ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΟΛΛΑΠΛΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΝΔΡΕΑ ΖΟΥΡΜΠΑΚΗΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΙΧΑΗΛ ΛΑΜΠΡΟΥ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Μιχαήλ Λάμπρου.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Μιχαήλ Λάμπρου, Νικόλαος Τζανάκης και Χρήστος Κουρουνιώτης.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρεται συνοπτικά η ιστορία της Τριγωνομετρίας. Αναπότρεπτα η έρευνα κατευθύνεται στην Αρχαία Ελλάδα όπου παρατηρούνται τα πρώτα ίχνη Τριγωνομετρίας, περίπου το 450 π.Χ. Συνεχίζοντας την έρευνα, καταγράφονται τα ενυπάρχοντα με το θέμα, στην Ινδία, την Αραβία και την Ευρώπη, από τον $12^{ο}$ έως τον $17^{ο}$ αιώνα.

Το δεύτερο κεφάλαιο, περιλαμβάνει την συνοπτική ιστορία των λογαρίθμων και της εκθετικής συνάρτησης. Αφετηρία είναι ο $16^{ος}$ αιώνας όπου οι λογάριθμοι ορίζονται μέσω του συσχετισμού των όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου. Η έρευνα επικεντρώνεται, στην εξέλιξη του ορισμού τους και καταλήγει στην μελέτη των εννοιών αυτών για μιγαδική μεταβλητή.

Στο τρίτο κεφάλαιο, καταγράφονται εναλλακτικοί ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, πέραν του γεωμετρικού ορισμού καθώς και ο αντίστοιχος κάθε φορά ορισμός του αριθμού π. Επιπλέον σε κάθε ορισμό αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, καταγράφονται διάφοροι ορισμοί της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, ο αντίστοιχος ορισμός του αριθμού e, και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές τους.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια περιληπτική παρουσίαση των ορισμών και η απόδειξη της ισοδυναμίας τους, από οποιονδήποτε ορισμό, απευθείας σε οποιονδήποτε άλλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

1.1 ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ

Τα πρώτα ίχνη Τριγωνομετρίας εμφανίστηκαν στην Αρχαία Ελλάδα, όταν προέκυψε η ανάγκη ακριβών μετρήσεων κατά τη μελέτη αστρονομικών φαινόμενων. Επί πολύ καιρό η Τριγωνομετρία θεωρείτο προσάρτημα της αστρονομίας. Οι Αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν ένα μονάχα τριγωνομετρικό μέγεθος, την χορδή τόξου κύκλου, βάση της οποίας δημιουργήθηκε ο πρώτος πίνακας χορδών, με σύγχρονη ορολογία πίνακας ημιτόνων. Παρακάτω καταγράφονται αποσπάσματα που μαρτυρούν την συμβολή των Ελλήνων στην διαμόρφωση και εξέλιξη της Τριγωνομετρίας.

1.1.1 ΟΙΝΟΠΙΔΗΣ Ο ΧΙΟΣ

Υπήρξε μαθηματικός και αστρονόμος, η δράση του οποίου εκτιμάται γύρω στο 450 π.Χ. Μεταξύ των άλλων βρήκε ότι το τόξο του ουράνιου μεσημβρινού, που περιλαμβάνεται μεταξύ του Πόλου του ουράνιου ισημερινού και του αντίστοιχου πόλου της εκλειπτικής ισούται με το τόξο που αντιστοιχεί στη πλευρά του κανονικού 15-γώνου, εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο. Ως γνωστών η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο αυτό είναι ίση με τη λόξωση της εκλειπτικής. Ο Οινοπίδης εκφράζει το τόξο που αντιστοιχεί στη λόξωση μέσω της χορδής του κανονικού 15-γώνου, δείχνοντας ότι ήδη από το 450 π.Χ. είχε αρχίσει να εμφανίζεται η ιδέα του πίνακα χορδών που αναλύεται παρακάτω[1].

1.1.2 ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια και άκμασε το διάστημα 315-275 π.Χ. Ο τόπος και ο χρόνος γεννήσεως και θανάτου του, παραμένουν άγνωστα. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, το πιο γνωστό έργο του, αποτελείται από 13 βιβλία. Ειδικότερα στο Βιβλίο 2, τα Θεωρήματα 12 και 13 αφορούν την εύρεση του τετραγώνου, πλευράς τριγώνου, απέναντι από οξεία ή αμβλεία γωνία, από τα οποία, με σύγχρονη ορολογία, προκύπτει ο Νόμος των Συνημιτόνων. Στο Θεώρημα 12 διαβάζουμε:

---

[1] Γ. Ν. Βρατσάνος, Αρχαία Ελληνική Τριγωνομετρία, Εκδόσεις Δίαυλος, 2006, σελ. 320-321.

Εν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ[2].

Σύγχρονος συμβολισμός

$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$

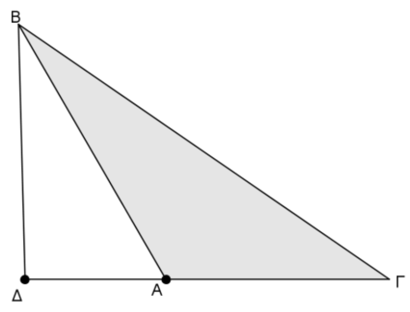
Απόδειξη

Έστω το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με την γωνία Α αμβλεία. Φέρνοντας από το Β την κάθετη ΒΔ προς την προέκταση της ΑΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τότε ΔΓ=ΑΓ+ΑΔ άρα $\Delta\Gamma^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$. Προσθέτοντας το $\Delta\mathrm{B}^2$ στην προηγούμενη ισότητα προκύπτει

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$$

Δεδομένου ότι ΑΔ=-ΑΒcosΑ, η τελευταία ισότητα, με σύγχρονη ορολογία, γράφεται

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{AB} \cdot \cos \mathrm{A}$$



Στο Θεώρημα 13 διαβάζουμε:

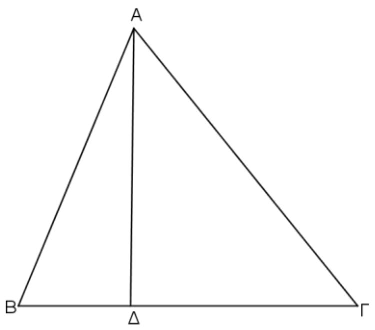
Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ[3].

Σύγχρονος συμβολισμός

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 - 2\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$

---

[2] Ευκλείδης, *Στοιχεία,* 2.12, 1-7.
[3] Ευκλείδης, *Στοιχεία,* 2.13, 1-6.



Η απόδειξη είναι όμοια με του Θεωρήματος 12.

Επιπλέον στο έργο *Δεδομένα* του Ευκλείδη, το οποίο περιέχει 94 συνολικά προτάσεις, στην 93 διαβάζουμε:

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία δίχα τμηθῇ, συναμφότεροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἕξουσι δεδομένον, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ δοθὲν ἔσται[4].

Ελεύθερη μετάφραση

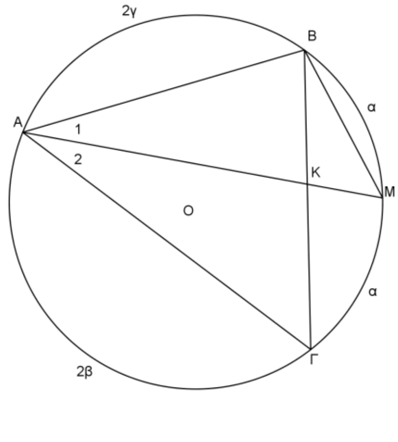
Σε δεδομένο κύκλο με δοσμένη γωνία Α και διχοτόμο την ΑΜ ο λόγος $\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}}$ είναι δοσμένος.

Σύγχρονος συμβολισμός

Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΜΓ με $\text{ΜΒ}=\text{ΜΓ}$, ισχύει ότι

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΜ}}$$

Απόδειξη



Ισχύει ότι $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΓ}}$ άρα $\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΚΓ}}$ (1)

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΚΓ είναι όμοια άρα

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΒΜ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΓ}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΒΜ}}$

[4] Ευκλείδης, *Δεδομένα,* Πρόταση 93.

δηλαδή $\frac{AB+A\Gamma}{AM}=\frac{B\Gamma}{BM}$. Να σημειωθεί ότι ο λόγος $\frac{B\Gamma}{BM}$ θεωρείται γνωστός λόγω της Πρότασης 87 των *Δεδομένων* του Ευκλείδη, σύμφωνα με την οποία σε δοσμένο κύκλο η χορδή που αντιστοιχεί σε γνωστή γωνία, είναι δοσμένη.

Η Πρόταση 93 που αποδείχθηκε αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Πτολεμαίου καθώς ΒΜ=ΜΓ, οπότε η σχέση $\frac{AB+A\Gamma}{AM}=\frac{B\Gamma}{BM}$ γίνεται

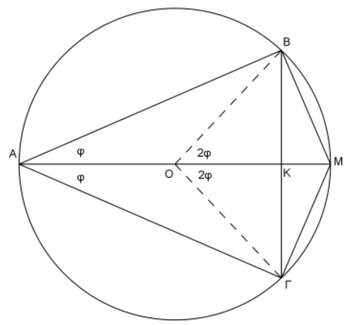
$$AB\cdot M\Gamma + A\Gamma\cdot BM = AM\cdot B\Gamma$$

Η τελευταία ισότητα είναι γνωστή ως το Θεώρημα του Πτολεμαίου του οποίου η απόδειξη υπάρχει στο έργο του, *Μέγιστη Σύνταξη* (βλέπε 1.1.7). Η Πρόταση 93 αποτελεί πηγή σημαντικών αποτελεσμάτων για την Τριγωνομετρία. Πιο συγκεκριμένα από την σχέση $\frac{AB+A\Gamma}{AM}=\frac{B\Gamma}{BM}$ με βάση το παραπάνω σχήμα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\text{χορδή}(2\varphi)=2\sin\varphi$ προκύπτει

$$\frac{2\sin\gamma+2\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}=\frac{2\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Επιπλέον αν ΑΒ=ΑΓ, βλέπε σχήμα παρακάτω, τότε από την Πρόταση 93 προκύπτει $2AB\cdot BM = AM\cdot B\Gamma$ δηλαδή ο τύπος $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

.



Τέλος στα *Οπτικά* του Ευκλείδη διαβάζουμε:

Τὰ ἴση μεγέθη καὶ παράλληλα ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος οὐκ ἀναλόγως τοῖς διαστήμασιν ὁρᾶται[5].

Ελεύθερη μετάφραση

[5] Ευκλείδης, *Οπτικά*, 8, 1-2.

Δύο ίσα κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα, που βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από έναν παρατηρητή, φαίνονται άνισα, αλλά όχι άνισα αναλόγως προς τις αποστάσεις.

Σύγχρονος συμβολισμός

Αν $0<\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\tan\theta}{\theta}<\frac{\tan\varphi}{\varphi}$ ισοδύναμα $\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}<\frac{\theta}{\varphi}$

Απόδειξη

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και έστω ΖΕΗ ένα τόξο του. Από το παρακάτω σχήμα έπεται ότι

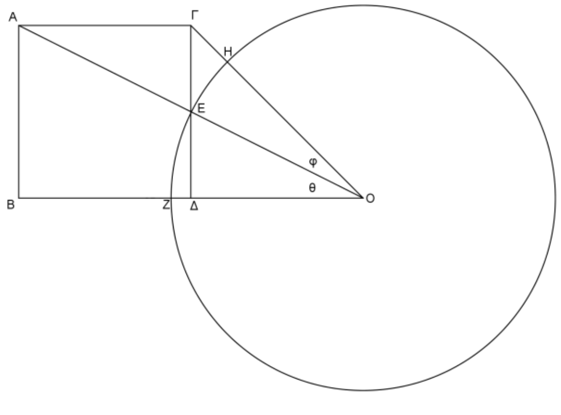
$$\text{τρίγωνο ΟΕΔ} < \text{τομέα ΟΕΖ και τρίγωνο ΟΓΕ} > \text{τομέα ΟΕΗ.}$$

Άρα $\frac{\text{τρίγωνο ΟΕΔ}}{\text{τρίγωνο ΟΓΕ}}<\frac{\text{τομέα ΟΕΖ}}{\text{τομέα ΟΕΗ}}$ από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\text{τρίγωνο ΟΕΔ}}{\text{τρίγωνο ΟΓΕ}+\text{τρίγωνο ΟΕΔ}}<\frac{\text{τομέα ΟΕΖ}}{\text{τομέα ΟΕΗ}+\text{τομέα ΟΕΖ}} \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{\text{τρίγωνο ΟΕΔ}}{\text{τρίγωνο ΟΓΔ}}<\frac{\text{τομέα ΟΕΖ}}{\text{τομέα ΟΖΗ}} \text{ ισοδύναμα } \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΓΔ}}<\frac{\theta}{\varphi}.$$

Από την τελευταία με $\text{ΕΔ}=\text{ΟΔ}\cdot\tan\theta$ και $\text{ΓΔ}=\text{ΟΔ}\cdot\tan\varphi$ έπεται ότι $\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}<\frac{\theta}{\varphi}$.



1.1.3 ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (320–240 π.Χ.) ήταν αστρονόμος και μαθηματικός. Το σημαντικό από μαθηματικής πλευράς έργο του, έχει τίτλο *Περί μεγεθών και αποστημάτων* το οποίο έχει διασωθεί. Στην Πρόταση 7 του βιβλίου αποδεικνύεται ότι η απόσταση Γης-Ηλίου είναι μεταξύ του 18-πλάσιου και του 20-πλάσιου της απόστασης Γης-Σελήνης. Από Τριγωνομετρικής σκοπιάς αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον, διότι δίνει μια μέθοδο προσέγγισης του ημιτόνου μιας γωνίας. Στην αρχή του έργου, υπάρχουν 6 υποθέσεις οι οποίες εξασφαλίζουν αριθμητικά δεδομένα στους υπολογισμούς και παραθέτονται ακολούθως:

α'. Τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν.

β'. Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν.

γ'.Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τό τε σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς σελήνης μέγιστον κύκλον.

δ'.Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ.

ε'. Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο.

στ'. Τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος ζῳδίου[6].

Οι υποθέσεις του, δεν είναι ακριβείς καθώς το πλάτος της γήινης σκιάς στο σημείο που χάνεται η πανσέληνος, κατά τις εκλείψεις της, είναι 2,55 φορές η διάμετρος της σελήνης και όχι μόνο 2 φορές. Επιπλέον η φαινόμενη διάμετρος της σελήνης είναι $30'$ και όχι 2^0 [7]. Παρόλα αυτά ο μαθηματικός συλλογισμός δεν χάνει τίποτα από την αξία του. Παρακάτω, καταγράφονται δύο ανισοτικά θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη από τον Αρίσταρχο. Το πρώτο θεώρημα είναι από τα *Οπτικά* του Ευκλείδη (βλέπε 1.1.2). Το δεύτερο θεώρημα με σύγχρονο συμβολισμό αναφέρει ότι αν $0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} < \frac{\theta}{\varphi}$. Η απόδειξη του, υπάρχει στο έργο του Πτολεμαίου, *Μέγιστη Σύνταξη* (βλέπε 1.1.7).

Ας επιστρέψουμε στην Πρόταση 7 η οποία αναφέρει:

Τὸ ἀπόστημα ὃ ἀπέχει ὁ ἥλιος ἀπὸ τῆς γῆς τοῦ ἀποστήματος οὗ ἀπέχει ἡ σελήνη ἀπὸ τῆς γῆς μεῖζον μέν ἐστιν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλάσιον, ἔλασσον δὲ ἢ εἰκοσαπλάσιον[8].

Σύγχρονος συμβολισμός

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΣ ($\Sigma = 90^0$) δοθεί η γωνία $H = 3^0$ να δειχθεί ότι

$$18\Gamma\Sigma < \Gamma H < 20\Gamma\Sigma.$$

Αρχικά αποδεικνύεται ότι $\Gamma H > 18\Gamma\Sigma$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

[6] Αρίσταρχος ο Σάμιος, *Περί μεγεθών και αποστημάτων*, Υποθέσεις 1-13.

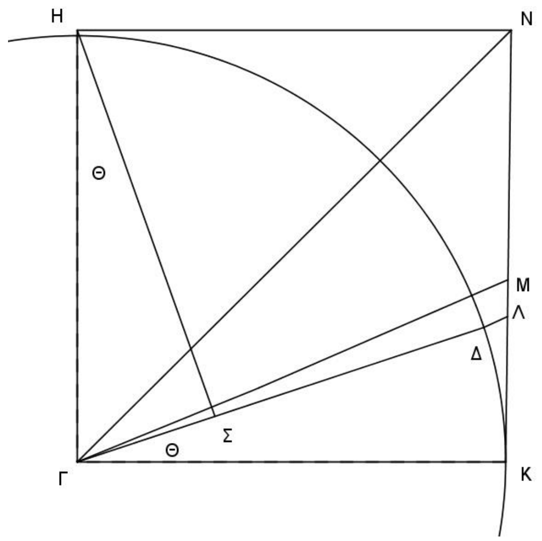
[7] Δ. Τσιμπουράκης, Η Τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα, Εκδόσεις Ατραπός, σελ. 110.

[8] Αρίσταρχος ο Σάμιος, *Περί μεγεθών και αποστημάτων*, 7, 1-3.

1. Φέρνοντας τον κύκλο (Γ, ΓΗ) και την $ΓΚ \perp ΓΗ$ σχηματίζεται το τετράγωνο ΓΗΚΝ. Προεκτείνοντας την ΓΣ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε το τόξο ΚΔ=3^0, διότι λόγω της Υπόθεσης 4, $\hat{Γ} = 87^0$. Φέρνοντας την ΓΝ προκύπτει $N\hat{Γ}K = N\hat{Γ}H = 45^0$.

2. Διχοτομώντας την γωνία $K\hat{Γ}N$ μέσω της ΓΜ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε από το πρώτο θεώρημα προκύπτει $\frac{KM}{KΛ} > \frac{K\hat{Γ}M}{K\hat{Γ}Λ}$ δηλαδή $\frac{KM}{KΛ} > \frac{15}{2}$ (1)

Όμως ΓΚ=ΚΝ και $ΓN^2 = ΓK^2 + KN^2$ συνεπώς $\frac{ΓN^2}{ΓK^2} = 2$ (2). Επιπλέον $\frac{MN}{MK} = \frac{ΓN}{ΓK}$ άρα λόγω της (2) $\frac{MN^2}{MK^2} = 2 = \frac{50}{25} > \frac{49}{25}$.

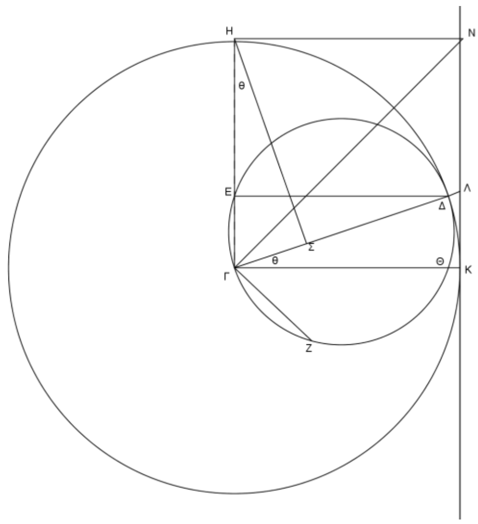


Έπεται ότι $\frac{MN}{MK} > \frac{7}{5}$, ισοδύναμα ότι $\frac{KN}{KM} > \frac{12}{5} = \frac{36}{15}$ (3). Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $KN > 18KΛ$ ισοδύναμα $ΓΛ > KΓ > 18KΛ$ (4). Από την ομοιότητα των τρίγωνων ΓΗΣ και ΓΚΛ έπεται $\frac{ΓΛ}{KΛ} = \frac{ΓH}{ΓΣ}$. Έτσι από την (4) $\frac{ΓH}{ΓΣ} > 18$.

Με σύγχρονη ορολογία αποδείχθηκε ότι $\sin 3^0 < \frac{1}{18}$.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι $ΓH < 20ΓΣ$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

1. Φέρνοντας τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΓΔΕ με διάμετρο ΓΔ και θεωρώντας την χορδή ΓΖ =πλευρά κανονικού εξαγώνου προκύπτει ότι $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} = 3^0$ συνεπώς το τόξο ΓΕ= 6^0 ενώ το τόξο ΓΖ= 60^0, δηλαδή $\Gamma\mathrm{Z} = 10\Gamma\mathrm{E}$.



2. Από το δεύτερο θεώρημα έπεται ότι $\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\mathrm{E}} < \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\mathrm{E}}$ δηλαδή $\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\mathrm{E}} < 10$. Όμως $\Gamma\mathrm{Z} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ άρα $\Gamma\Delta < 20\Gamma\mathrm{E}$ (5). Τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΓΗΣ είναι όμοια άρα $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\Gamma\mathrm{H}}{\Gamma\Sigma}$ και από τη (5) $\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\Gamma\Sigma} < 20$.

Με σύγχρονη ορολογία αποδείχθηκε ότι $\sin 3^0 > \frac{1}{20}$.

Η ανισοτική σχέση που αποδείχθηκε δίνει μια προσεγγιστική τιμή για τον τριγωνομετρικό αριθμό, $\frac{1}{20} < \sin 3^0 < \frac{1}{18}$.

1.1.4 ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) έχει διάφορα θεωρήματα περί χορδών, τα οποία με σύγχρονη ορολογία, ισοδυναμούν με γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας.

Α. Το θεώρημα της τεθλασμένης χορδής

Στο έργο του *Περί των επιψαυόντων κύκλων* στο Θεώρημα 14 διαβάζουμε:

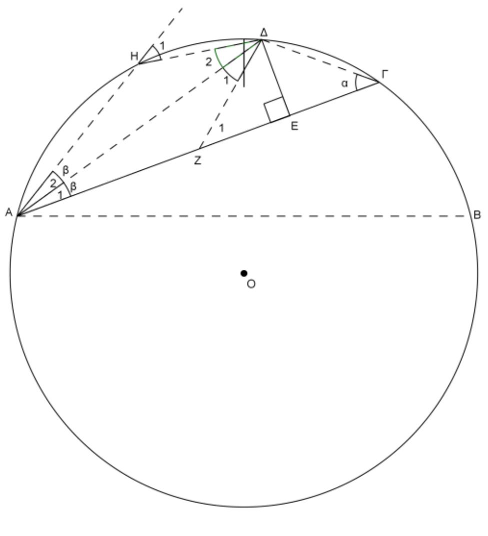
Ἔστω γὰρ τμᾶμα κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τὰς ΑΒ, λελάφθω δὲ ἐπὶ τὰς περιφερείας αὑτοῦ σαμεῖον τὶ τὸ Γ, καὶ ἐν τῷ τμάματι τοῦ κύκλου κεκλασμένα γράμμα ἃ ΑΓΒ καὶ ἔστω ἃ ΑΓ μείζων τὰς ΓΒ, μέσον δὲ περιφερείας τὰς ΑΒ τὸ Δ καὶ ἀπὸ σαμείου τοῦ Δ ἂχθω πότ' ὀρθὰς τὰ ΑΒ, ἃ ΔΕ δεικτέον, ὅτι ἃ ΑΕ συναμφοτέρῳ τὰ ΕΓ, ΓΒ ἴσα ἐστίν[9].

Ελεύθερη μετάφραση

Έστω τμήμα κύκλου με χορδή την ΑΒ. Φέρνουμε την τεθλασμένη γραμμή ΑΓΒ, της οποίας το σημείο Γ βρίσκεται επί της περιφέρειας του κύκλου. Έστω ότι $ΑΓ > ΓΒ$ και το σημείο Δ το μέσο του τόξου ΑΒ και από το Δ έστω ΔΕ η κάθετος προς την ΑΓ. Τότε ΑΕ= ΒΓ+ ΕΓ.

Απόδειξη

Χωρίζοντας το τόξο ΓΗ σε δύο μέρη ώστε ΔΗ=ΔΓ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και φέρνοντας τις ΑΗ, ΗΔ, ΔΑ προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 = \hat{β}$. Έστω τμήμα ΕΖ=ΕΓ , επί της ΑΕ και



το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ. Το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές άρα ΔΖ=ΔΓ=ΔΗ. Επιπλέον $\hat{α} = \hat{Ζ}_1 = \hat{β} + \hat{Δ}_1$ και $\hat{α} = \hat{Γ} = \hat{Η}_1 = \hat{β} + \hat{Δ}_2$. Από τις δύο τελευταίες έπεται ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΔΖ είναι ίσα άρα ΑΖ=ΑΗ. Ισχύει ότι ΑΗ=ΒΓ διότι $ΑΗ = ΒΓ$ (διαφορά ίσων τόξων). Συνεπώς ΑΖ=ΑΗ=ΒΓ από όπου έπεται

$$ΑΕ=ΑΖ+ΖΕ=ΒΓ+ΕΓ$$

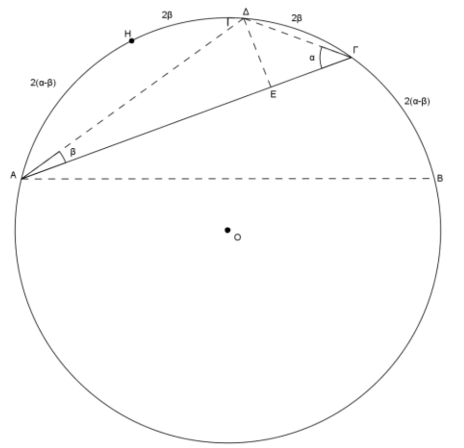
9 Αρχιμήδους Άπαντα, Τόμος Γ΄, Μετάφραση Ε. Σταμάτης, Έκδ. Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι, 1970, σελ. 152.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν οι τύποι του αθροίσματος και της διαφοράς γωνιών του ημιτόνου. Πιο συγκεκριμένα η σχέση ΑΕ=ΕΓ+ΓΒ από το παρακάτω σχήμα γράφεται ισοδύναμα

$$\mathrm{A\Delta}\cos\beta = \Delta\Gamma\cos\alpha + \text{χορδή}(2\alpha - 2\beta) \text{ άρα}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\beta\cos\alpha + 2\sin(\alpha-\beta)$$

δηλαδή ο τύπος $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.



Με όμοιο τρόπο προκύπτει και ο τύπος του αθροίσματος.

Β. Υπολογισμός μήκους κύκλου

Στο έργο του *κύκλου μέτρησις* διαβάζουμε:

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις[10].

Σύγχρονος συμβολισμός

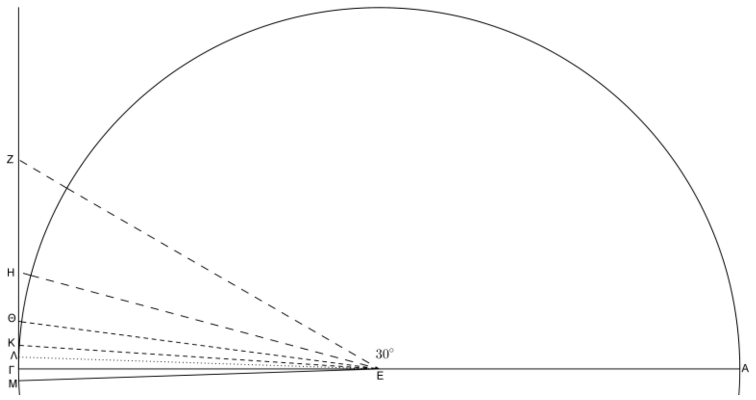
$3\frac{10}{71}\delta < \Gamma < 3\frac{1}{7}\delta$.

Αρχικά αποδεικνύεται ότι $\Gamma < \Pi_{96} < 3\frac{1}{7}\delta$ όπου Π_{96} είναι η περίμετρος του κανονικού περιγραμμένου 96-γώνου. Τα βήματα της απόδειξης είναι τα ακόλουθα:

1. Ισχύει χωρίς απόδειξη ότι $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.

[10] Αρχιμήδης, *Κύκλου μέτρησης*, 1. 140, 9-11.

2. Έστω ο κύκλος του παρακάτω σχήματος, ΓΖ η εφαπτομένη του στο Γ και $Z\hat{E}\Gamma = \frac{1}{3}L$ η οποία διχοτομείται τέσσερις φορές.



3. Ισχύει προφανώς ότι $\frac{\Gamma E}{\Gamma Z} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ και $\frac{ZE}{\Gamma Z} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$.

4. Στη συνέχεια με χρήση Ευκλείδειων θεωρημάτων υπολογίζονται οι λόγοι

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H}, \frac{\Gamma E}{\Theta\Gamma}, \frac{\Gamma E}{K\Gamma}, \frac{\Gamma E}{\Lambda\Gamma}$$

Αρχικά για τον $\frac{\Gamma E}{\Gamma H}$, φέρνουμε την διχοτόμο ΕΗ της $Z\hat{E}\Gamma$.

Ισχύει ότι $\frac{EZ}{\Gamma E} = \frac{ZH}{\Gamma H}$ ισοδύναμα $\frac{EZ + \Gamma E}{\Gamma Z} = \frac{\Gamma E}{\Gamma H}$. Άρα $\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{EZ}{\Gamma Z} + \frac{\Gamma E}{\Gamma Z} > \frac{306}{153} + \frac{265}{153}$ και τελικά

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} > \frac{571}{153} \quad (1)$$

Για τον προσδιορισμό του λόγου $\frac{\Gamma E}{\Theta\Gamma}$, ισχύει

$$\frac{EH^2}{\Gamma H^2} = \frac{\Gamma E^2 + \Gamma H^2}{\Gamma H^2} > \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 \text{ δηλαδή } \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} \quad (2)$$

Φέρνοντας την διχοτόμο ΕΘ της $\Gamma\hat{E}H$ προκύπτει ότι $\frac{\Gamma E}{EH} = \frac{\Theta\Gamma}{\Theta H}$ ισοδύναμα $\frac{EH + \Gamma E}{\Gamma H} = \frac{\Gamma E}{\Gamma\Theta}$. Άρα λόγω των (1), (2) $\frac{\Gamma E}{\Gamma\Theta} = \frac{EH}{\Gamma H} + \frac{\Gamma E}{\Gamma H} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$. Έπειτα με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω προκύπτει ότι $\frac{\Theta E}{\Theta\Gamma} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$. Έπειτα διχοτομώντας την $\Theta\hat{E}\Gamma$ μέσω της ΕΚ και την $K\hat{E}\Gamma$ μέσω της ΕΛ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογίζονται διαδοχικά οι λόγοι

$$\frac{\Gamma E}{K\Gamma} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},\ \frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} \text{ και τέλος } \frac{\Gamma E}{\Lambda\Gamma} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

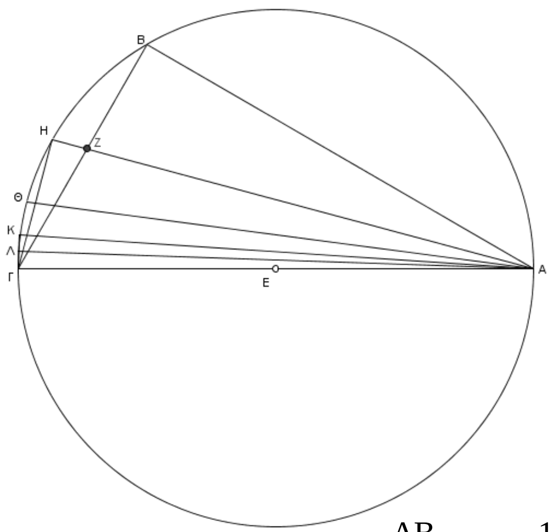
5. Ισχύει ότι $\Lambda\hat{E}\Gamma = \frac{1}{48}L$ άρα $\Lambda\hat{E}M = 2\Lambda\hat{E}\Gamma = \frac{1}{24}L$ συνεπώς η ΛΜ είναι πλευρά του κανονικού περιγραμμένου 96-γώνου. Ισχύει ότι $\Gamma < \Pi_{96}$ συνεπώς

$$\frac{\Gamma}{2R} < \frac{\Pi_{96}}{2R} = \frac{96(\Lambda M)}{2E\Gamma} = \frac{96(2\Lambda\Gamma)}{2E\Gamma} = 96\frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma E} < 3\frac{1}{7}$$

από όπου προκύπτει $\Gamma < \Pi_{96} < 3\frac{1}{7}\delta$.

Έπειτα αποδεικνύεται ότι $3\frac{10}{71}\delta < \Pi'_{96} < \Gamma$ όπου Π'_{96}, είναι η περίμετρος του εγγεγραμμένου 96-γώνου. Τα βήματα της απόδειξης είναι τα ακόλουθα:

1. Έστω ο κύκλος του παρακάτω σχήματος και $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{3}L$, η οποία διχοτομείται τέσσερις φορές.



2. Ισχύουν οι σχέσεις $\frac{AB}{B\Gamma} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1560}{780}$.

3. Στη συνέχεια με χρήση Ευκλείδειων θεωρημάτων υπολογίζονται οι λόγοι

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΗ}},\ \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΘ}},\ \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΓ}},\ \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΛ}}$$

Για τον $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΗ}}$, φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΗ της $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$. Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΗΓΖ είναι όμοια ($\hat{\text{Η}} = \hat{\text{Β}} = 1\text{L}$, $\text{Η}\hat{\text{Γ}}\text{Ζ} = \text{Η}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$) άρα

$$\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΗΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}}$$

Από το θεώρημα των διχοτόμων ισχύει $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΒΖ}}$ ισοδύναμα $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$. Συνεπώς $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} + \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{1351}{780} + 2$ δηλαδή $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} < \frac{2911}{780}$ (1)

Έπειτα $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΓΗ}^2} = \frac{\text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΓ}^2}{\text{ΗΓ}^2} = \left(\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}}\right)^2 + 1$ άρα λόγω της (1) $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΗ}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$. Φέρνοντας τις διχοτόμους ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ των $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$, $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Θ}$, $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Κ}$, με όμοιο τρόπο υπολογίζονται διαδοχικά οι λόγοι και προκύπτει ότι $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{1823}{240}$, $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΘ}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$, $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{1007}{66}$, $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$, $\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΓΛ}} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$, $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΛ}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$.

4. Ισχύει ότι $\text{Λ}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \frac{1}{48}\text{L}$ άρα η ΛΓ είναι πλευρά του κανονικού εγγεγραμμένου 96-γώνου οπότε

$$\Gamma > \Pi'_{96} \text{ άρα } \frac{\Gamma}{2R} > \frac{\Pi'_{96}}{2R} = \frac{96(\text{ΛΓ})}{2R} > 96\frac{\text{ΛΓ}}{\text{ΑΓ}} > 3\frac{10}{71}.$$

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη υπολογίστηκαν οι λόγοι των καθέτων πλευρών, με σύγχρονη ορολογία, η εφαπτομένη των γωνιών 15^0, $7,5^0$, $3,75^0$, $1,875^0$ καθώς επίσης και οι λόγοι των καθέτων πλευρών προς τις υποτείνουσες, με σύγχρονη ορολογία, το ημίτονο των ίδιων γωνιών.

1.1.5 ΙΠΠΑΡΧΟΣ Ο ΡΟΔΙΟΣ

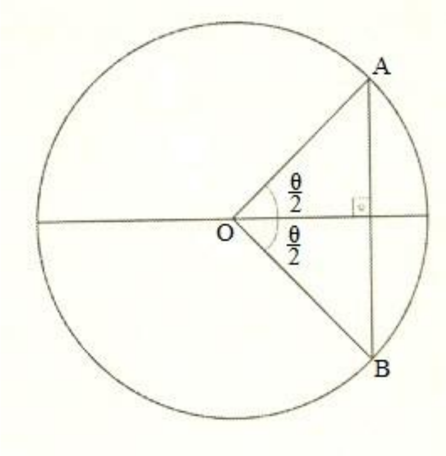
Από τα έργα του Ίππαρχου (180-125 π.Χ. ~) διασώθηκαν μόνο δύο, *Των Αράτου και Ευδόξου φαινομένων εξηγήσεως βιβλία γ΄* και οι *Αστερισμοί,* για αυτό δεν είναι γνωστή η ακριβής μορφή που είχε η Τριγωνομετρία του. Πληροφορίες για το έργο του, προκύπτουν από μεταγενέστερους συγγραφείς. Λόγου χάρη ο Θέων ο Αλεξανδρεύς αναφέρεται στον Ίππαρχο στα Υπομνήματα επί της *Μέγιστης Σύνταξης* του Πτολεμαίου. Σύμφωνα με την παραπάνω μαρτυρία ο Ίππαρχος ήταν ο συγγραφέας του έργου με τίτλο, *Περί των εν κύκλω ευθειών,* αποτελούμενο από 12 βιβλία. Σε αυτό, υπάρχει ένας πίνακας χορδών, κάτι που επαληθεύεται από τον Πτολεμαίο σε πολλά σημεία της *Μέγιστης Σύνταξης*. Επίσης στην *Μέγιστη Σύνταξη* γίνεται αναφορά στην περίφημη ανακάλυψη του Ιππάρχου, γνωστή με τον όρο μετάπτωση των Ισημεριών. Εν κατακλείδι, με βάση τις μαρτυρίες μεταγενέστερων συγγραφέων, ο Ίππαρχος υπήρξε ο θεμελιωτής της Τριγωνομετρίας[11].

1.1.6 ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ

Για τον Πτολεμαίο (~100 μ.Χ. ~170 μ.Χ.) δεν σώζονται βιογραφικά στοιχεία, αλλά σώζονται σημαντικά έργα του, όπως η λεγόμενη *Μέγιστη Σύνταξη* την οποία οι αρχαίοι αστρονόμοι αποκαλούσαν έτσι, προς διάκριση από άλλα μικρότερου ενδιαφέροντος αστρονομικά έργα. Όταν οι Άραβες μετέφρασαν το έργο διατήρησαν παραφθαρμένη την ονομασία “μεγίστη” η οποία με το αραβικό άρθρο “αλ” έδωσε στο έργο τον τίτλο Αλμαγέστη. Πρόκειται για ένα σημαντικό έργο μαθηματικής αστρονομίας το οποίο στα 13 βιβλία του, αποτελεί μια συστηματοποίηση των τότε αστρονομικών γνώσεων. Επίσης η Αλμαγέστη παρέχει πληροφορίες για τα έργα προηγούμενων αστρονόμων (Εύδοξος, Αρίσταρχος, Απολλώνιος, Ίππαρχος), τα οποία δεν σώζονται. Σε πολλά σημεία του έργου του, ο Πτολεμαίος ακολουθεί και βελτιώνει τον Ίππαρχο. Στο 1^o βιβλίο που περιέχει Μαθηματικά, η Τριγωνομετρία εμφανίζεται ως ένα βοηθητικό όργανο αστρονομικών υπολογισμών. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζεται ένας πίνακας που περιέχει τα μήκη των χορδών όλων των κυκλικών τόξων από $\frac{1}{2}^o$ ανά μισή μοίρα έως τις 180^o. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα

[11] Γ. Ν. Βρατσάνος, Αρχαία Ελληνική Τριγωνομετρία, Εκδόσεις Δίαυλος, 2006, σελ. 30.

πίνακα ημιτόνων για τόξα από $\frac{1}{4}^{o}$ ανά $\frac{1}{4}$ της μοίρας έως τις 90^{o}, αφού από το σχήμα διαπιστώνεται ότι



χορδή(θ)=AB=$2\sin\frac{\theta}{2}$. Παρακάτω καταγράφονται τα βήματα κατάρτισης του πίνακα χορδών. Ως μονάδα μέτρησης των χορδών χρησιμοποιείται η ακτίνα του κύκλου (η περιφέρεια του οποίου υποδιαιρείται σε 360 μέρη) και τα μήκη των χορδών εκφράζονται στο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης. Έτσι διαιρείται η ακτίνα σε 60 μέρη (τ), κάθε τμήμα σε 60 πρώτα (΄) και κάθε πρώτο σε 60 δεύτερα (΄΄).

1. Όπως είναι φυσικό, η αρχή έγινε με τις χορδές εκείνες που είναι πλευρές κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων στον κύκλο, τα μήκη των οποίων υπολογίζονται με γνωστό τρόπο από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ειδικότερα ήταν γνωστές οι χορδές του ισοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου, κανονικού πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου.

2. Το Θεώρημα του Πτολεμαίου

ἔστω γὰρ κύκλος ἐγγεγραμμένον ἔχων τετράπλευρον τυχὸν τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ. δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ[12].

Ελεύθερη μετάφραση

Έστω κύκλος και το τυχαίο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και ας ενωθούν οι ΑΓ και ΒΔ, να δειχθεί ότι το ορθογώνιο $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}$ είναι ίσο με το άθροισμα των ορθογωνίων $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$.

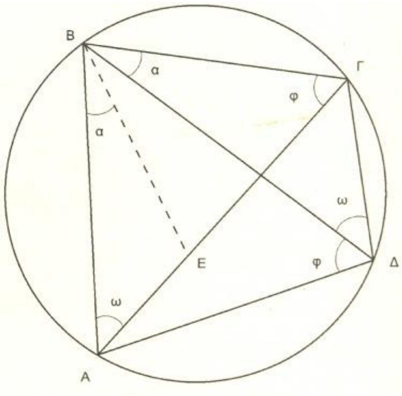
[12] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.36, 13-17.

Απόδειξη

Έστω ΒΕ τέτοιο ώστε $\hat{\text{ΑΒΕ}} = \hat{\text{ΓΒΔ}}$=α. Εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΕΓ είναι όμοια άρα $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}}$ δηλαδή $\text{ΒΓ}\cdot\text{ΔΑ} = \text{ΒΔ}\cdot\text{ΓΕ}$ (1)

Επίσης και τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΔ είναι όμοια άρα $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}$ δηλαδή $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΔΓ} = \text{ΒΔ}\cdot\text{ΑΕ}$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση έπεται το ζητούμενο.



3. Για την χορδή της διαφοράς δύο τόξων αναφέρεται ότι:

ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓΔ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α δύο διήχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἔστω ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα τῷ μεγέθει, οἵων ἡ διάμετρος δοθεῖσα ρκ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι καὶ αὕτη δέδοται[13].

Ελεύθερη μετάφραση

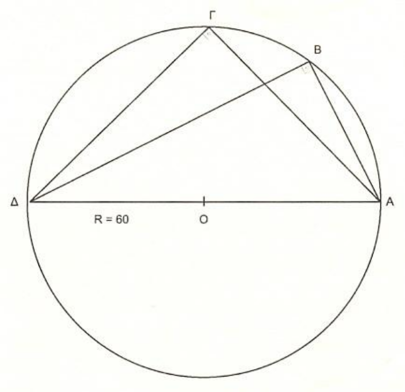
Έστω το ημικύκλιο ΑΒΓΔ με διάμετρο ΑΔ, και από το Α φέρνουμε τις ΑΒ, ΑΓ των οποίων γνωρίζουμε το μήκος και η διάμετρος δίνεται δ=120, αν ενώσουμε τη ΒΓ τότε και αυτή είναι γνωστή.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα, υποθέτοντας ότι η πλευρά ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου προκύπτει

$$\text{ΒΓ}\cdot\text{ΔΑ} + \text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ} = \text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}$$

από όπου υπολογίζεται η ΒΓ, καθώς οι ΒΔ και ΓΔ είναι γνωστές λόγω του Πυθαγορείου θεωρήματος.



Αν $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β} = \theta$ και $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} = \varphi$, η προηγούμενη ισότητα με σύγχρονα σύμβολα παίρνει τη μορφή

$$2\text{R}\sin(\varphi-\theta)\cdot 2\text{R} + 2\text{R}\sin\theta\cdot 2\text{R}\cos\varphi = 2\text{R}\sin\varphi\cdot 2\text{R}\cos\theta \text{ δηλαδή}$$

$$\sin(\varphi-\theta) = \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta$$

---

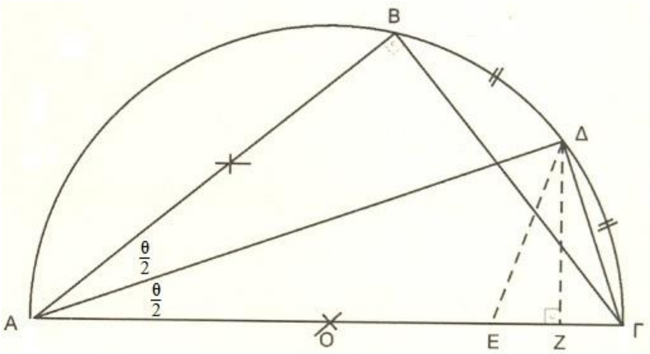
[13] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.37, 19-20, 1.38, 1-3.

4. *πάλιν προκείσθω δοθείσης τινὸς εὐθείας ἐν κύκλῳ τὴν ὑπὸ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινομένης περιφερείας εὐθεῖαν εὑρεῖν*[14].

Ελεύθερη μετάφραση

Εαν δοθεί η τιμή μιας χορδής σε κύκλο, να βρεθεί η χορδή του μισού τόξου.

Απόδειξη



Έστω ΒΓ η γνωστή χορδή, ΑΓ η διάμετρος και τμήμα ΑΕ=ΑΒ. Αφού Δ το μέσο του τόξου ΒΓ τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα, άρα ΔΕ=ΒΔ=ΔΓ. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές και αφού το ΔΖ είναι ύψος του, τότε το Ζ είναι μέσο του ΕΓ. Άρα θα είναι

$$Z\Gamma = \frac{A\Gamma - AE}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} \quad (1)$$

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ ισχύει ότι

$$\Delta\Gamma^2 = Z\Gamma \cdot \Gamma A \ (2)$$

Από (1), (2) έπεται ότι

$$\Delta\Gamma^2 = \frac{A\Gamma - AB}{2} \cdot \Gamma A$$

Με σύγχρονα σύμβολα ο τύπος αυτός ερμηνεύεται ως ο τύπος της μισής γωνίας δηλαδή $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$. Έτσι, γνωρίζοντας την χορδή τόξου 72^o (πλευρά κανονικού πενταγώνου) και την χορδή τόξου 60^o (πλευρά κανονικού εξαγώνου), υπολογίζεται με τους παραπάνω τύπους, η χορδή τόξου $12^o = 72^o - 60^o$ και εν συνεχεία οι χορδές τόξων 6^o, 3^o, $\frac{3^o}{2}$, $\frac{3^o}{4}$.

5. *πάλιν ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ διάμετρον μὲν τὴν ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἀπειλήφθωσαν δύο περιφέρειαι δοθεῖσαι κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν*

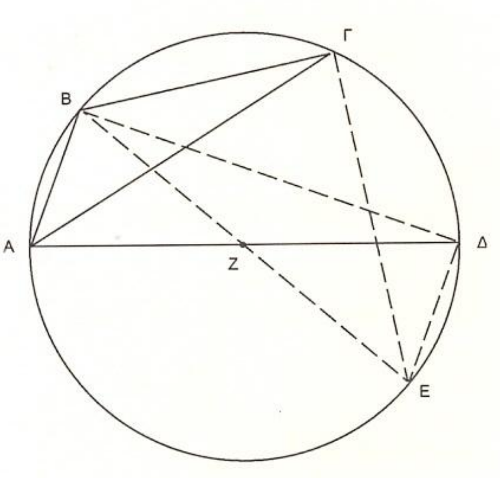
[14] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.39, 4-6.

αἱ ΑΒ, ΒΓ ὑπ' αὐτὰς εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ δεδομέναι. λέγω, ὅτι, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΓ, δοθήσεται καὶ αὐτή[15].

Ελεύθερη μετάφραση

Έστω κύκλος ΑΒΓΔ με διάμετρο ΑΔ και κέντρο Ζ, εάν δοθούν οι τιμές των χορδών δύο τόξων ΑΒ και ΒΓ, τότε μπορεί να υπολογιστεί η χορδή του αθροίσματος ΑΓ.

Απόδειξη



Φέρνοντας τις ΒΕ, ΒΔ, ΓΕ τότε μέσω του Πυθαγορείου θεωρήματος υπολογίζονται οι ΒΔ, ΓΕ, ΔΕ. Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο ΒΓΔΕ έπεται

$$\Gamma\Delta \cdot \mathrm{BE} + \mathrm{B}\Gamma \cdot \Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta \cdot \Gamma\mathrm{E}$$

από την οποία υπολογίζεται η ΓΔ. Τέλος η ζητούμενη χορδή ΑΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ.

Με σύγχρονα σύμβολα το προηγούμενο ισοδυναμεί με τον τύπο του αθροίσματος

$$\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta$$

Με τον τύπο του αθροίσματος χορδών, υπολογίζονται οι χορδές από $1,5^{o}$ ανά $1,5^{o}$.

Η εύρεση των χορδών ανά $\frac{1}{2}^{o}$ προκύπτει από το επόμενο θεώρημα.

6. *ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ἐλάσσων μὲν ἡ ΑΒ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΑ εὐθεῖαν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΑ περιφέρειαν*[16].

Ελεύθερη μετάφραση

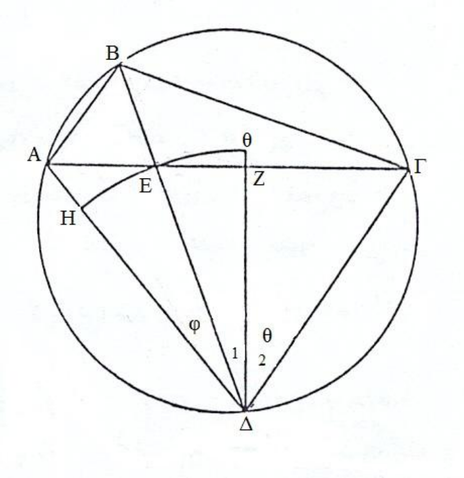
Έστω κύκλος ΑΒΓΔ, και ας αχθούν σε αυτόν δύο άνισες χορδές, η μικρότερη ΑΒ και η μεγαλύτερη ΒΓ. Τότε ο λόγος των χορδών είναι μικρότερος του λόγου των τόξων τους, δηλαδή $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BA}} < \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{BA}}$.

[15] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.41, 4-9.
[16] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.43, 10-16.

Σύγχρονος συμβολισμός

Αν $0<\varphi<\theta<\frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}<\frac{\theta}{\varphi}$ καθώς $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{\frac{1}{2}\chi o\rho\delta\eta 2\theta}{\frac{1}{2}\chi o\rho\delta\eta 2\varphi}<\frac{2\theta}{2\varphi}$

Απόδειξη



Φέρνοντας την διχοτόμο ΒΔ της $\hat{B}$ και τη $\Delta Z \perp A\Gamma$ έπεται ότι ΓΖ=ΑΖ και $\theta_2=\varphi+\theta_1$. Φέρνοντας το τόξο ΗΕΘ με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΕ προκύπτει ότι τριγ$\Delta EZ<$τομέα$\Delta E\Theta$ και τριγ$AE\Delta>$τομέαΔHE άρα

$$\frac{\tau\rho\iota\gamma\ \Delta EZ}{\tau\rho\iota\gamma\ AE\Delta}<\frac{\tau o\mu\varepsilon\alpha\ \Delta E\Theta}{\tau o\mu\varepsilon\alpha\ \Delta HE}$$

από την οποία έπεται ότι $\frac{EZ}{AE}<\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\varphi}}$. Από αυτή συνεπάγεται ότι $\frac{ZE+EA}{EA}<\frac{\theta_1+\varphi}{\varphi}$ ισοδύναμα $\frac{2AZ}{EA}<\frac{2\,A\hat{\Delta}Z}{\hat{\varphi}}$. Δηλαδή

$$\frac{\Gamma A}{EA}<\frac{A\hat{\Delta}\Gamma}{\hat{\varphi}} \text{ άρα } \frac{\Gamma A-EA}{EA}<\frac{A\hat{\Delta}\Gamma-\varphi}{\hat{\varphi}}$$

Συνεπώς
$$\frac{\Gamma E}{EA}<\frac{\hat{\theta}}{\hat{\varphi}} \quad (1)$$

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΓ έπεται ότι

$$\frac{\Gamma E}{AE}=\frac{B\Gamma}{AB} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{B\Gamma}{AB}<\frac{\hat{\theta}}{\hat{\varphi}}$.

7. Η εφαρμογή του τελευταίου θεωρήματος στα τόξα 1^o και $\frac{3^o}{4}$ δίνει τη σχέση $\chi o\rho\delta\acute{\eta}1^o<\frac{4}{3}\chi o\rho\delta\acute{\eta}\frac{3^o}{4}$. Όμοια από την $1^o<\frac{3^o}{2}$ έπεται ότι $\frac{2}{3}\chi o\rho\delta\acute{\eta}\frac{3^o}{2}<\chi o\rho\delta\acute{\eta}1^o$.

Έτσι προκύπτει ότι $\frac{2}{3}\text{χορδή}\frac{3^{\circ}}{2} < \text{χορδή}1^{\circ} < \frac{4}{3}\text{χορδή}\frac{3^{\circ}}{4}$. Όμως ο Πτολεμαίος είχε υπολογίσει ότι σε κύκλο ακτίνας 60 μονάδων, με προσέγγιση καλύτερης από $\frac{1}{60^2}$ ισχύει $\text{χορδή}\frac{3^{\circ}}{2} = 1 + \frac{34}{60} + \frac{15}{60^2}$ και $\text{χορδή}\frac{3^{\circ}}{4} = 0 + \frac{47}{60} + \frac{8}{60^2}$. Από την προηγούμενη ανισότητα λοιπόν έπεται ότι με ακρίβεια 4 εξηκονταδικών ψηφίων ισχύει

$$1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} < \text{χορδή}1^{\circ} < 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$$

Συνεπώς $\text{χορδή}1^{\circ} = 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$.

Για τον υπολογισμό της $\text{χορδής}\frac{1^{\circ}}{2}$ φαίνεται ότι ταύτισε τη $\text{χορδή}\frac{1^{\circ}}{2}$ με την $\frac{1}{2}\text{χορδή}1^{\circ}$.

8. Τελικά ο Πτολεμαίος με χρήση των παραπάνω κατάρτισε τον πίνακα χορδών του, τμήμα του οποίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δύο πρώτες στήλες περιέχουν τις τιμές των τόξων από $\frac{1^{\circ}}{2}$ μεταβαλλόμενες ανά μισή μοίρα.

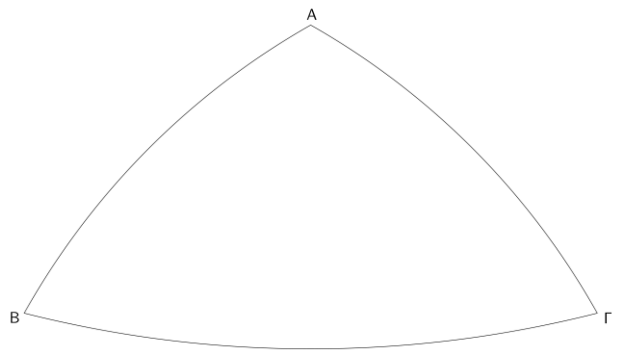
ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΟΡΔΩΝ ΚΥΚΛΟΥ

ΤΟΞΑ		ΧΟΡΔΕΣ			ΠΡΩΤΑ ΛΕΠΤΑ			
ΜΟΙΡΕΣ	ΠΡΩΤΑ	ΜΟΝΑΔ.	ΠΡΩΤΑ	ΔΕΥΤΕΡ.	ΜΟΝΑΔ.	ΠΡΩΤΑ	ΔΕΥΤΕΡ.	ΤΡΙΤΑ
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	27
13	0	13	35	4	0	1	2	25
13	30	14	6	16	0	1	2	23
14	0	14	37	27	0	1	2	21
14	30	15	8	38	0	1	2	19
15	0	15	39	47	0	1	2	17
15	30	16	10	56	0	1	2	15
16	0	16	42	3	0	1	2	13
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	7
17	30	18	15	17	0	1	2	5
18	0	18	46	19	0	1	2	2
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	57
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	51
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	45
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	53	49	0	1	1	39
22	30	23	24	39	0	1	1	36

Οι τρείς επόμενες έχουν τα μήκη των χορδών σε κύκλο ακτίνας 60 μονάδων. Οι τελευταίες τέσσερις στήλες έχουν το $\frac{1}{30}$ της διαφοράς δύο διαδοχικών γραμμών. Σκοπός είναι να χρησιμοποιηθούν οι τιμές αυτές για γραμμική παρεμβολή στα ενδιάμεσα σημεία του πίνακα.

1.1.7 ΜΕΝΕΛΑΟΣ

Ο Μενέλαος ήταν μαθηματικός και αστρονόμος ο οποίος έδρασε κυρίως στην Αλεξάνδρεια στα τέλη του 1ου αιώνα μ.Χ. Μελέτησε την Τριγωνομετρία ως αυτόνομο κλάδο των Μαθηματικών και θεωρείται ο πατέρας της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Το σημαντικότερο έργο του έχει τον τίτλο *Σφαιρικά.* Αυτό όπως και κανένα άλλο έργο του δεν σώζεται στο ελληνικό πρωτότυπο αλλά υπάρχει στα αραβικά από όπου λατινικές μεταφράσεις του σώζονται. Τα *Σφαιρικά* αποτελούνται από τρία βιβλία εκ των οποίων το πιο σημαντικό είναι το $3^{ο}$. Στο $1^{ο}$ βιβλίο, ορίζεται το σφαιρικό τρίγωνο (διπλανό σχήμα), ως το χωρίο που περικλείεται από τρεις μέγιστους κύκλους της σφαίρας με την προϋπόθεση ότι οι πλευρές του τριγώνου είναι μικρότερες του ημικυκλίου. Επιπλέον, ορίζεται η γωνία του σφαιρικού τριγώνου ως η γωνία που σχηματίζεται από τα επίπεδα στα οποία ανήκουν οι πλευρές της. Μετά τους ορισμούς αποδεικνύονται διάφορες ιδιότητες των σφαιρικών τριγώνων όπου διαπιστώνεται η αντιστοιχία αλλά και οι διαφορές με τις ιδιότητες των επίπεδων τριγώνων. Στο $2^{ο}$ βιβλίο υπάρχουν προτάσεις που αφορούν την αστρονομία. Στο $3^{ο}$ βιβλίο των *Σφαιρικών* αποδεικνύεται το γνωστό σήμερα ως Θεώρημα του Μενελάου για σφαιρικά τρίγωνα. Για αυτό χρησιμοποιούνται δύο βοηθητικά θεωρήματα οι αποδείξεις των οποίων υπάρχουν στη *Μέγιστη Σύνταξη* του Πτολεμαίου, και οι οποίες καταγράφονται παρακάτω.



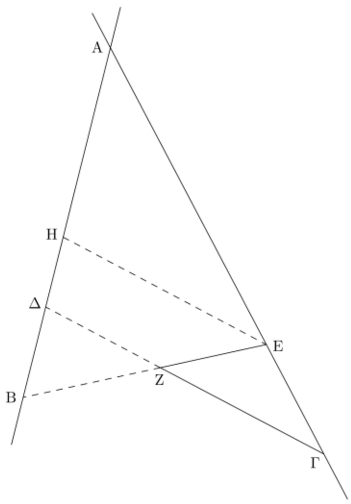
Θεώρημα 1

εἰς δύο δὴ εὐθείας τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ διαχθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἥ τε ΒΕ καὶ ἡ ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. λέγω, ὅτι ὁ τῆς ΓΑ πρὸς ΑΕ λόγος συνῆπται τε τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΖ καὶ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΒΕ[17].

Σύγχρονος συμβολισμός

Αν σε ένα τρίγωνο ΓΕΖ η ευθεία ΒΔΑ είναι εξωτερική διατέμνουσα όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}\cdot\frac{ZB}{BE}\cdot\frac{EA}{A\Gamma}=1$.

Απόδειξη



Φέρνοντας $HE//\Gamma\Delta$, τότε από τα όμοια τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΔΓ προκύπτει

$$\frac{\Gamma A}{AE}=\frac{\Gamma\Delta}{EH}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}\cdot\frac{\Delta Z}{EH} \quad (1)$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΒΔΖ και ΒΗΕ προκύπτει $\frac{\Delta Z}{EH}=\frac{ZB}{BE}$ (2)

Από τις (1) και (2) έπεται $\frac{\Gamma A}{AE}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}\cdot\frac{ZB}{BE}$ ισοδύναμα $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}\cdot\frac{ZB}{BE}\cdot\frac{EA}{A\Gamma}=1$.

Αν η διατέμνουσα είναι εσωτερική τότε η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με όμοιο τρόπο.

Θεώρημα 2

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τυχόντα τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ὥστε ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιφερειῶν ἐλάσσονα εἶναι ἡμικυκλίου· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς δὲ λαμβανομένων περιφερειῶν τὸ ὅμοιον ὑπακουέσθω· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΔΕΒ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΑΒ περιφερείας πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΒΓ, οὕτως[18].

---

[17] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.1, 68, 23.

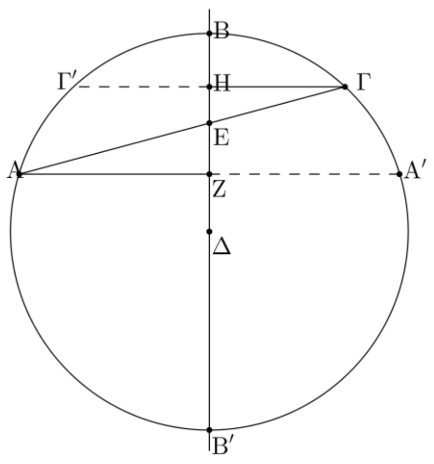
[18] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.1, 70, 17-25 και 1.1, 71, 1-3.

Σύγχρονος συμβολισμός

Αν η ευθεία ΒΔΒ΄ είναι εσωτερική διατέμνουσα του κυκλικού τμήματος ΑΒΓΑ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{B\Gamma}}$.

Απόδειξη

Φέρνοντας τις κάθετες ΑΖ και ΓΗ προς την ΔΒ,



τότε από τα όμοια τρίγωνα ΑΖΕ και ΕΗΓ προκύπτει

$$\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{\Gamma H}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}} \quad (1)$$

Με σύγχρονη ορολογία

$$\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{\Gamma H}}=\frac{2\mathrm{AZ}}{2\mathrm{\Gamma H}}=\frac{\chi o\rho\delta\acute{\eta}\mathrm{AA}'}{\chi o\rho\delta\acute{\eta}\mathrm{\Gamma\Gamma}'}=\frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{B\Gamma}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{B\Gamma}}$.

Αν η διατέμνουσα είναι εξωτερική το θεώρημα αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο

Θεώρημα Μενελάου

ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας μεγίστων κύκλων περιφέρειαι, ὥστε εἰς δύο τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ δύο γραφείσας τὰς ΒΕ καὶ ΓΔ τέμνειν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· ἔστω δὲ ἑκάστη αὐτῶν ἐλάσσων ἡμικυκλίου· τὸ δὲ αὐτὸ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν καταγραφῶν ὑπακουέσθω. λέγω δή, ὅτι ὁ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΓΕ περιφερείας πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΕΑ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΖΔ καὶ τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΒΑ[19].

Σύγχρονος συμβολισμός

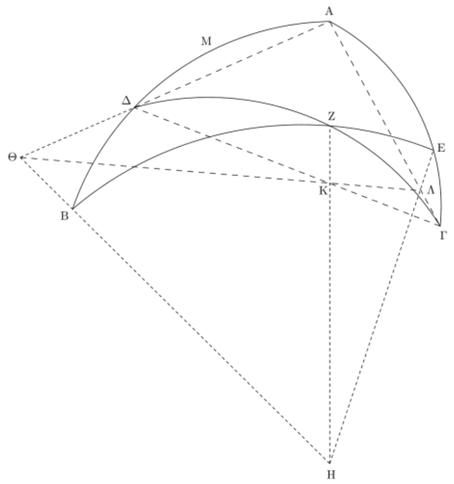
Έστω ΓΑΔ ένα σφαιρικό τρίγωνο και ΒΖΕ ένας διατέμνων μέγιστος κύκλος. Τότε

$$\frac{\sin \mathrm{\Gamma Z}}{\sin \mathrm{Z\Delta}}\cdot\frac{\sin \mathrm{\Delta B}}{\sin \mathrm{BA}}\cdot\frac{\sin \mathrm{AE}}{\sin \mathrm{E\Gamma}}=1$$

[19] Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*, 1.1, 74, 9-19.

Απόδειξη

Έστω Η το κέντρο της σφαίρας και ΗΒ, ΗΖ και ΗΕ, τα τμήματα που άγονται από αυτό. Οι ΑΔ και ΗΒ ως βρισκόμενες στο ίδιο επίπεδο του τόξου ΑΔΒ, τέμνονται έστω στο Θ. Οι ΗΕ και ΑΓ τέμνονται στο Λ και οι ΗΖ, ΔΓ στο Κ. Τα σημεία Θ, Κ, Λ είναι συνευθειακά γιατί βρίσκονται συγχρόνως στο επίπεδο του τόξου ΒΖΕ και του τριγώνου ΑΓΔ. Από το Θεώρημα 1 στο τρίγωνο ΑΓΔ με διατέμνουσα την ΘΚΛ προκύπτει



$$\frac{\Gamma K}{K\Delta}\cdot\frac{\Delta\Theta}{\Theta A}\cdot\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}=1 \ (3)$$

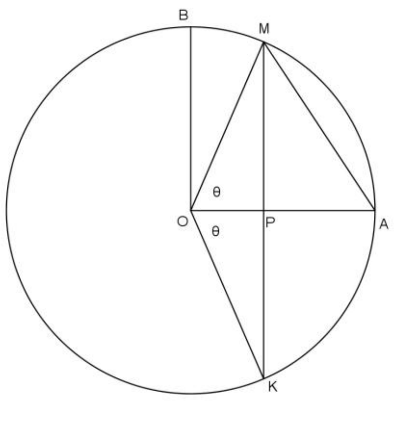
Από το Θεώρημα 2 με σύγχρονη γλώσσα προκύπτει $\frac{\Gamma K}{K\Delta}=\frac{\sin\Gamma Z}{\sin Z\Delta}$, $\frac{\Delta\Theta}{\Theta A}=\frac{\sin\Delta B}{\sin BA}$

και $\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}=\frac{\sin AE}{\sin E\Gamma}$ και από την (3) προκύπτει $\frac{\sin\Gamma Z}{\sin Z\Delta}\cdot\frac{\sin\Delta B}{\sin BA}\cdot\frac{\sin AE}{\sin E\Gamma}=1$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται το θεώρημα αν ο διατέμνων μέγιστος κύκλος είναι εξωτερικός.

1.2 ΙΝΔΙΑ

Οι πηγές από τις οποίες αντλούμε πληροφορίες για την Τριγωνομετρία των Ινδών είναι η *Paulisa Siddhanta*, η *Surya Siddhanta*, και η *Aryabhatiya*. Τα δύο πρώτα αποτελούν τμήματα μιας σειράς έργων με τίτλο *Siddhantas* που σημαίνει σύστημα, τα οποία σχετίζονται με την αστρονομία[20]. Η Τριγωνομετρία γνώρισε στα χέρια των Ινδών μια σημαντική αλλαγή. Πιο συγκεκριμένα για τους αστρονομικούς υπολογισμούς τους, κάνουν χρήση της μισής χορδής ΜΡ του διπλάσιου τόξου ΜΚ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αντί της χορδής του τόξου ΑΜ που χρησιμοποιούσαν έως τότε οι



[20] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 231.

Αρχαίοι Έλληνες. Επίσης χρησιμοποιούν το τμήμα ΟΡ (συνημίτονο) και το ΡΑ (παρημίτονο)[21].

Παρακάτω παρατίθενται αποσπάσματα από τα παραπάνω έργα που σχετίζονται με την Τριγωνομετρία.

1.2.1 PAULISA SIDDHANTA

Σύμφωνα με τον Άραβα μελετητή Al Biruni η *Paulisa Siddhanta* υπολογίζεται ότι γράφτηκε γύρω στο 380 μ.Χ. από κάποιον αστρονόμο της Αλεξάνδρειας ονόματι Παύλο[22]. Σε αυτό το έργο περιλαμβάνεται ο παρακάτω κανόνας που αφορά τον υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών. «*Πάρε το τετράγωνο της ακτίνας ενός κύκλου και ονόμασε το σταθερά. Το τέταρτο μέρος αυτής της σταθεράς είναι το τετράγωνο του Κριού. Από το τετράγωνο της σταθεράς αφαίρεσε το τετράγωνο του Κριού. Η τετραγωνική ρίζα αυτών των δυο είναι τα ημίτονα*».

Το όνομα Κριός παριστάνει το $\sin 30^0$. Με σύγχρονο συμβολισμό $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ και $\sin 60^0 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$. Εκτός των παραπάνω κανόνων, στο έργο υπάρχει και ένας πίνακας ημιτόνων από $3^0 45^{'}$ έως 90^0 με βήμα $3^0 45^{'}$. Για τον υπολογισμό τους, χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης η ακτίνα του κύκλου η οποία έχει διαιρεθεί σε 120 μέρη[23].

1.2.2 SURYA SIDDHANTA

Η *Surya Siddhanta* ή Σύστημα Ήλιου γράφτηκε στα τέλη του 4ου μ.Χ. αιώνα. Είναι το μόνο έργο της σειράς *Siddhantas* το οποίο σώζεται. Είναι γραμμένο σε έμμετρη μορφή και εκτός των άλλων περιέχει κάποιους αναπόδεικτους κανόνες υπολογισμού ημιτόνων, καθώς και ένα πίνακα 24 ημιτόνων από $3^0 45^{'}$ έως 90^0 με βήμα $3^0 45^{'}$ [24]. Η κατασκευή του πίνακα περιγράφεται σε ελεύθερη μετάφραση, από τους τρεις στίχους που ακολουθούν.

---

[21] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[22] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 231.
[23] G. R. Kaye, Indian mathematics, Issis, vol. 2, 1914, σελ. 10-11.
[24] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 237.

1. *«Το όγδοο μέρος των λεπτών ενός σημείου, ονομάζεται πρώτο ημίτονο. Σε αυτό το (πρώτο ημίτονο) αν προσθέσουμε τη διαφορά του ($1^{ου}$ ημιτόνου) με το πηλίκο αυτού με τον εαυτό του, θα έχουμε το δεύτερο ημίτονο».*

2. *«Έτσι, διαιρώντας τα διαδοχικά ημίτονα με το $1^{ο}$ ημίτονο και προσθέτοντας αυτά, τότε σε κάθε περίπτωση προσθέτοντας στο προηγούμενο ημίτονο την διαφορά του αθροίσματος των πηλίκων από το $1^{ο}$ ημίτονο, το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 24 ημιτόνων όπως:»*

3. *225, 449, 671, 890, 1105, 1315, ..., 3438*[25].

Σύγχρονος συμβολισμός

Ερμηνεύοντας τους παραπάνω στίχους, ο υπολογισμός των ημιτόνων περιγράφεται από τον αναγωγικό τύπο

$$s_{n+1} = s_n + \left(s_1 - \frac{s_1 + s_2 + ... + s_n}{s_1} \right), \text{ n=1, 2,…, 23.}$$

όπου

s_{n+1}: το ημίτονο του n+1 τόξου.

s_n : το ημίτονο του n τόξου.

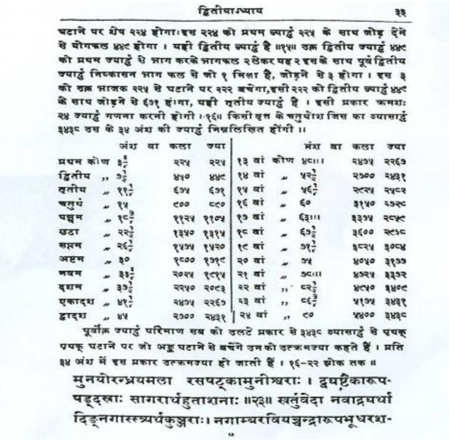
s_1: το ημίτονο του τόξου $3^0 45'$.

Έτσι ξεκινώντας με την τιμή $s_1 = 3^0 45'$, από τον παραπάνω τύπο υπολογίζονται τα 24 ημίτονα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Για την μέτρηση των ημιτόνων χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης η ακτίνα, η οποία έχει διαιρεθεί σε 3438 μέρη, δηλαδή με σύγχρονη ορολογία το ακτίνιο, αφού 1rad ισούται περίπου με $57^o 18'$, δηλαδή με 3438΄. Το πλεονέκτημα αυτής της επιλογής είναι ότι για μικρές γωνίες υπάρχει κοινή μονάδα μέτρησης τόξων και ημιτόνων. Έτσι $\sin 3^o 45' = 225'$, δηλαδή η τιμή του ημιτόνου ισούται με το τόξο του[26].

---

[25] Rev. Ebenezer Burgess, Translation of *Surya Siddhanta*,1858 σελ. 198.

[26] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 238.



द्वितीयाऽध्याय ३३

घटाने पर शेष २२४ होगा। इस २२४ को प्रथम ज्यार्द्ध २२५ के साथ जोड़ देने से योगफल ४४९ होगा। यही द्वितीय ज्यार्द्ध है ॥१५॥ उक्त द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ को प्रथम ज्यार्द्ध से भाग करके भागफल २ लेकर यह २ इसके साथ पूर्व द्वितीय ज्यार्द्ध निष्कासन भाग फल से जो १ मिला है, जोड़ने से ३ होगा। इस ३ को उक्त भाजक २२५ से घटाने पर २२२ बचेगा, इसी २२२ को द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ के साथ जोड़ने से ६७१ होगा, यही तृतीय ज्यार्द्ध है। इसी प्रकार क्रमशः २४ ज्यार्द्ध गणना करनी होगी ।१६॥ किसी वृत्त के चतुर्थांश जिस का व्यासार्द्ध ३४३८ उस के ३४ अंश की ज्यार्द्ध निम्नलिखित होंगी ॥

	अंश वा	कला	ज्या		अंश वा	कला	ज्या
प्रथम कोण	३¾	२२५	२२५	१३ वां कोण	४८॥।	२४७५	२२६७
द्वितीय ,,	७½	४५०	४४९	१४ वां ,,	५२½	२७००	२४३१
तृतीय ,,	११¼	६७५	६७१	१५ वां ,,	५६¼	२८२५	२५८२
चतुर्थ ,,	१५	९००	८९०	१६ वां ,,	६०	३१५०	२७२८
पञ्चम ,,	१८¾	११२५	११०५	१७ वां ,,	६३॥।	३३७५	२८५९
छठा ,,	२२½	१३५०	१३१५	१८ वां ,,	६७½	३६००	२९७८
सप्तम ,,	२६¼	१५७५	१५२०	१९ वां ,,	७१¼	३८२५	३०८४
अष्टम ,,	३०	१८००	१७१९	२० वां ,,	७५	४०५०	३१७७
नवम ,,	३३¾	२०२५	१९१५	२१ वां ,,	७८॥।	४३२५	३३७२
दशम ,,	३७½	२२५०	२०९३	२२ वां ,,	८२½	४८५०	३४०९
एकादश ,,	४१¼	२४७५	२२६७	२३ वां ,,	८६¾	५१७५	३४३१
द्वादश ,,	४५	२७००	२४३१	२४ वां ,,	९०	५४००	३४३८

पूर्वोक्त ज्यार्द्ध परिमाण सब को उलटे प्रकार से ३४३८ व्यासार्द्ध से पृथक् पृथक् घटाने पर जो अङ्क घटाने से बचेंगे उन को उत्क्रमज्या कहते हैं। प्रति ३४ अंश में इस प्रकार उत्क्रमज्या हो जाती हैं। १६-२२ श्लोक तक ॥

मुनयोरन्ध्रयमला रसषट्कामुनीश्वराः। द्व्यष्टिकारूप-षड्दस्राः सागरार्थहुताशनाः ॥२३॥ खर्तुवेदा नवाद्रयर्था दिङ्नगास्त्र्यर्थकुञ्जराः। नगाम्बरवियच्चन्द्रारूपभूधरश-

1.2.3 ARYABHATIYA

Το έργο με τίτλο *Aryabhatiya* γράφτηκε από τον Aryabhata (476 μ.Χ.) περίπου το 499 μ.Χ. Η *Aryabhatiya* έφθασε στη Δύση το 1874 χάρη στον Ολλανδό H. Kern ο οποίος το βρήκε στην Καλκούτα σε δύο αντίγραφα του 1820 και του 1863[27]. Είναι γραμμένο σε έμμετρη μορφή, αποτελείται από 123 στίχους και χωρίζεται σε τέσσερα μέρη. Στο στίχο II 12 περιγράφεται ένας ακόμη κανόνας υπολογισμού πίνακα ημιτόνων. Πρόκειται για ένα πίνακα 24 ημιτόνων, όμοιο με αυτόν που περιέχεται στη *Surya Siddhanta* (βλέπε 1.2.2) από $3^0 45'$ ανά $3^0 45'$ έως 90^o, όπως διαβάζουμε στο στίχο I 10[28]. Επιπλέον στον στίχο II 11 υποδεικνύεται ο υπολογισμός ημιτόνων από ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένα σε κύκλο. Ο Bhaskara στο έργο του *Lilavati* μας πληροφορεί ότι ο Aryabhata πήρε ένα τόξο ακτίνας 3438΄ και το διαίρεσε σε έξι μέρη. Κατόπιν με διαδοχικές διχοτομήσεις χώρισε το τόξο σε 12 και τέλος 24 σε ίσα μέρη, όπου κάθε τόξο ισούται με 225΄. Στη συνέχεια υπολόγισε το μήκος των 24 χορδών και έπειτα διχοτομώντας τις προκύπτουν τα 24 ημίτονα.

Οι παραπάνω δεν είναι οι μοναδικοί πίνακες ημιτόνων που καταρτίστηκαν από τους Ινδούς. Λόγου χάρη ο Varahamihira κατάρτισε πίνακα ημιτόνων τον 6^o αιώνα μ.Χ. χρησιμοποιώντας την τιμή 120 για την ακτίνα, ο Brahmagupta τον 7^o αιώνα με ακτίνα 3270 και ο Sripati τον 11^o αιώνα με ακτίνα 3415.

[27] G. Loria, Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος Α΄, Ε.Μ.Ε., 1971, σελ. 234.

[28] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 212-213.

1.3 ΑΡΑΒΙΑ

Οι Άραβες μεταφράζοντας έργα όπως τα *Siddhantas* το 773 μ.Χ. και την *Μέγιστη Σύνταξη* το 827 μ.Χ. έρχονται σε επαφή με την Τριγωνομετρία των Ελλήνων και των Ινδών. Η Τριγωνομετρία εξακολουθούσε να αποτελεί εργαλείο της αστρονομίας, ωστόσο οι Άραβες αστρονόμοι και μαθηματικοί συντέλεσαν σημαντικά στην εξέλιξη και την διαμόρφωσης της, σε ένα ανεξάρτητο κλάδο. Επίσης αύξησαν την χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι στα διάφορα έργα τους εμφανίζεται το συνημίτονο, από την ανάγκη να υπολογιστεί το ημίτονο της συμπληρωματικής γωνίας. Επίσης οι συναρτήσεις συντέμνουσα και τέμνουσα κάνουν την εμφάνιση τους πρώτη φορά, χωρίς ειδικό όνομα στα έργα του Abu'l Wafa. Οι συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη προέκυψαν από προβλήματα που σχετίζονται με την σκιά αντικειμένων.

1.3.1 Al-KHOWARIZMI

Ο Al Khowarismi υπολογίζεται ότι έζησε πριν το 800 μ.Χ. έως μετά το 847 μ.Χ. Ο τότε χαλίφης Αλ Μαμόν τον κάλεσε να ηγηθεί του περίφημου Οίκου της Σοφίας. Μεταξύ των σημαντικών έργων του είναι το *Sindhind zij*, το οποίο σχετίζεται με την αστρονομία και το περιεχόμενο του βασίζεται σε αντίστοιχα έργα των Ινδών. Υπάρχουν δύο εκδόσεις αυτού του έργου στα αραβικά, αλλά καμία δεν σώζεται. Ωστόσο σώζονται δύο λατινικές μεταφράσεις. Στο *Sindhind zij* εκτός των άλλων περιέχονται πίνακες ημιτόνων και εφαπτομένων. Παρά το γεγονός ότι οι πίνακες είναι παρόμοιοι με αυτούς των Ινδών, ο Al Khowarismi φάινεται ότι είχε επηρεαστεί και από το έργο του Πτολεμαίου[29].

1.3.2 TABIT IBN QORRA

Ο Tabit ibn Qorra (826-901 μ.Χ.) ανήκε στη θρησκεία των Σαββαίων, οι οποίοι έβγαλαν πολλούς μαθηματικούς και αστρονόμους. Πριν υποκύψουν στον Αλ Μαμόν, μιλούσαν ελληνικά και είχαν ελληνικά ονόματα. Η ελληνομάθεια του Tabit είχε ως αποτέλεσμα να μελετήσει και να μεταφράσει έργα σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών, μεταξύ των οποίων και ο Πτολεμαίος[30]. Επηρεασμένος από τις ελληνικές πηγές γνώσεων, ο Tabit έγραψε ένα έργο σχετικό με το Θεώρημα του

[29] Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.
[30] Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.

Μενελάου και τις εφαρμογές του στην επίλυση σφαιρικών τριγώνων, κάνοντας χρήση των χορδών των τόξων, όπως και οι Έλληνες[31].

1.3.3 Al BATTANI

Ο Al Battani (858-929 μ.Χ.) η Albategnius, που είναι η λατινική απόδοση του ονόματος του, υπήρξε σπουδαίος αστρονόμος. Το πιο σημαντικό έργο του είναι το *Kitab al-Zij* (*Επιστήμη των άστρων*), το οποίο σώζεται σε δύο μεταφράσεις, μια στα λατινικά (*De motu stellarun*), και μια στα Ισπανικά[32]. Σε αυτό ο Al Battani κάνει χρήση, με σύγχρονο συμβολισμό, του $\sin(90^0 - A)$ δηλαδή του $\cos A$, για γωνία από 0^0 έως 90^0. Για γωνία από 90^0 έως 180^0 χρησιμοποιείται η σχέση $1-\cos A$, το γνωστό παρημίτονο, αποφεύγοντας έτσι την χρήση αρνητικών αριθμών[33]. Επιπλέον στο *Kitab al-Zij* βρίσκεται για πρώτη φορά, με σύγχρονη γλώσσα, ο νόμος των συνημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα[34]. Τέλος στον Al Battani οφείλεται ο μαθηματικός τύπος για το μήκος της σκιάς ενός γνώμονα, ο οποίος είναι $l = \frac{h\sin(90^0 - \varphi^0)}{\sin\varphi}$, ισοδύναμα $l = h\cot\varphi$. Με βάση αυτόν, κατασκευάζεται με σύγχρονη γλώσσα, ένας πίνακας συνεφαπτομένων από 1^0 έως 90^0[35].

1.3.4 ABU Ί WAFA

Ο Άραβας αστρονόμος Abu Ίl Wafa (940-998 μ.Χ) με το έργο του *Almagesta*, συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της Τριγωνομετρίας. Σε αυτό γίνεται χρήση, με σύγχρονη ορολογία, της εφαπτομένης, συνεφαπτομένης, τέμνουσας και συντέμνουσας. Επιπλέον περιέχονται υπό μορφή κανόνων, τύποι που εκφράζουν την σχέση μεταξύ των παραπάνω τριγωνομετρικών αριθμών. Ειδικότερα ο Abu Ίl Wafa για να απλοποιήσει τους τύπους, θεωρεί R=1, εισάγοντας έτσι τον τριγωνομετρικό κύκλο[36]. Επίσης, αποδεικνύεται με σύγχρονη γλώσσα, η ισότητα $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

---

31 Γιάννης Θωμαΐδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
32 Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.
33 Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 275.
34 Γιάννης Θωμαΐδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
35 Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 62.
36 Γιάννης Θωμαΐδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

μέσω της οποίας κατασκευάζεται ένας πίνακας ημιτόνων, για τόξα που διαφέρουν $\frac{1}{4}^{0}$. Οι υπολογισμοί του, έχουν την θαυμαστή για την εποχή του ακρίβεια, της τάξης του 10^{-8}[37]. Επίσης στο έργο του υπάρχουν προτάσεις που αφορούν την επίλυση σφαιρικών τριγώνων, μερικές από τις οποίες καταγράφονται παρακάτω.

Θεώρημα

Αν ΑΒΓ και ΑΔΕ δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, όπου Β, Δ, ορθές και Α μια κοινή οξεία γωνία, τότε $\frac{\sin \mathrm{B\Gamma}}{\sin \mathrm{\Gamma A}} = \frac{\sin \Delta\mathrm{E}}{\sin \mathrm{EA}}$.

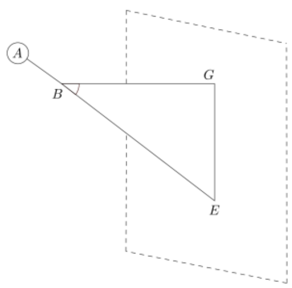
Πόρισμα

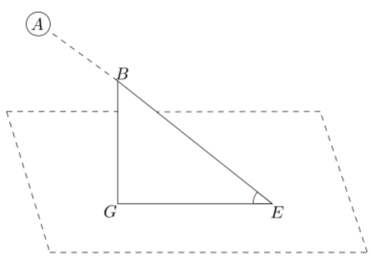
Αν ΑΒΓ ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με την γωνία Β ορθή, τότε $\sin \mathrm{A} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Στην *Almagesta* υπάρχει και η απόδειξη τού θεωρήματος των ημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα[38].

1.3.5 Al BIRUNI

Ο Al Biruni (973-1048 μ.Χ.) υπήρξε πολυγραφότατος, συμβάλλοντας στη διάδοση της γνώσης. Το έργο του *Shadows,* αποτελεί σημαντική πηγή πληροφοριών για τα μαθηματικά, τη φυσική και την αστρονομία. Όσον αφορά την Τριγωνομετρία, αναφέρεται στο έργο η ιστορία της εφαπτομένης, της συνεφαπτομένης, της τέμνουσας και της συντέμνουσας, οι οποίες προήλθαν από την ανάγκη να επιλυθούν προβλήματα σχετικά με την σκιά αντικειμένων[39]. Οι ορισμοί των παραπάνω τριγωνομετρικών αριθμών φαίνονται στα παρακάτω σχήματα. Ειδικότερα, στο πρώτο σχήμα ορίζεται η GE ως εφαπτομένη της γωνίας B και BE η τέμνουσα, ενώ στο δεύτερο σχήμα, GE είναι η συνεφαπτομένη της γωνίας E και EB η συντέμνουσα.





[37] Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.
[38] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 277-279.
[39] Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.

Επιπλέον, υπάρχουν και σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Με σύγχρονη ορολογία $\frac{g}{g\csc\alpha}=\frac{R\sin\alpha}{R}$, όπου g το ύψος του γνώμονα. Επιπλέον $\sqrt{g^2\cot^2\alpha+g^2}=g\csc\alpha$ ισοδύναμα $\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$ [40].

1.3.6 NASIR EDDIN Al TUSI

Ο Nasir Eddin al Tusi (1201-1274 μ.Χ.) ήταν ο πρώτος που μελέτησε την Τριγωνομετρία ως αυτόνομο κλάδο των μαθηματικών και όχι ως εργαλείο της αστρονομίας. Το 1247 στο έργο *Tahrir al-Majisti,* περιλαμβάνονται τεχνικές υπολογισμού πίνακα ημιτόνων. Επίσης στο *Treatise on the quadrilateral* περιέχεται ο περίφημος νόμος των ημιτόνων για επίπεδα τρίγωνα, αποδεικνύεται και κατόπιν χρησιμοποιείται στην επίλυση επίπεδων τριγώνων[41]. Ο al Tusi χρησιμοποιεί τις έξι τριγωνομετρικές γραμμές, αλλά παράλληλα κάνει χρήση και των χορδών.

1.3.7 Al KASHI

Ο Al Kashi (1380-1429 μ.Χ.) υπήρξε διάσημος αστρονόμος και μαθηματικός. Στο αστρονομικό του έργο *Zij-i khaqani,* του οποίου σώζεται ένα αντίγραφο το ethe 2232, παρουσιάζονται πίνακες ημιτόνων από 0^0 έως 90^0 ανά $1^{'}$, καθώς και εφαπτομένων από 0^0 έως 45^0 ανά $1^{'}$ και από 45^0 έως $89,55^0$ ανά $5^{'}$. Παρακάτω αναφέρεται ο τρόπος που χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικοί πίνακες του Al Kashi και δύο κανόνες παρεμβολής, που βασίζονται στα αριθμητικά δεδομένα των πινάκων, μέσω των οποίων επιτυγχάνονται οι υπολογισμοί και βελτιώνεται η ακρίβεια τους. Αρχικά ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε κύκλο ακτίνας R=60. Να σημειωθεί ότι το σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται είναι το εξηκονταδικό. Η συμπλήρωση του πίνακα βασίζεται στην σχέση, Sinx=Rsinx όπου Sinx παριστάνει τις τιμές του ημιτόνου του Al Kashi, ενώ το sinx το ημίτονο με σύγχρονη ορολογία. Όμοια σχέση ισχύει και για τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Με βάση την προηγούμενη σχέση έχει προκύψει ο πίνακας ημιτόνων, μέρος του οποίου φαίνεται παρακάτω.

[40] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 276.
[41] Mac. Tutor, History of Mathematics, University of St. Andrews.

Transcription of folio 37v 45° -49°

0;42,25,35, 4	0;43, 9,37,24	0;43,52,52,25	0;44,35,19,17	0;45,16,57,17	Sine
45°	46°	47°	48°	49°	Arc
0; 0, 0,44,25	0; 0, 0,43,39	0; 0, 0,42,50	0; 0, 0,42, 2	0; 0, 0,41,13	1'
1,28,50	1,27,17	1,25,39	1,24, 3	1,22,25	2
2,13,14	2,10,54	2, 8,28	2, 6, 4	2, 3,36	3
2,57,37	2,54,30	2,51,16	2,48, 4	2,44,46	4
3,41,59	3,38, 5	3,34, 4	3,30, 3	3,25,56	5
4,26,20	4,21,39	4,16,51	4,12, 1	4, 7, 5	6
5,10,41	5, 5,13	4,59,37	4,53,58	4,48,13	7
5,55, 1	5,48,46	5,42,22	5,35,54	5,25,20	8
6,39,20	6,32,18	6,25, 6	6,17,50	6,10,26	9
7,23,39	7,15,49	7, 7,50	6,59,45	6,51,31	10
8, 7,57	7,59,19	7,50,33	7,41,39	7,32,35	11
8,52,14	8,42,48	8,33,15	8,23,32	8,13,38	12
9,36,30	9,26,17	9,15,56	9, 5,24	8,54,41	13
10,20,45	10, 9,45	9,58,36	9,47,16	9,35,43	14
11, 5, 0	10,53,12	10,41,16	10,29, 7	10,16,44	15
11,49,14	11,36,39	11,23,55	11,10,57	10,57,44	16
12,33,27	12,20, 5	12, 6,33	11,52,46	11,38,44	17
13,17,39	13, 3,30	12,49,10	12,34,34	12,19,43	18
14, 1,50	13,46,54	13,31,46	13,16,21	13, 0,41	19
14,46, 0	14,30,17	14,14,21	13,58, 8	13,41,38	20
15,30, 9	15,13,39	14,56,55	14,39,54	14,22,35	21
16,14,18	15,57, 1	15,39,28	15,21,39	15, 3,31	22
16,58,26	16,40,22	16,22, 1	16, 3,23	15,44,26	23
17,42,33	17,23,42	17, 4,33	16,45, 6	16,25,20	24
18,26,40	18, 7, 1	17,47, 3	17,26,49	17, 6,13	25
19,10,46	18,50,20	18,29,34	18, 8,31	17,47, 5	26
19,54,51	19,33,38	19,12, 4	18,50,12	18,27,56	27
20,38,55	20,16,55	19,54,33	19,31,52	19, 8,46	28
21,22,59	21, 0,12	20,37, 1	20,13,31	19,49,35*	29
22, 7, 2	21,43,28	21,19,29	20,55, 9	20,30,24	30
22,51, 4	22,26,43	22, 1,56	21,36,46	21,11,12	31
23,35, 5	23, 9,57	22,44,22	22,18,22	21,51,59	32
24,19, 6	23,53,10	23,26,47	22,59,58	22,32,45	33
24, 3, 6	24,36,22	24, 9,11	23,41,33	23,13,30	34
25,47, 5	25,19,34	24,51,34	24,23, 7	23,54,15	35
26,31, 3	26, 2,45	25,33,56	25, 4,41	24,34,59*	36
27,15, 0	27,45,55	26,16,17	25,46,14	25,15,42	37
27,58,56	27,29, 4	26,58,38	26,27,46	25,56,24	38
28,42,51	28,12,12	27,40,58	27, 9,17	26,37, 5	39
29,26,46	28,55,19	28,23,17	27,50,48	27,17,45	40
30,10,40	29,38,25	29, 5,35	28,32,18	27,58,24	41
30,54,33	30,21,31*	29,47,52	29,13,47	28,39, 2	42
31,38,26	31, 4,36	30,30, 9	29,55,15	29,19,40	43
32,22,18	31,47,40	31,12,25	30,36,42	30, 0,17	44
33, 6, 9	32,30,43	31,54,40	31,18, 8	30,40,53	45
33,49,59	33,13,45	32,36,54	31,59,33	31,21,28	46
34,33,48	33,56,47	33,19, 8	32,40,57	32, 2, 3	47
35,17,37	34,39,48	34, 1,21	33,22,20	32,42,37	48
36, 1,25	35,22,49	34,43,33	34, 3,43	33,23,10	49
36,45,12	36, 5,49	35,25,45	34,45, 5	34, 3,42	50
37,28,58	36,48,48	36, 7,56	35,26,26	34,44,14	51
38,12,43	37,31,46	36,50, 6	36, 7,46	35,24,45	52
38,56,28	38,14,43	37,32,15	36,49, 6	36, 5,15	53
39,40,12	38,57,40	38,14,23	37,30,25	36,45,44	54
40,23,55	39,40,36	38,56,30	38,11,43	37,26,12	55
41, 7,37	40,23,31	39,38,36	38,53, 0	38, 6,39	56
41,51,19	41, 6,25	40,20,41	39,34,16	38,47, 5	57
42,35, 0	41,49,18	41, 2,45	40,15,31	39,27,30	58
43,18,40	42,32,10	41,44,49	40,56,46	40, 7,54	59
44, 2,20	43,15, 1	42,26,52	41,38, 0	40,48,18	60

* 30,31,31

* 19,45,35

* 34,34,39

Η τελευταία στήλη περιέχει όλα τα τόξα ανά 1΄ έως 90^0. Αν ένα τόξο είναι μεγαλύτερο από 90^0 τότε γίνεται με σύγχρονη ορολογία αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο χωρίς το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού, καθώς δεν ήταν γνωστοί οι αρνητικοί αριθμοί. Ο τρόπος χρήσης του πίνακα γίνεται ευκολότερα κατανοητός περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισε ο Al Kashi το ημίτονο του τόξου 48; 6, 43, 30. Αρχικά υπολογίζεται με σύγχρονη γλώσσα το sin48 του οποίου η τιμή καταγράφεται στην κορυφή του πίνακα πάνω από το 48 και είναι 0, 44, 35, 19, 17. Στη συνέχεια η τιμή που αντιστοιχεί στην αύξηση της γωνίας κατά 6΄, υπολογίζεται από τον πίνακα (διασταύρωση της στήλης 48 με τη γραμμή 6΄), δηλαδή 0; 0, 4, 12, 1 και προστίθενται τα δύο αποτελέσματα. Αν στην γωνία υπάρχουν δεύτερα και τρίτα λεπτά όπως στο παράδειγμα, τότε χρησιμοποιούνται δύο κανόνες παρεμβολής για τον υπολογισμό. Με βάση τον πρώτο κανόνα η αύξηση της γωνίας κατά 43΄΄ υπολογίζεται διαιρώντας τον αριθμό του πίνακα που αντιστοιχεί στα 43΄΄ με το 60 και στρογγυλοποιώντας κατά 4 δεκαδικά ψηφία. Έτσι προκύπτει το 0, 0, 0, 0, 29, 55. Επίσης η αύξηση κατά 30΄ διαιρείται με το 60^2 και στρογγυλοποιείται κατά τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Έπειτα από την προσθέση των αποτελέσματων προκύπτει ότι $\sin 48;6,43,30 = 0;44,40,1,34$. Η άλλη μέθοδος είναι πιο ακριβής και στηρίζεται σε μια γραμμική παρεμβολή στο διάστημα (48;6, 48;7). Με σύγχρονη γλώσσα ισχύει Δ=sin48;7-sin48,6=0;0,0,0,41,57.

Έπειτα

$$\sin 48;6,43=\sin 48;6+43=\sin 48;6+43\frac{\Delta}{60}=0;44,39,31,18+0;0,0,30,4=0;44,40,1,22$$

και $\sin 48;6,43,30 - \sin 48;6,43 + 30\dfrac{\Delta}{60^2}$ =0;44,40,1,43.

Εκτός του πίνακα ημιτόνων στο *Zij-i khaqani,* υπάρχει και ένας πίνακας εφαπτομένων. Οι τιμές δίνονται με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων ανά $1'$ από 0^0 έως 45^0 και ανά $5'$ από 45^0 έως $89,55^0$ και ο πίνακας χρησιμοποιείται όπως και αυτός των ημιτόνων. Να σημειωθεί ότι τέσσερις στήλες του πίνακα είναι κενές, ίσως διότι ο Al Kashi υπολόγισε τις τιμές ανά 10΄ και έπειτα έκανε χρήση των μεθόδων παρεμβολής. Επίσης, οι πίνακες παρουσιάζουν ακρίβεια συγκριτικά με τις σημερινές τιμές έως και έξι δεκαδικά ψηφία[42].

1.4 Η ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ

Η εισαγωγή των τριγωνομετρικών εννοιών στην Ευρώπη, έγινε μέσω των μεταφράσεων των αραβικών κειμένων στην λατινική γλώσσα, κυρίως κατά την διάρκεια του 12ου αιώνα στην Ισπανία. Τα πρώτα βήματα της Τριγωνομετρίας στην Ευρώπη ήταν προσκολλημένα στις αρχαίες μεθόδους. Ωστόσο στα μέσα του 15ου αιώνα ο Regiomontanus (βλέπε 1.4.4) στο έργο του *De triangulis omnimodis libri V,* συγκέντρωσε και οργάνωσε τις γνώσεις της Τριγωνομετρίας που κληροδοτήθηκαν από τους προγενέστερους του. Έτσι, η Τριγωνομετρία εμφανίζεται πλέον ως ένα αυτόνομο κομμάτι των μαθηματικών.

[42] Javad Hamadanizadeh Sharif, The Trigonometric Tables of Al Kashi in *Zij-I Khaquani,* Historia Mathematica 7, 1980, σελ. 38-45.

1.4.1 LEONARDO OF PISA

O Leonardo of Pisa, γνωστός και ως Fibonacci (1170-1240), στο έργο του *Practica Geometricae* εκτός των άλλων ασχολείται με τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικών τομέων. Αυτό είχε ως συνέπεια τον καταρτισμό ενός πίνακα χορδών, τμήμα του οποίου φαίνεται παρακάτω, με βάση τις πτολεμαικές μεθόδους, με την διαφορά ότι ο Fibonacci χρησιμοποιεί ως ακτίνα τον αριθμό 21[43].

Arcus pertice	Arcus pertice	Corde pertice	Ar pedes	Cuu vncie	M puncta	Arcus pertice	Arcus pertice	Corde pertice	Ar pedes	CV vncie	VM puncta
1	131	0	5	17	17	34	96	30	2	6	17
2	130	1	5	17	13	35	97	31	0	8	5
3	129	2	5	17	4+	36	96	31	4	8	7
4	128	3	5	17	2	37	95	32	2	5	15
5	127	4	4	12	10	38	94	33	0	1	9
6	126	5	5	16	7+	39	93	34	3	13	0
7	125	6	5	14	5	40	92	35	1	4	15
8	124	7	5	12	9	41	91	35	4	12	10
9	123	8	5	8	16	42	90	36	2	0	0
10	122	9	5	7	8	43	89	36	5	3	5
11	121	10	5	4	2	44	88	37	2	4	6
12	120	11	4	17	18	45	87	37	5	3	2
13	119	12	4	13	6	46	86	38	1	17	15
14	118	13	4	7	16	47	85	38	4	12	13
15	117	14	4	1	0	48	84	38	1	4	0
16	116	15	3	11	18	49	83	39	3	11	15
17	115	16	3	3	12	50	82	39	5	17	2
18	114	17	2	12	8	51	81	40	2	2	1
19	113	18	2	0	15	52	80	40	4	2	10
20	112	19	1	8	12	53	79	40	0	0	11
21	111	20	0	13	18	54	78	40	1	14	5
22	110	21	0	0	0	55	77	41	3	7	8
23	109	21	5	2	16	56	76	41	4	16	2
24	108	22	4	4	5	57	75	41	0	4	12
25	107	23	3	4	8	58	74	41	1	8	1
26	106	24	2	3	2	59	73	41	2	9	0
27	105	25	1	0	6	60	72	41	3	7	14
28	104	25	5	16	2	61	71	41	4	9	2
29	103	26	4	8	0	62	70	41	4	15	10
30	102	27	3	0	3	63	69	41	5	6	9
31	101	28	1	9	7	64	68	41	5	12	17
32	100	28	5	16	4	65	67	41	5	6	14
33	99	29	4	3	9	66	66	42	0	0	0

1.4.2 RICHARD WAllINGFORD

O Άγγλος Richard Wallingford (1291-1336) έγραψε το βιβλίο *Quadripartitum de sinibus demonstrates* (*Περί ημιτόνων σε τέσσερα μέρη*), το οποίο περιέχει μεθόδους βάση των οποίων επιλύονται προβλήματα της σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Ο Wallingford ασχολήθηκε εκτενώς με το Θεώρημα του Μενελάου, λαμβάνοντας υπόψην όλες τις περιπτώσεις και αποδεικνύοντας εκ νέου καθεμία. Εν κατακλείδι, το έργο του ήταν επηρεασμένο από την *Μέγιστη Σύνταξη* του Πτολεμαίου, επιπλέον όμως έκανε χρήση και του ινδικού ημιτόνου[44].

1.4.3 LEVI BEN GERSON

O Levi ben Gerson (1288-1344) υπήρξε αστρονόμος, φιλόσοφος και μαθηματικός. Το έργο του που σχετίζεται με την Τριγωνομετρία, αποτελεί μέρος ενός αστρονομικού

---

[43] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 297.

[44] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 299-300.

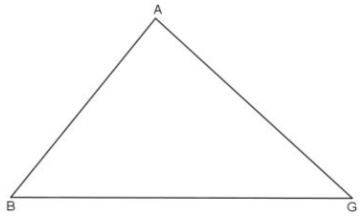
έργου το οποίο περιέχεται στο *Sefer milhamot Adonai* (*Wars of Lord*). Σε αυτό περιέχονται μέθοδοι επίλυσης επίπεδων τριγώνων[45]. Ο Gerson ανακάλυψε τον Νόμο των ημιτόνων για επίπεδα τρίγωνα. Επιπλέον κατασκεύασε με σύγχρονη γλώσσα, ένα πίνακα ημιτόνων εκφρασμένο με εξηκονταδικά κλάσματα και έκανε χρήση των χορδών αλλά και του ινδικού ημιτόνου[46].

1.4.4 REGIOMONTANUS

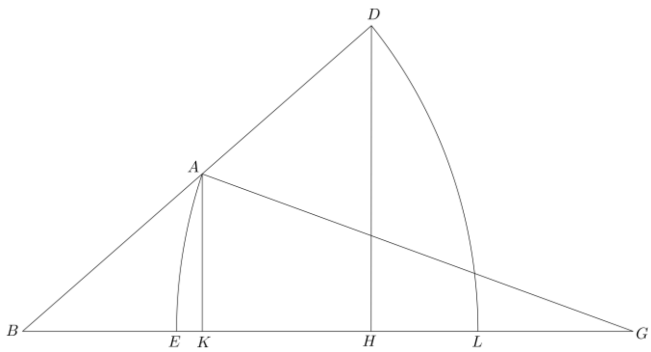
Ο Γερμανός Johann Muller (1436-1476) είναι περισσότερο γνωστός ως Regiomontanus, από την λατινική απόδοση του ονόματος της γενέτειρας του. Ο Regiomontanus μελέτησε έργα προγενέστερων μαθηματικών, θέλοντας να εμπλουτίσει τις γνώσεις του στην αστρονομία, που ήταν το κύριο κομμάτι του επιστημονικού του ενδιαφέροντος. Έτσι ήρθε σε επαφή με την Τριγωνομετρία των Ελλήνων, των Ινδών και των Αράβων. Ειδικότερα, ολοκλήρωσε την μετάφραση της *Μέγιστης Σύνταξης* από το Ελληνικό πρωτότυπο, που είχε ξεκινήσει πριν το θάνατο του ο καθηγητής του, διάσημος αστρονόμος Georg von Peuerbach (1423-1469). Συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της Τριγωνομετρίας, καθώς στο πιο γνωστό έργο του *De triangulis omnimodis libri V* (*Περί τριγώνων παντός είδους σε πέντε βιβλία*), οργανώνονται σε ένα ενιαίο μεθοδικό κείμενο οι γνώσεις της Τριγωνομετρίας που κληροδοτηθήκαν από τους προγενέστερους του. Το έργο αυτό αποτέλεσε για τον δυτικό κόσμο το πρώτο βιβλίο όπου η Τριγωνομετρία εμφανίζεται σαν ένα αυτόνομο κομμάτι των μαθηματικών. Κάτι αντίστοιχο είχε κάνει με το έργο του και ο Nasir Eddin al Tusi (βλέπε 1.3.6.) δύο αιώνες νωρίτερα. Όσον αφορά το περιεχόμενο του *De triangulis omnimodis libri V*, το *Βιβλίο I* ξεκινά με τον ορισμό βασικών εννοιών όπως ποσότητα, λόγος, ισότητα, κύκλος, τόξο, χορδή. Για το ημίτονο υιοθετείται ο ινδικός ορισμός: *«Όταν διχοτομούμε ένα τόξο και την χορδή του, ονομάζουμε αυτήν την ημιχορδή ορθό ημίτονο του ημιτόξου.»* Μετά τους ορισμούς καταγράφεται μια σειρά αξιωμάτων, για να ακολουθήσουν στην συνέχεια πενήντα εφτά θεωρήματα. Τα Θεωρήματα (1 έως 19) αναφέρονται στην χρήση των λόγων και την εύρεση μεγεθών. Τα υπόλοιπα πραγματεύονται την γεωμετρική επίλυση επίπεδων τριγώνων, εκτός από τα 20, 27, 28 όπου για την επίλυση των τριγώνων γίνεται χρήση του ημιτόνου. Επίσης στα Θεωρήματα 49, 50, 52, 53 για την επίλυση γίνεται έμμεσα χρήση του ημιτόνου,

[45] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 300.
[46] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

μέσω του Θεωρήματος 27. Η κατεξοχήν Τριγωνομετρία περιλαμβάνεται στο *Βιβλίο II* το οποίο αποτελείται από τριάντα τρία θεωρήματα. Στο Θεώρημα 1 διατυπώνεται ο Νόμος των ημιτόνων: *«Σε κάθε ευθύγραμμο τρίγωνο ο λόγος δύο πλευρών ισούται με τον λόγο των ημιτόνων των γωνιών που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις πλευρές.»* Όλες οι αποδείξεις του *De triangulis* διατυπώνονται λεκτικά. Εν συντομία η απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος σε σύγχρονη γλώσσα έχει ως εξής: Έστω το ABG τρίγωνο που φαίνεται στο παράκατω σχήμα, θα αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{AG}=\frac{\sin G}{\sin B}$.



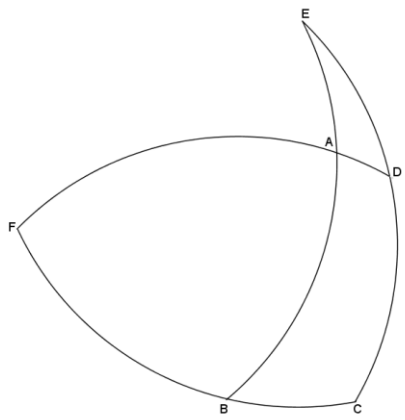
Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε η απόδειξη έπεται άμμεσα από το Θεώρημα I 28. Αν δεν είναι ορθογώνιο και ισχύει ότι AB=AG τότε και οι γωνίες G, B θα είναι ίσες, συνεπώς και τα ημίτονα τους. Αν οι AB, AG δεν είναι ίσες τότε με κέντρα τα σημεία B, G γράφονται δύο ίσοι κύκλοι με ακτίνες BD, AG αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά BG στα σημεία L, E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έπειτα φέρνοντας τις κάθετες AK και DH προς την βάση, ισχύει ότι $DH=\sin B$ και $AK=\sin G$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ABK και BDH έπεται το ζητούμενο. Ο Νόμος των ημιτόνων χρησιμοποιείται για την επίλυση μη ορθογωνίου τριγώνου στα Θεωρήματα 4 και 5 στις περιπτώσεις που δίνονται μια πλευρά, μια προσκείμενη και η απέναντι γωνία ή δύο πλευρές και μια γωνία που δεν είναι η περιεχόμενη στις πλευρές. Επίσης στα Θεωρήματα 12 και 13 υπολογίζονται τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου με αλγεβρικές μεθόδους. Στο Θεώρημα 26, αν δοθεί το εμβαδόν του τριγώνου καθώς και το ορθογώνιο γινόμενο δύο πλευρών του, τότε προκύπτει η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την βάση ή η εξωτερική της, που αμφότερες κάνουν δύο ορθές. Με σύγχρονη γλώσσα πρόκειται για τον τύπο $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma \sin \mathrm{A}$ όπου αν το εμβαδόν Ε και το γινόμενο βγ είναι γνωστό, τότε υπολογίζεται η γωνία Α ή η παραπληρωματική της. Τα υπόλοιπα θεωρήματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν ασκήσεις της σύγχρονης Τριγωνομετρίας. Το περιεχόμενο των τριών τελευταίων βιβλίων αφορά την σφαιρική Γεωμετρία και την σφαιρική Τριγωνομετρία. Στο *Βιβλίο III* καταγράφονται πενήντα έξι θεωρήματα της σφαιρικής Γεωμετρίας, χρήσιμα για την σφαιρική Τριγωνομετρία. Στο βιβλίο αυτό μπαίνουν οι βάσεις για αυτό που θα ακολουθήσει στο επόμενο. Στο *Βιβλίο IV* περιέχονται τριάντα τέσσερα θεωρήματα. Τα δεκατέσσερα πρώτα αφορούν προτάσεις της σφαιρικής Γεωμετρίας καθώς και ανισοτικές σχέσεις σφαιρικών τριγώνων. Στο Θεώρημα 15, αν δύο μέγιστοι κύκλοι μιας σφαίρας ABGD και AED τέμνονται στα A, D και έστω B, G δύο σημεία του κύκλου ABGD, από τα οποία φέρνουμε δύο κάθετα τόξα BR και GS προς τον κύκλο AED, τότε $\frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{BR}} = \frac{\sin \mathrm{AG}}{\sin \mathrm{GS}}$. Στο Θεώρημα 16 διατυπώνεται ο Νόμος των ημιτόνων για ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, με σύγχρονη γλώσσα $\frac{\sin \mathrm{AB}}{\sin \mathrm{G}} = \frac{\sin \mathrm{BG}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin \mathrm{AG}}{\sin \mathrm{B}}$. Επίσης στο Θεώρημα 17 γενικεύεται ο προηγούμενος νόμος για μη ορθογώνια τρίγωνα. Στο Θεώρημα 18 αποδεικνύεται ότι σε ένα σφαιρικό τρίγωνο ABG, με μια ορθή γωνία τη B, ισχύει σε σύγχρονη γλώσσα ότι

$$\frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin\left(90^\circ - \mathrm{G}\right)}{\sin\left(90^\circ - \mathrm{AB}\right)} \quad \text{και} \quad \frac{\sin \mathrm{G}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin\left(90^\circ - \mathrm{A}\right)}{\sin\left(90^\circ - \mathrm{BG}\right)}$$

Ακόμη στο Θεώρημα 19 αποδεικνύεται ότι σε ένα σφαιρικό τρίγωνο με μια ορθή γωνία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ισχύουν οι σχέσεις $\frac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{AF}} = \frac{\sin \mathrm{BE}}{\sin 90^\circ}$ και $\frac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{BF}} = \frac{\sin \mathrm{AF}}{\sin 90^\circ}$.



Τα Θεωρήματα 21 έως 24 έχουν να κάνουν με τον υπολογισμό γωνιών ή τόξων σφαιρικού τριγώνου. Εν συνεχεία τα Θεωρήματα 25 έως 27 αφορούν την επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων. Στο Θεώρημα 29 παρουσιάζεται η περίπτωση μη επιλυσιμότητας μη ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, ενώ τα υπόλοιπα θεωρήματα ασχολούνται με την επίλυση σφαιρικών μη ορθογωνίων τριγώνων. Τέλος το *Βιβλίο V* αποτελείται από δεκατέσσερα θεωρήματα. Στο Θεώρημα 1 με σύγχρονη γλώσσα, αν ABC, DEF δύο ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα με C, E ορθές γωνίες και τις οξείες B, E ίσες, καθώς και AB μεγαλύτερη της DE, BC μεγαλύτερη της EF τότε

$$\frac{\sin\left(AB-DE\right)}{\sin\left(BC-EF\right)}=\frac{\sin B}{\sin\left(90-AC\right)\sin\left(90-DF\right)}$$

Στο Θεώρημα 2 αναφέρεται ο Νόμος των συνημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα που με σύγχρονη γλώσσα διατυπώνεται $\dfrac{\operatorname{vers}\sin A}{\operatorname{vers}\sin\alpha-\operatorname{vers}\sin(b-c)}=\dfrac{1}{\sin b\sin c}$ ισοδύναμα $\cos A=\dfrac{\cos\alpha-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$. Στο Θεώρημα 7, αν ABC ένα σφαιρικό τρίγωνο και AD το τόξο που διχοτομεί την γωνία A και χωρίζει την πλευρά BC στις BD και DC τότε $\dfrac{\sin AB}{\sin AC}=\dfrac{\sin BD}{\sin DC}$.

Τα υπόλοιπα θεωρήματα ασχολούνται με την επίλυση σφαιρικών τριγώνων[47].

1.4.5 JOHANN WERNER

Ο Johann Werner (1468-1528) έγραψε το έργο σχετικά με την σφαιρική Τριγωνομετρία με τίτλο *De triangulis per maximorum circulorum segmenta*

[47] Johann Muller, *De triangulis omnimodis*, Translated by Barnabas Hughes, O.F.M., 1967.

constructis libri V, το οποίο παρέμεινε ανέκδοτο και χάθηκε. Σε αυτόν οφείλονται οι Τριγωνομετρικοί τύποι[48]

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

1.4.6 NICOLAS COPERNICUS

Ο Πολωνός Nicolas Copernicus (1473-1543) είναι γνωστός για την ηλιοκεντρική αντίληψη που καθιέρωσε για το σύμπαν. Όσον αφορά την συμβολή του στην Τριγωνομετρία, τα αποτελέσματα της μελέτης του καταγράφηκαν στο έργο του με τίτλο *De lateribus et angulis triangulorum,* το οποίο αποτέλεσε μέρος του περίφημου αστρονομικού έργου *De revolutionibus orbium coelestium*[49]. Ο Copernicus χρησιμοποιεί ως ακτίνα τον αριθμό 100.00 και στους πίνακες του υπολογίζει την μισή χορδή του διπλάσιου τόξου. Ασχολήθηκε επίσης με την επίλυση επίπεδων τριγώνων χωρίς να κάνει χρήση του Νόμου των ημιτόνων. Τέλος, παραθέτει μια σειρά αποτελεσμάτων σχετικά με τη σφαιρική Τριγωνομετρία[50].

1.4.7 JOHANN JOACHIM RHETICUS

Ο Johann Joachim Rheticus (1514-1576) συνεργάστηκε με τον Copernicus και επιμελήθηκε την έκδοση των έργων του. Οστώσο ο Rheticus συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της Τριγωνομετρίας με τα έργα του *Canon doctrinae triangulorum, Opus palatinum de triangulis* και *Thesaurus mathematicus sive canon sinuum ad radium.* Στο πρώτο υπάρχουν πίνακες τιμών και για τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, για τόξα ανά 10΄΄ σε κύκλο ακτίνας 10^7. Στο δεύτερο έργο δημοσιεύτηκαν νέοι πίνακες τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τόξα ανά 10΄΄ σε κύκλο ακτίνας 10^{10} με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στο τρίτο ξεκίνησε εκ νέου την κατασκευή πινάκων με χρήση της ακτίνας 10^{15}, την οποία ολοκλήρωσε ο Bartholomeus Pitiscus. Επιπλέον ο Rheticus όρισε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

[48] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[49] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[50] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 406.

για πρώτη φορά δίχως την χρήση κύκλου αλλά ως σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών ορθογωνίου τριγώνου[51].

1.4.8 BARTHOLOMEUS PITISCUS

O Pitiscus (1561-1613) έγραψε το έργο με τίτλο *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum* (*Book of Trigonometry, or the Measurement of Triangles*) στο οποίο εμφανίζεται για πρώτη φορά ο όρος Τριγωνομετρία[52].

1.4.9 THOMAS FINCK

Στον Thomas Finck (1561-1656) οφείλονται οι όροι εφαπτομένη (tangent) και τέμνουσα (secant) που πρωτοδημοσιεύτηκαν στο έργο του *Geometria rotundi.* Επιπλέον σε αυτό εμφανίζεται ο τύπος $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$[53].

1.4.10 EDWARD GUNTER

Στο έργο του *Canon triangulorum* εμφανίζονται για πρώτη φορά οι όροι συνημίτονο (cosinus) και συνεφαπτομένη (cotangens), που σημαίνουν αντίστοιχα ημίτονο και εφαπτομένη του συμπληρωματικού τόξου.

1.4.11 TCYHO BRAHE

O Δανός Tycho Brahe (1546-1601) έκανε χρήση του τεχνάσματος της προσθαφαίρεσης, με βάση το οποίο μετατρέπεται ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση σε πρόσθεση ή αφαίρεση. Για παράδειγμα, το γινόμενο των 63,784 με το 71,833 μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$2\cos x\cos y=\cos(x-y)+\cos(x+y)$$

Θέτοντας $\cos x=31{,}892$ (1) και $\cos y=71.833(2)$ τότε

$$63{,}784.71{,}833=2.31{,}892.71{,}833=2\cos x\cos y=\cos(x-y)+\cos(x+y)$$

[51] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[52] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[53] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

Όμως από (1) και (2) οι γωνίες x, y είναι γνωστές βάση πινάκων της τότε εποχής συνεπώς και τα cos(x-y), cos(x+y). Εικάζεται ότι το τέχνασμα αυτό υπήρξε ένα από τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων[54].

1.5 ΝΕΟΤΕΡΗ ΕΠΟΧΗ

Από την εποχή του Regiomontanus και έπειτα, η Τριγωνομετρία εξελίχθηκε σε αυτόνομο κλάδο των μαθηματικών. Το επόμενο σημαντικό βήμα στην εξέλιξη της, ήταν η καθιέρωση του συμβολισμού με γράμματα, αποφεύγοντας έτσι τις μακροσκελείς διατυπώσεις και αποδείξεις που υπήρχαν έως τότε. Σε αυτό συντέλεσε η ανάπτυξη της συμβολικής άλγεβρας κατά τον 16^{o} αιώνα και έπειτα. Πρωτοπόρος σε αυτήν την εξέλιξη υπήρξε ο Francois Viete.

1.5.1 FRANCOIS VIETE

Ο Γάλλος Francois Viete (1540-1603) γνωστός και ως Franciscus Vieta στα λατινικά, συντέλεσε στη εξέλιξη της Τριγωνομετρίας. Παρακάτω παρατίθενται τα έργα του τα οποία σχετίζονται με την Τριγωνομετρία.

Α. Το 1579 εκδόθηκε το έργο του με τίτλο *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* (Μαθηματικός κανόνας, ή κανόνας περί των τριγώνων, με παραρτήματα). Σε αυτό υπάρχουν πίνακες για τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, υπολογισμένους ανά λεπτό της μοίρας με χρήση ακτίνας 10^5 [55]. Επιπλέον, βρίσκουμε για πρώτη φορά στον δυτικό κόσμο, συστηματική παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης επίπεδων και σφαιρικών τριγώνων, με χρήση και των έξι τριγωνομετρικών συναρτήσεων[56].

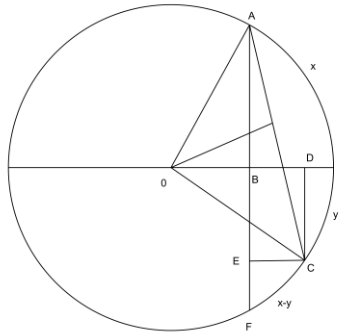
Β. Το 1593 δημοσίευσε ένα άλλο έργο με τίτλο *Variorum de rebus mathematicis responsorum,* στο οποίο υπάρχουν οι αποδείξεις τριών τύπων, γνωστοί ως τύποι της προσθαφαίρεσης, οι οποίοι ήταν γνωστοί στον Johann Werner (Βλέπε 1.4.5) όπως παλιότερα και στους Άραβες. Παρακάτω αποδεικνύεται ο τύπος

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

---

[54] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[55] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 338-339.
[56] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 86.

Έστω $\sin x = AB$ και $\sin y = CD$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ισχύει

$$\sin x + \sin y = AB + CD = AE = AC\cos\frac{x-y}{2} \quad (1)$$

Όμως $AC = 2\sin\frac{x+y}{2}$, συνεπώς από την (1) προκύπτει

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Θέτοντας $\frac{x+y}{2} = A$ και $\frac{x-y}{2} = B$ προκύπτει

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

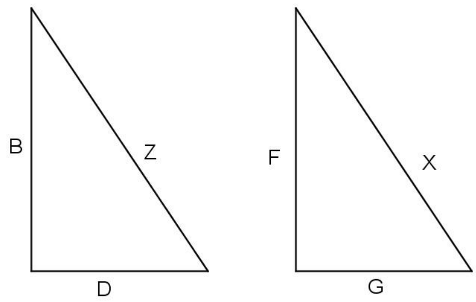
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται οι $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ και $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$.

Επίσης στο ίδιο έργο ο Viete διατύπωσε τον νόμο των εφαπτομένων στη σύγχρονη μορφή του $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$[57].

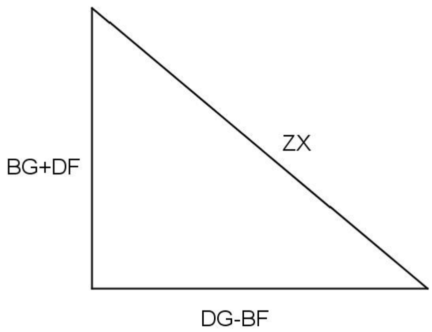
Γ. Το *Notae priores ad logisticen speciosam* ήταν ένα ακόμη έργο Τριγωνομετρικού περιεχομένου. Σε αυτό ο Viete ανέπτυξε μια μέθοδο βάση της οποίας όταν είναι γνωστές οι πλευρές ενός αρχικού ορθογωνίου τριγώνου, μπορεί να κατασκευαστεί ένα νέο ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου μια οξεία γωνία θα είναι πολλαπλάσιο μιας οξείας γωνίας του αρχικού (με την προϋπόθεση ότι θα προκύψει μικρότερη της ορθής). Από τριγωνομετρική σκοπιά αυτό έχει ενδιαφέρον καθώς από τις σχέσεις ανάμεσα στα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών των τριγώνων προκύπτουν οι τριγωνομετρικοί τύποι των πολλαπλάσιων μιας γωνίας. Για παράδειγμα, για τους τύπους του διπλάσιου τόξου, ξεκινώντας με δύο ορθογώνια τρίγωνα με δοσμένες πλευρές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τότε λόγω της ταυτότητας

$$(BG+DF)^2 + \left(DG-BF\right)^2 = \left(B^2+D^2\right)\left(F^2+G^2\right)$$

[57] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 339-340.



προκύπτει ένα νέο ορθογώνιο, βλέπε παρακάτω σχήμα.



Για την γωνία του x ισχύει $x = \varphi_1 + \varphi_2$ κάτι που μπορεί να διαπιστωθεί με τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων. Έτσι θεωρώντας τα δύο αρχικά τρίγωνα ίσα, τότε το τρίγωνο του προηγουμένου σχήματος έχει πλευρές $D^2 - B^2$, κάθετη πλευρά $2BD$ και υποτείνουσα Z^2 και ισχύει ότι $x = 2\varphi_1$. Συνεπώς

$$\cos x = \cos 2\varphi_1 = \frac{D^2 - B^2}{Z^2} = \frac{D^2}{Z^2} - \frac{B^2}{Z^2} = \cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται οι τύποι της τριπλάσιας γωνίας, θεωρώντας το αρχικό τρίγωνο και αυτό με την διπλάσια γωνία. Οι τριγωνομετρικοί τύποι που δίνουν τα πολλαπλάσια μιας γωνίας βρίσκουν εφαρμογή στην επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού[58].

Δ. Στο έργο με τίτλο *Responsum* (*Απόκρισης*), περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο ο Viete έλυσε την εξίσωση 45^{ου} βαθμού.

1.5.2 JOHN NAPIER

Ο John Napier (1550-1617) είναι γνωστός για την ανακάλυψη των λογαρίθμων. Το αξιοσημείωτο σχετικά με το έργο του Napier που αφορά την Τριγωνομετρία, έχει να

[58] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 371-372.

κάνει με τη χρήση των λογαρίθμων στην επίλυση επίπεδων και σφαιρικών τριγώνων. Χαρακτηριστικός είναι ο τύπος

$$\log\alpha = \log\sin A + \log c \text{ και } \log\alpha = \log\tan A + \log b$$

Επίσης ο

$$\log(\alpha - b) - \log(\alpha + b) = \log\tan\frac{A-B}{2} - \log\tan\frac{A+B}{2}$$

που είναι ισοδύναμος με τον νόμο των εφαπτομένων. Επιπλέον επιλύει τρίγωνα με χρήση της τριγωνομετρικής συνάρτησης παρημίτονο, μέσω του παρακάτω τύπου

$$\left[\frac{1-\cos(\alpha+b)}{2} - \frac{1-\cos(\alpha-b)}{2}\right]\left[\frac{1-\cos C}{2}\right] + \frac{1-\cos(\alpha-b)}{2} = \frac{1-\cos c}{2}$$

Τέλος οι τύποι $\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και $\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, γνωστοί ως αναλογίες του Napier, χρησιμοποιούνται για την επίλυση σφαιρικών τριγώνων[59].

1.5.3 BONAVENTURA CAVALIERI

Ο Ιταλός Bonaventura Cavalieri (1598-1647) στο έργο *Directorium generale uranimetricum*, τελειοποίησε τις εφαρμογές των λογαρίθμων στην Τριγωνομετρία. Σε αυτό περιέχονται πίνακες λογαρίθμων σε οκτώ μέρη των τριγωνομετρικών γραμμών, ημιτόνου, εφαπτομένης, τέμνουσας, παρημιτόνου[60]. Χρησιμοποίησε τους όρους sinus secundus για το συνημίτονο, tangents secundus για την συνεφαπτομένη, και secant secundus για την τέμνουσα, όροι που χρησιμοποιήθηκαν πρώτα από τον Ιταλό αστρονόμο Giovani Magini (1555-1617), στο έργο του *Primum mobile duodecim libris contentum*[61].

1.5.4 WIlIIAM OUGHTRED

Ο Άγγλος William Oughtred (1573-1660) έγραψε το έργο *Trigonometrie or The manner of calculating the Sides and Angles of Triangles.* Αυτό βρέθηκε στο Λονδίνο το 1657, γραμμένο στα αγγλικά και τα λατινικά. Πρόκειται για ένα συμπυκνωμένο έργο στο οποίο ο Oughtred ασχολείται τόσο με την επίπεδη όσο και με την σφαιρική

[59] Julian Lowell Coolidge, The Mathematics Of Great Amateurs, Dover Publications, 1963, σελ 79-82.
[60] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 361.
[61] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

Τριγωνομετρία. Θεωρείται από τους πρώτους που πρότεινε και καθιέρωσε τον συγκεκομμένο συμβολισμό με γράμματα. Ήδη από το 1632 ο Oughtred στο έργο του *Circles of proportion* είχε προτείνει τον συμβολισμό sin=sine, tan=tangent, sec=secant και στη συνέχεια στο *Trigonometrie*, καθιέρωσε τον συμβολισμό
s=sine, s.co=cosine (sine complent),
t=tangent, t.co=cotangent,
se=secant, se.co=cosecant[62].

1.5.5 ALBERT GIRARD

Στο βιβλίο με τίτλο *Traite succinct de la trigonometrie* (*Σύνοψη μαθημάτων Τριγωνομετρίας*) του Γάλλου Albert Girard (1595-1633), περιέχονται οι σχέσεις που είναι απαραίτητες για την επίλυση επίπεδων τριγώνων, όπως λόγου χάρη το Πυθαγόρειο θεώρημα, ο Νόμος των ημιτόνων και των συνημιτόνων και οι τύποι της προσθαφαίρεσης. Επίσης στο έργο τονίζεται ότι ο σκοπός της Τριγωνομετρίας είναι η εύρεση των στοιχείων ενός τριγώνου όταν είναι γνωστά τρία στοιχεία του, που δεν είναι όλα οι γωνίες του. Τέλος, όσον αφορά τη σφαιρική Τριγωνομετρία αναφέρονται οι έξι θεμελιώδεις περιπτώσεις επίλυσης σφαιρικών τριγώνων, τα θεωρήματα ημιτόνων και συνημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα και η έννοια του συμπληρωματικού ενός ορθογωνίου τριγώνου[63].

1.6 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού από τα μέσα του 17ου αιώνα και έπειτα, είχε ως αποτέλεσμα ο κλάδος της Τριγωνομετρίας να αρχίσει να παίρνει μια πιο αναλυτική μορφή. Η τελική διαμόρφωση της τόσο από άποψη περιεχομένου όσο και από άποψη συμβολισμού οφείλεται στον Euler.

1.6.1 GIlES PERSONNES DE ROBERVAL

Ο Gilles Personnes de Roberval (1602-1675) σχεδίασε μισό τόξο μιας ημιτονοειδούς καμπύλης και χρησιμοποιώντας την μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri, απέδειξε

[62] Florian Cajori, William Oughtred, A Great Seventeenth Century Teacher Of Mathematics, 1916, σελ. 35, 36.
[63] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

ένα ισοδύναμο του τύπου $\int_{\alpha}^{\beta}\sin x dx=\cos\beta-\cos\alpha$ [64], σε σύγχρονη γλώσσα.

1.6.2 JAMES GREGORY

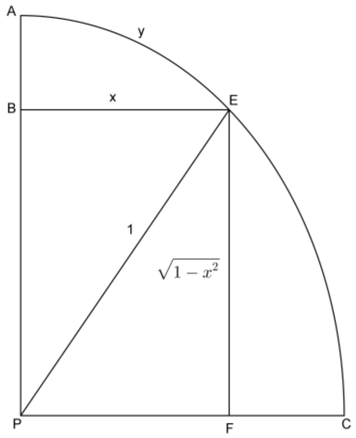
Ο Σκωτζέζος James Gregory (1638-1675) συνεργάστηκε στην Ιταλία με τον Stefano degli Angeli (1623-1697), κατά το χρονικό διάστημα (1664-1668), στην διάρκεια του οποίου απέκτησε την ευχέρεια να χειρίζεται τις απειροσειρές και την αντίληψη της δύναμης του αναπτύγματος συναρτήσεων σε σειρές[65]. Τα αναπτύγματα σε σειρές των συναρτήσεων ημιτόνου, συνημιτόνου καθώς και των αντιστρόφων τους, τα ανακάλυψε πρώτος και τα δημοσίευσε στο έργο του *Vera circuli et hyperbolae Quadratura* το 1667[66]. Λίγο αργότερα το 1671 δημοσίευσε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\arctan$, τη γνωστή ως σειρά του Gregory[67]. Επίσης γνώριζε τα αναπτύγματα των συναρτήσεων tan, sec, arcsec[68].

1.6.3 ISAAC NEWTON

Ο δημιουργός των *Principia* (1687), γεννήθηκε το 1642 στο Woolsthorpe και πέθανε το 1727 στο Kensington. Από το 1663 ο Newton ξεκίνησε να μελετά τα έργα σπουδαίων μαθηματικών, όπως του Ευκλείδη, του Viete και το *Arithmetica Infinitorum* του Wallis, που τον βοήθησαν στην κατανόηση της Τριγωνομετρίας. Ειδικότερα η μελέτη του τελευταίου οδήγησε τον Newton στο να ασχοληθεί με τις απειροσειρές. Έτσι στο έργο του *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Ανάλυση σε εξισώσεις με άπειρο πλήθος όρων) του 1669, ο Newton όπως νωρίτερα και ο James Gregory, συμπεριέλαβε τις σειρές του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Αυτό το πέτυχε υπολογίζοντας την σειρά της συνάρτησης arcsin γεωμετρικά. Πιο συγκεκριμένα θεωρώντας τον μοναδιαίο κύκλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και $\sin y = x$ όπου ΒΕ=x, τότε y= arcsinx. Ισχύει ότι

---

[64] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[65] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 421.
[66] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.
[67] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 493.
[68] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 422.



το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΡΕ ισούται με $\frac{1}{2}\arcsin x$ καθώς και με $\int_0^x \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$. Συνεπώς $y = \arcsin x = 2\int_0^x \sqrt{1-x^2}dx - x\sqrt{1-x^2}$. Όμως $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots$ (την οποία γνώριζε ο Newton), ολοκληρώνοντας όρο προς όρο και πολλαπλασιάζοντας με x, προκύπτει η σειρά

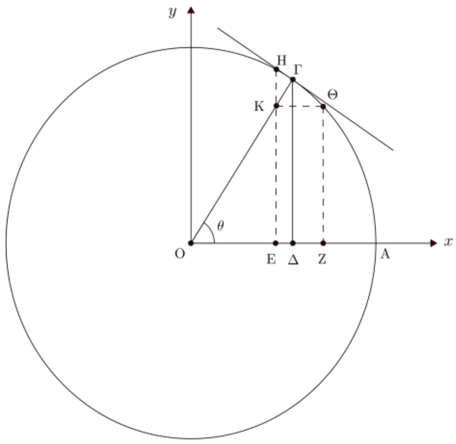
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \text{ (1)}$$

Τότε για $y = \arcsin x$ (2) με αντιστροφή, προκύπτει $x = \sin y$, οπότε θέτοντας $x = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_n y^n + \dots$ στην (1), η (2) θα δώσει μια ταυτοτική σχέση ως προς y. Έτσι με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών υπολογίζονται τα α_1, α_2,…, α_n,... και έτσι προκύπτει η σειρά του ημιτόνου. Έπειτα από την ταυτότητα $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ έπεται η σειρά του συνημιτόνου[69].

1.6.4 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

O Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) γεννήθηκε στη Λειψία και εκτός των μαθηματικών σπούδασε θεολογία, νομικά και φιλοσοφία. O Leibniz όπως και ο Newton, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο είχε υπολογίσει τη σειρά για το ημίτονο και το συνημίτονο. Θεωρώντας σε ένα μοναδιαίο κύκλο, τόξο ΑΓ ίσο με θ, την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ και ένα μικρό τμήμα ΕΖ=dx (βλέπε παρακάτω σχήμα),

[69] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 504, 506, 508.



τότε το εφαπτόμενο τμήμα ΗΘ μπορεί να θεωρηθεί ίσο με το τόξο dθ που ορίζουν οι ευθείες ΕΗ και ΖΘ. Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΟΓΔ και ΘΗΚ έπεται ότι $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΚΘ}}$ ισοδύναμα $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d\theta}{dx}$ (1). Όμως $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ και $\cos\theta=x$ άρα από την (1) προκύπτει ότι $d\theta=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Η παράσταση $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ γράφεται ως απειροσειρά, χρησιμοποιώντας την διαδικασία υπολογισμού της $\sqrt{1-x^2}$ ή από το Διωνυμικό θεώρημα που ο Newton κοινοποίησε στον Leibniz μέσο του Oldenburg το 1676. Εύκολα προκύπτει ότι

$$d\theta=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\ldots\right)dx$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία, προκύπτει η σειρά της arcsin. Έπειτα με όμοιο τρόπο όπως ο Newton, ο Leibniz υπολόγισε τις σειρές του ημιτόνου και του συνημιτόνου[70].

1.6.5 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ BERNOULI

Ο Jean Bernouli (1667-1748) και ο Jacques Bernouli (1623-1708) ανακάλυψαν τους τύπους[71]

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots$$

$$\sin n\varphi=\frac{n}{1!}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots$$

[70] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 440, 441.
[71] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 462.

Ο Viete είχε αποδείξει τους τύπους για όλους τους ακεραίους n μέχρι 10.[72] Επίσης ο Jean Bernouli το 1702, ανακάλυψε τον τύπο

$$\arctan z = \frac{1}{i}\ln\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$ [73]

Τέλος ο Daniel Bernouli (1700-1782) γιός του Jean, είχε την ιδέα ότι κάθε συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως τριγωνομετρική σειρά

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + ... + \alpha_n \cos nx + ... + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...$$

1.6.6 ROGER COTES

Ο Roger Cotes (1682-1716) υπήρξε πρωτοπόρος όσον αφορά τις εφαρμογές της Τριγωνομετρίας στους μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι το 1714 στο άρθρο του *Philosophical Trancactions,* δημοσίευσε την ισότητα $i\varphi = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Αντί για το όνομα του, φέρει το όνομα του Euler ο οποίος το διατύπωσε στην εκθετική μορφή $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$[74]. Μετά το θάνατο του Cotes κυκλοφόρησε το 1722, το έργο του *Harmonia mensurarum,* το οποίο αποτελεί ένα σύμπιλημα άρθρων του. Στο έργο του περιλαμβάνονται οι τύποι των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $\cos$, $\sin$, $\sec$ και επιπλέον επισημαίνεται η περιοδικότητα τους[75].

1.6.7 ABRAHAM DE MOIVRE

Γεννήθηκε το 1667 στην Καμπανία της Γαλλίας και πέθανε το 1754. Το μαθηματικό του έργο κάλυψε δύο περιοχές, τη θεωρία πιθανοτήτων και το πεδίο Άλγεβρας, Τριγωνομετρίας. Το γνωστό Θεώρημα του De Moivre, δεν αναφέρεται ξεκάθαρα σε κάποιο από τα έργα του με την σημερινή του μορφή. Ωστόσο ο De Moivre έκανε χρήση τύπων από τους οποίους μπορεί να προκύψει άμεσα το θεώρημα. Στο άρθρο του το 1707, στο επίσημο περιοδικό της Βασιλικής Εταιρείας, *Philosophical Transactions,* περιλαμβάνεται ο τύπος

[72] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 86.
[73] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 462.
[74] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 467.
[75] Γιάννης Θωμαίδης, Μαθηματικής Επιθεώρησης, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi + \sqrt{-1}\cos n\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi - \sqrt{-1}\cos n\varphi}$ όπου n, περιττός ακέραιος. Με πολλαπλασιασμό του προηγούμενου τύπου με i και πρόσθεση στον $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\varphi - \sqrt{-1}\sin n\varphi}$, τον οποίο δημοσίευσε το 1730, προκύπτει το θεώρημα του. Επιπλέον στο άρθρο, *De sectione Anguli Philosophical Transactions* του 1722, θεωρώντας τις εξισώσεις $1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t$, $1-2z+z^2=-2zx$ και θέτοντας όπου $x=1-\cos\varphi$ και $t=1-\cos n\varphi$ και απαλείφοντας το z, προκύπτει το θεώρημα του De Moivre για n, περιττό ακέραιο. Τέλος στο έργο του *Miscellanea Analytica* (Διάφορα θέματα Αναλύσεως) του 1730, δημοσίευσε τον τύπο που δίνει την νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού, με χρήση της τριγωνομετρικής μορφής του,[76]

$$\sqrt[n]{\cos A \pm i\sin A} = \cos\frac{2k\pi \pm A}{n} + i\sin\frac{2k\pi \pm A}{n}, k = 0,1,2,3,...$$

Επίσης ο De Moivre ολοκλήρωσε το έργο που άφησε ημιτελές ο Cotes λόγω του θανάτου του, δίνοντας τον τύπο, γνωστό ως η «ιδιότητα του κύκλου»

$$x^{2n}+1=\left[x^2-2x\cos\frac{\pi}{2n}+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2n}+1\right]...\left[x^2-2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+1\right]$$ [77]

1.6.8 LEONHARD EULER

Γεννήθηκε στη Βασιλεία το 1707 και πέθανε στην Αγία Πετρούπολη το 1782[78]. Συνέβαλε σημαντικά στο να εξελιχθεί η Τριγωνομετρία στην οριστική της μορφή τόσο από άποψη περιεχομένου όσο και από άποψη συμβολισμού. Τα κυριότερα κομμάτια του έργου του που επιβεβαιώνουν την ουσιαστική συμβολή του παρατίθενται παρακάτω.

A. Ανακάλυψε τον τύπο $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Για την απόδειξη, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} =$

---

[76] David Eugene Smith, A Source Book In Mathematics, First Edition, σελ 440-446.
[77] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 116.
[78] Victor Katz, A History of Mathematics An indroduction, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998, σελ. 553.

$$= 8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \ldots$$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία n φορές προκύπτει

$$\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\ldots\cos\frac{x}{2}$$

Από τον τελευταίο τύπο υποθέτοντας ότι $x \neq 0$ προκύπτει

$$\sin x = x\left[\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right]\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο ενώ το x παραμένει σταθερό έπεται ότι

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Θέτοντας στον τύπο $x = \frac{\pi}{2}$ και κάνοντας χρήση του τύπου $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ προκύπτει η ισότητα $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}{2}\ldots$.

Η προηγουμένη ισότητα ανακαλύφθηκε πρώτα από τον Viete το 1593 και η απόδειξη της βασίστηκε στον υπολογισμό των λόγων των εμβαδών κανονικών πολυγώνων με πλευρές n και 2n, εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο[79].

B. O Euler, πρώτος ανακάλυψε τον τύπο $\sin x = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$ ο οποίος προκύπτει λαμβάνοντας υπόψην ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως γινόμενο παραγόντων της μορφής $\left(1-\frac{x}{x_i}\right)$, όπου x_i οι ρίζες του πολυωνύμου. Έτσι θεωρώντας τις ρίζες του $\sin$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, … και παραλείποντας την ρίζα μηδέν, προκύπτει η παραπάνω έκφραση του ημιτόνου[80]. Στην πραγματικοτητα, ο Euler βρήκε το $\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$, όταν $x \neq 0$. Θέτοντας στη τελευταία

[79] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 184.
[80] Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Volume 2, σελ. 449.

όπου $x=\frac{\pi}{2}$, προκύπτει το άπειρο γινόμενο $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\ldots$ το οποίο είχε αποδείξει ο Wallis το 1655. Επίσης το συνημίτονο, όπως και το ημίτονο, μπορεί να εκφραστεί ως άπειρο γινόμενο από τον τύπο

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ .$$

Ανάλογος τύπος προκύπτει για την εφαπτομένη, διαιρώντας τις δύο παραπάνω ισότητες. Έτσι $\tan x=\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots}{\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots}$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα η προηγούμενη παίρνει την μορφή

$$\tan x=8x\left[\frac{1}{\pi^2-4x^2}+\frac{1}{9\pi^2-4x^2}+\frac{1}{25\pi^2-4x^2}+\ldots\right]$$

Από την τελευταία με $x=\frac{\pi}{2}$ προκύπτει η έκφραση

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ .$$

Ο τύπος αυτός ανακαλύφθηκε από τον μαθηματικό James Gregory (βλέπε 1.6.4 Gregory), θέτοντας στην σειρά της $\arctan$ όπου $x=1$, αλλά ανεξάρτητα και από τον Leibniz. Στον Euler οφείλεται και η ανακάλυψη της σειράς $\cot x=\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ η οποία προκύπτει αν ξεκινήσουμε από τον τύπο

$$\cot 2x=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}=\frac{\cot x-\tan x}{2}$$

Αν $x\neq n\frac{\pi}{2}$ εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον παραπάνω τύπο προκύπτει

$$\cot x=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cot\frac{x}{4}-\tan\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(\cot\frac{x}{2^n}-\tan\frac{x}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}}-\ldots-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}.$$

Αν $n \to \infty$ τότε $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} \to \frac{1}{x}$ άρα $\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ [81].

Γ. Στο έργο του *Introductio in analysin infimitorum* (Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση) του 1748, αποδεικνύεται το Θεώρημα του De Moivre για κάθε n πραγματικό, και επιπλέον αποδεικνύονται οι ταυτότητες

$$e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}\sin u \text{ και } e^{-u\sqrt{-1}} = \cos u - \sqrt{-1}\sin u \quad (1)$$

από τις οποίες προκύπτουν οι

$$\cos u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2} \text{ και } \sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$ [82]

1.6.9 JEAN-BAPTISTE-JOSEPH DE FOURIER

Γεννήθηκε το 1768 στην Auxerre και πέθανε το 1830. Στο έργο του, Theorie analytique de la Chaleur (Αναλυτική θεωρία της θερμότητας) το 1822, καθιερώνεται η χρήση των τριγωνομετρικών σειρών στην ανάλυση με το όνομα σειρές Fourier. Έτσι κάθε συνάρτηση f της μορφής

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1\cos x + \alpha_2\cos 2x + ... + \alpha_n\cos nx + ... + b_1\sin x + b_2\sin 2x + ... + b_n\sin nx$$

ονομάζεται σειρά Fourier, αν για τους συντελεστές α_0, α_1, …, α_n,…, b_1, b_2, …, b_n,…, ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$ [83].

[81] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 202, 203, 205, 206.
[82] David Eugene Smith, A Source Book In Mathematics, First Edition, σελ 450, 451.
[83] Eli Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελ. 250-256.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στα τέλη του $16^{ου}$ αιώνα η ανάπτυξη της επιστήμης σε διάφορα πεδία (αστρονομία, ναυσιπλοΐα), δημιούργησε την ανάγκη επίμονων αριθμητικών υπολογισμών. Για να απλοποιηθεί το έργο των επιστημόνων από τους επίμονους υπολογισμούς επινοήθηκαν οι λογάριθμοι, με την χρήση των οποίων οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ανάγονται στις απλούστερες πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Ένας πρόδρομος αυτής της αναγωγής φαίνεται στην σχέση $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$, στην οποία δόθηκε το όνομα της προσθαφαίρεσης. Τα πρώτα βήματα για το θεωρητικό υπόβαθρο των λογαρίθμων έγιναν μέσω του συσχετισμού των όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου. Στην συνέχεια διαπιστώθηκε η σχέση των λογαρίθμων με το εμβαδόν του υπερβολικού χωρίου και των άπειρων σειρών, ενώ ο Euler αντιμετώπισε τους λογάριθμους ως την αντίστροφη διαδικασία της εκθετικής συνάρτησης. Τέλος, κατά την διάρκεια του $18^{ου}$ αιώνα τέθηκε το θέμα των λογαρίθμων των αρνητικών και φανταστικών αριθμών, ξεκινώντας έτσι η επέκταση των εκθετικών και λογαριθμικών εννοιών μιγαδικής μεταβλητής.

2.1 MICHAEL STIFEL

Ο Γερμανός μαθηματικός Michael Stifel (1480-1567), περιγράφει στο βιβλίο του *Arithmetica Integra* του 1544, τον συσχετισμό των όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου. Οι πρόοδοι που χρησιμοποίησε είναι

q_n	0	1	2	3	4	5	…
p_n	1	2	4	8	16	32	…

Θέτοντας σε αντιστοιχία ένα προς ένα τους όρους των δύο προόδων έπεται ότι

1. Ο πολλαπλασιασμός δύο όρων της p_n ανάγεται στην πρόσθεση των αντίστοιχων όρων της q_n.

2. Η διαίρεση δύο όρων της p_n ανάγεται στην αφαίρεση των αντίστοιχων όρων της q_n.

3. Η ύψωση ενός όρου της p_n σε δύναμη ανάγεται σε πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου όρου της q_n με τον εκθέτη της δύναμης.

4. Η εξαγωγή ρίζας ενός όρου της p_n ανάγεται στη διαίρεση του αντίστοιχου όρου της q_n με τον δείκτη της ρίζας.

Με σύγχρονη γλώσσα, οι όροι της q_n είναι οι λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της p_n με βάση το 2.[84]

2.2 JOHN NAPIER

Γεννήθηκε στο Merchiston του Εδιμβούργου το 1550 και πέθανε το 1617. Οι μελέτες του για τους λογάριθμους δημοσιεύτηκαν σε δύο βιβλία. Το πρώτο το 1614 με τίτλο *Mirifici logarithmorum canonis description,* το οποίο περιέχει ένα πίνακα λογαρίθμων και οδηγίες για την χρήση τους στους υπολογισμούς. Το δεύτερο με τίτλο *Mirifici logarithmorum canonis construction,* γράφτηκε πριν από το πρώτο, αλλά δημοσιεύτηκε αργότερα το 1619 και περιέχει μια εξήγηση της μεθόδου κατασκευής του πίνακα λογαρίθμων, καθώς και τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης[85]. Παρακάτω παρατίθενται οι ορισμοί της έννοιας του λογαρίθμου στα δύο έργα του. Αρχικά στο *Mirifici logarithmorum canonis construction* ο Napier, για την απλοποιήση των υπολογισμών κατά την επίλυση επίπεδων και σφαιρικών τριγώνων, κατασκευάζει πίνακες λογαρίθμων ημιτόνων αριθμών. Έτσι δίνεται ο ακόλουθος ορισμός: «*ο λογάριθμος ενός δοσμένου ημιτόνου είναι ο αριθμός που έχει αυξηθεί αριθμητικά με την ίδια ταχύτητα πάντοτε, όπως αυτή με την οποία η ακτίνα άρχισε να μειώνεται γεωμετρικά, και ταυτόχρονα όπως η ακτίνα είχε μειωθεί στο συγκεκριμένο ημίτονο»*[86] .

Με σύγχρονη γλώσσα, έστω το ευθύγραμμο τμήμα TS μήκους 10^7 και OL μια ημιευθεία. Έστω δύο σημεία P, Q, τα όποια τη χρονική στιγμή t=0 κινούνται κατά μήκος των δύο γραμμών ταυτόχρονα, το P με αρχική ταχύτητα 10^7 έτσι ώστε σε κάθε

[84] Michaele Stifelio, Arithmeti Ca Integra, σελ. 249-250.
[85] John Napier, The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, Translated from Latin to English by W.R. Macdonald, Edinburg and London, 1889, σελ. xi, xvi.
[86] John Napier, The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, Translated from Latin to English by W.R. Macdonald, Edinburg and London, 1889, σελ. 19.

θέση η ταχύτητα να είναι ανάλογη της απόστασης PS και το Q με σταθερή ταχύτητα 10^7. Η ταχύτητα του P ελλατώνεται έως ότου μηδενιστεί στο S. Αν την χρονική στιγμή t το σημείο P είναι σε απόσταση x από το S και το Q σε απόσταση y από το O, τότε ορίζεται το y ως ο λογάριθμος του PS[87]. Το παραπάνω μοντέλο μηχανικής ουσιαστικά προσδιορίζει την αντιστοιχία μεταξύ των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου. Η γεωμετρική πρόοδος περιγράφεται από τον αναδρομικό τύπο

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = 10^7 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \dfrac{\alpha_\nu}{10^7} \end{array}\right. , \ \nu = 0,1,2,...$$

Ισοδύναμα, έπεται ότι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)$ δηλαδή ο λόγος της προόδου ισούται με $\lambda = 0.9999999$ συνεπώς ο γενικός όρος της είναι

$$\alpha_\nu = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^\nu, \ \nu = 0, 1, 2,...$$

Η αριθμητική πρόοδος που έρχεται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τη γεωμετρική πρόοδο, περιγράφεται από τον τύπο $\beta_\nu = \nu, \nu = 0, 1, 2,...$. Οι όροι της γεωμετρικής προόδου παριστάνουν τις διαδοχικές τιμές των ημιτόνων, ενώ οι όροι της αριθμητικής προόδου τους λογάριθμους αυτών. Η επιλογή $\log 10^7 = 0$ έχει ως στόχο την απλοποίηση των υπολογισμών, ωστόσο έχει το μειονέκτημα ότι οι λογάριθμοι των ημιτόνων των γωνιών από 0^o έως 90^o προκύπτουν θετικοί, ενώ στους σύγχρονους πίνακες λογαρίθμων είναι αρνητικοί. Ο προηγούμενος ορισμός συνδέεται με αυτό που σήμερα καλούμε φυσικό λογάριθμο. Η σχέση $\alpha_\nu = 10^7 \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^\nu$ γράφεται

$$\frac{\alpha_\nu}{10^7} = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{\nu}{10^7}}$$

Θέτοντας $x = \dfrac{\alpha_\nu}{10^7}$ (1) και $y = \dfrac{\nu}{10^7}$ (2) στην προηγούμενη ισότητα τότε

$$x = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^y \quad (3)$$

[87] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 6.

Όμως $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}=0.367879422...$ ενώ $\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{1}{e}=0.3678794441...$. Έτσι η (3) με ικανοποιητική ακρίβεια παίρνει την μορφή $x=\left(\frac{1}{e}\right)^{y}$ ισοδύναμα $y=\log_{\frac{1}{e}}x$ δηλαδή $y=-\ln x$. Από τις σχέσεις (1) και (2) και την τελευταία έπεται ότι, διαιρώντας τους όρους της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου του Napier με το 10^7, οι λογάριθμοι του Napier είναι αντίθετοι των φυσικών λογαρίθμων[88]. Στο *Mirifici logarithmorum canonis description* δίνεται ένας δεύτερος ορισμός:*«οι λογάριθμοι είναι οι αριθμοί οι οποίοι αντιστοιχούν στους ανάλογους αριθμούς και έχουν ίσες διαφορές»*. Από τον ορισμό αυτόν προέρχεται η λέξη λογάριθμος, που είναι ελληνικής προέλευσης και σημαίνει ο αριθμός που μετράει τους λόγους. Πριν εφεύρει τον όρο λογάριθμο ο Napier χρησιμοποίησε τον όρο numerus artificialis. Τέλος, το 1614 δίνεται ένας ακόμη ορισμός:*«Οι λογάριθμοι μπορούν να ονομαστούν ίσων διαφορών σύντροφοι των αναλόγων αριθμών»*[89].

2.3 JOST BURGI

O Jost Burgi (1552-1632) υπήρξε από τους πιο φημισμένους ωρολογοποιούς της εποχής του αλλά και εξαιρετικός μαθηματικός. Εφήυρε τους λογάριθμους ανεξάρτητα από τον Napier, ωστόσο οι πίνακες του δεν γνώρισαν μεγάλη διάδοση καθώς είχαν ήδη δημοσιευτεί τα έργα του Napier. Το 1620 στο έργο *Progress Tabulen* δημοσιεύτηκαν οι πίνακες του, χωρίς να δίνονται εξηγήσεις για τον τρόπο κατασκευής τους. Όπως ο Napier έτσι και ο Burgi έκανε χρήση των προόδων για τον ορισμό των λογαρίθμων[90]. Έτσι με σύγχρονη γλώσσα η γεωμετρική πρόοδος που χρησιμοποίειται περιγράφεται από τον αναδρομικό τύπο

$$\begin{cases}\alpha_0=10^8\\ \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\dfrac{\alpha_\nu}{10^4}\end{cases},\ \nu=0,1,2,...$$

---

[88] Γ.Θωμαίδης, Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας, Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ, τεύχος 13, σελ. 1-30.
[89] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 7.
[90] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 7, 8.

Ισοδύναμα, έπεται ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$ δηλαδή ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=1.0001$, συνεπώς ο γενικός όρος της είναι ο $\alpha_\nu=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu$, $\nu=0,1,2,...$

Στην γεωμετρική πρόοδο αντιστοιχίζεται ένα προς ένα, η αριθμητική πρόοδος με γενικό τύπο $\beta_\nu=10\nu$, $\nu=0,1,2,...$. Ο προηγούμενος ορισμός συνδέεται με αυτό που σήμερα καλούμε φυσικό λογάριθμο. Η σχέση $\alpha_\nu=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu$ γράφεται

$$\frac{\alpha_\nu}{10^8}=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{\beta_\nu}{10^5}}$$

Θέτοντας

$x=\frac{\alpha_\nu}{10^8}$ (1) και $y=\frac{\beta_\nu}{10^5}$ (2) στην προηγούμενη ισότητα τότε

$$x=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{y} \quad (3)$$

Όμως ο αριθμός $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ =2.718145927… αποτελεί μια καλή προσέγγιση του αριθμού e. Έτσι από την (3) με ικανοποιητική προσέγγιση έπεται ότι $x=e^y$, δηλαδή $y=\ln x$ (4). Από τις σχέσεις (1), (2), (4) προκύπτει ότι το σύστημα προόδων του Burgi ισοδυναμεί με το σύστημα των φυσικών λογαρίθμων. Τέλος, ο Burgi δεν έκανε χρήση του όρου λογάριθμος για τους όρους της αριθμητικής προόδου, αλλά τους ονόμαζε κόκκινους αριθμούς, από το χρώμα της μελάνης με το οποίο είχαν τυπωθεί στους πίνακες[91].

2.4 HENRY BRIGGS

Ο Henry Briggs (1561-1631), καθηγητής μαθηματικών, επισκέφτηκε το 1615 τον Napier και συμφώνησαν ότι οι πίνακες θα ήταν πιο λειτουργικοί αν, με σύγχρονη ορολογία είχαν βάση το 10 και $\log 1=0$, $\log 10=1$. Έτσι γεννήθηκαν οι δεκαδικοί

[91] Γ. Θωμαίδης, Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας, Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ, τεύχος 13, σελ. 1-30.

λογάριθμοι[92]. Με τα νέα δεδομένα ο Briggs επιδόθηκε στην κατασκευή ενός πίνακα δεκαδικών λογαρίθμων. Για παράδειγμα ο υπολόγισμος του $\log 2$ και του $\log 3$ γίνεται ως εξής: ξεκινώντας από την σχέση $2^{10} = 1024$ έπεται ότι $\frac{2^{10}}{1000} = 1.024$. Υπολογίζοντας την $\sqrt[n]{1.024}$ όπου $n = 2^{47}$ προκύπτει ότι $\sqrt[n]{1.024} \simeq 1 + 10^{-16}$. Συνεπώς με ικανοποιητική ακρίβεια ισχύει

$$\frac{1}{n}\log\frac{2^{10}}{1000} = \log\sqrt[n]{1.024} = \log\left(1+10^{-16}\right),\ n = 2^{47}$$

Θεωρώντας τους λογάριθμους με βάση το 10 έπεται ότι

$$\frac{10}{n}\log 2 - \frac{3}{n} = \log\left(1+10^{-16}\right) \quad (1)$$

Εν συνεχεία ο υπολογισμός του $\log\left(1+10^{-16}\right)$ γίνεται ως εξής: $\sqrt[m]{10} = 1 + 10^{-16}$, $m = 2^{54}$, με ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων. Έτσι $\log\left(1+10^{-16}\right) \simeq \log 10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{54}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{54}$. Από την (1) υπολογίζεται ο $\log 2$. Για τον $\log 3$, ξεκινώντας από την σχέση $2^9 3^9 = 10077696$ και παίρνοντας ρίζα 46 φορές, έγινε αναγωγή του προβλήματος ξανά στον υπολογισμό του $\log\left(1+10^{-16}\right)$. Για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών, το υπόριζο γράφεται στην μορφή 1+x, όπου x μικρός αριθμός και γίνεται χρήση του αναπτύγματος $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$[93]. Ο Briggs άρχισε να δημοσιεύει τα αποτελέσματα των υπολογισμών του. Έτσι το 1617 το έργο με τίτλο *Logarithmorum chilias prima* περιέχει τους λογάριθμους των αριθμών 1 έως το 1000, με ακρίβεια 14 δεκαδικών ψηφίων. Το 1624 στο *Arithmetica logarithmica* περιλαμβάνονται πίνακες λογαρίθμων των αριθμών 1 έως 20.000 και 90.000 έως 100.000 πάλι με ακρίβεια 14 δεκαδικών ψηφίων. Το κενό από το 20.000 έως το 90.000 συμπληρώθηκε αργότερα με την βοήθεια του Adriani Vlacq (1600-1666) ενός Ολλανδού βιβλιοπώλη και εκδότη[94].

---

[92] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 345.
[93] Ευκλείδης Γ.
[94] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 345.

2.5 JOHN SPEIDELL

Ο John Speidell καθηγητής μαθηματικών στο Λονδίνο, στο έργο του *New Logarithmes* που δημοσιεύτηκε το 1619, επαναπροσδιόρισε τον ορισμό των θετικών λογαρίθμων του Napier, μετατρέποντας τους στους φυσικούς λογάριθμους της σύγχρονης εποχής[95].

2.6 WILLIAM OUGHTRED

Ο William Oughtred (1574-1660) στο βιβλίο του *De aequationum affectarum resolutione in numeris,* το οποίο εκδόθηκε το 1652 δεμένο σε ένα τόμο με το *Clavis mathematica,* περιέχει τις ιδιότητες $\log(\alpha b)=\log\alpha+\log b$, $\log\left(\frac{\alpha}{b}\right)=\log\alpha-\log b$, $\log\alpha^{m}=m\log\alpha$, εκφρασμένες με λόγια[96].

2.7 GREGORY ST. VINCENT

Κατά την διάρκεια του 17^{ου} αιώνα εφευρέθηκαν η λογαριθμική καμπύλη και η λογαριθμική έλικα. Για την πρώτη, δεν είναι σαφές ποιός ήταν αυτός που την εισήγαγε πρώτος, ωστόσο αποτέλεσε το επίκεντρο των συζητήσεων για την λογαριθμική θεωρία κατά την διάρκεια του 18^{ου} αιώνα. Όσον αφορά την λογαριθμική έλικα, η οποία περιγράφει σε πολικές συντεταγμένες την σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής και του λογαρίθμου της, επινοήθηκε από τον Rene Descartes. Η τρίτη καμπύλη που επηρέασε την εξέλιξη της λογαριθμικής θεωρίας, είναι η υπερβολή[97]. Ο τετραγωνισμός του χώρου μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων της, μελετήθηκε από τον Gregory St.Vincent στο *Βιβλίο VII* του έργου του *Opus geometricum* του 1647. Διατυπώνεται η λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής, όπως αναφέρεται από τον Gregory στο έργο του.

Θεώρημα

Έστω Η η υπερβολή με κέντρο Ο και ασύμπτωτες a, b. *Έστω Α΄, Β΄, C΄, D΄,…, σημεία της α, τέτοια ώστε τα ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟC΄, ΟD΄,…, να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Έστω*

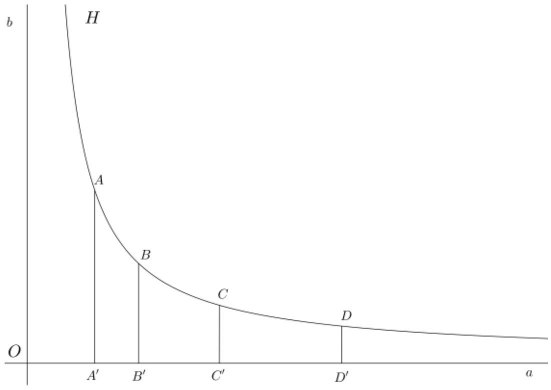
---

[95] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 8.

[96] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 10.

[97] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 10, 11.

A, B, C, D,…, σημεία της H, τέτοια ώστε AA΄, BB΄, CC΄, DD΄,…, να είναι παράλληλα στην b. Τότε οι περιοχές A΄ABB΄, B΄BCC΄, C΄CDD΄,…, είναι ίσες.



Άμεσο πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι τα εμβαδά *A΄ABB΄, A΄ACC΄, A΄ADD΄,…,* αποτελούν αριθμητική πρόοδο[98].

2.8 ANTON DE SARASA

Ο Βέλγος Anton de Sarasa ήταν ο πρώτος που συσχέτισε την ιδιότητα της υπερβολής με τους λογάριθμους, επηρεασμένος από την ιδιότητα της υπερβολής που ανακάλυψε ο Gregory St.Vincent[99].

2.9 NICOLAS MERCATOR

Ο Nicolaus Mercator (1620-1687) ή Kaufmann όπως ήταν το πραγματικό του επίθετο, γεννήθηκε στο Holstein της Δανίας[100]. Στο έργο του με τίτλο *Logarithmotechnia* του 1668, συνεχίζει το έργο του Gregory St.Vincent σύμφωνα με το οποίο, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της υπερβολής συνδέεται με τους λογάριθμους. Γράφοντας την εξίσωση της υπερβολής στη μορφή $y=\frac{1}{1+\alpha}$, αναπτύσοντας το $\frac{1}{1+\alpha}$ μέσω διαίρεσης στην άπειρη σειρά

$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\ldots$$

[98] Bob Burn, The Mathematical Gazette, Vol. 84, No.501, σελ. 480.
[99] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 11, 12.
[100] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley international edition, 1968, σελ. 423.

και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την προηγούμενη με χρήση της σχέσης $\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ που ήταν γνωστή από τον Cavalieri και τον Pascal, προκύπτει η σειρά $\log(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - ...$, γνωστή ως σειρά Mercator. Ωστόσο ο Mercator δεν γράφει την λογαριθμική σειρά στην προηγούμενη μορφή, αλλά υπολογίζει την αριθμητική τιμή των πρώτων όρων της για α=0.1 και α=0.21. Γεωμετρικά οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στο εμβαδόν των μεικτών τετραπλεύρων που ορίζονται από την τεταγμένη y=1 και τις τεταγμένες $y = \frac{1}{1.1}$, $y = \frac{1}{1.21}$ αντίστοιχα. Επηρεασμένος από τα έργα των Gregory St.Vincent και Anton de Sarasa, διαπίστωσε τη σχέση του εμβαδού του υπερβολικού χωρίου, με τις άπειρες σειρές και κατά συνέπεια με τους λογάριθμους[101]. Ο Mercator για να διακρίνει τους λογάριθμους αυτούς από τους δεκαδικούς, χρησιμοποίησε τον όρο Logarithmus naturalis (φυσικοί λογάριθμοι), από τα αρχικά του οποίου προκύπτει και ο σημερινός συμβολισμός ln. Οι φυσικοί λογάριθμοι του Mercator είναι ακριβώς οι σημερινοί λογάριθμοι με βάση e.[102] Οι έρευνες του Gregory St.Vincent, Mercator και άλλων είχαν ως αποτέλεσμα να βελτιωθούν οι υπολογισμοί των λογαρίθμων με χρήση των άπειρων σειρών.

2.10 LEONHARD EULER[103]

Γεννήθηκε στη Βασιλεία το 1707 και πέθανε στην Αγία Πετρούπολη το 1782. Η συμβολή του στην εξέλιξη των λογαρίθμων υπήρξε σημαντική. Παρακάτω παρατίθενται τα κυριότερα κομμάτια του έργου του που επιβεβαιώνουν την ουσιαστική συμβολή του.

Α. Για αυτόν ο λογάριθμος δεν ήταν ένα απλό υπολογιστικό εργαλείο. Έτσι αφού όρισε τις εκθετικές συναρτήσεις μέσω του τύπου $y = \alpha^z$, $\alpha > 1$ εξέτασε και το αντίστροφο πρόβλημα:«*θέλουμε να δώσουμε μια τιμή στο z ώστε* $y = \alpha^z$*»,* με σύγχρονη ορολογία $z = \log_\alpha y$ αν και μόνο αν $y = \alpha^z$.

[101] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 12.
[102] Γ. Θωμαίδης, Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας, Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ, τεύχος 13, σελ. 1-30.
[103] W. Dunham, Euler the Master of us all, The mathematical Association of America, σελ. 23-29, 31-33.

Β. Απέδειξε τον χρυσό κανόνα των λογαρίθμων, που με σύγχρονη ορολογία είναι ο τύπος αλλαγής βάσης. Έτσι ο υπολογισμός του $\log_\alpha y$, ανάγεται στον υπολογισμό του $\log_b y$. Αν $z=\log_b y$ τότε $b^z = y$. Έτσι $\log_\alpha y = \log_\alpha b^z = z\log_\alpha b$ δηλαδή $z=\log_b y = \dfrac{\log_\alpha y}{\log_\alpha b}$. Άμεσο πόρισμα του προηγούμενου είναι η σχέση $z=\dfrac{\log_b y}{\log_b x}=\dfrac{\log_\alpha y}{\log_\alpha x}$.

Γ. Στο κεφάλαιο VII του έργου του *Introductio in analysin infimitorum* (Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση) του 1748, αναπτύσσεται σε σειρά η εκθετική $y=\alpha^x$, $\alpha>1$ και λογαριθμική συνάρτηση. Αρχικά, αν ω σχεδόν μηδέν τότε $\alpha^\omega = 1+y$, με y απειροστά μικρό, καθώς $\alpha^\omega \simeq \alpha^0 = 1$ άρα $y=\alpha^\omega - 1$. Οι απειροστά μικρές ποσότητες y, ω συνδέονται μέσω της σχέσης $y=\kappa\omega$ συνεπώς $\alpha^\omega = 1+\kappa\omega$. Δίνοντας τιμές στο α και το ω προκύπτει ότι το κ είναι πεπερασμένο και εξαρτάται από την βάση α. Θέτοντας $j=\dfrac{x}{\omega}$ όπου x ένας πεπερασμένος αριθμός προκύπτει

$$\alpha^x = \left(\alpha^\omega\right)^{\frac{x}{\omega}} = \left(1+\kappa\omega\right)^j = \left(1+\kappa\frac{x}{j}\right)^j$$

Με χρήση της διωνυμικής σειράς του Newton έπεται

$$\alpha^x = 1 + j\frac{\kappa x}{j} + \frac{j(j-1)}{2\cdot 1}\left(\frac{\kappa x}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{\kappa x}{j}\right)^3 + \ldots =$$

$=1+\kappa x+\dfrac{j-1}{j}\dfrac{\kappa^2x^2}{2\cdot 1}+\dfrac{(j-1)(j-2)}{j\cdot j}\dfrac{\kappa^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}+\ldots$. Όμως ο j είναι απειροστά μεγάλος αφού ο x είναι πεπερασμένος και ο ω απειροστά μικρός. Έτσι με σύγχρονη γλώσσα προκύπτει ότι $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{j-n}{j}=1,\ \ n\geq 1$. Άρα $\alpha^x = 1+\kappa x+\dfrac{\kappa^2x^2}{2\cdot 1}+\dfrac{\kappa^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}+\ldots$ (1)

Από την (1) με x=1 προκύπτει η σειρά $\alpha = 1+\kappa+\dfrac{\kappa^2}{2\cdot 1}+\dfrac{\kappa^3}{3\cdot 2\cdot 1}+\ldots$. Επιπλέον για α τέτοιο ώστε $\alpha^\omega = 1+\omega$, με ω απειροστά μικρό και θέτοντας στην (1) x=κ=1 έπεται ότι $\alpha = 1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 1}+\ldots$. Ο Euler υπολόγισε αυτόν τον αριθμό προσεγγιστικά να είναι 2,71828182845904523536028, τον οποίο επέλεξε να συμβολίσει με e, ονομάζοντας τους λογάριθμους με αυτή τη βάση φυσικούς ή υπερβολικούς. Τέλος από την (1) με α=e και κ=1 προκύπτει η σχέση $e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται η λογαριθμική σειρά. Για απειροστά μικρό ω ισχύει ότι $e^{\omega} = 1+\omega$, δηλαδή $\omega = \ln(1+\omega)$ άρα $j\omega = \ln(1+\omega)^j$. Για τον μεγαλύτερο αριθμό j και λαμβάνοντας υπόψη ότι ω θετικό, έπεται ότι $(1+\omega)^j > 1$. Από την τελευταία προκύπτει ότι

$$(1+\omega)^j = x+1 \text{ ισοδύναμα } \omega = (1+x)^{\frac{1}{j}} - 1$$

Ακόμη $(\omega+1)^j = 1+x = e^{\omega j}$ δηλαδή $\ln(1+x) = \omega j$. Τέλος αφού το $\ln(1+x)$ είναι πεπερασμένο και το ω απειροστά μικρό, προκύπτει ότι το j είναι απειροστά μεγάλο. Έτσι

$$\ln(1+x) = \omega j = j\left[(1+x)^{\frac{1}{j}} - 1\right]$$

και με χρήση του Διωνυμικού θεωρήματος έπεται ότι

$$\ln(1+x) = j\left[1+\left(\frac{1}{j}\right)x + \frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{j}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \dots\right] - j =$$

$= x - \frac{j-1}{2j}x^2 + \frac{(j-1)(2j-1)}{2j\cdot 3j}x^3 + \frac{(j-1)(2j-1)(3j-1)}{2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4 + \dots$ (2) Αφού j απειροστά μεγάλο έπεται ότι $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$, $\frac{2j-1}{3j} = \frac{2}{3}$, $\frac{(3j-1)}{4j} = \frac{3}{4}$. Αντικαθιστώντας στη (2) προκύπτει η σειρά $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (3).

Δ. Η (3) χρησιμεύει στον υπολογισμό λογαρίθμων. Επειδή το δεύτερο μέλος της $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ συγκλίνει αργά εκτός αν το x είναι μικρός αριθμός, πιο χρήσιμη είναι η σειρά

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad -1 < x < 1 \quad (4)$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα από την (3).

Με $x=\frac{1}{2m+1}$ τότε $\frac{1+x}{1-x}=\frac{m+1}{m}$ και η (4) γίνεται

$$\ln(m+1)-\ln m=2\left(\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\ldots\right) \quad (5)$$

Με m=1 στην (5) υπολογίζεται ο $\ln 2$ με όση ακρίβεια θέλουμε. Άμεσα προκύπτουν οι $\ln 4=2\ln 2$, $\ln 8$ κ.τ.λ. Ο $\ln 3$ προκύπτει θέτοντας στην (5) m=3 αντί m=2 για να επιτευχθεί ταχύτερη σύγκλιση. Με όμοιο τρόπο υπολογίζεται ο φυσικός λογάριθμος οποιουδήποτε φυσικού αριθμού[104].

Ε. Κάνοντας χρήση των λογαριθμικών κανόνων και της λογαριθμικής σειράς στο έργο του *Institutiones calculis differentialis* του 1755, υπολογίζεται το διαφορικό του $\ln x$. Έτσι αν $y=\ln x$ τότε

$$dy=\ln(x+dx)-\ln x=\ln\left(\frac{x+dx}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=\frac{dx}{x}-\frac{\left(\frac{dx}{x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{dx}{x}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{dx}{x}\right)^4}{4}+\ldots\ .$$

Θεωρώντας ότι οι δυνάμεις του dx είναι ασήμαντες, συγκρινόμενες με το dx προκύπτει ότι $dy=\frac{dx}{x}$ το οποίο μετασχηματίζεται στον τύπο της παραγώγου $D_x[\ln x]=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$.

ΣΤ. Στο έργο του *Introductio in analysin infimitorum* αποδεικνύεται ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει. Υπάρχουν και άλλες αποδείξεις της προηγούμενης πρότασης όπως η απόδειξη του Jacob Bernouli, γεγονός που καθιστά τις σειρές κατανοητές πριν τον Euler. Η απόδειξη του Euler στερείται μαθηματικής αυστηρότητας, ωστόσο παρέχει σωστά αποτελέσματα. Θέτοντας x=1 στη σειρά

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{4}-\ldots$$

προκύπτει $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=-\ln 0=\ln 0^{-1}=\ln\frac{1}{0}=\ln\infty=\infty$.

104 Ευκλείδης Γ.

Η. Ανακάλυψε μια σχέση ανάμεσα στους λογάριθμους και την αρμονική σειρά η οποία τον οδήγησε στην σταθερά γ. Πιο συγκεκριμένα θέτοντας, $x=\frac{1}{n}$ στην $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$ τότε $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+...$ συνεπώς

$$\frac{1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-... \quad (6)$$

Για μεγάλο n έπεται ότι το $\frac{1}{n}$ είναι περίπου ίσο με $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Έτσι αθροίζοντας την αρμονική σειρά είναι σαν να αθροίζουμε λογαρίθμους. Θέτοντας n=1, 2, 3,… στην (6) προκύπτει

$$1=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$$

$$\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{64}-...$$

$$\frac{1}{3}=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{18}-\frac{1}{81}+\frac{1}{324}-...$$

……………………………..

$$\frac{1}{n}=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-...$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έπεται

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa}=\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+...+\ln\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{n^4}\right)-...$$

Υπολογίζοντας αριθμητικά τα επιμέρους αθροίσματα προκύπτει

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\simeq\ln(n+1)+0.577218$$

Με σύγχρονο συμβολισμό ως γ ορίζεται ο αριθμός που δίνεται από την σχέση $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)$. Για να είναι πλήρης η απόδειξη αρκεί να δειχθεί η ύπαρξη του αριθμού γ.

2.11 ΣΥΝΔΕΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Ο Rene Descartes (1596-1650) στο έργο του *La geometri* του 1637, εισήγαγε το σύγχρονο συμβολισμό για τις δυνάμεις των αριθμών. Στο έργο αυτό δεν γίνεται αναφορά σε αρνητικούς και κλασματικούς εκθέτες ούτε εκθέτες με γράμματα. Τα χρόνια που ακολούθησαν, εξαπλώθηκε ο συμβολισμός του Descartes και έτσι τη δεκαετία 1660-1670, ο θετικός ακέραιος εκθέτης είχε κερδίσει μια θέση στον αλγεβρικό συμβολισμό. Όσον αφορά τους αρνητικούς και κλασματικούς εκθέτες είχαν προταθεί από τους Chuquet και Stevin, αλλά ο σύγχρονος συμβολισμός οφείλεται στους Wallis και Newton. Ο Wallis στο *Arithmetica infinitorum* 1656, μιλά για αρνητικούς και κλασματικούς εκθέτες. Ο συμβολισμός προτάθηκε επίσημα από τον Newton λίγο πριν το 1669, όταν ανακοίνωσε το Διωνυμικό θεώρημα σε μια επιστολή προς τον H. Oldenburg, τότε γραμματέα της Royal society του Λονδίνου. Σε αυτή εξηγεί την χρήση αρνητικών και κλασματικών εκθετών καθώς και αυτών με γράμματα[105]. Στα μέσα του 18^{ου} αιώνα λαμβάνει χώρα η σύνδεση των λογαριθμικών και εκθετικών εννοιών. Έτσι ο William Gardiner στην εισαγωγή του βιβλίου του *Tables of Logarithms* 1742, δίνει τον ορισμό:«*Ο κοινός λογάριθμος ενός αριθμού είναι ο δείκτης αυτής της δύναμης του 10 που είναι ίση με τον αριθμό».* Κατά πολλούς ο ορισμός αυτός οφείλεται στον William Jones. Επίσης ο Euler στο έργο του *Introductio in analysin infimitorum* του 1748, δίνει τον ορισμό των λογαρίθμων χρησιμοποιώντας εκθέτες[106]. Παρόλα αυτά ο ορισμός του Napier βασισμένος σε δύο προόδους, συνέχισε να είναι ο επικρατέστερος κατά τον 18^{ο} αιώνα. Κατά την διάρκεια του 19^{ου} αιώνα άρχισε να απασχολεί τους μαθηματικούς η γενική δύναμη α^{β}, όπου α, β μιγαδικοί αριθμοί. Ο Euler είχε αναπτύξει την θεωρία της γενικής δύναμης στο έργο του *Recherches sur les raciness imaginaries des equations,* που γράφτηκε το 1749. Τη θεωρία της γενικής δύναμης μελέτησαν διάφοροι μαθηματικοί όπως ο Martin Ohm, ο De Morgan και οδηγήθηκαν σε λογαριθμικά συστήματα με περιοδικές ή μιγαδικές βάσεις, τα οποία δεν έτυχαν αναγνώρισης λόγω της πολυπλοκότητας των τύπων που παρείχαν. Έτσι η θεωρία της γενική δύναμης α^{β} καθιερώθηκε με την βοήθεια του λογαριθμικού συστήματος του Euler με βάση e.[107]

[105] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 13, 14, 35-38.
[106] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 46, 47.
[107] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 181.

2.12 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ – ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Κατά την διάρκεια του 18ου αιώνα τέθηκε το θέμα της επέκτασης της λογαριθμικής ιδέας προς τους αρνητικούς και τους φανταστικούς αριθμούς. Η διαφορετική αντίληψη των μαθηματικών της εποχής σχετικά με τους αρνητικούς και τους φανταστικούς αριθμούς, δημιούργησαν ένα πεδίο διαφορετικών αντιλήψεων σε ένα ούτως η άλλως πρωτόλειο τομέα έρευνας. Παρακάτω παρατίθενται συνοπτικά τα κυριότερα σημεία που επηρέασαν την εξέλιξη αυτής της θεωρίας.

2.12.1 LEIBNIZ-BERNOULLI I

Οι πρώτοι που είχαν σκεφτεί το πρόβλημα της ύπαρξης ή μη των λογαρίθμων των αρνητικών και φανταστικών αριθμών ήταν οι Bernoulli I και Leibniz. Ο πρώτος, ανακάλυψε το 1702 τον τύπο $\arctan z = \frac{1}{i}\ln\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$. Σε μια επιστολή του ίδιου έτους προς τον John Bernoulli I, ο Leibniz μιλά για λογάριθμους φανταστικών αριθμών σε προβλήματα ολοκλήρωσης. Στης 16 Μαρτίου 1712 ξεκίνησε μια φιλική διαμάχη μεταξύ του John Bernoulli I και του Leibniz για τους λογάριθμους των αρνητικών και φανταστικών αριθμών, η οποία έλαβε χώρα μέσω επιστολών που αντάλλασαν έως το 1713. Η αλληλογραφία τους δημοσιεύτηκε το 1745 και αποτέλεσε το ερέθισμα που προσέλκυσε το ενδιαφέρον των μαθηματικών να ασχοληθούν εκτενέστερα με το θέμα. Οι John Bernoulli I και Leibniz διαφωνούσαν για τον $\log(-n)$, καθώς δεν συμφωνούσαν για τον ορισμό της μέσης και τρίτης αναλόγου όταν εφαρμόζονταν σε αρνητικούς αριθμούς. Επίσης ο Leibniz θεωρούσε ότι το $\log(-1)$ και το $\log\sqrt{-1}n$ δεν υπάρχουν, ενώ ο Bernoulli I ότι $\log n = \log(-n)$ και ότι η λογαριθμική καμπύλη έχει δύο κλάδους[108].

2.12.2 ROGER COTES

Το 1714 ο Roger Cotes στο άρθρο του *Philosophical Trancactions* δημοσίευσε την ισότητα $i\varphi = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Αντί για το όνομα του φέρει το όνομα του Euler, ο οποίος τη διατύπωσε στην εκθετική μορφή $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, στο έργο του

[108] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 39-43.

Introductio in analysin infimitorum (Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση) του 1748.[109]

2.12.3 ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑ EULER ME JOHN BERNOULLI I

Ο Euler ασχολήθηκε με την θεωρία των λογαρίθμων των αρνητικών αριθμών στην αλληλογραφία του με τον John Bernoulli I, κατά τα έτη 1727 έως 1731. Οι επιστολές εκδόθηκαν πλήρεις το 1902 από τον G. Enestrom. Ο John Bernoulli I ισχυρίζεται πως $\log n = \log(-n)$, ότι δηλαδή και στην αλληλογραφία του πριν 16 χρόνια με τον Leibniz. Ο Euler απέρριψε το επιχείρημα του John Bernoulli I λέγοντας ότι $\log(-n) = \log n + \log(-1)$, συνεπώς αν $\log n = \log(-n)$ τότε $\log(-1) = 0$. Έτσι η έκφραση $\frac{\alpha\alpha}{4\sqrt{-1}}\log\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ που χρησιμοποιούσε ο John Bernoulli I για το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ακτίνας α, γίνεται για ένα τεταρτοκύκλιο $\frac{\alpha\alpha}{4\sqrt{-1}}\log(-1) = 0$, το οποίο είναι αδύνατο. Ο Euler έκανε ένα σημαντικό βήμα προς την αλήθεια λέγοντας στην επιστολή της 10ης Δεκεμβρίου 1728 ότι το $\log n$ έχει ένα άπειρο αριθμό τιμών, αλλά δεν ασχολήθηκε εκτενέστερα με το θέμα[110].

2.12.4 LEONHARD EULER

Ο Euler συνέχισε την έρευνα του πάνω στην λογαριθμική θεωρία των αρνητικών και μιγαδικών αριθμών, ιδιαιτέρα μετά το 1745 που δημοσιεύτηκαν οι επιστολές των John Bernoulli I και Leibniz. Παρακάτω παρατίθενται τα κυριότερα σημεία της έρευνας του.

Α. Στο έργο του *Introductio in analysis, το όποιο* γράφτηκε το 1745 και δημοσιεύτηκε *το* 1748, είναι καταγεγραμμένες οι εκθετικές εκφράσεις των $\cos x$, $\sin x$, $\cos x + i\sin x$.

[109] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 43.
[110] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 44-46.

Β. Κατά το διάστημα 1747 έως 1748 ανταλλάσει επιστολές με τον D' Alembert. Στη επιστολή της 15ης Απριλίου 1747 ανακοινώθηκε το θεώρημα ότι το Logn έχει ένα άπειρο αριθμό λογαρίθμων, οι οποίοι όλοι είναι φανταστικοί εκτός αν n θετικός αριθμός, όπου ένας από τους λογάριθμους είναι μηδέν.

Γ. Στο άρθρο του *Sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires,* που γράφτηκε το 1747 και δημοσιεύτηκε το 1862, αναφέρεται αρχικά στην διαμάχη των Leibniz και John Bernoulli I. O Euler επισημαίνει ότι το αν η λογαριθμική καμπύλη έχει δύο κλάδους δεν σχετίζεται με το αν το $\log(-x)$ είναι πραγματικός ή φανταστικός. Έπειτα ορίζει τον λογάριθμο: *αν* $x=\log y$ *τότε* $y=e^{x}$*, με το e να είναι μια σταθερά.* Επιπλέον με την βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού αποδεικνύει την εξίσωση $\sqrt{-1}\varphi = l(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, όπου αντί φ χρησιμοποιεί την πιο γενική τιμή $\varphi + \pm 2n\pi$, για n ακέραιο. Από τον τύπο αυτό υπολογίζει τους λογάριθμους 1, -1, -α, $\sqrt{-1}$. Τέλος κάνοντας χρήση του θεωρήματος De Moivre καταλήγει στους τύπους

$$l1^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\pm 2m\mu \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1}$$

$$l\left(-1^{\frac{\mu}{\nu}}\right) = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2m\mu \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1}$$

όπου m, n ακέραιοι.

Δ. Στην εργασία του με τίτλο *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires,* που γράφτηκε το 1749 και δημοσιεύτηκε το 1751, περιέχει το θεώρημα που αναφέρει ότι *υπάρχει άπειρο πλήθος λογαρίθμων για κάθε αριθμό*. Η απόδειξη του διαφέρει από αυτή του άρθρου του 1747 και βασίζεται στην υπόθεση ότι $\log(1+\omega)=\omega$, με το ω να είναι απειροστά μικρό. Επιπλέον ο Euler βρίσκει τον τύπο για το $\log(\pm\alpha)$, $\log\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου μ, ν, ακέραιοι αριθμοί. Ακόμη δίνει τους τύπους $\log(+\alpha) = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, $\log(-\alpha) = A \pm q\pi\sqrt{-1}$ όπου p, q άρτιοι και περιττοί αριθμοί αντίστοιχα. Επίσης δίνει και τον γενικό τύπο $\log\alpha^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$. Το τελευταίο πρόβλημα είναι, με δοσμένο ένα λογάριθμο, να βρεθεί ο αντιλογάριθμος του x είτε αυτός είναι πραγματικός είτε φανταστικός.

Ε. Στην εργασία με τίτλο *Recherches sur les racines imaginaires des equations,* που γράφτηκε το 1749 και δημοσιεύτηκε το 1751, έχει ως στόχο να δώσει δύο αποδείξεις για το θεώρημα ότι κάθε εξίσωση έχει ρίζα. Στην δεύτερη ο Euler δείχνει ότι εκφράσεις που περιέχουν άρτιες πολύπλοκες αριθμητικές παραστάσεις και εξαγωγές ριζών μπορούν να πάρουν τη μορφή $m+n\sqrt{-1}$. Έπειτα υπολογίζει τη γενική δύναμη $\left(\alpha+\beta\right)^{m+n\sqrt{-1}}=x+yi$, όπου τα x, y είναι άγνωστοι. Ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματα υπολογίζει το λογάριθμο μιγαδικού αριθμού. Έτσι θεωρώντας ότι $\log\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)=x+yi$, διαφορίζοντας τα δύο μέλη και εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη, υπολογίζει τα x, y εκφρασμένα συναρτήση του arccos, arcsin[111].

2.12.5 D΄ALEMBERT

Ο D΄Alembert στο έργο του *Sur les logarithms des quantites negatives* δίνει συνέχεια στο θέμα των λογαρίθμων αρνητικών και φανταστικών αριθμών. Ορίζει τους λογάριθμους μέσω δύο προόδων, όπως και ο Napier. Έτσι δηλώνει ότι ανάλογα με την βάση του συστήματος λογαρίθμων, οι λογάριθμοι των αρνητικών μπορεί να είναι είτε πραγματικοί είτε φανταστικοί, διαφωνώντας με τον Euler ο οποίος περιορίστηκε στο σύστημα με βάση $e=2.71...$ και είχε συμπεράνει ότι οι λογάριθμοι των αρνητικών αριθμών είναι μιγαδικοί[112].

2.12.6 DE FONCENEX-D ALEMBERT

Η συνέχεια στο ζήτημα δίνεται με τη αντιπαράθεση του Daviet de Foncenex με τον D΄Alembert. Ο πρώτος στο έργο με τίτλο *Reflexions sur les quantitees imaginaires* το 1759, δίνει μια στοιχειώδη απόδειξη του $\log\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\varphi\sqrt{-1}$. Μετά γράφει $\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ και θέτοντας όπου φ το $\varphi+2\lambda\pi$, καταλήγει στο

[111] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 75, 77-79, 81-83.
[112] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 107, 108.

$\log\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)=\left(\varphi+2\lambda\pi\right)\sqrt{-1}$. Ο D΄Alembert απαντά στο έργο του Daviet de Foncenex υπό τον τίτλο *Supplement au memoire precedent* , όπου διορθώνει κάποια λάθη του de Foncenex και επιμένει σε κάποιες λανθασμένες απόψεις του. O Daviet de Foncenex απαντά εκ νέου στις δύο εργασίες του D΄Alembert. Ο de Foncenex αρχικά υποστήριξε σε σημαντικό βαθμό τις απόψεις του Euler, αλλά τελικά ξέφυγε από αυτές μελετώντας θέματα συνέχειας καμπυλών. Ο D΄Alembert στο άρθρο του Logarithme του 1765, ταυτίζεται περισσότερο με τις απόψεις του Bernoulli I παρά του Euler, όσον αφορά το θέμα των λογαρίθμων των αρνητικών αριθμών[113].

2.12.7 ΑΠΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΓΕΡΜΑΝΙΑ

Η διατριβή του Lacroic πάνω στον λογισμό παρουσιάζει τους λογαρίθμους σύμφωνα με τη θεωρία του Euler. Μεταξύ 1750-1770 στην Γερμανία, τρεις συγγραφείς ασχολήθηκαν με το θέμα συμπλέοντας με τις απόψεις του Euler. Ο Charles Walmesley, αγγλο-ρωμαϊκός ιεράρχης, ο οποίος στο άρθρο με τίτλο *Methode de trouver les logarithmes de chaque nombre postif, negatif, ou meme impossible,* δίνει τον τύπο $\alpha c\sqrt{-1}=\pm\log\left(y\pm u\sqrt{-1}\right)$ με αc το τόξο μοναδιαίου κύκλου και τα x, u τα συνημίτονα και ημίτονα του τόξου αυτού. Από τον προηγούμενο τύπο συνάγει τις τιμές $\log 1$, $\log(-1)$, $\log\left(\pm\sqrt{-1}\right)$, $\log\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)$ που είχε βρει και ο Euler. Ο J. A. Segner, καθηγητής στο Halle, ενσωματώνει πρώτος τους λογάριθμους μιγαδικών αριθμών του Euler σε σχολικό εγχειρίδιο. Ο W. J. G. Karsten, καθηγητής στο butzow και αργότερα στο Halle, δημοσίευσε το 1768 ένα άρθρο με τίτλο *Abhandlung von den Logarithmen verneinter Grossen,* στο οποίο επισημαίνονται τα λάθη του D΄Alembert. Ακόμη φέρνει αντιρρήσεις όσον αφορά το θεώρημα του Euler ότι το Logn έχει άπειρες τιμές, θεωρώντας ότι $(1+\omega)^n$ για ω απειροστά μικρό είναι θετικό, συνεπώς το $\log(1+\omega)^n$ δεν παριστάνει λογαρίθμους αρνητικών αριθμών ή φανταστικών αριθμών. Ωστόσο ο Euler επιτρέπει στο ω να είναι φανταστικό, κάτι που δεν κατέστησε όμως αρκετά σαφές. Επίσης ο W. J. G. Karsten επιχειρηματολογεί εναντίον του D΄Alembert λέγοντας ότι δεν ορίζει τους λογαρίθμους αρνητικών αριθμών με βάση e, απλά αναφέρει την ύπαρξη συστημάτων που αποδεικνύουν την

[113] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 108, 109.

μη ύπαρξη λογαρίθμων αρνητικών αριθμών. Τέλος, εξηγεί γεωμετρικά την ύπαρξη άπειρου πλήθους λογαρίθμων ενός αριθμού[114].

2.12.8 ΑΠΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΙΤΑΛΙΑ

Η διαμάχη για το θέμα συνεχίστηκε στην Ιταλία. Ο Vicenzo Riccati, μαθηματικός στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια, το 1767 έστειλε πέντε επιστολές στον Jacopo Pellizzari, καθηγητή στο Τρεβίζο, στις οποίες αποτυπώνονται οι θέσεις του περί του θέματος. Όπως ο D΄Alembert έτσι και αυτός διαφωνεί με τον τύπο $\log(1+\omega)^{n}$=nω του Euler. O Joachim Pessuti, εκδότης λογοτεχνικών περιοδικών και αργότερα καθηγητής μαθηματικών στο κολέγιο della Sapienza της Ρώμης, υποστήριξε τις απόψεις του Euler στην εργασία του με τίτλο *Riflessioni analitiche* του 1777. O Giuseppe Calandrelli το 1778 αμφισβητεί την ορθότητα της σχέσης $\pi\sqrt{-1}=\log(-1)$ των Euler και Bernoulli I με το επιχείρημα ότι $2\log(-1)=\log(+1)$. O Caldani, μαθητής του V. Riccati διαφωνεί και αυτός με τον Euler, όταν αυτός γράφει $\log(1+\omega)=\omega$, καθώς το ω είναι απειροελάχιστο και έπειτα παίρνει $\log 1=0$, όταν ω=0, αλλά επίσης $\log 1=2\pi\sqrt{-1}=4\pi\sqrt{-1}$ κτλ. Ο Ισπανός Ιησουίτης Juan Andres θέλησε να δεχτεί τα επιχειρήματα του Euler, αλλά σκέφτηκε ότι αν $1=e^{0}=e^{2n\pi\sqrt{-1}}$ τότε $0=2\pi\sqrt{-1}=4\pi\sqrt{-1}$ κτλ. O Gregorio Fontana, καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Παβια στο άρθρο του *Sopra i logaritmi delle quantita negativa e sopra gl΄ immaginarj*, απέδειξε τον τύπο $\varphi\sqrt{-1}=\log(1-x-\sqrt{x^{2}-2x})$ και από αυτόν υπολόγισε ότι $\log(-1)=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$ και $\log 1=\pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Η διαμάχη γύρω από τους λογαρίθμους αρνητικών και φανταστικών αριθμών διήρκησε ένα περίπου αιώνα διότι ο Euler στην εργασία του το 1749, δεν κατάφερε να πείσει ότι το αν η λογαριθμική καμπύλη έχει ένα η δύο κλάδους δεν έχει να κάνει με την θεωρία των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών. Επίσης, ότι το logn έχει ένα άπειρο πλήθος τιμών, δεν αναπτύχθηκε λεπτομερώς με αποτέλεσμα να δημιουργεί ερωτήματα και σύγχυση[115].

---

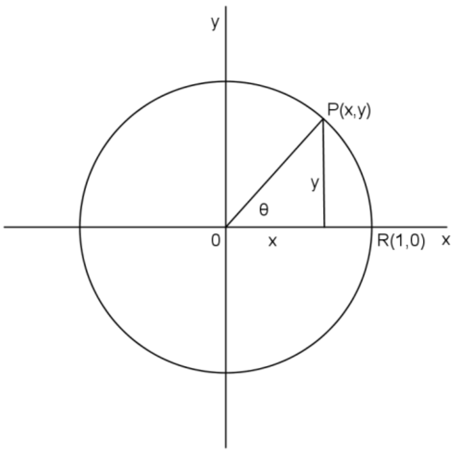
[114] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 110, 111.
[115] Florian Cajori, History of Exponential and Logarithmic concepts, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913, σελ. 112-116.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ[116]

Ο εποπτικότερος τρόπος θεμελίωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι ο γεωμετρικός. Κυρίαρχο ρόλο σε αυτόν κατέχουν ο τριγωνομετρικός κύκλος, που είναι ως γνωστών ο κύκλος με ακτίνα 1 καθώς και η προσανατολισμένη γωνία. Αρχικά ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου. Στην συνέχεια δίνεται ένας ορισμός για τον αριθμό π_1. Έπειτα καταγράφονται οι ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, οι οποίες θα χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει τις πιο βασικές, ενώ η δεύτερη ιδιότητες που έπονται ως πόρισμα αυτών της πρώτης κατηγορίας. Τέλος, ορίζονται οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.



Ορισμός 3.1.1 Έστω θ ένας πραγματικός αριθμός και P(x,y) ένα σημείο του επιπέδου πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, το οποίο όταν κινείται κατά τη θετική φορά, διαγραφεί μήκος τόξου $\theta \geq 0$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Τότε $\sin_1 \theta = y$ και $\cos_1 \theta = x$.

Ο ορισμός των υπόλοιπων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι άμεσο πόρισμα του Ορισμού 3.1.1 και οι σχέσεις μεταξύ τους καταγράφονται στο Θεώρημα 3.1.3.

[116] Μ. Παπαδημητράκης, Απειροστικός Λογισμός, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής.

Ορισμός 3.1.2 Ο αριθμός π_1 ορίζεται ως το μήκος του ημικυκλίου ακτίνας 1.

Στην συνέχεια καταγράφονται οι πιο βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.1.3

1. $\sin_1^2 x + \cos_1^2 x = 1$.
2. $|\sin_1 x| \le 1$ και $|\cos_1 x| \le 1$.
3. $\cos_1(-x) = \cos_1 x$ και $\sin_1(-x) = -\sin_1 x$.
4. $\sin_1(x+y) = \sin_1 x \cos_1 y + \cos_1 x \sin_1 y$.
5. $\cos_1(x+y) = \cos_1 x \cos_1 y - \sin_1 x \sin_1 y$.
6. $\cos_1(2\pi_1 + x) = \cos_1 x$ και $\sin_1(2\pi_1 + x) = \sin_1 x$.
7. $\cos_1 x > \cos_1 x'$, όταν $2\kappa\pi_1 \le x < x' \le 2\kappa\pi_1 + \pi_1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin_1 x < \sin_1 x'$, όταν $-\frac{\pi_1}{2} + 2\kappa\pi_1 \le x < x' \le 2\kappa\pi_1 + \frac{\pi_1}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
9. $\cos_1 x > 0$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_1}{2} + 2\kappa\pi_1, 2\kappa\pi_1 + \frac{\pi_1}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ενώ αν $x \in \left(\frac{\pi_1}{2} + 2\kappa\pi_1, 2\kappa\pi_1 + \frac{3\pi_1}{2}\right)$ τότε $\cos_1 x < 0$.
10. $\sin_1 x > 0$ όταν $x \in (2\kappa\pi_1, 2\kappa\pi_1 + \pi_1)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ενώ αν $x \in (2\kappa\pi_1 + \pi_1, 2\kappa\pi_1 + 2\pi_1)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $\sin_1 x < 0$.
11. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\sin_1 x| \le x$.
12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin_1 x}{x} = 1$.
13. $\tan_1 x = \frac{\sin_1 x}{\cos_1 x}$, $x \ne \kappa\pi_1 + \frac{\pi_1}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

$\cot_1 x = \frac{\cos_1 x}{\sin_1 x} = \frac{1}{\tan_1 x}, x \ne \kappa\pi_1, \kappa \in \mathbb{Z}$.

$\sec_1 x = \frac{1}{\cos_1 x}$, $x \ne \kappa\pi_1 + \frac{\pi_1}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{cos ec}_1 x = \frac{1}{\sin_1 x}, \ x \neq \kappa\pi_1, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Πόρισμα 3.1.4

1. $|\sec_1 x| \geq 1, \ |\operatorname{co sec}_1 x| \geq 1$.

2. $\tan_1^2 x + 1 = \sec_1^2 x, \ \cot_1^2 x + 1 = \operatorname{cos sec}_1^2 x$.

3. $\tan_1(-x) = -\tan_1 x, \ \cot_1(-x) = -\cot_1 x$.

4. $\cos_1\left(\frac{\pi_1}{2} - x\right) = \sin_1 x, \ \sin_1\left(\frac{\pi_1}{2} - x\right) = \cos_1 x, \ \tan_1\left(\frac{\pi_1}{2} - x\right) = \cot_1 x,$

$\cot_1\left(\frac{\pi_1}{2} - x\right) = \tan_1 x$.

5. $\cos_1(\pi_1 + x) = -\cos_1 x, \ \sin_1(\pi_1 + x) = -\sin_1 x, \ \tan_1(\pi_1 + x) = \tan_1 x,$

$\cot_1(\pi_1 + x) = \cot_1 x$.

6. $\tan_1(x \pm \pi_1) = \tan_1 x, \ \cot_1(x \pm \pi_1) = \cot_1 x$.

7. $\cos_1(x - y) = \cos_1 x \cos_1 y + \sin_1 x \sin_1 y, \ \sin_1(x - y) = \sin_1 x \cos_1 y - \sin_1 x \sin_1 y$.

8. $\tan_1(x + y) = \dfrac{\tan_1 x + \tan_1 y}{1 - \tan_1 x \tan_1 y}, \ \tan_1(x - y) = \dfrac{\tan_1 x - \tan_1 y}{1 + \tan_1 x \tan_1 y}$.

9. $\cot_1(x + y) = \dfrac{\cot_1 x \cot_1 y - 1}{\cot_1 x + \cot_1 y}, \ \cot_1(x - y) = \dfrac{\cot_1 x \cot_1 y + 1}{\cot_1 x + \cot_1 y}$.

10. $\sin_1 2x = 2\sin_1 x \cos_1 x, \ \cos_1 2x = \cos_1^2 x - \sin_1^2 x = 2\cos_1^2 x - 1 = 1 - 2\sin_1^2 x$.

11. $\tan_1 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan_1^2 x}$.

12. $\cos_1 x - \cos_1 y = -2\sin_1 \dfrac{x - y}{2} \sin_1 \dfrac{x + y}{2}, \ \sin_1 x - \sin_1 y = 2\sin_1 \dfrac{x - y}{2} \cos_1 \dfrac{x + y}{2}$.

Στην συνέχεια θα οριστούν οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.1.5

1. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi_1]$ με τύπο $y = \operatorname{ar cos}_1 x = \cos_1^{-1} x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο συνημιτόνου.

2. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left[-1,1\right]$ και σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi_1}{2},\frac{\pi_1}{2}\right]$ με τύπο $y=\arcsin_1 x=\sin_1^{-1}x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο ημιτόνου.

3. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left(-\infty,+\infty\right)$ και σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi_1}{2},\frac{\pi_1}{2}\right)$ με τύπο $y=\mathrm{ar}\tan_1 x=\tan_1^{-1}x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο εφαπτομένης.

4. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left(-\infty,+\infty\right)$ και σύνολο τιμών το $\left(0,\pi_1\right)$ με τύπο $y=\mathrm{ar}\cot_1 x=\cot_1^{-1}x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο συνεφαπτομένης.

5. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$ και σύνολο τιμών το $\left[0,\frac{\pi_1}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi_1}{2}\right)$ με τύπο $y=\mathrm{ar}\,\mathrm{csec}_1 x=\sec_1^{-1}x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο τέμνουσας.

6. Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$ και σύνολο τιμών το $\left[0,\frac{\pi_1}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi_1}{2}\right)$ με τύπο $y=\mathrm{ar}\cos\mathrm{ec}_1 x=\mathrm{cosec}_1^{-1}x$, ονομάζεται συνάρτηση τόξο συντέμνουσας.

3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=-f(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1$

Θα οριστούν οι $\sin_2$, $\cos_2$ ως οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται η ύπαρξη δύο τέτοιων συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.2.1 Υπάρχουν συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

i. $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(0)=0$ και $g(0)=1$.

Απόδειξη

i. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \text{ και } g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Άμεσα προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού τους είναι το $\mathbb{R}$ αφού το διάστημα σύγκλισης των σειρών είναι το $\mathbb{R}$. Επιπλέον είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίζοντας την f προκύπτει

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=g(x)$$

Όμοια $g'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}2kx^{2k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ και θέτοντας $k=s+1$ έπεται ότι $g'(x)=-f(x)$.

ii. Θέτοντας όπου $x=0$, προκύπτει ότι $f(0)=0$ και $g(0)=1$.

Θεώρημα 3.2.2 Οι συναρτήσεις f, g ικανοποιούν την ταυτότητα $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $h'(x)=0$ και αφού $h(0)=1$ έπεται ότι $h(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Με το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των f και g.

Θεώρημα 3.2.3 Οι συναρτήσεις f και g που ικανοποιούν τις ιδιότητες του Θεωρήματος 3.2.1 είναι μοναδικές.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις f_1 και f_2 από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω

$$h_1(x)=f(x)g_1(x)-f_1(x)g(x)$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $h_1'(x)$=0, άρα $f(x)g_1(x)-f_1(x)g(x)=\alpha$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ (1). Επίσης αν $h_2(x)=f(x)f_1(x)+g(x)g_1(x)$ τότε παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $h'_2(x)=0$, συνεπώς $f(x)f_1(x)+g(x)g_1(x)$=β όπου $\beta\in\mathbb{R}$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με g και τη (2) με f και αφαιρώντας τις, συνεπάγεται ότι

$$f_1(x)=\beta f(x)-\alpha g(x)$$

Θέτοντας $x=0$ στην προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\alpha=0$. Τέλος πολλαπλασιάζοντας την (1) με την f και τη (2) με την g και αφαιρώντας τις, τότε $g_1(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ από όπου με x=0 έπεται ότι $\beta=1$. Άρα αποδείχθηκε ότι $f_1(x)=f(x)$ και $g_1(x)=g(x)$.

Τώρα που η ύπαρξη και η μοναδικότητα των συναρτήσεων f και g εξασφαλίστηκε, θα δωθούν σε αυτές τα γνωστά τους ονόματα.

Ορισμός 3.2.4 Οι μοναδικές συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν

i. $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(0)=0$ και $g(0)=1$.

ονομάζονται συνάρτηση ημιτόνου και συνημίτονου, αντίστοιχα, και γράφουμε $f(x)=\sin_2 x$ και $g(x)=\cos_2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g όπως ορίστηκαν ικανοποιούν όλες τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.2.5 Ισχύουν

i. $\cos_2^2 x+\sin_2^2 x=1$.

ii. $|\sin_2 x|\le 1$, $|\cos_2 x|\le 1$.

Απόδειξη

i. Έπεται από το Θεώρημα 3.2.2 θέτοντας όπου $f(x)=\sin_2 x$ και όπου $g(x)=\cos_2 x$.

ii. Έπεται άμεσα από το i.

Θεώρημα 3.2.6 Ισχύουν $\cos_2(-x)=\cos_2 x$, $\sin_2(-x)=-\sin_2 x$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει ότι

$$f_1(x)=\beta f(x)-\alpha g(x) \text{ και } g_1(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

Θέτοντας $f_1(x)=\cos_2(-x)$ και $g_1(x)=\sin_2(-x)$ και στην συνέχεια x=0 έπεται ότι $\alpha=-1$ και β=0.

Θεώρημα 3.2.7 Ισχύουν

i. $\sin_2(x+y)=\sin_2 x\cos_2 y+\cos_2 x\sin_2 y$.

ii. $\cos_2(x+y)=\cos_2 x\cos_2 y-\sin_2 x\sin_2 y$.

Απόδειξη

Ισχύει ότι $f_1(x)=\beta f(x)-\alpha g(x)$ και $g_1(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$.

Θέτοντας $f_1(x)=\sin_2(x+y)$ και $g_1(x)=\cos_2(x+y)$ και στη συνέχεια $x=0$ στις δύο προηγούμενες ισότητες, προκύπτει ότι $\alpha=-\sin_2 y$ και $\beta=\cos_2 y$.

Το επόμενο θεώρημα θα βοηθήσει να οριστεί ο αριθμός π_2.

Θεώρημα 3.2.8

i. Υπάρχει ένας πραγματικός θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $\cos_2 x_0=0$.

ii. Υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $\cos_2 c=0$.

Απόδειξη

i. Έστω ότι $\cos_2 x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε αφού η συνάρτηση $\cos_2$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ως παραγωγίσημη και $\cos_2 0=1$, από την ιδιότητα σταθερού πρόσημου έπεται ότι $\cos_2 x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $(\sin_2 x)'=\cos_2 x>0$ συνεπώς η συνάρτηση $\sin_2$ είναι αύξουσα. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού για την $\cos_2$ στο $[1,x]$, όπου $x>1$ υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε

$$\cos_2 x-\cos_2 1=-(x-1)\sin_2\xi$$

Όμως $1<\xi<x$ και αφού η $\sin_2$ είναι αύξουσα έχουμε ότι $\sin_2 1<\sin_2\xi<\sin_2 x$. Άρα $\cos_2 x-\cos_2 1=-(x-1)\sin_2\xi<-(x-1)\sin_2 1$ δηλαδή

$$\cos_2 x<\cos_2 1+\sin_2 1-x\sin_2 1$$

Αλλά το $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos_2 1+\sin_2 1-x\sin_2 1\right)=-\infty$ συνεπώς και $\lim_{x\to+\infty}\cos_2 x=-\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού από το Θεώρημα 3.2.5 ισχύει ότι $\left|\cos_2 x\right|\le 1$. Εφόσον $\cos_2 x_0=\cos_2\left(-x_0\right)$ υπάρχει κάποιος $x_0\in\mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε $\cos_2 x_0=0$.

ii. Έστω το σύνολο A={u: $\cos_2 u=0$, u>0}.

Λόγω του i. υπάρχει το $\inf A$ και έστω $\inf A=c$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $c>0$. Υπάρχει ακολουθία $u_n\in A$ τέτοια ώστε $u_n\to c$. Συνεπώς $\lim_{n\to\infty}\cos_2 u_n=\cos_2 c=0$. Όμως $c\ge 0$ και αφού $\cos_2 0=1$ έπεται ότι $c>0$.

Ορισμός 3.2.9 Αν c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_2 c=0$, τότε ορίζεται $\pi_2=2c$.

Αφού ορίστηκε ο αριθμός π_2 θα αποδειχθούν κάποιες επιπλέον βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.2.10 Ισχύουν

$$\cos_2\frac{\pi_2}{2}=0,\ \sin_2\frac{\pi_2}{2}=1,\ \sin_2\pi_2=0,\ \cos_2\pi_2=-1,\ \sin_2 2\pi_2=0,\ \cos_2 2\pi_2=1.$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 3.2.9 ισχύει ότι $\cos_2 c=0$ άρα $\cos_2\frac{\pi_2}{2}=0$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι $\sin_2\frac{\pi_2}{2}=1$. Οι υπόλοιπες ισότητες προκύπτουν από το Θεώρημα 3.2.7 θέτοντας $x=y=\frac{\pi_2}{2}$ και $x=y=\pi_2$.

Θεώρημα 3.2.11 Ισχύουν $\cos_2\left(x+2\pi_2\right)=\cos_2 x$ και $\sin_2(x+2\pi_2)=\sin_2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα οι συναρτήσεις $\cos_2$ και $\sin_2$ έχουν περίοδο $2\pi_2$.

Απόδειξη

Θέτοντας στις ταυτότητες του Θεωρήματος 3.2.7 όπου $y = 2\pi_2$ προκύπτει ότι $\cos_2\left(x + 2\pi_2\right) = \cos_2 x$ και $\sin_2(x + 2\pi_2) = \sin_2 x$. Μένει να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει περίοδος μικρότερη του αριθμού $2\pi_2$. Έστω το σύνολο

$$B = \{\, m \in \mathbb{Z} \,/\, 2m\pi_2 \le s \,\} \text{ όπου s περίοδος}$$

Αυτό είναι μη κενό αφού ο αριθμός $\dfrac{s}{2\pi_2}$ ανήκει στο σύνολο B. Επιπλέον το B είναι άνω φραγμένο αφού $m \le \dfrac{s}{2\pi_2}$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει το supB και έστω $\sup B = n$. Από τον ορισμό του $\sup\mathrm{reum}$ προκύπτει ότι $2n\pi_2 \le s$ και $2\left(n+1\right)\pi_2 > s$. Όμως ο αριθμός $t = s - 2n\pi_2$ είναι περίοδος και ισχύει ότι $0 \le t < 2\pi_2$. Άρα $\sin_2(0+t) = \sin_2 0 = 0$ και $\cos_2(0+t) = \cos_2 0 = 1$. Αυτό συμβαίνει μόνο αν $t = 0$. Άρα $s = 2n\pi_2$.

Θεώρημα 3.2.12 i. $\cos_2 x > 0$ για $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right)$ και $\sin_2$ γνησίως αύξουσα για $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right]$.

ii. $\sin_2 x > 0$ για $x \in \left(0, \dfrac{\pi_2}{2}\right]$ και $\cos_2$ γνησίως φθίνουσα για $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Η συνάρτηση $\cos_2$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right)$. Επιπλέον $\cos_2 x \ne 0$ για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right)$ διότι ο $c = \dfrac{\pi_2}{2}$ είναι ο ελάχιστος αριθμός ώστε $\cos\dfrac{\pi_2}{2} = 0$. Έτσι αφού $\cos_2 0 = 1 > 0$ η συνάρτηση $y = \cos_2 x > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right)$. Ισχύει ότι $\left(\sin_2 x\right)' = \cos_2 x > 0$ συνεπώς η συνάρτηση $\sin_2$ είναι γνησίως αύξουσα για $x \in \left[0, \dfrac{\pi_2}{2}\right]$.

ii. Αφού η συνάρτηση $\sin_2$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi_2}{2}\right]$ τότε όταν $x \in \left(0, \frac{\pi_2}{2}\right]$ προκύπτει ότι $0 < \sin_2 x \le 1$. Από αυτό έπεται ότι η $\cos_2$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in \left[0, \frac{\pi_2}{2}\right]$ αφού $(\cos_2 x)' = -\sin_2 x < 0$.

Για να αποδειχθούν οι ιδιότητες προσήμου και μονοτονίας για τις $\cos_2$, $\sin_2$ στα διαστήματα $\left[\frac{\pi_2}{2}, \pi_2\right]$, $\left[\pi_2, \frac{3\pi_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi_2}{2}, 2\pi_2\right]$ γίνεται χρήση των ταυτοτήτων $\cos_2 x = -\sin_2(x - \frac{\pi_2}{2})$ και $\sin_2 x = \cos_2(x - \frac{\pi_2}{2})$ οι οποίες προκύπτουν από το Θεώρημα 3.2.7 θέτοντας $y = -\frac{\pi_2}{2}$.

Θεώρημα 3.2.13 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_2 x \le x$.

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin_2 x}{x} = 1$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $-1 \le \cos_2 x \le 1$ και αφού η $\cos_2$ είναι συνεχής είναι και ολοκληρώσιμη. Συνεπώς για $x \ge 0$ από την προηγούμενη ανισότητα έπεται

$$\int_0^x -1 dt \le \int_0^x \cos_2 x dt \le \int_0^x 1 dt$$

από όπου προκύπτει ότι $-x \le \sin_2 x \le x$. Ομοίως αν $x < 0$.

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin_2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin_2 x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \cos_2 x = 1$.

Αφού ορίστηκαν οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημίτονου και αποδείχθηκαν οι βασικές ιδιότητές τους, απομένει να οριστούν και οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.2.14 Ορίζονται

i. $\tan_2 x = \dfrac{\sin_2 x}{\cos_2 x}$, $x \neq \kappa\pi_2 + \dfrac{\pi_2}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\cot_2 x = \dfrac{\cos_2 x}{\sin_2 x}$, $x \neq \kappa\pi_2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\sec_2 x = \dfrac{1}{\cos_2 x}$, $x \neq \kappa\pi_2 + \dfrac{\pi_2}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iv. $\operatorname{cosec}_2 x = \dfrac{1}{\sin_2 x}$, $x \neq \kappa\pi_2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους, είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.[117]

3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f''(x) = -f(x)$

Μια ακόμη διαφορετική προσέγγιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προκύπτει μέσω της επίλυσης της $f''(x) = -f(x)$. Παρακάτω θα καταγραφούν δύο διαφορετικοί τρόποι επίλυσης της προηγούμενης εξίσωσης.

Θεώρημα 3.3.1 Υπάρχουν συναρτήσεις $c:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $s:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

i. $c''(x) = -c(x)$ και $s''(x) = -s(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$ και $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$.

Απόδειξη

Ορίζονται επαγωγικά οι ακολουθίες συναρτήσεων c_n και s_n ως εξής

$$c_1(x) = 1,\ s_1(x) = x,\ s_n(x) = \int_0^x c_n(t)\,dt,\ c_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x s_n(t)\,dt \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Οι συναρτήσεις c_n και s_n είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ κάτι που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή. Έτσι προκύπτει ότι οι προηγούμενες συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες και επιπλέον ισχύει $s'_n(x) = c_n(x)$ και $c'_{n+1}(x) = -s_n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$. Στην συνέχεια μέσω της επαγωγής αποδεικνύεται ότι

$$c_{n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

[117] Serge Lang, Undergraduate Analysis, Springer, 1983.

και $s_{n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Έπειτα θα αποδειχθεί ότι οι ακολουθίες συναρτήσεων c_n και s_n συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Έτσι θεωρώντας ότι $|x|\le A$ όπου A>0 και επιπλέον $m>n>2A$ προκύπτει ότι

$$|c_m(x)-c_n(x)|=\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+...\pm\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\right|\le$$

$$\le\frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(1+\left(\frac{A}{2n}\right)^2+...+\left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n-2}\right)$$

Όμως $m>n>2A$ άρα $\frac{A}{2n}<\frac{1}{4}$ και

$$|c_m(x)-c_n(x)|\le\frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+...+\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-2n-2}\right)\le\frac{A^{2n}}{(2n)!}\frac{16}{15}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty}\frac{A^{2n}}{(2n)!}\frac{16}{15}=0$ άρα από το κριτήριο του Cauchy η c_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο τυχαίο διάστημα $[-A,A]$ και άρα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς ορίζεται $c(x)=\lim_{n\to+\infty}c_n(x)$ (1). Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της c_n έπεται ότι η c είναι συνεχής. Αφού $c_n(0)=1$ προκύπτει από την (1) ότι $c(0)=1$. Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ακολουθία s_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Έτσι $s(x)=\lim_{n\to+\infty}s_n(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της s_n έπεται ότι και η s είναι συνεχής και $s(0)=0$ αφού $s_n(0)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Ισχύει $c_n(x)=1-\int_0^x s_{n-1}(t)dt$ οπότε $c_n'(x)=-s_{n-1}(x)$. Έστω ότι σε οποιοδήποτε διάστημα $[-A,A]$ η c_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη g όπου $g:[-A,A]\to\mathbb{R}$. Αφού η c_n συγκλίνει ομοιόμορφα στη c στο $[-A,A]$ τότε η c είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$c'(x)=g(x) \text{ στο } [-A,A]$$

Συνεπώς $c'(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}c_n'(x)=\lim_{n\to\infty}(-s_{n-1}(x))=-s(x)$. Αφού το A είναι τυχαίο έπεται ότι $c'(x)=-s(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$s'(x)=c(x)$. Από τις προηγούμενες είναι άμεσα τα $c''(x)=-c(x)$, $s''(x)=-s(x)$, $s'(0)=c(0)=1$ και $c'(0)=-s(0)=0$.

Πόρισμα 3.3.2 Οι συναρτήσεις c και s, όπως ορίστηκαν στο προηγούμενο θεώρημα είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες.

Απόδειξη

Έπεται επαγωγικά από τις $c''(x)=-c(x)$ και $s''(x)=-s(x)$.

Στο επόμενο θεώρημα εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των συναρτήσεων c, s.

Θεώρημα 3.3.3 Οι συναρτήσεις c, s που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.1 είναι μοναδικές.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις c_1, c_2 καθώς και t_1, t_2 που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.1. Θα αποδειχθεί ότι $c_1=c_2$ και $t_1=t_2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω οι συναρτήσεις

$$d(x)=c_1(x)-c_2(x) \text{ και } t(x)=t_1(x)-t_2(x)$$

Εύκολα έπεται ότι $d''(x)=-d(x)$. Οπότε επαγωγικά μπορεί να προκύψει ότι υπάρχουν για την d οι παράγωγοι όλων των τάξεων. Επιπλέον ισχύει ότι $d^{(\kappa)}(0)=0$.

Αυτό προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ότι $c^{(\kappa)}(0)=\{\begin{array}{l}1, \text{αν } \kappa=4\nu\\ 0, \text{αν } \kappa=4\nu+1\\ -1, \text{αν } \kappa=4\nu+2\\ 0, \text{αν } \kappa=4\nu+3\end{array}$

Από το Θεώρημα Taylor για τη d στο $I=[0,x]$ έπεται ότι

$$d(x)=\sum_{\kappa=0}^{N}\frac{d^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}x^{\kappa}+R_n(x;0;d)=R_n(x;0;d)$$

Ισχύει ότι $R_n(x;0;d)=\left|\frac{d^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|d^{(n+1)}(\xi)\right|\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ όπου $\xi\in(0,x)$. Όμως $d^{(n+1)}(\xi)=\pm d(\xi)$ ή $d^{(n+1)}(\xi)=\pm t(\xi)$ και επιπλέον αφού d, t συνεχείς στο $[0,x]$

υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε $\left|d(t)\right|\le K$, $\left|t(t)\right|\le K$. Έτσι προκύπτει ότι $\left|d(x)\right|=\left|\frac{d^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le K\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ και αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ έπεται ότι $d(x)=0$.

Αφού $d(x)=0$ στο τυχαίο διάστημα I τότε $d(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο αποδείκνυεται η μοναδικότητα της συνάρτησης s.

Παρακάτω θα οριστούν οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο.

Ορισμός 3.3.4 Οι μοναδικές συναρτήσεις $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες $c''(x)=-c(x)$ και $c(0)=1$, $c'(0)=0$ καθώς και $s''(x)=-s(x)$, $s(0)=0$, $s'(0)=1$ ονομάζονται συναρτήσεις συνημιτόνου και ημιτόνου, αντίστοιχα, και συμβολίζονται $c(x)=\cos_3 x$ και $s(x)=\sin_3 x$.

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι $c(x)=\cos_3 x$ και $s(x)=\sin_3 x$ ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.3.5

i. $\cos_3^2 x+\sin_3^2 x=1$.

ii. $\left|\sin_3 x\right|\le 1$, $\left|\cos_3 x\right|\le 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.2.

Θεώρημα 3.3.6 Ισχύει ότι $\sin_3(-x)=-\sin_3 x$ και $\cos_3(-x)=\cos_3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη Έστω η συνάρτηση $g(x)=\sin_3(-x)+\sin_3 x$. Ισχύει ότι $g''(x)=-g(x)$ άρα η συνάρτηση $\left[g'(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2$ είναι σταθερή καθώς

$$\left(\left[g'(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2\right)'=0.$$

Αφού $g(0)=g^{'}(0)=0$ έπεται ότι $\left[g^{'}(x)\right]^{2}+\left[g\ (x)\right]^{2}=0$ συνεπώς $g(x)=0$.

Όμοια και για την $\cos_3(-x)=\cos_3 x$.

Θεώρημα 3.3.7

Ισχύουν

i. $\sin_3(x+y)=\sin_3 x\cos_3 y+\cos_3 x\sin_3 y$.

ii. $\cos_3(x+y)=\cos_3 x\cos_3 y-\sin_3 x\sin_3 y$.

Απόδειξη

i. Θεωρώντας τη συνάρτηση

$g(x)=\sin_3(x+y)-\sin_3 x\cos_3 y-\cos_3 x\sin_3 y$, η απόδειξη είναι όμοια όπως στο Θεώρημα 3.3.6.

Το επόμενο θεώρημα θα βοηθήσει να οριστεί ο αριθμός π_3.

Θεώρημα 3.3.8 i. Υπάρχει ένας πραγματικός θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $\cos_3 x_0=0$.

ii. Υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $\cos_3 c=0$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.8.

Ορισμός 3.3.9 Αν c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_3 c=0$, τότε ορίζεται $\pi_3=2c$.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν κάποιες επιπλέον ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.3.10 Ισχύουν $\cos_3(x+2\pi_3)=\cos_3 x$ και $\sin_3(x+2\pi_3)=\sin_3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα οι συναρτήσεις $\cos_3$ και $\sin_3$ έχουν περίοδο $2\pi_3$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.12.

Θεώρημα 3.3.11

i. $\cos_3 x > 0$ για $x \in \left[0, \frac{\pi_3}{2}\right)$ και $\sin_3$ γνησίως αύξουσα για $x \in \left[0, \frac{\pi_3}{2}\right]$.

ii. $\sin_3 x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi_3}{2}\right]$ και $\cos_3$ γνησίως φθίνουσα για $x \in \left[0, \frac{\pi_3}{2}\right]$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.12.

Θεώρημα 3.3.12 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_3 x \le x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin_3 x}{x} = 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Αφού ορίστηκαν οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου και αποδείχθηκαν οι βασικές ιδιότητές τους, απομένει να οριστούν και οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.3.13 Ορίζονται

i. $\tan_3 x = \frac{\sin_3 x}{\cos_3 x}, x \ne \kappa\pi_3 + \frac{\pi_3}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\cot_3 x = \frac{\cos_3 x}{\sin_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\sec_3 x = \frac{1}{\cos_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3 + \frac{\pi_3}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\operatorname{cosec}_3 x = \frac{1}{\sin_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.[118]

[118] Robert G. Batle, Donald R. Sherbert, Indroduction to Real Analysis, John Wiley sons, 1992.

Υπάρχει και ο ακόλουθος εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης για τις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = -f(x)$. Αρχικά θα αποδειχθεί ότι κάθε εξίσωση αυτής της μορφής έχει μοναδική λύση με δεδομένες κάποιες αρχικές συνθήκες .

Θεώρημα 3.3.14 Για κάθε $b, c, d_0, d_1 \in C$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to C$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to C$, κλάσης C^2 που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $f''(x) + bf'(x) + cf(x) = h(x)$ (1) με αρχικές συνθήκες $f(0) = d_0$, $f'(0) = d_1$.

Απόδειξη

Έστω $\alpha_1 + \alpha_2 = -b$ και $\alpha_1\alpha_2 = c$. Θέτοντας $g = f' - \alpha_2 f$ τότε

$$g' - \alpha_1 g = f'' - \alpha_2 f' - \alpha_1(f' - \alpha_2 f) = f'' - (\alpha_1 + \alpha_2)f' + \alpha_1\alpha_2 f = f'' + bf' + cf = h$$

Όμως η $g' - \alpha_1 g = h$, $g(0) = d_1 - \alpha_2 d_0$ έχει μοναδική λύση άρα και η (1).

Η $f''(x) + f(x) = 0$ ως ειδική περίπτωση της (1) έχει μοναδική λύση.

Ορισμός 3.3.15 Ορίζεται η συνάρτηση $\sin_3 : \mathbb{R} \to C$ με τύπο

$$\sin_3 x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

ως η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $f''(x) + f(x) = 0$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Ορισμός 3.3.16 Ορίζεται η συνάρτηση $\cos_3 : \mathbb{R} \to C$ με τύπο

$$\cos_3 x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

ως η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $f''(x) + f(x) = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι $\cos_3$ και $\sin_3$ όπως ορίστηκαν ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.3.17 Οι συναρτήσεις $\cos_3$ και $\sin_3$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και ισχύει

i. $(\cos_3 x)' = -\sin_3 x$.

ii. $(\sin_3 x)' = \cos_3 x$.

Απόδειξη

i. Οι συναρτήσεις e^{ix}, e^{-ix} είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες συνεπώς και οι $\cos_3$, $\sin_3$. Η ισότητα $(\cos_3 x)' = -\sin_3 x$ αποδεικνύεται παραγωγίζοντας την ισότητα $\cos_3 x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$. Όμοια για την δεύτερη.

Θεώρημα 3.3.18 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

i. $\sin_3^2 x + \cos_3^2 x = 1$.

ii. $|\sin_3 x| \le 1$ και $|\cos_3 x| \le 1$.

Απόδειξη

i. Έπεται από τους Ορισμούς 3.3.15 και 3.3.16.

ii. Προκύπτει άμεσα από το i.

Θεώρημα 3.3.19 i. Υπάρχει πραγματικός θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $\cos_3 x_0 = 0$.

ii. Υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $\cos_3 c = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\cos_3 x \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Εφόσον η συνάρτηση $\cos_3$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $\cos_3 0 = 1 > 0$, έπεται ότι $\cos_3 x > 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως η $\sin_3$ είναι γνησίως αύξουσα για $x \ge 0$. Έτσι όταν $x \ge 1$ συνεπάγεται ότι $\sin_3 x \ge \sin_3 1 > 0$. Ισχύει ότι

$$\int_1^x (\cos_3 t)'\, dt = \cos_3 x - \cos_3 1$$

Άρα $0 < \cos_3 x = \int_1^x (\cos_3 t)' dt + \cos_3 1 = \cos_3 1 - \int_1^x \sin_3 t dt$ (1). Όμως $\sin_3 x \ge \sin_3 1$ άρα από την (1) προκύπτει ότι

$$0<\cos_3 x=\cos_3 1-\int_1^x \sin_3 t dt \le \cos_3 1-\int_1^x \sin_3 1 dt=\cos_3 1-(x-1)\sin_3 1$$

Όμως $\lim_{x\to\infty}\left(\cos_3 1-(x-1)\sin_3 1\right)=-\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\cos_3 x>0$. Συνεπώς υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $\cos_3 x_0=0$.

ii. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.2.8.

Ορισμός 3.3.20 Αν c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_3 c=0$, τότε ορίζεται $\pi_3=2c$.

Θεώρημα 3.3.21 Ισχύουν $\cos_3(x+2\pi_3)=\cos_3 x$ και $\sin_3(x+2\pi_3)=\sin_3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα οι $\cos_3$ και $\sin_3$ έχουν περίοδο $2\pi_3$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $y=\cos_3(x+2\pi_3)$ ικανοποιεί την $f''(x)+f(x)=0$ όπου $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Λόγω της μοναδικότητας ισχύει $\cos_3(x+2\pi_3)=\cos_3 x$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\sin_3(x+2\pi_7)=\sin_3 x$.

Θεώρημα 3.3.22 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

i. $\cos_3(-x)=\cos_3 x$.

ii. $\sin_3(-x)=-\sin_3 x$.

Απόδειξη

Έπονται άμεσα από τους Ορισμούς 3.3.15 και 3.3.16.

Θεώρημα 3.3.23 Ισχύουν

i. $\sin_3(x+y)=\sin_3 x\cos_3 y+\cos_3 x\sin_3 y$.

ii. $\cos_3(x+y)=\cos_3 x\cos_3 y-\sin_3 x\sin_3 y$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι όμοια με του Θεωρήματος 3.3.7 του 1ου τρόπου λύσης της $f''(x)+f(x)=0$.

Το επόμενο θεώρημα αφορά το πρόσημο και την μονοτονία των $\cos_3$ και $\sin_3$ όταν $x \in \left[0, \frac{\pi_3}{2}\right]$.

Θεώρημα 3.3.24

i. $\cos_3 x > 0$ για $x \in \left[0, \frac{\pi_3}{2}\right)$ και $\sin_3$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi_3}{2}\right]$.

ii. $\sin_3 x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi_3}{2}\right]$ και $\cos_3$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_3}{2}\right]$.

Απόδειξη

Είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.12.

Θεώρημα 3.3.25 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_3 x \le x$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin_3 x}{x} = 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Τέλος, θα οριστούν οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.3.26 Ορίζονται

i. $\tan_3 x = \frac{\sin_3 x}{\cos_3 x}, x \ne \kappa\pi_3 + \frac{\pi_3}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

i. $\cot_3 x = \frac{\cos_3 x}{\sin_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\sec_3 x = \frac{1}{\cos_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3 + \frac{\pi_3}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\operatorname{cosec}_3 x = \frac{1}{\sin_3 x}, \ x \ne \kappa\pi_3, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.[119]

---

[119] Richard Beals, Advanced Analysis, Springer, 1973.

3.4 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$

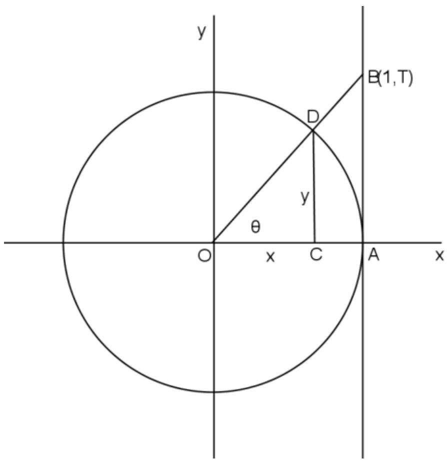
Σε αυτή τη μέθοδο θεμελίωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων πρωταρχική θέση κατέχει ο ορισμός της συνάρτησης $\arctan_4$. Πριν οριστεί, θα θεμελιωθούν δύο βασικές έννοιες, το μήκος τόξου μοναδιαίου κύκλου καθώς και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στο τόξο αυτό. Έτσι προκύπτει ότι ο ορισμός της συνάρτησης $\arctan_4$ είναι συμβατός με τη γεωμετρική εποπτεία και συνδέεται με αυτές τις βασικές έννοιες.

Θεώρημα 3.4.1 Το μήκος L ενός τόξου του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχεί σε μια γωνία θ δίνεται από τον τύπο

$$L(T) = \int_0^T \frac{1}{1+u^2}du \text{ , όπου } L(T) = \arctan_4 T$$

Απόδειξη

Έστω μοναδιαίος κύκλος κέντρου O και τόξο AD που αντιστοιχεί σε γωνία $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ως γνωστόν το μήκος μιας καμπύλης δίνεται από την σχέση $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ (1). Με την βοήθεια του σχήματος, προκύπτει μια έκφραση για τις συντεταγμένες του σημείου D.



Από την ομοιότητα των τριγώνων OAB και OCD έπεται ότι $\frac{T}{1} = \frac{y}{x}$. Επιπλέον ισχύει ότι $x^2 + y^2 = 1$. Από τις δύο αυτές ισότητες συνεπάγεται ότι $x(T) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$ και

$y(T)=\dfrac{T}{\sqrt{1+T^2}}$, και από την (1) έπεται ότι $L(T)=\int_0^T \dfrac{1}{1+u^2}du$. Ωστόσο ισχύει ότι $L=r\theta$ άρα $L=\theta$. Όμως $\theta=\arctan_4 T$ συνεπώς $L=\arctan_4 T$.

Τελικά αποδείχθηκε ότι $\arctan_4 T=\int_0^T \dfrac{1}{1+u^2}du$.

Μέσω του επόμενου θεωρήματος συνδέεται, το εμβαδό ενός κυκλικού τομέα με το μήκος του αντίστοιχου τόξου και ισοδύναμα με την $\arctan_4$.

Θεώρημα 3.4.2 Το εμβαδόν E του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στο τόξο του προηγούμενου θεωρήματος δίνεται από τον τύπο $E(T)=\dfrac{1}{2}\int_0^T \dfrac{1}{1+u^2}du$.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο σχήμα προκύπτει ότι

$$E(T)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{T^2+1}}\frac{T}{\sqrt{T^2+1}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{T^2+1}}}^{1}\sqrt{1-u^2}du$$

Παραγωγίζοντας ως προς T έπεται

$$E'(T)=\frac{1}{2\left(T^2+1\right)},\ \text{επομένως,}\ E(T)=\frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{1+u^2}du$$

Μέσω του προηγούμενου θεωρήματος προέκυψε ένας αναλυτικός ορισμός του εμβαδού κυκλικού τομέα. Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα θεωρήματα προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.4.3 Ισχύει ότι $E(T)=\dfrac{1}{2}L(T)$ ισοδύναμα $E(T)=\dfrac{1}{2}\arctan_4 T$.

Μετά από την αναφορά των δύο προηγούμενων θεωρημάτων δεν θα φανεί καθόλου αφύσικος ο ορισμός που θα δοθεί για τη συνάρτηση $\arctan_4$ που ήταν και ο αρχικός στόχος[120].

Ορισμός 3.4.4 Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ορίζεται $\arctan_4 x=\int_0^x \dfrac{1}{1+u^2}du$.

---

120 G. H. Hardy, A Course Of Pure Mathematics, Third Edition, Cambringe at the University Press, 1921.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτουν κάποιες ιδιότητες για τη συνάρτηση $\arctan_4$, οι οποίες καταγράφονται στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.4.5 i. $\arctan_4(-x) = -\arctan_4 x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση $\arctan_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Η συνάρτηση $\arctan_4$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iv. $\arctan_4 x < 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

i. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = -s$ προκύπτει

$$\arctan_4(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+u^2} du = -\int_0^{x} \frac{1}{1+s^2} ds = -\arctan_4 x$$

ii. Η $\arctan_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ισχύει ότι $\left(\arctan_4 x\right)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Έπεται άμεσα από τον ορισμό.

iv. Για $u \in [0,1]$ ισχύει ότι $\frac{1}{1+u^2} \le 1$ και για $u \ge 1$ ισχύει $\frac{1}{1+u^2} \le \frac{1}{u^2}$. Έτσι για $x \ge 1$

$$\arctan_4 x = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du + \int_1^x \frac{1}{1+u^2} du \le \int_0^1 1 du + \int_1^x \frac{1}{u^2} du = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2 - \frac{1}{x} < 2$$

Αφού αποδείχθηκε ότι η $\arctan_4$ είναι φραγμένη συνάρτηση και, επειδή είναι αύξουσα, υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \arctan_4 x$. Με βάση αυτό ο παρακάτω ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 3.4.6 $\pi_4 = 2 \lim_{x\to+\infty} \arctan_4 x$.

Ισχύει ότι $\lim_{x\to-\infty} \arctan_4 x = \lim_{t\to+\infty} \arctan_4(-t) = -\lim_{t\to+\infty} \arctan_4 t = -\frac{\pi_4}{2}$.

Προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα ότι αφού η $\arctan_4$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της θα είναι το $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$. Επιπλέον η $\arctan_4$ ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι θα είναι ένα-προς-ένα, επομένως, ορίζεται η αντίστροφή της. Έτσι έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.4.7 $\tan_4 : \left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y = \tan_4 x = \left(\arctan_4 x\right)^{-1}$.

Κατόπιν, καταγράφονται κάποιες ιδιότητες για την $\tan_4$ στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.4.8

i. $\left(\tan_4 x\right)' = 1 + \tan_4^2 x$.

ii. Η $\tan_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$.

iii. Η $\tan_4$ είναι περιττή στο $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$.

iv. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi_4}{2}^-} \tan_4 x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi_4}{2}^+} \tan_4 x = -\infty$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $\arctan_4(\tan_4 x) = x$.

Παραγωγίζοντας την τελευταία προκύπτει ότι $\left(\arctan_4'\left(\tan_4 x\right)\right)\left(\tan_4 x\right)' = 1$ από όπου, $\left(\tan_4 x\right)' = \frac{1}{\arctan_4'\left(\tan_4 x\right)} = 1 + \tan_4^2 x$.

ii. Από το i. έπεται ότι $\left(\tan_4 x\right)' > 0$ άρα η $\tan_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$.

iii. Έπεται άμεσα από το ότι η $\arctan_4$ είναι περιττή.

iv. Αφού η $\tan_4$ είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ έπεται άμεσα ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi_4}{2}^-} \tan_4 x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi_4}{2}^+} \tan_4 x = -\infty$.

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ο τύπος του αθροίσματος για την εφαπτομένη, αφού πρώτα αποδειχθεί ένας ισοδύναμος τύπος, που αφορά την αντίστροφη της.

Θεώρημα 3.4.9 Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\alpha\beta\neq 1$ ισχύει

$$\arctan_4\alpha+\arctan_4\beta=\arctan_4\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}.$$

Απόδειξη

1^{ος} τρόπος. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+u^2}du+\int_0^\alpha\frac{1}{1+u^2}du-\int_0^{\frac{\alpha+x}{1-\alpha x}}\frac{1}{1+u^2}du \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την f και κάνοντας τις πράξεις έπεται ότι $f'(x)=0$. Συνεπώς $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Εύκολα προκύπτει ότι $c=0$ θέτοντας στην (1) όπου x=0. Έτσι αφού $f(x)=0$ έπεται ότι $\int_0^\alpha\frac{1}{1+u^2}du+\int_0^x\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^{\frac{\alpha+x}{1-\alpha x}}\frac{1}{1+u^2}du$ δηλαδή

$$\arctan_4\alpha+\arctan_4 x=\arctan_4\frac{\alpha+x}{1-\alpha x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

2^{ος} τρόπος. Η ισότητα $\arctan_4\alpha+\arctan_4\beta=\arctan_4\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ είναι ισοδύναμη με την $\int_0^\alpha\frac{1}{1+u^2}du+\int_0^\beta\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}}\frac{1}{1+u^2}du$. Άρα αρκεί να αποδειχθεί η τελευταία.

Θέτοντας όπου $u=\frac{\alpha+x}{1-\alpha x}$ (2) προκύπτει $\frac{1}{1+u^2}=\frac{(1-\alpha x)^2}{(1+\alpha^2)(1+x^2)}$, συνεπώς

$$\frac{du}{dx}=\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha x)^2}$$

Τέλος από την (2) με $u=0$ και $u=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ προκύπτει $x=-\alpha$ και $x=\beta$ αντίστοιχα.

Έτσι

$$\int_0^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}}\frac{1}{1+u^2}du=\int_{-\alpha}^\beta\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\alpha}^0\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^\beta\frac{1}{1+x^2}dx=-\int_0^{-\alpha}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^\beta\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^\alpha\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^\beta\frac{1}{1+x^2}dx.$$

Πόρισμα 3.4.10 Για $x,y\in\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$ τέτοια ώστε $x+y\in\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$ ισχύει ότι

$$\tan_4(x+y)=\frac{\tan_4 x+\tan_4 y}{1-\tan_4 x\tan_4 y}$$

Απόδειξη

Έστω ότι $\arctan_4 \alpha = x$ και $\arctan_4 \beta = y$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $\tan_4 x = \alpha$ και $\tan_4 y = \beta$. Από το Θεώρημα 3.4.9

$$\tan_4\left(\arctan_4 \alpha + \arctan_4 \beta\right) = \tan_4\left(\arctan_4 \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right)$$

από όπου προκύπτει

$$\tan_4\left(x+y\right) = \frac{\tan_4 x + \tan_4 y}{1-\tan_4 x \tan_4 y}$$

Αφού ορίστηκε η $\tan_4$ και αποδείχθηκαν κάποιες ιδιότητές της, θα οριστούν οι συναρτήσεις $\cos_4$ και $\sin_4$.

Ορισμός 3.4.11 Ορίζονται οι συναρτήσεις $\cos_4$, $\sin_4$ στο $\left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$ ως εξής:

$$\cos_4 x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}} \text{ και } \sin_4 x = \frac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$$

Πόρισμα 3.4.12 i. $\cos_4 0 = 1$.

ii. $\sin_4 0 = 0$.

iii. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-} \cos_4 x = 0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-} \sin_4 x = 1$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $\cos_4 0 = 1$ διότι από τον Ορισμό 3.4.4 προκύπτει ότι $\arctan_4 0 = 0$ άρα $\tan_4 0 = 0$.

ii. Ομοίως με το i. κάνοντας χρήση του τύπου $\sin_4 x = \frac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$.

iii. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-} \cos_4 x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}} = 0$ διότι έχει αποδειχθεί στο Πόρισμα 3.4.8 ότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-} \tan_4 x = +\infty$.

Επιπλέον προκύπτει εύκολα ότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-}\sin_4 x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi_4}{2}^-}\dfrac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}} = 1$.

Θεώρημα 3.4.13 Αν $x\in\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$ τότε

i. $(\cos_4 x)' = -\sin_4 x$.

ii. $(\sin_4 x)' = \cos_4 x$.

Απόδειξη

i. Παραγωγίζοντας την $\cos_4 x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$ έπεται άμεσα.

ii. Ομοίως, παραγωγίζοντας την $\sin_4 x = \dfrac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$.

Έως τώρα έχουν οριστεί οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\tan_4$, $\cos_4$, $\sin_4$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$. Επιπλέον έχει αποδειχθεί πως σε αυτό το διάστημα είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς. Στόχος είναι να επεκταθεί ο ορισμός αυτών και σε διαστήματα εκτός του $\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$, στα οποία οι συναρτήσεις θα είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες και επιπλέον θα διατηρούν όλες τις ιδιότητες που ικανοποιούν στο $\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$. Ο ορισμός της $\tan_4$ επεκτείνεται σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\kappa\pi_4-\frac{\pi_4}{2},\kappa\pi_4+\frac{\pi_4}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ μέσω του τύπου

$$\tan_4 x = \tan_4(x-\kappa\pi_4) \text{ αν } \kappa\pi_4-\frac{\pi_4}{2} < x < \kappa\pi_4+\frac{\pi_4}{2}$$

Ισχύει ότι όταν $\kappa\pi_4-\frac{\pi_4}{2} < x < \kappa\pi_4+\frac{\pi_4}{2}$ τότε $-\frac{\pi_4}{2} < x-\kappa\pi_4 < \frac{\pi_4}{2}$. Άρα η $\tan_4$ είναι περιοδική με περίοδο π_4. Λόγω της περιοδικότητας οι ιδιότητες που έχουν αποδειχθεί στο $\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$, ισχύουν σε κάθε διάστημα της μορφής

$\left(\kappa\pi_4 - \frac{\pi_4}{2}, \kappa\pi_4 + \frac{\pi_4}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Έπειτα επεκτείνεται ο ορισμός των $\cos_4$ και $\sin_4$ σε όλο το $\mathbb{R}$. Η επέκταση γίνεται αρχικά στο διάστημα $\left(\frac{\pi_4}{2}, \frac{3\pi_4}{2}\right)$ μέσω των ισοτήτων

$$\cos_4(x+\pi_4) = -\cos_4 x \text{ και } \sin_4(x+\pi_4) = -\sin_4 x \text{ όταν } x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$$

Με απλές πράξεις έπεται ότι $\left(\cos_4 x\right)' = -\sin_4 x$ και $\left(\sin_4 x\right)' = \cos_4 x$. Για να εξασφαλιστεί η συνέχεια στο $-\frac{\pi_4}{2}$ και στο $\frac{\pi_4}{2}$ ορίζεται $\cos_4\left(\pm\frac{\pi_4}{2}\right) = 0$ και $\sin_4\left(\pm\frac{\pi_4}{2}\right) = \pm 1$. Μένει να εξασφαλιστεί η παραγωγισιμότητα τους στο $\frac{\pi_4}{2}$ και στο -$\frac{\pi_4}{2}$. Έτσι για την $\cos_4$, αρκεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \frac{\pi_4}{2}} \frac{\cos_4 x}{x - \frac{\pi_4}{2}}$, το οποίο έπεται πάιρνοντας τα πλευρικά όρια και εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hopital. Ομοίως εξασφαλίζεται η παραγωγισιμότητα και στο -$\frac{\pi_4}{2}$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η παραγωγισιμότητα της $\sin_4$. Έως τώρα έχουν οριστει οι $\cos_4$ και $\sin_4$ στο $\left[0, 2\pi_4\right]$ και έχει εξασφαλιστεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα τους. Απομένει να επεκταθεί ο ορισμός τους στο $\mathbb{R}$. Αυτό γίνεται από τις ισότητες

$$\cos_4 x = \cos_4\left(2\kappa\pi_4 + x\right) \text{ και } \sin_4 x = \sin_4\left(2\kappa\pi_4 + x\right) \text{ όπου } x \in \left[0, 2\pi_4\right]$$

Από την επέκταση του ορισμού στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι οι $\cos_4$ και $\sin_4$ είναι περιοδικές με περίοδο $2\pi_4$. Επιπλέον είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίζοντας τις δύο τελευταίες έπεται ότι $\left(\cos_4 x\right)' = -\sin_4 x$ και $\left(\sin_4 x\right)' = \cos_4 x$.

Στα επόμενα θεωρήματα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες των $\cos_4$ και $\sin_4$.

Θεώρημα 3.4.14 i. $\sin_4(x+y) = \sin_4 x \cos_4 y + \cos_4 x \sin_4 y$.

ii. $\cos_4(x+y) = \cos_4 x \cos_4 y - \sin_4 x \sin_4 y$

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.3.7.

Θεώρημα 3.4.15 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

i. $\cos_4(-x) = \cos_4 x$.

ii. $\sin_4(-x) = \sin_4 x$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.3.6.

Θεώρημα 3.4.16 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

i. $\sin_4^2 x + \cos_4^2 x = 1$.

ii. $|\sin_4 x| \le 1$ και $|\cos_4 x| \le 1$.

Απόδειξη

i. Θέτοντας y=-x στο Θεώρημα 3.4.14 τότε από το Θεώρημα 3.4.15 προκύπτει

$$\cos_4 x \cos_4(-x) - \sin_4 x \sin_4(-x) = \cos_4^2 x + \sin_4^2 x = 1$$

ii. Προκύπτει άμεσα από το i.

Θεώρημα 3.4.17

i. $\cos_4 x>0$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$ και $\sin_4$ γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right]$.

ii. $\sin_4 x < 0$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, 0\right)$ και $\cos_4$ γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_4}{2}, 0\right]$.

$\sin_4 x > 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi_4}{2}\right)$ και $\cos_4$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_4}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Εξ ορισμού $\cos_4 x>0$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$. Επιπλέον $(\sin_4 x)' = \cos_4 x > 0$ άρα η $\sin_4$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Ισχύει ότι $\sin_4 x = \frac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, \frac{\pi_4}{2}\right)$. Εύκολα προκύπτει ότι $\tan_4 x < 0$ όταν $x \in \left(-\frac{\pi_4}{2}, 0\right)$ άρα και $\sin_4 x < 0$. Λόγω της $(\cos_4 x)' > 0$ έπεται ότι η $\cos_4$ είναι γνησίως αύξουσα. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $\sin_4 x > 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi_4}{2}\right)$ και $\cos_4$ γνησίως φθίνουσα.

Κάνοντας χρήση των $\cos_4(x+\pi_4) = -\cos_4 x$, $\sin_4(x+\pi_4) = -\sin_4 x$ προκύπτει το πρόσημο και η μονοτονία των $\cos_4$, $\sin_4$ στο $\left[\frac{\pi_4}{2}, \frac{3\pi_4}{2}\right]$.

Θεώρημα 3.4.18 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_4 x \le x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin_4 x}{x} = 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Παραπάνω ορίστηκαν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\tan_4$, $\cos_4$ και $\sin_4$. Το ίδιο θα γίνει για τις άλλες τρείς συναρτήσεις.

Ορισμός 3.4.19 Ορίζονται

i. $\cot_4 x = \frac{\cos_4 x}{\sin_4 x}$, $x \ne \kappa\pi_4$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\sec_4 x = \frac{1}{\cos_4 x}$, $x \ne \kappa\pi_4 + \frac{\pi_4}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\operatorname{cosec}_4 x = \frac{1}{\sin_4 x}$, $x \ne \kappa\pi_4$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.

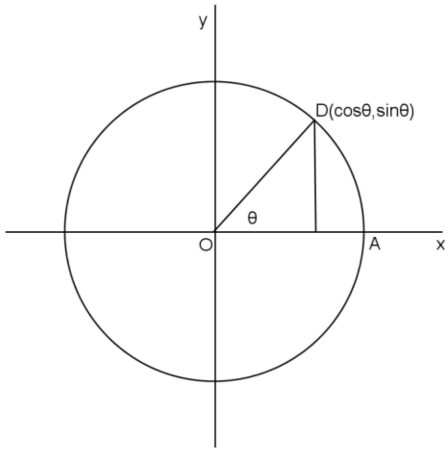
3.5 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$

Σε αυτή την μέθοδο θεμελίωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, η αρχή γίνεται με τον ορισμό της συνάρτησης $\arcsin_5$. Βάση της γεωμετρικής εποπτείας προκύπτει ότι ο ορισμός σχετίζεται άμεσα με το μήκος τόξου, του μοναδιαίου κύκλου. Έτσι για να γίνει κατανοητός ο επόμενος ορισμός, υπενθυμίζεται πως συνδέονται το $\arcsin_5 x$ και το μήκος τόξου.

Θεώρημα 3.5.1 Το μήκος ενός τόξου AD του μοναδιαίου κύκλου, όπου $D(\cos\theta, \sin\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \text{, όπου } \theta = \arcsin_5 x$$

Απόδειξη



Έστω ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου O και το τόξο του AD όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ το μήκος του τόξου AD δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1+\left(g^{'}(y)\right)^2} dy = \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

Θέτοντας $x = \sin\theta$, τότε από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$, $0 < x < 1$.

Με τα παραπάνω έπεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.5.2 Ορίζεται η συνάρτηση $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$, $x \in (-1,1)$.

Θα επεκταθεί ο ορισμός για $x = 1$ και $x = -1$. Συγκεκριμένα θα αποδειχεί πρώτα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$ συγκλίνει.

Ισχύει ότι $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \frac{1}{\sqrt{1-y}} \le \frac{1}{\sqrt{1-y}}$, $y \in [0,1]$. Όμως το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy$ συγκλίνει διότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy = -2 \lim_{\varepsilon \to 1^-} \left[\sqrt{1-y}\right]_0^\varepsilon = 2$. Συνεπώς και το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$ συγκλίνει. Έτσι $\arcsin_5 1 = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$.

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $\arcsin_5(-1) = \lim_{x\to -1^+}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$.

Ορισμός 3.5.3 $\pi_5 = 2\arcsin_5 1$.

Πόρισμα 3.5.4

i. Η συνάρτηση $\arcsin_5$ είναι περιττή στο $[-1,1]$.

ii. Η συνάρτηση $\arcsin_5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

iii. Το σύνολο τιμών της $\arcsin_5$ είναι το $\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $-y = s$ προκύπτει ότι

$$\arcsin_5(-x) = \int_0^{-x}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-(-s)^2}}ds = -\arcsin_5 x$$

ii. Ισχύει ότι $(\arcsin_5 x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$.

iii. Έπεται άμεσα από το ii.

Στη συνέχεια θα οριστεί η συνάρτηση $\sin_5$. Αφού η $\arcsin_5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, ορίζεται η αντίστροφη της.

Ορισμός 3.5.5 Στο $\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$ ορίζεται $y = \sin_5 x = \arcsin_5^{-1} x$.

Επίπλεον $\cos_5 x = \sqrt{1-\sin_5^2 x}$.

Πόρισμα 3.5.6

i. $(\sin_5 x)' = \cos_5 x$ και $(\cos_5 x)' = -\sin_5 x$, $x \in \left(-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right)$.

ii. $\sin_5 0 = 0$, $\cos_5 0 = 1$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $\arcsin_5(\sin_5 x) = x$.

Παραγωγίζοντας έπεται ότι $\left(\arcsin_5^{'}(\sin_5 x)\right)\left(\sin_5 x\right)^{'}=1$. Συνεπώς

$$\left(\sin_5 x\right)^{'}=\frac{1}{\arcsin_5^{'}(\sin_5 x)}=\sqrt{1-\sin_5^2 x}=\cos_5 x$$

Η $\left(\cos_5 x\right)^{'}=-\sin_5 x$ έπεται άμεσα από την παραγώγιση της $\cos_5 x=\sqrt{1-\sin_5^2 x}$.

ii. Η $\arcsin_5$ είναι περιττή, συνεπώς και η αντίστροφη της θα είναι περιττή.

iii. Αφού $\arcsin_5 0=0$ έπεται ότι $\sin_5 0=0$. Επιπλέον $\cos_5 0=1$ λόγω του Ορισμού 3.5.5. και του Πορίσματος 3.5.6.

Έως τώρα έχουν ορίστει οι συναρτήσεις $\sin_5$ και $\cos_5$ στο $\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$. Θα επεκταθεί αρχικά ο ορισμός τους στο $\left[\frac{\pi_5}{2},\frac{3\pi_5}{2}\right]$ και έπειτα σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι

$$\sin_5\left(x+\pi_5\right)=-\sin_5 x \text{ και } \cos_5\left(x+\pi_5\right)=-\cos_5 x \text{ όταν } x\in\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι $\left(\cos_5 x\right)^{'}=-\sin_5 x$ και $\left(\sin_5 x\right)^{'}=\cos_5 x$. Για να εξασφαλιστεί η συνέχεια για κάθε $x\in\left[0,2\pi_5\right]$, ορίζεται $\cos_5\left(\pm\frac{\pi_5}{2}\right)=0$ και $\sin_5\left(\pm\frac{\pi_5}{2}\right)=\pm1$. Μένει να εξασφαλιστεί η παραγωγισιμότητα τους στο $\frac{\pi_5}{2}$ και στο $-\frac{\pi_5}{2}$. Αρκεί να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi_5}{2}}\frac{\cos_5 x}{x-\frac{\pi_5}{2}}$, το οποίο προκύπτει παίρνοντας τα πλευρικά όρια και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hopital. Ομοίως εξασφαλίζεται η παραγωγισιμότητα και στο $-\frac{\pi_5}{2}$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει η παραγωγισιμότητα για την $\sin_5$. Έως τώρα έχουν οριστεί οι $\sin_5$ και $\cos_5$ στο $\left[0,2\pi_5\right]$ και έχει εξασφαλιστεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα τους. Απομένει να επεκταθεί ο ορισμός τους στο $\mathbb{R}$. Αυτό γίνεται από τις ισότητες

$$\cos_5 x=\cos_5\left(2\kappa\pi_5+x\right) \text{ και } \sin_5 x=\sin_5\left(2\kappa\pi_5+x\right) \text{ όπου } x\in\left[0,2\pi_5\right]$$

Από την επέκταση του ορισμού στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι οι $\cos_5$ και $\sin_5$ είναι περιοδικές με περίοδο $2\pi_5$. Επιπλέον είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $\left(\cos_5 x\right)' = -\sin_5 x$ και $\left(\sin_5 x\right)' = \cos_5 x$.

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\sin_5$ και $\cos_5$ ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.5.7 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

i. $\cos_5^2 x + \sin_5^2 x = 1$.

ii. $|\sin_5 x| \le 1$, $|\cos_5 x| \le 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.2.

Θεώρημα 3.5.8 Ισχύουν

i. $\cos_5(x+y) = \cos_5 x \cos_5 y - \sin_5 x \sin_5 y$.

ii. $\sin_5(x+y) = \sin_5 x \cos_5 y + \cos_5 x \sin_5 y$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.4.14.

Θεώρημα 3.5.9 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sin_5\left(-x\right) = -\sin_5 x$ και $\cos_5\left(-x\right) = \cos_5 x$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.4.15.

Θεώρημα 3.5.10 i. $\cos_5 x > 0$, $x \in \left(-\frac{\pi_5}{2}, \frac{\pi_5}{2}\right)$ και $\sin_5$ γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_5}{2}, \frac{\pi_5}{2}\right]$.

ii. $\sin_5 x < 0$, $x \in \left(-\frac{\pi_5}{2}, 0\right)$ και $\cos_5$ γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_5}{2}, 0\right]$.

Επιπλέον $\sin_5 x > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi_5}{2}\right)$ και $\cos_5$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_5}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Όταν $x\in\left(-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right)$ τότε $\cos_5 x=\sqrt{1-\sin_5^2 x}$ συνεπώς $\cos_5 x>0$. Ισχύει ότι $\left(\sin_5 x\right)^{'}=\cos_5 x>0$ καθώς $x\in\left(-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right)$ συνεπώς η $\sin_5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$.

ii. Από την μονοτονία της $\sin_5$ έπεται ότι $\sin_5 x<\sin_5 0=0$ στο $\left(-\frac{\pi_5}{2},0\right)$. Επιπλέον $\left(\cos_5 x\right)^{'}=-\sin_5 x>0,\ x\in\left(-\frac{\pi_5}{2},0\right)$ συνεπώς η $\cos_5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi_5}{2},0\right]$. Όμοια στο $\left[0,\frac{\pi_5}{2}\right]$. Για το πρόσημο και την μονοτονία στα υπόλοιπα τεταρτημόρια θα γίνει χρήση της ταυτότητας $\sin_5\left(x+\pi_5\right)=-\sin_5 x$ καθώς $x\in\left[-\frac{\pi_5}{2},\frac{\pi_5}{2}\right]$.

Θεώρημα 3.5.11 Ισχύουν

i. $-x\le\sin_5 x\le x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin_5 x}{x}=1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Αφού ορίστηκαν οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου και αποδειχθήκαν οι βασικές ιδιότητές τους, απομένει να οριστούν και οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.5.12 Ορίζονται

i. $\tan_5 x=\frac{\sin_5 x}{\cos_5 x},\ x\ne\kappa\pi_5+\frac{\pi_5}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

ii. $\cot_5 x=\frac{\cos_5 x}{\sin_5 x},\ x\ne\kappa\pi_5,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

iii. $\sec_5 x = \dfrac{1}{\cos_5 x}$, $x \neq \kappa\pi_5 + \dfrac{\pi_5}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iv. $\operatorname{cosec}_5 x = \dfrac{1}{\sin_5 x}$, $x \neq \kappa\pi_5$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.

3.6 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

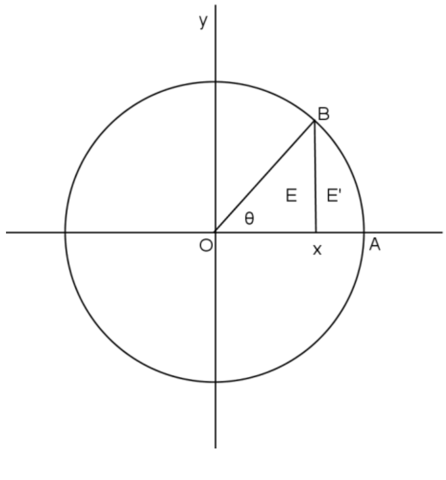
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να οριστούν μέσω του εμβαδού κυκλικού τομέα του μοναδιαίου κύκλου. Ειδικότερα οι $\cos_6$, $\sin_6$ θα οριστούν ως οι συντεταγμένες ενός σημείου B που καθορίζει κυκλικό τομέα εμβαδού $\dfrac{x}{2}$. Για να φανεί κατανοητός ο ορισμός τους, υπενθυμίζεται πως συνδέεται το εμβαδόν του κυκλικού τομέα με τις $\arcsin$ και $\arctan$. Αν $\varphi(x)$ παριστάνει το εμβαδόν κυκλικού τομέα τότε από το Θεώρημα 3.4.2 έπεται ότι $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x$ και από τον Ορισμό 3.5.1 ότι $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin x$. Στο Θεώρημα 3.6.1 θα βρεθεί μια αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Θεώρημα 3.6.1 Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που φράσσεται από τον μοναδιαίο κύκλο, τον οριζόντιο άξονα και την ημιευθεία που περνάει από το σημείο $B\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ δίνεται από τον τύπο $\varphi(x) = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$, $-1 \le x \le 1$.

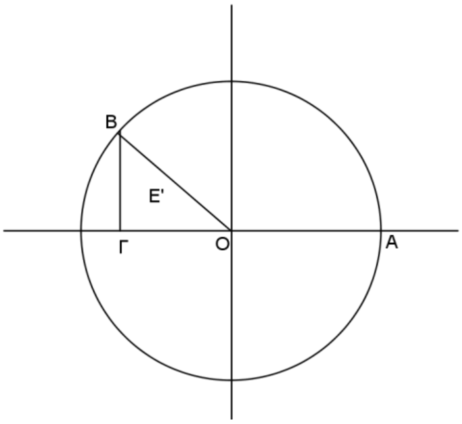
Απόδειξη

Αν $0 \le x \le 1$ τότε από το σχήμα προκύπτει ότι $\varphi(x) = E + E'$ συνεπώς

$$\varphi(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt .$$



Επίσης αν $-1 \le x \le 0$ τότε από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι $\varphi(x) = (ΟΑΒΓ) - Ε'$ το οποίο είναι συμβατό με τον προηγούμενο τύπο.



Στη συνέχεια θα οριστεί ο αριθμός π_6.

Ορισμός 3.6.2 $\pi_6 = 2\varphi(-1)$.

Από το Θεώρημα 3.6.1 προκύπτουν κάποιες ιδιότητες για την συνάρτηση φ.

Πόρισμα 3.6.3 i. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

ii. Η συνάρτηση φ έχει σύνολο τιμών το $\left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Αν $-1 < x < 1$, η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0$$

ii. Έπεται από το i.

Αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα ορίζεται η αντίστροφη της. Έτσι μπορούν να οριστούν οι $\cos_6$, $\sin_6$.

Ορισμός 3.6.4 Αν $0 \le x \le \pi_6$ ορίζονται $\cos_6 x = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ και $\sin_6 x = \sqrt{1-\cos_6^2 x}$.

Θεώρημα 3.6.5 Για κάθε $x \in (0, \pi_6)$ ισχύουν

i. $(\cos_6 x)' = -\sin_6 x$.

ii. $(\sin_6 x)' = \cos_6 x$.

Απόδειξη

i. Ισχύει $\varphi(\cos_6 x) = \frac{x}{2}$ ισοδύναμα $2\varphi(\cos_6 x) = x$ (1)

Η τελευταία γίνεται $(2\varphi)^{-1}(x) = \cos_6 x$. Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έπεται ότι και η $(2\varphi)^{-1}(x) = \cos_6 x$ είναι παραγωγίσιμη. Από την (1) προκύπτει

$$2\varphi'(\cos_6 x)(\cos_6 x)' = 1$$

Άρα $(\cos_6 x)' = \dfrac{1}{2\varphi'(\cos_6 x)} = -\sin_6 x$.

ii. Παραγωγίζοντας την $\sin_6 x = \sqrt{1-\cos_6^2 x}$, έπεται άμεσα το ζητούμενο.

Ο Ορισμός 3.6.4 θα επεκταθεί για $x \in \mathbb{R}$. Αρχικά επεκτείνεται στο $[\pi_6, 2\pi_6]$, μέσω των ισοτήτων

$$\sin_6(x+\pi_6) = -\sin_6 x \text{ και } \cos_6(x+\pi_6) = -\cos_6 x \text{ όταν } x \in [0, \pi_6]$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι $(\cos_6 x)' = -\sin_6 x$ και $(\sin_6 x)' = \cos_6 x$. Για να εξασφαλιστεί η συνέχεια των $\cos_6$, $\sin_6$ στο π_6 και στο $2\pi_6$ ορίζονται

$$\cos \pi_6 = -1,\ \cos 2\pi_6 = 1,\ \sin \pi_6 = 0,\ \sin 2\pi_6 = 0$$

Μένει να αποδειχθεί ότι οι $\cos_6$, $\sin_6$ είναι παραγωγίσιμες στο π_6 και στο $2\pi_6$. Αυτό γίνεται όπως στον Ορισμό 3.5. Τέλος η επέκταση για $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει μέσω των ισοτήτων

$$\sin_6(x+2\kappa\pi_6) = \sin_6 x \text{ και } \cos_6(x+2\kappa\pi_6) = \cos_6 x \text{ για } x \in [0, 2\pi_6]$$

Από την επέκταση για $x \in \mathbb{R}$ έπεται ότι οι $\cos_6$, $\sin_6$ είναι περιοδικές με $T = 2\pi_6$. Επιπλέον είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίζοντας τις δύο τελευταίες προκύπτει ότι $(\cos_6 x)' = -\sin_6 x$ και $(\sin_6 x)' = \cos_6 x$.

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\cos_6$, $\sin_6$ ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.6.6 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

i. $\cos_6^2 x + \sin_6^2 x = 1$.

ii. $|\cos_6 x| \le 1$ και $|\sin_6 x| \le 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.2.

Θεώρημα 3.6.7 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

i. $\cos_6(-x) = \cos_6 x$.

ii. $\sin_6(-x) = \sin_6 x$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.4.15.

Θεώρημα 3.6.8 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

i. $\sin_6(x+y) = \sin_6 x \cos_6 y + \cos_6 x \sin_6 y$.

ii. $\cos_6(x+y) = \cos_6 x \cos_6 y - \sin_6 x \sin_6 y$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.4.14.

Το επόμενο θεώρημα αφορά το πρόσημο και τη μονοτονία των $\cos_6$, $\sin_6$.

Θεώρημα 3.6.9

i. $\sin_6 x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi_6}{2}\right]$ και $\cos_6$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$.

ii. $\cos_6 x > 0$ για $x \in \left[0, \frac{\pi_6}{2}\right)$ και $\sin_6$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Από τον Ορισμό 3.6.4 έπεται ότι $\sin_6 x > 0$. Επιπλέον $\left(\cos_6 x\right)' = -\sin_6 x$<0, άρα η $\cos_6$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$.

ii. $\cos_6 x > 0$ αφού η $\cos_6$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $x \in \left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$. Επιπλέον $\left(\sin_6 x\right)' = \cos_6 x$>0, άρα η $\sin_6$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi_6}{2}\right]$.

Για να αποδειχθούν οι ιδιότητες προσήμου και μονοτονίας για τις συναρτήσεις $\cos_6$, $\sin_6$ στα διαστήματα $\left[\frac{\pi_6}{2}, \pi_6\right]$, $\left[\pi_6, \frac{3\pi_6}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi_6}{2}, 2\pi_6\right]$ κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων

$$\cos_6 x = -\sin_6(x - \frac{\pi_6}{2}) \text{ και } \sin_6 x = \cos_6(x - \frac{\pi_6}{2})$$

Οι τελευταίες προκύπτουν από το Θεώρημα 3.6.8 θέτοντας $y = -\frac{\pi_6}{2}$.

Θεώρημα 3.6.10 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_6 x \le x$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin_6 x}{x} = 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Αφού ορίστηκαν οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου και αποδείχθηκαν οι βασικές ιδιότητές τους, απομένει να οριστούν και οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.6.11 Ορίζονται

i. $\tan_6 x = \frac{\sin_6 x}{\cos_6 x}$, $x \ne \kappa\pi_6 + \frac{\pi_6}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\cot_6 x = \dfrac{\cos_6 x}{\sin_6 x}$, $x \neq \kappa\pi_6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\sec_6 x = \dfrac{1}{\cos_6 x}$, $x \neq \kappa\pi_6 + \dfrac{\pi_6}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iv. $\cos\mathrm{ec}_6 x = \dfrac{1}{\sin_6 x}$, $x \neq \kappa\pi_6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους[121].

3.7 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Ένας ακόμη ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων προκύπτει με βάση τις δυναμοσειρές.

Ορισμός 3.7.1 Ορίζονται $\sin_7 x = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!} x^{2\kappa+1}$, $\cos_7 x = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!} x^{2\kappa}$, $x \in \mathbb{R}$.

Στην συνέχεια θα αποδειχθεί ότι οι $\sin_7$ και $\cos_7$ ικανοποιούν όλες τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αρχικά καταγράφονται κάποιες ιδιότητες που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό 3.7.1.

Πόρισμα 3.7.2 i. Οι συναρτήσεις $\sin_7$ και $\cos_7$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ii. Ισχύει ότι $\sin_7 0 = 0$ και $\cos_7 0 = 1$.

iii. Ισχύει ότι $\cos_7(-x) = \cos_7 x$ και $\sin_7(-x) = -\sin_7 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Οι $\sin_7$ και $\cos_7$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύει ότι

$$(\cos_7 x)' = -\sin_7 x \text{ και } (\sin_7 x)' = \cos_7 x$$

Απόδειξη

i. Από το κριτήριο λόγου οι δυναμοσειρές συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε οι συναρτήσεις $\sin_7$ και $\cos_7$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό.

ii. Προκύπτει θέτοντας $x = 0$ στον ορισμό.

[121] Michael Spivak, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σελ. 257-259.

iii. Ισχύει ότι $\cos_7(-x)=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!}(-x)^{2\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!}x^{2\kappa}=\cos_7 x$.

Αντίστοιχα $\sin_7(-x)=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!}(-x)^{2\kappa+1}=-\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!}x^{2\kappa+1}=-\sin_7 x$.

iv. Οι συναρτήσεις $\sin_7$ και $\cos_7$ είναι παραγωγίσιμες όρο προς όρο στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $(\sin_7 x)'=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)!}(2\kappa+1)x^{2\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!}x^{2\kappa}=\cos_7 x$ και όμοια η δεύτερη.

Θεώρημα 3.7.3 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

i. $\sin_7^2 x+\cos_7^2 x=1$.

ii. $|\sin_7 x|\le 1$ και $|\cos_7 x|\le 1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.2.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι τύποι του αθροίσματος για το ημίτονο και το συνημίτονο, καταγράφοντας τέσσερις διαφορετικές αποδείξεις.

Θεώρημα 3.7.4 Ισχύουν i. $\sin_7(x+y)=\sin_7 x\cos_7 y+\cos_7 x\sin_7 y$.

ii. $\cos_7(x+y)=\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y$.

Απόδειξη

$1^{ος}$ τρόπος. Όμοια με το Θεώρημα 3.4.14.

$2^{ος}$ τρόπος. Η σειρά Taylor της συνάρτησης $\sin_7$ στο τυχαίο $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι

$$\sin_7 x=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}(x-\alpha)^\kappa \ (1) \ \text{καθώς } x\in[\alpha-h,\alpha+h] \ (1)$$

Αυτό ισχύει διότι

$$R_n(x;\alpha;f)=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}\right|\le\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\left|\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\left|\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Όμως το $\lim_{n\to\infty}R_n(x;\alpha;f)=0$ καθώς κάθε όριο της μορφής $\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^n}{n!}=0$. Από την (1)

$$\sin_7(\alpha+h)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}h^\kappa \quad (2)$$

Ισχύει ότι $f^{(2\kappa+1)}(x)=(-1)^{\kappa}\cos_7 x$ και $f^{(2\kappa)}(x)=(-1)^{\kappa}\sin_7 x$. Άρα η (2) γράφεται

$$\sin_7(\alpha+h)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\cos_7\alpha}{(2\kappa+1)!}h^{2\kappa+1}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}\sin_7\alpha}{(2\kappa)!}h^{2\kappa}=$$

$$=\cos_7\alpha\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa+1)!}h^{2\kappa+1}+\sin_7\alpha\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}h^{2\kappa}=\cos_7\alpha\sin_7 h+\sin_7\alpha\cos_7 h.$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\cos_7(x+y)=\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y$.

3^{ος} τρόπος. Αρχικά ορίζεται $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$.

Θέτοντας στην προηγούμενη ισότητα όπου x το iz προκύπτει

$$e^{iz}=\cos_7 z+i\sin_7 z \quad (1)$$

Ομοίως, θέτοντας όπου x το $-iz$ προκύπτει ότι $e^{-iz}=\cos_7 z-i\sin_7 z$ (2)

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι $\cos_7 z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ και $\sin_7 z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ άρα $\sin_7(x+y)=\frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i}$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας $e^{z+w}=e^z e^w$ (βλέπε Κεφάλαιο 4) προκύπτει

$$\sin_7(x+y)=\frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i}=\frac{e^{ix}e^{iy}-e^{-ix}e^{-iy}}{2i}=\sin_7 x\cos_7 y+\cos_7 x\sin_7 y$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\cos_7(x+y)=\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y$.

4^{ος} τρόπος. Για την απόδειξη του $\cos_7(x+y)=\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y$ θα γίνει χρήση του γινομένου σειρών. Έστω οι $\cos_7 x=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}x^{2\kappa}$ καθώς και $\cos_7 y=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}y^{2\kappa}$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Αφού οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν απολύτως, θα συγκλίνει απολύτως και το γινόμενο τους. Έτσι

$\cos_7 x\cos_7 y=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}c_{\kappa}$ (1) όπου $c_{\kappa}=\sum_{m=0}^{\kappa}\alpha_{\kappa-m}\beta_m$ και $\alpha_{\kappa}=\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}x^{2\kappa}$, $\beta_{\kappa}=\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}y^{2\kappa}$.

Άρα το $c_{\kappa}=(-1)^{\kappa}\frac{x^{2\kappa}}{(2\kappa)!}\frac{y^0}{0!}+(-1)^{\kappa}\frac{x^{2(\kappa-1)}}{(2(\kappa-1))!}\frac{y^2}{2!}+...+(-1)^{\kappa}\frac{x^0}{0!}\frac{y^{2\kappa}}{(2\kappa)!}=$

$$=\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}\left(\binom{2\kappa}{2\kappa}x^{2\kappa}y^{0}+\binom{2\kappa}{2\kappa-2}x^{2(\kappa-1)}y^{2}+\ldots+\binom{2\kappa}{0}x^{0}y^{2\kappa}\right)$$. Επίσης, θεωρώντας τις σειρές

$$\sin_7 x=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa+1)!}x^{2\kappa+1} \text{ και } \sin_7 y=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa+1)!}y^{2\kappa+1}$$

προκύπτει ότι $\sin_7 x\sin_7 y=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}c'_{\kappa}$ (2)

Όπως και προηγουμένως

$$c'_{\kappa}=(-1)^{\kappa}\frac{x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}\frac{y^{1}}{1!}+(-1)^{\kappa}\frac{x^{2\kappa-1}}{(2\kappa-1)!}\frac{y^{3}}{3!}+\ldots+(-1)^{\kappa}\frac{x^{1}}{1!}\frac{y^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}=$$

$$=\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa+2)!}\left(\binom{2\kappa+2}{2\kappa+1}x^{2\kappa+1}y^{1}+\binom{2\kappa+2}{2\kappa-1}x^{2\kappa-1}y^{3}+\ldots+\binom{2\kappa+2}{1}x^{1}y^{2\kappa+2}\right).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) με αφαίρεση προκύπτει

$$\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\left(c_{\kappa}-c'_{\kappa}\right).$$

Εφόσον $c_0=1$ έπεται ότι

$$\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y=1+\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\left(c_{\kappa+1}-c'_{\kappa}\right).$$

Υπολογίζοντας την διαφορά $c_{\kappa+1}-c'_{\kappa}$ προκύπτει ότι

$$c_{\kappa+1}-c'_{\kappa}=\frac{(-1)^{\kappa+1}}{(2\kappa+2)!}\left(\binom{2\kappa+2}{2\kappa+2}x^{2\kappa+2}y^{0}+\binom{2\kappa+2}{2\kappa+1}x^{2\kappa+1}y^{1}+\ldots+\binom{2\kappa+2}{0}x^{0}y^{2\kappa+2}\right)=$$

$$=(-1)^{\kappa+1}\frac{(x+y)^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!}.$$

Επομένως

$$\cos_7 x\cos_7 y-\sin_7 x\sin_7 y=1+\sum_{\kappa=0}^{+\infty}(-1)^{\kappa+1}\frac{(x+y)^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!}=1+\sum_{\lambda=1}^{+\infty}(-1)^{\lambda}\frac{(x+y)^{2\lambda}}{(2\lambda)!}=$$

$$=\cos_7(x+y).$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα πρέπει να οριστεί ο αριθμός π_7. Πριν, θα αναφερθεί ένα θεώρημα το οποίο θα αποτελέσει μια σαφή δικαιολόγηση του ορισμού που θα ακολουθήσει.

Θεώρημα 3.7.5

i. Υπάρχει πραγματικός αριθμός $u \in (0,2)$ τέτοιος ώστε $\cos_7 u = 0$.

ii. Υπάρχει ένας ελάχιστος πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $\cos_7 c = 0$.

Απόδειξη

i. **1ος τρόπος.** Ισχύει ότι $\cos_7 0 = 1 > 0$. Θα αποδειχθεί ότι $\cos_7 2 < 0$.

Από την ισότητα $\cos_7 x = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!} x^{2\kappa}$ με x=2 προκύπτει

$$\cos_7 2 = -1 + \frac{16}{24} - \sum_{\kappa=3}^{\infty} \left(\frac{2^{2\kappa}}{(2\kappa!)} - \frac{2^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!} \right)$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\frac{2^{2\kappa}}{(2\kappa!)} - \frac{2^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!} > 0$ άρα και $\sum_{\kappa=3}^{\infty} \left(\frac{2^{2\kappa}}{(2\kappa!)} - \frac{2^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!} \right) > 0$.

Οπότε $\cos_7 2 = -1 + \frac{16}{24} - \sum_{\kappa=3}^{\infty} \left(\frac{2^{2\kappa}}{(2\kappa!)} - \frac{2^{2\kappa+2}}{(2\kappa+2)!} \right) < 0$. Έτσι από το Θεώρημα Bolzano για την $\cos_7$, υπάρχει $u \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $\cos_7 u = 0$.

2ος τρόπος. Έστω ότι η $y = \cos_7 x \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Αφού η $\cos_7$ είναι συνεχής και $\cos_7 0 = 1 > 0$ έπεται ότι $\cos_7 x > 0$ για κάθε $x > 0$. Εύκολα προκύπτει ότι θέτοντας όπου x το y στην

$$\cos_7(x+y) = \cos_7 x \cos_7 y - \sin_7 x \sin_7 y$$

τότε $\cos_7(2x) = \cos_7^2 x - \sin_7^2 x$. Συνεπώς $\cos_7(2x) = 2\cos_7^2 x - 1$ και αφού $\cos_7 x > 0$ για κάθε $x > 0$ προκύπτει ότι $\cos_7 x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία στο διάστημα $[0, x]$ προκύπτει ότι $\sin_7 x > \frac{\sqrt{2}}{2} x$ το οποίο είναι άτοπο αφού $|\sin_7 x| \leq 1$ από το Θεώρημα 3.7.3.

ii. Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.8.

Ορισμός 3.7.6 Αν c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_7 c = 0$, τότε ορίζεται π_7=2c.

Έχοντας ορίσει τον αριθμό π_7, προκύπτουν κάποιες χρήσιμες τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.7.7 Ισχύουν

$$\cos_7 \frac{\pi_7}{2} = 0\,,\ \sin_7 \frac{\pi_7}{2} = 1\,,\ \sin_7 \pi_7 = 0\,,\ \cos_7 \pi_7 = -1\,,\ \sin_7 2\pi_7 = 0\,, \cos_7 2\pi_7 = 1\,.$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 3.7.6 ισχύει $\cos_7 \frac{\pi_7}{2} = 0$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι $\sin_7 \frac{\pi_7}{2} = 1$.

Θέτοντας $x = y = \frac{\pi_7}{2}$ και $x = y = \pi_7$, από το Θεώρημα 3.7.4 προκύπτουν οι υπόλοιπες ισότητες.

Θεώρημα 3.7.8 Ισχύουν $\cos_7\left(x + 2\pi_7\right) = \cos_7 x$ και $\sin_7(x + 2\pi) = \sin_7 x$. Συνεπώς οι συναρτήσεις $\cos_7$ και $\sin_7$ έχουν περίοδο $2\pi_7$.

Απόδειξη

Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.11.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφεται το πρόσημο και η μονοτονία των $\cos_7$ και $\sin_7$ όταν $x \in \left[0, \frac{\pi_7}{2}\right]$ και στην συνέχεια με χρήση κατάλληλων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων θα εξεταστεί το πρόσημο και η μονοτονία και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια.

Θεώρημα 3.7.8

i. $\cos_7 x > 0$ για $x \in \left[0, \frac{\pi_7}{2}\right)$ και $\sin_7$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi_7}{2}\right]$.

ii. $\sin_7 x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi_7}{2}\right]$ και $\cos_7$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi_7}{2}\right]$.

Απόδειξη

Είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.12.

Για την αποδείξη των ιδιοτήτων, προσήμου και μονοτονίας, στα διαστήματα $\left[\frac{\pi_7}{2}, \pi_7\right]$ και $\left[\pi_7, 2\pi_7\right]$, γίνεται χρήση των ταυτοτήτων

$$\cos_7\left(\frac{\pi_7}{2}+x\right)=-\sin_7 x,\ \sin_7\left(\frac{\pi_7}{2}+x\right)=\cos_7 x \ \text{ και}$$

$\sin_7(\pi_7+x)=-\sin_7 x$, $\cos_7(\pi_7+x)=-\cos_7 x$, αντίστοιχα, οι οποίες είναι εύκολο να αποδειχθούν από το Θεώρημα 3.7.4.

Θεώρημα 3.7.9 Ισχύουν

i. $-x \le \sin_7 x \le x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin_7 x}{x}=1$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 3.2.13.

Αφού ορίστηκαν οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου και αποδείχθηκαν οι βασικές ιδιότητές τους, απομένει να οριστούν και οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός 3.7.10 Ορίζονται

i. $\tan_7 x=\frac{\sin_7 x}{\cos_7 x},\ x\ne \kappa\pi_7+\frac{\pi_7}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

ii. $\cot_7 x=\frac{\cos_7 x}{\sin_7 x},\ x\ne \kappa\pi_7,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

iii. $\sec_7 x=\frac{1}{\cos_7 x},\ x\ne \kappa\pi_7+\frac{\pi_7}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

iv. $\operatorname{cosec}_7 x=\frac{1}{\sin_7 x},\ x\ne \kappa\pi_7,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους[122].

[122] Jonathan Lewin, Myetle Lewin, An Introduction to Mathematical Analysis, Mc Gram Hill, 1993.

3.8 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $x\in[-1,1]$

Ξεκινώντας από τον ορισμό της $\arctan_8$ ως δυναμοσειράς θεμελιώνονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές τους.

Ορισμός 3.8.1 Ορίζεται $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $x\in[-1,1]$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτουν κάποιες ιδιότητες για τη συνάρτηση $\arctan_8$, οι οποίες καταγράφονται στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.8.2

i. $\arctan_8(-x)=-\arctan_8 x$ στο $[-1,1]$.

ii. Η συνάρτηση $\arctan_8$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

ii. Η συνάρτηση $\arctan_8$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

Απόδειξη

i. Προκύπτει από τον Ορισμό 3.8.1 θέτοντας όπου x το –x.

ii. Έπεται άμεσα από τον ορισμό και τις ιδιότητες των δυναμοσειρών.

iii. Η συνάρτηση $\arctan_8$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$(\arctan_8 x)'=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\kappa(2\kappa+1)x^{2\kappa}}{2\kappa+1}=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}(-1)^\kappa x^{2\kappa}=\frac{1}{1+x^2}>0$$

Ορισμός 3.8.3 Ορίζεται $\pi_8=4\arctan_8 1$.

Από το Πόρισμα 3.8.2 και τον Ορισμό 3.8.3 έπεται ότι $\arctan(-1)=-\frac{\pi_8}{4}$ καθώς και ότι το σύνολο τιμών της $\arctan_8$ είναι το $\left[-\frac{\pi_8}{4},\frac{\pi_8}{4}\right]$. Επιπλέον αφού η $\arctan_8$ είναι γνησίως αύξουσα για $x\in[-1,1]$, είναι 1-1 άρα ορίζεται η αντίστροφη της, την οποία ονομάζουμε $\tan_8$.

Ορισμός 3.8.4

Ορίζεται $\tan_8 : \left[-\frac{\pi_8}{4}, \frac{\pi_8}{4}\right] \to [-1,1]$ από την ισότητα $\tan_8 x = \left(\arctan_8 x\right)^{-1}$.

Ο ορισμός επεκτείνεται στο $\left(-\frac{\pi_8}{2}, \frac{\pi_8}{2}\right)$ απαιτώντας

$$\tan_8\left(x - \frac{\pi_8}{2}\right) = -\frac{1}{\tan_8 x},\ 0 < x < \frac{\pi_8}{4} \text{ και } \tan_8\left(x + \frac{\pi_8}{2}\right) = -\frac{1}{\tan_8 x},\ -\frac{\pi_8}{4} < x < 0$$

Κατόπιν καταγράφονται κάποιες ιδιότητες για την $\tan_8$ στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.8.5

i. Η $\tan_8$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi_8}{4}, \frac{\pi_8}{4}\right)$.

ii. Η $\tan_8$ είναι περιττή στο $\left(-\frac{\pi_8}{4}, \frac{\pi_8}{4}\right)$.

Απόδειξη

i. Αφού η $\tan_8$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, και η αντίστροφη της θα είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Έπεται άμεσα, αφού η $\arctan_8$ είναι περιττή.

Οι προηγούμενες ιδιότητες της $\tan_8$ λόγω της επέκτασης ισχύουν στο $\left(-\frac{\pi_8}{2}, \frac{\pi_8}{2}\right)$.

Στη συνέχεια θα ορίστουν οι συναρτήσεις $\sin_8$ και $\cos_8$.

Ορισμός 3.8.7 Ορίζονται οι συναρτήσεις $\cos_8$, $\sin_8$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi_8}{2}, \frac{\pi_8}{2}\right)$ ως

$$\cos_8 x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan_8^2 x}} \text{ και } \sin_8 x = \frac{\tan_8 x}{\sqrt{1 + \tan_8^2 x}}.$$

Ο προηγούμενος ορισμός ταυτίζεται με τον Ορισμό 3.4.11. Συνεπώς και η θεμελίωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνεχίζεται με όμοιο τρόπο.

3.9 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Με βάση τη συναρτησιακή εξίσωση της μορφής

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y),\ x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

θεμελιώνονται οι συναρτήσεις $\cos_9$ και $\sin_9$ και από αυτές οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για την απλούστευση της θεμελίωσης δεχόμαστε ότι οι f, g ικανοποιούν τις δύο παρακάτω συνθήκες.

1. Υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$ τέτοιο ώστε, $f(x)>0$ και $g(x)>0$, όταν $x\in(0,\lambda)$.
2. $f(0)=1$ και $g(\lambda)=1$.

Θεώρημα 3.9.1

Υπάρχουν συναρτήσεις f , $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την (1) και τις συνθήκες 1, 2.

Απόδειξη

Έστω ότι $f(x)=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa)!}x^{2\kappa}$ και $g(x)=\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{(2\kappa+1)!}x^{2\kappa+1}$. Στον Ορισμό 3.7 έχει αποδειχθεί ότι οι f, g ικανοποιούν τις συνθήκες 1, 2. Ειδικότερα, με όμοιο τρόπο, όπως στο Θεώρημα 3.7.4 αποδεικνύεται ότι οι f, g ικανοποιούν την (1).

Λόγω των προϋποθέσεων 1, 2 έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.9.2 Ορίζεται $\pi_9=2\lambda$.

Θεώρημα 3.9.3 Ισχύει $g(0)=f\left(\frac{\pi_9}{2}\right)=0$.

Απόδειξη

Από την (1) με $x = y = 0$ έπεται ότι $f(0) = f^2(0) + g^2(0)$ και λόγω της συνθήκης 2, συνεπάγεται ότι $g(0) = 0$. Επίσης από την (1) με $x = y = \frac{\pi_9}{2}$ προκύπτει $f(0) = f^2(\frac{\pi_9}{2}) + g^2(\frac{\pi_9}{2})$ και λόγω της συνθήκης 2 συνεπάγεται ότι $f\left(\frac{\pi_9}{2}\right) = 0$.

Θεώρημα 3.9.4

i. Οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν την ταυτότητα

$$f^2(x) + g^2(x) = 1$$

ii. Ισχύει $|f(x)| \le 1$ και $|g(x)| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

i. Θέτοντας στην (1) x=y και αφού $f(0) = 1$ έπεται η ζητούμενη ισότητα.

ii. Άμεση συνέπεια του i.

Θεώρημα 3.9.5 Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν οι σχέσεις

i. $f\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = g(x)$.

ii. $g\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = f(x)$.

Απόδειξη

i. Θέτοντας στην (1) όπου x το $\frac{\pi_9}{2}$ και όπου y το x προκύπτει

$$f\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = f(\frac{\pi_9}{2})f(x) + g(\frac{\pi_9}{2})g(x).$$

Όμως $f(\frac{\pi_9}{2}) = 0$ και $g(\frac{\pi_9}{2}) = 1$ άρα $f\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = g(x)$. Από την τελευταία, θέτοντας όπου x το $\frac{\pi_9}{2} - x$ έπεται $g\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = f(x)$.

Θεώρημα 3.9.6 Ισχύει $g(x + y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Θέτοντας στην ισότητα $f\left(\frac{\pi_9}{2} - x\right) = g(x)$ όπου x το x+y τότε

$$g(x+y)=f\left(\left(\frac{\pi_9}{2}-x\right)-y\right)=f\left(\frac{\pi_9}{2}-x\right)f(y)+g\left(\frac{\pi_9}{2}-x\right)g(y).$$

Λόγω του Θεωρήματος 3.9.5 έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 3.9.7 Ισχύουν

i. $f(-x)=f(x)$.

ii. $g(-x)=-g(x)$.

Απόδειξη

Θέτοντας στην (1) x=0 τότε $f(-y)=f(0)f(y)+g(0)g(y)$ και αφού $f(0)=1$ και $g(0)=0$ έπεται ότι $f(-y)=f(y)$. Επίσης από το Θεώρημα 3.9.6, θέτοντας όπου y το –x τότε $g(0)=g(x)f(-x)+g(-x)f(x)$. Όμως $g(0)=0$ και $f(-x)=f(x)$ άρα $f(x)\big(g(x)+g(-x)\big)=0$. Λόγω της συνθήκης 2 έπεται ότι $g(-x)=-g(x)$.

Θεώρημα 3.9.8 Ισχύουν

i. $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$.

ii. $g(x-y)=g(x)f(y)-g(y)f(x)$.

Απόδειξη

i. Προκύπτει απο την (1) θέτοντας όπου y το –y και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.9.7.

ii. Ομοίως μέσω των Θεωρημάτων 3.9.6 και 3.9.7.

Πόρισμα 3.9.9

Αν $g(x)=g(y)=0$ τότε $g(x-y)=0$.

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.9.8.

Θεώρημα 3.9.10 Ισχύουν

$f(\pi_9)=-1$, $f(2\pi_9)=1$, $g(\pi_9)=0$, $g(2\pi_9)=0$.

Απόδειξη

Ισχύει $f\left(\frac{\pi_9}{2}-x\right)=g(x)$ άρα $f(\pi_9)=g\left(-\frac{\pi_9}{2}\right)=-g\left(\frac{\pi_9}{2}\right)=-1$.

Με όμοιο τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιπες ισότητες.

Θεώρημα 3.9.11 Οι συναρτήσεις f, g είναι περιοδικές με $T=2\pi_9$.

Απόδειξη

Θέτοντας στην ισότητα $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$ όπου $y=2\pi_9$ τότε λόγω του Θεωρήματος 3.9.10 έπεται ότι $f(x+2\pi_9)=f(x)$. Ομοίως για την συνάρτηση g.

Θεώρημα 3.9.12 Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν οι τύποι

i. $f(x)-f(y)=-2g\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)$

ii. $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)$

iii. $g(x)-g(y)=2g\left(\frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

iv. $g(x)+g(y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Απόδειξη

i. Αφαιρώντας κατά μέλη τις ισότητες

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y) \text{ και } f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$

προκύπτει ότι $f(x-y)-f(x+y)=2g(x)g(y)$. Θέτοντας όπου x, y τα $\frac{x+y}{2}$ και $\frac{x-y}{2}$ αντίστοιχα τότε

$$f(x)-f(y)=-2g(\frac{x+y}{2})g(\frac{x-y}{2}).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται οι υπόλοιπες ισότητες.

Θεώρημα 3.9.13

i. $g(x)>0$ για $x\in\left(0,\frac{\pi_9}{2}\right]$ και f φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi_9}{2}\right]$.

ii. $f(x)>0$ για $x\in\left[0,\frac{\pi_9}{2}\right)$ και g αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi_9}{2}\right]$.

Απόδειξη

i. Ισχύει $g(x)>0$ για $x\in\left(0,\frac{\pi_9}{2}\right]$ λόγω της συνθήκης (2). Έστω $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi_9}{2}\right]$ με $x_1<x_2$. Από το Θεώρημα 3.9.12 έπεται ότι

$$f(x_1)-f(x_2)=-2g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)g\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)=2g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)g\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right).$$

Όμως $\frac{x_1+x_2}{2}\in\left(0,\frac{\pi_9}{2}\right)$ και $\frac{x_2-x_1}{2}\in\left(0,\frac{\pi_9}{2}\right)$ άρα $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$ και $g\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)>0$.

Συνεπώς $f(x_1)>f(x_2)$ άρα f φθίνουσα.

ii. Όμοια με το i.

Για την αποδείξη των ιδιότητων προσήμου και μονοτονίας των συναρτήσεων f, g στα διαστήματα $\left[\frac{\pi_9}{2},\pi_9\right]$, $\left[\pi_9,\frac{3\pi_9}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi_9}{2},2\pi_9\right]$ γίνεται χρήση των ταυτοτήτων $f(x)=-g(x-\frac{\pi_9}{2})$ και $g(x)=f(x-\frac{\pi_9}{2})$.

Θεώρημα 3.9.14 Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο 0.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι άρτια και $f(0)=1$ αρκεί $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$. Στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi_9}{2}\right)$ η συνάρτηση f είναι φθίνουσα και φραγμένη άρα υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ και έστω $\lim_{x\to 0^+}f(x)=k$. Λόγω της συνθήκης (2) ισχύει ότι $k\ge 0$. Από τον τύπο $f(2x)=2(f(x))^2-1$, ο οποίος προκύπτει εύκολα από τα Θεωρήματα 3.9.4 και 3.9.8 και θέτοντας όπου y το x, προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^+}f(2x)=\lim_{x\to 0^+}\left[2(f(x))^2-1\right]$ δηλαδή $k=2k^2-1$, της οποίας οι λύσεις είναι $k=-\frac{1}{2}$ ή $k=1$. Όμως η λύση $k=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται διότι $k\ge 0$. Η g είναι συνεχής στο σημείο 0 διότι από τον τύπο

$f^2(x)+g^2(x)=1$ έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f^2(x)+\lim_{x\to 0^+} g^2(x)=1$ και αφού $f(0)=1$ και $g(0)=0$ προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$.

Θεώρημα 3.9.15 Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, αρκεί $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. Ισχύει

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)f(h)-g(x_0)g(h)\right)=f(x_0)$$

λόγω του Θεωρήματος 3.9.14. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η συνέχεια της g[123].

Θεώρημα 3.9.16 Η g είναι συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει ένα διάστημα (0, b) στο οποίο η g δεν αλλάζει πρόσημο.

Απόδειξη

Έστω ότι η g δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα (0, b) και $0<y<x<b$ τότε και $0<\frac{x-y}{2}<\frac{x+y}{2}<b$. Λόγω του Θεωρήματος 3.9.12 η f είναι φθίνουσα. Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 3.9.4 είναι φραγμένη, συνεπώς το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει, άρα από τα Θεωρήματα 3.9.14 και 3.9.15 η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αντίστροφα έστω ότι η g είναι συνεχής και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σε οποιοδήποτε διάστημα (0, b). Τότε σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού της g. Λόγω του Πορίσματος 3.9.9 τα σημεία μηδενισμού της g αποτελούν ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και αφού η g είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $g(x)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Θεώρημα 3.9.17 i. Αν η f είναι παντού συνεχής τότε η g είναι παντού παραγωγίσιμη και $g'(x)=g'(0)f(x)$.

ii. Αν η g είναι παντού συνεχής τότε η f είναι παντού παραγωγίσιμη και $f'(x)=-g'(0)g(x)$.

Απόδειξη

[123] Ανδρέα Πούλου, Συναρτησιακές εξισώσεις, Εκδόσεις Αίθρα 1996.

i. Αφού η f είναι παντού συνεχής, λόγω των Θεωρημάτων 3.9.14 και 3.9.15 και η g είναι παντού συνεχής. Άρα από το Θεώρημα 3.9.16 υπάρχει διάστημα (0, b) στο οποίο $g(x) \neq 0$.

Αν $0 < x = nh$, $0 < h < b$ τότε $g\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{k=1}^{n} f(kh) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{(2k-1)h}{2} + \frac{h}{2}\right) g\left(\frac{h}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{(2k+1)h}{2}\right) - g\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(g(x+h) - g\left(\frac{h}{2}\right)\right)$$

Άρα $\sum_{k=1}^{n} f(kh)h = \frac{\frac{h}{2}}{g\left(\frac{h}{2}\right)}\left(g(x+h) - g\left(\frac{h}{2}\right)\right)$. Από την τελευταία προκύπτει

$\int_0^x f(t)dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{2}}{g\left(\frac{h}{2}\right)} g(x)$. Όμως $f(x) > 0$ για μικρά x άρα το $\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{2}}{g\left(\frac{h}{2}\right)} \neq 0$ και

$g'(0)$ υπάρχει. Άρα $g'(x) = g'(0)f(x)$ για x>0. Η προηγούμενη ισχύει για x<0 λόγω του Θεωρήματος 3.9.7 ενώ για x=0 είναι προφανής.

ii. Όμοια με το i.

Ορισμός 3.9.18 Αν η f, g ικανοποιούν την (1) και $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε ορίζονται $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$.[124]

Θεώρημα 3.9.19 Οι συναρτήσεις $f(x) = \cos_9 x$, $g(x) = \sin_9 x$ είναι μοναδικές.

Απόδειξη

Οι f, g ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3.2. Έτσι λόγω του Θεωρήματος 3.2.3 οι f, g είναι μοναδικές.

---

[124] H.E Vanganian, Characterization of the sine and cosine, American Mathematical Monthly, 62, 1955, σελ. 711-713

Ορισμός 3.9.20 Ορίζονται

i. $\tan_9 x = \dfrac{\sin_9 x}{\cos_9 x}$, $x \neq \kappa\pi_9 + \dfrac{\pi_9}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\cot_9 x = \dfrac{\cos_9 x}{\sin_9 x}$, $x \neq \kappa\pi_9$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iii. $\sec_9 x = \dfrac{1}{\cos_9 x}$, $x \neq \kappa\pi_9 + \dfrac{\pi_9}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

iv. $\operatorname{cosec}_9 x = \dfrac{1}{\sin_9 x}$, $x \neq \kappa\pi_9$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ιδιότητές τους είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ- ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΡΗΤΩΝ

Έστω ότι η εκθετική συνάρτηση έχει οριστεί για ρητό εκθέτη. Θα γίνει επέκταση του ορισμού για άρρητο εκθέτη. Χάριν πληρότητας καταγράφεται το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.1 Έστω $\alpha > 0$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$.

Απόδειξη

1^{ος} τρόπος. Έστω $\alpha \geq 1$ καθώς η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ ανάγεται σε αυτή. Η ακολουθία $x_n = \alpha^{\frac{1}{n}}$ είναι φθίνουσα και $x_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και α>1. Αρκεί να αποδειχθεί ότι το 1 είναι το infimum της x_n. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα Bernoulli και για $n > \dfrac{\alpha - 1}{\varepsilon}$ ισχύει $\alpha < 1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

2^{ος} τρόπος. Έστω α>1. Η ακολουθία $x_n = \alpha^{\frac{1}{n}}$ είναι φθίνουσα και $x_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα συγκλίνει. Έστω $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Έστω η υπακολουθία $y_n = \alpha^{\frac{2}{n}} = x_n^2$, της x_n. Τότε $L^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Άρα $L^2 = L$ και αφού $L \geq 1$ έπεται ότι L=1.

Λήμμα 4.1.2 Αν $\alpha > 0$ και q_n μια μηδενική ακολουθία ρητών, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{q_n} = 1$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\alpha \geq 1$. Τότε από το Λήμμα 4.1.1 έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$ συνεπώς για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $1 - \varepsilon < \alpha^{-\frac{1}{\kappa}} < \alpha^{\frac{1}{\kappa}} < 1 + \varepsilon$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει ότι $-\dfrac{1}{\kappa} < q_n < \dfrac{1}{\kappa}$. Έτσι για κάθε $n > n_0$ ισχύει ότι $1 - \varepsilon < \alpha^{-\frac{1}{\kappa}} < \alpha^{q_n} < \alpha^{\frac{1}{\kappa}} < 1 + \varepsilon$ από όπου έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{q_n} = 1$.

Αν $0<\alpha<1$ τότε επειδή $\frac{1}{\alpha}>1$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{q_n}}=1$.

Θεώρημα 4.1.3 Έστω $x\in\mathbb{R}$ και $q_n, q_n^{'}\in\mathbb{Q}$ με $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\lim\limits_{n\to\infty}q_n^{'}=x$. Αν $\alpha>0$, τότε

i. τα $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n^{'}}$ υπάρχουν.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n^{'}}$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\alpha>1$ και r_n μια αύξουσα ακολουθία ρητών τέτοια ώστε $r_n\to x$. Αν $q\in\mathbb{Q}$ με $q>x$ τότε $\alpha^{r_n}<\alpha^{q}$ και η α^{r_n} είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς η α^{r_n} συγκλίνει. Ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(q_n-r_n)=0$ άρα από το Λήμμα 4.1.1 έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{q_n-r_n}=1$$

Ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha^{q_n-r_n}\alpha^{r_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{r_n}$ καθώς και $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n^{'}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha^{q_n^{'}-r_n}\alpha^{r_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{r_n}$.

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n^{'}}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{r_n}$.

Με α=1 το θεώρημα ισχύει και αν $0<\alpha<1$ η απόδειξη ανάγεται στην περίπτωση $\alpha>1$.

Το προηγούμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.1.4 Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε ορίζεται $\left(\alpha^{x}\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$.

Ο Ορισμός 4.1.4 είναι επέκταση του ορισμού με ρητό εκθέτη. Αν $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\tau\in\mathbb{Q}$ τότε $r_n=\tau-\frac{1}{n}$ άρα

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{r_n}=\lim_{n\to\infty}\alpha^{\tau-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{\tau}}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right)=\alpha^{\tau}$$

Υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού της εκθετικής.

Λήμμα 4.1.5 Έστω ότι $\alpha > 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \alpha^x$. Τότε

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $\sup\{f(s) / s \in \mathbb{Q} \text{ και } s < x\} = \inf\{f(t) / t \in \mathbb{Q} \text{ και } x < t\}$.

Απόδειξη

i. Έστω $x < y$ όπου $x, y \in \mathbb{Q}$, θα δειχθεί ότι $\alpha^x < \alpha^y$.

Έστω ότι $x = \frac{m}{n}$ και $y = \frac{\kappa}{l}$ με κ, $m \in \mathbb{Z}$ και n, $l \in \mathbb{N}$. Αφού $x < y$ έπεται ότι $ml < \kappa n$. Άρα $\left(\alpha^x\right)^{nl} = \left(\left(\alpha^x\right)^n\right)^l = \left(\alpha^m\right)^l = \alpha^{ml} < \alpha^{\kappa n} = \left(\alpha^y\right)^{nl}$ και επειδή α^x, $\alpha^y > 0$ έπεται ότι $\alpha^x < \alpha^y$.

ii. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και δύο ακολουθίες ρητών s_n, t_n τέτοιες ώστε $s_n \le x \le t_n$ και $t_n - s_n < \frac{1}{n}$. Ισχύει ότι

$$0 < \alpha^{t_n} - \alpha^{s_n} = \alpha^{s_n}\left(\alpha^{t_n - s_n} - 1\right) \le \alpha^{t_1}\left(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right) \text{ διότι } s_n \le x \le t_n \le t_1.$$

Από την τελευταία συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha^{t_n} - \alpha^{s_n}\right) = 0$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

Ορισμός 4.1.6 Αν $\alpha > 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται

$$\left(\alpha^x\right)_1 = \sup\{f(s) / s \in \mathbb{Q} \text{ και } s < x\} = \inf\{f(t) / t \in \mathbb{Q} \text{ και } x < t\}$$

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-x}$

Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι ιδιότητες της $f(x) = \left(\alpha^x\right)_1$.

Θεώρημα 4.1.7

i. $\left(\alpha^{x+y}\right)_1=\left(\alpha^x\right)_1\left(\alpha^y\right)_1$, $\left(\alpha^{x-y}\right)_1=\dfrac{\left(\alpha^x\right)_1}{\left(\alpha^y\right)_1}$, $\left(\alpha^x\right)_1^y=\left(\alpha^{xy}\right)_1$, $\left(\alpha\beta\right)_1^x=\left(\alpha^x\right)_1\left(\beta^x\right)_1$,

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)_1^x=\dfrac{\left(\alpha^x\right)_1}{\left(\beta^x\right)_1}$, $\left(\alpha^{-x}\right)_1=\dfrac{1}{\left(\alpha^x\right)_1}$.

ii. Η $f(x)=\left(\alpha^x\right)_1$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha>1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0<\alpha<1$.

iii. Η $f(x)=\left(\alpha^x\right)_1$ είναι συνεχής.

iv. Η $f(x)=\left(\alpha^x\right)_1$ είναι παραγωγίσιμη.

v. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_1=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_1=0$.

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_1=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_1=+\infty$.

vi. Η $f(x)=\left(\alpha^x\right)_1$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

Απόδειξη

i. Οι ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού 4.1.4. Ενδεικτικά αποδεικνύεται η πρώτη.

Ισχύει $\left(\alpha^{x+y}\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha^{p_n+q_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{p_n}\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}=\left(\alpha^x\right)_1\left(\alpha^y\right)_1$ όπου p_n, q_n ακολουθίες ρητών με $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=x$ και $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=y$.

ii. Αν $\alpha>1$ και $x<y$, θα αποδειχθεί ότι $\alpha^x<\alpha^y$. Έστω $x_n\in\mathbb{Q}$, αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ και η $y_n\in\mathbb{Q}$, φθίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$. Από το Λήμμα 4.1.5 ισχύει ότι $\alpha^{x_n}<\alpha^{y_n}$. Παίρνοντας τα όρια προκύπτει ότι $\alpha^x\le\alpha^y$. Όμως $\alpha^x\neq\alpha^y$ διότι αν $x<q_1<q_2<y$ τότε παίρνοντας τα όρια $\alpha^x\le\alpha^{q_1}<\alpha^{q_2}\le\alpha^y$. Αν $0<\alpha<1$ τότε λόγω της σχέσης $\left(\alpha^x\right)_1=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{-x}$ προκύπτει ότι η y=$\left(\alpha^x\right)_1$ είναι φθίνουσα.

iii. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θα δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha^x\right)_1=\left(\alpha^{x_0}\right)_1$ ισοδύναμα ότι

$$\lim_{x\to x_0}\left[\left(\alpha^x\right)_1-\left(\alpha^{x_0}\right)_1\right]=\left(\alpha^{x_0}\right)_1\lim_{x\to x_0}\left[\left(\alpha^{x-x_0}\right)_1-1\right]=\left(\alpha^{x_0}\right)_1\lim_{h\to 0}\left[\left(\alpha^h\right)_1-1\right]=0$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\lim_{h\to 0}\left[\left(\alpha^{h}\right)_1-1\right]=0$. Θεωρώντας $h=\frac{1}{n}$, πρέπει η ακολουθία $\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)_1-1$ να συγκλίνει στο μηδέν το οποίο ισχύει αφού $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)_1=1$. Λόγω της $\left(\alpha^{-h}\right)_1=\frac{1}{\left(\alpha^{h}\right)_1}$ έπεται ότι $\lim_{h\to 0^-}\left(\alpha^{h}\right)_1=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\left(\alpha^{-h}\right)_1}=1$. Άρα $\lim_{h\to 0}\left[\left(\alpha^{h}\right)_1-1\right]=0$.

iv. Ισχύει ότι $\frac{\left(\alpha^{x+h}\right)_1-\left(\alpha^{x}\right)_1}{h}=\left(\alpha^{x}\right)_1\frac{\left(\alpha^{h}\right)_1-1}{h}$. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{h\to 0}\frac{\left(\alpha^{h}\right)_1-1}{h}$. Όμως $\frac{\left(\alpha^{-h}\right)_1-1}{-h}=\frac{1-\left(\alpha^{h}\right)_1}{-h\left(\alpha^{h}\right)_1}=\left(\alpha^{-h}\right)_1\frac{\left(\alpha^{h}\right)_1-1}{h}$, συνεπώς αρκεί να αποδειχθεί η ύπαρξη του $\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\alpha^{h}\right)_1-1}{h}$. Θεωρώντας $h=\frac{1}{\kappa}$, $\kappa\in\mathbb{N}$ προκύπτει η ακολουθία $y_\kappa=\kappa\left(\alpha^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)$. Όμως η y_κ είναι φθίνουσα. Αυτό συμβαίνει διότι

$$\alpha=\left(1+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^{\kappa}=1+y_\kappa+\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}\left(\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^{2}+\ldots+\frac{\kappa(\kappa-1)\ldots(\kappa-(\kappa-1))}{\kappa!}\left(\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^{\kappa}=$$

$=1+y_\kappa+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)y_\kappa^2+\ldots+\frac{1}{\kappa!}\left[\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\right]y_\kappa^\kappa$. Από αυτή προκύπτει ότι αν $y_\kappa<y_{\kappa+1}$ τότε $\alpha<\alpha$ που είναι άτοπο. Επίσης $y_\kappa\geq 0$ συνεπώς συγκλίνει. Αν $\kappa=\left[\frac{1}{h}\right]$ τότε $\kappa\leq\frac{1}{h}\leq\kappa+1$. Εύκολα προκύπτει η ανίσωση

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{\kappa+1}}-1}{\frac{1}{\kappa}}\leq\frac{\alpha^{h}-1}{h}\leq\frac{\alpha^{\frac{1}{\kappa}}-1}{\frac{1}{\kappa+1}}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{\kappa}{\kappa+1}\left[(\kappa+1)\left(\alpha^{\frac{1}{\kappa+1}}-1\right)\right]<\frac{\alpha^{h}-1}{h}<\frac{\kappa+1}{\kappa}\left[\kappa\left(\alpha^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)\right]$$

Από αυτή έπεται ότι το $\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\alpha^{h}\right)_1-1}{h}$ υπάρχει.

v. Ισχύει $\left(\alpha^{x}\right)_1\geq\left(\alpha^{[x]}\right)_1=(1+\alpha-1)^{[x]}=1+[x](\alpha-1)\to+\infty$ όταν $x\to+\infty$. Επιπλέον $\lim_{x\to-\infty}\left(\alpha^{x}\right)_1=\lim_{t\to+\infty}\left(\alpha^{-t}\right)_1=0$.

Τέλος, τα άλλα δύο όρια υπολογίζονται μέσω της σχέσης $\left(\alpha^x\right)_1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\left(\alpha^x\right)_1}}$ και των προηγούμενων ορίων.

vi. Άμεση συνέπεια των ii, iii, v.

Θεώρημα 4.1.8 Η ακολουθία $\alpha_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Ισχύει $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1+1+\dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n!}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)-\left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ άρα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

επομένως η α_n είναι αύξουσα. Επιπλέον

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Συνεπώς η α_n είναι φραγμένη.

Μετά το προηγούμενο θεώρημα, έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.1.9 $e_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Αφού η $f(x) = \left(\alpha^x\right)_1$ είναι γνησίως μονότονη, ορίζεται η αντίστροφη της και έτσι έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.1.10 Για $x>0$ ορίζεται η συνάρτηση $\left(\log_\alpha x\right)_1 = f^{-1}(x)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες της $y = \left(\log_\alpha x\right)_1$.

Θεώρημα 4.1.11

i. Ισχύει $\left[\left(\log_{\alpha}x\right)_1\right]' = \dfrac{1}{cx}$.

ii. $\left(\log_{\alpha}1\right)_1 = 0$.

iii. Αν $x, y, \kappa \in \mathbb{R}$ τότε $\left[\log_{\alpha}\left(xy\right)\right]_1 = \left(\log_{\alpha}x\right)_1 + \left(\log_{\alpha}y\right)_1$

$\left[\log_{\alpha}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]_1 = \left(\log_{\alpha}x\right)_1 - \left(\log_{\alpha}y\right)_1$, $\left[\log_{\alpha}x^{\kappa}\right]_1 = \kappa\left(\log_{\alpha}x\right)_1$.

iv. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = -\infty$.

ενώ αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = +\infty$.

v. Η $y = \left(\log_{\alpha}x\right)_1$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.

Απόδειξη

i. $\left[\left(\log_{\alpha}x\right)_1\right]' = \dfrac{1}{\left(\alpha^{y}\right)_1'} = \dfrac{1}{c\left(\alpha^{y}\right)_1} = \dfrac{1}{cx}$ όπου $c = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha^{h}-1}{h}$.

ii. Έπεται από τους Ορισμούς 4.1.4 και 4.1.8.

iii. Ισχύει ότι $\alpha^{\left(\log_{\alpha}x\right)_1 + \left(\log_{\alpha}y\right)_1} = \alpha^{\left(\log_{\alpha}x\right)_1}\alpha^{\left(\log_{\alpha}y\right)_1} = xy = \alpha^{\left(\log_{\alpha}(xy)\right)_1}$

Όμοια αποδεικνύονται και οι επόμενες ιδιότητες.

iv. Έπονται από το Θεώρημα 4.1.7 και τον Ορισμό 4.1.10.[125]

v. Έπονται από το Θεώρημα 4.1.7 και τον Ορισμό 4.1.10.[126]

Θεώρημα 4.1.12 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$ τοτε ισχύει $\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = \dfrac{\ln_1 x}{\ln_1 \alpha}$.

Απόδειξη

Έστω $h\left(x\right) = \left(\log_{\alpha}x\right)_1 - \dfrac{\ln_1 x}{\ln_1 \alpha}$. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $h'\left(x\right) = 0$ και $h\left(1\right) = 0$ άρα $\left(\log_{\alpha}x\right)_1 = \dfrac{\ln_1 x}{\ln_1 \alpha}$.

[125] R.Johnsonbaugh, W.E.Pfaffenb, Foundation of Mathematical Analysis.
[126] Jonathan Lewin, Myetle Lewin, An Introduction to Mathematical Analysis, Mc Gram-Hill, 1993.

4.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f'(x)=f(x)$

Ένας ακόμη διαφορετικός ορισμός της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει μέσω της επίλυσης της $f'(x)=f(x)$. Αρχικά αποδεικνύεται ότι υπάρχει λύση της προηγούμενης εξίσωσης.

Θεώρημα 4.2.1 Υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

i. $\varepsilon'(x)=\varepsilon(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $\varepsilon(0)=1$.

Απόδειξη

Ορίζεται επαγωγικά η ακολουθία συναρτήσεων ε_n ως εξής:

$$\varepsilon_1(x)=1+x,\ \varepsilon_{n+1}(x)=1+\int_0^x \varepsilon_n(t)dt \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}$$

Η συνάρτηση ε_n είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ κάτι που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή. Έτσι εξασφαλίζεται ότι η ε_{n+1} είναι καλά ορισμένη και επιπλέον ισχύει $\varepsilon'_{n+1}(x)=\varepsilon_n(x)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x\in\mathbb{R}$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\varepsilon_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

Θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία συναρτήσεων ε_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Για αυτό, έστω ότι $|x|\le A$ όπου Α>0 και επιπλέον $m>n>2A$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\left|\varepsilon_m(x)-\varepsilon_n(x)\right|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}\right|\le\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{A}{n}+\ldots+\left(\frac{A}{n}\right)^{m-n-1}\right].$$

Όμως $m>n>2A$ άρα $\frac{A}{n}<\frac{1}{2}$ και

$$\left|\varepsilon_m(x)-\varepsilon_n(x)\right|\le\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1}\right)<\frac{2A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}=0$ άρα από το κριτήριο του Cauchy η ε_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο τυχαίο διάστημα $[-A, A]$ και άρα στο $\mathbb{R}$. Ορίζεται

$$\varepsilon(x)=\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n(x)\ (1)$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της ε_n έπεται ότι η ε είναι συνεχής. Αφού $\varepsilon_n(0)=1$ έπεται από την (1) ότι $\varepsilon(0)=1$. Έστω ότι σε ένα οποιοδήποτε διάστημα $[-A, A]$, η $\varepsilon_n^{'}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή συνάρτηση g, όπου $g:[-A,A]\to\mathbb{R}$. Αφού η ε_n είναι μια ακολουθία συναρτήσεων οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $[-A, A]$ και η ε_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην ε στο $[-A, A]$ τότε η ε είναι παραγωγίσιμη στο $[-A, A]$ και ισχύει $\varepsilon^{'}(x)=g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n^{'}(x)$. Συνεπώς, $\varepsilon^{'}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n^{'}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_{n-1}(x))=\varepsilon(x)$. Αφού το A είναι τυχαίο έπεται ότι $\varepsilon^{'}(x)=\varepsilon(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πόρισμα 4.2.2 Η συνάρτηση ε είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Απόδειξη

Έπεται επαγωγικά από την $\varepsilon^{'}(x)=\varepsilon(x)$.

Στο επόμενο θεώρημα εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της συνάρτησης ε.

Θεώρημα 4.2.3 Η συνάρτηση ε του Θεωρήματος 4.2.1 είναι μοναδική.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1. Θα αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω η συνάρτηση $d(x)=\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)$. Ισχύει ότι $d^{'}(x)=d(x)$ και $d(0)=0$. Λόγω του Πορίσματος 4.2.2 έπεται ότι υπάρχουν για την d οι παράγωγοι όλων των τάξεων. Από το Θεώρημα Taylor για τη d στο $I=[0,x]$ έπεται ότι

$$d(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{d^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x;0;d)=R_n(x;0;d)$$

Ισχύει ότι $R_n(x;0;d)=\left|\frac{d^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|d^{(n+1)}(\xi)\right|\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ όπου $\xi\in(0,x)$. Όμως $d^{(n+1)}(\xi)=d(\xi)$ και επιπλέον αφού η d είναι συνεχής στο $[0,x]$ υπάρχει $M>0$

τέτοιο ώστε $\left|d(t)\right| \le M$. Έτσι προκύπτει ότι $\left|d(x)\right| = \left|\dfrac{d^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le M\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ και αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ έπεται ότι $d(x) = 0$ στο τυχαίο διάστημα I άρα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 4.2.4 Η μοναδική συνάρτηση $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x)$ και $\varepsilon(0) = 1$, ονομάζεται εκθετική συνάρτηση και συμβολίζεται $\varepsilon(x) = \left(e^x\right)_2$.

Επιπλέον θα οριστεί ο αριθμός e_2.

Ορισμός 4.2.5 $e_2 = \varepsilon(1)$.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες της $\varepsilon(x) = \left(e^x\right)_2$.

Θεώρημα 4.2.6 i. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $\left(e^x\right)_2 \ne 0$, $\left(e^{x+y}\right)_2 = \left(e^x\right)_2\left(e^y\right)_2$, $\left(e^{x-y}\right)_2 = \dfrac{\left(e^x\right)_2}{\left(e^y\right)_2}$, $\left(e^x\right)_2^y = \left(e^{xy}\right)_2$.

ii. Η $\varepsilon(x) = \left(e^x\right)_2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)_2 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)_2 = 0$.

iv. Η $\varepsilon(x) = \left(e^x\right)_2$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Απόδειξη

i. Έστω ότι υπάρχει διάστημα $I = [0, \alpha]$ τέτοιο ώστε $\varepsilon(\alpha) = 0$. Από το Θεώρημα Taylor για τη d στο $I = [0, \alpha]$ έπεται ότι

$$\varepsilon(0) = \sum_{k=0}^{N}\frac{\varepsilon^{(k)}(\alpha)}{k!}(-\alpha)^k + R_n(x;\alpha;\varepsilon) = R_n(x;\alpha;\varepsilon)$$

Ισχύει ότι $R_n(x;\alpha;\varepsilon)=\left|\frac{\varepsilon^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(-\alpha)^{n+1}\right|=\left|\varepsilon^{(n+1)}(\xi)\right|\left|\frac{(-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ όπου $\xi\in(0,\alpha)$. Όμως $\varepsilon^{(n+1)}(\xi)=\varepsilon(\xi)$ και επιπλέον αφού η ε είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε $|\varepsilon(x)|\le K$. Έτσι προκύπτει ότι $|\varepsilon(0)|=\left|\frac{\varepsilon^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(-\alpha)^{n+1}\right|\le K\left|\frac{(-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ και αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ έπεται ότι $\varepsilon(0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Για την απόδειξη της $\left(e^{x+y}\right)_2=\left(e^x\right)_2\left(e^y\right)_2$, έστω η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{\left(e^{x+y}\right)_2}{\left(e^y\right)_2}$$

Ισχύει ότι $g'(x)=g(x)$ και $g(0)=1$ άρα λόγω του Ορισμού 4.2.4 έπεται ότι $g(x)=\left(e^x\right)_2$. Η επόμενη ισότητα προκύπτει από την προηγούμενη. Για την τελευταία έστω $f_1(x)=\left(e^x\right)_2^y$ και $f_2(x)=\left(e^{xy}\right)_2$. Αν τις παραγωγίσουμε προκύπτει ότι $f_1'(x)=yf_1(x)$ και $f_2'(x)=yf_2(x)$. Άρα οι δύο συναρτήσεις ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση $f'(x)=yf(x)$ με αρχική συνθήκη $f(0)=1$. Συνεπώς $f_1(x)=f_2(x)$.

ii. Ισχύει ότι $\left(e^x\right)_2'=\left(e^x\right)_2>0$ διότι $\left(e^x\right)_2\neq 0$ και $\left(e^0\right)_2=1>0$.

iii. Αν $x>0$ τότε η ε_n είναι γνησίως αύξουσα άρα $\left(e^x\right)_2>1+x$. Με x=1 στην προηγούμενη έπεται ότι $e_2>2$ άρα $\left(e^n\right)_2>2^n$ συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^n\right)_2=+\infty$ και αφού η ε είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)_2=+\infty$. Επιπλέον $\left(e^{-n}\right)_2<2^{-n}$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)_2=0$.

iv. Έπεται από το ii και το iii.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 4.2.4 ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης για εκθέτη ρητό.

Θεώρημα 4.2.7 Αν $r \in \mathbb{Q}$ τότε $\left(e^{r}\right)_2 = e^{r}$.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $r = n \in \mathbb{N}$ τότε $\varepsilon(n) = \left(\varepsilon(1)\right)^{n} = \left(e^{n}\right)_2$.
- Αν $-n \in \mathbb{N}$ τότε $\varepsilon(-n) = \dfrac{1}{\varepsilon(n)} = \dfrac{1}{\left(e^{n}\right)_2} = \left(e^{-n}\right)_2$.
- Αν $r = \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ τότε $\varepsilon\left(\dfrac{p}{q}\right) = \varepsilon\left(\dfrac{1}{q}\right)^{p} = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)_2^{p} = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)_2$ διότι

$\varepsilon(nx) = \left(\varepsilon(x)\right)^{n}$ άρα $e_2 = \varepsilon(1) = \varepsilon\left(n\dfrac{1}{n}\right) = \left(\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n}$

Αφού η $\varepsilon(x) = \left(e^{x}\right)_2$ είναι γνησίως αύξουσα, ορίζεται η αντίστροφη της και έτσι έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.2.8 Για $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση $\ln_2 x = \varepsilon^{-1}(x)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες της $y = \ln_2 x$.

Θεώρημα 4.2.9

i. $\left(e^{\ln_2 x}\right)_2 = x$ και $\ln_2\left(e^{x}\right)_2 = x$.

ii. Ισχύει ότι $\ln_2 1 = 0$.

iii. Για $x > 0$ έπεται ότι $\left(\ln_2 x\right)' = \dfrac{1}{x}$ και επιπλέον ότι η $y = \ln_2 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Αν $x > 1$ τότε $\ln_2 x > 0$ και αν $0 < x < 1$ τότε $\ln_2 x < 0$.

v. Για $x, y > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ ισχύουν

$\ln_2(xy) = \ln_2 x + \ln_2 y$, $\ln_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln_2 x - \ln_2 y$, $\ln_2 x^{r} = r\ln_2 x$.

vi. Αν $x > 0$ τότε $\lim\limits_{x \to \infty} \ln_2 x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \ln_2 x = -\infty$.

Απόδειξη

i. Άμεσες συνέπειες του Ορισμού 4.2.8.

ii. Αφού $\left(e^0\right)_2 = 1$ από τον Ορισμό 4.2.8 έπεται ότι $\ln_2 1 = 0$.

iii. Ισχύει ότι $\left(e^{\ln_2 x}\right)_2 = x$. Άρα $\left(e^{\ln_2 x}\right)_2' = \left(x\right)'$ συνεπώς $\left(\ln_2 x\right)' = \dfrac{1}{\left(e^{\ln_2 x}\right)_2} = \dfrac{1}{x}$ άρα η $y = \ln_2 x$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $x > 0$.

iv. Αποδεικνύονται μέσω του ii και του iii.

v. Θέτοντας $\ln_2 x = \alpha$ και $\ln_2 y = \beta$ προκύπτει $xy = \left(e^{\alpha}\right)_2 \left(e^{\beta}\right)_2 = \left(e^{\alpha+\beta}\right)_2$.

Άρα $\ln_2\left(xy\right) = \alpha + \beta = \ln_2 x + \ln_2 y$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη, θέτοντας $x = \dfrac{yx}{y}$. Η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Έστω η συνάρτηση $g\left(x\right) = \ln_2 x^r - r\ln_2 x$.

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $g'\left(x\right) = 0$ και αφού $g\left(1\right) = 0$ συνεπάγεται ότι $g\left(x\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $r \in \mathbb{N}$ τότε από την $\ln_2\left(xy\right) = \ln_2 x + \ln_2 y$ με χρήση της μαθηματικής επαγωγής, προκύπτει ότι $\ln_2 x^r = r\ln_2 x$.
- Αν $r \in \mathbb{Z}$ και r<0 τότε $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$. Ισχύει $\ln_2 x^r = \ln_2 \dfrac{1}{x^{-r}} = -r\ln_2 x$.
- Αν $r = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$ και $u = x^{\frac{1}{q}}$ τότε $u^q = x$. Άρα $x^r = u^p$ και $q\ln_2 u = \ln_2 x$. Έτσι προκύπτει ότι $\ln_2 x^r = \ln_2 u^p = p\ln_2 u = \dfrac{p}{q}\ln_2 x = r\ln_2 x$.

vi. Αποδεικνύονται μέσω του Θεωρήματος 4.2.6 και του Ορισμού 4.2.8.

Στη συνέχεια επεκτείνεται ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης για οποιοδήποτε $\alpha > 0$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

Ορισμός 4.2.10 1^{ος} τρόπος. Για $0<\alpha\neq 1$ και $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $\left(\alpha^x\right)_2=\left(e^{x\ln_2\alpha}\right)_2$.

2^{ος} τρόπος. Για $0<\alpha\neq 1$ και $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται ως y=$\left(\alpha^x\right)_2$, ο μοναδικός αριθμός τέτοιος ώστε $\ln_2\alpha^x=x\ln_2\alpha$

Ο δεύτερος τρόπος έχει το πλεονέκτημα ότι η y=$\left(\alpha^x\right)_2$ ορίζεται απευθείας και όχι μέσω της $y=\left(e^x\right)_2$.

Ο Ορισμός 4.2.10 ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης για εκθέτη ρητό αφού $\left(\alpha^r\right)_2=\left(e^{r\ln_2\alpha}\right)_2=\left(e^{\ln_2\alpha^r}\right)_2=\alpha^r$.

Για την αποδείξη των ιδιότητων της y=$\left(\alpha^x\right)_2$, $\alpha>0$ θα γίνει χρήση του 1^{ου} τρόπου ορισμού.

Θεώρημα 4.2.11

i. Ισχύει ότι $\left(\alpha^x\right)_2'=\left(\alpha^x\right)_2\ln_2\alpha$

ii. Η y=$\left(\alpha^x\right)_2$ είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0<\alpha<1$ και γνησίως αύξουσα όταν $\alpha>1$.

iii. $\left(\alpha^{x+y}\right)_2=\left(\alpha^x\right)_2\left(\alpha^y\right)_2$, $\left(\alpha^{x-y}\right)_2=\dfrac{\left(\alpha^x\right)_2}{\left(\alpha^y\right)_2}$, $\left(\alpha^x\right)_2^y=\left(\alpha^{xy}\right)_2$, $\left(\alpha\beta\right)_2^x=\left(\alpha^x\right)_2\left(\beta^x\right)_2$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)_2^x=\dfrac{\left(\alpha^x\right)_2}{\left(\beta^x\right)_2}$.

iv. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_2=0$.

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^x\right)_2=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_2=+\infty$.

v. Η y=$\left(\alpha^x\right)_2$ έχει σύνολο τιμών το $\left(0,+\infty\right)$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $\left(\alpha^x\right)_2' = \left(e^{x\ln_2\alpha}\right)_2' = \left(\alpha^x\right)_2 \ln_2\alpha$

ii. Προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 4.2.9 και το i.

iii. $\left(\alpha^{x+y}\right)_2 = e^{(x+y)\ln_2\alpha} = e^{x\ln_2\alpha + y\ln_2\alpha} = \left(\alpha^x\right)_2\left(\alpha^y\right)_2$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

iv. Έπονται άμεσα από τα Θεωρήματα 4.2.6, 4.2.9 και τον Ορισμό 4.2.10.

v. Προκύπτει από το iv.

Τέλος θα οριστεί η συνάρτηση $y = \left(\log_\alpha x\right)_2$.

Ορισμός 4.2.12 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $\left(\log_\alpha x\right)_2 = \dfrac{\ln_2 x}{\ln_2\alpha}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Οι ιδιότητες της $y = \left(\log_\alpha x\right)_2$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της.

Τέλος αποδεικνύεται ότι $e_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Θεώρημα 4.2.13 Ισχύει $e_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Απόδειξη

Αν $\alpha_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ τότε $\ln_2\alpha_n = n\ln_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln_2 1}{\dfrac{1}{n}}$.

Αν $n \to +\infty$ τότε $\dfrac{1}{n} \to 0$ άρα $\lim\limits_{\frac{1}{n}\to 0}\dfrac{\ln_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln_2 1}{\dfrac{1}{n}} = \ln_2'(1) = 1$. Αφού $\ln_2\alpha_n = 1$, από τη συνέχεια της $\varepsilon(x) = \left(e^x\right)_2$ προκύπτει $\alpha_n = \left(e^{\ln_2\alpha_n}\right)_2 = \left(e^1\right)_2 = e_2$.[127]

[127] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, John Wiley sons, 1992.

4.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\ln_3 x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

Θα οριστεί μέσω ολοκληρώματος η εκθετική y=$\left(\alpha^x\right)_3$, $\alpha > 0$ και η λογαριθμική y=$\left(\log_\alpha x\right)_3$, $0 < \alpha \neq 1$ συνάρτηση. Αρχικά, ορίζεται η $y = \ln_3 x$ και έπειτα η αντίστροφη της, $y = \left(e^x\right)_3$ και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές τους. Τέλος επεκτείνεται ο ορισμός τους για αυθαίρετο $\alpha > 0$.

Ορισμός 4.3.1 Για $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση $\ln_3 x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Θεώρημα 4.3.2

i. Για $x > 0$ η $y = \ln_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Ισχύει ότι $\ln_3 1 = 0$.

iii. Αν $x > 1$ τότε $\ln_3 x > 0$ ενώ αν $0 < x < 1$ τότε $\ln_3 x < 0$.

iv. Για $x, y > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ ισχύουν

$\ln_3(xy) = \ln_3 x + \ln_3 y$, $\ln_3\left(\frac{x}{y}\right) = \ln_3 x - \ln_3 y$, $\ln_3 x^r = r\ln_3 x$.

v. Ισχύουν $\lim\limits_{x\to\infty}\ln_3 x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln_3 x = -\infty$.

vi. Η $y = \ln_3 x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

i. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έπεται ότι

$$\left(\ln_3 x\right)' = \frac{1}{x} > 0$$

ii. Έπεται από τον Ορισμό 4.3.1 θέτοντας x=1.

iii. Έπεται από το i. και το ii.

iv. **1^{ος} τρόπος.** Ισχύει ότι $\ln_3(xy) = \int_1^{xy}\frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy}\frac{1}{t}dt$ (1)

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = ux$ προκύπτει ότι $\int_x^{xy}\frac{1}{t}dt = \int_1^y \frac{1}{u}du$. Έτσι από την (1) έπεται ότι $\ln_3(xy) = \ln_3 x + \ln_3 y$.

2ος τρόπος. Έστω x>0 και $f\left(y\right)=\ln_3\left(xy\right)=\int_1^{xy}\frac{1}{t}dt$.

Τότε $f^{'}\left(y\right)=\frac{1}{xy}\left(xy\right)^{'}=\frac{1}{y}=\left(\ln_3 y\right)^{'}$. Άρα $\ln_3\left(xy\right)=\ln_3 y+c$, $c\in\mathbb{R}$. Αν y=1 τότε $\ln_3 x=c$.

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη θέτοντας $x=\frac{yx}{y}$. Η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται όπως στο Θεώρημα 4.2.9.

v. **1ος τρόπος.** Ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln_3 2^n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln_3 2=+\infty$ διότι $\ln_3 2>\ln_3 1=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln_3 x=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln_3 2^n=+\infty$.

2ος τρόπος. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\ln_3 x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$. Όμως $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, άρα από το Ολοκληρωτικό κριτήριο έπεται ότι $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt=+\infty$[128]. Για το δεύτερο όριο:

1ος τρόπος. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln_3 x=+\infty$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to0^+}\ln_3 x=\lim_{t\to+\infty}\ln_3\frac{1}{t}=-\lim_{t\to+\infty}\ln_3 t=-\infty$$

2ος τρόπος. Ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln_3 2^{-n}=-\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln_3 2=-\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0^+}\ln_3 x=\lim\limits_{n\to\infty}\ln_3 2^{-n}=-\infty$.

vi. Έπεται λόγω του i. και του v.

Αφού η $y=\ln_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα, είναι αντιστρέψιμη, άρα ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.3.3 Για $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $\left(e^x\right)_3=\ln_3^{-1}x$ με σύνολο τιμών το $\left(0,+\infty\right)$.

Στη συνέχεια θα οριστεί ο αριθμός e_3.

[128] K.G Binmore, Mathematical Analysis, Cup, 1977.

Ορισμός 4.3.4 $e_3 = \ln_3^{-1} 1$.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες της $y = \left(e^x\right)_3$.

Θεώρημα 4.3.5 i. Ισχύει $\left(e^x\right)_3^{'} = \left(e^x\right)_3$ καθώς και ότι η $y = e_3^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\ln_3\left(e_3^x\right) = x$ και για $x > 0$, $e_3^{\ln_3 x} = x$.

iii. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $\left(e^{x+y}\right)_3 = \left(e^x\right)_3\left(e^y\right)_3$, $\left(e^0\right)_3 = 1$, $\left(e^{-x}\right)_3 = \dfrac{1}{\left(e^x\right)_3}$, $\left(e^{x-y}\right)_3 = \dfrac{\left(e^x\right)_3}{\left(e^y\right)_3}$, $\left(e^x\right)_3^y = \left(e^{xy}\right)_3$.

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)_3 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)_3 = 0$.

Απόδειξη

i. Από τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφης απεικόνισης,

$$\left(e^x\right)_3^{'} = \left(\ln_3^{-1}\right)^{'}(x) = \frac{1}{\ln_3^{'}\left(\ln_3^{-1}(x)\right)} = \ln_3^{-1}(x) = \left(e^x\right)_3$$

Επιπλέον $\left(e^x\right)_3^{'} = \left(e^x\right)_3 > 0$ άρα η $y = \left(e^x\right)_3$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Προκύπτουν άμεσα από τον Ορισμό 4.3.3.

iii. Έστω $\left(e^x\right)_3 = c$ και $\left(e^y\right)_3 = d$, οπότε είναι $x + y = \ln_3 c + \ln_3 d = \ln_3(cd)$ άρα $\left(e^{x+y}\right)_3 = cd = \left(e^x\right)_3\left(e^y\right)_3$. Η δεύτερη ισότητα έπεται από το Θεώρημα 4.3.2 ii και τον Ορισμό 4.3.3. Η άλλες δύο έπονται εύκολα από την πρώτη. Η τελευταία αποδεικνύεται όπως το Θεώρημα 4.2.6.

iii. Προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 4.3.2 v και τον Ορισμό 4.3.4.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 4.3.3 ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης για εκθέτη ρητό.

Θεώρημα 4.3.6 Αν $r \in \mathbb{Q}$ τότε $\left(e^r\right)_3 = e^r$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 4.2.7.

Στη συνέχεια θα επεκταθεί ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης για οποιοδήποτε $\alpha > 0$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

Ορισμός 4.3.7 1ος τρόπος. Για $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $\left(\alpha^x\right)_3 = \left(e^{x \ln_3 \alpha}\right)_3$.

2ος τρόπος. Για $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται y=$\left(\alpha^x\right)_3$, ο μοναδικός αριθμός τέτοιος ώστε $\ln_3 \alpha^x = x \ln_3 \alpha$

Ο δεύτερος τρόπος έχει το πλεονέκτημα ότι η y=$\left(\alpha^x\right)_3$ ορίζεται απευθείας και όχι μέσω της $y = \left(e^x\right)_3$.

Ο Ορισμός 4.3.7 ικανοποιεί τον ορισμό της δύναμης για εκθέτη ρητό, αφού $\left(\alpha^r\right)_3 = \left(e^{r \ln_3 \alpha}\right)_3 = \left(e^{\ln_3 \alpha^r}\right)_3 = \alpha^r$.

Για να αποδειχθούν οι ιδιότητες της y=$\left(\alpha^x\right)_3$, $\alpha > 0$ θα γίνει χρήση του 1ου ορισμού.

Θεώρημα 4.3.8 Ισχύει ότι i. $\left(\alpha^x\right)_3' = \left(\alpha^x\right)_3 \ln_3 \alpha$

ii. Η y=$\left(\alpha^x\right)_3$ είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$ και γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$.

iii. $\left(\alpha^{x+y}\right)_3 = \left(\alpha^x\right)_3 \left(\alpha^y\right)_3$, $\left(\alpha^{x-y}\right)_3 = \dfrac{\left(\alpha^x\right)_3}{\left(\alpha^y\right)_3}$, $\left(\alpha^x\right)_3^y = \left(\alpha^{xy}\right)_3$, $\left(\alpha\beta\right)_3^x = \left(\alpha^x\right)_3 \left(\beta^x\right)_3$,

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)_3^x = \dfrac{\left(\alpha^x\right)_3}{\left(\beta^x\right)_3}$.

iv. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_3 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_3 = 0$.

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^x\right)_3 = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_3 = +\infty$.

v. Η y=$\left(\alpha^x\right)_3$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

Απόδειξη

i. Ισχύει ότι $\left(\alpha^x\right)_3' = \left(e^{x\ln_3\alpha}\right)_3' = \left(\alpha^x\right)_3 \ln_3\alpha$.

ii. Προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 4.3.2 και το i.

iii. $\left(\alpha^{x+y}\right)_3 = \left(e^{(x+y)\ln_3\alpha}\right)_3 = \left(e^{x\ln_3\alpha+y\ln_3\alpha}\right)_3 = \left(\alpha^x\right)_3\left(\alpha^y\right)_3$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

iv. Συνέπειες των Θεωρημάτων 4.3.2, 4.3.5 και του Ορισμού 4.3.7.

Τέλος θα οριστεί η συνάρτηση $y = \left(\log_\alpha x\right)_3$.

Ορισμός 4.3.9 Αν $0<\alpha\neq 1$ και $x>0$ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $\left(\log_\alpha x\right)_3 = \dfrac{\ln_3 x}{\ln_3\alpha}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Οι ιδιότητες της $y = \left(\log_\alpha x\right)_3$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της.

Τέλος θα αποδειχθεί ότι $e_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Θεώρημα 4.3.10 $e_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 4.2.13.[129]

4.4 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ $\left(e^x\right)_4 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$

Θα θεμελιωθεί η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση ξεκινώντας από τον ορισμό της $f(x) = \left(e^x\right)_4$, ως δυναμοσειρά.

[129] M.H. Protter, C.M. Morrey, A First Course in Real Analysis, Springer, 1991.

Ορισμός 4.4.1 Για $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται $\left(e^{x}\right)_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες της $f(x) = \left(e^{x}\right)_4$.

Θεώρημα 4.4.2 Για $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν

i. $\left(e^{x+y}\right)_4 = \left(e^{x}\right)_4 \left(e^{y}\right)_4$, $\left(e^{0}\right)_4 = 1$, $\left(e^{-x}\right)_4 = \frac{1}{\left(e^{x}\right)_4}$, $\left(e^{x-y}\right)_4 = \frac{\left(e^{x}\right)_4}{\left(e^{y}\right)_4}$.

ii. Η $f(x) = \left(e^{x}\right)_4$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

iii. $\left(e^{x}\right)_4' = \left(e^{x}\right)_4$ και η $f(x) = \left(e^{x}\right)_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. $\left(e^{x}\right)_4^{y} = \left(e^{xy}\right)_4$.

v. $\lim_{x \to \infty} \left(e^{x}\right)_4 = +\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} \left(e^{x}\right)_4 = 0$.

Απόδειξη

i. Έστω οι σειρές $\left(e^{x}\right)_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ και $\left(e^{y}\right)_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}$ οι οποίες συγκλίνουν απολύτως άρα θα συγκλίνει απολύτως και το γινόμενο τους. Ισχύει

$$c_\kappa = \frac{x^\kappa}{\kappa!}\frac{y^0}{0!} + \frac{x^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\frac{y^1}{1!} + \ldots + \frac{x^1}{1!}\frac{y^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} + \frac{x^0}{0!}\frac{y^\kappa}{\kappa!}$$

$$= \frac{1}{\kappa!}\left(\binom{\kappa}{\kappa} x^\kappa y^0 + \binom{\kappa}{\kappa-1} x^{\kappa-1} y^1 + \ldots + \binom{\kappa}{1} x^1 y^{\kappa-1} + \binom{\kappa}{0} x^0 y^\kappa\right) = \frac{(x+y)^\kappa}{\kappa!}$$

Επομένως $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}$.

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον Ορισμό 4.4.1 θέτοντας $x=0$. Οι επόμενες δύο προκύπτουν από την ισότητα $\left(e^{x+y}\right)_4 = \left(e^{x}\right)_4 \left(e^{y}\right)_4$.

ii. Αφού $\left(e^{x}\right)_4 \left(e^{-x}\right)_4 = 1$ συνεπάγεται ότι $\left(e^{x}\right)_4 \neq 0$ και επιπλέον $\left(e^{0}\right)_4 = 1 > 0$. Άρα $\left(e^{x}\right)_4 > 0$ στο $\mathbb{R}$.

iii. $\left(e^{x}\right)_4' = \lim_{h \to 0} \frac{\left(e^{x+h}\right)_4 - \left(e^{x}\right)_4}{h} = \left(e^{x}\right)_4 \lim_{h \to 0} \frac{\left(e^{h}\right)_4 - 1}{h}$ (1)

Έχουμε $\dfrac{\left(e^h\right)_4-1}{h}=1+\dfrac{h}{2!}+\dfrac{h^2}{3!}+\ldots+\dfrac{h^n}{(n+1)!}+\ldots$ (2)

Όμως

$$\left|\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\ldots+\frac{h^n}{(n+1)!}+\ldots\right|\le\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\ldots+\frac{h^n}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}|h|}{1-\frac{1}{2}|h|}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{h}{2!}+\dfrac{h^2}{3!}+\ldots+\dfrac{h^n}{(n+1)!}+\ldots\right|=0$. Από την (2) έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(e^h\right)_4-1}{h}=1$ άρα από την (1) συνεπάγεται ότι $\left(e^x\right)_4'=\left(e^x\right)_4$ [130]. Από το ii και iii η $f(x)=\left(e^x\right)_4$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iv. Όμοια όπως το Θεώρημα 4.2.6.

v. Από τον Ορισμό 4.4.1 συνεπάγεται ότι $\left(e^x\right)_4\ge x$ για κάθε $x\ge 0$, οπότε

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x\right)_4=+\infty$$

Ακόμη για κάθε $x<0$ ισχύει $\left(e^x\right)_4=\dfrac{1}{\left(e^{-x}\right)_4}$ από όπου έπεται $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)_4=0$.

Ορισμός 4.4.3 $e_4=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$.

Στο επόμενο θεώρημα, θα αποδειχθεί ότι η $f(x)=\left(e^x\right)_4$, ικανοποιεί τον ορισμό δύναμης με εκθέτη ρητό.

Θεώρημα 4.4.4 Αν $r\in\mathbb{Q}$ τότε $\left(e^r\right)_4=e^r$.

Απόδειξη

Όμοια με το Θεώρημα 4.2.7.

Αφού η $f(x)=\left(e^x\right)_4$ είναι γνησίως αύξουσα, ορίζεται η αντίστροφη της και έτσι έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

---

130 J.C. Burkili, A first Course in Mathematics Analysis, Cambridge university, Cambridge 1962.

Ορισμός 4.4.5 Για $x>0$, ορίζεται η συνάρτηση $\ln_4 x = \left(e^x\right)_4^{-1}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες της $y=\ln_4 x$.

Θεώρημα 4.4.6

i. $\left(e^{\ln_4 x}\right)_4 = x$ και $\ln_4\left(e^x\right)_4 = x$.

ii. Ισχύει ότι $\ln_4 1 = 0$.

iii. Για $x>0$ ισχύει ότι $\left(\ln_4 x\right)' = \dfrac{1}{x}$ και επιπλέον ότι η $y=\ln_4 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Αν $x>1$ τότε $\ln_4 x>0$ και αν $0<x<1$ τότε $\ln_4 x<0$.

v. Για $x, y>0$ και $r\in\mathbb{Q}$ ισχύουν

$\ln_4(xy)=\ln_4 x+\ln_4 y$, $\ln_4\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln_4 x-\ln_4 y$, $\ln_4 x^r = r\ln_4 x$.

vi. Αν $x>0$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\ln_4 x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln_4 x=-\infty$.

Απόδειξη

i. Άμεσες συνέπειες του Ορισμού 4.4.5.

ii. Αφού $\left(e^0\right)_4=1$ από τον Ορισμό 4.4.5 έπεται ότι $\ln_4 1=0$.

iii. Ισχύει $\left(e^{\ln_4 x}\right)_4 = x$. Άρα $\left(e^{\ln_4 x}\right)_4' = (x)'$ συνεπώς $\left(\ln_4 x\right)' = \dfrac{1}{\left(e^{\ln_4 x}\right)_4} = \dfrac{1}{x}$ άρα η $y=\ln_4 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Αποδεικνύονται μέσω του ii και του iii.

v. Θέτοντας $\ln_4 x=\alpha$ και $\ln_4 y=\beta$ προκύπτει $xy=\left(e^\alpha\right)_4\left(e^\beta\right)_4=\left(e^{\alpha+\beta}\right)_4$. Άρα

$$\ln_4(xy)=\alpha+\beta=\ln_4 x+\ln_4 y$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει εύκολα από την πρώτη. Η τελευταία αποδεικνύεται όμοια με το Θεώρημα 4.2.9.

vi. Αποδεικνύονται μέσω του Θεωρήματος 4.4.2 iv και του Ορισμού 4.4.5.

Στη συνέχεια θα επεκταθεί ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης για οποιοδήποτε $\alpha > 0$.

Ορισμός 4.4.7 Για $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται $y = \left(\alpha^x\right)_4 = \left(e^{x \ln_4 \alpha}\right)_4$.

Οι ιδιότητες της $y = \left(\alpha^x\right)_4$ αποδεικνύονται όπως στο Θεώρημα 4.2.11.

Τέλος, θα οριστεί η συνάρτηση $y = \left(\log_\alpha x\right)_4$.

Ορισμός 4.4.8 Για $0 < \alpha \neq 1$ και x>0 ορίζεται $y = \left(\log_\alpha x\right)_4 = \dfrac{\ln_4 x}{\ln_4 \alpha}$.

Οι ιδιότητες της $y = \left(\log_\alpha x\right)_4$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της.

Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείχθεί ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$ είναι το ίδιο με το $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, τον γνωστό αριθμό e.

Θεώρημα 4.4.9 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e_4$.

1ος τρόπος. Έστω $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ και $\beta_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Τότε

$$\beta_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{\kappa}\frac{1}{n^\kappa} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι θετικές και μικρότερες του ένα, συνεπάγεται ότι

$$\beta_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \alpha_n \text{ για } n \geq 1.$$

Ακόμη, αν $1 \leq \kappa \leq n$ ισχύει

$$\beta_n \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right).$$

Παίρνοντας τα όρια καθώς $n \to +\infty$ προκύπτει ότι $e \geq \alpha_n$. Τελικώς αποδείχθηκε ότι $\beta_n \leq \alpha_n \leq e$ άρα $\alpha_n = e$.

2ος τρόπος.

Λήμμα Ισχύει ότι $1+x \leq \left(e^x\right)_4 \leq 1+x\left(e^x\right)_4$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Προκύπτει από τον Ορισμό 4.4.1 ότι για $x>0$ ισχύει $1+x \leq \left(e^x\right)_4$. Επιπλέον

$$\left(e^x\right)_4 - 1 = x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} \quad (1)$$

Όμως $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!}$ άρα $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \left(e^x\right)_4$. Από την τελευταία αν $x>0$ έπεται ότι $x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} \leq x\left(e^x\right)_4$ και από την (1) έπεται το ζητούμενο. Αν $x<0$ τότε $-x>0$ συνεπώς $1-x \leq \left(e^{-x}\right)_4 \leq 1-x\left(e^{-x}\right)_4$ και $(1-x)\left(e^x\right)_4 \leq 1 \leq \left(e^x\right)_4 - x$ δηλαδή

$$1+x \leq \left(e^x\right)_4 \leq 1+x\left(e^x\right)_4$$

Αν $\left(e^x\right)_4 = 1+h$ τότε από την $1+x \leq \left(e^x\right)_4 \leq 1+x\left(e^x\right)_4$ προκύπτει ότι

$$\frac{h}{1+h} \leq \ln_4(1+h) \leq h$$

Από την τελευταία έπεται ότι $\frac{h}{h+h^2} \leq \frac{\ln_4(1+h)}{h} \leq 1$ και παίρνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ συνεπάγεται ότι $\lim_{h\to 0}\frac{\ln_4(1+h)}{h} = 1$ ισοδύναμα ότι $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e_4$[131].

[131] E. Fisher, Intermmediate Real Analysis, Springer, 1983.

4.5 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

Ισχύει ότι $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ καθώς $-1<x\le 1$. Η επέκταση του ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης εκτός του διαστήματος $(-1,1]$, γίνεται μέσω του επόμενου ορισμού, ο οποίος είναι άμεσο αποτέλεσμα της προηγούμενης ισότητας.

Ορισμός 4.5.1 Αν $-1<x<1$ τότε ορίζεται $\ln_5\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Επειδή κάθε θετικός αριθμός είναι της μορφής $\frac{1+x}{1-x}$, όπου $-1<x<1$, ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον

$$\ln_5 x=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1} \text{ για } x>0$$

Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης.

Θεώρημα 4.5.2 i. Για $x>0$ η $y=\ln_5 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Ισχύει ότι $\ln_5 1=0$.

iii. Αν $x>1$ τότε $\ln_5 x>0$ ενώ αν $0<x<1$ τότε $\ln_5 x<0$.

iv. Για $x,y>0$ και $r\in\mathbb{Q}$ ισχύουν

$\ln_5(xy)=\ln_5 x+\ln_5 y$, $\ln_5\left(\frac{x}{y}\right)=\ln_5 x-\ln_5 y$, $\ln_5 x^r=r\ln_5 x$.

v. Ισχύουν $\lim\limits_{x\to\infty}\ln_5 x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln_5 x=-\infty$.

vi. Η $y=\ln_5 x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

i. Αν $x\in(-1,1]$ τότε η $y=\ln_5(1+x)$ είναι γνησίως αύξουσα διότι

$$\left[\ln_5(1+x)\right]'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}\right)=\frac{1}{1+x}>0$$

Επιπλέον η $y=\ln_5(1-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\left[\ln_5(1-x)\right]' = \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2\kappa-1}}{\kappa}x^{\kappa}\right)' = -\sum_{\kappa=1}^{\infty}x^{\kappa-1} = \frac{1}{x-1} < 0.$$

Συνεπώς η $y=\ln_5\frac{1+x}{1-x}$ και ισοδύναμα η $y=\ln_5 x$ είναι γνησίως αύξουσα για $x>0$.

ii. Με $x=1$ στην $\ln_5 x = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\kappa+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$ έπεται το ζητούμενο.

iii. Έπεται εύκολα από τα i, ii.

iv. Ισχύει $\ln_5 x = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$. Θέτοντας $u(x)=\frac{x-1}{x+1}$ και παραγωγίζοντας όρο προς όρο την προηγούμενη σειρά προκύπτει ότι $\left(\ln_5 x\right)' = \frac{4}{\left(x+1\right)^2}\sum_{k=0}^{\infty}u^{2k}(x)$ (1)

Όμως $\sum_{k=0}^{\infty}u^{2k}(x)=\frac{1}{1-u^2(x)}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\left(\ln_5 x\right)' = \frac{1}{x}$.

Θεωρώντας, $f\left(xy\right)=\ln_5\left(xy\right)-\ln_5 x-\ln_5 y$ τότε $f'\left(xy\right)=0$ και αφού $f\left(1\right)=0$ έπεται το ζητούμενο. Αν $x=\frac{yx}{y}$ τότε η δεύτερη ισότητα προκύπτει εύκολα από την πρώτη. Η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο, όπως στο Θεώρημα 4.2.9 v.

v. Όμοια με το Θεώρημα 3.2 v.

vi. Έπεται από το i και το v.

Ο ορισμός και οι ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, θεμελιώνονται με όμοιο τρόπο, όπως στον Ορισμό 4.3.

4.6 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Έστω μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία δεν είναι η μηδενική, ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $g\left(x+y\right)=g(x)g(y)$, (1) για $x,y\in\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο x=0. Αρχικά αποδεικνύονται οι ιδιότητες της g, συμπεραίνοντας ότι αυτές ταυτίζονται με της εκθετικής συνάρτησης.

Θεώρημα 4.6.1 Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Ισχύει $g(0)=g(0+0)=g^2(0)$ άρα $g(0)=0$ ή $g(0)=1$.

Αν $g(0)=0$ τότε $g(x)=g(x+0)=g(x)g(0)=0$ το οποίο είναι άτοπο αφού $g(x)\neq 0$.

Συνεπώς $g(0)=1$. Θα αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{h\to 0} g(x_0+h)=g(x_0)\lim_{h\to 0} g(h)=g(x_0)$$

διότι $\lim\limits_{h\to 0} g(h)=g(0)=1$.

Θεώρημα 4.6.2 $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Ισχύει $g(x)=g(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=g^2(\frac{x}{2})\geq 0$. Όμως $g(x)\neq 0$ διότι αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ τότε $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ καθώς

$$g(x)=g(x-x_0+x_0)=g(x-x_0)g(x_0)=0.$$

Θεώρημα 4.6.3 Αν $\alpha=g(1)$ τότε $\alpha>0$ και $g(r)=\alpha^r$ για κάθε $r\in\mathbb{Q}$.

Απόδειξη

Ισχύει ότι $\alpha=g(1)>0$ διότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από το Θεώρημα 4.6.2. Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι $g(r)=\alpha^r$ για κάθε $r\in\mathbb{Q}$. Ισχύει ότι αν $n\in\mathbb{N}$ τότε

$$g(n)=g\left(\underbrace{1+...+1}_{n-\text{φορες}}\right)=\left(g(1)\right)^n=\alpha^n$$

Επιπλέον $1=g(0)=g(n+(-n))=g(n)g(-n)$ άρα $g(-n)=\dfrac{1}{g(n)}=\dfrac{1}{\alpha^n}=\alpha^{-n}$.

Τέλος $g(1)=g\left(\underbrace{\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n-\text{φορές}}\right)=\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ άρα $g\left(\frac{1}{n}\right)=\alpha^{\frac{1}{n}}$. Έτσι

$$g\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(\underbrace{\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{m-\text{φορές}}\right)=\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^m=\alpha^{\frac{m}{n}}.$$

Αν $r=\dfrac{m}{n}$ τότε $g(r)=\alpha^r$.

Θεώρημα 4.6.4 Για τη συνεχή συνάρτηση g, ισχύουν

i. Αν $g(1)>1$ τότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν $0<g(1)<1$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Αν $g(1)=1$ τότε η g είναι σταθερή.

Απόδειξη

i. Αν $x<y$ θα αποδειχθεί ότι $g(x)<g(y)$. Έστω οι ακολουθίες ρητών r_n, s_n, τέτοιες ώστε $r_n \to x$ και $s_n \to y$. Ισχύει ότι $r_n<x<y<s_n$ και αφού $g(1)>1$ έπεται ότι $g(r_n)<g(s_n)$. Παίρνοντας τα όρια, λόγω συνέχειας συνεπάγεται $g(x)\le g(y)$. Όμως $g(x)\neq g(y)$ διότι αν $x<q_1<q_2<y$ τότε παίρνοντας τα όρια

$$g(x)\le \alpha^{q_1}<\alpha^{q_2}\le g(y)$$

ii. και iii. Αποδεικνύονται όμοια με την i.

Θεώρημα 4.6.5 Αν $g(x)>1$ όταν $x\in(0,\delta)$, $\delta>0$, τότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν $y>x$ τότε

$$g(y)=g(x+y-x)=g(\underbrace{x+\frac{y-x}{n}+\ldots+\frac{y-x}{n}}_{n-\text{φορες}})=g(x)g\left(\frac{y-x}{n}\right)\ldots g\left(\frac{y-x}{n}\right) \quad (1)$$

Όμως $\frac{y-x}{n}\in(0,\delta)$ άρα $g\left(\frac{y-x}{n}\right)>1$ και λόγω της (1) $g(y)>g(x)$.

Η συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες, ονομάζεται εκθετική και έτσι προκύπτει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.6.6 Αν $\alpha>1$ και $x\in\mathbb{R}$, η g ικανοποιεί την (1) και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται

$$g(x)=\left(\alpha^x\right)_7=\sup T_x(\alpha),\ \text{όπου}\ T_x(\alpha)=\left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$$

Αν $0<\alpha<1$ τότε ορίζεται $g(x)=\left(\alpha^x\right)_7=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-x}$.

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα, καθώς το σύνολο $T_x(\alpha)=\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\}$, είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και επιπλέον ικανοποιείται για x ρητό αριθμό.

Θεώρημα 4.6.7 Έστω $\alpha>1$ και $\alpha=g(1)$ τότε η συνάρτηση $g(x)=\left(\alpha^x\right)_7$ είναι η μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί την συναρτησιακή σχέση (1).

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις f, g, που ικανοποιούν την (1). Τότε $g(r)=f(r)=\alpha^r$, $r\in\mathbb{Q}$ και λόγω του Ορισμού 4.6.6, έπεται ότι $g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θα αποδειχθούν κάποιες επιπλέον ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

Θεώρημα 4.6.8

i. $\left(\alpha^{x-y}\right)_7=\dfrac{\left(\alpha^x\right)_7}{\left(\alpha^y\right)_7}$, $\left(\alpha^x\right)_7^y=\left(\alpha^{xy}\right)_7$.

ii. Η $f(x)=\left(\alpha^x\right)_1$ είναι παραγωγίσιμη.

iii. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_1=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_1=0$.

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^x\right)_1=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha^x\right)_1=+\infty$.

Απόδειξη

i. Από την (1) και τον Ορισμό 4.6.6

$$g(x+y)=g(x+(-y))=g(x)g(-y)=g(x)\frac{1}{g(y)}$$

Οι υπόλοιπες ιδιότητες αποδεικνύονται όπως στο Θεώρημα 4.1.7.

Στη συνέχεια, θα οριστεί η λογαριθμική συνάρτηση. Έστω $P=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$ και $h:P\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $h(xy)=h(x)+h(y)$ (2) για $x,y\in P$, δεν είναι η μηδενική και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο x=1. Αρχικά αποδεικνύονται οι ιδιότητες της h συμπεραίνοντας ότι αυτές ταυτίζονται με αυτές της λογαριθμικής συνάρτησης.

Θεώρημα 4.6.9 Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο σημείο $x=1$ τότε είναι συνεχής στο P.

Απόδειξη

Με $x=1$ στην (2) έπεται ότι $h(1)=0$. Θα αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=h(x_0)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{t\to 1} h(x_0 t)=h(x_0)+\lim\limits_{t\to 1} h(t)=h(x_0)$ διότι $\lim\limits_{t\to 1} h(t)=h(1)=0$.

Θεώρημα 4.6.10 Αν η συνάρτηση h είναι μη μηδενική και ικανοποιεί την $h\left(xy\right)=h(x)+h(y)$ τότε δεν ορίζεται στο σημείο $x=0$.

Απόδειξη

Έστω ότι ορίζεται στο x=0 τότε $h(0)=h(0)+h(x)$ δηλαδή $h(x)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Θεώρημα 4.6.11 Αν $x>0$ και $r\in\mathbb{Q}$, τότε $h\left(x^r\right)=rh\left(x\right)$.

Απόδειξη

Αν $n\in\mathbb{N}$ τότε $h(x^n)=h(\underbrace{x...x}_{n-\text{φορές}})=nh(x)$. Επιπλέον

$$h(x^{-n})=h(1\frac{1}{x^n})=h(1)+h(\underbrace{\frac{1}{x}...\frac{1}{x}}_{n-\text{φορές}})=nh(x^{-1})=-nh(x)$$

διότι $h(1)=h(xx^{-1})=h(x)+h(x^{-1})=0$ άρα $h(x^{-1})=-h(x)$.

Αν $r=\dfrac{m}{n}$ τότε θα αποδειχθεί ότι $h(x^r)=rh\left(x\right)$. Ισχύει ότι

$mh(x)=h\left(x^m\right)=h\left(\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)=nh\left(x^{\frac{m}{n}}\right)$ δηλαδή $h\left(x^r\right)=h\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\dfrac{m}{n}h(x)=rh(x)$.

Θεώρημα 4.6.12 Αν $h(x)>0$ στο διάστημα $\left(1,\delta\right)$ με δ>1, τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο P.

Απόδειξη

Έστω $x,\ y\in P$ έτσι ώστε $y>x$ τότε $h(y)=h(x\dfrac{y}{x})=h(x)+h(\dfrac{y}{x})$ (1)

Όμως $\dfrac{y}{x}\in\left(1,\delta\right)$ άρα $h(\dfrac{y}{x})>0$ και λόγω της (1) $h(y)>h(x)$.

Θεώρημα 4.6.13

i. Αν h συνεχής τότε $h(x)\neq 0$ για $x\neq 1$.

ii. Αν $x>1$ τότε $h(x)>0$.

iii. Αν $0<x<1$ τότε $h(x)<0$.

iv. $h\left(\frac{x}{y}\right)=h(x)-h(y)$.

v. $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=+\infty$.

vi. Αν η συνάρτηση h είναι παραγωγίσημη στο x=1 τότε είναι παραγωγίσιμη στο Ρ.

vii. Ισχύει ότι $h\left(x^{\kappa}\right)=\kappa h(x)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

i. Ισχύει $h(1)=0$ και h γνησίως αύξουσα στο Ρ άρα $h(x)\neq 0$ για $x\neq 1$.

ii. Αν $x>1$ τότε $h(x)>h(1)=0$.

iii. Όμοια με το ii.

iv. Προκύπτει θέτοντας στην (2) όπου y το $\frac{1}{y}$.

v. Λόγω του ii, iii, και αφού h(1)=0 έπεται ότι η συνάρτηση h, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και λόγω του Θεωρήματος 4.6.12 έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=+\infty$.

vi. $h'(x)=\lim\limits_{\kappa\to 0}\frac{h(x+\kappa)-h(x)}{\kappa}=\lim\limits_{\kappa\to 0}\frac{h\left(\frac{x+\kappa}{x}\right)-h(1)}{\kappa}$. Αν $\frac{\kappa}{x}=m$ τότε

$$h'(x)=\frac{1}{x}\lim_{m\to 0}\frac{h(1+m)-h(1)}{m}=\frac{1}{x}h'(1)$$

vii. Έστω $c(x)=h\left(x^{\kappa}\right)-\kappa h(x)$. Ισχύει $c'(x)=0$ και $c(1)=0$ άρα $c(x)=0$, $x>0$.

Στο Θεώρημα 4.6.13 αποδείχθηκε ότι $h'(x)=\frac{1}{x}h'(1)$. Αν $h'(1)=0$ τότε η $h(x)=0$, το οποίο είναι αδύνατο αφού $h(x)\neq 0$. Αν $h'(1)\neq 0$ έχουμε τη διαφορική εξίσωση $h'(x)=\frac{1}{x}h'(1)$ με $h(1)=0$, η οποία έχει μοναδική λύση την $h(x)=h'(1)\ln_6 x$ η οποία ισοδύναμα είναι λύση της (2). Θέτοντας $h'(1)=1$ τότε $h(x)=\ln_6 x$. Έτσι ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.6.14 Αν η $h: P \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h(xy) = h(x) + h(y)$, $x, y \in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$ τότε $h(x) = \ln_7 x$.

Η h είναι συνεχής στο P άρα υπάρχει b>1 τέτοιο ώστε $h(b) = 1$. Μπορεί να οριστεί τώρα ο αριθμός e_6.

Ορισμός 4.6.15 Αν $h(b) = 1$ τότε $e_6 = b$.

Τέλος, θα οριστεί η συνάρτηση $y = (\log_\alpha x)_6$.

Ορισμός 4.6.16 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο

$$(\log_\alpha x)_6 = \frac{\ln_6 x}{\ln_6 \alpha} \text{ και σύνολο τιμών το } \mathbb{R}$$

Οι ιδιότητες της $y = (\log_\alpha x)_6$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της[132].

4.7 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Για τον τρόπο θεμελίωσης της εκθετικής-λογαριθμικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής, μπορεί κάποιος να ανατρέξει σε ένα οποιοδήποτε βιβλίο μιγαδικής ανάλυσης.

[132] R.G Bartle, The Elements of Real Analysis, John Wiley & Sons, 1964.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΟΨΗ - ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΟΡΙΣΜΩΝ

Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται εν συντομία, οι ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων καθώς και της εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης.

Ορισμοί	**Τριγωνομετρικών συναρτήσεων**	**Εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης**
1	Γεωμετρικός ορισμός	Ορισμός εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω ακολουθίας ρητών.
2	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω των εξισώσεων $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=-f(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1$	Ορισμός της εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω της εξίσωσης $f'(x)=f(x)$
3	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω της εξίσωσης $f''(x)=-f(x)$	Ορισμός της εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω του ολοκληρώματος $\ln_3 x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$
4	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω του ολοκληρώματος $\arctan_4 x=\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$	Ορισμός της εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω της $\left(e^x\right)_4=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$
5	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω του ολοκληρώματος $\arcsin_5 x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$	Ορισμός εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω της $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

6	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω του εμβαδού κυκλικού τομέα	Ορισμός εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μέσω των συναρτησιακών εξισώσεων $g\left(x+y\right)=g(x)g(y)$ και $h\left(xy\right)=h(x)+h(y)$
7	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω των $\sin_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\left(2k+1\right)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\left(2k\right)!}x^{2k}$	Ορισμός εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής
8	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω της $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	
9	Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης, $f\left(x-y\right)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$	

Στον επόμενο πίνακα καταγράφονται πιο αναλυτικά καθένας από τους παραπάνω ορισμούς καθώς και οι αντίστοιχοι ορισμοί των αριθμών π, e.

Ορισμοί τριγων/κών συναρτήσεων	**Αρχικός ορισμός**	**Σύνοψη**
1	Γεωμετρικός	Ορίζεται π_1, το μήκος του ημικυκλίου ακτίνας 1
2	Μέσω των εξισώσεων $f'\left(x\right)=g\left(x\right)$, $g'\left(x\right)=-f\left(x\right)$. Ειδικότερα, αν $f'\left(x\right)=g\left(x\right)$ και	Ορίζεται $\pi_2=2c$ όπου c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_2 c=0$.

	$g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$ και $g(0)=1$ τότε $f(x)=\sin_2 x$ και $g(x)=\cos_2 x$	Γράφουμε $\tan_2 x=\dfrac{\sin_2 x}{\cos_2 x}$, $x\neq \kappa\pi_2+\dfrac{\pi_2}{2}$ $\cot_2 x=\dfrac{\cos_2 x}{\sin_2 x}$, $x\neq \kappa\pi_2$ $\sec_2 x=\dfrac{1}{\cos_2 x}$, $x\neq \kappa\pi_2+\dfrac{\pi_2}{2}$ $\operatorname{cosec}_2 x=\dfrac{1}{\sin_2 x}$, $x\neq \kappa\pi_2$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$
3	Μέσω της εξίσωσης $f''(x)=-f(x)$. Ειδικότερα αν οι συναρτήσεις $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις ιδιότητες $c''(x)=-c(x)$, $c(0)=1$ και $c'(0)=0$ καθώς και $s''(x)=-s(x)$, $s(0)=0$ και $s'(0)=1$ τότε $c(x)=\cos_3 x$, $s(x)=\sin_3 x$	Ορίζεται $\pi_3=2c$ όπου c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_3 c=0$. Γράφουμε $\tan_3 x=\dfrac{\sin_3 x}{\cos_3 x}$, $x\neq \kappa\pi_3+\dfrac{\pi_3}{2}$ $\cot_3 x=\dfrac{\cos_3 x}{\sin_3 x}$, $x\neq \kappa\pi_3$ $\sec_3 x=\dfrac{1}{\cos_3 x}$, $x\neq \kappa\pi_3+\dfrac{\pi_3}{2}$ $\operatorname{cosec}_3 x=\dfrac{1}{\sin_3 x}$, $x\neq \kappa\pi_3$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$
4	Μέσω του ολοκληρώματος $\arctan_4 x=\int_0^x \dfrac{1}{1+u^2}du$	Ορίζεται $\pi_4=2\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan_4 x$. Στη συνέχεια ορίζεται στο $\left(-\dfrac{\pi_4}{2},\dfrac{\pi_4}{2}\right)$ $y=\tan_4 x=(\arctan_4 x)^{-1}$ $\cos_4 x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$

		$\sin_4 x = \dfrac{\tan_4 x}{\sqrt{1+\tan_4^2 x}}$ Επεκτείνεται ο ορισμός τους εκτός του $\left(-\dfrac{\pi_4}{2}, \dfrac{\pi_4}{2}\right)$ και τέλος ορίζονται $\cot_4 x = \dfrac{\cos_4 x}{\sin_4 x},\ x \neq \kappa\pi_4$ $\sec_4 x = \dfrac{1}{\cos_4 x},\ x \neq \kappa\pi_4 + \dfrac{\pi_4}{2}$ $\cos ec_4 x = \dfrac{1}{\sin_4 x},\ x \neq \kappa\pi_4$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$
5	Μέσω του ολοκληρώματος $\arcsin_5 x = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$, $x \in (-1,1)$	Ορίζονται $\pi_5 = 2\lim\limits_{x\to 1^-} \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$. Στο $\left[-\dfrac{\pi_5}{2}, \dfrac{\pi_5}{2}\right]$ έχουμε $\sin_5 x = \arcsin_5^{-1} x$ $\cos_5 x = \sqrt{1-\sin_5^2 x}$ Έπειτα επεκτείνεται ο ορισμός τους στο $\mathbb{R}$. Τέλος $\tan_5 x = \dfrac{\sin_5 x}{\cos_5 x},\ x \neq \kappa\pi_5 + \dfrac{\pi_5}{2}$ $\cot_5 x = \dfrac{\cos_5 x}{\sin_5 x},\ x \neq \kappa\pi_5$ $\sec_5 x = \dfrac{1}{\cos_5 x},\ x \neq \kappa\pi_5 + \dfrac{\pi_5}{2}$ $\cos ec_5 x = \dfrac{1}{\sin_5 x},\ x \neq \kappa\pi_5$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$
6	Μέσω του εμβαδού κυκλικού	Ορίζεται $\pi_6 = 2\varphi(-1)$.

	τομέα που δίνεται από την συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-u^2}du$ $-1\le x\le 1$	Στο $[0,\pi_6]$ ορίζονται $\cos_6 x=\varphi^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ και $\sin_6 x=\sqrt{1-\cos_6^2 x}$. Έπειτα επεκτείνεται ο ορισμός τους στο $\mathbb{R}$. Τέλος $\tan_6 x=\dfrac{\sin_6 x}{\cos_6 x},\ x\neq\kappa\pi_6+\dfrac{\pi_6}{2}$ $\cot_6 x=\dfrac{\cos_6 x}{\sin_6 x},\ x\neq\kappa\pi_6$ $\sec_6 x=\dfrac{1}{\cos_6 x},\ x\neq\kappa\pi_6+\dfrac{\pi_6}{2}$ $\cos ec_6 x=\dfrac{1}{\sin_6 x},\ x\neq\kappa\pi_6$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$
7	Μέσω των $\sin_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	Ορίζεται $\pi_7=2c$ όπου c είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $\cos_7 c=0$. Γράφουμε $\tan_7 x=\dfrac{\sin_7 x}{\cos_7 x},\ x\neq\kappa\pi_7+\dfrac{\pi_7}{2}$, $\cot_7 x=\dfrac{\cos_7 x}{\sin_7 x},\ x\neq\kappa\pi_7$ $\sec_7 x=\dfrac{1}{\cos_7 x},\ x\neq\kappa\pi_7+\dfrac{\pi_7}{2}$ $\cos ec_7 x=\dfrac{1}{\sin_7 x},x\neq\kappa\pi_7$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$
8	Μέσω της $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Ορίζεται $\pi_8=4\arctan_8 1$. Στη συνέχεια ορίζεται στο $\left(-\dfrac{\pi_8}{4},\dfrac{\pi_8}{4}\right)$

		$\tan_8 x = (\arctan_8 x)^{-1}$ και έπειτα επεκτείνεται ο ορισμός της στο $\left(-\frac{\pi_8}{2}, \frac{\pi_8}{2}\right)$. Επίσης $\cos_8 x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan_8^2 x}}$ και $\sin_8 x = \frac{\tan_8 x}{\sqrt{1+\tan_8^2 x}}$ στο $\left(-\frac{\pi_8}{2}, \frac{\pi_8}{2}\right)$. Τέλος η θεμελίωση των τριγων/κών συναρτήσεων συνεχίζεται με όμοιο τρόπο όπως τον Ορισμό 4
9	Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$	Ορίζεται $\pi_9 = 2\lambda$ όπου $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε, $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, όταν $x \in (0, \lambda)$. Γράφουμε $\tan_9 x = \frac{\sin_9 x}{\cos_9 x},\ x \neq \kappa\pi_9 + \frac{\pi_9}{2}$ $\cot_9 x = \frac{\cos_9 x}{\sin_9 x},\ x \neq \kappa\pi_9$ $\sec_9 x = \frac{1}{\cos_9 x},\ x \neq \kappa\pi_9 + \frac{\pi_9}{2}$ $\cos_9 \mathrm{ecx} = \frac{1}{\sin_9 x}, x \neq \kappa\pi_9$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

Ορισμοί εκθετικής, λογαριθμικής συνάρτησης	**Αρχικός ορισμός**	**Σύνοψη**
1	Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε $\left(\alpha^x\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$	Ορίζεται $e_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και $\left(\log_\alpha x\right)_1=\left(\alpha^x\right)_1^{-1}$
2	Μέσω της εξίσωσης $f'(x)=f(x)$. Ειδικότερα αν η συνάρτηση $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $\varepsilon'(x)=\varepsilon(x)$ και $\varepsilon(0)=1$ τότε $\varepsilon(x)=\left(e^x\right)_2$	Ορίζεται $e_2=\varepsilon(1)$ και $\ln_2 x=\left(e^x\right)_2^{-1}$. Για $0<\alpha\neq1$ και $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_2=\left(e^{x\ln_2\alpha}\right)_2$. Επίσης αν x>0 τότε $\left(\log_\alpha x\right)_2=\frac{\ln_2 x}{\ln_2\alpha}$
3	Μέσω του ολοκληρώματος $\ln_3 x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$	Ορίζεται $\left(e^x\right)_3=\ln_3^{-1}x$ και $e_3=\ln_3^{-1}1$. Για $0<\alpha\neq1$ και $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_3=\left(e^{x\ln_3\alpha}\right)_3$. Επίσης αν x>0 τότε $\left(\log_\alpha x\right)_3=\frac{\ln_3 x}{\ln_3\alpha}$
4	Μέσω της $\left(e^x\right)_4=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$	Ορίζεται $e_4=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ και $\ln_4 x=\left(e^x\right)_4^{-1}$. Για $0<\alpha\neq1$ και $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_4=\left(e^{x\ln_4\alpha}\right)_4$. Επίσης αν x>0 τότε $\left(\log_\alpha x\right)_4=\frac{\ln_4 x}{\ln_4\alpha}$
5	Μέσω της	Αρχικά μέσω της

	$\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ $-1<x\le 1$	$\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ ορίζεται $\ln_5 x=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$ για $x>0$. Έπειτα $\left(e^x\right)_5=\ln_5^{-1}x$ και $e_5=\ln_5^{-1}1$. Για $0<\alpha\neq 1$ και $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_5=\left(e^{x\ln_5\alpha}\right)_5$. Επίσης αν x>0 τότε $\left(\log_\alpha x\right)_5=\frac{\ln_5 x}{\ln_5\alpha}$
6	Αν η g ικανοποιεί την $g(x+y)=g(x)g(y)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε $g(x)=\left(\alpha^x\right)_6=\sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha)=\left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h:P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h(xy)=h(x)+h(y)$, $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h(x)=\ln_6 x$	Ορίζεται $e_6=b$ όπου b>1 τέτοιο ώστε $h(b)=1$. Αφού ορίστηκε η $\ln_6$ τότε $\left(\log_\alpha x\right)_6=\frac{\ln_6 x}{\ln_6\alpha}$

Τέλος στους πίνακες που ακολουθούν αποδεικνύεται η ισοδυναμία των τριγωνομετρικών ορισμών καθώς και αυτών της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ

Από Ορισμό 2 προς	Ορισμός 2 $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ και $f(0)=0$, $g(0)=1$
3. $f''(x)=-f(x)$	Ισχύει ότι $f''=(f')'=g'=-f$ και $f(0)=0$, $f'(0)=g(0)=1$ άρα $f(x)=\sin_2 x=\sin_3 x$. Επιπλέον $g''=(g')'=(-f)'=-g$ και $g(0)=1$, $g'(0)=-f(0)=0$ άρα $g(x)=\cos_2 x=\cos_3 x$
4. $\arctan_4 x=\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$	Αν $h(x)=(\cos_2 x-\cos_4 x)^2+(\sin_2 x-\sin_4 x)^2$ τότε $h'(x)=0$ και $h(0)=0$ άρα $h(x)=0$. Συνεπώς $\cos_2 x=\cos_4 x$ και $\sin_2 x=\sin_4 x$
5. $\arcsin_5 x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$	Όμοια με το προηγούμενο
6. $\varphi(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-u^2}du$	Όμοια με το προηγούμενο
7. $\sin_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, $x\in\mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο
8. $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)}{h}=1$ τότε ορίζονται	Οι συναρτήσεις $\cos_2, \sin_2$ λόγω του Θεωρήματος 3.2.7 και του 3.2.13 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_2 x=\sin_9 x$ και

$f(x)=\cos_9 x$ και $g(x)=\sin_9 x$	$\cos_2 x=\cos_9 x$

Από Ορισμό 3 προς	Ορισμός 3 $f''(x)=-f(x)$
2. $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ και $f(0)=0$, $g(0)=1$	Θέτοντας $g=f'$ προκύπτει $g'=f''=-f$
4. $\arctan_4 x=\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du$	Αν $h(x)=(\cos_3 x-\cos_4 x)^2+(\sin_3 x-\sin_4 x)^2$ τότε $h'(x)=0$ και $h(0)=0$ άρα $h(x)=0$. Συνεπώς $\cos_3 x=\cos_4 x$ και $\sin_3 x=\sin_4 x$
5. $\arcsin_5 x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$	Όμοια με το προηγούμενο
6. $\varphi(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1 \sqrt{1-u^2}du$	Όμοια με το προηγούμενο
7. $\sin_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, $x\in\mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο
8. $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)}{h}=1$ τότε ορίζονται $f(x)=\cos_9 x$ και $g(x)=\sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\cos_3, \sin_3$ λόγω του Θεωρήματος 3.7.7 και του 3.3.12 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_3 x=\sin_9 x$ και $\cos_3 x=\cos_9 x$

Από Ορισμό 4 προς	Ορισμός 4 $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$
2. $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$	Οι συναρτήσεις $\cos_4, \sin_4$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2 διότι έχει αποδειχθεί στον Ορισμό 4 ότι $(\cos_4 x)' = -\sin_4 x$, $(\sin_4 x)' = \cos_4 x$ καθώς και οτι $\cos_4 0 = 1$, $\sin_4 0 = 0$. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x = \sin_4 x$ και $\cos_2 x = \cos_4 x$
3. $f''(x) = -f(x)$	Οι συναρτήσεις $\sin_4$, $\cos_4$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι $\sin_3 x = \sin_4 x$ και $\cos_3 x = \cos_4 x$
5. $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	$\arctan_4 x = \arcsin_5 x$ καθώς και τα δύο εκφράζουν το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε γωνία θ όπως έχει αποδειχθεί στα Θεωρήματα 3.4.1 και 3.5.1
6. $\varphi(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-u^2} du$	Αν $h(x) = (\cos_4 x - \cos_6 x)^2 + (\sin_4 x - \sin_6 x)^2$ τότε $h'(x) = 0$ και $h(0) = 0$ άρα $h(x) = 0$. Συνεπώς $\cos_4 x = \cos_6 x$ και $\sin_4 x = \sin_6 x$
7. $\sin_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο

8. $\arctan_8 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	$\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u^{2k-2} =$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\kappa} x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan_8 x$
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε ορίζονται $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\cos_4, \sin_4$ λόγω του Θεωρήματος 3.4.14 και 3.4.18 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_4 x = \sin_9 x$ και $\cos_4 x = \cos_9 x$

Από Ορισμό 5 προς	Ορισμός 5 $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
2. $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$	Οι συναρτήσεις $\cos_5, \sin_5$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2 διότι έχει αποδειχθεί στον Ορισμό 5 ότι $(\cos_5 x)' = -\sin_5 x$, $(\sin_5 x)' = \cos_5 x$ καθώς και οτι $\cos_5 0 = 1$, $\sin_5 0 = 0$. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x = \sin_5 x$ και $\cos_2 x = \cos_5 x$
3. $f''(x) = -f(x)$	Οι συναρτήσεις $\cos_5, \sin_5$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι $\sin_3 x = \sin_5 x$ και $\cos_3 x = \cos_5 x$
4. $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$	$\arctan_4 x = \arcsin_5 x$ καθώς και τα δύο εκφράζουν το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε γωνία θ όπως έχει αποδειχθεί στα Θεωρήματα 3.4.1 και 3.5.1

6. $\varphi(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-u^2}du$	Αν $h(x)=(\cos_5 x-\cos_6 x)^2+(\sin_5 x-\sin_6 x)^2$ τότε $h^{'}(x)=0$ και $h(0)=0$ άρα $h(x)=0$. Συνεπώς $\cos_5 x=\cos_6 x$ και $\sin_5 x=\sin_6 x$
7. $\sin_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, x\in\mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο
8. $\arctan_8 x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)}{h}=1$ τότε ορίζονται $f(x)=\cos_9 x$ και $g(x)=\sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\cos_5, \sin_5$ λόγω του Θεωρήματος 3.5.8 και του 3.5.11 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_5 x=\sin_9 x$ και $\cos_5 x=\cos_9 x$

Από Ορισμό 6 προς	Ορισμός 6 $\varphi(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-u^2}du$
2. $f^{'}(x)=g(x)$ και $g^{'}(x)=-f(x)$ και $f(0)=0$, $g(0)=1$	Οι συναρτήσεις $\cos_6, \sin_6$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x=\sin_6 x$ και $\cos_2 x=\cos_6 x$
3. $f^{''}(x)=-f(x)$	Οι συναρτήσεις $\cos_6, \sin_6$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι $\sin_3 x=\sin_6 x$ και

	$\cos_3 x = \cos_6 x$
4. $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$	Αν $h(x) = (\cos_4 x - \cos_6 x)^2 + (\sin_4 x - \sin_6 x)^2$ τότε $h'(x) = 0$ και $h(0) = 0$ άρα $h(x) = 0$. Συνεπώς $\cos_4 x = \cos_6 x$ και $\sin_4 x = \sin_6 x$
5. $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	Όμοια με το προηγούμενο
7. $\sin_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο
8. $\arctan_8 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ και $\lim_{h \to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε ορίζονται $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\cos_6, \sin_6$ λόγω του Θεωρήματος 3.6.8 και του 3.6.10 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_6 x = \sin_9 x$ και $\cos_6 x = \cos_9 x$

Από Ορισμό 7 προς	Ορισμός 7 $\sin_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
2. $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$	Οι συναρτήσεις $\sin_7$ και $\cos_7$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2 διότι αν τις παραγωγίσουμε όρο προς όρο έπεται ότι $(\cos_7 x)' = -\sin_7 x$ και $(\sin_7 x)' = \cos_7 x$ καθώς και οτι $\sin_7 0 = 0$ και $\cos_7 0 = 1$. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x = \sin_7 x$ και

	$\cos_2 x = \cos_7 x$
3. $f''(x) = -f(x)$	Οι συναρτήσεις $\sin_7$ και $\cos_7$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι $\sin_3 x = \sin_7 x$ και $\cos_3 x = \cos_7 x$
4. $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$	Αν $h(x) = (\cos_4 x - \cos_7 x)^2 + (\sin_4 x - \sin_7 x)^2$ τότε $h'(x) = 0$ και $h(0) = 0$ άρα $h(x) = 0$. Συνεπώς $\cos_4 x = \cos_7 x$ και $\sin_4 x = \sin_7 x$
5. $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	Όμοια με το προηγούμενο
6. $\varphi(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-u^2} du$	Όμοια με το προηγούμενο
8. $\arctan_8 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ και $\lim_{h \to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε ορίζονται $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\cos_6, \sin_6$ λόγω του Θεωρήματος 3.7.4 και του 3.7.9 ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_6 x = \sin_9 x$ και $\cos_6 x = \cos_9 x$

Από Ορισμό 8 προς	Ορισμός 8 $\arctan_8 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$
2. $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$	Οι συναρτήσεις $\sin_8$ και $\cos_8$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2 . Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x = \sin_8 x$ και

	$\cos_2 x = \cos_8 x$
3. $f''(x) = -f(x)$	Οι συναρτήσεις $\sin_8$ και $\cos_8$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 3. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι $\sin_3 x = \sin_8 x$ και $\cos_3 x = \cos_8 x$
4. $\arctan_4 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$	Έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 3.8.2 ότι $(\arctan_8 x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Άρα $\int_0^x (\arctan_8 x)' = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$ δηλαδή $\arctan_8 x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \arctan_4 x$
5. $\arcsin_5 x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	Αν $h(x) = (\cos_8 x - \cos_5 x)^2 + (\sin_8 x - \sin_5 x)^2$ τότε $h'(x) = 0$ και $h(0) = 0$ άρα $h(x) = 0$. Συνεπώς $\cos_8 x = \cos_5 x$ και $\sin_8 x = \sin_5 x$
6. $\varphi(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-u^2} du$	Όμοια με το προηγούμενο
7. $\sin_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos_7 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο
9. Αν οι f, g ικανοποιούν την $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ και $\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)}{h} = 1$ τότε ορίζονται $f(x) = \cos_9 x$ και $g(x) = \sin_9 x$	Οι συναρτήσεις $\sin_8$ και $\cos_8$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 9. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.9.19 $\sin_8 x = \sin_9 x$ και $\cos_8 x = \cos_9 x$

Από Ορισμό 9 προς	Ορισμός 9 Αν οι f, g ικανοποιούν την $f\left(x-y\right)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ και $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{g\left(h\right)}{h}=1$ τότε ορίζονται $f\left(x\right)=\cos_9 x$ και $g\left(x\right)=\sin_9 x$
2. $f^{'}\left(x\right)=g\left(x\right)$ και $g^{'}\left(x\right)=-f\left(x\right)$ και $f\left(0\right)=0$, $g\left(0\right)=1$	Οι συναρτήσεις $\sin_9$ και $\cos_9$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2 . Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.2.3 ισχύει $\sin_2 x=\sin_9 x$ και $\cos_2 x=\cos_9 x$
3. $f^{''}\left(x\right)=-f\left(x\right)$	Οι συναρτήσεις $\sin_9$ και $\cos_9$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 2. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.3.3 ισχύει $\sin_3 x=\sin_9 x$ και $\cos_3 x=\cos_9 x$
4. $\arctan_4 x=\int_0^x\frac{1}{1+u^2}du$	Αν $h\left(x\right)=\left(\cos_4 x-\cos_9 x\right)^2+\left(\sin_4 x-\sin_9 x\right)^2$ τότε $h^{'}\left(x\right)=0$ και $h\left(0\right)=0$ άρα $h\left(x\right)=0$. Συνεπώς $\cos_4 x=\cos_9 x$ και $\sin_4 x=\sin_9 x$
5. $\arcsin_5 x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$	Όμοια με το προηγούμενο
6. $\varphi\left(x\right)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-u^2}du$	Όμοια με το προηγούμενο
7. $\sin_7 x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(2k+1\right)!}x^{2k+1}$, $\cos_7 x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(2k\right)!}x^{2k}$, $x\in\mathbb{R}$	Όμοια με το προηγούμενο

8. $\arctan_8 x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	Όμοια με το προηγούμενο

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΟΡΙΣΜΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Από Ορισμό 1 προς	Ορισμός 1. Αν $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n \to x$, τότε ορίζεται $(\alpha^x)_1 = \lim_{n\to\infty} \alpha^{q_n}$
2. $f'(x) = f(x)$	Έστω $h(x) = (\alpha^x)_1 (\alpha^{-x})_2$. Ισχύει ότι $h'(x) = 0$ και $h(0) = 1$ άρα $(\alpha^x)_1 = (\alpha^x)_2$ και $(e^x)_1 = (e^x)_2$, συνεπώς $\ln_1 x = \ln_2 x$. Από το Θεώρημα 4.1.12 και τον Ορισμό 4.2.12 $(\log_\alpha x)_1 = (\log_\alpha x)_2$.
3. $\ln_3 x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$	Όμοια με το προηγούμενο
4. $(e^x)_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$	Όμοια με το προηγούμενο
5. $\ln_5(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ $-1 < x \le 1$	Όμοια με το προηγούμενο
6. Αν η g ικανοποιεί την $g(x+y) = g(x)g(y)$, (1) και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g(x) = (\alpha^x)_7 = \sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha) = \{\alpha^r : r \in \mathbb{Q}, r \le x\}$. Επιπλέον αν η $h : P \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί την	Λόγω του Θεωρήματος 4.1.7 η $y = (\alpha^x)_1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.6.7 έπεται ότι $(\alpha^x)_1 = (\alpha^x)_6$ Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 4.1.11 η $y = \ln_1 x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται στον Ορισμό 6 έπεται ότι $\ln_1 x = \ln_2 x$ άρα $(\log_\alpha x)_1 = (\log_\alpha x)_2$.

$h(xy)=h(x)+h(y)$, (2) $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h(x)=\ln_6 x$	

Από Ορισμό 2 προς	Ορισμός 2 $f^{'}(x)=f(x)$
1. Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$	Έστω $h(x)=\left(\alpha^x\right)_1\left(\alpha^{-x}\right)_2$. Ισχύει ότι $h^{'}(x)=0$ και $h(0)=1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_1=\left(\alpha^x\right)_2$ και $\left(e^x\right)_1=\left(e^x\right)_2$ συνεπώς και $\ln_1 x=\ln_2 x$. Από το Θεώρημα 4.1.12 και τον Ορισμό 4.2.12, $\left(\log_\alpha x\right)_1=\left(\log_\alpha x\right)_2$
3. $\ln_3 x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$	Όμοια με το προηγούμενο
4. $\left(e^x\right)_4=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$	Όμοια με το προηγούμενο
5. $\ln_5(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ $-1<x\le 1$	Όμοια με το προηγούμενο
6. Αν η g ικανοποιεί την $g(x+y)=g(x)g(y)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g(x)=\left(\alpha^x\right)_6=\sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha)=\left\{\alpha^r:r\in\mathbb{Q},r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h:P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h(xy)=h(x)+h(y)$, $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε	Λόγω του Θεωρήματος 4.2.11 η $y=\left(\alpha^x\right)_2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.6.7 έπεται ότι $\left(\alpha^x\right)_2=\left(\alpha^x\right)_6$. Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 4.2.9 η $y=\ln_2 x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται στον Ορισμό 6 έπεται ότι $\ln_2 x=\ln_6 x$. Λόγω των Ορισμών 4.2.12 και 4.6.16

$h(x)=\ln_6 x$	$(\log_\alpha x)_2=(\log_\alpha x)_6$

Από τον Ορισμό 3 προς	Ορισμός 3 $\ln_3 x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$
1. Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε ορίζεται $(\alpha^x)_1=\lim_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$	Έστω $h(x)=(\alpha^x)_1(\alpha^{-x})_3$. Ισχύει ότι $h'(x)=0$ και $h(0)=1$ άρα $(\alpha^x)_1=(\alpha^x)_3$ και $(e^x)_1=(e^x)_3$ συνεπώς και $\ln_1 x=\ln_3 x$. Από το Θεώρημα 4.1.12 και τον Ορισμό 4.3.12, $(\log_\alpha x)_1=(\log_\alpha x)_3$
2. $f'(x)=f(x)$	Αν $h(x)=\ln_2 x-\ln_3 x$ τότε $h'(x)=0$ και $h(1)=0$ άρα $\ln_2 x=\ln_3 x$. Λόγω των Ορισμών 4.2.12 και 4.3.9 έπεται ότι $(\log_\alpha x)_2=(\log_\alpha x)_3$. Επιπλέον στον Ορισμό 4.3 έχει αποδειχθεί ότι $(e^x)_3'=(e^x)_3$ και $(e^0)_3=1$ άρα λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι $(e^x)_2=(e^x)_3$. Λόγω των Ορισμών 4.2.10 και 4.3.7 έπεται ότι $(\alpha^x)_2=(\alpha^x)_3$
4. $(e^x)_4=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$	Έστω $h(x)=(\alpha^x)_3(\alpha^{-x})_4$. Ισχύει ότι $h'(x)=0$ και $h(0)=1$ άρα $(\alpha^x)_3=(\alpha^x)_4$ και $(e^x)_3=(e^x)_4$ συνεπώς $\ln_3 x=\ln_4 x$. Από τον Ορισμό 4.3.9 και τον 4.4.8, $(\log_\alpha x)_3=(\log_\alpha x)_4$
5. $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ $-1<x\le 1$	Όμοια με το προηγούμενο
6. Αν η g ικανοποιεί την	Λόγω του Θεωρήματος 4.3.11 η $y=(\alpha^x)_3$

$g(x+y)=g(x)g(y)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g(x)=\left(\alpha^x\right)_6=\sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha)=\left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h:P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h(xy)=h(x)+h(y)$, $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h(x)=\ln_6 x$	ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.6.7 έπεται ότι $\left(\alpha^x\right)_3=\left(\alpha^x\right)_6$ Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 4.3.2 η $y=\ln_3 x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται στον Ορισμό 6, έπεται ότι $\ln_3 x=\ln_6 x$. Λόγω των Ορισμών 4.3.9 και 4.6.16 έπεται ότι $\left(\log_\alpha x\right)_3=\left(\log_\alpha x\right)_6$

Από τον Ορισμό 4 προς	Ορισμός 4 $\left(e^x\right)_4=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$
1. Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$	Έστω $h(x)=\left(\alpha^x\right)_1\left(\alpha^{-x}\right)_4$. Ισχύει ότι $h'(x)=0$ και $h(0)=1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_1=\left(\alpha^x\right)_4$ και $\left(e^x\right)_1=\left(e^x\right)_4$, συνεπώς και $\ln_1 x=\ln_4 x$. Από το Θεώρημα 4.1.12 και τον Ορισμό 4.4.8, $\left(\log_\alpha x\right)_1=\left(\log_\alpha x\right)_4$
2. $f'(x)=f(x)$	Με παραγώγιση όρο προς όρο έπεται ότι $\left(e^x\right)_4'=\left(e^x\right)_4$. Ακόμη $\left(e^0\right)_4=1$, συνεπώς η $y=\left(e^x\right)_4$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 4.2. Όμως λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.2.3, έπεται ότι $\left(e^x\right)_2=\left(e^x\right)_4$ συνεπώς και $\ln_2 x=\ln_4 x$. Λόγω των Ορισμών 4.2.10 και

	4.4.7, $\left(\alpha^{x}\right)_2=\left(\alpha^{x}\right)_4$ και λόγω των Ορισμών 4.2.12 και 4.4.8, $\left(\log_\alpha x\right)_2=\left(\log_\alpha x\right)_4$
3. $\ln_3 x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$	Αν $h(x)=\ln_3 x-\ln_4 x$ τότε $h'(x)=0$ και $h(1)=0$ άρα $\ln_3 x=\ln_4 x$, συνεπώς και $\left(e^{x}\right)_3=\left(e^{x}\right)_4$. Λόγω των Ορισμών 4.3.7 και 4.4.7, $\left(\alpha^{x}\right)_3=\left(\alpha^{x}\right)_4$ και λόγω των Ορισμών 4.3.9 και 4.4.8, $\left(\log_\alpha x\right)_3=\left(\log_\alpha x\right)_4$
5. $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ $-1<x\le 1$	Όμοια με το προηγούμενο
6. Αν η g ικανοποιεί την $g(x+y)=g(x)g(y)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g(x)=\left(\alpha^{x}\right)_6=\sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha)=\left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h:P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h(xy)=h(x)+h(y),\ x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h(x)=\ln_6 x$	Λόγω του Θεωρήματος 4.4.7 η $y=\left(\alpha^{x}\right)_4$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.6.7 έπεται ότι $\left(\alpha^{x}\right)_4=\left(\alpha^{x}\right)_6$. Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 4.4.6 η $y=\ln_3 x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται στον Ορισμό 6 έπεται ότι $\ln_4 x=\ln_6 x$. Λόγω των Ορισμών 4.4.8 και 4.6.16 έπεται ότι $\left(\log_\alpha x\right)_4=\left(\log_\alpha x\right)_6$

Από τον Ορισμό 5 προς	Ορισμός 5 $\ln_5(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ $-1<x\le 1$
1 . Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q_n\to x$, τότε ορίζεται	Έστω $h(x)=\left(\alpha^{x}\right)_1\left(\alpha^{-x}\right)_5$. Ισχύει ότι

$\left(\alpha^x\right)_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{q_n}$	$h^{'}(x)=0$ και $h(0)=1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_1 = \left(\alpha^x\right)_4$ και $\left(e^x\right)_1 = \left(e^x\right)_4$, συνεπώς $\ln_1 x = \ln_4 x$. Εύκολα προκύπτει ότι $\left(\log_\alpha x\right)_1 = \left(\log_\alpha x\right)_4$
2. $f^{'}(x) = f(x)$	Η $y=\left(e^x\right)_5$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 4.2. Όμως λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι $\left(e^x\right)_2 = \left(e^x\right)_5$ συνεπώς και $\ln_2 x = \ln_5 x$. Με όμοιο τρόπο, όπως στην ισοδυναμία του Ορισμού 4 προς 3 αποδεικνύεται ότι $\left(\alpha^x\right)_2 = \left(\alpha^x\right)_5$ και $\left(\log_\alpha x\right)_2 = \left(\log_\alpha x\right)_5$
3. $\ln_3 x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$	Αν $h(x) = \ln_3 x - \ln_5 x$ τότε $h^{'}(x)=0$ και $h(1)=0$ άρα $\ln_3 x = \ln_5 x$, συνεπώς $\left(e^x\right)_3 = \left(e^x\right)_5$. Με όμοιο τρόπο, όπως στην ισοδυναμία του Ορισμό 4 προς 3 αποδεικνύεται ότι $\left(\alpha^x\right)_3 = \left(\alpha^x\right)_5$ και $\left(\log_\alpha x\right)_3 = \left(\log_\alpha x\right)_5$
4. $\left(e^x\right)_4 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$	Όμοια με το προηγούμενο
6. Αν η g ικανοποιεί την $g(x+y)=g(x)g(y)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g(x) = \left(\alpha^x\right)_6 = \sup T_x(\alpha)$ όπου $T_x(\alpha) = \left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h: P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την	Στον Ορισμό 5, έχει αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $y=\left(\alpha^x\right)_5$ και $y=\left(\log_\alpha x\right)_5$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Ορισμού 6 και λόγω της μοναδικότητας έπεται ότι $\left(\alpha^x\right)_5 = \left(\alpha^x\right)_6$ και $\left(\log_\alpha x\right)_5 = \left(\log_\alpha x\right)_6$

$h\left(xy\right)=h(x)+h(y)$, $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h\left(x\right)=\ln_6 x$	

Από τον Ορισμό 6 προς	Ορισμός 6 Αν η g ικανοποιεί την $g\left(x+y\right)=g\left(x\right)g\left(y\right)$ και είναι συνεχής στο x=0 τότε ορίζεται $g\left(x\right)=\left(\alpha^x\right)_6=\sup T_x\left(\alpha\right)$ όπου $T_x\left(\alpha\right)=\left\{\alpha^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\right\}$. Επιπλέον αν η $h:P\to\mathbb{R}$, ικανοποιεί την $h\left(xy\right)=h(x)+h(y)$, $x,y\in P$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ τότε $h\left(x\right)=\ln_6 x$
1. Αν $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $q_n\to x\in Q$, τότε ορίζεται $\left(\alpha^x\right)_1=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{q_n}$	Έστω $h\left(x\right)=\left(\alpha^x\right)_1\left(\alpha^{-x}\right)_6$. Ισχύει ότι $h^{'}\left(x\right)=0$ και $h\left(0\right)=1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_1=\left(\alpha^x\right)_6$. Έστω $\varphi\left(x\right)=\ln_1 x-\ln_6 x$. Ισχύει ότι $\varphi^{'}\left(x\right)=0$ και $\varphi\left(1\right)=0$ άρα $\ln_1 x=\ln_6 x$ και $\left(\log_\alpha x\right)_1=\left(\log_\alpha x\right)_6$
2. $f^{'}\left(x\right)=f\left(x\right)$	Η $y=\left(e^x\right)_6$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 2 και λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.2.3, έπεται ότι $\left(\alpha^x\right)_2=\left(\alpha^x\right)_6$. Επιπλέον έστω $\varphi\left(x\right)=\ln_2 x-\ln_6 x$. Ισχύει ότι $\varphi^{'}\left(x\right)=0$ και $\varphi\left(1\right)=0$ άρα $\ln_2 x=\ln_6 x$. Λόγω των Ορισμών 4.2.12 και 4.6.16 $\left(\log_\alpha x\right)_2=\left(\log_\alpha x\right)_6$
3. $\ln_3 x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$	Έστω $h\left(x\right)=\left(\alpha^x\right)_3\left(\alpha^{-x}\right)_6$. Ισχύει ότι $h^{'}\left(x\right)=0$ και $h\left(0\right)=1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_3=\left(\alpha^x\right)_6$. Επιπλέον ισχύει ότι $\left(\ln_6 x\right)^{'}=\frac{1}{x}$ άρα $\ln_6 x=\int_1^x\frac{1}{t}dt+c$ και $c=0$

	αφού $\ln_6 1 = 0$. Άρα $\ln_3 x = \ln_6 x$. Λόγω των Ορισμών 4.3.9 και 4.6.16 έπεται ότι $\left(\log_\alpha x\right)_3 = \left(\log_\alpha x\right)_6$
4. $\left(e^x\right)_4 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\kappa!}$	Έστω $h(x) = \left(\alpha^x\right)_4 \left(\alpha^{-x}\right)_6$. Ισχύει ότι $h^{'}(x) = 0$ και $h(0) = 1$ άρα $\left(\alpha^x\right)_4 = \left(\alpha^x\right)_6$. Έστω $\varphi(x) = \ln_4 x - \ln_6 x$. Ισχύει ότι $\varphi^{'}(x) = 0$ και $\varphi(1) = 0$ άρα $\ln_1 x = \ln_6 x$. Συνεπώς $\left(\log_\alpha x\right)_1 = \left(\log_\alpha x\right)_6$, λόγω των Ορισμών 4.3.9 και 4.6.16
5. $\ln_5(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ $-1 < x \le 1$	Όμοια με το προηγούμενο

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αρίσταρχος ο Σάμιος, *Περί μεγεθών και αποστημάτων*.

2. Αρχιμήδης, *Κύκλου μέτρησης*.

3. Γ. Ν. Βρατσάνος, *Αρχαία Ελληνική Τριγωνομετρία*, Εκδόσεις Δίαυλος, 2006.

4. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley international edition, 1968.

5. Rev. Ebenezer Burgess, *Translation of Surya Siddhanta*,1858.

6. Bob Burn, *The Mathematical Gazette*, Vol. 84, No.501.

7. Robert G. Batle, Donald R. Sherbert, *Indroduction to Real Analysis*, John Wiley sons, 1992.

8. Richard Beals, *Advanced Analysis*, Springer, 1973.

9. R.G Bartle, *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1964.

10. J.C. Burkili, *A first Course in Mathematics Analysis*, Cambridge university, Cambridge 1962.

11. K.G Binmore, *Mathematical Analysis*, Cup, 1977.

12. Florian Cajori, *William Oughtred, A Great Seventeenth Century Teacher Of Mathematics*, 1916.

13. Florian Cajori, *History of Exponential and Logarithmic concepts*, The American Mathematical Monthly, vol. XX, 1913.

14. Julian Lowell Coolidge, *The Mathematics Of Great Amateurs*, Dover Publications, 1963.

15. W. Dunham, *Euler the Master of us all*, The Mathematical Association of America.

16. Ευκλείδης, *Στοιχεία*.

17. Ευκλείδης, *Δεδομένα*.

18. Ευκλείδης, *Οπτικά*.

19. Ευκλείδης Γ.

20. E. Fisher, *Intermmediate Real Analysis*, Springer, 1983.

21. Γ.Θωμαίδης, *Μαθηματικής Επιθεώρησης*, τ. 24, Ε.Μ.Ε., 1981.

22. Γ.Θωμαίδης, *Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας, Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Ευκλείδης Γ, τεύχος 13.

23. G. H. Hardy, *A Course Of Pure Mathematics*, Third Edition, Cambringe at the University Press, 1921.

24. Barnabas Hughes, *Johann Muller, De triangulis omnimodis,* O.F.M., 1967.

25. R.Johnsonbaugh, W.E.Pfaffenb, *Foundation of Mathematical Analysis.*

26. G.R. Kaye, *Indian mathematics*, Issis, vol. 2, 1914.

27. Victor Katz, *A History of Mathematics An indroduction*, Second Edition, Addison Educational Publishers, 1998.

28. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Volume 2.

29. G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Α΄, Ε.Μ.Ε., 1971.

30. Serge Lang, *Undergraduate Analysis*, Springer, 1983.

31. Jonathan Lewin, Myetle Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*, Mc Gram Hill, 1993.

32. Eli Maor, *Τριγωνομετρικά λουκούμια*, Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

33. W.R. Macdonald, *John Napier, The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, Edinburg and London, 1889.

34. Πτολεμαίος, *Μέγιστη Σύνταξη*.

35. Μ. Παπαδημητράκης, *Απειροστικός Λογισμός, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*.

36. Ανδρέα Πούλου, *Συναρτησιακές εξισώσεις*, Εκδόσεις Αίθρα 1996.

37. M.H. Protter, C.M. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1991.

38. Javad Hamadanizadeh Sharif, *The Trigonometric Tables of Al Kashi in Zij-I Khaquani*, Historia Mathematica 7, 1980.

39. David Eugene Smith, *A Source Book In Mathematics*, First Edition.

40. Michaele Stifelio, *Arithmeti Ca Integra*.

41. Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

42. Ε.Σταμάτης, Μετάφραση, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος Γ΄, Έκδ. Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι, 1970.

43. Δ. Τσιμπουράκης, *Η Τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα*, Εκδόσεις Ατραπός.

44. Mac. Tutor, *History of Mathematics*, University of St. Andrews.

45. H.E Vanganian, *Characterization of the sine and cosine*, American Mathematical Monthly, 62, 1955.