολογίσουμε τον όγκο των σχημάτων τα οποία σχηματίζονται από την τομή επιπέδων καθέτων στον άξονα συμμετρίας επιφανειών, οι οποίες γεννιούνται από την περιστροφή μίας έλλειψης, μίας παραβολής ή ενός κλάδου μιας υπερβολής. Στις λύσεις χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εξάντλησης, με ένα τρόπο ο οποίος προσεγγίζει βαθύτερα τον σύγχρονο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ως εξής, εγγράφει και περιγράφει στο τμήμα που θέλει να υπολογίσει, στερεά σχήματα, «κυλίνδρους» ή «κόλουρους κώνους» τα οποία διαφέρουν όσο θέλει, οπότε κάνει τη διαφορά αυτή τόσο μικρή όσο χρειάζεται για να υπολογίσει το τμήμα που παρεμβάλλεται.

Πρόταση 5[23]: Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα τὰν διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω ἢ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.

Κάθε χωρίο περιεχόμενο υπό ελλείψεως προς πάντα κύκλο έχει τον ίδιο λόγο, τον οποίο έχει το ορθογώνιο με πλευρές τις διαμέτρους της έλλειψης προς το τετράγωνο της διαμέτρου του κύκλου.

Δηλαδή αν είναι 2α και 2β οι άξονες της έλλειψης, δ, η διάμετρος του κύκλου και Ε, Ε′ η επιφάνεια της έλλειψης και του κύκλου αντίστοιχα, τότε

$$\frac{E}{E'}=\frac{4\alpha\beta}{\delta^2}.$$

Με άλλα λόγια το εμβαδόν Ε της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $E=\pi\alpha\beta$.

Πρόταση 7[24]: Οξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Από το κέντρο δοθείσης έλλειψης φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο της, τότε μπορεί να βρεθεί κώνος ο οποίος έχει κορυφή το πέρας του ευθυγράμμου τμήματος και η έλλειψη να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του κώνου αυτού.

---

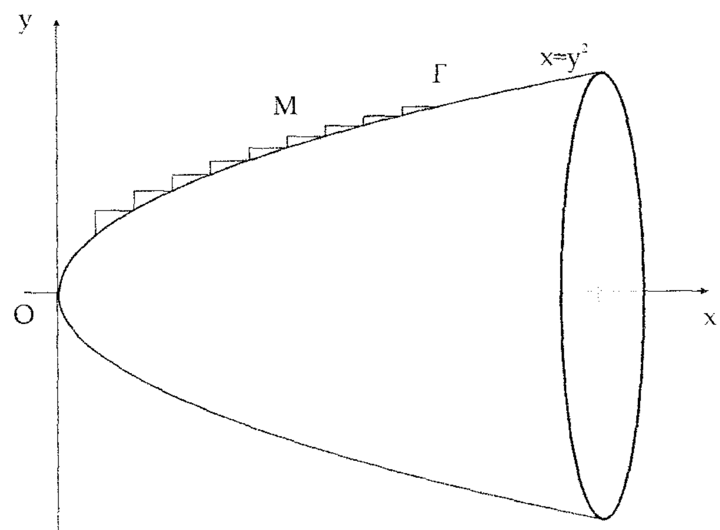
[23] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 256.
[24] Στο ίδιο, σελ. 266.

Από την πρόταση αυτή αντιλήφθηκε ότι κάποιες τουλάχιστον κωνικές τομές μπορεί να κατασκευαστούν στον ίδιο κώνο, πράγμα πού είχε χρησιμοποιήσει και ο Απολλώνιος.

3) Στις προτάσεις 19-22, ασχολείται με τον πραγματικό σκοπό της πραγματείας, δηλαδή με τη μελέτη του όγκου των τμημάτων (ορθών ή κεκλιμένων) των δύο κωνοειδών και των σφαιροειδών αντίστοιχα.

Επειδή η διαδικασία υπολογισμού τμημάτων κομμένων από «παραβολοειδή» μοιάζει πολύ με τη σύγχρονη ολοκλήρωση, θα περιγράψουμε την παρακάτω περίπτωση.

$$\text{Όγκος παραβολοειδούς} = \frac{1}{2}\text{Όγκος κυλίνδρου} \quad \textit{(Σχήμα 5)}$$



Σχήμα 5

α) Χωρίζει το ΟΒ σε n ίσα μέρη μήκους h, άρα $OB = nh$

β) Χωρίζει τον όγκο σε εσωτερικούς και εξωτερικούς κυλίνδρους κάθε ένας από τούς οποίους έχει όγκο $V_k = \pi k h^2$ με $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

γ) Ας συμβολίσουμε με V(I), V(J) το άθροισμα των όγκων των εσωτερικών και εξωτερικών κυλίνδρων αντίστοιχα και V τον όγκο του κυλίνδρου, τότε έχουμε

$$\frac{V(I)}{V} = \frac{\pi h^2 (1+2+\ldots+(n-1))}{\pi OB \cdot BG} = \frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2} \quad (1)$$

και

$$\frac{V(J)}{V}=\frac{\pi h^2(1+2+...+n)}{\pi OB\cdot B\Gamma}=\frac{n+1}{2n}>\frac{1}{2}\ (2)$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{V}$ τον όγκο του παραβολοειδούς και υποθέσουμε ότι $\mathcal{V}>\frac{1}{2}V$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε $\mathcal{V}>V(I)>\frac{1}{2}V$, άτοπο λόγω της (1). Αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{V}<\frac{1}{2}V$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε $\mathcal{V}<V(J)<\frac{1}{2}V$, άτοπο λόγω (2).

Οπότε τελικά $\mathcal{V}=\frac{1}{2}V$.

Με σύγχρονους όρους και συμβολισμούς θα λέγαμε.

Έστω η παραβολή $y^2=x$, $0\leq x\leq \alpha$.

Χωρίζουμε το διάστημα [0, α] σε n ίσα υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,n$, με $0=x_o<x_1<...<x_n=\alpha$, και θα έχουμε $y_i^2=x_i$,

$$V(I)=\pi\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2\right)h=\sum_{i=1}^{n-1}\pi x_i h \quad \text{και} \quad V(J)=\pi\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)h=\sum_{i=1}^{n}\pi x_i h$$

Τα οποία είναι το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα Riemann για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha \pi x dx=\frac{1}{2}V$, δηλαδή $\int_0^\alpha x dx=\frac{1}{2}\alpha^2$

Στο έργο του *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου* είδαμε ότι όγκος μίας σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου, η πρόταση αυτή σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, γενικεύεται από τον Αρχιμήδη και στην περίπτωση της περιστροφής ενός ελλειψοειδούς εγγεγραμμένου σε κύλινδρο.

Έτσι αν η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ περιστραφεί ως προς τον άξονα $y'y$, τότε ο όγκος του ελλειψοειδούς που προκύπτει είναι $V=\frac{4}{3}\pi\alpha^2\beta$

1.2.2.δ Στο έργο του ***Περί ελίκων*** γίνεται συστηματική μελέτη των καμπύλων (οι οποίες φαίνεται ότι είχαν απασχολήσει και το φίλο του τον Κόνωνα το Σάμιο), οι οποίες σε πολικές συντεταγμένες έχουν τη μορφή $\varrho=\alpha\theta$.

Δίνει επίσης τον ορισμό της έλικας ως εξής:

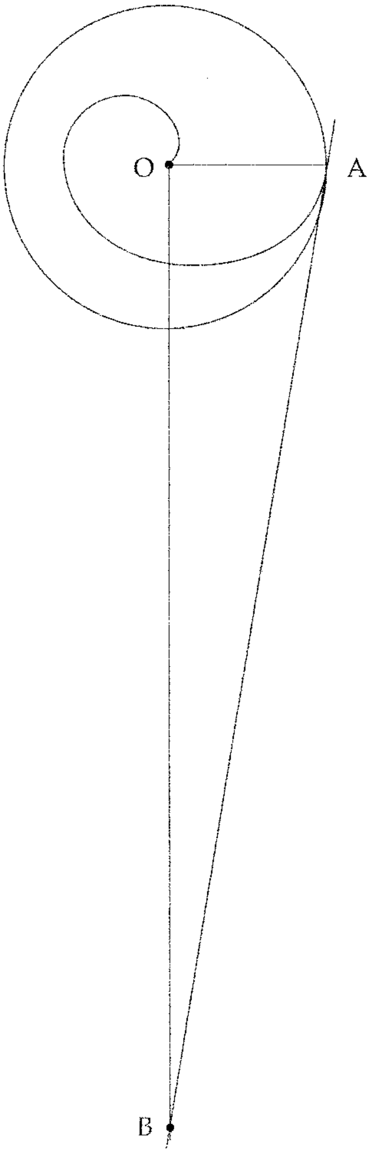
· εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφ-

ερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.
εάν ευθεία γραμμή ευρισκομένη σε επίπεδο, διατηρουμένου του ενός άκρου σταθερού, αφού περιστραφεί με την ίδια ταχύτητα φτάνει εκεί που ξεκίνησε, συγχρόνως δε ενώ περιφέρεται, η ευθεία γραμμή, κάποιο σημείο της κινείται ισοταχώς ξεκινώντας από το σταθερό άκρο, το σημείο θα γράψει επί του επιπέδου έλικα[25]

Ο Αρχιμήδης με την βοήθεια της έλικας μπόρεσε να προσδιορίσει την εφαπτομένη μιας άλλης καμπύλης εκτός του κύκλου, να ευθειοποιήσει όχι μόνο ολόκληρη την περιφέρεια αλλά και τόξο αυτής. Ανάμεσα στις είκοσι οκτώ προτάσεις που περιέχονται στο βιβλίο αυτό υπάρχουν προτάσεις που αναφέρονται σε εμβαδά.
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης αποδεικνύει ότι, το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την πρώτη πλήρη περιστροφή του ακτινικού διανύσματος είναι ίσο με το ένα τρίτο του εμβαδού του πρώτου κύκλου. Το εμβαδόν αυτό με σύγχρονους συμβολισμούς είναι $E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2 d\theta$, οπότε μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα το αποτέλεσμα.

---

[25] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 8.



1) Πρόταση 18[26]: Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ ὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

Εάν ευθεία γραμμή εφάπτεται στο πέρας Α της έλικας της γεγραμμένης κατά την πρώτη περιφορά, από δε του σημείο Ο, το οποίο είναι αρχή της έλικας αχθεί κάθετος στην αρχή της περιφοράς, η ευθεία αυτή θα τμήσει την εφαπτομένη σε σημείο Β, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ θα είναι ίσο με την περιφέρεια του πρώτου κύκλου (Σχήμα6).

Σχήμα 6

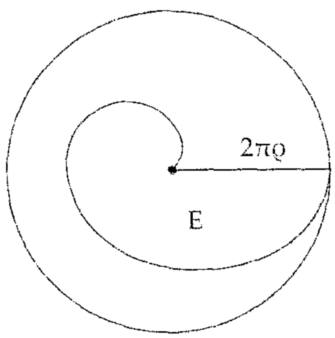
2) Πρόταση 24[27]: Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.
Το εμβαδόν της επιφανείας (Σχήμα 7) το οποίο περιορίζεται από την πρώτη περιφορά της έλικας και της αρχικής ευθείας κατά την αρχή της περιφοράς ισούται με το ένα τρίτο του πρώτου κύκλου.

---

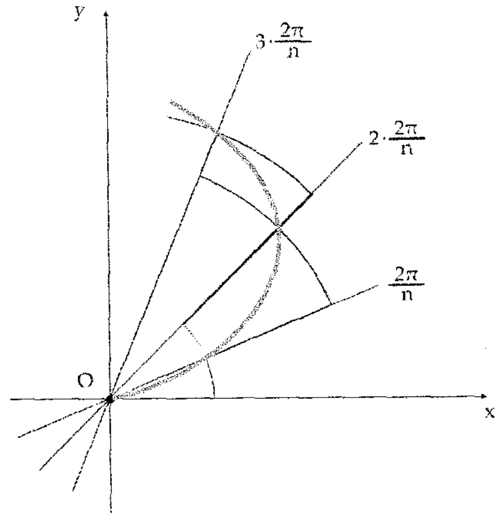
[26] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 54

[27] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 74

Απόδειξη



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Σε πολική μορφή η εξίσωση της έλικας είναι $\varrho = \theta$.

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα σε κύκλο ακτίνας ρ και γωνίας θ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\varrho^2\theta$.

Κάνει χρήση της γνωστής σχέσης $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Χωρίζει το εμβαδόν σε n χωρία (*Σχήμα 8*), και προσεγγίζει το ζητούμενο εμβαδόν με κυκλικούς τομείς εσωτερικά και εξωτερικά ως εξής:

Το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών τομέων $(E_{\varepsilon\sigma.})$ είναι,

$$E_{\varepsilon\sigma.} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(k\frac{2\pi}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}k^2\frac{4\pi^3}{n^2}\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}k^2 = \frac{4\pi^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

άρα $E_{\varepsilon\sigma.} = \frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1)$.

Όμοια το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών τομέων $(E_{\varepsilon\xi.})$ είναι,

$$E_{\varepsilon\xi.} = \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1).$$

Επομένως για το εμβαδόν Ε της έλικας θα ισχύει,

$$\frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leq E \leq \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1),$$

από την οποία ο Αρχιμήδης αντί να βρεί το όριο, όπως θα κάναμε εμείς σήμερα, χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής *(reduction ad absurdum)* και βρίσκει ότι $E = \frac{4}{3}\pi^3$.

1.2.2.ε Στο έργο του ***Επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων (Μηχανικά) α' και β'***

1) Πρόταση 4[28]*:* Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

Αν υπάρχουν δύο μεγέθη πού δεν έχουν το ίδιο κέντρο βάρους, το κέντρο βάρους του μεγέθους που σχηματίζουν, θα είναι στο μέσο της ευθείας η οποία ενώνει τα κέντρα βάρους των μεγεθών.

2) *Πρόταση 10*[29]*:* Το κέντρο βάρους του παραλληλογράμμου, είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.
3) *Πρόταση 14*[30]*:* Το κέντρο βάρους του τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.
4) *Στα προλαμβανόμενα*[31]
α)Το κέντρο βάρους του κύκλου είναι το κέντρο του.
β) Το κέντρο βάρους του κυλίνδρου είναι το μέσον του άξονος
γ) Το κέντρο βάρους του κώνου είναι ένα σημείο του άξονα, τέτοιο ώστε το τμήμα προς την κορυφή να είναι το τριπλάσιο του υπολοίπου.

1.2.2.στ Στο έργο του ***Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολή),***
υπάρχει ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της ***Μεθόδου της εξάντλησης.***

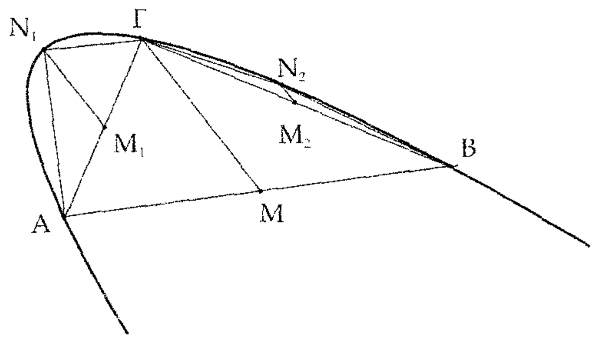
1) Πρόταση 24[32]*:* Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου

[28] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 112.
[29] Στο ίδιο σελ. 125.
[30] Στο ίδιο σελ. 137.
[31] Στο ίδιο σελ. 390.

κώνου τομᾶς ἐπί τριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Παν τμήμα περιεχόμενο υπό ευθείας και παραβολής είναι τα τέσσερα τρίτα του τριγώνου που έχει την ίδια βάση προς αυτό και ίσο ύψος.

Απόδειξη



Σχήμα 9

Ας είναι Ε το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής που θέλουμε να τετραγωνίσουμε και Μ το μέσο της ΑΒ (*Σχήμα 9*). Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς τον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Γ, υποθέτουμε Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
Από τα μέσα M_1, M_2 των πλευρών ΑΓ και ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς την ΜΓ που τέμνουν τη παραβολή στα σημεία N_1, N_2.
Αποδεικνύεται ότι

$$(AN_1\Gamma)+(BN_2\Gamma)=\frac{1}{4}\,T.$$

Διχοτομώντας τα νέα ευθύγραμμα τμήματα και φέρνοντας παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής θα τελικά προκύψει τελικά ότι:

$$E = T + \frac{1}{4}\,T + \frac{1}{4^2}\,T + \ldots + \frac{1}{4^n}\,T \;\cdots\; (1)$$

Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι το δεύτερο μέλος της (1) είναι ένα άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ οπότε

$$E = \frac{4}{3}\,T.$$

[32] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 260.

Ο Αρχιμήδης, όμως, δεν κατέχει την έννοια «άπειρο άθροισμα των όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου»
Ηξερε όμως :
2) Πρόταση 23[33]*:* Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

Εάν υπάρχωσι μεγέθη εις συνεχή φθίνουσα γεωμετρικήν πρόοδον με λόγον έν τέταρτον και όλα τα μεγέθη προστεθώσι και εις το άθροισμα προστεθή το έν τρίτον του μικρότερου όρου, το συνολικό άθροισμα θα είναι τα τέσσαρα τρίτα του μεγίστου όρου.

Ο Αρχιμήδης παίρνει ένα μερικό άθροισμα (άθροισμα των πέντε πρώτων όρων) και αποδεικνύει ότι διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ T κατά ένα πολύ μικρό μέγεθος $\left(\frac{1}{3}T_4\right)$. Ο Αρχιμήδης ξέρει ότι αν πάρει περισσότερους όρους, το νέο άθροισμα θα διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ T κατά ένα πολύ μικρότερο μέγεθος. Δηλαδή με σύγχρονους όρους: Για κάθε θετικό ακέραιο ε, υπάρχει ένα μερικό άθροισμα το οποίο διαφέρει από το $\frac{4}{3}$ T κατά ένα μέγεθος μικρότερο του ε. Το οποίο σημαίνει ότι αυτό το άπειρο άθροισμα ισούται με $\frac{4}{3}$ T.
Στο τελευταίο στάδιο της απόδειξης όπως το κάνει συχνά, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει με διπλή άτοπο απαγωγή , ότι το Ε δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο από το $\frac{4}{3}$ T.
Το εμβαδόν για παράδειγμα τμήματος της παραβολής $y=x^2$ και της ευθείας $y=1$ θα είναι $\frac{4}{3}$, οπότε το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, θα είναι $\frac{1}{3}$.
Δηλαδή με σύγχρονους όρους $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

1.2.2.ζ Στο έργο του ***Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων, προς τον Ερατοσθένη Έφοδος (Μέθοδος),*** απαντά στο ερώτημα: Με ποιες διαισθητικές μεθόδους έφτανε στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα, ώστε να εφαρμόζει μετά για την απόδειξη τη μέθοδο της εξάντλησης; Εκεί περιγράφει συστη-

[33] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 258.

ματικά πως ανακάλυψε με την μηχανική μέθοδο τα αποτελέσματα, και πως τα απέδειξε στη συνέχεια γεωμετρικά.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν[34]...

«Βλέπω σε σένα όπως έχω ήδη πει ένα σπουδαίο περί την φιλοσοφία και έχοντα τιμήσει τη μαθηματική έρευνα, έκρινα ορθό να σου εκθέσω σε αυτό το βιβλίο και να καθορίσω μέθοδο, η οποία θα σου δίνει τη δυνατότητα να εξετάζεις μερικές μαθηματικές προτάσεις δια της μηχανικής. Είμαι δε πεπεισμένος ότι αυτό δεν είναι λιγότερο χρήσιμο και από την απόδειξη των ίδιων των θεωρημάτων. Διότι μερικά από αυτά τα οποία απέδειξα προηγουμένως μηχανικά αποδείχθηκαν και γεωμετρικά, διότι είναι ευκολότερο να βρει κανείς δια της μηχανικής μεθόδου κάτι για τα προβλήματα αυτά και μετά να βρει την γεωμετρική απόδειξη, παρά να ερευνά χωρίς να ξέρει τίποτα προηγουμένως...»

Ἡμῖν δὲ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρείαν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

«Συμβαίνει σε μένα η εύρεση του εκδιδομένου θεωρήματος να έχει γίνει όπως τα προηγούμενα και ήθελα να περιγράψω την μέθοδο αυτή για την οποία έχω ομιλήσει και προηγουμένως, για να μη φανεί ότι λέμε κενά λόγια και ότι είμαι πεπεισμένος ότι δεν προσφέρω μικρότερη υπηρεσία στα μαθηματικά. Νομίζω ότι μερικοί από τους συγχρόνους μου και τους μεταγενέστερους θα βρουν και άλλα θεωρήματα με τον τρόπο αυτό.»

Ο Αρχιμήδης από τον πρόλογο του έργου του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολής)* είχε αρχίσει να υπαινίσσεται πως είχε συλλάβει τα κυριότερα αποτελέσματα γράφοντας:

[34] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 386.

Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται[35].

Αναγράψαντες λοιπόν του προβλήματος αυτού τας αποδείξεις τας αποστέλλομεν πρώτον μεν τας δια των μηχανικών μεθόδων, κατόπιν δε πως έγινε η απόδειξις δια των γεωμετρικών μεθόδων.

Από όλες τις εργασίες του του Αρχιμήδη, οι μόνες που κατά πάσα πιθανότητα ήταν γνωστές τον 6° αιώνα μ.Χ, την εποχή που έζησε ο Ευτόκιος, σχολιαστής των έργων του Αρχιμήδη ήταν το *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου* και το *Περί Κύκλου Μέτρησης*. Στη συνέχεια όλες οι γνωστές μεταφράσεις προέρχονται από ένα και μοναδικό χειρόγραφο το οποίο είχε αντιγραφεί από ένα πρωτότυπο στη Κωνσταντινούπολη τον 9° ή 10° αιώνα, μεταφράστηκε στα Λατινικά τον 13° αιώνα και τελικά χάθηκε το 16° αιώνα. Το έτος 1899 ο ιστοριοδήφης βυζαντινολόγος Αθανάσιος Παπαδόπουλος – Κεραμεύς (1856 – 1912) δημοσίευσε την ύπαρξη ενός παλίμψηστου χειρογράφου με μαθηματικό περιεχόμενο, σε μία βιβλιοθήκη στην Κωνσταντινούπολη. Ο I. L. Heiberg (1854 – 1928) Δανός φιλόλογος και κορυφαίος ερευνητής της ιστορίας των Αρχαίων Ελληνικών Επιστημών, προσπάθησε να μεταφέρει το χειρόγραφο στην Κοπεγχάγη. Επειδή όμως δεν τα κατάφερε μετέβη στην Κωνσταντινούπολη το 1906, μελέτησε όσο επέτρεπαν τα μέσα της εποχής το κείμενο και κατόπιν επιμελήθηκε τη νέα βελτιωμένη έκδοση των απάντων των έργων του Αρχιμήδη τα έτη 1910 – 1915.[36]

Στη πραγματεία αυτή όπως φαίνεται από τα κείμενα που παραθέσαμε παραπάνω αποκαλύπτει τη μέθοδο του, αντίθετα όπως πίστευε ο Wallis ότι προσπαθούσε να κρύψει το μυστικό των μεθόδων του.

Η *Μηχανική μέθοδος* του Αρχιμήδη στηρίζεται στο *νόμο των μοχλών*, σύμφωνα με τον οποίο ένα πεπερασμένο πλήθος μαζών $m_1, m_2, \cdots, m_k$, σε αποστάσεις $d_1, d_2, \cdots, d_k$ από το υπομόχλιο , στην μία πλευρά ενός αβαρούς μοχλού, ισορροπεί ένα σύστημα μαζών $m'_1, m'_2, \cdots, m'_k$ σε αποστάσεις $d'_1, d'_2, \cdots, d'_k$ από την άλλη.

Μέσω της *Μηχανικής μεθόδου* μας έδωσε ανάμεσα σε άλλα τα εξής αποτελέσματα:

---

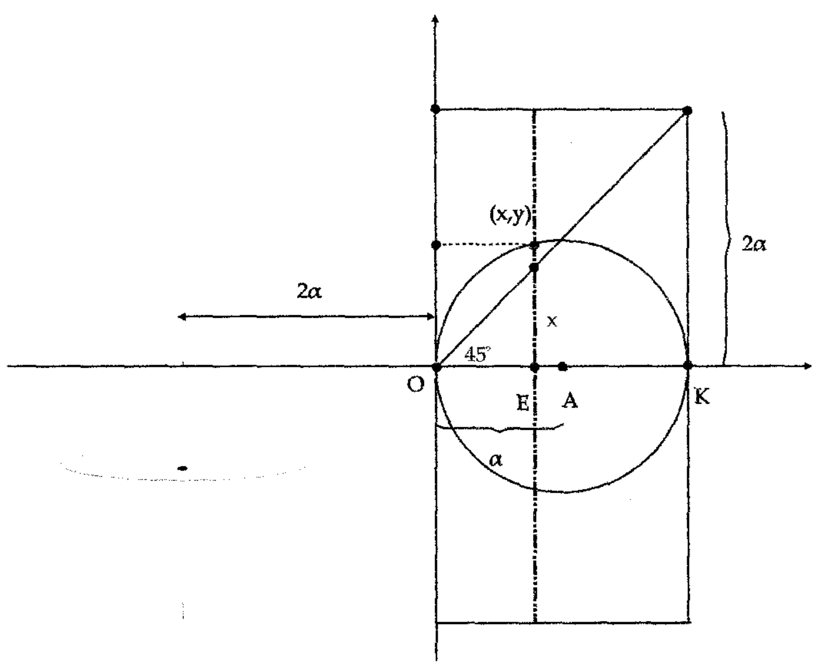
[35] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 220.

[36] Γ. Χριστιανίδης, *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σελ. 148.

1) *Πρόταση 2*[37]: Οτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

Κάθε σφαίρα είναι τετραπλάσια του κώνου που έχει βάση το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος την ακτίνα της σφαίρας. Ενώ ο κύλινδρος που έχει βάση το μέγιστο κύκλο της σφαίρας, και ύψος την διάμετρο της σφαίρας, είναι τα τρία δεύτερα της σφαίρας.

Θα κάνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική δομή της *Μηχανικής μεθόδου* σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων *(Σχήμα 10)*



Σχήμα 10

[37] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1973, σελ. 396.

Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με αρχή το Ο, κύκλο (Α, α) με εξίσωση $x^2+y^2=2\alpha x$ από την οποία προκύπτει ότι,

$$2\alpha\left(\pi x^2\right)+2\alpha\left(\pi y^2\right)=x\left[\pi(2\alpha)^2\right] \quad (1)$$

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως φαίνεται στο σχήμα με πλευρές 2α και 4α, σε απόσταση 2α τοποθετούμε δύο κύκλους με ακτίνες x και y. Θεωρούμε ένα επίπεδο E_x κάθετο στον άξονα των x το οποίο διέρχεται από το σημείο $E(x,0)$.

Η εξίσωση (1) παριστάνει τη μηχανική ιδέα της ισορροπίας του Αρχιμήδη, οπότε αν περιστρέψουμε το σχήμα οι κύκλοι ακτίνων x και y σε απόσταση 2α απο το υπομόχλιο Ο ισορροπούν τον κύκλο ακτίνας 2α με κέντρο το σημείο Ε.

Όταν το Ε διατρέχει το ΟΚ, οι δίσκοι ακτίνας x, y, 2α παράγουν κώνο, σφαίρα και κύλινδρο αντίστοιχα οπότε, μεταβαίνοντας από την ισορροπία ροπών των απειροστών τομών στην ισορροπία των ροπών των στερεών έχουμε,

$$2\alpha\left(V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}+V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}\right)=\alpha V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} \text{ ή}$$

$$V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}=\frac{1}{2}V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon}-V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}=\frac{4}{3}\pi\alpha^3.$$

Οπότε και $V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}=\frac{2}{3}V_{\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon}$ (Κάθε σφαίρα έχει όγκο ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του κυλίνδρου που μπορεί να χωρέσει)

2) ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων φαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου.[38]

Ο όγκος του κοινού μέρους δύο ορθών κυκλικών κυλίνδρων είναι τα 2/3 του κύβου, ο οποίος έχει πλευρά την κοινή διάμετρο των δύο κυλίνδρων.

Αυτό σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα είναι το κοινό μέρος των κυλίνδρων

[38] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β΄, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα *1973, σελ. 384.*

$$x^2+y^2=r^2 \text{ και } y^2+z^2=r^2,$$

του οποίου ο όγκος δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα,

$$V=8\int_{y=0}^{y=r}\int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} z\,dx\,dy=\frac{2}{3}(2r)^3.$$

1.2.2.η Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, οι λύσεις που πρότεινε ο Αρχιμήδης σε πολλά βασικά προβλήματα του Μαθηματικού Λογισμού μπορούν να ερμηνευτούν σαν υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\kappa x+\lambda x^2\right)dx.$$

Με την έννοια αυτή ο Αρχιμήδης δικαιούται την τιμή της ανακάλυψης του Ολοκληρωτικού λογισμού. Ενώ όμως η μελέτη των έργων του τον 17^o αιώνα αποτέλεσε τη βάση για την εντυπωσιακή ανάπτυξη του λογισμού και οι λύσεις του αποτελούν μνημεία μαθηματικής έκφρασης και υποδείγματα ακρίβειας και επινόησης, λείπουν ωστόσο τρία σημαντικά στοιχεία από την μεθοδολογία του.

(α) Ο «φόβος» του απείρου είναι καταφανής στις πιο πολλές αποδείξεις, η έννοια της διπλής ***reductio ad absurdum*** (άτοπο απαγωγής) αντικατέστησε την εισαγωγή του ορίου και «σήκωσε» το βάρος του τελικού βήματος της απόδειξης.

(β) Στα πιο πολλά προβλήματα (με λίγες εξαιρέσεις) η λύση βασίζονταν στα ειδικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου προβλήματος, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη λύσεις παρομοίων προβλημάτων. Η χρήση της γεωμετρικής άλγεβρας αποτέλεσε σημαντικό πρόβλημα για την δημιουργία μιας απλής σημειογραφίας, η οποία θα κωδικοποιούσε τους υπολογισμούς, παρόμοιων προβλημάτων. Πράγμα που είχε ως αποτέλεσμα την έλλειψη ενός γενικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων.

(γ) Η έλλειψη της αναγνώρισης έστω και «αμυδρά» της αντίστροφης σχέσης των προβλημάτων μεταξύ εμβαδού και εφαπτομένης, απέτρεψε την εισαγωγή της έννοιας του ρυθμού μεταβολής.

1.3 ΚΙΝΑ ΚΑΙ ΙΝΔΙΑ

Οι πρώτες πληροφορίες για τα μαθηματικά των Κινέζων ήρθαν στην Ευρώπη από τους ιεραποστόλους. Τα κινέζικα μαθηματικά όπως και τα Αιγυπτιακά παραθέτουν σωστούς προσεγγιστικούς τύπους για απλά ή και πολύπλοκα αποτελέσματα. Στο σημαντικό παλιό βιβλίο (αγνώστου συγ-

γραφέως και εποχής) *Τσιου – Τσανγκ σουάν – σου ή Εννέα Κεφάλαια για την Τέχνη των Μαθηματικών* στο Μέρος Ι αναφέρουν ορθούς τύπους για τα εμβαδά τριγώνων, τραπεζίων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Το εμβαδόν του κύκλου το βρίσκουν υπολογίζοντας τα τρία τέταρτα του τετραγώνου της διαμέτρου ή το ένα δωδέκατο του τετραγώνου της περιφέρειας $E = \frac{3}{4}d^2 = \frac{1}{12}C^2$, όπου d η διάμετρος και C η περιφέρεια του κύκλου.
Οι τύποι αυτοί είναι σωστοί αν θεωρήσουμε ότι το π έχει τιμή 3.[39]
Για τα τρίγωνα και τα τραπέζια χρησιμοποιούν τους ίδιους τύπους με μας, δίνονται όμως μη ακριβείς τύποι για τα εμβαδά ενός κυκλικού τομέα και ενός κυκλικού τμήματος, ενώ δίνουν σωστό τύπο για το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.
Στο Μέρος V δίνονται τύποι υπολογισμού των όγκων διαφόρων στερεών κατά προσέγγιση ή με ακρίβεια.
Από όλα τα διασωθέντα έργα γίνεται φανερό ότι οι Κινέζοι είχαν κλίση στην μελέτη των αριθμών, το μοναδικό πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκαν πολύ σοβαρά και ήδη π.Χ., είναι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Στον **Τσανγκ Χενγκ (78 – 139)** αποδίδεται η τιμή $\pi = 3{,}1622777 = \sqrt{10}$ και στο στρατηγό **Γουάν – Φαν (229 – 267)** η ανακάλυψη ότι μια περιφέρεια διαμέτρου 45 έχει μήκος 142, το οποίο δίνει $\pi = 3{,}155$ τιμή ακριβέστερη κατά τι της $\pi = \sqrt{10}$[40].
Την ίδια εποχή έζησε και ο μαθηματικός **Λίου Χούι (220 – 280)** ένας σημαντικός σχολιαστής των *Εννέα Κεφαλαίων*, στην παρουσίαση των οποίων συναντάμε προβλήματα που αναζητούν τύπους υπολογισμού του όγκου κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας, και κόλουρου κώνου. Αναφέρει[41] ένα ασυνήθιστο τύπο για τον όγκο τετραέδρου με κάθετες τις δύο απέναντι ακμές. Ο όγκος αυτός ισούται με το ένα έκτο του γινομένου των ακμών αυτών και της κοινής καθέτου τους. Για να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ακολούθησε το δρόμο που είχε ακολουθήσει ο Αρχιμήδης πέντε αιώνες πριν, και βρήκε την αρχιμήδειο τιμή 3,14 θεωρώντας πολύγωνο με 96 πλευρές και την τιμή 3,14159 θεωρώντας πολύγωνο με 3072 πλευρές.
Η Κινέζικη επιμονή στο π έδωσε δύο αιώνες αργότερα ένα εξέχοντα «τετραγωνιστή» τον αστρονόμο **Τσου Τσ΄ουνγκ Τσι (429 – 501)**, ο οποίος βρήκε ότι σε κύκλο διαμέτρου 10^8 (οκτάδα του Αρχιμήδη) είναι,

---

[39] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου στα ελληνικά, Ε.Μ.Ε., σελ. 207.
[40] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου στα ελληνικά, Ε.Μ.Ε., σελ. 214.
[41] Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 224.

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927,$$

από την οποία συμπέρανε την ακόμα ακριβέστερη τιμή $\pi = \frac{355}{113}$.

Το XI αιώνα ο αστρονόμος **Τσ· εν Χους** (1011 – 1075) αναφέρει το παρακάτω προσεγγιστικό τύπο για την ευθειοποίηση τόξου περιφέρειας.

$$\text{Τόξο} = \text{χορδή} + \frac{2(\text{βέλος})^2}{\text{διάμετρος}}$$

1.4 Η ΑΡΑΒΙΚΗ ΗΓΕΜΟΝΙΑ

Για ένα διάστημα περίπου εκατό χρόνων οι Άραβες πολεμούσαν είτε μεταξύ τους είτε με τους εχθρούς τους και έτσι μέχρι το 750 περίπου μ.Χ. είχαν υποτάξει τις Ινδίες, τη Περσία, τη Μεσοποταμία, τη Συρία, την Αίγυπτο τη Βόρειο Αφρική και ένα μεγάλο μέρος της Ισπανίας. Η περίοδος αυτή (650 – 750 μ. Χ.) ήταν ίσως η χειρότερη για την εξέλιξη των Μαθηματικών και αν στη συνέχεια το Ισλάμ δεν « αφυπνίζονταν » πολιτιστικά, θα είχαν χαθεί παρά πολλά από τις αρχαίες επιστήμες και τα μαθηματικά. Τη εποχή αυτή χάρη σε τρείς προστάτες της μάθησης, του **al-Mansur**, του **Haroun al-Raschid** και του **al-Mamun**, η Βαγδάτη θα γίνει μια νέα Αλεξάνδρεια στην οποία ο Αλ Μαμούν ίδρυσε το « Σπίτι της σοφίας » κάτι ανάλογο με το μουσείο της Αλεξάνδρειας. Ανάμεσα στους καθηγητές που συνέρευσαν στη Βαγδάτη ήταν και ένας σοφός μαθηματικός – αστρονόμος, **Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (780 – 850)**, ο οποίος έμελλε να γίνει τόσο γνωστός όσο και ο Ευκλείδης.[42]

Ο Thabit ibn-Qurra (836 – 901) του οποίου την διάνοια και τη μόρφωση είχε εκτιμήσει ο Αλ Χβαρίζμι, τελειοποίησε και συμπλήρωσε τις προτάσεις του Αρχιμήδη για το τετραγωνισμό της παραβολής, και τον υπολογισμό του όγκου των στερεών τα οποία γεννώνται εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα μιας παραβολής. Στη συνέχεια ένας ανιψιός του **ο Imbrahim Thabit ibn-Qurra (908 – 946)** βρήκε ένα νέο τρόπο για το τετραγωνισμό της παραβολής. [43]

Ο Ibn-Haitam (al-Hazen) (965 - 1040) άφησε ένα πλήθος μαθηματικών αστρονομικών και φιλοσοφικών έργων, και με οδηγό τον Ευκλείδη πέτυχε να υπολογίσει το άθροισμα $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots$ όχι μόνο για τις μέχρι τότε γνωστές τιμές 1, 2, 3 του εκθέτη αλλά και για $n = 4$.

---

[42] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 251.

[43] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 1, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 263.

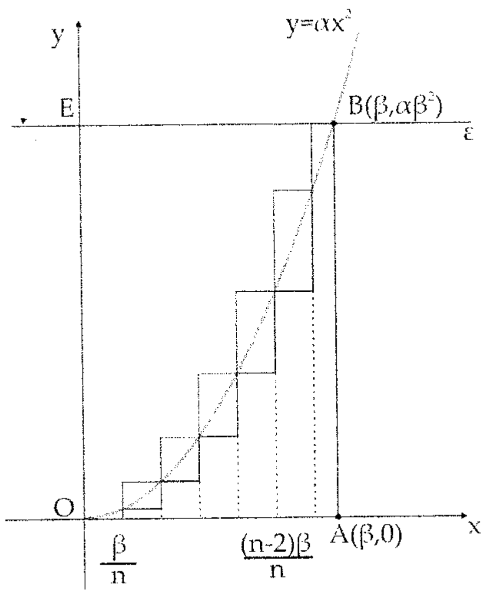
Η διαδικασία που ακολούθησε μπορεί να γενικευθεί μέσω του αναδρομικού τύπου

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} i^{k}\right),$$

ο οποίος αποτελεί το υπολογιστικό εργαλείο που έλειπε από τον Αρχιμήδη.

Μεταξύ των έργων που έγιναν γνωστά, εκείνο που ξεχωρίζει για τη πρωτοτυπία του είναι ο υπολογισμός του όγκου του στερεού που παράγεται κατά τη περιστροφή μιας παραβολής ως προς μία τεταγμένη της ή περί μία διάμετρο της (Ο Αρχιμήδης στο *Περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων*, το περιέστρεψε γύρω από τον άξονα του) την οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Έστω η παραβολή $y = \alpha x^2$ *(Σχήμα 11)*



Σχήμα 11

i. Διαμερίζει το ΟΑ σε n ίσα τμήματα με πλάτος $\dfrac{\beta}{n}$

ii. Με την περιστροφή εμφανίζονται «εσωτερικοί» και «εξωτερικοί» κύλινδροι.

iii. Οι εξωτερικοί κύλινδροι έχουν ακτίνα $R_k = \alpha\beta^2 - \alpha\left(\dfrac{k\beta}{n}\right)^2$ και όγκο

$$V_k = \pi\left[\alpha\beta^2 - \alpha\left(\frac{k\beta}{n}\right)^2\right]\frac{\beta}{n} = \pi\frac{\alpha^2\beta^5}{n^5}\left(n^2 - k^2\right)^2 \text{ με } k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

iv. Ο συνολικός όγκος των εξωτερικών κυλίνδρων είναι

$$V_{\varepsilon\xi}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi\alpha^2\beta^5}{n^5}\left(n^2-k^2\right)^2$$

$$=\pi\frac{\alpha^2\beta^5}{n^5}\left[\left(n^2-0\right)^2+\left(n^2-1^2\right)^2+\cdots+\left(n^2-(n-1)^2\right)^2\right]=\cdots$$

$$=\pi\frac{\alpha^2\beta^5}{n^5}\left[n.n^4-2n^2\left(1^2+2^2+\cdots(n-1)^2\right)+1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4\right]$$

$$=\pi\frac{\alpha^2\beta^5}{n^5}\left(\frac{8}{15}n^5-\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{30}n\right).$$

Οπότε για $n\to\infty$ θα είναι $V_{\varepsilon\xi}=\dfrac{8\pi\alpha^2\beta^5}{15}$

v. Όμοια ο συνολικός όγκος των εσωτερικών κυλίνδρων είναι

$$V_{\varepsilon\sigma}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi\alpha^2\beta^5}{n^5}\left(n^2-(k-1)^2\right)^2\to\frac{8\pi\alpha^2\beta^5}{15}$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι τα $\dfrac{8}{15}$ του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $\varrho=\alpha\beta^2$ και ύψος $h=\beta$.

Με σύγχρονους όρους θα γράφαμε,

$$V=\int_0^\beta\pi\left(\alpha\beta^2-y\right)^2dx=\cdots=\frac{8\pi\alpha^2\beta^5}{15}.$$

Ένας άλλος μαθηματικός **ο Al-Kaschi (1380 – 1429)** ευνοούμενος του πρίγκιπα Ούλουγκ Μπέγκ, εγγονού του Ταμερλάνου συμμετείχε στην ομάδα των σοφών που είχε συγκεντρωθεί στο αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης που είχε κτίσει ο Ούλουγκ Μπέγκ. Ο al-Kaschi εκτός από τη μεγάλη συνεισφορά του στη μελέτη των δεκαδικών κλασμάτων ήταν δικαιολογημένα υπερήφανος για την προσέγγιση του π, εξέφρασε το 2π στη μορφή 6,2831853071795865 την οποία ως τα τέλη του δέκατου έκτου αιώνα κανένας μαθηματικός, δεν μπόρεσε να πλησιάσει. Μελέτησε επίσης τις καμπύλες οι οποίες γεννώνται από τη προβολή της σκιάς ενός στύλου σε ένα γήπεδο, και με το κυβισμό του ελλειπτικού παραβολοειδούς.

Ο θάνατος του Al-Kaschi συμπίπτει με την απαρχή της πολιτιστικής κατάρρευσης της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας, η οποία ήταν πιο «ηχηρή» από την πολιτική της αποσύνθεση. Οι Άραβες ευτυχώς τουλάχιστον όσο αφορά τα μαθηματικά, παρέδωσαν στο λατινικό κόσμο περισσότερες γνώσεις από αυτές που παρέλαβαν. Εάν δε όλα τα επιτεύγματα των Αράβων είχαν γίνει έγκαιρα γνωστά στους Ευρωπαίους, τότε συγχρόνως με τη μελέτη των μεθόδων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών θα είχε επισπευτεί η διαμόρφωση του σημερινού απειροστικού λογισμού.

1.5 ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ

1.5.1 Ο Simon Stevin (1548 – 1620) όπως ο Kepler και ο Γαλιλαίος ήταν πρακτικοί μελετητές, και είχαν ανάγκη τις Αρχιμήδειες μεθόδους αλλά δεν ήθελαν να ασχοληθούν με τη λογική διαδικασία της μεθόδου της εξάντλησης. Ο Simon Stevin ήταν από τους πρώτους όπως και ο **Luca Valerio (1552 – 1618)** που πρότειναν αλλαγές οι οποίες δεν άφησαν αδιάφορους όπως θα δούμε παρακάτω τους Kepler, Cavalieri και Gregoire de Saint-Vincent.

Ο Luca Valerio στο βιβλίο του *De centro gravitates* (1604) βρίσκει κέντρα βάρους στερεών σωμάτων και στο *Quadratura parabola (1606)* ασχολείται με τετραγωνισμούς παραβολών. Ο Luca Valerio έδειξε πώς οι καμπύλες μπορούν να προσεγγισθούν από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ορθογώνια, των οποίων η διαφορά μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Το δεύτερο βιβλίο των *Mechanics* του Stevin αφιερώνεται στον υπολογισμό κέντρων βάρους. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί ο μηχανικός από τη Μπρυζ δείχνει πόσο προσεκτικά και συστηματικά προσπαθεί να τροποποιήσει τη δομή των μεθόδων του Αρχιμήδη. Η αρχή του Stevin μπορεί να περιγραφτεί περίπου ως εξής:

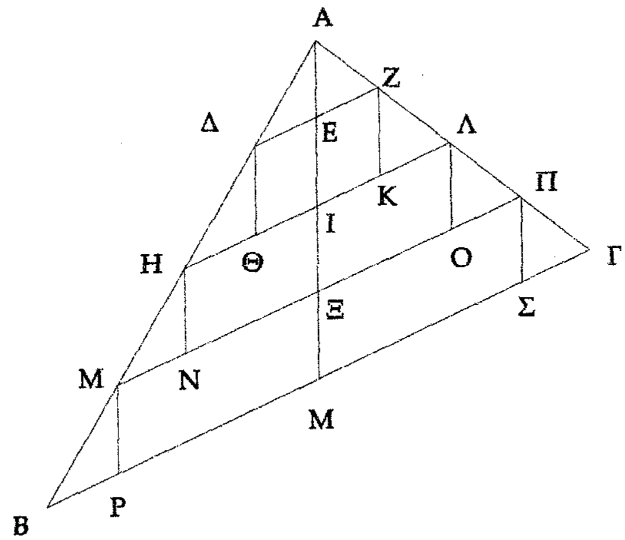
«Αν η διαφορά δύο μεγεθών μπορεί να δειχθεί ότι γίνεται μικρότερη από ένα καθορισμένο μέγεθος, τότε τα μεγέθη αυτά είναι ίσα».[44]

Θα δούμε πως εφαρμόζει ο Simon Stevin τη μέθοδο του στη πρόταση που ακολουθεί η οποία ειχε αποδειχθεί πρώτα από τον Αρχιμήδη.[45]

1.5.2 Πρόταση 1. *Το κέντρο βάρους του τριγώνου βρίσκεται πάνω στη διάμεσο μιας κορυφής του*[46] *(Σχήμα 12).*

---

[44] Margaret E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford σελ. 97.
[45] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου , Αθήνα 1973, σελ. 147.
[46] D. J. Struick, *A Sourse Book in Mathematics*, Harvard University, σελ. 189.



Σχήμα 12

Χρησιμοποιεί τη πρόταση[47]: *Το γεωμετρικό κέντρο κάθε ευθυγράμμου σχήματος είναι επίσης το κέντρο βάρους του. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα σχήμα έχει ένα κέντρο συμμετρίας, αυτό θα είναι και το κέντρο βάρους του.*

Στο τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ εγγράφουμε τα παραλληλόγραμμα ΔΖΚΘ, ΛΗΝΟ, ΠΜΡΣ με ίσα ύψη, των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες προς τη πλευρά ΒΓ και της διαμέσου ΑΜ που αντιστοιχεί σε αυτήν. Τα σημεία Ε, Ι, Ξ είναι προφανώς μέσα των αντιστοίχων τμημάτων ΔΖ, ΗΛ, ΜΠ. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το κέντρο βάρους των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων θα βρίσκεται πάνω στη γραμμή ΑΜ, επομένως και το κέντρο βάρους του σχήματος ΔΖΚΛΟΠΣΡΜΝΗΘ. Οπότε αν εγγράψουμε ένα άπειρο πλήθος τέτοιων παραλληλογράμμων το κέντρο βάρους του εγγεγραμμένου σχήματος θα βρίσκεται στη γραμμή ΑΜ.

Στη συνέχεια υποστηρίζει ότι: *Αν από τα μέσα των* ΑΕ, ΕΙ, ΙΞ *και* ΞΜ *φέρουμε παράλληλες προς την* ΒΓ *η διαφορά ανάμεσα στο τρίγωνο και στο εγγεγραμμένο σχήμα θα είναι η μισή από την διαφορά του προηγουμένου σχήματος.* Άρα αν συμβολίσουμε Δ την επιφάνεια του τριγώνου και E_n την επιφάνεια του εγγεγραμμένου σχήματος θα ισχύει

$$\Delta - E_n = \frac{\Delta}{n},$$

όπου $(n-1)$ το πλήθος των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων.

[47] D. J. Struick, *A Sourse Book in Mathematics*, Harvard University, σελ. 189.

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή για το άπειρο πλήθος των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων η διαφορά του εγγεγραμμένου σχήματος και του τριγώνου μπορεί να γίνει μικρότερη από ένα δοσμένο μέγεθος οσοδήποτε μικρό. Οπότε αν πάρουμε την ΑΜ να είναι η γραμμή του κέντρου βάρους, η διαφορά των φαινομενικών βαρών των δύο τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ μπορεί να γίνει μικρότερη από ένα δοσμένο μέγεθος οσοδήποτε μικρό συνεπώς:

i. Ανάμεσα σε κάθε διαφορά φαινομενικών βαρών μπορεί να τοποθετηθεί ένα βάρος μικρότερο από τη διαφορά αυτή.
ii. Ανάμεσα στην φαινομενικά βάρη των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ δεν μπορεί να τοποθετηθεί ένα βάρος μικρότερο από την διαφορά τους.
iii. Οπότε τα φαινομενικά βάρη των δύο τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ δεν διαφέρουν.

Επομένως η ΑΜ είναι η γραμμή του κέντρου βάρους, άρα το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ θα βρίσκεται στη γραμμή αυτή.

1.5.3 Η πιο μεγάλη δημιουργία στα Μαθηματικά μετά από την Ευκλείδεια γεωμετρία ήταν η συνάρτηση, η οποία έδωσε στους μαθηματικούς τη δυνατότητα να επεξεργαστούν σημαντικά προβλήματα της επιστήμης τον 17^{o} αιώνα, τα οποία μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τέσσερις κατηγορίες:

1η κατηγορία Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης ο οποίος περιγράφει την απόσταση που διανύει ένα σώμα ως προς τον χρόνο, να μπορούμε να βρίσκομε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αντιστρόφως, αν ξέρουμε την επιτάχυνση να μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την απόσταση που έχει διανύσει.

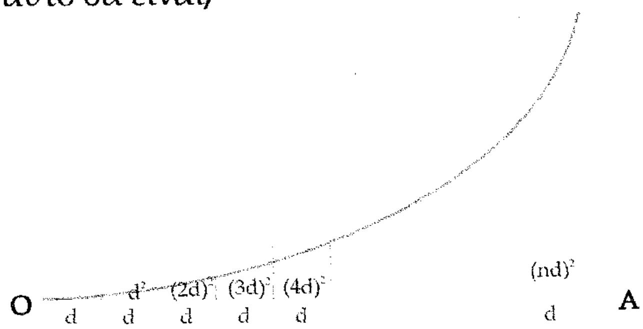
2η κατηγορία Η κατασκευή της εφαπτομένης μιας καμπύλης εκτός από καθαρά γεωμετρικό πρόβλημα, προκύπτει και από πολλές εφαρμογές όπως στην οπτική κ.α.

3η κατηγορία υπολογισμός ελαχίστων και μεγίστων, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός της «γωνίας βολής» για το μέγιστο βεληνεκές, την οποία ο Galileo είχε υπολογίσει ότι έπρεπε να είναι 45°. Η μελέτη επίσης της κίνησης των πλανητών συνεπάγεται προβλήματα προσδιορισμού της μέγιστης και ελάχιστης απόστασης ενός πλανήτη από τον ήλιο.

4η κατηγορία υπολογισμός μήκους καμπύλων (τροχιές πλανητών) επιφάνειες που ορίζονται από καμπύλες, όγκους στερεών κέντρα βάρους κ.λ.π.

Οι Αρχαίοι Έλληνες είχαν υπολογίσει με την «Μέθοδο της εξάντλησης» μερικές επιφάνειες και όγκους αλλά για τους λόγους που είπαμε στην σελίδα 27 δεν μπορούσαν να γενικευθούν. Οι τελευταίες δύο δεκαετίες του

$16^{ου}$ αιώνα και ο $17^{ος}$ έχουν να παρουσιάσουν μία δωδεκάδα περίπου Μαθηματικών οι οποίοι τροποποίησαν ριζικά τη μέθοδο αυτή με την επινόηση του λογισμού. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια που ορίζεται από την παραβολή $y = x^2$ όπως φαίνεται στο *(Σχήμα 13)*[48]. Σε αντίθεση με την μέθοδο της εξάντλησης κατά την οποία το είδος των ευθυγράμμων σχημάτων που χρησιμοποιούσαν για να προσεγγίσουν μια καμπύλη, εξαρτιόταν από το είδος της καμπύλης αυτής, οι μαθηματικοί του $17^{ου}$ αιώνα χρησιμοποίησαν ορθογώνια παραλληλόγραμμα για το σκοπό αυτό. Όσο το πλάτος h μικραίνει τόσο το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει καλλίτερα την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη. Αν όλα τα ορθογώνια έχουν το ίδιο πλάτος h τότε το άθροισμα αυτό θα είναι,



Σχήμα 13

$$S = d^3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) = d^3\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = (OA)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right),$$

αφού $(OA) = nd$.

Στη συνέχεια θεώρησαν ότι για $n \to \infty$ το άθροισμα $\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ μπορεί να παραληφθεί, χωρίς όμως να μπορούν να το επαληθεύσουν. Η έννοια όμως του ορίου δεν είχε ακόμη παρουσιαστεί ή ήταν απλώς «διαισθητικά» αντιληπτή. Η προηγούμενη διαδικασία φαίνεται ότι είναι ακριβώς η ίδια με την μέθοδο της εξάντλησης, υπάρχει ωστόσο μία ουσιαστική μεταβολή στο τελικό στάδιο της απόδειξης. Σε αντίθεση με την άτοπο απαγωγή των αρχαίων Ελλήνων εδώ σαν να χρησιμοποιείται η έννοια του ορίου αφού ο αριθμός των ορθογωνίων γίνεται άπειρος.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αυτή ο Euler όπως θα δούμε παρακάτω απέδειξε με σύγχρονους όρους

---

[48] M.Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York 1972, σελ. 351.

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα κίνητρα για την εξέλιξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα είχαν φιλοσοφικό υπόβαθρο με αποτέλεσμα την αναζήτηση της τελειότητας και την αυστηρότητα της απόδειξης, σε αντίθεση με τον 16ο και 17ο αιώνα ο οποίος αναζητούσε τη γνώση για την επερχόμενη τεχνολογική επανάσταση. Η μαθηματική αυστηρότητα είχε θυσιαστεί στο βωμό της σκοπιμότητας, ο Kepler για παράδειγμα χρησιμοποίησε ελεύθερα τα απειροστά για να υπολογίσει όγκους εκ περιστροφής. Δεν είναι τυχαίο επίσης ότι πολλά Μαθηματικά επιτεύγματα προήλθαν από την μελέτη προβλημάτων της αστρονομίας της φυσικής κ.λ.π. Επίσης οι αρχαίοι Έλληνες επηρεασμένοι μάλλον από τα παράδοξα του Ζήνωνα είχαν εξοβελίσει τις άπειρες διαδικασίες και κάθε έννοια του ορίου στις λύσεις που πρότειναν. (Ουσιαστικά όμως ο τρόπος που έφταναν στο αποτέλεσμα είχε συστατικό στοιχείο την έννοια του απείρου). Από την άλλη πλευρά η καθυστερημένη μετάφραση του έργου του Αρχιμήδη έδωσε την ευχέρεια να αναπτυχθούν πιο ελεύθερες αντιλήψεις για τις άπειρες διαδικασίες οι οποίες προετοίμασαν το έδαφος για τους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.

1.5.4 Ο Galileo Galilei (1564 – 1642) σε ηλικία είκοσι χρονών έλαβε γνώση των Στοιχείων του Ευκλείδη και εγκατέλειψε τις σπουδές της Ιατρικής. Η είσοδος του στη επιστημονική κοινότητα έγινε με τις έρευνες για τα κέντρα βάρους, στη προσπάθεια του να τελειοποιήσει εκείνες που είχε κάνει ο Frederico Commadino για τις στερεομετρικές μελέτες του Αρχιμήδη.
Φαίνεται ότι αυτό ήταν μάλλον ανάγκη της εποχής, γιατί και ο **Luca Valerio (1552 – 1618)** αφιέρωσε δύο σημαντικά έργα του στο θέμα αυτό. Εφάρμοσε τις μεθόδους του Αρχιμήδη στο *De centro graviatis solidorum Libri tres (Roma 1604)* για τον προσδιορισμό κέντρων βάρους και στο *Quadratura parabolae per simplex falsum (Roma 1606)*[49] για τον υπολογισμό όγκων στερεών σωμάτων. Όταν είδε τις εργασίες αυτές ο Γαλιλαίος αποφάσισε να μην εκδοθεί το δικό του, και μόνο στο τέλος της ζωής του το δημοσίευσε σαν παράρτημα στο έργο του *Dialogi sopra due nuove scienze (Διάλογοι περί δύο νέων επιστημών)*. Η μελέτη των έργων του Αρχιμήδη έπαιξαν σημαντικό ρόλο στις μελέτες του περί των «αδιαιρέτων» οι οποίες είχαν αντικείμενο τη σύσταση της ύλης και αποτέλεσαν περιεχόμενο ενός έργου για το οποίο είχε συχνή αλληλογραφία με το διάσημο μαθητή του Bonaventura Cavalieri.

---

[49] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 2, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 165.

Πιο σημαντική ήταν η συνεισφορά του Γαλιλαίου στα μαθηματικά με τις διάσημες μελέτες του, *Τα δύο βασικά συστήματα(1632)*, *Δύο Νέες Επιστήμες(1638)* στις οποίες μέσω των διαλόγων του Salviati, του Sagredo και του Simplicio, μίλησε για τις έννοιες των απειροστών υψηλότερης τάξης, και για τα απείρως μικρά. Από το άπειρο της γεωμετρίας ο Salviati οδήγησε τον Simplicio στο άπειρο της αριθμητικής, και μπροστά στη βασική ιδιότητα του απειροσυνόλου (ότι ένα μέρος του συνόλου μπορεί να ισούται με όλο το σύνολο) δυστυχώς όμως δεν κατέληξε στην πρόταση αυτή.[50]

1.5.5 Ο Johan Kepler (1571 – 1630) ήταν από τους πρώτους μαθηματικούς του 17ου έβδομου αιώνα που εγκατέλειψε τη φορμαλιστική δομή των αποδείξεων του Αρχιμήδη και προσπάθησε να παρουσιάσει τη χρήση απειροστών στον υπολογισμό όγκων και επιφανειών. Σε πολλά από τα αστρονομικά του προβλήματα με τα οποία ήρθε αντιμέτωπος χρειάζονταν η θεωρία των τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων η οποία φυσικά δεν ήταν διαθέσιμος, έτσι αναγκαστικά κατέφυγε στα αριθμητικά αθροίσματα. Ένα τέτοιο πρόβλημα εμφανίστηκε στη θεωρία του μαγνητισμού των πλανητών και στη προσπάθεια του να καθορίσει τη σχέση μεταξύ των ελκτικών και απωθητικών δυνάμεων, συμπέρανε ότι πρέπει να διαιρέσει το τόξο σε άπειρα πολύ μικρά ίσα κομμάτια και να υπολογίσει το άθροισμα των ημιτόνων (ή των χορδών) για όλα τα τόξα. Έτσι ουσιαστικά έφθασε στο ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 1 - \cos\alpha.$$

Στο βιβλίο του, *Astronomia Nova (1609)* ανακοίνωσε τους δύο νόμους του για την αστρονομία:

- Οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές με τον ήλιο στη μια εστία.
- Το ακτινικό διάνυσμα που ενώνει ένα πλανήτη με τον ήλιο διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

Στη προσπάθεια να υπολογίσει τέτοια εμβαδά θεώρησε ότι η επιφάνεια αποτελείται από τρίγωνα απείρως μικρά, τα οποία έχουν την μια κορυφή τους στον ήλιο και τις άλλες δύο πάνω στην τροχιά σε απόσταση απείρως μικρή μεταξύ τους. Έτσι έκανε μία «ατελή» μορφή ολοκλήρωσης όπως ο Oresme.

Αυτό αποτελεί και την ουσία της μεθόδου του Kepler, ότι δηλαδή οι επιφάνειες και οι όγκοι θεωρούνται σαν ένα άπειρο άθροισμα απειροελάχι-

---

[50] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 361.

στων στοιχείων της ίδιας διάστασης. Έβλεπε τη σφαίρα για παράδειγμα ότι αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος πυραμίδων, κάθε μία από τις οποίες είχε την κορυφή της στο κέντρο την βάση της πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της, οπότε εύκολα συμπέρανε ότι ο όγκος της σφαίρας είναι $V=\frac{1}{3}E_\beta \varrho=\frac{4}{3}\pi\varrho^3$, όπου $E_\beta=4\pi\varrho^2$ το άθροισμα των βάσεων των άπειρων πυραμίδων το οποίο ισούται με την επιφάνεια της σφαίρας.

Με παρόμοιο τρόπο ο Kepler υπολόγισε το εμβαδόν του κύκλου, παρατήρησε ότι τα άπειρα τρίγωνα έχουν ύψη ίσα με την ακτίνα του r κύκλου, και αν ονομάσομε με $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots$ τις βάσεις των τριγώνων τότε το εμβαδόν E του κύκλου θα είναι ίσιο με $E=\frac{1}{2}r(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n+\ldots)=\frac{1}{2}rK$, όπου K είναι η περιφέρεια του κύκλου[51]. Υπολόγισε επίσης το εμβαδόν της έλλειψης και βρήκε ότι είναι παβ όπου α και β είναι τα μήκη των αξόνων της, ο οποίος είναι βέβαια σωστός. Το 1612 την εποχή που έμενε στο Linz της Αυστρίας ήταν χρονιά με πολύ καλή παραγωγή κρασιού, και άρχισε και για λόγους βιοποριστικούς να ενδιαφέρεται για τους τρόπους ογκομέτρησης των δοχείων κρασιού. Θεώρησε τα στερεά ότι αποτελούνται από απείρως πολλά απειροστά στοιχεία, συνέχισε όπως έκανε με τα εμβαδά και με ένα «διαισθητικό» απειροστικό συλλογισμό, απέδειξε ότι τα βαρέλια που χρησιμοποιούσαν στην Αυστρία είχαν το πιο οικονομικό σχήμα. Ο Kepler συγκέντρωσε όλες τις ογκομετρικές του διαδικασίες σε ένα βιβλίο με τίτλο *Nova sereometria doliorum (Μέτρηση του όγκου βαρελιών)* το οποίο κυκλοφόρησε το 1615 και περιείχε πάνω από ενενήντα υπολογισμούς όγκων στερεών εκ περιστροφής. Στην αρχή το βιβλίο πέρασε σχεδόν απαρατήρητο, αλλά το 1635 οι ιδέες του Kepler «συστηματικοποιήθηκαν» σε ένα διάσημο βιβλίο ενός μαθητή του Γαλιλαίου του Bonaventura Cavalieri.

1.5.6 Ο Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) στο εργο του με τίτλο *Geometria indivisibilibus Continuorum nova quadam ratione promota (Γεωμετρία αδιαιρέτων)* διατυπώνει την παρακάτω αρχή (Θεωρήματα)[52]:

α) Αν δύο έχω δύο στερεά στα οποία οι τομές από μία οικογένεια παραλλήλων επιπέδων που τα τέμνουν έχουν το ίδιο εμβαδόν, τότε τα στερεά έχουν τον ίδιο όγκο.

β) Αν έχω δύο επιφάνειες στις οποίες ευθείες παράλληλες ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τότε οι επιφάνειες έχουν το ίδιο εμβαδόν.

---

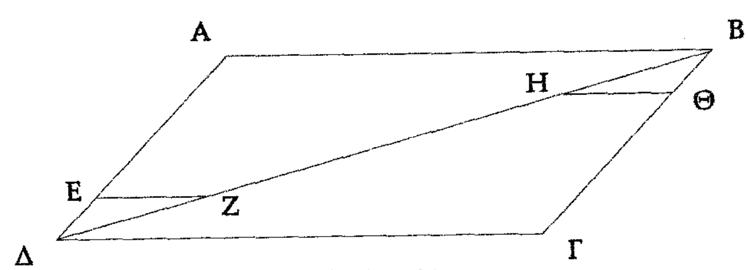
[51] C. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons 1968, σελ.356

[52] D. J. Struick, *A Sourse Book in Mathematics*, Harvard University, σελ. 210.

Το έργο αποτελείται από επτά βιβλία, στο τέταρτο βιβλίο πέτυχε τον τετραγωνισμό όλων των παραβολών και έφτασε σε ένα αποτέλεσμα το οποίο με σύγχρονους όρους διατυπώνεται ως εξής

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1^n+2^n+\ldots+r^n}{r^{n+1}}=\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

Η ιδέα στην οποία στηρίζεται το βιβλίο προκύπτει από τα όσα υπονοούν τα έργα των Oresme, Kepler και Γαλιλαίου. Ισχυρίζεται ότι ένα εμβαδόν αποτελείται από ευθείες ή « αδιαίρετα », και ένας όγκος από εμβαδά που είναι «αδιαίρετα». Οπότε τα «αδιαίρετα» είναι στοιχεία μιας δοσμένης διάστασης, τα οποία με κίνηση δημιουργούν σχήματα της αμέσως επόμενης διάστασης. Έτσι ένα κινούμενο σημείο γεννά μία γραμμή, μία κινούμενη γραμμή (παράλληλα σε μία σταθερή γραμμή) γεννά ένα επίπεδο σχήμα και ένα κινούμενο επίπεδο σχήμα γεννά ένα στερεό. Η μέθοδος του Cavalieri στηρίζεται στη σύγκριση των αντιστοίχων αδιαιρέτων δύο σχημάτων (στερεών) (*Σχήμα 14*). Έτσι για να αποδείξει ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι δύο φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ή του ΒΓΔ θεωρεί ότι, αφού είναι ΑΒ = ΔΓ τότε για κάθε $EZ \parallel AB$ θα υπάρχει $\Theta H \parallel \Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $EZ = \Theta H$. Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ αποτελούνται από ίδιο πλήθος ίσων γραμμών άρα είναι ισεμβαδικά.



Σχήμα 14

Αυτό όμως ήταν πολύ ασαφές (ο Cavalieri δέχθηκε σφοδρές επιθέσεις από τους συγχρόνους του για το θέμα αυτό), διότι δεν ήταν πάντα καθαρό ποιες αδιαίρετες μπορούσαν να αντιστοιχηθούν.

Η μέθοδος ωστόσο του Cavalieri διαφέρει από εκείνης του Kepler σε δύο βασικά σημεία.[53]

Πρώτον: Ο Kepler θεωρούσε ότι κάθε σχήμα ή στερεό μπορούσε να αναλυθεί σε άπειρα σχήματα, των οποίων το άθροισμα των εμβαδών και των όγκων με ένα «διαισθητικό» τρόπο έδινε το εμβαδόν και τον όγκο του δο-

[53] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ.104

σμένου σχήματος. Αντιθέτως ο Cavalieri καθόρισε μία – προς – μία αντιστοιχία μεταξύ των αδιαιρέτων στοιχείων των δύο σχημάτων και αν ο λόγος των αντιστοίχων αδιαιρέτων ήταν σταθερός, τότε συμπέραινε ότι ισχύει το ίδιο και για τα δύο σχήματα. Οπότε αφού το ένα είχε γνωστό μέγεθος μπορούσε να υπολογίσει το άλλο. Αν έχουμε για παράδειγμα δύο τριγωνικές πυραμίδες με ίσες βάσεις και ίσα ύψη τότε κάθε επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις σχηματίζει, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, ίσες τριγωνικές τομές στις δύο πυραμίδες. Οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος του Cavalieri οι δύο πυραμίδες θα έχουν ίσους όγκους.

Δεύτερον: Ο Kepler θεωρούσε ότι κάθε σχήμα αποτελείται από αδιαίρετα της ίδιας διάστασης σε αντίθεση με τον Cavalieri, ο οποίος θεωρούσε ότι αποτελείται από αδιαίρετα της προηγούμενης διάστασης.
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία που ακολουθούσε ο Cavalieri είχε κάτι από το πνεύμα της «Μεθόδου» του Αρχιμήδη, η οποία πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν ήταν γνωστή εκείνη την εποχή.

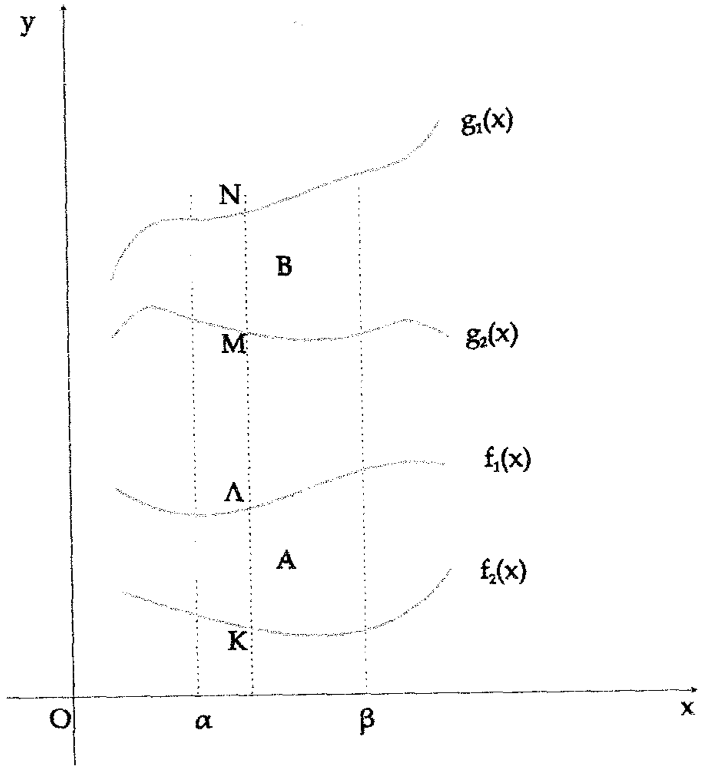
Οι αρχές του Cavalieri είχαν ανακαλυφθεί από τον Αρχιμήδη όπως φαίνεται στο πρώτο Λήμμα της εργασίας *Περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων*.

Εἴ κα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα ἤ πάντα ἤ τινα αὐτῶν ἐν λόγοιςὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντιπάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται[54].

Αν υπάρχουν μεγέθη οποιουδήποτε πλήθους και άλλα μεγέθη του ίδιου πλήθους και ανά δύο μεγέθη της μιας σειράς έχουν τον ίδιο λόγο τον οποίο έχουν αντιστοίχως ανά δύο μεγέθη της άλλης σειράς και ληφθούν προς τα μεγέθη της πρώτης σειράς ή προς όλα ή προς μερικά άλλα μεγέθη σε τυχαίους λόγους, επίσης δε και προς τα μεγέθη της δεύτέρης σειράς ή προς όλα ή προς μερικά άλλα μεγέθη στους αυτούς λόγους αντιστοίχα, το άθροισμα των μεγεθών της πρώτης σειράς προς το άθροισμα των ληφθέντων αντιστοιχα, θα έχει τον ίδιο λόγο, τον οποίο έχει το άθροισμα των μεγεθών της δεύτερης σειράς προς το άθροισμα των ληφθέντων προς αυτήν αντίστοιχα

Σήμερα θα παρουσιάζαμε την ιδέα του Cavalieri ως εξής *(Σχήμα 15)*

[54] Ε. Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Α', Μέρος Β', Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου, Αθήνα 1970, σελ. 244.



Σχήμα 15

Αν $f_1(x)-f_2(x)=g_1(x)-g_2(x)\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y'y αποκόπτει ίσα «αδιαίρετα ΚΛ = ΜΝ» στις δύο επιφάνειες οπότε,

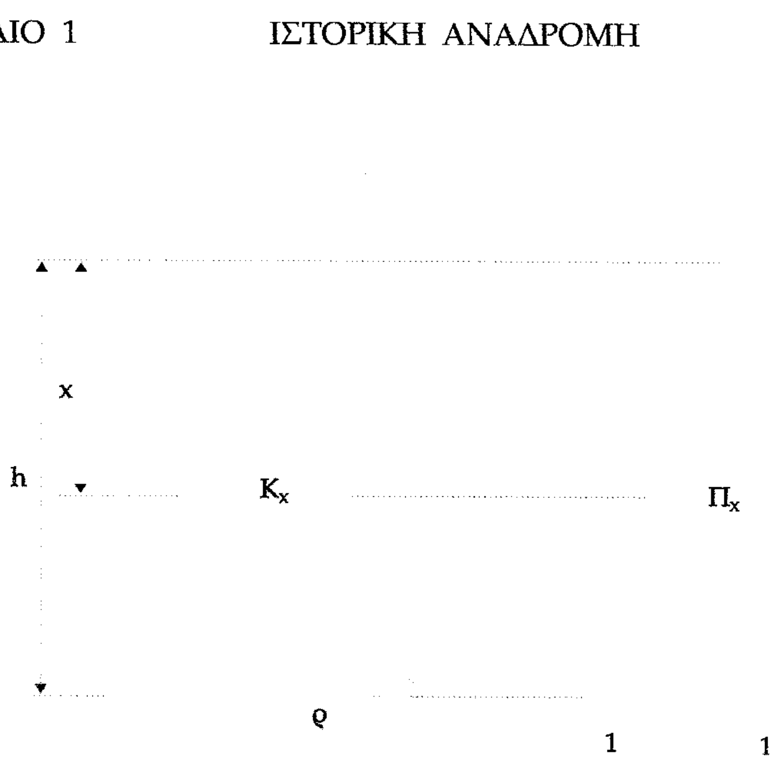
$$A=\int_\alpha^\beta (f_1(x)-f_2(x))dx=B=\int_\alpha^\beta (g_1(x)-g_2(x))dx.$$

Η γενική προσέγγιση και η αληθοφάνεια της μεθόδου φαίνεται σε μία πρόταση την οποία συναντάμε σε πολλά βιβλία γεωμετρίας και αναφέρεται ως το Θεώρημα του Cavalieri:

«Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη και οι τομές οι οποίες σχηματίζονται από παράλληλα επίπεδα προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές, σχηματίζουν ένα δοσμένο λόγο, τότε οι όγκοι των δύο στερεών έχουν τον ίδιο λόγο.» [55]

Ας δούμε με βάση το προηγούμενο θεώρημα πως θα υπολόγιζε ο Cavalieri *(Σχήμα 16)* τον όγκο ενός κώνου (Κ) με ακτίνα βάσης ρ και ύψος h.

[55] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ.104



Σχήμα 16

i. Τον συγκρίνει με μία τετραγωνική πυραμίδα (Π) με ύψος h και βάση τετράγωνο πλευράς $\alpha = 1$.
ii. Έστω K_x και Π_x οι τομές από ένα επίπεδο παράλληλο προς στις βάσεις σε απόσταση h-x από αυτές *(Σχήμα 16)*, τότε εύκολα προκύπτει ότι $\varrho_x = \dfrac{\varrho x}{h}$ και $\alpha_x = \dfrac{x}{h}$ άρα οι τομές έχουν εμβαδά, $(K_x) = \dfrac{\pi\varrho^2 x^2}{h^2}$ και $(\Pi_x) = \dfrac{x^2}{h^2}$ αντίστοιχα, δηλαδή $(K_x) = \pi\varrho^2 (\Pi_x)$.
Άρα σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri θα είναι και $(K) = \pi\varrho^2 (\Pi) = \pi\varrho^2 \dfrac{h}{3}$, όπου (K), (Π) οι όγκοι του κώνου και της πυραμίδας αντίστοιχα.

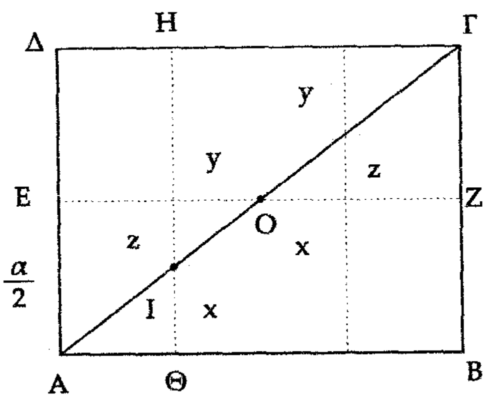
Για τη σύγκριση δύο σχημάτων ή στερεών εισάγει το συμβολισμό *as omnes lineae (o.l.) = all lines (a.l,* για το άθροισμα των αδιαιρέτων τους και μία τεχνική για τον υπολογισμό του «αθροίσματος των δυνάμεων των γραμμών» η οποία χωρίς αυστηρή απόδειξη τον οδήγησε στο σύγχρονο τύπο,

$$\int_0^\alpha x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}. \quad (2)$$

Ο Cavalieri απέδειξε τη σχέση αυτή πρώτα για n = 2 κάτι το οποίο ήταν γνωστό και στον Αρχιμήδη και μετά για n = 3, 4, …,9.

Ο τρόπος υπολογισμού των $\sum_{A}^{B} x$, $\sum_{A}^{B} x^2$ κ.λ.π. με τους οποίους κατέληξε στη σχέση (1) έχει ως εξής[56].

Ο Cavalieri, χώρισε το τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α *(Σχήμα 17)* σε δύο ίσα τρίγωνα με τη διαγώνιο του ΑΓ.



Σχήμα 17

Φέρει μία τυχαία τομή ΗΘ και έστω $ΘΙ = x$ και $ΗΙ = y$ με $x + y = \alpha$, τότε με $\sum_{A}^{B} x$ συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ οπότε,

$\sum_{A}^{B} \alpha = \sum_{A}^{B} (x+y) = \sum_{A}^{B} x + \sum_{A}^{B} y = 2\sum_{A}^{B} x$, αφού λόγω συμμετρίας θα είναι $\sum_{A}^{B} x = \sum_{A}^{B} y$.

Άρα $\sum_{A}^{B} x = \frac{1}{2}\alpha^2$, αφού το $\sum_{A}^{B} \alpha$ παριστάνει το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α, οπότε $\int_0^{\alpha} x dx = \frac{\alpha^2}{2}$.

Για το $\sum_{A}^{B} x^2$ έχουμε,

$\sum_{A}^{B} \alpha^2 = \sum_{A}^{B} (x+y)^2 = 2\sum_{A}^{B} x^2 + 2\sum_{A}^{B} xy$, αφού πάλι λόγω συμμετρίας θα είναι

---

[56] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 107

$$\sum_A^B x^2 = \sum_A^B y^2, \text{ και } xy = \frac{\alpha^2}{4} - z^2 \text{ οπότε,}$$
$$\sum_A^B \alpha^2 = 4\sum_A^B x^2 - 4\sum_A^B z^2.$$

Αλλά το $\sum_A^B z^2 = \frac{1}{4}\sum_A^B x^2$ άρα $\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3}\sum_A^B \alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^3$, αφού το $\sum_A^B \alpha^2$ παριστάνει τον όγκο κύβου ακμής α, οπότε $\int_0^\alpha x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}$.

Έτσι γενικεύοντας παίρνει

$$\sum_A^B \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}, \text{ ή } \int_0^\alpha x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Επομένως το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^n$ στο διάστημα $[0,1]$ και ο όγκος του στερεού που προκύπτει με περιστροφή ως προς τον άξονα $x'x$ δίνεται από τους τύπους,

$$E = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1} \text{ και } V = \pi\sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1} \text{ αντίστοιχα.}$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού $\int_0^\alpha x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$, $n = 1,2,\cdots$ έγινε από τους Γάλλους μαθηματικούς Fermat, Pascal και Roberval ως εξής:

Με χρήση των ανισοτήτων,

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

απέδειξαν ότι,

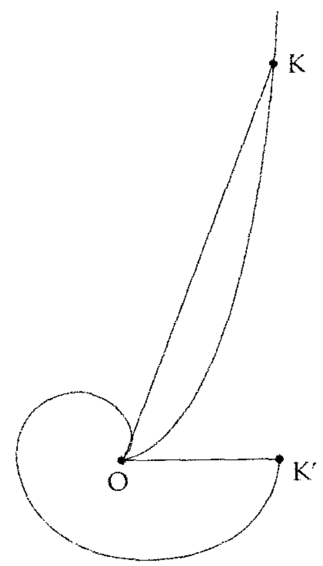
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

και για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^\alpha x^n dx$ χρησιμοποίησαν τη διαδικασία που θα δούμε στη σελίδα 50 παρακάτω.

Στο τελευταίο μέρος ξεχωρίζει ο τετραγωνισμός της έλικας του Αρχιμήδη αντικαθιστώντας την με μία κατάλληλη παραβολή, και επίσης ότι το μήκος τόξου της έλικας είναι ίσο με τόξο της παραβολής[57]. Πράγματι κανείς μέχρι τότε δεν είχε παρατηρήσει αν υπήρχε σχέση μεταξύ της σπείρας

[57] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 364

$\varrho = \alpha\theta$ και της παραβολής $x^2 = \alpha y$. Ο Cavalieri σκέφτηκε να συγκρίνει αδιαίρετα ευθειών με καμπυλόγραμμα αδιαίρετα. Έτσι *(Σχήμα 18)* αν στρέψουμε την παραβολή $x^2 = \alpha y$ θεωρώντας το σημείο Ο σταθερό έτσι ώστε το σημείο Κ να έρθει στη θέση Κ′, τότε μέσω των σχέσεων $x = \varrho$ και $y = \varrho\theta$ οι τεταγμένες της παραβολής μετασχηματίζονται σε ακτινικά διανύσματα. Οπότε τα σημεία της Απολλώνειας παραβολής $x^2 = \alpha y$ θα βρίσκονται στην αρχιμήδεια σπείρα $\varrho = \alpha\theta$. Αν ακόμα το Κ′Κ είναι ίσο με το μήκος του κύκλου ακτίνας ΟΚ′, το εμβαδόν της σπείρας που σχηματίζεται με την πρώτη στροφή, είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το παραβολικό τόξο ΟΚ και το ακτινικό διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$.



Σχήμα 18

1.5.7 Ο Evangelista Torricelli (1608 – 1647) ήταν ο πρώτος που κατανόησε και εφάρμοσε με μεγάλη επιτυχία τη μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri. Ανήκει στη νέα γενιά των μαθηματικών μαζί με τους Rene Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601–1665), Gilles Person de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591-1661), Braise Pascal (1623-1662) και Gregory St. Vincent (1584-1667) οι οποίοι έχτισαν το οικοδόμημα του απειροστικού λογισμού πάνω στα θεμέλια που έβαλε ο Cavalieri. Ο $17^{ος}$ αιώνας είναι μία πολύ κρίσιμη περίοδος για την ανάπτυξη των μαθηματικών και είναι ευτύχημα το γεγονός ότι οι μαθηματικοί της γενιάς αυτής, πρώτη φορά από την εποχή του Πλάτωνα, επικοινωνούσαν πάρα πολύ μεταξύ τους. Πρωταρχικό ρόλο στην επικοινωνία αυτή είχε ο Marin Mersenne (1588-1648), (μετά το θάνατο του οποίου το έργο αυτό το ανέλαβε ο Carcavy), γιατί όταν μάθαινε κάτι φρόντιζε να κοινοποιείται άμεσα.

Το 1634 ο Torricelli έστειλε στον Mersenne τον τετραγωνισμό της κυκλοειδούς, (γνωστής και ως η «Ελένη των γεωμετρών» εξαιτίας των πολλών προβλημάτων που δημιούργησε κατά τη διάρκεια του δέκατου έβδομου αιώνα) και το 1644 στο έργο του *De dimensione parabolae*, παρουσιάζει τον τετραγωνισμό της κυκλοειδούς με δύο τρόπους, με την μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri και με την αρχαία μέθοδο της εξάντλησης, χωρίς να αναφέρει ότι ο Roberval είχε φτάσει στα ίδια αποτελέσματα δουλεύοντας μάλλον ανεξάρτητα με την μέθοδο των αδιαιρέτων. Στο ίδιο έργο, ο Torricelli παρουσιάζει επίσης είκοσι - μία διαφορετικές αποδείξεις για τον τετραγωνισμό τμήματος της παραβολής, δέκα σύμφωνα με τη μέθοδο των αρχαίων Ελλήνων και τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας αδιαίρετα[58].
Ο Torricelli ήταν ένας επιδέξιος γεωμέτρης και έδινε μεγάλη σημασία στις συνεχείς αναλογίες , γεωμετρικές σειρές κ.λ.π., και όπως ο Fermat ήξερε ότι ο πρώτος όρος μιάς φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι μέση ανάλογος της πρώτης διαφοράς και του αθροίσματος των απείρων όρων της.[59]
Έτσι κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος και με μία μέθοδο παρόμοια με του Άρχιμήδη (έγραψε μία σειρά από τρίγωνα) απόδειξε άμεσα, χωρίς τη χρήση της άτοπο απαγωγής, ότι το τμήμα μιας παραβολής είναι τα $\frac{4}{3}$ του αντίστοιχου τριγώνου.

Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο χειρίζεται της συνεχείς αναλογίες για τον τετραγωνισμό των

παραβολών[60] $\left(\frac{y}{\alpha}\right)^m = \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$ και των υπερβολών $\left(\frac{y}{\alpha}\right)^m \left(\frac{x}{\beta}\right)^n = 1$.

Έπρεπε να βρεί καταρχάς τρόπο για εκφράσεις της μορφής $\alpha^{\frac{m}{n}}$. Έτσι αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ είναι μία σειρά αριθμών σε μια συνεχή αναλογία τότε,

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}, \quad \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \left(\sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}\right)^m = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Επομένως για τον Torricelli ήταν εύκολο να εκφράσει τις καμπύλες αυτές στη μορφή $y = kx^n$.

---

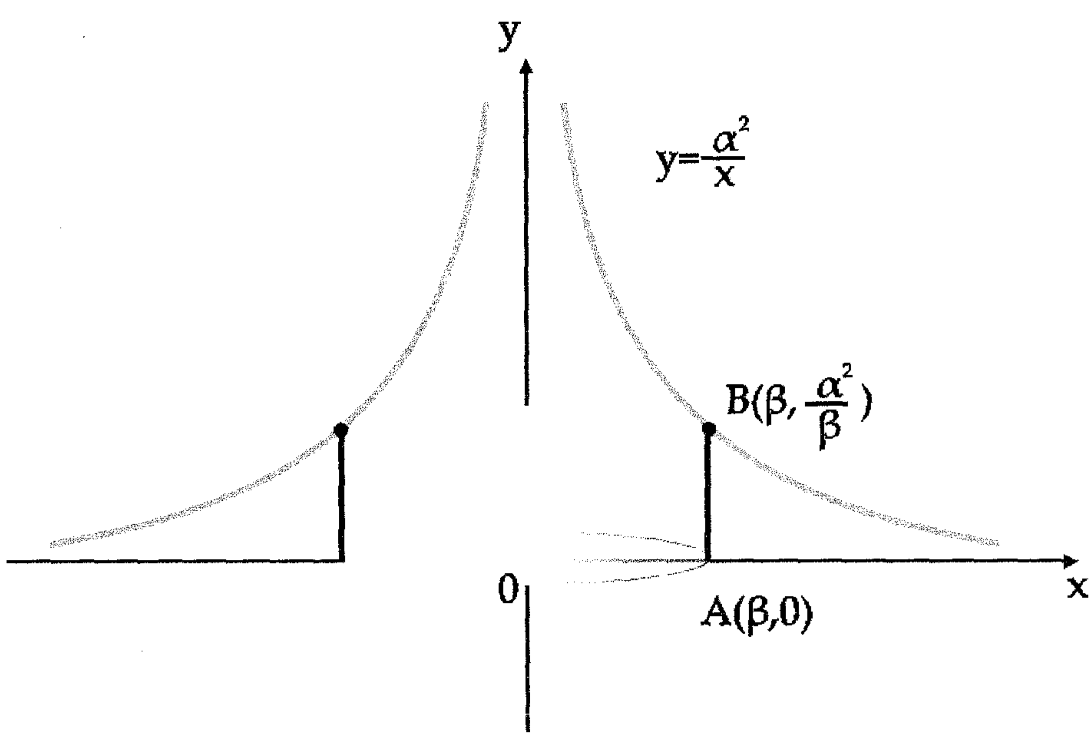
[58] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 391

[59] Αν $S = \alpha + \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \cdots$, τότε $\frac{S}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - \alpha\lambda}$ ή $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$.

[60] Margaret E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford σελ. 186.

Το 1640 δουλεύοντας ανεξάρτητα από το Roberval επέκτεινε τη σύγκριση της παραβολής με τη σπείρα και έδειξε ότι το μήκος της σπείρας $\rho=\alpha\theta$, ισούται με το μήκος της παραβολής $x^2=2\alpha y$ από $x=0$ έως $x=2\pi\alpha$. Στη συνέχεια ο Fermat, στον οποίο άρεσαν πάντα οι γενικεύσεις, μελέτησε τις ανώτερες σπείρες $\rho^n=\alpha\theta$ και συνέκρινε τα τόξα τους με τα μήκη των ανώτερων παραβολών $x^{n-1}=2\alpha y$.[61]

Το 1641 ο Torricelli *απέδειξε ότι το στερεό που προκύπτει από μία άπειρη επιφάνεια, η οποία ορίζεται από την υπερβολή* $xy=\alpha^2$, *την ευθεία* $x=\beta$ *και τον άξονα των τετμημένων (Σχήμα19), όταν περιστραφεί περί τον άξονα* xx' *μπορεί να έχει πεπερασμένο όγκο.*



Σχήμα 19

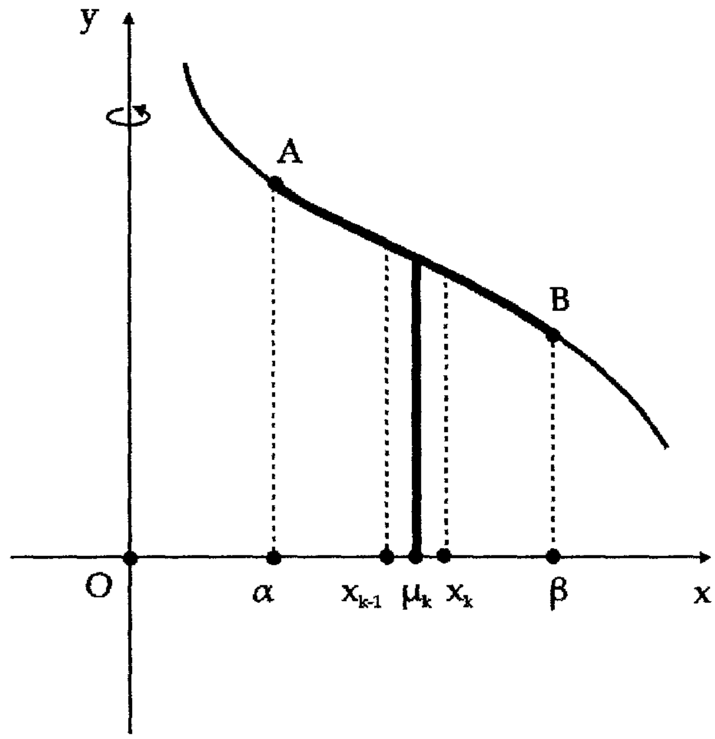
Με σύγχρονο συμβολισμό ανάγεται στο $\alpha^4\int_\beta^\infty \frac{1}{x^2}dx=\frac{\alpha^4}{\beta}$. Τη εποχή εκείνη δημιουργήθηκε πολύ συζήτηση και οι διαμάχες κράτησαν πολλά χρόνια και μετά το θάνατο του.

Η μέθοδος του αν και μη απολύτως ακριβής, διορθώνεται εύκολα. Μπορεί να αναχθεί στη **«μέθοδο των κελύφων»** για εύρεση όγκων στερεών εκ περιστροφής.

[61] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 391

Μέθοδος των κελύφων για περιστροφή ως προς τον κατακόρυφο άξονα:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού το οποίο προκύπτει από την περιστροφή του τμήματος ΑΒ της καμπύλης του σχήματος .(*Σχήμα 20)*



Σχήμα 20

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού με «στοιχειώδη» ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα οποία ορίζονται από μία διαμέριση P του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Ένα τέτοιο ορθογώνιο θα έχει πλάτος $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και ύψος $f(\mu_k)$, όπου μ_k το μέσο της βάσης του ορθογωνίου.

Ο όγκος του κελύφου το οποίο δημιουργείται από το περιστρεφόμενο ορθογώνιο θα είναι

$$\Delta V_k = 2\pi \times (\text{μεση ακτινα κελυφους}) \times (\text{υψος φλοιου}) \times (\text{παχος})$$

Έτσι ο όγκος του στερεού θα είναι το άθροισμα των όγκων των φλοιών που προκύπτουν από τα *n* ορθογώνια της διαμέρισης P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k .$$

Επομένως

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum \Delta V_k = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\left(\begin{smallmatrix}\text{ακτινα}\\ \text{κελυφου}\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}\text{υψος}\\ \text{κελυφου}\end{smallmatrix}\right)dx$$

Έτσι για το *σχήμα 19* έχουμε $V = \int_0^{\beta} 2\pi x \frac{\alpha^2}{x} dx = 2\pi\alpha^2\beta$

Ένα ακόμα σημαντικό πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκε, ήταν η γραφική παράσταση της λογαριθμικής καμπύλης $x = \ln y$. Βρήκε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας η οποία ορίζεται από την καμπύλη αυτή, την ασύμπτωτη της και μία τεταγμένη, καθώς επίσης και τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα xx' της επιφάνειας αυτής[62].

Με το πρόβλημα του προσδιορισμού του κέντρου βάρους του κυκλικού τομέα άρχισε να ασχολείται το 1643 και απόδειξε με δύο τρόπους, τον κλασσικό και την μέθοδο των αδιαιρέτων, ότι βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της αντίστοιχης γωνίας και σε απόσταση από το κέντρο του κύκλου, η οποία δίνεται από το τύπο

$$\frac{2}{3}\cdot(\text{ακτίνα})\cdot\frac{\text{χορδή}}{\text{τόξο}}$$

Λέγεται ότι[63] ο τύπος αυτός συντάχτηκε κατά τη στιγμή του πρόωρου θανάτου του.

Ένα από τα πιο συναρπαστικά αποτελέσματα είναι ο μετασχηματισμός της γενικής σπείρας $\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^m = \left(\frac{\varrho\theta}{\alpha\alpha}\right)^n$, με ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό στη γενική παραβολή, $\left(\frac{y}{\alpha}\right)^m = \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$.

Μετά από διάφορους υπολογισμούς[64] γράφει τη σπείρα στη μορφή,

$$\varrho^{m+n} = k(\varrho\theta)^n$$

θέτει

$$x = \varrho,\ y = \frac{m}{m+n}(\varrho\theta),$$

και παίρνει την παραβολή

---

[62] C. Boyer, *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 392

[63] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 2, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 197

[64] Margaret E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus,* Pergamon Press, Oxford σελ. 192.

$$x^{m+n} = k\left(\frac{m+n}{m}y\right)^n.$$

1.5.8 Ο Pierre de Fermat (1601 – 1665) όπως και πολλοί άλλοι γεωμέτρες της εποχής είχαν μελετήσει τις παραβολές ανωτέρας τάξης $y^n = \alpha x$. Γνώριζε μία μέθοδο για την κατασκευή της εφαπτομένης σε καμπύλες της μορφής $y = x^n$, και ανακάλυψε ένα θεώρημα (το είχε δημοσιεύσει ο Cavalieri το 1635 και το 1647) για να βρίσκει το εμβαδόν κάτω από αυτές.

Σε ένα σημείωμα του προς τον Cavalieri το 1648 περίπου παρουσιάζει ένα γενικό κανόνα για τον τετραγωνισμό τους, όπως επίσης και το κυβισμό στερεού το οποίο παράγεται κατά την περιστροφή τυχαίας παραβολής γύρω από τον άξονα της. Στο βιβλίο του ***De aequationum localium transmutatione*** *(Περί μετασχηματισμού και απλοποιήσεως των εξισώσεων καμπύλων)*[65] ασχολείται με τον τετραγωνισμό παραβολών και υπερβολών ανωτέρου βαθμού, με εφαρμογή του λήμματος στο οποίο παρουσιάζει τον υπολογισμό του αθροίσματος S, των απείρων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$.

Με σύγχρονους όρους θα γράφαμε $\frac{\alpha_1}{S-\alpha_1} = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$, δηλαδή το γνωστό

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda},$$

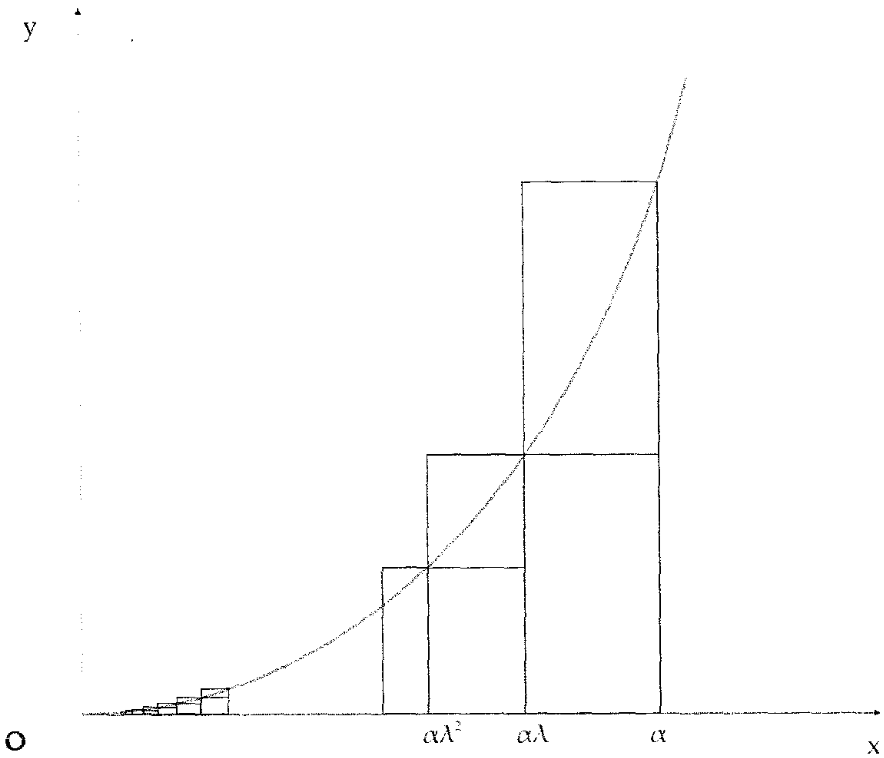
το οποίο του επιτρέπει να κάνει χρήση γεωμετρικών και όχι αριθμητικών προόδων που έκανε ο Αρχιμήδης.

Έτσι πρότεινε μια καλλίτερη μέθοδο για το υπολογισμό του εμβαδού κάτω από τις καμπύλες $y = x^n$, η οποία μπορούσε να εφαρμοστεί για ακέραιες και ρητές τιμές του n.[66] Για να βρεί το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^m$ από $x = 0$, έως $x = \alpha$, διαίρεσε το διάστημα [0, α] σε άπειρα υποδιαστήματα με σημεία τα οποία έχουν τετμημένες της μορφής
$x_n = \alpha\lambda^n, n = 0, 1, 2, \cdots$, όπου $0 < \lambda < 1$ *(Σχήμα 21)*.

---

[65] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 2, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 276

[66] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 384



Σχήμα 21

Στα σημεία αυτά έβρισκε τις αντίστοιχες τεταγμένες της καμπύλης, και προσπαθούσε να βρεί το εμβαδόν με την βοήθεια των διαδοχικά σχηματιζόμενων περιγεγραμμένων ορθογωνίων.

Τα εμβαδά αυτών των ορθογωνίων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha^m(\alpha-\alpha\lambda)$ και λόγο Το άθροισμα των απείρων όρων της είναι,

$$S(\lambda)=\frac{\alpha^{m+1}(1-\lambda)}{1-\lambda^{m+1}}=\frac{\alpha^{m+1}}{1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^m}.$$

Όταν το $n\to\infty$ το $\lambda\to 1$, οπότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων θα πλησιάζει εκείνο που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y=x^m$, από $x=0$, έως $x=\alpha$.

Επομένως $S=\lim\limits_{\lambda\to 1}S(\lambda)=\dfrac{\alpha^{m+1}}{m+1}$ δηλαδή το ζητούμενο εμβαδόν, και με σύγχρονους όρους

$$\int_0^{\alpha}x^m dx=\frac{\alpha^{m+1}}{m+1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και για ρητές κλασματικές τιμές του m.

Αν θέσουμε π.χ. $m=\frac{p}{q}$ $(m\neq -1)$ το προηγούμενο άθροισμα γίνεται,

$$S(\lambda)=\alpha^{\frac{p+q}{q}}\left(\frac{1-\lambda^{q}}{1-\lambda^{p+q}}\right)=\alpha^{\frac{p+q}{q}}\frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{q-1}}{1+\lambda+\cdots+\lambda^{p+q-1}}.$$

Οπότε,

$$S=\lim_{\lambda\to 1}S(\lambda)=\frac{q}{p+q}\alpha^{\frac{p+q}{q}}$$

Η περίπτωση $m=-1$ θα δούμε παρακάτω ότι διευθετήθηκε από τον Gregory St. Vincent.

Σε πολλά έργα του υπάρχουν αναφορές για υπολογισμό επιφανειών κάτω από καμπύλες τις οποίες ονομάζει « γενικές παραβολές» και «γενικές υπερβολές» με εξισώσεις ,

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{m}=\left(\frac{x}{\beta}\right)^{n} \text{ και } \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{m}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{n}=1 \text{ αντίστοιχα.}$$

Για να τετραγωνίσει την παραβολή[67]

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{m}=\left(\frac{x}{\beta}\right)^{n},$$

αποδεικνύει με παρόμοιο τρόπο, ότι άθροισμα των άπειρων ορθογωνίων που αντιστοιχούν στις τετμημένες, x_1, $x_1\lambda^{m}$, $x_1\lambda^{2m},\cdots$ είναι,

$$S(\lambda)=\frac{x_1y_1\left(1-\lambda^{m}\right)}{1-\lambda^{m+n}}.$$

Οπότε

$$S=\lim_{\lambda\to 1}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{x_1y_1\left(1-\lambda^{m}\right)}{1-\lambda^{m+n}}=x_1y_1\frac{m}{m+n}.$$

Ο Fermat μπορούσε να επεκτείνει τα προηγούμενα αποτελέσματα και στις σπειροειδής έλικες $\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^{m}=\left(\frac{\varrho\theta}{\alpha\alpha}\right)^{n}$ και $\left(\frac{R-\varrho}{R}\right)^{m}=\left(\frac{\varrho\theta}{R\alpha}\right)^{n}$.

[67] Margaret E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford σελ. 162.

Γνώριζε επίσης ότι, αν διαιρέσει την τετμημένη με σημεία τα οποία αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα αντίστοιχα χωρία της ορθογώνιας υπερβολής $\left(\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)=1$, έχουν ίσα εμβαδά.

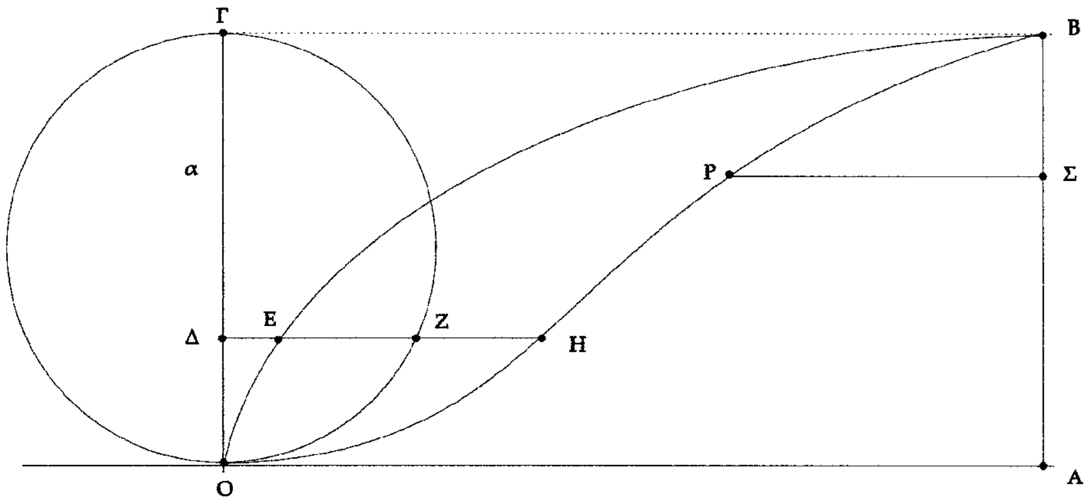
Μεταξύ άλλων ας αναφέρουμε ακόμα την απόδειξη θεωρήματος στο οποίο το εμβαδόν μιας κισσοειδούς ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού του γεννήτορα κύκλου. Στο έργο *Veterum geometria promota in septem de cycloidi libris (Η γεωμετρία των Αρχαίων προαγομένη σε επτά βιβλία περί κυκλοειδέων)* του Ιησουΐτη Antoine de la louvere, αποδεικνύει ανώνυμα σε ένα παράρτημα ότι το πρόβλημα της ευθειοποίησης της κοινής παραβολής είναι ισοδύναμο με τον τετραγωνισμό της συνηθισμένης υπερβολής, το οποίο μπορεί να εκφραστεί με σύγχρονους όρους ως ολοκλήρωμα λογαρίθμων.
Η ευθειοποίηση μιας καμπύλης χρησιμοποιείται πιο αποφασιστικά για το μετασχηματισμό καμπύλης σε άπειρο πλήθος άλλων. Ο υπολογισμός του εμβαδού του τμήματος παραβολικού κωνοειδούς, αποτελεί σημαντικό επίτευγμα μετρήσεως του εμβαδού μιας μη σφαιρικής κωνικής ή κυλινδρικής καμπύλης επιφάνειας. Ο Fermat βρίσκει ότι το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κύκλου. Σε ένα παράρτημα της γεωμετρικής διατριβής *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione (Περί συγκρίσεως των καμπύλων γραμμών προς ευθείας)*, δημοσιεύεται ανώνυμα η ευθειοποίηση της ημικυβικής παραβολής $y^3 = px^2$ με γενίκευση των μεθόδων του Αρχιμήδη.[68]

1.5.9 Gilles Person de Roberval (1602 - 1675), κατόπιν προτροπής του Mersenne είχε αρχίσει να ασχολείται με την κυκλοειδή από το 1628, και μέχρι το 1638 είχε αποδείξει ότι το εμβαδόν κάτω από μία αψίδα της καμπύλης είναι ίσο με το τριπλάσιο του εμβαδού του γεννήτορα κύκλου *(Σχήμα 22)*[69].

---

[68] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών* Τομος 2, Μετάφραση Μ.Κ. Κωβαίου, Ε.Μ.Ε., σελ. 277-278

[69] M.Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York 1972.



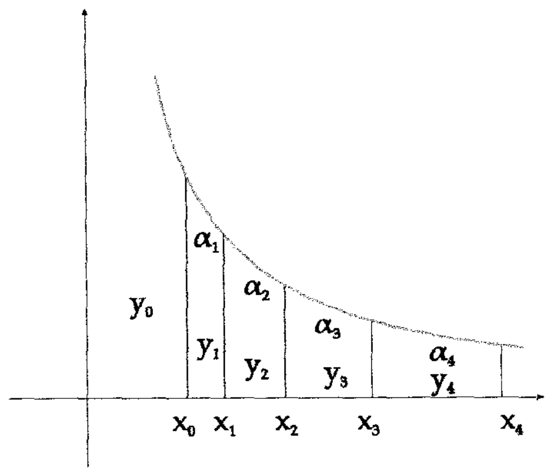
Σχήμα 22

Έστω ΟΡΒΕΟ η επιφάνεια κάτω από το μισό τόξο της κυκλοειδούς, ΟΓ η διάμετρος του γεννήτορα κύκλου και Ε τυχαίο σημείο του τόξου. Παίρνουμε ΔΖ = ΕΗ, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Η ονομάζεται «συνοδός καμπύλη» του κυκλοειδούς. Σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri αφού κάθε γραμμή ΔΗ του χωρίου ΟΗΒΓΟ έχει την αντίστοιχη της ΡΣ στο χωρίο ΟΗΒΑΟ, η καμπύλη ΟΗΒ χωρίζει το ορθογώνιο ΟΑΒΓ σε δύο ισοδύναμα μέρη. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες με τη διάμετρο και το μισό του μήκους του γεννήτορα κύκλου οπότε το εμβαδόν του θα είναι το διπλάσιο του γεννήτορα κύκλου, άρα (ΟΑΒΗΟ) = (ΟΓΒΗΟ) $= \pi\alpha^2$.

Σύμφωνα επίσης με την αρχή του Cavalieri αφού κάθε γραμμή ΔΖ του χωρίου ΟΖΓΟ έχει την αντίστοιχη της ΕΗ στο χωρίο ΟΗΒΕΟ, η καμπύλη ΟΕΒ χωρίζει το χωρίο ΟΗΒΓΟ σε δύο ίσα μέρη, οπότε η επιφάνεια κάτω από το μισό τόξο της κυκλοειδούς θα έχει εμβαδόν ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του γεννήτορα κύκλου.

Είχε υπολογίσει επίσης τους όγκους από την περιστροφή τόξου της «τροχοειδούς» (όπως την ονόμασε από την ελληνική λέξη τροχός) γύρω από την ευθεία της βάσης ή γύρω από τον άξονα συμμετρίας. Ο Roberval (ο μοναδικός επαγγελματίας μαθηματικός της γενιάς αυτής), ως συνήθως δεν δημοσίευε τις ανακαλύψεις του, με αποτέλεσμα να βρίσκεται σε μία συνεχή διαμάχη με όλους τους άλλους.

1.5.10 Ο Gregory St. Vincent (1584 – 1667) στο έργο του Opus geometricum guadraturae circuli et sectionum coni *(Γεωμετρικό έργο για τον τετραγωνισμό του Κύκλου και των Κωνικών Τομών)* έβαλε τις βάσεις για την σχέση της λογαριθμικής συνάρτησης και της ορθογώνιας υπερβολής. *(Σχήμα 23)*.



Σχήμα 23

$$\text{Δηλαδή } \int_{\alpha}^{\beta} x^{-1}dx = \ln\beta - \ln\alpha.$$

Απέδειξε με την μέθοδο της εξάντλησης, ότι αν επιλέξουμε τα $x_{i,}$ $i=0,1,2,\cdots$, έτσι ώστε οι περιοχές $\alpha_{i,}$ $i=1,2,3,\cdots$ να είναι ίσες, τότε τα $y_{i,}$ $i=0,1,2,\cdots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, όπου $y=\dfrac{1}{x}$. Αυτό σημαίνει οτι το άθροισμα των περιοχών $\alpha_{i,}$ $i=1,2,3,\cdots$, το οποίο είναι άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου, είναι ανάλογο των λογαρίθμων των $y_{i,}$ $i=0,1,2,\cdots$, δηλαδή με σύγχρονους όρους

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}dx = k\ln y.$$

Η παρατήρηση ότι το το εμβαδόν το οποίο περικλείεται από την υπερβολή, τον ημιάξονα Οx, τις ευθείες $x=x_0$ και $x=x_4$ μπορεί να ερμηνευτεί σαν λογάριθμος, έγινε από ένα μαθητή του Gregory, ένα Βέλγο Ιησουΐτη τον Alfons A. De Sarasa στο έργο του *Solution Problematis a Merseno Propositi* (1649).

1.5.11 Ο Blaise Pascal (1623 – 1662) Σε ένα υπόμνημα του με τίτλο *Potestatum nuericarum summa (Αριθμητικών τιμών άθροισμα)* ασχολείται με αθροίσματα της μορφής $\alpha_1^k+\alpha_2^k+...+\alpha_n^k$, όπου οι $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αλλά ο στόχος του όπως σημειώνει και ο ίδιος:[70]

[70] Margaret E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford σελ. 198.

«Αυτοί που ξέρουν κάτι από την θεωρία των αδιαιρέτων θα είναι ικανοί να δουν αμέσως ότι τα παραπάνω αποτελέσματα τους δίνουν τη δυνατότητα να τετραγωνίσουν μία παραβολή οποιασδήποτε τάξης και μία απειρία άλλων καμπύλων»,

είναι ο υπολογισμός του εμβαδού καμπυλόγραμμων χωρίων.

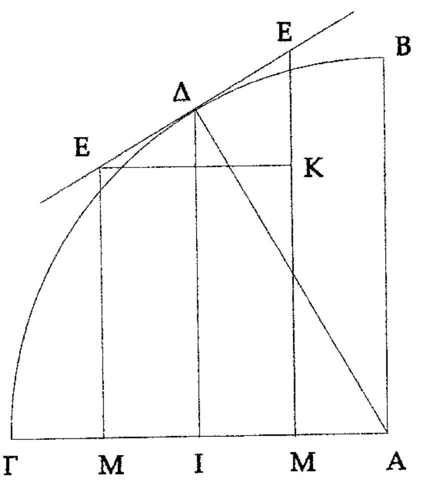
Η διαδικασία που ακολουθεί οδηγεί στο όριο,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{1}^{n}\varrho^{k}}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}.$$

Σε ένα άλλο έργο του *Traite des sinus du quart de cercle (Μελέτη για τα ημίτονα ενός τεταρτημορίου του κύκλου)* βρέθηκε, όπως είπε αργότερα ο Leibniz διαβάζοντας το έργο του πολύ κοντά στην ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Στο έργο αυτό ο Pascal με την βοήθεια του «χαρακτηριστικού τριγώνου» *(Σχήμα 24)*, πήρε μία σειρά προτάσεων ισοδύναμες με τριγωνομετρικά ολοκληρώματα διαιρώντας το τόξο του κύκλου σε άπειρα ίσα μέρη.



Σχήμα 24

Στο τυχαίο σημείο Δ του τεταρτοκυκλίου φέρει μία εφαπτομένη επιλέγει σημείο Ε αυθαίρετα ώστε ΕΕ πολύ «μικρό», φέρει ΔΙ, ΕΜ κάθετες στην ΑΓ.

Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΙΔ και ΕΚΕ προκύπτει ότι $\frac{A\Delta}{\Delta I}=\frac{EE}{EK}$,

άρα $\Delta I\cdot EE = A\Delta\cdot MM = AB\cdot MM$.

Συνεπώς,
Πρόταση Ι.[71]
Το άθροισμα των ημιτόνων (τεταγμένες) ΔΙ κάθε τόξου του τεταρτοκυκλίου ισούται με το τμήμα της βάσης ανάμεσα στα ακραία ημίτονα πολλαπλασιασμένα με την ακτίνα.

Δηλαδή,

$$\sum \Delta\mathrm{I} \cdot \mathrm{EE} = \mathrm{AB}\sum \mathrm{MM} \quad (*)$$

ή με σύγχρονους όρους $\int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta d\theta = \cos\alpha - \cos\beta$.

Στην απόδειξη που κάνει επισημαίνει ότι η χρήση της λέξης ημίτονο υποδηλώνει ότι στο άθροισμα που παίρνει, κάθε ημίτονο πολλαπλασιάζεται με ένα από τα αντίστοιχα «μικρά» τόξα ΔΔ.

Ο Leibniz έθεσε y=ΔΙ, α=ΑΔ, Δs =ΕΕ, Δx=MM και θεωρώντας τα Δs και Δx ως αδιαίρετα, είδε το άθροισμα του Pascal στη μορφή,

$$\int y ds = \int \alpha dx.$$

Πρόταση ΙΙ. Το άθροισμα των τετραγώνων των ημιτόνων είναι ίσο με το άθροισμα των τεταγμένων που είναι ανάμεσα στα ακραία ημίτονα, πολλαπλασιασμένα με την ακτίνα.

Πολλαπλασιάζουμε την (*) με ΔΙ και παίρνουμε,

$\sum \Delta\mathrm{I}^2 \cdot \mathrm{EE} = \mathrm{AB}\sum \Delta\mathrm{I} \cdot \mathrm{MM}$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} \sin^2\theta d\theta = -\int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta d(\cos\theta)$

Όμοια $\int_{\alpha}^{\beta} \sin^n\theta d\theta = -\int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta^{n-1} d(\cos\theta)$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

1.5.12 Ο John Wallis (1616 – 1703) ήταν αυτός, που πριν τους Newton και Leibniz έκανε τα περισσότερα από κάθε άλλον για την ανάπτυξη των αναλυτικών μεθόδων στον λογισμό.
Στο έργο του *Arithmetica infinitorum (Αριθμητική των απείρων)* αριθμητικοποίησε το *Geometria indivisibilibus (Γεωμετρία των αδιαιρέτων)* του Cavalieri.[72]
Ο Cavalieri είχε καταλήξει όπως έχουμε δει στο αποτέλεσμα

[71] D. J. Struick, *A Sourse Book in Mathematics*, Harvard University, σελ. 239.

[72] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 417.

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1},$$

γενικεύοντας τη σχέση $\int_0^{\alpha} x dx = \frac{\alpha^2}{2}$, η οποία προέκυψε από την αντιστοιχία των αδιαίρετων ενός παραλληλογράμμου, με τις αδιαίρετες ενός από τα δύο τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το παραλληλόγραμμο με μία διαγώνιο του.

Ο Wallis[73] εγκατέλειψε τη γεωμετρική θεώρηση και συνέδεσε τα άπειρα αδιαίρετα των δύο σχημάτων με αριθμητικές τιμές. Οπότε αν θέλουμε να συγκρίνουμε τα τετράγωνα των αδιαιρέτων του παραλληλογράμμου και του τριγώνου θεωρούμε ότι το μήκος του $1^{ου}$, του $2^{ου}$,..., του $n^{ου}$, είναι αντίστοιχα 0, 1,...,n-1.

Έτσι ο λόγος των τετραγώνων των αδιαιρέτων στα δύο σχήματα θα είναι

$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ αν υπάρχουν δύο μόνο αδιαίρετα στο καθένα

$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ αν υπάρχουν τρία μόνο αδιαίρετα στο καθένα

$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ αν υπάρχουν τέσσερα αδιαίρετα στο καθένα

και μετά από από ορισμένα παραδείγματα γράφει «per inductions»

$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$ αν υπάρχουν n+1 αδιαίρετα στο καθένα.

Έτσι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_0^n k^2}{\sum_0^n n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right) = \frac{1}{3}$, και με το όριο αυτό το εμβαδόν της παραβολής του τομέα της σπείρας και οι όγκοι του κώνου και της πυραμίδας μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν.

---

[73] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus,* New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 114.

Δηλαδή με σύγχρονους όρους $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ κ.λ.π.

Με την ίδια διαδικασία για μεγαλύτερες δυνάμεις του x, χρησιμοποιώντας ατελή επαγωγή (ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο «per induction») συμπέρανε ότι,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^p+1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p+n^p+n^p+\ldots+n^p}=\frac{1}{p+1} \quad \text{δηλαδή} \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}.$$

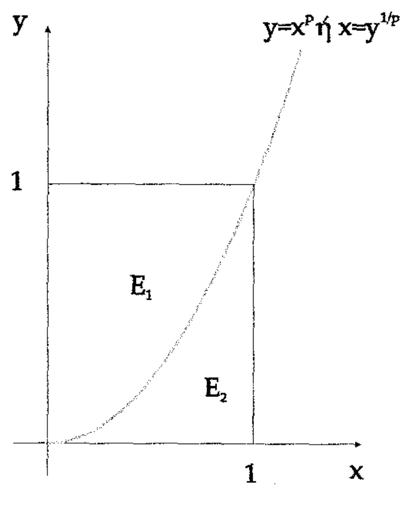
Στη συνέχεια χωρίς απόδειξη ισχυρίστηκε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p+\left(\sqrt[q]{1}\right)^p+\cdots+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p+\cdots+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p}=\frac{q}{p+q}, \text{ με } p,q\in\mathbb{Z} \text{ και } q\neq 0.$$

Εισήγαγε τον εκθέτη $\frac{p}{q}$ για τη δύναμη $\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, άρα μπορούσε να γράψει $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx=\frac{q}{p+q}$ και στη συνέχεια υπέθεσε ότι $\int_0^\alpha x^{\frac{p}{q}} dx=\frac{q}{p+q}\alpha^{\frac{p+q}{q}}$.

Ο Wallis μπορούσε να επαληθεύσει τη σχέση $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx=\frac{q}{p+q}$ για $p=1$ ως εξής:

Από το *(Σχήμα 25)* είναι προφανές ότι ισχύει,



Σχήμα 25

$$E_1+E_2=1 \text{ ή } \int_0^1 x^{\frac{1}{q}} dx+\int_0^1 x^q dx=1,$$

οπότε

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{q}}dx = 1-\frac{1}{q+1}=\frac{q}{q+1}.$$

Προσπάθησε επίσης να υπολογίσει με απειροστικές μεθόδους το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$ το οποίο ήξερε από την δουλειά των Cavalieri, Fermat και άλλων ότι παριστάνει το εμβαδόν του ημικυκλίου $y=\sqrt{x-x^2}$, οπότε θα ισούται με $\frac{\pi}{8}$.

Ο Wallis δεν μπόρεσε να λύσει το πρόβλημα αυτό, αλλά μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^1 (x-x^2)^n dx$ για διάφορες θετικές τιμές του n, η μέθοδος του της ατελούς επαγωγής και παρεμβολής τον οδήγησαν στο ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα[74]

$$\int_0^1 (x-x^2)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Στη συνέχεια στο τελευταίο μέρος του έργου *Arithmetica infinitorum* προσπάθησε να δείξει ότι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου ακτίνας 1 δίνεται όπως θα γράφαμε σήμερα από τη σχέση

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx. \quad (\mathrm{I})$$

Στη Πρόταση 121 εμφανίζει σαν «άθροισμα Riemann»[75] το αντίστροφο ολοκλήρωμα της ζητούμενης επιφάνειας που θέλει να υπολογίσει, γράφει

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

Όπως είδαμε ήξερε ότι $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}dx=\frac{q}{p+q}$ με p, q θετικούς ακεραίους, οπότε μπορούσε να υπολογίζει και ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^1 \left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \text{ με } p, q\in\mathbb{Z}_+^*. \quad (\mathrm{II})$$

Επομένως για να υπολογίσει το ολοκλήρωμα (I) έπρεπε να βρεί ένα τύπο για το ολοκλήρωμα (II) για τις διάφορες τιμές των p, q.

---

[74] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 420

[75] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 171

Θεώρησε ότι ήταν πιο εύκολο να βρεί τις τιμές για το αντίστροφο του ολοκληρώματος (ΙΙ),

$$\alpha_{p,q} = \frac{1}{\int_0^1 \left(1 - x^{1/p}\right)^q dx}$$

Υπολόγισε τις τιμές των $\alpha_{p,q}$ για p, $q \leq 10$ και τα αποτελέσματα τα καταχώρισε σε ένα πίνακα με p γραμμές και q στήλες.

Από το πίνακα αυτό προκύπτει,

$$\frac{1}{\alpha_{pq}} = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Το ερώτημα είναι πόσο είναι το $\Omega = \alpha_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$;

Παρατηρεί ότι:

$$\alpha_{p,q} = \frac{p+q}{p} \alpha_{p,q-1} \text{ (*)}$$

Συμπληρώνει το πίνακα θέτοντας $\alpha_{p,q} = 1$ όταν $p = 0$ και q ημιακέραιος (ή αντίστροφα $q = 0$ και p ημιακέραιος) $\alpha_{\frac{1}{2},0} = \alpha_{\frac{3}{2},0} = \alpha_{\frac{5}{2},0} = \cdots = 1$.

Οπότε από την (*) προκύπτει ότι

$$\alpha_{\frac{1}{2},1} = \frac{3}{2},\ \alpha_{\frac{1}{2},2} = \frac{15}{8},\ \alpha_{\frac{1}{2},3} = \frac{105}{48},\ \cdots$$

Το επόμενο και πιο αποφασιστικό βήμα ήταν να υποθέσει ότι η σχέση (*) ισχύει και στη περίπτωση που ο p ή ο q (όχι όμως και οι δύο) είναι ημιακέραιοι.

Δηλαδή $\alpha_{2,\frac{1}{2}} = \frac{15}{8},\ \alpha_{3,\frac{5}{2}} = \frac{693}{48},\ \cdots$

Στη συνέχεια για να συμπληρώσει την ισχύ της σχέσης και στη περίπτωση όπου και οι δύο είναι ημιακέραιοι, υπέθεσε ότι ισχύει

$$\alpha_{p,q} = \alpha_{p,q-1} + \alpha_{p-1,q}$$

οπότε μπόρεσε να προσδιορίσει τους $\alpha_{p,q}$ συναρτήσει του ζητούμενου

$$\Omega = \alpha_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

Έτσι π.χ. βρίσκει ότι $\alpha_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\Omega,\ \alpha_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\Omega,\ \cdots$

Παρατηρεί ότι: $\alpha_{\frac{1}{2},k+2} : \alpha_{\frac{1}{2},k} > \alpha_{\frac{1}{2},k+4} : \alpha_{\frac{1}{2},k+2}$

Οπότε

$$\Omega{:}1 > \frac{3}{2}:\Omega \Leftrightarrow \Omega > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2}:\Omega > \frac{4}{3}\Omega:\frac{3}{2} \Leftrightarrow \Omega < \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\sqrt{\frac{4}{3}}$$

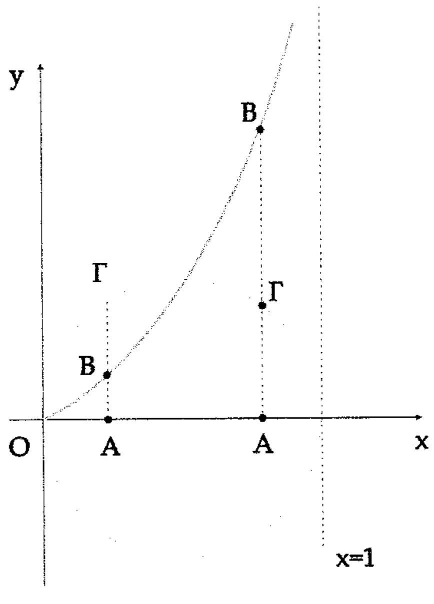
$$\frac{4}{3}\Omega:\frac{3}{2} > \frac{15}{8}:\frac{4}{3}\Omega \Leftrightarrow \Omega > \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Όμοια $\Omega < \dfrac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Γεωμετρικά ήξερε ότι $\Omega = \dfrac{4}{\pi}$, γενικεύοντας συμπεραίνει ότι

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+1)}{2n(2n+2)} \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{Τυπος}\\ \text{Wallis}\end{smallmatrix}\right).$$

Στο έργο του *Tractatus duo de cycloide (1659)* εφάρμοσε τη μέθοδο των «παρεμβολών με αναλογίες» για τον τετραγωνισμό της κισσοειδούς. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο αυτή στο παράδειγμα που ακολουθεί.[76]



Σχήμα 26

Έστω ο κύκλος *(Σχήμα 26)* με εξίσωση,

[76] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus,* New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 176.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad (1)$$

Η κισσοειδής ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Β για τα οποία,

$$\frac{BA}{OA}=\frac{OA}{\Gamma A}.$$

Στο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς η κισσοειδής έχει εξίσωση,

$$y=x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ με } x\in(0,1).$$

Η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη δίνεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα,

$$E=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

το οποίο αφού $\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδης συναρτήσεις σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στη σελίδα 89 του παρόντος.

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα $\alpha_m=\int_0^1 x^{\frac{m}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ και $\beta_n=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{n}{2}}dx$, τα οποία μπορούν να εκφραστούν από στοιχειώδης συναρτήσεις για κάθε ακέραια τιμή των m, n (Συνθήκες Chebyshev).

Είναι $\alpha_0=\frac{2}{3}$, $\alpha_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$, $\alpha_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}$, $\alpha_6=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}$ από τα οποία προκύπτει ότι

$$\alpha_m=\frac{m}{m+3}\alpha_{m-2}, \text{ για κάθε άρτιο m.} \quad (2)$$

Επίσης $\beta_0=\frac{2}{5}$, $\beta_2=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}$, $\beta_4=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}$ και γενικά

$$\beta_n=\frac{n}{m+5}\beta_{n-2} \text{ για n άρτιο.} \quad (3)$$

Με την υπόθεση ότι οι (1) και (2) ισχύουν και για m, n περιττούς παρατηρούμε ότι

$$E=\beta_{-1}=6\beta_1=6\alpha_3=3\alpha_1=\frac{3\pi}{8},$$

αφού το $\alpha_1=\frac{\pi}{8}$ είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου του κύκλου, σχέση (1).

Με σύχρονους όρους μπορούμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα με την παρατήρηση ότι,

$$\alpha_m = B\left(\frac{3}{2},\frac{m}{2}+1\right)=\frac{m}{m+3}\alpha_{m-2} \quad \text{και} \quad \beta_n = B\left(\frac{5}{2},\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{n+5}\beta_{n-2}.$$

1.5.13 James Gregory (1638 – 1675) Σκωτζέζος Μαθηματικός ο οποίος είχε έρθει σε επαφή με τα Μαθηματικά πολλών χωρών. Το 1663 επισκέφθηκε την Ιταλία όπου και γνώρισε τους διαδόχους του Torricelli, η συνεργασία του με τους Megnoli και Angeli τον έμαθε να εκτιμήσει τις άπειρες διαδικασίες. Στο έργο του Vera circuli et hyperbolae guadratura, το οποίο εξεδόθη στην Padua το 1667 , αν και είχε πρωταρχικό σκοπό τη μέτρηση του εμβαδού του κύκλου περιλαμβάνει πολλές προτάσεις απειροστικής ανάλυσης. Επεκτείνει τη μέθοδο του Αρχιμήδη ώστε να μπορεί να τετραγωνίζει ελλείψεις και υπερβολές, ως εξής.

Θεώρησε δύο ακολουθίες α_n, A_n $n=0,1,2,\cdots$ όπου α_0 το εμβαδόν ενός εγγεγραμμένου τριγώνου και A_0 το εμβαδόν ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου, οι όροι των ακολουθιών προκύπτουν από τον διπλασιασμό των πλευρών των δύο γεωμετρικών σχημάτων. Απέδειξε ότι οι α_{n+1}, B_{n+1} είναι ο γεωμετρικός μέσος και ο αρμονικός μέσος των δύο προηγούμενων όρων α_n, A_n αντίστοιχα. Οπότε αφού οι δύο αυτές ακολουθίες συνέκλιναν στο ίδιο όριο, κατάφερε να επιλύσει με μεγάλη επιτυχία τα προβλήματα τετραγωνισμού κωνικών τομών.

Προσπάθησε επίσης να αποδείξει χωρίς όμως επιτυχία ότι το εμβαδόν του κύκλου δεν μπορεί να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση της ακτίνας, άρα ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται.

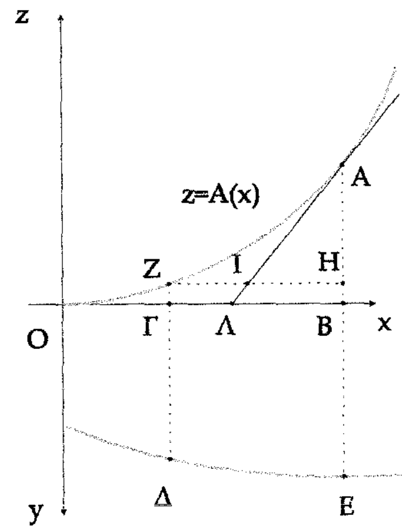
Σε μία επιστολή του Huygens προς τον L Hospital φαίνεται ότι γνώριζε μία μέθοδο για ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής:

$$y = bx^k\left(x^n + a\right)^m$$

Γνώριζε τις σειρές Maclaurin για την tanx, τη cotx, της arctanx, και συνεφαπτομένης.

Η σειρά δε $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, φέρει δικαίως το όνομα του.

1.5.14 Isaac Barrow (1630 – 1677) και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Έτσι ονομάζεται το πρόβλημα προσδιορισμού μιας καμπύλης αν είναι γνωστή μια σχέση για την εφαπτομένη της. Από τους πρώτους που κατάλαβε ότι ο ολοκληρωτικός λογισμός είναι το αντίστροφο του διαφορικού ήταν ο Torricelli. Αυτός όμως πού είδε το πρόβλημα πέρα από την γεωμετρική σκοπιά ήταν ο James Gregory, στη συνέχεια ο Barrow καθηγητής της γεωμετρίας αν και θεωρούσε ότι η Άλγεβρα έπρεπε να ήταν τμήμα της λογικής, θέλοντας το έργο του Lectiones geometriae (το οποίο ήταν εν είδη διαλέξεων) να είναι πλήρως ενημερωμένο περιέλαβε προβλήματα εφαπτόμενων και τετραγωνισμών. Στη διάλεξη X περιγράφει το θεμελιώδες θεώρημα περίπου ως εξής:



Σχήμα 27

Έστω η αύξουσα συνάρτηση f και $z=F(x)$ το χωρίο που περικλείεται από την $y=f(x)$ και του τμήματος $[0,x]$ στον άξονα των x, για ευκολία θα θεωρήσουμε τους άξονες των y και z όπως στο σχήμα 27.
Ας είναι $B(x_0,0)$ και Λ τυχαίο σημείο στον άξονα των x τέτοιο ώστε,

$$B\Lambda=\frac{BA}{BE}=\frac{F(x_0)}{f(x_0)} \quad (1),$$

στη συνέχεια αποδεικνύει ότι η ευθεία ΛΑ με κλίση

$$\frac{BA}{B\Lambda}=\frac{A(x_0)}{\frac{A(x_0)}{f(x_0)}}=f(x_0)$$

είναι εφαπτομένη της καμπύλης $z=F(x)$.
Η απόδειξη που κάνει είναι πιο κοντά στην οπτική των αρχαίων Ελλήνων γιατί χρησιμοποιεί τον στατικό ορισμό της εφαπτομένης ευθείας, οπότε

αρκεί να αποδείξει ότι η ευθεία ΛΑ «ακουμπά» το διάγραμμα της καμπύλης $z = F(x)$ μόνο στο σημείο $A(x_0, F(x_0))$.

Για το σκοπό αυτό θεωρεί σημείο $Z(x_1, F(x_1))$ με $x_1 < x_0$ και αποδεικνύει ότι το σημείο τομής Ι των ΖΗ και ΑΛ $(ZH \parallel B\Gamma)$ βρίσκεται δεξιά από το Ζ, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΒΓ είναι όμοια οπότε και λόγω της (1) έχουμε,

$$\frac{HA}{HI} = \frac{BA}{B\Lambda} = BE \text{ άρα } HA = HI \cdot BE.$$

Η συνάρτηση f είναι αύξουσα οπότε,

$$HA = BA - \Gamma Z = F(x_0) - F(x_1) < B\Gamma \cdot BE \quad (2)$$

Επομένως $HI \cdot BA < B\Gamma \cdot BE$ άρα $HI < B\Gamma = ZH$ αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

1.5.15 Η μέθοδος του Barrow για την ολοκλήρωση της τέμνουσας.

Ο **Gerardus Mercator (1512 – 1594)**, το πραγματικό του όνομα ήταν Gerhard Kremer, υπήρξε κατά γενική ομολογία ο μεγαλύτερος χαρτογράφος στην ιστορία. Το 1568 επινόησε μια νέα χαρτογραφική προβολή η οποία έδωσε τη δυνατότητα στους ναυτικούς να συνδέουν το σημείο προορισμού με το σημείο εκκίνησης με μία ευθεία γραμμή. Θεώρησε ότι η γη είναι εγγεγραμμένη σε ένα ορθό άπειρο κύλινδρο ο οποίος ακουμπά τη γη στον ισημερινό. Αν προβάλουμε τη γη πάνω στο κύλινδρο και τον κόψουμε, τότε οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι θα δημιουργήσουν ένα πλέγμα καθέτως τεμνομένων ευθειών. Οι αποστάσεις μεταξύ των μεσημβρινών παραμένουν σταθερές, ενώ όσο μεγαλώνει το γεωγραφικό πλάτος οι αποστάσεις μεταξύ των παραλλήλων αυξάνονται. Στη προβολή αυτή ένας κύκλος γεωγραφικού πλάτους φ έχει μήκος στο χάρτη 2πR, ενώ πάνω στη γήινη σφαίρα 2πRcosφ, δηλαδή συντελεστή παραμόρφωσης

$$\frac{2\pi R}{2\pi R \cos\phi} = \sec\phi.$$

Έτσι ο **Mercator** όφειλε να βρεί με πιο τρόπο μεταβάλλονται οι αποστάσεις αυτές, δεν υπάρχει όμως καμιά γραπτή μαρτυρία για τον τρόπο που τις υπολόγισε. Αργότερα το 1599 ο **Edward Wright (1560 – 1615)**, ένας Άγγλος μαθηματικός, στο βιβλίο του *Certaine Errors in Navigation(Ορισμένα* *λάθη στην πλοήγηση)*[77] , αποδεικνύει ότι η μεταβολή αυτή δίνεται από τη σχέση.

$$\Delta y = (R\sec\phi)\Delta\phi \quad (1)$$

Αν θέσουμε $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = 1,2,3,\ldots$, αρχίζοντας από τον ισημερινό $(y_0 = 0)$ και αυξάνοντας σταθερά το γεωγραφικό πλάτος ϕ κατά $\Delta\phi$, μπορούμε με *αριθμητική ολοκλήρωση* να βρούμε τις διαφορές Δy_i για όλα τα γεωγραφικά πλάτη. Ο Wright με τον τρόπο αυτό δημοσίευσε ένα πίνακα τιμών με $\Delta\phi = 1'$ της μοίρας και $0^0 \le \phi \le 75^0$.

Με σύγχρονους όρους η (1) αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{d\phi} = R\sec\phi$, η οποία έχει λύση την $y = R\int_0^{\phi}\sec\theta d\theta$. Πολλά χρόνια αργότερα γύρω στα 1646 ο **Henry Bond,** καθηγητής μαθηματικών συνέκρινε τον πίνακα του Wright, με ένα πίνακα λογαριθμικών εφαπτόμενων και διαπίστωσε ότι, αν τα στοιχεία στο λογαριθμικό πίνακα γραφόταν στη μορφή $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}\right)$ οι δύο πίνακες θα συνέπιπταν απόλυτα. Έτσι συμπέρανε ότι

$$\int_0^{\phi}\sec\theta d\theta = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right],$$

το οποίο όμως δεν το απόδειξε.

Η απόδειξη έγινε από τον Isaac Barrow (1670) στο έργο του *Geometrical Lectures,* και επειδή είναι η πρώτη στην οποία γίνεται χρήση της τεχνικής της ανάλυσης σε απλά κλάσματα θα την παραθέσουμε με σύγχρονο συμβολισμό.

Ισχύει $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$
$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)}$

Οπότε $\int_0^{\phi}\sec\theta d\theta = \dfrac{1}{2}\left[\ln|1+\sin\theta| - \ln|1-\sin\theta|\right]_0^{\phi} = \ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}\right)\right]$.

[77] Eli Maor, *Τριγωνομετρικά Λουκούμια*, Μετάφραση στα ελληνικά, Τεύκρος Μιχαηλίδης, εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 220.

1.5.16 O Isaac Newton (1642 – 1727) διάδοχος του Barrow με τη χρήση των απειροσειρών μπόρεσε και ανακάλυψε το θεώρημα του διωνύμου, μία από τις τέσσερις σημαντικές του ανακαλύψεις το οποίο δημοσίευσε στη Άλγεβρα του ο Wallis το 1685.
Το διώνυμο του Newton γράφεται με πιο οικείο τρόπο στη μορφή,

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m/n}{k}Q^k\right],$$

με $\binom{m/n}{k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{m}{n}-k+1\right).$[78]

Όπου το P+PQ εκφράζει την ποσότητα της οποίας αναζητούμε τη ρίζα, τη δύναμη ή τη ρίζα της δύναμης.

π.χ. $\left(\alpha^2+\beta^3\right)^{\frac{4}{3}} = \alpha^{\frac{8}{3}} + \frac{4}{3}\beta^3\alpha^{\frac{2}{3}} + \frac{2\beta^6}{9\alpha^{\frac{4}{3}}} - \frac{4\beta^9}{81\alpha^{\frac{10}{3}}} + \cdots$

Οπότε με το θεώρημα του διωνύμου μπορούσε να τετραγωνίσει εύκολα καμπύλες της μορφής,

$$y = \left(1-x^p\right)^q.$$

O Newton κατέληξε στο θεώρημα του διωνύμου μελετώντας τη διαδικασία που ακολούθησε ο Wallis για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

O Newton απλώς παρατήρησε ότι μπορούσε να βρεί το ίδιο αποτέλεσμα αν έπαιρνε

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8,$$

και μετά ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο»

$$\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{8.5}x^5 - \frac{1}{16.7}x^7 - \frac{5}{128.9}x^8.$$

---

[78] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus,* New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 178.

Μέσα από το θεώρημα του διωνύμου έδειξε ότι οι απειροσειρές δεν έπαιζαν μόνο προσεγγιστικό ρόλο, αλλά ήταν εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων στις οποίες αντιστοιχούσαν.
Γενικεύει τη «Μέθοδο της αντικατάστασης» για τους κανόνες παραγώγισης και δημοσιεύει ένα εκτεταμένο πίνακα αντιπαραγώγων, με τον οποίο μετατρέπει τον τετραγωνισμό, σε υπολογισμό επιφανειών κάτω από το γράφημα κυκλικών και υπερβολικών συναρτήσεων.
Σήμερα θα γράφαμε

$$\int \frac{\alpha}{\beta+\gamma x}dx \text{ ή } \int \sqrt{\alpha^2-x^2}dx.$$

Έτσι αν , $y' = \dfrac{\alpha x^{n-1}}{\beta+\gamma x^n}$ τότε με την αντικατάσταση $z=\gamma x^n$ παίρνει,

$$y = \int \frac{\alpha}{n\beta\gamma + n\gamma z}dz.$$

Για να υπολογίσει τις επιφάνειες αυτές τις εκφράζει με το διωνυμικό θεώρημα και μετά κάνει ολοκλήρωση «όρο προς όρο»

Αν για παράδειγμα,

$$y' = \sqrt{\alpha^2+x^2} = \alpha + \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x^4}{8\alpha^3} + \frac{x^6}{16\alpha^5} - \frac{5x^8}{128\alpha^7} + \cdots, \text{ τότε}$$

$$y = \alpha x + \frac{x^3}{3\cdot 2\alpha} - \frac{x^5}{5\cdot 8\alpha^3} + \frac{x^7}{7\cdot 16\alpha^5} - \frac{5x^9}{9\cdot 128\alpha^7} + \cdots$$

Στο έργο του *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (*Ανάλυση σε εξισώσεις άπειρου πλήθους όρων*) το οποίο γράφτηκε το 1666, αλλά εξεδόθη το 1712 απέδειξε[79] την πρόταση:

Το εμβαδόν Ε μιας καμπύλης με εξίσωση $y=\alpha x^{\frac{m}{n}}$ δίνεται από τη σχέση $E = \dfrac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}$.

Υποθέτει ότι το εμβαδόν δίνεται από τη σχέση $E = \dfrac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}$.

Αν είναι o η απειροστή αύξηση της τετμημένης, τότε η νέα τετμημένη θα είναι x+ oy και το νέο εμβαδόν θα είναι

$$E + oy = \frac{n}{m+n}\alpha(x+o)^{\frac{m+n}{n}}.$$

[79] C. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons 1968, σελ. 433

Εφαρμόζει το θεώρημα του διωνύμου απαλείφει τους ίσους όρους

$$E \text{ και } \frac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}$$

αγνοεί τους όρους που περιέχουν την απειροστή αύξηση o, διαιρεί και τα δύο μέλη με το o, αγνοεί όσους όρους περιέχουν ακόμα το o, οπότε τελικά προκύπτει ότι $y=\alpha x^{\frac{m}{n}}$.

Αντίστροφα αν $y=\alpha x^{\frac{m}{n}}$ η εξίσωση της καμπύλης τότε το εμβαδόν θα είναι

$$E=\frac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}.$$

Αυτή ήταν μάλλον η πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών που εισάγεται το Θεμελιώδες Θεώρημα ως μέθοδος υπολογισμού εμβαδού ή ολοκλήρωσης, δηλαδή εφαρμόζοντας αντιπαραγώγιση στη παράγωγο του ζητούμενου εμβαδού.

Συμπέρανε επίσης ότι αν η εξίσωση μιας καμπύλης $y=f(x)$ περιέχει όρους της μορφής $\alpha x^{\frac{m}{n}}$, ο τετραγωνισμός της θα προκύπτει από αθροίσματα όρων της μορφής $\frac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}$. Αν ο αριθμός $\frac{m+n}{n}$ είναι ανάγωγο ρητό κλάσμα τότε για το τετραγωνισμό χρησιμοποιεί τη μέθοδο των σειρών,όπως αναφέραμε προηγουμένως.

Εφαρμόζοντας την ιδέα αυτή στην υπερβολή $y(1+x)=1$ βρήκε όχι μόνο το γνωστό τύπο του Mercator

$z=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, αλλά και την εκθετική σειρά

$$e^z=1+x=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$$

Ο Newton ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό και την ευθειοποίηση καμπύλων η οποία μπορεί να γίνει στοιχειωδώς, όπως και με αυτές των οποίων η ευθειοποίηση μπορεί να γίνει μέσω τόξων γνωστών καμπύλων. Σε χειρόγραφα τα οποία εξεδόθησαν το 1712 με τίτλο *Methodus Differentialis (Διαφορική Μέθοδος)* εισάγεται η κατά προσέγγιση ολοκλήρωση, η οποία αφορά τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τα οποία δεν υπάγονται σε κανένα από τα ήδη γνωστά. Η διαδικασία που ακολουθείται γνωστή με το όνομα *«τύπος παρεμβολής του Newton»*, συνίσταται στην αντικατάσταση της καμπύλης $y=f(x)$ από μία παραβολή η οποία διέρχεται από σημεία της καμπύλης.

Το 1671 δημοσιεύει[80] μία πραγματεία η οποία περιέχει δύο πίνακες ολοκληρωμάτων. Ο πρώτος πίνακας που τιτλοφορείται «Ένας κατάλογος από μερικές καμπύλες οι οποίες συσχετίζονται με ευθύγραμμα σχήματα», αποτελείται από καμπύλες $y=f(z)$ των οποίων η αντίστοιχη επιφάνεια $E=F(z)$ μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια άμεσα ή με αντίστροφη παραγώγιση. Ο δεύτερος πίνακας τιτλοφορείται, «Ένας κατάλογος από καμπύλες οι οποίες συσχετίζονται με κωνικές τομές», και αποτελείται από καμπύλες $y=f(x)$ των οποίων η αντίστοιχη επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί από την επιφάνεια μιας κατάλληλης κωνικής τομής, δηλαδή από ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x} \text{ ή } \int \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\, dx.$$

Η διαδικασία που ακολουθεί ονομάζεται «ολοκλήρωση με αντικατάσταση» και είναι η γνωστή μας σχέση $\int f(x)dx = \int f(\psi(z))\psi'(z)dz$

Έτσι αποδεικνύει ότι

$$\int y dz = \frac{1}{n}\int \frac{dx}{e+fx}, \text{ όπου } y=\frac{z^{n-1}}{e+fz^n},$$

οπότε μπορεί να υπολογίζει και ολοκληρώματα της μορφής,

$$F_k = \int \frac{z^{kn-1}}{e+fz^n}dz \quad (k\geq 1),$$

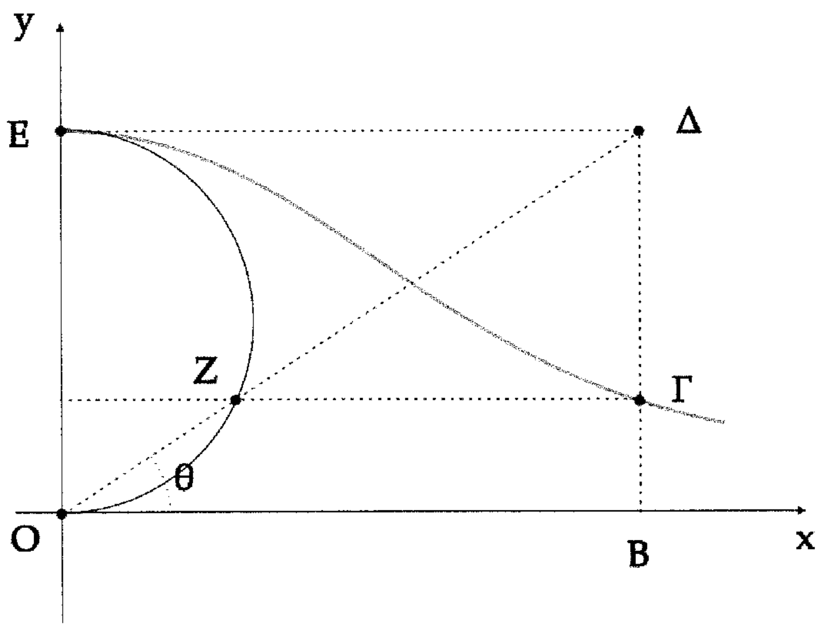
τα οποία ονομάζει «πρώτης τάξης»,

ενώ τα ολοκληρώματα $\int \frac{z^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}dz$ τα ονομάζει «δέκατης τάξης».

Για όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα χρησιμοποιεί την αντικατάσταση $x=z^n$.

Σε εφαρμογή των πινάκων αυτών παραθέτει παραδείγματα υπολογισμού διαφόρων επιφανειών. Στο πρώτο παράδειγμα τετραγωνίζει την *versiera* (η οποία αργότερα θα ονομαστεί « *η μάγισσα της Agnesi*») ως εξής:

[80] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 212



Σχήμα 28

Έστω ημικύκλιο διαμέτρου 1 και Β τυχαίο σημείο του x – άξονα, σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΒΔΕ (*Σχήμα 28*). Έστω Ζ το σημείο τομής του ημικυκλίου και της διαγωνίου ΟΔ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ο γεωμετρικός τόπος των προβολών των σημείων Ζ πάνω στην ΒΔ είναι η «η μάγισσα της Agnesi».

Έστω $\Gamma(x,y)$ τότε από από τίς σχέσεις $OZ^2 = y$ καί $\frac{B\Delta}{O\Delta} = \frac{y}{OZ}$ προκύπτει ότι η καμπύλη έχει εξίσωση $y = \frac{1}{1+x^2}$, οπότε η ζητούμενη επιφάνεια δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$t = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

το οποίο ξέρουμε ότι είναι ίσο με arctanx.

Από τους πίνακες παρατήρησε ότι η επιφάνεια s κάτω από τον κύκλο $u = \sqrt{1-z^2}$ μετασχηματίζεται στην επιφάνεια t με τον μετασχηματισμό,

$$x = \frac{1}{z}\sqrt{1-z^2} = f(z) \text{ ή } z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \psi(z),$$

και είναι $t = zu - 2s$.

Έτσι απόδειξε ότι $\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Στο *In the epistola posterior*[81] παρουσιάζει χωρίς απόδειξη το «prime theorem» που αφορά τον τετραγωνισμό των καμπύλων. Έτσι με τους δικούς του συμβολισμούς το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη

$y=x^{\theta}\left(e+fx^{n}\right)^{\lambda}$ είναι,

$$\int x^{\theta}\left(e+fx^{n}\right)^{\lambda}dx=\frac{Qx^{\pi}}{s}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-k)}{(s-1)(s-2)\ldots(s-k)}\frac{e^{k}}{f^{k}x^{kn}}\right],\ (1)$$

όπου $Q=\frac{\left(e+fx^{n}\right)^{\lambda+1}}{nf}$, $r=\frac{\theta+1}{n}$, $s=\lambda+r$ και $\pi=n(r-1)$.

Αν r είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα με r όρους, σε κάθε άλλη περίπτωση είναι μία σειρά απείρων όρων η σύγκλιση της οποίας δεν απασχόλησε τον Newton.

Για παράδειγμα έστω $y=\frac{x}{\left(1-x^{2}\right)^{2}}=x\left(1-x^{2}\right)^{-2}$, τότε $\theta=1, f=-1, n=2$

$\lambda=-2$, $Q=-\frac{1}{2}\left(1-x^{2}\right)^{-1}$, $r=1$, $s=-1$ και $\pi=0$.

Οπότε από την (1) έχουμε $\int\frac{x}{\left(1-x^{2}\right)^{2}}dx=\frac{x^{2}}{2\left(1-x^{2}\right)}$.

1.5.17 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) ήταν ένας αυτοδίδακτος μαθηματικός. Το 1672 επισκέφτηκε το Παρίσι με διπλωματική αποστολή, εκεί συνάντησε τον Huygens ο οποίος του συνέστησε να μελετήσει τα έργα του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Pascal κ.λ.π., πράγμα που είχε ως αποτέλεσμα τον οριστικό προσανατολισμό του νεαρού διπλωμάτη προς την επιστημονική έρευνα. Γύρω στα 1673 [82] συνειδητοποίησε μελετώντας το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» του Pascal, ότι οι τετραγωνισμοί των καμπύλων εξαρτιόταν από το άθροισμα των τεταγμένων ή από τα απείρως λεπτά ορθογώνια από τα οποία αποτελείται το εμβαδόν. Το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» το οποίο είχε χρησιμοποιήσει ο Pascal για να τετραγωνίσει το ημίτονο και ο Barrow για να λύσει το πρόβλημα της κατασκευής της εφαπτομένης, φαίνεται ότι αποτελούσε το κλειδί για την κατανόηση της διαδικασίας ολοκλήρωσης ως αντίστροφης της παραγώγισης.

Ο Leibniz όπως είδαμε στη σελίδα 57 είδε το άθροισμα του Pascal στη μορφή

$$\int yds=\int adx.$$

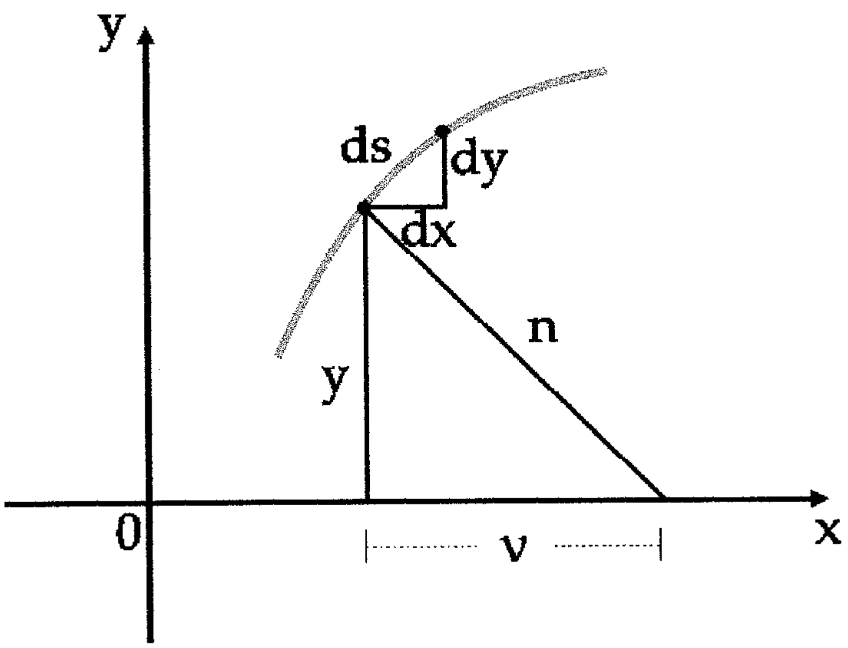
[81] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 226.

[82] C. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons 1968, σελ. 440.

Η τελευταία ισότητα είναι στενά συνδεδεμένη με τη μέθοδο του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας που παρουσιάσαμε στη σελίδα 25, όπως επίσης και με τις απειροστικές του μεθόδους για τον υπολογισμό κέντρων βάρους και του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.
Πράγματι αν θεωρήσουμε ότι ημισφαίριο με ακτίνα α περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των x, τότε το εμβαδόν της απειροστής ζώνης η οποία δημιουργείται από την περιστροφή του απειροστού τόξου ds είναι $2\pi y ds$.
Οπότε το εμβαδόν του ημισφαιρίου θα είναι [83]

$$\int 2\pi y ds = 2\pi\alpha \int dx = 2\pi\alpha^2$$

Ο Leibniz κατάλαβε ότι η μέθοδος του Αρχιμήδη όπως εφαρμόστηκε από τον Pascal, μπορεί να γενικευθεί όπως αναφέρει στο αυτοβιογραφικό του έργο «*Historia et origo calculis differentiali*» σε αυθαίρετες συναρτήσεις, όπου το ρόλο της ακτίνας **α** του κύκλου τον έχει η κάθετη **n** στη καμπύλη.



Σχήμα 29

Πράγματι από την ομοιότητα των τριγώνων (*σχήμα29*) προκύπτει ότι $y\ ds = n\ dx$ και προσθέτοντας τα απειροστά αυτά γινόμενα $\int y ds = \int n dx$.

[83] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus*, New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 241.

Ο Leibniz εφάρμοσε τη μέθοδο αυτή για τη λύση διαφόρων προβλημάτων ολοκλήρωσης, τετραγωνισμό καμπύλων, υπολογισμό μήκους καμπύλων, και για την απόδειξη του θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.
Από το *(σχήμα29)* προκύπτει ακόμα ότι $y\,dy = v\,dx$ όπου **v** η υποκάθετη της καμπύλης οπότε

$$\int y dy = \int v dx \quad (1).$$

Αφού $v = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ η τελευταία σχέση γράφεται $\int y\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int y dy$.

Η σχέση (1) κατέχει κεντρικό ρόλο στο λογισμό του Leibniz γιατί παρουσάζει δύο σημαντικες ιδέες:

- Το μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων κατά κάποιο τρόπο με αντικατάσταση.
- Την αναγωγή των τετραγωνισμών των καμπύλων σε αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης.

Στη συνέχεια περί τα τέλη του 1673 ή αρχές του 1674 ο Leibniz ανακάλυψε ένα γενικό «μετασχηματισμό» (αυτά τα θεωρήματα ήταν συνήθως ένας συνδυασμός ολοκλήρωσης κατά μέρη και αντικατάστασης μεταβλητών) με τον οποίο μπορούσε να λύσει όλα τα μέχρι τότε προβλήματα τετραγωνισμών.[84] Το «θεώρημα του μετασχηματισμού» αυτού περιγράφεται από τον τύπο:

$$\int_\alpha^\beta y dx = \frac{1}{2}\left([xy]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta z dx\right). \quad (2)$$

Με την αντικατάσταση $z = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)$ στη σχέση (2) παίρνουμε το τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντας

$$\int_\alpha^\beta y dx = [xy]_\alpha^\beta - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} x dy.$$

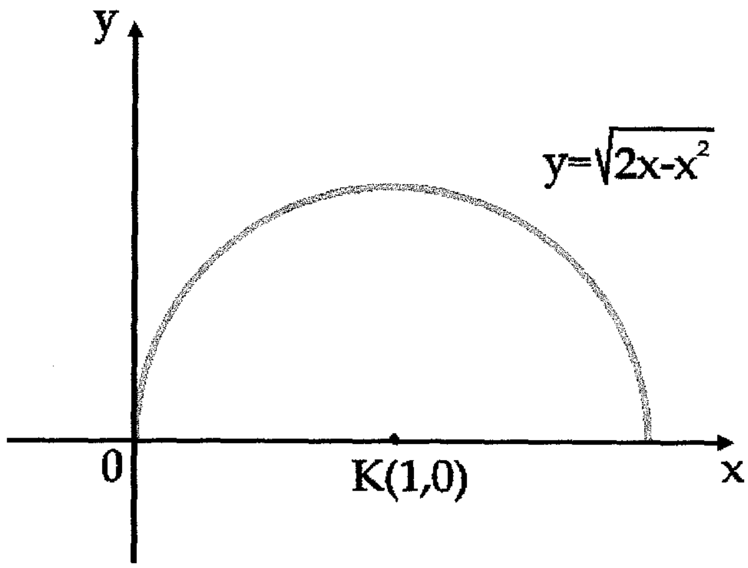
Με τη μέθοδο αυτή ο ο Leibniz ανακάλυψε την «φημισμένη αριθμητική ολοκλήρωση του κύκλου», από την οποία προέκυψε η σειρά

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

[84] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus,* New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 245.

η οποία φέρει το όνομα του.

Θα περιγράψουμε την απόδειξη που έκανε ο Leibniz.



Σχήμα 30

Το ημικύκλιο στο σχήμα *(σχήμα 30)* είναι η γραφική παράσταση της καμπύλης $y=\sqrt{2x-x^2}$ και αφού $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}$ έχουμε $z=y-x\left(\frac{dy}{dx}\right)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$,

άρα $x=\frac{2z^2}{1+z^2}$.

Τότε

$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=($ από τη σχέση (2))

$=\frac{1}{2}\left(\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1+\int_0^1 zdx\right)=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\int_0^1 xdz\right)\right]=1-\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}dz$

$=1-\int_0^1 z^2\left(1-z^2+z^4-z^6+\cdots\right)dz$.

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο» παίρνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Το Νοέμβριο του 1676 σε ένα χειρόγραφο δίνει γενικό κανόνα $dx^n=nx^{n-1}dx$, όπου n κλασματικός αριθμός και $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ο υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι μία εύκολη διαδικασία γιατί έχουμε απλούς κανόνες οι οποίοι εφαρμόζονται με τον ίδιο τρόπο σε κάθε συνάρτηση. Έτσι ο καθένας είναι σίγουρος ότι η παράγωγος μιας στοιχειώδους συνάρτησης είναι επίσης στοιχειώδης συνάρτηση. Για τα ολοκληρώματα δυστυχώς τα πράγματα είναι πολύ διαφορετικά, υπάρχουν στοιχειώδεις συναρτήσεις των οποίων η αρχική συνάρτηση δεν είναι στοιχειώδης. Για παράδειγμα δεν υπάρχει στοιχειώδης συνάρτηση F τέτοια ώστε $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$. Επίσης κάτι ακόμα χειρότερο, υπάρχει μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων για τις οποίες δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η αρχική τους συνάρτηση είναι στοιχειώδης. Για το πρόβλημα αυτό θα ασχοληθούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 10.

Στο παρόν κεφάλαιο θα προσδιορίσουμε όσο το δυνατό περισσότερες κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και θα περιγράψουμε τεχνικές για την ολοκλήρωση τους. Επίσης οι συναρτήσεις f των οποίων αναζητούμε μία αρχική συνάρτηση F, θα θεωρείται ότι είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ ή τουλάχιστον ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του Δ.

Οπότε θα είναι $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, με $F(\alpha)=0$, $x\in\Delta$ και $\alpha\in\Delta$ (σταθερό), και ακόμα ότι η F είναι συνεχής στο Δ με

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in\Delta .$$

2.1 Στοιχειώδη ολοκληρώματα

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad n\neq -1, n\in\mathbb{Z}$ $\qquad x\in\mathbb{R}$ και $n=1,2,\ldots$

(ii) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$ $\qquad x\in\mathbb{R}^*$

(iii) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,$ $\qquad x>0,\ a\neq -1$

(iv) $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$ $\qquad x\in\mathbb{R},\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1$

(v) $\int e^x dx = e^x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(vi) $\int \cos x dx = \sin x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(vii) $\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(viii) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \qquad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2},\ \pi + k\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

(ix) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c \qquad x \in (k\pi,\ (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(x) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(xi) $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

(xii) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c \qquad x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

(xiii) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xiv) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c \qquad -1 < x < 1$

(xv) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \arg\ \sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xvi) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \arg\ \cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xvii) $\int \cosh x dx = \sinh x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xviii) $\int \sinh x dx = \cosh x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xix) $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c \qquad x \in \mathbb{R}$

(xx) $\int \frac{1}{\sinh^2 x}\, dx = -\coth x + c$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(xxi) $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$ $\qquad x > 0$

2.2 Βασικές μέθοδοι ολοκλήρωσης

Οι μέθοδοι της αντικατάστασης και της ολοκλήρωσης κατά παράγοντας εφαρμόζονται για να καταλήξουμε σε απλούστερα ολοκληρώματα, χωρίς βέβαια να αποτελεί κανόνα για όλες τις συναρτήσεις.

2.2.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f, σε ένα διάστημα (α, β) και $g:(\gamma, \delta) \to (\alpha, \beta)$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $(F \circ g)$ και η παράγωγος της δίνεται από τον τύπο:

$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ με $x \in (\gamma, \delta)$

$$\text{Επομένως } \int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + c.$$

Η κατάλληλη επιλογή αντικατάστασης διευκολύνει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Δυστυχώς όμως δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας για την επιλογή της αντικατάστασης, αλλά εξαρτάται κάθε φορά από το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα. Μπορούμε ωστόσο να αναφέρουμε κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

1η Περίπτωση Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, τότε θέτουμε $x = |\alpha|\sin\theta$ ή $x = |\alpha|\cos\theta$.

2η Περίπτωση Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha^2 + x^2}$, τότε θέτουμε $x = |\alpha|\tan\theta$ ή $x = |\alpha|\cot\theta$ ή $x = |\alpha|\sinh y$.

3η Περίπτωση Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει την παράσταση $\sqrt{x^2 - \alpha^2}$, τότε θέτουμε $x = |\alpha|\frac{1}{\cos\theta}$ ή $x = |\alpha|\cosh y$.

Γενικά αν στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση υπάρχουν παραστάσεις της μορφής:

i) $\sqrt{\alpha^{2\nu} - x^{2\nu}}$ ii) $\sqrt{x^{2\nu} + \alpha^{2\nu}}$ iii) $\sqrt{x^{2\nu} - \alpha^{2\nu}}$

θέτουμε αντίστοιχα:

i) $x^\nu = \alpha^\nu \sin\theta$ ή $x^\nu = \alpha^\nu \cos\theta$,

ii) $x^\nu = \alpha^\nu \tan\theta$ ή $x^\nu = \alpha^\nu \sinh y$,

iii) $x^\nu = \dfrac{\alpha^\nu}{\cos\theta}$ ή $x^\nu = \alpha^\nu \cosh y$.

Μία άλλη αντικατάσταση, η οποία είναι κατάλληλη και για τις τρείς περιπτώσεις είναι η $x^\nu = \alpha^\nu y^{-1}$.

4η Περίπτωση Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha x+\beta}$, τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x+\beta} = y$,

5η Περίπτωση Για το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+\alpha)^n}dx$,

- Αν n = 1 θέτουμε $x = \sqrt{\alpha}t$, οπότε

$$I = \int \frac{1}{(x^2+\alpha)}dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C.$$

- Αν n > 1 θέτουμε $x = \sqrt{\alpha}\tan t$, και παίρνουμε

$$I = \int \frac{1}{(x^2+\alpha)^n}dx = \alpha^{\frac{1}{2}-n}\int \cos^{2n-2} t dt.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα ισχύει ο αναγωγικός τύπος

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx \quad \text{για } n = 2,3,\cdots.$$

7η Περίπτωση Αν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int R(e^x)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση του y, τότε η αντικατάσταση $e^x = y$ μετασχηματίζει το ολοκλήρωμα στη μορφή $\int R(y)\frac{dy}{y}$.

2.2.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

2.2.3 Θεώρημα. Αν οι συναρτήσεις f' και g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ τότε

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,\ x \in \Delta.$$

2.2.4 Γενικευμένη ολοκλήρωση κατά μέρη: Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες πολλές φορές. Ισχύει ο παρακάτω τύπος γνωστός ως **«γενικευμένος τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης»**

$$\int fg^{(n+1)} = fg^{(n)} - f^{(1)}g^{(n-1)} + f^{(2)}g^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n f^{(n)}g + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}g$$

Με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς παραγώγους τάξεως n, στο διάστημα Δ.

2.2.5 Σημείωση Πινακοειδής ολοκλήρωση κατά μέρη[1]

Σε πολλές περιπτώσεις, όταν σε ολοκληρώματα της μορφής $\int fx(g(x)dx$, απαιτούνται πολλές επαναλήψεις της κατά παράγοντας ολοκλήρωσης , υπάρχει μία μέθοδος η οποία μπορεί να μας εξοικονομήσει πολύ κόπο. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται **πινακοειδής ολοκλήρωση.**

Για το ολοκλήρωμα $\int F(t)G(t)dt$ έχουμε,

Στήλη 1	Στήλη 2
$+F$	G
$-F^{(1)}$	$G^{(-1)}$
$+F^{(2)}$	$G^{(-2)}$
.	.
.	.
.	.
$(-1)^n F^{(n)}$	$G^{(-n)}$
$(-1)^{n+1} F^{(n+1)}$	$G^{(-n-1)}$

Στη πρώτη στήλη έχουμε τη συνάρτηση F και τις διαδοχικές παραγώγους της, με τα πρόσημα εναλλάξ θετικά αρνητικά.

Στη δεύτερη στήλη έχουμε τη συνάρτηση G και τις διαδοχικές της αντιπαραγώγους (συμβολισμός $G^{(-n)}$), με τα πρόσημα πάντα θετικά.

[1] The College Mathematics Journal, Τόμος 21, No. 4, (Σεπτ. 1990), σελ. 307-311.

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των γινομένων κάθε στοιχείου της πρώτης στήλης, με το αντίστοιχο στοιχείο της δεύτερης στήλης που βρίσκεται στην αμέσως επόμενη γραμμή.

Δηλαδή,

$$\int F(t)G(t)dt = FG^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)} - \cdots + (-1)^n F^{(n)}G^{(-n-1)} +$$

$$+(-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k F^{(k)}G^{(-k-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt.$$

2.2.6 Παράδειγμα. $\int x^3 \cos x dx$

Στήλη 1	Στήλη 2
$+x^3$	$\cos x$
$-3x^2$	$\sin x$
$+6x$	$-\cos x$
-6	$-\sin x$
0	$\cos x$

Οπότε

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + C.$$

2.2.7 Η Ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων

Η κλάση των ρητών συναρτήσεων είναι η πιο σημαντική από αυτές οι οποίες μπορούν να ολοκληρώνονται με στοιχειώδης συναρτήσεις . Η μέθοδος που ακολουθείται είναι αυτή της διάσπασης σε άθροισμα απλούστερών κλασμάτων, και ήταν ήδη γνωστή και πλήρως ανεπτυγμένη από τους Leibniz και Johann Bernoulli από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα.
Η ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων γίνεται με την αναγωγή τους σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, σύμφωνα με την πρόταση και το θεώρημα πού ακολουθεί και με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

2.2.8 Θεώρημα Από την Άλγεβρα είναι γνωστό ότι αν ένα πολυώνυμο Q έχει πραγματικές ρίζες $\rho_1, \varrho_2, \cdots, \rho_n$ με πολλαπλότητες $k_1, k_2, \cdots, k_n$ αντίστοιχα και μιγαδικές ρίζες

$\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_2+i\beta_2$, $\cdots$, $\alpha_m+i\beta_m$ με πολλαπλότητες $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$ αντίστοιχα, τότε ανάγεται σε γινόμενο πραγματικών πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων ως εξής:

$$Q(x) = (x-\rho_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\rho_n)^{k_n}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{\ell_m}$$

όπου m, n και $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 1$, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m \geq 1$ μοναδικοί φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$k_1+k_2+\ldots+k_n+2(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_m) = N$$

$$x^2+p_jx+q_j = \left[x-\left(\alpha_j+i\beta_j\right)\right]\left[x-\left(\alpha_j-i\beta_j\right)\right]$$

και $\rho_1, \ldots, \rho_n, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m \in \mathbb{R}$, με $p_j^2-4q_j<0$, για $1\leq j\leq m$.

2.2.9 Πρόταση (Ανάλυση σε απλά κλάσματα) Έστω η γνήσια ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

- Αν ρ είναι μία πραγματική ρίζα του Q(x) με βαθμό πολλαπλότητας n, τότε
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{K_n}{(x-\rho)^n}+\frac{K_{n-1}}{(x-\rho)^{n-1}}+\ldots+\frac{K_1}{x-\rho}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\ \text{με } Q_1(\rho)\neq 0, \text{ και}$$
$K_1, K_2, \ldots, K_n$ σταθεροί προσδιοριστέοι πραγματικοί αριθμοί.

- Αν υπάρχει μιγαδική ρίζα $\alpha+i\beta$ με πολλαπλότητα m, τότε
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{L_mx+M_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\ldots+\frac{L_1x+M_1}{\left(x^2+px+q\right)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$
με $x^2+px+q=[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]$
και $L_1, L_2, \ldots, L_m, M_1, M_2, \ldots, M_m$ σταθεροί προσδιοριστέοι πραγματικοί αριθμοί.

2.2.10 Θεώρημα Έστω η ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα P(x), Q(x) είναι δύο πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους, βαθμός (P) < βαθμός (Q) = N, και ο συντελεστής του x^N στο Q(x) είναι μονάδα.
Υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί

$K_{ij}\in\mathbb{R}$, για $1\leq j\leq k_i$, $1\leq i\leq n$, και

L_{ij}, $N_{ij}\in\mathbb{R}$, για $1\leq j\leq l_i$, $1\leq i\leq m$, τέτοιοι ώστε

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{K_{ij}}{(x-\varrho_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{L_{ij}x+M_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}. \quad (1)$$

Έτσι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης έχουμε να επιλύσουμε δύο προβλήματα:

- Το ένα είναι ο υπολογισμός των συντελεστών K_{ij}, L_{ij} και M_{ij} στην ανάλυση σε απλά κλάσματα (1) και
- Το άλλο ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων μετά τον προσδιορισμό των σταθερών, τα οποία εκφράζονται με στοιχειώδεις συναρτήσεις, και είναι της μορφής.

(α) $\displaystyle\int\frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha|+c$

(β) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+c,\ n=2,3,\ldots$

(γ) $\displaystyle\int\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{2\alpha x+\beta-\sqrt{-\Delta}}{2\alpha x+\beta+\sqrt{-\Delta}}\right| + c$, όταν $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma < 0.$

(δ) $\displaystyle\int\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\Delta}} + c$, όταν $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma > 0.$

ή

$\displaystyle\int\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx = \frac{1}{\alpha(\varrho_1-\varrho_2)}\ln\left|\frac{x-\varrho_1}{x-\varrho_2}\right|+c$, με ϱ_1,ϱ_2 ρίζες του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

(ε) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{2\alpha}\ln|\alpha x^2+\beta x+\gamma| - \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\Delta}} + c$

(στ) $\displaystyle\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{n+1}} = \frac{1}{n\Delta}\frac{2\alpha x+\beta}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{2\alpha(2n-1)}{n\Delta}\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n} + c$

(ζ) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{n+1}} = \frac{-1}{2\alpha n}\frac{1}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n} - \frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{n+1}} + c$

(η) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx = \frac{A}{2\alpha}\ln|f(x)| + \frac{D}{2\alpha\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{\alpha x+\beta-\sqrt{-\Delta}}{\alpha x+\beta+\sqrt{-\Delta}}\right|$, αν $\Delta<0$

και

$$\int \frac{Ax+B}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx = \frac{A}{2\alpha}\ln|f(x)| + \frac{D}{\alpha\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{\Delta}}\right), \text{αν } \Delta>0.$$

Όπου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\Delta=4\beta^2-4\alpha\gamma$ και $D=\alpha B-\beta A$.

2.2.11 Παρατήρηση Για τον προσδιορισμό των συντελεστών στην ανάλυση σε απλά κλάσματα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Πολλές φορές όμως είναι δύσκολη η μέθοδος αυτή, γι'αυτό θα περιγράψουμε και μια άλλη μέθοδο με χρήση παραγώγων, η οποία είναι πολύ χρήσιμη όταν ο παρονομαστής έχει απλές πραγματικές ρίζες.

2.2.12 Πρόταση Έστω δύο πολυώνυμα P, Q πρώτα μεταξύ τους, τέτοια ώστε βαθμός P < βαθμός Q = μ, και το Q έχει μ απλές πραγματικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ δηλαδή,

$$Q(x)=(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\dots(x-\varrho_\mu),$$

τότε στην ανάλυση

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\varrho_1}+\frac{A_2}{x-\varrho_2}+\dots+\frac{A_\mu}{x-\varrho_\mu}$$

οι συντελεστές A_k, $k = 1, 2, \dots, \mu$ δίνονται από τον τύπο

$$A_k = \frac{P(\varrho_k)}{Q'(\varrho_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \mu$$

Αν ϱ ρίζα του Q(x) με βαθμό πολλαπλότητας n τότε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x-\varrho)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-\varrho)^{n-1}}+\dots+\frac{A_1}{x-\varrho}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ με } Q_1(\rho)\neq 0, \text{ και}$$

$$A_i=\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(n-i)}(\varrho) \text{ για } i=1,2,3,\dots,n$$

2.2.13 Παρατήρηση Σε μερικές ειδικές περιπτώσεις ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μπορεί να γίνει ευκολότερα.

- Αν ο αριθμητής της ρητής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση του x και ο παρονομαστής περιττής, ή αντίστροφα, τότε με την αντικατάσταση $x^2 = y$ υποβιβάζουμε τους εκθέτες του x σε αντίστοιχους εκθέτες του y , οπότε ο προσδιορισμός των συντελεστών γίνεται ευκολότερος.

2.2.14 Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I = \int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx$.

Θέτουμε $x^2 = y$, και έχουμε

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\int \frac{y+3}{(y-1)(y+1)^2}dy &= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2}\right]dy \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{y+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c.
\end{aligned}
$$

2.2.15 Παρατήρηση Θα περιγράψουμε τώρα μία αλγεβρική μέθοδο η οποία καθιστά πιο εύκολο τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης, αφού δεν υπολογίζει τους συντελεστές των απλών κλασμάτων στα οποία αναλύεται η συνάρτηση. Η μέθοδος αυτή ενδείκνυται όταν το Q(x) έχει πολλαπλές ρίζες.

2.2.16 Πρόταση (*Μέθοδος Hermite - Ostrogradski*). Έστω δύο πολυώνυμα P, Q τέτοια ώστε βαθμός P < βαθμός Q = N, ο συντελεστής του x^N στο Q είναι 1 και (P, Q) = 1.

Το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι όπως αναφέραμε στο Θεώρημα **2.2.10**

Θέτουμε,

$$Q_2(x) = (x-\varrho_1)\ldots(x-\varrho_n)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_mx+q_m)$$

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)},\ H = \frac{Q_1{}'Q_2}{Q_1},\ \text{τότε}$$

(i) Q_1,H είναι πολυώνυμα

(ii) Υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα P_1, P_2 τέτοια ώστε

$\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(P_1) < \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(Q_1), \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(P_2) < \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(Q_2)$

(iii) $\dfrac{P}{Q} = \left(\dfrac{P_1}{Q_1}\right)' + \dfrac{P_2}{Q_2}$

(iv) Τα πολυώνυμα P_1, P_2 μπορούμε να τα προσδιορίσουμε από την ταυτότητα

$$P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P \quad (*)$$

με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

2.2.17 Παράδειγμα $I = \displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$

Θέτουμε $Q(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2$,

οπότε

$Q'(x) = 2(x+1)(x^2+1)(3x^2+2x+1)$

Βρίσκουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη Q_1 των Q και Q'.

Είναι $Q_1(x) = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$

Άρα $Q_2(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_1(x)} = (x+1)(x^2+1)$

Έτσι έχουμε $\dfrac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} =$

$$= \left(\frac{P_1(x)}{x^3 + x^2 + x + 1}\right)' + \frac{P_2(x)}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

όπου $P_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $P_2(x) = \kappa x^2 + \lambda x + \mu$.

Από την (*) βρίσκουμε ότι $\alpha = -\dfrac{1}{4}$, $\beta = \dfrac{1}{4}$, $\gamma = 4$, $\kappa = 0$, $\lambda = \mu = \dfrac{1}{4}$.

Επομένως $I = \displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{-x^2 + x - 4}{4(x^3 + x^2 + x + 1)} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+x^2}dx =$

$$= \frac{-x^2 + x - 4}{4(x^3 + x^2 + x + 1)} + \frac{3}{4}\arctan x + c.$$

2.2.18 Εφαρμογή Θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$I=\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\left(Ax^2+Bx+\Gamma\right)^2}dx$ είναι ρητή συνάρτηση, αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

i) $A\Gamma-B^2=0$ ii) $\alpha\Gamma+\gamma A=2\beta B$.

Πράγματι:

i) Αν $A\Gamma-B^2=0$ τότε ο παρονομαστής έχει διπλή ρίζα $\varrho\in\mathbb{R}$ και γράφεται στη μορφή, $A^2(x-\varrho)^4$.

Οπότε αν θέσουμε $x-\varrho=u$, παίρνουμε,

$$\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\left(Ax^2+Bx+\Gamma\right)^2}dx=\int \frac{\alpha(u+\varrho)^2+2\beta(u+\varrho)+\gamma}{A^2u^2}du=$$

$$=-\frac{\alpha}{A^2u}-\frac{\alpha\varrho+\beta}{A^2u^2}-\frac{\alpha\varrho^2+2\beta\varrho+\gamma}{3A^2u^3}+\gamma.$$

ii) Αν $\alpha\Gamma+\gamma A=2\beta B$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\lambda\left(Ax^2+Bx+\Gamma\right)+(\mu x+\nu)(2Ax+2B),$$

Πράγματι από την ισότητα των πολυωνύμων, έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} A\lambda+2A\mu \quad &=\alpha\\ B\lambda+B\mu+A\nu &=\beta\\ \Gamma\lambda+2B\nu \quad &=\gamma \end{aligned}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση ως προς λ, μ και ν διότι η ορίζουσα των συντελεστών είναι $D=2A\left(A\Gamma-B^2\right)\neq 0$.

Λύση του συστήματος είναι η $(\lambda,\mu,\nu)=\left(-\frac{\alpha}{A},\frac{\alpha}{A},\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Οπότε

$$\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\left(Ax^2+Bx+\Gamma\right)^2}dx=-\frac{\alpha}{A}\int\frac{1}{Ax^2+Bx+\Gamma}dx+$$

$$+\frac{1}{A}\int\frac{(\alpha x+\beta)(2Ax+2B)}{\left(Ax^2+Bx+\Gamma\right)^2}dx=$$

$$\ldots=-\frac{\alpha x+\beta}{A\left(Ax^2+2Bx+\Gamma\right)}+k.$$

2.2.19 Ένας εναλλακτικός τρόπος για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.[2]

Η ιδέα ξεκίνησε από την λύση που έδωσε ένας μαθητής για το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{x^2-1}{x^3-2x}dx$.

Παρατήρησε ότι $I=\int \frac{x^2-1}{x^3-2x}dx=\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-2x^2\right|+C$

Έτσι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$J=\int \frac{\alpha x^n+\beta}{x\left(\gamma x^n+p\right)}dx,$$

θα δούμε ότι μπορούμε να βρούμε μια τιμή m τέτοια ώστε

$$\int \frac{\alpha x^n+\beta}{x\left(\gamma x^n+p\right)}\frac{x^m}{x^m}dx=\frac{1}{k}\int \frac{du}{u},$$ για μία σταθερά k.

Θέτουμε $u=\gamma x^{m+n+1}+px^{m+1}$, θα βρούμε m, k, τέτοια ώστε
$(m+n+1)\gamma x^{m+n}+(m+1)px^m=du=k\left(\alpha x^{m+n}+\beta x^m\right)$
Άρα τα m, k είναι λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases}(m+n+1)\gamma & =k\alpha \\ (m+1)p & =k\beta\end{cases}$$

με $m=\frac{\alpha p-\beta\gamma(n+1)}{\beta\gamma-\alpha p}$ και $k=\frac{\gamma pn}{\alpha p-\beta\gamma}$
Επομένως το ολοκλήρωμα

$$J=\int \frac{\alpha x^n+\beta}{x\left(\gamma x^n+p\right)}dx=\frac{\alpha p-\beta\gamma}{p\gamma n}\ln\left|x^{m+1}\left(\gamma x^n+p\right)\right|+C$$

Έτσι για το ολοκλήρωμα $L=\int \frac{x^6+1}{x^7-x}dx$, έχομε $m=-4$, άρα

$$L=\frac{1}{3}\ln\left|x^3-x^{-3}\right|+C.$$

---

[2] J. E. Nymann, An Alternative for Partial Fractions, The University of Texas, El Paso, TX, 1983, σελ. 60-61

2.2.20 Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Σε αυτή τη παράγραφο θα παρουσιάσουμε διάφορες περιπτώσεις αλγεβρικών άρρητων συναρτήσεων, οι οποίες με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.
Στα περιπτώσεις που ακολουθούν ο συμβολισμός R(x, y) σημαίνει μια συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ όπου P και Q πολυώνυμα των x, y.

1η Περίπτωση $\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{n}}\right)dx$, με $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\alpha q\neq\beta p$

και $\frac{\alpha x+\beta}{px+q}>0$, αν n άρτιος.

Θέτουμε $t=\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{n}}$, οπότε $x=\frac{\beta-qt^n}{pt^n-\alpha}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{n}}\right)dx=n(\alpha q-\beta p)\int R\left(\frac{\beta-qt^n}{pt^n-\alpha},t\right)\frac{t^{n-1}}{(\alpha-pt^n)^2}dt.$$

2η Περίπτωση $\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{n}},\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{m}}\right)dx$, με

$m, n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\alpha q\neq\beta p$ και $\frac{\alpha x+\beta}{px+q}>0$, αν m, n άρτιοι.

Θέτουμε $t=\left(\frac{\alpha x+\beta}{px+q}\right)^{\frac{1}{k}}$, όπου κ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των m, n.

3η Περίπτωση Ολοκλήρωση του διωνυμικού ολοκληρώματος

$I_{m,n,p}=\int(\alpha+\beta x^n)^p x^m dx$, όπου α, $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $m, n, p\in\mathbb{Q}$.

Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να εκφραστούν με στοιχειώδεις συναρτήσεις, αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς p, $\frac{m+1}{n}$, $p+\frac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος. (Συνθήκες του Chebychev).
Πράγματι:

(i) Αν p ακέραιος και $m = \dfrac{\kappa}{\lambda}$, $n = \dfrac{\varrho}{\nu}$ με $\kappa,\lambda,\varrho,\nu \in \mathbb{Z}$, η αντικατάσταση $x = t^k$, όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των ρητών αριθμών m, n, ανάγει το ολοκλήρωμα $I_{m,n,p}$ σε ολοκλήρωμα:

- πολυωνύμου του t, αν $p > 0$,
- ρητής συνάρτησης του t, αν $p < 0$.

(ii) Αν $\dfrac{m+1}{n}$ ακέραιος, τότε θέτουμε $t = (\alpha + \beta x^n)^{\frac{1}{s}}$ όπου s ο παρονομαστής του ρητού αριθμού p και παίρνουμε το ολοκλήρωμα,

$$I_{m,n,p} = \frac{s}{n\beta}\int t^{2s-1}\left(\frac{t^s-\alpha}{\beta}\right)^{\left(\frac{m+1}{n}\right)-1} dt,$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης, αφού ο $\dfrac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος.

(iii) Αν $p+\dfrac{m+1}{n}$ ακέραιος τότε θέτουμε $t = \left(\dfrac{\alpha+\beta x^n}{x^n}\right)^{\frac{1}{s}}$, όπου s ο παρονομαστής του ρητού αριθμού p και έχουμε,

$$I_{m,n,p} = -\frac{s}{n\alpha}\int t^{q+s-1}\left(\frac{\alpha}{t^s-\beta}\right)^{\frac{m+1}{n}+p+1} dt,$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης, αφού ο $\dfrac{m+1}{n}+p$ είναι ακέραιος.

Γενικά το ολοκλήρωμα $\int x^m\left(\alpha+\beta x^n\right)^p dx$, με την αντικατάσταση $\beta x^n = \alpha t$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int t^q (1+t)^p dt$, με το οποίο θα ασχοληθούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 10.

2.2.21 Εφαρμογή Θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int x^m\left(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma\right)^q,\ m \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q},\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},$$

μπορεί να αναχθεί σε άθροισμα διωνυμικών ολοκληρωμάτων.

Είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}=\alpha(x+M)^2+N$, όπου $M=\frac{\beta}{\alpha}$ και $N=\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}$.

Έτσι θα έχουμε $I=\int x^m\left(\alpha x^2+2\beta x+\gamma\right)^q=\int x^m\left[\alpha(x+M)^2+N\right]^q dx=$

$=\int (t-M)^m\left(\alpha t^2+N\right)^q dt$, με $x+M=t$. Οπότε αν αναπτύξουμε το $(t-M)^m$ θα προκύψει ένα άθροισμα διωνυμικών ολοκληρωμάτων.

4η Περίπτωση $\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx$, με $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\neq 0$.

Για τα ολοκληρώματα αυτά θα εφαρμόσουμε, *τις αντικαταστάσεις του Euler*, με την οποία ανάγονται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.
Πρίν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου αυτής θα χρειαστούμε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

- **Μορφή Α′**

$I_1=\int\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx$, με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\neq 0$.

Θέτουμε $t=2\alpha x+\beta$ οπότε $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\frac{1}{4\alpha}\left(t^2+4\alpha\gamma-\beta^2\right)$

Οπότε αν $\alpha>0$ $I_1=\int\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+4\alpha\gamma-\beta^2}}dt=$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4\alpha\gamma-\beta^2}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|2\alpha x+\beta+\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right|+c'.$$

Αν $\alpha<0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε

$$I_1=\int\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx=\frac{-1}{\sqrt{-\alpha}}\int\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma-t^2}}dt=\frac{-1}{\sqrt{-\alpha}}\arcsin\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}+c.$$

- **Μορφή Β′**

$$I_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx$$

Αποδεικνύεται ότι:

$2\alpha m I_m+(2m-1)\beta I_{m-1}+2\gamma(m-1)I_{m-2}=x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, όπου $I_2 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} - \frac{\beta}{2\alpha} I_0$, και το $I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx$ το οποίο είδαμε προηγουμένως πως υπολογίζεται (Μορφή Α′).

- **Μορφή Γ′**

$I_2 = \int \frac{P_\nu(x)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx$, όπου P_ν πολυώνυμο του x, βαθμού ν.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού, προσδιορίζουμε πολυώνυμο Q, βαθμού $\nu - 1$ και μία σταθερά k, έτσι ώστε:

$$\int \frac{P_\nu(x)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx = Q(x)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + k\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} \quad (1)$$

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της (1), πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, και παίρνουμε

$$P_\nu(x) = Q'(x)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) + \frac{1}{2}Q(x)\left(2\alpha x+\beta\right) + k,$$

από την οποία προσδιορίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου Q, και τη σταθερά k.

Διαιρούμε τη τελευταία ισότητα με $\sqrt{f(x)}$, στη συνέχεια ολοκληρώνουμε οπότε έχουμε:

$$I_2 = \int \frac{P_\nu(x)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx = = Q(x)\sqrt{f(x)} + k\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx.$$

- **Μορφή Δ′**

$$I_3 = \int \frac{P_\nu(x)}{(x-\varrho)^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx \quad \text{και} \quad I_4 = \int \frac{P_\nu(x)}{\left(\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'\right)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}dx,$$

με $\Delta = \left(\beta'\right)^2 - 4\alpha'\gamma' > 0$.

Θέτουμε $x - \varrho = \frac{1}{u}$ και το ολοκλήρωμα I_3 ανάγεται στη Μορφή Γ′ και το I_4 αφού $\alpha' x^2+\beta' x+\gamma' = \alpha'\left(x-\varrho_1\right)\left(x-\varrho_2\right)$, μπορεί να αναχθεί σε άθροισμα ολοκληρωμάτων της μορφής I_3.

- **Μορφή Ε′**

$I_5 = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$, με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο σύμφωνα με το θεώρημα της ανάλυσης ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων ανάγεται σε ολοκληρώματα της μορφής

$$I_6 = \int \frac{1}{(x-k)^n} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$$

$$I_7 = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx.$$

Το ολοκλήρωμα $I_6 = \int \frac{1}{(x-k)^n} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$ αν f(k)=0 ανάγεται σε διωνυμικό ολοκλήρωμα (3η Περίπτωση σελίδα 91), και σε κάθε περίπτωση με την αντικατάσταση $x-k=\frac{1}{u}$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα της Μορφής Β′.

Ο τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος $I_7 = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$, εξαρτάται, από το αν $p=\frac{\beta}{\alpha}$ ή αν $p \neq \frac{\beta}{\alpha}$.

Στην περίπτωση που είναι $p=\frac{\beta}{\alpha}$, θέτουμε $u=x-\frac{p}{2}$ και το ολοκλήρωμα I_7 ανάγεται σε άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης, και ένα ολοκλήρωμα τύπου Abel το οποίο με την αντικατάσταση Abel, $u=\left(\sqrt{\alpha x^2+\beta}\right)'$ ανάγεται επίσης σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

2.2.22 Αντικαταστάσεις του *Euler*

(i) (*Πρώτη αντικατάσταση του Euler*).

Αν $\alpha > 0$, τότε θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t \pm \sqrt{\alpha} x$ και έχουμε

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right) dx$$

$$= 2\int R\left(\frac{t^2-\gamma}{2\sqrt{\alpha}t+\beta}, \frac{\sqrt{\alpha}t^2+\beta t+c\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}t+\beta}\right) \frac{\sqrt{\alpha}t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}t+\beta} dt$$

(ii) (*Δεύτερη αντικατάσταση του Euler*).

Αν $\gamma > 0$ και $\alpha < 0$, θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ οπότε έχουμε

$$\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{2\sqrt{\gamma}t-\beta}{\alpha-t^2},\frac{\sqrt{\gamma}t^2-\beta t+\alpha\sqrt{\gamma}}{\alpha-t^2}\right)\frac{\sqrt{\gamma}t^2-\beta t+\sqrt{\gamma}\alpha}{\left(\alpha-t^2\right)^2}dt$$

Αν θέσουμε $x=\frac{1}{t}$, τότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

(iii) (*Τρίτη αντικατάσταση του Euler*).

Αν $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$, όπου $\varrho_1,\varrho_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \neq \rho_2$, θέτουμε

$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t(x-\varrho_1)$ και έχουμε

$$\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx =$$

$$= 2\int R\left(-\frac{\alpha\varrho_2+\varrho_1 t^2}{t^2-\alpha},\frac{\alpha\left(\varrho_1-\varrho_2\right)t}{t^2-\alpha}\right)\frac{\alpha(\varrho_2-\varrho_1)t}{\left(t^2-\alpha\right)^2}\,dt$$

2.2.23 Παρατήρηση

Μπορεί με τις αντικαταστάσεις του *Euler*, να αναγόμαστε σε ολοκλήρωμα ρητών συναρτήσεων, όμως πολλές φορές ο υπολογισμός τους απαιτεί πολύ χρόνο. Γι' αυτό καλό είναι οι αντικαταστάσεις αυτές να εφαρμόζονται, μόνο αν δεν είναι εύκολο να βρούμε άλλο τρόπο.

- Τα ολοκληρώματα για παράδειγμα της μορφής

$$\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx$$

μπορούν με κατάλληλη αντικατάσταση να αναχθούν στα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int R\left(x,\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)dx$$

$$I_1 = \int R\left(x,\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)dx$$

$$I_3 = \int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) dx$$

τα οποία υπολογίζονται με τις αντικαταστάσεις της § 2.2.1.

- Με την πρόταση που ακολουθεί το ολοκλήρωμα $\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx$, ανάγεται σε ένα από τα ολοκληρώματα της μορφής,

$$I_1 = \int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx$$
$$I_2 = \int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right) dx$$
$$I_3 = \int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx$$

τα οποία είδαμε πως υπολογίζονται στην

2.2.24 Πρόταση

Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$. Θέτουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, υποθέτουμε ότι $\Delta \neq 0$ και R(x, y) μια ρητή συνάρτηση ως προς x και y.

(i) Αν $\alpha > 0$ και $\Delta > 0$, θέτουμε $t = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2\alpha x + \beta)$ και έχουμε

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx =$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{\Delta}t - \beta}{2\alpha}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}}\sqrt{t^2-1} \right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} dt = \int R_1\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt,$$

με R_1 επίσης ρητή συνάρτηση.

(ii) Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, θέτουμε $t = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(2\alpha x + \beta)$ και έχουμε

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx =$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{-\Delta}t - b}{2\alpha}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha}}\sqrt{t^2+1} \right) \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} dt = \int R_1\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt,$$

με R_1 επίσης ρητή συνάρτηση.

(iii) Αν $\alpha < 0$ και $\Delta > 0$, θέτουμε $t = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2\alpha x + \beta)$ και έχουμε

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx =$$

$$\int\left(\frac{-\sqrt{\Delta}t-\beta}{2\alpha},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{-\alpha}}\sqrt{-t^2+1}\right)\frac{-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\,dt=\int R_1\left(t,\sqrt{t^2+1}\right)dt,$$

με R_1 επίσης ρητή συνάρτηση

(iv) Αν $\alpha<0$ και $\Delta<0$, θέτουμε $t=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(2\alpha x+\beta)$ και έχουμε

$$\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx=$$

$$\int\left(\frac{-\sqrt{-\Delta}t-\beta}{2\alpha},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}}\sqrt{t^2+1}\right)\frac{\sqrt{-\Delta}}{-2\alpha}\,dt=\int R_1\left(t,\sqrt{t^2+1}\right)dt$$

2.2.25 Για ολοκληρώματα της μορφής,

$$\int\frac{P(t)}{(\alpha t+\beta)^p}dt,\ p\in\mathbb{Q}$$

όπου $P(t)$ ένα πολυώνυμο μπορούμε όπως είδαμε να υπολογιστεί με κάποια ειδική αντικατάσταση ή με ανάλυση σε απλούστερα κλάσματα. Όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα, η μέθοδος της Πινακοειδής Ολοκλήρωσης που είδαμε στη σελίδα 94 απλοποιεί τον τρόπο ολοκλήρωσης τέτοιων συναρτήσεων.

2.2.26 Παράδειγμα. $\int\frac{8t^3+24}{\sqrt[3]{5t+2}}dt$

Στήλη 1	Στήλη 2
$8t^3+24$	$(5t+2)^{-\frac{1}{3}}$
$-24t^2$	$\frac{3}{10}(5t+2)^{\frac{2}{3}}$
$48t$	$\frac{9}{250}(5t+2)^{\frac{5}{3}}$
-48	$\frac{27}{10.000}(5t+2)^{\frac{8}{3}}$
0	$\frac{81}{660.000}(5t+2)^{\frac{11}{3}}$

Επομένως $\int \frac{8t^3+24}{\sqrt[3]{5t+2}}dt = \frac{3}{10}(5t+2)^{\frac{2}{3}}\left(8t^3+24\right) - \frac{108}{125}t^2(5t+2)^{\frac{5}{3}} +$

$$+\frac{648}{5000}t\,(5t+2)^{\frac{8}{3}} - \frac{324}{55000}\;(5t+2)^{\frac{11}{3}}$$

2.2.27 Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στη παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, όπου R είναι μία ρητή συνάρτηση των sinx και cosx.

Θα διακρίνουμε τις παρακάτω βασικές περιπτώσεις:

1η Περίπτωση $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

Θέτουμε $\tan\frac{x}{2} = y$ $(x = 2\arctan y)$, οπότε $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

$(2\arctan y)' = \frac{2}{1+y^2}$, και το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy.$$

Οπότε, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης της μεταβλητής y.

2.2.28 Παρατήρηση

Η προηγούμενη αντικατάσταση έχει το πλεονέκτημα να εφαρμόζεται σε όλα τα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα, πολλές φορές όμως οδηγεί σε περίπλοκα ολοκληρώματα. Γι' αυτό έχουμε πιο απλές αντικαταστάσεις στις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

α) Αν $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ δηλαδή περιττή ως προς sinx, τότε θέτουμε $\cos x = y$.

β) Αν $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ δηλαδή περιττή ως προς cosx, τότε θέτουμε $\sin x = y$.

γ) Αν $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ δηλαδή άρτια ως προς cosx και sinx, τότε θέτουμε $\tan x = y$.

2η Περίπτωση $I(m,n)=\int \sin^m x\cos^n x\,dx,\ m,n\in\mathbb{Q}.$

Τότε:

- **Αν οι m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι,**
ισχύουν οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι:

$$I(m,n)=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2),\ n\ge 2$$

$$I(m,n)=-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n),\ m\ge 2$$

- **Αν οι m και n είναι ακέραιοι.**
  - Αν ο m είναι περιττός, τότε θέτουμε $\cos x=y$.
  - Αν ο n είναι περιττός, τότε θέτουμε $\sin x=y$.
  - Αν ο $m+n$ είναι άρτιος και αρνητικός, τότε θέτουμε

  $\tan x=y$ ή $\cot x=y$.

  - Αν οι m και n είναι άρτιοι και θετικοί, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους «αποτετραγωνισμού»:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Ειδικά, αν $mn<0$, θα έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$ ή $\int\frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx$, για τα οποία ισχύουν οι αναγωγικοί τύποι:

$$\int\frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx=-\frac{\cos^{n-1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}\int\frac{\cos^{n-2}x}{\sin^{m-2}x}dx.$$

$$\int\frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx=-\frac{\sin^{m-1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{m-1}{n-1}\int\frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{n-2}x}dx.$$

Αν $m<0$ και $n<0$, τότε θέτουμε $m=-k>0,\ n=-\lambda>0$ και έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int\frac{1}{\sin^k x\cos^\lambda x}dx$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

➢ Αν $k \neq 1$

$$\int \frac{1}{\sin^k x \cos^\lambda x}\,dx = -\frac{1}{(k-1)\sin^{k-1} x \cos^{\lambda-1} x} + \frac{k+\lambda-2}{k-1}\int \frac{1}{\sin^{k-2} x \cos^\lambda x}\,dx.$$

➢ Αν $\lambda \neq 1$

$$\int \frac{1}{\sin^k x \cos^\lambda x}\,dx = -\frac{1}{(\lambda-1)\sin^{k-1} x \cos^{\lambda-1} x} + \frac{k+\lambda-2}{\lambda-1}\int \frac{1}{\sin^{k} x \cos^{\lambda-2} x}\,dx.$$

Αν $m + n = 0$, θα έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int \tan^m x dx$, για το οποίο

$$\int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\, dx.$$

- **Αν οι m και n είναι ρητοί.**

Τότε με την αντικατάσταση $\sin x = y$, ανάγεται στο διωνυμικό ολοκλήρωμα $I(m,n) = \int y^m (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy$ με $m, n \in \mathbb{Q}$. Το οποίο σύμφωνα με την .... θα υπολογίζεται αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

i) $n = 2\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{N}$, ii) $m = 2\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{N}$, iii) $m+n = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

Σημείωση Αν m, n θετικοί ακέραιοι τότε αποδεικνύεται ότι,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

2.2.29 Ολοκληρώματα υπερβολικών συναρτήσεων

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\sinh x, \cosh x)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση των sinhx και coshx, υπολογίζονται ως εξής:

- όπως και στα τριγωνομετρικά η αντικατάσταση $\tanh\frac{x}{2} = y$ μας οδηγεί σε υπολογισμό απλούστερων ολοκληρωμάτων, και όπως και στην παρατήρηση **2.2.21**, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $R(-\sinh x, \cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$, δηλαδή περιττή ως προς sinhx, τότε θέτουμε $\cosh x = y$.
β) Αν $R(\sinh x, -\cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$, δηλαδή περιττή ως προς coshx, τότε θέτουμε $\sinh x = y$.
γ) Αν $R(-\sinh x, -\cosh x) = R(\sinh x, \cosh x)$, δηλαδή άρτια ως προς coshx και sinhx, τότε θέτουμε $\tanh x = y$.

- Αφού ισχύουν οι σχέσεις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

με την αντικατάσταση $e^x = y$ ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1-\tanh^2 x}, \quad \sinh^2 x = \frac{\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$$

$$\cosh 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}, \quad \sinh 2x = \frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ x \in \mathbb{R} \text{ και } \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \ x \geq 1.$$

2.2.30 Παρατήρηση

Η τεχνική της ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την παραγώγιση, δεν είναι εύκολη διαδικασία διότι η ποικιλία των περιπτώσεων είναι αρκετά μεγάλη. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης.
Είδαμε ωστόσο προηγουμένως, ότι όταν εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα τετραγωνική ρίζα ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου, μία αλγεβρική

αντικατάσταση το μετατρέπει σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης. Συνήθως όμως μία αντικατάσταση με τριγωνομετρικές ή με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις οδηγεί σε απλούστερα ολοκληρώματα. Για το λόγο αυτό στο κατάλογο πού ακολουθεί, αναφέρουμε τις πιο συνηθισμένες από αυτές.

(i) $\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \sin\theta$ ή $x = \alpha \tanh u$

(ii) $\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \tan\theta$ ή $x = \alpha \sinh u$

(iii) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \sec\theta,\ x = \alpha \cosh u$

(iv) $\int R\left(x, \sqrt{-x^2 + 2\alpha x + \beta}\right) dx$ $\qquad x - \alpha = u$

(v) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}\right) dx$ $\qquad x + \alpha = u$

(vi) $\int R\left(x, \sqrt{\alpha x - x^2}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \sin^2\theta$

(vii) $\int R\left(x, \sqrt{\alpha x + x^2}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \sinh^2 u$

(viii) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha x}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \cosh^2 u$

(ix) $\int R\left(x, \sqrt{x - \alpha}\sqrt{\beta - x}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \cos^2\theta + \beta \sin^2\theta$

(x) $\int R\left(x, \sqrt{x - a}\sqrt{x - b}\right) dx$ $\qquad x = \beta \cos^2\theta - \alpha \sin^2\theta$

(xi) $\int R\left(x, \sqrt{\alpha - x}\sqrt{\beta - x}\right) dx$ $\qquad x = \alpha \cos^2\theta - \beta \sin^2\theta$

(xii) $\int R\left(x, \sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}}\right) dx$ $\qquad u^2 = \frac{x - \alpha}{\beta - x} \quad (\alpha < x < \beta)$

(xiii) $\int R\left(x, \sqrt{\frac{x - \beta}{x - \alpha}}\right) dx$ $\qquad u^2 = \frac{x - \beta}{x - \alpha} \quad (\alpha < \beta < x)$

(xiv) $\int R\left(x, \sqrt{\frac{\alpha - x}{\beta - x}}\right)dx$ $\qquad u^2 = \frac{\alpha - x}{\beta - x} \quad (x < \alpha < \beta)$

2.2.31 Ελλειπτικά ολοκληρώματα

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)dx$, όπου R είναι ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της και το P είναι ένα πολυώνυμο τρίτου ή τετάρτου βαθμού, ονομάζονται *ελλειπτικά ολοκληρώματα*. Το όνομα τους οφείλεται στο πρόβλημα υπολογισμού του μήκους της έλλειψης που ανάγεται σε ολοκλήρωμα της μορφής (ΙΙ)

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάγονται στις μορφές:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

όπου $0 < k < 1$, και $h \in \mathbb{R}^*$.

Αν θέσουμε $x = \sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, έχουμε αντίστοιχα:

Μορφή (Ι) $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$,

Μορφή (ΙΙ) $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$

Μορφή (ΙΙΙ) $\int \frac{d\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$,

Οι τελευταίες τρεις μορφές είναι γνωστές ως **«μορφές του Legendre»**.

2.2.32 Ολοκληρώματα που ανάγονται σε ελλειπτικά

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int R(x,y)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.

- Όταν είναι $y = \sqrt{\alpha x + \beta}$ ή $y = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε όπως είδαμε στην... το ολοκλήρωμα I μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδης συναρτήσεις.
- Όταν είναι $y = \sqrt{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}$ ή $y = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα I, υπολογίζεται με ελλειπτικά ολοκληρώματα.
- Όταν είναι $y = \sqrt{P(x)}$, όπου P πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 4, τότε υπολογίζεται με την βοήθεια των υπερελλειπτικών συναρτήσεων.

2.2.33 Πίνακες Ολοκληρωμάτων – Προγράμματα υπολογισμού

Στην Ελληνική και Ξένη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί πίνακες ολοκληρωμάτων τους οποίους όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 11, πρέπει να τους εφαρμόζουμε με μεγάλη προσοχή. Υπάρχουν επίσης διάφορα προγράμματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων, όπως το MAPLLE, MATHEMATIKA, όπως και διάφοροι δικτυακοί τόποι,

Θεωρήματα παραγώγισης ολοκληρωμάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε θεωρήματα και προτάσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στα Κεφάλαια που ακολουθούν.
Αφορούν:

i. Ολοκλήρωση και Παραγώγιση ολοκληρωμάτων με παράμετρο.
ii. Εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος.
iii. Ολοκλήρωση και παραγώγιση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων.
iv. Κριτήρια ύπαρξης του γενικευμένου ολοκληρώματος.
v. Κριτήρια σύγκλισης ομοιόμορφης ή μη, γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Το πρώτο επόμενο θεώρημα λέγεται **κανόνας του Leibnitz** με τον οποίο μπορούμε να παραγωγίζουμε υπό το σύμβολο ολοκλήρωσης. Με το κανόνα αυτό στα παραδείγματα που ακολουθούν, θα δούμε ότι μπορούμε να υπολογίζουμε γενικευμένα ολοκληρώματα, των οποίων ο υπολογισμός με άλλη μέθοδο είναι αδύνατος.

Θεώρημα 1 (κανόνας του Leibnitz)

Αν $f : R \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, όπου R το ορθογώνιο,

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta\},$$

τότε η συνάρτηση
$F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, με $F(x) = \int_\gamma^\delta f(x,y)dy$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$.
Αν ακόμα η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$, η παράγωγος της F' είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και δίνεται από το τύπο

$$F'(x) = \int_\gamma^\delta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

Γενικότερα όταν τα άκρα ολοκλήρωσης δεν είναι σταθερά τότε ο **κανόνας του Leibnitz** επεκτείνεται. Ισχύει δηλαδή το γενικότερο

Θεώρημα 2 Αν οι συναρτήσεις $f: R \to \mathbb{R}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x}: R \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο ορθογώνιο

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta\}$$

και αν ακόμα οι συναρτήσεις $g:[\alpha,\beta] \to [\gamma,\delta]$, $h:[\alpha,\beta] \to [\gamma,\delta]$ έχουν συνεχείς παραγώγους, τότε η συνάρτηση

$F:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, με $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$ και η F' δίνεται από τον τύπο

$$F'(x) = h'(x) \cdot f(x,h(x)) - g'(x) \cdot f(x,g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Θεώρημα 3 Έστω η συνάρτηση $f: R \to \mathbb{R}$ και η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχείς στο ορθογώνιο

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y < \infty\}.$$

Αν το ολοκλήρωμα $F(x) = \int_{\gamma}^{\infty} f(x,y)dy$ συγκλίνει στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ και το $\int_{\gamma}^{\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε ισχύει

$$F'(x) = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy,\ \ x \in [\alpha,\ \beta]$$

Θεώρημα 4. Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και το $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει. Τότε το $\int_{\alpha}^{\infty} e^{-xy} f(x)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς y, στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

Θεώρημα 5 Αν $f: R \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta\},\ \text{τότε}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx\right)dy$$

Θεώρημα 6 Αν $f: R \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \leq x \leq \beta,\ \gamma \leq y < \infty\}$$

Αν το ολοκλήρωμα

$$F(x) = \int_\gamma^\infty f(x,y)dy,$$

συγκλίνει στο $[\alpha,\ \beta]$, ομοιόμορφα στην F, τότε

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\infty f(x,y)dy \right) dx = \int_\gamma^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dx \right) dy.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης συγκλίνει επίσης ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

Θεώρημα 7 Έστω οι συναρτήσεις $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Αν η ακολουθία των συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και οι f_n είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$ και ισχύει

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Θεώρημα 8 Αν η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f στο $[\alpha,\ \beta]$ και οι συναρτήσεις f_n είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά όρο προς όρο, δηλαδή ισχύει

$$\int_\alpha^\beta \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_\alpha^\beta f_n(x)dx \right]$$

Θεώρημα 9 Αν είναι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n$ και $I \subset \mathbb{R}$ το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha,\ \beta] \subset I$ που περιέχει το x_0, και ισχύει

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \alpha_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1},\ \forall x \in [\alpha,\ \beta]$$

Σημείωση αν ισχύουν οι υποθέσεις του αναπτύγματος Taylor τότε

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 10 (κριτήριο σύγκρισης)
Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $0 \le f(x) \le g(x)$, για $x \ge \alpha$ τότε

(α) Αν το $\int_\alpha^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ συγκλίνει

(β) Αν το $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ αποκλίνει, τότε το $\int_\alpha^\infty g(x)dx$ αποκλίνει

Θεώρημα 11 (Απόλυτη σύγκλιση) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\infty |f(x)|dx$, συγκλίνει τότε και το $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Θεώρημα 12 (Οριακό κριτήριο σύγκλισης) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ στο διάστημα $[\alpha, \beta)$ (αντ. $[\alpha, +\infty)$) και ισχύει

$$\lim_{x\to\beta} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \quad \left(\text{αντ.} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda\right),$$

τότε:

α) Αν $0 < \lambda < +\infty$, τότε τα γενικευμένα ολοκληρώματα των f, g υπάρχουν ή δεν υπάρχουν (είναι ίσα με $+\infty$), συγχρόνως.
β) Αν είναι $\lambda = 0$, η ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος της g συνεπάγεται και την ύπαρξη του γενικευμένου ολοκληρώματος της f στο ίδιο διάστημα.
γ) Αν είναι $\lambda = +\infty$, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της g είναι ίσο με $+\infty$, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο ίδιο διάστημα είναι ίσο με $+\infty$.

Θεώρημα 13 Αν η f είναι μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, +\infty)$ και το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^x f(x)dx$ είναι φραγμένο άνω, τότε το ολοκλήρωμα θα συγκλίνει για $x \to \infty$ ή θα απειρίζεται.

Θεώρημα 14 (Ειδικό οριακό κριτήριο σύγκλισης) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,+\infty)$, τότε

- αν $\lim_{x\to\infty} x^p f(x)=\lambda$ και p>1, το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα
- ενώ αποκλίνει αν $\lim_{x\to\infty} x^p f(x)=\lambda(\neq 0)$ ή $\pm\infty$ και $p\leq 1$.

Θεώρημα 15 Αν η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, συγκλίνει απόλυτα αν

$\lim_{x\to\alpha^+}(x-\alpha)^p f(x)=\lambda,$ και $0<p<1,$

ενώ αποκλίνει αν $\lim_{x\to\alpha^+}(x-\alpha)^p f(x)=\lambda(\neq 0)$ ή $\pm\infty$ και $p\geq 1$.

Θεώρημα 16 Αν το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι φραγμένο για $x\geq\alpha>0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$ συγκλίνει όταν $p>0$.

Θεώρημα 17 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ με $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\infty f(x)\sin x dx$ συγκλίνει, και αν σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} f(k\pi)$ αποκλίνει $(m\pi\geq\alpha)$, το $\int_\alpha^\infty f(x)\sin x dx$ συγκλίνει μόνο υπό συνθήκη.

Θεώρημα 18 Αν ο μετασχηματισμός Laplace $L\{f(x)\}$ συγκλίνει για $x=\varrho$, τότε συγκλίνει και ομοιόμορφα για $x\geq\varrho$.

$$\text{Ακόμα } \lim_{x\to\infty} L\{f(x)\}=0.$$

Θεώρημα 19 (de la Vallee Poussin) Αν $f:R\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\alpha\leq x\leq\beta,\ \gamma\leq y<\infty\},$$

και υπάρχει συνάρτηση $M:R\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

α) $|f(x,y)|\leq M(y)$ στο ορθογώνιο R,

β) το ολοκλήρωμα $\int_\gamma^\infty M(y)dy$ συγκλίνει

Τότε $\forall x \in [\alpha,\beta]$ το ολοκλήρωμα $F(x)=\int_\gamma^\infty f(x,y)dy$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

Θεώρημα 20 (de la Vallee Poussin) Έστω ότι η συνάρτηση $f:R \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma < y \le \delta\},$$

και έστω ότι υπάρχει συνάρτηση M με τις ιδιότητες

α) $|f(x,y)| \le M(y)$ στο ορθογώνιο R,

β) το ολοκλήρωμα $\int_\gamma^\delta M(y)dy$ συγκλίνει

Τότε το ολοκλήρωμα $F(x)=\int_\gamma^\delta f(x,y)dy,\ x\in[\alpha,\ \beta]$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

Θεώρημα 21 Αν $f:R \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y < \infty\}$$

και το ολοκλήρωμα

$$F(x)=\int_\gamma^\infty f(x,y)dy,\ x\in[\alpha,\ \beta]$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε η F είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

4.1 Υπενθυμίζουμε ότι μία φραγμένη συνάρτηση f θα λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ αν υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός A με την ιδιότητα:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε κάθε άθροισμα του Riemann $S(P, f, \Xi)$ της f που αντιστοιχεί σε μία διαμέριση

$$P = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \beta\}$$

του Δ με $\|P\| < \delta$, να ικανοποιεί τη σχέση $|S(P,f,\Xi) - A| < \varepsilon$,

για κάθε επιλογή των ενδιαμέσων σημείων Ξ της διαμέρισης P. Ο αριθμός A ονομάζεται ολοκλήρωμα του Riemann της f στο Δ και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Αποδεικνύεται ότι μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $P_n (n \in \mathbb{N})$ τέτοια ώστε $\|P_n\| \to 0$ και η ακολουθία $S(P_n, f, \Xi_n)$ να είναι συγκλίνουσα.

Στη περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Xi_n) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε μερικά ολοκληρώματα με την βοήθεια του ορισμού. Η ιδέα δεν είναι καινούργια γιατί όπως είδαμε στη σελίδα 10 ο Αρχιμήδης στο έργο του, *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου α' και β'*, και στην απόδειξη της πρότασης « *Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μεγίστου κύκλου αυτής*» ήταν ο πρώτος που υπολόγισε το $\int_0^\alpha \sin x dx$, σαν ένα Riemann άθροισμα.

Στη συνέχεια ο Kepler *(σελίδα 37) στη προσπάθεια του να υπολογίσει τροχιές των πλανητών, έδωσε το αποτέλεσμα,*

$$\int_\alpha^\beta \sin x dx = \cos\alpha - \cos\beta.$$

Ο Roberval με τη μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri, απέδειξε μία πρόταση ισοδύναμη της $\int_\alpha^\beta \sin x dx = \cos\alpha - \cos\beta.$

Και τέλος ο Pascal (σελίδα 57) στο έργο του *Traite des sinus du quart de cercle (Μελέτη για τα ημίτονα ενός τεταρτημορίου του κύκλου)* απόδειξε επίσης ότι $\int_\alpha^\beta \sin x dx = \cos\alpha - \cos\beta.$

4.2 Παραδείγματα

1)[1] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} x^m dx,\ m \in \mathbb{Z},\ 0 < \alpha < \beta$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = x^m$, είναι συνεχής άρα και φραγμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $m \neq -1$, θεωρούμε τη διαμέριση

$$P = \{\alpha, \alpha\theta, \alpha\theta^2, \cdots, \alpha\theta^n\},\ \text{όπου}\quad \theta = \sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Τότε $\|P_n\| = \beta - \dfrac{\beta}{\theta} \to 0$, διότι το $\theta \to 1$.

Οπότε

$$S(P_n, f, \Xi_n) = (\alpha\theta\text{-}\alpha)\alpha^m + (\alpha\theta^2\text{-}\alpha\theta)\alpha^m\theta^m + \ldots + (\alpha\theta^n\text{-}\alpha\theta^{n-1})\alpha^m\theta^{(n-1)m}$$

$$= \alpha^{m+1}(\theta-1)\left\{1+\theta^{m+1}+\ldots+\left(\theta^{m+1}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{\theta-1}{\theta^{m+1}-1}\left(\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\right).$$

Αφού όμως $\lim\limits_{\theta\to 1}\dfrac{\theta-1}{\theta^{m+1}-1} = \dfrac{1}{m+1}$, έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^m dx = \lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Xi_n) = \frac{\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}}{m+1}.$$

- Αν $m = -1$, τότε θα είναι $S(P_n, f, \Xi_n) = n(\theta - 1)$, και αφού $\theta = \sqrt[n]{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, είναι $n = \dfrac{\ln\beta - \ln\alpha}{\ln\theta}$, οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^{-1} dx = \lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Xi_n) = \lim_{\theta\to 1}\frac{\theta-1}{\ln\theta}(\ln\beta-\ln\alpha) = \ln\beta - \ln\alpha.$$

---

[1] L. Brand, Μαθηματική Ανάλυση, μετάφραση, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984, σελ. 359.

Για να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta-1}{\ln\theta} = 1$ θα εργαστούμε ως εξής:

Ισχύει $\dfrac{\ln\theta}{\theta-1}=1-\dfrac{\theta-1}{2}+\dfrac{(\theta\text{-}1)^2}{3}-\dfrac{(\theta\text{-}1)^3}{4}+\cdots$, οπότε

$$\lim_{\theta\to1}\frac{\ln\theta}{\theta-1}=\lim_{\theta\to1}\left(1-\frac{\theta-1}{2}+\frac{(\theta-1)^2}{3}+\cdots\right)=1,$$

διότι οι δυναμοσειρές είναι συνεχείς συναρτήσεις της μεταβλητής τους.

2)[2] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^\alpha x^{\frac{1}{2}}dx$

Λύση

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\left\{\dfrac{1^2\alpha}{n^2},\dfrac{2^2\alpha}{n^2},\ldots,\dfrac{k^2\alpha}{n^2},\ldots,\dfrac{n^2\alpha}{n^2}\right\}$ και παίρνουμε $\xi_k=\dfrac{k^2\alpha}{n^2}$, $k=1,2,\ldots,n.$

Οπότε $\displaystyle\int_0^\alpha x^{\frac{1}{2}}dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\alpha^{\frac{1}{2}}}{n}\left(\frac{k^2\alpha}{n^2}-\frac{(k-1)^2\alpha}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{n^3}\left(2k^2-k\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}.$$

3)[3] Να δειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta \sin x dx$ = cosα - cosβ και $\int_\alpha^\beta \cos x dx$ = sinβ - sinα με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$.

Απόδειξη

[2] κ. Μ. Λάμπρου

[3] κ. Μ. Λάμπρου

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\left\{\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n},\ldots,\alpha+n\frac{\beta-\alpha}{n}\right\}$ του $[\alpha,\ \beta]$ και παίρνουμε $\xi_k=\alpha+(k-1)\frac{\beta-\alpha}{n},\ \ k=1,2,\ldots,n.$

Συνεπώς,

$$S(P_n,f,\Xi_n) = \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\alpha+(k-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{n}\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)-\cos\left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2n}}.$$

Αλλά $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\beta-\alpha}{2n}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2n}}=1$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)-\cos\left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)\right)=\cos\alpha-\cos\beta$

οπότε έχουμε

$$\int_\alpha^\beta \sin x dx = \lim S(P_n,\ f,\ \Xi_n) = \cos\alpha - \cos\beta.$$

Όμοια για το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \cos x dx$, θεωρούμε την διαμέριση

$P=\left\{\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n},\ldots,\alpha+n\frac{\beta-\alpha}{n}\right\}$ του $[\alpha,\ \beta]$ και παίρνουμε

$\xi_k=(k-1)\frac{\alpha}{n}\ \ k=1,2,\ldots,n.$

Συνεπώς,

$$S(P_n,f,\Xi_n) = \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\alpha+(k-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{n}\cdot\frac{\sin\left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2n}}.$$

Είναι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2n}\right)\right)=\sin\beta-\sin\alpha$, και $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\beta-\alpha}{2n}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2n}}=1$

Άρα $\int_\alpha^\beta \cos x dx = \lim S(P_n,\ f,\ \Xi_n) = \sin\beta-\sin\alpha.$

4)[4] Να δειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda x}dx = \dfrac{e^{\lambda\beta}-e^{\lambda\alpha}}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\left\{\alpha,\ \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{n},\dots,\alpha+n\dfrac{\beta-\alpha}{n}\right\}$ του $[\alpha,\beta]$ και θέτουμε $\xi_{\kappa}=\alpha+(k-1)\dfrac{\beta-\alpha}{n}$, δηλαδή το αριστερό άκρο κάθε διαστήματος.

Τότε $S(P_n,\ f,\ \Xi_n)=\dfrac{\beta-\alpha}{n}\left(e^{\lambda\alpha}+e^{\lambda\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right)}+\dots+e^{\lambda\left[\alpha+(n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\right]}\right)$

$$=\frac{\beta-\alpha}{n}e^{\lambda\alpha}\left(1+e^{\lambda\frac{\beta-\alpha}{n}}+e^{2\lambda\frac{\beta-\alpha}{n}}+\dots+e^{(n-1)\lambda\frac{\beta-\alpha}{n}}\right)$$

$$=\left(e^{\lambda\beta}-e^{\lambda\alpha}\right)\frac{1}{e^{\lambda\frac{\beta-\alpha}{n}}-1}\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\lambda\theta}-1}{\lambda}=\lambda$ με $\theta=\dfrac{\beta-\alpha}{n}$.

Ισχύει $e^{x}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$, οπότε και $e^{\lambda\theta}=1+\lambda\theta+\dfrac{\lambda^2\theta^2}{2!}+\dfrac{\lambda^3\theta^3}{3!}+\dots$

Επομένως $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{e^{\lambda\theta}-1}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\lambda+\dfrac{\lambda^2\theta}{2!}+\dfrac{\lambda^3\theta^2}{3!}+\dots\right)=\lambda.$

διότι οι δυναμοσειρές είναι συνεχείς συναρτήσεις της μεταβλητής τους.

Οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\lambda\beta}-e^{\lambda\alpha}\right)\dfrac{1}{e^{\lambda\frac{\beta-\alpha}{n}}-1}\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{n}=\dfrac{e^{\lambda\beta}-e^{\lambda\alpha}}{\lambda}$

και $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}e^{\lambda x}dx=\lim_{n\to\infty}S(P_n,\ f,\ \Xi_n)\ =\frac{e^{\lambda\beta}-e^{\lambda\alpha}}{\lambda}.$

5)[5] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\ln x dx$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<\beta$.

---

[4] κ. Μ. Λάμπρου

[5] Σ. Κ. Ντούγιας, Απειροστικός ΙΙ, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2005, σελ. 109.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, είναι συνεχής άρα και φραγμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, με $x_k=\alpha\theta^k$, $k=0,1,2,...,n$ όπου $\theta=\sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Επιλέγουμε $\xi_\kappa=\alpha\sqrt[n]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k}$ δηλαδή το δεξιό άκρο κάθε διαστήματος.

Τότε $\|P_n\|=\beta-\frac{\beta}{\theta}\to 0$, διότι το $\theta\to 1$.

Επομένως $S(P_n,\ f,\ \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha\theta^k-\alpha\theta^{k-1}\right)\ln\left(\alpha\theta^k\right)$

$$=\alpha\ln\alpha\left(\theta^n-1\right)+\alpha\ln\theta\sum_{k=1}^{n}k\left(\theta^k-\theta^{k-1}\right)$$

$$=\alpha\ln\alpha\left(\theta^n-1\right)+\alpha\ln\theta\left\{\sum_{=1}^{n}\left(k\theta^k-(k-1)\theta^{k-1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\theta^{k-1}\right\}$$

$$=\alpha\ln\alpha\left(\theta^n-1\right)+\alpha\ln\theta\left[n\theta^n-\frac{\theta^n-1}{\theta-1}\right]$$

$$=(\beta-\alpha)\ln\alpha+\beta(\ln\beta-\ln\alpha)-(\beta-\alpha)\frac{\ln\theta}{\theta-1},\ \text{αφού}\ \theta=\sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Οπότε $\int_\alpha^\beta \ln x dx = \lim_{n\to\infty} S(P_n,\ f,\ \Xi_n) = \beta(\ln\beta-1) - \alpha(\ln\alpha-1)$, διότι

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\theta}{\theta-1} = 1$ όπως είδαμε στη σελίδα 112.

6) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$

Λύση

Ισχύει $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{n}=\sqrt{n}\,2^{-\frac{n-1}{2}}$

Λογαριθμίζουμε και έχουμε,

$$\frac{\pi}{n}\left(\ln\sin\frac{\pi}{n}+\ln\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\ln\sin\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}\right)=-\pi\frac{n-1}{2n}\ln 2+\pi\frac{\ln n}{2n}$$

Είναι $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\ln\sin\frac{\pi}{n}+\ln\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\ln\sin\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\right]=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(-\pi\frac{n-1}{2n}\ln 2+\pi\frac{\ln n}{2n}\right)=-\pi\ln 2.$$

Επομένως $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\pi\frac{n-1}{2n}\ln 2+\pi\frac{\ln n}{2n}\right)=-\pi\ln 2.$.

5.1 Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε ορισμένα όρια ακολουθιών αφού τα αναγνωρίσουμε ως αθροίσματα Riemann κατάλληλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.
Σύμφωνα με τον ορισμό πού δώσαμε στη προηγούμενη παράγραφο, ισχύει η παρακάτω πρόταση με την βοήθεια της οποίας θα βρίσκουμε τα όρια ακολουθιών.

Πρόταση

α) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (1)$$

β) Ειδικά για $\alpha=0$ και $\beta=1$ στην (1) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{0}^{1} f(x)dx. \qquad (2)$$

γ) Έτσι για να βρούμε το όριο μιας ακολουθίας (α_n), θα βρίσκουμε μία συνεχή συνάρτηση f η οποία θα μας δίνει τους όρους του αθροίσματος $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ και θα εφαρμόζουμε την (2).

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε διάφορες τεχνικές για τη μέθοδο αυτή.

52 Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

<u>Λύση</u>

Είναι $\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ το οποίο αναγνωρίζουμε ως άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x}$, για την διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$ στο διάστημα $[0,1]$.

Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα είναι

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln 2.$$

(2) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_n = \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}}, m \in \mathbb{N}.$$

<u>Λύση</u>

Είδαμε στη σελίδα 51 ότι Fermat, Pascal και Roberval με την βοήθεια του ορίου αυτού απέδειξαν ότι $\int_0^{\alpha} x^m dx = \frac{\alpha^{m+1}}{m+1}$, $m = 1, 2, \cdots$

Είναι $\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m$ το οποίο αναγνωρίζουμε ως άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = x^m$, για την διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$ στο διάστημα $[0,1]$.

Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα είναι

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m = \int_0^1 x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

(3) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

<u>Λύση</u>

Είναι $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, το οποίο αναγνωρίζουμε ως άθροισμα Riemann της συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, για την διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$ στο διάστημα $[0,1]$.

Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(4)[1] Να βρεθεί το όριο της ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}\ln n! - \ln n$

Λύση

Είναι $\alpha_n = \frac{1}{n}\ln n! - \ln n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$,

το οποίο είναι ένα άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο διάστημα [0, 1], οπότε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \int_0^1 \ln x dx = -1$.

(5) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

Λύση

Είναι $\ln \alpha_n = \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$.

Το άθροισμα μέσα στην αγκύλη είναι ένα άθροισμα Riemann, για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ στο διάστημα $[0,1]$ με διαμέριση

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}.$$

[1] S. K. Goel, D. M. Rodriguez, Mathematics Magazine, Τόμος 60, No. 4 (Οκτ.., 1987), σελ. 225-228.

Οπότε έχουμε, $\lim \ln \alpha_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$, άρα
$\lim \alpha_n = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$.

(6)[2] Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \frac{1}{n}[2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n-1)]^{\frac{1}{n}}$

<u>Λύση</u>

Είναι $\ln \alpha_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1)\right] - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(3k-1)-\ln n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3k-1}{n}\right)$.
Το τελευταίο όριο είναι ένα άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[0,3]$, με διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \ldots, \frac{3n}{n}\right\}$ και $\xi_k = \frac{3k-1}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$.
Οπότε,
$\lim_{n\to+\infty}(\ln \alpha_n) = \frac{1}{3}\int_0^3 \ln x dx = \frac{1}{3}(3\ln 3 - 3) = \ln 3 - 1$.
Έτσι $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = e^{(\ln 3-1)} = \frac{3}{e}$.
Γενικότερα ισχύει ότι, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[(\lambda-1)\cdot(2\lambda-1)\cdot(3\lambda-1)\cdots(n\lambda-1)]^{\frac{1}{n}} = \frac{\lambda}{e}$
με $\lambda = 2,3,\cdots$
Πράγματι
$$\ln \alpha_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{m=1}^{n}\ln(m\lambda-1)\right] - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}[\ln(m\lambda-1)-\ln n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{m\lambda-1}{n}\right).$$

Το τελευταίο όριο είναι ένα άθροισμα Riemann για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[0, \lambda]$, με διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{\lambda}{n}, \frac{2\lambda}{n}, \frac{3\lambda}{n}, \ldots, \frac{n\lambda}{n}\right\}$ και $\xi_k = \frac{k\lambda-1}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$ οπότε,
$\lim_{n\to+\infty}(\ln \alpha_n) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \ln x dx = \ln\lambda - 1$.
Άρα $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = e^{(\ln\lambda-1)} = \frac{\lambda}{e}$ με $\lambda = 2,3,\cdots$

---
[2] S. K. Goel, D. M. Rodriguez, Mathematics Magazine, Τόμος 60, No. 4 (Οκτ., 1987), σελ. 225-228

6.1 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση αναπτύγματος σε σειρά.

Ο Newton ήταν από τους πρώτους ο οποίος υπολόγισε ολοκληρώματα περίπλοκων αλγεβρικών συναρτήσεων με την βοήθεια των σειρών. Η τεχνική συνίσταται στην αναπαράσταση της συνάρτησης σε δυναμοσειρά, και μετά στην ολοκλήρωση «όρο προς όρο». Στη συνέχεια η μέθοδος αναπτύχθηκε και για άλλους τύπους συναρτήσεων.

Το 1669 ο Newton σε μία μονογραφία του με τίτλο *De Analysi per Aequationes NumeroTerminorum Infinitas*[1], απέδειξε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $y = n\alpha x^{n-1}$ και τους θετικούς ημιάξονες, δίνεται από τη σχέση $E = \alpha x^n$. Στη συνέχεια απέδειξε ότι αν μία συνάρτηση είναι ένα άθροισμα όρων, τότε το εμβαδόν είναι το άθροισμα των εμβαδών των αντιστοίχων όρων.

Έτσι για να ολοκληρώσει την συνάρτηση $y = \dfrac{\alpha^2}{x+\beta}$, την έγραψε κάνοντας τη διαίρεση στη μορφή,

$$y = \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\alpha^2 x}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{\beta^3} - \frac{\alpha^2 x^3}{\beta^4} + \ldots,$$

οπότε ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο» βρήκε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι,

$$I = \frac{\alpha^2 x}{\beta} - \frac{\alpha^2 x^2}{2\beta^2} + \frac{\alpha^2 x^3}{3\beta^3} - \frac{\alpha^2 x^4}{4\beta^4} + \cdots.$$

Συνεπώς ένα πεπερασμένο πλήθος όρων του ήταν αρκετό για οποιαδήποτε προσέγγιση.

Ο Euler[2] υπολόγισε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$ το οποίο είχε ήδη μελετηθεί από τον Wallis, με m,n αυθαίρετους αριθμούς.

Ο Euler αναπτύσσει το $(1-x)^n$ με το διωνυμικό θεώρημα και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο», απέδειξε ότι:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{1}{m+1} - \frac{n}{1(m+2)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2(m+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3(m+4)} + \cdots.$$

Από την οποία αν n θετικός ακέραιος βρήκε ότι

---

[1] Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Τόμος 1, Oxford University Press, New York 1972, σελ. 360.

[2] Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Τόμος 2, Oxford University Press, New York 1972, σελ. 423.

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}.$$

O James Gregory[3] είχε μάθει στην Ιταλία ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\frac{1}{1+x^2}$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=t$, ισούται με arctant. Είχε ανακαλύψει επίσης το θεώρημα του διωνύμου και έτσι με απλή διαίρεση έδειξε ότι,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Άρα από το τύπο του Cavalieri $\int_0^\alpha x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ (σελίδα 42), προκύπτει ότι

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

O Nicolo Mercator (Nicolaus Kaufman) (1620 – 1687) ο οποίος δεν πρέπει να συγχέεται με τον Gherard Mercator τον διάσημο χαρτογράφο, είχε αποδείξει[4],

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\right) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

σειρά που δικαίως φέρει το όνομα του, «σειρά του Mercator».

Η απόδειξη της έχει ως εξής:

O Gregory St. Vincent είχε δείξει ότι $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(x+1)$, ήταν επίσης γνωστό ότι $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, οπότε και $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\right) dt$, άρα το ζητούμενο.

Με το παρακάτω θεώρημα το οποίο είδαμε στη σελίδα 107, μπορούμε να ολοκληρώνουμε «όρο προς όρο».

6.2 Θεώρημα Αν η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ και οι συναρτήσεις f_n είναι ολοκληρώσιμες

[3] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 422.
[4] Στο ίδιο σελ. 423.

στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά όρο προς όρο, δηλαδή ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx\right]$$

Έτσι θα βρούμε μερικά ολοκληρώματα τα οποία δεν μπορούν να υπολογιστούν διαφορετικά, όπως για παράδειγμα τα ελλειπτικά ολοκληρώματα. Θα βρούμε ακόμα προσεγγιστικές τιμές για ολοκληρώματα που δεν «βγαίνουν», όπως

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\tan x dx \ , \ \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx .$$

6.3 Παραδείγματα

1. ***α)*** Η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $|x| < 1$. Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο πρός όρο από 0 έως x, με $x \in (-1,1)$ και παίρνουμε:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

β) Η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[-\beta, \beta]$ με $\beta < 1$. Έτσι όταν $|x| < 1$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο από 0 έως t,

οπότε,

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$$

γ) Η σειρά $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ άρα μπορεί να ολοκληρωθεί όρο πρός όρο στο διάστημα αυτό. Οπότε

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\right) dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

δ) Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+x^4}dx$ μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδεις συναρτήσεις. Ο τρόπος όμως έκφρασης από στοιχειώδης συναρτήσεις είναι πολύ περίπλοκος, οπότε δύσχρηστος για πρακτικές εφαρμογές.

$$\text{Πραγματικά} \quad \int \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C,$$

Εδώ θα το υπολογίσουμε με σειρές.

Η σειρά $\frac{1}{1+x^4} = 1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \geq 0$,

οπότε με ολοκλήρωση «όρο πρός όρο» έχουμε,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \cdots$$

δ) Η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $|x|<1$. Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο πρός όρο από 0 έως x, με $x \in (-1,1)$ και παίρνουμε:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά πιο δύσκολα παραδείγματα.

2)[5] Να δειχθεί ότι $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$

<u>Απόδειξη</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \int_0^{\infty} x\cdot\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int_0^{\infty}\sum_1^{\infty} xe^{-nx}dx =$$

$$= \sum_1^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-nx}dx = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3)[6] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\tan x dx$

[5] κ. Μ. Λάμπρου

[6] κ. Μ. Λάμπρου

Λύση

Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x dx = (\tan x = u) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u^2+1} du = \int_0^1 \ln u\left(1-u^2+u^4-u^6+\cdots\right) du$.

Το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 u^n \ln u du$ μπορούμε να το υπολογίσουμε με ολοκλήρωση κατά μέρη.

Άλλος τρόπος είναι να το υπολογίσουμε από το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^1 u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1}$ για $\alpha > 0$.

Από το *θεώρημα 1* (σελ. 105) έχουμε,

$$\int_0^1 u^a \ln u du = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 u^\alpha du = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} u^\alpha du = = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

Επομένως, αφού η σειρά $\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, μπορεί να ολοκληρωθεί όρο πρός όρο στο διάστημα αυτό.

Οπότε $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x dx = -\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\right) = -\frac{\pi^3}{32}$.

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$

Λύση

Ισχύει $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ οπότε,

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_0^1 \ln x\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}\right) dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{x^n}{1-x} \ln x dx.$$

Είναι $\frac{x^n \ln x}{1-x} > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{1-x} & ,0<x<1 \\ 0 & ,x=0 \\ -1 & ,x=1 \end{cases}$$

είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο $(0,1)$.

Οπότε

$$\int_0^1 \left|\frac{x^n \ln x}{1-x}\right| dx \le \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}, \text{ και για } n \to \infty \text{ θα είναι } I = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Παραλλαγή, θέτουμε $1-x=t$ και έχουμε

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\int_0^1 \left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\ldots\right) dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

5)[7] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx$

Λύση

Είδαμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin x}{x} dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Από τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης sinx έχουμε,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$

Επομένως σύμφωνα με το *θεώρημα 6* (σελ. 107), μπορούμε να ολοκληρώσουμε «όρο προς όρο» και έχουμε

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\alpha} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx + C$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + C, \text{ για κάθε } \alpha \in [-\beta, \beta].$$

[7] Θ. Κυβεντίδη, Ολοκληρωτικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 293.

Άρα $\int_0^\alpha \frac{\sin x}{x}dx = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!3} + \frac{\alpha^5}{5!5} - \cdots$, οπότε μπορούμε να βρούμε το ολοκλήρωμα με οποιαδήποτε προσέγγιση θέλουμε.

6)[8] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}dx$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$, οπότε από το παράδειγμα 1 προκύπτει ότι $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ για $0 \le x \le 1$, και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε,

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}dx = -\int_0^1 f(x)\left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right)dx$$

$$= -\int_0^1 f(x)f'(x)dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}f^2(1) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)\int_0^1 x^n \ln x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\zeta^2(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\zeta^2(2) + \sum_{1 \le m < n}^{\infty}\frac{1}{m^2 n^2} = -\frac{1}{2}\zeta^2(2) + \frac{1}{2}\left(\zeta^2(2) - \zeta(4)\right) = -\frac{\pi^4}{180}.$$

7) Να δειχθεί ότι $\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}dx = 1 - 2\ln 2.$

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1,1],$$

επομένως

[8] Hing-Kam Lam, The American Mathematical Monthly, Τόμος 90, No. 9 (Νοε., 1983), 649-650.

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\cdots$$

και με ολοκλήρωση της σειράς παίρνουμε

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\,dx=1-2+2\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}\cdots=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}=1-2\ln 2.$$

8)[9] Να υπολογιστεί το ελλειπτικό ολοκλήρωμα

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\ \left(k^2<1\right).$$

Λύση

Είναι $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\theta++\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\theta+\cdots,$

Αφού $k^2\sin^2\theta\le k^2$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε «όρο προς όρο», και εφαρμόζοντας το τύπο

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta,$$

παίρνουμε

$$'K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)k^6+\cdots\right].$$

9)[10] Να δειχθεί ότι $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15}-\frac{1}{63}+\frac{1}{143}-\frac{1}{255}+\cdots$

Λύση

Είναι $\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots$, και $\frac{1+x^2}{1+x^4}=1+x^2-x^4-x^6+x^8+x^{10}-\cdots$

Οπότε ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο» έχουμε,

---

[9] R. Courant, Differential and Integral Calculus I, John Wiley & Sons, N. York, 1988 σελ. 409

[10] C. H. Edwards, *The Historical Denelopment of the Calculus,* New York, Springer-Verlag 1979, σελ. 223.

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = 1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\cdots$$

$$=1+\frac{2}{15}-\frac{2}{63}+\frac{2}{143}-\frac{2}{255}+\cdots. \qquad (1)$$

Αφού $2\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}$ θέτουμε $x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\theta$ και παίρνουμε,

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(1+\sqrt{2}\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο.

10) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα[11] $\int_0^1 e^{k(1-x^2)}dx$

<u>Λύση</u>

Θα χρειαστούμε τη σχέση,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x dx=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Είναι $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ οπότε,

$$\int_0^1 e^{k(1-x^2)}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n\left(1-x^2\right)^n}{n!}=(x=\sin\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n\cos^{2n+1}\theta d\theta}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n\cdot 2\cdot 4\cdots 2n}{n!\cdot 1\cdot 3\cdots(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n k^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}.$$

[11] H. A. Bender, The American Mathematical Monthly, Τόμος 64, No. 8 (Οκτ., 1957), 600-601.

7.1 Συμμετρία[1]

7.1.1 Η μέθοδος της συμμετρίας βασίζεται στο γεγονός ότι για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

- $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx$ **(1)**
- $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(\alpha-x)dx+\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)dx$ **(2)**
- $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx$ **(3)**

Από την **(3)** προκύπτει ότι:

- Αν $f(\alpha-x)=f(x)$, τότε $\int_0^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)dx$ **(4)**
- Αν $f(\alpha-x)=-f(x)$, τότε $\int_0^{\alpha} f(x)dx=0$ **(5)**

Γενικότερα ισχύει:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$ **(6)**

και αν ακόμα $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε

- $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx-\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$ **(7)**
- $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ και $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ **(8)**

Σε πολλές περιπτώσεις εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι, συχνά είναι ευκολότερο να βρούμε το ολοκλήρωμα της g, όπου $g(x)=f(x)+f(\alpha-x)$ από το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης f. Αυτό συμβαίνει παραδείγματος χάριν, όταν η g έχει γνωστό ολοκλήρωμα.

Πράγματι,

---

[1] A. K. Arora, S. K. Goel, D. M. Rodriguez ,The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 2 (Φεβρ., 1988), 126-130

7.1.2 Πρόταση 5[2].

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = k \text{ (σταθερό)}, \forall x \in [\alpha,\beta] \qquad (*)$$

τότε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)[f(\alpha)+f(\beta)]. \qquad \textbf{(9)}$$

Για $x=\alpha$ είναι $f(\alpha) + f(\beta) = k$ και για $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{k}{2}$,

άρα η δεύτερη ισότητα στη σχέση **(9)** είναι προφανής.

Αν θέσουμε στην $(*)$ $\alpha+\beta-x=u$ θα πάρουμε $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = k(\beta-\alpha)$, και η σχέση αποδείχτηκε.

7.1.3 Παρατηρήσεις

α) Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ όπου $A=[\alpha,\beta]$ έχει κέντρο συμμετρίας τότε:

$$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

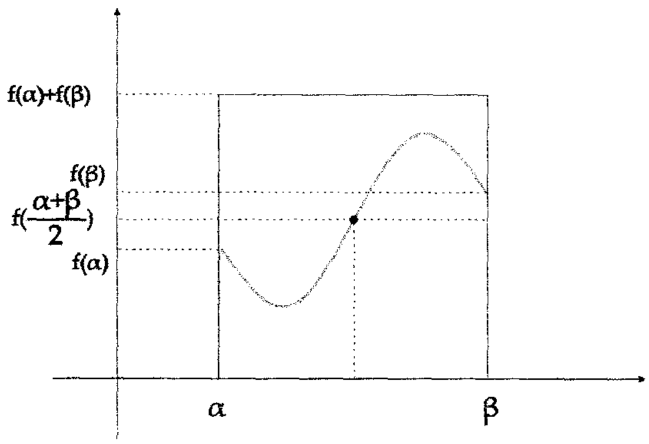
και αν ακόμα η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $A=[\alpha,\beta]$, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση **(9)**[3].

Μία λύση «χωρίς λόγια» φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 31).

---

[2] N. Azarnia, T. A. Farmer, The College Mathematics Journal, Τόμος 26, No. 1 (Ιαν., 1995), σελ. 39-41

[3] Απολλώνιος, Έκδοση του παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας, Τεύχος 4ο, Οκτώβριος 2004, σελ. 121.



Σχήμα 31

β) Αν οι f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[-\alpha,\alpha]$ με f άρτια και η γραφική παράσταση της g έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $\left(0,\frac{\beta}{2}\right)$, τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx=\frac{\beta}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\beta\int_{0}^{\alpha} f(x)dx \quad \textbf{(10)}$$

7.1.4 Παραδείγματα Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(α) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

<u>Λύση</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = (\text{λόγω της } (1)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx, \text{ και}$$

$$g(x)=\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln 2$$

Επομένως $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Άλλος τρόπος[4] για τη συνάρτηση $f(x)=\ln(1+\tan x)$ ισχύει

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ln 2,$$

[4] Απολλώνιος, Έκδοση του παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας, Τεύχος 4ο, Οκτώβριος 2004, σελ. 123.

άρα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $K\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ οπότε από τη σχέση **(9)**

παίρνουμε $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

Σημείωση για το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+\tan x)}{1+x^2}\,dx$,

Θέτουμε $x = \tan y$ και παίρνουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan y)dy = \frac{\pi}{8}\ln 2$

(β)[5] Να δειχθεί ότι $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $x = \tan\theta$ και έχουμε διαδοχικά

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan\theta)}{\sec^4\theta}\sec^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \ln(\tan\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \ln(\tan\theta)d\theta.$$

Αν τώρα $f(\theta) = \ln(\tan\theta)$, παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -f(\theta)$, οπότε λόγω της **(5)** θα είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan\theta)d\theta = 0$.

Για το ολοκλήρωμα $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \ln(\tan\theta)d\theta$ με ολοκλήρωση κατά μέρη

παίρνουμε $J = \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta \ln(\tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -\frac{\pi}{2}.$

Οπότε $I = -\frac{\pi}{4}$.

---

[5] A. K. Arora, S. K. Goel, D. M. Rodriguez, The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 2 (Φεβρ., 1988), σελ. 126-130.

(γ) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^n x}dx$

Λύση

Είναι $I\overset{(6)}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^n(\frac{\pi}{2}-x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cot^n x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^n x}{1+\tan^n x}dx$

Επομένως $I+I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\tan^n x}{1+\tan^n x}dx$, άρα $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\frac{\pi}{12}$

(δ)[6] $I=\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx$

Λύση

Για την $f(x)=\ln(\sin x)$ ισχύει $f(x)=f(\pi-x)$, οπότε λόγω της **(4)** έχουμε,

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I$$

Τελικά $I=-\pi\ln 2$, από την οποία και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$ με την αντικατάσταση $x=\tan\theta$ και με εφαρμογή των παραδειγμάτων (β) και (δ) αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με $\pi\ln 2$.

(ε) $I=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$

Λύση

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$, ισχύει $f(x)=f(\pi-x)$ οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα **(7)** έχουμε.

[6] A. K. Arora, S. K. Goel, D. M. Rodriguez, The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 2 (Φεβρ., 1988), σελ. 126-130.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}[\tan x]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{\cos x}\right]_0^{\pi}=\pi.$$

(στ) $I=\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx$

<u>Λύση</u>

Είναι $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx$ και

$$J=\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=(\text{λόγω της (8)})$$

$$=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\pi\ln 2+2J$$

Επομένως $J=-\pi\ln 2$ και $2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\frac{-\pi^2}{2}\ln 2$.

2^{ος} τρόπος Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=-\pi\ln 2$

Άρα $I=\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-y)\ln(\sin y)dy=\pi\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx-I.$

Οπότε $I=\frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\frac{-\pi^2}{2}\ln 2$.

(ζ)[7] $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+e^{\sin x}}dx$

<u>Λύση</u>

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+e^{\sin x}}$ ισχύει $f(x)+f(2\pi-x)=1$ οπότε λόγω της σχέσης **(9)** $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+e^{\sin x}}dx=\pi.$

[7] R. Nelsen, The College Mathematics Journal, Τόμος 26, No. 1 (Ιαν. 1995), 39-41.

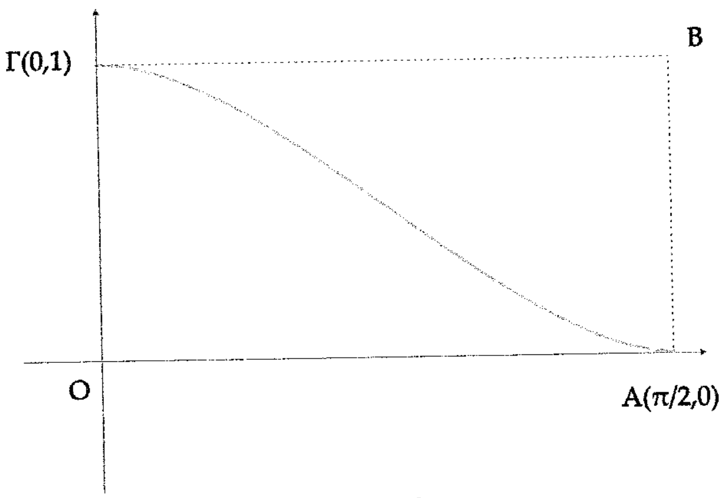
(η)[8] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$ έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα είναι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Από την άλλη η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ φαίνεται στο σχήμα (*Σχήμα 32*),



Σχήμα 32

από το οποίο είναι προφανές ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}$.

(θ) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$

Λύση

[8] R. Nelsen, The College Mathematics Journal, Τόμος 26, No. 1 (Ιαν. 1995), 39-41.

Έστω $f(x)=x^2$ και $g(x)=\frac{1}{1+e^x}$. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ η f είναι άρτια και η g έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $K\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Οπότε ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της σχέσης **(10)** σελίδα 132, άρα

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+e^x}dx=\int_0^1\cos x dx=-\sin 1.$$

7.1.4 Μια παραλλαγή της μεθόδου για τα καταχρηστικά ολοκληρώματα $\int_0^{\infty} f(x)dx$.[9]

Αν θέσουμε $y=\frac{1}{x}$ προκύπτει ότι $\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\,dx$, επομένως

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\,dx.$$

Αν η $g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ έχει γνωστό ολοκλήρωμα στο $[0,\infty)$, μπορούμε να βρούμε εύκολα και το $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει ακόμα,

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\,dx$$

(α). Να υπολογιστεί το $I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

<u>Λύση</u>

Αν $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$ τότε $f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})=\frac{\ln x}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0$.

Άρα $I=0$.

7.1.5 Πρόταση[10] Έστω οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε, οι f και fg είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[0,\alpha]$ και για κάθε $x\in[0,\alpha]$ ισχύει,

$f(x)=f(\alpha-x)$, $g(x)+g(\alpha-x)=k$, όπου k σταθερός αριθμός.

---

[9] κ. Μ. Λάμπρου

[10] Σ. Κ. Ντούγιας, Απειροστικός ΙΙ, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2005, σελ. 160.

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}k\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

Πράγματι αν θέσουμε $x = \alpha - u$, τότε

$$\int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx = k\int_0^{\alpha} f(u)du - \int_0^{\alpha} f(u)g(u)du \quad \text{ή}$$

$$\int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}k\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

7.1.6 Παράδειγμα Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}dx$

Λύση

Αν $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ και $g(x) = x$, $x \in [0,\pi]$, τότε επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, θα έχουμε

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}[-\arctan(\cos x)]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7.1.7 Σημείωση Αν $\alpha > 1$, f άρτια συνάρτηση και g περιττή, τότε

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx = \int_0^{\beta} f(x)dx$$

Απόδειξη

Θέτουμε $x = -t$ και παίρνουμε $I = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(x)}{\alpha^{-g(x)}+1}dx$

Άρα $2I = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx + \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(x)}{\alpha^{-g(x)}+1}dx = \int_{-\beta}^{\beta} f(x)\frac{1+\alpha^{g(x)}}{1+\alpha^{g(x)}}dx = 2\int_0^{\beta} f(x)dx$, αφού η f είναι άρτια.

Άρα $I=\int_0^{\beta} f(x)dx$.

(α). Να υπολογιστεί το $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^{2n}}{2^{\sin x}+1}dx$

Λύση

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^{2n}}{2^{\sin x}+1}dx=\int_0^{\alpha}x^{2n}dx=\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}$$

7.1.8 Σημείωση Αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση δεν ικανοποιεί καμία από τις προηγούμενες ιδιότητες τότε κάνουμε μία αντικατάσταση η οποία δεν μεταβάλλει τα άκρα ολοκλήρωσης

(α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

Λύση

Θέτουμε $x=\frac{1}{y}$, οπότε $I=-\int_0^{\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}dy=-I$, άρα $I=0$.

Μπορούμε επίσης να θέσουμε $x=\tan y$ και να χρησιμοποιήσομε την ιδιότητα **(1)**.

(β) Να υπολογιστεί το $I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)(x^{\alpha}+1)}dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Λύση

Θέτουμε $x=\frac{1}{t}$ οπότε $I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)(x^{\alpha}+1)}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)(t^{\alpha}+1)}dt$

Έτσι $2I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)(x^{\alpha}+1)}dx+\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(x^{\alpha}+1)}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

Άρα $I=\frac{\pi}{4}$.

7.2 Λογαριθμική ολοκλήρωση[1]

Με το γνωστό τύπο της λογαριθμικής παραγώγισης

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x),$$

μπορούμε να βρούμε εύκολα την παράγωγο συναρτήσεων των οποίων ο τύπος είναι πολύπλοκος.

Π.χ. Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ τότε με $g(x)=\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)$,

έχουμε $g'(x)=\dfrac{x-x^3}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}$, άρα και $f'(x)=\dfrac{x-x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^5}}$

Από την άλλη πλευρά η ισότητα,

$$\int\frac{x-x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^5}}dx=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}}+C,$$

όχι μόνο δεν είναι εύκολη, αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί με τους γνωστούς τρόπους ολοκλήρωσης. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 10 σελίδα 187 οι κλάσεις των συναρτήσεων των οποίων το ολοκλήρωμα εκφράζεται από στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι λίγες και ότι δεν είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ένα ολοκλήρωμα είναι στοιχειώδες. Στις περιπτώσεις που ακολουθούν θα δούμε πως η «λογαριθμική ολοκλήρωση» μας επιτρέπει, με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες που απαιτούνται, να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ με στοιχειώδης συναρτήσεις.

(α) Έστω $f(x)=(P(x))^p\,(Q(x))^q\,R(x)$, όπου P, Q, και R πολυώνυμα του x και p,q ρητοί αριθμοί.

Θεώρημα του Abel: Αν η συνάρτηση $\int f(x)dx$ είναι αλγεβρική (όπως την ορίζουμε Κεφάλαιο 10 σελίδα 187), τότε είναι ρητή ως προς f(x) και x.

Οπότε για την πιο απλή περίπτωση θα πρέπει να είναι,

$$\int f(x)dx=k(P(x))^{p+1}(Q(x))^{q+1}+C,\ \text{με } k,\ C \text{ σταθερές.} \quad (1)$$

---

[1] H. F. MacNeish, The American Mathematical Monthly, Τόμος 56, No. 3, (Ιαν., 1949), 25-27.

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε,

$$f(x)=k(P(x))^p(Q(x))^q\left[(p+1)P'(x)Q(x)+(q+1)P(x)Q'(x)\right].$$

Άρα είναι προφανές ότι για να ισχύει η (1) πρέπει να υπάρχει $k\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε,

$$R(x)=k\left[(p+1)P'(x)Q(x)+(q+1)P(x)Q'(x)\right]. \qquad (2)$$

Συνεπώς $\int (P(x))^p(Q(x))^q R(x)dx=k(P(x))^{p+1}(Q(x))^{q+1}+C$.

Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα,

$$I=\int\frac{x-x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{(x^4+1)^5}}dx$$

Είναι $R(x)=x-x^3$, $P(x)=x^2+1$, $Q(x)=x^4+1$ καί $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{5}{4}$

Οπότε αφού $(p+1)P'(x)Q(x)+(q+1)P(x)Q'(x)=x-x^3$, για να ισχύει η (2) πρέπει $k=1$.

Συνεπώς, $I=\int\frac{x-x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{(x^4+1)^5}}dx=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^4+1)^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}}+C$

(β) $f(x)=(P(x))^p R(x)$ όπου P, R πολυώνυμα του x, και p ρητός αριθμός.
Υποθέτουμε ότι $\int f(x)dx=(\alpha x+\beta)(P(x))^{p+1}+C$, με $\alpha,\beta,C\in\mathbb{R}$. (1)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε,

$$f(x)=(P(x))^p\left[\alpha P(x)+(p+1)(\alpha x+\beta)P'(x)\right].$$

Οπότε για να ισχύει η (1) αρκεί να βρούμε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε,

$$R(x)=\alpha P(x)+(p+1)(\alpha x+\beta)P'(x) \qquad (2)$$

Π.χ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{3x^4-2x^3-6x+1}{\sqrt{x^4-4x-1}}dx$

Αρκεί να υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$3x^4-2x^3-6x+1=\alpha\left(x^4-4x-1\right)+\dfrac{1}{2}(\alpha x+\beta)\left(4x^3-4\right)$,

μετά από απλές πράξεις προκύπτει $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

Συνεπώς $I=(x-1)\sqrt{x^4-4x-1}+C$.

7.3.1 Παραγώγιση παραμετρικών ολοκληρωμάτων

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα δούμε πόσο χρήσιμη είναι η εφαρμογή των προτάσεων και θεωρημάτων του 10ου Κεφαλαίου, στον υπολογισμό ορισμένων όπως και γενικευμένων ολοκληρωμάτων, των οποίων ο υπολογισμός με άλλη μέθοδο είναι αδύνατος.
Η κεντρική ιδέα της μεθόδου στηρίζεται στο γεγονός ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ γίνεται πιο εύκολα αν θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής,

$$I(t)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx,\ t\in I\subset\mathbb{R}$$

το οποίο, είτε υπολογίζεται εύκολα με τους γνωστούς τρόπους ολοκλήρωσης, είτε με εφαρμογή των θεωρημάτων καταλήγουμε στον υπολογισμό ευκολότερων ολοκληρωμάτων ή στην επίλυση απλών διαφορικών εξισώσεων. Η απάντηση δε στο εύλογο ερώτημα: «Πως θα εισάγουμε μία παράμετρο σε ένα ολοκλήρωμα»; δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα, αφού σε πολλές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σε ολοκληρώματα μετασχηματισμών, η παράμετρος υπάρχει ήδη στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση. Αν δεν υπάρχει η εισαγωγή της μπορεί να γίνει με αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης, η οποία να περιέχει την παράμετρο.
Η διαδικασία αυτή μας παρέχει επίσης τη δυνατότητα χωρίς κόπο και ιδιαίτερες δυσκολίες, να κατασκευάζουμε νέους τύπους ολοκλήρωσης από τους ήδη υπάρχοντες, πράγμα που θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν.

7.3.2 Παραδείγματα

1[1]. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{0}^{1}(\ln x)^{n}x^{\alpha}dx,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq-1.$$

Λύση

Ισχύει $\int_{0}^{1}x^{\alpha}dx=\dfrac{1}{\alpha+1}$ (1)

Παραγωγίζοντας την (1) διαδοχικά n–φορές, έχουμε

---
[1] A.J. Zajta, S. K. Goel, Mathematics Magazine, Τόμος 62, No. 5 (Δεκ., 1989), σελ. 319

$$\int_0^1 (\ln x)^n x^\alpha dx = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

2[2]. Να δειχθεί ότι $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, όπου n μη αρνητικός ακέραιος.

Απόδειξη

Παίρνουμε το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$, $(\alpha > 0)$

Παραγωγίζουμε διαδοχικά n – φορές ως προς α και έχουμε,

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Οπότε για $\alpha = 1$, προκύπτει ότι $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

3[3] Έστω το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{dx}{p+x^2} = \frac{\pi}{2} p^{-\frac{1}{2}}$, $p > 0$

Παραγωγίζοντας ως προς p έχουμε,

Άρα $\int_0^\infty \frac{1}{(p+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4p^{\frac{3}{2}}}$, $(p > 0)$ και

$$\int_0^\infty \frac{1}{(p+x^2)^3} dx = \frac{1\cdot 3\pi}{16p^{\frac{5}{2}}},$$

όμοια $\int_0^\infty \frac{1}{(p+x^2)^4} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\pi}{96p^{\frac{7}{2}}}$.

Συνεχίζοντας βρίσκουμε και άλλους τύπους ολοκλήρωσης,

$$\left(\int_0^\infty \frac{1}{p+x^2} dx\right)^{(n)} = \int_0^\infty \frac{1}{(p+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1.3.5...(2n-1)\pi}{2^{n+1} n!} \frac{1}{p^{\frac{2n+1}{2}}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

---

[2] A.J. Zajta, S. K. Goel, Mathematics Magazine, Τόμος 62, No. 5 (Δεκ., 1989), σελ. 319

[3] J. Wiener, The College Mathematics Journal, Τόμος 32, No. 3 (Μάϊος, 2001), 180-184.

Σημείωση 1 αν στην τελευταία σχέση θέσουμε $p=1$ και πολλαπλασιάσομε αριθμητή παρονομαστή με 2.4.6...2n, παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2},$$

από την οποία για $x = \tan\theta$, προκύπτει το ολοκλήρωμα του Wallis,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση με το παρακάτω απλό παράδειγμα θα φανεί πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε στον έλεγχο των προϋποθέσεων για την εφαρμογή των θεωρημάτων.

Ξέρουμε ότι $\int_0^{\infty} \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ $(p>0)$.

Παραγωγίζουμε ως προς p και έχουμε $\int_0^{\infty} \cos pt dt = 0$, το οποίο δεν έχει έννοια διότι το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

4[4]**.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$

Λύση

Θα υπολογίσουμε το γενικότερο ολοκλήρωμα, $\int_0^1 \frac{x^{\alpha}-1}{\ln x} dx$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}-1}{\ln x} dx$, $\alpha>0$

Η συνάρτηση $f(x,\alpha) = \frac{x^{\alpha}-1}{\ln x}$ και η μερική παράγωγος της $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ είναι συνεχείς στο ορθογώνιο,

$$R = \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1,\ 0 < \alpha < \infty\}.$$

Οπότε από το *Θεώρημα 1* (σελ. 105) έχουμε,

[4] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, σελ. 284.

$$F'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_0^1\frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx=\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Επομένως $F(\alpha)=\ln(\alpha+1)+C$ και για $\alpha=0$ είναι $C=F(0)=0$, άρα $I=\ln 2$.

❖ Ενώ $\int\frac{x-1}{\ln x}dx=\mathrm{Ei}(2\ln x)-\mathrm{li}(x)$, όπου $\mathrm{Ei}(z)=-\int_{-z}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ και $\mathrm{li}(z)=\int_0^z\frac{dt}{\ln t}$.

5[5]. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I=\int_0^\pi\frac{dx}{(\alpha+\beta\cos x)^2}\quad\text{και}\quad J=\int_0^\pi\frac{\cos x}{(\alpha+\beta\cos x)^2}dx$$

<u>Λύση</u>

Παίρνουμε το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$,

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\alpha)=\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}$, με β σταθερό.

Αφού η συνάρτηση $f(x,\alpha)=\frac{1}{\alpha+\beta\cos x}$, $0\le x\le\pi$ είναι συνεχής μπορεί να εφαρμουτεί ο κανόνας του Leibnitz.

Οπότε,

$$F'(\alpha)=-\int_0^\pi\frac{1}{(\alpha+\beta\cos x)^2}dx=-\pi\alpha\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{και}\quad\int_0^\pi\frac{dx}{(\alpha+\beta\cos x)^2}=\pi\alpha\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $G(\beta)=\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x}$ με α σταθερό, η συνάρτηση $g(x,\beta)=\frac{\cos x}{\alpha+\beta\cos x}$, $0\le x\le\pi$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος 1* (σελ. 105) οπότε με παρόμοιο τρόπο θα πάρουμε,

---

[5] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, άσκηση 11(ε), σελ. 287.

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(\alpha+\beta\cos x)^2}\,dx = -\pi\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

6. Στο παράδειγμα αυτό θα υπολογίσουμε κάποια ολοκληρώματα κάνοντας χρήση του ολοκληρώματος της πιθανότητας $\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και του $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$.

(α) Αν θέσουμε $t=\alpha x$ τότε $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$.

Γενικότερα για $t=\alpha^m x,\ m\in\mathbb{Q}$ έχουμε $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^{2m}x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^m}$.

(β)[6] Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $F(\beta)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx$

Λύση

Είναι $F'(\beta)=\int_0^{\infty} -xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\right]_0^{\infty}-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx.$

Οπότε $F'(\beta)=-\frac{\beta}{2\alpha}F(\beta)$ άρα $F(\beta)=Ce^{-\frac{\beta}{2\alpha}}$, και αφού $F(0)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$,

θα έχουμε $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$ και $F(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{\frac{-\beta}{2\alpha}}$.

Για να ισχύει η προηγούμενη διαδικασία πρέπει να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx$ συγκλίνει, ενώ το $\int_0^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Αν πάρουμε ως $M(x)=e^{-\alpha x^2}$ για το πρώτο και $M(t)=xe^{-\alpha x^2}$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} M(x)dx$ συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα και στις δύο περιπτώσεις, οπότε το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το *Θεώρημα 19* (σελίδα 109).

---

[6] α) A. F. Bermant, I. G. Aramanovich, Mathematical Analysis Moscow, Mir Publishers 1975, σελ. 477.
β) Murray R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*, Μετάφραση, Σχοινάς Χ. Ι, Αθήνα 1978, σελ. 278.

(γ) Να δειχθεί ότι $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$ και σύμφωνα με το *Θεώρημα 3* (σελ. 106), μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς α και έχουμε,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς α, n–φορές διαδοχικά τη τελευταία σχέση θα βρούμε ότι,

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n)!}{2^{n+1}(n)!}\frac{1}{\alpha^n\sqrt{\alpha}}.$$

(δ)[7] Να δειχθεί ότι $\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\alpha \ge 0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2} dx$, $\alpha \ge 0$. (Βλέπε παρακάτω για το ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις) τότε,

$F'(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1-\frac{\alpha}{x^2}\right) dx$ και αν θέσουμε $y = -\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha > 0$ παίρνουμε,

$$F'(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2} dx - 2\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\frac{\alpha}{x^2} dx =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2} dx - 2\int_0^\infty e^{-\left(y-\frac{\alpha}{y}\right)^2} dy = 0.$$

---

[7] α) F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, σελ. 372.
β) Murray R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*, Μετάφραση, Σχοινάς Χ. Ι, Αθήνα 1978, σελ. 279.

Επομένως η $F(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx$ είναι σταθερή και αφού $F(0)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$,

θα είναι και $F(\alpha)=F(0)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Η προηγούμενη διαδικασία είναι σωστή διότι,

$e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1-\frac{\alpha}{x^2}\right)\le e^{2\alpha}e^{-x^2}$ για «μεγάλα» x, και αφού το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ συγκλίνει, άρα το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1-\frac{\alpha}{x^2}\right)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Ακόμα το $F(0)=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, διότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $\alpha\ge 0$.

Παρατήρηση[8] Άλλος τρόπος υπολογισμού του προηγούμενου ολοκληρώματος,

Ξέρουμε ότι $\int_{\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ οπότε για $z=x-\frac{\alpha}{x}$ έχουμε,

$$\sqrt{\pi}=\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)dx=\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx+\alpha\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx.$$

Αλλά,

$$\alpha\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx=\left(x=\frac{\alpha}{y}\right)=\int_0^{\infty} e^{-\left(y-\frac{\alpha}{y}\right)^2}dy$$ επομένως,

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

---

[8] κ. Μ. Λάμπρου

(ε)[9] Να δειχθεί ότι $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2\alpha}}$

Απόδειξη

Έστω $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx$ τότε σύμφωνα με το *Θεώρημα* 3 (σελ. 105) έχουμε.

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx = -2\alpha \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}} \frac{1}{x^2}dx = (x = \frac{\alpha}{t}) = -2\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx.$$

Επομένως $F'(\alpha) = -2F(\alpha)$ και $F(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2\alpha}}$ $(\alpha \geq 0)$.

Άλλος τρόπος, δείξαμε προηγουμένως ότι $\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\alpha \geq 0$ άρα

$$\int_0^\infty e^{2\alpha} e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ και } \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2\alpha}}.$$

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx, \quad (n \geq 0) \text{ και } \alpha \text{ μια σταθερά.}$$

Λύση

Αν n περιττός:

Το $I_1 = \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} x e^{-\alpha x^2}dx$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha^2}, \text{ άρα } I_3 = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-\alpha x^2}dx = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} x^3 e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx$$

[9] Louis Brand, Μαθηματική Ανάλυση, μετάφραση, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984, άσκηση 5 σελ. 612.

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right) = \frac{1}{2\alpha^3}$$

Γενικά $I_{2n+1} = \dfrac{1}{2\alpha^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$

Αν n άρτιος:

Τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, με εξαίρεση το I_0, το οποίο θα το υπολογίσουμε ως εξής.

$$I_0^{\,2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy.$$

Σε πολικές συντεταγμένες, θέτουμε $r^2 = x^2 + y^2$, $r \geq 0$ και $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ με $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Οπότε

$$I_0^{\,2} = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{\alpha r^2}d\theta\right)dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} re^{\alpha r^2}dr = \frac{\pi}{4\alpha}.$$

Άρα $I_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$.

Το $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = -\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx =$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2}dx = -\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}x^2 e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx =$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Γενικά $I_{2n} = \dfrac{1}{2(2\alpha)^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$, $n \in \mathbb{N}$

8[10]. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)dx$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x,\alpha)=\ln(1+\alpha\cos x)$, και η μερική παράγωγος της πληρούν τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος 1* (σελ. 105) οπότε έχουμε.

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}(1-\frac{1}{1+\alpha\cos x})dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}(1-\frac{1}{1+\alpha\cos x})dx=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\alpha\cos x}dx,\ \alpha\neq 0$$

Για $t=\tan\frac{x}{2}$ έχουμε,

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\alpha\cos x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{2dt}{(1+\alpha)+(1-\alpha)t^2}=\dots$$

$$\dots=\left[\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,t\right)\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad |\alpha|<1..$$

Ολοκληρώνοντας την ισότητα $F'(\alpha) = \pi\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$ παίρνουμε

$$F(\alpha)+C=\pi\left(\ln\alpha+\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)$$

Για $\alpha=0$, $F(0)=0$, άρα $C=\pi\ln 2$, και αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής θα είναι,

$$F(\alpha)=\pi\ln\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right).$$

❖ Ενώ για την πιο απλή περίπτωση, $\int\ln(1+\cos x)dx$ προκύπτει το

---

[10] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, άσκηση 3(α) σελ. 287.

$\int \ln(1+\cos x)dx = x\ln(1+\cos x)+4\left(\frac{ix^2}{8}-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{ix}\right)x+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(e^{-ix}\right)\right)$, όπου $\mathrm{Li}_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^n}$ η πολυλογαριθμική συνάρτηση.

Σημείωση με παρόμοιο τρόπο για το ολοκλήρωμα

$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\alpha\cos^2 x\right)dx$$

έχουμε

$$F(\alpha)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1+\alpha}\right)-\pi\ln 2$$

και για $\alpha = -1$ παίρνουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

9[11]**.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}dx \quad ,\alpha\geq 0$$

Λύση

Παραγωγίζουμε ως προς α και έχουμε $F'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\alpha^2\tan^2 x+1}$, με την αντικατάσταση $t=\tan x$ προκύπτει ότι,

$F'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+1}$ και $F(\alpha)=\frac{\pi}{2}\cdot\ln(1+\alpha)$ αφού $F(0)=0$.

Για $\alpha=1$ προκύπτει το αξιοσημείωτο ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$ και

με ολοκλήρωση κατά μέρη,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x d(\ln\sin x)dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx.$$

Οπότε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

---

[11] J. Wiener, The College Mathematics Journal, Τόμος 32, No. 3, (Μάϊος 2001), 180-184.

10[12]. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx$

Λύση

Θέτουμε $F(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx$.

Ηη συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$ με $f(x,\alpha)=e^{-x}\frac{\sin(\alpha x)}{x}$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$D=\{(\alpha,x)\in\mathbb{R}^2/\alpha\in\mathbb{R},\ 0<x<+\infty\},$$

οπότε η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αφού όμως η $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=e^{-x}\cos(\alpha x)$ είναι συνεχής στο D σύμφωνα με το *Θεώρημα 19* (σελ. 109), έπεται ότι η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $F'(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(\alpha x)dx$.

Αλλά $\int_0^{y} e^{-x}\cos(\alpha x)dx=\left[\frac{(-\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))e^{-x}}{1+\alpha^2}\right]_0^y=$

$$=\frac{-\cos(\alpha y)+\alpha\sin(\alpha y)}{(1+\alpha^2)e^y}+\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Οπότε $F'(\alpha)=\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^{y} e^{-x}\cos(\alpha x)dx=\frac{1}{1+\alpha^2}$ άρα

$F(\alpha)=\int\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=\arctan\alpha+c$, και αφού $F(0) = 0$ έχουμε $F(\alpha) = \arctan\alpha$.

Άλλος τρόπος[13]

Παίρνουμε το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(xt)dx=\frac{1}{1+t^2}$.

12

13 F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, σελ. 371.

Για κάθε $(t,x)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ ισχύει $\left|e^{-x}\cos xt\right|\le e^{-x}$, και αφού η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα οπότε σύμφωνα με το *Θεώρημα 9* (σελ. 107) μπορούμε να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη ως προς t, από 0 έως y κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος.

Έτσι έχουμε,

$$\int_0^y dt\int_0^\infty e^{-x}\cos xt dx=\int_0^y \frac{1}{1+t^2}dt,$$

άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(yx)}{x}dx=\arctan y.$$

7.4.1 Ολοκλήρωση Ολοκληρωμάτων

Στα παραδείγματα πού ακολουθούν, θα δούμε πως με την βοήθεια των *θεωρημάτων 5 και 6* (σελ. 106) και με τη χρήση απλών ολοκληρωμάτων, μπορούμε να βρούμε διάφορους τύπους ολοκλήρωσης και να υπολογίσουμε εύκολα ορισμένα και γενικευμένα ολοκληρώματα.

7.4.2 Παραδείγματα

1[1]. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

Θεωρούμε το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$, $(\alpha>0)$, το οποίο συγκλίνει ομοιόμορφα στο $0<a\le\alpha<\infty$, διότι $e^{-\alpha x}\le e^{-ax}$, και με $M(x)=e^{-ax}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το *θεώρημα 19* (σελ. 109). Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς *α*, από a έως b κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος και παίρνουμε

$$\int_0^{\infty}\left(\int_a^b e^{-\alpha x}d\alpha\right)dx=\int_a^b\frac{1}{\alpha}\,d\alpha \text{ ή } \int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}.$$

2[2]. Στο παράδειγμα αυτό θα δείξουμε πολλά πράγματα. Υπολογισμό ολοκληρώματος με διαφορική εξίσωση, με παραγώγιση, με ολοκλήρωση και τέλος μία απόδειξη για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

το οποίο θα μας απασχολήσει εκτενώς στο Κεφάλαιο 9.

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\infty}\frac{\alpha\cos mx}{\alpha^2+x^2}dx$, με $\alpha>0$ και $m\ge0$. (1)

Με ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει $I=-\frac{1}{m^2}\int_0^{\infty}\cos mx\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)dx$,

---

[1] Θ. Κυβεντίδη, Ολοκληρωτικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 394

[2] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, ασκήσεις 7, 8 σελ. 376.

Και αφού $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)=-\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)$ θα ισχύει η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2I}{d\alpha^2}=m^2I$ η οποία έχει λύση την $I=\frac{\pi}{2}e^{-m\alpha}$, άρα

$$I=\int_0^\infty \frac{\alpha\cos mx}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-m\alpha}. \quad \textbf{(2)}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

- Ολοκληρώνουμε την (2) ως προς m από 0 έως n και παίρνουμε

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^2\sin(nx)}{x\left(\alpha^2+x^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-n\alpha}\right) \quad \textbf{(3)}$$

- Παραγωγίζουμε την (2) ως προς n και παίρνουμε

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(nx)}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-n\alpha}. \quad \textbf{(4)}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

και για $n=1$, το γνωστό μας ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

3[3]**.** Θεωρούμε το γνωστό ολοκλήρωμα $f(t)=\int_0^1 x^t dx=\frac{1}{t+1}$.

Αφού η συνάρτηση $g(x,t)=x^t$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο,

$$R=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 / 0<x<1,\ 0<t<\infty\right\},$$

τότε από το *Θεώρημα 5* (σελ. 106) έχουμε,

---

[3] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, σελ. 286.

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta \frac{1}{t+1}dt=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1} \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_0^1\left(\int_\alpha^\beta x^t dt\right)dx=\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx.$$

Οπότε $\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$ με $\alpha,\beta\geq 0$.

Για $\alpha=0$ παίρνουμε $\int_0^1\frac{x^\beta-1}{\ln x}dx=\ln(\beta+1)$ και αφού η συνάρτηση

$$f(x,\beta)=\frac{x^\beta-1}{\ln x}$$

είναι συνεχής στο ορθογώνιο,

$$R=\left\{(x,\beta)\in\mathbb{R}^2/0<x<1,\ 0<\beta<\infty\right\},$$

έχουμε,

$$\int_0^1\left(\int_0^\beta\frac{x^\beta-1}{\ln x}d\beta\right)dx=\int_0^\beta\ln(\beta+1)d\beta \text{ ή } \int_0^1\frac{x^\beta-1-\beta\ln x}{(\ln x)^2}dx=(\beta+1)\ln(\beta+1)-\beta.$$

Αν θέσουμε μία τιμή στη παράμετρο β π.χ. $\beta=1$ θα πάρουμε,

$$\int_0^1\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)^2}=2\ln 2-1,$$

το οποίο είδαμε και στη σελίδα 154.

- Έτσι υπολογίσαμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα πού εξαρτάται από μία παράμετρο το οποίο υπολογίζετε δύσκολα με απευθείας ολοκλήρωση,

αφού $\int\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)^2}=-\frac{x^2}{\ln x}+\frac{x}{\ln x}+2\mathrm{Ei}(2\ln x)-2\mathrm{li}x$

4[4]. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi\ln\left(\frac{\beta-\cos x}{\alpha-\cos x}\right)dx=\pi\ln\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-1}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\right),\ \text{με } \alpha,\ \beta>1$$

[4] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, άσκηση 11(ε), σελ. 286.

Απόδειξη

Από τη γνωστή σχέση $\int_0^{\pi}\frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha>1$ με ολοκλήρωση του αριστερού της μέλους ως προς α, από α έως β δίνει,

$$\int_0^{\pi}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\alpha}{\alpha-\cos x}\right\}dx=\int_0^{\pi}\left[\ln(\alpha-\cos x)\Big|_{\alpha}^{\beta}\right]dx=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{\beta-\cos x}{\alpha-\cos x}\right)dx.$$

Η ολοκλήρωση επίσης του δεξιού μέλους ως προς α, από α έως β δίνει,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\pi d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}=\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\Big|_a^b=\pi\ln\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-1}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\right).$$

Άρα αποδείχτηκε.

5. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\ln\left(\frac{1+\beta\cos x}{1+\alpha\cos x}\right)dx=\frac{1}{2}\left\{(\arccos\alpha)^2-(\arccos\beta)^2\right\}\ \text{αν } 0\le\alpha<1,\ \text{και } 0\le\beta<1.$$

Απόδειξη

Ισχύει ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\arccos\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, οπότε με την προηγούμενη διαδικασία έχουμε ότι:

Για το πρώτο μέλος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_a^b\frac{d\alpha}{1+\alpha\cos x}\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}\ln(1+\alpha\cos x)\Big|_a^b\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\ln\left(\frac{1+\beta\cos x}{1+\alpha\cos x}\right)dx.$$

Για το δεύτερο μέλος

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\arccos\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=\frac{1}{2}\left\{(\arccos\alpha)^2\Big|_{\alpha}^{\beta}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(\arccos\alpha)^2-(\arccos\beta)^2\right\}$$

Οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

6[5]. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x\sec kx}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2}$, με α, β>0.

Απόδειξη

Ισχύει $\int e^{-\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{-\alpha x}(-\alpha\cos\beta x+\alpha\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$, οπότε

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos kx dx=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon}e^{-\alpha x}\cos kx dx=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right|_0^{\varepsilon}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\alpha)=\int_0^{\infty}g(x,\alpha)dx$ με $g(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\cos\beta x$.

Αφού η g(x, α) είναι συνεχής και το $\int_0^{\infty}g(x,\alpha)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα διότι $\left|e^{-\alpha x}\cos kx\right|\le e^{-\alpha x}$ και το $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx$ συγκλίνει, άρα και το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos kx dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα.

Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση f(α) ως προς α από α έως β και έχουμε.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos kx dx\right\}d\alpha=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha \text{ ή}$$

$$\int_0^{\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\alpha x}\cos kx d\alpha\right\}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2} \text{ ή } \int_0^{\infty}\left.\frac{e^{-\alpha x}\cos kx}{-x}\right|_{\alpha}^{\beta}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2} \text{ ή}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x\sec kx}dx==\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2}.$$

[5] α) F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, άσκηση 11γ, σελ. 287.
β) M. R. Spiegel, Ανώτερα Μαθηματικά, Μετάφραση, Σχοινάς Χ. Ι, Αθήνα 1978, σελ. 276.

7[6]. Τα Ολοκληρώματα του **Fresnel**

$$F_1 = \int_{\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ και } F_2 = \int_{\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Απόδειξη

Για το F_1 έχουμε διαδοχικά.

Θέτουμε $u = x^2$ και παίρνουμε $F_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du.$ **(1)**

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + 2\arctan \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} \right]$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x^{-\alpha}}{1+x} \right) dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{και } \int_0^{\infty} e^{-px} \sin x dx = \frac{1}{1+p^2}, \quad (p > 0) \qquad \textbf{(3)}$$

Θέτουμε στη **(3)** όπου p το p^2 και παίρνουμε $\int_0^{\infty} e^{-p^2 x} \sin x dx = \frac{1}{1+p^4}$.

Σύμφωνα με το *θεώρημα 6* (σελ. 107) ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη ως προς p από 0 έως άπειρο και έχουμε.

$$\int_0^{\infty} \sin x \left(\int_0^{\infty} e^{-p^2 x} dp \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+p^4} dp \qquad \textbf{(4)}$$

Από την **(2)** για $x = p^4$ και $\alpha = \frac{3}{4}$, έχουμε $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+p^4} dp = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, και αφού

$\int_0^{\infty} e^{-p^2 x} dp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ (Ολοκλήρωμα της πιθανότητας), η **(4)** γράφεται

[6] A. J. Zaita, S. K. Goel, Mathematics Magazine, Τόμος 62, No. 5 (Δεκ., 1989), 318-322

$$\int_0^\infty \sin x\sqrt{\frac{\pi}{x}}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ή } \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Άλλος τρόπος[7] για το $F_2 = \int_{-\infty}^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Θα δείξουμε ότι $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$, $0<\alpha<1$.

Η σχέση **(2)** γράφεται $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ και με $y=\frac{x}{1+x}$ το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{-\alpha}dy = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Άρα,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \quad \textbf{(5)}$$

Είναι $\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-xt}dt$ και αφού $\int_0^\infty e^{-xt}\cos x dx = \frac{t}{t^2+1}$ έχουμε,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-xt}\cos x dt\right)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt.$$

Θέτουμε $t^2=u$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα και έχουμε,

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+u}du = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\alpha+1}{2}\pi\right)} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad \text{(λόγω της } \textbf{(5)}\text{)}.$$

Οπότε προκύπτει η ζητούμενη σχέση

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}, \quad 0<\alpha<1. \ \textbf{(6)}$$

---

[7] M. R. Spiegel, Ανώτερα Μαθηματικά, Μετάφραση, Σχοινάς Χ. Ι, Αθήνα 1978, σελ. 294.

Αρα $F_2 = 2\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos y}{y^{\frac{1}{2}}} dy = (\text{απο } (6)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

8[8]**.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2 x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2 x^2}$, και η συνάρτηση

$f(x,\alpha) = \frac{\tan^{-1} \alpha x}{1+x^2}$ είναι συνεχής ως προς $x, \alpha \in (0,+\infty)$, οπότε ο κανόνας του Leibnitz δίνει

$$F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+\alpha^2 x^2)(1+x^2)} dx = \left[\ln \frac{1+x^2}{1+\alpha^2 x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{-\ln \alpha}{1-\alpha^2}.$$

Άρα $F(\alpha) = -\int_0^{\alpha} \frac{\ln t}{1-t^2} dt + c$, και αφού $F(0)=0$ με ολοκλήρωση κατά παράγοντας έχουμε:

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \frac{1}{t} dt.$$

Αλλά $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$, και $\ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1}{x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots\right)$

Οπότε ολοκληρώνοντας «όρο προς όρο» παίρνουμε,

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \ln \alpha \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^3}{3^2} + \frac{\alpha^5}{5^2} + \ldots\right)$$

10[9]**.** Υπολογισμός ενός ολοκληρώματος του **Putnam**

Ένα πρόβλημα στο διαγωνισμό **Putnam** το 1985 ήταν το εξής:

---

[8] R. E. Shafer, The American Mathematical Monthly, Τόμος 81, No. 3 (Μαρ., 1974), 290-291

[9] S. J. Bernau, The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 10 (Δεκ., 1988), 935.

Αν είναι γνωστό ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-1985(t+t^{-1})}dt$

Λύση

Μία λύση είναι να θέσουμε $\alpha = 1985$, και να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $I(x) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha t-\alpha t^{-1}}dt$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς x, καταλήγουμε σε μία διαφορική εξίσωση, η οποία έχει λύση την

$$I(x) = I(0)e^{-2(\alpha x)^{\frac{1}{2}}},\ \text{με } I(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Ο συγγραφέας του άρθρου προτείνει μια λύση στην οποία δεν γίνεται χρήση της παραγώγισης του ολοκληρώματος.

Έστω $\alpha > 0$, θέτουμε

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha(t+t^{-1})}dt.$$

Έχουμε διαδοχικά

$$K(\alpha) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha(t+t^{-1})}dt + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha(t+t^{-1})}dt,$$

αν θέσουμε όπου t το $\frac{1}{t}$ στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$K(\alpha) = \int_1^{+\infty}\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{3}{2}}\right)e^{-\alpha(t+t^{-1})}dt,$$

και με την αντικατάσταση $u = \alpha^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)$, προκύπτει ότι

$$K(\alpha) = 2\alpha^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-u^2-2\alpha}du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-2\alpha}.$$

7.5. Συνέλιξη[1]

Το ολοκλήρωμα

$$h(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

ονομάζεται η **συνέλιξη** των συναρτήσεων f και g, και συμβολίζεται συνήθως με $h=f*g$.

7.5.1 Ιδιότητες

i. $f*g=g*f$

ii. $f*(g*h)=(f*g)*h$

iii. $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

iv. $\alpha(f*g)=(\alpha f)*g=f*(\alpha g)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ ή $\alpha\in\mathbb{C}$.

v. $(f*g)'=f'*g=f*g'$

vi. $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$, όπου $\mathcal{F}(f)$ συμβολίζει το μετασχηματισμό Fourier για τη συνάρτηση f.

vii. **Θεώρημα συνέλιξης:**

Αν $F(s)=L\{f(t)\}$ και $F(s)=G\{g(t)\}$ τότε:

(α) $L\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s)$

(β) $L^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t)$.

7.5.2 Τύπος του Cauchy για την επαναληπτική ολοκλήρωση

Θεωρούμε τη συνέλιξη $h_n=t^{n-1}*f$, άρα

$$h_n(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε

$$h_n'(x)=(n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}dt \quad \text{άρα} \quad h_n'(x)=(n-1)h_{n-1}(x).$$

Όμοια,

$$h_{n-1}'(x)=(n-2)h_{n-2}(x),\ \ldots,\ h_1'(x)=f(x).$$

---

[1] . J. Wiener, The College Mathematics Journal, Τόμος 32, No. 3 (Μάϊος, 2001), 180-184.

Επομένως,

$$h_n^{(n)}(x) = (n-1)!f(x) \quad \text{με } h_n(0) = \cdots = h_1(0) = 0$$

ή

$$h_n(x) = (n-1)!\int_0^x\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\cdots dt. \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε,

$$\int_0^x\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\cdots dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt \qquad (3)$$

δηλαδή ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα για το τύπο του Cauchy της επαναληπτικής ολοκλήρωσης.

7.5.3 Εφαρμογή για τις συναρτήσεις $f(t) = t^{m-1}$ και $g(t) = t^{n-1}$ θα αποδείξουμε ότι,

$$h_n(x) = (f * g)(x) = B(m,n)x^{m+n-1}$$

Πράγματι αν θέσουμε στην (3) $f(t) = t^{m-1}$ και $t = xu$, τότε

$$\int_0^x t^{m-1}(x-t)^{n-1}dt = x^{m+n-1}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du = B(m,n)x^{m+n-1}.$$

7.5.4 Taylor's Formula. Θα βρούμε μία έκφραση για το τύπο του Taylor.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι (n+1) - φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και $x = \alpha$ εσωτερικό σημείο του I, με

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (4)$$

όπου $P_n(x)$ καί $R_n(x)$ είναι το πολυώνυμο του Taylor και το υπόλοιπο τάξης n αντίστοιχα.

Τότε από την (4) έχουμε,

$$f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x)$$

και αφού,

$$R_n(\alpha)=R_n'(\alpha)=R_n''(\alpha)=\cdots=R_n^{(n)}(\alpha)=0,$$

το $R_n(x)$ είναι το επαναληπτικό ολοκλήρωμα τάξης (n+1) για τη συνάρτηση $f^{(n+1)}$ με κάτω άκρο ολοκλήρωσης το $x=\alpha$.

Οπότε από την (3) έχουμε $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$

7.5.4 Εφαρμογή του Θεωρήματος της συνέλιξης στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση[2]

$$f'(t)-\sin t=\int_0^t f(t-u)\cos u\,du,\quad \text{με } f(0)=0.$$

Λύση

Έστω $F(s)=L\{f(t)\}$, τότε $L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)=sF(s)$.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης γράφεται $\int_0^t f(t-u)\cos u\,du=f(t)*\cos t$

Οπότε αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης θα πάρουμε.

$$L\{f'(t)\}-L\{\sin t\}=L\{f(t)*\cos t\},\ \text{άρα}$$

$$sF(s)-\frac{1}{s^2+1}=F(s)\frac{1}{s^2+1},\ \text{οπότε}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^3}.$$

Συνεπώς

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{t^2}{2}.$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $f(t)=\dfrac{t^2}{2}$.

---

[2] Γ. Β. Αντωνόπουλου, Ασκήσεις Ανώτερων Μαθηματικών, Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα 1993, σελ. 360, 371

7.6.1 Υπολογισμός σειράς με ολοκλήρωση

Να αποδείξετε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Λύση

Θα χρειαστούμε τη γενική μορφή του δεύτερου Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to\mathbb{R}$, είναι μονότονη και η $g:[\alpha,\ \beta]\to\mathbb{R}$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\ \beta]$, τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx + f(\beta)\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με $\sin\frac{x}{2}$, και με χρήση της ταυτότητας, $\sin A - \sin B = 2\cos A\cdot\cos B$, βρίσκουμε ότι

$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \quad (2)$$

Από τη σχέση τώρα

$$\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2}[(-1)^n-1]$$

προκύπτει ότι

$$E_n = \int_0^{\pi} x f_n(x)dx = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right]. \quad (3)$$

Στη σχέση (3), αν k άρτιος, τότε $\frac{(-1)^k-1}{k^2}=0$, επομένως

$$E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{4} - 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $E_{2n-1} = \int_0^{\pi}\frac{x}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left((4n-1)\frac{x}{2}\right)dx.$ (5)

Θα εφαρμόσουμε στην (5) το δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, και θα θεωρήσουμε για το σκοπό τις συναρτήσεις

$$g(x)=\sin x \quad \text{και} \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & ,x\in(0,\pi) \\ 1 & ,x=0 \end{cases}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι γν. αύξουσα στο [0, π] και η είναι ολοκληρώσιμη στο [0, π], ως συνεχής. Επομένως η (5) γράφεται

$$E_{2n-1} = f(0)\int_0^{\xi} g(x)dx+f(\pi)\int_{\xi}^{\pi} g(x)dx = 2\left\{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\frac{4n-1}{2}\xi\right\}\frac{1}{4n-1}.$$

Οπότε $\dfrac{\pi^2}{4} - 2\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = 2\left\{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\frac{4n-1}{2}\xi\right\}\frac{1}{4n-1}$, και αφού

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\frac{4n-1}{2}\xi\right\}\frac{1}{4n-1} = 0$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Οπότε $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}$,

άρα $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Ολοκλήρωμα Euler-Poisson $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

Για πρώτη φορά εμφανίστηκε διακριτικά σε ένα ιδιωτικό φυλλάδιο με τίτλο *Approximatio ad summam terminorum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expasi* το αποτέλεσμα,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Το έργο αυτό αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της καμπύλης κατανομής, μεταφράστηκε από τον **Abraham de Moivre (1667 – 1754)** ο οποίος και το συμπεριέλαβε στη δεύτερη έκδοση του έργου του *Doctrine of Chances* (1738)[1].

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γνωστό και ως «ολοκλήρωμα της πιθανότητας» γιατί εμφανίζεται συχνά στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Το ολοκλήρωμα $\int e^{-x^2}dx$ όπως είναι γνωστό (Κεφάλαιο 10) δεν είναι στοιχειώδες, ωστόσο του $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ μπορεί να βρεθεί η ακριβής τιμή. Θα παρουσιάσουμε επτά τρόπους.

Καταρχάς το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ υπάρχει σύμφωνα με το *Θεώρημα 9* (σελ. 107).

Πράγματι, ισχύει ότι

$$0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$$

και επειδή υπάρχει το $\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=1$, λόγω συμμετρίας θα υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

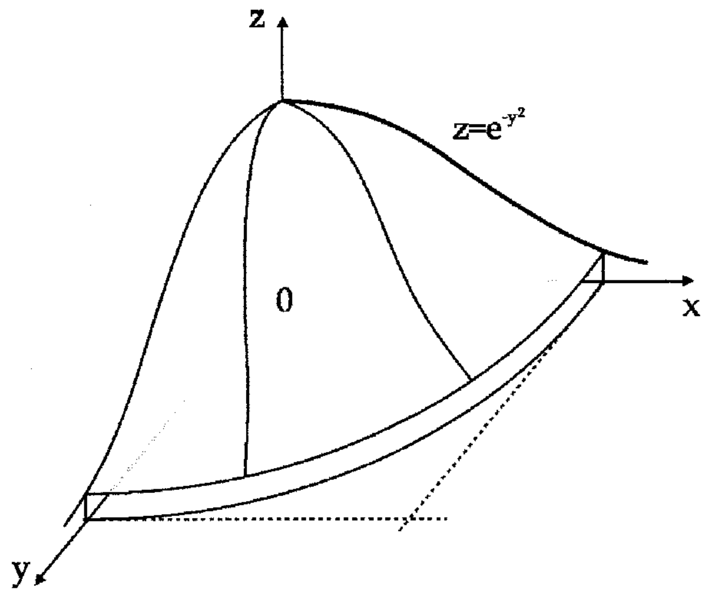
1ος Τρόπος[2] Ο τρόπος αυτός προϋποθέτει γνώσεις διπλών ολοκληρωμάτων.

Έστω $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$, και η καμπύλη $z=e^{-y^2}$.

Αν η καμπύλη $z=e^{-y^2}$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα των z (σχήμα 33) η επιφάνεια που προκύπτει δίνεται από τη σχέση $z=e^{-(x^2+y^2)}$ και το στερεό έχει όγκο,

[1] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968, σελ. 465.

[2] C. P. Nicholas, R. C. Yates, The American Mathematical Monthly, Τόμος 57, No. 6 (Ιούν. – Ιουλ., 1950), 412 – 413.



Σχήμα 33

$$V = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)e^{-y^2}dy = 4I^2.$$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας τη «μέθοδο των κελύφων» (βλέπε σελ. 47), έχουμε

$$V = 2\pi\int_0^\infty ye^{-y^2}dy = \pi.$$

Συγκρίνοντας προκύπτει ότι $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

2ος Τρόπος[3] **Με καρτεσιανές συντεταγμένες**
Ας είναι $y = xs$, τότε

$$I^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dy\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2(1+s^2)}xds\right)dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2(1+s^2)}xdx\right)ds = \int_0^\infty \left[\frac{1}{-2(1+s^2)}e^{-x^2(1+s^2)}\right]_0^\infty ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2}[\arctan s]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

[3] C. Georgakis, Τόμος 67, No. 1, (Φεβρ., 1994), σελ. 47

$$\text{Άρα } \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3ος Τρόπος[4]

Έστω ότι $I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon e^{-x^2}dx = \int_0^\varepsilon e^{-y^2}dy$, και $I = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} I_\varepsilon$ τότε:

$$I_\varepsilon^2 = \left(\int_0^\varepsilon e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\varepsilon e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint\limits_{\Re_\varepsilon} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Αφού η συνάρτηση $f(x) = e^{-(x^2+y^2)}$, είναι θετική έχουμε.

$$\iint\limits_{\Re_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I_\varepsilon^2 \le \iint\limits_{\Re_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (*)$$

όπου $\Re_1, \Re_2$ είναι τα τεταρτοκύκλια στο πρώτο τεταρτημόριο με ακτίνες ε, $\varepsilon\sqrt{2}$ αντίστοιχα.

Σε πολικές συντεταγμένες η (*) γράφεται

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\varepsilon} e^{-r^2}rdrd\theta \le I_\varepsilon^2 \le \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\varepsilon\sqrt{2}} e^{-r^2}rdrd\theta$$

Άρα $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\varepsilon^2}\right) \le I_\varepsilon^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\varepsilon^2}\right)$ και αφού

$\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\varepsilon^2}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\varepsilon^2}\right) = \frac{\pi}{4}$, θα είναι $I = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} I_\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4ος τρόπος[5]

Θέτουμε $y = \frac{x}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^{\infty} e^{-ny^2}dy. \quad (1)$$

Επειδή όμως ισχύει

$$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

---

[4] Murray R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*, Μετάφραση, Σχοινάς Χ. Ι, Αθήνα 1978, σελ. 278.

[5] κ. Λάμπρου

θα έχουμε

$$\left(1-x^2\right)^n \le e^{-nx^2} \le \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}, \quad x\in[0,\ 1].$$

Επομένως

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \le \int_0^1 e^{-nx^2} dx \le \int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx \le \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} \tag{2}$$

Για $x=\cos t$ έχουμε $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ (3)

και για $x=\tan t$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}$ (4)

Από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι,

$$\sqrt{n}\,\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} \le \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \le \sqrt{n}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Τώρα από το τύπο του Wallis, έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2n+1}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2n-1}\cdot\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Οπότε, από την (5) προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5$^{\text{ος}}$ Τρόπος[6]

Θέτουμε $x=xy$, $y>0$, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της

σχέσης $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ με e^{-y^2} και έχουμε,

---

[6] F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1967 σελ. 318.

$$Ie^{-y^2}=\int_0^{\infty} ye^{-(x^2+1)y^2}dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε ορθογώνιο $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\alpha\le x<\infty,\ \alpha\le y\le\beta\}$.

Πράγματι,

αν $g(x)=\beta e^{-(x^2+1)\alpha^2}$, τότε $0<ye^{-(x^2+1)y^2}<\beta e^{-(x^2+1)\alpha^2}$ και αφού το ολοκλήρωμα

$\int_0^{\infty}\beta e^{-(x^2+1)\alpha^2}dx$ συγκλίνει, *Θεώρημα 12* (σελίδα 108) άρα και το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} ye^{-(x^2+1)y^2}dx,$$

θα συγκλίνει *Θεώρημα 10* (σελ. 108) και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Τώρα σύμφωνα με το *θεώρημα 6* (σελ. 107) μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς y από α έως β και με αλλαγή της τάξης ολοκλήρωσης παίρνουμε.

$$I\int_{\alpha}^{\beta}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}dx\int_{\alpha}^{\beta}ye^{-(x^2+1)y^2}dy=\int_0^{\infty}\frac{e^{-(x^2+1)\alpha^2}-e^{-(x^2+1)\beta^2}}{2(x^2+1)}dx\quad(*)$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα (δεξιά) στην (*) η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{2(x^2+1)}$, και αφού το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2(x^2+1)}dx,$$

συγκλίνει ομοιόμορφα τότε από το *Θεώρημα 20* (σελ. 110), προκύπτει ότι και το ολοκλήρωμα,

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-(x^2+1)\alpha^2}-e^{-(x^2+1)\beta^2}}{2(x^2+1)}dx$$

συγκλίνει επίσης ομοιόμορφα.

Το αριστερό ολοκλήρωμα στην (*), είναι μία συνεχής συνάρτηση του α, επομένως για $\alpha\to 0$, έχουμε.

$$I\int_0^\beta e^{-y^2}dy=\int_0^\infty \frac{1-e^{-(x^2+1)\beta^2}}{2(x^2+1)}\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^\infty \frac{e^{-(x^2+1)\beta^2}}{2(x^2+1)}dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-(x^2+1)\beta^2}}{2(x^2+1)}dx$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία αφού, $e^{-(x^2+1)\beta^2}\le e^{-\beta^2}$ θα είναι,

$$0<G(\beta)<e^{-\beta^2}.$$

Οπότε $\lim\limits_{\beta\to\infty} I\int_0^\beta e^{-y^2}dy=\lim\limits_{\beta\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-G(\beta)\right)=\frac{\pi}{4}$, και το ζητούμενο προκύπτει αμέσως.

6ος Τρόπος [7]

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx$, $G(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$, t παράμετρος οι οποίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες για κάθε $t\in\mathbb{R}$.
Οπότε *από τα θεωρήματα 1 και 2* (σελ. 105) παίρνουμε

$$G'(t)=2e^{-t^2}\int_0^t e^{-t^2}dx \text{ και}$$
$$F'(t)=2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx=(y=tx)=-G'(t).$$

Άρα $F'(t)+G'(t)=0$ οπότε $F(t)+G(t)=C$, (C σταθερά).
Για $t=0$ είναι $C=\frac{\pi}{4}$, άρα $F(t)+G(t)=\frac{\pi}{4}$.
Ακόμα $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$, για τους λόγους που αναφέραμε για τη συνάρτηση $G(\beta)$ στο 5ο τρόπο και $I=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x^2}dx$,
άρα $I^2=\frac{\pi}{4}$.

7ος Τρόπος [8]

Θα χρειαστούμε το τύπο του Wallis

---

[7] α) Θ. Κυβεντίδη, Ολοκληρωτικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 383
β) R. Weinstock, The American Mathematical Monthly, Τόμος 97, No. 1 (Ιαν, 1990), 39 – 42.
[8] M. R. Spiegel, The American Mathematical Monthly, Τόμος 63, No. 10 (, 1956), 35 - 37

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right\}^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

και το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}.$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

το οποίο μετασχηματίζεται εύκολα στη μορφή $\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$.

Θέτουμε $I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$, αφού $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n=e^u$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=I. \quad (3)$$

Θέτουμε $t=\sqrt{n}\sin x$ και έχουμε

$$I_n=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\sqrt{n},$$

επομένως από το τύπο του Wallis έχουμε, $\lim_{n\to+\infty}I_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Θεωρούμε τη διαφορά $I-I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left\{e^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right\}dt+\int_{\sqrt{n}}^{\infty}e^{-t^2}dt.$

Αφού το ολοκλήρωμα $\int_{\sqrt{n}}^{\infty}e^{-t^2}dt$ συγκλίνει θα είναι $\lim_{n\to+\infty}\int_{\sqrt{n}}^{\infty}e^{-t^2}dt=0.$

Επίσης από τη σχέση $0\le e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\le\frac{u^2}{n}e^{-u}$, έχουμε

$$0\le\int_0^{\sqrt{n}}\left\{e^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right\}dt\le\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t^4e^{-t^2}dt.$$

Το ολοκλήρωμα όμως $\int_0^{\infty}t^4e^{-t^2}dt$ συγκλίνει επομένως για $n\to+\infty$ προκύπτει το ζητούμενο.

Το Ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

Όπως θα δούμε στη σελίδα 195 το ολοκλήρωμα $\int\frac{\sin x}{x}dx$, δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις ενώ το $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Θα αποδείξουμε επίσης ότι $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **(*)** και στη στην συνέχεια θα προτείνουμε επτά διαφορετικούς τρόπους μαζί με τις παραλλαγές τους, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Γενικότερα ισχύει ότι,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\begin{cases}\pi/2 & \alpha>0\\ 0 & \alpha=0\\ -\pi/2 & \alpha<0\end{cases}.$$

Θα δείξουμε επίσης ότι $\int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n\in\mathbb{N}$, ο οποίος μας θυμίζει το γνωστό ολοκλήρωμα του Wallis,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Θα αποδείξουμε καταρχήν ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ συγκλίνει.

Είναι $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ υπάρχει, όπως είδαμε *Κεφάλαιο 6* (σελ. 126), ενώ για κάθε $\varepsilon\in[\pi,+\infty)$ έχουμε,

$$\int_{\pi}^{\varepsilon}\frac{\sin x}{x}dx=\left[-\frac{\cos\varepsilon}{\varepsilon}-\frac{1}{\pi}\right]-\int_{\pi}^{\varepsilon}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Αλλά $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, $\forall x\ge\pi$, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_\pi^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ συγκλίνει,

και αφού $\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\frac{\cos\varepsilon}{\varepsilon}=0$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_\pi^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_\pi^{\varepsilon}\frac{\sin x}{x}dx \text{ υπάρχει.}$$

Για τους διάφορους τρόπους που θα παρουσιάσουμε παρακάτω θα χρειαστούμε το Λήμμα Riemann – Lebesque, και το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

9.1 Λήμμα Riemann – Lebesque[1]. Αν η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα [α, b] τότε $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx=0$.

Θα δείξουμε ότι $\mathbf{I}_n=\frac{\pi}{2}$. (**)

Είναι $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(2nx)\sin x}{\sin x}dx=0$,

οπότε $I_n=I_0=\frac{\pi}{2}$.

1ος τρόπος[2] (Με μετασχηματισμό Laplace)

Γνωρίζουμε ότι αν $F(t)=\int_0^{\infty}e^{-tx}f(x)dx$ τότε $\int_0^{\infty}F(t)dt=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$, με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}F(t)dt$ υπάρχει.

Για τη συνάρτηση $f(x)=\sin x$ έχουμε $F(t)=\int_0^{\infty}e^{-tx}\sin x dx=\frac{1}{1+t^2}$,

άρα $\int_\pi^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\infty}F(t)dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$.

9.2 Παρατήρηση Αν θέσουμε $x=\alpha y$ με $\alpha\ne0$ στην $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

έχουμε:

---

[1] Michael Spivak, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1991.

[2] κ. Μ. Λάμπρου

(α) $\int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ αν $\alpha>0$, και $\int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$ αν $\alpha<0$.

(β) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx=\frac{\pi}{4}$ και γενικότερα $\int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Είναι $\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$

Οπότε $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx=\frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Όμοια $\int_0^{\infty}\frac{\sin^5 x}{x}dx=\frac{3\pi}{16}$ και $\int_0^{\infty}\frac{\sin^7 x}{x}dx=\frac{5\pi}{32}$,

Τώρα θα αποδείξουμε ότι,

$$\int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Πράγματι από το τύπο

$$\sin^{2n+1}\theta=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left\{\binom{2n+1}{0}\sin(2n+1)\theta-\binom{2n+1}{1}\sin(2n-1)\theta+\cdots+(-1)^n\binom{2n+1}{n}\sin\theta\right\}.$$

έχουμε,

$$4^n\int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\left[\binom{2n+1}{0}-\binom{2n+1}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{2n+1}{n}\right]\frac{\pi}{2}$$

και λόγω της $\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}$

$$4^n\int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2},\ \text{άρα}\ \int_0^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}}{x}dx=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$

2ος τρόπος[3]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

η οποία αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = 0 = f(0)$, είναι συνεχής $[0,+\infty)$, άρα ολοκληρώσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα από το Λήμμα Riemann – Lebesque ισχύει ότι,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sin(2n+1)x dx=0 \text{ ή}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2} \text{ (λόγω της } (**)\text{)}$$

Επομένως $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dy=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Στον τρόπο που ακολουθεί θα δούμε πως μπορούμε να αποφύγουμε την εφαρμογή του λήμματος Riemann-Lebesque, χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα το οποίο θα εφαρμόσουμε στο ισοδύναμο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \quad \textbf{(1)}$$

3ος τρόπος για το $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ ([4])

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι $\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ και μετά με το παρακάτω θεώρημα, ότι $\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

[3] W. Kozakiewicz, The American Mathematical Monthly, Τόμος 58, No. 3 (Μάρτ., 1951), 181-182.

[4] M. R. Spiegel, The American Mathematical Monthly, Τόμος 58, No. 8 (Οκτ., 1951), 555-558

9.3 Θεώρημα Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda}dx=0.$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε διαδοχικά,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\left[\frac{1}{x}\sin^2 x\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}dx=(t=2x)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx,$$

αφού $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$.

Έστω $s_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$ τότε

$$S_k(x)=\frac{1}{k}\left[s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{k-1}(x)\right]=\frac{1}{2k}\left[\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 \text{ και αφού}$$

$\int_0^\pi \cos nx dx=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$ θα είναι,

$$\int_0^\pi S_k(x)dx=\frac{\pi}{2} \text{ και } \frac{1}{k}\int_0^\pi \frac{1-\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}dx=\frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{(2)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$ για την οποία ορίζουμε $f(0)=-\frac{1}{12}$ οπότε η συνάρτηση,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}, & 0<x\le\pi\\[2ex] -\dfrac{1}{12} & ,x=0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο [0, π], και άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Έτσι θα ισχύει $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^\pi\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right]\left[\frac{1-\cos kx}{k}\right]dx=0$ **(3)**

Από **(2)** και **(3)** $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^\pi \frac{1}{x^2}\left[\frac{1-\cos kx}{k}\right]dx = \frac{\pi}{2}$, άρα $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{kx}{2}}{kx^2}dx = \frac{\pi}{4}$

Οπότε $\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y^2}dy = \lim\limits_{k\to\infty}\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{y^2}dy = \frac{\pi}{2}$.

4ος τρόπος[5]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ y \ge 0$.

Έστω ότι $y > 0$

Η συνάρτηση $f(y,x) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο

$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0 \le x < \infty,\ 0 < y < \infty\},$$

Τα ολοκληρώματα, $\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^\infty -e^{-xy}\sin x dx$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

διότι $\left|\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \int_0^\infty e^{-xy}dx \to 0$, για $y \to +\infty$.

Όμοια για το $\int_0^\infty -e^{-xy}\sin x dx$.

Οπότε κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε,

$$F'(y) = \int_0^\infty -e^{-xy}\sin x dx = \left.\frac{e^{-xy}(\cos x + y\sin x)}{y^2+1}\right|_0^\infty = \frac{-1}{1+y^2},\ y \ge 0$$

Επομένως $F(y) = -\arctan y + C$ και αφού $\lim\limits_{y\to\infty}(C - \arctan y) = C - \frac{\pi}{2}$,

και $\left|\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right| < \int_0^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y} \to 0$, προκύπτει ότι $C = \frac{\pi}{2}$.

[5] The Mathematical Gazette

Άρα $F(y)=\frac{\pi}{2}-\arctan y,\ y>0$ και αφού το ολοκλήρωμα F(y) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[0,\alpha]$ θα είναι συνεχής στο $y=0$. Η συνάρτηση arctany είναι επίσης συνεχής στο $y=0$.

Επομένως $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{y\to 0} F(y) = \frac{\pi}{2}$.

5^{ος} τρόπος[6]

Εδώ θα παρουσιάσουμε μία απλή λύση η οποία στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

9.4 Θεώρημα. Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο [α, β] με $0\le\alpha<\beta$, τότε

$$\int_0^{+\infty}\left\{\int_a^b e^{-xy}xf(x)dx\right\}dy=\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού η f είναι μία συνεχής στο [α, β] άρα θα είναι και φραγμένη στο διάστημα αυτό οπότε $|f(x)|\le M$, για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$.

Για y > 0 έχουμε

$$\left|\int_\alpha^\beta\left(1-e^{-xy}\right)f(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta e^{-xy}|f(x)|dx \le M\frac{\left(e^{-\alpha y}-e^{-\beta x}\right)}{y} \le \frac{M}{y},$$

οπότε

$$\lim_{y\to+\infty}\int_\alpha^\beta\left(1-e^{-xy}\right)f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx. \quad \textbf{(1)}$$

Ισχύει ότι $1-e^{-xy}=\int_0^y xe^{-ux}du$ και αφού η συνάρτηση $g(x)=e^{-ux}xf(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]\times[0,\ y]$ θα είναι

$$\int_\alpha^\beta\left(1-e^{-xy}\right)f(x)dx=\int_\alpha^\beta\left\{\int_0^y xe^{-ux}du\right\}f(x)dx=\int_0^y\left\{\int_\alpha^\beta xe^{-ux}f(x)dx\right\}du. \quad \textbf{(2)}$$

[6] Kenneth S. Williams, Mathematics Magazine, Τόμος 44, No 1 (Ιαν. 1971), 9-11

Επομένως από (1) και (2) έχουμε.

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y\left\{\int_\alpha^\beta xe^{-ux}f(x)dx\right\}du=\lim_{y\to+\infty}\int_\alpha^\beta\left(1-e^{-xy}\right)f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$,

η οποία αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$ είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[0,\beta]$ με $\beta>0$ οπότε,

$$\int_0^\beta\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty\left\{\int_0^\beta e^{-ux}\sin x dx\right\}du=\int_0^\infty\frac{1-e^{-\beta u}\left(u\sin\beta+\cos\beta\right)}{1+u^2}du=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty\frac{e^{-\beta u}\left(u\sin\beta+\cos\beta\right)}{1+u^2}du.$$

Αλλά $\left|\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-\beta u}\left(u\sin\beta+\cos\beta\right)}{1+u^2}du\right|\leq\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-\beta u}}{1+u^2}du\leq\int_0^\infty e^{-bu}du=\frac{1}{\beta}.$

Επομένως για $\beta\to+\infty$, προκύπτει άμεσα ότι $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$

9.5 Σημείωση Στη σελίδα 180 δείξαμε ότι $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx.$

Εδώ θα παρουσιάσουμε δύο ακόμα τρόπους για την απόδειξη της σχέσης

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

1ος τρόπος[7]

Θεωρούμε τα γνωστά ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\quad(\mathrm{I})\quad\text{και}\quad\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\quad(\mathrm{II})$$

[7] α) L. Page, The American Mathematical Monthly, Τόμος 25, No. 5 (Μάϊος., 1918), 220-2291
β) F. Bowman, F. A. Gerard, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge 1967, σελ. 371.

Αφού $\left|e^{-\alpha x}\cos\beta x\right|\leq e^{-\alpha x}$ και το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx$ συγκλίνει άρα αν θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos(\beta x)dx$ σαν συνάρτηση του β, συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$. Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος ως προς β, ανάμεσα σε όποια άκρα θέλουμε.

Έτσι έχουμε $\int_0^{\beta}\left(\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x dx\right)d\beta=\int_0^{\beta}\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\beta$

ή

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\arctan\frac{\beta}{\alpha}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά παίρνουμε

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\beta}e^{-\alpha x}\cos\beta x d\beta\right)dx=\int_0^{\beta}\arctan\frac{\beta}{\alpha}d\beta$$

ή

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{1-\cos\beta x}{x^2}dx=\beta\arctan\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(\alpha^2+\beta^2\right).$$

Αφού το ολοκλήρωμα $G(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{1-\cos\beta x}{x^2}dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $\alpha\geq 0$, παριστάνει μία συνεχή συνάρτηση, οπότε

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\beta x}{x^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}G(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\beta\arctan\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)=|\beta|\frac{\pi}{2}.$$

Τελικά, $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\beta x}{x^2}dx=|\beta|\frac{\pi}{2}$ και για $\beta=1$ προκύπτει το ζητούμενο.

2ος τρόπος[8]

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

<u>Λύση</u>

Είναι $\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$,

[8] A.J. Zajta, S. K. Goel, Mathematics Magazine, Τόμος 62, No. 5 (Δεκ., 1989), σελ. 318-322

Θέτουμε $y = tx \quad (t > 0)$ και έχουμε,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad (t > 0)$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη ως προς t, από 0 έως t και έχουμε

$$\int_0^t \left(\int_0^\infty \left(\frac{\sin(tx)}{x} \right) dx \right) dt = \int_0^t \frac{\pi}{2} dt, \text{ άρα } \int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos tx}{x^2} \right) dt = \frac{\pi t}{2}.$$

Θέτουμε $t = 2$ και έχουμε $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$

Ολοκλήρωση συναρτήσεων με πεπερασμένους όρους[1]

10.1 Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα κυριότερα θεωρήματα με τα οποία μπορούμε να απαντήσουμε μερικώς στο ερώτημα:
«Πότε το αόριστο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις»;
Θα παρουσιάσουμε επίσης μερικά ενδιαφέροντα παραδείγματα και μεθόδους ολοκλήρωσης.
Πρίν προχωρήσουμε ας δώσουμε μερικούς ορισμούς.
Αλγεβρική συνάρτηση $y = f(x)$, είναι κάθε συνάρτηση η οποία είναι ρίζα ενός πολυωνύμου του y του οποίου οι συντελεστές είναι πολυώνυμα του x με σταθερούς συντελεστές, όπως για παράδειγμα

$$f(x) = x^3 - 3x + 8,\ f(x) = \frac{2x^4 - 5\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}},\ (x^2 + x + 1)[f(x)]^3 - x^2 f(x) + 2x + 7 = 0.$$

Στοιχειώδης συνάρτηση, είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής η οποία σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τις τέσσερις πράξεις, δυνάμεις και ρίζες πολυωνυμικών, τριγωνομετρικών, εκθετικών, λογαριθμικών συναρτήσεων και τις αντίστροφες τους, για παράδειγμα

$$f(x) = x^3 - 3x + 8,\ f(x) = \arctan x + e^x,\ f(x) = \sin\left[\cos^2 x + 2x - 1\right] + x\ln x - 1$$

Στοιχειώδες ολοκλήρωμα, θα ονομάζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα το οποίο μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις.
Παραδείγματα μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων,

$$\int e^{x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{1}{\ln x}dx,\ \int \sqrt{\ln x}\,dx\ ,\int x^2 e^{x^2}dx,\ \int \frac{\ln x}{1+x^2}dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$\text{και} \int \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}dx,\ \alpha>0.$$

---

[1] α) An Invitation to Integration in Finite Terms, E. A. Marchisotto, G. A. Zakeri, The College Mathematics Journal, Τόμος 25, No. 4 (Σεπτ. 1994), 295-308.
β) Formal Integration: Dangers and Suggestions, S. K. Stein, The Two-Year College Mathematics Journal, Τόμος 5, No.2 (Ανοιξη, 1974), 1-7.
γ) Integration in Finite Terms: The Liouville Theory, T. Kasper, Mathamatics Magazine, Τόμος 53, No. 4 (Σεπτ. 1980), 195-201.
δ) Integration, D. G. Mead, The American Mathematical Montly, Τόμος 68, No. 2 (Φεβρ. 1961), 152-156.

Το πρώτο θεώρημα αφορά το ολοκλήρωμα ρητών συναρτήσεων.

10.2 Θεώρημα του Laplace (1812). Το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης είναι στοιχειώδης συνάρτηση. Συγκεκριμένα, είτε είναι ρητή ή άθροισμα μιας ρητής και πεπερασμένου πλήθους λογαρίθμων ρητών συναρτήσεων.
Τα επόμενα θεωρήματα θα μας επιτρέψουν να καθορίσουμε πότε μία μεγάλη ομάδα συναρτήσεων μπορεί να ολοκληρωθεί με στοιχειώδης συναρτήσεις, και θα δώσουμε πολλά παραδείγματα μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων.

10.3 Θεώρημα του Liouville (1834). Αν η f είναι μία αλγεβρική συνάρτηση του x και αν το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ εκφράζεται από στοιχειώδεις συναρτήσεις, τότε

$$\int f(x)dx = G_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j \ln(G_j)$$

όπου C_j είναι σταθερές και G_j αλγεβρικές συναρτήσεις του x.
Θα κάνουμε το περίγραμμα της απόδειξης.
Η παράγωγος εκθετικής συνάρτησης είναι εκθετική συνάρτηση και η παράγωγος λογαριθμικής (βαθμού μεγαλύτερου της μονάδας) είναι επίσης λογαριθμική, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (από τον τύπο του Euler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$) μπορούν να γραφτούν ως εκθετικές συναρτήσεις. Έτσι το ολοκλήρωμα μιας αλγεβρικής συνάρτησης μπορεί να περιέχει γραμμικούς συνδυασμούς εκθετικών και λογαριθμικών όρων, αλλά δεν μπορεί να περιέχει τριγωνομετρικούς όρους.

π.χ.
α) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right) + C$

β) $$\int \frac{x^4+8x^2+x+16}{x^3+4x}dx = \int\left[x + \frac{4}{x} + \frac{i}{4(x+2i)} - \frac{i}{4(x-2i)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4\ln|x| + \frac{i}{4}\ln\left|\frac{x+i}{x-i}\right| + C.$$

Το 1835 ο Liouville γενίκευσε το θεώρημα για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, οπότε μπόρεσε να αποδείξει ότι μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων δεν έχει στοιχειώδες ολοκλήρωμα.

10.4 Ισχυρό Θεώρημα του Liouville (1835).

(α) Αν F αλγεβρική συνάρτηση των $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$, όπου $y_1, y_2, \ldots, y_m$ είναι συναρτήσεις του x των οποίων οι παράγωγοι $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$ είναι αλγεβρικές συναρτήσεις των $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)dx$$

είναι στοιχειώδης συνάρτηση αν και μόνο αν

$$\int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)dx = G_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j \ln(G_j)$$

όπου οι C_j είναι σταθερές και οι G_j αλγεβρικές συναρτήσεις των $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

(β) Αν η $F(x, y_1, \ldots, y_m)$ είναι ρητή συνάρτηση και οι $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$ ρητές συναρτήσεις των $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$, τότε οι συναρτήσεις G_j στο (a) είναι ρητές συναρτήσεις των $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

10.5 Παράδειγμα 1.

Το ισχυρό Θεώρημα του Liouville, περίπτωση (α) ισχύει για συναρτήσεις της μορφής,

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_7) = F\left(x,\ e^x,\ \ln x,\ e^{e^x},\ \ln(\ln x),\ \sin x,\ \cos x,\ \cos e^x\right)$$

όπου η F είναι μία αλγεβρική συνάρτηση των μεταβλητών της, και οι $\frac{dy_i}{dx}$, $i = 1,2,\ldots,7$, είναι επίσης αλγεβρικές συναρτήσεις των $x, y_1, y_2, \ldots, y_7$.

Ενώ η περίπτωση (β) για συναρτήσεις της μορφής

$$L(x, y_1, y_2, \ldots, y_6) = L\left(x,\ e^x,\ \ln x,\ e^{e^x},\ \ln(\ln x),\ \sin x,\ \cos x\right)$$

όπου L μία ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.

Το ισχυρό Θεώρημα του Liouville αποτέλεσε τη βάση πολλών εργασιών για την ολοκλήρωση συναρτήσεων κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα. Η αξία του έγκειται στο γεγονός ότι δίνει τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται ώστε να είναι μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη στοιχειωδώς. Αυτό θα φανεί στις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις.

Ας πάρουμε την ειδική περίπτωση $\int f(x)e^{g(x)}dx$, όπου f, g ρητές συναρτήσεις. Το ολοκλήρωμα αυτό με $F(x,y_1)=xy_1$ και $y_1=e^{g(x)}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος (μέρος (β)) αφού η

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right)=g'(x)e^{g(x)}=g'(x)y_1$$

είναι ρητή συνάρτηση των x και y_1.

10.6 Ισχυρό Θεώρημα του Liouville (ειδική περίπτωση, 1835). Αν f, g είναι ρητές συναρτήσεις του x με g μη σταθερή, τότε η $\int f(x)e^{g(x)}dx$ είναι στοιχειώδης, αν και μόνο αν, υπάρχει ρητή συνάρτηση R τέτοια ώστε

$$f(x)=R'(x)+R(x)g'(x).$$

Στη περίπτωση αυτή είναι $\int f(x)e^{g(x)}dx=R(x)e^{g(x)}$ **(*)**

Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος θα αποδείξουμε ότι κάποια ενδιαφέροντα ολοκληρώματα δεν είναι στοιχειώδη.
Θα δούμε επίσης σε παραδείγματα που ακολουθούν μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων οι οποίες δεν είναι στοιχειώδη ολοκληρώματα.

(α) Το ολοκλήρωμα $\int x^{2n}e^{\alpha x^2}dx$, όπου $n\in\mathbb{Z}$ και α μη μηδενική σταθερά, δεν είναι στοιχειώδης συνάρτηση.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι υπάρχει ρητή συνάρτηση R τέτοια ώστε,

$$x^{2n}=R'(x)+2\alpha xR(x), \quad (1)$$

με $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ και τα πολυώνυμα P, Q να είναι πρώτα μεταξύ τους.

Αφού $R'(x)=\dfrac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$ η (1) γράφεται,

$$\left[x^{2n}Q(x)-P'(x)-2\alpha xP(x)\right]Q(x)=-P(x)Q'(x). \quad (2)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι Q είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.
Έστω $Q(x)=(x-x_0)^kQ_1(x)$ με $k\geq 1$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $k=1$ τότε $Q(x)=(x-x_0)Q_1(x)$ με $Q_1(x_0)\neq 0$.

Ακόμα $Q'(x)=Q_1(x)+(x-x_0)Q_1'(x)$ με $Q'(x_0)=Q_1(x_0)\neq 0$.

Τότε από τη (2) αφού τα πολυώνυμα P, Q είναι πρώτα μεταξύ τους έχουμε ότι $Q'(x_0)=0$, άτοπο.

- Αν $k>1$ τότε το x_0 είναι ρίζα του πρώτου μέλους της (2) πολλαπλότητας $m\geq k$. Αφού όμως τα πολυώνυμα P, Q είναι πρώτα μεταξύ τους και $Q'(x)=(x-x_0)^{k-1}Q_2(x)$, έπεται ότι το x_0 θα είναι ρίζα του δεύτερου μέλους της (2) με πολλαπλότητα $k-1$, άτοπο.

  Οπότε το Q είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι $Q(x)=1$.

Έτσι η (2) γράφεται $x^{2n}=P'(x)+2\alpha xP(x)$. (3)

Θα δείξουμε ότι η (3) είναι αδύνατη.

Αν η εξίσωση (3) έχει λύση ένα πολυώνυμο P είναι προφανές ότι θα είναι βαθμού 2n-1. Οπότε θα είναι της μορφής $P(x)=\sum_{k=0}^{2n-1}\beta_k x^k$ και η (3) γράφεται,

$$x^{2n}=\sum_{k=1}^{2n-1}k\beta_k x^{k-1}+\sum_{k=0}^{2n-1}2\alpha\beta_k x^{k+1}=\sum_{k=0}^{2n-2}(k+1)\beta_{k+1}x^k+\sum_{k=1}^{2n}2\alpha\beta_{k-1}x^k$$

$$=\beta_1+\sum_{k=1}^{2n-2}[(k+1)\beta_{k+1}+2\alpha\beta_{k-1}]x^k+2\alpha\beta_{2n-2}x^{2n-1}+2\alpha\beta_{2n-1}x^{2n}.$$

Από την οποία έπεται ότι $b\beta_1=0$, $\beta_{2n-2}=0$, $(k+1)\beta_{k+1}+2\alpha\beta_{k-1}=0$ και

$$2\alpha\beta_{2n-1}=1, \text{με } 1\leq k\leq 2n-2.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί όταν $\beta_1=0$ είναι και $\beta_{2k-1}=0$, με $k=2,3,\dots,n$, οπότε η $2\alpha\beta_{2n-1}=1$ είναι αδύνατη.

(β) Το ολοκλήρωμα $\int x^{-n}e^{\alpha x}dx$, όπου n θετικός ακέραιος και α μη μηδενική σταθερά, δεν είναι στοιχειώδης συνάρτηση.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι υπάρχει ρητή συνάρτηση R(x) τέτοια ώστε,

$$x^{-n}=R'(x)+\alpha R(x),\quad (3)$$

με $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ και τα πολυώνυμα P, Q πρώτα μεταξύ τους.

Όμοια με τη προηγούμενη διαδικασία έχουμε

$$Q(x)\left(-Q(x)+x^nP'(x)+\alpha x^nP(x)\right)=x^nP(x)Q'(x). \quad (4)$$

Έστω ότι το πολυώνυμο Q είναι θετικού βαθμού και ότι έχει ρίζα x_0 πολλαπλότητας $k\geq 1$.
Αν $x_0\neq 0$ τότε το x_0 θα είναι ρίζα του πρώτου μέλους της (4) με πολλαπλότητα τουλάχιστον k, ενώ το δεύτερο μέλος της (4) θα έχει ρίζα το x_0 με πολλαπλότητα $k-1$, άτοπο.
Επομένως θα πρέπει $x_0=0$, οπότε θα υπάρχει μη μηδενική σταθερά β τέτοια ώστε $Q(x)=\beta x^k$.
Η σχέση (4) για $Q(x)=\beta x^k$ γράφεται,

$$x^k\left(-\beta x^k+x^nP'(x)+\alpha x^nP(x)\right)=kx^{n+k-1}P(x) \quad (5)$$

Υποθέτουμε ότι το $x_0=0$ είναι ρίζα της (5).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $n<k$, τότε το $x_0=0$ θα είναι ρίζα πολλαπλότητας $n+k$ για το πρώτο μέλος και ρίζα πολλαπλότητας $n+k-1$, για το δεύτερο μέλος. Το τελευταίο είναι άτοπο διότι τότε θα είναι $n+k-1=n+k$, άρα $-1=0$.

- Αν $n\geq k$ και $n\neq k+1$, τότε το $x_0=0$ θα είναι ρίζα πολλαπλότητας τουλάχιστον 2k για το πρώτο μέλος, και ρίζα πολλαπλότητας $n+k-1$ για το δεύτερο μέλος. Το τελευταίο είναι άτοπο διότι τότε θα είναι $n+k-1=2k$, άρα $n=k+1$.

- Αν $n=k+1$ τότε η (5) γράφεται $xP'(x)=\beta+kP(x)-\alpha xP(x)$, άτοπο γιατί έτσι έχουμε ισότητα πολυωνύμων διαφορετικού βαθμού.

Οπότε το πολυώνυμο Q, θα είναι σταθερό πολυώνυμο.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $Q(x)=1$ τότε η σχέση (4) γράφεται,

$$x^nP'(x)+\alpha x^nP(x)=1 \quad (6)$$

Η τελευταία εξίσωση αφού n θετικός ακέραιος δεν επαληθεύεται για κανένα πολυώνυμο P(x). Άρα δεν υπάρχει ρητή συνάρτηση η οποία να επα ληθεύει την (3) οπότε το ολοκλήρωμα $\int x^{-n}e^{\alpha x}dx$, δεν είναι στοιχειώδης συνάρτηση.

(γ) Τα ολοκληρώματα στα δύο τελευταία παραδείγματα είναι δύο ειδικές περιπτώσεις του ολοκληρώματος

$$\int x^n e^{\alpha x^m}dx$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και m, n ακέραιοι.

Με παρόμοιο τρόπο και πολλά άλλα ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα ολοκληρωμάτων της μορφής $\int x^n e^{\alpha x^m}dx$, όπως για παράδειγμα

$$\int x^n \cos(\alpha x^m)dx, \int x^n \cosh(\alpha x^m)dx \text{ και } \int x^n \sin^k(\alpha x^m)dx$$

για κατάλληλους ακεραίους m, n.

Είναι π.χ.

$$\int x^n \cos(\alpha x^m)dx = \mathrm{Re}\left[\int x^n e^{i\alpha x^m}dx\right],$$

$$\int x^n \cosh(\alpha x^m)dx = \frac{1}{2}\int x^n e^{\alpha x^m}dx + \frac{1}{2}\int x^n e^{-\alpha x^m}dx.$$

(δ) Με χρήση της $f(x) = R'(x) + R(x)g'(x)$ μπορούμε επίσης να εξετάσουμε αν κάποια ολοκληρώματα είναι στοιχειώδη ή να βρούμε τις αναγκαίες συνθήκες για να είναι στοιχειώδη.

Ας υποθέσουμε ότι $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα πολυώνυμα P, Q είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε η σχέση

$$f(x) = R'(x) + R(x)g'(x)$$

γράφεται

$$f(x)Q^2(x) = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) + P(x)Q(x)g'(x) \quad \textbf{(7)}$$

i) $\displaystyle\int \frac{(x^2+\alpha x+\beta)e^x}{(x-1)^2}dx$

Ας υποθέσουμε ότι $\int \frac{(x^2+\alpha x+\beta)e^x}{(x-1)^2}dx = \frac{P(x)}{Q(x)}e^x$, όπου τα P, Q είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους, τότε η **(7)** γράφεται

$$Q(x)\left[Q(x)(x^2+\alpha x+\beta)-(x-1)^2P'(x)-(x-1)^2P(x)\right]=-Q'(x)P(x)(x-1)^2. \quad \textbf{(8)}$$

Έστω ότι το πολυώνυμο Q είναι θετικού βαθμού, και ότι έχει ρίζα το x_0 με πολλαπλότητα k.

Αν $x_0 \neq 1$, είναι προφανές ότι το x_0 είναι ρίζα του πρώτου μέλους της **(8)** με πολλαπλότητα μεγαλύτερη ή ίση με k, και ρίζα του δεύτερου μέλους της **(8)** με πολλαπλότητα $k-1$, άτοπο. Οπότε θα πρέπει να είναι $x_0 = 1$, άρα $Q(x)=(x-1)^k$ και από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι,

$$(x-1)^k\left[(x-1)^k(x^2+\alpha x+\beta)-(x-1)^2P'(x)-(x-1)^2P(x)\right]=-k(x-1)^{k+1}P(x).$$

Το 1 είναι ρίζα στο πρώτο μέλος με πολλαπλότητα 2k και στο δεύτερο με πολλαπλότητα k + 1, άρα $k=1$.

Επομένως η τελευταία σχέση γράφεται,

$$(x-1)P'(x)+(x-2)P(x)=x^2+\alpha x+\beta,$$

από την οποία είναι προφανές ότι $P(x)=\gamma x+\delta$.

Μετά από απλές πράξεις προκύπτει ότι, $\gamma=1$, $\delta=\alpha+1$ και $\beta=-2\alpha-3$.

Άρα το ολοκλήρωμα $\int \frac{(x^2+\alpha x+\beta)e^x}{(x-1)^2}dx$ είναι στοιχειώδες αν και μόνο αν $\beta=-2\alpha-3$.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε

$$\int \frac{(x^2+\alpha x+\beta)e^x}{(x-1)^2}dx = \frac{e^x(x+\alpha+1)}{x-1}+C.$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα δούμε διάφορες τεχνικές με τις οποίες διάφορα ολοκληρώματα μπορούν να αναχθούν σε ολοκληρώματα των παραδειγμάτων (α) και (β).

10.7 Παράδειγμα 4.

i) Για το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\ln x} dx$ δεν εφαρμόζεται άμεσα το θεώρημα του Liouvile, έτσι για $y = \ln x$ έχουμε,

$\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{e^y}{y} dy$ το οποίο δεν είναι στοιχειώδες (παράδειγμα (β))

ii) Για το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{\ln x} dx$ με $u^2 = \ln x$ έχουμε,

$$\int \sqrt{\ln x} dx = \int 2u^2 e^{u^2} du$$

το οποίο δεν είναι στοιχειώδες (παράδειγμα (α))

iii) Όμοια τα παρακάτω ολοκληρώματα με τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις ανάγονται σε μη στοιχειώδη ολοκληρώματα.

- $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} dx = \int 2e^{u^2} du$, με $u^2 = \ln x$.
- $\int \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int 2e^{\alpha u^2} du$, με $u^2 = x$.
- $\int e^{e^x} dx = \int \frac{e^u}{u} du$, με $u = e^x$.

iv) Το ολοκλήρωμα $\int \ln(\ln x) dx$ δεν είναι στοιχειώδες διότι

$\int \ln(\ln x) dx = x \ln(\ln x) - \int \frac{1}{\ln x} dx$, και το $\int \frac{1}{\ln x} dx$ δεν είναι στοιχειώδες (παράδειγμα **(i)**)

viii) $\int \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im}\left(\int \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$

10.8 Θεώρημα των Liouville – Hardy (1905). Αν f είναι ρητή συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα $\int f(x) \ln x dx$ μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδης συναρτήσεις, αν και μόνο αν, υπάρχει ρητή συνάρτηση Q και σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = \frac{C}{x} + Q'(x)$.

<u>Απόδειξη</u>

Θα δείξουμε ότι με $f(x)=\frac{C}{x}+Q'(x)$ το $\int f(x)\ln x dx$, μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Είναι $\int f(x)\ln x dx=\int\left(\frac{C}{x}+Q'(x)\right)\ln x dx=\frac{C}{2}(\ln x)^2+Q(x)\ln x-\int\frac{1}{x}Q(x)dx.$

Αφού όμως η Q είναι ρητή συνάρτηση το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{x}Q(x)dx$ είναι στοιχειώδης συνάρτηση σύμφωνα με το Θεώρημα του Laplace.

Αντίστροφα, αν το ολοκλήρωμα $\int f(x)\ln x dx$ είναι στοιχειώδες, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4 θα είναι,

$$\int f(x)\ln x dx=R_0(x,\ln x)+\sum_{i=1}^{n}C_i\ln\left(R_i(x,\ln x)\right)$$

όπου οι R_i είναι ρητές συναρτήσεις.
Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης και έχουμε

$$f(x)\ln x=\left[R_0(x,\ln x)+\sum_{i=1}^{n}C_i\ln\left(R_i(x,\ln x)\right)\right]' \qquad (9)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την $R_0(x,\ln x)$ γύρω από το $x=0$ για τη μεταβλητή lnx, μετά από μερικές πράξεις μπορούμε να συμπεράνουμε από την (9) ότι

$$R_0(x,\ln x)=P(x)+Q(x)\ln x+R(x)(\ln x)^2$$

όπου, P, Q, R ρητές συναρτήσεις.

Ακόμα θα πρέπει $\sum_{i=1}^{n}C_i\ln\left(R_i(x,\ln x)\right)=\sum_{i=1}^{N}\beta_i(x-\alpha_i)$ όπου α_i, β_i σταθερές.

Συνεπώς

$$\int f(x)\ln x dx=P(x)+Q(x)\ln x+R(x)(\ln x)^2+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\ln\left(x-\alpha_i\right) \quad (10)$$

$$\int f(x)\ln x dx=\frac{C}{2}(\ln x)^2+Q(x)\ln x-\int\frac{Q(x)}{x}dx,\ C\ \text{σταθερά.} \quad (11)$$

Αφού Q ρητή το ολοκλήρωμα $\int \frac{Q(x)}{x}dx$ είναι στοιχειώδες, άρα και το $\int f(x)\ln x dx$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (11) και έχουμε,

$$f(x) = \frac{C}{x} + Q'(x)$$

και το θεώρημα αποδείχτηκε.

10.9 Παράδειγμα 5. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln x}{x-\alpha}dx$, με α μη μηδενική σταθερά δεν είναι στοιχειώδης, διότι η σχέση

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{C}{x} + g'(x)$$

επαληθεύεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = \ln(x-\alpha) - C\ln x + k,$$

η οποία δεν είναι ρητή συνάρτηση του x, οποιαδήποτε και αν είναι η σταθερά C.

10.10 Παρατήρηση Μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ολοκληρώματα της μορφής $\int f(x)dx$, με $f(x) = \prod_{j=1}^{N}(x-\alpha_j)^{-1}$ και α_j μη μηδενικές διακριτές σταθερές.

Είναι $f(x) = \prod_{j=1}^{N}(x-\alpha_j)^{-1} = \sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{x-\alpha_j}$, οπότε το ολοκλήρωμα

$$\int \left[\prod_{j=1}^{N}(x-\alpha_j)^{-1}\right]\ln x dx$$

δεν μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδης συναρτήσεις, αφού η συνάρτηση $\sum_{j=1}^{N} A_j \ln(x-\alpha_j) - C\ln x + k$, δεν είναι ρητή για καμία τιμή των σταθερών C και k.

Έτσι π.χ. για $\alpha_1 = i$ και $\alpha_2 = -i$, παίρνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ δεν είναι στοιχειώδες.

10.11 Θεώρημα του Chebyshev (1853)[2]. Αν $m, n, p \in \mathbb{Q}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta, n \neq 0$,

τότε το ολοκλήρωμα $\int x^m \left(\alpha + \beta x^n\right)^p dx$, μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς p, $\frac{m+1}{n}$, $p + \frac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος.

Απόδειξη για το ικανό

Με την αντικατάσταση $\beta x^n = \alpha t$, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στη μορφή $\int t^q (1+t)^p dt$, όπου $q = \frac{m+1}{n} - 1$ ρητός αριθμός.

α) Αν ο $\frac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος και $p = \frac{h}{k}$, θέτουμε $1 + t = u^k$.

β) Αν ο p είναι ακέραιος και ο $q = \frac{h}{k}$, θέτουμε $t = u^k$.

γ) Αν ο $\frac{m+1}{n} + p$ είναι ακέραιος και ο $q = \frac{h}{k}$, θέτουμε $1 + t = tu^k$.

Σε κάθε μία περίπτωση το ολοκλήρωμα $\int t^q (1+t)^p dt$, όπως είδαμε στη σελίδα 104, μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς u, το οποίο εκφράζεται από στοιχειώδης συναρτήσεις σύμφωνα με το Θεώρημα του Laplace.

Η απόδειξη για το αναγκαίο είναι πιο περίπλοκη και θα αρκεστούμε σε τέσσερις προτάσεις οι οποίες προσδιορίζουν πότε τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \sqrt[m]{1-x^n} dx$, $\int \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$, και τα ολοκληρώματα για μήκη τόξων, και εμβαδά επιφανειών στερεών εκ περιστροφής συναρτήσεων της μορφής $y = x^k$, μπορούν να εκφραστούν με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

[2] Formal Integration: Dangers and Suggestions, The Two – Year College Mathematics Journal, Τόμος 5, No. 2 (Ανοιξη, 1974), 1-7.

10.12 Πρόταση 1. Έστω ότι m, n θετικοί ακέραιοι τότε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt[m]{1-x^n}dx$ είναι στοιχειώδες, αν και μόνο αν, $m=1$, ή $n=1$, ή $m=n=2$.

Απόδειξη

Θέτουμε $t=x^n$ και παίρνουμε $\int \sqrt[m]{1-x^n}dx = \frac{1}{n}\int (1-t)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1-n}{n}}dt$, έτσι το ερώτημα είναι πότε το ολοκλήρωμα

$$\int (1-t)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1-n}{n}}dt \quad \text{(I)}$$

είναι στοιχειώδης συνάρτηση.

Από το θεώρημα του Chebyshev προκύπτει ότι το (I) είναι στοιχειώδες αν και μόνο αν

(α) $\frac{1-n}{n}$ είναι ακέραιος, ή

(β) $\frac{1}{m}$ ακέραιος, ή

(γ) $\frac{1-n}{n}+\frac{1}{m}$ ακέραιος.

Ας εξετάσουμε τις περιπτώσεις αυτές ξεχωριστά.

(α) Ο αριθμός $\frac{1-n}{n}$ είναι ακέραιος, ισοδυναμεί ο $\frac{1}{n}$ να είναι ακέραιος, δηλαδή $n=1$.

(β) Ο αριθμός $\frac{1}{m}$ είναι ακέραιος, ισοδυναμεί $m=1$.

(γ) Είναι $\frac{1-n}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-1$ οπότε για να είναι ακέραιος, ισοδυναμεί $m=n=2$, ή $m=n=1$.

Πράγματι αν $m=n$ τότε $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-1=\frac{2}{m}-1$ και για να είναι ο $\frac{2}{m}$ ακέραιος, ισοδυναμεί $m=1$ ή $m=2$.

Αν $m \neq n$ θα αποδείξουμε ότι $m+n<mn$, οπότε ο $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-1$ δεν είναι ακέραιος.

Πράγματι έστω ότι είναι $m<n$, τότε υπάρχει θετικός k ακέραιος τέτοιος ώστε $n=m+k$.

Οπότε,

$$m+n<mn \text{ ή } 2m+k<m^2+mk \text{ ή } m^2+m(k-2)+k>0.$$

Η τελευταία είναι προφανής για κάθε ακέραιο αριθμό $k\geq 2$. Αν $k=1$ τότε πρέπει $m^2-m+1>0$ η οποία ισχύει αφού έχει διακρίνουσα $\Delta<0$.

10.13 Πρόταση 2. Το ολοκλήρωμα $\int \sin^m\theta\cos^n\theta d\theta$ με $m,n\in\mathbb{Q}_+^*$ είναι στοιχειώδες αν και μόνο αν, m περιττός ακέραιος ή n περιττός ακέραιος, ή $m+n$ άρτιος ακέραιος.

Απόδειξη

Θέτουμε $t=\sin\theta$ και παίρνουμε,

$$\int \sin^m\theta\cos^n\theta d\theta = \int t^m\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dt = \left(y=t^2\right) = \frac{1}{2}\int y^{\frac{m-1}{2}}(1-y)^{\frac{n-1}{2}}dy \quad \text{(II)}$$

Από το θεώρημα του Chebyshev προκύπτει ότι το (II) είναι στοιχειώδες αν και μόνο αν

(α) $\frac{m-1}{2}$ είναι ακέραιος, ή

(β) $\frac{n-1}{2}$ ακέραιος, ή

(γ) $\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}$ ακέραιος.

Για το (α) υποθέτουμε ότι $\frac{m-1}{2}=k$ όπου k ακέραιος, οπότε $m=2k+1$ περιττός ακέραιος. Όμοια για το (β).

Για το (γ) υποθέτουμε ότι $\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}=k$, όπου k ακέραιος οπότε $m+n=2(k+1)$ άρτιος ακέραιος.

10.14 Πρόταση 3. Έστω k ένας ρητός αριθμός τότε το μήκος της καμπύλης $y=x^k$, μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδης συναρτήσεις αν και μόνο αν $k=1+\frac{1}{n}$, όπου n ακέραιος.

Απόδειξη

Το μήκος της καμπύλης δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{1+k^2x^{2k-2}}dx$.
Θέτουμε $u=k^2x^{2k-2}$, και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\frac{1}{2k-2}\int u^{\frac{3-2k}{2k-2}}(1+u)^{\frac{1}{2}}du, \quad \text{(III)}$$

οπότε από το θεώρημα του Chebyshev το ολοκλήρωμα (III) είναι στοιχειώδες, αν και μόνο αν,

(α) $\frac{3-2k}{2k-2}$ ακέραιος ή

(β) $\frac{1}{2}+\frac{3-2k}{2k-2}$ ακέραιος.

Για το (α), υποθέτουμε ότι $\frac{3-2k}{2k-2}=m$, όπου m ακέραιος. Οπότε $k=1+\frac{1}{n}$, με $n=2m+2$, ακέραιο αριθμό.

Για το (β), υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2}+\frac{3-2k}{2k-2}=n$, με n ακέραιο αριθμό.
Τότε $k=1+\frac{1}{(2n+1)}$, και η πρόταση αποδείχτηκε.

10.15 Πρόταση 4. Το εμβαδόν της επιφάνειας πού προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y=x^k$, όπου k ρητός αριθμός, ως προς τον άξονα $x'x$, μπορεί να εκφραστεί από στοιχειώδεις συναρτήσεις αν και μόνο αν $k=1$ ή $k=1+\frac{2}{n}$, όπου n ακέραιος αριθμός.

Απόδειξη

Το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int 2\pi x^k\sqrt{1+k^2x^{2k-2}}dx.$$

Θέτουμε $u=k^2x^{2k-2}$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\frac{1}{2k-2}\int u^{\frac{3-k}{2k-2}}(1+u)^{\frac{1}{2}}du, \text{ (IV)}$$

οπότε από το θεώρημα του Chebyshev το ολοκλήρωμα (IV) είναι στοιχειώδες, αν και μόνο αν,

(α) $\frac{3-k}{2k-2}$ ακέραιος ή

(β) $\frac{1}{2}+\frac{3-k}{2k-2}$ ακέραιος.

Για το (α) υποθέτουμε ότι $\frac{3-k}{2k-2}=m$, όπου m ακέραιος. Οπότε $k=1+\frac{2}{n}$, με $n=2m+1$, ακέραιο αριθμό.

Για το (β) υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2}+\frac{3-k}{2k-2}=n$, με n ακέραιο αριθμό, οπότε $k=1+\frac{1}{n}=1+\frac{2}{2n}=1+\frac{2}{p}$, με p ακέραιο αριθμό, και η πρόταση αποδείχτηκε.

10.16 Παρατήρηση Από τις προτάσεις 3 και 4 προκύπτει ότι:
«Αν μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης $y=x^k$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και την επιφάνεια του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της ως προς τον άξονα $x'x$.»
Αυτό είναι προφανές αφού κάθε ρητός αριθμός k της μορφής $k=1+\frac{1}{n}$ γράφεται και ως $k=1+\frac{2}{p}$, με $p=2n$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει, παραδείγματος χάριν.
Είναι προφανές ότι για την καμπύλη $y=x^{\frac{5}{3}}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της ως προς τον άξονα $x'x$, αφού $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$, ενώ δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της, αφού $\frac{5}{3}\neq 1+\frac{1}{n}$, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

10.17 Εφαρμογή 1. Θα αποδείξουμε το τελευταίο θεώρημα του Fermat για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις με χρήση του θεωρήματος του Chebyshev.

Θεώρημα: Δεν υπάρχουν πολυωνυμικές συναρτήσεις P, Q, R με $\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}$ μη σταθερές ρητές συναρτήσεις τέτοιες ώστε,

$[P(x)]^n + [Q(x)]^n = [R(x)]^n$, όπου n ακέραιος μεγαλύτερος του 2.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για $n>2$ δεν υπάρχουν ρητές συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε

$$[f(x)]^n + [g(x)]^n = 1$$

Πράγματι αν υπήρχαν τέτοιες συναρτήσεις f και g τότε αφού η συνάρτηση gf' είναι ρητή, από το Θεώρημα του Laplace το ολοκλήρωμα της θα είναι στοιχειώδες.

Είναι $\int g(x)f'(x)dx = \int \left(1-(f(x))^n\right)^{\frac{1}{n}} f'(x)dx = \int \left(1-u^n\right)^{\frac{1}{n}} du.$

Το ολοκλήρωμα όμως $\int \left(1-u^n\right)^{\frac{1}{n}} du$ (Θεώρημα του Liouville) είναι στοιχειώδες αν ο $\frac{1}{n}$ ή $\frac{2}{n}$ είναι ακέραιος. Αφού όμως $n>2$ οι αριθμοί $\frac{1}{n}$ και $\frac{2}{n}$ δεν είναι ακέραιοι, και το θεώρημα αποδείχτηκε.

10.18 Εφαρμογή 2. Η εφαρμογή αυτή αφορά το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα.

(α) Αν οι f και f^{-1} είναι αντίστροφη η μία της άλλης σε ένα κλειστό διάστημα Δ, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - G(f(x)), \text{ όπου } G(x) = \int f^{-1}(x)dx.$$

(β) Αν οι f και f^{-1} είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις σε ένα κλειστό διάστημα, τότε το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι στοιχειώδες, αν και μόνο αν το $\int f^{-1}(x)dx$ είναι στοιχειώδες.

Απόδειξη

(α) Είναι $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f^{-1}(f(x))f'(x)dx$

$$xf(x) - G(f(x)).$$

(β) Έστω ότι το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι στοιχειώδες τότε από το (α) έχουμε,

$$\int f(x)dx = xf(x) - G(f(x)), \qquad (12)$$

και αφού η συνάρτηση f και το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι στοιχειώδεις, άρα και το $G(f(x)) = \int f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int f^{-1}(x)dx$, είναι στοιχειώδες.

Αντίστροφα, αν το ολοκλήρωμα $\int f^{-1}(x)dx$ είναι στοιχειώδες τότε, αφού $\int f^{-1}(x)dx = \int f^{-1}(f(x))f'(x)dx = G(f(x))$, από τη σχέση (12) προκύπτει ότι και το $\int f(x)dx$ είναι στοιχειώδες.

Παράδειγμα 1. Θα δούμε και *άλλα* παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το ολοκλήρωμα δεν εκφράζεται από στοιχειώδης συναρτήσεις.

α) Το $\int \sqrt{\ln x}dx$ δεν είναι στοιχειώδες αφού το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης $\int e^{x^2}dx$ δεν είναι στοιχειώδες. (Ισχυρό θεώρημα του Liouville).

β) Το $\int \frac{1}{\ln x}dx$ δεν είναι στοιχειώδες αφού το ολοκλήρωμα της αντίστροφης $\int e^{\frac{1}{x}}dx$ δεν είναι στοιχειώδες.

Πράγματι αν θέσουμε $u = \frac{1}{x}$ έχουμε $\int e^{\frac{1}{x}}dx = -\int u^{-2}e^{u}du$, το οποίο δεν είναι στοιχειώδες (Ισχυρό θεώρημα του Liouville, ειδική περίπτωση).

Παράδειγμα 2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

Λύση

Έστω $f:[0, 1) \to [0, +\infty)$ με $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$, τότε υπάρχει η αντίστροφη της $f^{-1}:[0,+\infty) \to [0,1)$ με $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε,

$$G(x)=\int f^{-1}(x)dx=\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x-\arctan x + c.$$

Οπότε $I=\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=(x-1)\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)+c.$

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε μέσα από κάποια παραδείγματα πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε όταν βρίσκουμε ολοκληρώματα από εγχειρίδια με πίνακες ολοκληρωμάτων. Όπως επίσης και στον έλεγχο των προϋποθέσεων για την εφαρμογή θεωρημάτων και προτάσεων ολοκλήρωσης.

1.

α) Από την $\int u dv = uv - \int v du$ για $u = \frac{1}{x}$, v=x έχουμε

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x^2} x dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx,$$

άρα $0 = 1$.

β) Είναι $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$

και

$$\int \sin x \cos x dx = -\int \cos x (\cos x)' dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε $\frac{1}{2} = 0$.

Το παράδοξο στα προηγούμενα παραδείγματα οφείλεται στη παράλειψη της σταθεράς ολοκλήρωσης.

2. Έστω το ολοκλήρωμα $\int_0^{4\pi} \frac{1}{4 + \sigma\upsilon\nu x} dx$, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι προφανώς παντού θετική.

Θέτουμε $\varepsilon\varphi \frac{x}{2} = \omega$ και έχουμε:

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{4 + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^0 \frac{1}{4 + \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} d\omega = \int_0^0 \frac{2}{5 + 3\omega^2} d\omega = 0.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας παντού θετικής συνάρτησης είναι μηδέν.

Εδώ το λάθος προέκυψε από το γεγονός ότι η συνάρτηση $g(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

3[1]**.** Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ορισμένα ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε το τύπο των Newton – Leibniz:

$\int_\alpha^x f(t) dt = F(x) - F(\alpha)$ όπου f συνεχής και F τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$ σε διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$.

Ακόμα η F πρέπει να είναι συνεχής παντού στο $[\alpha, \beta]$.

---

[1] Σ. Κ. Ντούγιας, Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2005, σελ. 148

Η εφαρμογή του τύπου των Newton – Leibniz πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή, γιατί πολλές φορές οδηγούμαστε σε παράξενα αποτελέσματα όπως θα φανεί στα παρακάτω παραδείγματα.

Επειδή $\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, x \neq 1$, θα έχουμε

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{2x}{1-x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας παντού θετικής συνάρτησης είναι αρνητικό.

Το σωστό είναι,

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

Το αποτέλεσμα στην (1) είναι λάθος διότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ δεν ορίζεται στο $x = 1$, και αφού

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{\pi}{4} \text{ και } \lim_{x\to 1^+} F(x) = -\frac{\pi}{4}$$

δεν μπορούμε να επεκτείνουμε το τύπο της, ώστε να γίνει παραγωγίσιμη στο $x = 1$.
Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στη σχέση (1), πρέπει το $x = 1$, να μην είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Αν το $x = 1$, είναι άκρο διαστήματος τότε παίρνουμε ως τιμή της συνάρτησης το αντίστοιχο όριο.

Η σωστή διαδικασία είναι,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = F(1-0) - F(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = F\left(\sqrt{3}\right) - F(1+0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Άρα

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

4[2]**.** Γνωρίζουμε ότι αν f συνεχής και $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ τότε και η F συνεχής.

Προσοχή όμως, η $f(t)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2\left(e^{\frac{1}{t}}+1\right)^2} & ,t\neq 0 \\ 0 & ,t=0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

Αφού $\left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t}}+1}\right)'=f(t)$ με $t\neq 0$ θα περίμενε κανείς ότι η συνάρτηση,

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}-\frac{e}{e+1}$$

είναι συνεχής.

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=0\neq \dfrac{1}{e+1}=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)$, άρα δεν είναι συνεχής στο $x=0$.

Δηλαδή δεν ισχύει $F(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}-\dfrac{e}{e+1}$ για κάθε $x\in[-1,+\infty)$.

Η σωστή απάντηση είναι $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{e^{1/x}+1}-\dfrac{e}{e+1}, & -1\leq x<0 \\ \dfrac{1}{e+1} & ,x=0 \\ \dfrac{1}{e^{1/x}+1}+\dfrac{1}{e+1}, & 0<x<\infty \end{cases}$

Διότι $F(0)=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_{-1}^{-\delta} f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t}}+1}\right]_{-1}^{-\delta}=\dfrac{1}{e+1}.$

Και για $x>0$, $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=$

$$=\frac{1}{e+1}+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{x} f(t)dt=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+\frac{e}{e+1}.$$

---

[2] κ. Λάμπρου

5[3]. Ο τύπος

$$\int \frac{1}{\alpha+\beta\cos x}dx = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\tan\frac{x}{2}}{\alpha+\beta},\ \text{αν}\ \alpha^2>\beta^2,\ (2)$$

εμφανίζεται σε πολλά εγχειρίδια με πίνακες ολοκληρωμάτων.

Ωστόσο πρέπει να είμαστε προσεκτικοί γιατί συμβαίνει το εξής παράδοξο.

Για $\alpha=5$ και $\beta=-3$ έχουμε.

Το αριστερό μέλος $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{5-3\cos x}dx > 0$ αφού $5-3\cos x > 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Το δεξιό μέλος $\frac{1}{2}\left[\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\arctan 2 < 0.$

Θέτουμε $F(x)$ για το δεξιό μέλος της (2),

ισχύει

$$F'(x)=\frac{1}{\alpha+\beta\cos x}$$

για όλες τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες είναι ορισμένη.

Αν $x_n=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ τότε για $\alpha+\beta>0$ έχουμε,

$$\lim_{x\to x_n^+}F(x)=\frac{-\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\ \text{και}\ \lim_{x\to x_n^-}F(x)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.$$

Ενώ για $\alpha+\beta<0$ ισχύουν αντίστροφα δύο οι προηγούμενες ισότητες. Έτσι η F δεν ορίζεται για $x=x_n$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_n. Συνεπώς για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα με εφαρμογή της (2), πρέπει το διάστημα ολοκλήρωσης να μην έχει εσωτερικά σημεία της μορφής $x=x_n$ με $x_n=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. Αν ένα σημείο $x=x_n$ είναι άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης, τότε όπως είπαμε και στο παράδειγμα 3 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (2) παίρνοντας ως τιμή της F στο $x=x_n$ το αντίστοιχο όριο.

Η σωστή διαδικασία λοιπόν είναι

[3] A. E. Taylor, The American Mathematical Monthly, Τόμος 54, No. 3 (Μαρ., 1947), 156-157

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}dx = F(\pi-0)-F(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}dx = F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F(\pi+0)=-\frac{1}{2}\arctan 2+\frac{\pi}{4}$$

Άρα $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}dx = -\frac{1}{2}\arctan 2+\frac{\pi}{2}$.

6. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ότι μπορεί να είναι γνωστές οι συναρτήσεις f και f′, αλλά δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την f με ολοκλήρωση της f'.

Πράγματι ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\eta\mu x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}\eta\mu x-\frac{1}{\sqrt{x}}\sigma\upsilon\nu x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$.

Αφού το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ «ταλαντώνεται» από το $(-\infty)$ στο $(+\infty)$ η f' δεν είναι φραγμένη άρα ούτε ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,\alpha]$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. LOUIS BRAND, Μαθηματική Ανάλυση, μετάφραση, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984.

2. A. F. BERMANT, I. G. ARAMANOVICH, . Mathematical Analysis Moscow, Mir Publishers, 1975.

3. F. BOWMAN, F. A. GERARD, Higher Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

4. W. RUDIN, Αρχές Μαθηματικής Ανάλυσης,Έκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2000

5. M. SPIVAK, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, μετάφραση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1991.

6. Σ. Κ. ΠΗΧΩΡΙΔΗΣ, Απειροστικός Λογισμός Ι, Σύγχρονη Εποχή, Αθήνα 1996.

7. Π. Ι. ΞΕΝΙΚΑΚΗΣ, Πραγματική Ανάλυση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1999.

8. Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ, Ανάλυση Τόμος Ι, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2000.

9. N. C. PISKUNOV, Differential and Integral Calculus I, II, Moscow, Mir Publishers, 1972.

10. G. H. HARDY, A Course of Pure Mathematics, Cambridge University Press,

11. Σ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ, Σ. ΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ, Ε. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ, Απειροστικός Λογισμός Ι, ΙΙα, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.

12. Θ. Ν. ΚΑΖΑΝΤΖΗ, Ολοκληρώματα, Εκδόσεις Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη 1994.

13. R. COURANT, Differential and Integral Calculus I, II, John Wiley & Sons, N. York, 1988.

14. Μ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ, Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ, (Σημειώσεις), Πανεπιστήμιο Κρήτης.

15. MORRIS KLINE, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York 1972.

16. Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ, Ολοκληρωτικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2005.

17. SIR THOMAS HEATH, A History of Greek Mathematics, Oxford University 1921.

18. B. L. VAN DER WAERDEN, Η Αφύπνιση της Επιστήμης, Μετάφραση Γ. Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.

19. G. B. THOMAS – R. L. FINNEY, Απειροστικός Λογισμός, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2001.

20. A. K. ARORA, S. K. GOEL, D. M. RODRIGUEZ ,The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 2 (Φεβρ., 1988), σελ. 126-130.

21. The American Mathematical Monthly, Τόμος 56, No. 3, (Ιαν. 1949), σελ. 25-27.

22. J. WIENER, The College Mathematics Journal, Τόμος 32, No. 3 (Μάϊος, 2001), σελ. 180-184.

23. The American Mathematical Monthly, Τόμος 81, No. 3 (Μαρ., 1974), σελ. 290-291

24. The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 10 (Δεκ., 1988), σελ. 935.

25. M. R. SPIEGEL, The American Mathematical Monthly, Τόμος 58, No. 8 (Οκτ., 1951), σελ. 555-558.

26 KENNETH S. WILLIAMS, Mathematics Magazine, Τόμος 44, No 1 (Ιαν. 1971), σελ. 9-11.

27. E. A. MARCHISOTTO, G. A. ZAKERI, The College Mathematics Journal, Τόμος 25, No. 4 (Σεπτ. 1994), σελ. 295-308.

28. C. GEORGAKIS, Τόμος 67, No. 1, (Φεβρ., 1994), σελ. 47.

29. S. K. STEIN, The Two-Year College Mathematics Journal, Τόμος 5, No.2 (Ανοιξη, 1974), σελ. 1-7.

30. T. KASPER, Mathamatics Magazine, Τόμος 53, No. 4 (Σεπτ. 1980), σελ. 195-201.

31. D. G. MEAD, The American Mathematical Montly, Τόμος 68, No. 2 (Φεβρ. 1961), σελ. 152-156.

32. M. R. SPIEGEL, The American Mathematical Monthly, Τόμος 63, No. 10 (, 1956), σελ. 35 - 37

33. H. F. SANDHAM, The American Mathematical Monthly, Τόμος 58, No. 10 (Δεκ., 1951), σελ. 705-706

34. R. E. SHAFER, The American Mathematical Monthly, Τόμος 81, No. 3 (Μαρ., 1974), σελ. 290-291

35. S. J. BERNAU, The American Mathematical Monthly, Τόμος 95, No. 10 (Δεκ., 1988), σελ. 935.

36. W. KOZAKIEWICZ, The American Mathematical Monthly, Τόμος 58, No. 3 (Μάρτ., 1951), σελ. 181-182.

37. H. TATE, The American Mathematical Monthly, Τόμος 45, No. 1 (Ιαν., 1938), σελ. 56-58.

38. C. P. NICHOLAS, R. C. YATES, The American Mathematical Monthly, Τόμος 57, No. 6 (Ιούν. – Ιουλ., 1950), σελ. 412 – 413.

39. N. AZARNIA, T. A. FARMER, The College Mathematics Journal, Τόμος 26, No. 1 (Ιαν., 1995), σελ. 39-41.

40. H. F. MACNEISH, The American Mathematical Monthly, Τόμος 56, No. 3, (Ιαν. 1949), σελ. 25-27.

41. J. WIENER, The College Mathematics Journal, Τόμος 32, No. 3 (Μάϊος, 2001), σελ. 180-184.

42. R. E. SHAFER, The American Mathematical Monthly, Τόμος 81, No. 3 (Μαρ., 1974), σελ. 290-291.