

ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΟΥ ΗΧΟΥ ΣΕ
ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ
ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ
ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗΝ
ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ
ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια: Κοσκοβίτη Γεωργία

Οκτώβριος 2005

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Κατεύθυνση: Μαθηματική Προσομείωση και Τεχνικές Υπολογισμού
Τμήματα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Η μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του πανεπιστημίου Κρήτης τον Οκτώβριο 2005. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ.Μιχάλης Ταρούδακης, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω για την βοήθεια και την συμπαράστασή του κατά τη διάρκεια της εργασίας. Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι Μιχάλης Ταρουδάκης, Γιώργος Μακράκης και Γιώργος Κοσιώρης.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ.Μιχάλη Λάμπρου για τη βοήθεια και την συμπαράστασή του πριν και κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τμήμα της εργασίας πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της πρακτικής άσκησης του προγράμματος «ΘΑΛΑΤΤΑ» στην οποία συμμετείχα στο Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας. Το πρόγραμμα χρηματοδοτήθηκε από την Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας.

Την εργασία την αφιερώνω στην οικογένειά μου
και τους ευχαριστώ για την πολύτιμη στήριξή τους
κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
1.1	Διάρθρωση της εργασίας	8
2	Ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με ημιάπειρο πυθμένα	11
2.1	Εισαγωγή	11
2.2	Εξίσωση κύματος	11
2.3	Εξίσωση Helmholtz και οριακές συνθήκες	12
2.4	Έκφραση της λύσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων σε συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων	15
2.5	Συνεχές φάσμα	17
3	Ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με μη-επίπεδα σύνορα	21
3.1	Εισαγωγή	21
3.2	Θεωρία Συζευγμένων Ιδιομορφών	22
3.2.1	Το Πεδίο Ακτινοβολίας	23
3.2.2	Το Πεδίο Περίθλασης	26
4	Εφαρμογή σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα	35
4.1	Εισαγωγή	35
4.2	Το πρόβλημα	35
4.3	Αναπαράσταση της λύσης	37
4.4	Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων	40
4.4.1	Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του P_{rd}	40
4.4.2	Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του $P_d^{N,F}$	41
4.4.3	Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του P_d^I	43
4.5	Υπολογισμός των συντελεστών σύζευξης	45
4.6	Υπολογισμός των αγνώστων συντελεστών των αναπαραστάσεων	48

4.7	Υπολογισμός της απώλειας διάδοσης TL	50
5	Αριθμητικά αποτελέσματα	53
5.1	Εισαγωγή	53
5.2	Περίπτωση I	55
5.3	Περίπτωση II	58
5.4	Περίπτωση III	62
5.5	Περίπτωση IV	66
5.6	Περίπτωση V	70
6	Συμπεράσματα	75
6.1	Συγκρίσεις Αποτελεσμάτων	75
6.2	Συμπεράσματα	76
	Βιβλιογραφία	80

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η υποθαλάσσια ακουστική είναι ο ερευνητικός τομέας, στον οποίο μελετάται η διάδοση ενός ηχητικού κύματος το οποίο γεννάται στη θάλασσα. Τα ακουστικά κύματα είναι διαταραχή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που διαδίδονται στο εν λόγω μέσο. Το θαλάσσιο περιβάλλον μοντελοποιείται ως κυματοδηγός με σύνορα που γεωμετρικά αντιστοιχούν στην επιφάνεια και στον πυθμένα της θάλασσας. Ο πυθμένας μοντελοποιείται ως ρευστό ή ελαστικό ακουστικό μέσο με πεπερασμένο ή ημιάπειρο πάχος. Ο ήχος διαδίδεται σε ένα κυματοδηγό με διάφορους τρόπους ή ιδιομορφές (*modes*), τα χαρακτηριστικά των οποίων εξαρτώνται από τις ιδιότητες των κυματοδηγών. Τα απλούστερα προβλήματα της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα αφορούν διάδοση σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα, σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας. Πιο δύσκολα είναι τα προβλήματα της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα, όταν τα σύνορα παρουσιάζουν ανομοιογένειες (π.χ. ανυψώσεις-*sea mounts*) είτε στις δύο είτε στις τρεις διαστάσεις.

Αρκετοί ερευνητές ασχολήθηκαν με διάδοση του ήχου σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στον πυθμένα και συγκεκριμένα με την ύπαρξη μιας τοπικής ανύψωσης (*sea mount*) [1]-[8], χρησιμοποιώντας αναλυτικές ή αριθμητικές τεχνικές (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία, πεπερασμένες διαφορές κ.λ.π.). Συνήθης μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος, ιδίως στις δύο διαστάσεις είναι η των συζευγμένων ιδιομορφών (*Coupling Modes*) [1], [6]-[8], που θα ακολουθήσουμε και στην εργασία (Κεφάλαιο 3). Η παρούσα εργασία θα αναφερθεί σε πρόβλημα ακουστικής διάδοσης όταν τα σύνορα του κυματοδηγού παρουσιάζουν τοπική ανομοιογένεια τόσο στην επιφάνεια όσο και στον πυθμένα της θάλασσας. Σε ό,τι αφορά την επιφάνεια της θάλασσας, η παρουσία ανομοιογένειας μπορεί να αποδοθεί στην ύπαρξη πάγου. Πολλοί ερευνητές μέχρι τώρα έχουν ασχοληθεί με διάδοση του ήχου κάτω από πάγο [9]. Εάν σε μία θαλάσσια περιοχή υπάρχει κάλυψη με πάγο, η διάδοση του ήχου εξαρτάται σημαντικά από την φύση του και ειδικά από την ομαλότητα της κάτω πλευράς του πάγου. Πάγος που έχει πρόσφατα καταψυχθεί είναι λείος και η απώλεια είναι όμοια με νερό σε κατάσταση ηρεμίας. Παλιός πάγος

κάμπτεται "βίαια", οπότε για έναν τέτοιο πάγο η ταχύτητα μπορεί να είναι της τάξης των $10m$ ύψος.

Στην παρούσα εργασία μελετάται το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης στις δύο διαστάσεις και για απλούστευση του προβλήματος, η ανομοιογένεια στην επιφάνεια (πάγος) θα θεωρηθεί λεία. Επίσης, θα θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον παρουσιάζει αξονική συμμετρία (axially symmetric environment). Αυτό όπως θα δούμε επιτρέπει τη χρήση σημαντικά απλούστερων αριθμητικών αλγορίθμων και έτσι η επίλυση του προβλήματος είναι δυνατή με προγράμματα με ικανοποιητική ταχύτητα.

Γνωρίζουμε ότι το $3D$ πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε ένα $2D$ εάν οι παράμετροι του προβλήματος είναι σταθεροί κατά μήκος μιας γραμμικής πηγής ή το περιβάλλον είναι αξονικά συμμετρικό γύρω από μία σημειακή πηγή. Τυπικά, κάποιος υποθέτει ότι το περιβάλλον είναι *range independent*, δηλαδή οριζόντια στρωματοποιημένο [8] σε μία οριζόντια απόσταση μακριά από την πηγή και ο πυθμένας ομογενής για αρκετά μεγάλο βάθος. Έχοντας αυτές τις υποθέσεις, μπορούν να διατυπωθούν ακριβείς συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε το πρόβλημα να είναι πλήρως ορισμένο [6], [7]. Στο πρόβλημα που θα μελετήσουμε θα υποθέσουμε ότι το περιβάλλον παρουσιάζει σταθερές συναρτήσεις της απόστασης παραμέτρους τόσο κοντά στην πηγή όσο και μακριά από την ανομοιογένεια.

1.1 Διάρθρωση της εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 διατυπώνεται το πρόβλημα, η γεωμετρία και οι συνοριακές συνθήκες που το συνοδεύουν στην περίπτωση περιβάλλοντος αξονικής συμμετρίας αλλά γενικής γεωμετρίας. Στο ίδιο κεφάλαιο υπολογίζεται η ακουστική πίεση σε κυματοδηγό με ημιάπειρο πυθμένα και σταθερές συναρτήσεις της απόστασης παραμέτρους. Στο κεφάλαιο 3 υπολογίζεται η ακουστική πίεση σε κυματοδηγό με μη-επίπεδα σύνορα. Εδώ θα αναφερθούμε και στη θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών, η οποία είναι συνέχεια της θεωρίας των κανονικών ιδιομορφών. Στο κεφάλαιο 4 θα διατυπώσουμε και θα υπολογίσουμε την ακουστική πίεση σε περιβάλλον με καθορισμένη ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Θα υπολογιστούν οι συντελεστές σύζευξης, όπως επίσης και η ακουστική πίεση του προβλήματος. Στο κεφάλαιο 5 θα αναφερθούν αριθμητικά αποτελέσματα για διαφορετικά δεδομένα του προβλήματος συγκρίνοντάς τα μεταξύ τους. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 θα εξαχθούν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του προβλήματος.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Κεφάλαιο 2

Ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με ημιάπειρο πυθμένα

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε το πρόβλημα όπου έχουμε ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με ημιάπειρο πυθμένα. Αρχικά θα εξάγουμε την εξίσωση κύματος, στην οποία θα υπακούει η ακουστική πίεση. Στη συνέχεια, θα χωρίσουμε την χρονική από την χωρική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης και θα υπολογίσουμε το ακουστικό πεδίο χρησιμοποιώντας θεωρήματα αναπαράστασης και εκφράζοντάς την σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων. Επειδή το πρόβλημα που θα μελετηθεί αναφέρεται σε ημιάπειρο πυθμένα, η ακουστική πίεση θα αποτελείται από ένα διακριτό και ένα συνεχές φάσμα, όπως θα δούμε αναλυτικά στην Παράγραφο 2.5.

2.2 Εξίσωση κύματος

Η ακουστική εξίσωση προκύπτει από συνδυασμένη εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης είναι:

1. Η εξίσωση συνέχειας

$$-\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.1)$$

που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας.

2. Η εξίσωση του *Euler*

$$-\nabla P^{(1)} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.2)$$

που εκφράζει τη διατήρηση της ορμής.

3. Η καταστατική εξίσωση

$$P^{(1)} = g(\rho) \quad (2.3)$$

που συσχετίζει τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας.

Η εξίσωση που προκύπτει από γραμμικοποίηση των παραπάνω βασικών εξισώσεων καλείται γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση σε μέσο χωρίς απώλειες:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \nabla - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.4)$$

όπου Q είναι ο όρος της πηγής για την ακουστική εξίσωση, ρ_0 είναι η πυκνότητα όταν δεν έχουμε ακουστικό κύμα και $c(\mathbf{r}, t)$ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, η οποία συνήθως είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ακουστικά κύματα που προέρχονται από σημειακές αρμονικές πηγές, στις οποίες ο όρος της πηγής μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$-A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \exp^{-i\omega t} \quad (2.5)$$

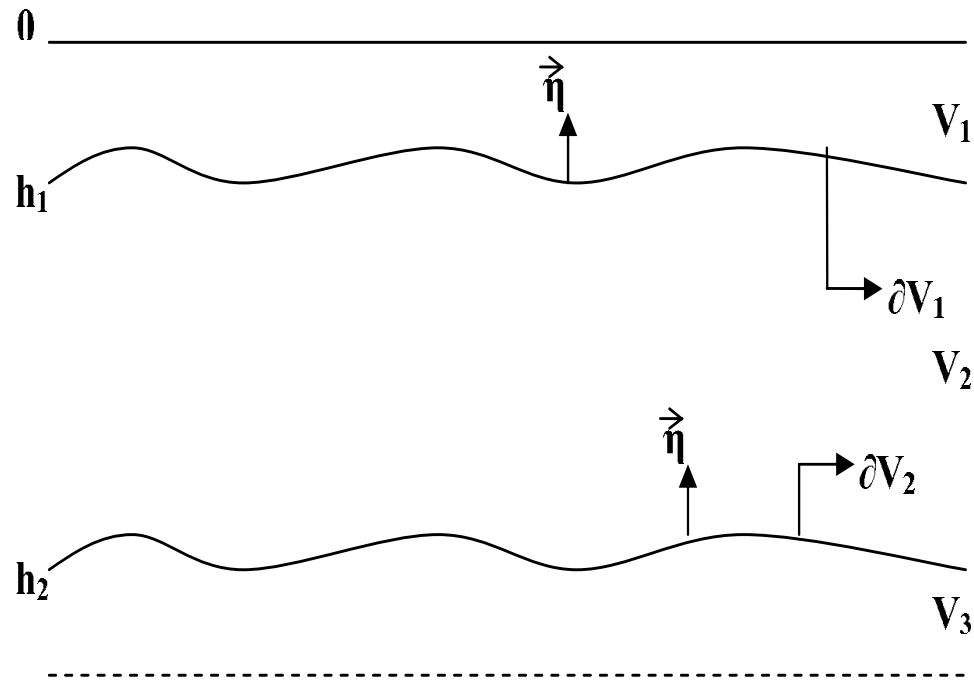
όπου $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ η συνάρτηση δέλτα, \mathbf{r}_0 το διάνυσμα θέσης της πηγής, A ο συντελεστής που εκφράζει την ισχύ της πηγής και $\omega = 2\pi f$ η κυκλική συχνότητα.

Επομένως καταλήγουμε στην ομογενή ακουστική εξίσωση αν η πηγή δεν περιέχεται στο εξεταζόμενο χωρίο και στην μη-ομογενή ακουστική εξίσωση αν η πηγή περιέχεται στο εξεταζόμενο χωρίο.

2.3 Εξίσωση Helmholtz και οριακές συνθήκες

Ζητείται ο υπολογισμός του ηχητικού πεδίου (ακουστική πίεση) που προέρχεται από μία σημειακή αρμονική πηγή συχνότητας f σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας με ημιάπειρο πυθμένα. Η γεωμετρία του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1. Τα όρια ανάμεσα στο νερό, στην επιφάνεια και στο ίζημα δεν είναι επίπεδα αλλά παρουσιάζουν ανωμαλία. Η ανωμαλία αυτή μπορεί να είναι τυχαία ή να έχει συγκεκριμένη μορφή, όπως π.χ. πάγο συγκεκριμένου σχήματος στην επιφάνεια ή ανύψωση συγκεκριμένου σχήματος στον πυθμένα (όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3). Η ανωμαλία στην επιφάνεια εκτείνεται σε βάθος h_1 και η ανωμαλία του πυθμένα ορίζεται από το βάθος h_2 . Η ηχητική πηγή βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας του προβλήματος και σε βάθος z_0 ενώ ένας δέκτης βρίσκεται σε τυχαία απόσταση (r, z) . Με V_i όπου $i = 1, 2, 3$

συμβολίζουμε τα χωρία που δημιουργούνται από τις ανομοιογένειες. Η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό και στο ίζημα μπορεί να μεταβάλλονται με την απόσταση, είναι όμως σταθερές σε κάθε χωρίο αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, με ρ_i συμβολίζουμε την πυκνότητα που αντιστοιχεί στο χωρίο V_i όπου $i = 1, 2, 3$. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την πίεση P σε κάθε στρώμα. Με P_i συμβολίζουμε την πίεση που αντιστοιχεί στο χωρίο V_i όπου $i = 1, 2, 3$.



Σχήμα 2.1: Περιβάλλον με τυχαία ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα.

Κάτω από τις συνθήκες αυτές η ακουστική πίεση που οφείλεται σε μία σημειακή αρμονική πηγή σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, που είναι κατάλληλο για αυτή τη γεωμετρία, δίδεται από την σχέση:

$$\Delta P(r, z) + k^2(r, z)P(r, z) = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - z_0) \quad (2.6)$$

όπου

$$k(r, z) = \frac{\omega}{c(r, z)} \quad (2.7)$$

ο αριθμός κύματος και Δ ο τελεστής ∇^2 . Σημειώνεται, ότι εφόσον θεωρηθεί σταθερή πυκνότητα σε κάθε στρώμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση 2.6 ορίζεται σε κάθε στρώμα χωριστά, ώστε να μην απαιτείται εισαγωγή της πυκνότητας στην εξίσωση.

Για τον πλήρη καθορισμό του προβλήματος απαιτείται η επιβολή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Η επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$) απαιτούμε να είναι ελεύθερη πιέσεων ($P = 0$), που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή η διάδοση του ήχου από το νερό στον αέρα. Κατά μήκος του συνόρου στρώματος επιφάνειας - νερού (∂V_1) επιβάλλουμε η πίεση και η κάθετη ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων που είναι ανάλογη της παραγώγου της πίεσης να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Την ίδια απαίτηση έχουμε και κατά μήκος του συνόρου νερού - πυθμένα (∂V_2). Στον τέλος θεωρούμε υπόστρωμα που επεκτείνεται μέχρι το άπειρο και ζητούμε η ενέργεια να αποσβάνει στο άπειρο. Αφού το χωρίο εκτείνεται επ' άπειρον ως προς την οριζόντια απόσταση r επιβάλλουμε την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld που καθορίζει την συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο ($r \rightarrow \infty$) και επιβάλει ότι δεν υπάρχει επανακτινοβολούμενη ενέργεια από εκεί.

Συγκεκριμένα, οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ακόλουθες:

$$P^{(1)}(., 0) = 0 \quad (2.8)$$

$$P^{(1)}(., h_1) = P^{(2)}(., h_1) \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P^{(1)}(., h_1)}{\partial \vec{\eta}} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P^{(2)}(., h_1)}{\partial \vec{\eta}} \quad (2.10)$$

$$P^{(2)}(., h_2) = P^{(3)}(., h_2) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P^{(2)}(., h_2)}{\partial \vec{\eta}} = -\frac{1}{\rho_3} \frac{\partial P^{(3)}(., h_2)}{\partial \vec{\eta}} \quad (2.12)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P^{(3)}(r, z) = 0 \quad (2.13)$$

όπου

$$P(r, z) = \begin{cases} P^{(1)}(r, z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ P^{(2)}(r, z), & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ P^{(3)}(r, z), & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ \rho_2, & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ \rho_3, & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

και $\vec{\eta}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το οποίο έχει φορά προς το εσωτερικό της εκάστοτε ανομοιογένειας, προσθέτοντας την Συνθήκη Ακτινοβολίας

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) P = 0. \quad (2.14)$$

2.4 Έκφραση της λύσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων σε συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων

Σε αυτήν την παράγραφο, θα αναφερθούμε στη λύση του προβλήματος σε περιβάλλον σταθερών συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων. Το περιβάλλον αυτό ονομάζεται οριζόντια στρωματοποιημένο [1] και είναι το βασικό περιβάλλον που μελετά κανείς στην ακουστική διάδοση. Για την παρούσα εργασία, η αναφορά σε αυτό κρίνεται αναγκαία λόγω του ορισμού ενός πεδίου ακτινοβολίας όπως θα δούμε στη συνέχεια. Η διατύπωση του προβλήματος μας επιτρέπει να αναπτύξουμε τη λύση του με τη χρήση κατάλληλης αναπαράστασης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων, που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα ιδιόμορφο πρόβλημα *Sturm – Liouville* [16], με την ιδιομορφία να οφείλεται στην ύπαρξη συνόρου στο άπειρο. Για τα προβλήματα αυτής της μορφής γνωρίζουμε ότι ορίζεται ένα φάσμα διακριτών ιδιοτιμών και ένα φάσμα συνεχών ιδιοτιμών. Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι διακριτές και οι συνεχείς ιδιοσυναρτήσεις, $u_m(z)$ και $\Phi(z, k)$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με θεώρημα αναπαράστασης [4], μία τυχαία συνάρτηση που ορίζεται στο ίδιο διάστημα με εκείνο των ιδιοσυναρτήσεων και ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά και ολοκλήρωμα πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις αυτές αντίστοιχα σύμφωνα με την σχέση

$$P(r, z) = \sum_{m=1}^M \Phi_m(r)u_m(z) + \int_S b(r, k)\Phi(z, k)dk \quad (2.15)$$

όπου με S συμβολίζεται το συνεχές φάσμα των ιδιοτιμών k , b είναι συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από την ιδιοτιμή k και M είναι η μέγιστη τάξη των διακριτών ιδιοτιμών.

Οι συναρτήσεις $u_m(z)$ ικανοποιούν το ακόλουθο πρόβλημα βάρους:

$$\frac{d^2 u_m(z)}{dz^2} + (k^2(z) - k_m^2)u_m(z) = 0 \quad (2.16)$$

όπου k είναι ο αριθμός κύματος και k_m είναι σταθερές που μπορούν να υπολογιστούν, ως ιδιοτιμές του προβλήματος που ορίζονται από την εξίσωση 2.16 και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$u_m^{(1)}(0) = 0 \quad (2.17)$$

$$u_m^{(1)}(h_1) = u_m^{(2)}(h_1) \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du_m^{(1)}(h_1)}{dz} = \frac{1}{\rho_2} \frac{du_m^{(2)}(h_1)}{dz} \quad (2.19)$$

$$u_m^{(2)}(h_2) = u_m^{(3)}(h_2) \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{du_m^{(2)}(h_2)}{dz} = \frac{1}{\rho_3} \frac{du_m^{(3)}(h_2)}{dz} \quad (2.21)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_m^{(3)}(z) = 0 \quad (2.22)$$

όπου

$$u_m(z) = \begin{cases} u_m^{(1)}(z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ u_m^{(2)}(z), & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ u_m^{(3)}(z), & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ \rho_2, & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ \rho_3, & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις, όπως ορίζονται παραπάνω, αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με εξίσωση ορθοκανονικότητας:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} u_n(z) u_m(z) dz = \delta_{mn} \quad (2.23)$$

Η γεωμετρία του προβλήματος είναι ανάλογη αυτής του Σχήματος 2.1 της προηγούμενης παραγράφου, με τη διαφορά ότι οι διεπιφάνειες είναι επίπεδα οριζόντια. Αντίστοιχο πρόβλημα με διαφορετικές συνθήκες ορθογωνιότητας υπακούουν οι ιδιοσυναρτήσεις $\Phi(z, k)$ [4].

Για να συνεχίσουμε, θα κάνουμε την υπόθεση ότι το συνεχές φάσμα δεν επηρεάζει σημαντικά την λύση μας. Η υπόθεση αυτή, όπως έχει αποδειχθεί δεν επηρεάζει σημαντικά την λύση μας στις περιπτώσεις που ενδιαφερόμαστε για διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις [4]. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε την αναπαράσταση της λύσης ως:

$$P(r, z) = \sum_{m=1}^M F_m(r) u_m(z) \quad (2.24)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της πίεσης στην ομογενή *Helmholtz*, παίρνοντας υπόψη την εξίσωση 2.16 και χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $u_m(z)$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\sum_m \delta_{nm} \left(\frac{d^2 F_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_m(r)}{dr} + k_m^2 \right) = 0 \quad (2.25)$$

που ισοδυναμεί με την εξίσωση *Bessel*:

$$\frac{d^2 F_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_n(r)}{dr} + k_n^2 = 0 \quad (2.26)$$

με γενική λύση:

$$F_n(r) = A_n H_0^{(1)}(k_n r) + B_n H_0^{(2)}(k_n r) \quad (2.27)$$

όπου A_n και B_n προσδιοριστέοι συντελεστές και $H_0^{(1)}$ και $H_0^{(2)}$ συναρτήσεις *Hankel* μηδενικής τάξης πρώτου είδους και δευτέρου είδους αντίστοιχα.

Οπότε, η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης εάν αμελήσουμε το συνεχές φάσμα είναι:

$$P(r, z) = \sum_m (A_m H_0^{(1)}(k_m r) + B_m H_0^{(2)}(k_m r)) u_m(z) \quad (2.28)$$

Από φυσικής πλευράς, η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων $H_0^{(1)}$ και $H_0^{(2)}$ στην έκφραση της πίεσης υποδηλώνουν η μεν πρώτη την ενέργεια που οδεύει προς τα αυξανόμενα r και η δεύτερη την ενέργεια που οδεύει προς τα μειούμενα r .

Επισημαίνουμε ότι η πυκνότητα διαφέρει στα τρία στρώματα μένοντας σταθερή συναρτήσει του βάθους μόνο σε κάθε στρώμα χωριστά.

2.5 Συνεχές φάσμα

Επισημαίνουμε ότι η αναπαράσταση της λύσης μέσω των ιδιοσυναρτήσεων σε σειρά, όπως στη σχέση 2.24, είναι ακριβής στην περίπτωση που το σύστημά τους είναι πλήρες. Στην περίπτωση ενός τέλεια άκαμπτου υποστρώματος το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων είναι πράγματι πλήρες και το άθροισμα στις σχέσεις 2.24 και 2.25 είναι μέχρι το άπειρο, αφού σύμφωνα με τη θεωρία του προβλήματος *Sturm – Liouville* για κανονικά προβλήματα, όπως αυτό που υπακούουν οι ιδιοσυναρτήσεις, η λύση αποτελείται από διακριτό φάσμα ιδιοτιμών.

Η παράλειψη του συνεχούς φάσματος σε περιβάλλον σταθερών παραμέτρων δημιουργεί προβλήματα και όταν μελετάται το ηχητικό πεδίο πολύ κοντά στην πηγή, μιας και αυτό παριστάνει ενέργεια που χάνεται πολύ γρήγορα προς τον πυθμένα. Στην περίπτωση που το περιβάλλον είναι μεταβαλλόμενων παραμέτρων η παράλειψη του συνεχούς

φάσματος ενδεχομένως να δημιουργεί προβλήματα, μιας και πρέπει να γνωρίζουμε πόση ενέργεια μεταφέρεται από το συνεχές φάσμα αλλά και πόση ενέργεια ανταλλάσσεται ανάμεσα στις διακριτές και τις συνεχείς ιδιομορφές.

Κεφάλαιο 2: Ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με ημιάπειρο πυθμένα.

Κεφάλαιο 3

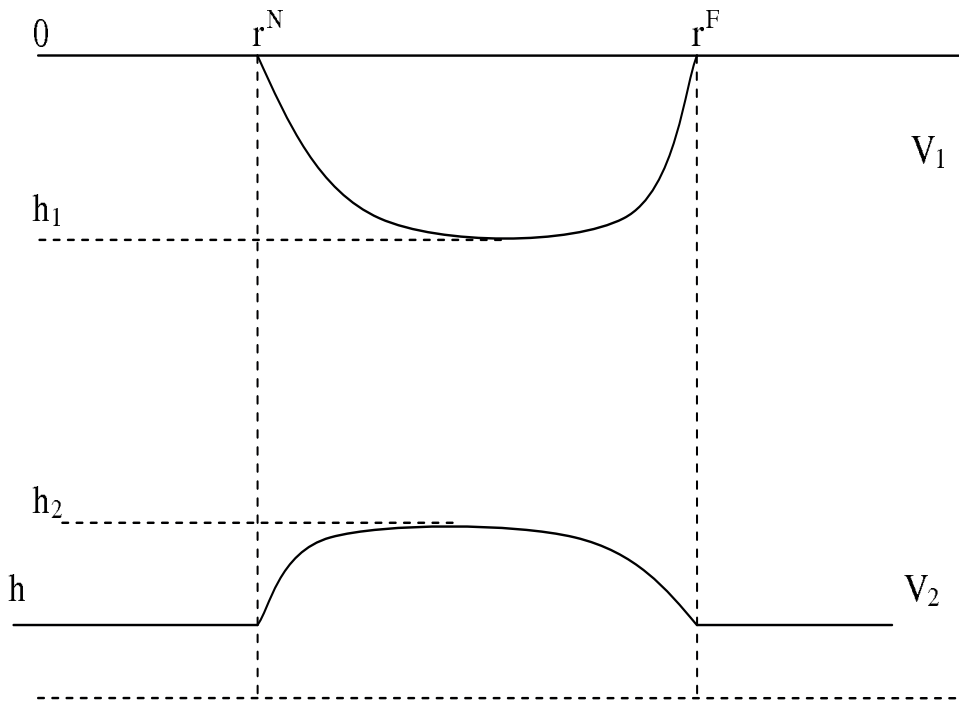
Ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με μη-επίπεδα σύνορα

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου σε περιβάλλον με μη-επίπεδα σύνορα. Για απλούστευση του προβλήματος θα θεωρήσουμε περιβάλλον με τοπική ανομοιογένεια. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όπου η επιφάνεια ή ο πυθμένας δεν είναι οριζόντιοι ή η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται με την απόσταση, το περιβάλλον δεν είναι οριζόντια στρωματοποιημένο και η θεωρία των κανονικών ιδιομορφών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με την μορφή που την αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη **θεωρία συζευγμένων ιδιομορφών**, η οποία αποτελεί επέκταση της θεωρίας των κανονικών ιδιομορφών [7], [8],[10].

3.2 Θεωρία Συζευγμένων Ιδιομορφών

Θα θεωρήσουμε το περιβάλλον του Σχήματος 3.1. Χαρακτηρίζεται από μία τοπική ανομοιομορφία στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Το περιβάλλον χωρίζεται σε τρία χωρία με χρήση κατακόρυφων διεπιφανειών που ορίζονται από την αρχή και το τέλος της ανομοιογένειας σε απόσταση r^N και r^F αντίστοιχα από την πηγή, όπως στο σχήμα 3.1.



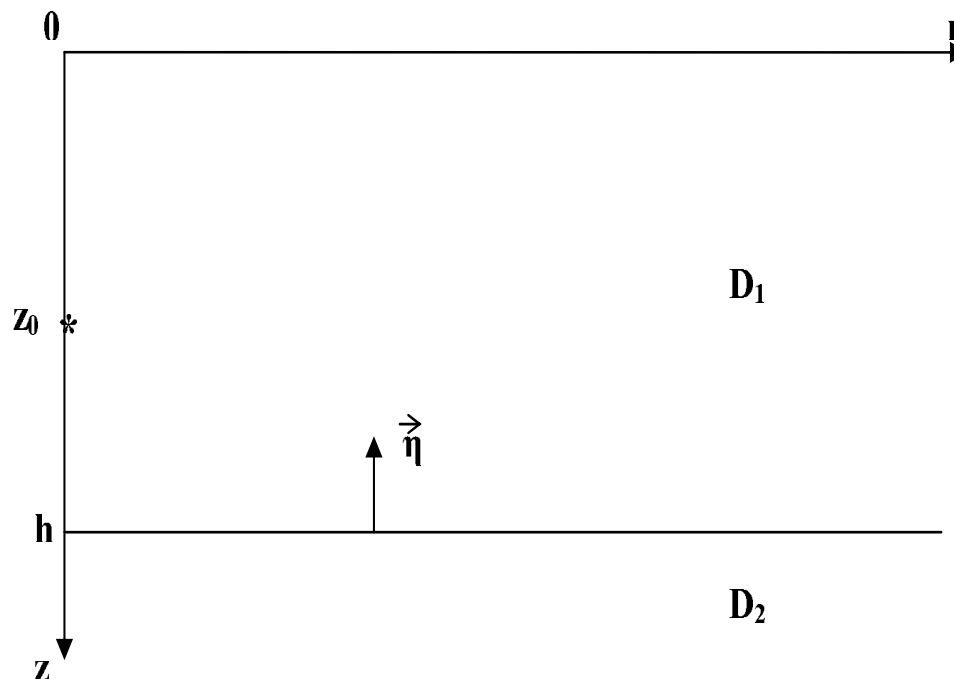
Σχήμα 3.1: Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία.

Το ακουστικό πεδίο θα το χωρίσουμε σε δύο υποπεδία, το πεδίο ακτινοβολίας P_{rd} (*radiation field*) και το πεδίο περίθλασης P_d (*diffraction field*). Δηλαδή, θα έχουμε

$$P(r, z) = P_{rd}(r, z) + P_d(r, z) \quad (3.1)$$

3.2.1 Το Πεδίο Ακτινοβολίας

Το πεδίο ακτινοβολίας αναφέρεται σε ένα περιβάλλον του οποίου οι παράμετροι δεν μεταβάλλονται με την απόσταση και τόσο η επιφάνεια όσο και ο πυθμένας είναι επίπεδα και οριζόντια (παράλληλα μεταξύ τους). Το πεδίο ακτινοβολίας περιέχει την πηγή γι' αυτό και η πίεση υπακούει στη μη-ομογενή εξίσωση Helmholtz με οριακές συνθήκες όπως προκύπτουν από τη γεωμετρία του χωρίου μέχρι την αρχή της ανομοιογένειας. Η γεωμετρία του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2. Στη θέση z_0 έχει τοποθετηθεί η πηγή ενώ ο πυθμένας εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Με D_1 και D_2 χαρακτηρίζουμε τα χωρία που ορίζει η διεπιφάνεια για $z = h$. Το χωρίο D_1 , είναι αυτό που περιέχει την πηγή.



Σχήμα 3.2: Το πεδίο ακτινοβολίας P_{rd} .

Συγκεκριμένα έχουμε,

$$\Delta P_{rd}(r, z) + k^2(r, z)P_{rd}(r, z) = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - z_0) \quad (3.2)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$P_{rd}^{(1)}(., 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$P_{rd}^{(1)}(., h) = P_{rd}^{(2)}(., h) \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_{rd}^{(1)}(., h)}{\partial \vec{\eta}} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_{rd}^{(2)}(., h)}{\partial \vec{\eta}} \quad (3.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_{rd}^{(2)}(r, z) = 0 \quad (3.6)$$

όπου

$$P_{rd}(r, z) = \begin{cases} P_{rd}^{(1)}(r, z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ P_{rd}^{(2)}(r, z), & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

και $\vec{\eta}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το οποίο έχει φορά προς το εσωτερικό του εκάστοτε χωρίου. Για να έχει το πρόβλημά μας μοναδική λύση προσθέτουμε την Συνθήκη Ακτινοβολίας.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών ιδιομορφών το ακουστικό πεδίο σε οριζόντια στρωματοποιημένο περιβάλλον χωρίζεται ως προς το βάθος και την απόσταση, και η ακουστική πίεση μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω αναπτύγματος σε σειρά ως εξής:

$$P(r, z) = \sum_{m=1}^M A_m(r) u_m(z) \quad (3.7)$$

όπου έχει, και πάλι, αμεληθεί το συνεχές φάσμα. Ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων υπακούει στην φιλοσοφία του προηγούμενου Κεφαλαίου. Ικανοποιούν, και πάλι, την εξίσωση βάρους:

$$\frac{d^2 u_m(z)}{dz^2} + (k^2(z) - k_m^2) u_m(z) = 0 \quad (3.8)$$

όπου k_m οι ιδιοτιμές του προβλήματος. Το πρόβλημα βάρους συνοδεύεται από οριακές συνθήκες, οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

$$u_m^{(1)}(0) = 0 \quad (3.9)$$

$$u_m^{(1)}(h) = u_m^{(2)}(h) \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du_m^{(1)}(h)}{dz} = \frac{1}{\rho_2} \frac{du_m^{(2)}(h)}{dz} \quad (3.11)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_m^{(2)}(z) = 0 \quad (3.12)$$

όπου

$$u_m(z) = \begin{cases} u_m^{(1)}(z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ u_m^{(2)}(z), & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

Αντίστοιχα, χαρακτηρίζουμε την πυκνότητα, ως

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι, οι ιδιοσυναρτήσεις όπως ορίζονται παραπάνω αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με συνθήκη ορθοκανονικότητας:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} u_m(z) u_n(z) dz = \delta_{nm} \quad (3.13)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της πίεσης στην ομογενή *Helmholtz* και χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθογωνιότητας, η λύση εκφράζεται στη μορφή

$$P_{rd}(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{m=1}^M u_m(z) u_m(z_0) H_0^{(1)}(k_m r). \quad (3.14)$$

όπου $H_0^{(1)}$ η συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση *Bessel*:

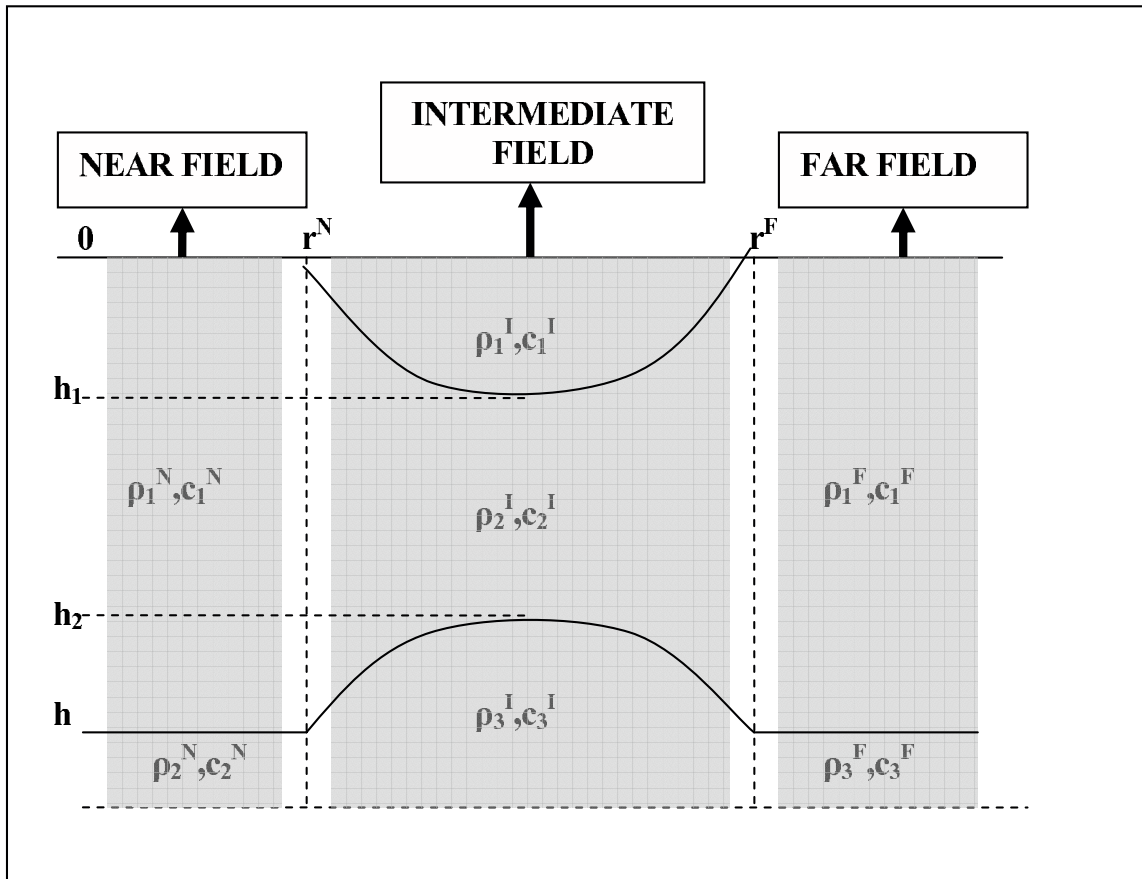
$$\frac{d^2 H_0^{(1)}(k_m r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dH_0^{(1)}}{dr} + k_0^2 H_0^{(1)}(k_m r) = 0 \quad (3.15)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε σύγκριση με την εξίσωση 2.27 που αναφέρεται στο ίδιο πρακτικά πρόβλημα, η απουσία της συνάρτησης *Hankel* δευτέρου είδους οφείλεται στη συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* που δεν επιτρέπει επανακτινοβολούμενη ενέργεια από το άπειρο, η οποία εκφράζεται ασυμπτωτικά από την συνάρτηση *Hankel* δευτέρου είδους [6].

Για τον υπολογισμό της πίεσης στη μορφή 3.14, έχει χρησιμοποιηθεί η θεωρία των συναρτήσεων *Green* που αποτελούν λύση της μη-ομογενή *Helmholtz* [4]. Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών θα γίνει αφού εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες σε κατάλληλη αναπαράσταση των ιδιοσυναρτήσεων μετά από κατάλληλη επεξεργασία, η οποία οδηγεί στην διατύπωση μιας **χαρακτηριστικής εξίσωσης** (βλ. Κεφ.4.4).

3.2.2 Το Πεδίο Περίθλασης

Το πεδίο περίθλασης P_d αναφέρεται σε ένα περιβάλλον του οποίου οι παράμετροι μεταβάλλονται με την απόσταση (*Range – Dependent Environment*) και οφείλεται στην σκέδαση του ακουστικού πεδίου από την ανομοιογένεια. Συγκεκριμένα, το πεδίο περίθλασης χωρίζεται σε τρία υποπεδία: το πεδίο κοντά στην πηγή P_d^N (*Near Field*), το πεδίο με την ανομοιογένεια P_d^I (*Intermediate Field*) και το πεδίο μακριά από την ανομοιογένεια P_d^F (*Far Field*). Η γεωμετρία του παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Το πεδίο P_d^I .

Ως P_d^N χαρακτηρίζεται το υποπεδίο για $0 \leq r \leq r_N$ και $0 \leq z < \infty$. Ως P_d^F χαρακτηρίζεται το υποπεδίο για $r \geq r_F$ και $0 \leq z < \infty$. Ανάμεσα στα δύο αυτά πεδία, το P_d^I για $r_N \leq r \leq r_F$ και $0 \leq z < \infty$, χαρακτηρίζεται από αυθαίρετη μεταβολή

του προφίλ ταχύτητας $c = c(r, z)$. Το προφίλ ταχύτητας τόσο στο πεδίο πριν την ανομοιογένεια όσο και μακριά από αυτή θα είναι συνάρτηση μόνο του z .

Τα δύο υποπεδία P_d^N και P_d^F υπακούουν στην ομογενή *Helmholtz*:

$$\Delta P_d^*(r, z) + k^2(r, z)P_d^*(r, z) = 0 \quad (3.16)$$

όπου $*$ = N, F . Για τον πλήρη καθορισμό του προβλήματος απαιτείται η επιβολή καταλλήλων συνοριακών συνθηκών:

$$P_d^{*,1}(\cdot, 0) = 0 \quad (3.17)$$

$$P_d^{*,1}(\cdot, h) = P_d^{*,2}(\cdot, h) \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\rho_1^*} \frac{\partial P_d^{*,1}(\cdot, h)}{\partial \vec{\eta}} = -\frac{1}{\rho_2^*} \frac{\partial P_d^{*,2}(\cdot, h)}{\partial \vec{\eta}} \quad (3.19)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_d^{*,2}(\cdot, z) = 0 \quad (3.20)$$

όπου

$$P_d^*(r, z) = \begin{cases} P_d^{*,1}(r, z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ P_d^{*,2}(r, z), & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho^* = \begin{cases} \rho_1^*, & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2^*, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του προβλήματος, η πίεση περίθλασης μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία σειρά ιδιοσυναρτήσεων οι οποίες θα οριστούν κατάλληλα. Συγκεκριμένα, η πίεση στο υποπεδίο πριν την ανομοιομορφία δίνεται από τη σχέση:

$$P_d^N(r, z) = \sum_{m=1}^M E_m^N J_0(k_m^N r) u_m^N(z) \quad (3.21)$$

όπου E_m^N άγνωστοι συντελεστές οι οποίοι θα προσδιοριστούν, $J_0(k_m^N r)$ η συνάρτηση *Bessel* μηδενικής τάξης, k_m^N οι ιδιοτιμές και $u_m^N(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις. Η χρήση της *Bessel* στην έκφραση της πίεσης οφείλεται στο γεγονός ότι η πίεση είναι παντού αναλυτική ακόμα και στο $r = 0$. Κατά ανάλογο τρόπο, η ακουστική πίεση στο υποπεδίο μακριά από την ανομοιογένεια δίνεται από την έκφραση:

$$P_d^F(r, z) = \sum_{m=1}^M E_m^F H_0^{(1)}(k_m^F r) u_m^F(z) \quad (3.22)$$

όπου E_m^F άγνωστοι συντελεστές οι οποίοι προσδιορίζονται, $H_0^{(1)}(k_m^F r)$ η συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, k_m^F οι ιδιοτιμές και $u_m^F(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις. Η χρήση μόνο της συνάρτησης *Hankel* πρώτου είδους στην έκφραση της πίεσης

οφείλεται, και πάλι, στη συνθήκη ακτινοβολίας, με την οποία απαιτούμε μηδενική επανακτινοβολούμενη ενέργεια από το άπειρο, που ισοδυναμεί με τον αποκλεισμό του συγκλίνοντος προς την πηγή πεδίου.

Με αναφορά στο Σχήμα 3.3, οι ιδιοσυναρτήσεις $u_m^N(z)$ και $u_m^F(z)$ ικανοποιούν το ακόλουθο πρόβλημα βάθους:

$$\frac{d^2 u_m^*(z)}{dz^2} + (k^2(z) - (k_m^*)^2) u_m^*(z) = 0 \quad (3.23)$$

όπου k_m^* οι ιδιοτιμές του προβλήματος. Το πρόβλημα βάθους συνοδεύεται από οριακές συνθήκες, οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

$$u_m^{*,1}(0) = 0 \quad (3.24)$$

$$u_m^{*,1}(h) = u_m^{*,2}(h) \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\rho_1^*} \frac{du_m^{*,1}(h)}{dz} = \frac{1}{\rho_2^*} \frac{du_m^{*,2}(h)}{dz} \quad (3.26)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_m^{*,2}(z) = 0 \quad (3.27)$$

όπου

$$u_m^*(z) = \begin{cases} u_m^{*,1}(z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ u_m^{*,2}(z), & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho^* = \begin{cases} \rho_1^*, & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2^*, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

όπου $* = N, F$. Οι ιδιοσυναρτήσεις όπως ορίζονται παραπάνω αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με συνθήκη ορθοκανονικότητας:

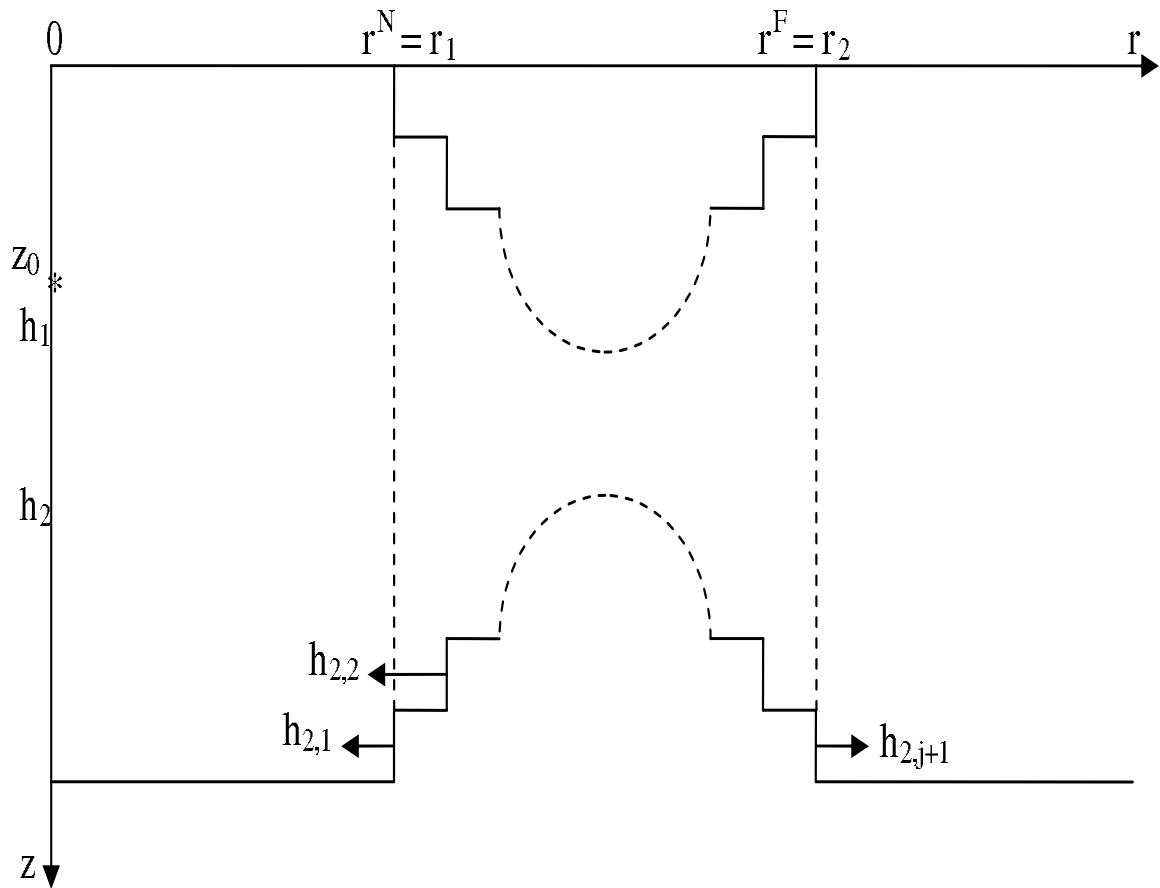
$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho^*(z)} u_m^*(z) u_n^*(z) dz = \delta_{nm} \quad (3.28)$$

Για να καταστεί δυνατή η αριθμητική επίλυση του προβλήματος στο ενδιαμέσο χωρίο P_d^I το χωρίζουμε σε κυλινδρικούς δακτυλίους που ορίζονται από ακτίνες r_j όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.4. Ο χωρισμός αυτός γίνεται και στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Σε καθένα από τους δακτυλίους οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται μόνο με το βάθος.

Το πεδίο P_d^I υπακούει στην ομογενή *Helmholtz*:

$$\Delta P_d^{I,j}(r, z) + k^2(r, z) P_d^{I,j}(r, z) = 0 \quad (3.29)$$

συνοδευόμενο με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:



Σχήμα 3.4: Διακριτοποίηση της ανομοιογένειας ανάμεσα στα r^N και r^F .

$$P_d^{I,1}(\cdot, 0) = 0 \quad (3.30)$$

$$P_d^{I,1}(\cdot, h_{1,j}) = P_d^{I,2}(\cdot, h_{1,j}) \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{\rho_1^I} \frac{\partial P_d^{I,1}(\cdot, h_{1,j})}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{1}{\rho_2^I} \frac{\partial P_d^{I,2}(\cdot, h_{1,j})}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.32)$$

$$P_d^{I,2}(\cdot, h_{2,j}) = P_d^{I,3}(\cdot, h_{2,j}) \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{\rho_2^I} \frac{\partial P_d^{I,2}(\cdot, h_{2,j})}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{1}{\rho_3^I} \frac{\partial P_d^{I,3}(\cdot, h_{2,j})}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.34)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_d^{I,3}(\cdot, z) = 0 \quad (3.35)$$

όπου

$$P_d^I(r, z) = \begin{cases} P_d^{I,1}(r, z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ P_d^{I,2}(r, z), & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ P_d^{I,3}(r, z), & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho^I = \begin{cases} \rho_1^I, & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ \rho_2^I, & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ \rho_3^I, & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

Σε κάθε δακτύλιο με δείκτη j ορίζουμε ένα πρόβλημα βάρους:

$$\frac{d^2 u_m^{I,j}(z)}{dz^2} + (k^2(z) - (k_m^{I,j})^2) u_m^{I,j}(z) = 0 \quad (3.36)$$

συνοδευόμενο με τις ακόλουθες συνθήκες ορίων και διεπιφάνειας:

$$u_m^{I,1}(0) = 0 \quad (3.37)$$

$$u_m^{I,1}(h_{1,j}) = u_m^{I,2}(h_{1,j}) \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{\rho_1^I} \frac{du_m^{I,1}(h_{1,j})}{dz} = \frac{1}{\rho_2^I} \frac{du_m^{I,2}(h_{1,j})}{dz} \quad (3.39)$$

$$u_m^{I,2}(h_{2,j}) = u_m^{I,3}(h_{2,j}) \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{\rho_2^I} \frac{du_m^{I,2}(h_{2,j})}{dz} = \frac{1}{\rho_3^I} \frac{du_m^{I,3}(h_{2,j})}{dz} \quad (3.41)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_m^{I,3}(z) = 0 \quad (3.42)$$

όπου

$$u_m^I(z) = \begin{cases} u_m^{I,1}(z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ u_m^{I,2}(z), & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ u_m^{I,3}(z), & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις όπως ορίζονται παραπάνω αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με συνθήκη ορθοκανονικότητας

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_j^I(z)} u_m^{I,j}(z) u_n^{I,j}(z) dz = \delta_{nm} \quad (3.43)$$

οπότε κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί σε μία σειρά:

$$P^j(r, z) = \sum_{m=1}^M \phi_m^j(r) u_m^j(z) \quad (3.44)$$

όπου $\phi_m^j(r)$ ικανοποιούν στη διαφορική εξίσωση τύπου *Bessel*

$$\frac{d^2 \phi_m^j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_m^j}{dr} + (k_m^j)^2 \phi_m^j = 0 \quad (3.45)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το πεδίο P_d^I εκφράζεται στη μορφή:

$$P_d^{I,j}(r, z) = \sum_{m=1}^M (A_m^j H_0^1(k_m^{I,j} r) + B_m^j H_0^2(k_m^{I,j} r)) u_m^{I,j}(z), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.46)$$

όπου A_m^j, B_m^j άγνωστοι συντελεστές οι οποίοι προσδιορίζονται, $H_0^{(1)}$ συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, $H_0^{(2)}$ συνάρτηση *Hankel* δευτέρου είδους μηδενικής τάξης, $k_m^{I,j}$ και $u_m^{I,j}(z)$ οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός των αγνώστων, οι οποίοι εμφανίζονται στις εκφράσεις των ακουστικών πιέσεων σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων, θα γίνει με την επιβολή καταλλήλων συνθηκών για $r = r^N$ και $r = r^F$. Και αυτό γιατί σύμφωνα με τον ορισμό των συναρτήσεων P_d^* όπου $*$ = N, I, F , θα πρέπει να είναι συμβιβαστές στα τεχνικά σύνορα r_j , έτσι ώστε να έχει μοναδική λύση το πρόβλημα. Οι συνθήκες της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στα όρια r_j θα μας δώσουν τις απαραίτητες συνθήκες για αυτό:

$$P_j^*(r_j, z) = P_{j+1}^*(r_j, z) \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{\rho_j^*} \frac{\partial P_j^*(r_j, z)}{\partial r} = \frac{1}{\rho_{j+1}^*} \frac{\partial P_{j+1}^*(r_j, z)}{\partial r} \quad (3.48)$$

όπου $*$ = N, I, F .

Υπολογίζοντας τους αγνώστους του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι έχουμε M αγνώστους E_m^N για το εγγύς πεδίο, $2 \times M \times J$ αγνώστους (A_m^j, B_m^j) για τα J χωρία διαμερισμού της ανομοιογένειας και M αγνώστους E_m^F για το μακρινό πεδίο.

Όμως οι συνθήκες 3.47, 3.48 εφαρμοζόμενες χωρίς επεξεργασία δεν μπορούν να δώσουν τις απαραίτητες εξισώσεις για τον υπολογισμό των αγνώστων. Για να καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους του προβλήματος, επιβάλλεται η αξιοποίηση της συνθήκης ορθοκανονικότητας. Θα πολλαπλασιάσουμε, λοιπόν, την σχέση 3.47 με $\frac{1}{\rho_j} u_n^j(z)$ και την σχέση 3.48 με $u_n^j(z)$ και θα ολοκληρώσουμε από 0 έως ∞ ως προς z . Τέλος, κάνοντας χρήση των ασυμπτωτικών εκφράσεων των συναρτήσεων *Hankel* για μεγάλα ορίσματα:

$$\frac{dH_0^{(k)}(kr)}{dr} = -kH_1^{(k)}(kr) \quad (3.49)$$

$$H_1^{(1)}(kr) = -iH_0^{(1)}(kr) \quad (3.50)$$

$$H_1^{(2)}(kr) = iH_0^{(2)}(kr) \quad (3.51)$$

και χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις:

$$C_1(j, j+1, nm) = \int_0^\infty \frac{1}{\rho_j} u_n^j u_m^{j+1} dz \quad (3.52)$$

$$C_2(j, j+1, nm) = \int_0^\infty \frac{1}{\rho_{j+1}} u_n^j u_m^{j+1} dz \quad (3.53)$$

οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους συντελεστές. Οπότε, επιλύοντας το σύστημα θα υπολογιστούν οι άγνωστοι και στη συνέχεια υπολογίζεται εύκολα η ολική ακουστική πίεση του προβλήματος για τις διάφορες τιμές των r και z . Δηλαδή, η ολική πίεση θα ορίζεται, κάθε φορά, ως το άθροισμα του πεδίου ακτινοβολίας και του πεδίου περίθλασης, έχοντας την εξής μορφή:

$$P^N(r, z) = P_{rd}(r, z) + P_d^N(r, z) \quad (3.54)$$

$$P^I(r, z) = P_{rd}(r, z) + P_d^I(r, z) \quad (3.55)$$

$$P^F(r, z) = P_{rd}(r, z) + P_d^F(r, z) \quad (3.56)$$

Οι συντελεστές $C_1(j, j+1, nm)$ και $C_2(j, j+1, nm)$ που ορίσαμε παραπάνω, ονομάζονται **συντελεστές σύζευξης** (*Coupling Coefficients*) και η μέθοδος που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο ονομάζεται **θεωρία συζευγμένων ιδιομορφών**[10]. Οι συντελεστές σύζευξης εκφράζουν την ανταλλαγή ενέργειας κατά τη διάδοση του ήχου στις διάφορες κυματομορφές. Όταν ο συντελεστής C_1 ή ο αντίστοιχος C_2 είναι μονάδα, όλη η ενέργεια που μεταφέρεται από την ιδιομορφή τάξης m μεταφέρεται στην ιδιομορφή τάξης n του επόμενου τμήματος, οπότε μιλάμε για πλήρη σύζευξη. Προφανώς, πλήρης σύζευξη δεν αναμένεται ανάμεσα σε ιδιομορφές διαφορετικής τάξης.

Γενικά, η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών είναι ικανοποιητική για εφαρμογές σε θάλασσα για χαμηλές έως μεσαίες συχνότητες και για περιβάλλοντα με σταθερές αλλά και με μη σταθερές ως προς την απόσταση παραμέτρους. Επειδή ο αριθμός των ιδιομορφών είναι ανάλογος με το βάθος του νερού και την συχνότητα, η μέθοδος είναι υπολογιστικά απαιτητική για μεγάλες συχνότητες και μεγάλα βάθη. Το χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι δεν βασίζεται σε καμμία παραδοχή ως προς τη μορφή της εξίσωσης και το πρόβλημα που επιλύει. Όπως παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο, η εφαρμογή της μεθόδου σε περιβάλλον με ημιάπειρο πυθμένα είναι άμεση, μιας και όπως είδαμε οι σειρές που αναπαράσταν την ακουστική πίεση έχουν πεπερασμένο πλήθος όρων, όσες και οι κανονικές ιδιομορφές του προβλήματος.

Κεφάλαιο 3: Ακουστική διάδοση σε πεδία με μη-επίπεδα σύνορα.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα

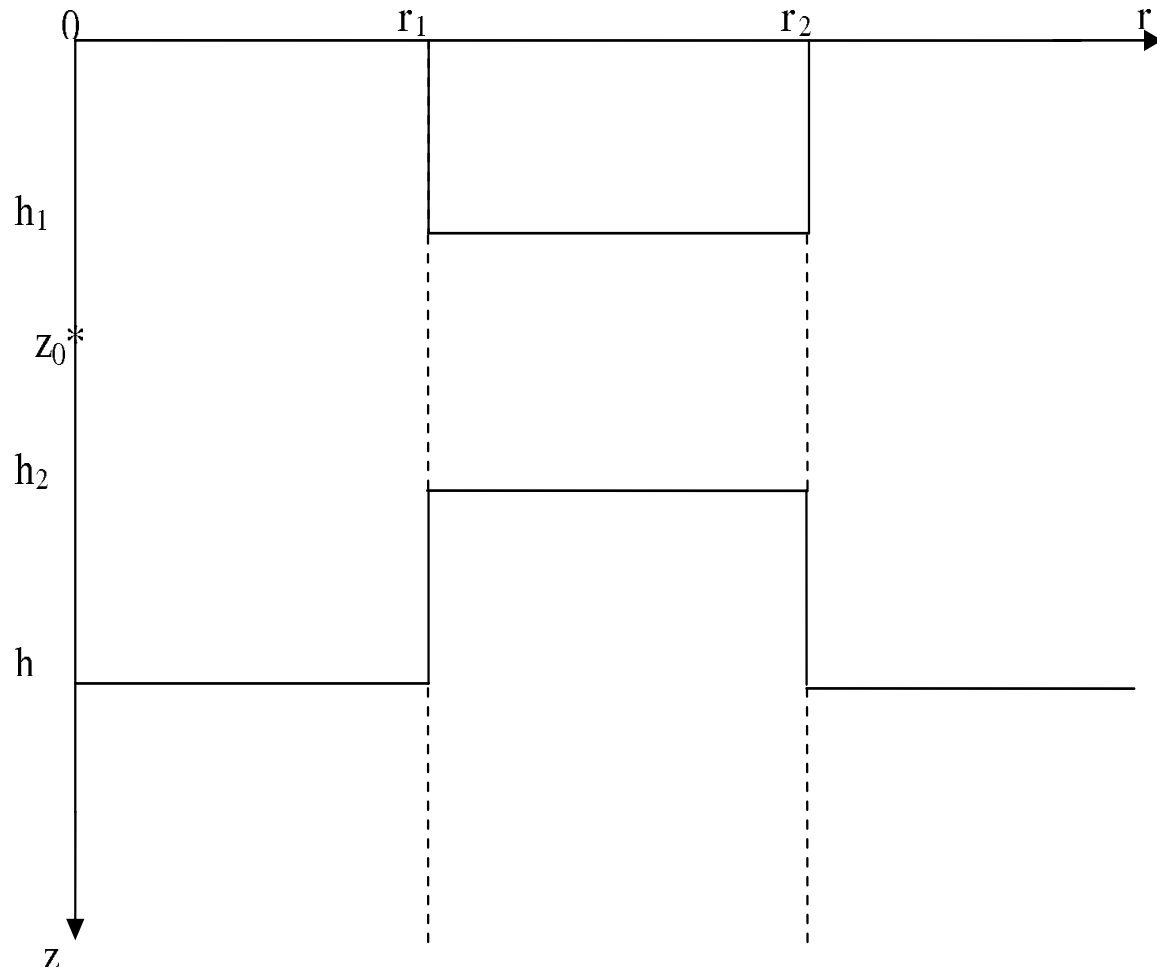
4.1 Εισαγωγή

Στα Κεφάλαια 2 και 3 αναφερθήκαμε στην ακουστική διάδοση σε κυματοδηγό με μη-επίπεδα σύνορα και με ημιάπειρο πυθμένα. Αναφερθήκαμε στον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης χρησιμοποιώντας θεωρήματα αναπαράστασης, βασιζόμενοι στη θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε το ακουστικό πεδίο σε περιβάλλον με ανομοιομορφία στην επιφάνεια και στον πυθμένα συγκεκριμένου σχήματος. Επίσης, θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές, τις ιδιοσυναρτήσεις και τους συντελεστές σύζευξης του προβλήματος.

4.2 Το πρόβλημα

Ζητείται ο υπολογισμός του ηχητικού πεδίου (ακουστική πίεση) που προέρχεται από μία σημειακή αρμονική πηγή συχνότητας f σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας. Θεωρούμε ένα στρώμα πάγου στην επιφάνεια της θάλασσας που εκτείνεται μέχρι βάθους h_1 και μία ανύψωση στον πυθμένα μέχρι βάθους h_2 . Η γεωμετρία του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, τόσο ο πάγος όσο και η ανύψωση έχουν συγκεκριμένη δομή δηλαδή επίπεδα σύνορα. Ο δείκτης h χαρακτηρίζει το τέλος της ανύψωσης του πυθμένα. Από το βάθος h έως το ∞ εκτείνεται ο πυθμένας. Το στρώμα πάγου και η ανύψωση του πυθμένα εκτείνονται από τη θέση r_1 έως τη θέση

r_2 . Η ηχητική πηγή βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας του προβλήματος και σε βάθος $(r, z) = (0, z_0)$. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό και στο ζήτημα είναι σταθερή. Σταθερή, επίσης, είναι και η πυκνότητα σε κάθε στρώμα.



Σχήμα 4.1: Περιβάλλον με πάγο στην επιφάνεια και ανύψωση στον πυθμένα συγκεκριμένου σχήματος.

4.3 Αναπαράσταση της λύσης

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης θα γίνει διαχωρίζοντας το ακουστικό πεδίο του Σχήματος 4.1 σε δύο πεδία, το πεδίο ακτινοβολίας και το πεδίο περίθλασης.

Το πεδίο ακτινοβολίας $P_{rd}(r, z)$, όπως γνωρίζουμε, αναφέρεται σε ένα περιβάλλον του οποίου οι παράμετροι δεν μεταβάλλονται με την απόσταση και τόσο η επιφάνεια όσο και ο πυθμένας είναι επίπεδοι. Ο υπολογισμός του έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην Παράγραφο 3.2.1. Η γεωμετρία στην οποία υπακούει το πεδίο ακτινοβολίας είναι η ίδια με εκείνη της Παραγράφου 3.2.1. Οπότε η ακουστική πίεση εκφράζεται σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων και συγκεκριμένα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$P_{rd}(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{m=1}^M u_m(z) u_m(z_0) H_0^{(1)}(k_m r). \quad (4.1)$$

όπου $H_0^{(1)}$ η συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, $u_m(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις και k_m οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Οι ιδιοσυναρτήσεις υπακούουν στις σχέσεις 3.8 έως 3.12. Ο υπολογισμός του P_{rd} θα γίνει στην επόμενη παράγραφο.

Το πεδίο περίθλασης $P_d(r, z)$ αναφέρεται σε ένα περιβάλλον του οποίου οι παράμετροι μεταβάλλονται με την απόσταση και περιέχει την ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Συγκεκριμένα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο 3.2.2, το πεδίο περίθλασης χωρίζεται σε τρία υποπεδία: το πεδίο P_d^N (*Near Field*), το πεδίο P_d^I (*Intermediate Field*) και το P_d^F (*Far Field*).

Ως P_d^N χαρακτηρίζεται το υποπεδίο για $0 \leq r \leq r_N = r_1$ και $0 \leq z < \infty$. Ως P_d^F χαρακτηρίζεται το υποπεδίο για $r \geq r_F = r_2$ και $0 \leq z < \infty$. Ανάμεσα στα δύο αυτά πεδία, το P_d^I για $r_1 = r_N \leq r \leq r_F = r_2$ και $0 \leq z < \infty$, χαρακτηρίζεται από αυθαίρετη μεταβολή του προφίλ ταχύτητας $c = c(r, z)$. Το προφίλ ταχύτητας τόσο στο πεδίο κοντά στην ανομοιογένεια όσο και μακριά από αυτή θα είναι συνάρτηση μόνο του z .

Ο υπολογισμός των δύο υποπεδίων P_d^N και P_d^F έχει γίνει στην Παράγραφο 3.2.2. Υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις αυτών:

$$P_d^N(r, z) = \sum_{m=1}^M E_m^N J_0(k_m^N r) u_m^N(z) \quad (4.2)$$

και

$$P_d^F(r, z) = \sum_{m=1}^M E_m^F H_0^{(1)}(k_m^F r) u_m^F(z) \quad (4.3)$$

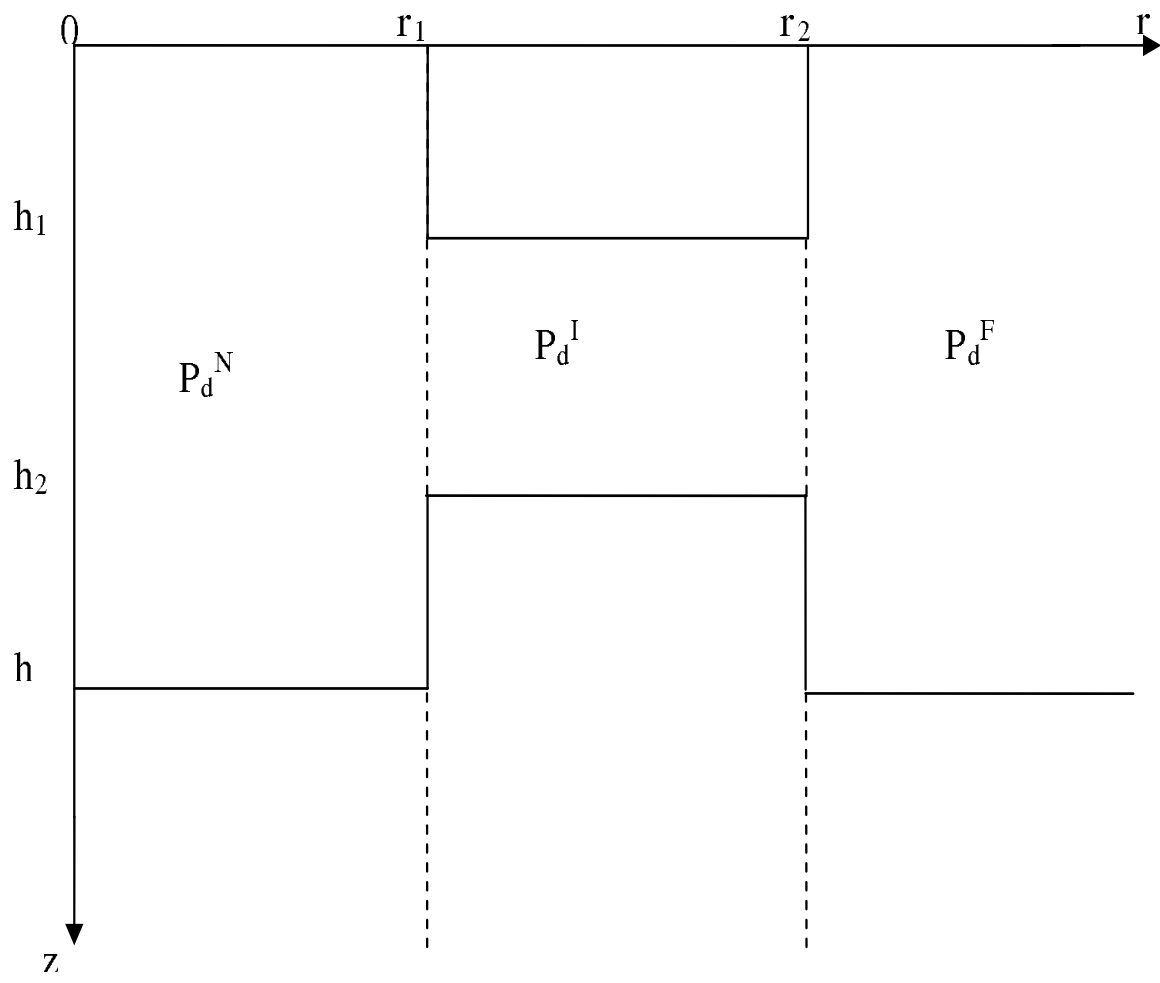
όπου E_m^N, E_m^F άγνωστοι συντελεστές οι οποίοι προσδιορίζονται, $J_0(k_m^N r)$ η συνάρτηση *Bessel* μηδενικής τάξης, $H_0^{(1)}(k_m^F r)$ η συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, k_m^N, k_m^F οι ιδιοτιμές και $u_m^N(z), u_m^F(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι λόγω του γεγονότος ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του πεδίου ακτινοβολίας υπακούουν ακριβώς στην ίδια εξίσωση και στις ίδιες οριακές συνθήκες με εκείνες των υποπεδίων P_d^N και P_d^F , ισχύει $u_m(z) = u_m^N(z) = u_m^F(z)$ και $k_m = k_m^N = k_m^F$.

Το υποπεδίο P_d^I περιλαμβάνει την ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Η γεωμετρία του προβήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2. Το P_d^I υπακούει στην ομογενή *Helmholtz* συνοδευόμενο με τις συνοριακές συνθήκες που έχουν αναφερθεί στην Παράγραφο 3.2.2. Για λόγους ευκολίας στην επεξεργασία του συστήματος θα τροποποιήσουμε την έκφραση 3.46 που αντιστοιχεί στο πεδίο περίθλασης και θα εκφράσουμε την πίεση ως:

$$P_d^I(r, z) = \sum_{m=1}^M (A_m H_0^1(k_m^I r) + B_m H_0^2(k_m^I r)) u_m^I(z) - P_{rd} \quad (4.4)$$

όπου η ως άνω έκφραση δικαιολογείται από το γεγονός ότι η έκφραση 3.46 ισχύει και για το ολικό πεδίο. Ακολουθώντας τον συμβολισμό της 4.4, οι συντελεστές A_m διαφέρουν από εκείνους της 3.42. Οι άγνωστοι συντελεστές A_m, B_m προσδιορίζονται, $H_0^{(1)}$ συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης, $H_0^{(2)}$ συνάρτηση *Hankel* δευτέρου είδους μηδενικής τάξης, k_m^I και $u_m^I(z)$ οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι ο διαδιδόμενος αριθμός ιδιομορφών σε όλα τα υποχωρία (M) παραμένει ο ίδιος.



Σχήμα 4.2: Το πεδίο περίθλασης P_d και ο χωρισμός του σε P_d^N, P_d^I, P_d^F .

4.4 Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων

Έχοντας εκφράσει τη λύση σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων, μπορούμε να μεταβούμε στο επόμενο στάδιο, δηλαδή στον υπολογισμό των ιδιοσυναρτήσεων και των αντίστοιχων ιδιοτιμών. Σε κάθε περίπτωση, οι ιδιοσυναρτήσεις υπακούουν σε ένα πρόβλημα βάρους και οι ιδιοτιμές προκύπτουν από μία χαρακτηριστική εξίσωση εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες.

4.4.1 Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του P_{rd}

Υπενθυμίζεται ότι στο πεδίο ακτινοβολίας οι ιδιοσυναρτήσεις ικανοποιούν την συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 u_m(z)}{dz^2} + (k^2(z) - k_m^2) u_m(z) = 0 \quad (4.5)$$

όπου k_m οι ιδιοτιμές του προβλήματος. Το πρόβλημα βάρους συνοδεύεται από οριακές συνθήκες, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις 3.9 έως 3.12. Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.2 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι σταθερή ως προς z , η λύση του προβλήματος εκφράζεται ως εξής:

$$u_m(z) = \begin{cases} ae^{it_1 z} + be^{-it_1 z}, & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ ce^{-t_2 z}, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

όπου a, b, c άγνωστοι, οι οποίοι θα προσδιοριστούν. Με t_1 θέτουμε την ποσότητα $\sqrt{k^2(z) - k_m^2}$ για το διάστημα $0 \leq z \leq h$ και με t_2 θέτουμε τη διαφορά $\sqrt{-k^2(z) + k_m^2}$ για το διάστημα $h \leq z < \infty$. Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων για το διάστημα $h \leq z < \infty$ οφείλεται στην συνθήκη 3.12.

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών θα εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες στη λύση του προβλήματος. Εφαρμόζοντας την συνθήκη 3.9 στην $u_m(z)$ προκύπτει ότι $b = -a$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τις 3.10, 3.11 στην $u_m(z)$, θα προκύψει ένα ομογενές σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:

$$a(e^{it_1 h} - e^{-it_1 h}) = ce^{-t_2 h} \quad (4.6)$$

$$a\left(\frac{it_1}{\rho_1}(e^{it_1 h} + e^{-it_1 h})\right) = -\frac{t_2}{\rho_2} ce^{-t_2 h} \quad (4.7)$$

Λόγω του κανόνα του *Cramer*, για να έχει το σύστημα μη-μηδενική λύση, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να ισούται με μηδέν. Οπότε έχουμε:

$$\begin{vmatrix} e^{it_1h} - e^{-it_1h} & -e^{-t_2h} \\ \frac{it_1}{\rho_1}(e^{it_1h} + e^{-it_1h}) & \frac{t_2}{\rho_2}e^{-t_2h} \end{vmatrix} = 0$$

και προκύπτει το εξής:

$$e^{2it_1h} = \frac{t_2\rho_1 + i\rho_2t_1}{t_2\rho_1 - i\rho_2t_1} \quad (4.8)$$

Η εξίσωση 4.8 αποτελεί την χαρακτηριστική εξίσωση, από την οποία προκύπτουν οι ιδιοτιμές. Πρόκειται για μη-γραμμική εξίσωση, η λύση της οποίας υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους.

Στη συνέχεια για τον υπολογισμό των αγνώστων των συντελεστών θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε την 4.6 ως προς c και έχουμε το εξής:

$$c = a \left(\frac{e^{it_1h} - e^{-t_1h}}{e^{-t_2h}} \right). \quad (4.9)$$

Οπότε, οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι ακόλουθες:

$$u_m(z) = \begin{cases} a(e^{it_1z} - e^{-it_1z}), & \text{αν } 0 \leq z \leq h \\ a \left(\frac{e^{it_1h} - e^{-it_1h}}{e^{-t_2h}} \right) e^{-t_2z}, & \text{αν } h \leq z < \infty \end{cases}$$

Ο άγνωστος a θα υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} (u_m(z))^2 dz = 1 \Leftrightarrow \int_0^h \frac{1}{\rho_1(z)} (u_m^{(1)}(z))^2 dz + \int_h^\infty \frac{1}{\rho_2(z)} (u_m^{(2)}(z))^2 dz = 1 \quad (4.10)$$

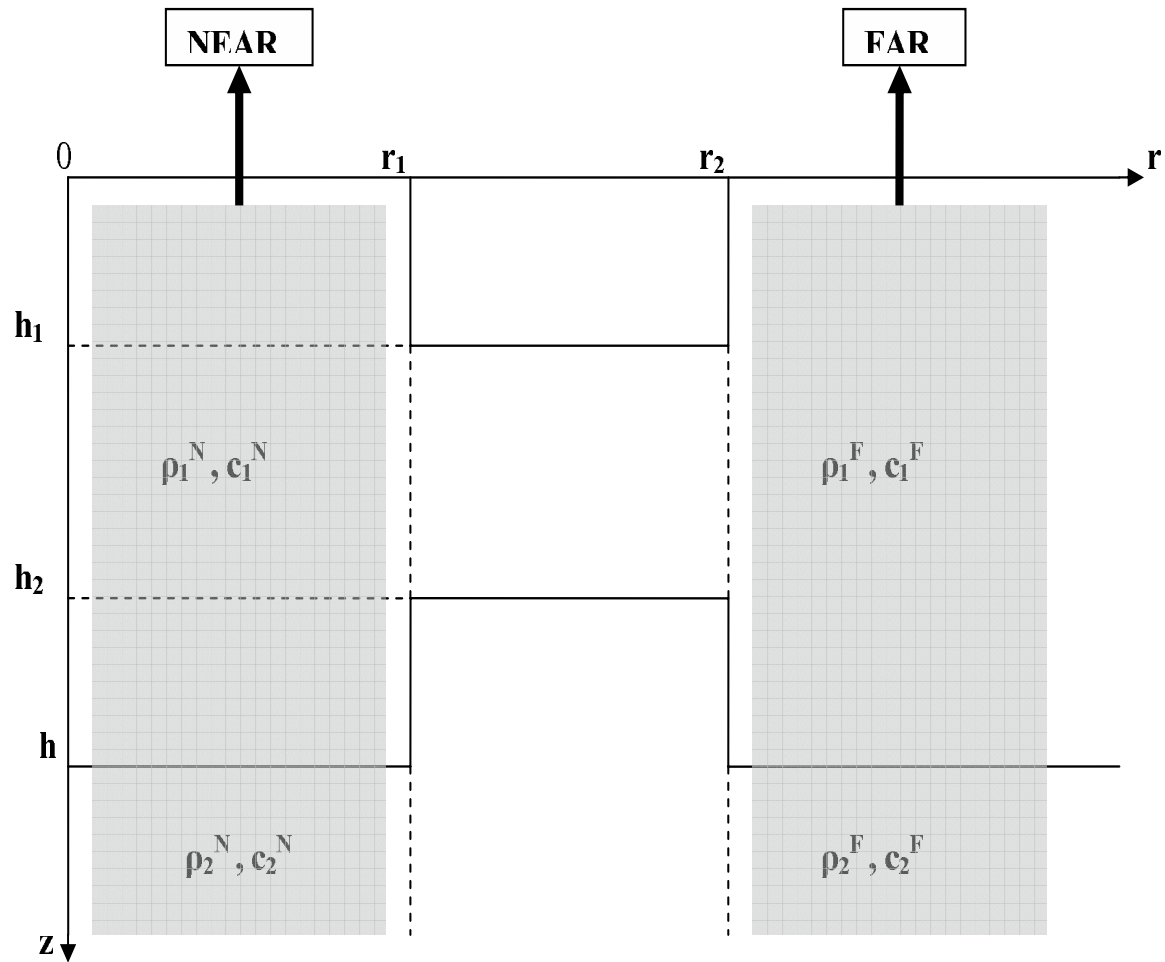
από όπου παίρνουμε:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2i\rho_1t_1} (e^{2it_1h} - e^{-2it_1h} - 4iht_1) + \frac{1}{2\rho_2t_2} (e^{2it_1h} - e^{-2it_1h} - 2) \quad (4.11)$$

Τέλος, έχοντας υπολογίσει τον άγνωστο a , στη συνέχεια υπολογίζεται εύκολα και ο άγνωστος c .

4.4.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του $P_d^{N,F}$

Οι ιδιοσυναρτήσεις $u_m^N(z)$ και $u_m^F(z)$ των πεδίων P_d^N και P_d^F αντίστοιχα, ικανοποιούν, και αυτές, το πρόβλημα βάθους της σχέσης 3.8 συνοδευόμενο από τις συνθήκες των σχέσεων 3.9 έως 3.12. Η γεωμετρία του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Τα περιβάλλοντα P_d^N και P_d^F .

Η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων είναι ακριβώς ίδια με εκείνη που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, η λύση του προβλήματος βάθους εκφράζεται πάλι με την μορφή που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες στη λύση, θα προκύψει πάλι ένα ομογενές σύστημα 2×2 και παίρνοντας την ορίζουσα των αγνώστων των συντελεστών θα προκύψει η χαρακτηριστική εξίσωση από την οποία θα υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

4.4.3 Υπολογισμός ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων του P_d^I

Στο πεδίο P_d^I , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4, οι ιδιοσυναρτήσεις υπακούουν το ομογενές πρόβλημα βάρους:

$$\frac{d^2 u_m^{I,j}(z)}{dz^2} + (k^2(z) - (k_m^{I,j})^2) u_m^{I,j}(z) = 0 \quad (4.12)$$

συνοδευόμενο με τις ακόλουθες συνθήκες ορίων και διεπιφάνειας:

$$u_m^{I,1}(0) = 0 \quad (4.13)$$

$$u_m^{I,1}(h_1) = u_m^{I,2}(h_1) \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\rho_1^I} \frac{du_m^{I,1}(h_1)}{dz} = \frac{1}{\rho_2^I} \frac{du_m^{I,2}(h_1)}{dz} \quad (4.15)$$

$$u_m^{I,2}(h_2) = u_m^{I,3}(h_2) \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\rho_2^I} \frac{du_m^{I,2}(h_2)}{dz} = \frac{1}{\rho_3^I} \frac{du_m^{I,3}(h_2)}{dz} \quad (4.17)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_m^{I,3}(z) = 0 \quad (4.18)$$

όπου

$$u_m^I(z) = \begin{cases} u_m^{I,1}(z), & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ u_m^{I,2}(z), & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ u_m^{I,3}(z), & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

και

$$\rho^I = \begin{cases} \rho_1^I, & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ \rho_2^I, & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ \rho_3^I, & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

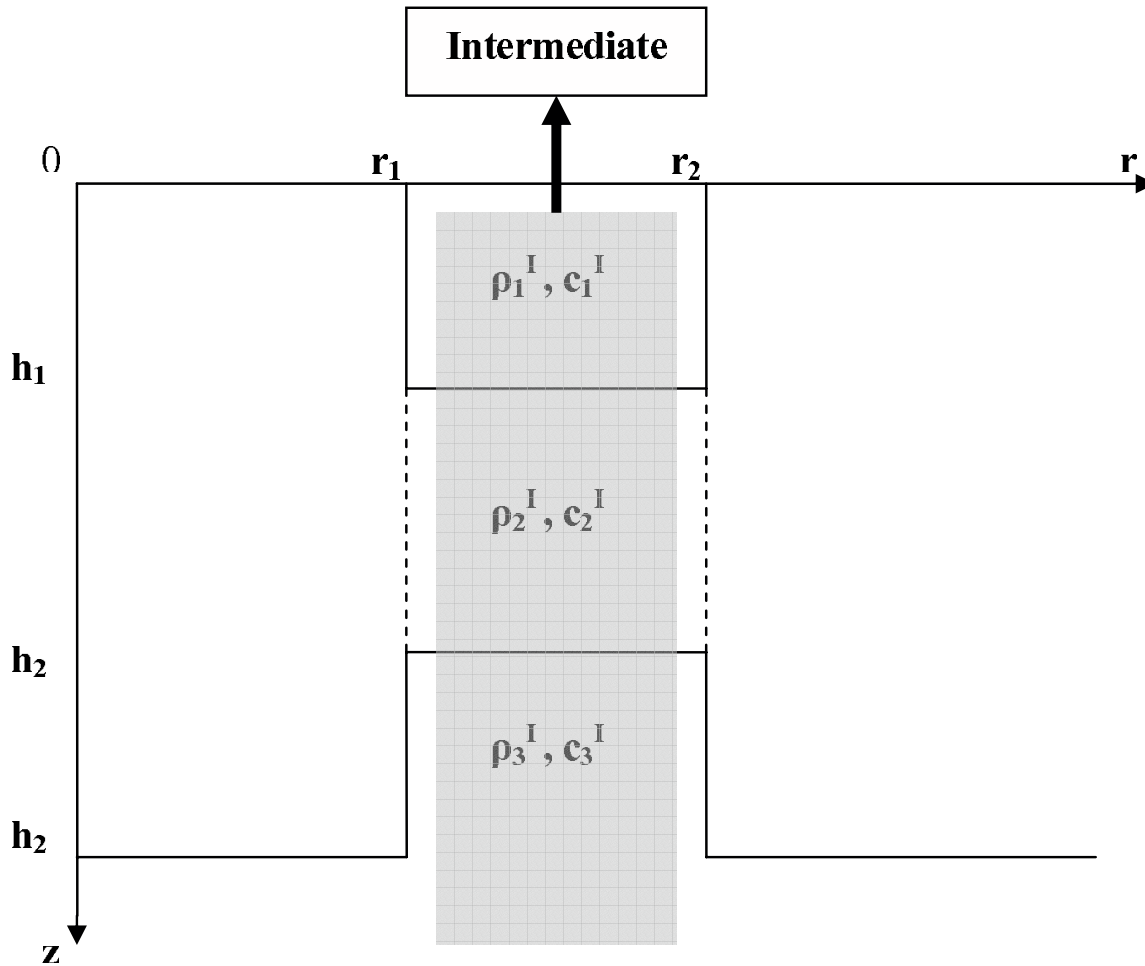
Οι ιδιοσυναρτήσεις όπως ορίζονται παραπάνω αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με συνθήκη ορθοκανονικότητας:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_j^I(z)} u_m^{I,j}(z) u_n^{I,j}(z) dz = \delta_{nm} \quad (4.19)$$

Όπως παρουσιάσαμε και στις δύο προηγούμενες παραγράφους, η διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων παραμένει ίδια. Πρώτα από όλα, θα αναφέρουμε τη λύση του προβλήματος:

$$u_m^I(z) = \begin{cases} ae^{it_1 z} + be^{-it_1 z}, & \text{αν } 0 \leq z \leq h_1 \\ ce^{it_2 z} + de^{-it_2 z}, & \text{αν } h_1 \leq z \leq h_2 \\ fe^{-t_3 z}, & \text{αν } h_2 \leq z < \infty \end{cases}$$

όπου a, b, c, d, f άγνωστοι, τους οποίους θα προσδιορίσουμε. Με t_1 θέτουμε, και πάλι, την ποσότητα $\sqrt{k^2(z) - k_m^2}$ για το διάστημα $0 \leq z \leq h_1$, με t_2 θέτουμε την ποσότητα $\sqrt{k^2(z) - k_m^2}$ για το διάστημα $h_1 \leq z \leq h_2$ και με t_3 θέτουμε την ποσότητα $\sqrt{-k^2(z) + k_m^2}$ για το διάστημα $h_2 \leq z < \infty$.



Σχήμα 4.4: Το περιβάλλον P_d^I .

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει ένα ομογενές σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Για την εύρεση της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα απαιτήσουμε η ορίζουσα των αγνώστων των συντελεστών να ισούται με μηδέν. Εφαρμόζοντας την ιδιοσυνάρτηση $u_m^I(z)$ στις συνθήκες καταλήγουμε στην ακόλουθη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$e^{2it_2h_1} \left(\frac{-it_2}{\rho_2} + \frac{t_3}{\rho_3} \right) \left[e^{2it_1h_1} \left(\frac{t_1}{\rho_1} - \frac{t_2}{\rho_2} \right) + \left(\frac{t_1}{\rho_1} + \frac{t_2}{\rho_2} \right) \right] - e^{2it_2h_2} \left(\frac{it_2}{\rho_2} + \frac{t_3}{\rho_3} \right) \left[e^{2it_1h_1} \left(\frac{t_1}{\rho_1} + \frac{t_2}{\rho_2} \right) + \left(\frac{t_1}{\rho_1} - \frac{t_2}{\rho_2} \right) \right] = 0 \quad (4.20)$$

Λύνοντας τη μη-γραμμική αυτή εξίσωση ως προς k_m με κατάλληλη αριθμητική μέθοδο υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές. Στη συνέχεια, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο του *Cramer* θα προκύψουν οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος, οι οποίες, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, γράφονται συναρτήσει ενός από τους αγνώστους του προβλήματος, ο οποίος θα υπολογιστεί κάνοντας χρήση της συνθήκης ορθοκανονικότητας:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho^I(z)} (u_m^{I,j}(z))^2 dz = 1 \Leftrightarrow \int_0^{h_1} \frac{1}{\rho_1^I(z)} (u_m^{I,1}(z))^2 dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\rho_2^I(z)} (u_m^{I,2}(z))^2 dz + \int_{h_2}^\infty \frac{1}{\rho_3^I(z)} (u_m^{I,3}(z))^2 dz = 1 \quad (4.21)$$

4.5 Υπολογισμός των συντελεστών σύζευξης

Έχοντας υπολογίσει τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τους συντελεστές σύζευξης και στη συνέχεια τους αγνώστους συντελεστές των αναπαραστάσεων (Σχέσεις 4.2, 4.3 και 4.4). Για να έχει το πρόβλημα μοναδική λύση, απαιτείται η επιβολή καταλλήλων συνθηκών για $r = r_1$ και $r = r_2$. Και αυτό γιατί, όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με τον ορισμό των συναρτήσεων P_d^* όπου $*$ = N, I, F , θα πρέπει να είναι συμβιβαστές στα τεχνικά σύνορα r_1, r_2 . Η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας θα μας δώσουν τις απαραίτητες συνθήκες για αυτό:

$$P_d^N(r_1, \cdot) = P_d^I(r_1, \cdot) \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{\rho^N} \frac{\partial P_d^N(r_1, \cdot)}{\partial r} = \frac{1}{\rho^I} \frac{\partial P_d^I(r_1, \cdot)}{\partial r} \quad (4.23)$$

$$P_d^F(r_2, \cdot) = P_d^I(r_2, \cdot) \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\rho^F} \frac{\partial P_d^F(r_2, \cdot)}{\partial r} = \frac{1}{\rho^I} \frac{\partial P_d^I(r_2, \cdot)}{\partial r} \quad (4.25)$$

Σκοπός μας, αρχικά, είναι να αναλύσουμε τις παραπάνω συνθήκες, από όπου θα προκύψουν και οι συντελεστές σύζευξης. Συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε με την σχέση 4.22 και θα αντικαταστήσουμε σε αυτήν τις εκφράσεις των πιέσεων, ως αναπαράστασεις σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων. Οπότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M E_m^N J_0(k_m^N r_1) u_m^N(z) &= \sum_{m=1}^M (A_m H_0^{(1)}(k_m^I r_1) + B_m H_0^{(2)}(k_m^I r_1)) u_m^I(z) \\ &\quad - \frac{i}{4\rho_1} \sum_{m=1}^M u_m(z) u_m(z_0) H_0^{(1)}(k_m r_1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $u_{\mu}^N(z)$, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\frac{1}{\rho^N} u_{\mu}^N(z)$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως ∞ προκύπτει

$$\begin{aligned} E_{\mu}^N J_0(k_{\mu}^N r_1) &= \sum_{m=1}^M (A_m H_0^{(1)}(k_m^I r_1) + B_m H_0^{(2)}(k_m^I r_1)) \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^N} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz \right) \\ &\quad - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) H_0^{(1)}(k_{\mu} r_1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα στην 4.27 ως πρώτο συντελεστή σύζευξης C_1 :

$$C_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^N} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz. \quad (4.28)$$

Διαιρώντας την 4.27 με $J_0(k_{\mu}^N r_1)$ και χρησιμοποιώντας την 4.28, προκύπτει:

$$E_{\mu}^N = \sum_{m=1}^M \left(A_m \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + B_m \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} \right) C_1 - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) \frac{H_0^{(1)}(k_{\mu} r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} \quad (4.29)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την συνθήκη 4.23:

$$\frac{1}{\rho^N} \frac{\partial P_d^N(r_1, \cdot)}{\partial r} = \frac{1}{\rho^I} \frac{\partial P_d^I(r_1, \cdot)}{\partial r} \quad (4.30)$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις *Hankel* με τις παραγώγους αυτών,

$$\frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx} = -xH_1^{(1)}(x) \quad (4.31)$$

$$\frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} = -xH_1^{(2)}(x) \quad (4.32)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $u_{\mu}^N(z)$, η 4.30 γράφεται

$$\begin{aligned} -k_{\mu}^N E_{\mu}^N J_1(k_{\mu}^N r_1) &= -\sum_{m=1}^M k_m^I (A_m H_1^{(1)}(k_m^I r_1) + B_m H_1^{(2)}(k_m^I r_1)) \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^I} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz \right) \\ &\quad + \frac{i}{4\rho_1} k_{\mu} u_{\mu}(z_0) H_1^{(1)}(k_{\mu} r_1) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα στην 4.33 ως δεύτερο συντελεστής σύζευξης C_2 :

$$C_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^I} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz \quad (4.34)$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας την 4.33 με $-k_{\mu}^N J_1(k_{\mu}^N r_1)$ παίρνουμε:

$$E_{\mu}^N = \sum_{m=1}^M \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \left(A_m \frac{H_1^{(1)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} + B_m \frac{H_1^{(2)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) C_2 - \frac{i}{4\rho_1} \frac{k_{\mu}}{k_{\mu}^N} u_{\mu}(z_0) \frac{H_1^{(1)}(k_{\mu} r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \quad (4.35)$$

Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων *Hankel* για μεγάλα ορίσματα

$$H_1^{(1)}(x) = -iH_0^{(1)}(x) \quad (4.36)$$

$$H_1^{(2)}(x) = iH_0^{(2)}(x) \quad (4.37)$$

η 4.35 παίρνει την εξής μορφή:

$$E_{\mu}^N = \sum_{m=1}^M \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \left(A_m \frac{-iH_0^{(1)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} + B_m \frac{iH_0^{(2)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) C_2 - \frac{i}{4\rho_1} \frac{k_{\mu}}{k_{\mu}^N} u_{\mu}(z_0) \frac{-iH_0^{(1)}(k_{\mu} r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \quad (4.38)$$

Με ανάλογο τρόπο θα εξαχθούν οι συντελεστές σύζευξης C_3, C_4 από τις συνθήκες 4.24 και 4.25 αντίστοιχα. Αναπτύσσοντας την συνθήκη 4.24 και χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\rho^F} u_m^F(z)$, προκύπτει

$$\begin{aligned} E_{\mu}^F H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2) &= \sum_{m=1}^M (A_m H_0^{(1)}(k_m^I r_2) + B_m H_0^{(2)}(k_m^I r_2)) \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^F} u_{\mu}^F(z) u_m^I(z) dz \right) \\ &\quad - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) H_0^{(1)}(k_{\mu} r_2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ο συντελεστής σύζευξης C_3 θα ισούται με

$$C_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^F} u_{\mu}^F(z) u_m^I(z) dz. \quad (4.40)$$

Διαιρώντας με $H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)$, τα δύο μέλη της 4.39 καταλήγουμε στη σχέση:

$$E_{\mu}^F = \sum_{m=1}^M \left(A_m \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} + B_m \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \right) C_3 - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) \frac{H_0^{(1)}(k_{\mu} r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \quad (4.41)$$

Τέλος, εφαρμόζοντας στην 4.25 την διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή του συντελεστή C_2 , καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$E_{\mu}^F = \sum_{m=1}^M \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} \left(A_m \frac{H_1^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} + B_m \frac{H_1^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \right) C_4 - \frac{i}{4\rho_1} \frac{k_{\mu}}{k_{\mu}^F} u_{\mu}(z_0) \frac{H_1^{(1)}(k_{\mu} r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \quad (4.42)$$

όπου

$$C_4 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^I} u_{\mu}^F(z) u_m^I(z) dz \quad (4.43)$$

είναι ο τέταρτος συντελεστής σύζευξης.

Οπότε, οι συντελεστές σύζευξης του προβλήματος είναι οι ακόλουθοι

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^N} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz \\ C_2 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^I} u_{\mu}^N(z) u_m^I(z) dz \\ C_3 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^F} u_{\mu}^F(z) u_m^I(z) dz \\ C_4 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^I} u_{\mu}^F(z) u_m^I(z) dz \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.6 Υπολογισμός των αγνώστων συντελεστών των αναπαραστάσεων

Έχοντας εξάγει τους τέσσερις συντελεστές σύζευξης του προβλήματος, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τους αγνώστους συντελεστές των αναπαραστάσεων συνδιάζοντας τις σχέσεις 4.29, 4.38, 4.41, 4.42. Για τον υπολογισμό τους, θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε την μοναδικότητα της λύσης. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε M αγνώστους E_m^N για το εγγύς πεδίο, $2 \times M \times 1$ αγνώστους (A_m, B_m) για το χωρίο της ανομοιογένειας (εφόσον $J = 1$) και M αγνώστους E_m^F για το μακρινό πεδίο. Άρα έχουμε $4 \times M$ αγνώστους, οπότε χρειαζόμαστε $4 \times M$ εξισώσεις. Μετρώντας τις εξισώσεις, όπως έχουν αναπτυχθεί στην προηγούμενη παράγραφο, διαπιστώνουμε ότι ισχύει κάτι τέτοιο.

Άρα εξισώνοντας τις σχέσεις 4.29 και 4.38 έχουμε

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left(A_m \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + B_m \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} \right) C_1 - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) \frac{H_0^{(1)}(k_{\mu} r_1)}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \left(A_m \frac{-iH_0^{(1)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} + B_m \frac{iH_0^{(2)}(k_m^I r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) C_2 - \frac{i}{4\rho_1} \frac{k_{\mu}}{k_{\mu}^N} u_{\mu}(z_0) \frac{-iH_0^{(1)}(k_{\mu} r_1)}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Κάνοντας αναγωγή γνωστών και άγνωστων όρων καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left(A_m H_0^{(1)}(k_m^I r_1) \left(\frac{C_1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + i \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \frac{C_2}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) + B_m H_0^{(2)}(k_m^I r_1) \left(\frac{C_1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} - i \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \frac{C_2}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) \right) \\ &= \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) H_0^{(1)}(k_{\mu} r_1) \left(\frac{1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + \frac{i}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Στη συνέχεια εξισώνοντας τις 4.41 και 4.42 έχουμε

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left(A_m \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} + B_m \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \right) C_3 - \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) \frac{H_0^{(1)}(k_{\mu} r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} \left(A_m \frac{H_1^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} + B_m \frac{H_1^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \right) C_4 - \frac{i}{4\rho_1} \frac{k_{\mu}}{k_{\mu}^F} u_{\mu}(z_0) \frac{H_1^{(1)}(k_{\mu} r_2)}{H_1^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις στην τελευταία θα καταλήξουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$\sum_{m=1}^M \left(A_m \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \left(C_3 - \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} C_4 \right) + B_m \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \left(C_3 + \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} C_4 \right) \right) = 0 \quad (4.48)$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 4.46 και 4.48 θα προκύψει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $D \cdot X = U$, από όπου θα υπολογιστούν οι άγνωστοι A_m, B_m . Συγκεκριμένα, θα καταλήξουμε στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} H_0^{(1)}(k_m^I r_1) \left(\frac{C_1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + i \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \frac{C_2}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) & H_0^{(2)}(k_m^I r_1) \left(\frac{C_1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} - i \frac{k_m^I}{k_{\mu}^N} \frac{C_2}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) \\ \frac{H_0^{(1)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \left(C_3 - \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} C_4 \right) & \frac{H_0^{(2)}(k_m^I r_2)}{H_0^{(1)}(k_{\mu}^F r_2)} \left(C_3 + \frac{k_m^I}{k_{\mu}^F} C_4 \right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i}{4\rho_1} u_{\mu}(z_0) H_0^{(1)}(k_{\mu} r_1) \left(\frac{1}{J_0(k_{\mu}^N r_1)} + \frac{i}{J_1(k_{\mu}^N r_1)} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου ο πίνακας D έχει διάσταση $2M \times 2M$, το διάνυσμα X έχει διάσταση $2M$, όπως επίσης και το διάνυσμα U είναι διαστάσεων $2M$.

Βέβαια, για τον υπολογισμό των A_m, B_m θα χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων *Bessel* και *Hankel* για μεγάλα ορίσματα:

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \quad (4.49)$$

$$H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})} \quad (4.50)$$

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad (4.51)$$

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \quad (4.52)$$

Μετά την εύρεση των A_m, B_m , ο υπολογισμός των E_m^N, E_m^F θα είναι άμεσος.

4.7 Υπολογισμός της απώλειας διάδοσης TL

Έχοντας υπολογίσει τις ιδιοτιμές-ιδιοσυναρτήσεις, τους συντελεστές σύζευξης και τους αγνώστους συντελεστές των αναπαραστάσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε την απώλεια διάδοσης (*Transmission Loss*) του ακουστικού πεδίου. Εκφράζεται σε μονάδες *db* (*decibel*) και είναι ένα ενεργειακό μέγεθος το οποίο εκφράζει το ποσό της έντασης του ακουστικού πεδίου που μειώνεται καθώς το σήμα διαδίδεται στον κυματοδηγό. Ορίζεται ως:

$$TL(r, z) = -20 \frac{|P(r, z)|}{|P_0|} \quad (4.53)$$

όπου P_0 είναι μία πίεση αναφοράς που ορίζεται, συνήθως, ως η πίεση σε απόσταση $1m$ από μία σημειακή αρμονική πηγή που εκπέμπει σε μη-φραγμένο χωρίο. Οπότε, για τον υπολογισμό της P_0 , θα πρέπει να βρούμε τη λύση του προβλήματος της διάδοσης του ήχου σε μη-φραγμένο χωρίο.

Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι η μη-ομογενής *Helmholtz*

$$\Delta P(r) + k^2 P(r) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (4.54)$$

που σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (στην περίπτωση της αξονικής συμμετρίας) και με P εξαρτόμενο μόνο από το r γράφεται

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dP}{dr} + k^2 P = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}. \quad (4.55)$$

Το πρόβλημα, συνοδευόμενο από μία συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld*, μας δίνει την ακόλουθη λύση

$$P(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}. \quad (4.56)$$

Οπότε, για $r = 1$ έχουμε

$$|P_0| = \left| \frac{1}{4\pi r} \right| = \frac{1}{4\pi}. \quad (4.57)$$

Για τον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης, όπως φαίνεται και στην σχέση 4.53, χρειάζεται ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης για κάθε (r, z) .

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα.

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικά αποτελέσματα

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξάγουμε αποτελέσματα για περιπτώσεις στις οποίες η ανομοιογένεια, όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, παρατηρείται είτε μόνο στην επιφάνεια είτε μόνο στον πυθμένα είτε να ισχύουν και τα δύο. Στην Περίπτωση *I* θα εξετάσουμε το περιβάλλον στο οποίο δεν έχουμε ανομοιογένεια, δηλαδή έχουμε επίπεδα σύνορα. Στην Περίπτωση *II* θα ασχοληθούμε με περιβάλλον στο οποίο έχουμε επίπεδη επιφάνεια και ανύψωση στον πυθμένα. Στην επόμενη Περίπτωση το περιβάλλον περιλαμβάνει πάγο στην επιφάνεια και επίπεδο πυθμένα. Τελος, στις δύο τελευταίες Περιπτώσεις το περιβάλλον θα περιλαμβάνει πάγο στην επιφάνεια και ανύψωση στον πυθμένα. Σε όλες τις Περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών, όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, θα εξαχθούν αποτελέσματα για τους συντελεστές σύζευξης και την απώλεια διάδοσης και, φυσικά, θα συγκριθούν μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση, αρχικά υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του εκάστοτε προβλήματος βάθους και στη συνέχεια οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Κατόπιν υπολογίζονται οι συντελεστές σύζευξης, οι οποίοι, μαζί με τα ανωτέρω, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των αγνώστων των αναπαραστάσεων, όπως έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Επισημαίνουμε ότι για την εύρεση των ιδιοτιμών θα πρέπει να καθοριστεί κάθε φορά το αντίστοιχο διάστημα, στο οποίο οι ιδιοτιμές είναι επιτρεπτές [11]. Συγκεκριμένα, γράφοντας με k_n τις ιδιοτιμές, τότε έχουμε ακουστική διάδοση για

$$\frac{\omega}{c_{max}} \leq k_n \leq \frac{\omega}{c_{min}} \quad (5.1)$$

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων είναι

τα ακόλουθα:

$$\text{Θέση πηγής} \rightarrow z_0 = 35m \quad (5.2)$$

$$\text{Θέση δέκτη} \rightarrow z = 50m \quad (5.3)$$

$$\text{Αρχή ανομοιογένειας} \rightarrow r_1 = 2000m \quad (5.4)$$

$$\text{Πέρασ ανομοιογένειας} \rightarrow r_2 = 3000m \quad (5.5)$$

$$\text{Πάχος πάγου} \rightarrow h_1 = 10, 20m \quad (5.6)$$

$$\text{Ανύψωση πυθμένα} \rightarrow h_2 = 70, 60m \quad (5.7)$$

$$\text{Πυθμένας} \rightarrow h = 80m \quad (5.8)$$

$$\text{Συχνότητα πηγής} \rightarrow f = 50Hz \quad (5.9)$$

$$\text{Πυκνότητα στο νερό} \rightarrow \rho_w = 1000Kg/m^3 \quad (5.10)$$

$$\text{Πυκνότητα στον πάγο} \rightarrow \rho_i = 900Kg/m^3 \quad (5.11)$$

$$\text{Πυκνότητα στο ίζημα} \rightarrow \rho_b = 1700Kg/m^3 \quad (5.12)$$

$$\text{Ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό} \rightarrow c_w = 1500m/sec \quad (5.13)$$

$$\text{Ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον πάγο} \rightarrow c_i = 2000m/sec \quad (5.14)$$

$$\text{Ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο ίζημα} \rightarrow c_b = 2500m/sec \quad (5.15)$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων θα γίνει βασισόμενη στις γραφικές παραστάσεις που παραθέτουμε παρακάτω. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει την απώλεια διάδοσης για περιβάλλοντα με ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα, με τη μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών. Για το λόγο αυτό, στο Κεφάλαιο 4 θεωρήσαμε πέντε διαφορετικά περιβάλλοντα, όπως πάγο πάχους 20m στην επιφάνεια, ανύψωση 20m στον πυθμένα, πάχος και ανύψωση 20m το καθένα και, τέλος, πάχος και ανύψωση 10m το καθένα.

Συγκεκριμένα, η σύγκριση θα γίνει με την γραφική παράσταση της απώλειας διάδοσης σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα. Σε όλα τα γραφήματα με κόκκινο χρώμα παριστάνεται η απώλεια διάδοσης για περιβάλλον με επίπεδα σύνορα TLP και με μπλε χρώμα παριστάνεται περιβάλλον με την εκάστοτε ανομοιογένεια. Η απώλεια διάδοσης, σε κάθε περίπτωση, υπολογίζεται για απόσταση $r = 100m$ έως $r = 10.000m$, με θέση πηγής $z_0 = 35m$ και θέση δέκτη $z = 50m$.

Επισημαίνουμε, ότι ενδέχεται να υπάρχουν λιγότερες διαδιδόμενες ιδιομορφές στην περιοχή της ανομοιογένειας από ότι έξω από αυτή. Αυτό παρουσιάζεται στα αποτελέσματα που παραθέτουμε στη συνέχεια. Για αυτό, ο αριθμός των ιδιομορφών που χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση είναι ακριβώς εκείνος που υπολογίζεται στην περιοχή της ανομοιογένειας.

5.2 Περίπτωση I

Ξεκινάμε με την περίπτωση που έχουμε επίπεδα σύνορα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2. Η ακουστική πίεση εκφράζεται σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων, όπως έχουμε περιγράψει στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Οι ιδιοσυναρτήσεις ικανοποιούν το πρόβλημα βάρους, το οποίο έχει παρουσιαστεί στην παράγραφο 4.4.1. Οι ιδιοτιμές υπακούουν στην ακόλουθη σχέση

$$\frac{\omega}{c_{max}} \leq k_n \leq \frac{\omega}{c_{min}} \Leftrightarrow \frac{2\pi f}{2500} \leq k_n \leq \frac{2\pi f}{1500} \quad (5.16)$$

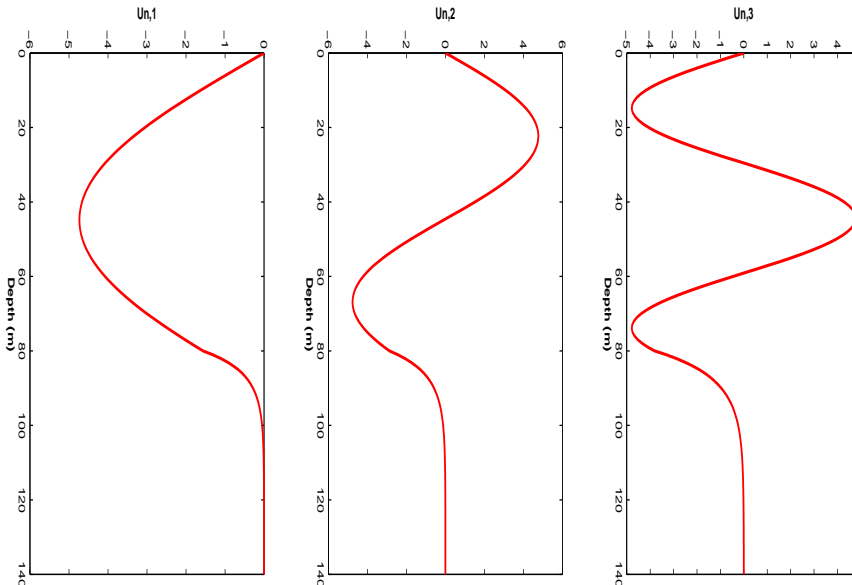
και είναι οι εξής:

$$k_1 = 0.180451 \quad (5.17)$$

$$k_2 = 0.197228 \quad (5.18)$$

$$k_3 = 0.206483 \quad (5.19)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις που προκύπτουν παριστάνονται στα παρακάτω διαγράμματα. Στη



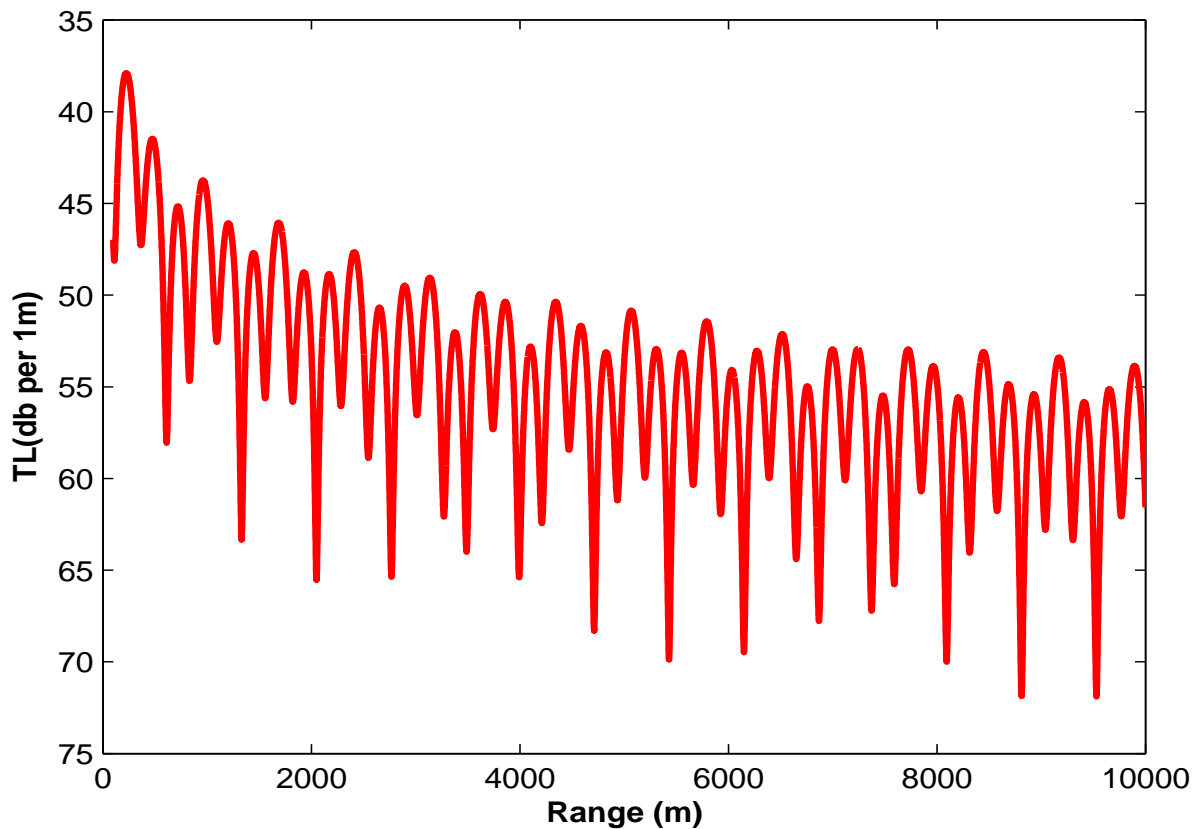
Σχήμα 5.1: Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει την ιδιοσυνάρτηση για $k = 0.206483$, το δεύτερο για $k = 0.197228$ και το τρίτο για $k = 0.180451$

συνέχεια, υπολογίζοντας τους συντελεστές σύζευξης προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αυτό γιατί έχουμε πλήρη σύζευξη των ιδιομορφών.

Τέλος, υπολογίζοντας τους αγνώστους των αναπαραστάσεων των πιέσεων μέσω της επίλυσης του γραμμικού συστήματος (Παράγραφος 4.6), είναι εφικτός ο υπολογισμός της απώλειας διάδοσης TL (db) μέσω της Σχέσης 4.58. Η γραφική παράσταση του TL συναρτήσει του r παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



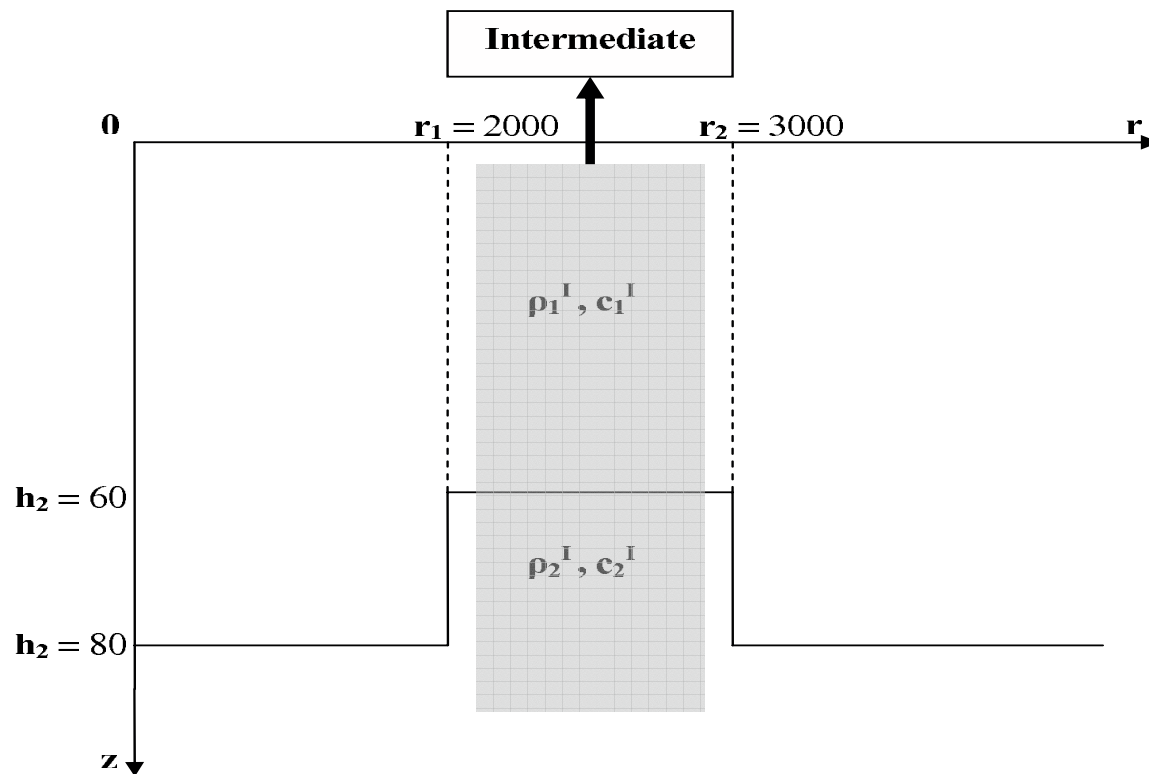
Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση του TL (db) συναρτήσει του r για επίπεδα σύνορα.

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, η απώλεια διάδοσης κυμαίνεται ανάμεσα σε 40 *db* και 70 *db*, τα οποία είναι τα συνήθη όρια για περιβάλλον με χαμηλή συχνότητα και μεγάλα βάθη. Στις επόμενες παραγράφους η απώλεια διάδοσης θα υπολογιστεί για περιβάλλοντα με ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα.

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης αυτής θα αποτελέσουν, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στοιχεία σύγκρισης για τα αποτελέσματα των υπολοίπων Περιπτώσεων που παρουσιάζονται σε αυτό το Κεφάλαιο. Πρώτα από όλα, θα συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης με εκείνα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *Mode1* [8]. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα, το οποίο έχει δημιουργηθεί σε γλώσσα προγραμματισμού *Fortran* και υπολογίζει το ακουστικό πεδίο σε περιβάλλον το οποίο αποτελείται από επίπεδη επιφάνεια, ενός στρώματος νερού και ενός στρώματος ιζήματος το οποίο εκτείνεται σε πολύ μεγάλο βάθος. Οι ιδιοτιμές συμπίπτουν με εκείνες του *Mode1* μέχρι και το έκτο δεκαδικό αριθμό. Επίσης, ταυτίζονται τα αποτελέσματα που αφορούν την απώλεια διάδοσης. Επομένως, θεωρούμε ότι το πρόγραμμα όπως έχει αναπτυχθεί είναι αξιόπιστο τόσο στον υπολογισμό των ιδιοτιμών όσο και στον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης.

5.3 Περίπτωση II

Σε αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών για περιβάλλον όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.3. Θεωρούμε περιβάλλον με ανομοιογενή πυθμένα με ανύψωση συγκεκριμένου σχήματος, η οποία εκτείνεται από r_1 έως r_2 και για βάθος $h_2 - h = 20m$. Για $h = 60$ έχουμε την αρχή του πυθμένα ο οποίος εκτείνεται μέχρι το άπειρο.



Σχήμα 5.3: Περιβάλλον με επίπεδη επιφάνεια και ανύψωση στον πυθμένα $20m$.

Και σε αυτήν την περίπτωση, οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις υπακούουν σε μία ομογενή δευτεροβάθμια συνήθης διαφορική εξίσωση. Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$k_1^{N,F} = 0.180451 \quad (5.20)$$

$$k_2^{N,F} = 0.197228 \quad (5.21)$$

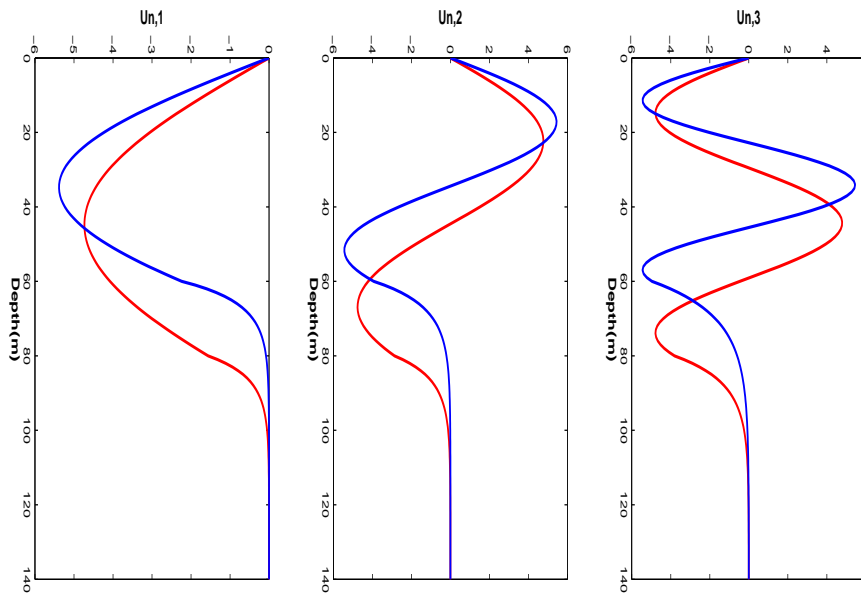
$$k_3^{N,F} = 0.206483 \quad (5.22)$$

$$k_1^I = 0.157574 \quad (5.23)$$

$$k_2^I = 0.188519 \quad (5.24)$$

$$k_3^I = 0.204502 \quad (5.25)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις παρουσιάζονται στα επόμενα τρία διαγράμματα. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα και με μπλε χρώμα οι αντίστοιχες για την περίπτωση που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.4: Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τις ιδιοσυναρτήσεις για $k = 0.206483$ και $k^I = 0.204502$, το δεύτερο για $k = 0.197228$ και $k^I = 0.188519$ και το τρίτο για $k = 0.180451$ και $k^I = 0.157574$.

Στη συνέχεια, υπολογίζοντας τους συντελεστές σύζευξης θα προκύψουν τα ακόλουθα αποτελέσματα, όπου ο C_1 ισούται με τον C_3 και ο C_2 ισούται με τον C_4 . Όπως

C_1	$k_1^I = 0.157574$	$k_2^I = 0.188519$	$k_3^I = 0.204502$
$k_1^N = 0.180451$	0.46915088312	-0.6544562454	-0.10053975974
$k_2^N = 0.197228$	0.33537235403	0.72738947479	-0.38085494119
$k_3^N = 0.206483$	0.18755607951	0.23839490076	0.92182872804

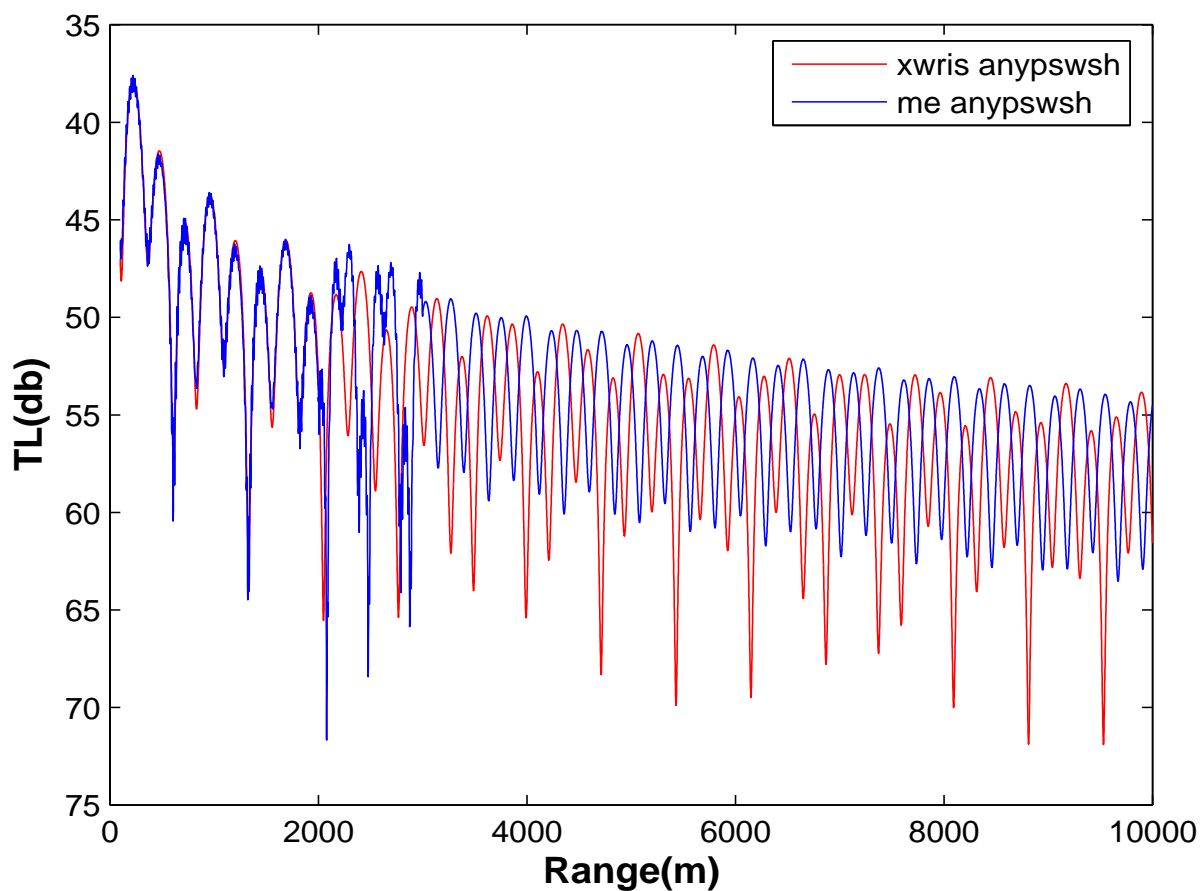
Σχήμα 5.5: Ο συντελεστής σύζευξης $C_1 = C_3$.

C_2	$k_1^I = 0.157574$	$k_2^I = 0.188519$	$k_3^I = 0.204502$
$k_1^N = 0.180451$	0.419772831521	-0.681821477258	-0.113893302167
$k_2^N = 0.197228$	0.259734937952	0.680844598200	-0.404683753990
$k_3^N = 0.206463$	0.130633673833	0.202317500200	0.903127447003

Σχήμα 5.6: Ο συντελεστής σύζευξης $C_2 = C_4$.

παρατηρούμε, τόσο στον συντελεστή σύζευξης C_1 όσο και στον C_2 , τα στοιχεία της διαγωνίου απέχουν πολύ από τη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη σύζευξη ανάμεσα στις ιδιομορφές.

Η γραφική παράσταση του TL συναρτήσεως του r παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η απώλεια διάδοσης, συγκρίνοντάς την με την απώλεια διάδοσης που παρουσιάζεται σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα, παρουσιάζει σημαντικές αλλαγές τόσο ως προς το πλάτος της όσο και ως προς την σχετική θέση μεγίστων-ελαχίστων.

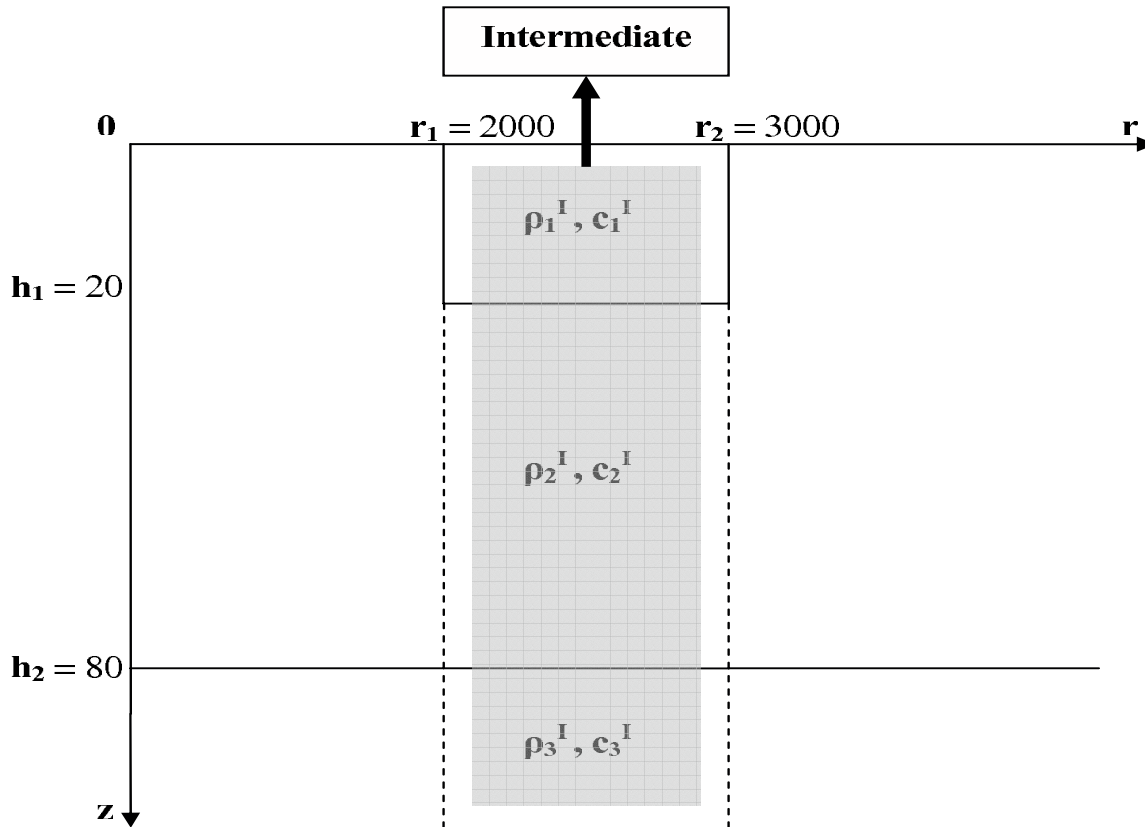


Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση του $TL(db)$ συναρτήσει του r για ανύψωση $20m$, συγκρίνοντάς το με το TL_P .

Το διάγραμμα δείχνει ότι, για $r = 100m$ έως $r = 2000m$ (αρχή της ανύψωσης), η απώλεια διάδοσης ταυτίζεται για τα δύο περιβάλλοντα. Για απόσταση $r = 2000m$ έως $r = 3000m$, στην οποία υπάρχει η ανύψωση, παρατηρούμε ότι αυξάνεται η απώλεια διάδοσης. Όπως, επίσης, αύξηση παρουσιάζεται και για την υπόλοιπη απόσταση για $r = 3000m$ έως $r = 10000m$.

5.4 Περίπτωση III

Συνεχίζουμε την σειρά των αποτελεσμάτων θεωρώντας περιβάλλον με ανομοιογενή επιφάνεια στην οποία θα μπορούσαμε να έχουμε πάγο, ο οποίος εκτείνεται από r_1 έως r_2 και για βάθος $h_1 = 20m$. Για $h = 80$ έχουμε την αρχή του πυθμένα ο οποίος εκτείνεται μέχρι το άπειρο όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Περιβάλλον με πάγο στην επιφάνεια πάχους $20m$ και επίπεδο πυθμένα.

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

$$k_1^{N,F} = 0.180451 \quad (5.26)$$

$$k_2^{N,F} = 0.197228 \quad (5.27)$$

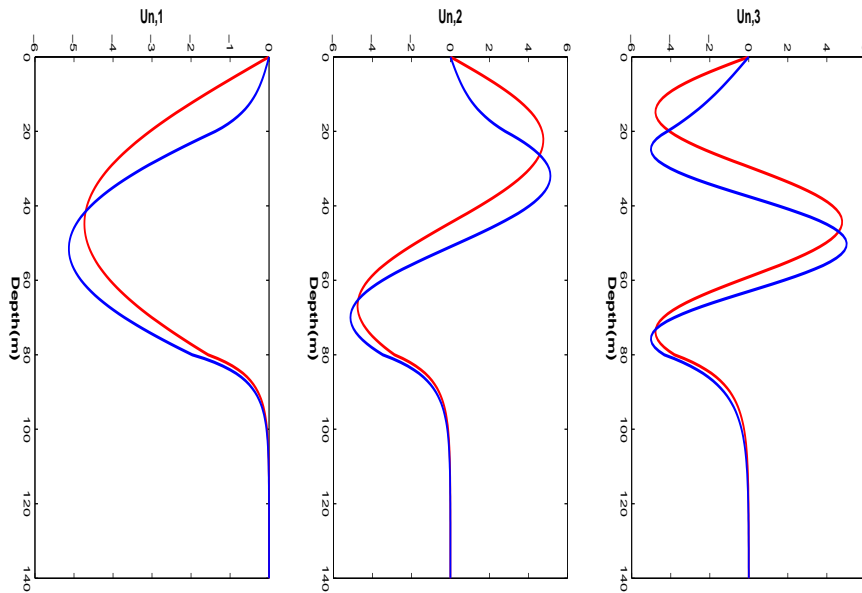
$$k_3^{N,F} = 0.206483 \quad (5.28)$$

$$k_1^I = 0.169265 \quad (5.29)$$

$$k_2^I = 0.192427 \quad (5.30)$$

$$k_3^I = 0.205331 \quad (5.31)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις παρουσιάζονται στα επόμενα τρία διαγράμματα. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα και με μπλε χρώμα οι αντίστοιχες για την περίπτωση που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.9: Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τις ιδιοσυναρτήσεις για $k = 0.206483$ και $k^I = 0.205331$, το δεύτερο για $k = 0.197228$ και $k^I = 0.192427$ και το τρίτο για $k = 0.180451$ και $k^I = 0.169265$

Οπότε, υπολογίζοντας τους συντελεστές σύζευξης και την απώλεια διάδοσης προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

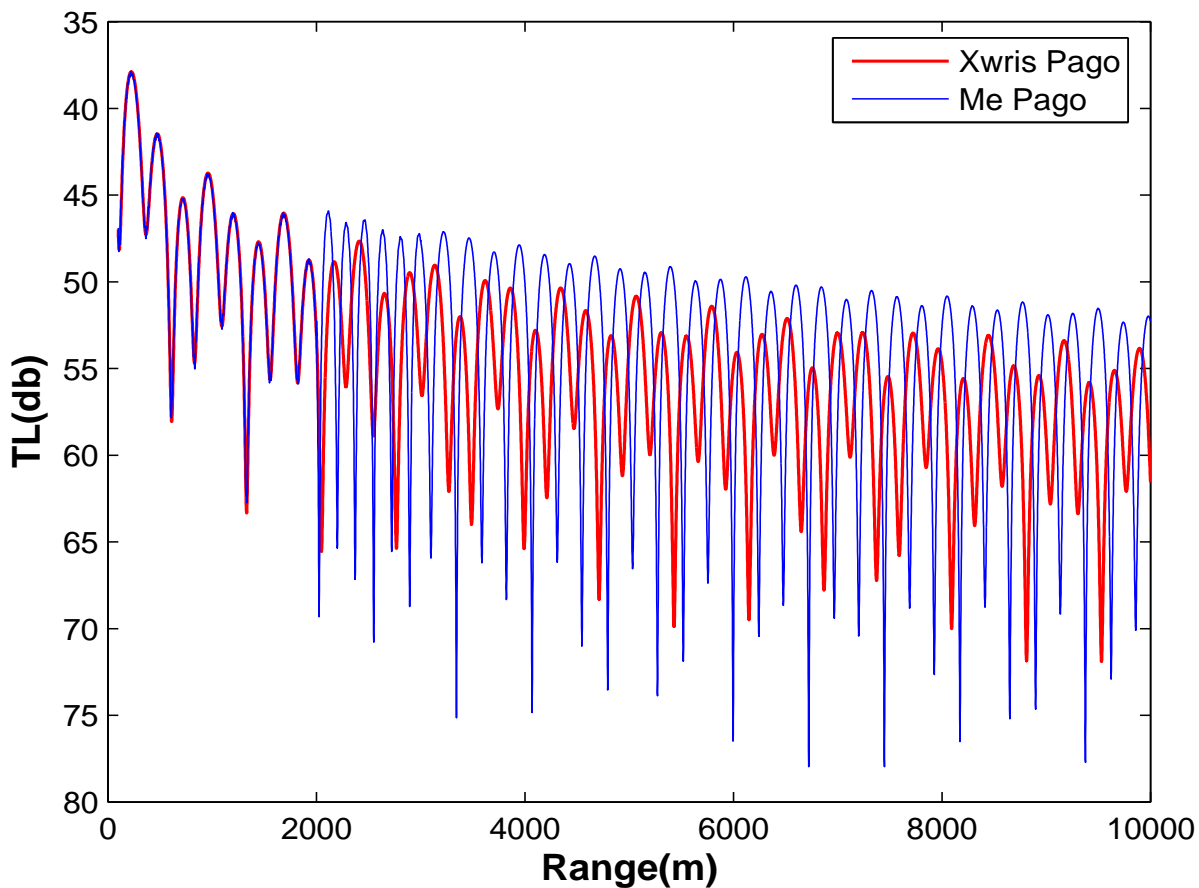
C_1	$k_1^I=0.169265$	$k_2^I=0.192427$	$k_3^I=0.205331$
$k_1^N=0.180451$	0.79976976512	0.40518724522	-0.08619134452
$k_2^N=0.197228$	-0.27312077043	0.88867585450	0.23625797496
$k_3^N=0.206483$	0.11692417188	-0.17537505838	0.96681593869

Σχήμα 5.10: Ο συντελεστής σύζευξης $C_1 = C_3$.

C_2	$k_1^I=0.169265$	$k_2^I=0.192427$	$k_3^I=0.205331$
$k_1^N=0.180451$	0.81707477957	0.39554713257	-0.08188232309
$k_2^N=0.197228$	-0.28839087677	0.89733529033	0.23235148616
$k_3^N=0.2066483$	0.12578362504	-0.18044115511	0.96911108981

Σχήμα 5.11: Ο συντελεστής σύζευξης $C_2 = C_4$.

Σε αυτήν την περίπτωση, η σύζευξη δεν είναι μεγάλη και αυτό φαίνεται από τα στοιχεία της διαγωνίου και στους δύο πίνακες που παρουσιάζονται παραπάνω. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της απώλειας διάδοσης συναρτήσει της απόστασης.

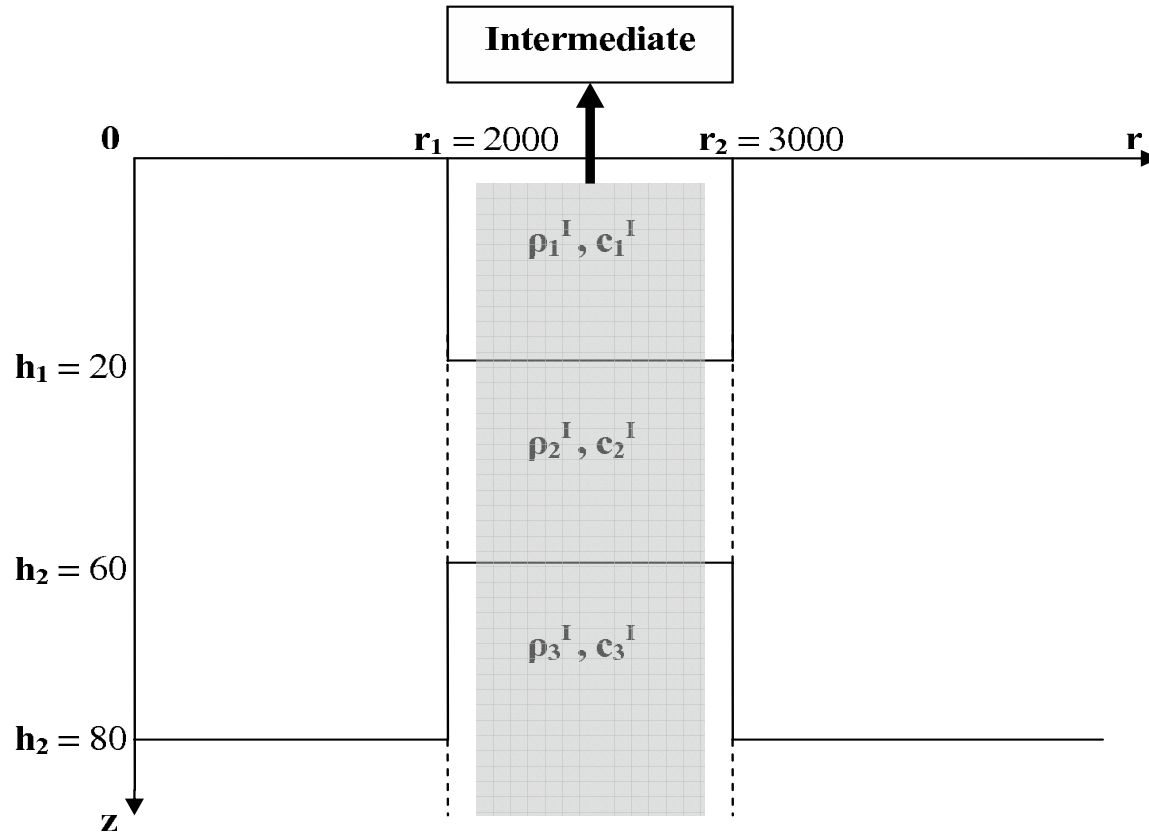


Σχήμα 5.12: Γραφική παράσταση του $TL(db)$ συναρτήσει του r για πάγο $20m$, συγκρίνοντας το με το TL_P .

Όπως παρατηρούμε, για $r = 100m$ έως $r = 2000m$ (αρχή της ανομοιογένειας), η απώλεια διάδοσης ταυτίζεται για τα δύο περιβάλλοντα. Για απόσταση $r = 2000m$ έως $r = 3000m$, στην οποία υπάρχει ο πάγος, παρατηρούμε ότι η μορφή της γραφικής παράστασης αλλάζει και, συγκεκριμένα, αυξάνεται η απώλεια διάδοσης. Αύξηση παρουσιάζεται και για την υπόλοιπη απόσταση για $r = 3000m$ έως $r = 10000m$.

5.5 Περίπτωση IV

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα περιβάλλον με πάγο στην επιφάνεια, ο οποίος εκτείνεται από r_1 έως r_2 και για βάθος $h_1 = 20m$. Επίσης, θεωρούμε ανύψωση στον πυθμένα ύψους $h - h_2 = 20$. Και σε αυτήν την περίπτωση ο πυθμένας είναι ημιάπειρος. Στο Σχήμα 5.13 απεικονίζεται το περιβάλλον που εξετάζουμε:



Σχήμα 5.13: Περιβάλλον με πάγο στην επιφάνεια και ανύψωση πυθμένα πάχους $20m$ το καθένα.

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$k_1^{N,F} = 0.180451 \quad (5.32)$$

$$k_2^{N,F} = 0.197228 \quad (5.33)$$

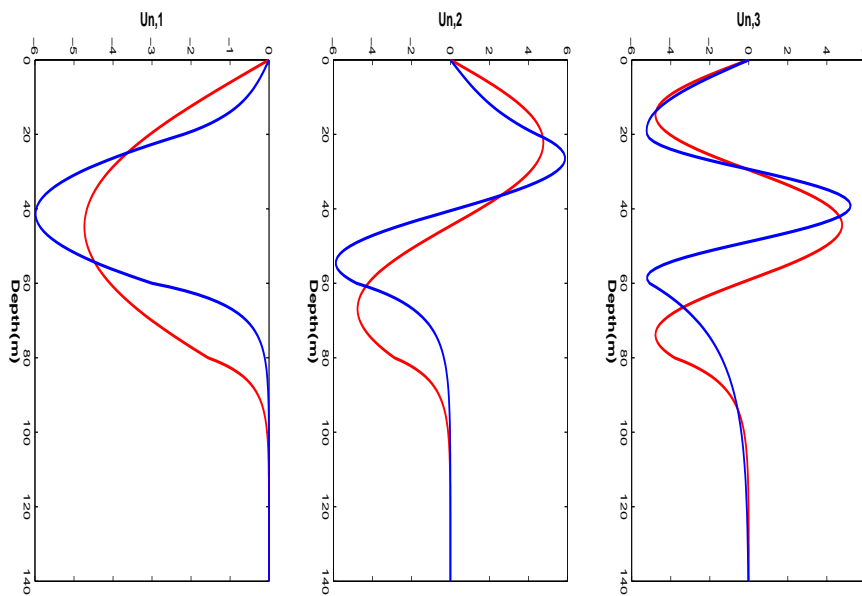
$$k_3^{N,F} = 0.206483 \quad (5.34)$$

$$k_1^I = 0.133302 \quad (5.35)$$

$$k_2^I = 0.177092 \quad (5.36)$$

$$k_3^I = 0.201798 \quad (5.37)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις παρουσιάζονται στα επόμενα τρία διαγράμματα. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα και με μπλε χρώμα οι αντίστοιχες για την περίπτωση που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.14: Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τις ιδιοσυναρτήσεις για $k = 0.206483$ και $k^I = 0.201798$, το δεύτερο για $k = 0.197228$ και $k^I = 0.177092$ και το τρίτο για $k = 0.180451$ και $k^I = 0.133302$

Οπότε, υπολογίζοντας τους συντελεστές σύζευξης και την απώλεια διάδοσης προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

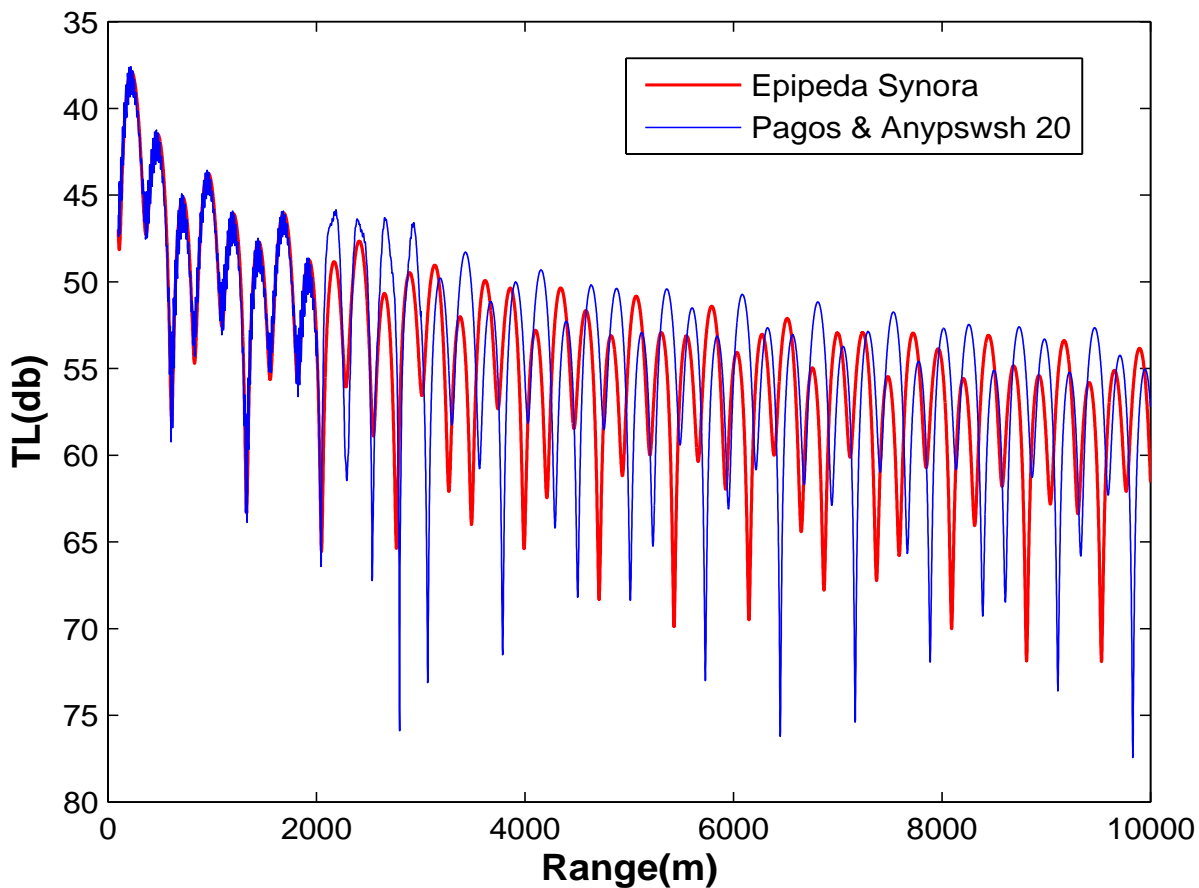
C_1	$k_1^I = 0.133302$	$k_2^I = 0.177092$	$k_3^I = 0.201798$
$k_1^N = 0.180451$	0.7422228790	-0.3411037447	-0.3215665983
$k_2^N = 0.197228$	0.1200320276	0.8390619570	-0.1659165769
$k_3^N = 0.206483$	0.3088597108	0.0696250568	0.9356520634

Σχήμα 5.15: Ο συντελεστής σύζευξης $C_1 = C_3$.

C_2	$k_1^I = 0.133302$	$k_2^I = 0.177092$	$k_3^I = 0.201798$
$k_1^N = 0.180451$	0.6985518080	-0.3960348301	-0.3328558400
$k_2^N = 0.197228$	-0.0103063616	0.7922957927	-0.2047164080
$k_3^N = 0.206483$	0.2487771671	0.0132043509	0.9139770142

Σχήμα 5.16: Ο συντελεστής σύζευξης $C_2 = C_4$.

Παρατηρώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, επισημαίνουμε ότι η ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα, με τα χαρακτηριστικά που έχουν αναφερθεί, επιδρά στον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 5.17: Γραφική παράσταση του $TL(db)$ συναρτήσεως του r για πάγο $20m$ και ανύψωση $20m$, συγκρίνοντάς το με το TL_P .

Σε αυτήν περίπτωση, για $r = 100m$ έως $r = 2000m$ η απώλεια διάδοσης δεν ταυτίζεται απόλυτα για τα δύο περιβάλλοντα. Για το κομμάτι της ανομοιογένειας παρατηρούμε ότι αυξάνεται η απώλεια διάδοσης. Μετά το τέλος της ανομοιογένειας, η απώλεια είναι μικρή, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

5.6 Περίπτωση V

Ως τελευταία περίπτωση των αποτελεσμάτων θα θεωρήσουμε το Σχήμα 5.13 της προηγούμενης Παραγράφου με τη διαφορά ότι τόσο το πάχος του πάγου όσο και η ανύψωση του πυθμένα είναι $10m$ το καθένα. Χρησιμοποιείται και εδώ η θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών, έχοντας τα ακόλουθα αποτελέσματα ξεκινώντας με την εύρεση των ιδιοτιμών:

$$k_1^{N,F} = 0.180451 \quad (5.38)$$

$$k_2^{N,F} = 0.197228 \quad (5.39)$$

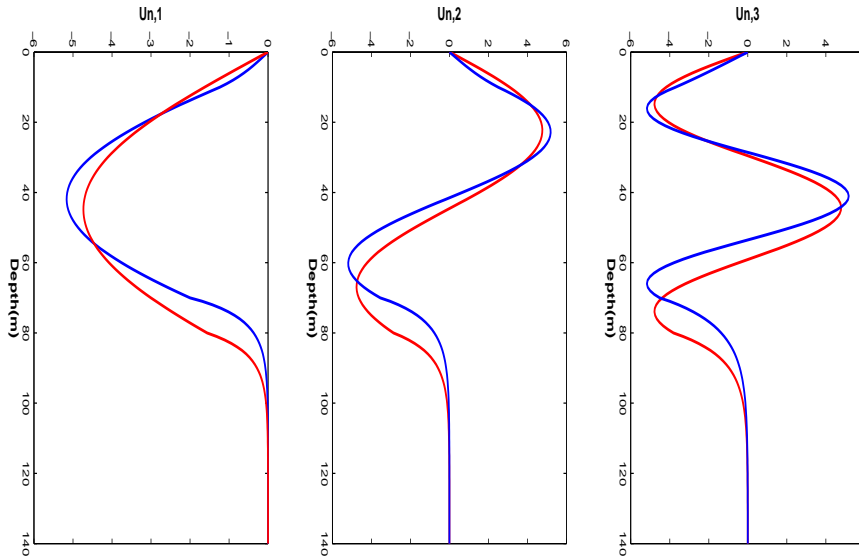
$$k_3^{N,F} = 0.206483 \quad (5.40)$$

$$k_1^I = 0.167224 \quad (5.41)$$

$$k_2^I = 0.191931 \quad (5.42)$$

$$k_3^I = 0.205244 \quad (5.43)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις παρουσιάζονται στα επόμενα τρία διαγράμματα. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα και με μπλε χρώμα οι αντίστοιχες για την περίπτωση που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.18: Γραφικές Παραστάσεις των ιδιοσυναρτήσεων

Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τις ιδιοσυναρτήσεις για $k = 0.206483$ και $k^I = 0.205244$, το δεύτερο για $k = 0.197228$ και $k^I = 0.191931$ και το τρίτο για $k = 0.180451$ και $k^I = 0.167224$

Στη συνέχεια, σειρά έχει ο υπολογισμός των συντελεστών σύζευξης και, τέλος, η απώλεια διάδοσης του ακουστικού πεδίου, η γραφική παράσταση της οποίας, συναρτήσει της απόστασης r , παρουσιάζεται παρακάτω.

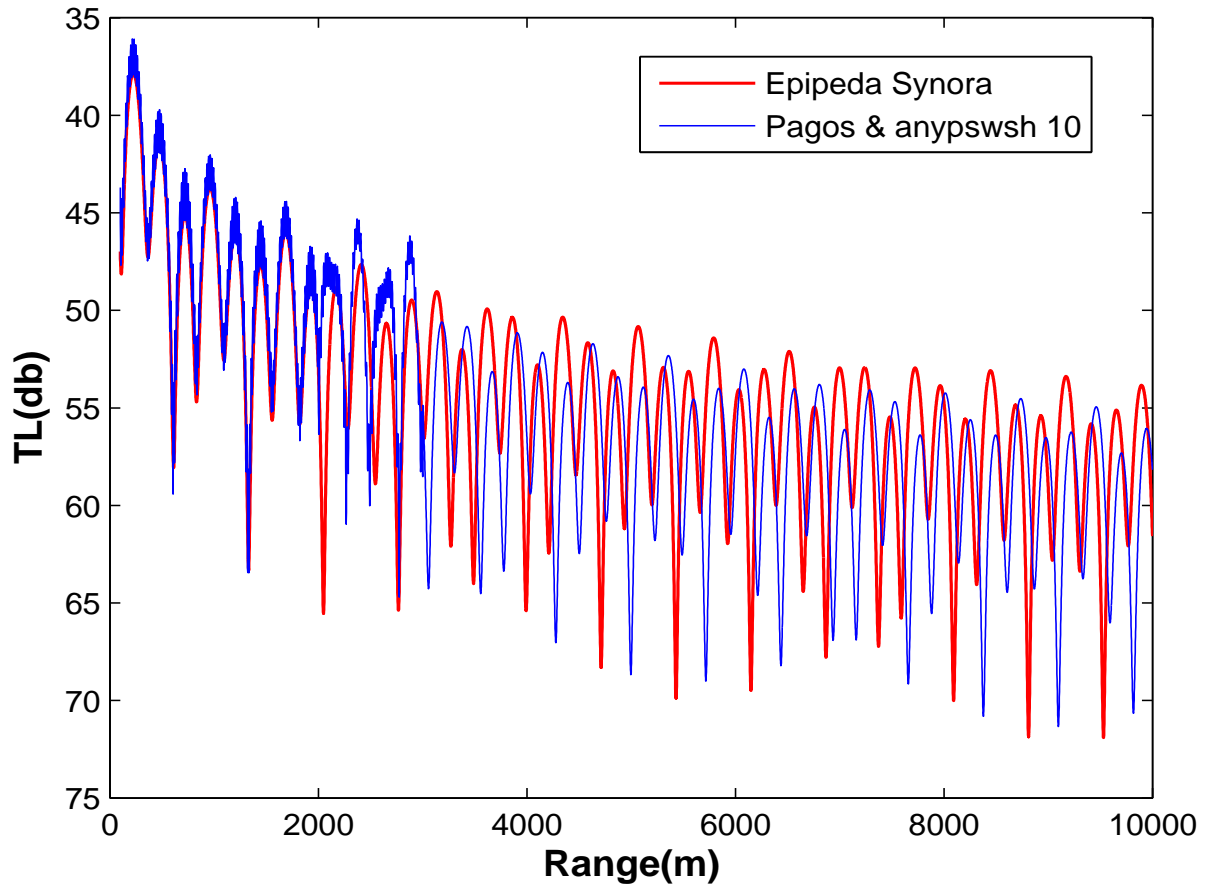
C_1	$k_1^I = 0.167224$	$k_2^I = 0.191931$	$k_3^I = 0.205244$
$k_1^N = 0.180451$	0.98963238677	0.0809575499	0.1253188779
$k_2^N = 0.197228$	-0.10831325027	0.9556927273	0.1403785228
$k_3^N = 0.206483$	-0.12949062161	-0.21170853766	0.9063709071

Σχήμα 5.19: Ο συντελεστής σύζευξης $C_1 = C_3$.

C_2	$k_1^I = 0.167224$	$k_2^I = 0.191931$	$k_3^I = 0.205244$
$k_1^N = 0.180451$	0.97706406143	0.06095825388	0.1009999343
$k_2^N = 0.197228$	-0.12613934326	0.92745560580	0.0917447287
$k_3^N = 0.206483$	-0.14588383406	-0.2499655008	0.8628111244

Σχήμα 5.20: Ο συντελεστής σύζευξης $C_2 = C_4$.

Σε αυτήν την περίπτωση, η σύζευξη των ιδιομορφών είναι πολύ μικρή. Τα στοιχεία της διαγωνίου και στους δύο πίνακες πλησιάζουν αρκετά στη μονάδα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ανομοιογένεια δεν επιδρά πολύ στην απώλεια διάδοσης, όπως φαίνεται στο διάγραμμα που παρατηρείται παρακάτω.



Σχήμα 5.21: Γραφική παράσταση του $TL(db)$ συναρτήσει του r για πάγο 10m και ανύψωση 10m, συγκρίνοντάς το με το TL_P .

Στο κομμάτι πριν την ανομοιογένεια η απώλεια διάδοσης δεν ταυτίζεται απόλυτα για τα δύο περιβάλλοντα, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Για το κομμάτι της ανομοιογένειας παρατηρούμε ότι αυξάνεται λίγο η απώλεια διάδοσης. Μετά το τέλος της ανομοιογένειας, η απώλεια είναι μικρή, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά αποτελέσματα

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Συγκρίσεις Αποτελεσμάτων

Στο τέλος αυτής της εργασίας, κρίνεται αναγκαία η σύγκριση όλων των γραφικών παραστάσεων που απεικονίζουν την απώλεια διάδοσης συναρτήσει της απόστασης που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Η σύγκριση γίνεται απεικονίζοντας όλα τα διαγράμματα σε ένα και στη συνέχεια παρατηρώντας το πως κυμαίνεται η απώλεια διάδοσης σε κάθε περίπτωση. Το διάγραμμα του Σχήματος 6.1 απεικονίζονται τα παραπάνω.

Πρώτα από όλα θα συγκρίνουμε την απώλεια διάδοσης σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα (μαύρο χρώμα, Περίπτωση I), το οποίο αποτελεί στοιχείο αναφοράς, με την απώλεια σε περιβάλλον με ανύψωση στην επιφάνεια (κόκκινο χρώμα, Περίπτωση II) ή πάγο στον πυθμένα (πράσινο χρώμα, Περίπτωση III). Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στην Περίπτωση II υπάρχουν μεγαλύτερες απώλειες από ότι στην Περίπτωση III. Επίσης, συγκρίνοντας την απώλεια σε περιβάλλον με πάγο στην επιφάνεια και ανύψωση στον πυθμένα (κίτρινο χρώμα (Περίπτωση IV) και μπλε χρώμα (Περίπτωση V)), με την αντίστοιχη με επίπεδα σύνορα, παρατηρούμε ότι στις Περιπτώσεις IV, V η απώλεια δεν διαφέρει πολύ από την αντίστοιχη της Περίπτωσης I. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι απώλειες των Περιπτώσεων IV, V είναι λιγότερες από ότι των Περιπτώσεων II, III. Δηλαδή, το περιβάλλον με ανύψωση στον πυθμένα και πάγο στην επιφάνεια έχει λιγότερες απώλειες από ότι το περιβάλλον με μόνο πάγο στην επιφάνεια ή μόνο ανύψωση στον πυθμένα.

6.2 Συμπεράσματα

Στην εργασία ασχοληθήκαμε με τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου για μεγάλες αποστάσεις σε περιβάλλον με ανομοιογένεια έχοντας ημιάπειρο πυθμένα. Ο υπολογισμός γίνεται βασισμένος στη μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών, η οποία αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3.

Αρχικά, αναπτύξαμε την πίεση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων και αφού εφαρμόσαμε την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών καταλήξαμε σε ένα πρόβλημα βάρθους με τις κατάλληλες συνθήκες στην επιφάνεια του νερού, στην διεπιφάνεια νερού-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-ίζημα και, τέλος, στον πυθμένα. Το πρόβλημα βάρθους είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων και για την επίλυσή του θα πρέπει να διατυπωθεί κατάλληλη χαρακτηριστική εξίσωση. Στην περίπτωση μας η εξίσωση προκύπτει από τις συνθήκες προσαρμογής στις διεπιφάνειες ανομοιογένειας-νερού-πυθμένα.

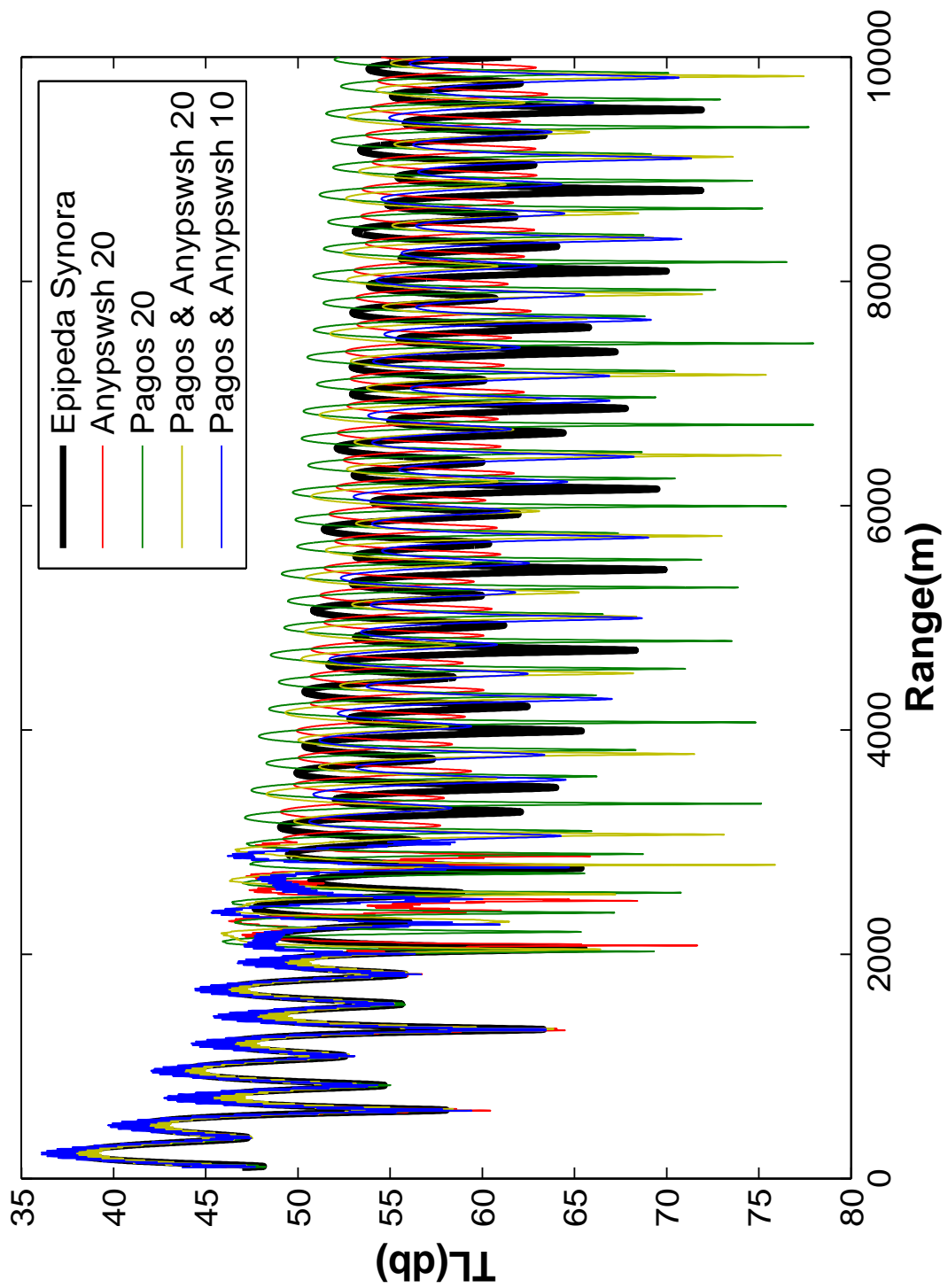
Η αναζήτηση των ιδιοτιμών γίνεται πάνω στον πραγματικό άξονα και αποτελούν ρίζες μιας, εν γένει, μιγαδικής και μη-γραμμικής χαρακτηριστικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων γίνεται άμεσα.

Θεωρήσαμε ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα. Στη συνέχεια, χωρίσαμε το ακουστικό πεδίο σε πεδίο ακτινοβολίας (που αναφέρεται σε περιβάλλον με επίπεδα σύνορα) και σε πεδίο περίθλασης (πεδίο που περιλαμβάνει την ανομοιογένεια). Ο υπολογισμός του πρώτου γίνεται χρησιμοποιώντας συναρτήσεις *Bessel*. Για τον υπολογισμό του δεύτερου κρίνεται απαραίτητος ο χωρισμός του πεδίου σε άλλα τρία υποπεδία, το πρώτο κοντά στην πηγή, το δεύτερο περιέχει την ανομοιογένεια και την τρίτη μακριά από αυτή. Η επιβολή κατάλληλων συνθηκών (συνέχεια της πίεσης και της κάθετης παραγωγού αυτής) στις διεπιφάνειες που ορίζουν τα παραπάνω υποπεδία, βοηθούν στον υπολογισμό των αγνώστων συντελεστών των αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα από το οποίο υπολογίζονται άμεσα οι αγνώστοι συντελεστές. Στη συνέχεια, ο υπολογισμός της πίεσης προκύπτει άμεσα και, συγκεκριμένα, ορίζεται ως το άθροισμα της πίεσης του πεδίου ακτινοβολίας και του πεδίου περίθλασης. Τέλος, ο υπολογισμός της απώλειας διάδοσης γίνεται εφαρμόζοντας την Σχέση 4.53 που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4.

Η εργασία τελειώνει παρουσιάζοντας απότελέσματα για περιβάλλοντα με ανομοιογένεια στη επιφάνεια και στον πυθμένα. Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών προκύπτουν βασικά συμπεράσματα.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στον πυθμένα (όπως π.χ. ανύψωση) η απώλεια διάδοσης είναι μεγαλύτερη από εκείνη σε περιβάλλον με ανομοιογένεια στην επιφάνεια (όπως π.χ. πάγο). Επίσης, σε περιβάλλον που περιέχει ανομοιογένεια στην επιφάνεια και στον πυθμένα η απώλεια διάδοσης είναι μικρότερη από εκείνη σε περιβάλλον με ανομοιογένεια είτε μόνο στην επιφάνεια είτε μόνο στον πυθμένα. Το διάγραμμα που ακολουθεί απεικονίζει όσα αναφέρθηκαν.

Ως τελικές παρατηρήσεις, αναφέρουμε ότι με τη θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών μπορούμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα με τοπική ανομοιογένεια στα δύο σύνορα του κυματοδηγού. Ωστόσο, σε περίπτωση που ο κυματοδηγός εκτείνεται στο άπειρο στην κατακόρυφη διάσταση, θα πρέπει να λαμβάνεται υπ'όψιν η ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στο διακριτό και στο συνεχές φάσμα των ιδιομορφών, κάτι που δεν έχει ληφθεί υπ'όψιν στην παρούσα εργασία.



Σχήμα 6.1: Γενική γραφική παράσταση του $TL(db)$ συναρτήσει της απόστασης r .

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Βιβλιογραφία

- [1] G.A.ATHANASSOULIS AND A.M.PROSPATHOPOULOS. *3D Acoustic Scattering of Source-Generated Acoustic Field by an Axisymmetric Island*, Proceedings, XI Symposium on Hydroacoustics, Jurata, Poland, 1994.
- [2] H.M.BEISNER. *Numerical Calculation of Normal Modes for Underwater Sound Propagation*, January 1974.
- [3] C.A.BOYLES. *Coupled Mode Solution for a Cylindrically Symmetric Oceanic Waveguide with a Range and Depth Dependent Refractive Index and a Time Varying Rough Sea Surface*, J.Acoust.Soc.Am., Vol.73, pp.800-805, 1983.
- [4] C.A.BOYLES. *Acoustic Waveguides, Applications to Oceanic Science*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [5] M.J.BUCKINGHAM. *Theory of Acoustic Propagation around a Conical Sea-Mount*, J.Acoust.Soc.Am., Vol.80, pp.265-277, 1986.
- [6] M.I.TAROUDAKIS. *Study of the Acoustic Propagation in Shallow Water with an Arbitrary Shaped Bottom Boundary*, Ph.D.thesis, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, National Technical University of Athens, 1988.
- [7] M.I.TAROUDAKIS. *A Coupled-Mode Formulation for the Solution of the Helmholtz Equation in Water in the Presence of a Conical Sea-Mount*, J.Computational Acoustics, Vol.4, No.1, pp.101-121, 1996.
- [8] M.I.TAROUDAKIS, G.A.ATHANASSOULIS, J.P.IOANNIDIS. *A Hybrid Solution of the Helmholtz Equation in Shallow Water based on a Variational Principle*, Proceedings, Acoustique Sous Marine et Ultrasons, Marseille, pp.213-227, 1991.

- [9] H.W.MARSH AND R.H.MELLEN. *Underwater Sound Propagation in the Arctic Ocean*,
J.Acoust.Soc.Am., Vol.35, pp.552-563, 1963.
- [10] R.EVANS. *A Coupled Mode Solution for Acoustic Propagation in a Waveguide with Stepwise Variations of a Penetrable Bottom*,
J.Acoust.Soc.Am., Vol.74, pp.188-195, 1983.
- [11] Μ.Ι.ΤΑΡΟΥΔΑΚΗΣ. *Μαθηματική Μοντελοποίηση Ακουστικής Διάδοσης στη Θάλασσα*,
Διδακτικές Σημειώσεις, Ηράκλειο, 2003.
- [12] A.D.PIERCE. *Extension of the Method of Normal Modes to Sound Propagation in an almost Stratified Medium*,
J.Acoust.Soc.Am., Vol.37, pp.19-27, 1965.
- [13] S.R.RUTHERFORD AND K.E.HAWKER. *Consistent Coupled Mode Theory of Sound for a Class of Non-Separable Problems*,
J.Acoust.Soc.Am., Vol.70, pp.554-564, 1981.
- [14] Μ.Ι.ΤΑΡΟΥΔΑΚΗΣ, G.A.ATHANASSOULIS, J.P.ΙΟΑΝΝΙΔΗΣ. *A Variational Principle for Underwater Acoustic Propagation in a Three-Dimensional Ocean Environment*,
J.Acoust.Soc.Am., Vol.88, pp.1515, 1990.
- [15] YA YAN LU AND JIANXIN ZHU. *A Local Orthogonal Transform for Acoustic Waveguides with an Interval Interface* ,
Journal of Computational Acoustics, Vol.12, No.1, pp.37-53, 2004.
- [16] W.E.BOYCE AND R.C.DIPRIMA.
Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών,
John Wiley and Sons, New York, 1997.

Βιβλιογραφία.