ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΧΑΜΗΛΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Δ. ΤΖΙΡΑΚΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΤΕΡΤΙΚΑΣ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ:
Ι. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ, Σ. ΦΙΛΛΙΠΑΣ, Α. ΤΕΡΤΙΚΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2007

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **5**

2 Εναλλακτικότητα συγκέντρωσης - συμπάγειας **11**

3 Ασυμπτωτική συμπεριφορά σχεδόν ακροτάτων **31**

4 Χαρακτηρισμός των σημείων συγκέντρωσης **47**

4.1 Ακτινική συμμετρία και ρυθμός εξασθένισης ολικών ακροτάτων . 47

4.2 Συνάρτηση Robin και αρμονικό κέντρο 48

4.3 Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της βέλτιστης σταθεράς 65

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα λογισμού μεταβολών

$$S^F_\varepsilon(\Omega) := \varepsilon^{-2^*} \sup \left\{ \int_\Omega F(u)\,dx \;:\; u \in D^{1,2}_0(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \le \varepsilon \right\}, \qquad (*)$$

για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, όπου το Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ και $2^* := \frac{2n}{n-2}$. Η συνάρτηση F ικανοποιεί την εξής συνθήκη.

(F) Η F είναι πάνω ημισυνεχής και $F \neq 0$ σχεδόν παντού. Επιπλέον ισχύει η ανισότητα

$$0 \le F(t) \le \alpha |t|^{2^*},\ t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

για μια σταθερά $\alpha > 0$.

Ο χώρος συναρτήσεων του μεταβολικού προβλήματος το οποίο μελετάται στην παρούσα εργασία είναι ο χώρος $D^{1,2}_0(\Omega)$, ο οποίος ορίζεται ως η κλειστότητα του $C^\infty_c(\Omega)$ ως προς τη νόρμα

$$\|\nabla u\|_2 := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Οι συναρτήσεις του $D^{1,2}_0(\Omega)$ επεκτείνονται σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ ταυτίζοντας τις με το 0 στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $D^{1,2}_0(\Omega) \subset D^{1,2}_0(\mathbb{R}^n)$.

Η γενικευμένη σταθερά Sobolev είναι η σταθερά $S^F := S^F_1(\mathbb{R}^n)$. Στην περίπτωση όπου $F(t) = |t|^{2^*}$, $t \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε τη βέλτιστη σταθερά Sobolev με S^*.

Αν η συνάρτηση F είναι ομαλή τότε τα ακρότατα u_ε του μεταβολικού προβλήματος $(*)$, δηλαδή οι συναρτήσεις $u_\varepsilon \in D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοιες ώστε $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$ και $S_\varepsilon^F(\Omega) = \varepsilon^{-2^*} \int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx$, ικανοποιούν την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_\varepsilon f(u) & , \text{ στο } \Omega \\ u = 0 & , \text{ στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

με $f = F'$ και λ_ε είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange ο οποίος τείνει στο άπειρο καθώς $\varepsilon \to 0^+$.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη συμπεριφορά ακολουθιών σχεδόν ακροτάτων συναρτήσεων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$, οι οποίες ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 1. *Μια ακολουθία (u_ε) ονομάζεται ακολουθία σχεδόν ακροτάτων συναρτήσεων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$ αν οι συναρτήσεις u_ε είναι αποδεκτές για τον ορισμό της $S_\varepsilon^F(\Omega)$, δηλαδή $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, $\|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon$, και*

$$\varepsilon^{-2^*} \int_\Omega F(u_\varepsilon) = S_\varepsilon^F(\Omega)\,(1 + o(1))\,, \;\; \textit{καθώς} \;\; \varepsilon \to 0^+.$$

Είναι προφανές, από τον ορισμό, ότι πάντα υπάρχει ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$. Δεν θα ασχοληθούμε με το ερώτημα της ύπαρξης ακροτάτων.

Στην περίπτωση όπου $F(t) = |t|^{2^*}$ η συμπεριφορά των μεγιστοποιουσών ακολουθιών του προβλήματος $(*)$, δηλαδή των ακολουθιών $(u_k) \subset D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοιες ώστε $\|\nabla u_k\|_2 \leq \varepsilon$ και $\varepsilon^{-2^*} \int_\Omega F(u_k)\,dx \longrightarrow S_\varepsilon^F(\Omega)$ καθώς $k \to \infty$, έχει μελετηθεί από τον P. L. Lions ([2]). Το πρόβλημα $(*)$ για γενικότερες συναρτήσεις F έχει μελετηθεί από τους S. Müller, M. Flucher και την A. Garroni([5], [7]).

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 2, αποδεικνύουμε τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev, $\int_\Omega F(u)\,dx \leq S^F \|\nabla u\|_2^{2^*}$, για κάθε $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, ειδική περίπτωση της οποίας είναι η κλασσική ανισότητα Sobolev. Χρησιμοποιώντας μια τοπική παραλλαγή της ανισότητας αυτής δείχνουμε ένα γενικευμένο θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας.

Στο Κεφάλαιο 3, βασιζόμενοι στο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας, μελετάμε την ποιοτική συμπεριφορά των σχεδόν ακροτάτων καθώς $\varepsilon \to 0$. Πριν διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα του Κεφάλαιου 3, εισάγουμε την έννοια της ασθενούς -* με την έννοια των μέτρων Borel και την έννοια της αρμονικής χωρητικότητας.

Συμβολίζουμε με $\overline{\Omega}$ την κλειστότητα του χωρίου Ω στον χώρο $\overline{\mathbb{R}^n} = \Omega \cup \{\infty\}$. Συγκεκριμένα η κλειστότητα ενός μη φραγμένου χωρίου περιέχει το σημείο ∞. Η κλάση των θετικών και πεπερασμένων μέτρων Borel στο $\overline{\Omega}$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, ταυτίζεται με τα μη αρνητικά συναρτησοειδή του χώρου $C(\bar{\Omega})^*$. Έτσι η ασθενής-* σύγκλιση με την έννοια των μέτρων

$$\mu_\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+,$$

ισοδυναμεί με το ότι $\int_{\bar{\Omega}} \phi \, d\mu_\varepsilon \to \int_{\bar{\Omega}} \phi \, d\mu$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$, για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi \in C(\bar{\Omega})$.

Η αρμονική χωρητικότητα $cap_\Omega(A)$, ενός συνόλου $A \subseteq \Omega$ ως προς το Ω ορίζεται ως εξής.

$$cap_\Omega(A) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, : u \in D_0^{1,2}(\Omega), \, u \geq 1 \text{ στο } A\right\}. \tag{1.2}$$

Αν η χωρητικότητα είναι πεπερασμένη, υπάρχει ένα μοναδικό ακρότατο για το πρόβλημα (1.2). Η συνάρτηση η οποία υλοποιεί την ελάχιστη τιμή για το πρόβλημα (1.2) ονομάζεται δυναμικό χωρητικότητας του χωρίου. Είναι προφανές ότι το δυναμικό χωρητικότητας ισούται με 1 $\sigma.\pi$ στο A.

Θέτουμε

$$F_0^+ := \limsup_{t\to 0} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}}, \quad F_0^- := \liminf_{t\to 0} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}}, \quad F_\infty^+ := \limsup_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}}.$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε το πρώτο από τα δύο βασικά θεωρήματα της παρούσας εργασίας.

Θεώρημα 1 (Συγκέντρωση σχεδόν ακροτάτων). *Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F) και (u_ε) είναι μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$.*

1. *Αν $F_0^+ = F_0^-$ και $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ με την έννοια της χωρητικότητας, δηλαδή $cap_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$, τότε μια υπακολουθία της (u_ε) συγκεντρώνεται σε ένα σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$, δηλαδή*

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \, dx &\stackrel{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0} \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+, \\ \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx &\stackrel{*}{\rightharpoonup} S^F \delta_{x_0} \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+. \end{aligned}$$

   Αν $F_0^+ < S^F/S^*$ ή αν το Ω έχει πεπερασμένο όγκο, οι υποθέσεις $F_0^+ = F_0^-$ και $cap_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$ δεν είναι αναγκαίες.

2. *Αν ισχύουν οι ανισότητες*

$$F_\infty^+ < \frac{S^F}{S^*}, \quad F_0^+ < \frac{S^F}{S^*},$$

τότε υπάρχουν σημεία $x_\varepsilon \to x_0 \in \bar{\Omega}$, τέτοια ώστε οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(y) &:= u_\varepsilon\left(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} y\right), \text{ οι οποίες έχουν φορέα στο} \\ \Omega_\varepsilon &:= \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}(\Omega - x_\varepsilon), \end{aligned}$$

τείνουν σε ένα ακρότατο ω της S^F, δηλαδή $\omega_\varepsilon \to \omega$ καθώς $\varepsilon \to 0^+$, στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $\|\nabla\omega\|_2 = 1$ και $\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\, dx = S^F$.

Από το Θεώρημα 1 συμπεραίνουμε ότι **αν η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F) και $\mathbf{F}_\infty^+ < \mathbf{S^F}/\mathbf{S}^*, \mathbf{F}_\mathbf{0}^+ < \mathbf{S^F}/\mathbf{S}^*$ τότε υπάρχει ένα ακρότατο για τη γενικευμένη σταθερά Sobolev $\mathbf{S^F}$**, δηλαδή ένα ακρότατο για το μεταβολικό πρόβλημα $(*)$ για $\varepsilon = 1$ και $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Στο Κεφάλαιο 4 υπολογίζουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα δεύτερης τάξης της $S_\varepsilon^F(\Omega)$ και προσδιορίζουμε τα σημεία συγκέντρωσης στα οποία αναφέρεται το Θεώρημα 1. Εάν το χωρίο Ω έχει ομαλό σύνορο γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet, στο χωρίο Ω, για τη Λαπλασιανή δίνεται από τη σχέση

$$G_x(y) = K_x(y) - H_\Omega(x,y), \;\; x, y \in \Omega,$$

όπου K_x είναι η θεμελιώδης λύση της Λαπλασιανής, με πόλο στο σημείο x, και η συνάρτηση $H_\Omega(x,\cdot)$ είναι η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y H_\Omega(x,y) = 0 & , \text{στο } \Omega \\ H_\Omega(x,y) = K_x(y) & , \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \Omega$ το ομαλό τμήμα της συνάρτησης Green υπολογιζόμενο στο σημείο ιδιομορφίας

$$\tau_\Omega(x) := H_\Omega(x,x)$$

ονομάζεται συνάρτηση Robin του χωρίου Ω στο σημείο x. Ένα σημείο ελαχίστου για τη συνάρτηση Robin στο Ω ονομάζεται αρμονικό κέντρο του Ω. Προκειμένου να υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα δεύτερης τάξης της $S_\varepsilon^F(\Omega)$ και να προσδιορίσουμε τα σημεία συγκέντρωσης, επεκτείνουμε την έννοια της συνάρτησης Robin τ_Ω ορίζοντας την μέχρι και το σύνορο, για οποιοδήποτε χωρίο, ακόμα και αν δεν έχει ομαλό σύνορο.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}^F$ την κλάση των μεγιστοποιουσών ακολουθιών για την S^F οι οποίες αποτελούνται από ακτινικές συναρτήσεις και ορίζουμε

$$w_\infty^2 := \frac{2(n-1)}{n\,S^F} \inf\left\{ \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx \;\; : \; \{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F \right\}.$$

Διατυπώνουμε τώρα, το δεύτερο βασικό θεώρημα της παρούσας εργασίας.

Θεώρημα 2 (Προσδιορισμός των σημείων συγκέντρωσης).
Έστω ότι το χωρίο Ω είναι φραγμένο και η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F). Υποθέτουμε επίσης ότι $0 < \omega_\infty < \infty$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. *Έστω η ακολουθία $\{u_\varepsilon\} \subset D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι η $\{u_\varepsilon\}$ συγκεντρώνεται στο σημείο x_0, δηλαδή*

$$\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}, \quad \frac{F(u_\varepsilon)}{\varepsilon^{2^*}}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F \delta_{x_0}, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+.$$

   Τότε έχουμε ότι

$$\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx \leq \varepsilon^{2^*} S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \tau_\Omega(x_0)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right),$$

   καθώς $\varepsilon \to 0^+$.

2. *Αν η $\{u_\varepsilon\}$ είναι μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$, τότε έχουμε*

$$\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx = \varepsilon^{2^*} S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\, \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right),$$

   καθώς $\varepsilon \to 0^+$.

3. *Μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων συγκεντρώνεται σε ένα αρμονικό κέντρο, δηλαδή*

$$\tau_\Omega(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega,$$

   όπου το x_0 είναι όπως στο Θώρημα 1. Αν $w_\infty = 0$ τότε $S_\varepsilon^F(\Omega) = S^F - o\left(\varepsilon^2\right)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αντίστροφα, αν $S_\varepsilon^F(\Omega) = S^F - o\left(\varepsilon^2\right)$ και $\min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega > 0$ τότε $w_\infty = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι μέχρι δεύτερης τάξης ως προς ε, η μέγιστη τιμή $S_\varepsilon^F(\Omega)$ εξαρτάται μόνο από δύο παραμέτρους: Τη γεωμετρία του χωρίου Ω η οποία υπεισέρχεται μέσω της συνάρτησης Robin τ_Ω και τη συνάρτηση F μέσω της ποσότητας ω_∞. Παρατηρούμε επίσης ότι το σημείο συγκέντρωσης δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση F.

Κεφάλαιο 2

Εναλλακτικότητα συγκέντρωσης - συμπάγειας

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας θα αποδείξουμε δύο ανισότητες, την γενικευμένη ανισότητα Sobolev και την τοπική γενικευμένη ανισότητα Sobolev. Οι δύο αυτές ανισότητες έχουν ουσιαστική εφαρμογή στην απόδειξη του Γενικευμένου Θεωρήματος εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας. Στο επόμενο λήμμα, χρησιμοποιώντας μόνο μια αλλαγή κλίμακας της ανεξάρτητης μεταβλητής, δίνουμε μια γενίκευση της κλασσικής ανισότητας Sobolev. Ορίζουμε

$$S_\varepsilon^F(\Omega) := \varepsilon^{-2^*} \sup\left\{ \int_\Omega F(u)\,dx \;:\; u \in D_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \le \varepsilon \right\}.$$

Η γενικευμένη σταθερά Sobolev είναι η σταθερά $S^F := S_1^F(\mathbb{R}^n)$. Από την υπόθεση (F) και την ανισότητα Sobolev

$$\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx \le S^* \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \right)^{\frac{2^*}{2}}, \text{για κάθε } u \in D_0^{1,2}(\Omega),$$

συμπεραίνουμε ότι $0 < S^F < \infty$.

Λήμμα 2.1. *Έστω ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F) και Ω ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

1. $S_\varepsilon^F(\Omega) \le S^F$, *για κάθε* $\varepsilon > 0$.

2. *(Γενικευμένη ανισότητα Sobolev).*

$$\int_\Omega F(u)\,dx \le S^F \|\nabla u\|_2^{2^*}, \tag{2.1}$$

για κάθε χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *και κάθε* $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$.

3. $S_\varepsilon^F(\Omega) \to S^F$, *καθώς* $\varepsilon \to 0^+$.

4. $F_0^- \leq S^F/S^*$, $F_\infty^- \leq S^F/S^*$, *όπου* $F_\infty^- := \liminf_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}}$.

Απόδειξη.

1. Έστω η συνάρτηση $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, τέτοια ώστε $\|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon$. Ορίζοντας $\omega(x) = u(\varepsilon^{2/n-2}x)$, έχουμε ότι

$$\|\nabla\omega\|_2^2 = \int_{\varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}\Omega} |\nabla\omega|^2\,dx = \frac{\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}}{\varepsilon^{\frac{2n}{n-2}}}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq 1.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\varepsilon^{-2^*}\int_\Omega F(u)\,dx = \int_{\varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}\Omega} F(\omega)\,dx \leq S^F \Rightarrow S_\varepsilon^F(\Omega) \leq S^F.$$

2. Έστω $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Για $\varepsilon = \|\nabla u\|_2$ από το 1. έχουμε

$$\frac{1}{\|\nabla u\|_2^{2^*}}\int_\Omega F(u)\,dx \leq S_\varepsilon^F(\Omega) \leq S^F.$$

3. Έστω $\delta > 0$, $x_0 \in \Omega$ και $\tilde{R} > 0$ τέτοιο ώστε $B_{x_0}^{\tilde{R}} \subseteq \Omega$. Υπάρχει $\omega \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ τέτοιο ώστε $\|\nabla\omega\|_2 \leq 1$ και

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\,dx \geq S^F - \delta.$$

Για $r = r(\delta)$ αρκετά μεγάλο έχουμε $\int_{B_0^r} F(\omega)\,dx \geq S^F - 2\delta$. Έστω $R > r$. Για τη συνάρτηση ϕ_R^r του Λήμματος 2.2 έχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\phi_R^r\omega)|^2\,dx \leq 1 + \delta$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$u(x) := (\phi_R^r\omega)\left(\left(\frac{1+\delta}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{n-2}}(x - x_0)\right),$$

η οποία έχει φορέα στο $B_{x_0}^{R\left(\frac{\varepsilon^2}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}}$. Για $\varepsilon \leq \left((1+\delta)\left(\frac{\tilde{R}}{R}\right)^{n-2}\right)^{1/2}$ η u έχει φορέα στο Ω και

$$\|\nabla u\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{B_0^R}\left(\frac{1+\delta}{\varepsilon^2}\right)^{-1}|\nabla(\phi_R^r\omega)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^F(\Omega) &\geq \varepsilon^{-2^*}\int_\Omega F(u)\,dx \\ &= (1+\delta)^{-\frac{n}{n-2}}\int_{B_0^R} F(\phi_R^r\omega)\,dx \\ &\geq (1+\delta)^{-\frac{n}{n-2}}\int_{B_0^r} F(\omega)\,dx \\ &\geq (1+\delta)^{-\frac{n}{n-2}}\left(S^F-2\delta\right). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση και το ότι $S_\varepsilon^F(\Omega) \leq S^F$ για κάθε $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $\delta \to 0$, προκύπτει ότι $S_\varepsilon^F(\Omega) \to S^F$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

4. Έστω ω ένα ακρότατο για την S^*. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν ακρότατα για την S^* και μάλιστα έχουν τη μορφή (2.3). Ορίζοντας $\omega^s(x) := \omega(x/s)$, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $s^{-\frac{n-2}{2}}\omega^s$ είναι αποδεκτές για τον ορισμό της S^F και τείνουν ομοιόμορφα στο 0, καθώς $s \to \infty$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} S^F &\geq \int_{\mathbb{R}^n} F\left(s^{-\frac{n-2}{2}}\omega^s\right)\,dx \\ &= s^n\int_{\mathbb{R}^n} F\left(s^{-\frac{n-2}{2}}\omega\right)\,dx \\ &\geq \left(F_0^- + o(1)\right)\int_{\mathbb{R}^n}|\omega|^{2^*}\,dx \\ &= \left(F_0^- + o(1)\right)S^*, \text{ καθώς } s\to\infty. \end{aligned}$$

Καθώς $s \to \infty$, έχουμε $F_0^- \leq S^F/S^*$. Όταν $s \to 0$, με ανάλογο τρόπο, έχουμε $F_\infty^- \leq S^F/S^*$.

$\square$

Λήμμα 2.2. *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σταθερά $k(\delta) > 0$ με την εξής ιδιότητα: Αν $0 < r < R$ με $r/R \leq k(\delta)$ τότε υπάρχει μια συνάρτηση, με συμπαγή φορέα, $\phi_R^r \in W_0^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε $\phi_R^r = 1$ στην B_x^r, $\phi_R^r = 0$ εκτός της B_x^R και*

$$\int_{B_x^R}|\nabla\left(\phi_R^r u\right)|^2\,dx \leq \int_{B_x^R}|\nabla u|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx,$$

για κάθε $u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x = 0$. Σαν συνάρτηση ϕ_R^r επιλέγουμε το n-αρμονικό δυναμικό χωρητικότητας της μπάλας B_0^r ως προς την μπάλα B_0^R

$$\phi_R^r := \frac{\log(|x|/R)}{\log(r/R)},\ r \leq |x| \leq R,$$

την οποία επεκτείνουμε με 1 στην B_0^r και 0 εκτός της B_0^R. Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα ομογένειας μπορούμε να δείξουμε ότι $(a+b)^2 \leq (1+\beta)a^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)b^2$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}, \beta > 0$. Από τις ανισότητες Hölder και Sobolev έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{B_0^R} |\nabla\left(\phi_R^r u\right)|^2 &\leq (1+\beta)\int_{B_0^R} |\phi_R^r|^2 |\nabla u|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\int_{B_0^R} |u|^2 |\nabla \phi_R^r|^2 \\
&\leq (1+\beta)\int_{B_0^R} |\nabla u|^2 \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\int_{B_0^R} |u|^{2^*}\right)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_{B_0^R} |\nabla \phi_R^r|^n\right)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \int_{B_0^R} |\nabla u|^2 \\
&\quad + \Bigg[\underbrace{\beta + c_n^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-\frac{2(n-1)}{n}}}_{:=\delta(\beta)}\Bigg] \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

για κάθε $\beta > 0$. Ορίζοντας $\alpha := c_n^2 \left(\log\frac{R}{r}\right)^{-\frac{2(n-1)}{n}}$ έχουμε ότι $\delta'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ και σε αυτή την περίπτωση αν $\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{1+\delta} - 1$ έχουμε $\delta(\beta) < \delta$. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε

$$k(\delta) := \exp\left(-\left(\frac{c_n}{\sqrt{1+\delta}-1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)$$

□

Πόρισμα 2.1. *(Τοπική γενικευμένη ανισότητα Sobolev). Έστω ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F). Για τυχαίο $\delta > 0$ και $r/R \leq k(\delta)$, όπου $k(\delta)$ όπως στο Λήμμα 2.2, έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\int_{B_x^r} F(u)\,dx &\leq S^F \left(\int_{B_x^R} |\nabla u|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}, \\
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_x^R} F(u)\,dx &\leq S^F \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_x^r} |\nabla u|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}},
\end{aligned}$$

για κάθε $u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x = 0$. Από το Λήμμα 2.2 και τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{B_0^r} F(u)\,dx &\leq \int_{B_0^R} F(\phi_R^r u)\,dx \leq S^F \|\nabla(\phi_R^r u)\|_2^{2^*} \\ &\leq S^F \left(\int_{B_0^R} |\nabla u|^2\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx \right)^{\frac{n}{n-2}}.\end{aligned}$$

Γιά τη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση αποκοπής $(1-\phi_R^r)\,\phi_{R_2}^{R_1}$ με $r < R < R_1 < R_2$ και το αποτέλεσμα έπεται στέλνοντας τα R_1 και $R_2 \to \infty$ έτσι ώστε $R_2/R_1 \to \infty$. □

Θεώρημα 2.1 (P. L. Lions). *Έστω* Ω *ένα χωρίο στον* $\mathbb{R}^n$ *και* (υ_ε) *μια ακολουθία στον* $D_0^{1,2}(\Omega)$ *τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\|\nabla \upsilon_\varepsilon\|_2 &\leq 1, \\ \upsilon_\varepsilon &\rightharpoonup \upsilon_0 \text{ ασθενώς στον } D_0^{1,2}(\Omega), \\ |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\,dx &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \\ |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\,dx &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu^* \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+.\end{aligned}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. *Τα μέτρα* μ, ν^* *έχουν τη μορφή*

$$\begin{aligned}\mu &= |\nabla \upsilon_0|^2\,dx + \sum_{j=1}^{J} \mu_j \delta_{x_j} + \tilde{\mu}, \qquad \mu(\bar{\Omega}) \leq 1, \\ \nu^* &= |\upsilon_0|^{2^*}\,dx + \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{x_j}, \qquad \nu^*(\bar{\Omega}) \leq S^*,\end{aligned}$$

όπου $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, μ_j, ν_j^* *θετικές σταθερές και* $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ *ένα μη ατομικό μέτρο. Επιπλέον*

$$|\upsilon_\varepsilon - \upsilon_0|^{2^*}\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{x_j}, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+, \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}).$$

Τα άτομα ικανοποιούν την ανισότητα Sobolev

$$0 \leq \nu_j^* \leq S^* \mu_j^{\frac{n}{n-2}} \text{ για κάθε } j.$$

2. *Αν* $\nu^*(\bar{\Omega}) = S^*$, *τότε* $\mu(\bar{\Omega}) = 1$, *δηλαδή η* (υ_ε) *είναι μια μεγιστοποιούσα ακολουθία για τη βέλτιστη σταθερά Sobolev, και μία από τις επόμενες δύο προτάσεις ισχύει:*
   (α) *Συγκέντρωση: Τα μέτρα* μ, ν^* *συγκεντρώνονται σε ένα μεμονομένο σημείο, δηλαδή* $\upsilon_0 = 0$, $\mu = \delta_{x_0}$ *και* $\nu^* = S^*\delta_{x_0}$ *για κάποιο* $x_0 \in \bar{\Omega}$.
   (β) *Συμπάγεια:* $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$, *καθώς* $\varepsilon \to 0^+$, *στο χώρο* $D_0^{1,2}(\Omega)$, $\mu = |\nabla \upsilon_0|^2\,dx$ *και* $S^* = \nu^* = |\upsilon_0|^{2^*}\,dx$, *δηλαδή η συνάρτηση* υ_0 *είναι ένα ακρότατο για την* S^*.

Το Λήμμα 2.1 εφαρμώζεται στις μεγιστοποιούσες ακολουθίες για τη βέλτιστη σταθερά Sobolev S^*.

Παράδειγμα 2.1.

Το μεταβολικό πρόβλημα για τη βέλτιστη σταθερά Sobolev

$$S^* = \max\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\,dx \;:\; u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)\,,\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx \le 1\right\}, \tag{2.2}$$

έχει επιλυθεί από τον Talenti [9] το 1976 και όλες οι δυνατές λύσεις έχουν προσδιοριστεί πλήρως. Συγκεκριμένα όλα τα ακρότατα για την S^* έχουν τη μορφή

$$\upsilon(x) = \frac{c}{\left(s + \frac{|x-x_0|^2}{s}\right)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{2.3}$$

όπου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και οι σταθερές $s > 0$, $c > 0$ είναι τέτοιες ώστε $\|\nabla \upsilon\|_2 = 1$. Πράγματι θεωρώντας την εξίσωση Euler-lagrange για το πρόβλημα (2.2) και χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα αλλαγής κλίμακας μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$u_1 = \frac{1}{(c_1^2 + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

είναι μία λύση. Η σταθερά c_1 είναι επιλεγμένη ώστε $\|\nabla u_1\|_2 = 1$. Όλες οι άλλες δυνατές λύσεις προκύπτουν από μεταθέσεις και αλλαγές κλίμακας της συνάρτησης u_1. Πράγματι το ολοκλήρωμα Dirichlet στον $\mathbb{R}^n$ και η L^{2^*} νόρμα είναι αναλλοίωτες στις ακόλουθες διαστολές και μεταθέσεις:

$$u(x) = \sigma^{-\frac{n}{2^*}} u_1\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right) = \frac{c_1^{\frac{2-n}{2}}}{\left(\sigma\, c_1 + \frac{|x-x_0|^2}{\sigma\, c_1}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \ \text{για } \sigma > 0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^2\, dx \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_1|^{2^*}\, dx.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ με την έννοια της χωρητικότητας, δηλαδή $cap_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$. Εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα αλλαγής κλίμακας είναι εύκολο να δούμε ότι η βέλτιστη σταθερά Sobolev δεν εξαρτάται από το χωρίο, δηλαδή $S^*(\Omega) = S^*$ για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ωστόσο η βέλτιστη σταθερά Sobolev δεν υλοποιείται από καμία συνάρτηση $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, διότι διαφορετικά θα υπήρχαν λύσεις του προβλήματος (2.2), οι οποίες μηδενίζονται στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ και δεν έχουν τη μορφή (2.3). Έστω τώρα $(\upsilon_\varepsilon) \subseteq D_0^{1,2}(\Omega)$ μια μεγιστοποιούσα ακολουθία για την S^*, δηλαδή $\|\nabla \upsilon_\varepsilon\|_2 \leq 1$ και $\int_\Omega |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx \to S^*$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Από την ανισότητα Sobolev έχουμε ότι $\|\upsilon_\varepsilon\|_{2^*} \leq S^*$. Έτσι από το θεώρημα Alaoglou και την αυτοπάθεια του χώρου $D_0^{1,2}(\Omega)$ έπεται ότι μία υπακολουθία της (υ_ε) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 2.1. Επιλέγοντας σαν συνάρτηση ελέγχου την $\phi \equiv 1$, έπεται ότι $\nu^*(\bar{\Omega}) = S^*$. Αν ίσχυε η περίπτωση (β), δηλαδή είχαμε συμπάγεια, τότε η βέλτιστη σταθερά Sobolev S^* θα υλοποιούνταν από μια συνάρτηση η οποία μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, το οποίο όπως αναφέραμε είναι αδύνατο. Έπεται λοιπόν ότι ισχύει η εναλλακτικότητα (β) του θεωρήματος, δηλαδή μια υπακολουθία της (u_ε) συγκεντρώνεται σε ένα μεμονωμένο σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\mu = \delta_{x_0}$ και $\nu^* = S^F \delta_{x_0}$. Είναι επίσης δυνατό να κατασκευάσουμε μια μεγιστοποιούσα ακολουθία για την S^* η οποία να συγκλίνει σε ένα αυθαίρετο προκαθορισμένο σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$. Από το γεγονός ότι η βέλτιστη σταθερά Sobolev δεν υλοποιείται από καμία συνάρτηση στο χώρο $D_0^{1,2}(\Omega)$ έπεται ότι **όταν $\mathbf{cap}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^\mathbf{n} \setminus \boldsymbol{\Omega}) > \mathbf{0}$ δεν είναι δυνατό να έχουμε συμπάγεια**, δηλαδή έχουμε πάντα ότι $|\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}$, $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^* \delta_{x_0}$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$, όπου $x_0 \in \bar{\Omega}$.

Από το παράδειγμα αυτό φαίνεται και η αποτυχία της συμπαγούς εμφύτευσης του χώρου $D_0^{1,2}(\Omega)$ στον $L^{2^*}(\Omega)$ όταν το χωρίο Ω είναι φραγμένο. Επιπλέον από το Λήμμα 2.1 έπεται ότι η μόνη περίπτωση στην οποία μια φραγμένη ακολουθία στον $D_0^{1,2}(\Omega)$ δεν είναι συμπαγής στον $L^{2^*}(\Omega)$ είναι όταν έχουμε συγκέντρωση. Έτσι μια ταλαντευόμενη φραγμένη ακολουθία (υ_ε) οι κλίσεις της οποίας συγκλίνουν ασθενώς αλλά δε συγκεντρώνονται, συγκλίνει ισχυρά στον $L^{2^*}(\Omega)$.

Στο επόμενο θεώρημα γενικεύουμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.1 (συγκέντρωση μεγιστοποιουσών ακολουθιών) για το μεταβολικό πρόβλημα

$$S_\varepsilon^F(\Omega) = \varepsilon^{-2^*} \sup \left\{ \int_\Omega F(u)\, dx : \ u \in D_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon \right\},$$

για γενικότερες μη γραμμικότητες F. Θα το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι τα σχεδόν ακρότατα για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$ συγκεντρώνονται σε κάποιο σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$ (Θεώρημα 3.1).

Θεώρημα 2.2. *(Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας Ι) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F), Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ και (u_ε) μια ακολουθία στον $D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$. Ορίζουμε $\upsilon_\varepsilon := u_\varepsilon/\varepsilon$. Υποθέτουμε επίσης ότι*

$$\begin{aligned}
\upsilon_\varepsilon &\rightharpoonup \upsilon_0 \text{ ασθενώς στον } D_0^{1,2}(\Omega),\\
|\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\,dx &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ στον } \mathcal{M}(\bar\Omega),\\
\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \text{ στον } \mathcal{M}(\bar\Omega), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+.
\end{aligned}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. *Τα μέτρα μ, ν έχουν τη μορφή*

$$\begin{aligned}
\mu &= |\nabla \upsilon_0|^2 dx + \sum_{j=1}^{J} \mu_j \delta_{x_j} + \tilde\mu, \qquad \mu(\bar\Omega) \leq 1,\\
\nu &= g\,dx + \sum_{j=1}^{J} \nu_j \delta_{x_j}, \qquad \nu(\bar\Omega) \leq S^F,
\end{aligned}$$

όπου $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, μ_j, ν_j θετικές σταθερές, $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\bar\Omega)$ ένα μη ατομικό μέτρο και $g \in L^1(\Omega)$. Η ολική μάζα, τα άτομα και το ομαλό τμήμα ικανοποιούν την γενικευμένη ανισότητα Sobolev

$$\begin{aligned}
\nu(\bar\Omega) &\leq S^F \left(\mu(\bar\Omega)\right)^{\frac{n}{n-2}},\\
\nu_j &\leq S^F \mu_j^{\frac{n}{n-2}},\\
\int_\Omega g\,dx &\leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\,dx + \tilde\mu(\bar\Omega)\right)^{\frac{n}{n-2}},\\
g &\leq F_0^+ |\upsilon_0|^{2^*} \text{ σ.π στο } \Omega,\\
\int_\Omega g\,dx &\leq F_0^+ S^* \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}.
\end{aligned}$$

2. *Αν $\nu(\bar\Omega) = S^F$, τότε $\mu(\bar\Omega) = 1$ και μία από τις επόμενες δύο προτάσεις ισχύει:*

   (a) Συγκέντρωση: $\upsilon_0 = 0$, $\mu = \delta_{x_0}$ και $\nu = S^F \delta_{x_0}$ για κάποιο $x_0 \in \bar\Omega$.

(β) Συμπάγεια:

$$\begin{aligned}
\mu &= |\nabla \upsilon_0|^2 dx + \tilde{\mu}, \\
\upsilon_\varepsilon &\to \upsilon_0 \ \text{στον } L^{2^*}(\Omega), \ \text{καθώς } \varepsilon \to 0^+, \\
S^F &\leq \alpha \int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*} dx, \\
\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) &\rightharpoonup g \quad \text{ασθενώς στον } L^1(\Omega), \ \text{καθώς } \varepsilon \to 0^+, \\
S^F &= \int_\Omega g\, dx \leq F_0^+ S^*.
\end{aligned}$$

Αν επιπρόσθετα, $F_0^+ = F_0^-$, τότε $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$ στον $D_0^{1,2}(\Omega)$, $S^F = F_0 S^*$, η συνάρτηση υ_0 είναι ένα ακρότατο για την S^* και $\Omega = \mathbb{R}^n$ εκτός ενός συνόλου μηδενικής χωρητικότητας.

Απόδειξη. **Βήμα 1**(Γενικευμένη ανισότητα Sobolev για την ολική μάζα).

$$\nu(\bar{\Omega}) \leq S^F \left(\mu(\bar{\Omega})\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Απόδειξη. Από τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx &\leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}} \\
&= S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}} \varepsilon^{2^*}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx &\leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}}, \ \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \Rightarrow \\
\nu(\bar{\Omega}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx &\leq S^F \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}} = \mu(\bar{\Omega})^{\frac{n}{n-2}},
\end{aligned}$$

όπου οι ισότητες στην τελευταία σχέση έπονται από το ότι η συνάρτηση $\phi \equiv 1$ είναι αποδεκτή συνάρτηση ελέγχου για την ασθενή -* σύγκλιση στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$.

Βήμα 2 (Αποσύνθεση των μέτρων μ, ν). Τα μέτρα μ, ν έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
\mu &= |\nabla \upsilon_0|^2 dx + \sum_{j=1}^{J} \mu_j \delta_{x_j} + \tilde{\mu}, \\
\nu &= g\, dx + \sum_{j=1}^{J} \nu_j \delta_{x_j}.
\end{aligned}$$

όπου $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ένα μη ατομικό μέτρο $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ και $g \in L^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Για την ακολουθία (υ_ε) έχουμε ότι $\|\nabla \upsilon_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Λόγω της εμφύτευσης του $D_0^{1,2}(\Omega)$ στον $L^{2^*}(\Omega)$ έχουμε ότι $\|\upsilon_\varepsilon\|_{2^*} \leq C \in \mathbb{R}^+$. Από το θεώρημα συμπάγειας του Alaoglou έπεται ότι $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*} dx \overset{*}{\rightharpoonup} \nu^*$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, για μια υπακολουθία. Από το Λήμμα 2.1 γνωρίζουμε ότι το μ έχει την παραπάνω μορφή και ότι

$$\nu^* = |\upsilon_0|^{2^*} dx + \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{x_j}.$$

Έστω $U \subseteq \Omega$ ανοιχτό και $\delta > 0$. Υπάρχει $K \subseteq U$ συμπαγές και συνάρτηση $f \in C(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε $\mathcal{X}_K \leq f \leq \mathcal{X}_U$ και $\nu(U) \leq \nu(K) + \delta$, επομένως

$$\begin{aligned} \nu(U) &\leq \int_{\bar{\Omega}} f \, d\nu + \delta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\bar{\Omega}} \varepsilon^{-2^*} f \, F(u_\varepsilon) \, dx + \delta \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\bar{\Omega}} \alpha |\upsilon_\varepsilon|^{2^*} f \, dx + \delta \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \alpha f \, d\nu^* + \delta \\ &\leq \alpha \nu^*(U) + \delta. \end{aligned}$$

Επειδή το $\delta > 0$ είναι τυχαίο έχουμε ότι $\nu(U) \leq \alpha \nu^*(U)$, για κάθε ανοιχτό $U \subseteq \Omega$ και από την κανονικότητα των μέτρων ν^*, ν η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε Borel σύνολο στο $\bar{\Omega}$. Συγκεκριμένα το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το ν^* και από το Θεώρημα Radon-Nikodym έπεται ότι υπάρχει $h \in L^1(\nu^*)$ τέτοια ώστε $\nu = h \, d\nu^* = h|\upsilon_0|^{2^*} dx + \sum_{j=1}^{J} h(x_j) \nu_j^* \delta_{x_j}$.

Βήμα 3 (Γενικευμένη ανισότητα για τα άτομα).

$$\nu_j \leq S^F \mu_j^{\frac{n}{n-2}}.$$

Απόδειξη: Έστω $\delta' > 0$, $r > 0$ και $x_j \in \bar{\Omega}$. Υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \supset B_{x_j}^r$ και $f \in C(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε $\nu(U) \leq \nu(B_{x_j}^r) + \delta'$ και $\mathcal{X}_{B_{x_j}^r} \leq f \leq \mathcal{X}_U$.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx\\ &= \int_{\bar\Omega} f d\nu\\ &\leq \nu(U)\\ &\leq \nu(B^r_{x_j})+\delta'\end{aligned}$$

Επειδή το $\delta'>0$ είναι τυχαίο έχουμε ότι

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx \leq \nu(B^r_{x_j}). \tag{2.4}$$

Υπάρχει επίσης συμπαγές σύνολο $K\subset B^r_{x_j}$ και συνάρτηση $h\in C(\bar\Omega)$ τέτοια ώστε $\mathcal{X}_K\leq h\leq \mathcal{X}_{B^r_{x_j}}$ και $\nu(B^r_{x_j})\leq \nu(K)+\delta'$, επομένως

$$\begin{aligned}\nu(B^r_{x_j}) &\leq \int_{\bar\Omega} h\,d\nu+\delta'\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega h\,\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx+\delta'\\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx+\delta'.\end{aligned}$$

Επειδή το $\delta'>0$ είναι τυχαίο έχουμε ότι

$$\nu(B^r_{x_j})\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx. \tag{2.5}$$

Από τις (2.4) και (2.5) έπεται ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx = \nu(B^r_{x_j}).$$

Με το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B^r_{x_j}} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\,dx = \mu(B^r_{x_j}).$$

Έστω $\delta > 0$ και $R > 0$ τέτοιο ώστε $r/R \leq k(\delta)$ όπου το $k(\delta)$ είναι όπως στο Λήμμα 2.2. Από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev έχουμε

$$\begin{aligned}
\nu_j \leq \nu\left(B^r_{x_j}\right) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B^r_{x_j}} \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx \\
&\leq S^F \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{B^R_{x_j}} |\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_\varepsilon|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq S^F \left(\mu\left(B^R_{x_j}\right) + \delta \right)^{\frac{n}{n-2}}
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα έπεται στέλνοντας τα $r \to 0$, $\delta \to 0$ και $R \to 0$, έτσι ώστε $r \leq k(\delta)R$. Στην περίπτωση όπου $x_j = \infty$ εφαρμώζουμε τη δεύτερη ανισότητα του Πορίσματος 2.1.

Βήμα 4 (Γενικευμένη ανισότητα Sobolev για το ομαλό κομμάτι).

$$\int_\Omega g\, dx \leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla v_0|^2\, dx + \tilde{\mu}(\bar{\Omega}) \right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0, R_1 > 0$ και $I < J$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $\sum_{j=I+1}^{J} \mu_j \leq \delta$. Επιλέγουμε $R > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι μπάλες $B^R_{x_1}, \ldots, B^R_{x_I}$ να είναι ξένες μεταξύ τους. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\phi := \phi^{R_1}_{R_2} \prod_{i=1}^{I} \left(1 - \phi^r_R(\cdot - x_i)\right)$$

η οποία έχει φορέα στο $B^{R_2}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^I B^r_{x_i}$. Από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev υπάρχουν $r > 0, R_2 > R_1$ τέτοια ωστε

$$\begin{aligned}
\int_{B^{R_1}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^I B^R_{x_i}} g\, dx &\leq \nu\left(\overline{B^{R_1}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{I} B^R_{x_i}} \right) \\
&\leq S^F \left(\mu\left(\overline{B^{R_2}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{I} B^r_{x_i}} \right) + \delta \right)^{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla v_0|^2\, dx + \tilde{\mu}(\bar{\Omega}) + 2\delta \right)^{\frac{n}{n-2}}.
\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται στέλνοντας τα $R \to 0, R_1 \to \infty$ και $\delta \to 0^+$.

Βήμα 5 (Κατά σημείο εκτίμηση του ομαλού τμήματος).

$$\begin{aligned} g &\leq F_0^+ |\upsilon_0|^{2^*} \ \sigma.\pi \ \sigma\tau o \ \Omega, \\ \int_\Omega g \, dx &\leq F_0^+ S^* \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2 \, dx \right)^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Αν $F_0^+ = F_0^-$ τότε

$$\int_\Omega g \, dx \leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2 \, dx \right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Απόδειξη. Έστω ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$. Υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subset U$ και συνάρτηση $f \in C(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε $\mathcal{X}_K \leq f \leq \mathcal{X}_U$ και $\nu(U) \leq \nu(K) + \delta$, επομένως

$$\begin{aligned} \nu(U) &\leq \int_{\bar{\Omega}} f \, d\nu + \delta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx + \delta \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_U \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx + \delta. \end{aligned}$$

Επειδή το $\delta > 0$ είναι τυχαίο έχουμε ότι

$$\nu(U) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_U \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx.$$

Για τυχαίο $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_U g &\leq \nu(U) \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_U \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{U \cap \{|\upsilon_\varepsilon| < t\}} \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \, dx + \alpha \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{U \cap \{|\upsilon_\varepsilon| \geq t\}} |\upsilon_\varepsilon|^{2^*} \, dx \\ &\leq \left(F_0^+ + o(1) \right) \nu^*(\bar{U}) \\ &\quad + \alpha \, 2^{2^*} \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{U \cap \{|\upsilon_\varepsilon| \geq t\}} |\upsilon_0|^{2^*} \, dx + \int_U |\upsilon_\varepsilon - \upsilon_0|^{2^*} \, dx \right). \end{aligned}$$

Έχουμε όμως ότι $\|\nabla \upsilon_\varepsilon\|_2 \leq 1$ και λόγω της συνεχούς εμφύτευσης του $D_0^{1,2}(\Omega)$ στον $L^{2^*}(\Omega)$ έχουμε ότι $\|\upsilon_\varepsilon\|_{2^*} \leq C \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $\varepsilon > 0$, επομένως

$$\begin{aligned} |\{|\upsilon_\varepsilon| \geq t\}| &\leq \frac{1}{t^{2^*}} \int_\Omega |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx \leq \left(\frac{C}{t}\right)^{2^*} \Rightarrow \\ \lim_{t\to\infty} \sup_{\varepsilon>0} |\{|\upsilon_\varepsilon| \geq t\}| &= 0, \end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_U g\, dx &\leq F_0^+ \nu^*(\bar{U}) + 2^{2^*} c \sum_{x_j \in \bar{U}} \nu_j^* \\ &\leq F_0^+ \int_U |\upsilon_0|^{2^*}\, dx + \left(1 + 2^{2^*} c\right) \sum_{x_j \in \bar{U}} \nu_j^*. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $g \leq F_0^+ |\upsilon_0|^{2^*}$ σχεδόν παντού στο Ω. Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Sobolev έπεται ότι $\int_\Omega g\, dx \leq F_0^+ S^* \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx\right)^{\frac{n}{n-2}}$. Αν $F_0^+ = F_0^-$ εφόσον $F_0^- S^* \leq S^F$ (Λήμμα 2.1) έχουμε $\int_\Omega g\, dx \leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx\right)^{\frac{n}{n-2}}$.

Βήμα 6 (Δεύτερο τμήμα του Θεωρήματος).

Απόδειξη. Έστω $\nu_0 := \int_\Omega g$, $\mu_0 := \int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx + \tilde{\mu}(\bar{\Omega})$. Από την υπόθεση ότι $S^F = \nu(\bar{\Omega})$ και από το Βήμα 1 έχουμε

$$S^F = \nu(\bar{\Omega}) \leq S^F \left(\mu(\bar{\Omega})\right)^{\frac{n}{n-2}} \leq S^F,$$

επομένως έχουμε $\mu(\bar{\Omega}) = 1$. Από τα Βήματα $3, 4$ έχουμε

$$1 = \frac{\nu(\bar{\Omega})}{S^F} \leq \sum_{j=0}^{J} \mu_j^{\frac{n}{n-2}}.$$

Εφόσον $\mu_j \leq 1$ για όλα τα j, η παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο όταν όλα τα μ_j είναι μηδέν εκτός από ένα $\mu_{j_0} = 1$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $1 \leq \sum_{j=0}^J \mu_j^{\frac{n}{n-2}} < \sum_{j=0}^J \mu_j = 1$ το οποίο είναι άτοπο. Από τα Βήματα 3 και 4 έχουμε ότι όλα τα ν_j είναι μηδέν εκτός από το $\nu_{j_0} = S^F$. Αν $\mu_0 = \int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx + \tilde{\mu}(\bar{\Omega}) = 0$ τότε έχουμε $\nu_0 = 0$ και ισχύει η εναλλακτικότητα (α) του Θεωρήματος. Πράγματι $\|\nabla \upsilon_0\|_2 = 0 \Rightarrow \|\upsilon_0\|_{2^*} = 0 \Rightarrow \upsilon_0 = 0$ $\sigma.\pi.$ Επιπλέον $\mu = \mu_{j_0} \delta_{x_0} = \delta_{x_0}$ και $\nu = S^F \delta_{x_0}$ για κάποιο $x_0 \in \bar{\Omega}$. Αν $\mu_0 \neq 0$ τότε $\mu_j = 0$ για κάθε $j \geq 1$ και $\mu_0 = 1$.

Από το Βήμα 3 έχουμε $\nu_j = 0$ για κάθε $j \geq 1$ άρα $\int_\Omega g\, dx = \nu_0 = \nu(\Omega) = S^F$. Έτσι από το Βήμα 5 έχουμε ότι

$$S^F = \int_\Omega g\, dx \leq F_0^+ S^* \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}} \leq F_0^+ S^*.$$

Από το Θεώρημα 2.1 γνωρίζουμε ότι $\nu_j^* \leq \mu_j^{\frac{n}{n-2}} = 0$ για κάθε $j \geq 1$ άρα $\nu^* = |\upsilon_0|^{2^*} dx$. Έχουμε επίσης

$$|\upsilon_\varepsilon - \upsilon_0|^{2^*} dx \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{x_j} \;\; \text{στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega})$$

και επιλέγοντας τη συνάρτηση ελέγχου $\phi \equiv 1$ έπεται ότι

$$\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0 \;\; \text{στον} \;\; L^{2^*}(\Omega).$$

Μπορούμε να δείξουμε την ανισότητα $\| |\upsilon_\varepsilon|^{2^*} - |\upsilon_0|^{2^*} \|_1 \leq 2\, 2^* \|\upsilon_\varepsilon - \upsilon_0\|_{2^*}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|x^p - y^p| \leq p|x-y| \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$ για κάθε $0 \leq x,\, y \leq 1$, $p \geq 1$ και την ανισότητα Hölder (στην περίπτωση μας έχουμε $p = 2^*$). Έπεται ότι $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*} \to |\upsilon_0|^{2^*}$ στον $L^1(\Omega)$. Από την ανισότητα (1.1) έχουμε

$$F(u_\varepsilon)/\varepsilon^{2^*} \leq \alpha |\upsilon_\varepsilon|^{2^*} \to \alpha |\upsilon_0|^{2^*} \;\; \text{στον} \;\; L^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Έπεται ότι $\|\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\|_1 \leq M \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $\varepsilon > 0$, αρκετά μικρό. Έστω $E \subset \Omega$ σύνολο Borel το οποίο έχει πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Από το θεώρημα του Lusin έχουμε ότι για τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνάρτηση $f \in C_c(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|f\|_\infty \leq 1$ και $f = \mathcal{X}_E$, εκτός ενός συνόλου U το οποίο έχει μέτρο Lebesgue $\lambda(U) < \varepsilon$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \nu = g\, dx$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, συνεπώς $\int_\Omega \left(\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) - g\right) \phi\, dx \to 0$ για κάθε συνάρτηση $\phi \in C(\bar{\Omega})$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) - g\right) \mathcal{X}_E\, dx \;\; &= \;\; \int_\Omega \left(\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) - g\right) f\, dx \\ &\quad + \int_U \left(\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) - g\right) \left(\mathcal{X}_E - f\right)\, dx. \end{aligned}$$

Στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$, έπεται ότι

$$\int_\Omega \left(\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) - g\right) \mathcal{X}_E\, dx \to 0,$$

καθώς $\varepsilon \to 0$. Από την πυκνότητα των απλών συναρτήσεων στον $L^\infty(\Omega)$ και τον ισομορφισμό του $(L^1(\Omega))^*$ με τον $L^\infty(\Omega)$ έπεται ότι

$$\varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon) \rightharpoonup g \text{ ασθενώς στον } L^1(\Omega), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0,$$

για μια υπακολουθία. Από την (2.6) έχουμε επίσης $S^F \leq \alpha \int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\, dx$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $F_0^+ = F_0^-$. Θέτουμε $F_0 = F_0^+ = F_0^-$. Από το Λήμμα 2.1 έχουμε ότι $F_0 S^* \leq S^F$ και όπως δείξαμε παραπάνω $F_0 S^* \geq S^F$ άρα $F_0 S^* = S^F$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F_0 > 0$ διότι διαφορετικά $S^F = 0$ το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση ότι $F \neq 0$ σ.π. Από το Βήμα 5 έχουμε

$$S^F = \nu_0 = \int_\Omega g\, dx \leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^2\, dx \right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\|\nabla \upsilon_0\|_2 = 1$ και εφόσον $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$ ασθενώς στον $D_0^{1,2}(\Omega)$ έπεται ότι $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$ ισχυρά στον $D_0^{1,2}(\Omega)$. Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση υ_0 είναι μεγιστοποιούσα για τη βέλτιστη σταθερά Sobolev S^*. Έστω μια σταθερά $t > 0$. Υπολογίζουμε

$$\int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx \leq \int_{\{|\upsilon_\varepsilon| \leq t\}} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)\, dx + \alpha \int_{\{|\upsilon_\varepsilon| \geq t\}} |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx. \tag{2.7}$$

Στο σύνολο $\{|\upsilon_\varepsilon| \leq t\}$ ισχύει $|\varepsilon \upsilon_\varepsilon| \leq \varepsilon t \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$, επομένως

$$F_0 = F_0^+ \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)}{|\varepsilon \upsilon_\varepsilon|^{2^*}} \quad \text{και} \quad F_0 = F_0^- \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)}{|\varepsilon \upsilon_\varepsilon|^{2^*}},$$

συνεπώς

$$0 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)}{|\varepsilon \upsilon_\varepsilon|^{2^*}} - F_0 \right) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)}{|\varepsilon \upsilon_\varepsilon|^{2^*}} - F_0 \right) \leq 0.$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)}{|\varepsilon \upsilon_\varepsilon|^{2^*}} - F_0 \right) = 0 \Rightarrow \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon) \leq \big(F_0 + o\,(1)\,\big)|\upsilon_\varepsilon|^{2^*},$$

καθως $\varepsilon \to 0$ και η (2.7) γίνεται

$$\int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx \leq \big(F_0 + o\,(1)\,\big) \int_\Omega |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx + \alpha \int_\Omega h_t(\upsilon_\varepsilon)\, dx, \tag{2.8}$$

καθώς $\varepsilon \to 0$, όπου έχουμε θέσει

$$h_t(s) := \begin{cases} |s|^{2^*} & , |s| \geq t \\ 0 & , \text{διαφορετικά}. \end{cases}$$

Εφαρμώζοντας το Λήμμμα του Fatou για τις συναρτήσεις $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*} - h_t(\upsilon_\varepsilon) \geq 0$ έχουμε

$$\int_\Omega \liminf_{\varepsilon \to 0} \left(|\upsilon_\varepsilon|^{2^*} - h_t(\upsilon_\varepsilon)\right) dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left(|\upsilon_\varepsilon|^{2^*} - h_t(\upsilon_\varepsilon)\right) dx,$$

άρα

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega h_t(\upsilon_\varepsilon)\, dx \leq \int_\Omega \limsup_{\varepsilon \to 0} h_t(\upsilon_\varepsilon)\, dx,$$

διότι $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$ στον $L^{2^*}(\Omega)$, επομένως $\upsilon_\varepsilon \to \upsilon_0$ $\sigma.\pi.$ για μια υπακολουθία. Από την πάνω ημισυνέχεια της F έπεται ότι

$$\int_\Omega \limsup_{\varepsilon \to 0} h_t(\upsilon_\varepsilon)\, dx \leq \int_\Omega h_t(\upsilon_0)\, dx = \int_{\{|\upsilon_0| \geq t\}} |\upsilon_0|^{2^*}\, dx.$$

Έχουμε λοπόν ότι ο δεύτερος της (2.8) κυριαρχείται ασυμπτωτικά από την

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega h_t(\upsilon_\varepsilon)\, dx \leq \int_{\{|\upsilon_0| \geq t\}} |\upsilon_0|^{2^*}\, dx.$$

Στέλνοντας διαδοχικά τα $\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$ η (2.8) γίνεται

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx \leq F_0 \int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\, dx \tag{2.9}$$

Έχουμε όμως ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(u_\varepsilon)\, dx = S^F = F_0 S^*$. Έχουμε επίσης την ανισότητα Sobolev ότι $F_0 \int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\, dx \leq F_0 S^* \|\nabla \upsilon_0\|_2^{2^*} = F_0 S^*$. Έτσι η (2.9) γίνεται

$$F_0 S^* \leq F_0 \int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\, dx \leq F_0 S^*.$$

Συνεπώς $\int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\, dx = S^*$, διότι $F_0 > 0$, δηλαδή η υ_0 είναι μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την S^*. Το ότι $\Omega = \mathbb{R}^n$ εκτός ενός συνόλου μηδενικής χωρητικότητας έπεται από το Παράδειγμα 2.1. □

Η επόμενη παραλλαγή του γενικευμένου Θεωρήματος συγκέντρωσης - συμπάγειας Ι θα εφαρμοστεί στη συνέχεια για την ανάλυση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των σχεδόν ακροτάτων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$ κοντά στο σημείο όπου συγκεντρώνονται. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε σύγκλιση κατάλληλων μεταθέσεων τους σε ένα ολικό ακρότατο για την S^F στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 2.3. *(Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας ΙΙ) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F),*

Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ και (ω_ε) μια ακολουθία στον $D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|\nabla\omega_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &\rightharpoonup \omega \ \text{ασθενώς στον } D_0^{1,2}(\Omega), \\ |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dy &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \ \text{ στον } \ \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \\ F(\omega_\varepsilon)\,dy &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \ \text{ στον } \ \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \ \text{καθώς } \varepsilon \to 0^+. \end{aligned}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. *Τα μέτρα μ, ν έχουν τη μορφή*

$$\begin{aligned} \mu &= |\nabla\omega|^2\,dx + \sum_{j=1}^{J} \mu_j \delta_{x_j} + \tilde{\mu}, \qquad \mu(\bar{\Omega}) \leq 1, \\ \nu &= g\,dx + \sum_{j=1}^{J} \nu_j \delta_{x_j}, \qquad \nu(\bar{\Omega}) \leq S^F, \end{aligned}$$

   όπου $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ένα μη ατομικό μέτρο $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ και $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \nu(\bar{\Omega}) &\leq S^F \left(\mu(\bar{\Omega})\right)^{\frac{n}{n-2}}, \\ \nu_j &\leq S^F \mu_j^{\frac{n}{n-2}}, \\ \int_\Omega g\,dx &\leq S^F \left(\int_\Omega |\nabla\omega|^2\,dx + \tilde{\mu}(\bar{\Omega})\right)^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned}$$

2. *Αν $\nu(\bar{\Omega}) = S^F$, τότε $\mu(\bar{\Omega}) = 1$ και μία απο τις επόμενες δύο προτάσεις ισχύει:*

   (α) *Συγκέντρωση: $\omega = 0$, $\mu = \delta_{x_0}$ και $\nu = S^F \delta_{x_0}$ για κάποιο $x_0 \in \bar{\Omega}$.*

   (β) *Συμπάγεια: $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\Omega)$, $F(\omega_\varepsilon) \to F(\omega)$ στον $L^1(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$, ω είναι ένα ακρότατο για την S^F και $\mu = |\nabla\omega|^2\,dx$.*

   Η συμπάγεια μπορεί να ισχύει μόνο όταν $\Omega = \mathbb{R}^n$ εκτός ενός συνόλου μηδενικής χωρητικότητας.

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι όμοια με εκείνη του Θεωρήματος 2.2 με την εξής διαφορά: παραλείπουμε το Βήμα 5 (το οποίο εν γένει δεν ισχύει) και προσθέτουμε τα ακόλουθα.

Βήμα 1: Στην περίπτωση της συμπάγειας έχουμε ισχυρή σύγκλιση, δηλαδή $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\Omega)$, ω είναι ένα ακρότατο για την S^F και $F(\omega_\varepsilon) \to F(\omega)$ στον $L^1(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $L^{2^*}(\Omega)$ επομένως $\omega_\varepsilon \to \omega$ σχεδόν παντού, για μια υπακολουθία, καθώς $\varepsilon \to 0$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Fatou , για τις συναρτήσεις $\alpha\,|\omega_\varepsilon|^{2^*} - F(\omega_\varepsilon) \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\omega|^{2^*}\,dx - \int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon)\,dx &= \alpha \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0} |\omega_\varepsilon|^{2^*}\,dx - \int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon)\,dx \\
&\leq \int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0} \Big(\alpha\,|\omega_\varepsilon|^{2^*} - F(\omega_\varepsilon)\Big)\,dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \Big(\alpha\,|\omega_\varepsilon|^{2^*} - F(\omega_\varepsilon)\Big)\,dx \\
&= \alpha \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\omega_\varepsilon|^{2^*}\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega F(\omega_\varepsilon)\,dx \\
&= \alpha \int_\Omega |\omega|^{2^*}\,dx - S^F.
\end{aligned}$$

Έχουμε όμως ότι $\int_\Omega |\omega|^{2^*}\,dx < \infty$. Έπεται ότι

$$\int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon)\,dx \geq S^F.$$

Από την πάνω ημισυνέχεια της F και τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev (Λήμμα 2.1), έπεται ότι

$$S^F \leq \int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon)\,dx \leq \int_\Omega F(\omega)\,dx \leq S^F \|\nabla\omega\|_2^{2^*} \leq S^F.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\|\nabla\omega\|_2 &= 1 \ \text{και} \\
S^F &= \int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon)\,dx = \int_\Omega F(\omega)\,dx, \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση ω είναι ένα ολικό ακρότατο για την S^F. Επιπλέον έχουμε ότι $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla\omega_\varepsilon\|_2 = \mu(\bar{\Omega}) = 1 = \|\nabla\omega\|_2$ και σε συνδυασμό με την ασθενή σύγκλιση και την ομοιόμορφη κυρτότητα του χώρου $D_0^{1,2}(\Omega)$ έπεται ότι $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Επομένως έχουμε $\int_\Omega |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx \to \int_\Omega |\nabla\omega|^2\,dx$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Από την υπόθεση όμως, έχουμε ότι $|\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \mu = |\nabla\omega|^2\,dx + \sum_{j=1}^J \mu_j \delta_{x_j} + \tilde{\mu}$, στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Επιλέγοντας τη συνάρτηση ελέγχου $\phi \equiv 1$ έπεται ότι $\mu = |\nabla\omega|^2\,dx$.

Από την (2.10) έπεται ότι

$$\int_\Omega \underbrace{\Big(\limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon) - F(\omega)\Big)}_{\leq 0}\,dx = 0 \Rightarrow \limsup_{\varepsilon\to 0} F(\omega_\varepsilon) = F(\omega) \ \ \sigma.\pi. \qquad (2.11)$$

Εφαρμώζοντας το ίδιο επιχείρημα του Βήματος 6 στο Θεώρημα 2.2 έχουμε

$$F(\omega_\varepsilon) \rightharpoonup g \text{ ασθενώς στον } L^1(\Omega)$$

για μια υπακολουθία, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Έχουμε ότι $(F(\omega)-F(\omega_\varepsilon))^+ \leq F(\omega)$ και $\int_\Omega F(\omega)\,dx = S^F < \infty$. Επιπλέον έχουμε ότι $(F(\omega) - F(\omega_\varepsilon))^+ \to 0$, $\sigma.\pi$ για μια υπακολουθία, καθώς $\varepsilon \to 0$. Εφαρμώζοντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έπεται ότι $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F(\omega) - F(\omega_\varepsilon))^+\,dx = 0$. Εφόσον $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega F(\omega_\varepsilon)\,dx = \int_\Omega F(\omega)\,dx$, έχουμε ότι $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega F(\omega) - F(\omega_\varepsilon)\,dx = 0$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |F(\omega) - F(\omega_\varepsilon)|\,dx &= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F(\omega) - F(\omega_\varepsilon))^+\,dx \\ &\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega F(\omega) - F(\omega_\varepsilon)\,dx = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $F(\omega_\varepsilon) \to F(\omega)$ στον $L^1(\Omega)$, για μια υπακολουθία, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Βήμα 2: Η συμπάγεια είναι δυνατό να ισχύει μόνο όταν $\Omega = \mathbb{R}^n$ εκτός ενός συνόλου μηδενικής χωρητικότητας.

Απόδειξη. Αν $cap(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$, τότε για τη συνάρτηση $\omega \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ θα είχαμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n}\omega\,dx = S^F$ και $\omega = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι κάθε ακρότατο για την S^F είναι γνήσια θετικό ή γνήσια αρνητικό σε όλο το $\mathbb{R}^n$ [4]. $\square$

Κεφάλαιο 3

Ασυμπτωτική συμπεριφορά σχεδόν ακροτάτων

Θεώρημα 3.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F), Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ και (u_ε) είναι μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S^F_\varepsilon(\Omega)$. Αν $F_0^+ = F_0^-$ και $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ με την έννοια της χωρητικότητας, δηλαδή $cap_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$, τότε μια υπακολουθία της (u_ε) συγκεντρώνεται σε ένα σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$, δηλαδή*

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\,dx \ &\overset{*}{\rightharpoonup}\ \delta_{x_0} \ \text{στον}\ \mathcal{M}(\bar{\Omega}),\\
\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx \ &\overset{*}{\rightharpoonup}\ S^F\delta_{x_0} \ \text{στον}\ \mathcal{M}(\bar{\Omega}),\ \ \text{καθώς}\ \varepsilon \to 0^+.
\end{aligned}$$

Αν $F_0^+ < S^F/S^*$ ή αν το Ω έχει πεπερασμένο όγκο, οι υποθέσεις $F_0^+ = F_0^-$ και $cap_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$ δεν είναι αναγκαίες.

Απόδειξη. Έστω (u_ε) μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S^F_\varepsilon(\Omega)$. Τότε η ακολουθία (u_ε) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Γενικευμένου Θεωρήματος εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας (Θεώρημα 2.2). Εφόσον η ακολουθία (u_ε) είναι ακολουθία σχεδόν ακροτάτων, ισχύει $\nu(\bar{\Omega}) = S^F$, επομένως για να έχουμε συγκέντρωση αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει η συμπάγεια.

Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι ισχύει η συμπάγεια. Τότε θα είχαμε ότι $S^F/S^* \leq F_0^+$. Επομένως η συμπάγεια αποκλείεται όταν $F_0^+ < S^F/S^*$. Έχουμε ότι $\upsilon_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \upsilon_0$ στον $L^{2^*}(\Omega)$ άρα και σ.π. και επιπλέον $\upsilon_0 \neq 0$ σ.π. διότι $\alpha\int_\Omega |\upsilon_0|^{2^*}\,dx \geq S^F > 0$. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση όπου ισχύει $F_0^+ = F_0^-$ έπεται από τον τελευταίο ισχυρισμό του Θεωρήματος 2.2 σύμφωνα με τον οποίο αν ισχύει η συμπάγεια τότε $\Omega = \mathbb{R}^n$ εκτός ενός συνόλου μηδενικής χωρητικότητας το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση μας.

Έστω τώρα ότι το Ω έχει πεπερασμένο όγκο. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση $u_\varepsilon \geq 0$. Συμβολίζουμε Ω^* τη μπάλα η οποία έχει κέντρο στο σημείο 0 και $|\Omega^*| = |\Omega|$. Έστω $t > 0$, αρκετά μικρό. Θέτουμε $r_\varepsilon(t)$ την ακτίνα της μπάλας $\{v_\varepsilon^* > t\}$, όπου v_ε^* δηλώνει τη συμμετρικοποίηση Schwarz της v_ε. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\bar{v}_\varepsilon := v_\varepsilon^*$ στη μπάλα $\{v_\varepsilon^* > t\}$ και την επεκτείνουμε σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ ταυτίζοντάς την με την ακτινική αρμονική συνάρτηση η οποία μηδενίζεται στο άπειρο.

Ας υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα Dirichlet $\|\nabla \bar{v}_\varepsilon\|_2$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{v}_\varepsilon|^2\,dx &= \int_{\{v_\varepsilon^*>t\}} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx + t^2\, cap_{\mathbb{R}^n}(\{v_\varepsilon^* > t\}) \\
&= \int_{\{v_\varepsilon^*>t\}} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx + t^2 (n-2) S(n) r_\varepsilon(t)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\|\nabla v_\varepsilon^*\|_2 \leq \|\nabla v_\varepsilon\|_2 \leq 1$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πρώτο όρο για το παραπάνω ολοκλήρωμα Dirichlet:

$$\begin{aligned}
\int_{\{v_\varepsilon^*>t\}} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx &\leq \int_{\Omega^*} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx - \int_{\{v_\varepsilon^*\leq t\}} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx \\
&\leq 1 - \int_{\{v_\varepsilon^*\leq t\}} |\nabla v_\varepsilon^*|^2\,dx \\
&\leq 1 - cap_{\Omega^*}(\{v_\varepsilon^* > t\}) \\
&\leq 1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{r_\varepsilon(0)^{n-2} r_\varepsilon(t)^{n-2}}{r_\varepsilon(0)^{n-2} - r_\varepsilon(t)^{n-2}}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{v}_\varepsilon|^2\,dx \leq 1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{r_\varepsilon(t)^{2n-4}}{r_\varepsilon(0)^{n-2} - r_\varepsilon(t)^{n-2}}.$$

Συμβολίζουμε με R την ακτίνα της μπάλας Ω^* (η οποία είναι πεπερασμένη, εφόσον το Ω έχει πεπερασμένο όγκο) και $r(t) := \liminf_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(t)$. Έχουμε $r_\varepsilon(0) \leq R$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{v}_\varepsilon|^2\,dx &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{r_\varepsilon(t)^{2n-4}}{R^{n-2} - r_\varepsilon(t)^{n-2}}\right) \\
&\leq 1 - t^2 (n-2) S(n) \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{r_\varepsilon(t)^{2n-4}}{R^{n-2} - r_\varepsilon(t)^{n-2}} \\
&\leq 1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{\liminf_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(t)^{2n-4}}{\limsup_{\varepsilon\to 0} (R^{n-2} - r_\varepsilon(t)^{n-2})} \\
&\leq 1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{r(t)^{2n-4}}{R^{n-2} - r(t)^{n-2}}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ένα ασυμπτωτικό κάτω φράγμα για το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \bar{\upsilon}_\varepsilon)\, dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \bar{\upsilon}_\varepsilon)\, dx &\geq \int_{\{\upsilon_\varepsilon^* > t\}} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon^*)\, dx \\ &= \int_\Omega \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)\, dx - \int_{\{\upsilon_\varepsilon \leq t\}} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \upsilon_\varepsilon)\, dx \\ &\geq S^F - \alpha \int_{\{\upsilon_\varepsilon \leq t\}} |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx + o(1) \\ &\geq S^F - \alpha\, |\Omega|\, t^{2^*} + o(1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Για αρκετά μικρό t έχουμε ότι $r(t) \geq \bar{c} > 0$ διότι $\upsilon_0 \neq 0$ $\sigma.\pi.$ στο Ω και

$$\{\upsilon_0 > t\} \cup \{\upsilon_\varepsilon \not\to \upsilon_0\} \subseteq \liminf_{\varepsilon \to 0} \{\upsilon_\varepsilon \geq t\} \cup \{\upsilon_\varepsilon \not\to \upsilon_0\},$$

όπου έχουμε θέσει $\liminf_{\varepsilon\to 0}\{\upsilon_\varepsilon \geq t\} = \cup_{\delta>0} \cap_{\varepsilon>\delta} \{\upsilon_\varepsilon \geq t\}$. Έχουμε όμως ότι $|\{\upsilon_\varepsilon \not\to \upsilon_0\}| = 0$, επομένως

$$0 < |\{\upsilon_0 > t\}| \leq |\liminf_{\varepsilon\to 0}\{\upsilon_\varepsilon \geq t\}| \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |\{\upsilon_\varepsilon \geq t\}| = \liminf_{\varepsilon\to 0} |\{\upsilon_\varepsilon^* \geq t\}|.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{(n-2)S(n)r(t)^{2n-4}}{R^{n-2} - r(t)^{n-2}} \geq \frac{(n-2)S(n)\bar{c}^{2n-4}}{R^{n-2} - \bar{c}^{n-2}} =: M > 0.$$

Καθώς $\varepsilon \to 0$, από τις (3.1), (3.2) και τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned} S^F - \alpha|\Omega|t^{2^*} &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-2^*} F(\varepsilon \bar{\upsilon}_\varepsilon)\, dx \\ &\leq S^F \left(1 - t^2 (n-2) S(n) \frac{r(t)^{2n-4}}{R^{n-2} - r(t)^{n-2}}\right)^{\frac{n}{n-2}} \\ &\leq S^F - S^F M t^2. \end{aligned}$$

Επομένως

$$t^{2^*-2} \geq \frac{S^F M}{\alpha|\Omega|},$$

το οποίο είναι άτοπο, για αρκετά μικρό t, διότι $2^* > 2$.

Αν οι συναρτήσεις u_ε αλλάζουν πρόσημο τότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο επιχείρημα στο θετικό μέρος u_ε^+ και το αρνητικό μέρος u_ε^- των συναρτήσεων

u_ε και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u_+^*\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u_-^*\right|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx, \\
\int_{\mathbb{R}^n} F\left(u_+^*\right) dx + \int_{\mathbb{R}^n} F\left(u_-^*\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \, dx.
\end{aligned}$$

□

Από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι τα σχεδόν ακρότατα για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$ συγκεντρώνονται σε ένα μεμονομένο σημείο. Τώρα θα αναλύσουμε την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά κοντά στο σημείο αυτό. Θα δούμε ότι τείνουν σε ένα ολικό ακρότατο για την S^F, μετά από κατάλληλη αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.1 (P. L. Lions [2]). *Κάθε ακολουθία θετικών μέτρων Borel στον $\mathbb{R}^n$, (σ_ε), τέτοια ώστε $\sigma_\varepsilon(\mathbb{R}^n) \to S > 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$, έχει μια υπακολουθία για την οποία μία από τις ακόλουθες τρεις προτάσεις ισχύει.*

1. *Συμπάγεια: Υπάρχει μια ακολουθία από κέντρα (y_ε) στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια ακτίνα R για την οποία*

$$\sigma_\varepsilon(B_{y_\varepsilon}^R) > S - \delta$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

2. *Διαχωρισμός: Τα μέτρα (σ_ε) χωρίζονται σε δύο ξένα τμήματα, δηλαδή υπάρχουν $S_1, S_2 > 0$ με $S_1 + S_2 = S$, τέτοια ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν μια ακτίνα r και κέντρα (x_ε), τέτοια ώστε για κάθε $R > r$*

$$\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon(B_{x_\varepsilon}^r) &\geq S_1 - \delta, \\
\sigma_\varepsilon(\mathbb{R}^n \setminus B_{x_\varepsilon}^R) &\geq S_2 - \delta,
\end{aligned}$$

για αρκετά μικρό ε.

3. *Εξασθένιση: Για κάθε ακτίνα R ισχύει*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma_\varepsilon(B_x^R) = 0.$$

Θεώρημα 3.2. *Έστω (u_ε) μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων για την $S_\varepsilon^F(\Omega)$. Αν ισχύει η συνθήκη (1.1) και*

$$F_\infty^+ < \frac{S^F}{S^*}, \quad F_0^+ < \frac{S^F}{S^*}$$

τότε υπάρχουν σημεία $x_\varepsilon \to x_0$, όπου το x_0 δίνεται από το Θεώρημα 3.1, τέτοια ώστε οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(y) &:= u_\varepsilon\left(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} y\right), \text{ οι οποίες έχουν φορέα στο} \\ \Omega_\varepsilon &:= \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}(\Omega - x_\varepsilon), \end{aligned}$$

τείνουν σε ένα ακρότατο ω για την S^F, δηλαδή $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $\|\nabla\omega\|_2 = 1$ και $\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\, dx = S^F$.

Πόρισμα 3.1. *Αν η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F) και $F_\infty^+ < S^F/S^*$, $F_0^+ < S^F/S^*$, τότε υπάρχει ένα ακρότατο για τη γενικευμένη σταθερά Sobolev S^F.*

Απόδειξη. Η διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2 είναι η εξής: Εφαρμώζουμε το Λήμμα 3.1 για τα μέτρα

$$\sigma_\varepsilon := F(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx \quad \text{όπου } \tilde{\omega}_\epsilon(x) := u_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}} x),$$

για τα οποία έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx = \frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx \to S^F, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+.$$

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι έχουμε συμπάγεια, με την έννοια του Λήμματος 3.1, για τα μέτρα σ_ε, αφού αποκλείσουμε τις περιπτώσεις του διαχωρισμού και της εξασθένισης. Στη συνέχεια εφαρμώζοντας το Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας (Θεώρημα 2.3) και αποκλείοντας την περίπτωση της συγκέντρωσης δείχνουμε την ισχυρή σύγκλιση στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, των συναρτήσεων ω_ε. Η συνθήκη $F_0^+ < S^F/S^*$ αποκλείει την εξασθένιση των μέτρων σ_ε, με την έννοια του Λήμματος 3.1. Η συνθήκη $F_\infty^+ < S^F/S^*$ αποκλείει τη συγκέντρωση των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx$ και $|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx$ σε ένα πεπερασμένο σημείο, με την έννοια του Θεωρήματος 3.1.

Βήμα 1: Αποκλεισμός του διαχωρισμού.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι τα μέτρα σ_ε διαχωρίζονται με την έννοια του Λήμματος 3.1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_\varepsilon = 0$. Τότε υπάρχουν $S_1, S_2 > 0$ με $S_1 + S_2 = S^F$ έτσι ώστε, για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει μια ακτίνα r, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx, \\ S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx, \end{aligned}$$

για κάθε $R > r$ και ε αρκετά μικρό. Για κάθε $\delta' > 0$ από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev (Πόρισμα 2.1) υπάρχουν δύο ακτίνες R, ρ τέτοιες ώστε $R > \rho > r$, $r/\rho \leq k(\delta')$, $\rho/R \leq k(\delta')$ και

$$\begin{aligned} S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \leq S^F \left(\int_{B_0^\rho} |\nabla \tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx + \delta' \right)^{\frac{n}{n-2}}, \\ S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \leq S^F \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^\rho} |\nabla \tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx + \delta' \right)^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες έχουμε

$$\left(\frac{S_1 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \left(\frac{S_2 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq 1 + 2\delta'.$$

Για δ, δ' αρκετά μικρά η παραπάνω ανισότητα δεν ισχύει.

Βήμα 2: Αποκλεισμός της εξασθένισης.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι

$$\sup_{R>0} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx = 0. \tag{3.3}$$

Θα δείξουμε αρχικά ότι

$$\sup_{r>0} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla \tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx = 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \Rightarrow \\
\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx - \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \Rightarrow \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &= S^F - \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \Rightarrow \\
\sup_{R>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &= S^F - \inf_{R>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx.
\end{aligned}$$

Από την ισότητα (3.3) έχουμε

$$S^F = \inf_{R>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx. \tag{3.4}$$

Από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev έχουμε ότι υπάρχει $k(\delta) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $R > r > 0$ με $r/R \leq k(\delta)$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &\leq S^F\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq S^F\left((1+\delta)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx - \int_{B_x^r}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq S^F\left((1+\delta) - \int_{B_x^r}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}
\end{aligned}$$

διότι $\|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Επομένως έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \leq S^F\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\delta-\int_{B_x^r}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Καθώς $\delta\to 0$ από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\inf_{R>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x^R} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \leq S^F\inf_{r>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1-\int_{B_x^r}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Από την (3.4) συμπεραίνουμε ότι

$$S^F \leq S^F\inf_{r>0}\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1-\int_{B_x^r}|\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$\inf_{r>0} \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 - \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx\right) = 1. \tag{3.5}$$

Έχουμε όμως

$$\begin{aligned} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 - \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx\right) &= 1 - \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx \Rightarrow \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 - \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx\right) &= 1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx \Rightarrow \\ \inf_{r>0} \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 - \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx\right) &= 1 - \sup_{r>0} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx. \end{aligned}$$

Τελικά από την (3.5) έχουμε

$$\sup_{r>0} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx = 0. \tag{3.6}$$

Έστω τώρα $\delta > 0$, $r > 0$. Εφαρμώζοντας τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev για τη συνάρτηση

$$G(t) := \begin{cases} 0 & , t \in B_0^\delta \\ 1 & , t \notin B_0^\delta, \end{cases}$$

(η οποία πληρεί τις προϋποθέσεις) έχουμε

$$\begin{aligned} |\{|\tilde{\omega}_\varepsilon| \geq \delta\} \cap B_x^r| &= \int_{B_x^r} G(\tilde{\omega}_\varepsilon)\, dx \\ &\leq S^F \left(\int_{B_x^R} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx + \delta' \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{n}{n-2}}, \end{aligned}$$

για κάθε $\delta' > 0$ και $R > 0$ τέτοιο ώστε $r/R \leq k(\delta')$. Στέλνοντας το $\delta' \to 0$ και λαμβάνοντας υπόψιν την (3.6) έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\{|\tilde{\omega}_\varepsilon| \geq \delta\} \cap B_x^r| = 0 \text{ για κάθε } \delta > 0,\, r > 0. \tag{3.7}$$

Από την υπόθεση ότι $F_0^+ < S^F/S^*$, έπεται ότι υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{|t|\leq t_0} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}} < \frac{S^F}{S^*}. \tag{3.8}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F_1(t) := \begin{cases} F(t) & , |t| < t_0 \\ 0 & , |t| \geq t_0, \end{cases} \qquad F_2 := F - F_1 = \begin{cases} 0 & , |t| < t_0 \\ F(t) & , |t| \geq t_0. \end{cases}$$

Έχουμε ότι $\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{|t|}{|t|-t_0/2}\right)^{2^*} = 1 \Rightarrow \left(\frac{|t|}{|t|-t_0/2}\right)^{2^*} \leq C \in \mathbb{R}^+$, για κάθε $|t| \geq t_0$, συνεπώς

$$F_2(t) \leq F_3(t) := \alpha\, C \left(|t| - \frac{t_0}{2}\right)_+^{2^*}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} F_2(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|\tilde{\omega}_\varepsilon|\geq t_0\}} F(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx = 0. \tag{3.9}$$

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό καλύπτουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τους μοναδιαίους κύβους $Q_z := z + [0,1)^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$ και από την (3.7) έχουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{z\in\mathbb{Z}^n}\left|\left\{|\tilde{\omega}_\epsilon| > \frac{t_0}{2}\right\} \cap Q_z\right| = 0.$$

Έπεται ότι $|\{(|\tilde{\omega}_\epsilon| - t_0/2)_+ \neq 0\} \cap Q_z| < M \in (0,1)$, για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμώσουμε το Λήμμα 3.2, από το οποίο έπεται ότι

$$\int_{Q_z} F_3(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx \leq \alpha\, C\int_{Q_z}\left(|\tilde{\omega}_\epsilon| - \frac{t_0}{2}\right)_+^{2^*} dx \leq c\left(\int_{Q_z}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx\right)^{\frac{n}{n-2}},$$

για αρκετά μικρό ε και σταθερά c ανεξάρτητη του z. Από την παραπάνω ανισότητα έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F_2(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} F_3(\tilde{\omega}_\epsilon)\, dx \\ &\leq c\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{Q_z}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx\right)^{\frac{n}{n-2}} \\ &= c\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\left(\int_{Q_z}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx\right)^{\frac{2}{n-2}}\left(\int_{Q_z}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx\right)\right) \\ &\leq c\sup_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{Q_z}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx\right)^{\frac{2}{n-2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon|^2\, dx. \end{aligned}$$

Στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$ και λαμβάνοντας υπόψιν την (3.6) έπεται η (3.9). Τελικά από την (3.8) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S^F = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_1(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_2(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} F_1(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx \\ &< \frac{S^F}{S^*}\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|\tilde{\omega}_\epsilon|<t_0\}} |\tilde{\omega}_\epsilon|^{2^*}\,dx \\ &\le S^F, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Από τα δύο προηγούμενα βήματα και το Λήμμα 3.1 έπεται ότι υπάρχει μια ακολουθία σημείων $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα μέτρα $F(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx$ να είναι συμπαγή με την έννοια του Λήμματος 3.1.

Βήμα 3: Αποκλεισμός της συγκέντρωσης των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx$ και σύγκλιση της ακολουθίας (ω_ε) σε ένα ολικό ακρότατο ω, δηλαδή $\omega_\varepsilon \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$, $\|\nabla\omega\|_2 = 1$ και $\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\,dx = S^F$.

Απόδειξη. Για τις συναρτήσεις $\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon) = u_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}(\cdot + y_\varepsilon))$ έχουμε

$$\|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)\|_2^2 = \int_{\varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}\Omega - y_\varepsilon} |\nabla\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)|^2\,dx = \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\,dx \le 1.$$

Άρα από το θεώρημα του Alaoglou έχουμε ότι για μια υπακολουθία της $(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))$, $|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)|^2\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Έχουμε επίσης ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx = \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx \to S^F, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+.$$

Συμπεραίνουμε ότι μια υπακολουθία της $(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))$ ικανοποιεί το Γενικευμένο Θεώρημα συγκέντρωσης - συμπάγειας ΙΙ (Θεώρημα 2.3), για $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $\nu(\overline{\mathbb{R}^n}) = S^F$.

Η συμπάγεια των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx$, με την έννοια του Λήμματος 3.1, αποκλείει τη συγκέντρωση στο άπειρο των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx$. Πράγματι στην περίπτωση της συμπάγειας των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon)\,dx$, έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια ακτίνα R για την οποία

$$\sigma_\varepsilon(B^R_{y_\varepsilon}) > S - \delta,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι

$$S^F \ge \int_{B_0^R} F(\tilde{\omega}_\epsilon(x + y_\varepsilon))\,dx = \int_{B^R_{y_\varepsilon}} F(\tilde{\omega}_\epsilon(x))\,dx = \sigma_\varepsilon(B^R_{y_\varepsilon}) > S^F - \delta.$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Ωστόσο η συγκέντρωση των μέτρων $F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx$ στο ∞ συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} S^F, \text{ για κάθε } r > 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη εκτίμηση.

Η συγκέντρωση σε ένα πεπερασμένο σημείο αποκλείεται από τη συνθήκη $F_\infty^+ < S^F/S^*$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{|t|\geq t_0} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}} < \frac{S^F}{S^*}. \tag{3.10}$$

Αν τα μέτρα $F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot+y_\varepsilon))\,dx$ συγκεντρώνονται σε ένα πεπερασμένο σημείο τότε

$$\begin{aligned} S^F &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{|\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot+y_\varepsilon)|\geq t_0\}} F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon))\,dx \\ &< \frac{S^F}{S^*} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{|\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot+y_\varepsilon)|\geq t_0\}} |\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)|^{2^*}\,dx \\ &\leq S^F, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 2.3 έπεται ότι $u_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}(\cdot + y_\varepsilon)) = \tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \omega$ στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, ω είναι ένα ακρότατο για την S^F, $\|\nabla\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)\|_2 = 1$ και $F(\tilde{\omega}_\epsilon(\cdot + y_\varepsilon)) \to F(\omega)$ στον $L^1(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Το συμπέρασμα, για τις συναρτήσεις $u_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}\,\cdot)$, έπεται επιλέγοντας $x_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} y_\varepsilon$.

Βήμα 4: Για μια υπακολουθία έχουμε $x_\varepsilon \to x_0$, όπου το σημείο x_0 δίνεται από το Θεώρημα 3.1.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0} \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0,$$

για μια υπακολουθία. Έχουμε ότι $\|\nabla\omega\|_2 = 1$, επομένως

$$0 < \int_{B_0^R} |\nabla\omega|^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_0^R} |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_{x_\varepsilon}^{R_\varepsilon}} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\,dx,$$

για αρκετά μεγάλο R και $R_\varepsilon := \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} R$. Η παραπάνω ανισότητα όμως δεν ισχύει αν η (x_ε) δεν τείνει στο x_0. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή υπάρχει $R_1 > 0$

τέτοιο ώστε για μια υπακολουθία έχουμε $B_{x_0}^{R_1} \cap B_{x_\varepsilon}^{R_\varepsilon} = \emptyset$. Υπάρχει επίσης συνάρτηση $f \in C(\overline{\mathbb{R}^n})$ τέτοια ώστε $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B_{x_0}^{R_1}} \leq f \leq \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B_{x_0}^{R_2}}$, $R_1 > R_2 > 0$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{B_{x_\varepsilon}^{R_\varepsilon}} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{x_0}^{R_1}} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\delta_{x_0} \\
&\leq \delta_{x_0}\left(\mathbb{R}^n \setminus B_{x_0}^{R_2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_{x_\varepsilon}^{R_\varepsilon}} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx = 0$. □

Εφαρμογή 3.1. *(Συναρτησιακό όγκου).*

Για τη συνάρτηση

$$F(t) := \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ 1 & , t \geq 1, \end{cases} \tag{3.11}$$

το μεταβολικό πρόβλημα

$$\sup\left\{ \int_\Omega F(u)\, dx : \ u \in D_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon \right\},$$

μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\sup\{|A| : A \subseteq \Omega,\ cap_\Omega(A) \leq \varepsilon^2\}$$

όπου $\int_\Omega F(u) = |A|$ και $\int_\Omega |\nabla u|^2 = cap_\Omega(A)$.

Πράγματι, αν $A \subseteq \Omega$, με $cap_\Omega(A) \leq \varepsilon^2$, τότε υπάρχει συνάρτηση $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, η οποία είναι το δυναμικό χωρητικότητας του συνόλου A, τέτοια ώστε $|A| = \int_\Omega F(u)\, dx$ και $\|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon$. Αντίστροφα, αν για κάποια συνάρτηση $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ έχουμε ότι $\|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon$, τότε θέτοντας $A = \{u \geq 1\}$ έχουμε ότι $cap_\Omega(A) \leq \varepsilon^2$ και $|A| = \int_\Omega F(u)\, dx$. Έπεται ότι τα σύνολα $\left\{\int_\Omega F(u)\, dx : \ u \in D_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon\right\}$ και $\{|A| : cap_\Omega(A) \leq \varepsilon^2\}$ ταυτίζονται και μάλιστα ένα ακρότατο $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ για το μεταβολικό πρόβλημα

$$\sup\left\{ \int_\Omega F(u)\, dx : \ u \in D_0^{1,2}(\Omega),\ \|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon \right\}$$

είναι το δυναμικό χωρητικότητας του συνόλου $A := \{u \geq 1\}$.

Η ασθενής μορφή της εξίσωσης Euler-Lagrange είναι το πρόβλημα ελεύθερου συνόρου του Bernoulli : Δοθέντος ενός χωρίου Ω και ενός αριθμού $Q > 0$, να βρεθούν ένα σύνολο $A \subset \Omega$ (με ελεύθερο σύνορο ∂A) και μια συνάρτηση $u : \Omega \setminus A \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \text{ στο } \Omega \setminus A, \\
u &= 0 \text{ στο } \partial \Omega, \\
u &= 1 \text{ στο } \partial A, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= Q \text{ στο } \partial A.
\end{aligned}$$

Η κατασκευή της συνοριακής συνθήκης μαζί με μία λεπτομερής ανάλυση αυτού του προβλήματος και κάποιες εφαρμογές του μπορεί να βρεθεί στο [8]. Τα ολικά ακρότατα του ολοκληρώματος όγκου δίνονται από μεταθέσεις των συναρτήσεων

$$\omega(x) = \begin{cases} \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} & , |x| > R \\ 1 & , |x| \leq R, \end{cases}$$

όπου το R είναι τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
\|\nabla \omega\|_2^2 &= (n-2)S(n)R^{n-2} = \frac{1}{K(R)} = cap_{\mathbb{R}^n}\left(B_0^R\right) = 1 \Rightarrow \\
R &= \frac{1}{((n-2)S(n))^{\frac{1}{n-2}}}.
\end{aligned}$$

Η κλίση στο ελεύθερο σύνορο είναι $Q = (n-2)/R$. Η γενικευμένη σταθερά Sobolev σε αυτή την περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$S^F = \int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\, dx = \left|B_0^R\right| = (n(n-2))^{\frac{n}{2-n}} \left|B_0^1\right|^{\frac{2}{2-n}}.$$

Η γενικευμένη ανισότητα Sobolev (2.1) για το συναρτησιακό όγκου είναι η ισοπεριμετρική ανισότητα η οποία συσχετίζει τον όγκο και τη χωρητικότητα ενός χωρίου A:

$$|A| \leq S^F cap_{\Omega}^{\frac{n}{n-2}}(A).$$

Στην περίπτωση όπου $\Omega = B_0^R$ το πρόβλημα ελεύθερου συνόρου του Bernoulli μπορεί να λυθεί άμεσα. Συμβολίζουμε με

$$K(r) = \frac{1}{(n-2)S(n)r^{n-2}}$$

τη θεμελιώδη ανωμαλία της Λαπλασιανής. Τα βέλτιστα σύνολα είναι ομόκεντρες μπάλες $A_\varepsilon = B_0^r$. Οι αντίστοιχες μεγιστοποιούσες συναρτήσεις δίνονται από

$$u_\varepsilon(x) = \frac{K(|x|) - K(R)}{K(r) - K(R)} \quad , \ r \leq |x| \leq R$$

οι οποίες επεκτείνονται με 1 στην μπάλα B_0^r με

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \int_{B_0^R} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \\ &= cap_{B_0^R}(B_0^r) = \frac{1}{K(r) - K(R)}. \end{aligned}$$

Από εδώ καθορίζεται η σχέση μεταξύ των ε και r. Επίσης σε γενικά χωρία τα βέλτιστα σύνολα A_ε συγκεντρώνονται σε ένα μεμονομένο σημείο όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.

Στο Βήμα 2, του Θεωρήματος 3.2, χρησιμοποιήσαμε μια παραλλαγή της ανισότητας Poincare-Sobolev η οποία δίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2. *Έστω Q συνεκτικό χωρίο πεπερασμένου όγκου με Lipschitz σύνορο και $\theta \in [0,1)$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c(Q,\theta)$ τέτοια ώστε*

$$\|\omega\|_{2^*} \leq c(Q,\theta)\|\nabla\omega\|_2,$$

για κάθε $\omega \in H^1(Q)$ με $|\{\omega \neq 0\}| \leq \theta|Q|$.

Proof. Έστω ότι δεν ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(\omega_k) \subseteq H^1(Q)$ τέτοια ώστε $\|\omega_k\|_{2^*} > k\,\|\nabla\omega_k\|_2$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $|\{\omega_k \neq 0\}| \leq \theta|Q|$. Ορίζοντας $\upsilon_k := \omega_k/\|\omega_k\|_{2^*}$ έχουμε ότι $\|\upsilon_k\|_{2^*} = 1$, $|\{\upsilon_k \neq 0\}| \leq \theta|Q|$ και

$$\|\nabla\upsilon_k\|_2 < \frac{1}{k} \to 0. \tag{3.12}$$

Από το θεώρημα συμπάγειας των Rellich-Kodrachov έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία (υ_{k_j}) και συνάρτηση $\upsilon \in L^2(Q)$ τέτοια ώστε

$$\upsilon_k \to \upsilon \text{ στον } L^2(Q). \tag{3.13}$$

Από τη σχέση (3.12) έχουμε ότι για κάθε $\phi \in C_c^\infty(Q)$ και $i = 1, \dots, n$

$$\int_Q \upsilon\phi_{x_i} dx = \lim_{k_j\to\infty} \int_Q \upsilon_{k_j}\phi_{x_i} dx = -\lim_{k_j\to\infty} \int_Q \upsilon_{k_j,x_i}\phi \, dx = 0.$$

Επομένως $\upsilon \in H^1(Q)$ και $\nabla\upsilon = 0$ $\sigma.\pi$ στο Q και επειδή το Q είναι συνεκτικό έχουμε ότι $\upsilon = t \in \mathbb{R}$ $\sigma.\pi$. Από την (3.12) έπεται ότι $\upsilon_k \to \upsilon$ στον $H^1(Q)$ και λόγω της συνεχούς εμφύτευσης του $H^1(Q)$ στον $L^{2^*}(Q)$ έχουμε ότι $\upsilon_k \to \upsilon$ στον $L^{2^*}(Q)$ άρα $\|\upsilon\|_{2^*} = 1$, επομένως $t \neq 0$. Έχουμε όμως ότι $|\{|\upsilon_k - t| > \delta\}| \leq \frac{1}{\delta^2}\int_Q |\upsilon_k - t|^2\,dx \to 0$, $k \to \infty$. Επιλέγοντας $\delta < |t|$ έχουμε ότι $0 < (1-\theta)|Q| < |\{\upsilon_k = 0\}| \leq |\{|\upsilon_k - t| > \delta\}| \to 0$, $k \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηρισμός των σημείων συγκέντρωσης

4.1 Ακτινική συμμετρία και ρυθμός εξασθένισης ολικών ακροτάτων

Στην παράγραφο αυτή συνοψίζουμε τις βασικές ιδιότητες των ολικών ακροτάτων για την S^F ([4]). Κάθε ακτινική συνάρτηση στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ φθίνει τουλάχιστον όπως η $r^{-\frac{n-2}{2}}$ (Strauss [13]). Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι τα ολικά ακρότατα για την S^F φθίνουν ταχύτερα.

Συμβολίζουμε με K τη θεμελιώδη λύση της Λαπλασιανής, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$K(x) = K(r) = \frac{1}{(n-2)\,S(n)\,r^{n-2}},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

όπου $r = |x|$ και $S(n)$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 4.1. *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση (F) και έστω ω ένα ακρότατο για την S^F. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. *Είτε $\omega < 0$ είτε $\omega > 0$, στον $\mathbb{R}^n$.*

2. *Υπάρχει μία μπάλα $B_{x_0}^{r_0}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση ω ταυτίζεται με τη συμμετρικοποίηση Schwarz ω^* έξω από αυτή την μπάλα.*

3. *Αν $\omega > 0$ και $x_0 = 0$, τότε η συνάρτηση $r \mapsto \omega(r)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (r_0, ∞) και*

$$\begin{aligned} \omega(r) &= W_\infty K(r)\big(1 + O(r^{-2})\big) \\ \omega'(r) &= W_\infty K'(r)\big(1 + O(r^{-2})\big), \end{aligned}$$

καθώς $r \to \infty$, *όπου*

$$W_\infty^2 = \frac{2(n-1)}{n\, S^F} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega)}{K\,(|\cdot|)}\, dx.$$

4. *Συγκεκριμένα* $\omega(r) \le c\, r^{2-n}$, $F(\omega(r)) \le c\, r^{-2n}$ *και*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} |\nabla \omega|^2 \, dx \le cR^{2-n}, \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega)\, dx \le c\, R^{-n},$$

για κάθε $R > 0$.

5. *Αν η συνάρτηση* F *είναι μη-φθίνουσα στο* $\mathbb{R}^+$ *και μη-αύξουσα στο* $\mathbb{R}^-$ *τότε η* $\overline{B_0^{r_0}}$ *ταυτίζεται με το σύνολο* $\{\omega = \max \omega\}$.

4.2 Συνάρτηση Robin και αρμονικό κέντρο

Στην παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^n$. Το σημείο συγκέντρωσης των ακροτάτων θα χαρακτηρισθεί με τους όρους που αφορούν τη συνάρτηση Robin, δηλαδή τη διαγώνιο του ομαλού κομματιού της συνάρτησης Green για το πρόβλημα Dirichlet στο χωρίο Ω, για τον τελεστή Laplace. Ορίζουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_x := \{u : &\text{ η συνάρτηση } u \text{ είναι υπεραρμονική στο } \Omega \text{ και} \\ &\liminf_{\substack{z \to y \\ z \in \Omega}} u(z) \ge K_x(y) \text{ για κάθε } y \in \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Για κάθε σημείο $x \in \Omega \cup \partial\,\Omega$ ορίζουμε το ομαλό κομμάτι της συνάρτησης Green, $H_\Omega(x,\cdot)$ ως τη λύση με την έννοια των Perron-Wiener-Brelot του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y H_\Omega(x,y) = 0 & , \text{ στο } \Omega \\ H_\Omega(x,y) = K_x(y) & , \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

δηλαδή $H_\Omega(x,y) := \inf_{u \in \mathcal{U}_x} u(y)$ για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ και $y \in \Omega$.

Η συνάρτηση Green του προβλήματος Dirichlet για τη Λαπλασιανή δίνεται από τη σχέση

$$G_x(y) = K_x(y) - H_\Omega(x,y).$$

Η συνάρτηση Green, το ομαλό κομμάτι και το ιδιόμορφο κομμάτι είναι όλες συμμετρικές συναρτήσεις στο $\Omega \times \Omega$.

Για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ επεκτείνουμε την $H(x,\cdot)$ σε μια υπεραρμονική συνάρτηση σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: Για κάθε $y \in \partial\Omega$ θέτουμε

$$\tilde{H}_\Omega(x,y) := \liminf_{\substack{z \to y \\ z \in \Omega}} H_\Omega(x,z)$$

και $\tilde{H}_\Omega(x,y) := K_x(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Επεκτείνουμε τώρα την $\tilde{H}(\cdot,\cdot)$ σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ θέτοντας $\tilde{H}_\Omega(x,y) := K_x(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

Ορισμός 4.1. *Για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\,\Omega$ το ομαλό τμήμα της συνάρτησης Green υπολογιζόμενο στο σημείο ιδιομορφίας*

$$\tau_\Omega(x) := \tilde{H}_\Omega(x,x)$$

ονομάζεται συνάρτηση Robin του χωρίου Ω στο σημείο x. Η αρμονική ακτίνα του χωρίου Ω στο σημείο x ορίζεται από τη σχέση

$$K(r(x)) = \tau_\Omega(x),$$

ισοδύναμα $r(x) := \big((n-2)S(n)\tau_\Omega(x)\big)^{\frac{1}{2-n}}$. Ένα σημείο ελαχίστου για τη συνάρτηση Robin (ισοδύναμα ένα σημείο μεγίστου για την αρμονική ακτίνα) στο $\Omega \cup \partial\,\Omega$ ονομάζεται αρμονικό κέντρο του Ω.

Κοντά στην ιδιομορφία, η συνάρτηση Green μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής:

$$G_x(y) = K_x(y) - \tau_\Omega(x) + O(|x-y|).$$

Όπως θα δούμε παρακάτω η αρμονική ακτίνα είναι μια θετική συνεχής συνάρτηση στο Ω. Μεταβάλλεται ομαλά σε ομαλές μεταβολές του χωρίου. Δίνουμε τώρα κάποια παραδείγματα:
Η αρμονική ακτίνα της μπάλας B_0^R δίνεται από τη σχέση

$$r(x) = R - \frac{|x|^2}{R}$$

και η αρμονική ακτίνα του συμπληρώματος $(B_0^R)^c$ από τη σχέση

$$r(x) = \frac{|x|^2}{R} - R.$$

Επίσης η αρμονική ακτίνα του ημιχώρου $\{x_1 > 0\}$ ισούται με

$$r(x) = 2x_1.$$

Παρατηρούμε ότι το αρμονικό κέντρο μιας μπάλας είναι μοναδικό και ταυτίζεται με το κέντρο της. Επίσης έχει αποδειχθεί από τους Cardaliaguet και Tahraoui [15] ότι για οποιοδήποτε κυρτό και φραγμένο χωρίο υπάρχει μόνο ένα αρμονικό κέντρο. Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικότερες ιδιότητες της αρμονικής ακτίνας.

Πρόταση 4.1 (Βασικές ιδιότητες της αρμονικής ακτίνας).

1. *(Θετικότητα) Στο εσωτερικό του χωρίου* Ω *η αρμονική ακτίνα είναι ομαλή, θετική συνάρτηση.*

2. *(Μονοτονία) Αν* $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$ *τότε* $r_\Omega(x) \leq r_{\tilde{\Omega}}(x)$ *για κάθε* $x \in \Omega$, *όπου* r_Ω, $r_{\tilde{\Omega}}$ *είναι οι αρμονικές ακτίνες των χωρίων* Ω, $\tilde{\Omega}$, *αντίστοιχα. Συγκεκριμένα έχουμε* $r(x) \geq d(x) := dist(x, \partial\Omega)$.

3. *(Αλλαγή Κλίμακας) Αν* $\tilde{\Omega} = \lambda\Omega$ *τότε* $\tilde{r}(\lambda x) = \lambda r(x)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}^F$ την κλάση των μεγιστοποιουσών ακολουθιών για την S^F οι οποίες αποτελούνται από ακτινικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.2. *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση (F) και ορίζουμε*

$$w_\infty^2 := \frac{2(n-1)}{n\, S^F} \inf \left\{ \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx \quad : \{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F \right\}.$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $w_\infty = 0$ *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο χώρο* $\mathcal{B}^F$ *η οποία συγκεντρώνεται στο 0.*

2. $0 < w_\infty < \infty$ *αν και μόνο αν καμία ακολουθία στο χώρο* $\mathcal{B}^F$ *δε συγκεντρώνεται στο* 0 *και υπάρχει ένα ακρότατο για την* S^F.

3. $w_\infty = \infty$ *αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο χώρο* $\mathcal{B}^F$ *συγκεντρώνεται στο* ∞.

Απόδειξη. Έστω τυχαία ακολουθία $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$. Για μια υπακολουθία ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Γενικευμένου Θεωρήματος εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας ΙΙ (Θεώρημα 2.3). Επομένως ακριβώς μία από τις ακόλουθες τρεις προτάσεις ισχύει.

(A) Συγκέντρωση στην αρχή: $|\nabla\omega_k|^2\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ και $F(\omega_k)\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F\delta_0$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $k \to \infty$.

(B) Συμπάγεια: $\omega_k \to \omega$ στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, καθώς $k \to \infty$, ω είναι ένα ακρότατο για την S^F και $F(\omega_k) \to F(\omega)$ στον $L^1(\mathbb{R}^n)$, καθώς $k \to \infty$.

(Γ) Συγκέντρωση στο άπειρο: $|\nabla\omega_k|^2\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_\infty$ και $F(\omega_k)\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F\delta_\infty$ στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $k \to \infty$.

Δεν είναι δυνατό να έχουμε συγκέντρωση σε κάποιο σημείο x_1 τέτοιο ώστε $x_1 \neq 0$, $x_1 \neq \infty$. Πράγματι, έστω $x_2 \neq x_1$ τέτοιο ώστε $|x_1| = |x_2|$ και $|x_1 - x_2| > r > 0$. Τότε για τη συνάρτηση $\phi_{x_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με

$$\phi_{x_0}(x) := \begin{cases} e^{\frac{r^2}{|x-x_0|^2-r^2}} & , |x-x_0| < r \\ 0 & , |x-x_0| \geq r, \end{cases}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = S^F \int_{B^r_{x_2}} \phi_{x_2}\, d\delta_{x_1} &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{x_2} F(\omega_k)\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{x_1} F(\omega_k)\, dx \\ &= S^F \int_{B^r_{x_1}} \phi_{x_1}\, d\delta_{x_1} = e^{-1} \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

1. Αν $w_\infty = 0$ τότε υπάρχει ακολουθία $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{\omega_k\}$ συγκεντρώνεται στο 0. Δείχνουμε αρχικά ότι είναι αδύνατο να έχουμε συμπάγεια. Ας υποθέσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι έχουμε συμπάγεια. Από τη σχέση

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx &= \int_{B_0^R} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx \\ &\geq \int_{B_0^R} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx + \frac{1}{K(R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega_k)\, dx. \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\frac{1}{K(R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega_k)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx - \int_{B_0^R} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\, dx \to 0,$$

καθώς $k \to \infty$, για κάθε $R > 0$. Έπεται ότι $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega_k)\, dx = 0$, για κάθε $R > 0$. Άρα για $R \to 0$ έχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega_k)\, dx \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Όμως $\int_{\mathbb{R}^n} F(\omega_k)\, dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\, dx$ άρα $0 < S^F = \int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\, dx = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{\omega_k\}$ δεν συγκεντρώνεται στο άπειρο. Αν η ακολουθία $\{\omega_k\}$ συγκεντρώνεται στο ∞ έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\,dx \geq \frac{1}{K(R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega_k)\,dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{S^F}{K(R)}, \text{ για κάθε } R > 0.$$

Στέλνοντας το $R \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\,dx = \infty\,,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η ακολουθία $\{\omega_k\}$ συγκεντρώνεται στο 0. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια μεγιστοποιούσα ακολουθία $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$ η οποία συγκεντρώνεται στο 0 τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \omega_\infty^2 &\leq \frac{2(n-1)}{n\,S^F}\frac{1}{K(r)} \liminf_{k\to\infty} \int_{B_0^r} F(\omega_k)\,dx \\ &\leq \frac{2(n-1)}{n}\frac{1}{K(r)} \to 0, \text{ καθώς } \; r \to 0. \end{aligned}$$

2. Αν καμία ακολουθία, στο χώρο $\mathcal{B}^F$, δεν συγκεντρώνεται στο 0 τότε από την περίπτωση 1 έχουμε ότι $w_\infty > 0$ και αν υπάρχει ένα ακρότατο ω για την S^F, τότε από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι $w_\infty^2 \leq W_\infty^2 = \frac{2\,(n-1)}{n\,S^F} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega)}{K(|\cdot|)}\,dx < \infty$. Αντίστροφα, αν $0 < w_\infty < \infty$ τότε αν κάποια ακολουθία συγκεντρώνονταν στο 0, από την πρώτη περίπτωση θα είχαμε ότι $w_\infty = 0$, το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση μας. Επιπλέον αν δεν υπάρχει ακρότατο για την S^F τότε δεν θα είχαμε συμπάγεια, συνέπεια της οποίας είναι η ύπαρξη ακροτάτου για την S^F. Τότε κάθε ακολουθία $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$ θα συγκεντρώνονταν στο ∞ από το οποίο έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\,dx \geq \frac{1}{K(R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\omega_k)\,dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{S^F}{K(R)}, \text{ για κάθε } R > 0.$$

Στέλνοντας το $R \to \infty$ έχουμε

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega_k)}{K(|\cdot|)}\,dx = \infty,$$

για κάθε $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$. Άρα $w_\infty = \infty$, το οποίο είναι άτοπο.

3. Αν κάθε ακολουθία συγκεντρώνεται στο ∞, όπως δείξαμε παραπάνω έχουμε $\omega_\infty = \infty$. Αντίστροφα, έστω $\omega_\infty = \infty$. Αν μια ακολουθία συγκεντρώνεται στο 0, από την πρώτη περίπτωση έχουμε $w_\infty = 0$, το

οποίο είναι άτοπο. Επομένως καμία ακολουθία στο χώρο $\mathcal{B}^F$ δεν συγκεντρώνεται στο 0. Αν έχουμε συμπάγεια τότε η S^F επιδέχεται ακρότατο $\omega \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ οπότε από τη δεύτερη περίπτωση θα είχαμε $w_\infty < \infty$, το οποίο είναι επίσης άτοπο. Άρα κάθε ακολουθία $\{\omega_k\} \in \mathcal{B}^F$ συγκεντρώνεται στο ∞.

□

Από τα Θεωρήματα 4.1 και 3.1 παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου $0 < \omega_\infty < \infty$ έχουμε ότι $\omega_\infty^2 \le W_\infty^2$. Σαν συνέπεια των Θεωρημάτων 4.1 και 4.2 έχουμε το επόμενο κριτήριο συμπάγειας.

Πόρισμα 4.1. *Αν η συνάρτηση F ικανοποιεί τη συνθήκη (F) και*

$$F_\infty^+ < \frac{S^F}{S^*}, \quad F_0^+ < \frac{S^F}{S^*},$$

τότε η S^F επιδέχεται ένα ακτινικό ακρότατο ω, $0 < w_\infty < \infty$ και $\omega(r)/K(r) \to w_\infty$, καθώς $r \to \infty$.

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε συνοριακό σημείο το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη ομαλότητας Wiener, η συνάρτηση Robin τείνει στο ∞. Επομένως κάθε φραγμένο χωρίο Ω με ομαλό σύνορο, έχει τουλάχιστον ένα αρμονικό κέντρο στο Ω. Στην ακόλουθη πρόταση θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση Robin είναι κάτω ημισυνεχής στο $\Omega \cup \partial\Omega$. Από την κάτω ημισυνέχεια της τ_Ω, έπεται ότι κάθε φραγμένο χωρίο, χωρίς απαραίτητα να έχει ομαλό σύνορο, έχει τουλάχιστον ένα αρμονικό κέντρο.

Για κάθε $x_0 \in \partial\Omega$ συμβολίζουμε με $\Omega_\rho(x_0)$ το σύνολο $\Omega \cup B_{x_0}^\rho$. Επίσης για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ συμβολίζουμε με $H_{\Omega_\rho(x_0)}(x,\cdot)$ τη λύση με την έννοια των Perron-Wiener-Brelot του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta_y H_{\Omega_\rho(x_0)}(x,y) = 0 & \text{, στο } \Omega_\rho(x_0) \\ H_{\Omega_\rho(x_0)}(x,y) = K_x(y) & \text{, στο } \partial\Omega_\rho(x_0). \end{cases} \tag{4.1}$$

Συμβολίζουμε την επέκταση της $H_{\Omega_\rho(x_0)}$ σε όλο το $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ με $\tilde{H}_{\Omega_\rho(x_0)}$ και με $\tau_{\Omega_\rho(x_0)}$ την αντίστοιχη συνάρτηση Robin.

Πρόταση 4.2. *Έστω $x_0 \in \partial\Omega$. Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, η συνάρτηση $\tilde{H}_{\Omega_\rho(x_0)}(x,y)$ αυξάνει προς την $\tilde{H}_\Omega(x,y)$ καθώς το ρ φθίνει στο 0.*

Συγκεκριμένα η $\tau_{\Omega_\rho(x_0)}(x)$ συγκλίνει αυξανόμενη στο $\tau_\Omega(x)$ καθώς $\rho \to 0$, για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ και η συνάρτηση τ_Ω είναι κάτω ημισυνεχής στο $\Omega \cup \partial\Omega$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \partial\Omega$, $x \in \Omega \cup \partial\,\Omega$, $\rho_2 > \rho_1 > 0$ και $H_{\Omega_{\rho_2}}$, $H_{\Omega_{\rho_1}}$ οι λύσεις του προβλήματος (4.1) για $\rho = \rho_1$ και $\rho = \rho_2$, αντίστοιχα.

$$H_{\Omega_{\rho_2}}(x,y) \leq K_x(y) \leq \liminf_{\substack{z\to y\\ z\in\Omega_{\rho_1}}} H_{\Omega_{\rho_1}}(x,y) = H_{\Omega_{\rho_1}}(x,y).$$

Επομένως αυξάνει σημειακά στο Ω προς τη λύση, με την έννοια των Perron-Wiener-Brelot , του προβλήματος Dirichlet με συνοριακές τιμές οι οποίες ταυτίζονται με την $K_x(y)$ τουλάχιστον στο σύνολο $\partial\Omega \setminus (\mathcal{Z} \cup \{x_0\})$, όπου το σύνολο $\mathcal{Z}$ είναι το σύνολο των ιδιόμορφων σημείων του $\partial\Omega$. Εφόσον το $\mathcal{Z}$ έχει μηδενική χωρητικότητα, έχουμε ότι η $H_{\Omega_{\rho(x_0)}}(x,y)$ συγκλίνει στην $H_\Omega(x,y)$, καθώς $\rho \to 0$, για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\,\Omega$ και $y \in \Omega$.

Συγκεκριμένα η $\tau_{\Omega_{\rho(x_0)}}(x)$ συγκλίνει στην $\tau_\Omega(x)$, καθώς $\rho \to 0$, για κάθε $x \in \Omega \cup \partial\,\Omega$. Η συνάρτηση τ_Ω είναι συνεχής στο Ω. Έστω τώρα $x_0 \in \partial\Omega$ και $x_j \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x_0$. Από την κάτω ημισυνέχεια των συναρτήσεων $\tau_{\Omega_{\rho(x_0)}}$ στο x_0 έχουμε ότι

$$\liminf_{j\to\infty} \tau_\Omega(x_j) \geq \liminf_{j\to\infty} \tau_{\Omega_{\rho(x_0)}}(x_j) \geq \tau_{\Omega_{\rho(x_0)}}(x_0) \xrightarrow{\rho\to 0} \tau_\Omega(x_0).$$

Έπεται ότι η συνάρτηση Robin τ_Ω είναι κάτω ημισυνεχής στο $\Omega \cup \partial\,\Omega$. $\square$

Πρόταση 4.3. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $x \mapsto \tilde{H}_\Omega(x,y)$ είναι υπεραρμονική στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον η συνάρτηση $(x,y) \mapsto \tilde{H}_\Omega(x,y)$ είναι κάτω ημισυνεχής στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε η συνάρτηση $\tilde{H}_\Omega(\cdot,y)$ ότι είναι υπεραρμονική αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάτω ημισυνεχής και

$$\tilde{H}_\Omega(x,y) \geq \fint_{B_x^s} \tilde{H}_\Omega(t,y)dt, \tag{4.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $s > 0$.

Αν $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ τότε $\tilde{H}_\Omega(x,y) = K_x(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ η οποία είναι υπεραρμονική.

Αν $y \in \Omega$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ ή $x \in \Omega$, τότε η $\tilde{H}_\Omega(x,y)$ ισούται με $K_x(y)$ και $H_\Omega(x,y)$ αντίστοιχα, οι οποίες είναι υπεραρμονικές συναρτήσεις.

Θα ελέγξουμε τώρα την υπεραρμονικότητα της $\tilde{H}_\Omega(\,\cdot\,,y_0)$ στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Αν $y \in \partial\Omega$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ τότε $\tilde{H}_\Omega(x,y) = K_x(y)$ και η $\tilde{H}_\Omega(\,\cdot\,,y)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο x. Σταθεροποιούμε $x_0, y_0 \in \Omega \cup \partial\,\Omega$, όπου τουλάχιστον ένα από τα x_0, y_0 ανήκει στο $\partial\Omega$, και ας αποδείξουμε αρχικά ότι η $\tilde{H}_\Omega(\,\cdot\,,y_0)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο x_0. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $H_{\rho,r}(x,\cdot)$ η PWB λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta_y H_{\rho,r}(x,y) = 0 & , \text{στο } \Omega \cup B^{\rho}_{x_0} \cup B^{r}_{y_0}, \\ H_{\rho,r}(x,y) = K_x(y) & , \text{στο } \partial\left(\Omega \cup B^{\rho}_{x_0} \cup B^{r}_{y_0}\right). \end{cases}$$

Απομένει να δείξουμε τη συνθήκη (4.2) για κάθε x_0, $y_0 \in \Omega \cup \partial\Omega$ και τουλάχιστον ένα απο τα x_0, y_0 ανήκει στο $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rho,r}(x_0,y_0) = \tilde{H}_{\rho,r}(y_0,x_0) &\geq \fint_{B^s_{x_0}} \tilde{H}_{\rho,r}(y_0,t)dt \\ &= \fint_{B^s_{x_0}\setminus\mathcal{Z}} \tilde{H}_{\rho,r}(y_0,t)dt \\ &= \fint_{B^s_{x_0}} \tilde{H}_{\rho,r}(t,y_0)dt. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τώρα την κάτω ημισυνέχεια της $\tilde{H}_\Omega$ στο (x,y), από την υπεραρμονικότητα της $\tilde{H}_\Omega$ στο (x,y) έχουμε

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{t\to x\ z\to y \\ t,z\,\in\,\Omega}} \tilde{H}_\Omega(t,z) &\geq \liminf_{\substack{t\to x \\ z\to y}} \fint_{B_s(t)} \fint_{B_l(z)} \tilde{H}_\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= \lim_{\substack{t\to x \\ z\to y}} \fint_{B_s(t)} \fint_{B_l(z)} \tilde{H}_\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= \fint_{B_s(x)} \fint_{B_l(y)} \tilde{H}_\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\liminf_{\substack{t\to x\ z\to y \\ t,z\,\in\,\Omega}} \tilde{H}_\Omega(t,z) \geq \sup_{s,l\in\mathbb{R}^+} \fint_{B_s(x)} \fint_{B_l(y)} \tilde{H}_\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta = \tilde{H}_\Omega(x,y).$$

□

Λήμμα 4.1. *Για σταθερό $x \in \Omega$ η συνάρτηση Green G_x ικανοποιεί τα εξής:*

1. *Για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\begin{aligned} \int_{\{G_x<t\}} |\nabla G_x|^2\, dx &= t, \\ \int_{\partial\{G_x>t\}} |\nabla G_x|\, dx &= 1. \end{aligned}$$

2. *Καθώς* $t \to \infty$ *έχουμε* $B_x^{r_-} \subset \overline{\{G_x > t\}} \subset B_x^{r_+}$ *με* $r_\pm = r \pm O(r^n)$ *και το* r *ορίζεται από τη σχέση* $t = K(r) - \tau_\Omega(x)$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $G_x \wedge t$ ανήκει στον $D_0^{1,2}(\Omega)$ και είναι ταυτοτικά ίση με t σε μία περιοχή του x. Με ένα προσεγγιστικό επιχείρημα μπορούμε να πάρουμε την $G_x \wedge t$ σαν συνάρτηση δοκιμής για την ισότητα $-\Delta G_x = \delta_x$, από το οποίο έπεται η πρώτη ισότητα. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στην πρώτη ισότητα, έπεται η δεύτερη ισότητα.

Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται από την εκτίμηση $G_x(y) = K_x(y) - \tau_\Omega(x) + O(|x-y|)$, καθώς $x \to y$. □

Πρόταση 4.4. *Έστω* Ω^* *η μπάλα με ακτίνα* R_Ω *και κέντρο το* 0, *τέτοια ώστε* $|\Omega^*| = |\Omega|$. *Τότε* $r(x) \leq R_\Omega$ *για κάθε* $x \in \Omega \cup \partial\Omega$.

Απόδειξη. Για $x \in \Omega$ η απόδειξη έχει γίνει στο [3], Πόρισμα 14. Αν $x \in \partial\Omega$ εφαρμώζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για το σύνολο $\Omega_\rho = \Omega \cup \partial B_x^\rho$ και έχουμε $r_{\Omega_\rho}(x) \leq R_{\Omega_\rho}$ για κάθε $\rho > 0$, όπου $r_{\Omega_\rho}(x)$ είναι η αρμονική ακτίνα του Ω_ρ στο σημείο x. Επομένως $K(r_{\Omega_\rho}(x)) \geq K(R_{\Omega_\rho})$, δηλαδή $\tau_{\Omega_\rho}(x) \geq K(R_{\Omega_\rho})$. Καθώς $\rho \to 0$ η ακτίνα R_{Ω_ρ} συγκλίνει στην R_Ω και από την Πρόταση 4.2 έχουμε ότι η $\tau_{\Omega_\rho}(x)$ συγκλίνει στην $\tau_\Omega(x)$. Έτσι έχουμε ότι $\tau_\Omega(x) \geq K(R_\Omega) \Rightarrow K(r(x)) \geq K(R_\Omega) \Rightarrow r(x) \leq R_\Omega$. □

Με βάση την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε μια εκτίμηση για τα σύνολα στάθμης της συνάρτησης Green.

Πρόταση 4.5. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ *και* $r > 0$. *Μεταξύ όλων των χωρίων* Ω, *τα οποία περιέχουν το* x, *τέτοια ώστε* $r_\Omega(x) = r$, *η ποσότητα*

$$\int_{\partial\{G_x > t\}} \frac{1}{|\nabla G_x|},$$

ελαχιστοποιείται όταν $\Omega = B_x^r$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\Omega_x^t := \{y : G_x(y) > t\}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το Λήμμα 4.1, έχουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega_x^t} 1\,dx \leq \left(\int_{\partial\Omega_x^t} |\nabla G_x|\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega_x^t} \frac{1}{|\nabla G_x|}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\partial\Omega_x^t} \frac{1}{|\nabla G_x|}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Από την ισοπεριμετρική ανοσότητα, η οποία συνδέει τον όγκο και το εμβαδό, με βέλτιστη σταθερά c_n, έχουμε ότι $|\partial\Omega_x^t| \geq c_n\,|\Omega_x^t|^{\frac{n-1}{n}}$. Έπεται ότι

$$\int_{\partial\Omega_x^t} \frac{1}{|\nabla G_x|}\,dx \geq |\partial\Omega_x^t|^2 \geq c_n\,|\Omega_x^t|^{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

Από την Πρόταση 4.4 έχουμε ότι

$$|\Omega| \geq |B_0^{r(x)}| = |\{r > 0 : K(r) \geq \tau_\Omega(x)\}|, \text{ για κάθε } x \in \bar{\Omega}. \tag{4.3}$$

Στην περίπτωση όπου $\tau_\Omega(x) < +\infty$ έχουμε ότι $x \in \Omega_x^t := \{y : G_x(y) > t\}$, $t > 0$. Εφαρμόζοντας την (4.3) για το σύνολο Ω_x^t και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $G_{\Omega_x^t,x} = G_x - t \Rightarrow \tau_{\Omega_x^t}(x) = t + \tau_\Omega(x)$ έχουμε ότι

$$|\{G_x > t\}| \geq |\{K > t + \tau_\Omega(x)\}|. \tag{4.4}$$

Στην περίπτωση όπου το χωρίο Ω είναι μπάλα, όλες ο παραπάνω ανισότητες είναι ισότητες, από τις οποίες έπεται ο ισχυρισμός. □

Λήμμα 4.2. *Έστω $\{A_k\}$ μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $|A_k| = |B_0^1|$ και $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \to cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)$ καθώς $k \to \infty$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{x_{k_m}\}$ τέτοια ώστε $|A_{k_m} - x_{k_m} \triangle B_0^1| \to 0$, καθώς $m \to \infty$. Επιπλέον αν οι συναρτήσεις u_k και u είναι το δυναμικό χωρητικότητας των A_k και B_0^1 αντίστοιχα, τότε η ακολουθία $\{u_{k_m}(x_{k_m} + \cdot)\}$ συγκλίνει στην u ισχυρά στον $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\|\nabla u_k\|_2^2 = cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \leq M \in \mathbb{R}^+$ και από την αυτοπάθεια του χώρου $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $\{u_{k_l}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Θέτουμε

$$F(t) := \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ 1 & , t \geq 1. \end{cases}$$

Θα εφαρμώσουμε το Λήμμα 3.1 για τα μέτρα $\sigma_k := F(u_k)\,dy$, αποδεικνύοντας ότι έχουμε συμπάγεια, με την έννοια του Λήμματος. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\sigma_k(\mathbb{R}^n) = |A_k| = |B_0^1|$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θα αποκλείσουμε αρχικά την περίπτωση του διαχωρισμού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_k = 0$. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχουν $S_1, S_2 > 0$ με $S_1 + S_2 = |B_0^1|$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια ακτίνα r, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(u_k)\,dx, \\ S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(u_k)\,dx, \end{aligned}$$

για κάθε $R > r$ και k αρκετά μεγάλο. Για κάθε $\delta' > 0$ από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev (Πόρισμα 2.1) υπάρχουν δύο ακτίνες R, ρ τέτοιες ώστε $R > \rho > r$, $r/\rho \leq k(\delta')$, $\rho/R \leq k(\delta')$ και

$$
\begin{aligned}
S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(u_k)\, dx \leq S^F \left(\int_{B_0^\rho} |\nabla u_k|^2\, dx + \delta' cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \right)^{\frac{n}{n-2}}, \\
S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(u_k)\, dx \leq S^F \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^\rho} |\nabla u_k|^2\, dx + \delta' cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \right)^{\frac{n}{n-2}}.
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες έχουμε

$$
\left(\frac{S_1 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \left(\frac{S_2 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq (1 + 2\delta')\, cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} (1 + 2\delta')\, cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1).
$$

Έχουμε όμως ότι $S^F\, (cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1))^{\frac{n}{n-2}} = |B_0^1|$, επομένως η παραπάνω εκτίμηση γίνεται

$$
\left(\frac{S_1 - \delta}{|B_0^1|} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \left(\frac{S_2 - \delta}{|B_0^1|} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq (1 + 2\delta'),
$$

το οποίο είναι άτοπο για δ, δ' αρκετά μικρά. Από το γεγονός ότι $|\{u_k \geq 1\}| = |A_k| = |B_0^1|$ έπεται άμεσα ο αποκλεισμός της εξασθένισης (με την έννοια του Λήμματος 3.1). Έπεται, ως προς μια υπακολουθία, ότι υπάρχει μια ακολουθία σημείων $x_k \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα μέτρα $F(u_k)\, dy$ να είναι συμπαγή με την έννοια του Λήμματος 3.1. Έχουμε επίσης ότι

$$
\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)^{\frac{n}{n-2}}} \int_{\mathbb{R}^n} F(u_k)\, dx = \frac{|A_k|}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)^{\frac{n}{n-2}}} \to S^F, \text{ καθώς } k \to \infty,
$$

δηλαδή η (u_k) είναι μια μεγιστοποιούσα ακολουθία για το συναρτησιακό όγκου. Συμπεραίνουμε ότι ως προς μια υπακολουθία η (u_k) ικανοποιεί το γενικευμένο θεώρημα συγκέντρωσης - συμπάγειας. Η συμπάγεια με την έννοια του λήμματος αποκλείει τη συγκέντρωση στο άπειρο. Η συγκέντρωση σε πεπερασμένο σημείο αποκλείεται από το γεγονός ότι $|A_k| = |B_0^1|$. Επομένως, από το Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας - συμπάγειας, η ακολουθία $(u_k\,(x_k + \cdot))$ συγκλίνει στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ σε μια συνάρτηση $u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, τουλάχιστον ως προς μία υπακολουθία. Από την συνεχή εμφύτευση του χώρου $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ έπεται ότι η ακολουθία $(u_k(x_k + \cdot))$ συγκλίνει στον $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ στην u και άρα υπάρχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην u, σ.π. στον $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $|\{u > 1 - \eta\}| \geq \liminf_{k \to \infty} |\{u_k \geq 1\}| = |B_0^1|$ για κάθε $\eta > 0$. Εφόσον $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) = \|\nabla u_k\|_2^2 \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} \|\nabla u\|_2^2$ έχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx = cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)$, συνεπώς το σύνολο $\{u \geq 1\}$ είναι μια μπάλα ακτίνας 1 και η συνάρτηση u είναι το δυναμικό χωρητικότητας αυτής της μπάλας. Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε τα σημεία x_k έτσι ώστε $\{u \geq 1\} = B_0^1$. $\square$

Από την ισοπεριμετρική ανισότητα για την χωρητικότητα, γνωρίζουμε ότι μεταξύ όλων των συνόλων, τα οποία έχουν τον ίδιο όγκο, η μπάλα έχει την μικρότερη χωρητικότητα ως προς τον $\mathbb{R}^n$. Συνέπεια του προηγούμενου λήμματος είναι η ακόλουθη πρόταση η οποία ουσιαστικά δηλώνει ότι εάν η χωρητικότητα ενός συνόλου προσεγγίζει την χωρητικότητα της συμμετρικοποίησης του, τότε το σύνολο είναι σχεδόν μια μπάλα.

Πρόταση 4.6. *Υπάρχει συνάρτηση $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, με $\lim_{\delta\to 0^+}\omega(\delta) = 0$ με την επόμενη ιδιότητα. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη μηδενικό μέτρο και ορίζουμε $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $|A| = |B_0^\rho|$. Υποθέτουμε ότι*

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A)}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^\rho)} \leq 1 + \delta.$$

Τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|A \triangle B_y^\rho|}{|B_y^\rho|} \leq \omega(\delta).$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για $\rho = 1$ διότι τότε το αποτέλεσμα θα ισχύει για κάθε $\rho > 0$. Πράγματι, εάν για ένα σύνολο A έχουμε ότι $|A| = |B_0^\rho|$ και

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A)}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^\rho)} \leq 1 + \delta,$$

έπεται ότι

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(\frac{1}{\rho}A)}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)} = \frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A)}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^\rho)} \leq 1 + \delta.$$

Επομένως υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|A \triangle B_y^\rho|}{|B_y^\rho|} = \frac{|\frac{1}{\rho}A \triangle B_y^1|}{|B_y^1|} \leq \omega(\delta).$$

Ας υποθέσουμε για να καταλήξουμε σε αντίφαση ότι δεν ισχύει η πρόταση. Επιλέγουμε συναρτήσεις $\omega_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $\lim_{\delta\to 0^+}\omega_k(\delta) = 0$ και ακολουθία σημείων $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\delta_k \to 0$, καθώς $k \to \infty$ και $\inf\{\omega_k(\delta_k),\, k \in \mathbb{N}\} \geq \omega > 0$. Για παράδειγμα επιλέγουμε $\omega_k(\delta) = \sqrt[k]{\delta}$ και $\delta_k = \gamma^k$, $\gamma < 1$. Εφόσον οι συναρτήσεις ω_k δεν ικανοποιούν τον ισχυρισμό της πρότασης, μπορούμε να βρούμε σύνολα A_k για τα οποία, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $|A_k| = |B_0^1|$,

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)} \leq 1 + \delta_k,$$

και επιπλέον
$$\frac{|A_k \triangle B_y^1|}{|B_y^1|} > \omega_k(\delta_k) \geq \omega > 0,$$
για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε λοιπόν ότι $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \to cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)$ και από το Λήμμα 4.2 έπεται ότι υπάρχουν $y_k \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\left|A_k \triangle B_{y_k}^1\right| = |A_k - y_k \triangle B_0^1| \to 0$, καθώς $k \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο. □

Λήμμα 4.3 (Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της χωρητικότητας). *Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

(i) Έστω $x_0 \in \Omega \cup \partial\Omega$ και έστω A_k μια ακολουθία υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε $|A_k| > 0$ και
$$\frac{1}{|A_k|}\mathcal{X}_{A_k}\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}, \text{ στον } \mathcal{M}(\bar{\Omega}), \text{ καθώς } k \to \infty.$$
Τότε
$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} \geq \tau_{\Omega}(x_0). \tag{4.5}$$

(ii) Έστω τώρα ότι το Ω είναι φραγμένο και $A_k \subseteq \Omega$, με $|A_k| > 0$ και $|A_k| \to 0$. Τότε
$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} \geq \min_{\overline{\Omega}} \tau_{\Omega}.$$

Απόδειξη. (i) Θα αποδείξουμε αρχικά την (4.5) στην περίπτωση όπου $x_0 \in \Omega$. Με ένα προσεγγιστικό επιχείρημα είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι τα σύνολα A_k είναι συμπαγή. Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι το lim inf στην (4.5) είναι lim, εφόσον είναι το όριο κάποιας υπακολουθίας. Από την υπόθεση της συγκέντρωσης έπεται ότι $|A_k| \to 0$, καθώς $k \to \infty$. Πράγματι επιλέγοντας μια συνάρτηση $f \in C_c(B_{x_0}^{\varepsilon})$, $B_{x_0}^{\varepsilon} \subset \Omega$, τέτοια ώστε $f(x_0) = 1$ και $f \leq 1$, έχουμε ότι
$$1 \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{|A_k|} \int_{B_{x_0}^{\varepsilon} \cap A_k} 1\,dx \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|A_k|} \int_{\Omega} \mathcal{X}_{A_k} f\,dx = f(x_0) = 1.$$
Επομένως έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} |A_k| \leq \liminf_{k\to\infty} |B_{x_0}^{\varepsilon} \cap A_k| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} < \infty, \tag{4.6}$$

διαφορετικά το συμπέρασμα έπεται άμεσα. Έστω $r_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $|A_k| = |B_0^{r_k}|$. Εφόσον $|A_k^*| = |B_0^{r_k}| \to 0$, καθώς $k \to \infty$, έχουμε ότι $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*) = \frac{1}{K(r_k)} \to 0$, καθώς $k \to \infty$. Επομένως από την (4.6) έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} cap_\Omega(A_k) = 0$ και

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{cap_\Omega(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - 1 \\ &= \limsup_{k\to\infty} cap_\Omega(A_k) \left(\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_\Omega(A_k)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \frac{cap_\Omega(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} = 1. \tag{4.7}$$

Επομένως από τις σχέσεις $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \leq cap_\Omega(A_k)$ και $cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*) \leq cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)$ έχουμε ότι

$$1 = \lim_{k\to\infty} \frac{cap_\Omega(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} \geq 1,$$

από την οποία έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} = 1. \tag{4.8}$$

Για τα σύνολα $\left(\frac{|B_0^1|}{|A_k|}\right)^{\frac{1}{n}} A_k$ έχουμε ότι $\left|\left(\frac{|B_0^1|}{|A_k|}\right)^{\frac{1}{n}} A_k\right| = |B_0^1|$. Επιπλέον από τον τύπο για τον όγκο και τη χωρητικότητα της μπάλας A_k^* ως προς τον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$|A_k| = |A_k^*| = (n(n-2))^{\frac{n}{2-n}} |B_0^1|^{\frac{2}{2-n}} cap_{\mathbb{R}^n}^{\frac{n}{n-2}}(A_k^*).$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και την (4.8), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} cap_{\mathbb{R}^n}\left(\left(\frac{|B_0^1|}{|A_k|}\right)^{\frac{1}{n}} A_k \right) &= \frac{|B_0^1|}{|A_k|}^{\frac{n-2}{n}} cap_{\mathbb{R}^n}(A_k) \\ &= \frac{1}{K(1)} \frac{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1). \end{aligned}$$

Επομένως τα σύνολα $\left(\frac{|B_0^1|}{|A_k|}\right)^{\frac{1}{n}} A_k$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Λήμματος 4.2, από το οποίο έπεται ότι τα σύνολα αυτά ασυμπτωτικά τείνουν να γίνουν μπάλες και τα αντίστοιχα δυναμικά χωρητικότητας u_k συγκλίνουν ισχυρά στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, μετά από κατάλληλες μεταθέσεις. Συμβολίζοντας με u_k το δυναμικό χωρητικότητας του συνόλου A_k συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σημείο $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|\nabla u_k|^2}{cap_\Omega(A_k)}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{\bar{x}}. \tag{4.9}$$

Εφόσον τα σύνολα A_k συγκεντρώνονται στο σημείο x_0 έχουμε ότι $x = x_0$. Θα δείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις

$$\upsilon_k := \frac{u_k}{cap_\Omega(A_k)}$$

συγκλίνουν στη συνάρτηση Green. Έστω μ_k η κατανομή χωρητικότητας του A_k δηλαδή ένα μη αρνητικό μέτρο Radon με φορέα στο A_k τέτοιο ώστε $-\Delta u_k = \mu_k$ με την έννοια του $H^{-1}(\Omega)$. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\int_{A_k} \phi d\mu_k = \int_\Omega \nabla u_k \nabla \phi\, dx, \tag{4.10}$$

για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι τα μέτρα $\lambda_k := \mu_k / cap_\Omega(A_k)$ συγκλίνουν στο δ_{x_0} στην ασθενή-* τοπολογία. Επιλέγοντας για συνάρτηση ελέγχου στην $\Delta \upsilon_k = \lambda_k$ τη συνάρτηση $\phi u_k \in D_0^{1,2}(\Omega)$, όπου $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{A_k} \phi u_k\, d\lambda_k &= \int_{A_k} \phi\, d\lambda_k \\ &= \int_\Omega \phi \frac{|\nabla u_k|^2}{cap_\Omega(A_k)}\, dx + \int_\Omega \nabla\phi \frac{u_k \nabla u_k}{cap_\Omega(A_k)}\, dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ο πρώτος όρος στο παραπάνω άθροισμα, από την (4.9), συγκλίνει στο $\phi(x_0)$. Για το δεύτερο όρο, από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι για κάθε $\rho > 0$

$$\int_\Omega \nabla\phi \frac{u_k \nabla u_k}{cap_\Omega(A_k)}\, dx \leq$$
$$\left(\int_{\Omega \setminus B_{x_0}^\rho} \frac{|\nabla u_k|^2}{cap_\Omega(A_k)}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega \setminus B_{x_0}^\rho} \frac{u_k^{2^*}}{cap_\Omega(A_k)^{\frac{2^*}{2}}}\, dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \times$$
$$\times \left(\int_{\Omega \setminus B_{x_0}^\rho} |\nabla\phi|^n\, dx \right)^{\frac{1}{n}} + C\rho.$$

Έχουμε όμως ότι

$$\int_{\Omega\setminus B^{\rho}_{x_0}} \frac{|\nabla u_k|^2}{cap_\Omega(A_k)}\,dx \to 0 \;\text{ καθώς }\; k\to\infty,$$

επομένως, για $\rho \to 0$, έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \frac{u_k \nabla u_k}{cap_\Omega(A_k)}\,dx \to 0 \;\text{ καθώς }\; k\to\infty.$$

Τελικά από την (4.11) έχουμε ότι $\lambda_k \stackrel{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}$. Όπως έχουμε αναφέρει αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (υ_k) συγκλίνει ισχυρά στον $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ για κάθε $p < \frac{n}{n-1}$ στην συνάρτηση Green G_{x_0}, δηλαδή στη λύση με την έννοια του Stampacchia του προβλήματος $-\Delta G_{x_0} = \delta_{x_0}$. Επιπλέον για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι $\int_\Omega |\nabla(\upsilon_k \wedge t)|^2 = \int_{\{\upsilon_k<t\}} |\nabla \upsilon_k|^2 \le t$. Από την πρόταση 4.1 (1) έπεται ότι η ακολουθία $(\upsilon_k \wedge t)$ συγκλίνει ισχυρά στην $G_{x_0}\wedge t$ στον $D^{1,2}_0(\Omega)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\lim_{k\to\infty} cap_{\mathbb{R}^n}(\{\upsilon_k > t\}) = cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > t\}) \tag{4.12}$$

για $t\in\mathbb{R}$ $\sigma.\pi.$ Για $\delta > 0$ θέτουμε $D^\delta_k = \{|\upsilon_k \wedge 2t - G_{x_0}\wedge 2t| > \delta\}$. Έχουμε ότι

$$cap_{\mathbb{R}^n}(D^\delta_k) \le C\,\frac{\|\nabla(\upsilon_k\wedge 2t) - \nabla(G_{x_0}\wedge 2t)\|_2^2}{\delta^2} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Εφόσον $\{\upsilon_k > t\} \subseteq \{G_{x_0} > t-\delta\} \cup D^\delta_k$ και $\{\upsilon_k > t\}\cup D^\delta_k \supseteq \{G_{x_0} > t+\delta\}$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > t+\delta\}) - cap_{\mathbb{R}^n}(D^\delta_k) &\le cap_{\mathbb{R}^n}(\{\upsilon_k > t\}) \\ &\le cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > t-\delta\}) \\ &\quad + cap_{\mathbb{R}^n}(D^\delta_k). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται στέλνοντας τα $k\to\infty$ και $\delta\to 0$, εφόσον η συνάρτηση $t \mapsto cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > t\})$ είναι συνεχής $\sigma.\pi$ στο $\mathbb{R}$.

Έστω τώρα $s > 0$ τέτοιο ώστε $s\,cap_\Omega(A_k) < 1$. Ορίζουμε τα σύνολα $B_k := \{\upsilon_k > s\} = \{u_k > s\,cap_\Omega(A_k)\}$. Έχουμε $cap_\Omega(A_k) \to 0$, καθώς $k\to\infty$. Επομένως υπάρχει $k_s > 0$ τέτοιο ώστε $s\,cap_\Omega(A_k) < 1$ για κάθε $k \ge k_s$, δηλαδή $A_k \subseteq B_k$ για κάθε $k\ge k_s$. Εφόσον τα σύνολα B_k

είναι σύνολα στάθμης των δυναμικών χωρητικότητας των συνόλων A_k για $k \geq k_s$, έχουμε

$$\frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} = \frac{1}{cap_{B_k}(A_k)} + \frac{1}{cap_{\Omega}(B_k)}.$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} \geq \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k)} \geq \frac{1}{cap_{B_k}(A_k)} + \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_k)}.$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} &\geq \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_k)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(B_k)} \\ &= \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_k)} - s. \end{aligned}$$

Επομένως από τη σχέση (4.12) έχουμε

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} \geq \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > s\})} - s. \tag{4.13}$$

για σ.π $s \in \mathbb{R}$. Από την πρόταση 4.1(2) έχουμε ότι $\{G_{x_0} > s\} \subseteq B_{x_0}^{r^+}$ όπου $r^+ = r + O(r^n)$ και το r ορίζεται από τη σχέση

$$s = K(r) - \tau_{\Omega}(x_0) \Rightarrow r = \big((n-2)S(n)\,(s + \tau_{\Omega}(x_0))\,\big)^{\frac{1}{2-n}}.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(\{G_{x_0} > s\})} &\geq \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_{x_0}^{r^+})} \\ &= K\big(r + O(r^n)\big) \\ &\geq \big(s + \tau_{\Omega}(x_0)\big)\left(1 + O\left(s^{\frac{n-1}{2-n}}\right)\right) \\ &= s + \tau_{\Omega}(x_0) + O\left(s^{\frac{1}{2-n}}\right), \end{aligned}$$

καθώς $s \to \infty$. Από την (4.13) καθώς $s \to \infty$ έπεται ότι

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega}(A_k)} \geq \tau_{\Omega}(x_0).$$

Αν $x_0 \in \partial\Omega$, εφαρμώζοντας το προηγούμενο επιχείρημα για τα σύνολα $\Omega_\rho(x_0) = \Omega \cup B_\rho(x_0)$, για $\rho > 0$, έχουμε ότι

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega_\rho(x_0)}(A_k)} \geq \tau_{\Omega_\rho(x_0)}(x_0).$$

Εφόσον $\Omega \subset \Omega_\rho(x_0)$ έχουμε ότι $cap_{\Omega_\rho(x_0)}(A_k) \leq cap_\Omega(A_k)$ και από την Πρόταση 4.2 έχουμε ότι $\lim_{\rho\to 0} \tau_{\Omega_\rho(x_0)} = \tau_\Omega(x_0)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_\Omega(A_k)} &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_{\Omega_\rho(x_0)}(A_k)} \\ &\geq \tau_{\Omega_\rho(x_0)}(x_0) \xrightarrow{\rho\to 0} \tau_\Omega(x_0). \end{aligned}$$

(ii) Ισχύει η (4.9), επομένως επιχειρηματολογώντας όπως στην περίπτωση (ii), για $\bar{x} \in \bar{\Omega}$, έχουμε ότι

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_k^*)} - \frac{1}{cap_\Omega(A_k)} \geq \tau_\Omega(\bar{x}) \geq \min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega. \qquad \square$$

4.3 Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της βέλτιστης σταθεράς

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το βασικό θεώρημα της παρούσας παραγράφου αποδεικνύουμε κάποιες εκτιμήσεις για το ρυθμό εξασθένισης των ακτινικών ακροτάτων. Οι εκτιμήσεις αυτές περιγράφονται στο επόμενο λήμμα και έχουν ουσιαστική εφαρμογή στο θεώρημα το οποίο ακολουθεί. Συμβολίζουμε με $D_*^{1,2}$ το σύνολο όλων των θετικών συναρτήσεων u στο χώρο $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ οι οποίες είναι ακτινικά συμμετρικές και φθίνουσες. Θα υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι η ανισότητα (1.1) ικανοποιείται για $\alpha = 1$.

Λήμμα 4.4 (Εκτιμήσεις ρυθμού εξασθένισης για τα ακτινικά ακρότατα χαμηλής ενέργειας). *Έστω σταθερά $c > 0$. Υπάρχουν σταθερές c_0, γ_0 με $0 < \gamma_0 < 1$ και ε_0 οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση n, την S^F και τη σταθερά c με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

Αν ισχύει η υπόθεση (F) (για $\alpha = 1$) και $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ και αν η συνάρτηση $u \in D_*^{1,2}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx \geq \left(S^F - c\,\varepsilon^2\right) \|\nabla u\|_2^{2^*}, \tag{4.14}$$

τότε υπάρχουν $\rho > 0$ και $u_\infty > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} u(r) &\le c_0 \rho^{\frac{n-2}{2}} \|\nabla u\|_2 \, K(r) && (4.15)\\ &\qquad \text{για} \quad 1 \le \frac{r}{\rho} \le \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}, \\ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |\nabla u|^2 \, dx &\le c_0 \rho^{n-2} \|\nabla u\|_2^2 \, K(r) && (4.16)\\ &\qquad \text{για} \quad 1 \le \frac{r}{\rho} \le \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}, \\ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |u|^{2^*} \, dx &\le S^* c_0^{\frac{2^*}{2}} \rho^n \|\nabla u\|_2^{2^*} K(r)^{\frac{2^*}{2}} && (4.17)\\ &\qquad \text{για} \ 1 \le \frac{r}{\rho} \le \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}, \\ |u(r) - u_\infty K(r)| &\le c_0 \rho^{\frac{n-2}{2}} \|\nabla u\|_2 \, K(r) \left(\frac{\rho}{r} + \varepsilon \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) && (4.18) \end{aligned}$$

$$\text{για} \quad 1 \le \frac{r}{\rho} \le \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}},$$

και το ρ χαραχτηρίζεται ως η μέγιστη ακτίνα η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^\rho} |\nabla u|^2 \, dx = \gamma_0 \|\nabla u\|_2^2. \tag{4.19}$$

Επιπλέον έχουμε

$$c_0^{-1} \le \frac{u_\infty}{\rho^{\frac{n-2}{2}} \|\nabla u\|_2} \le c_0. \tag{4.20}$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε τον ισχυρισμό υποθέτοντας ότι $\rho = 1$ και $\|\nabla u\|_2 = 1$. Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί την υπόθεση (4.14) και $\rho > 0$ είναι η μέγιστη ακτίνα η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (4.19). Τότε για την $u_\rho(y) = u(\rho y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F(u_\rho) \, dx &= \frac{1}{\rho^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \, dx \\ &\ge \left(S^F - c\,\varepsilon^2 \right) \frac{\|\nabla u\|_2^{2^*}}{\rho^n} \\ &= \left(S^F - c\,\varepsilon^2 \right) \|\nabla u_\rho\|_2^{2^*}, \end{aligned}$$

άρα και η συνάρτηση u_ρ ικανοποιεί την (4.14). Έπεται ότι η συνάρτηση $\tilde{u} := \frac{u_\rho}{\|\nabla u_\rho\|_2}$ ικανοποιεί την ανισότητα (4.14) αν η F αντικατασταθεί από την $\widetilde{F}(t) := \frac{F(\|\nabla u_\rho\|_2 t)}{\|\nabla u_\rho\|_2^{2^*}}$. Έτσι έχοντας δείξει τον ισχυρισμό μας για τη συνάρτηση $\tilde{u} : \tilde{r} \to$

$\tilde{u}(\tilde{r})$ (δηλαδή έχοντας δεδομένες τις εκτιμήσεις (4.15)-(4.18) και (4.20) αντικαθιστώντας το r με $\tilde{r}$ για $1 \leq \tilde{r} \leq \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}$), θέτοντας $\tilde{u}(\tilde{r}) = \frac{u(r)}{\|\nabla u_\rho\|_2}, r := \rho\,\tilde{r}$ έπεται ο ισχυρισμός για τη συνάρτηση u. Έστω λοιπόν ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx \geq \left(S^F - c\,\varepsilon^2\right). \tag{4.21}$$

Θέτουμε

$$\gamma(R) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} |\nabla u|^2\,dx.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $U \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ώστε $U = u$ στη μπάλα B_0^R και $\Delta U = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus B_0^R$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2\,dx &= \int_{B_0^R} |\nabla U|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} |\nabla U|^2\,dx \\ &= \int_{B_0^R} |\nabla u|^2\,dx + u(R)^2 cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^R) \\ &= 1 - \gamma(R) + \frac{u(R)^2}{K(R)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Από τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev και την (4.21) έχουμε

$$\begin{aligned} S^F(1 - c\,\varepsilon^2) \leq \int_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx &= \int_{B_0^R} F(u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(u)\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx + S^F \gamma(R)^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx \geq S^F \left(1 - c\,\varepsilon^2 - \gamma(R)^{\frac{n}{n-2}}\right). \tag{4.23}$$

Από τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev και την (4.22) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx \leq S^F \left(1 - \gamma(R) + \frac{u(R)^2}{K(R)}\right)^{\frac{n}{n-2}}. \tag{4.24}$$

Ισχύει όμως ότι

$$\frac{\gamma(R)}{u(R)^2} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} \frac{|\nabla u|^2}{u(R)^2}\,dx \geq cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^R) = \frac{1}{K(R)}.$$

Έχουμε λοιπόν $u(R)^2/K(R) \leq \gamma(R) \leq \gamma_0 < 1$ και για τη συνάρτηση f, με $f(x) = (1-x)^{n/n-2}$ έχουμε ότι $f(x) = 1 - \frac{n}{n-2}(1-\xi_x)^{2/n-2}x$, για $x \in [0, 2\gamma_0]$, όπου $0 \leq \xi_x \leq 2\gamma_0$. Έτσι για $x := \gamma(R) - \frac{u(R)^2}{K(R)}$ η (4.24) γίνεται

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx \leq S^F \left(1 - C\gamma(R) + C\frac{u(R)^2}{K(R)}\right) \tag{4.25}$$

και $C \to \frac{n}{n-2} > 1$, καθώς $\gamma_0 \to 0$. Συνδυάζοντας το κάτω και το άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx$, τα οποία δίνονται αντίστοιχα από τις ανισότητες (4.23) και (4.25) προκύπτει ότι

$$c\,\varepsilon^2 + \gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} \geq C\,\gamma(R) - C\,\frac{u(R)^2}{K(R)} \Rightarrow$$

$$\gamma(R) \leq \frac{u(R)^2}{K(R)} + \frac{1}{C}\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} + \bar{c}\,\varepsilon^2. \tag{4.26}$$

Εφόσον $\gamma(R) \leq 1$ έχουμε ότι $\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} \leq \gamma(R)$ και για γ_0 αρκετά μικρό, η (4.26) γίνεται

$$c\,\gamma(R) \leq \frac{u(R)^2}{K(R)} + \bar{c}\,\varepsilon^2. \tag{4.27}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left(\int_R^{2R} u'\,dr\right)^2 = \left(\int_R^{2R} u' r^{\frac{n-1}{2}} r^{\frac{1-n}{2}}\,dr\right)^2 \leq \int_R^{2R} |u'|^2 r^{n-1}\,dr \int_R^{2R} r^{1-n}\,dr.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και τον τύπο για τη θεμελιώδη ανωμαλία για την Λαπλασιανή, $K(r)$, έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\gamma(R) - \frac{u(2R)^2}{K(2R)} \geq \gamma(R) - \gamma(2R) &= \int_R^{2R} \int_{\partial B(0,r)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^{n-1} dr \\
&= S(n) \int_R^{2R} r^{n-1} |u'|^2\,dr \\
&\geq S(n) \frac{\left(\int_R^{2R} u'\,dr\right)^2}{\left(\int_R^{2R} r^{1-n}\,dr\right)} \\
&\geq \frac{(u(R) - u(2R))^2}{K(R) - K(2R)}.
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{K(R)\gamma(R)}{u(R)^2} &\geq \frac{\big(1 - u(2R)/u(R)\big)^2}{1 - K(2R)/K(R)} + \frac{u(2R)^2 K(R)}{u(R)^2 K(2R)} \\
&= \frac{\big(1 - u(2R)/u(R)\big)^2}{1 - 2^{2-n}} + \frac{u(2R)^2/u(R)^2}{2^{2-n}}.
\end{aligned}$$

Επομένως από την εκτίμηση $(1-x)^2/(1-\lambda) + x^2/\lambda \geq 1 + c(\lambda)(x-\lambda)^2$ για $x = u(2R)/u(R)$ και $\lambda = 2^{2-n}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\gamma(R) &\geq \frac{u^2(R)}{K(R)}\left(\frac{\big(1-u(2R)/u(R)\big)^2}{1-2^{2-n}} + \frac{(u(2R)/u(R))^2}{2^{2-n}}\right)\\ &\geq \frac{u^2(R)}{K(R)}\left(1 + C\left(\frac{u(2R)}{u(R)} - 2^{2-n}\right)^2\right),\end{aligned}$$

για μια σταθερά $C > 0$. Από την παραπάνω σχέση και την ανισότητα (4.26) έπεται ότι

$$\left(\frac{u(2R)}{u(R)} - 2^{2-n}\right)^2 \leq \bar{C}\frac{K(R)}{u(R)^2}(\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} + \varepsilon^2). \tag{4.28}$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα επαγωγικά το ρυθμό εξασθένισης της u. Ορίζουμε $\alpha_i := \frac{u(2^i)}{K(2^i)}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in (0, \frac{n-2}{n})$ και σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$\alpha_i \leq c_2\, 2^{i\alpha}, \text{ όταν } 2^i \leq \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}},\ i \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

Για $i = 0$ ο ισχυρισμός έπεται από το ότι $u(1)^2 \leq \gamma_0 K(1)$. Για να προχωρήσουμε επαγωγικά διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $\alpha_i \leq 2^{2-n}c_2$, εφόσον η συνάρτηση u είναι φθίνουσα έχουμε ότι

$$\alpha_{i+1} = \frac{u(2^{i+1})}{K(2^{i+1})} \leq \frac{2^{n-2}u(2^i)}{K(2^i)} = \alpha_i 2^{n-2} \leq c_2 \leq c_2\, 2^{(i+1)\alpha}.$$

Αν $\alpha_i \geq 2^{2-n}c_2$ τότε έχουμε

$$\frac{K(2^i)}{u(2^i)^2}\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{\alpha_i^2 K(2^i)} \leq 2^{2n-4}\,(n-2)\,S(n)\,2^{i(n-2)}\,\varepsilon^2\,c_2^{-2} \leq c\,c_2^{-2}, \tag{4.30}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $2^i \leq \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$ επομένως $\varepsilon^2 \leq 2^{i(2-n)}$. Θέτουμε τώρα στην (4.27) $R = 2^i$, πολλαπλασιάζουμε με $\frac{K(2^i)}{u(2^i)^2}\gamma(2^i)^{\frac{n}{n-2}}$ και λαμβάνοντας υπόψιν την (4.30), έχουμε ότι

$$\frac{K(2^i)}{u(2^i)^2}\gamma(2^i)^{\frac{n}{n-2}} \leq \gamma_0^{\frac{2}{n-2}}\left(C + c_2^{-2}\right). \tag{4.31}$$

Από τις εκτιμήσεις (4.30), (4.31) και την (4.28) για $R = 2^i$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha_{i+1}}{2^{n-2}\alpha_i} - 2^{2-n}\right)^2 &\leq \left(\frac{u(2^{i+1})}{u(2^i)} - 2^{2-n}\right)^2\\ &\leq \bar{C}\frac{K(2^i)}{u(2^i)^2}(\gamma(2^i)^{\frac{n}{n-2}} + \varepsilon^2)\\ &\leq \bar{C}\gamma_0^{\frac{2}{n-2}}\left(C + c_2^{-2}\right) + \bar{C}c\,c_2^{-2}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{i+1}}{2^{n-2}\alpha_i} - 2^{2-n} &\leq C_1\,\gamma_0^{\frac{1}{n-2}} + C_2\,c_2^{-1} \Rightarrow \\ \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} &\leq 2^{n-2}\left(2^{2-n} + C_1\,\gamma_0^{\frac{1}{n-2}} + C_2\,c_2^{-1}\right) \\ &\leq 2^{\alpha}, \end{aligned}$$

επιλέγοντας αρκετά μεγάλο c_2 και αρκετά μικρό γ_0. Επομένως έχουμε $\alpha_{i+1} \leq 2^{\alpha}\alpha_i \leq c_2\,2^{(i+1)\alpha}$ και έτσι αποδείχθηκε ο ισχυρισμός (4.29).

Έστω $1 \leq R \leq \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$. Υπάρχει κάποιο $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^i \leq R \leq 2^{i+1}$. Εφόσον οι συναρτήσεις u και K είναι φθίνουσες έχουμε

$$\frac{u(R)}{K(R)} \leq \frac{u(2^i)}{K(2^{i+1})} = 2^{n-2}\frac{u(2^i)}{K(2^i)}.$$

Έτσι από την (4.29) έχουμε $\frac{u(R)}{K(R)} \leq c\,2^{i\alpha} \leq c\,R^{\alpha}$, άρα

$$u(R) \leq C\,2^{i\alpha}R^{2-n} \leq C\,R^{2-n+\alpha}. \tag{4.32}$$

Προκύπτει ότι $\frac{u(R)^2}{K(R)} \leq c_n\,R^{2-n+2a}$, επομένως από την (4.27) και το ότι $\varepsilon^2 \leq R^{2-n} \leq R^{2-n+2\alpha}$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \gamma(R) &\leq c_1\,R^{2-n+2\alpha} + c_2\,\varepsilon^2 \\ &\leq (c_1 + c_2)\,R^{2-n+2\alpha}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Έπεται άμεσα ότι

$$\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} \leq c\,R^{-n+2^*\alpha}. \tag{4.34}$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα (4.28) με $\frac{u(R)^2}{K(2R)^2}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(2R)}{K(2R)} - \frac{2^{2-n}u(R)}{K(2R)}\right)^2 &\leq \bar{C}\,\frac{K(R)}{K(2R)^2}\left(\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} + \varepsilon^2\right) \Rightarrow \\ \left(\frac{u(2R)}{K(2R)} - \frac{u(R)}{K(R)}\right)^2 &\leq C\,R^{n-2}\left(\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} + \varepsilon^2\right). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και την (4.34) έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \left|\frac{u(2R)}{K(2R)} - \frac{u(R)}{K(R)}\right| &\leq \tilde{c}\left(R^{n-2}\left(c\,R^{-n+2^*\alpha} + \varepsilon^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \bar{c}\,R^{\frac{n-2}{2}}\left(R^{\frac{-n+2^*\alpha}{2}} + \varepsilon\right) \\ &= \bar{c}\left(R^{\frac{2^*\alpha-2}{2}} + \varepsilon R^{\frac{n-2}{2}}\right). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Εφόσον $2^*\alpha = \frac{2n}{n-2}\alpha < 2$, εφαρμώζοντας επαναληπτικά την προηγούμενη εκτίμηση έχουμε

$$\frac{u(2^i)}{K(2^i)} - \frac{u(1)}{K(1)} \leq c\left(1 + \varepsilon (2^i)^{\frac{n-2}{2}}\right) \leq 2c \Rightarrow u(2^i) \leq C\,K(2^i)$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^i \leq \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$. Επομένως για $1 \leq R \leq \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$ και $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^i \leq R \leq 2^{i+1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} u(R) \leq u(2^i) \leq C\,K(2^i) &= \frac{C\,2^{n-2}}{(n-2)\,S(n)\,2^{(i+1)(n-2)}} \\ &\leq \frac{C\,2^{n-2}}{(n-2)\,S(n)\,R^{(n-2)}} \\ &= C\,2^{n-2}\,K(R). \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν την εκτίμηση (4.15) (υπενθυμίζουμε ότι $\rho = 1$ και $\|\nabla u\|_2 = 1$), ενώ για να δείξουμε την (4.16) αντικαθιστούμε την παραπάνω εκτίμηση για την $u(R)$ στην (4.27) και έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} |\nabla u|^2\,dx = \gamma(R) \leq C_1\,K(R) + C_2\,\varepsilon^2 \leq (C_1 + (n-2)\,S(n)\,C_2)\;K(R).$$

Η εκτίμηση (4.17) έπεται από την εκτίμηση (4.16) και από την ανισότητα Sobolev $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |u|^{2^*}\,dx \;\leq\; S^*\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |\nabla u|^2\,dx\right)^{2^*/2}$. Από τις (4.15), (4.16) έπεται ότι οι εκτιμήσεις (4.32), (4.33), (4.34) ισχύουν για $\alpha = 0$, άρα η (4.35) γίνεται

$$\left|\frac{u(2R)}{K(2R)} - \frac{u(R)}{K(R)}\right| \leq c\left(R^{-1} + \varepsilon R^{\frac{n-2}{2}}\right). \tag{4.36}$$

Έστω $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^j \leq \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}} \leq 2^{j+1}$. Ορίζουμε την ποσότητα $u_\infty := u(2^{[j/2]})/K(2^{[j/2]})$. Εφαρμώζοντας επαναληπτικά την (4.36) για $R = 2^i$, $i = [j/2], \ldots, j$ έχουμε

$$|u(2^i) - u_\infty| \leq c\,\left(2^{-[j/2]} + \varepsilon\,2^{\frac{n-2}{2}i}\right) \leq \bar{c}\,\varepsilon\,2^{\frac{n-2}{2}i}.$$

Ανάλογα εφαρμώζοντας επαναληπτικά την (4.36) για $R = 2^i$, $i = [j/2], \ldots, 1$ έχουμε $|u(2^i) - u_\infty| \leq c\,2^{-i}$. Συνδυάζοντας τις αυτές εκτιμήσεις πέρνουμε την (4.18) για κάθε $r > 0$ της μορφής $r = 2^i \leq \varepsilon^{-2n-2}$. Για να δείξουμε την (4.18) για όλα $r \in [1, \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}]$ παρατηρούμε ότι εργαζόμενοι ανάλογα με την (4.28) έχουμε την εκτίμηση

$$\left(\frac{u(\lambda R)}{u(R)} - \lambda^{2-n}\right)^2 \leq c\frac{K(R)}{u(R)^2}\left(\gamma(R)^{\frac{n}{n-2}} + o(\epsilon^2)\right)$$

για κάθε $\lambda \in [2,4]$. Απομένει να δείξουμε την εκτίμηση (4.20). Για $r = \rho$ η (4.15) γίνεται

$$\frac{u(\rho)}{K(\rho)} \leq c_0 \rho^{\frac{n}{n-2}} \|\nabla u\|_2.$$

Επίσης για $r = \rho$ από την (4.18) έχουμε

$$\frac{u(\rho)}{K(\rho)} - u_\infty \leq c_0 \|\nabla u\|_2 (1+\varepsilon) \rho^{\frac{n}{n-2}}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εκτιμήσεις έπεται το πάνω φράγμα στην (4.20). Ας υποθέσουμε τώρα ότι το κάτω φράγμα στην (4.20) δεν ισχύει. Τότε υπάρχει ακολουθία $\varepsilon_k \to 0$ και συναρτήσεις $u_k = u_{\varepsilon_k} \in D_*^{1,2}$ με $\|\nabla u_k\|_2 = 1$, οι οποίες ικανοποιούν τις εκτιμήσεις

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F(u_k)\,dx &\geq \left(S^F - c\,\varepsilon_k^2\right), && (4.37)\\
u_k(r) &\leq c_0\,K(r) \ \text{ για } \ 1 \leq r \leq \varepsilon_k^{-\frac{2}{n-2}}, && (4.38)\\
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |\nabla u_k|^2\,dx &\leq c_0\,K(r) \ \text{ για } \ 1 \leq r \leq \varepsilon_k^{-\frac{2}{n-2}}, && (4.39)\\
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} |u_k|^{2^*}\,dx &\leq S^* c_0^{\frac{2^*}{2}} K(r)^{\frac{2^*}{2}} && (4.40)\\
&\qquad \text{για } \ 1 \leq r \leq \varepsilon_k^{-\frac{2}{n-2}},\\
|u_k(r) - u_{k,\infty} K(r)| &\leq c_0\,K(r)\left(\frac{1}{r} + \varepsilon_k\, r^{\frac{n-2}{2}}\right) && (4.41)\\
&\qquad \text{για } \ 1 \leq r \leq \varepsilon_k^{-\frac{2}{n-2}},\\
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^1} |\nabla u_k|^2\,dx &= \gamma_0. && (4.42)
\end{aligned}$$

και επιπλέον $u_{k,\infty} \to 0$. Εφόσον οι συναρτήσεις u_k είναι θετικές, ακτινικές και φθίνουσες συναρτήσεις, έπεται από την εμφύτευση Sobolev ότι (για μια υπακολουθία) η (u_k) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1,+\infty)$ σε μία συνάρτηση u_0. Έτσι από την (4.41) έπεται ότι

$$u_0(r) \leq c_0\,K(r) r^{-1} \tag{4.43}$$

για κάθε $r \geq \rho = 1$. Από την (4.27) έχουμε τη σχέση

$$\gamma_k(R) \leq C\left(\frac{u_k^2(R)}{K(R)} + \epsilon_k^2\right) \tag{4.44}$$

για κάθε k, η οποία μαζί με την (4.43) μας δίνει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k(R) \leq C\,\frac{u_0^2(R)}{K(R)} \leq C_1\,\frac{K^2(R)}{R^2K(R)} = cR^{-n}. \tag{4.45}$$

ομοιόμορφα στο $[1,\infty)$. Επομένως εφαρμόζοντας την (4.35) για τις συναρτήσεις u_k και λαμβάνοντας υπόψιν την ομοιόμορφη σύγκλιση των u_k και την (4.45) έχουμε

$$\left|\frac{u_0(2R)}{K(2R)} - \frac{u_0(R)}{K(R)}\right| \leq cK(R)^{\frac{1}{n-2}}\left(\frac{u_0(R)}{K(R)}\right)^{\frac{n}{n-2}} = cR\left(\frac{u_0(R)}{K(R)}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Έτσι θέτοντας $\alpha_i := \frac{u_0(2^i)}{k(2^i)}$ και $R = 2^i$, η παραπάνω εκτίμηση γίνεται

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq C\,2^{-i}\alpha_i^{\frac{n}{n-2}}.$$

Από την (4.43) για $r = 2^i$, έχουμε ότι $\alpha_i \leq C2^{-i}$. Θα δείξουμε τώρα ότι $\alpha_i = 0$ για κάθε i. Έστω $\delta > 0$ αρκετά μικρό και i_0 ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε $a_{i_0} \geq \delta$. Τότε για κάθε $l \geq i_0$ τέτοιο ώστε $C2^{-l} < 1$ έχουμε ότι

$$\alpha_l \leq \sum_{j=l+1}^{\infty} C2^{-j}\alpha_j^{\frac{n}{n-2}} < C2^{-l}\delta^{\frac{n}{n-2}} < \delta$$

το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $u_0 = 0$ στο διάστημα $[1,+\infty)$ και από την (4.44) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(1)} |\nabla u_k|^2 dx = \gamma_k(1) \to 0$$

το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(1)} |\nabla u_k|^2 dx = \gamma_0 \|\nabla u_k\|_2^2 = \gamma_0.$$

Επομένως

$$c_0^{-1} \leq \frac{u_\infty}{\rho^{\frac{n-2}{2}}\|\nabla u\|_2}.$$

□

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα του παρόντος κεφαλαίου. Θα δείξουμε ότι ο δεύτερος μη τετριμμένος όρος στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $S_\varepsilon^F(\Omega)$ εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης Robin στο σημείο συγκέντρωσης. Αυτό θα μας επιτρέψει να χαρακτηρίσουμε το σημείο συγκέντρωσης (Βήμα 7). Η απόδειξη βασίζεται κυρίως σε δύο βασικά αποτελέσματα. Το πρώτο είναι ο ταχύς ρυθμός εξασθένισης των σχεδόν ακροτάτων (Λήμμα 4.4). Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι ο προσεγγιστικός τύπος για τη χωρητικότητα μικρών συνόλων, τον οποίο αποδείξαμε στο Λήμμα 4.3. Συγκεκριμένα ο τύπος αυτός δεν απαιτεί καμία ομαλότητα για το χωρίο Ω. Επιπλέον, υποθέτοντας ότι το χωρίο Ω είναι φραγμένο έχουμε ότι $\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega > 0$. Πράγματι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.4 έχουμε ότι

$$\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega \geq \min_{\bar{\Omega}^*} \tau_{\Omega^*} > 0.$$

Θεώρημα 4.3 (Προσδιορισμός των σημείων συγκέντρωσης).
Έστω ότι το χωρίο Ω είναι φραγμένο και ισχύει η υπόθεση (F). Έστω επίσης ω_∞ όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 4.2 και υποθέτουμε ότι $0 < \omega_\infty < \infty$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. *Αν για την ακολουθία $\{u_\varepsilon\} \subset D_0^{1,2}(\Omega)$ έχουμε ότι $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$ και συγκεντρώνεται στο σημείο x_0, δηλαδή*

   $$\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}, \quad \frac{F(u_\varepsilon)}{\varepsilon^{2^*}}\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F \delta_{x_0}, \ \text{καθώς } \varepsilon \to 0^+,$$

   τότε έχουμε ότι

   $$\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx \leq \varepsilon^{2^*} S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \tau_\Omega(x_0) \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right),$$

   καθώς $\varepsilon \to 0^+$.

2. *Αν $\{u_\varepsilon\}$ είναι μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων τότε έχουμε*

   $$\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx = \varepsilon^{2^*} S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\, \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right),$$

   καθώς $\varepsilon \to 0^+$.

3. *Μια ακολουθία σχεδόν ακροτάτων συγκεντρώνεται σε ένα αρμονικό κέντρο, δηλαδή*

   $$\tau_\Omega(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega,$$

   όπου το x_0 είναι όπως στο Θώρημα 3.1. Αν $w_\infty = 0$ τότε $S_\varepsilon^F(\Omega) = S^F - o(\varepsilon^2)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αντίστροφα, αν $S_\varepsilon^F(\Omega) = S^F - o(\varepsilon^2)$ και $\min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega > 0$ τότε $w_\infty = 0$.

Απόδειξη.
Βήμα 1

$$S_\varepsilon^F(\Omega) \geq S^F\left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\, \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right),$$

καθώς $\varepsilon \to 0$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε, από τα θεωρήματα 4.1 και 4.2, ότι υπάρχει μια ακτινική μεγιστοποιούσα συνάρτηση ω για την S^F τέτοια ώστε $\omega_\infty = W_\infty := \lim_{r\to\infty} \omega(r)/K(r)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι η ελάχιστη δυνατή τιμή για το W_∞ είναι το ω_∞. Έστω z ένα αρμονικό κέντρο για το Ω. Συγκεκριμένα $\tau_\Omega(z) < +\infty$ και η αρμονική ακτίνα $r(z)$ είναι γνήσια θετική. Για μια ακτινική συνάρτηση $U \in D^{1,2}(B_0^{r(z)})$ ορίζουμε τη συνάρτηση u (harmonic transplantation) ως εξής. Έστω $G_{B,0}$ η συνάρτηση Green για την μπάλα $B_0^{r(z)}$ με πόλο στο μηδέν και η συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $U = \phi\, o\, G_{B,0}$. Ορίζουμε $u := \phi\, o\, G_{\Omega,z} \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Η τεχνική της harmonic transplantation είναι κλασσική και συμπληρωματική της συμμετρικοποίησης, με την έννοια ότι μας προμηθεύει με κάτω φράγματα όταν η συμμετρικοποίηση μας δίνει άνω φράγματα και αντίστροφα. Ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί το ολοκλήρωμα Dirichlet (Θεώρημα 18, [3]). Έχουμε επίσης ότι

$$\int_\Omega F(u)\, dx \geq \int_{B_0^{r(z)}} F(U)\, dx. \tag{4.46}$$

Η παραπάνω εκτίμηση έχει αποδειχθεί στο [3] στην περίπτωση όπου $z \notin \partial\Omega$. Στη γενική περίπτωση όπου $z \in \overline{\Omega}$ και $\tau_\Omega(z) < +\infty$ το αποτέλεσμα προκύπτει από τον τύπο συνεμβαδού και την εκτίμηση (4.4) για τα σύνολα στάθμης της συνάρτησης Green. Από την εκτίμηση (4.46) έχουμε ότι

$$S_\varepsilon^F(\Omega) \geq S_\varepsilon^F(B_0^{r(z)}). \tag{4.47}$$

Θέτουμε τώρα

$$r_\varepsilon := \varepsilon^{-\frac{2}{n-1}} r(z), \quad R_\varepsilon := \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}} r(z)$$

και ορίζουμε τις συναρτήσεις $W_\varepsilon \in D_0^{1,2}\big(B_0^{R_\varepsilon}\big)$ ως εξής.

$$\begin{cases} W_\varepsilon = \omega & , \text{στην } B_0^{r_\varepsilon} \\ \Delta W_\varepsilon = 0 & , \text{στην } B_0^{R_\varepsilon} \setminus B_0^{r_\varepsilon} \end{cases}.$$

Από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^r} F(\omega)\,dx = O(r^{-n})$, επομένως

$$\begin{aligned}
\int_{B_0^{R_\varepsilon}} F(W_\varepsilon)\,dx &\geq \int_{B_0^{r_\varepsilon}} F(W_\varepsilon)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F(W_\varepsilon)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{r_\varepsilon}} F(W_\varepsilon)\,dx \\
&= S^F - O(r_\varepsilon^{-n}) \\
&= S^F - o(\varepsilon^2)\,,\ \text{καθώς}\ \varepsilon \to 0. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε μια εκτίμηση για το άνω φράγμα του ολοκληρώματος Dirichlet.

$$\begin{aligned}
\|\nabla W_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla\omega|^2\,dx + \int_{B_0^{R_\varepsilon}\setminus B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla W_\varepsilon|^2\,dx \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla\omega|^2\,dx + \int_{B_0^{R_\varepsilon}\setminus B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla W_\varepsilon|^2\,dx \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla\omega|^2\,dx + \omega(r_\varepsilon)^2 cap_{B_0^{R_\varepsilon}}(B_0^{r_\varepsilon}) \\
&\leq 1 - \omega(r_\varepsilon)^2 \left(cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{r_\varepsilon}) - cap_{B_0^{R_\varepsilon}}(B_0^{r_\varepsilon}) \right) \\
&= 1 - \omega(r_\varepsilon)^2 \left(\frac{1}{K(r_\varepsilon)} - \frac{1}{K(r_\varepsilon) - K(R_\varepsilon)} \right) \\
&= 1 + \left(\frac{\omega(r_\varepsilon)}{K(r_\varepsilon)} \right)^2 \left(\frac{K(R_\varepsilon)}{1 - \frac{K(R_\varepsilon)}{K(r_\varepsilon)}} \right) \\
&= 1 + \left(\omega_\infty^2 + o(1) \right) \left(\frac{K(R_\varepsilon)}{1 - \frac{K(R_\varepsilon)}{K(r_\varepsilon)}} \right),\ \text{καθώς}\ \varepsilon \to 0. \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του αρμονικού κέντρου έχουμε ότι

$$K\left(R_\varepsilon\right) = K\left(\varepsilon^{-\frac{2}{n-2}} r(z)\right) = \varepsilon^2 K\left(r(z)\right) = \varepsilon^2 \tau_\Omega(z) = \varepsilon^2 \min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega.$$

Έχουμε επίσης ότι $K(R_\varepsilon)/K(r_\varepsilon) = \varepsilon^{2/n-1} \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$, άρα

$$\frac{1}{1 - \frac{K(R_\varepsilon)}{K(r_\varepsilon)}} = 1 + o(1).$$

και η εκτίμηση (4.49) γίνεται

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_2^2 \leq 1 + \omega_\infty^2 \min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right),\ \ \text{καθώς}\ \varepsilon \to 0. \qquad (4.50)$$

Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις $W_\varepsilon^s \in D_0^{1,2}\big(B_0^{sR_\varepsilon}\big)$ με $W_\varepsilon^s(x) = W_\varepsilon(x/s)$, $s := \|\nabla W_\varepsilon\|_2^{-\frac{2}{n-2}} \leq 1$. Έπεται ότι $\|\nabla W_\varepsilon^s\|_2 = 1$ και από τις (4.47), (4.48), (4.50) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
S_\varepsilon^F(\Omega) \geq S_\varepsilon^F\big(B_0^{r(z)}\big) &\geq S_\varepsilon^F\big(B_0^{sr(z)}\big) \\
&\geq \frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_{B_0^{sr(z)}} F\left(W_\varepsilon^s\left(\frac{x}{\varepsilon^{2/n-2}}\right)\right) dx \\
&= \int_{B_0^{sR_\varepsilon}} F(W_\varepsilon^s)\, dx \\
&= \|\nabla W_\varepsilon\|_2^{-\frac{2n}{n-2}} \int_{B_0^{R_\varepsilon}} F(W_\varepsilon)\, dx \\
&\geq \left(1 + \omega_\infty^2 \min_{\bar\Omega} \tau_\Omega \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right)^{-\frac{n}{n-2}} \left(S^F - o\left(\varepsilon^2\right)\right) \\
&\geq S^F\left(1 - \frac{n}{n-2}\omega_\infty^2 \min_{\bar\Omega} \tau_\Omega \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right),
\end{aligned}
$$

καθώς $\varepsilon \to 0$. Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Βήματος 1.

Έστω τώρα μια ακολουθία $\{u_\varepsilon\} \subset D_0^{1,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|\nabla u_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$ η οποία συγκεντρώνεται στο σημείο $x_0 \in \bar\Omega$, δηλαδή $\frac{|\nabla u|^2}{\varepsilon^2}dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}$, $\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F\delta_{x_0}$. Για να αποδείξουμε το πρώτο τμήμα του Θεωρήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$
\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx \geq \left(S^F - C\varepsilon^2\right) \|\nabla u_\varepsilon\|_2^{2^*},
$$

για αρκετά μεγάλο C, διαφορετικά ο ισχυρισμός έπεται άμεσα.

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συμμετρικοποιήσεις Schwarz u_ε^* καθώς επίσης και οι συναρτήσεις $\omega_\varepsilon^*(r) := u_\varepsilon^*(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}r)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 4.4, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\rho_\varepsilon > 0$ και $u_{\infty,\varepsilon} > 0$ τέτοια ώστε $u_\varepsilon^*(r) = u_{\infty,\varepsilon}K(r)(1 + o(1))$, για $\rho_\varepsilon \ll r \ll \rho_\varepsilon \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}$ και οι ακτίνες ρ_ε χαραχτηρίζονται από τη σχέση

$$
\rho_\varepsilon = sup\left\{\rho > 0 : \int_{B_0^\rho} \frac{|\nabla u_\varepsilon^*|^2}{\varepsilon^2}\, dx = (1 - \gamma_0)\,\frac{\|\nabla u_\varepsilon^*\|_2^2}{\varepsilon^2}\right\},
$$

με $0 < \gamma_0 < 1$.

Βήμα 2 Έχουμε ότι $c\,\varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \leq \rho_\varepsilon \leq C\,\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$, $c > 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά ότι $\rho_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Εφόσον η ακολουθία $\frac{|u_\varepsilon|^{2^*}}{\varepsilon^{2^*}}$

συγκεντρώνεται στο x_0 (Θεώρημα 2.1), έπεται ότι η ακολουθία $\frac{|u_\varepsilon^*|^{2^*}}{\varepsilon^{2^*}}$ συγκεντρώνεται στο 0. Έτσι έχουμε ότι $\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon^*)\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} S^F\delta_0$, διότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon^*)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon)\,dx = S^F$$

και $\varepsilon^{-2^*}F(u_\varepsilon^*) \le \alpha\,\frac{|u_\varepsilon^*|^{2^*}}{\varepsilon^{2^*}}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας I (Θεώρημα 2.2) για τις συναρτήσεις u_ε^* έπεται ότι

$$\frac{|\nabla u_\varepsilon^*|^2}{\varepsilon^2}\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0 \tag{4.51}$$

καθώς $\varepsilon \to 0$, διότι διαφορετικά θα ίσχυε η περίπτωση της συμπάγειας, δηλαδή θα είχαμε ότι $u_\varepsilon^*/\varepsilon \to v_0$ στον L^{2^*} το οποίο αντιφάσκει στη συγκέντρωση της $(u_\varepsilon^*/\varepsilon)$. Έτσι από τον ορισμό του ρ_ε και την (4.51) έπεται ότι $\rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\rho_\varepsilon \ll \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$, δηλαδή $R_\varepsilon := \rho_\varepsilon\,\varepsilon^{\frac{-2}{n-2}} \to 0$, τότε από την (4.16) θα είχαμε ότι για κάθε $r_\varepsilon \to 0$ τέτοιο ώστε $R_\varepsilon \ll r_\varepsilon \ll R_\varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{r_\varepsilon}} |\nabla \omega_\varepsilon^*|^2\,dx \le C\left(\frac{R_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^{n-2} \to 0,$$

οπότε η $|\nabla\omega_\varepsilon^*|^2$ συγκεντρώνεται στο 0, άρα από το Θεώρημα 4.2 $\omega_\infty = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Μένει να δείξουμε ότι $\rho_\varepsilon \le C\,\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$. Ορίζουμε $r_\varepsilon := \rho_\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ και έχουμε ότι $r_\varepsilon \to 0$, $r_\varepsilon\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}/\rho_\varepsilon \to 0$ και $\rho_\varepsilon/r_\varepsilon \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Ορίζουμε επίσης τα σύνολα $A_\varepsilon := \{u_\varepsilon > u_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)\}$ και $\tilde{r}_\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $A_\varepsilon^* = B_0^{\tilde{r}_\varepsilon}$. Επομένως έχουμε ότι

$$u_\varepsilon^*(\tilde{r}_\varepsilon) = u_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon). \tag{4.52}$$

Θα δείξουμε ότι $|A_\varepsilon| \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Από την (4.18) έπεται ότι για κάθε r τέτοιο ώστε $\rho_\varepsilon \le r \le \rho_\varepsilon\varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}$ ισχύει ότι

$$|u_\varepsilon^*(r) - u_{\infty,\varepsilon}K(r)| \le c_0\rho_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\|\nabla u_\varepsilon^*\|_2\,K(r)\left(\frac{\rho_\varepsilon}{r} + \varepsilon\left(\frac{r}{\rho_\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right),$$

και από την (4.20) έπεται ότι

$$\left|\frac{u_\varepsilon^*(r)}{u_{\infty,\varepsilon}K(r)} - 1\right| \le C\left(\frac{\rho_\varepsilon}{r} + \varepsilon\left(\frac{r}{\rho_\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right).$$

Από τη σχέση $\rho_\varepsilon \ge c\,\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$ έχουμε

$$\left|\frac{u_\varepsilon^*(r)}{u_{\infty,\varepsilon}K(r)} - 1\right| \le C\left(\frac{\rho_\varepsilon}{r} + r^{\frac{n-2}{2}}\right).$$

Εφόσον $\rho_\varepsilon \ll r_\varepsilon \ll \rho_\varepsilon \varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}$ και $r_\varepsilon \to 0$ έχουμε

$$\left| \frac{u_\varepsilon^*(r_\varepsilon)}{u_{\infty,\varepsilon} K(r_\varepsilon)} - 1 \right| \leq C \left(\frac{\rho_\varepsilon}{r_\varepsilon} + r_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \right) = o(1), \ \text{καθώς } \varepsilon \to 0.$$

Επομένως από την (4.52) έπεται ότι $\tilde{r}_\varepsilon / r_\varepsilon \to 1$ και εφόσον $r_\varepsilon \to 0$ έπεται ότι $\tilde{r}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ άρα $|A_\varepsilon| = |A_\varepsilon^*| = |B_0^{\tilde{r}_\varepsilon}| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

Εφόσον τα σύνολα A_ε είναι σύνολα στάθμης για τις συναρτήσεις u_ε, έχουμε ότι

$$\int_{A_\varepsilon^*} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 \, dx \leq \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $U_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία ταυτίζεται με την u_ε^* μέσα στην μπάλα A_ε^* και επεκτείνεται εκτός της A_ε^* από την ακτινική αρμονική συνάρτηση η οποία μηδενίζεται στο άπειρο. Ας εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα Dirichlet $\|\nabla U_\varepsilon\|_2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{A_\varepsilon^*} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon^*} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{A_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon^*} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \\ &= \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon^*} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \\ &\leq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon^*} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx. \quad (4.53) \end{aligned}$$

Έχουμε όμως ότι

$$\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \geq u_\varepsilon|_{\partial A_\varepsilon}^2 cap_\Omega(A_\varepsilon) = u_{\infty,\varepsilon}^2 K(r_\varepsilon)^2 cap_\Omega(A_\varepsilon)$$

και από την σχέση (4.52) έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon^*} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx = u_\varepsilon^*(\tilde{r}_\varepsilon)^2 cap_{\mathbb{R}^n}(A_\varepsilon^*) = u_{\infty,\varepsilon}^2 K(r_\varepsilon)^2 cap_{\mathbb{R}^n}(A_\varepsilon^*).$$

Επομένως η (4.53) γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2\,dx &\leq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}u^2_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)^2\big(cap_\Omega(A_\varepsilon)-cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)\big)\\ &= 1-\frac{1}{\varepsilon^2}u^2_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)^2cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)cap_\Omega(A_\varepsilon)\times\\ &\quad\times\left(\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)}-\frac{1}{cap_\Omega(A_\varepsilon)}\right)\\ &\leq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}u^2_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)^2cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)^2\\ &\quad\times\left(\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)}-\frac{1}{cap_\Omega(A_\varepsilon)}\right). \qquad (4.54)\end{aligned}$$

Εφαρμώζοντας το Λήμμα 4.3 (ii) και τις ταυτότητες $cap_{\mathbb{R}^n}(A^*_\varepsilon)=cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{\tilde r_\varepsilon})=\frac{1}{k(\tilde r_\varepsilon)}$ έχουμε

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2\,dx\leq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}u^2_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)^2K(\tilde r_\varepsilon)^{-2}\min_{\bar\Omega}\tau_\Omega\big(1+o(1)\big),$$

καθώς $\varepsilon\to 0$. Έχουμε όμως ότι $\tilde r_\varepsilon/r_\varepsilon\to 1$, άρα $K(r_\varepsilon)^2K(\tilde r_\varepsilon)^{-2}=1+o(1)$, καθώς $\varepsilon\to 0$. Λαμβάνοντας υπόψιν και την (4.20) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2\,dx\leq 1-c_0^{-2}\rho_\varepsilon^{n-2}\big(\min_{\bar\Omega}\tau_\Omega+o(1)\big),\ \text{ καθώς }\ \varepsilon\to 0.$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα ένα κάτω φράγμα για το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n}F(U_\varepsilon)\,dx$. Από το κάτω φράγμα του Βήματος 1, την (4.17) και από το γεγονός ότι $\tilde r_\varepsilon\approx r_\varepsilon=\rho_\varepsilon^{1/n}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n}F(U_\varepsilon)\,dx &\geq \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{A^*_\varepsilon}F(u^*_\varepsilon)\,dx\\ &\geq \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{A_\varepsilon}F(u_\varepsilon)\,dx\\ &\geq \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega}F(u_\varepsilon)\,dx-\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega\setminus A_\varepsilon}F(u_\varepsilon)\,dx\\ &\geq S^F\left(1-C\varepsilon^2\right)-\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{\tilde r_\varepsilon}}F(u^*_\varepsilon)\,dx\\ &\geq S^F\left(1-C\varepsilon^2\right)-\frac{\alpha}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{\tilde r_\varepsilon}}|u^*_\varepsilon|^{2^*}\,dx\\ &\geq S^F(1-C\varepsilon^2)-\bar C\left(\frac{\rho_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^n\\ &\geq S^F\left(1-C\varepsilon^2-c\rho_\varepsilon^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Από τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev (Λήμμα 2.1), έχουμε ότι

$$S^F\left(1 - C\varepsilon^2 - c\rho_\varepsilon^{n-1}\right) \le \frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_{\mathbb{R}^n} F(U_\varepsilon)\,dx \le S^F\left(\varepsilon^{-1}\|\nabla U_\varepsilon\|_2\right)^{2^*}.$$

Τελικά από το άνω φράγμα για την ποσότητα $\|\nabla U_\varepsilon\|_2$ έπεται ότι

$$\left(1 - C\varepsilon^2 - c\rho_\varepsilon^{n-1}\right) \le \left(1 - \bar{C}\rho_\varepsilon^{n-2}\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega\right)^{\frac{2^*}{2}} \le 1 - \bar{C}\rho_\varepsilon^{n-2}\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega,$$

επομένως

$$\rho_\varepsilon^{n-2}\left(\bar{C}\,\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega - c\rho_\varepsilon\right) \le C\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\rho_\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{\bar{C}\,\min_{\bar{\Omega}} \tau_\Omega - c\rho_\varepsilon} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \bar{c}\,,$$

από το οποίο έπεται ότι $\rho_\varepsilon \le C\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$, για μια σταθερά $C > 0$.

Βήμα 3 (Σύγκλιση στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ των συναρτήσεων u_ε, ύστερα από κατάλληλη αλλαγή κλίμακας της ανεξάρτητης μεταβλητής). Υπάρχει ακολουθία σημείων $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $x_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} x_0$ και οι συναρτήσεις $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}x)$ συγκλίνουν στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ σε ένα ακρότατο ω για τη γενικευμένη σταθερά Sobolev S^F.

Απόδειξη. Θα εφαρμώσουμε το Λήμμα 3.1 για τα μέτρα

$$\sigma_\varepsilon := F(\upsilon_\varepsilon)\,dx \quad \text{όπου} \;\; \upsilon_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}x),$$

για τα οποία έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\upsilon_\varepsilon)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx \to S^F, \;\; \text{καθώς} \;\; \varepsilon \to 0.$$

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι έχουμε συμπάγεια, με την έννοια του Λήμματος 3.1, για τα μέτρα σ_ε, αφού αποκλείσουμε τις περιπτώσεις του διαχωρισμού και της εξασθένισης. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το Γενικευμένο Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας (Θεώρημα 2.3) και αποκλείοντας την περίπτωση της συγκέντρωσης δείχνουμε την ισχυρή σύγκλιση στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, των συναρτήσεων ω_ε.

Ας αποκλείσουμε αρχικά το διαχωρισμό των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon)\,dx$, με την έννοια του Λήμματος 3.1. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι τα μέτρα σ_ε διαχωρίζονται με την έννοια του Λήμματος 3.1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_\varepsilon = 0$. Τότε υπάρχουν $S_1, S_2 > 0$ με $S_1 + S_2 = S^F$ έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μία ακτίνα r, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(\upsilon_\varepsilon)\, dx, \\ S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\upsilon_\varepsilon)\, dx, \end{aligned}$$

για κάθε $R > r$ και ε αρκετά μικρό. Για κάθε $\delta' > 0$ από τη γενικευμένη τοπική ανισότητα Sobolev (Πόρισμα 2.1) υπάρχουν δύο ακτίνες R, ρ τέτοιες ώστε $R > \rho > r$, $r/\rho \leq k(\delta')$, $\rho/R \leq k(\delta')$ και

$$\begin{aligned} S_1 - \delta &\leq \int_{B_0^r} F(\upsilon_\varepsilon)\, dx \leq S^F \left(\int_{B_0^\rho} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx + \delta' \right)^{\frac{n}{n-2}}, \\ S_2 - \delta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^R} F(\upsilon_\varepsilon)\, dx \leq S^F \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^\rho} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx + \delta' \right)^{\frac{n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες έχουμε

$$\left(\frac{S_1 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \left(\frac{S_2 - \delta}{S^F} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq 1 + 2\delta'.$$

Για δ, δ' αρκετά μικρά η παραπάνω ανισότητα δεν ισχύει.

Για να αποκλείσουμε την εξασθένιση των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon)\, dx$, με την έννοια του Λήμματος 3.1 θα χρειαστούμε την εκτίμηση

$$|\{\upsilon_\varepsilon > \delta\}| \geq C\, \delta^{\frac{n}{n-2}}, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0, \ \varepsilon^2 \ll \delta \ll 1. \tag{4.55}$$

Η εκτίμηση αυτή έπεται από τις σχέσεις $u_\varepsilon^*(r) \overset{(4.18)}{\approx} u_{\infty,\varepsilon} k(r) \overset{(4.20)}{\approx} \varepsilon^2 K(r) \approx (\varepsilon^{\frac{-2}{n-2}} r)^{2-n}$ για $\rho_\varepsilon \ll r \ll \rho_\varepsilon \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$, δηλαδή $\varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \ll r \ll 1$, εφόσον $\rho_\varepsilon \approx \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$. Θέτοντας $R = \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}} r$ έπεται ότι $\upsilon_\varepsilon^*(R) \approx R^{n-2}$ για $1 \ll R \ll \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}$, από το οποίο έπεται άμεσα η (4.55).

Έστω τώρα ότι έχουμε εξασθένιση των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon)\, dx$, με την έννοια του Λήμματος 3.1. Για κάθε ακτίνα R ισχύει

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_x^R} F(\upsilon_\varepsilon)\, dx = 0.$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 (Βήμα 2) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sup_{r>0} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_x^r} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx = 0.$$

Ας δείξουμε τώρα την εξασθένιση της $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*}$. Συμβολίζουμε με ϕ_R^r το n-αρμονικό δυναμικό χωρητικότητας της μπάλας B_y^r ως προς την μπάλα B_y^R

$$\phi_R^r(x) := \frac{\log(|x-y|/R)}{\log(r/R)} \text{ για } r \leq |x-y| \leq R$$

και $\phi_R^r(x) = 1$ για $x \in B_y^r$, $\phi_R^r(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_y^R$. Από την ανισότητα Sobolev και το Λήμμα 2.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{S^*}\int_{B_y^r} |\upsilon_\varepsilon|^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} &\leq \int_{B_y^R} |\nabla(\phi_R^r \upsilon_\varepsilon)|^2\, dx \\ &\leq \int_{B_y^R} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx + \delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από το ότι $\delta \to 0$, καθώς $r/R \to 0$.

Καλύπτουμε τώρα τον $\mathbb{R}^n$ με τους μοναδιαίους κύβους $Q_z = z + (0,1)^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$ και θέτουμε $\lambda_z^\varepsilon = |\{\upsilon_\varepsilon > \delta\} \cap Q_z|$, $\mu_z^\varepsilon = |\{\upsilon_\varepsilon > \delta/2\} \cap Q_z|$. Από την εξασθένιση των $|\upsilon_\varepsilon|^{2^*}$ έπεται ότι $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{z\in\mathbb{Z}^n}(\lambda_z^\varepsilon + \mu_z^\varepsilon) = 0$. Συγκεκριμένα η συνάρτηση $(\upsilon_\varepsilon - \delta/2)_+$ μηδενίζεται σε ένα σύνολο με όγκο $1 - \mu_z^\varepsilon \geq 1/2$ σε κάθε κύβο Q_z, για $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Εφαρμώζοντας το Λήμμα 3.2 έχουμε ότι

$$(\lambda_z^\varepsilon)^{2/2^*}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \leq \left(\int_{Q_z}\left(\upsilon_\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)_+^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq c\int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx.$$

Έχουμε ότι $\sum_z \lambda_z^\varepsilon = |\{\upsilon_\varepsilon > \delta\}|$ και λαμβάνοντας υπόψιν την (4.55), έπεται ότι

$$\begin{aligned}0 < C\,\delta^{\frac{n}{n-2}}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2^*} &\leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2^*} |\{\upsilon_\varepsilon > \delta\}| \\ &\leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2^*} \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \lambda_z^\varepsilon \\ &\leq c\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &= c\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\left(\int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{2}{n-2}}\left(\int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\right)\right) \\ &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\right)\sup_{z\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{2}{n-2}}.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2 \, dx \geq \left(\sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_z} |\nabla \upsilon_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{\frac{-2}{n-2}} c(\delta) \to \infty,$$

καθώς $\varepsilon \to 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Έπεται λοιπόν ότι υπάρχουν σημεία $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα μέτρα $F(\upsilon_\varepsilon)\, dx$ είναι συμπαγή με την έννοια του Λήμματος 3.1.

Για τις συναρτήσεις $\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot) = u_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \cdot)$ έχουμε

$$\|\nabla \upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot)\|_2^2 = \int_{\varepsilon^{-\frac{2}{n-2}}(\Omega - x_\varepsilon)} |\nabla \upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot)|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \, dx \leq 1.$$

Επομένως, από το θεώρημα του Alaoglou και τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev, έχουμε ότι για μια υπακολουθία της $(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))$, $|\nabla \upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot)|^2 \, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, $F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))\, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$, στον $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Έχουμε επίσης ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))\, dx = \frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx \to S^F, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι μια υπακολουθία της $(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))$ ικανοποιεί το Θεώρημα εναλλακτικότητας συγκέντρωσης - συμπάγειας II (Θεώρημα 2.3) για $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $\nu(\overline{\mathbb{R}^n}) = S^F$.

Η συγκέντρωση σε πεπερασμένο σημείο αποκλείεται από το γεγονός ότι αν οι συμμετρικοποιημένες συναρτήσεις υ_ε^* συγκεντρώνονται στο 0, τότε από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι $\omega_\infty = 0$, το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση μας.

Η συμπάγεια των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon)\, dx$, με την έννοια του Λήμματος 3.1, αποκλείει τη συγκέντρωση στο ∞ των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))\, dx$. Πράγματι στην περίπτωση της συμπάγειας των μέτρων $\sigma_\varepsilon = F(\upsilon_\varepsilon)\, dx$, έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια ακτίνα R για την οποία

$$\sigma_\varepsilon(B_{y_\varepsilon}^R) > S - \delta,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι

$$S^F \geq \int_{B_0^R} F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + x))\, dx = \int_{B_{y_\varepsilon}^R} F(\upsilon_\varepsilon(x))\, dx = \sigma_\varepsilon(B_{y_\varepsilon}^R) > S^F - \delta.$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Ωστόσο η συγκέντρωση των μέτρων $F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))\, dx$ στο ∞ συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0^r} F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot))\, dx \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} S^F, \text{ για κάθε } r > 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη εκτίμηση.

Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 2.3, έπεται ότι $u_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}(y_\varepsilon + \cdot)) = \upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \omega$ στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, όπου ω είναι ένα ακρότατο για την S^F, $\|\nabla \upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot)\|_2 = 1$ και $F(\upsilon_\varepsilon(y_\varepsilon + \cdot)) \to F(\omega)$ στον $L^1(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Το συμπέρασμα, για τις συναρτήσεις $u_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \cdot)$, έπεται επιλέγοντας $x_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} y_\varepsilon$.

Βήμα 4 (Συγκέντρωση συνόλων στάθμης). Υπάρχει $\eta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν η ακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ συγκεντρώνεται στο $x_0 \in \bar{\Omega}$, $t_\varepsilon/\varepsilon^2 \to \infty$, καθώς $\varepsilon \to 0$ και $t_\varepsilon \leq \eta_0$, τότε τα σύνολα $\{u_\varepsilon > t_\varepsilon\}$ συγκεντρώνονται στο x_0, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Απόδειξη. Έστω $t > 0$ και $\rho_{t,\varepsilon} > 0$ τέτοιο ώστε $|B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}| = |\{\omega_\varepsilon > t\}|$, δηλαδή $B_0^{\rho_{t,\varepsilon}} = \{\omega_\varepsilon > t\}^*$. Από την (4.18) και το Βήμα 2 έχουμε ότι

$$|\{\omega_\varepsilon > t\}| \approx t^{-\frac{n}{n-2}}, \quad \rho_{t,\varepsilon} \approx t^{-\frac{1}{n-2}}, \tag{4.56}$$

για κάθε t, τέτοιο ώστε $\varepsilon^2 \ll t \ll 1$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(\{\omega_\varepsilon > t\})}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{\rho_{t,\varepsilon}})} \leq 1 + C\left(\frac{\varepsilon^2}{t} + t^{\frac{2}{n-2}}\right). \tag{4.57}$$

Πράγματι συμβολίζοντας με $\tilde{\omega}_\varepsilon$ την αρμονική επέκταση της ω_ε^* έξω από την μπάλα $B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}$, από την (4.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx &\geq \int_{B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}} F(\omega_\varepsilon^*)\,dx \geq S^F - C\varepsilon^2 - C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}} |\omega_\varepsilon|^{2^*}\,dx \\
&\geq S^F - C\varepsilon^2 - c\,\rho_{t,\varepsilon}^{-n}.
\end{aligned}$$

Έχουμε επίσης την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx &= \int_{B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}} |\nabla\tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx \\
&= \int_{B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}} |\nabla\omega_\varepsilon^*|^2\,dx + t^2 cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{\rho_{t,\varepsilon}}) \\
&\leq \int_{\{\omega_\varepsilon > t\}} |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx + t^2\rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1) \\
&\leq \|\nabla\omega_\varepsilon\|_2^2 - \int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx + t^2\rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1) \\
&\leq 1 - \int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla\omega_\varepsilon|^2\,dx + t^2\rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1).
\end{aligned}$$

Από τις δύο παραπάνω εκτιμήσεις και την ανισότητα Sobolev έχουμε

$$\begin{aligned} S^F - C\varepsilon^2 - c\,\rho_{t,\varepsilon}^{-n} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{\omega}_\varepsilon)\,dx \leq S^F \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{\omega}_\varepsilon|^2\,dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\leq S^F \left(1 - \int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla \omega_\varepsilon|^2\,dx + t^2 \rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1) \right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\leq S^F \left(1 - \int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla \omega_\varepsilon|^2\,dx + t^2 \rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1) \right). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla \omega_\varepsilon|^2\,dx \leq \bar{c}\left(\varepsilon^2 + \rho_{t,\varepsilon}^{-n}\right) + t^2 \rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1),$$

και από τον ορισμό της χωρητικότητας ισχύει

$$cap_{\mathbb{R}^n}(\{\omega_\varepsilon > t\}) \leq \frac{1}{t^2} \int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla \omega_\varepsilon|^2\,dx.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \frac{cap_{\mathbb{R}^n}(\{\omega_\varepsilon > t\})}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{\rho_{t,\varepsilon}})} &\leq \frac{\int_{\{\omega_\varepsilon < t\}} |\nabla \omega_\varepsilon|^2\,dx}{t^2 \rho_{t,\varepsilon}^{n-2} cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^1)} \\ &\leq 1 + \frac{c}{t}\left(\varepsilon^2 + \rho_{t,\varepsilon}^{-n}\right) \\ &\leq 1 + C\left(\frac{\varepsilon^2}{t} + t^{\frac{2}{n-2}}\right). \end{aligned}$$

Η σχέση (4.57) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{cap_{\mathbb{R}^n}(\{\omega_\varepsilon > t\})}{cap_{\mathbb{R}^n}(B_0^{\rho_{t,\varepsilon}})} \leq 1 + \delta(\eta_0), \quad \text{όταν } \frac{1}{\eta_0} \leq t \leq \eta_0. \tag{4.58}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.6 έπεται ότι υπάρχουν $z_{t,\varepsilon}$ τέτοια ώστε

$$\frac{|\{\omega_\varepsilon > t\} \triangle B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon})|}{|B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon})|} \leq \omega(\delta(\eta_0)). \tag{4.59}$$

όπου $\omega(\delta) \to 0$, καθώς $\delta \to 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $\varepsilon^2/\eta_0 \leq t < t' \leq \eta_0$, τότε

$$|z_{t,\varepsilon} - z_{t',\varepsilon}| \leq C\rho_{t,\varepsilon}. \tag{4.60}$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $t \geq t'/2$. Από την (4.56) έχουμε ότι

$$\frac{|\{\omega_\varepsilon > t\} \cap \{\omega_\varepsilon > t'\}|}{|\{\omega_\varepsilon > t\}|} = \frac{|\{\omega_\varepsilon > t'\}|}{|\{\omega_\varepsilon > t\}|} \geq c \, \frac{t^{\frac{n}{n-2}}}{t'^{\frac{n}{n-2}}} \geq c_0 \, \frac{t'^{\frac{n}{n-2}}}{t'^{\frac{n}{n-2}}} \geq c_0 > 0.$$

Από την παραπάνω σχέση και την (4.59) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon}) \cap B(z_{t',\varepsilon}, \rho_{t',\varepsilon})|}{|\{\omega_\varepsilon > t\}|} &\geq \frac{|\{\omega_\varepsilon > t\} \cap \{\omega_\varepsilon > t'\}|}{|\{\omega_\varepsilon > t\}|} \\
&- \frac{|\{\omega_\varepsilon > t\} \triangle B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon})|}{|B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon})|} \\
&- \frac{|\{\omega_\varepsilon > t\} \triangle B(z_{t',\varepsilon}, \rho_{t',\varepsilon})|}{|B(z_{t',\varepsilon}, \rho_{t',\varepsilon})|} \\
&\geq c_0 - 2\,\omega(\delta(\eta_0)) > 0,
\end{aligned}$$

όταν το ω είναι αρκετά μικρό, το οποίο μπορεί να γίνει επιλέγοντας το η_0 αρκετά μικρό. Άρα οι μπάλες $B(z_{t,\varepsilon}, \rho_{t,\varepsilon})$ και $B(z_{t',\varepsilon}, \rho_{t',\varepsilon})$ τέμνονται, επομένως

$$|z_{t,\varepsilon} - z_{t',\varepsilon}| \leq \rho_{t,\varepsilon} + \rho_{t',\varepsilon} \leq 2\rho_{t,\varepsilon} \tag{4.61}$$

και έτσι αποδείχθηκε η (4.60) στην περίπτωση όπου $t \geq t'/2$. Για να αποδείξουμε την (4.60) στη γενική περίπτωση, έστω $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^{-j}\,t' \geq t \geq 2^{-j-1}\,t'$ και ορίζουμε $t_0 = t'$, $t_i = 2^{-i}\,t'$ για $i = 1, \ldots, j$ και $t_{j+1} = t$. Εφαρμόζωντας τη σχέση (4.61) για t_i και t_{i+1}, $i = 0, \ldots, j$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_{t',\varepsilon} - z_{t_1,\varepsilon}| &\leq 2\rho_{t_1,\varepsilon}, \\
|z_{t_1,\varepsilon} - z_{t_2,\varepsilon}| &\leq 2\rho_{t_2,\varepsilon}, \\
&\vdots \\
|z_{t_j,\varepsilon} - z_{t,\varepsilon}| &\leq 2\rho_{t,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και την ανισότητα $c\,t^{\frac{1}{2-n}} \leq \rho_{t,\varepsilon} \leq Ct^{\frac{1}{2-n}}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_{t,\varepsilon} - z_{t',\varepsilon}| &\leq 2\sum_{i=1}^{j+1} \rho_{t_i,\varepsilon} \\
&\leq 2C \sum_{i=1}^{j+1} t_i^{\frac{1}{2-n}} \\
&\leq 2C \left(\left(\sum_{i=1}^{j} 2^{\frac{i}{2-n}} \right) + 1 \right) t^{\frac{1}{2-n}} \\
&\leq \bar{C}\rho_{t,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Η ακολουθία (ω_ε) συγκλίνει σε μια μεγιστοποιούσα συνάρτηση ω για την S^F και από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι υπάρχει $r_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε $\omega = \omega^*$ στον $\mathbb{R}^n \setminus B_0^{r_0}$ και η συνάρτηση ω είναι γνησίως φθίνουσα για $r \geq r_0$. Επιλέγοντας αρκετά μικρό η_0 τέτοιο ώστε $\eta_0 < \omega^*(r_0)$ έχουμε ότι $\{\omega > \eta_0\} = B_0^r$ για κάποιο $r > r_0$ και

$$|\{\omega_\varepsilon > \eta_0\} \bigtriangleup \{\omega > \eta_0\}| \longrightarrow 0. \tag{4.62}$$

Έπεται ότι $z_{\eta_0,\varepsilon} \to 0$. Έχουμε τώρα ότι

$$\frac{|z_{t_\varepsilon,\varepsilon}|}{\rho_{t_\varepsilon,\varepsilon}} \leq \frac{|z_{t_\varepsilon,\varepsilon} - z_{\eta_0,\varepsilon}|}{\rho_{t_\varepsilon,\varepsilon}} + \frac{|z_{\eta_0,\varepsilon}|}{\rho_{t_\varepsilon,\varepsilon}}$$

και από την (4.60) για $t' = \eta_0$ έχουμε

$$\frac{|z_{t_\varepsilon,\varepsilon} - z_{\eta_0,\varepsilon}|}{\rho_{t_\varepsilon,\varepsilon}} \leq C.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{|z_{t_\varepsilon,\varepsilon}|}{\rho_{t_\varepsilon,\varepsilon}} \leq C, \text{ όταν } \frac{\varepsilon^2}{\eta_0} \leq t_\varepsilon \leq \eta_0.$$

Από την εκτίμηση (4.59) έχουμε

$$\frac{|\{u_\varepsilon > t_\varepsilon\} \bigtriangleup B(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} z_{t_\varepsilon,\varepsilon}, \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \rho_{t_\varepsilon,\varepsilon})|}{|\{u_\varepsilon > t_\varepsilon\}|} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \tag{4.63}$$

Από την υπόθεση $t_\varepsilon/\varepsilon^2 \to \infty$, έχουμε ότι $\varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \rho_{t_\varepsilon,\varepsilon} \approx (\varepsilon^2/t_\varepsilon)^{\frac{1}{n-2}} \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$, επομένως

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon\to 0} |x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} z_{t_\varepsilon,\varepsilon} - x_0| &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} |x_\varepsilon - x_0| + \limsup_{\varepsilon\to 0} |\varepsilon^{\frac{2}{n-2}} z_{t_\varepsilon,\varepsilon}| \\ &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} |x_\varepsilon - x_0| + C \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} \rho_{t_\varepsilon,\varepsilon} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή $x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}} z_{t_\varepsilon,\varepsilon} \to x_0$ και από την (4.63) έπεται ότι τα σύνολα $\{u_\varepsilon > t_\varepsilon\}$ συγκεντρώνονται στο x_0.

Βήμα 5 (Πάνω φράγμα για τις ακολουθίες οι οποίες συγκεντρώνονται στο x_0). Έστω ω το όριο μιας υπακολουθίας της $\{\omega_\varepsilon\}$ και υπενθυμίζουμε ότι

$$W_\infty^2 = \frac{2(n-1)}{nS^F} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(\omega)}{K(|\cdot|)}\, dx.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx \le S^F\left(1-\frac{n}{n-2}W_\infty^2\tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right),\ \text{καθώς}\ \varepsilon\to 0.$$

Απόδειξη. Όπως και στο Βήμα 2, συμβολίζουμε με $U_\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ την αρμονική επέκταση της u_ε^* έξω από την μπάλα A_ε^*, όπου $A_\varepsilon=\{u_\varepsilon>u_{\infty,\varepsilon}K(r_\varepsilon)\}$, $r_\varepsilon=\rho_\varepsilon^{1/n}$ και $|A_\varepsilon^*|=|B_0^{\tilde r_\varepsilon}|$. Από την (4.17) και την εκτίμηση $\rho_\varepsilon\approx\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega\setminus A_\varepsilon}F(u_\varepsilon)\,dx &\le \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\varepsilon^*}F(u_\varepsilon^*)\,dx\\ &\le \frac{\alpha}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0^{\tilde r_\varepsilon}}|u_\varepsilon^*|^{2^*}\,dx\\ &\le c\left(\frac{\rho_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^n\approx\varepsilon^{\frac{2(n-1)}{n-2}}=o\left(\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n}F(U_\varepsilon)\,dx &\ge \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{A_\varepsilon^*}F(u_\varepsilon^*)\,dx\\ &\ge \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{A_\varepsilon}F(u_\varepsilon)\,dx\\ &\ge \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega}F(u_\varepsilon)\,dx-\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega\setminus A_\varepsilon}F(u_\varepsilon)\,dx\\ &\ge \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega}F(u_\varepsilon)\,dx-o\left(\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

Από τη γενικευμένη ανισότητα Sobolev έπεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\Omega}F(u_\varepsilon)\,dx &\le \frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_{\mathbb{R}^n}F(U_\varepsilon)\,dx+o\left(\varepsilon^2\right)\\ &\le S^F\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n-2}}+o\left(\varepsilon^2\right).\end{aligned}\tag{4.64}$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα Dirichlet $\|\nabla U_\varepsilon\|_2$. Από την (4.54) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_\varepsilon|^2\,dx &\le 1-\frac{1}{\varepsilon^2}u_{\infty,\varepsilon}^2K(r_\varepsilon)^2 cap_{\mathbb{R}^n}(A_\varepsilon^*)^2\\ &\quad\times\left(\frac{1}{cap_{\mathbb{R}^n}(A_\varepsilon^*)}-\frac{1}{cap_\Omega(A_\varepsilon)}\right).\end{aligned}\tag{4.65}$$

Έχουμε δείξει στο Βήμα 3 ότι οι συναρτήσεις ω_ε, με $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}x)$, συγκλίνουν στον $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ σε ένα ακρότατο ω για την S^F. Από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι $\omega = \omega^*$ στον $\mathbb{R}^n \setminus B^{r_0}$ για κάποιο $r_0 > 0$ και $\omega^*(R) = W_\infty K(R)(1+o(1))$, καθώς $R \to \infty$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $u_{\infty,\varepsilon}/\varepsilon^2 \to W_\infty$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Πράγματι για $\varepsilon^2 \ll t \ll 1$ όπως στην (4.62), έχουμε $|\{\omega_\varepsilon^* > t\}| = |\{\omega_\varepsilon > t\}| \to |\{\omega > t\}|$ και από την (4.18), για $\rho \approx \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$ και $r = \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R$, έχουμε

$$|\omega_\varepsilon^*(R) - u_{\infty,\varepsilon}K(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R)| \le c_0\varepsilon^2 K(\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R)\left(\frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R} + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R}{\rho_\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)$$
$$\text{για } \rho_\varepsilon \le \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}R \le \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}\rho_\varepsilon, \qquad (4.66)$$

από την οποία, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\rho_\varepsilon \approx \varepsilon^{\frac{2}{n-2}}$, έπεται ότι

$$|\omega_\varepsilon^*(R) - \frac{u_{\infty,\varepsilon}}{\varepsilon^2}K(R)| \le c_0 K(R)\left(\frac{1}{R} + \varepsilon R^{\frac{n-2}{2}}\right) \quad \text{για } 1 \ll R \ll \varepsilon^{\frac{-2}{n-2}}.$$

Έπεται ότι

$$|\{\omega_\varepsilon^* > t\}| = c\left(\frac{u_{\infty,\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{n-2}} t^{-\frac{n}{n-2}}\left(1 + O\left(t + \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\right),$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$|\{\omega > t\}| = c\, W_\infty^{\frac{n}{n-2}} t^{-\frac{n}{n-2}}\left(1 + o\left(1\right)\right),$$

καθώς $t \to \infty$. Λαμβάνοντας υπόψιν την (4.62) και στέλνοντας τα $t \to \infty\,, \varepsilon \to 0$, έπεται ότι $u_{\infty,\varepsilon}/\varepsilon^2 \to W_\infty$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Από το Βήμα 4 έχουμε ότι τα σύνολα A_ε συγκεντρώνονται στο x_0 και εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3(i), η (4.65) γίνεται

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_\varepsilon|^2\, dx &\le 1 - W_\infty^2 K(r_\varepsilon)^2 cap_{\mathbb{R}^n}(A_\varepsilon^*)^2 \tau_\Omega(x_0)\varepsilon^2(1+o(1)) \\
&= 1 - W_\infty^2 K(r_\varepsilon)^2 K(\tilde{r}_\varepsilon)^{-2}\tau_\Omega(x_0)\varepsilon^2(1+o(1)) \\
&= 1 - W_\infty^2 \tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την (4.64) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^{2^*}}\int_\Omega F(u_\varepsilon)\, dx &\le S^F\left(1 - W_\infty^2\tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right)^{\frac{n}{n-2}} + o(\varepsilon^2) \\
&\le S^F\left(1 - \frac{n}{n-2}W_\infty^2\tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right) \\
&\le S^F\left(1 - \frac{n}{n-2}\omega_\infty^2\tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Βήμα 6 (Ασυμπτωτική συμπεριφορά σχεδόν ακροτάτων).

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1 κάθε ακολουθία σχεδόν ακροτάτων $\{u_\varepsilon\}$ συγκεντρώνεται σε κάποιο σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$. Επομένως από το προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^F(\Omega)\,(1+o(1)) &= \frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx \\ &\leq S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} W_\infty^2 \tau_\Omega(x_0)\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right) \\ &\leq S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} \omega_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Από το Βήμα 1 όμως, έχουμε το κάτω φράγμα

$$S_\varepsilon^F(\Omega) \geq S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} w_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\,\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right),$$

από το οποίο έπεται η εκτίμηση

$$\frac{1}{\varepsilon^{2^*}} \int_\Omega F(u_\varepsilon)\,dx = S^F \left(1 - \frac{n}{n-2} \omega_\infty^2 \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega\,\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right) \right).$$

Επιπλέον έχουμε $W_\infty = \omega_\infty$, δηλαδή οι συναρτήσεις ω_ε συγκλίνουν σε εκείνα τα ακρότατα ω για την S^F τα οποία υλοποιούν την ελάχιστη τιμή του $W_\infty = \lim \frac{\omega(r)}{K(r)}$.

Βήμα 7 (Χαρακτηρισμός των σημείων συγκέντρωσης).

Απόδειξη. Από το δεύτερο τμήμα του θεωρήματος και από το πρώτο τμήμα το οποίο ισχύει για κάθε ακολουθία η οποία συγκεντρώνεται στο x_0, έπεται ότι $\min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega \geq \tau_\Omega(x_0) \Rightarrow \tau_\Omega(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \tau_\Omega$, δηλαδή οι μεγιστοποιούσες ακολουθίες συγκεντρώνονται σε ένα αρμονικό κέντρο για το Ω. □

Βιβλιογραφία

[1] P. - L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case I.* Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Linéaire, Vol. 1, 2, 1984, pp. 109-145.

[2] P. - L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case I.* Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 1, 1, 1985, pp. 145-201.

[3] C. Bandle, M. Flucher, *Harmonic radius and concentration of energy; hyperbolic radius and Liouville's equations* $\Delta U = e^U$ *και* $\Delta U = U^{(n+2)/(n-2)}$. SIAM J. Math. Anal., Vol. 38, 2, 1996, pp. 191-238.

[4] M. Flucher and S. Müller, *Radial symmetry and decay rate of variational ground states in the zero mass case.* SIAM J. Math. Anal., Vol. 29, 3, 1998, pp. 712-719.

[5] M. Flucher and S. Müller, *Concentration of low energy extremals.* Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Linéaire, Vol. 16, 3, 1999, pp. 269-298.

[6] M. Flucher, *Variational problems with concentration.* Birkhäuser, 1999.

[7] M. Flucher, A. Garroni and S. Müller, *Concentration of low energy extremals: Indentification of concentration points.* Calc. Var., Vol. 14, 2002, pp. 483-516.

[8] M. Flucher and M. Rumpf, *Bernoulli's free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation.* J. Reine Angew. Math., Vol. 486, 1997, pp. 165-204.

[9] G. Talenti, *Elliptic equations and rearrangements.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Vol. 4, 3, 1976, pp. 697-718.

[10] L. Helms. *Introduction to potential theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1969.

[11] J. E. Brothers and W. P. Ziemer, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*. J. Reine Angew. Math., Vol. 384, 1988, pp. 153-179.

[12] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Springer, 1985.

[13] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys., Vol. 55, 1977, pp. 149-162.

[14] E. Yanagida, *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 115, 1991, pp. 257-274.

[15] P. Cardaliaguet, R. Tahraoui, *On the strict concavity of the harmonic radius in dimension* $n \geq 3$, J. Math. Pures Appl., Vol. 81, 2002, pp. 223-240.