ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Παναγιώτης Μαυρουδής

Επιβλέπων Καθηγητής Γεώργιος Κωστάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπτέμβριος 2007

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΥΠΕΡΚΥΚΛΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1.1 Εισαγωγικά

Έστω X χώρος Frèchet (δηλαδή ο X είναι τοπικά κυρτός γραμμικός χώρος με μετρική ρ τέτοια ώστε ο (X,ρ) είναι πλήρης και η μετρκή ρ είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές). Ένας γραμμικός και συνεχής τελεστής $T : X \mapsto X$ θα λέγεται υπερκυκλικός αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$Orb(T, x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

να είναι πυκνό στο X. Το x θα λέγεται τότε υπερκυκλικό διάνυσμα του T και θα συμβολίζουμε με $HC(T)$ το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων του T. Προφανώς αν ο T είναι υπερκυκλικός τότε ο X είναι διαχωρίσιμος οπότε όταν μιλάμε για υπερκυκλικότητα θα υποθέτουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Σταθεροποιούμε μία πυκνή ακολουθία $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον X και ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$E(j, s, n) = \{x : \|T^n(x) - x_j\| < 1/s\} \ j, s, n \in \mathbb{N}$$

όπου για κάθε $x \in X$ συμβολίζουμε με $\|x\|$ την απόσταση του x από το 0. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$HC(T) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E(j, s, n).$$

Το σύνολο $E(j, s, n)$ είναι ανοιχτό αφού ο T είναι συνεχής. Επίσης αν $x \in HC(T)$ τότε $T^n x \in HC(T)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακόλουθη διχοτομία ισχύει:

$$\text{είτε} \quad HC(T) = \emptyset \quad \text{ή} \quad HC(T)^- = X.$$

Συνεπώς αν ο T είναι υπερκυκλικός τότε τα υπερκυκλικά διανύσματα σχηματίζουν G_δ και πυκνό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ακόμη ότι ο T είναι υπερκυκλικός αν και μόνον αν για κάθε U, V ανοιχτά μη κενά υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $T^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται ότι αν ο T είναι ομοιομορφισμός και υπερκυκλικός τότε και ο T^{-1} είναι υπερκυκλικός. Μια σημαντική παρατήρηση είναι οτι αν ο X είναι χώρος Banach και ο $T : X \mapsto X$ είναι υπερκυκλικός τότε $\|T\| > 1$. Πρίν δώσουμε παραδείγματα τέτοιων τελεστών θ α διατυπώσουμε ένα κριτήριο που μας εξασφαλίζει οτι ένας τελεστής είναι υπερκυκλικός.

1.2 Βασικά θεωρήματα

Το ακόλουθο θεώρημα οφείλεται στον J. Bes [6] και ισχυροποιεί ασθενέστερες μορφές του κριτηρίου υπερκυκλικότητας οι οποίες είχαν αποδειχθεί από τους C. Kitai [17], R. Gethner και J. Shapiro [12].

Θεώρημα 1.1 (Κριτήριο Υπερκυκλικότητας) *Έστω X χώρος Frèchet και $T : X \to X$ συνεχής γραμμική απεικόνιση. Έστω ότι υπάρχουν ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \to \infty$ και πυκνά υποσύνολα Y, Z του X ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.*

(α) $\{T^{n_k}\}$ συγκλίνει στο 0 στον Y.

(β) Υπάρχει ακολουθία απεικονίσεων $\{S_k\}$ $Z :\mapsto X$ ώστε:

(1) Η $\{T^{n_k}S_k\}$ συγκλίνει σημειακά στην id_Z στο Z

(2) Η $\{S_k\}$ συγκλίνει στο 0 σημειακά στο Z.

Τότε ο T είναι υπερκυκλικός.

Απόδειξη

Έστω U, V ανοιχτά μη κενά. Από την πυκνότητα των Y και Z υπάρχουν $y \in Y \cap U$, $z \in Z \cap V$. Ορίζουμε την ακολουθία $x_k = y + S_k(z) \to y \in U$. Άρα τελικά η x_k περιέχεται στο U. Από τη γραμμικότητα του T και τις υποθέσεις του θεωρήματος έπεται ότι $T^{n_k}(x_k) \to z \in V$. Συνεπάγεται οτι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Έπεται από προηγούμενη παρατήρηση ότι ο T είναι υπερκυκλικός. □

Για χώρους Banach έχουμε επιλπλέον το ακόλουθο που είναι ανάλογο του Θεωρήματος 1.1. και οφείλεται στον Φλυτζάνη

Θεώρημα 1.2 (Flytzanis) *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και T φραγμένος γραμμικός τελεστής στο X. Έστω ότι υπάρχουν χώρος Banach E, τελεστής $K : E \mapsto X$ και τελεστής V στο E ώστε οι K, V να ικανοποιούν την εξίσωση $TK = KV$ και να ισχύουν τα παρακάτω.*

(1) Ο K είναι συμπαγής τελεστής με πυκνή εικόνα.

(2) Υπάρχουν πυκνά υποσύνολα X_1, Y_1 του E , γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων (n_k) και ακολουθία απεικονίσεων $(B_{n_k}) : Y_1 \mapsto E$ ώστε

(ι) Για κάθε $x \in X_1$, η ακολουθία $(V^{n_k}x)_{k\geq 0}$ συγκλίνει ασθενώς στο 0.

(ιι) Για κάθε $y \in Y_1$ η ακολουθία $(B_{n_k}y)_{k\geq 0}$ συγκλίνει ασθενώς στο 0.

(ιιι) Για κάθε $y \in Y_1$ η ακολουθία $(V^{n_k}B_{n_k}y)_{k\geq 0}$ συγκλίνει ασθενώς στο y.

Τότε ο T ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου υπερκυκλικότητας. Ειδικότερα ο T είναι υπερκυκλικός. Επιπλέον αν η ακολουθία n_k είναι όλο το $\mathbb{N}$ τότε ο T είναι mixing , δηλαδή για κάθε U, V ανοιχτά μη κενά υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $T^nU \bigcap V \neq \emptyset$ $\forall n \geq N$.

Απόδειξη

Έστω $X_0 = K(X_1)$. Επειδή το X_1 είναι πυκνό και ο K έχει πυκνή εικόνα έπεται ότι το X_0 είναι πυκνό στο X. Για κάθε $x \in X_1$ έχουμε ότι $V^{n_k}x \rightharpoonup 0$. Άρα η ακολουθία $T^{n_k}(Kx) = K(V^{n_k}x)$ θα συγκλίνει ισχυρά στο 0. Έστω $Y_0 = K(Y_1)$. Τότε αν $z \in Y_0$ με $z = K(y)$ και ορίσουμε $S_{n_k}z = K(B_{n_k}y)$ έχουμε ότι η $S_{n_k}z$ συγκλίνει στο 0 ισχυρά και $T^{n_k}S_{n_k} \to id$ στο Y_0. Άρα ο T ικανοποεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1. Το υπόλοιπο μέρος του θεωρήματος προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1. $\square$

Θεώρημα 1.3 (Godefroy-Shapiro [13]) *Έστω ότι τα* $\bigcup\limits_{|\lambda|<1}(Ker(T-\lambda I))$, $\bigcup\limits_{|\lambda|>1}(Ker(T-\lambda I))$ *παράγουν πυκνούς υπόχωρους στο X. Τότε ο T είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $T^n(x) \to 0$ για κάθε $x \in Ker(T-\lambda I)$ με $|\lambda| < 1$. Άρα $T^n \to 0$ σε πυκνό υποσύνολο του X. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > 1$ ώστε $x \in Ker(T-\lambda I)$ ορίζουμε $S(x) = \frac{1}{\lambda}x$ και επεκτείνουμε τον S γραμμικά στο $span \bigcup\limits_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda I)$. Από το Θεώρημα 1.1 έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.4 *Έστω ότι ο $T : X \mapsto X$ είναι υπερκυκλικός. Τότε κάθε διάνυσμα του X γράφεται σαν άθροισμα δύο υπερκυκλικών διανυσμάτων του X.*

Απόδειξη

Έστω $x \in X$. Ορίζουμε $\phi_x : X \mapsto X$ με $\phi_x(y) = x - y$. Αφού ο T είναι υπερκυκλικός το σύνολο $HC(T)$ είναι G_δ πυκνό. Άρα και το $x + HC(T)$ αφού ϕ_x είναι ομοιομορφισμός. Έπεται ότι το $HC(T)\bigcap\{x+HC(T)\}$ είναι μη κενό. Αν $y \in HC(T)\bigcap\{x + HC(T)\}$ τότε $x - y \in HC(T)$ και το συμπέρασμα είναι προφανές.

Το προηγούμενο θεώρημα εκφράζει την μη γραμμικότητα του φαινομένου της υπερκυκλικότητας. Εν γένει το άθροισμα δύο υπερκυκλικών διανυσμάτων δεν είναι υπερκυκλικό.

Πρόταση 1.1 (Bourdon-Feldman [8]) *Έστω T συνεχής γραμμικός τελεστής σε τοπικά κυρτό F χώρο X και $x \in X$. Αν το $Orb(T, x)$ είναι κάπου πυκνό τότε είναι πυκνό στο X.*

Απόδειξη

Στην απόδειξη χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς

* $Orb(T, x) = Orb(x)$
* Η κλειστή θήκη του $Orb(x)$ θα συμβολίζεται με $clOrb(x)$.
* Το εσωτερικό του $clOrb(x)$ με $clOrb^\circ(x)$.
* Αν P είναι η συλλογή όλων των πολυωνύμων , $S \subseteq P$ και $y \in X$ τότε $S(T) = \{p(T) : p \in S\}, S(T)y = \{p(T)(y) : p \in S\}$.
* Ένα $x \in X$ θα λέγεται κυκλικό για τον T αν το $P(T)x$ είναι πυκνό στο X (δηλαδή το $span\{Orb(x)\}$ είναι πυκνό στο X).

Έστω ότι το $Orb(x)$ είναι κάπου πυκνό στο X, δηλαδή $clOrb^{\circ}(x) \neq \emptyset$.

Βήμα 1. Αν $y \in Orb(x)$ τότε $clOrb^{\circ}(x) = clOrb^{\circ}(y)$.

Απόδειξη

Προφανώς $clOrb^{\circ}(y) \subseteq clOrb^{\circ}(x)$. Το $clOrb^{\circ}(x)$ διαφέρει από το $clOrb^{\circ}(y)$ σε πεπερασμένο σύνολο μεμονομένων σημείων και άρα ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός.

Βήμα 2. Αν $y \in Orb(x)$ τότε το y είναι κυκλικό για τον Τ.

Απόδειξη

Έστω $y \in Orb(x)$. Τότε απο το βήμα 1 το $Orb(y)$ είναι κάπου πυκνό και επομένως αφού $Orb(y) \subseteq Orb(x) \subseteq P(T)x$ έπεται ότι το $P(T)x$ είναι κάπου πυκνό. Όμως το $P(T)x$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X άρα και ο $P(T)^{-}x$ που έχει μη κενό εσωτερικό. Έπεται ότι το x είναι κυκλικό για τον Τ.

Βήμα 3. Το συμπλήρωμα του $clOrb^{\circ}(x)$ είναι Τ- αναλλοίωτο.

Απόδειξη

Από το βήμα 1 μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της τροχιάς του. Το $clOrb^{\circ}(x)$ είναι μη κενό, ανοιχτό, κάθε σημείο του οποίου είναι οριακό σημείο του $Orb(x)$. Άρα υπάρχει σημείο του $Orb(x)$ που ανήκει στο $clOrb^{\circ}(x)$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $x \in clOrb^{\circ}(x)$. Έστω ότι το $X \setminus clOrb^{\circ}(x)$ δεν είναι Τ-αναλλοίωτο, δηλαδή υπάρχει $y \notin clOrb^{\circ}(x)$ ώστε $Ty \in clOrb^{\circ}(x)$. Αν $y \in clOrb(x)$ τότε $y \in \partial(clOrb(x))$. Άρα υπάρχει y' με $y' \notin clOrb(x)$ και $Ty' \in clOrb(x)$. Συνεπάγεται ότι μπορούμε να υποθέσουμε $y \in clOrb(x)$. Μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι $y = p(T)x$ για κάποιο $p \in P\setminus\{0\}$. Πράγματι αφού το x είναι κυκλικό για τον Τ το $\{P(T)x\}$ είναι πυκνό στο X. Επειδή $y \in X\setminus clorb(x)$ έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $p(T)x \in X\setminus clorb(x)$. Αντικαθιστούμε το y με $p(T)x$. Από τη συνέχεια του Τ έπεται ότι

$$T(clorb(x)) \subseteq cl(T(Orb(x)) \subseteq clOrb(x).$$

Άρα το $clOrb(x)$ είναι αναλλοίωτο από τον Τ και περιέχει το $Tp(T)x$. Συνεπάγεται ότι

$$clorb(x) \supseteq T^{n}p(T)x = p(T)T^{n+1}x.$$

Άρα $clOrb(x) \supseteq p(T)(Orb(Tx))$. Παίρνοντας κλειστές θήκες έπεται ότι

$$clorb(x) \supseteq p(T)clorb(Tx) \supseteq p(T)clOrb^{\circ}(Tx) = p(T)clorb^{\circ}(x)$$

όπου η τελευταία έπεται απο το βήμα (1). Όμως $x \in clorb^{\circ}(x)$, άρα από την προηγούμενη σχέση έπεται $p(T)x \in clOrb(z)$. Άτοπο.

Βήμα 3. Για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο p ο $p(T)$ έχει πυκνή εικόνα.

Απόδειξη

Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p(z) = z - a$. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι ο $T - aI$ έχει πυκνή εικόνα. Έστω λοιπόν ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε από το θεώρημα Hahn-Banach έπεται ότι υπάρχει μη μηδενικό συνεχές γραμμικό συναρτησιακό Λ στο X που μηδενίζεται στο $ran(T - aI)$ όπου με $ran(T - aI)$ συμβολίζουμε την εικόνα του $T-aI$. Έπεται ότι $\Lambda(T-aI) = 0$. Άρα $\Lambda(Orb(x)) = \{a^{n}\Lambda(x)\ n = 0, 1, ..\}$ $(*)$. Επειδή το Λ είναι μη μηδενικό έπεται από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης ότι το $\Lambda(clOrb^{\circ}(x))$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{C}$, μη κενό και άρα κάπου πυκνό. Αυτό αντιφάσκει με την $(*)$.

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα. Πρέπει να δείξουμε ότι $clOrb(x) = X$. Έστω ότι αυτό δέν ισχύει. Το x είναι κυκλικό για τον T και άρα το $P(T)x$ είναι πυκνό στο X. Συνεπάγεται ότι υπάρχει υποσύνολο $Q \subset P - \{0\}$ ώστε $Q(T)x$ να είναι πυκνό υποσύνολο του μη κενού ανοιχτού $X - clOrb(x)$ και άρα πυκνό υποσύνολο του $X - clorb^{\circ}(x)$ το οποίο είναι T-αναλλοίωτο από το βήμα 3. Συνεπώς $Q(T)(Orb(x)) \subset X - clOrb^{\circ}(x)$. Από τη συνέχεια του Τ έχουμε

$$X - clOrb(x) \supset \overline{Q(T)(Orb(x))} \supset Q(T)(clOrb(x)).$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $p \in P' = P - \{0\} \Rightarrow p(T)x \notin \partial clorb(x)$

Αν δεχθούμε τον ισχυρισμό τότε το θεώρημα προκύπτει ως εξής. Το σύνολο $P'(T)x$ είναι συνεκτικό και γράφεται ως ξένη ένωση των $G = P'(T)x \cap clOrb^{\circ}(x) \quad H = P'(T)x \cap X - clOrb^{\circ}(x)$. Προφανώς το G είναι ανοιχτό στο $P'(T)x$ και από τον ισχυρισμό το ίδιο και το H. Όμως και τα δύο είναι μη κενά αφού $x \in G$, $Q(T)x \subset H$. Άτοπο.

Απόδειξη ισχυρισμού.

Έστω $p(T)x \in \partial clOrb^{\circ}(x)$, $p \in P'(T)$. Θεωρούμε το εξής σύνολο $D = clorb^{\circ}(x) \cup Q(T)x$. Το D είναι πυκνό στο X διότι το $Q(T)x$ είναι πυκνό στο συμπλήρωμα του $clOrb^{\circ}(x)$. Επειδή το $X - clOrb^{\circ}(x)$ είναι Τ αναλλοίωτο έπεται ότι $p(T)D = p(T)clorb^{\circ}(x) \cup p(T)Q(T)x$ και μάλιστα $p(T)Q(T)x \subset X - clOrb^{\circ}(x)$. Παρατηρούμε ότι $p(T)clOrb^{\circ}(x) \subset X - clOrb^{\circ}(x)$ αφού $p(T)x \in \partial clOrb^{\circ}(x) \Rightarrow p(T)xclOrb^{\circ}(x) \subset X - clOrb^{\circ}(x) \Rightarrow p(T)D \subset X - clOrb^{\circ}(x)$. Αντίφαση.

Θεώρημα 1.5 (Ansari [1]) *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $T : X \mapsto X$. Ο T είναι υπεκυκλικός αν και μονον άν ο T^n είναι υπερκυκλικός. Μάλιστα οι T και T^n έχουν τα ίδια υπερκυκλικά διανύσματα.*

Απόδειξη

Αν ο T^n είναι υπερκυκλικός προφανώς είναι και ο Τ. Έστω ότι ο Τ είναι υπερκυκλικός και $n \in \mathbb{N}$, $x \in HC(T)$. Παρατηρούμε ότι $Orb(T,x) = Orb(T^n,x) \cup Orb(T^n,Tx) \cup ...Orb(T^n,T^{n-1}x)$. Άρα υπάρχει $k \in \{0,...,n-1\}$ ώστε $clOrb^{\circ}(T^n,T^kx) \neq \emptyset$. Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η τροχιά του T^kx μέσω του T^n είναι πυκνή. Χρησιμοποιώντας το γ εγονός ότι ο T έχει πυκνή εικόνα εύκολα δείχνουμε ότι το x είναι υπερκυκλικό για τον T^n.

Απο τα παραπανω προκύπτει και το επόμενο αποτέλεσμα

Θεώρημα 1.6 (Εικασία Herrero[15]) *Αν υπάρχει $\{x_1,x_2,...,x_n\} \subseteq X$ ώστε το σύνολο $Orb(T,x_1) \cup Orb(T,x_2)... \cup Orb(T,x_n)$ είναι πυκνό τότε ο T είναι υπερκυκλικός.*

Θεώρημα 1.7 *Έστω T συνεχής γραμμική απεικόνιση σε διαχωρίσιμο F χώρο X. Τότε ο $T \oplus T$ είναι υπερκυκλικός στο $X \oplus X$ αν και μόνον αν ο T ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου υπερκυκλικότητας.*

Απόδειξη

Προφανώς αν ο T ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου υπερκυκλικότητας τότε το ίδιο ισχύει και για τον $T \oplus T$ στο $X \oplus X$. Έστω λοιπόν ότι ο $T \oplus T$ είναι υπερκυκλικός στο $X \oplus X$ και έστω $(x, y) \in Orb(T \oplus T, X \oplus X)$. Θα αποδείξουμε ότι ο T ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου υπερκυκλικότητας με $Y = Z = Orb(T, x)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $N \geq 1$ το διάνυσμα $(x, T^N y)$ είναι υπερκυκλικό για τον $T \oplus T$. Ειδικότερα για κάθε περιοχή U του 0 στον X μπορούμε να βρούμε $u \in U$ ώστε το (x, u) να είναι υπερκυκλικό για τον $T \oplus T$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε n_k ώστε

$$\|u_k\| < \frac{1}{k}, \|T^{n_k} x\| < \frac{1}{k}\|, \|T^{n_k} u_k - x\| < \frac{1}{k}$$

και η n_k είναι γνησίως αύξουσα.
Από την δεύτερη σχέση έπεται ότι $T^{n_k} \to 0$ σημειακά στο Y. Ορίζουμε τους δεξιά αντίστροφους S_k με

$$S_k(T^n x) = T^n u_k, S_k : Z \mapsto X.$$

Οι S_k είναι καλά ορισμένοι διότι $x \in HC(T)$ και άρα τα σημεία του $Orb(T, x)$ είναι διαφορετικά ανα δύο (αν δύο στοιχεία της τροχιάς ήταν ίδια τότε η τροχιά θα ήταν περιοδική , άρα πεπερασμένη). Τέλος παρατηρούμε ότι

$$T^{n_k} S_k(T^n x) = T^{n_k+n} u_k = T^n T^{n_k} u_k \to T^n x$$

καθώς το k τείνει στο άπειρο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Παραδείγματα

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα υπερκυκλικών τελεστών. Έστω $H(\mathbb{C})$ ο χώρος των ακεραίων συναρτήσεων. Στον $H(\mathbb{C})$ ορίζουμε την εξής μετρική

$$\forall f, g \in H(\mathbb{C}),\ d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\{|f(z)-g(z)| : |z| \leq n\}}{1+\sup\{|f(z)-g(z)| : |z| \leq n\}}.$$

Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε απόσταση στον χώρο $H(G)$ των αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένων στο ανοιχτό G. Γράφουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών K_n όπου τα K_n αποτελούν εξαντλούσα ακολουθία του G και ορίζουμε μετρική ανάλογα με την προηγούμενη παίρνοντας στο άθροισμα το sup πάνω στο K_n. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε μετρική που είναι ανεξάρτητη της επιλογής των K_n. Παρατηρούμε οτι μια ακολουθία $\{f_n\}$ στον $H(\mathbb{C})$ συγκλίνει σε μία $f \in H(\mathbb{C})$ ως προς την d αν και μόνον αν η f_n συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή.

Θεώρημα 1.8 *Έστω $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ο τελεστής παραγώγισης. Ο D είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$. Για κάθε πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ ορίζουμε την αντιπαράγωγο του $p^{-1}(z) = \int_0^z\ p(s)ds$. Άρα ορίζεται απεικόνιση S από το σύνολο των πολυωνύμων στον εαυτό του με $S(p) = p^{-1}$. Ακόμη $p^{-k}(z) = a_n \frac{z^{n+k}}{(n+1)...(n+k)} + ... + a_0 \frac{z^k}{k!}$. Συνεπώς $p^{-k} \to 0$ ως προς τη d καθώς $k \to \infty$. Άν το p είναι πολυώνυμο τότε $D^n(p) = 0, \forall n > deg(p)$. Επειδή ακόμη $DS(p) = p$ για όλα τα πολυώνυμα, έπεται από το κριτήριο υπερκυκλικότητας ότι ο D είναι υπερκυκλικός. Σημειώνουμε ότι η ίδια απόδειξη δουλεύει στον $H(G)$, όπου το G είναι ανοιχτό και απλά συνεκτικό χωρίο, αφού από το θεώρημα του Runge έχουμε ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H(G)$.

Θεώρημα 1.9 (Rolewicz [21]) *Θεωρούμε τον χώρο ακολουθιών $\ell^2(\mathbb{N}) = \Big\{\alpha = (\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ : \sum|\alpha_n|^2 < +\infty\Big\}$. Έστω e_n η συνήθης ορθοκανονική βάση του . Ορίζουμε τον τελεστή μετατόπισης προς τα πίσω $B : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \ell^2(\mathbb{N})$ με $B(e_n) = e_{n-1}$. Τότε για κάθε λ με $|\lambda| > 1$ ο λB είναι υπερκυκλικός*

.Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο D_1 όλων των ακολουθιών με συμπαγή φορέα και ορίζουμε τον τελεστή $S : D_2 = span\{e_n\ : n \in \mathbb{N}\} \mapsto \ell^2(\mathbb{N})$ με $Se_n = e_{n+1}$. Είναι προφανές οτι ο S είναι δεξιά αντίστροφος του B στο D_2 και επιπλέον $\frac{1}{\lambda^n}S^n x \to 0$ για κάθε $x \in \ell^2(\mathbb{N})$. Το συμπέρασμα έπεται απο το Θεώρημα 1.1.

Ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα είναι το εξής. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία με $a_n > 0\ \forall n$. Ορίζουμε τον τελεστή μετατόπισης προς τα πίσω με βάρος $\{a_n\}$ $T : l^2(\mathbb{Z}) \mapsto l^2(\mathbb{Z})$ με $T(e_n) = a_n e_{n+1}$. Τότε σχετικά με την υπερκυκλικότητα του T ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.10 (Salas[22]) *Έστω T όπως παραπάνω. Ο T είναι υπερκυκλικός αν και μόνον αν $\forall \epsilon > 0$ και $\forall q \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ με $|j| \leq q$ να ισχύουν $\prod_{s=0}^{n-1} a_{s+j} < \varepsilon$ και $\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > \frac{1}{\varepsilon}$.*

Απόδειξη

Έστω ότι ο T είναι υπερκυκλικός και $0<\delta<1$. Υπάρχει $x \in HC(T)$ ώστε

$$\|x-\sum_{|j|\leq q} e_j\|<\delta \quad (1).$$

Βρίσκουμε $n>2q$ ώστε

$$\|T^n x-\sum_{|j|\leq q} e_j\|<\delta \quad (2).$$

Επειδή $x=\sum_{j\in\mathbb{Z}}<x,e_j>e_j$ η (1) δίνει

$$\|\sum_{|j|\leq q}(<x,e_j>-1)e_j+\sum_{|j|>q}<x,e_j>e_j\|<\delta.$$

Έπειδή τα διανύσματα στη προηγούμενη ανισότητα είναι κάθετα ανά δύο έπεται ότι αν $|k|\leq q$ τότε $|<x,e_k>|>1-\delta$ και $|<x,e_k>|<\delta$ διαφορετικά. Από την (2) αφού $n>2q$ προκύπτει ότι :

$$\|\sum_{|j|\leq q}(\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s})(<x,e_j>-1)-\sum_{|j|>q}\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s}<x,e_j>\|<\delta.$$

Άρα για $|j|\leq q$ έχουμε ότι: $\|T^n(<x,e_j>e_j\|=(\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s})|<x,e_j>|<\delta$.
Άρα $\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s}<\frac{\delta}{|<x,e_j>|}<\frac{\delta}{1-\delta}$.
Από τη (2) συνάγεται ότι για $|j|\leq q$ έχουμε ότι $\|T^n<x,e_{j-n}>e_{j-n}-e_j\|<\delta$ από όπου έπεται ότι $|\prod_{s=1}^{n} a_{j-s}<x,e_{j-n}>e_{j-n}-1|<\delta$. Άρα $\prod_{s=1}^{n} a_{j-s}>\frac{\delta}{1-\delta}$.
Για το αντίστροφο θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.1 *Έστω T όπως παραπάνω. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ και κάθε $g,h\in span\{e_j:|j|\leqq q\}$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ αυθαίρετα μεγάλο και $u\in span\{e_j:-q-n\leq j\leq q-n\}$ ώστε να ισχύουν τα παρακάτω.*

(ι) $\|u\|<\varepsilon$,

(ιι) $\|T^n(u)-g\|<\varepsilon$,

(ιιι) $\|T^n(h)\|<\varepsilon$.

Τότε ο T είναι υπερκυκλικός.

Απόδειξη

Παίρνουμε όλες τις ακολουθίες με όρους από το $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ και συμπαγή φορέα και τις αριθμούμε ως εξής $\{g_k=\sum_{|j|\leq k}<g_k,e_j>e_j:k\in\mathbb{N}\}$. Επαγωγικά θα κατασκευάσουμε f_k ώστε

$$\lim_{k\to\infty}\|T^{n_k}(f_k)-g_k\|=0.$$

Έστω $n_1=0$, $f_1=g_1$ και έστω ότι για $1\leq j\leq k$ έχουμε ορίσει τους n_j και $f_j\in span\{e_i:-j-n_j\leq i\leq j-n_j\}$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση με $\varepsilon=M^{-n_k}2^{-k-1}$, όπου $M=\|T\|$ και διανύσματα $g=g_{k+1},h=f_1+...+f_k$, οπότε υπάρχουν n_{k+1} και f_{k+1} που ικανοποιούν τις $\|f_{k+1}\|<\varepsilon,\|T^{n_{k+1}}(f_{k+1})-g_{k+1}\|<$

$\varepsilon, \|T^{n_{k+1}}(h)\| < \varepsilon$ όπου $\varepsilon = M^{-n_k}2^{-k-1}$. Ακόμη διαλέγουμε τα n_k ώστε $n_k + \sum_{i=1} k+1 < n_{k+1}$ οπότε οι φορείς των f_j είναι ξένοι ανα δύο. Τότε $\|f_{k+1}\| < M^{-n_k}2^{-k-1}$ $, \|T^{n_{k+1}}(f_{k+1}) - g_{k+1}\| < M^{-n_k}2^{-k-1}$ και $\|T^{n_{k+1}}(\sum_{j=1}^{k} f_j)\| < M^{-n_k}2^{-k-1}$. Συνεπάγεται ότι $\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k}(f_k) - g_k\| = 0$. Αν $f = \sum f_j$ τότε $\|T^{n_k}(f) - g_k\| \leq \|T^{n_k}(\sum_{j=1}^{k-1} f_j + \|T^{n_k}(f_k)\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|T^{n_k}(f_j)\| \leq 2^{-k+2}$.

Για την απόδειξη του αντιστρόφου παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_{|j|\leq q} < f, e_j > e_j$ τότε $\|T^n f\| \leq \max\{\prod_{k=0}^{n-1} a_{j+k}, |j| \leq q\}$ και $\|T^{-n} f\| \leq \max\{(\prod_{k=i}^{n} a_{j-k}\})^{-1}, |j| \leq q\}$. Παίρνουμε $\epsilon > 0, q \in \mathbb{N}$. Έστω ότι υπάρχει $n > 2q$ με $\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} < \epsilon$ και $\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > \frac{1}{\epsilon}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $|j| < q$. Αν τα $g, h \in span\{e_j : |j| \leq q\}$ τότε από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι $\|T^n g\| \leq \epsilon\|g\|$ και $\|T^{-n} h\| \leq \epsilon\|h\|$. Θέτουμε $u = T^{-n} g$ οπότε το u ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος και άρα ο T είναι υπερκυκλικός.

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι ο τελεστής μετατόπισης είναι υπερκυκλικός. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 1.2 (Λήμμα πυκνότητας) *Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ με σημείο συσσωρεύσεως στο $\mathbb{C}$. Για $\lambda \in A$ ορίζουμε $E_\lambda : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ με $E_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$. Έστω $E(A)$ η γραμμική θήκη των E_λ. Τότε το $E(A)$ είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη

Έστω Λ γραμμικό συναρτησιακό στον $H(\mathbb{C})$ με $\Lambda(E_\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in A$. Για $R > 0, f \in H(\mathbb{C})$ ορίζουμε $\|f\|_R = max\{|f(z)| : |z| \leq R\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $R > 0$ η $\|\|_R$ είναι νόρμα στον $H(\mathbb{C})$.

Ακόμη οι ανοιχτές μπάλες αυτών των νορμών αποτελούν βάση της τοπολογίας του $H(\mathbb{C})$. Το Λ είναι συνεχές άρα το $\Lambda^{-1}(D(0, 1))$ περιέχει κάποια μπάλα κέντρου 0 για κάποια $\|\|_R$.

Δηλαδή το Λ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό ως προς τη νόρμα $\|\|_R$. Άρα από το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνεται γραμμικά και συνεχώς στο $C(\{|z| \leq R\})$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για μιγαδικά μέτρα έπεται ότι υπάρχει ομαλό μέτρο Borel μ στο κλειστό $\{|z| \leq R\}$ ώστε $\Lambda(f) = \int f d\mu, \forall f \in C(\{\|z\| \leq R\}$.

Ειδικότερα $\Lambda(f) = \int f d\mu, \forall f \in H(\mathbb{C})$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ με $F(\lambda) = \int e^{\lambda z} d\mu(z)$. Η F είναι ακέραια και μάλιστα $D^n F(0) = \int z^n d\mu(z)$. Από υπόθεση η F μηδενίζεται στο A το οποίο έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C}$. Από την αρχή αναλυτικής συνέχισης $F \equiv 0$ στο $\mathbb{C}$.

Συνεπάγεται ότι $\int p(z) d\mu(z) = 0$ για κάθε πολυώνυμο και άρα για όλες τις ακέραιες συναρτήσεις. Άρα $\Lambda \equiv 0$. Συνεπώς το E(A) είναι πυκνό στο $H(\mathbb{C})$.

Παρατήρηση:Το προηγούμενο λήμμα ισχύει με παρόμοια απόδειξη στον χώρο $H(G)$ όπου το G είναι ανοιχτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 1.11 *Για κάθε $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ο τελεστής μετατόπισης κατά a ,T_a, είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Θεωρούμε το εξής υποσύνολο του $H(\mathbb{C})$: $Z = span\{E_\lambda : Re(a\lambda) < 0\}$. Τα E_λ είναι ιδιοδιανύσματα του T_a και $|T_a^n E_\lambda(z)| = exp\{nRe(a\lambda)\}|E_\lambda(z)| \to 0$ στον $H(\mathbb{C})$. Ομοίως παίρνουμε $Y = span\{E_\lambda : Re(a\lambda) > 0\}$. Από το Λήμμα 1.2 οι υπόχωροι Y, Z είναι πυκνοί στον $H(\mathbb{C})$. Αν ορίσουμε $S^n : Y \mapsto H(\mathbb{C})$ με $S^n E_\lambda = exp\{-nRe(a\lambda)\}E_\lambda$ τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1. Μία διαφορετική απόδειξη είναι η εξής . Έστω $\{p_j\}$ αρίθμηση όλων των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Τότε

$$HC(T_a) = \bigcap_{s,j,m} \bigcup_n \{f \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z| \le m} |f(z+na) - p_j(z)| < \frac{1}{s}\}.$$

Είναι άμεσο ότι το σύνολο $\{f \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\le m} |f(z+na) - p_j(z)| < \frac{1}{s}\}$ είναι ανοιχτό στον $H(\mathbb{C})$ και άρα από το θεώρημα κατηγορίας του Baire αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $s, j, m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\bigcup_n \{f \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\le m} |f(z+na) - p_j(z)| < \frac{1}{s}\}$ είναι πυκνό. Έστω $\epsilon > 0$, g ακέραια και $M > 0$. Πρέπει να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ και f ακέραια ώστε

$$\sup_{|z|\le M} |f(z) - g(z)| < \epsilon \quad \text{και}$$

$$\sup_{|z|\le m} |f(z+na) - p_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Παίρνουμε n αρκετά μεγάλο ώστε οι δίσκοι $\{|z - na| \le m\}, \{|z| \le M\}$ να είναι ξένοι. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(z) = \begin{cases} g(z), \ |z| \le M \\ p_j(z-na) \ , |z-na| \le m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Η h είναι αναλυτική στο $K = \{|z| \le M\} \bigcup \{|z - na| \le m\}$ και το K έχει συνεκτικό συμπλήρωμα. Από το θεώρημα Runge υπάρχει f ακέραια (πολυώνυμο) ώστε

$$\sup_{z\in K} |f(z) - h(z)| < \min\{\frac{1}{s}, \epsilon\}$$

και έπεται το συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.12 *Έστω T τελεστής σε χώρο Frèchet (πάνω στο $\mathbb{C}$) ώστε ο T^* να έχει ιδιοτιμή. Τότε ο T δεν είναι υπερκυκλικός. Έπεται ότι αν ο T είναι υπερκυκλικός τότε $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, δηλαδή ο $p(T)$ έχει πυκνή εικόνα για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο p.*

Απόδειξη

Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ και $\phi \in X^*$, με ϕ διαφορετικό του 0, $T^*\phi = \lambda\phi$. Έστω ότι υπάχει $x \in X$ ώστε το $Orb(T, x) = \{T^n(x)|n = 1, 2, ..\}$ είναι πυκνό στο X. Τότε το $\phi(Orb(T, x))$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\phi(T^n)x = (T^n)^*\phi(x) = ((T^*)^n\phi)(x) = \lambda^n(T^*\phi)(x) = \lambda^n\phi(Tx)$. Άρα η ακολουθία $\phi((T)^n(x))$ δεν είναι πυκνή στο $\mathbb{C}$. Άτοπο.

Σημείωση. Άν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης μιγαδικός χώρος Frèchet τότε επειδή $dim(X^*) = dim(X) < \infty$ για κάθε $T \in L(X)$ έχουμε ότι ο T^* έχει ιδιοτιμή, οπότε δεν θα είναι υπερκυκλικός. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και στη περίπτωση που ο X είναι πραγματικός χώρος Frèchet.

1.4 Χαοτικοί τελεστές

Ορισμός 1.1 . *Έστω X χώρος Frèchet, T συνεχής γραμμικός τελεστής στοX και $x \in X$. Το x λέγεται περιοδικό για τον T αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n x = x$. Ο T θα λέγεται χαοτικός αν είναι υπερκυκλικός και έχει πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων.*

Θεώρημα 1.13 (J.Shapiro [23]) *Έστω $G \subsetneq \mathbb{C}$ ανοιχτό και P μη σταθερό πολυώνυμο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Ο $P(D)$ είναι υπερκυκλικός στον $H(G)$.

(β) Ο $P(D)$ είναι χαοτικός στον $H(G)$.

(γ) Το G είναι απλά συνεκτικό.

.

Απόδειξη

(γ)⇒(β) Θεωρούμε τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Το P είναι μη σταθερό άρα τα $A = P^{-1}\big(D(0,1)\big)$, $B = P^{-1}(\mathbb{C}\backslash D(0,1))$ είναι ανοιχτά μη κενά, συνεπώς έχουν σημείο συσσώρευσης. Έπεται ότι τα $X_0 = E(A)$, $Y_0 = E(B)$ είναι πυκνά στον $H(G)$, όπου $E(A)$, $E(B)$ ορίζονται όπως στο Λήμμα 1.2. Αν $\lambda \in A$ και $e_\lambda(z) = e^\lambda(z)$ τότε $P(D)^n e_\lambda = P(\lambda)^n e_\lambda \to 0$ στον $H(G)$ επειδή $|P(\lambda)| < 1$. Για $\lambda \in B$ ορίζουμε $S(e_\lambda) = \frac{1}{P(\lambda)} e_\lambda \to 0$ στον $H(G)$. Τέλος παρατηρούμε ότι $P(D)^n S^n = id$ και άρα ο $P(D)$ είναι υπερκυκλικός.
Μένει να δείξουμε ότι ο $P(D)$ έχει πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων. Θεωρούμε το σύνολο ριζών της μονάδας R. Τότε το $C = P^{-1}(R)$ είναι άπειρο και φραγμένο. Άρα έχει σημείο συσσώρευσης. Από το λήμμα πυκνότητας το $E(C)$ είναι πυκνό στον $H(G)$. Άν $a \in C$ τότε $P(a)^n = 1$ για κάποιο n. Συνεπάγεται ότι $P(D)e_a = P(a)^n e_a = e_a$ και επομένως το e_a είναι περιοδικό σημείο. Επειδή γραμμικός συνδυασμός περιοδικών σημείων είνα πάλι περιοδικό σημείο έπεται το συμπέρασμα.

(α)⇒(γ)Έστω ότι υπάρχει κλειστή καμπύλη γ στο G και $\alpha \in \mathbb{C}\backslash G$ ώστε $n(\gamma,\alpha) \neq 0$ όπου με $n(\gamma,\alpha)$ συμβολίζουμε τον δείκτη στροφής της γ ως προς το α. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό $x^* : H(G) \mapsto \mathbb{C}$ με $x^*(f) = \int_\gamma f(z)dz$. Παρατηρούμε ότι $x^*(\frac{1}{z-\alpha}) \neq 0$. Άρα το x^* είναι διαφορετικό του 0. Ακόμη $Ker(x^*) \supseteq \{Df : f \in H(G)\}$. Συνεπώς γράφοντας το $P(z) = P(0) + zQ(z)$ όπου Q είναι πολυώνυμο έχουμε ότι $(P(D)^* x^*)(f) = x^*(P(D)f) = x^*(P(0)f + DQ(D)f) = x^*(P(0)f) = P(0)x^*(f)\ \forall f \in H(G)$. Έπεται ότι το x^* είναι ιδιοτιμή του $P(D)^*$.

(β)⇒ (α) Είναι προφανές.

Αν δούμε προσεκτικά τα παραδείγματα τελεστών που έχουμε μελετήσει έως τώρα θα διαπιστώσουμε ότι όλοι είναι χαοτικοί. Άρα προκύπτει το ερώτημα εάν κάθε υπερκυκλικός τελεστής έχει αυτήν την επιπλέον ιδιότητα. Η απάντηση είναι αρνητική. Για να δώσουμε παράδειγμα τελεστή που είναι υπερκυκλικός αλλά όχι χαοτικός θα ορίσουμε τελεστές μεταφοράς σε χώρους συναρτήσεων.

Έστω $\beta = \{\beta(k) \ : k \geq 0\}$ μία φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία υποθέτουμε ότι

$$\sigma = \sup\{\beta(k)/\beta(k+1) : k \geq 0\} < \infty.$$

Ορίζουμε τον χώρο H^2_β να είναι όλες οι δυναμοσειρές $f(z) = \sum \hat{f}(n)z^n$ για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|^2_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\beta(k) < \infty$$

Ο H^2_β μπορεί να θεωρηθεί σαν τον χώρο $H(U)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$< f, g >= \sum \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\beta_k.$$

Προφανώς είναι ισόμορφος με τον $\ell^2(\mathbb{N})$ και άρα χώρος Hilbert .

Ορίζουμε τον τελεστή $B : H^2_\beta \mapsto H^2_\beta$ με

$$Bf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^k.$$

Αφού η (β_k) φθίνει και λόγω του ότι η ακολουθία $\beta(k)/\beta(k+1)$ είναι φραγμένη συμπεραίνουμε ότι ο B είναι φραγμένος με $\|B\| = \sigma$. Θα αποδείξουμε ότι ο B είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν η $(\beta(k))$ συγκλίνει στο 0.

Θεώρημα 1.14 (Gethner-Shapiro [12]) *Έστω B ο τελεστής μετατόπισης στον H^2_β. Ο B είναι υπερκυκλικός αν και μόνον αν $\beta(k) \to 0$.*

Απόδειξη

Έστω ότι η ακολουθία $\beta(k)$ δεν τείνει στο 0 οπότε $\inf\{\beta(k)\} = \delta > 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\|B^n\| = \sup_k \frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} < \frac{\beta(0)}{\delta}$ όπου $\delta = \inf\{\beta(k)\}$. Συνεπώς ο B δεν είναι υπερκυκλικός.

Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.2 . Ορίζουμε τον τελεστή μετατόπισης προς τα πίσω F στον H^β_2 με

$$Ff(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^{k+1}.$$

Ο F είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και

$$\|F^n f\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\hat{f}(k)\|^2\beta(k+n)$$

το οποίο τείνει στο 0. Ακόμη ο F είναι δεξιά αντίστροφος του B και το συμπέρασμα προκύπτει απο το κριτήριο υπερκυκλικότητας με $Y = Z = \{p : p \quad \text{πολυώνυμο}\}$.

Το επόμενο θεώρημα απαντά στο ερώτημα πότε ο B είναι χαοτικός.

Θεώρημα 1.15 *Έστω ότι $\beta(n) \to 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) Ο B έχει μη τετριμμένο περιοδικό σημείο.

(β) $\sum_{k=0}^{\infty} \beta(k) < \infty$.

(γ) Ο B είναι χαοτικός.

Απόδειξη

Έστω $f \in H^2_\beta$ μη τετριμμένο περιοδικό σημείο του B. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $N, \nu \geq 1$ ώστε $B^N f = f$ και $\hat{f}(\nu) \neq 0$. Από τη σχέση $B^N f = f$ συνεπάγεται ότι $f(k+N) = f(k) \, \forall k \in \mathbb{N}$.
Οπότε η ακολουθία $\{\hat{f}(k)\}$ είναι μη μηδενική και σταθερή στο $\{\nu + jN \; : j \geq 0\}$.

$$|\hat{f}(\nu)|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \beta(\nu + jN) = \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{f}(\nu + jN)|^2 \beta(\nu + jN) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \beta(n) < \infty$$

Επειδή $\hat{f}(\nu) \neq 0$ έπεται ότι $\sum_{j=0}^{\infty} \beta(\nu + jN) < \infty$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\forall 0 \leq k < N$ ο B^k έχει περιοδικό σημείο. Άρα εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα για τον B^k βλέπουμε ότι η β είναι αθροίσιμη στο $\{\nu - k + jN \; : j \geq 0\}$. Αυτό δείχνει ότι το (α) συνεπάγεται το (β).

Έστω ότι ισχύει το (β). Για κάθε $\omega \in \mathbb{C}$ με μέτρο μικρότερο ή ίσο του 1 ορίζουμε

$$K_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{\omega} z)^n.$$

Παρατηρούμε ότι αφού η σειρά $\sum_{n \geq 1} \beta(n)$ συγκλίνει έχουμε $K_\omega \in H^2_\beta$ και το K_ω είναι ιδιοδιάνυσμα του B με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\overline{\omega}$. Άρα το K_ω είναι περιοδικό για τον B αν το ω είναι ρίζα της μονάδας. Θέτουμε

$$V(R) = \{K_\omega : \, \omega \text{ ρίζα της μονάδας}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το $V(R)$ είναι πυκνό στον H^2_β. Πράγματι αν $\overline{V(R)} \neq H^2_\beta$ τότε αφού το $V(R)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H^2_β θα υπήρχε $g \in H^2_\beta$ μη μηδενικό κάθετο σε κάθε K_ω όπου ω οποιαδήποτε ρίζα της μονάδας. Ορίζουμε την εξής συνάρηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) \omega^n \beta(n).$$

Πρατηρούμε ότι η F είναι συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο και αναλυτική στο εσωτερικό του. Από την υπόθεση μηδενίζεται σε κάθε ρίζα της μονάδας. Όμως το σύνολο όλων των ριζών της μονάδας είναι πυκνό στο $\partial B(0,1)$. Άρα από τη συνέχεια της F συνεπάγεται ότι η F μηδενίζεται στο σύνορο του μοναδιαίου δίσκου. Από την αρχή μεγίστου $F \equiv 0$. Άρα $\hat{g}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $g \equiv 0$. Αντίφαση. Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο B έχει πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων και άρα είναι χαοτικός.
Η κατεύθυνση $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ είναι προφανής.

Από το προηγούμενο θεώρημα φαίνεται ότι υπάρχουν υπερκυκλικοί τελεστές που δέν είναι χαοτικοί. Για παράδειγμα ο τελεστής μετατόπισης B στον H^2_β με $\beta(k) = \frac{1}{k+1}$ είναι υπερκυκλικός αλλά όχι χαοτικός.

Κεφάλαιο 2

ΚΟΙΝΑ ΥΠΕΡΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 Κοινό κριτήριο υπερκυκλικότητας και παραδείγματα

Έστω $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ οικογένεια συνεχών γραμμικών τελεστών στο X όπου Λ είναι σύνολο δεικτών. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ο T_λ είναι υπερκυκλικός. Ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν υπάρχουν κοινά υπερκυκλικά διανύσματα για όλους τους T_λ. Παρατηρούμε ότι αν το Λ είναι αριθμήσιμο σύνολο τότε το θεώρημα Baire δίνει ότι το $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ είναι G_δ πυκνό. Θα δείξουμε κάποια γενικά αποτελέσματα που μας εξασφαλίζουν κοινά υπερκυκλικά διανύσματα για υπεράριθμο το πλήθος τελεστών T_λ, δηλαδή όταν το σύνολο Λ είναι υπεραριθμήσιμο. Μάλιστα το παρακάτω θεώρημα αναφέρεται σε κοινά καθολικά διανύσματα, τα οποία ορίζονται ως εξής

Ορισμός 2.1 *Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνεχών γραμμικών τελεστών στο X. Ένα διάνυσμα $x \in X$ θα λέγεται καθολικό για την ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αν το σύνολο $\{T_n x \ : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο X. Θα συμβολίζουμε με $Univ(T_n)$ το σύνολο όλων των καθολικών διανυσνάτων της $\{T_n\}$.*

Θεώρημα 2.1 (Κοινό κριτήριο υπερκυκλικότητας [11]) *Έστω X διαχωρίσιμος F χώρος και $\{T_{n,\lambda} : \lambda \in I\}$, όπου $I \subset \mathbb{R}^+$ οικογένεια τελεστών στο X ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $\lambda \to T_{n,\lambda}$ να είναι συνεχής. Έστω ότι υπάρχει πυκνή ακολουθία $\{x_j\}$ στο X και οικογένεια τελεστών $\{S_{n,\lambda} : \lambda \in I, n \in \mathbb{N}\}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα*

(1) Για κάθε x_j και κάθε $K \subset I$ συμπαγές υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών $\{c_k\}$ ώστε

- *(α) $\sum_k c_k < \infty$.*
- *(β) $\|T_{n+k,\lambda} \circ S_{n,a}(x_j)\| \leq c_k \ \forall n, k \in \mathbb{N}$ και κάθε $\lambda, \alpha \in K$.*
- *(ς) $\|T_{n,\lambda} \circ S_{n+k,\alpha}(x_j)\| \leq c_k \ \forall \lambda, \alpha \in K$ με $\lambda \leq \alpha$ και κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.*

(2) Για κάθε $\epsilon > 0, x_j, K \subset I$ συμπαγές υπάρχει $0 < C(\epsilon) < 1$ ώστε για $\lambda, \alpha \in K$ να ισχύει το εξής

$$1 \geq \frac{\lambda}{\alpha} \geq C(\epsilon)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \|T_{n,\lambda} \circ S_{n,\alpha}(x_j) - x_j\| < \epsilon.$$

Τότε υπάρχει residual (δηλαδή σύνολο που περιέχει G_δ και πυκνό υποσύνολο) υποσύνολο G του X ώστε $\{T_{n,\lambda}(x) : n > 0\}^- = X, \forall \lambda \in I, \forall x \in G$.

Απόδειξη

Έστω $K = [\lambda_1, \lambda_2] \subset I$. Ορίζουμε

$$E_K(s, j, m) = \{x \in X : \forall \lambda \in K \ \exists n = n(\lambda) \leq m : \|T_{n,\lambda}(x) - x_j\| < \frac{1}{s}\}.$$

Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι το $E_K(s, j, m)$ είναι ανοιχτό και το $\bigcup_m E_K(s, j, m)$ είναι πυκνό στο X. Πράγματι αν γράψουμε το I σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών διαστημάτων I_n τότε το

$$G = \bigcap_n \bigcap_s \bigcap_j \bigcup_m E_K(s, j, m)$$

ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. Έστω $x \in E_K(s, j, m)$. Θέτοντας

$$C_l = \{\lambda \in K : \|T_{l,\lambda}(x) - x_j\| < \frac{1}{s}\}, \ l = 1, ...m$$

έπεται ότι τα C_l είναι ανοιχτά (αφού η $\lambda \mapsto T_{n,\lambda}$ είναι συνεχής) και καλύπτουν το K (αφού $x \in E_K(s, j, m)$). Χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια του K βρίσκουμε $I_l \subseteq C_l, l = 1, ..., m$ συμπαγή ώστε $K \subseteq \bigcup_{l=1}^{m} I_l$. Αφού το I_l είναι συμπαγές μπορούμε να βρούμε $\epsilon_l > 0$ ώστε

$$\text{αν } a \in I_\lambda \text{ και } \|x - y\| < \epsilon_l, \text{ τότε } \|T_{l,a}(y) - x_j\| < \frac{1}{s}.$$

Θέτουμε $\epsilon = \min\{\epsilon_l\}_{l=1}^m$ και άρα αν $\|x - y\| < \epsilon$ τότε $y \in E_K(s, j, m)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το $\bigcup_m E_K(s, j, m)$ είναι πυκνό στο X. Έστω $w = x_p$, p ακέραιος και $\delta > 0$. Θα βρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $y \in E_K(s, j, m)$ ώστε $\|w - y\| < \delta$.

Παίρνουμε k αρκετά μεγάλο ώστε

$$\|T_{n,\lambda}(w)\| < \frac{1}{4s} \qquad \forall n \geq k \qquad \lambda \in K \tag{2.1}$$

και

$$\sum_{n \geq k} c_n < \min\{\delta, \frac{1}{4s}\}. \tag{2.2}$$

Θεωρούμε μία διαμέριση $\lambda_1 = a_0 < a_1 < ... < a_l = \lambda_2$ του διαστήματος $[\lambda_1, \lambda_2]$ και ορίζουμε το διάνυσμα

$$y = w + S_{k,a_0}(x_j) + ... + S_{(l+1)k,a_l}(x_j). \tag{2.3}$$

Θα επιλέξουμε το l και την διαμέριση $\lambda_1 = a_1 < ... < a_l = \lambda_2$ ώστε $\|y - w\| < \delta$ και $y \in E_K(s, j, m)$ για κάποιο m. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν $a_{i-1} < \lambda \leq a_i$ για $i = 1, ..., l$ τότε $\|T_{(i+1)k,\lambda}(y) - x_j\| < \frac{1}{s}$. Άρα αν επιλέξουμε $m = (l + 1)k$ τότε θα έχουμε $y \in E_K(s, j, m)$.

Ας εκτιμήσουμε το $\|y - w\|$:

$$\|y - w\| = \|S_{k,a_0}(x_j) + S_{2k,a_1} + ...S_{(l+1)k,a_l}\| \leq c_k + c_{2k} + ... + c_{(l+1)k} \leq \sum_{n \geq k} c_n < \delta.$$

Όπου η τελευταία προκύπτει από τη σχέση (2.2).

Έστω λ με $a_{i-1} < \lambda \leq a_i$. Τότε

$$T_{(i+1)k,\lambda}(y) = T_{(i+1)k,\lambda}(w) + T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{k,a_0}(x_j) + ... + T_{(i+1)k,\lambda}$$
$$\circ S_{(i+1)k,a_i}(x_j) + ... + T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(l+1)k,a_l}(x_j)$$

Συνεχίζουμε εκτιμώντας το $\|T_{(i+1)k,\lambda}(y) - x_j\|$

$$\begin{aligned}\|T_{(i+1)k,\lambda}(y) - x_j\| &\leq \|T_{(i+1)k,\lambda}(w)\| + \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{k,a_0}(x_j) + ... + T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{ik,a_{i-1}}(x_j)\| \\ &+ \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+1)k,a_i(x_j)} - x_j\| \\ &+ \|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+2)k,a_{i+1}(x_j)+...+T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(l+1)k,a_l}(x_j)}\|.\end{aligned}$$

Από την (2.1) $\|T_{(i+1)k}(w)\| < \frac{1}{4s}$. Χρησιμοποιώντας την (2.2) και την υπόθεση (1)(β) του θεωρήματος παίρνουμε ότι και ο δεύτερος όρος στο προηγούμενο άθροισμα ελέγχεται οπο το $\frac{1}{4s}$. Ομοίως απο την (γ) και την (2.2) ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος του $\frac{1}{4s}$. Θα επιλέξουμε το l και την διαμέριση $\lambda_1 = a_0 < ... < a_l = \lambda_2$ έτσι ώστε για κάθε $\lambda, a_{i-1} < \lambda \leq a_i$ να έχουμε

$$\|T_{(i+1)k,\lambda} \circ S_{(i+1)k,a_i}(x_j) - x_j\| < \frac{1}{4s} \tag{2.4}$$

για κάθε $i = 1, ..., l$.

Εφαρμόζουμε την υπόθεση (β) με $\epsilon = \frac{1}{4s}$ οπότε βλέπουμε ότι η (2.4) ισχύει αν

$$\frac{\lambda}{a_i} > C(\epsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}} \tag{2.5}$$

και αφού $a_{i-1} < \lambda \leq a_i$ αρκεί να έχουμε

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} > C(\epsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}},\ i = 1, ..., l. \tag{2.6}$$

Θέτοντας $\beta_i = \frac{a_{i-1}}{a_i}$ βλέπουμε ότι η (2.6) ισοδυναμεί με το

$$\beta_i > C(\epsilon)^{\frac{1}{(i+1)k}}, i = 1, ..., l. \tag{2.7}$$

Έπεται ότι αρκεί να βρούμε $l \in \mathbb{N}$ και θετικούς αριθμούς $\beta_1, \beta_2, ...\beta_l < 1$ ώστε να ισχύει η (2.7) και

$$\prod_{i=1}^{l} \beta_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \tag{2.8}$$

γιατί ορίζοντας $a_l = \lambda_2$, και $a_i = \lambda_2 \prod_{r=i+1}^{l} \beta_r$ όταν $i = 0, ..., l-1$ έχουμε την (2.6). Επιλέγουμε $l \geq 1$ ώστε

$$\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(C(\epsilon))^{-\frac{1}{k}(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{l+1})} > 1.$$

(Εδώ χρησιμοποιούμε ότι $0 < C(\epsilon) < 1$ και ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει.)

Θέτουμε $N = \frac{1}{k}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{1}{l+1})$ και ορίζουμε

$$\beta_i = \eta^{\frac{N}{(i+1)k}}(C(\epsilon))^{\frac{1}{(i+1)k}}.$$

Έπεται ότι τα β_i ικανοποιούν τις (2.7),(2.8).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι υπάρχουν κοινά υπερκυκλικά διανύσματα για την οικογένεια τελεστών $\{T_\alpha\}_{\alpha \neq 0}$. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε το κοινό κριτήριο υπερκυκλικότητας.

Θεώρημα 2.2 ([11]) *Υπάρχει G_δ πυκνό σύνολο $G \subseteq H(\mathbb{C})$ ώστε $G \subseteq \bigcap\limits_{\theta\in[0,1]} HC(T_{e^{2\pi i\theta}})$.*

Απόδειξη

Παίρνουμε $\{\phi_j : j \geq 1\}$ πυκνό υποσύνολο του $H(\mathbb{C})$ και ορίζουμε το εξής σύνολο

$$E(s,j,k,m) = \{f \in H(\mathbb{C}) : \forall\theta, \text{ με } 0 \leq \theta \leq 1 \ \exists\, n = n(\theta) \leq m$$
$$\text{ώστε} \sup_{|z|\leq k} |f(z + ne^{2\pi i\theta}) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το $E(s,j,k,m)$ είναι ανοιχτό στο $H(\mathbb{C})$ για κάθε $s,j,k,m \in \mathbb{N}$ και ότι το $\bigcup_{m\geq 1} E(s,j,k,m)$ είναι πυκνό στο $H(\mathbb{C})$ για κάθε $s,j,k \in \mathbb{N}$. Τότε το $G = \bigcap\limits_s \bigcap\limits_j \bigcap\limits_k \bigcup\limits_m E(s,j,k,m)$ ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Έστω $f \in E(s,j,k,m)$. Ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$C_l = \{\alpha \in S^1, \text{τέτοια ώστε} \sup_{|z|\leq k} |f(z + l\alpha) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s}\}\ l = 1, 2...m.$$

όπου S^1 είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Έπεται άμεσα ότι τα C_l είναι ανοιχτά στον S^1. Ακόμη επειδή $f \in E(s,j,k,m)$ συνεπάγεται ότι η $\{C_l\}_{l=1}^m$ είναι πεπερασμένη ανοιχτή κάλυψη του S^1. Άρα υπάρχουν $I_l \subseteq C_l, l = 1,...,m$ συμπαγή ώστε $S^1 \subseteq \bigcup_{l=1}^m I_l$.

Για κάθε $l \geq 1$ αφού το I_l είναι συμπαγές μπορούμε να βρούμε $\epsilon_l > 0$ έτσι ώστε

$$\text{αν} \sup_{|z|\leq k+m} |g(z) - f(z)| < \epsilon_l \text{ και } a \in I_l \text{ τότε } \sup_{|z|\leq k} |f(z + la) - \phi_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Θέτουμε $\epsilon < \min\{\epsilon_l, 1 \leq l \leq m\}$ οπότε έχουμε ότι το $\{g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq k+m} |g(z) - f(z)| < \epsilon\}$ που είναι ανοιχτό στον $H(\mathbb{C})$ περιέχεται στο $E(s,j,k,m)$. Αποδεικνύουμε ότι το $\bigcup\limits_{m\geq 1} E(s,j,k,m)$ είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$ $\forall s,j,k$.

Σταθεροποιούμε s,j,k. Έστω $g \in H(\mathbb{C}), K$ συμπαγές στο $\mathbb{C}$ και $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $m \geq 1$ και $f \in E(s,j,k,m)$ ώστε

$$\sup_{z\in K} |f(z) - g(z)| < \epsilon. \tag{2.9}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K \subseteq \{|z| \leq k\}$. Θέτουμε $\phi = \phi_j$. Υπάρχει $\delta < \frac{1}{2}$ ώστε

$$\text{αν } |z| \leq k \text{ και } |z - w| < \delta \ \Rightarrow |\phi(z) - \phi(w)| < \frac{1}{2s}. \tag{2.10}$$

Θεωρούμε μία διαμέριση $0 = \theta_0 < \theta_1 < ..., \theta_l = 1$ του [0,1] (την οποία θα προσδιορίσουμε παρακάτω). Παίρνουμε $t = 2k + 1$ και ορίζουμε $B = \{|z| \leq k + \delta\}$. Για $d = 0, 1, ..., l$ ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$B_d = B + e^{2\pi i\theta_d}(d + 1)t.$$

Τα $B, B_1, ..., B_d$ είναι ξένα ανα δύο. Ορίζουμε τη συνάρτηση h στο συμπαγές $R = B \bigcup \Big(\bigcup\limits_{d=0}^{l} B_d\Big)$ με

$$h(z) = \begin{cases} g(z),\ z \in B \\ \phi(z - e^{2\pi i\theta_d}(d + 1)t),\ z \in B_d,\ d = 0, 1, ..., l. \end{cases} \tag{2.11}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι αναλυτική στο R που έχει συνεκτικό συμλήρωμα. Από το θεώρημα του Runge υπάρχει ακέραια f ώστε

$$\sup_{z\in R}|f(z)-h(z)|<\min\{\frac{1}{2s},\epsilon\}. \tag{2.12}$$

Θα επιλέξουμε το l και τη διαμέριση $0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_l=1$ έτσι ώστε η f να είναι η επιθυμιτή συνάρτηση. Από τις (2.11) και (2.12) έπεται ότι

$$\sup_{z\in K}|f(z)-g(z)|\leq \sup_{z\in B}|f(z)-g(z)|<\epsilon.$$

Θα επιλέξουμε την διαμέριση έτσι ώστε για κάθε θ με $\theta_d\leq\theta<\theta_{d+1}$ να έχουμε

$$\sup_{|z|\leq k}|f(z+(d+1)te^{2\pi i\theta})-\phi(z)|<\frac{1}{s}. \tag{2.13}$$

Τότε θα έχουμε $f\in E(s,j,k,m)$ για $m=(l+1)t$. Έστω θ με $\theta_d\leq\theta<\theta_{d+1}$ και υποθέτουμε αρχικά ότι

$$|e^{2\pi i\theta_{d+1}}-e^{2\pi i\theta_d}|(d+1)t<\delta. \tag{2.14}$$

Τότε για $|z|\leq k$ έχουμε ότι το $z+(d+1)te^{2\pi i\theta}\in B_d$. Άρα αν $|z|\leq k$ τότε

$$\begin{aligned}&|f(z+(d+1)te^{2\pi i\theta})-\phi(z)|\\ &\quad\leq |f(z+(d+1)te^{2\pi i\theta})-\phi(z+(d+1)te^{2\pi i\theta}-(d+1)te^{2\pi i\theta_d}|\\ &\quad+|\phi(z+(d+1)t(e^{2\pi i\theta}-e^{2\pi i\theta_d}))-\phi(z)|.\end{aligned}$$

Άπο τις (2.11) και (2.12) έπεται ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω εκτίμησης ελέγχεται απο $\frac{1}{2s}$ και από τις (2.10) και (2.12) το ίδιο και ο δεύτερος. Άρα αρκεί να επιλέξουμε την διαμεριση ώστε να ισχύει η (2.14). Αρκεί δηλαδή να βρούμε $0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_l=1$ ώστε

$$2\pi(\theta_{d+1}-\theta_d)(d+1)t<\delta.$$

Θέτοντας $\beta_d=\theta_{d+1}-\theta_d$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\beta_d<\frac{\delta}{2\pi(d+1)t}.$$

Ζητάμε λοιπόν $\beta_0,..,\beta_l$ μη αρνητικούς ώστε να ισχύει η προηγούμενη ανισότητα και

$$\beta_0+...+\beta_{l-1}=1.$$

Παίρνουμε $l\geq 1$ ώστε

$$\eta=\frac{\delta}{2\pi t}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{l})>1$$

και ορίζουμε

$$\beta_d=\frac{1}{\eta}\Big(\frac{\delta}{2\pi(d+1)t}\Big).$$

Προφανώς τα $B_1,...,B_l$ ικανοποιούν τις επιθυμητές σχέσεις. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 είναι πλήρης.

Θεώρημα 2.3 ([11]) . *Έστω f υπερκυκλικό διάνυσμα του $T_{e^{2\pi i\theta}}$ για κάποιο θ. Τότε $f\in\bigcap_{r>o}HC(T_{re^{2\pi i\theta}})$*

.

Απόδειξη

Έστω $f \in HC(T_{e^{2\pi i\theta}})$ και $r > 0$. Έστω $g \in H(\mathbb{C}), L$ συμπαγές και $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\sup_{z \in L} |f(z + nre^{2\pi i\theta}) - g(z)| < \epsilon.$$

Υποθέτουμε ότι ο $r = \frac{p}{q}$ είναι ρητός. Από το θεώρημα της Ansari έπεται ότι $f \in HC(T^p_{e^{2\pi i\theta}})$. Άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{z \in L} |f(z + mpe^{2\pi i\theta}) - g(z)| < \epsilon$$

και το συμπέρασμα σε αυτή την περίπτωση προκύπτει από την

$$mqr = mp.$$

Έστω τώρα ότι ο r είναι άρρητος και $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } z, w \in L \text{ και } |z - w| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(w)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Ορίζουμε $L_\delta = \{z : d(z, L) \leq \delta\}$ και θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ με $k > 2\sup_{L_\delta} |z|$. Επειδή οποιαδήποτε τροχιά της μεταφοράς κατα άρρητο $(\mod 1)$ είναι πυκνή στο $[0, 1]$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία $n_1 < n_2 < ..$ ώστε

$$0 \leq \{n_j \frac{r}{k}\} < \frac{\delta}{k} \qquad \text{και} \qquad \sup |n_{j+1} - n_j| < \infty, \tag{2.16}$$

όπου με $\{x\}$ συμβολίζουμε το δεκαδικό μέρος του x. Θέτουμε $m_j = [n_j \frac{r}{k}]$, οπότε έχουμε

$$0 \leq n_j r - m_j k < \delta \tag{2.17}$$

και

$$\sup\, |m_{j+1} - m_j| < m \text{ για κάποιον ακέραιο } m. \tag{2.18}$$

Ορίζουμε $L^l_\delta = L_\delta + lke^{2\pi i\theta}, \quad l = 1, 2, ..., m - 1$ και θεωρούμε το συμπαγές

$$K = L_\delta \cup L^1_\delta \cup ... \cup L^{m-1}_\delta.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση h στο K με

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & z \in L_\delta \\ g(z - lke^{2\pi i\theta}) & z \in L^l_\delta \; l = 1, ..., m - 1 \end{cases}$$

Η h είναι αναλυτική στο K και από το θεώρημα Runge υπάρχει ξ ακέραια ώστε

$$\sup_{z \in K} |\xi(z) - h(z)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Από την υπόθεση η f είναι υπερκυκλική για τον $T_{e^{2\pi i\theta}}$ και άρα και για τον $T^k_{e^{2\pi i\theta}}$(από το Θεώρημα της Ansari). Έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{z \in K}\, |f(z + nke^{2\pi i\theta}) - \xi(z)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Αφού η απόσταση οποιονδήποτε δύο διαδοχικών όρων της n_k είναι μικρότερη από m έπεται ότι υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε

$$nk \leq m_j k \leq nk + (m-1)k.$$

Ακόμη υπάρχει $0 \leq l \leq m-1$ τέτοιο ώστε $m_j k = nk + l$. Θέτουμε $w = (n_j r - m_j k)e^{2\pi i\theta}$. Παρατηρούμε ότι $|w| < \delta$ από την (2.17). Άρα για $z \in L$ έχουμε

$$\begin{aligned}|f(z + n_j re^{2\pi i\theta}) - g(z)| &\leq |f(z + w + (lk + nk)e^{2\pi i\theta}) - \xi(z + w + lke^{2\pi i\theta})| \\ &+ |\xi(z + w + lke^{2\pi i\theta} - g(z + w)| + |g(z + w) - g(z)| < \epsilon\end{aligned}$$

και άρα η f είναι υπερκυκλικό διάνυσμα του $T_{re^{2\pi i\theta}}$.

Από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα συνάγεται αμέσως το ακόλουθο

Θεώρημα 2.4 ([11]) *Υπάρχει $G \subseteq H(\mathbb{C})$ το οποίο είναι residual ώστε $G \subseteq \cap_{a \in \mathbb{C}_*} HC(T_a)$.*

Στα ακόλουθα υποθέτουμε ότι για $\lambda \in \Lambda$ έχουμε μία ακολουθία $T_\lambda = (T_{n,\lambda})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(X)$ όπου το Λ είναι τοπολογικός χώρος και $T_{n,\lambda}(x)$ συνεχής συνάρτηση του (λ, x) $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμη ότι υπάρχει $\mathcal{D} \subseteq X$ πυκνό ώστε κάθε $T_{n,\lambda}$ να έχει δεξιό αντίστροφο $S_{n\lambda} : \mathcal{D} \mapsto X$. Τότε έχουμε το εξής κριτήριο

Θεώρημα 2.5 ([5]) *Έστω ότι το Λ είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων K με την εξής ιδιότητα :Για κάθε $(u, \nu) \in \mathcal{D}$ και κάθε ανοιχτή περιοχή $\mathcal{O}$ του 0 υπάρχουν $p \in X$,$\lambda_1, ..., \lambda_q \in \Lambda$ σύνολα παραμέτρων $\Lambda_1, ..., \Lambda_q \subseteq \Lambda$ με $\lambda_i \in \Lambda_i$ $\forall i$ και $n_1, ..., n_q \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε*

(i) $\bigcup_i \Lambda_i \supseteq K$

(ii) $p - \nu \in \mathcal{O}$

(iii) Για κάθε $i \in \{\ 1\ , . . .\ q\ \}$ και κάθε $\lambda \in \Lambda_i$

- *(1)* $T_{n_i,\lambda} S_{n_i,\lambda_i}(u) - u \in \mathcal{O}$.
- *(2)* $T_{n_i,\lambda}(p) - T_{n_i,\lambda}(p) - T_{n_i,\lambda} S_{n_i,\lambda_i} \in \mathcal{O}$.

Τότε το $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} Univ(T_\lambda)$ είναι G_δ πυκνό.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι αφού το Λ είναι σ συμπαγές, αν δείξουμε το θεώρημα για κάθε συμπαγές υποσύνολο του Λ τότε από το θεώρημα Baire θα έχουμε το ζητούμενο. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Λ είναι συμπαγές. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό. Θέτουμε

$$U_\Lambda = \{x \in X\ : \forall\ \lambda \in \Lambda\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ : T_{n,\lambda}(x) \in U\}.$$

Από τη συνέχεια της $\lambda \mapsto T_{n,\lambda}(x)$ και τη συμπάγεια του Λ έπεται ότι το U_Λ είναι ανοιχτό στο X. Ο X είναι διαχωρίσιμος. Έστω $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ βάση της τοπολογίας του. Παρατηρούμε ότι

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Univ(T_\lambda) = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j\Lambda}.$$

Έπεται από το θώρημα κατηγορίας του Baire ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε U_Λ είναι πυκνό. Αρκεί να δείξουμε ότι $V \cap U_\Lambda \neq \emptyset$ για κάθε $V \neq \emptyset$ ανοιχτό στο X, όπου U τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του X μη κενό. Έστω λοιπόν (U, V) ανοιχτά μη κενά. Επειδή το $\mathcal{D}$ είναι πυκνό υπάρχουν $u, \nu \in \mathcal{D}$ και N περιοχή του 0 ώστε $U = u + N, V = \nu + N$. Επιλέγουμε O περιοχή του 0 ώστε $O + O \subseteq N$ και $p, n_i, \lambda_i, \Lambda_i$ ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος. Επειδή $O \subseteq N$ και $p - \nu \in O$ έχουμε $p - \nu \in N$. Όμως $V = \nu + N$. Άρα $p \in V$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $p \in U_\Lambda$. Έστω λοιπόν $\lambda \in \Lambda$ και $i \in \{1, 2, ...q\}$ ώστε $\lambda \in \Lambda_i$. Θέτουμε $n = n_i$. Γράφοντας

$$T_{n,\lambda}(p) - u = (T_{n,\lambda}(p) - T_{n,\lambda}S_{n,\lambda_i}(u)) + (T_{n,\lambda}S_{n,\lambda_i}(u) - u)$$

έχουμε $p \in U_\Lambda$.

Παρατήρηση Αν $\forall \lambda \in \Lambda$ οι τελεστές $T_{n,\lambda}$ είναι δυνάμεις ενός τελεστή T_λ τότε το (ιι) στη δεύτερη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να αντικατασταθεί από το ακόλουθο

$$\text{Υπάρχουν} \quad \epsilon_i \in \{-1, 1\} \quad \text{ώστε} \quad T_\lambda^{n_i}(p) - \epsilon_i T_\lambda^{n_i} S_{\lambda_i}^{n_i}(u) \in \mathcal{O}.$$

Πράγματι αντικθιστώντας το U_Λ με το $U_\Lambda{}^* = \{x \in X : \forall \lambda \in \Lambda \quad \exists n \quad \text{με} \quad T_\lambda^n(x) \in U \quad \text{ή} \quad T_\lambda^n(x) \in -U\}$ τότε από την προηγούμενη απόδειξη συνεπάγεται ότι υπάρχει G_δ πυκνό σύνολο διανυσμάτων $x \in X$ με την ιδιότητα το $\{T_\lambda^n(x) \ |n \in \mathbb{N}\} \cap \{T_\lambda^n(-x) \ |n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο X. Σύμφωνα με γενικό θεώρημα ένα τέτοιο διάνυσμα είναι καθολικό για όλους τους T_λ.

2.2 Άλλα κριτήρια και εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποια κριτήρια για κοινά υπερκυκλικά διανύσματα που είναι συνέπειες του Θεωρήματος 2.5 της προηγούμενης παραγράφου. Αρχικά εισάγουμε κάποια ορολογία.

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $u \in \mathbb{D}$ και κάθε περιοχή $\mathcal{O}$ του 0 στον X θέτουμε

$$\delta_n(u, \mathcal{O}) = \sup\{\delta \in \mathbb{R}_+ \,|0 \leq \mu - \lambda \leq \delta \; \Rightarrow T_{n,\lambda}S_{n,\mu}(u) - u \in \mathcal{O}\}.$$

- Αν n_i είναι ακολουθία ακεραίων (πεπερασμένη η άπειρη) ο αριθμός

$$\sum_i \delta_{n_i}(u, \mathcal{O})$$

  λέγεται μήκος της n_i σε σχέση με το $(u, \mathcal{O})$.

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $(u, \nu) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ και κάθε περιοχή $\mathcal{O}$ του 0 στον X, συμβολίζουμε με $\mathcal{T}(u, \nu, \mathcal{O})$ (δένδρο πεπερασμένων ακολουθιών) την οικογένεια όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $s = \,(n_1, \,\ldots\,, n_q)$ ακεραίων που είναι αύξουσες και ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα:

  για κάθε $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_q \in \Lambda$ υπάρχει $p \in X$ ώστε $p - \nu \in \mathcal{O}$ και $\forall i \in \{1, ..., q\}, \forall \lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ $T_{n_i,\lambda}(p) - T_{n_i,\lambda}S_{n_i,\lambda_i}(u) \in \mathcal{O}$.   .

Θεώρημα 2.6 (Μονοδιάστατο κριτήριο) *Αν κάθε δένδρο $\mathcal{T}(u, \nu, \mathcal{O})$ έχει στοιχεία αυθαίρετα μεγάλου μήκους τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HC(T_\lambda)$ είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του X. Ειδικότερα αυτό συμβαίνει άν κάθε δένδρο $\mathcal{T}(u, \nu, \mathcal{O})$ έχει άπειρο κλάδο με στοιχεία άπειρου μήκους.*

Απόδειξη

Από το θεώρημα Baire μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Λ είναι συμπαγές διάστημα $\Lambda = [a, b]$. Για κάθε τριάδα $\mathcal{T}(u, \nu, \mathcal{O})$ χρησιμοποιώντας την υπόθεση βρίσκουμε $(n_1, ..., n_q) \in \mathcal{T}(u, \nu, \mathcal{O})$ ώστε $\sum_{i=1}^q \delta_{n_i} \geq b - a$. Έστω $a = \lambda_0 < ... < \lambda_q = b$ διαμέριση του Λ ώστε $\lambda_i - \lambda_{i-1} \leq \delta_{n_i}(u, \mathcal{O}), \forall i \in \{1, 2, ..., q\}$. Θέτουμε $\Lambda_i = [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ και εύκολα βλέπουμε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα (2.5).

Πόρισμα 2.1 *Αν για κάθε συνεχή ημινόρμα $\|.\|$ στο X ικανοποιούνται τα παρακάτω*

(1) *Για κάθε $u \in \mathcal{D}$ και $\lambda, \mu \in K$ έχουμε ότι*

$$\|T_{n,\lambda}S_{n,\mu}(u) - u\| \leq \omega_u(C_n(u))(\mu - \lambda),$$

για κάποια συνάρτηση ω_u με $\lim_{t \to 0} \omega_u(t) = 0$,

(2) *Για κάθε $(u, \nu) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ υπάρχουν άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ A και $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε*

   (a) $\sum_{n \in A} \frac{1}{C_n(u)} = \infty$.

(β) *Θέτοντας* $\mathcal{O} = \{\|x\| < 1\}$, *έχουμε ότι το δένδρο* $T(u,\nu,\mathcal{O})$ *περιέχει όλες τις ακολουθίες* $(n_1, ..., n_q) \subset A$ *με* $n_1 \geq N$ *και* $n_i - n_{i-1} \geq N$ *για όλα τα* $i \geq 1$

τότε εφαρμόζεται το μονοδιάστατο κριτήριο.

Απόδειξη

Έστω η τριάδα $(u,\nu,\mathcal{O})$ όπου υποθέτουμε ότι το $\mathcal{O}$ είναι της μορφής $\mathcal{O} = \{\|x\| < 1\}$ για κάποια συνεχή ημινόρμα στον X. Από την συνθήκη (1) συνεπάγεται ότι μπορούμε να γράψουμε $\delta_{n_i}(u,\mathcal{O}) \geq \frac{\eta}{C_n(u)}$ για κάποια σταθερά $\eta = \eta(u,\mathcal{O})$. Έστω $A = \{\alpha_0, \alpha_1, ...\} \subset \mathbb{N}$ όπως στη (2). Τότε για κάθε $r \in \{0, ..., N-1\}$, η ακολουθία $n_i^r = (\alpha_{r+Ni})_{i\geq 1}$ είναι άπειρος κλάδος του $T(u,\nu,\mathcal{O})$, και τουλάχιστον ένας από αυτούς τους κλάδους έχει άπειρο μήκος. Το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο Θεώρημα.

Λήμμα 2.1 *Έστω* $(n_1, ..., n_q)$ *πεπερασμένη αύξουσα ακολουθία ακεραίων και έστω* $\mathcal{O}'$ *περιοχή του* 0 *στο* X *με* $\mathcal{O}' + \mathcal{O}' + \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. *Υποθέτουμε ότι για όλα τα* $\lambda_1 < ... < \lambda_q \in \Lambda$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) $\sum_{i=1}^{q} S_{n_i,\lambda_i}(u) \in \mathcal{O}$

(b_1) $T_{n_i,\lambda}(\nu) \in \mathcal{O}'$, *για κάθε* $i \in \{1,2,...,q\}$ *και* $\lambda \in \Lambda$.

(b_2) $\sum_{j<i} T_{n_i,\lambda} S_{n_j,\lambda_j}(\nu) \in \mathcal{O}'$ *για κάθε* $i \in \{1,2,...,q\}$ *και* $\lambda \geq \lambda_j$ *για όλα τα* $j < i$.

(b_3) $\sum_{j>i} T_{n_i,\lambda} S_{n_j,\lambda_j}(\nu) \in \mathcal{O}'$ *για κάθε* $i \in \{1,2,...,q\}$ *και* $\lambda \leq \lambda_j$ *για όλα τα* $j > i$.

Τότε $(n_1, ..., n_q) \in \mathcal{T}(u,\nu,\mathcal{O})$.

Απόδειξη

Δοέντων $\lambda_1 < ... < \lambda_q \in \Lambda$ ορίζουμε

$$p = \nu + \sum_{i=1}^{q} S_{n_i,\lambda_i}(u)$$

και το συμπέρασμα έπεται εύκολα από τις υποθέσεις του λήμματος και τον ορισμό του $T(u,\nu,\mathcal{O})$.

Ειδική περίπτωση του προηγούμενου λήμματος είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 2.2 *Έστω* $(n_1, ..., n_q)$ *πεπερασμένη αύξουσα ακολουθία ακεραίων. Υποθέτουμε ότι*

(a) $T_{n_i,\lambda}(\nu) = 0$ *για κάθε* i *και* $T_{n_i,\lambda} S_{n_j,\mu}(u) = 0$ *αν* $i > j$ *και* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

(β) $\sum_{i=1}^{q} S_{n_i,\lambda i}(u) \in \mathcal{O}$ *για κάθε* $\lambda_1 < ... < \lambda_q \in \Lambda$, *και* $\sum_{j>i} T_{n_i,\lambda} S_{n_j,\lambda_j}(u) \in \mathcal{O}$ *για κάθε* $i \in \{1,2,...,q\}$ *και* $\lambda \leq \lambda_j$ *για όλα τα* $j > i$.

Τότε $(n_1, ..., n_q) \in \mathcal{T}(u,\nu,\mathcal{O})$.

Πρόταση 2.1 *Έστω* X *διαχωρίσιμος χώρος Fréchet και* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Υποθέτουμε ότι*

(a) *το σύνολο* $\mathcal{D} := \bigcup_n Ker(T^n)$ *είναι πυκνό στο* X *και ότι ο* T *έχει δεξιό αντίστροφο* $\mathcal{S} : \mathcal{D} \mapsto X$.

(β) *Υπάρχει κάποιο* $\lambda_0 \geq 0$ *τέτοιο ώστε για* $\lambda > \lambda_0$ *και κάθε* $u \in \mathcal{D}$ *το σύνολο* $\{\lambda^{-n}\mathcal{S}^n(u)\}$ *να είναι φραγμένο ως προς κάθε συνεχή ημινόρμα στο* X.

Τότε το $\bigcap_{\lambda>\lambda_0} HC(\lambda T)$ είναι G_δ και πυκνό στο X.

Απόδειξη

Κατα τα γνωστά αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(\lambda T)$ είναι G_δ και πυκνό όπου το Λ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\lambda_0,+\infty)$. Τότε υπάρχει $\alpha>\lambda_0$ και $C>1$ έτσι ώστε $\inf\Lambda = C\alpha$. Από τον ορισμό του $\mathcal{D}$ και αφού ο $\mathcal{S}$ είναι δεξιά αντίστροφος του T έπεται ότι ο $\mathcal{S}$ απεικονίζει το $\mathcal{D}$ στον εαυτό του. Θα εφαρμόσουμε το μονοδιάστατο κριτήριο με $T_{n,\lambda}=(\lambda T)^n$ και $\mathcal{S}_{n,\lambda}=(\lambda^{-1}\mathcal{S})^n$. Έστω λοιπόν $\|\|$ συνεχής ημινόρμα στον X.

Για κάθε $u\in\mathcal{D}$ και $\lambda,\mu\in\Lambda$ έχουμε:

$$\|T_{n,\lambda}S_{n,\mu}(u)-u\| = |\lambda^n\mu^{-n}-1|\;\|u\| = |e^{n\log(\lambda)-\log(\mu)}-1|\;\|u\|$$

Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (1) του Πορίσματος 2.1. Έστω $(u,\nu)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, N θετικός ακέραιος και $(n_1,....,n_q)$ πεπερασμένη ακολουθία ακεραίων ώστε $n_i-n_{i-1}\geq N, \forall i>1$. Θέτουμε $\mathcal{O}=\{\|x\|<1\}$ και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος.

Επειδή $T_{n,\lambda}S_{n',\mu}(u)=\lambda^n\mu^{-n}T^{n-n'}(u)$ αν $n\geq n'$ και αφού $u,v\in\mathcal{D}$, η πρώτη ιδιότητα του Λήμματος 2.2 ικανοποιείται. Ακόμη έχουμε

$$\|S_{n,\lambda}(u)\|\leq\lambda^{-n}\|S^nu\|\leq C^{-n}\|\alpha^{-n}S^nu\|$$

για όλα τα λ,n και

$$\|T_{n,\lambda}S_{n',\mu}(u)\|\leq\lambda^{-(n'-n))}\|S^{n'-n}(u)\|\leq C^{-(n'-n)}S^{n'-n}(u)\|$$

αν $\lambda\leq\mu, n'>n$. Άρα λόγω του (β) βλέπουμε ότι ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη του Λήμματος 2.2 και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πόρισμα 2.2 *Έστω ότι ο X είναι χώρος Banach και $T\in\mathcal{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι το $\bigcup_n Ker(T^n)$ είναι πυκνό στο X και επιπλέον ότι ο T είναι επί. Τότε υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $C\geq 0$ ώστε το $\bigcap_{\lambda>C} HC(\lambda T)$ να είναι G_δ και πυκνό στο X.*

Απόδειξη

Έπεται άμεσα από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και από την Πρόταση 2.1 .

Πόρισμα 2.3 *Αν B είναι ο τελεστής μετατόπισης προς τα πίσω στον $\ell^p, 1\leq p<\infty$ ή στον c_0 τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda>1} HC(\lambda B)$ είναι G_δ και πυκνό στον αντίστοιχο χώρο.*

Κλείνοντας αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο της Πρότασης 2.1 που αναφέρεται σε τελεστές μετατόπισης προς τα πίσω με βάρος. Σε έναν χώρο Frèchet μια ακολουθία $\{e_n\}$ λέγεται βάση υπό συνθήκη αν το $\mathcal{D}=span\{e_n\ : n=0,1,\dots\}$ είναι πυκνό στον χώρο. Μία ακολουθία βάρους είναι μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\{w_n\}$. Η γραμμική απεικόνιση $T_w:\mathcal{D}\mapsto\mathcal{D}$ που ορίζεται από τις $Te_0=e_0$ και $T_{e_n}=w_ne_{n-1}, n\geq 1$ λέγεται μετατόπιση προς τα πίσω με βάρος w. Λέμε ότι η ακολουθία w είναι αθροίσιμη αν ο T_w επεκτείνεται συνεχώς στον χώρο. Ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 2.7 . *Έστω $\big(w(\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ οικογένεια αθροίσιμων ακολουθιών βάρους παραμετρημένες στο $\Lambda\subset\mathbb{R}$. Για κάθε $\lambda\in\Lambda$ έστω T_λ τελεστής μετατόπισης προς τα πίσω που αντιστοιχεί στο $w(\lambda)$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα*

(1) Όλες οι συναρτήσεις $w_n(\lambda)$ είναι αύξουσες και Lipschitz στα συμπαγή.

(2) Για κάθε συμπαγές $K\subseteq\Lambda$ και κάθε $p\in\mathbb{N}$ υπάρχουν σύνολα ακεραίων $A,B\subset\mathbb{N}$ έτσι ώστε

(2ι) Το σύνολο B περιέχει όλες τις διαφορές $n-n'$ όπου $n,n'\in A$ με $n>n'$.

(2ιι) Για κάθε $j\in\{0,\dots,p\}$ η σειρά

$$\sum_{m\in B}\frac{1}{w_1(\lambda)\dots w_{m+j}(\lambda)}e_{m+j}$$

συγκλίνει.

(2ιιι) $\sum_{n\in A}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+p}L_k}=\infty$ όπου L_k είναι η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης $\log(w_k)$ στο K.

Τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}HC(T_\lambda)$ είναι G_δ και πυκνό.

Για την απόδειξη του προηγούμενου καθώς και για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [5].

2.3 Κοινές υπερκυκλικές ακέραιες συναρτήσεις για πολλαπλάσια διαφορικών τελεστών

Στη παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας μία παραλλαγή της Πρότασης 2.1 ότι αν p είναι ένα μη σταθερό πολυώνυμο τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}^*} HC(\lambda p(D))$ είναι G_δ και πυκνό στον $H(\mathbb{C})$.

Πρόταση 2.2 *Έστω $T : X \mapsto X$ συνεχής και γραμμικός τελεστής για τον οποίο υποθέτουμε ότι*

(ι) *Υπάρχει $A \subseteq \bigcup_n Ker(T^n)$ που είναι πυκνό στον X και $\mathcal{S} : \bigcup_n Ker(T^n) \mapsto X$ δεξιά αντίστροφος του T.*

(ιι) *Υπάρχει $\lambda_0 > 0$ ώστε για κάθε $u \in A$ και κάθε $\lambda > \lambda_0$ το σύνολο $\{\lambda^{-n}\mathcal{S}^n u \ : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι φραγμένο στο X.*

Τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda>\lambda_0} HC(\lambda T)$ είναι G_δ πυκνό στο X.

Θεώρημα 2.8 *Έστω p μη σταθερό (μονικό) πολυώνυμο. Τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda>0} HC(\lambda p(D))$ είναι G_δ και πυκνό στον $H(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη

Από το θεώρημα Baire αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda_0 > 0$ το $\bigcap_{\lambda>\lambda_0} HC(\lambda p(D))$ είναι G_δ και πυκνό. Έστω $p(z) = (z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_s)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ο τελεστής $S_\lambda : H(\mathbb{C}) \mapsto H(\mathbb{C})$ με

$$S_\lambda(f)(z) = e^{\lambda z}\int_0^z f(w)e^{-\lambda w}dw$$

είναι δεξιά αντίστροφος του $D-\lambda I$. Έπεται ότι ο τελεστής $S = S_{\lambda_s}\circ\dots\circ S_{\lambda_1}$ είναι ένας δεξιός αντίστροφος του $p(D)$. Ακόμη αν $A := \{e^{\lambda_1 z}q(z) \ : q \text{ πολυώνυμο}\} \subset \bigcup_n Ker(p(D))^n$ τότε το A είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$. Άρα από την Πρόταση 2.2 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $\lambda > \lambda_0$ το σύνολο $\{\lambda^{-n}S^n(e^{\lambda_1 z}z^m) \ : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.

Παρατηρούμε ότι αν $f \in H(\mathbb{C})$, k είναι θετικός ακέραιος και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε

$$\sup_{|z|\le k}|S_\lambda(f)(z)| \le k(e^{|\lambda|k})^2\sup_{|z|\le k}|f(z)|, \tag{2.19}$$

και άρα

$$\sup_{|z|\le k}|S_\lambda^n(f)(z)| \le [k(e^{|\lambda|k})^2]^n\sup_{|z|\le k}|f(z)| \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Είναι άμεσο ότι

$$S_{\lambda_1}^n(e^{\lambda_1 z}z^m) = \frac{e^{\lambda_1 z}z^{m+n}}{(m+1)\dots(m+n)}. \tag{2.21}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι αν $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ τότε οι S_λ, S_μ μετατίθενται. Πράγματι ένας υπολογισμός δίνει ότι $S_\lambda\circ S_\mu(e^{bz}) = S_\mu\circ S_\lambda(e^{bz})$ για κάθε $b\in\mathbb{C}$ και επειδή το $span\{e^{bz} \ : b\in\mathbb{C}\}$ είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$ έπεται το συμπέρασμα. Χρησιμοποιώντας τις (2.19), (2.20), (2.21) και την προηγούμενη παρατήρηση παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sup_{|z|\le k}|S^n(e^{\lambda_1 z}z^m) &= \sup_{|z|\le k}|S_{\lambda_s}^n\dots S_{\lambda_1}^n(e^{\lambda_1 z}z^m)| \\ &\le k^{(s-1)n}\Big(\prod_{j=2}^s e^{|\lambda_j|k}\Big)^{2n}\frac{e^{|\lambda_1|k}k^{m+n}}{(m+1)\dots(m+n)}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Έπεται ότι $\lambda^{-n}S^n(e^{\lambda_1 z}z^m) \to 0$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη.

Θεώρημα 2.9 *Έστω p μη σταθερό πολυώνυμο. Τότε το σύνολο $\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}^*} HC(\lambda p(D))$ είναι G_δ και πυκνό.*

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το p είναι μονικό. Το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο Θεώρημα και το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.10 *Έστω $T : X \mapsto X$ συνεχής και γραμμικός τελεστής. Αν ο T είναι υπερκυκλικός τότε για κάθε $\theta \in [0,1]$ ο $e^{2\pi i\theta}T$ είναι υπερκυκλικός και μάλιστα έχει τα ίδια υπερκυκλικά διανύσματα με τον T.*

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το προηγούμενο υποθέτοντας επιπλέον ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας. Παρατηρούμε ότι αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας τότε το ίδιο ισχύει και για τον λT όταν $|\lambda| = 1$. Σταθεροποιούμε ένα $\lambda \in \mathbb{T}$. Έστω x υπερκυκλικό διάνυσμα του λT. Ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$K_{\mu,x} = \{y \in X \ : \exists n_k \to \infty : (\mu T)^{n_k} x \to y\}$$

όπου $x \in X, \mu \in \mathbb{T}$. Από την υπόθεση μας

$$X = \bar{K}_{\lambda,x}.$$

Έπεται ότι

$$X = \bar{K}_{\lambda,x} \subseteq cl(\mathbb{T}K_{1,x}).$$

Επειδή το $\mathbb{T}$ είναι κλειστό φραγμένο και φραγμένο μακριά απο το 0 έπεται ότι $cl(\mathbb{T}K_{1,x}) \subset \mathbb{T}cl(K_{1,x})$. Άρα ,

$$X = \mathbb{T}cl(K_{1,x}).$$

Διαμερίζουμε το $\mathbb{T}$ σε δύο κλειστά τόξα μήκους π έτσι ώστε $\mathbb{T} = A_1 \bigcup A_2$. Τότε

$$X = A_1 cl(K_{1,x}) \bigcup A_2 cl(K_{1,x})$$

και από το θεώρημα Baire έπεται ότι $(A_i cl(K_{1,x}))^\circ \neq \emptyset$ για κάποιο $i \in \{1,2\}$. Ορίζουμε

$$C_1 = A_i.$$

Έπεται ότι

$$T(C_1 cl(K_{1,x}) \subseteq C_1 cl(K_{1,x}).$$

O T είναι υπερκυκλικός και το $C_1 cl(K_{1,x})$ είναι κάπου πυκνό άρα υπάρχει $z \in HC(T)$ ώστε $z \in C_1 cl(K_{1,x})$. Άρα $cl(Orb(T,z)) \subseteq C_1 cl(K_{1,x})$ που δίνει την

$$X = C_1 cl(K_{1,x}).$$

Διαμερίζουμε το C_1 σε δύο κλειστά τόξα μήκους $\pi/2$ ώστε $C_1 = C_{1,1} \cup C_{1,2}$. Με ένα επιχείρημα ανάλογο του προηγούμενου συνάγουμε ότι

$$X = C_{1,i} cl(K_{1,x})$$

για κάποιο $i \in \{1,2\}$. Ορίζουμε $C_2 = C_{1,i}$ και έπεται ότι

$$X = C_2 cl(K_{1,x}).$$

Επαγωγικά ορίζουμε ακολουθία κλειστών τόξων C_n μήκους $\pi/2^n$ ώστε

$$X = C_n cl(K_{1,x}). \tag{2.23}$$

Από το θεώρημα Cantor $\bigcap C_n = \{a\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{T}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι $\bigcap_n C_n cl(K_{1,x}) = aK_{1,x}$ και από την (2.23) παίρνουμε $X = acl(K_{1,x})$, δηλαδή $X = cl(K_{1,x})$.

Κεφάλαιο 3

ΣΥΧΝΑ ΥΠΕΡΚΥΚΛΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

3.1 Κριτήριο συχνής καθολικότητας

Ορισμός 3.1 (Bayart,Grivaux[3]) *Εστω X χώρος Fréchet και $T : X \mapsto X$ συνεχής γραμμικός τελεστής. Ο T θα λέγεται συχνά υπερκυκλικός αν υπάρχει $x \in X : \forall U \subseteq X$ ανοιχτό μη κενό το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα. Σε αυτή τη περίπτωση το x θα λέγεται συχνά υπρκυκλικό διάνυσμα του T.*

Υπενθυμίζουμε ότι η κατώτερη πυκνότητα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζεται ως

$$\underline{dens}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in A : n \leq N\}}{N}.$$

Η κατώτερη πυκνότητα μιας αυστηρά αύξουσας ακολουθίας θετικών ακεραίων $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ορίζεται ως η κατώτερη πυκνότητα του αντίστοιχου υποσυνόλου του $\mathbb{N}$. Δηλαδή

$$\underline{dens}(n_k) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{k \in \mathbb{N} : n_k \leq N\}}{N}.$$

Επειδή $\forall N$ με $n_k \leq N < n_{k+1}$ έχουμε $\frac{\#\{j\in\mathbb{N}:n_j\leq N\}}{N} = \frac{k}{N}$, προκύπτουν αμέσως τα ακόλουθα

Λήμμα 3.1 *Για μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία (n_k) θετικών ακεραίων έχουμε*

$$\underline{dens}(n_k) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}.$$

Λήμμα 3.2 *Μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία θετικών ακαιρέων $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα αν και μόνον αν*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{n_k}{k} < \infty.$$

Πρατηρησεις Το $x \in X$ είναι συχνά υπερκυκλικό για τον τελεστή T αν και μόνον αν για κάθε μη κενό ανοιχτό $U \subseteq X$ υπάρχει αυστηρά αύξουσα ακολουθία (n_k) θετικών ακαιρέων και $C > 0$ ώστε

$$n_k \leq Ck \qquad T^{n_k}x \in U \;\forall k \in \mathbb{N}.$$

Σε αντίθεση με την υπερκυκλικότητα το θεώρημα του Baire δεν μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο τρόπο καθώς το σύνολο των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων, εν γένει, δεν είναι residual. Κάτω από κάποιες υποθέσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι πρώτης κατηγορίας. Εδώ το μέγεθος του συνόλου των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων $FHC(T)$ μελετάται υπο την έννοια αν $X = FHC(T) + FHC(T)$. Ο ορισμός των συχνά υπερκυκλικών τελεστών μπορεί να τεθεί στο εξής γενικότερο πλαίσιο

Ορισμός 3.2 *Εστω X Y τοπολογικοί γραμμικοί χώροι και $T_n : X \mapsto Y$ $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία απεικονίσεων. Το $x \in X$ θα λέγεται συχνά καθολικό για την ακολουθία (T_n) αν για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό μη κενό το σύνολο*

$$\{n \in \mathbb{N} : T_n x \in U\}$$

έχει θετική κατώτερη πυκνότητα. Τότε η ακολουθία (T_n) θα λέγεται συχνά καθολική και το σύνολο αυτών των διανυσμάτων θα δηλώνεται με $FU(T_n)$

Θα αποδείξουμε ένα κριτήριο ανάλογο του Θεωρήματος 1.1 που μας εξασφαλίζει ότι ενας τελεστής είναι συχνά υπερκυκλικός. Τώρα δεν χρησιμοποιούμε το θεώρημα Baire αλλά κατασκευάζουμε τέτοιο διάνυσμα. Πρίν την απόδειξη εισάγουμε κάποια ορολογία σχετικά με την σύγκλιση σειρών σε χωρο Fréchet.

Όπως είναι γνωστό σε κάθε χώρο Fréchet υπάρχει διαχωρίζουσα ακολουθία ημινορμών p_n ώστε η μετρική

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

να ορίζει τοπολογία συμβατή με την τοπολογία του χώρου. Θέτουμε $\|x\| = d(x,0)$.

Ορισμός 3.3 *Εστω X $F-$χώρος και $\{x_k\}$ ακολουθία στο X. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη στο X αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \geq 1$ ώστε για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}$ με $F \cap \{1, 2 \dots N\} = \emptyset$ να έχουμε*

$$\| \sum_{k \in F} x_k \| < \epsilon.$$

Αν X είναι χώρος Fréchet με ακολουθία ημινορμών p_n και $F-$νόρμα $\| \, \|$ τότε έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_n(x_k) < \infty \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_n(x_k) \text{ συγκλίνει υπό συνθήκη.}$$

Θα χρειαστούμε ακόμη τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 3.4 *Η συλλογή των σειρών $\sum_{k=1}^{\infty} x_{k,j}$ $j \in J$ σε έναν $F-$χώρο συγκλίνει υπό συνθήκη ομοιόμορφα ως προς $j \in J$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος $N \geq 1$ ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq \mathbb{N}$ με $F \cap \{1, 2, \dots n\} = \emptyset$ και κάθε $j \in J$ να έχουμε*

$$\| \sum_{k \in F} x_{k,j} \| < \epsilon.$$

Θεώρημα 3.1 (Κριτήριο συχνής καθολικότητας) *Έστω X $F-$ χώρος Y διαχωρίσιμος $F-$χώρος και $T_n : X \mapsto Y, n \in \mathbb{N}$ συνεχείς απεικονίσεις. Έστω ότι υπάρχει πυκνό υποσύνολο Y_0 του Y και απεικονίσεις $S_n : Y_0 \mapsto X, n \in \mathbb{N}$ ώστε*

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T_{k+n} S_k y$ συγκλίνει υπό συνθήκη ομοιόμορφα ως προς $k \in \mathbb{N}$ για όλα τα $y \in Y_0$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T_k S_{n+k} y$ συγκλίνει υπό συνθήκη ομοιόμορφα ως προς κ για όλα τα $y \in Y_0$.

(γ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} S_n y$ συγκλίνει υπό συνθήκη για κάθε $y \in Y_0$.

(δ) $T_n S_n y \to y$ για κάθε $y \in Y_0$.

Τότε η ακολουθία (T_n) είναι συχνά καθολική

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα

Λήμμα 3.3 *Έστω $\rho(l, \nu), l, \nu \in \mathbb{N}$ μη αρνητικοί αριθμοί ώστε*

$$\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}} < \infty.$$

Τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων (n_k) και διαμέριση του $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{l,v=1}^{\infty} I(l, v)$$

τέτοια ώστε

(α) για κάθε $l, \nu \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(n_k)_{k \in I(l,\nu)}$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα,

(β) $n_k - n_m \geq R_k + R_m$ για $k > m$, και $n_1 \geq R_1$

όπου $R_k = \rho(l, \nu)$ για $k \in I(l, \nu)$.

Αποδειξη Θεωρήματος 3.1
Αφού ο Y είναι διαχωρίσιμος (άρα και ο Y_0) μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Y_0 είναι αριθμήσιμο

$$Y_0 = \{y_1, y_2, y_3 ...\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις (α),(β),(γ) και (δ) του θεωρήματος βρίσκουμε φυσικούς N_l $l \geq 1$ ώστε για όλα τα $\lambda \geq l$ όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του $\mathbb{N}$ με $F \cap \{1, 2, ..., N_l - 1\}$ να έχουμε

$$\| \sum_{n \in F} T_{n+k} S_k y_\lambda \| \leq \frac{1}{l 2^l}, \tag{3.1}$$

$$\| \sum_{n \in F} T_k S_{k+n} y_\lambda \| \leq \frac{1}{l 2^l}, \tag{3.2}$$

$$\| \sum_{n \in F} S_n y_\lambda \| \leq \frac{1}{l 2^l}, \tag{3.3}$$

και
$$\|T_n S_n y_\lambda - y_\lambda\| \le \frac{1}{2^l}. \tag{3.4}$$

Έστω $\rho(l,v)=v$ για $l,v\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.3 οπότε παίρνουμε ακολουθία n_k, διαμέριση του $\mathbb{N}=\cup_{l,v=1}^{\infty}I(l,v)$ και $R_k=\rho(l,v)$ αν $k\in I(l,v)$ με τις ιδιότητες που διατυπώνονται εκεί. Ορίζουμε

$$z_k=\begin{cases} y_l,\ k\in I(l,N_l) \\ 0 \text{ αλλιώς}\end{cases} \tag{3.5}$$

και θέτουμε
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}S_{n_k}z_k. \tag{3.6}$$

Από τον ορισμό της z_k έχουμε για κάθε $l\ge 1$ ότι

$$\sum_{k\in I(l,N_l)}S_{n_k}z_k=\sum_{k\in I(l,N_l)}S_{n_k}y_l \tag{3.7}$$

και η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη από την υπόθεση (γ) του θεωρήματος.

Από το Λήμμα 3.3
$$n_k\ge R_k=N_l \text{ όταν } k\in I(l,N_l)$$

και άρα αν το K είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $I(l,N_l)$ τότε το σύνολο $\{n_k : k\in K\}$ είναι πεπερασμένο και δεν τέμνει το $\{1,2...,N_l-1\}$. Έπεται από την (3.3) ότι

$$\|\sum_{k\in K}S_{n_k}y_l\|\le\frac{1}{2^l}.$$

Από την προηγούμενη σχέση και από την υπο συνθήκη σύγκλιση της (3.7) συνεπάγεται ότι η (3.6) συγκλίνει υπό συνθήκη.

Έστω $k\in I(l,N_l)$ για κάποιο $l\in\mathbb{N}$. Τότε

$$T_{n_k}x-y_l=\sum_{j<k}T_{n_k}S_{n_j}z_j+\sum_{j>k}T_{n_k}S_{n_j}z_j+(T_{n_k}S_{n_k}z_k-y_l). \tag{3.8}$$

Έχουμε
$$\sum_{j<k}T_{n_k}S_{n_j}z_j=\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{j\in I(\lambda,N_\lambda) j<k}T_{n_k}S_{n_j}y_\lambda+\sum_{\lambda=l+1}^{\infty}\sum_{j\in I(\lambda,N_\lambda),j<k}T_{n_k}S_{n_j}y_\lambda. \tag{3.9}$$

Από το λήμμα 3.3 έχουμε
$$n_k-n_j\ge R_k=N_l,$$

και άρα από τη σχέση (3.1) συνεπάγεται ότι για $\lambda\le l$ έχουμε

$$\|\sum_{j\in I(\lambda,N_\lambda),j<k}T_{n_k}S_{n_j}y_\lambda\|=\|\sum_{j\in I(\lambda,N_\lambda),j<k}T_{n_j+(n_k-n_j)}S_{n_j}y_\lambda\|\le\frac{1}{l2^l} \tag{3.10}$$

Ακόμη
$$n_k-n_j\ge R_j=N_\lambda \qquad \text{για } j\in I(\lambda,N_\lambda).$$

Άρα έπεται ότι για όλα τα λ έχουμε

$$\| \sum_{j\in I(\lambda,N_\lambda), j<k} T_{n,k} S_{n_j} y_\lambda \| = \| \sum_{\lambda=1}^{l} T_{n_j+(n_k-n_j)} S_{n_j} y_\lambda \| \le \frac{1}{\lambda 2^\lambda}. \tag{3.11}$$

Από τις (3.9), (3.10), (3.11) έπεται ότι

$$\| \sum_{j<k} T_{n_k} S_{n_j} z_j \| \le \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{1}{l2^l} + \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda 2^\lambda} \le \frac{2}{2^l}. \tag{3.12}$$

Με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας την (2) βρίσκουμε ότι για κάθε $M > k$

$$\sum_{k<j\le M} T_{n_k} S_{n_j} z_j \| \le \frac{2}{2^l}$$

και συνεπώς

$$\| \sum_{j>k} T_{n_k} S_{n_j} z_j \| \le \frac{2}{2^l}.$$

Τέλος από τον ορισμό της z_k και τη σχέση (3.4) συνεπάγεται ότι

$$\| T_{n_k} S_{n_k} z_k - y_\lambda \| \le \frac{1}{2^l},$$

αφού $n_k \ge N_l$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\| T_{n_k} x - y_\lambda \| \le \frac{5}{2^l}$$

για $k \in I(l, N_l)$.

Όμως από το λήμμα 3.3 η ακολουθία $(n_k)_{k\in I(l,N_l}$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα. Ακόμη ο Y_0 είναι πυκνός στο X, $\frac{5}{2^l} \to 0$ και το συμπέρασμα είναι προφανές.

Απόδειξη λήμματος 3.3

Επειδή $\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l+\nu}} < \infty$ γράφοντας $\rho(l,\nu) = [\rho(l,\nu)] + \theta$ όπου $0 \le \theta \le 1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho(l,\nu) \in \mathbb{N}$ για όλα τα l, ν. Για κάθε $l \ge 1$ ορίζουμε το σύνολο

$$I(l) = \{ n \in \mathbb{N} \, : n = 2^{l-1} \, (mod \, 2^l) \} = \{ 2^{l-1}(2j-1) \, : j \ge 1 \}, \quad l \ge 1.$$

Τα $\{I(l), \ge 1\}$ ορίζουν διαμέριση του $\mathbb{N}$. Με τον ίδιο τρόπο διαμερίζουμε κάθε $I(l)$ σε αριθμήσιμα σύνολα και έτσι παίρνουμε διαμέριση του $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \bigcup_{l,\nu=1}^{\infty} I(l,\nu)$$

με

$$I(l,\nu) = \{ 2^{l-1}(2^\nu(2j-1)-1) \, j \ge 1 \}, \quad l,\nu \ge 1.$$

Θέτουμε τώρα

$$R_k = \rho(l,\nu) \quad \text{αν} \quad k \in I(l,\nu)$$

και

$$n_k = 2 \sum_{p=1}^{k-1} R_p + R_k \quad \text{για} \quad k \ge 1.$$

Ισχύει

$$n_1 = 1$$

και για $k > m \geq 1$,

$$\begin{aligned} n_k - n_m &= R_k + 2\sum_{p=1}^{k-1} R_p - 2\sum_{p=1}^{m-1} R_p - R_m \\ &= R_k + 2\sum_{p=m}^{k-1} R_p - R_m \geq R_k + R_m. \end{aligned}$$

Ακόμη $n_{k+1} - n_k \geq R_k = \rho(l,\nu)$ και άρα η n_k είναι γνησίως αύξουσα. Άρα μένει να δειχθεί το (α) μέρος του λήμματος. Από το Λήμμα 3.1 αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{\frac{n_k}{k}\}$ είναι φραγμένη. Θα βρούμε ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $\{n_k\}$. Η R_p έχει την ίδια τιμή για $p \in I(l,\nu)$ και άρα αρκεί να εκτιμήσουμε τον αριθμό των $p \in \mathbb{N}, p \leq k$ για τα οποία $p \in I(l,\nu)$ για σταθερά l, ν.

Ισχυρισμός :Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και όλα τα $l, v \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\#\{p \in I(l,\nu)\ : p \leq k\} \leq \frac{k}{2^{l+\nu}} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2}.$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού μπορύμε να υποθέσουμε ότι $k \in I(l,\nu)$. Έστω λοιπόν ότι $k = 2^{l-1}(2^\nu(2j-1)-1)$. Τότε έχουμε

$$\#\{p \in I(l,\nu)\ p \leq k\} = j = \frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{k}{2^{l-1}}+1}{2^\nu} + 1\Big) = \frac{k}{2^{l+\nu}} + \frac{1}{2^\nu + 1} + \frac{1}{2}.$$

Συνεπάγεται ότι αν $2^{l+\nu} > 4k$ τότε

$$\#\{p \in I(l,\nu)\ : p \leq k\} = 0.$$

Τώρα από τον ορισμό της n_k έχουμε για κάθε $k \geq 1$

$$\begin{aligned} n_k &\leq \sum_{p=1}^{k} R_p = 2\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \sum_{p \in I(l,\nu), p \leq k} R_p \\ &= 2\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \rho(l,\nu)\#\{p \in I(l,\nu)\ p \leq k\} \\ &\leq 2\sum_{2^{l+\nu}\leq 4k}^{\infty} \rho(l,\nu)\Big(\frac{k}{2^{l+\nu}} + \frac{1}{2^\nu+1} + \frac{1}{2}\Big) \\ &\leq 2\Big[\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}}k + \sum_{2^{l+\nu}\leq 4k} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}} 2^{l+\nu}\Big(\frac{1}{2^\nu} + 1\Big)\Big] \\ &\leq 2\Big[\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}}k + \sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}} 4k\frac{3}{2}\Big]. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\frac{n_k}{k}\} \leq 8\sum_{l,\nu=1}^{\infty} \frac{\rho(l,\nu)}{2^{l+\nu}} < +\infty$ και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Από το θεώρημα 3.1 προκύπτει το εξής κριττήριο το οποίο εφαρμόζεται όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας τελεστής είναι συχνά υπερκυκλικός .

Θεώρημα 3.2 (Κριτήριο συχνής υπερκυκλικότητας.) *Έστω X διαχωρίσιμος $F-$ χώρος και T τελεστής στον X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πυκνό υποσύνολο X_0 του X και απεικόνιση $S : X_0 \mapsto X_0$ ώστε* *(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$ συγκλίνει υπό συνθήκη για κάθε $x \in X_0$.*

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} S^n x$ συγκλίνει υπό συνθήκη για όλα τα $x \in X_0$.

(iii) $TSx = x$ για όλα τα $x \in X_0$.

Τότε ο T είναι συχνά υπερκυκλικός.

Παρατηρούμε ότι άν ένας τελεστής ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος τότε $T^n x \to 0, S^n x \to 0$ για όλα τα $x \in X_0$. Άρα για κάθε U, V ανοιχτά μη κενά υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n U \cap V \neq \emptyset \forall n \geq N$. Τελεστές με αυτη την ιδότητα λέγονται τοπολογικά μικτοί. Ακόμη κάθε τελεστής που ικανοποεί το προηγούμενο θεώρημα είναι χαοτικός. Πράγματι αρκεί να βρούμε πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων. Για $x \in X_0$ ορίζουμε

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk} x + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk} x, k \in \mathbb{N}$$

Αυτό το άθροισμα ορίζεται καλά απο τις (i) και (ii). Τότε $T^k y_k = y_k$ αφού $TS = I$ στο X_0. Παρατηρούμε ακόμη ότι $y_k \to x$ και αφού το X_0 είναι πυκνό ο T είναι χαοτικός.

3.2 Παραδείγματα συχνής καθολικότητας

Σαν εφαρμογή των παραπάνω θα δείξουμε ότι οι τελεστές που μελετήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο είναι συχνά υπερκυκλικοί.

Θεώρημα 3.3 *Έστω $D : H(\mathbb{C}) \mapsto H(\mathbb{C})$ ο τελεστής παραγώγισης. Ο D είναι συχνά υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Επιλέγουμε $R > e$ και ορίζουμε την εξής μετρική στον $H(\mathbb{C})$

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n} \frac{\sup_{|z|\leq n} |f(z) - g(z)|}{1 + \sup_{|z|\leq n} |f(z) - g(z)|}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο D είναι συχνά υπερκυκλικός στον $(H(\mathbb{C}), d)$. Ορίζουμε ακόμη τον $S : H(\mathbb{C}) \mapsto H(\mathbb{C})$ με

$$Sf(z) = \int_{(0,z)} f(w)dw.$$

Θεωρούμε τον χώρο των πολυωνύμων X_0, που είναι πυκνά στον $(H(\mathbb{C}), d)$. Έστω $f_k(z) = z^k$ $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$S^n f_k(z) = \frac{z^{k+n}}{(k+1)...(k+n)}.$$

Άρα για $j \in \mathbb{N}$ $\sup_{|z|\leq j} |S^n f_k(z)| \leq \frac{j^{k+n}}{(k+1)...(k+n)}$. Έπεται ότι

$$d(S^k f, 0) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{R^j} \frac{j^{k+n}}{(k+1)...(k+n)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^k}{R^j} \frac{j^n}{n!}.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\sum_{n\geq 1} d(S^n f, 0) \leq \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^k}{R^j} \frac{j^n}{n!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^k}{R^j} \sum_{n\geq 1} \frac{j^n}{n!} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^k (\frac{e}{R})^j < +\infty$$

όπου η σύγκλιση της τελευτέας σειράς προκύπτει με μία απλή εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας.

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n\geq 1} d(S^n f, 0)$ συγκλίνει απολύτως άρα και υπο συνθήκη στον $H(\mathbb{C})$ για κάθε πολυώνυμο. Ακόμη επειδή $D^n f = 0$ τελικά, για κάθε $f \in X_0$ και $DS = I$ έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 3.4 *Έστω $a \in \mathbb{C}^*$ και T_a ο τελεστής μετατόπισης. Ο T_a είναι συχνά υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Θα δόσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι εφαρμογή του θεωρήματος συχνής καθολικότητας ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί ένα λήμμα ανάλογο του 3.1 και ένα αποτέλεσμα προσέγγισης απο τη Μιγαδική αναλυση. Και στις δύο περιπτώσεις θα υποθέσουμε ότι $a = 1$. Η γενική περίπτωση προκύπτει από το επόμενο θεώρημα που αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.5 *Έστω X, Y $F-$χώροι και $T : X \mapsto X$ $S : Y \mapsto Y$ τελεστές. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\phi : Y \mapsto X$ που έχει πυκνή εικόνα έτσι ώστε $T \circ \phi = \phi \circ S$. Αν ο S είναι συχνά υπερκυκλικός τότε το ίδιο ισχύει και για τον T.*

Για $m, k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις ακέραιες συναρτήσεις

$$f_{m,k}(z) = z^m (\frac{\sin \frac{z}{k}}{\frac{z}{k}})^{m+2}.$$

Παρατηρούμε ότι $f_{m,k} \to z^m$ στον $H(\mathbb{C})$ καθώς το $k \to +\infty$. Πράγματι αν $\epsilon > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ τότε αφού $\lim_{z \to 0}(\frac{\sin z}{z})^{m+2} = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|z| < \delta \Rightarrow |(\frac{\sin z}{z})^{m+2} - 1| < \epsilon.$$

Άρα αν $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{k_0} < \epsilon$ τότε για κάθε $k \geq k_0$ και κάθε $z \in \{|z| \leq j\}$ έχουμε ότι $|\frac{z}{k}| < \delta$ και άρα $|f_{k,m}(z) - z^m| < \epsilon$. Δηλαδή $f_{m,k} \to z^m$ ομοιόμορφα στα συμαγή. Άρα αν

$$X_0 = span\{f_{m,k}(z - l) \ : m, n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0\}$$

τότε το X_0 είναι πυκνό στον $H(\mathbb{C})$. Ορίζουμε $S : X_0 \mapsto X_0$ με $Sf(z) = f(z - 1)$, οπότε $TS = I$. Ακόμα

$$\sum_{n \geq 1} T^n(f_{m,k}(z - l)) = k^{m+2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^{m+2}(\frac{z-l+n}{k})}{(z - l + n)^2}$$

που συγκλίνει απολύτως στον $H(\mathbb{C})$ από το κριτήριο του Weirrstrass άρα και υπό συνθήκη. Ανάλογα η σειρά

$$\sum_{n \geq 1} S^n(f_{m,k}(z - l)) = \sum_{n \geq 1} f_{m,k}(z - n - l) = k^{m+2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^{m+2}(\frac{z-n-l}{k})}{(z - n - l)^2}$$

συγκλίνει απόλυτα στον $H(\mathbb{C})$.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.4

Θα δείξουμε τώρα το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα λήμματα

Λήμμα 3.4 *Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k \geq 1}$ ακεραίων , ακολουθία $(m_k)_{k \geq 1}$ ακεραίων και $(R_k)_{k \geq 1}$ ακολουθία θετικών αριθμών ώστε να ισχύουν τα εξής*

(1) $n_k \geq R_k$ και $n_{k+1} - n_k \geq R_{k+1} + R_k$ για κάθε $k \geq 1$

(2) Για κάθα $l \geq 1$, και $R > 0$ το σύνολο $E(l, R) = \{n_k \ : R_k \geq R, m_k = l\}$ να έχει θετική κατώτερη πυκνότητα.

Λήμμα 3.5 (Arakeljan) *Έστω $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Έστω $F \subseteq \mathbb{C}$ κλείστο ώστε το $\mathbb{C} \backslash F$ να είναι συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό στο ∞. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : F \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη στο εσωτερικό του F υπάρχει ακέραια ϕ ώστε για κάθε $z \in F$ να έχουμε*

$$|\phi(z) - g(z)| \leq \exp(-|z|^{\frac{1}{4}})$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θεωρούμε τις ακολουθίες $(n_k), (m_k), (R_k)$ του Λήμματος 3.4. Έστω (P_k) αρίθμηση όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Έστω D_k ο κλειστός δίσκος με κέντρο το n_k και ακτίνα $\frac{R_k}{2}$. Επειδή $n_{k+1} - n_k \geq R_{k+1} + R_k$ οι δίσκοι $F = \{D_k\}$ είναι ξένοι ανα δύο. Ορίζουμε την εξής συνάρτηση στο $\cup_{k \geq 1} D_k$

$$g(z) = p_{m_k}(z) \text{ αν } z \in D_k.$$

Η g είναι καλά ορισμένη στο κλειστό F και αναλυτική. Το συμπλήρωμα του F είναι συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό στο άπειρο. Από το Λήμμα 3.5 υπάρχει ϕ ακέραια ώστε

$$|\phi(z) - g(z)| \leq \exp(-|z|^{\frac{1}{4}})$$

για όλα τα $z \in F$. Θα αποδείξουμε ότι η ϕ είναι συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T_1.

Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, $f \in H(\mathbb{C})$ και $\epsilon > 0$. Βρίσκουμε $l \geq 1$ και $R > 0$ ώστε

$$\|P_l - f\|_{C(K)} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad K \subseteq D(0, \frac{R}{2}).$$

Τότε για $n = n_k \in E(l, R)$ και $z \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned} |T^n\phi(z) - f(z)| \leq & |\phi(z + n_k) - f(z)| \\ & \leq |\phi(z + n_k) - g(z + n_k)| + |P_l(z) - f(z)| \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} + \exp(|n_k - R|^{\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

και αφού το $E(l, R)$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα έχουμε το ζητούμενο .

Θα ασχοληθούμε τώρα με την μελέτη των τελεστών μετατόπισης (Backwrd shift).

Θεώρημα 3.6 *Έστω $B : \ell^p \mapsto \ell^p$ με $Be_n = e_{n-1}, n \geq 1$ και $Be_0 = e_0$ όπου $1 \leq p < +\infty$ και $\{e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση. Τότε για κάθε ω με $|\omega| > 1$ ο ωB είναι συχνά υπερκυκλικός στον ℓ^p.*

Απόδειξη

Έστω (x_l) όλες οι ακολουθίες στον ℓ^p που είναι τελικά 0 με συντελεστές από το $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Τότε το (x_l) είναι πυκνό στον ℓ^p. Ορίζουμε $S : \ell^p \mapsto \ell^p$ με $Se_n = \frac{1}{\omega} e_{n=1}$ για $n \geq 0$.Τότε $(\omega B)S = I$ και $(\omega B)^k x_l = 0$ για κ αρκετά μεγάλο. Ακόμη $\|S^k x_l\| \leq \frac{1}{|\omega^k|}\|x_l\|$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.

Θεώρημα 3.7 *Έστω (ω_n) ακολουθία θετκών αριθμών φραγμένη, και φραγμένη μακριά απο το 0. Έστω $B : \ell^p \mapsto \ell^p$ με $Be_0 = e_0$ και $Be_n = \omega_n e_{n-1}$ για $n \geq 1$. Αν η σειρά*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\omega_1 ... \omega_n)^p}$$

συγκλίνει τότε ο B είναι συχνά υπερκυκλικός.

Απόδειξη

Έστω $(n_k), (m_k), (R_k)$ οι ακολουθίες του Λήμματος 3.4. Τότε $n_k \leq 2R_k$ (αυτό προκύπτει από την απόδειξη του Λήμματος, παραπέμπουμε στο [3] για λεπτομέριες). Άρα $n_{k+1} - n_k \geq R_{k+1} + R_k \geq \frac{m_k}{2}$. Έστω $D = (x_l)_{l \geq 1}$ το σύνολο των ακολουθιών με συντελεστές από το $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ και οι οποίες είναι τελικά 0. Υποθέτουμε ακόμη ότι $supp(x_l) \subseteq [0, \frac{l}{2})$. Παίρνουμε C, γ σταθερές ώστε $\gamma \leq \omega_n \leq C, \forall n$.

Ορίζουμε $S : \ell^p \mapsto \ell^p$ με $Se_n = \frac{1}{\omega_{n+1}} e_{n+1}$ και την ακολουθία

$$y_k = \begin{cases} x_{m_k} & , R_k \geq N_{m_k} \\ 0 & \end{cases}$$

όπου η ακολουθία $(N_l)_{l\geq 1}$ θα ορισθεί κατάλληλα. Τότε $supp(y_k) \subseteq [0, \frac{m_k}{2})$. Άρα έπεται ότι οι φορείς των διανυσμάτων $S^{n_k}y_k$ είναι ξένοι ανα δύο και μάλιστα $\max\ supp(S^{n_k}y_k) < \min\ (S^{n_k+1}y_{k+1})$. Ορίζουμε

$$x = \sum_{k\geq 1} S^{n_k}y_k.$$

Τότε αφού οι φορείς των $S^{n_k}y_k$ είναι ξένοι ανα δύο έπεται ότι $\|x\|^p = \sum \|S^{n_k}y_k\|^p$. Ακόμη

$$\|S^{n_k}x_l\|^p \leq \frac{1}{(\omega_1...\omega_{n_k})^p}\left(\frac{C}{\gamma}\right)^l \|x_l\|^p.$$

Έστω $(N_l)_{l\geq 1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία ώστε για κάθε l και κάθε $j \leq l$,

$$\sum_{n_k\geq N_l} \|S^{n_k}x_l\|^p \leq \frac{1}{2^{j+l}}.$$

Τότε

$$\sum_{k\geq 1}\|S^{n_k}y_k\|^p = \sum_{l\geq 1}\sum_{m_k=l, R_k\geq N_l}\|S^{n_k}x_l\|^p \leq \sum_{l\geq 1}\sum_{n_k\geq N_l}\|S^{n_k}x_l\|^p \leq \frac{1}{4^l}$$

και άρα το x είναι καλά ορισμένο. Τα διανύσματα $S^{n-n_k}y_k$, B^{n-n_k} έχουν και αυτά ξένους φορείς και με ένα επιχείρημα όμοιο της απόδειξης του Λήμματος 3.4 το x είναι συχνά υπερκυκλικό για τον B (δείτε στο [3]).

Θεώρημα 3.8 *Έστω B ο τελεστής backward shift με βάρη ω_n στον ℓ^p. Αν για κάθε ακολουθία θετικών ακεραίων n_k με θετική κατώτερη πυκνότητα η σειρά*

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(\omega_1...\omega_{n_k})^p}$$

αποκλίνει τότε ο B δεν είναι συχνά υπερκυκλικός.

Απόδειξη

Έστω ότι το x είναι συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα του B και έστω n_k σύνολο θετικών ακεραίων ώστε $\|B^{n_k}x - e_0\| < \frac{1}{2}$. Τότε

$$|x_{n_k}|^p \geq \frac{1}{2(\omega_1...\omega_{n_k})^p}.$$

Όμως η σειρά $\sum |x_{n_k}|^p$ αποκλίνει και άρα η n_k δεν μπορεί να έχει θετική κατώτερη πυκνότητα. Αντίφαση.

Θεώρημα 3.9 *Ο τελεστής μετατόπισης T στον ℓ^2 με βάρος $\omega_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ είναι υπερκυκλικός αλλά όχι συχνά υπερκυκλικός.*

Απόδειξη

Έχουμε $(\omega_1...\omega_n)^2 = n+1$. Αν $E \subseteq \mathbb{N}$ έχει θετική κατώτερη πυκνότητα τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για $N_0 \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $N_1 \geq N_0$ με $\#\{n \in E : N_0 \leq n+1 \leq N_1\} \geq \delta N_1$. Έπεται ότι

$$\sum_{N_0\leq n\leq N_1, n\in E}\frac{1}{n+1} \geq \delta N_1 \frac{1}{N_1} = \delta.$$

Άρα το E δεν έχει θετική κατώτερη πυκνότητα και επομένως ο T δεν είναι συχνά υπερκυκλικός. Ο T είναι υπερκυκλικός διότι $\limsup_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}\sqrt{1+1/i} = \infty$.

Ο στόχος μας στα επόμενα είναι να αποδείξουμε ότι αν ένας τελεστής έχει πολλά ιδιοδιανύσματα σε σχέση με τις μοναδιαίες ιδιοτιμές (με μια έννοια που θα προσδιορισθεί στα επόμενα) τότε είναι συχνά υπερκυκλικός. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα από την εργοδική θεωρία. Ακόμη θα πρέπει να ορίσουμε μέτρα πιθανότητας σε χώρους Banach . Με αυτά θα αχοληθούμε στα δύο επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 4

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κάποια αποτελέσματα απο την εργοδική θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε το θεώρημα εργοδικότητας του Birkhoff. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε στο [25].

Ορισμός 4.1 *Έστω* $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1), (X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ *χώροι πιθανότητας και* $T : X \mapsto X$ *μετρήσιμος μετασχηματισμός. Θα λέμε ότι ο* T *είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο ή ότι ο* T *διατηρεί το μέτρο αν* $m_1(T^{-1}(B_2) = m_2(B_2)\ \forall B_2 \in \mathcal{B}_2$. *Ο* T *θα λέγεται αντιστρέψιμα αναλλοίωτος ως προς το μέτρο αν οι* T, T^{-1} *είναι αναλλοίωτοι ως προς το μέτρο.*

4.1 Παρατηρήσεις

(1) Προφανώς η σύνθεση μετασχηματισμών αναλλοίωτων ως προς το μέτρο είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο.

(2) Οι μετασχηματισμοί που διατηρούν το μέτρο είναι οι μορφισμοί της κατηγορίας των χώρων μέτρων πιθανότητας.

(3) Αν $T : (X_1, \mathcal{B}_1, m_1) \mapsto (X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο και $(X_i, \overline{\mathcal{B}_i}, \overline{m_i}), i = 1, 2$ είναι η πλήρωση του $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i), i = 1, 2$ τότε ο $T : (X_1, \overline{\mathcal{B}_1}, \overline{m_1}) \mapsto (X_2, \overline{\mathcal{B}_2}, \overline{m_2})$ είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο.

4.2 Παραδείγματα μετασχηματισμών αναλλοίωτων ως προς το μέτρο

(1) Προφανώς η ταυτοτική απεικόνιση είναι αναλλοίωτη ως προς το μέτρο σε κάθε χώρο πιθανότητας.

(2) Όπως είναι γνωστό σε κάθε συμπαγή ομάδα ορίζεται μονοσήμαντα κανονικό μέτρο πιθανότητας m αναλλοίωτο από στροφές (μέτρο Haar). Ισχύει ότι κάθε συνεχής ενδομορφισμός μιας συμπαγούς ομάδας επί του εαυτού της διατηρεί το μέτρο Haar. Πράγματι έστω $A : G \mapsto G$ συνεχής ενδομορφισμός και m το μέτρο Haar στην G. Ορίζουμε το εξής μέτρο πιθανότητας στην G $\mu(E) = m(A^{-1}(E))$. Το μ είναι ομαλό αφού το m είναι ομαλό. Ακόμη $\mu(AxE) = \mu(A^{-1}(AxE)) = \mu(xA^{-1}E) = \mu(E)$. Αφού ο A είναι επί και το m είναι αναλλοίωτο από στροφές βλέπουμε ότι το μ είναι αναλλοίωτο απο στροφές και άρα από τη μοναδικότητα του μετρου Haar έπεται ότι $m = \mu$. Άρα ο A είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο.

(3) Αν $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ τότε το μέτρο Haar στην πολλαπλασιαστική ομάδα K είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesguè.Αν $a \in K$ ορίζουμε $T : K \mapsto K$ με $Tz = az$. Τότε ο T είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Αυτός ο μετασχηματισμός λέγεται στροφή του K.

(4) Κάθε αφινικός μετασχηματισμός σε συμαγή ομάδα διατηρεί το μέτρο Haar . Ένας αφινικός μετασχηματισμός είναι απεικόνιση της μορφής $T(x) = \alpha A(x)$ όπου $\alpha \in G$ σταθεροποιημ ένο και $A : G \mapsto G$ είναι 1-1 ενδομορφισμός. Ο T είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο διότι είναι σύνθεση στροφής και συνεχούς ενδομορφισμού.

4.3 Επαγόμενες ισομετρίες

Θα δούμε τώρα ότι οι μεταχηματισμοί $T : X_1 \mapsto X_2$ που διατηρούν το μέτρο επάγουν γραμμική ισομμετρία από τον $L^p(X_2)$ στον $L^p(X_1)$ για κάθε $p \geq 1$.

Ορισμός 4.2 *Έστω $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i), i = 1, 2$ χώροι πιθανότητας. Αν ο $T : X_1 \mapsto X_2$ διατηρεί το μέτρο ο επαγόμενος τελεστής $U_T : L^0(X_2, \mathcal{B}_2, m_2) \mapsto L^0(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ ορίζεται απο την $(U_T f)(x) = f(Tx)$ όπου $L^0(X_i, \mathcal{B}_i, m_i) = \{f : X_i \mapsto \mathbb{C}, f \text{ μετρήσιμη}\}$.*

Προφανώς ο U_T είναι γραμμικός και $U_T(fg) = U_T(f)U_T(g)$. Ακόμη $U_T(c) = c$ όπου c είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή c. Παρατηρούμε ότι αν $f \geq 0$ τότε $U_T(f) \geq 0$ και άρα ο T είναι θετικός τελεστής. Επίσης $U_T(\chi_B) = \chi_{T^{-1}(B)}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $U_T L^p(X_2, \mathcal{B}_2, m_2) \subseteq L^p(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$. Αυτό είναι συνέπεια του επόμενου απλού λήμματος.

Λήμμα 4.1 *Έστω $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i), i = 1, 2$ χώροι πιθανότητας και $T : X_1 \mapsto X_2$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Αν $F \in L^0(X_2 \mathcal{B}_2, m_2)$ τότε $\int U_T F dm_1 = \int F dm_2$ (αν ένα απο τα δύο είναι άπειρο τότε το ίδιο ισχύει και για το άλλο)*

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η F είναι πραγματική. Αναλύοντας την F σε θετικό και αρνητικό μέρος βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το λήμμα όταν η F είναι μη αρνητική. Αν $F = \chi_B$ ισχύει αφού ο T διατηρεί το μέτρο. Έπεται ότι ισχύει για κάθε $F \geq 0$ απλή. Επιλέγουμε ακολουθία $F_n \geq 0$ απλών που να αυξάνουν στη F. Τότε οι $U_T F_n$ είναι απλές μη αρνητικές που αυξάνουν στην $U_T F$ και άρα

$$\int U_T F dm_1 = \lim_{n \to \infty} \int U_T F_n dm_1 = \lim_{n \to \infty} \int F_n dm_2 = \int F dm_2$$

και έπεται το συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.1 *Έστω $p \geq 1$. Τότε $U_T L^p(X_2, \mathcal{B}_2, m_2) \subseteq L^p(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ και $\|U_T f\|_p = \|f\|_p \forall f \in L^p(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$. Ακόμη*

$$U_T L^p_{\mathbb{R}}(X_2, \mathcal{B}_2, m_2) \subseteq L^p_{\mathbb{R}}(X_1, \mathcal{B}_1, m_1).$$

Απόδειξη

Έστω $f \in L^p(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$. Θέτουμε $F(x) = |f(x)|^p$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα.

4.4 Επαναληπτικότητα

Θεώρημα 4.2 (Θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincare) *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας και $T : X \mapsto X$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Έστω $E \in \mathcal{B}$ με $m(E) > 0$. Τότε σχεδόν όλα τα σημεία του E επιστρέφουν στο E άπειρες φορές κάτω από θετική δράση του T. Δηλαδή υπάρχει $F \subseteq E$ με $m(F) = m(E)$ ώστε για κάθε $x \in F$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $n_1 < n_2 < n_3 ...$ ώστε $T^{n_i}(x) \in F$ $\forall i$.*

Απόδειξη

Έστω $N \in \mathbb{N}$ και $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E$. Τότε το $\bigcap_{n=N}^{\infty} T^{-n}E$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του X που τέμνουν το E άπειρες φορές κάτω απο θετικές δυνάμεις του T. Συνεπώς το σύνολο $F = E \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ έχει σαν στοιχεία όλα τα σημεία του E που τέμνουν το E άπειρες φορές μέσω θετικών δυνάμεων του T. Αν $x \in F$ τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k ώστε $T^{n_i}(x) \in E, \forall i$. Για κάθε i έχουμε $T^{n_i}(x) \in F$ διότι $T^{n_j - n_i}(T^{n_i}x) \in E$ $\forall j$. Μένει να δείξουμε ότι $m(F) = m(E)$.

Επειδή $T^{-1}E_N = E_{N+1}$ και ο T είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο έχουμε ότι $m(E_N) = m(E_{N+1})$. Άρα $m(E_N) = m(E_0)$ $\forall N$. Όμως $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ...$ και άρα $m(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = m(E_0)$. Συνεπάγεται ότι $m(F) = m(E \cup E_0) = m(E)$ αφού $E \subset E_0$.

4.5 Εργοδικότητα

Ορισμός 4.3 *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας. Ένας μετασχηματισμός T του $(X, \mathcal{B}, m)$ που είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο λέγεται εργοδικός αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $T^{-1}B = B$ ισχύει ότι $m(B) = 0$ η $m(B) = 1$.*

Θεώρημα 4.3 *Αν ο $T : X \mapsto X$ είναι αναλλοίωτος ως προς το μέτρο του χώρου πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, m)$ τότε τα ακόλουθα ισοδύναμα*

(α) Ο T είναι εργοδικός.

(β) Τα μόνα στοιχεία $B \in \mathcal{B}$ με $m(T^{-1}B \triangle B) = 0$ είναι αυτά για τα οποία $m(B) = 0$ η $m(B) = 1$.

(γ) Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $m(A) > 0$ έχουμε $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.

(δ) Για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$ με $m(A) > 0, m(B) > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $m(T^{-n}A \cap B) > 0$.

ήματος μπορείνα αντικατασταθεί απο την 'Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $m(A) > 0$ και κάθε φυσικό N έχουμε $m(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A) = 1$' διότι $\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A = T^{-N}(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A)$. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστίσουμε την ιδιότητα (δ) με την 'Για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$ με $m(A) > 0, m(B) > 0$ και κάθε φυσικό N υπάρχει $n > N$ ώστε $m(T^{-n}A \cap B) > 0$'. Ένας τρόπος για να σκεφτόμαστε τα (β) και (γ) του προηγούμενου θεωρήματος είναι να λέμε ότι η τροχιά του $\{T^{-n}A\}_{n=0}^{\infty}$ είναι πυκνή με την έννοια του μέτρου.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτιρίζει την εργοδικότητα σε σχέση με τον τελεστή U_T.

Θεώρημα 4.4 *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας και $T : X \mapsto X$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(α) *Ο T είναι εργοδικός.*

(β) *Για κάθε f μετρήσιμη με $(f \circ T)(x) = f(x)\ \forall x \in X$ έχουμε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.*

(γ) *Για κάθε f μετρήσιμη με $(f \circ T)(x) = f(x)$ έχουμε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.*

(δ) *Για κάθε $f \in L^2(m)$ με $(f \circ T)(x) = f(x)\ \forall x \in X$ έχουμε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.*

(ε) *Για κάθε $f \in L^2(m)$ με $(f \circ T)(x) = f(x)$ σχεδόν παντού έχουμε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.*

Απόδειξη

Προφανώς έχουμε $(\gamma) \Rightarrow (\beta)$,$(\beta) \Rightarrow (\epsilon)$, $(\epsilon) \Rightarrow (\delta)$ και $(\gamma) \Rightarrow (\epsilon)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ και $(\delta) \Rightarrow (\epsilon)$. Έστω λοιπόν ότι ο T είναι εργοδικός και f μετρήσιμη με $f \circ T = f$ σχεδόν παντού. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι πραγματική (αλλιώς την αναλύουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος). Για $k \in \mathbb{Z}$ και $n > 0$ ορίζουμε

$$X(k, n) = \{x\ : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{(k+1)}{2^n}\}.$$

Έχούμε ότι

$$T^{-1}X(k, n) \triangle X(k, n) \subset \{x\ : (f \circ T)(x) \neq f(x)\ \}$$

και άρα $m(T^{-1}X(k, n) \triangle X(k, n)) = 0$. Από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $m(X(k, n) = 0$ ή $m(X(k, n)) = 1$.

Για n σταθεροποιημένο το σύνολο $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X(k, n) = X$ είναι ξένη ένωση και άρα υπάρχει μοναδικό $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $m(X(k_n, n)) = 1$. Ορίζουμε $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(k_n, n)$ οπότε έχουμε ότι $m(Y) = 1$. Παρατηρούμε ακόμη ότι αν $x, y \in Y$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x) = f(y)$. Αποδεικνύουμε τώρα την κατεύθυνση $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$. Έστω $E \in \mathcal{B}$ με $T^{-1}E = E$. Τότε αφού $\chi_E \in L^2(m)$ και $(\chi_E \circ T)(x) = \chi_E(x), \forall x \in X$ έπεται ότι η χ_E είναι σταθερή ς .π . Άρα $\chi_E = 0$ ς.π ή $\chi_E = 1$ ς.π . Οπότε $m(E) = \int \chi_E dm = 0$ ή $m(E) = \int \chi_E dm = 1$. Δηλαδή ο T είναι εργοδικός.

Παρατηρήσεις

(1) Στο προηγούμενο θεώρημα ισχύει παρόμοιος χαρακτηρισμός σε σχέση με τις $L^p(m), p \geq 1$ συναρτήσεις αφού $\chi_E \in L^p$. Ακόμη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πραγματικούς L^p χώρους.

(2) Ένας άλλος χαρακτηρισμός της εργοδικότητας είναι ο εξής :για κάθε $f : X \mapsto \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $f(Tx) \geq f(x)$ ς.π έχουμε ότι η f είναι σταθερή ς.π. Πράγματι αν $f(Tx) \geq f(x)$ ς.π και f δεν ήταν σταθερή ς.π τότε θα υπήρχε $c \in \mathbb{R}$ ώστε το $\{x \in X\ : f(x) \geq c\ \}$ να έχει μέτρο θετικό και μικρότερο του 1. Όμως $T^{-1}B \supseteq B$ και άρα $m(T^{-1}B \triangle B) = 0$. Συνεπώς $m(B) = 0$ ή $m(B) = 1$. Αντίφαση

Θεώρημα 4.5 *Έστω X συμπαγής μετρκός χώρος , $\mathcal{B}(X)$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X και έστω m μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathcal{B}(X))$ ώστε $m(U) > 0$ για κάθε U ανοιχτό μη κενό. Αν ο $T : X \mapsto X$*

είναι μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο και εργοδικός τότε σχεδόν κάθε στοιχείο του X έχει πυκνή τροχιά.

Απόδειξη

Έστω $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ βάση της τοπολογίας του X. Τότε το $\{T^n(x)\ : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο X αν και μόνον αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} U_n$. Επειδή $T^{-1}(\bigcup_{k=0}^{\infty}) T^{-k} U_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} U_n$ και ο T διατηρεί το μέτρο και είναι εργοδικός έπεται ότι $m(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} U_n) = 0$ ή 1. Όμως το $\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} U_n$ είναι ανοιχτό μη κενό και άρα από την υπόθεση $m(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} U_n) = 1$.

4.6 Το εργοδικό θεώρημα

Ο στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το εξής θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα

Θεώρημα 4.6 (Θεώρημα εργοδικότητας του Birkhoff) *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος σ πεπερασμένου μέτρου , $T : (X, \mathcal{B}, m) \mapsto (X, \mathcal{B}, m)$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο και $f \in L^1(m)$. Τότε το $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία $f^* \in L^1(m)$. Ακόμη $f^* \circ T = f^*$ σχεδόν παντού και άν $m(X) < \infty$ τότε $\int f^* dm = \int f dm$.*

Παρατηρήσεις Αν ο T είναι εργοδικός τότε η f^* είναι σταθερή σχεδόν παντού και άρα αν $m(X) < \infty$ τότε $f^* = \frac{1}{m(X)} \int f dm$ σχεδόν παντού. Αν ο $(X, \mathcal{B}, m)$ είναι χώρος πιθανότητας και ο T είναι εργοδικός έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f dm, \forall f \in L^2(m)$ σχεδόν παντού.

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος εργοδικότητας θεωρουμε το εξής παράδειγμα. Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας και T αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Έστω $E \in \mathcal{B}$. Αν $x \in X$ και $i \in \mathbb{N}$ τότε $T^i x \in E$ αν και μόνον αν $\chi_E T^i(x) = 1$. Άρα ο αριθμός των στοιχείων του $\{x, Tx, ..., T^{n-1}x\}$ που είναι στο E είναι ίσος με $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_E T^k(x)$. Ο σχετικός αριθμός των στιχείων του $\{x, ..., T^{n-1}\}$ στο E είναι $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_E T^i(x)$ και αν ο T είναι εργοδικός τότε το προηγούμενο συγκλίνει στο $m(E)$ σχεδόν παντού. Άρα η τροχιά σχεδόν κάθε στοιχείου του X τέμνει το E με ασυμπτωτική σχετική συχνότητα $m(E)$.

Θεώρημα 4.7 (Μεγιστικό εργοδικό θεώρημα) *Έστω $U : L^p_{\mathbb{R}}(m) \mapsto L^p_{\mathbb{R}}(m)$ φραγμένος θετικός τελεστής με $\|U\| \geq 1$. Έστω $N > 0$ ακαίρεος και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(m)$. Ορίζουμε $f_0 = 0, f_n = f + Uf + U^2 f + ... + U^{n-1} f$ για $n \geq 1$ και $F_N = \max_{0 \leq n \leq N} f_n \geq 0$. Τότε $\int_{\{x : F_N(x) > 0\}} f dm \geq 0$.*

Απόδειξη

Προφανώς $F_N \in L^1(m)$. Για κάθε $0 \leq n \leq N$ έχουμε $F_N \geq f_n$ και άρα $UF_N \geq Uf_n$ απο τη θετικότητα του T. Έπεται ότι $UF_N + f \geq f_{n+1}$. Συνεπάγεται ότι αν $F_N(x) > 0$ τότε

$$\begin{aligned} UF_N(x) + f(x) &\geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n(x) \\ &= \max_{0 \leq n \leq N} f_n(x) \\ &= F_N(x). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $f \geq F_N - UF_N$ στο $A = \{x \, : F_N(x) > 0\}$, έτσι

$$\begin{aligned} \int_A f dm &\geq \int_A F_N dm - \int_A UF_N dm \\ &= \int_X F_N dm - \int_A UF_N dm \quad \text{αφού } F_N = 0 \text{ στο } X \setminus A. \\ &\geq \int_X F_N dm - \int_X UF_N dm \quad \text{διότι } F_N \geq 0 \text{ και άρα } UF_N \geq 0. \\ &\geq 0 \quad \text{επειδή } \|U\| \leq 1. \end{aligned}$$

Πόρισμα 4.1 *.Έστω $T : X \mapsto X$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Αν $g \in L^1_{\mathbb{R}}(m)$ και*

$$B_\alpha = \{x \in X : \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) > \alpha\}$$

τότε

$$\int_{B_\alpha \cap A} gdm \geq \alpha m(B_\alpha \cap A)$$

αν $T^{-1}A = A$ και $m(A) < \infty$.

Απόδειξη

Έστω αρχικά ότι $A = X$ οπότε $m(X) < \infty$. Θεωρούμε τον τελεστή $U_T : L^1(m) \mapsto L^1(m)$ με $U_T f = f \circ T$. Έστω $f = g - \alpha, f_n(x) = g(x) + ... + g(T^{n-1}x) - n\alpha$. Έτσι αν $F_n = \max_{1\leq k\leq n} f_k$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : F_n(x) > 0\} = B_\alpha$. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $\int_{B_\alpha} fdm \geq 0$. Δηλαδή $\int_{B_\alpha} fdm \geq \alpha m(B_\alpha)$. Για την γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το παραπάνω στον $T\mid_A$ και παίρνουμε $\int_{B_\alpha \cap A} gdm \geq \alpha m(B_\alpha \cap A)$.

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα εργοδικότητας του Birkhoff

Απόδειξη θεωρήματος 4.6

Υποθέτουμε αρχικά ότι $m(X) < \infty$. Θεωρώντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι πραγματική. Ορίζουμε $f^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ και
$f_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$. Αν $\alpha_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ τότε $((n+1)/n)\alpha_{n+1}(x) - \alpha_n(Tx) = f(x)/n \to 0$ και άρα $f^* \circ T = f^*, f_* \circ T = f_*$. Θα αποδείξουμε ότι $f^* = f_*$ σχεδόν παντού και ότι ανήκουν στον L^1.

Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $E_{\alpha,\beta} = \{x \in X : f_*(x) < \beta \text{ και } \alpha < f^*(x)\}$. Παρατηρούμε ότι $\{x : f_*(x) < f^*(x)\} = \bigcup\{E_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\ \beta < \alpha\}$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $m(E_{\alpha,\beta}) = 0\ \forall \beta < \alpha$. Είναι προφανές ότι $T^{-1}E_{\alpha,\beta} = E_{\alpha,\beta}$ και αν ορίσουμε $B_\alpha = \{x \in X \mid \sup_{n\geq 1}(\frac{1}{n})\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) > \alpha\}$ τότε $E_{\alpha,\beta} \cap B_\alpha = E_{\alpha,\beta}$. Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} fdm = \int_{E_{\alpha,\beta}\cap B_\alpha} fdm \geq \alpha m(E_{\alpha,\beta}).$$

Συνεπώς $\int_{E_{\alpha,\beta}} fdm \geq \alpha m(E_{\alpha,\beta})$. Αντικθιστώντας τα f, α, β με $-f, -\beta, -\alpha$ αντίστοιχα παίρνουμε ότι (αφού $(-f)^* = -f_*$)

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} fdm \leq \beta m(E_{\alpha,\beta}).$$

Άρα $\alpha m(E_{\alpha,\beta}) \leq \beta m(E_{\alpha,\beta})$. Έπεται ότι αν $\beta < \alpha$ τότε $m(E_{\alpha,\beta}) = 0$. Άρα μένει να δείξουμε ότι $f^* \in L^1$. Ορίζουμε $g_n(x) = |\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))|$. Τότε $\int g_n dm \leq \int |f|dm$ και άρα από το λήμμα Fatou έπεται ότι $\int |f^*|dm = \int \limsup_{n\to\infty} g_n = \int \liminf_{n\to\infty} g_n \leq \liminf \int g_n dm \leq \int |f|dm$. Άρα μένει να δείξουμε ότι $\int fdm = \int f^* dm$ όταν $m(X) < \infty$. Έστω $D_k^n = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f^*(x) < \frac{(k+1)}{n}\}$ όπου $k \in \mathbb{Z}\ n \geq 1$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $D_k^n \cap B_{(\frac{k}{n})-\epsilon} = D_k^n$. Πράγματι αν $x \in D_k^n$ τότε έπειδή $\frac{k}{n} \leq f^*(x)$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) > \frac{k}{n} - \epsilon$. Από το πόρισμα 4.1

$$\int_{D_k^n} fdm \geq \Big(\frac{k}{n} - \epsilon\Big) m(D_k^n) \text{ και άρα } \int_{D_k^n} fdm \geq \frac{k}{n} m(D_k^n).$$

Έπεται ότι

$$\int_{D_k^n} f^* dm \leq \frac{k+1}{n} m(D_k^n) \leq \frac{1}{n} m(D_k^n) + \int_{D_k^n} f dm$$

και αθροίζοντας ως προς κ παίρνουμε $\int_{D_k^n} f^* dm \leq (\frac{m(X)}{n}) + \int_X f dm$. Επειδή αυτή ισχύει για όλα τα $n \geq 1$ συνεπάγεται ότι $\int_{D_k^n} f^* dm \leq \int_{D_k^n} f dm$. Τώρα αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ανισότητα στην $-f$ παίρνουμε $\int_X (-f)^* dm \leq \int_X -f dm$. Συνεπώς $\int_X f_* dm \geq \int_X f dm$. Όμως $f_* = f^*$ σχεδόν παντού οπότε $\int_X f^* dm = \int_X f dm$ και η απόδειξη είναι πλήρης στην περίπτωση που $m(X) < \infty$. Έστω τώρα ότι $m(X) = \infty$. Εάν δείξουμε ότι $m(E_{\alpha,\beta}) < \infty$ όταν $\beta < \alpha$ θα έχουμε το ζητούμενο επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα. Έστω αρχικά ότι $\alpha > 0$. Παίρνουμε $C \in \mathcal{B}$ ώστε $C \subseteq E_{\alpha,\beta}$ και $m(C) < \infty$. Ορίζουμε $h = f - \alpha\chi_C \in L^1(m)$. Έπεται από το μεγιστικό εργοδικό θεώρημα ότι

$$\int_{\{x:H_N(x)>0\}} (f - \alpha\chi_C) \geq 0$$

για κάθε $N \geq 1$ (η συνάρτηση H_N είναι αυτή που αντιστοιχεί στην h). Επειδή $C \subseteq E_{\alpha,\beta} \subseteq \bigcup_{N=0}^{\infty} \{x : H_N(x) > 0\}$ έπεται ότι $\int_X |f| \geq \alpha m(C)$. Συνεπώς $m(C) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X |f| dm$ για κάθε $C \in \mathcal{B}$ με $C \subseteq E_{\alpha,\beta}$ και $m(C) < \infty$. Αφού ο X είναι σ- πεπερασμένος έπεται ότι $m(E_{\alpha,\beta}) < \infty$. Αν $\alpha \leq 0$ τότε $\beta < 0$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο με $-f, -\beta$ στη θέση των f, α.

Πόρισμα 4.2 . *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας και $T : X \mapsto X$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Ο T είναι εργοδικός εαν και μόνον εάν $\forall A, B \in \mathcal{B}$ ισχύει*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i} A \cap B) \to 0.$$

Απόδειξη

Έστω ότι ο T είναι εργοδικός και $A, B \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $f = \chi_A$. Από το Θεώρημα εργοδικότητας έπεται ότι $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)) \to 0$ σχεδόν παντού. Πολλαπλασιάζοντας με χ_B παίρνουμε

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x))\chi_B \to m(A)\chi_B \text{ σχεδόν παντού },$$

και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει το συμπέρασμα. Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η παραπάνω ιδιότητα σύγκλισης. Αν $E \in \mathcal{B}$ με $T^{-1}E = E$ τότε θέτοντας $A = B = E$ έπεται ότι $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(E) \to m(E)^2$ και άρα $m(E) = 0$ ή $m(E) = 1$.

4.7 Μίξη

Ορισμός 4.4 *Έστω T μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο σε χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, m)$.*

(i) *Ο T είναι ασθενώς - μικτός αν $\forall A, B \in \mathcal{B}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |m(T^{-i} A \cap B) - m(A)m(B)| = 0.$$

(ii) *Ο T είναι ισχυρά - μικτός αν $\forall A, B \in \mathcal{B}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} m(T^{-n}A \cap B) = m(A)m(B).$$

Θεώρημα 4.8 *Έστω $\{\alpha_n\}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha_i| = 0.$

(ii) *Υπάρχει $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ πυκνότητας μηδέν ώστε* $\lim\limits_{n\notin J}\alpha_n = 0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha_i|^2 = 0.$

Απόδειξη

Για $M \subseteq \mathbb{Z}^+$ συνβολίζουμε με $\alpha_M(n)$ τον πληθάριθμο του $\{0, ..., n-1\} \cap M$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $J_k = \{n \in \mathbb{Z}^+ \ : |\alpha_n| \geq \frac{1}{k}\}$, $k > 0$. Τότε $J_1 \subset J_2 \subset ...$ και κάθε J_k έχει πυκνότητα μηδέν αφού

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha_i| \geq \frac{1}{n}\frac{1}{k}\alpha_{J_k}(n).$$

Έπεται ότι υπάρχουν ακέραιοι $0 = l_0 < l_1 < l_2 ...$ ώστε για κάθε $n \geq l_k$,

$$\frac{1}{n}\alpha_{J_{k+1}}(n) < \frac{1}{k+1}.$$

Θέτουμε $J = \bigcup_{k=0}^{\infty}[J_{k+1} \cap [l_k, l_{k+1}]$. Ας δείξουμε ότι το J έχει πυκνότητα μηδέν. Επειδή $J_1 \subset J_2 \subset ...$ αν $l_k \leq n < l_{k+1}$ έχουμε ότι

$$J \cap [0, n) = [J \cap [0, l_k)] \cup [J \cap [l_k, n)] \subset [J \cap [0, l_k)] \cup [J_{k+1} \cup [0, n)],$$

και άρα

$$\frac{1}{n}\alpha_J(n) \leq \frac{1}{n}[\alpha_{J_k}(l_k) + \alpha_{J_{k+1}}(n) \leq \frac{1}{n}[\alpha_{J_k}(n) + [\alpha_{J_{k+1}}(n)] \leq \frac{1}{k}\frac{1}{k+1},$$

οπότε το $\frac{1}{n}\alpha_J(n) \to 0$. Συνεπώς το J έχει πυκνότητα μηδέν. Αν $n > l_k$ και $n \notin J$ τότε $n \notin J_{k+1}$ και άρα $|\alpha_n| < \frac{1}{k+1}$. Συνεπώς

$$\lim_{n\notin J}|\alpha_n| = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω ότι $|\alpha_n| < K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει N_ϵ τέτοιο ώστε αν $n > N_\epsilon, n \notin J$ τότε $|\alpha_n| < \epsilon$ και τέτοιο ώστε για $n > N_\epsilon$ να ισχύει $\alpha_J(n)/n < \epsilon$. Τότε για $n > N_\epsilon$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha_i| = \frac{1}{n}\Big[\sum_{i\in J\cap\{0,1,\ldots,n-1\}}|\alpha_i| + \sum_{i\notin J\cap\{0,1,\ldots,n-1\}}|\alpha_i|\Big] < \frac{K}{n}\alpha_J(n) + \epsilon < (K+1)\epsilon.$$

Όμοια αποδυκνείεται η ισοδυναμία των (ii) και (iii).

Θεώρημα 4.9 *Έστω T μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο σε χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, m)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) *Ο T είναι ασθενώς -μικτός.*

(ii) *Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία $A, B \in \mathcal{B}$ υπάρχει υποσύνολο ακεραίων $J(A,B)$ ώστε*

$$\lim_{n \notin J(A,B)} m(T^{-n}A \cap B) = m(A)m(B).$$

(iii) *Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία $A, B \in \mathcal{B}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |m(T^{-i}A \cap B) - m(A)m(B)|^2 = 0.$$

Απόδειξη

Έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα με $\alpha_n = m(T^{-n}A \cap B) - m(A)m(B)$.

Ορισμός 4.5 *Ο χώρος πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, m)$ έχει αριθμήσιμη βάση αν υπάρχει ακολυθία $\{B_k\} \subseteq \mathcal{B}$ τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $B \in \mathcal{B}$ να υπάρχει k με $m(B \triangle B_k) < \epsilon$.*

Θεώρημα 4.10 *Έστω $(X, \mathcal{B}, m)$ χώρος πιθανότητας με αριθμήσιμη βάση και $T : X \mapsto X$ μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο. Τότε ο T είναι ασθενώς -μικτός αν υπάρχει $J \subseteq \mathbb{Z}^+$ πυκνότηατς μηδέν ώστε για οποιαδήποτε δύο στοιχεία $A, B \in \mathcal{B}$ να ισχύει*

$$\lim_{n \notin J} m(T^{-n}A \cap B) = m(A)m(B).$$

Απόδειξη

Έστω $\{B_k\}$ αριθμήσιμη βάση του $(X, \mathcal{B}, m)$. Θέτουμε

$$\alpha_n = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|m(T^{-n}B_i \cap B_j) - m(B_i)m(B_j)|}{2^{i+j}}.$$

Αφού ο T είναι ασθενώς -μικτός έχουμε ότι $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_l \to 0$ και άρα από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει υποσύνολο J του $\mathbb{Z}^+$ ώστε $\lim_{n\notin J} \alpha_n = 0$. Άρα έπεται ότι $\lim\limits_{n\notin J} m(T^{-n}B_i \cap B_j) = m(B_i)m(B_j)$. Το συμπέρασμα προκύπτει με ένα απλο επιχείρημα προσέγγισης.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.11 *Έστω T μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο σε χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, m)$.*

(ι) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) *Ο T είναι εργοδικός.*

(2) *Για κάθε $f, g \in L^2(m)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} (U_T^i f, g) = (f,1)(g,1)$.*

(3) *Για κάθε $f, g \in L^2(m)$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} (U_T^i f, f) = (f,1)(1,f)$.*

(ii) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) *Ο T είναι ασθενώς μικτός.*

(2) *Για κάθε $f, g \in L^2(m)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} |(U_T^i f, g) - (f,1)(1,g)| = 0$.*

(3) *Για κάθε* $f \in L^2(m)$ *έχουμε* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}|(U_T^i f,f)-(f,1)(1,f)|=0.$

(4) *Για κάθε* $f \in L^2(m)$ *έχουμε* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}|(U_T^i f,f)-(f,1)(1,f)|^2=0.$

(iii) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) *Ο* T *είναι ισχυρά μικτός*

(2) *Για κάθε* $f,g \in L^2(m), \lim_{n\to\infty}(U_T^n f,g)=(f,1)(1,g)$

(3) *Για κάθε* $f \in L^2(m), \lim_{n\to\infty}(U_T^n f,f)=(f,1)(1,f).$

(3) *Για κάθε* $f \in L^2(m)$ *έχουμε* $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,f)=(f,1)(1,f).$

Κεφάλαιο 5

GAUSSIAN ΜΕΤΡΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ HILBERT ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Όπως είναι γνωστό το Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ δίνεται απο την

$$dp_t = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/2t} dx$$

όπου dx είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι αυτό το μέτρο έχει νόημα και σε έναν χώρο Hilbert ([18],[16]).

5.1 Hilbert-Schimdt και trace class τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A : H \mapsto H$ συνεχής γραμμικός τελεστής.

Θεώρημα 5.1 *Έστω $\{e_n\}, \{d_n\}$ δύο οποιεσδήποτε ορθοκανονικές βάσεις του H, τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Ae_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Ad_n|^2$$

Απόδειξη
Παρατηρούμε ότι $|Ae_n|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} | < Ae_n, d_m > |^2$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_n |Ae_n|^2 &= \sum_n \sum_m | < Ae_n, d_m > |^2 = \sum_n \sum_m | < e_n, A^* d_m > |^2 \\ &= \sum_m \sum_n | < e_n, A^* d_m > |^2 = \sum_m |A^* d_m|^2 \end{aligned} .$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε δύο ορθοκανονικές βάσεις του H. Έτσι θέτοντας $d_m = e_m$ έπεται ότι για κάθε ορθοκανονική βάση $\{d_n\}$ έχουμε ότι

$$\sum_m |Ad_m|^2 = \sum_m |A^* d_m|^2.$$

Άρα έπεται ότι

$$\sum_n |Ae_n|^2 = \sum_m |A^* d_m|^2 = \sum_m |Ad_m|^2.$$

Ορισμός 5.1 *Ένας γραμμικός και συνεχής τελεστής στον H καλείται Hilbert-Schmidt τελεστής αν για κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του H έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} |Ae_n|^2 < \infty$. Η Hilbert-Schmidt νόρμα του A ορίζεται να είναι*

$$\|A\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |Ae_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Το επόμενο Θεώρημα είναι απλό και παραλείπουμε την απόδειξη του.

Θεώρημα 5.2 *Ισχύουν τα επόμενα*

(α) $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$.

(β) $\|\alpha A\|_2 = |\alpha| \|A\|_2$ *όπου* $\alpha \in \mathbb{C}$

(γ) $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$.

(δ) $\|A\| \leq \|A\|_2$ *όπου* $\|A\|$ *είναι η συνήθης νόρμα του* A.

(ϵ) $\|AB\|_2 \leq \|A\| \, \|B\|_2$ *και* $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|$.

Συμβολίζουμε με $L_{(2)}(H)$ την συλλογή όλων των Hilbert-Schmidt τελεστών στον H.

Θεώρημα 5.3 *Έστω A συμπαγής τελεστής στον H. Τότε ο A μπορεί να γραφεί στην μορφή $A = UT$ όπου ο T είναι θετικά ορισμένος συμπαγής τελεστής και U ισομετρία ορισμένη στη εικόνα του T.*

Απόδειξη

Θεωρούμε τον τελεστή $B = A^*A$. O B είναι συμπαγής και θετικά ορισμένος αφού

$$< Bx, x >=< A^*Ax, x >=< Ax, Ax > \geq 0.$$

Συνεπώς αφού ο B είναι επιπλέον αυτοσυζυγής έπεται ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ τέτοια ώστε

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n$$

όπου $\lambda_n \geq 0$ και $\lambda_n \to 0$. Ορίζουμε τον τελεστή

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Προφανώς ο T είναι συμπαγής και θετικά ορισμένος. Ορίζουμε ακόμη τον τελεστή $U : R(T) \mapsto H$ με

$$U(Tx) = Ax.$$

Παρατηρούμε ότι $\|Ax\|^2 =< Bx, x >= \|Tx\|^2$. Άρα αν $Tx = 0$ τότε $Ax = 0$ και συνεπώς ο U είναι καλά ορισμένος. Επιπλέον $A = UT$ και

$$|U(Tx)|^2 = |Ax|^2 = |Tx|^2.$$

Άρα ο U είναι ισομετρία και η απόδειξη είναι πλήρης.

Ορισμός 5.2 *Ενας συμπαγής τελεστής A στον H θα λέγεται tace class τελεστής αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ όπου λ_n είναι οι ιδοτιμίες του $\sqrt{A^*A}$.*

Συμβολίζουμε με $L_{(1)}(H)$ το σύνολο των tace class τελεστών στον H. Εφοδιάζουμε τον $L_{(1)}(H)$ με την εξής νόρμα

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα την απόδειξη του οποίου παραλείπουμε.

Θεώρημα 5.4 *Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες*

(α) $\|\alpha A\|_1 = |\alpha| \|A\|_1, \alpha \in \mathbb{C}$

(β $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(γ) $\|A\| \leq \|A\|_1$

(δ) Αν $A, B \in L_{(2)}(H)$ *τότε* $AB \in L_{(1)}(H)$ *και*

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$$

(ε) $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$

(ζ) $\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|_1, \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|$

(η) $\|A^*\| = \|A\|_1$

Πόρισμα 5.1 *Κάθε trace class τελεστής μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο δύο Hilbert-Shcmidt τελεστών.*

5.2 Μέτρα Borel σε χώρους Hilbert

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και έστω $\mathcal{B}$ η $\sigma-$άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του H. Ένα μέτρο Borel στον H είναι ένα μέτρο στον $(H, \mathcal{B})$.

Ορισμός 5.3 *Έστω μ μέτρο Borel στον H. Ο τελεστής συνδιακύμανσης S_μ του μ ορίζεται απο την*

$$\langle S_\mu x, y\rangle = \int_H \langle x, y\rangle\overline{\langle x, z\rangle} d\mu(z). \quad x, y \in H$$

Παρατήρηση Ο S_μ ενδέχεται να μήν υπάρχει. Αν υπάρχει είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος.

Ορισμός 5.4 *Ενας τελεστής στον H καλείται $S-$τελεστής αν ανήκει στον $L_{(1)}(H)$ είναι θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ το σύνολο των $S-$τελεστών.*

Θεώρημα 5.5 *Ισχύει $\int_H |x|^2 d\mu(x) < \infty$ αν και μόνον αν $S_\mu \in \mathcal{S}$. Μάλιστα το ίχνος του S_μ είναι ίσο με $\int_H |x|^2 d\mu(x)$.*

Απόδειξη

Έστω ότι $S_\mu \in \mathcal{S}$ και έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του H. Από το θώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_H |x|^2 d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_H [\langle x, e_1\rangle^2 + ... + \langle x, e_n\rangle^2] d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle S_\mu e_j, e_j\rangle = \text{ίχνος } S_\mu < \infty.$$

Αντίστροφα έστω ότι $\int \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$. Αποδεικνύουμε κατα αρχήν ότι ο τελεστής συνδιακύμανσης υπάρχει. Παρατηρούμε ότι

$$|\int_H \langle x, z\rangle\overline{\langle y, z\rangle} d\mu(z)| \leq |x||y| \int_H |z|^2 d\mu(z),$$

δηλαδή η διγραμμική μορφή $\int_H \langle x, z\rangle\overline{\langle y, z\rangle} d\mu(z)$ είναι συνεχής. Από το θεώρημα Lax-Millgram συνεπάγεται ότι υπάρχει $S_\mu \in L(H)$ έτσι ώστε

$$\langle S_\mu x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle\overline{\langle y, z\rangle} d\mu(z).$$

Είναι προφανές ότι ο S_μ είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος. Με ένα επιχείρημα ανάλογο του αρχικού έπεται ότι

$$\text{ίχνος } S_\mu = \int_H |x|^2 d\mu(x).$$

Ορισμός 5.5 *Έστω μ μέτρο Borel στον H. Ο μέσος του μ είναι ένα στοιχείο $m_\mu \in H$ τέτοιο ώστε*

$$\langle m_\mu, x\rangle = \int_H \langle z, x\rangle d\mu(z), \quad x \in H.$$

Παρατήρηση Εν γένει τέτοιο στοιχείο δέν υπάρχει. Αν όμως $\int |x| d\mu(x) < \infty$ τότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει και μάλιστα $|m_\mu| \leq \int_H |x| d\mu(x)$.

Θα δούμε τώρα πώς ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier ενός μέτρου πιθανότητας σε έναν χώρο Hilbert.

Ορισμός 5.6 *Έστω μ μέτρο πιθανότητας σε έναν χώρο Hilbert H .Ο μετασχηματισμός Fourier του μ (ή χαρακτιριστική συνάρτηση) είναι η συνάρτηση $\hat{\mu} : H \mapsto H$ με*

$$\hat{\mu}(x) = \int_H e^{itx} d\mu(t).$$

Είναι έυκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρηση $\hat{\mu}$ είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_1, x_2, ..., x_n \in H, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \hat{\mu}(x_j - x_k)\overline{c_k} \geq 0.$$

Πρόταση 5.1 *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον H. Η συνάρτηση $\phi = \hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή το μ είναι κανονικό μέτρο υπάρχει $r > 0$ ώστε $\mu(B(0,r)) > 1 - \frac{\epsilon}{4}$. Τότε

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &\leq \int_H |e^{i\langle x,z\rangle} - e^{i\langle y,z\rangle}| d\mu(z) \\
&= \Big(\int_{B_r} + \int_{\complement B_r}\Big)|e^{i\langle x,z\rangle} - e^{i\langle y,z\rangle}| d\mu(z) \\
&\leq \int_{B_r} |\langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle| d\mu(z) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq r|x-y| + \epsilon/2
\end{aligned}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Σημείωση Αποδυκνείεται ότι αν μ_1, μ_2 είναι μέτρα πιθανότητας στον H με ίδιες χαρακτηριστικές συναρτήσεις τότε $\mu_1 = \mu_2$.

5.3 Gaussian μέτρα σε χώρους Hilbert

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Μία τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ έχει κατανομή Gauss αν υπάρχουν $m \in \mathbb{R}$ και $q \geq 0$ ώστε για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ να ισχύει

$$P(X \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} \int_B \exp\Big(\frac{-(x-m)^2}{2q}\Big) dx,$$

όπου στη περίπτωση $q = 0$ θεωρούμε ότι $X = m$ σχεδόν σίγουρα. Με έναν ευθύ υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(X) = m$$

και

$$\mathbb{E}(X - m)^2 = q.$$

Ακόμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy βρίσκουμε

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = \exp(imt + 1/2qt^2).$$

Αντίστροφα το θεώρημα μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier λέει ότι μία τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση της παραπάνω μορφής είναι Gaussian . Τα παραπάνω γενικέυονται σε χώρο Hilbert ως εξής

Ορισμός 5.7 *Έστω H πραγματικός χώρος Hilbert. Μία τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \mapsto H$ έχει κατανομή Gauss αν για κάθε $x \in H$ η τ.μ $\langle X, x\rangle$ ακολουθεί την κανονική κατανομή. Ανάλογα ένα Gaussian μέτρο στον H έιναι ένα μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in H$ η τυχαία μεταβλητή $\langle x, .\rangle$ να έχει κανονική κατανομή. Μία τέτοια τυχαία μεταβλητή θα λέγεται κεντρική αν έχει μέση τιμή 0.*

Θεώρημα 5.6 *Μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στον H είναι κανονική τότε και μόνον τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι της μορφής*

$$\mathbb{E}(e^{i\langle X,x\rangle}) = \exp\Big(\langle m, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle\Big), \forall x \in H$$

όπου $m \in H$ και Q είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός τελεστής του H. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η μέση τιμή της X είναι m και Q είναι ο τελεστής συνδιακύμανσης.

Ορισμός 5.8 *Ένας πεπερασμένος αριθμός τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ έχει κοινή κανονική κατανομή αν για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ η τυχαία μεταβλητή $\sum_{i=1}^n t_i X_i$ έχει κανονική κατανομή.*

5.4 Μιγαδικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 5.9 *[16]. Μία μιγαδική τυχαία μεταβλητή ζ έχει Gaussian κατανομή αν οι $Re(\zeta), Im(\zeta)$ έχουν κοινή κανονική κατανομή. Η ζ θα λέγεται κεντρική αν $\mathbb{E}(\zeta) = 0$ και συμμετρική αν $\zeta = \lambda\zeta$ κατα κατανομή για κάθε λ με $|\lambda| = 1$.*

Η κατανομή μιας τέτοιας μεταβλητής καθορίζεται από τις πέντε πραγματικές παραμέτρους

$$\mathbb{E}(\Re\zeta), \mathbb{E}(\Im\zeta), Var(\Re\zeta), Var(\Im\zeta), Cov(\Re\zeta, Im\zeta)$$

η ισοδύναμα από τις $\mathbb{E}(\zeta)$ την

$$\mathbb{E}(\zeta - \mathbb{E}(\zeta))^2 = Var(\Re\zeta) - Var(\Im\zeta) + 2iCov(\Re\zeta, \Im\zeta)$$

και την πραγματική

$$\mathbb{E}|\zeta - \mathbb{E}\zeta|^2 = Var(\Re\zeta) + Var(\Im\zeta).$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι απλή συνέπεια των ορισμών και των ιδιοτήτων των κανονικών κατανομών.

Θεώρημα 5.7 *Έστω ζ μιγαδική Gaussian τυχαία μεταβλητή. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(ι) Η ζ είναι συμμετρική Gaussian μιγαδική τυχαία μεταβλητή.

(ιι) $\mathbb{E}\zeta = \mathbb{E}\zeta^2 = 0$.

(ιιι) $\mathbb{E}\zeta = 0, \mathbb{E}(\Re\zeta)^2 = \mathbb{E}(\Im\zeta)^2$, και $\mathbb{E}(\Re\zeta\Im\zeta) = 0$.

(ιιι) $\zeta = \xi + i\eta$ όπου ξ και η είναι ανεξάρτητες κεντρικές κανονικές πραγματικές τυχαίες μεταβλητές με την ίδια διασπορά.

Ορισμός 5.10 *Έστω $(\Omega.\mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ μετρήσιμη. Θα λέμε ότι η f έχει μιγαδική συμμετρική κατανομή αν το πραγματικό και φανταστικό της μέρος έχουν κοινή κανονική κεντρική κατανομή.*

Ορισμός 5.11 *Έστω H διαχωρίσιμος μιγαδικός χώρος Hilbert. Ένα Gaussian μέτρο στον H είναι ένα μέτρο πιθανότητας μ στον H τέτοιο ώστε για κάθε $x \in H$ η συνάρτηση $f_x : y \mapsto \langle y, x\rangle$ να έχει συμμετρική κανονική μιγαδική κατανομή.*

Ένα τέτοιο μέτρο είναι κεντρικό

$$\int_H \langle x, y\rangle d\mu(y) = \int_H f_x(y) d\mu(y) = \int_H yd(f_x(m))(y).$$

Ακόμη

$$\int_H \|z\|^2 < \infty.$$

Συμφωνα με όσα έχουμε δει ένα Gaussian μέτρο καθορίζεται από τον τελεστή συνδιακύμανσης.

5.5 Gaussian χώροι

Ορισμός 5.12 *Μία οικογένεια τυχαίων μεταλητών $\{f_\alpha\}$ λέγεται Gaussian αν η γραμμική θήκη του $\{f_\alpha\}$ αποτελείται απο Gaussian τυχαίες μεταβλητές.*

Έστω $f_1 \dots f_n$ Gaussian οικογένεια και $\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_n)^t \in \mathbb{R}^n$ τότε η Gaussian μεταβλητή $f = \sum_{k=1}^n \gamma_k f_k$ έχει ροπή

$$\mathbb{E}(f^2) = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_j \gamma_k \mathbb{E}(f_j f_k) = (Q\gamma, \gamma),$$

όπου ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός. Μάλιστα $Q = \{\mathbb{E}(f_j \mathbb{E}(f_k)\}_{j,k}$. Είναι απλό να δειχθεί ότι ο Q είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν οι $f_1 \dots f_n$ είναι ανεξάρτητες. Στην περίπτωση αυτή η κοινή κατανομή των $f_1 \dots f_n$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και μάλιστα η πυκνότητα $P_{f_1 \dots f_n}$ του $\mu_{f_1 \dots f_n}$ δίνεται απο την

$$P_{f_1 \dots f_n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\det Q)^{\frac{1}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(Q^{-1}x, x)\Big).$$

Από την προηγούμενη ισότητα συνεπάγεται ότι αν g_1, g_2 είναι τυχαίες μεταβλητές που ανήκουν στην ίδια Gaussian οικογένεια τότε αυτές είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν είναι ορθοκανονικές.

Ορισμός 5.13 *Ενας κλειστός υπόχωρος $\mathcal{G}$ του πραγματικού χώρου $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ θα λέγεται Gaussian χώρος αν αποτελείται απο Gaussian τυχαίες μεταβλητές.*

Λήμμα 5.1 *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Gaussian τυχαίων μεταβλητών και έστω $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ στον $L^2(\Omega, \Sigma, P)$, τότε η f είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή.*

Απόδειξη

Περνώντας σε υποακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα Lebesugè έπεται ότι

$$\mathbb{E}e^{itf} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itf_n} = \exp\Big(-\frac{t^2}{2} \lim_{n\to\infty} \sigma_{f_n}^2 \Big),$$

και άρα από θεώρημα η f είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή .

Έστω $\mathcal{G}$ Gaussian υπόχωρος του $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, P)$ και θεωρούμε μόνο Gaussian μεταβλητές στο $\mathcal{G}$. Είναι λοιπόν λογικό να απαιτήσουμε ότι η Σ είναι η ελάχιστη $\sigma-$άλγεβρα για την οποία όλες οι συναρτήσεις στην $\mathcal{G}$ είναι μετρήσιμες. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα. Για την απόδειξη δείτε στο [20].

Θεώρημα 5.8 $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, P) = span\{g^k : \ g \in \mathcal{G} \ k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με κάποιες παρατηρήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Στα ακόλουθα υποθέτουμε ότι ο T είναι ένας τελεστής στον χώρο Hilbert H ο οποίος είναι φραγμένος και αναλλοίωτος ως προς ένα Gaussian μέτρο . Έστω $\mathcal{B}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του H. Ως γνωστον έχουμε την επαγόμενη ισομετρία

$$U_T : L^2(H, \mathcal{B}, m) \longrightarrow L^2(H, \mathcal{B}, m)$$

$$f \longrightarrow [z \mapsto f \circ T(z)].$$

Αυτή δεν είναι απαραίτητα επί. Για να γίνει ο U_T επί αρκεί να αλλάξουμε την σ-άλγεβρα στη δεξιά πλευρά. Η $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $\Re\langle ., x\rangle : z \mapsto \Re\langle z, x\rangle$, και θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}'$ που παράγεται από τις συναρτήσεις $\Re\langle ., T^*x\rangle, x \in H$. Τότε η $\mathcal{B}'$ περιέχεται στην $\mathcal{B}$ και οι συναρτήσεις της μορφής $z \mapsto p(\Re\langle z, T^*x_1\rangle, \dots, \Re\langle z, T^*x_r\rangle)$, όπου το p είναι πολυώνυμο r μεταβλητών στον $\mathbb{C}^r$ και $x_1 \dots x_r$ είναι m διανύσματα στον H, σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $L^2(H, \mathcal{B}', m)$.

Επειδή η συνάρτηση $\langle ., x\rangle$ είναι Gaussian έχουμε ότι $\langle ., x\rangle^k \in L^2(H, \mathcal{B}, m)$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως έχουμε ότι η απεικόνιση

$$U_T : L^2(H, \mathcal{B}, m) \longrightarrow L^2(H, \mathcal{B}', m)$$

$$f \longmapsto f \circ T$$

είναι ισομετρία και επί. Δεν θα εισάγουμε κάποιον νέο συμβολισμό για αυτόν τον τελεστή.

5.6 Ο ρόλος του μοναδιαίου σημειακού φάσματος.

Ορισμός 5.14 *Έστω T φραγμένος γραμμικός τελεστής σε χώρο Hilbert, και έστω σ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{T}$. Θα λέμε ότι ο T έχει $\sigma-$παράγων σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με μοναδιαιές ιδιοτιμές αν για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{T}$ με $\sigma(A) = 1$ οι ιδιόχωροι $Ker(T - \lambda I)$ για $\lambda \in A$ παράγουν πυκνό υπόχωρο του H. Όταν υπάρχει ένα τέτοιο μέτρο πιθανότητας σ το οποίο είναι συνεχές (δηλαδή $\sigma(\lambda) = 0$) τότε θα λέμε ότι ο T έχει τέλειο παράγον σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με μοναδιαίες ιδιοτιμές.*

Ο στόχος μας στα επόμενα είναι να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.9 *Αν ο T έχει τέλειο παράγον σύνολο σε σχέση με μοναδιαίες ιδιοτιμές τότε ο T είναι συχνά υπερκυκλικός. Ακόμη ο T είναι ασθενώς τοπολογικά μεικτός, δηλαδή για κάθε U, V ανοιχτά μη κενά υποσύνολα του H υπάρχει ακολουθία ακεραίων n_k πυκνότητας 1 ώστε $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ για κάθε k.*

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα χρειαστούμε όσα έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα. Ξεκινάμε με ένα απλό θεώρημα που μας δείχνει γιατί μας είναι χρήσιμη η εργοδική θεωρία.

Θεώρημα 5.10 *Έστω T φραγμένος τελεστής στον H. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο m στον $(H, \mathcal{B}, m)$ με φορέα το H έτσι ώστε ο $T : (H, \mathcal{B}, m) \mapsto (H, \mathcal{B}, m)$ να είναι μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο και εργοδικός. Τότε ο T είναι συχνά υπερκυκλικός τελεστής και μάλιστα το σύνολο $FHC(T)$ έχει m-μέτρο 1.*

Απόδειξη

Έστω $\Big(U_p\Big)_{p\geq 1}$ αριθμίσιμη βάση μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων του X. Από το Θεώρημα εργοδικότητας του Birkhoff έπεται ότι για m-σχεδόν κάθε x έχουμε

$$\frac{1}{N}\#\{k \leq N\ : T^k x \in U_p\} \longrightarrow m(U_p).$$

Επειδή $m(U_p) > 0$ έπεται το συμπέρασμα.

5.7 Παραδείγματα τελεστών με τέλειο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων ως προς τις μοναδιαίες ιδιοτιμές

Παράδειγμα 1 Έστω B ο τελεστής μετατόπισης προς τα πίσω στον ℓ^2. Τότε για κάθε ω με $|\omega| > 1$ ο τελεστής ωB έχει τέλειο παράγον σύνολο ιδιοδιανυσματων ως προς τις μοναδιαίες ιδιτιμές. Πράγματι εύκολα βλέπουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του ωB αν και μόνον αν $|\lambda| < |\omega|$ και μάλιστα σε αυτήν την περίπτωση ο ιδιόχωρος $Ker(\omega B - \lambda I)$ είναι μονοδιάστατος και παράγεται από το

$$x_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n e_n.$$

Έστω σ το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesguè στον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T} : d\sigma = \frac{1}{2\pi} d\theta$, και έστω A υποσύνολο του $\mathbb{T}$ μέτρου 1. Θα αποδείξουμε ότι η γραμμική θήκη των ιδιόχωρων $\{Ker(\omega B - \lambda I)\}_{\lambda \in A}$ είναι πυκνή. Έστω γραμμικό συναρτησιακό που αναπαριστάται απο το x και τέτοιο ώστε $\langle x, x_\lambda \rangle = 0$ για κάθε $\lambda \in A$. Τότε η αναλυτική συνάρτηση Φ που ορίζεται στο $D(0, |\omega|)$ με

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n$$

μηδενίζεται στο A που έχει σημείο συσσώρευσης (διότι είναι υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{T}$). Από την αρχή αναλυτικής συνέχισης έπεται ότι $x = 0$ και το αποτέλεσμα είναι εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach.

Θα δούμε και ένα δέυτερο περάδειγμα τελεστή με τέλειο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων ως προς τις μοναδιαίες ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 2 Έστω Ω ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και H ένας μη τετριμένος χώρος Hilbert αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω ώστε οι τελεστές $f \mapsto f(z)$ να είναι φραγμένοι για κάθε $z \in \Omega$. Έστω ϕ αναλυτική στο Ω ώστε για κάθε $f \in H$ να έχουμε $\phi f \in H$. Αυτός ο πολλαπλασιαστής ορίζει έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή M_ϕ μέσω της

$$M_\phi(f) = f\phi$$

για $f \in H$. Ο Shapiro είχε αποδείξει ότι αν η ϕ είναι μη σταθερή ώστε το $\phi(\Omega)$ να τέμνει τον μοναδιαίο δίσκο τότε ο M_ϕ^* είναι υπερκυκλικός. Ισχύει ότι κάθε τέτοιος πολλαπλασιαστικός τελεστής έχει τέλειο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με τις μοναδιαίες ιδιοτιμές. Για την απόδειξη θεωρούμε έμα μή κενό ανοιχτό τόξο γ που περιέχεται στο $\overline{\phi(\Omega)} \cap \mathbb{T}$, όπου με $\overline{\phi(\Omega)}$ συμβολίζουμε το σύνολο των μιγαδικών συζυγών του $\phi(\Omega)$. Έστω σ το κανονικοποιημένο μέτρο μήκους περιορισμένο στην γ

$$d\sigma = \frac{1}{l(\gamma)} \chi_\gamma d\theta.$$

Για κάθε $z \in \Omega$ έστω k_z ο επαγόμενος πυρήνας που ορίζεται απο την $f(z) = \langle f, k_z \rangle$ για κάθε $f \in H$. Τότε $M_\phi^* k_z = \overline{\phi(z)} k_z$. Άρα κάθε στοιχείο της γ είναι ιδιοτιμή του M_ϕ^*. Έστω ότι το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{T}$ μέτρου 1 και f συνάρτηση στον H με $\langle f, k_z \rangle = 0$ όποτε το $\overline{\phi(z)}$ τέμνει το A. Τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \phi^{-1}(\overline{A})$ (όπου $\overline{A}$ είναι το συζυγές του A). Επειδή το $\phi^{-1}(\overline{A})$ είναι υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του Ω έπεται ότι έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω και άρα η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.

5.8 Κατασκευή Gaussian μέτρων σε χώρο Hilbert

Πρόταση 5.2 *Έστω T φραγμένος τελεστής στον H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) Υπάρχει μη εκφυλισμένο Gaussian μέτρο (δηλαδή ο φορέας του είναι όλος ο χώρος) το οποίο είναι αναλλοίωτο απο τον T.

(2) Υπάρχει φραγμένος αυτοσυζυγής και θετικός τελεστής S που είναι traceclass και επί ώστε

$$TST^* = S.$$

(3) Υπάρχει χώρος Hilbert G, συμπαγής τελεστής $K : G \mapsto H$ ο οποίος είναι Hilbert-Schmidt με πυκνή εικόνα , $VV^* = \iota d$ ώστε

$$(F) \qquad TK = KV$$

Απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2)Από την υπόθεση το $T(m)$ (δηλαδή $T(m)(A) = m(T^{-1}A)$) είναι Gaussian μέτρο στον H. Έστω $S^{'}$ ο τελεστής συνδιακύμανσης. Τότε

$$\langle S^{'}x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle\overline{\langle x, z\rangle}d(T(m))(z) = \int_H \langle T^*x, z\rangle\overline{\langle T^*y, z\rangle}dm(z) = \langle TST^*x, y\rangle$$

Έπεται ότι $S^{'} = TST^*$ και το συμπέρασμα τώρα είνα προφανές.

(2) $\Rightarrow$ (1) Θεωρούμε το Gaussian μέτρο m στον H με τελεστή συνδιακύμανσης S(συγκεκριμένα αυτο με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(x) = e^{\frac{-i}{2}\langle Sx,x\rangle}$). Έπεται όπως προηγουμένως ότι ο S είναι ο τελεστής συνδιακύμανσης του $T(m)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Θέτουμε $S = KK^*$. Ο S είναι φραγμένος αυτοσυζυγής θετκός τελεστής. Επειδή ο K έχει πυκνή εικόνα είναι επί και αφού ο K^* είναι Hilbert-Schmidt έχουμε ότι ο S είναι trace class.

(2) $\Rightarrow$ (3) Θεωρούμε την πολική αναπαράσταση του $(T\sqrt{S})^*$. Δηλαδή έναν αυτοσυζυγή τελεστή P και μία ισομετρία W έτσι ώστε $(T\sqrt{S})^* = WP$. Θέτουμε $V = W^*$. Αφού ο P είναι η μοναδική θετική ρίζα του $(T\sqrt{S})(T\sqrt{S})^* = S, P = \sqrt{S}$ και $\sqrt{S}T^* = V^*\sqrt{S}$. Άρα $T\sqrt{S} = \sqrt{S}V$. Θέτοντας $K\sqrt{S}$ έχουμε ότι ο K ικανοποιεί την εξίσωση F. Είναι άμεσο ότι ο K είναι επί και $Hilbert - Schmidt$ και επειδή ο K είναι αυτοσυζυγής συνεπάγεται ότι επιπλέον έχει πυκνή εικόνα.

Λήμμα 5.2 *Έστω T φραγμένος τελεστής στον H. Υπάρχει ακολουθία Borel μετρήσιμων και φραγμένων $E_i : \mathbb{T} \mapsto B_H, i \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $\lambda \in \mathbb{T}$ η γραμμική θήκη της ακολουθίας διανυσμάτων $\Big(E_i(\lambda)\Big)_{i\geq 1}$ να είναι πυκνή στο $Ker(T - \lambda I)$. Με B_H συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα του H.*

Απόδειξη

Έστω (x_i) πυκνή ακολουθία διανυσμάτων στη μοναδιαία σφαίρα. Για $\lambda \in \mathbb{T}$ συμβολίζουμε με P_λ την ορθογώνια προβολή επί του $Ker(T - \lambda I)$. Ορίζουμε $E_i : \mathbb{T} \mapsto H$ με $E_i(\lambda) = P_\lambda(x_i)$. Η E_i είναι Borel απεικόνιση του $\mathbb{T}$(αυτο προκύπτει απο το ότι η $\lambda \mapsto \|P_\lambda x\|$ είναι άνω ημισυνεχής για κάθε $x \in H$). Η κλειστή γραμμική θήκη των διανυσμάτων $E_i(\lambda)$ είναι ακριβώς ο ιδιόχωρος $Ker(T - \lambda I)$ διότι αν $x \in Ker(T - \lambda I)$ είναι ορθογώνιο σε κάθε $P_\lambda(x_i)$ τότε το x είναι ορθογώνιο στην εικόνα του P_λ.

Πρόταση 5.3 *Έστω ότι ο T έχει σ-τέλειο παράγον σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με μοναδιαίες ιδιοτιμές. Τότε ο T ικανοποιεί την εξίσωση (F). Ειδικότερα ο T έχει μη εκφυλισμένο αναλλοίωτο Gaussian μέτρο.*

Απόδειξη

Θεωρούμε την ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων $(E_i)_{i\geq 1}$ όπως στο προηγούμενο λήμμα. Έστω V η απεικόνιση στον $\bigoplus\limits_{i\geq 1} L^2(\mathbb{T},\sigma) = \{(f_i)_{i\geq 1} \ : \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^2 < \infty\}$ που ορίζεται από την

$$V\Big(\bigoplus_{i\geq 1}\Big) f_i(\lambda) = \bigoplus_{i\geq 1} \lambda f_i(\lambda).$$

Δηλαδή ο V δρα σαν πολλαπλασιασμός με λ σε κάθε συνιστώσα $L^2(\mathbb{T},\sigma)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο V είναι unitary τελεστής. Έστω τώρα $K : \bigoplus\limits_{i\geq 1} L^2(\mathbb{T},\sigma) \mapsto H$ ο τελεστής που ορίζεται από την

$$K\Big(\bigoplus_{i\geq 1} f_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda)E_i(\lambda)d\sigma(\lambda).$$

Με μια εφαρμογή της ανισότητας $Holder$ έχουμε ότι ο K είναι καλά ορισμένος. Ακόμη ο K είναι $Hilbert-Schmidt$ τελεστής. Κάθε $K_i : L^2(\mathbb{T},\sigma) \mapsto H$ που απεικονίζει το f_i στο $\int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda)E_i(\lambda)d\sigma(\lambda)$ είναι ένας τελεστής με τετραγωνικά ολοκληρώσιμο πυρήνα. Θα αποδείξουμε ότι ο K έχει πυκνή εικόνα. Έστω λοιπόν $x \in H$ τέτοιο ώστε $\langle x, K(\bigoplus\limits_{i\geq 1} f_i)\rangle = 0$ για κάθε ακολουθία $(f_i)_{i\geq 1}) \in \bigoplus\limits_{i\geq 1} L^2(\mathbb{T},\sigma)$. Παίρνοντας όλα τα στοιχεία της ακολουθίας να είναι 0 εκτός από ένα συμπεραίνουμε ότι για κάθε $i \geq 1$ και κάθε $f \in L^2(\mathbb{T},\sigma)$ έχουμε

$$\langle x, \int_{\mathbb{T}} f(\lambda)E_i(\lambda)d\sigma(\lambda)\rangle = 0.$$

Έπεται ότι $\langle x, E_i(\lambda)\rangle = 0$ σ σχεδόν παντού το οποιό σημαίνει ότι το x είναι κάθετο στο $Ker(T-\lambda I)$ εκτός από ένα σύνολο σ μέτρου μηδέν. Από την υπόθεση ότι ο T έχει σ παράγον σύνολο ιδιοδιανυσμάτων δίνει $x = 0$. Άρα ο K έχει πυκνή εικόνα. Θα αποδείξουμε ότι ικανοποεείται η εξίσωση (F) για αυτή την επιλογή των K, V. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $E_i(\lambda) \in Ker(T-\lambda I)$ παίρνουμε για κάθε $(f_i)_{i\geq 1} \in \bigoplus\limits_{i\geq 1} L^2(\mathbb{T},\sigma)$,

$$\begin{aligned} TK\Big(\bigoplus_{i\geq 1} f_i\Big) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda)TE_i(\lambda)d\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda)\lambda E_i(\lambda)d\sigma(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \int_{\mathbb{T}} V\Big(\bigoplus_{i\geq 1} f_i\Big)(\lambda)E_i(\lambda)d\sigma(\lambda) = KV\Big(\bigoplus_{i\geq 1} f_i\Big). \end{aligned}$$

Πρόταση 5.4 *Έστω T φραγμένος τελεστής στον H τέτοιος ώστε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες ιδιοτιμές να παράγουν πυκνό υπόχωρο του H. Τότε ο T έχει μη εκφυλισμένο αναλλοίωτο Gaussian μέτρο.*

Απόδειξη

Για κάθε $i \geq 1$ επιλέγουμε ακολουθία $(\lambda_n^{(i)})_n$ μοναδιαίων ιδιοτιμών ώστε $\overline{sp}\ [E_i(\lambda_n^i), i \geq 1, n \geq 0] = H$. Ορίζουμε

$$\sigma = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\lambda_n^{(i)}} \Big)$$

όπου C σταθερά ώστε το σ να είναι μέτρο πιθανότητας. Τότε ο Τ έχει σ-παράγον σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με μοναδιαίες ιδιοτιμές και το συμπέρασμα προκύπτει απο το προηγούμενο Θεώρημα.

Παρατήρηση Έστω ότι ο Τ έχει αναλλοίωτο μέτρο μ ώστε το

$$\int_H \|z\|^2 d\mu(z)$$

να είναι πεπερασμένο και ο φορέας του μ να είναι όλος ο χώρος. Τότε ο Τ έχει μη εκφυλσμένο αναλλοίωτο Gaussian μέτρο. Πράγματι ορίζουμε τον τελεστή S στον H μέσω της

$$\langle Sx, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle \overline{\langle y, z\rangle} d\mu(z)\; x, y \in H.$$

Επειδή το μ έχει δεύτερη ροπή ο S είναι καλά ορισμένος, αυτοσυζυγής θετικός και trace-class. Έστω m το κανονικό μέτρο που ορίζεται απο τον S. Τότε

$$\langle TST^*x, y\rangle = \int_H \langle x, z\rangle \overline{\langle y, z\rangle} d(T(m))(z) = \langle Sx, y\rangle$$

και το m είναι Τ αναλλοίωτο. Άν $Sx = 0$ τότε $\langle x, z\rangle = 0$ m σχεδόν παντού. Άρα $x = 0$ και συνεπώς το m είναι μη εκφυλισμένο.

Πράδειγμα Έστω $B : \ell^2 \mapsto \ell^2$ ο τελεστής μετατόπισης με βάρος $(\omega_n)_{n\geq 1}$ όπου $(\omega_n)_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}(\omega_1 \dots \omega_n)(1/n)^{1/n} > 1,$$

και έστω ότι $\omega_0 = 1$. Συμβολίζουμε με $(e_n)_{n\geq 0}$ την συνήθη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Σε αυτή την περίπτωση το μοναδιαίο σημειακό φάσμα του B είναι απλό. Συγκεκριμένα ο ιδιόχωρος $Ker(T - \lambda I)$ παράγεται από το διάνυσμα

$$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\omega_0 \dots \omega_n} e_n$$

για $|\lambda| = 1$. Για $f \in L^2(\mathbb{T}, d\theta)$ ορίζουμε

$$K(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_o^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{in\theta}}{\omega_0 \dots \omega_n} \frac{d\theta}{2\pi} \Big) e_n$$

και για κάθε $x \in \ell^2$

$$K^* x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle x, e_n\rangle}{(\omega_0 \dots \omega_n)^2} e^{-in\theta}.$$

Άρα

$$Sx = KK^* x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\langle x, e_n\rangle}{(\omega_0 \dots \omega_n)^2} e_n,$$

και ο S είναι διαγώνιος τελεστής ως προς την βάση $(e_n)_{n\geq 0}$. Πρατηρούμε ότι η σειρά

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(\omega_0 \dots \omega_n)^2}$$

συγκλίνει και ότι ο S είναι trace cllas τελεστής. Αυτό σημαίνει ότι το Gaussian μέτρο που επάγεται απο τον S μπορεί να δοθεί ισοδύναμα σαν τον περιορισμό στον ℓ^2 του μέτρου γινόμενου $\mu = \otimes_{n\geq 0}\mu_n$, στον $\mathbb{C}^n$ όπου μ_n είναι το Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πίνακα συνδιακύμανσης

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(\omega_0\ldots\omega_n)^2} & \frac{1}{(\omega_0\ldots\omega_n)^2} & \ldots 0 \\ 0 & \frac{1}{(\omega_0\ldots\omega_n)^2}\ldots & \\ 0 & \ldots & \frac{1}{(\omega_0\ldots\omega_n)^2} \end{pmatrix}.$$

□

Ο στόχος μας είναι να δείξουμε το επόμενο Θεώρημα που δίνει ικανή συνθήκη για έναν τελεστή να έχει αναλλοίωτο μη εκφυλισμένο μέτρο Gauussian ως προς το οποίο είναι ασθενώς μικτός.

Θεώρημα 5.11 *Έστω ότι ο T έχει τέλειο παράγον σύνολο ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με μοναδιαίες ιδιοτιμές. Τότε υπάρχει μη εκφυλισμένο Gaussian μέτρο m στον H το οποιό είναι αναλλοίωτο από τον T έτσι ώστε ο $T : H \mapsto H$ να είναι ασθενώς μικτός.*

Λήμμα 5.3 *Έστω $x, y \in H$ όπου ο H όπως στο Θεώρημα 6.3 και $f_x = \langle ., x\rangle, f_y = \langle ., x\rangle$. Τότε*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^k f_x, f_y\rangle|^2 = 0$$

Απόδειξη

Έστω σ μέτρο στον H όπως στον ορισμό 6.1 και K, V όπως στην Πρόταση 6.2. Θέτουμε $S = K^*K$ και έχουμε

$$\langle U_T^k f_x, f_y\rangle = \int_H \langle T^k z, x\rangle\overline{\langle y, z\rangle} dm(z) = \langle T^k Sy, x\rangle.$$

Όμως $S = KK^*$ με $K^*T^* = V^*K^*$ και άρα $\langle U_T^k f_x, f_y\rangle = \langle V^k K^* y, K^* x\langle$. Ο V δρά στο ευθύ άθροισμα Hilbert $\bigoplus_{i\geq 1} L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ σαν πολλαπλασιασμός με λ σε κάθε συνιστώσα. Γράφοντας το K^*x σαν $(f_i)_{i\geq 1}$ με $\sum \|f_i\|^2 < \infty$ και το $K^*(y)$ σαν $(g_i)_{i\geq 1}$ με $\sum \|g_i\|^2 < +\infty$ έπεται ότι

$$\langle U_T^k f_x, f_y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{T}} \lambda^k g_i(\lambda)\overline{f_i(\lambda)} d\sigma(\lambda),$$

που είναι το άθροισμα της ακολουθίας των μη αρνητικών συντελεστών Fourier του

$$d\mu = \sum g_i \overline{f_i} d\sigma.$$

Όμως το $d\mu$ είναι συνεχές καθώς το $d\lambda$ είναι συνεχές και το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο.

Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους των $L^2(H, B, m)$ και $L^2(H, B', m)$ αντίστοιχα

$$\mathcal{G} = \bar{sp}^{L^2(H,B,m)}\Big[\langle ., x\rangle\ ; x \in H\Big],$$

$$\mathcal{G}' = \bar{sp}^{L^2(H,B',m)}\Big[\langle ., T^*x\rangle\ ; x \in H\Big].$$

Το ακόλουθο Λήμμα είναι συνέπεια του 5.3.

Λήμμα 5.4 *Για $f, g \in \mathcal{G}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^k f, g\rangle|^2 = 0.$$

Έστω $\mathcal{G}^n$ ο χώρος των ομογενών πολυωνύμων βαθμού n πάνω από το $\mathcal{G}$ με $\mathcal{G}^0 = \mathbb{C}$. Ο μετασχηματισμός Wick ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 5.15 *Αν η f είναι σταθερή τότε ο μετασχηματισμός Wick ορίζεται ως $: f = f$. Αν $f \in \mathcal{G}^n$ $n \geq 1$ τότε $: f = f - \mathcal{P}_n f$ όπου με $\mathcal{P}_n$ συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή στον $\bar{sp}^{L^2(H,B,m)}\Big[G^k : 0 \leq k \leq k-1\Big]$.*

Έπεται ότι

$$L^2(H,B,m) = \bigoplus_{k\geq 0} : \mathcal{G}^k : \quad \text{και} \quad L^2(H,B',m) = \bigoplus_{k\geq 0} : \mathcal{G}'^k :,$$

όπου τα παραπάνω είναι ευθέα ορθοκανονικά αθροίσματα. Θεωρούμε τώρα το Hilbert τανυστικό γινόμενο $\bigotimes_n \mathcal{G}$ και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle .,.\rangle_\otimes$ με

$$\langle g_1 \otimes ... \otimes g_n, h_1 \otimes ... \otimes h_n\rangle = \langle g_1, h_1\rangle ... \langle g_n, h_n\rangle.$$

Ο χώρος $\mathcal{G}^n_\odot$ είναι η εικόνα της προβολής

$$Sym : \bigotimes_n \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^n_\odot,$$

$$f_1 \otimes ... \otimes f_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\tau\in\Sigma_n} f_{\tau_1} \otimes ... \otimes f_{\tau_n}.$$

Ισχύει ότι

$$\langle Sym(g_1 \otimes ... \otimes g_n), Sym(h_1 \otimes ... \otimes h_n)\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\tau\in\Sigma_n} \langle g_{\tau_1}, h_1\rangle ... \langle g_{\tau_n}, h_n\rangle.$$

Για $f, g \in \mathcal{G}^n_\odot$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle,\rangle_\odot$ ως

$$\langle f, g\rangle_\odot = n! \langle f, g\rangle_\otimes.$$

Ορισμός 5.16 *Ο χώρος Fock $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ πάνω απο το $\mathcal{G}$ ορίζεται να είναι το εξής άθροισμα Hilbert*

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{G}^n_\odot,$$

όπου το $\mathcal{G}^n_\odot$ θεωρείται εφοδιασμένο με το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Παρατηρούμε ότι ο $L^2(H,B,m)$ μπορεί να ταυτιστεί με τον $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ μέσω της απεικόνισης

$$: \mathcal{G}^n \longrightarrow \mathcal{G}^n_\odot$$

$$: f_1 ... f_n \mapsto Sym(f_1 \otimes ... \otimes f_n),$$

η οποία επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε ισομετρία του $: \mathcal{G}^n :$ επί του $\mathcal{G}^n_\odot$. Επειδή

$$L^2(H,B,m) = \bigoplus_{k\geq 0} : \mathcal{G}^k :$$

έχουμε οτι

$$L^2(H, B, m) = \mathcal{F}(\mathcal{G})$$

και ακόμη

$$L^2(H, B^{'}, m) = \mathcal{F}(\mathcal{G}^{'}).$$

Ορισμός 5.17 *Έστω A contraction απεικόνιση του $\mathcal{G}$ στο $\mathcal{G}^{'}$. Ορίζουμε την Fock δύναμη του A $\mathcal{F}(A)$ απο το $\mathcal{F}(\mathcal{G}) \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{G}^{'})$:το n τανυστικό γινόμενο $\bigotimes_{n\geq 0} A$ του A δρά στο $\bigotimes_n \mathcal{G}$ και το απεικονίζει στο $\bigotimes_n \mathcal{G}^{'}$ μέσω της*

$$\Big(\bigotimes A\Big)(f_1 \otimes ... \otimes f_n) = Af_1 \otimes ... \otimes f_n.$$

Ορίζοντας $\mathcal{F}(A)$ τον περιορισμό στο $\mathcal{G}^n_{\odot}$ ο $\mathcal{F}(A)$ επεκτείνεται σε contraction στο $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ με εικόνα στο $\mathcal{F}(\mathcal{G}^{'})$. Αυτή την απεικόνιση την ονομάζουμε Fock δύναμη του A.

Ερχόμαστε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα. Υπενθυμίζουμε οτι ο T (που είναι μετασχηματισμός αναλλοίωτος ως προς το μέτρο) επάγει ισομετρία $U_T : L^2(H, B, m) \mapsto L^2(H, B^{'}, m)$ η οποία επιπλέον είναι επί και $U_T(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{'}$. Ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα που αναφέρουμε χωρις απόδειξη (δείτε [3]).

Λήμμα 5.5 . *Ο τελεστής $U_T : L^2(H, B, m) \mapsto L^2(H, B^{'}, m)$ μπορεί να ταυτιστεί με την Fock δύναμη του περιορισμού του στο $\mathcal{G}$ μέσω της ισομετρίας*

$$: f_1...f_n :\mapsto Sym(f_1 \otimes ... \otimes f_n)$$

απο το $: \mathcal{G}^n :$ επί του $\mathcal{G}^n_{\odot}$.

Απόδειξη Θεωρήματος 5.11

Παίρνουμε $f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \in \mathcal{G}$ και αποδεικνύουμε ότι ο μέσος

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^k(: f_1...f_r, : g_1...g_s :\rangle|$$

πάει στο μηδέν. Από το προηγούμενο Λήμμα αρκεί να δείξουμε ο μέσος

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle: U_T^k(f_1...f_r) :, : g_1...g_s :\rangle|$$

πάει στο μηδέν. Αν $r \neq s$ είναι ίσος με μηδέν. Για $r = s$ έχουμε ότι είναι ίσος με

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle Sym(U_T^k f_1 \otimes ... \otimes U_T^k f_r, Sym(g_1 \otimes ... \otimes g_r)\rangle_{\odot}| \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\sum_{\tau\in\Sigma_r} \langle U_T^k f_{\tau(1)}, g_1\rangle ... \langle U_T^k f_{\tau(r)}, g_r\rangle| \\
&\leq \sum_{\tau\in\Sigma_r}\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^k f_{\tau(1)}, g_1\rangle ... \langle U_T^k f_{\tau(r)}, g_r\rangle|\Big) \\
&\leq C\sum_{\tau\in\Sigma_r}\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^k f_{\tau(1)}, g_1\rangle|\Big) \to 0 \quad \text{απο το Λήμμα 5.4.}
\end{aligned}$$

Επειδή $L^2(H, B, m) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{G}^k$ έπεται ότι ο T είναι ασθενώς μικτός ως προς το m.

Αν στο προηγούμενο Θεώρημα απαιτήσουμε επιπλέον συνθήκες για το μέτρο σ τότε έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.12 *Έστω οτι ο T έχει σ παράγων σύνολο ιδιοδιανυσμάτων ως προς τις μοναδιαίες ιδιοτιμές και επιπλέον το σ είναι Rajchman μέτρο (δηλαδή $\hat{\sigma}(n) \to 0$ καθώς $|n| \to \infty$). Τότε ο T επιδέχεται Gaussian μη εκφυλισμένο, αναλλοίωτο μέτρο m ώστε ο $T : (H, B, m) \mapsto (H, B, m)$ να είναι ισχυρά μικτός.*

Τελειώνουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.9. Το πρώτο μέρος προκύπτει από το Θεώρημα 5.11. Ο δέυτερος ισχυρισμός έπεται από τους χαρακτηρισμούς της ασθενής μίξης που δώσαμε στο κεφάλαιο της Εργοδικής θεωρίας.

Βιβλιογραφία

[1] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-388.

[2] F. Bayart, *Common hypercyclic vectors for composition operators*, J. Operator Theory **52** (2004), 353-370.

[3] F. Bayart and S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 5083-5117.

[4] F. Bayart and S. Grivaux, *Hypercyclicity and unimodular point spectrum* J. Funct. Anal. **226** (2005), 281-300.

[5] F. Bayart and E. Matheron, *How to get common umiversal vectors*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 553-580.

[6] J. P. Bes, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1801-1804.

[7] A. Bonilla and K. -G. Grosse-Erdmann, *Frequently hypercyclic operators and vectors*, Ergodic Theory Dynam. Systems **27** (2007), 383-404.

[8] P. S. Bourdon and N. S. Feldman, *Somewere dense orbits are everywere dense* Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 811-819.

[9] G. Costakis, *On a congecture of D. Herrero concerning hypercyclic operators* C. R. Acad. Sci. Paris **330** (2000), 179-182.

[10] G. Costakis and P. Mavroudis, *Common hypercyclic entire functions for multiples of differential operators*, Colloq. Math. **111** (2008), 199-203.

[11] G. Costakis and M. Sambarino, *Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors*, Adv. Math. **182** (2004), 278-306.

[12] R. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions* Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281-288.

[13] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[14] K. -G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345-381.

[15] D. Herrero, *Hypercyclic operators and chaos*, J. Operator theory **28** (1992), 93-102.

[16] S. Janson, *Gaussian Hilbert spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics, 129 , Cambridge University Press ,1997.

[17] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Dissertation, University of Toronto (1982).

[18] H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture notes in Mathematics, 463, Springer-Verlag, 1975.

[19] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families* J. Analyse. Math. **2**, (1952), 72-87.

[20] V. Peller, *Hankel operators and their applications*, Springer Monographs in Mathematics , Springer-Verlag , New York , 2003.

[21] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17-22.

[22] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[23] J. H. Shapiro, *Simple connectivity and linear chaos.* International Workshop on Operator Theory (Cefalu, 1997). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **56** (1998), 27-48.

[24] J. Shapiro, *Lectures on composition operators and analytic function theory*, Unpublished Lecture Notes, (www.math.msu.edu/ ˜shapiro).

[25] P. Walters, *An introduction to ergodic theory.* Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ix+250 pp.