ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΔΡΕΑ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

6 Δεκεμβρίου 2006

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1 ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΕΝΙΚΑ

Η Γεωμετρία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς όλες τις στερεές κινήσεις. Λέγοντας στερεή κίνηση εννοούμε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου ή του χώρου που διατηρούν την απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων, τις λεγόμενες ισομετρίες. Αυτοί είναι οι λεγόμενοι *Ευκλείδειοι Μετασχηματισμοί*. Η βασική έννοια της ισότητας στην Γεωμετρία έχει άμεση σχέση με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Δύο σχήματα του επιπέδου, για παράδειγμα, λέμε ότι είναι *ίσα* (ισοδύναμα ίσως θα ήταν η λέξη που αποδίδει ακριβέστερα το ίδιο νόημα), αν μπορούμε να τα φέρουμε σε ταύτιση μέσω μιάς κατάλληλης κίνησης. Ποιά είναι όμως αυτή η έννοια της κίνησης; Μπορεί άραγε αυτή η κίνηση να γίνει πάντα χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το σχήμα μας από το επίπεδο;

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ-ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Ορισμός 1.1 (**ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ**) Ονομάζουμε *Μετασχηματισμό*, κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση T ενός συνόλου A σε ενα άλλο σύνολο B.

$$f : A \longrightarrow B$$

Αν αναφερόμαστε σε σύνολα σημείων, δηλαδή υποσύνολα του *Γεωμετρικού Χώρου*, τότε έχουμε ένα *Σημειακό Μετασχηματισμό*.

Ορισμός 1.2 (**ΟΜΟΛΟΓΑ ΣΗΜΕΙΑ**) Αν ένα σημείο A απεικονίζεται μέσω ενός μετασχηματισμού T σε ένα σημείο A*, τα σημεία αυτά λέγονται ομόλογα σημεία του μετασχηματισμού αυτού.

Ορισμός 1.3 (**ΔΙΠΛΑ ΣΗΜΕΙΑ-ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ**) Αν η εικόνα ενός σημείου A ταυτίζεται με τον εαυτό του, τότε το A λέγεται *διπλό ή σταθερό σημείο* του μετασχηματισμού. Ένα σχήμα που απεικονίζεται στον εαυτό του, το ονομάζουμε *αναλλοίωτο σχήμα* του μετασχηματισμού.

Ορισμός 1.4 (**ΤΑΥΤΟΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ**) Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο στον εαυτό του, ονομάζεται *ταυτοτικός μετασχηματισμός*.

Ορισμός 1.5 (**ΕΝΕΛΕΙΚΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ**) Ένας μετασχηματισμός T θα ονομάζεται ενελεικτικός (*involutoric*) αν έχει την ιδιότητα T=T^{-1}

1.2 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Στα επόμενα θα μας απασχολήσουν οι 1-1 και επί μετασχηματισμοί του διδιάστατου Ευκλείδειου επιπέδου R^2 στον εαυτό του

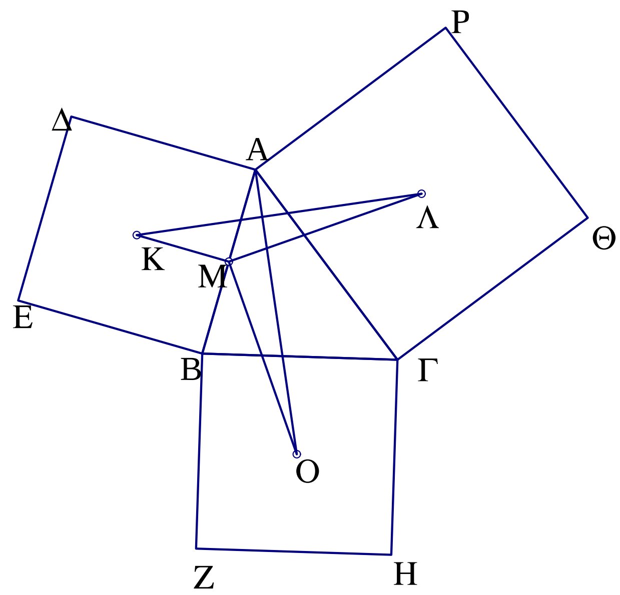
$$f : R^2 \longrightarrow R^2$$

Δηλαδή απεικονίζουμε κάθε ένα σημείο του R^2 σε ένα άλλο σημείο του. Πρώτα θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς του επιπέδου που διατηρούν την Ευκλείδεια απόσταση, τις *Ισομετρίες* δηλαδή του επιπέδου η διαφορετικά τους *Ευκλείδειους Μετασχηματισμούς*. Στην συνέχεια, θα δούμε τους Μετασχηματισμούς Ομοιότητας, δηλαδή τους μετασχηματισμούς εκείνους που διατηρούν τις γωνίες και τους λόγους των αποστάσεων ζευγών σημείων.

1.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ας δούμε τρία κλασσικά προβλήματα που μπορούν να αντιμετωπιστούν στα πλαίσια του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στην Μέση Εκπαίδευση. Στην συνέχεια θα δούμε πώς θα καταστεί δυνατό μέσα από την μελέτη των ιδιοτήτων των παραπάνω μετασχηματισμών, να δούμε τα προβλήματα αυτά από διαφορετική σκοπιά και γιά να λυθούν πολύ απλούστερα, αλλά κυρίως να μελετήσουμε εύκολα γενικεύσεις των προβλημάτων αυτών.

Πρόβλημα 1.1 Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, όταν δίνονται τα κέντρα των τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές του και εξωτερικά αυτού.

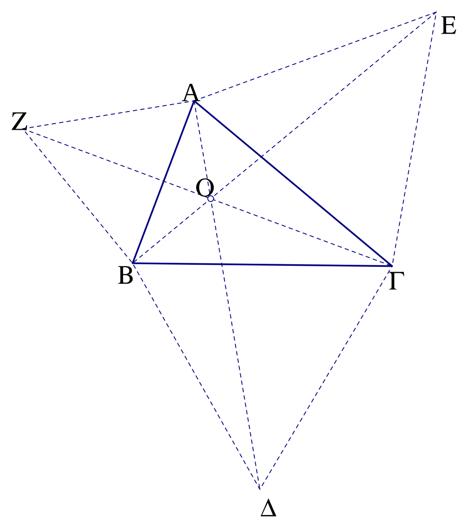


Σχήμα 1: Τετράγωνα

Απόδειξη:
Έστω Κ, Λ και Ο τα κέντρα των τετραγώνων με αντίστοιχες πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ (Σχήμα 1). Αν θεωρήσουμε το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ, μπορούμε να δώσουμε μία απόδειξη όπως φαίνεται στο σχήμα, αποδεικνύοντας ότι τα ΜΟ και ΜΛ είναι κάθετα και ίσα η ότι ΑΟ και ΚΛ είναι κάθετα και ίσα.

Πρόβλημα 1.2 Να κατασκευαστεί τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρείς κορυφές ισοπλεύρων τριγώνων που κατασκευάζονται εξωτερικά του ζητούμενου τριγώνου στις πλευρές αυτού.

Απόδειξη:
Εδώ αποδεικνύεται ότι οι γωνίες ΔΟΕ, ΕΟΖ και ΖΟΔ είναι ίσες με 120^o, καθώς επίσης ότι

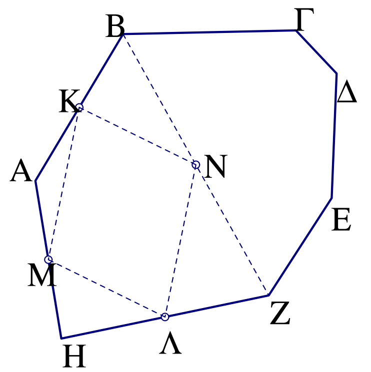


Σχήμα 2: Ισόπλευρα τρίγωνα

ΟΑ+ΟΒ=ΟΖ, ΟΒ+ΟΓ=ΟΔ και ΟΓ+ΟΑ=ΟΕ, οπότε ΟΑ=$\frac{1}{2}$(ΟΖ+ΟΕ-ΟΔ). Έτσι προσδιορίζονται πρώτα το Ο και στην συνέχεια οι κορυφές του ζητούμενου τριγώνου.(Σχήμα 2)

Πρόβλημα 1.3 Να κατασκευαστεί επτάγωνο όταν δίνονται τα μέσα των πλευρών του.

Απόδειξη:
Έστω ΑΒΓΔΕΖΗ το ζητούμενο επτάγωνο. Τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΖΗ είναι κορυφές παραλληλογράμμου το οποίο επομένως κατασκευάζεται. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται σε ανάλογο για πεντάγωνο και με όμοιο τρόπο το ανάγουμε σε τρίγωνο (Σχήμα 3).

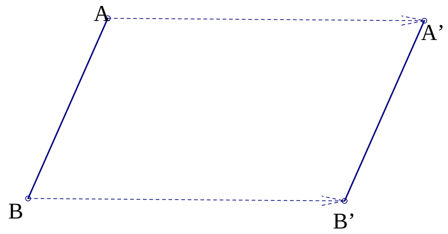


Σχήμα 3: ΚΝΛΜ παραλληλόγραμμο

Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα προηγούμενα προβλήματα όπως και πολλά άλλα, σαν ειδικές περιπτώσεις μιας γενικότερης κατηγορίας προβλημάτων τα οποία αντιμετωπίζονται με ένα ενιαίο τρόπο με την βοήθεια των ισομετριών. Τέτοιες είναι οι (παράλληλες) *μεταφορές*, οι κατοπτρισμοί (ή ανακλάσεις ή αξονικές συμμετρίες) και οι *στροφές*, ειδική περίπτωση των οποίων είναι οι *ημιστροφές* ή συμμετρίες ως προς σημείο.

2 ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

2.1 ΜΕΤΑΦΟΡΑ

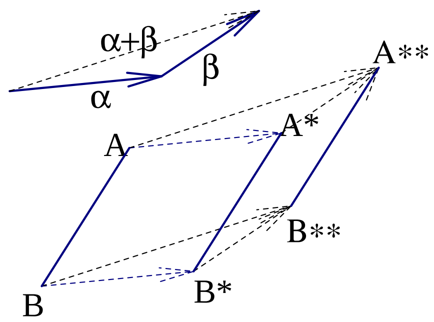


Σχήμα 4: Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Ορισμός 2.1 Η μεταφορά T_α ορίζεται από ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μεταφέρει όλα τα σημεία ενός σχήματος κατά αυτό το διάνυσμα.

Εύκολα προκύπτει ότι η εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος AB είναι ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα A′B′ ίσο και παράλληλο προς το AB (Σχήμα 4). Γενικότερα, μία μεταφορά διατηρεί την κατεύθυνση και το μέγεθος των σχημάτων.

Πρόταση 2.1 (**Σύνθεση μεταφορών**) Η σύνθεση $T_\beta \circ T_\alpha$ δύο μεταφορών με αντίστοιχα



Σχήμα 5: Σύνθεση μεταφορών

διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι επίσης μία μεταφορά T_v κατά διάνυσμα $\vec{v}$ ίσο με το άθροισμα των δύο αυτών διανυσμάτων:

$$\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

(Σχήμα 5)

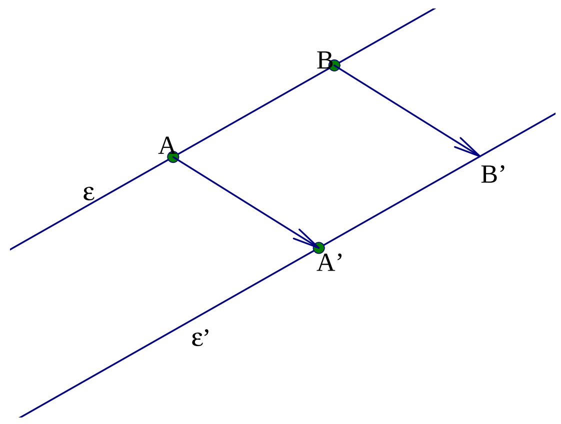
Απόδειξη:
Πράγματι, τα AB και A**B** είναι παράλληλα και ίσα, άρα το δεύτερο προκύπτει από μεταφορά του πρώτου κατά διάνυσμα $\vec{AA^{**}}$ το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Προφανώς η σύνθεση περισσοτέρων των δύο μεταφορών είναι μεταφορά διανύσματος ίσου με το άθροισμα των διανυσμάτων όλων των μεταφορών.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός:
Υπάρχει πάντα ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιάς μεταφοράς T_α που είναι μεταφορά αντιθέτου διανύσματος του $\vec{\alpha}$.

$$T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$$

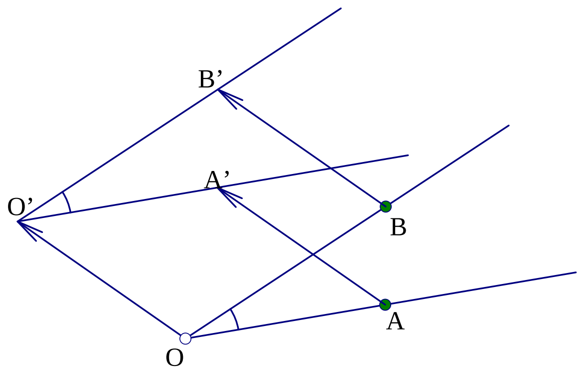
Ορισμός μεταφοράς από ζεύγος ομόλογων σημείων. Δίνονται σημείο Α, καθώς και η εικόνα αυτού Α* μέσω κάποιας μεταφοράς T_α. Τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ της μεταφοράς είναι ίσο με $A\vec{A}*$

Παραδείγματα μεταφοράς απλών σχημάτων



Σχήμα 6: Μεταφορά ευθείας

Η εικόνα ευθείας ε μέσω μεταφοράς, είναι ευθεία ε′ παράλληλη της ε που κατασκευάζεται από τις εικόνες δύο τυχαίων σημείων Α και Β της ε (Σχήμα 6).

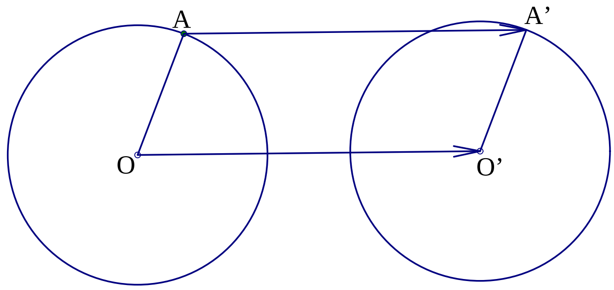


Σχήμα 7: Μεταφορά γωνίας

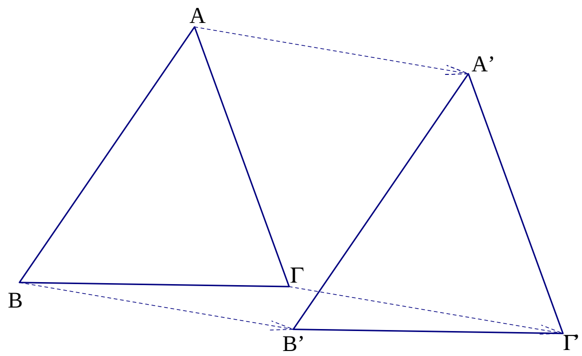
Η εικόνα γωνίας Ο μέσω μεταφοράς, είναι γωνία Ο′ ίση της Ο με πλευρές παράλληλες των αντίστοιχων της Ο, που κατασκευάζονται από τις εικόνες δύο τυχαίων σημείων Α και Β των πλευρών της Ο καθώς και την εικόνα Ο′ της κορυφής Ο. (Σχήμα 7).
Η εικόνα κύκλου (Ο,ρ) μέσω μεταφοράς, είναι κύκλος (Ο′,ρ) ίσης ακτίνας, με κέντρο την εικόνα του Ο. Κατασκευάζεται μέ τη βοήθεια της εικόνας της τυχαίας ακτίνας ΟΑ (Σχήμα 8)
Η εικόνα τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο τρίγωνο με πλευρές παράλληλες του αρχικού. Κατασκευάζεται από τις εικόνες των τριών κορυφών του (Σχήμα 9).

2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 2.1 Δίνονται δύο κύκλοι (K, r_1) και (O, r_2) και ένα ευθύγραμμο τμήμα α. Να βρεθεί ευθεία παράλληλη του α, ώστε η απόσταση των σημείων τομής της με τους δύο κύκλους να έχει τιμή το μήκος του α.



Σχήμα 8: Μεταφορά κύκλου



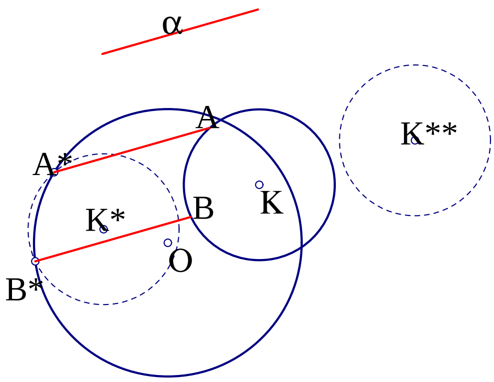
Σχήμα 9: Μεταφορά τριγώνου

Απόδειξη:
Κάνουμε μεταφορά του κύκλου (K, r_1) κατά διάνυσμα μέτρου α, επιλέγοντας μία από τις δύο κατευθύνσεις που ορίζει το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Έστω (K^*, r_1) και (K^{**}, r_1) οι εικόνες των δύο μεταφορών. Κάθε τομή αυτών των εικόνων με τον δεύτερο δοθέντα κύκλο μας δίνει και μία λύση του προβλήματος [1]. (Στην περίπτωση του Σχήματος 10 έχουμε δύο λύσεις).

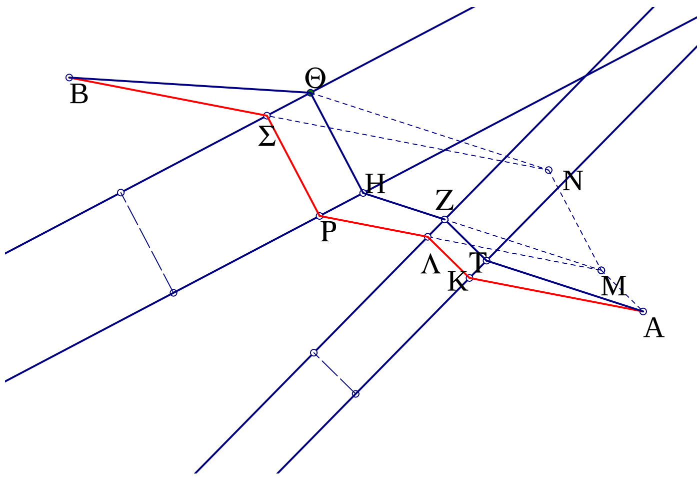
Πρόβλημα 2.2 Να βρεθεί το σημείο όπου πρέπει να χτιστεί μία γέφυρα σε ένα ποτάμι που χωρίζει δύο πόλεις ώστε η διαδρομή από τη μία στην άλλη να είναι η συντομότερη δυνατή. Γενικότερα να λυθεί το ίδιο πρόβλημα όταν οι δύο πόλεις χωρίζονται από πολλά ποτάμια.

Απόδειξη:
Ας δούμε την περίπτωση με δύο γέφυρες (όμοια αντιμετωπίζεται η γενικότερη). Έστω Α και Β οι δύο πόλεις και ΚΛ, ΡΣ τα πλάτος των δύο ποταμιών. (Σχήμα 11) Κάνουμε μεταφορά του σημείου Α κατά διάνυσμα $\overline{K\Lambda}$ και μετά κατά διάνυσμα $\overline{P\Sigma}$. Έστω Ν η εικόνα του Α μέσω αυτών των μεταφορών και Σ η τομή της ΒΝ με την πλησιέστερη στο Β παράλληλη. Αν ΡΛ//ΑΚ//ΒΝ, η διαδρομή ΑΚΛΡΣΒ είναι η ζητούμενη, καθώς τα τμήματα ΚΛ και ΡΣ είναι τα σταθερά πλάτη των ποταμών και το άθροισμα ΑΚ+ΛΡ+ΣΒ ισούται με το μήκος ΒΝ το οποίο είναι η ελάχιστη διαδρομή από το Β στο Ν. Βλέπουμε ότι κάθε άλλη διαδρομή όπως η ΑΤΖΗΘΒ είναι μεγαλύτερη της ΑΚΛΡΣΒ, καθώς $BK\Theta + \Theta N \geq BN$, όπου ΑΤ//ΖΗ//ΝΘ και ΑΤ+ΖΗ=ΝΘ [1].

Πρόβλημα 2.3 Έστω Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ. Αν Κ, Ο και Λ είναι τα κέντρα των περιγεγγραμμένων και Ι, Σ και Ρ



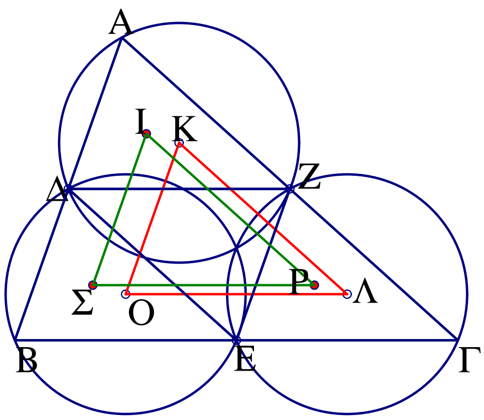
Σχήμα 10: Μεταφορά κύκλου



Σχήμα 11: Γέφυρες

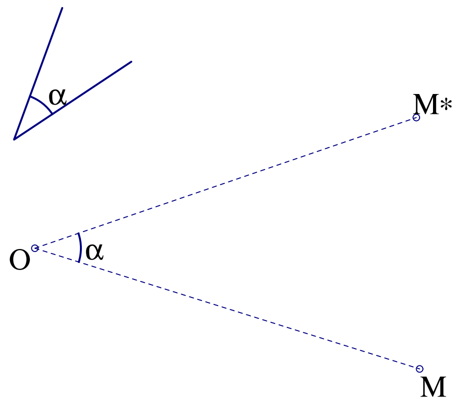
των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΕΖ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΚΛΟ και ΙΡΠ είναι ίσα [1].

Απόδειξη:
Τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΕΖ είναι ίσα και το κάθε ένα από αυτά πρκύπτει από μεταφορά ενός από τα άλλα δύο κατά διάνυσμα μέτρου ίσου με το μισό μιάς πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα και τα αντίστοιχα περικεντρα και έκκεντρα των παραπάνω τριγώνων, θα είναι κορυφές τριγώνων ΚΛΟ και ΙΡΠ με πλευρές ίσες με τα μέτρα των προηγούμενων μεταφορών (Σχήμα 12).



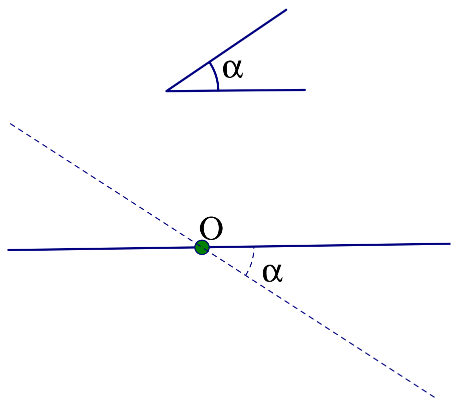
Σχήμα 12: τριγ.ΚΟΛ=τριγ.ΙΣΡ

2.3 ΣΤΡΟΦΗ



Σχήμα 13: Στροφή περί το O κατά γωνία α

Ορισμός 2.2 Έστω σταθερό σημείο O στο επίπεδο και προσανατολισμένη γωνία $\widehat{\alpha}$. Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, σχηματίζομε την γωνία $\angle MOM^*$,ίση προς την $\widehat{\alpha}$, με OM=OM*. Το σημείο M* είναι η εικόνα της στροφής $R_{(O,\alpha)}$ κέντρου O και γωνίας $\widehat{\alpha}$ (Σχήμα 13).

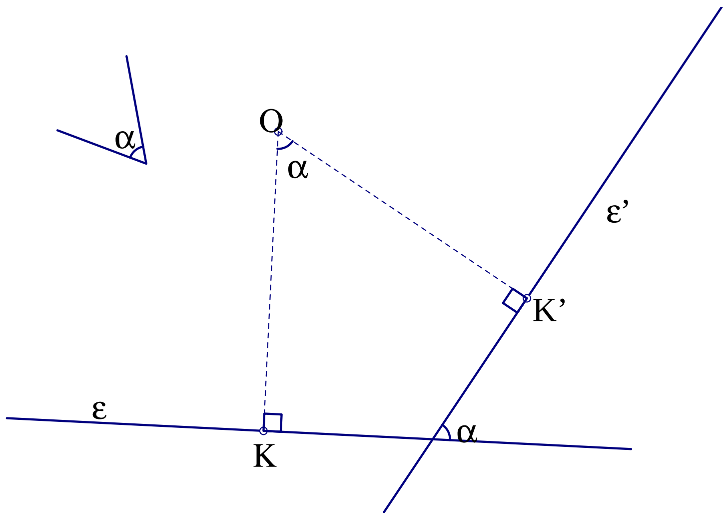


Σχήμα 14: Στροφή ευθείας περί το O

Αντίστροφος Μετασχηματισμός:
Η στροφή κέντρου O και γωνίας ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με την α, απεικονίζει το σημείο M* στο M. Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός $R^{-1}_{(O,\alpha)}$ είναι στροφή $R_{(O,-\alpha)}$ ίδιου κέντρου και αντίθετης γωνίας.

Η εικόνα ευθείας ε διερχόμενης από το κέντρο στροφής O είναι ευθεία ε′ διερχόμενη από το O, που σχηματίζει με την ε γωνία ίση με την γωνία στροφής (Σχήμα 14).

Παραδείγματα στροφής απλών σχημάτων
Για να κατασκευάσουμε την εικόνα ευθείας ε μέσω στροφής κέντρου O και γωνίας α, αρκεί να κατασκευάσουμε την εικόνα OK′ του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος OK από το O προς την ευθεία και να φέρουμε ευθεία κάθετη στο OK′ στο άκρο K′ (Σχήμα 15). Η εικόνα γωνίας A μέσω στροφής κέντρου O, είναι γωνία A′ ίση με την A και κατασκευάζεται με τις



Σχήμα 15: Στροφή ευθείας

εικόνες των αντίστοιχων πλευρών της (Σχήμα 16). Τα κοινά σημεία M και N των ομόλογων πλευρών βρίσκονται στον κύκλο AA′O, καθώς βλέπουν το τμήμα AA′ με γωνία ίση με τη γωνία στροφής. Η εικόνα κύκλου (K, ρ) μέσω στροφής κέντρου O, είναι κύκλος ίσης ακτίνας (K′, ρ) και κατασκευάζεται με τις εικόνες του κέντρου K και ενός σημείου A του κύκλου (Σχήμα 17).

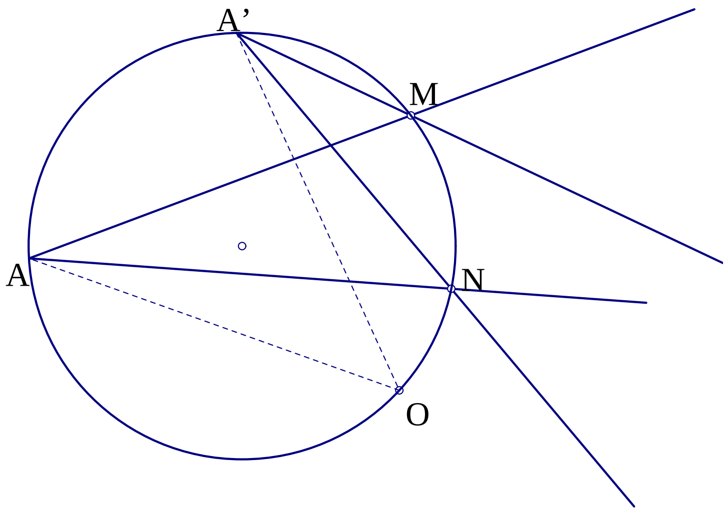
Πρόταση 2.2 Η εικόνα μέσω στροφής ενός επιπέδου σχήματος είναι σχήμα ίσο προς το αρχικό και κάθε ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται σε αντίστοιχο που σχηματίζει γωνία με το αρχικό, ίση με την γωνία στροφής. Επίσης κάθε ευθεία του σχήματος, σχηματίζει με την εικόνα της γωνία ίση με τη γωνία στροφής.

Απόδειξη:
Αν AM είναι τυχαία ευθεία ,A*M* η εικόνα της και K το σημείο τομής τους, από τν ισότητα των τριγώνων OAM και OA*M* προκύπτει ότι οι γωνίες M και M* είναι ίσες, επομένως τα σημεία O, K, M και M* είναι ομοκυκλικά. Άρα η γωνία των KM και KM* ισούται με τη γωνία των OM και OM*, δηλαδή τη γωνία στροφής.
Παρατήρηση: Οι στροφές περί το ίδιο κέντρο με γωνίες που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 360^o είναι ισοδύναμες. Δηλαδή η στροφή γωνίας $-\widehat{\alpha}$ ισοδυναμεί με άλλη γωνίας $360^o - \widehat{\alpha}$

Πρόταση 2.3 Η σύνθεση $R_2 \circ R_1$ δύο στροφών R_1 και R_2 γωνιών α και β αντίστοιχα ως προς το ίδιο κέντρο O, είναι στροφή γωνίας α+β κέντρου O (Σχήμα 19).

Πρόταση 2.4 Η σύνθεση $R_2 \circ R_1$ δύο στροφών R_1 και R_2 κέντρων O και K και γωνιών α και β, αντίστοιχα είναι στροφή κέντρου O άν $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \neq 360^o$. Το σημείο O* προκύπτει σαν τομή των ημιευθειών που φέρουμε από τα κέντρα O και K, οι οποίες σχηματίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα AB γωνίες ίσες με τα μισά των αντίστοιχων γωνιών στροφών και αντίθετου με αυτές προσανατολισμού και γωνίας ίσης με το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών α και β. Στην περίπτωση που $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 360^o$, τότε η παραπάνω σύνθεση είναι μεταφορά (Σχήμα 21). Γενικά, η σύνθεση περισσοτέρων των δύο στροφών, είναι στροφή γωνίας ίσης με το άθροισμα όλων των γωνιών στην περίπτωση που αυτό δεν είναι πολλαπλάσιο του 360^o, ή μεταφορά σε περίπτωση που είναι.

Απόδειξη:
Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB , A*B* η εικόνα του κατά την πρώτη στροφή και A**B**



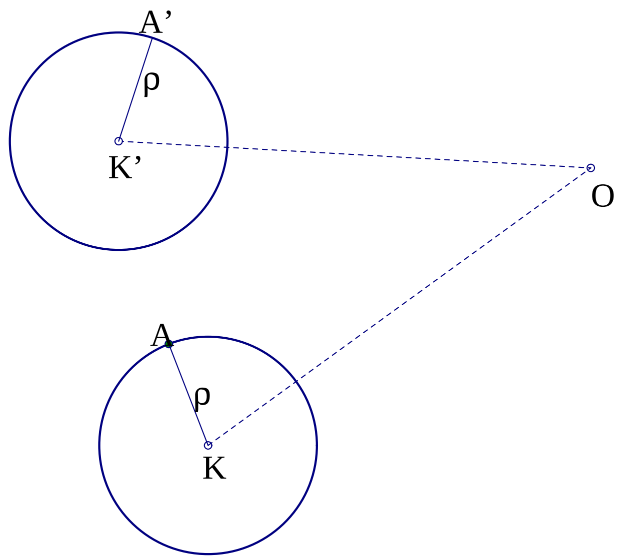
Σχήμα 16: Στροφή γωνίας

η εικόνα του κατά την δεύτερη στροφή. Το τελευταίο ευθύγραμμο τμήμα έχει στραφεί σε σχέση με το πρώτο κατα γωνία ίση με το άθροισμα α+β, όπως φαίνεται στο Σχήμα 20. Αυτό που μένει να προσδιορίσουμε είναι το κέντρο της στροφής αυτής. Στο Σχήμα 22 βλέπουμε ότι η εικόνα του σημείου O* μέσω των δύο στροφών, είναι το ίδιο το σημείο άρα αυτό είναι το κέντρο της σύνθεσης. Στην περίπτωση που α+β=360^o (ή 0^o) παραπάνω σύνθεση είναι μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο με το διπλάσιο της απόστασης των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν με την ίσων με τις αντίθετες των αντίστοιχων γωνιών στροφής. Σε αυτή την περίπτωση η σύνθεση δεν αλλάζει την κατεύθυνση του σχήματος. Όπως βλέπουμε στο σχήμα η εικόνα του σημείου A της ευθείας που διέρχεται από το O είναι το A** της παράλληλης της από το K.

Πρόταση 2.5 Ορισμός στροφής από ζεύγη ομολόγων ευθειών
Αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος ομόλογων ευθειών χ και χ′, κάθε σημείο O των διχοτόμων των σχηματιζόμενων γωνιών μπορεί να θεωρηθεί σαν κέντρο στροφής που απεικονίζει τη μία στην άλλη (Σχήμα 23). Αν θεωρήσουμε τώρα δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών με ίσες τις μεταξύ τους αποστάσεις, τότε κάθε σημείο O της ευθείας AB που ορίζεται από τα σημεία τομής των αντίστοιχων ευθειών, είναι κέντρο στροφής που απεικονίζει το ένα ζεύγος στο άλλο (Σχήμα 24).

Πρόβλημα 2.4 Ορισμός στροφής από δύο ζεύγη ομολόγων σημείων
Δίνονται δύο ίσα και όχι παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα AB και A′B′. Ποιός είναι ο μετασχηματισμός στροφής που απεικονίζει το σημείο A στο A′ και το B στο B′;

Απόδειξη:
Έστω K το σημείο τομής των ευθειών AB και A′B′. Έστω O το κοινό σημείο των μεσοκαθέτων των AA′ και BB′. Τα τρίγωνα OAB και OA′B′ είναι ίσα, επομένως το O είναι το κέντρο της ζητούμενης στροφής, ενώ η γωνία είναι ίση με $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$. Το σημείο O κατασκευάζεται και σαν το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων AA′K και BB′K, όπως προκύπτει από τα εγγράψιμα τετράπλευρα AA′KO και BKB′O (Σχήμα 25). Αν τα AA′ και BB′ είναι παράλληλα, τότε και οι μεσοκάθετές τους είναι παράλληλες, οπότε οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στο K, το οποίο είναι και το ζητούμενο κέντρο στροφής (Σχήμα 26).
Ορισμός στροφής από ζεύγος ομολόγων τετραγώνων



Σχήμα 17: Στροφή κύκλου

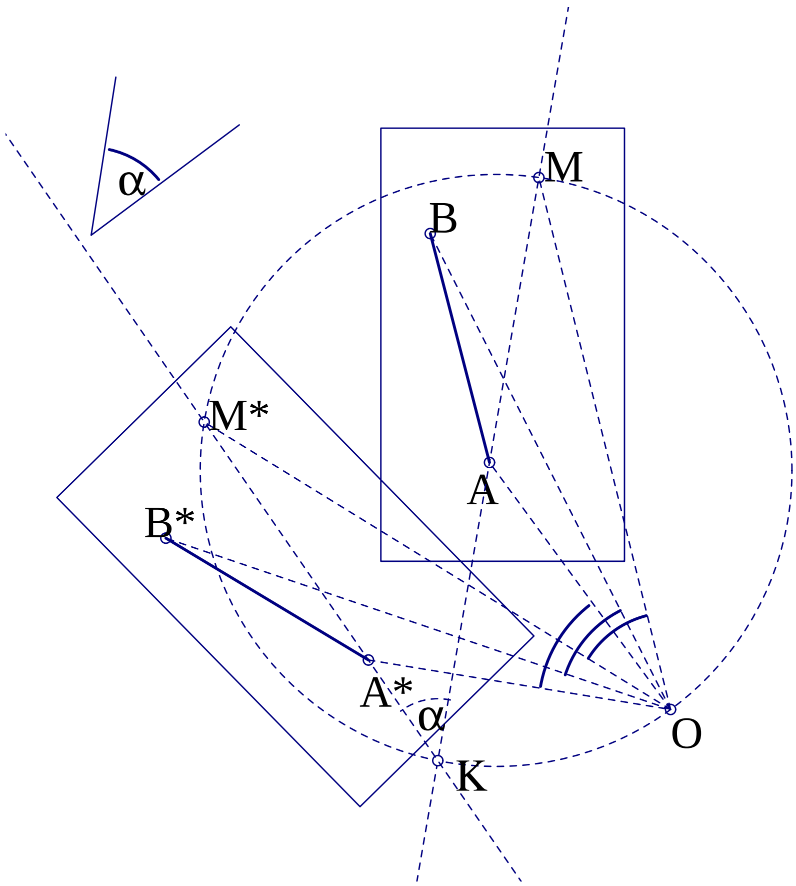
Πρόταση 2.6 Δίνονται δύο ίσα τετράγωνα ΑΒΓΔ και Α*Β*Γ*Δ*. Αν Μ, Ν, Λ και Κ είναι τα σημεία τομής των ζευγών ομολόγων πλευρών (ΑΔ,Α*Δ*), (ΒΓ,Β*Γ*), (ΓΔ,Γ*Δ*) και (ΑΒ,Α*Β*) ανίστοιχα, να δειχθεί ότι ΜΝ=ΚΛ, οι ευθείες ΜΝ και ΚΛ τέμνονται κάθετα και ότι το σημείο τομής τους Ο είναι κέντρο στροφής που απεικονίζει το πρώτο τετράγωνο στο δεύτερο.

Απόδειξη:
Από την Πρόταση 2.5, προκύπτει ότι τα σημεία της ΜΝ είναι κέντρα στροφών που απεικονίζουν το ζεύγος των ευθειών ΒΓ και ΑΔ σε εκείνο των Β*Γ* και Α*Δ*. Ομοίως τα σημεία της ΚΛ είναι κέντρα στροφών που απεικονίζουν το ζεύγος των ευθειών ΑΒ και ΓΔ σε εκείνο των Α*Β* και Γ*Δ*. Επομένως, το κοινό σημείο Ο των ΜΝ και ΚΛ, είναι κέντρο στροφής που απεικονίζει την τετράδα των παραπάνω ευθειών ΒΓ, ΑΔ, ΑΒ, ΓΔ σε αυτή των ομολόγων τους Β*Γ*, Α*Δ*, Α*Β*, Γ*Δ*, δηλαδή απεικονίζει το τετράγωνο ΑΒΓΔ στο Α*Β*Γ*Δ*. Έστω τώρα Σ το σημείο τομής των ευθειών ΒΔ και Β*Δ*. Το σημείο αυτό, αποτελεί κέντρο στροφής κατά ορθή γωνία, που απεικονίζει τις ευθείες ΑΒ, ΓΔ, Α*Β*, Γ*Δ* στις ΒΓ, ΑΔ, Β*Γ*, Α*Δ* αντίστοιχα με όμοιο επιχείρημα όπως προηγουμένως. Η στροφή αυτή απεικονίζει τα σημεία Κ και Λ στα Ν και Μ αντίστοιχα. Επομένως τα τμήματα ΚΛ και ΜΝ είναι κάθετα και ίσα (Σχήμα 27).

2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 2.5 Δίνεται ένα κομμάτι χαρτί σε σχήμα τετραγώνου ΑΒΓΔ. Το διπλώνουμε με τρόπο ώστε η κορυφή του Α να συμπέσει με το μέσο Μ της ΒΓ. Να δειχθεί ότι η αναδιπλωμένη πλευρά ΑΔ, έστω ΖΜ, τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Ε με ΑΕ=ΑΒ/3.

Απόδειξη:
Έστω ΖΜΡΝ το συμμετρικό του ΑΒΓΔ ως προς την μεσοκάθετο του ΒΜ. Το σημείο Ο που προκύπτει σαν σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα σημεία τομής των απέναντι αντίστοιχων πλευρών των δύο τεραγώνων, είναι το κέντρο στροφής που απεικονίζει το ένα τετράγωνο στο άλλο, με την σειρά των κορυφών ΑΒΓΔ$\longrightarrow$ΖΜΡΝ. Το ίδιο σημείο είναι και σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΖΡ. Επομένως το Ο ανήκει στην μεσοκάθετο



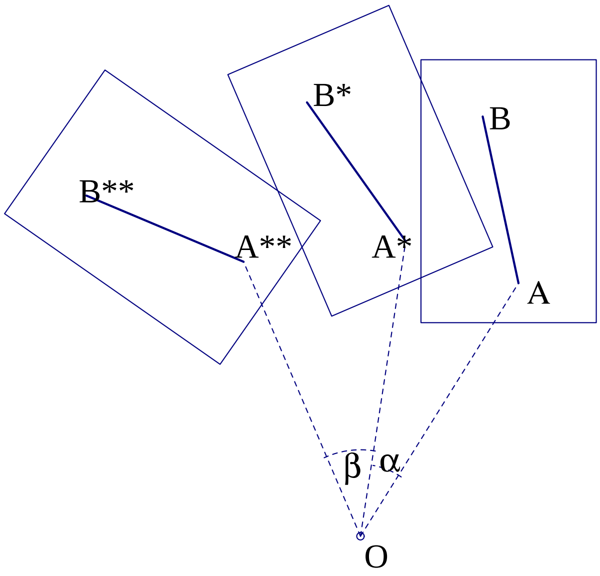
Σχήμα 18: Στροφή επίπεδου σχήματος

του BM, άρα ολόγος ομοιότητας των ομοίων τριγώνων ΑΕΟ καιΔΟΓ, είναι 1/3, από όπου προκύπτει το ζητούμενο (Σχήμα 28).

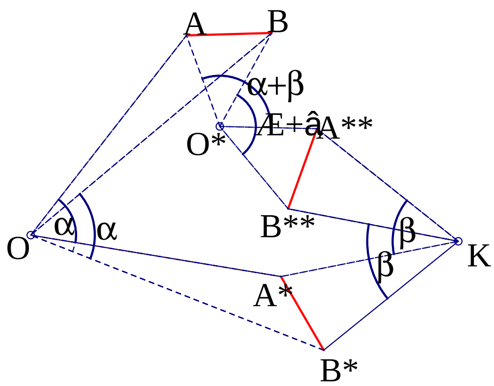
Πρόβλημα 2.6 Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται συχνά σαν πρόβλημα του πειρατή: Κάποιος πειρατής έκρυψε τον θησαυρό του σε ένα νησί προσδιορίζοντας την θέση του ως εξής: Στα σημεία Β και Γ υπάρχουν δύο πηγάδια, ενώ στο Α ένας φοίνικας. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ έφερε κάθετα και ίσα προς αυτές τμήματα ΒΔ και ΓΗ αντίστοιχα, κάθε φορά προς διαφορετικό ημιεπίπεδο από εκείνο του ΑΒΓ. Στπ μέσον Μ του ΔΗ έθαψε τον θησαυρό. Το ζητούμενο είναι πώς μετά από χρόνια, κάποιος που έχει στα χέρια του τον χάρτη θα εντοπίσει το Μ, με δεδομένο ότι υπάρχουν μόνο τα δύο πηγάδια, ενώ δεν υπάρχει πιά ο φοίνικας.

Απόδειξη:
Αποδεικνύεται ότι το σημείο Μ προσδιορίζεται σαν η κορυφή ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με υποτείνουσα την ΒΓ. (Προφανώς υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις για την κορυφή, η Μ και η Ν, βλέπε σχήμα 29). Η σύνθεση των στροφών 90^o περί τα κέντρα Γ και Β, απεικονίζουν το Η στο Δ. Η σύνθεση όμως αυτή είναι μία ημιστροφή h_μμε κέντρο το μέσον Μ του ΗΔ, που βρίσκεται όμως και με την βοήθεια της σύνθεσης στροφών σαν το σημείο τομής ημιευθειών που σχηματίζουν γωνίες 45^o με την ΓΒ. $R_\beta \circ R_\gamma = h_\mu$. Άρα το Μ είναι κορυφή ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΜΒΓ.

Πρόβλημα 2.7 Στις πλευρές δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και εξωτερικά αυτού, κατασκευάζουμε τετράγωνα. Να δειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΜ και ΝΛ που ορίζονται από τα κέντρα των τετραγώνων απέναντι πλευρών, είναι μεταξύ τους κάθετα και ίσα. Το- πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και σαν *Θεώρημα Vanaubel*.



Σχήμα 19: Άθροισμα α+β

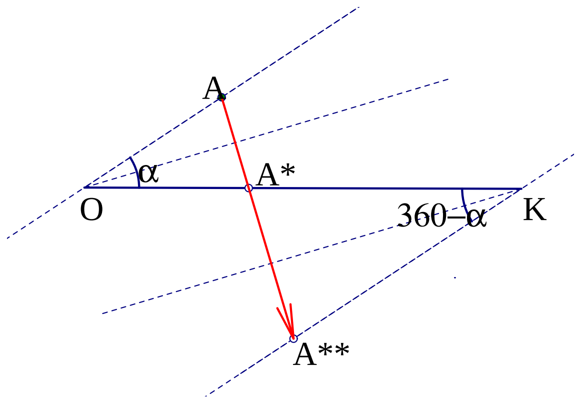


Σχήμα 20: Στροφή γωνίας α+β

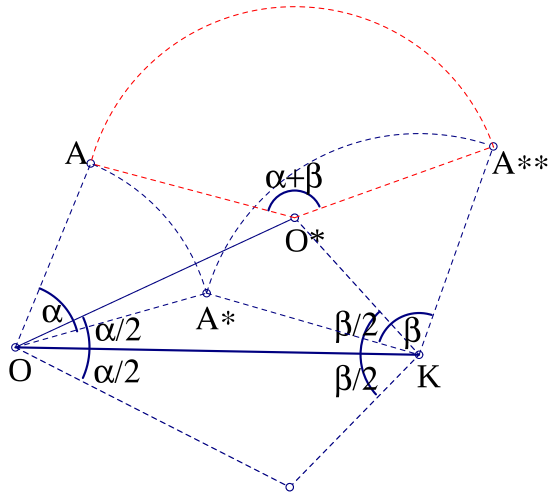
Απόδειξη:
Το σημείο Β απεικονίζεται στο Α μέσω στροφής $R(N, 90^0$ κέντρου Ν και ορθής γωνίας, ενώ στη συνέχεια το Α απεικονίζεται στο Δ μέσω στροφής $R(M, 90^0$ (Σχήμα 30). Η σύνθεση των παραπάνω στροφών είναι προφανώς ημιστροφή με κέντρο το μέσο Ο της ΒΔ. Ταυτόχρονα όμως, το κέντρο της ίδιας σύνθεσης προσδιορίζεται σαν η κορυφή ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με βάση την ΜΝ. Επομένως το Μ είναι η εικόνα του Ν μέσω στροφής $R(O, 90^0$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι το σημείο Κ είναι εικόνα του Λ μέσω της ίδιας στροφής. Άρα το ΜΚ είναι η εικόνα του ΝΛ μέσω στροφής ορθής γωνίας.

Πρόβλημα 2.8 Στις πλευρές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνα. Να δειχθεί ότι τα κέντρα των τεσσάρων αυτών τετραγώνων είναι κορυφές ενός νέου τετραγώνου.

Απόδειξη:
Έστω ΚΝΜΛ το τετράπλευρο που ορίζεται από τα τέσσερα κέντρα των τετραγώνων. Σύμφωνα με το προηγούμενο πρόβλημα, κάθε κορυφή του ΚΝΜΛ απεικονίζεται μέσω στροφής $R(O, 90^0$ στην επόμενη της. $K \xrightarrow{R} N \xrightarrow{R} M \xrightarrow{R} \Lambda$ (Σχήμα 31). Επομένως το ΚΝΜΛ είναι



Σχήμα 21: Σύνθεση στροφών με άθροισμα 360



Σχήμα 22: Σύνθεση στροφών

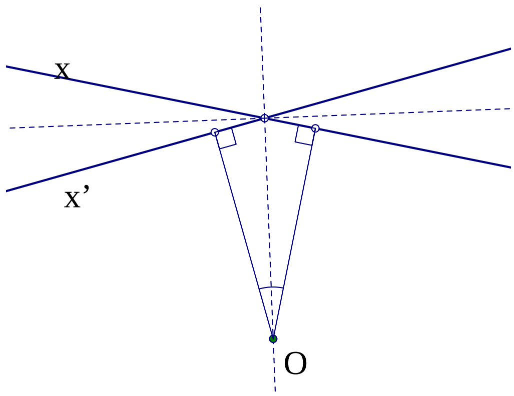
τετράγωνο κέντρου Ο.

Πρόβλημα 2.9 Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ρ έξω από αυτό. Φέρνουμε τις ευθείες ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ και ΡΔ. Αν α είναι η κάθετη ευθεία από το Α προς την ΡΒ, β η κάθετη άπό το Β στην ΡΓ και γ η κάθετη από το γ στην ΡΔ, να δειχθεί ότι οι τρείς ευθείες α, β και γ συντρέχουν. Τι γίνεται στηνπερίπτωση που το Ρ βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο; [10].

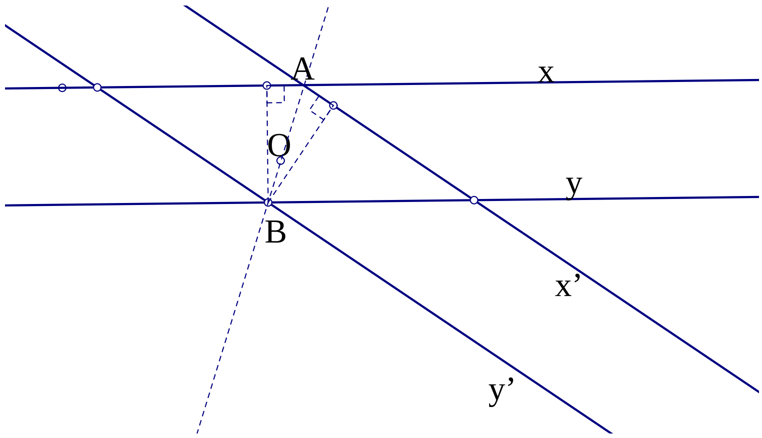
Απόδειξη:
Παρατηρούμε ότι η α προκύπτει από στροφή της ΡΒ περί το κέντρο Ο του τετραγώνου, κατά ορθή γωνία, κατα την φορά των δεικτών του ρολογιού. Όμοια η β είναι εικόνα της ΡΓ και η γ της ΡΔ πάντα μέσω της παραπάνω στροφής. Έτσι και οι τρείς διέρχονται από το σημείο Ρ* που είναι η εικόνα του Ρ μέσω του ίδιου μετασχηματισμού (Σχήμα 32). Στην περίπτωση που το Ρ βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓΔ τα επιχειρήματα εξακολουθούν να ισχύουν, άρα προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα (Σχήμα 33).

Πρόβλημα 2.10 Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και ευθείες ϵ_1, ϵ_2 διερχόμενες από το Α. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές της κορυφής Γ στις ϵ_1, ϵ_2 και Θ, Η οι προβολές της Δ στις ευθείες αυτές, να δειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΘΗ είναι κάθετα και ίσα.

Απόδειξη:
Εφαρμόζουμε στροφή κέντρου Ο (κέντρο του τετραγώνου) και ορθής γωνίας κατά την αρνητική φορά (Σχήμα 34). Η εικόνα του Β είναι το Α και του Α είναι το Δ. Επίσης το Ε

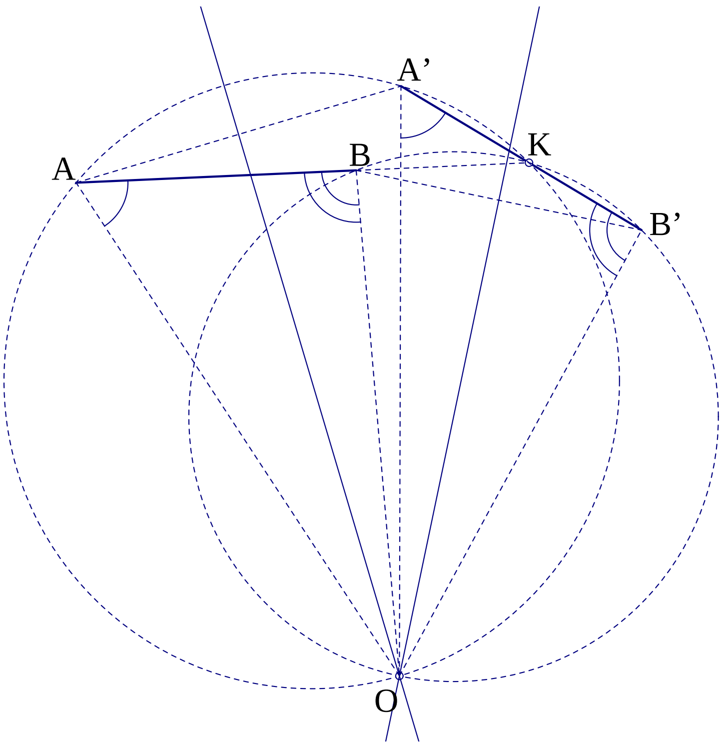


Σχήμα 23: Κέντρο στροφής ευθείας

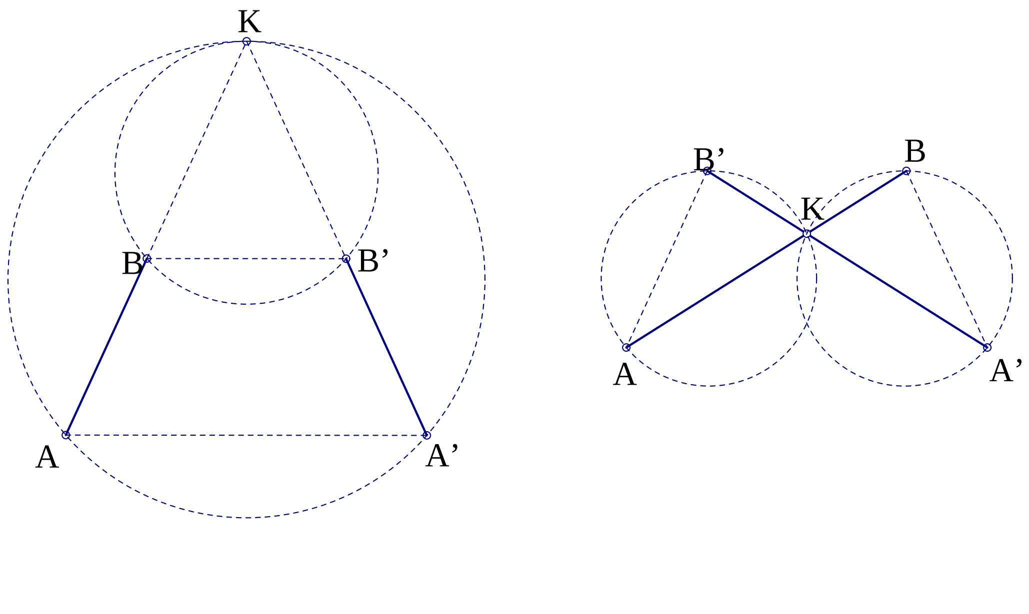


Σχήμα 24: Στροφή ζεύγους ευθειών

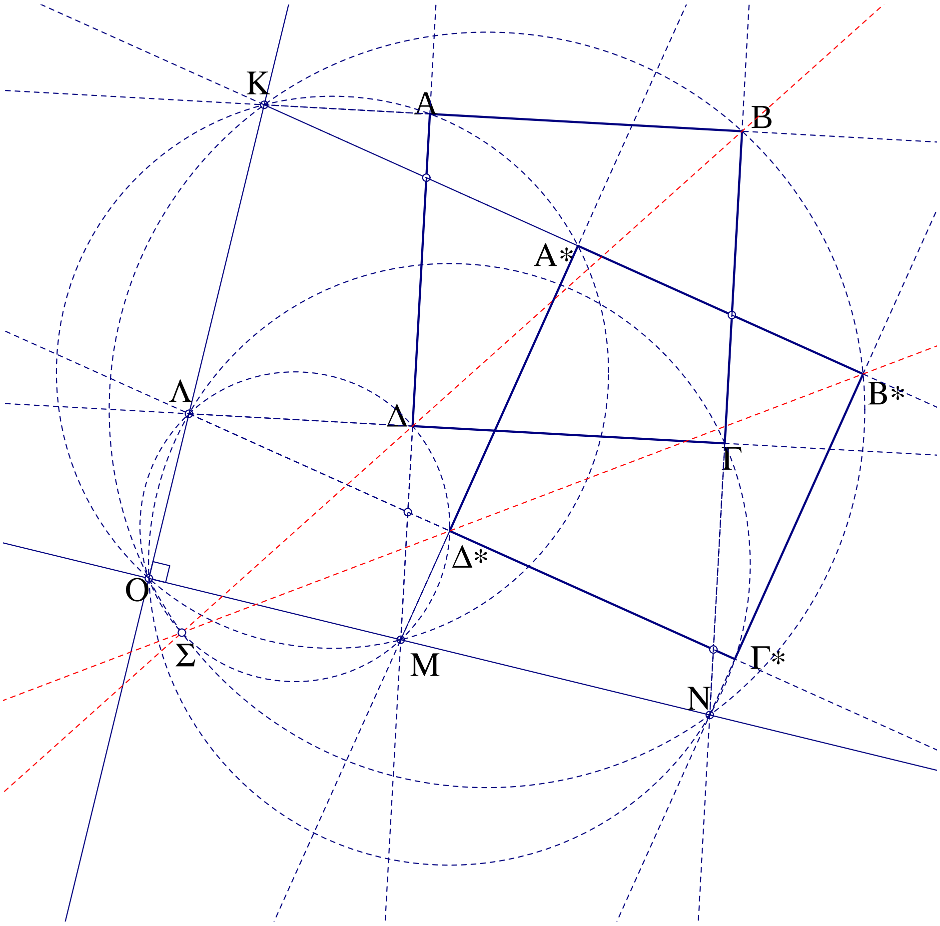
απεικονίζεται στο Θ και το Ζ στο Η, καθώς οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 απεικονίζονται στις ευθείες ΔΘ και ΔΗ αντίστοιχα. Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ είναι η εικόνα του ΕΖ μέσω της παραπάνω στροφής [10].



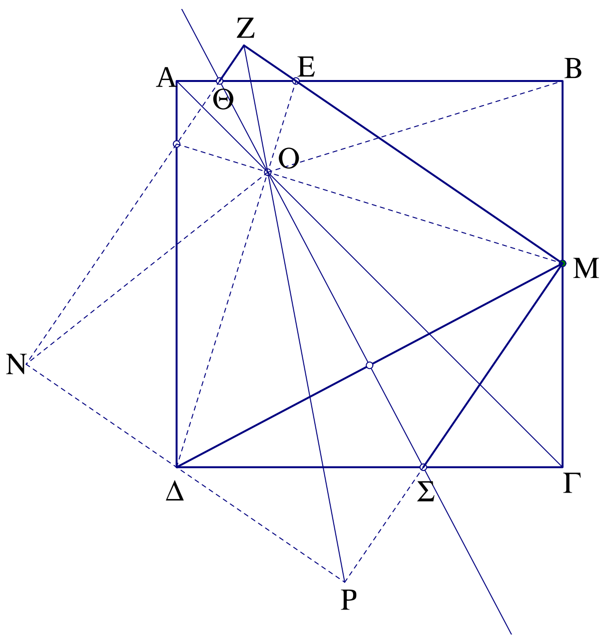
Σχήμα 25: Ορισμός στροφής



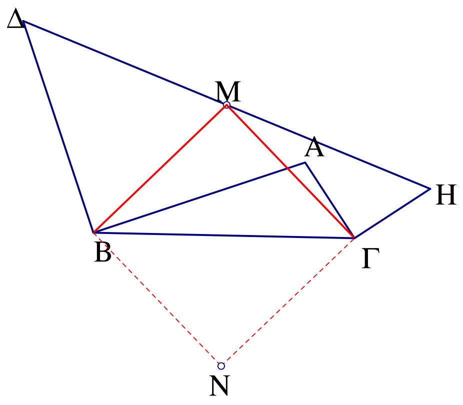
Σχήμα 26: Ορισμός στροφής με $AA'//BB'$



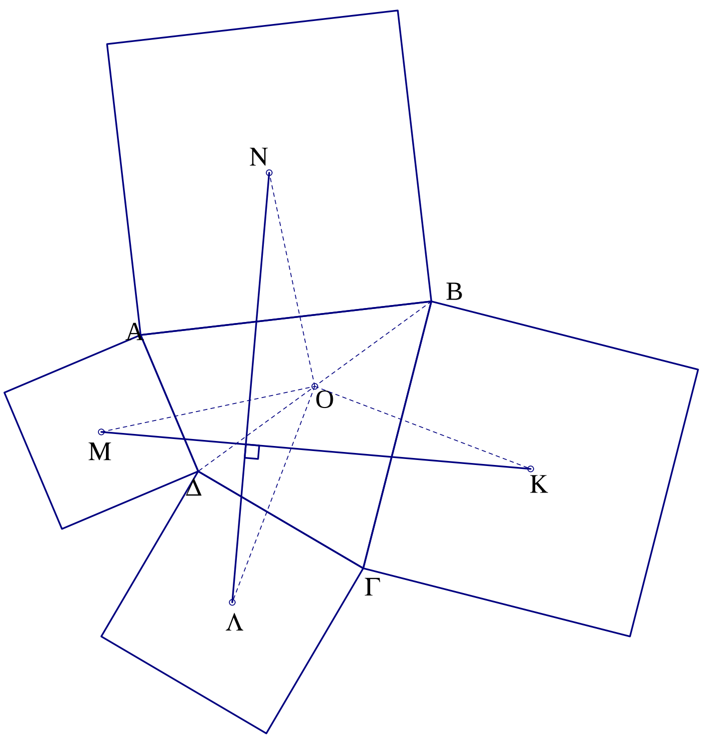
Σχήμα 27: Ορισμός στροφής σε τετράγωνο



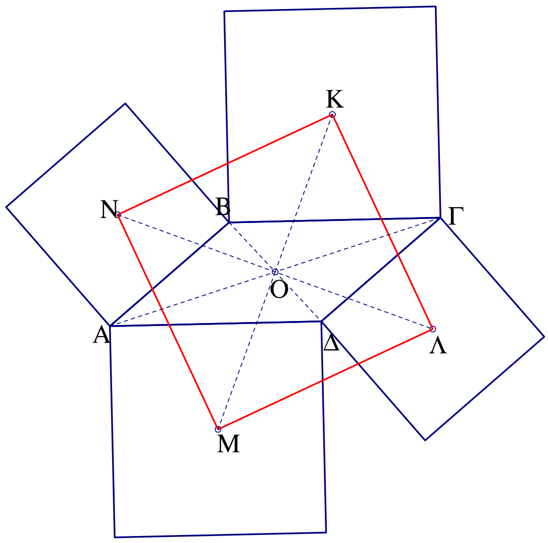
Σχήμα 28: Αναδίπλωση τετραγώνου



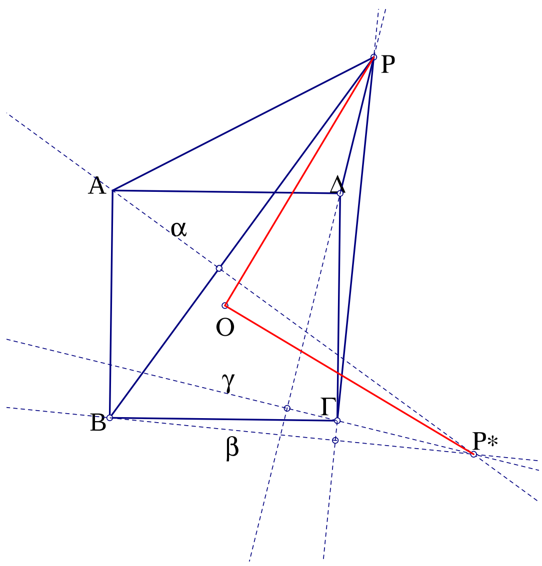
Σχήμα 29: ΒΜΓ ισοσκελές ορθογώνιο



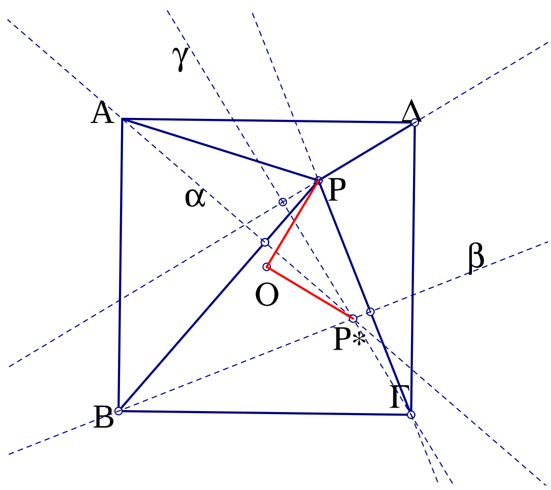
Σχήμα 30: Θεώρημα *Vanaubel*



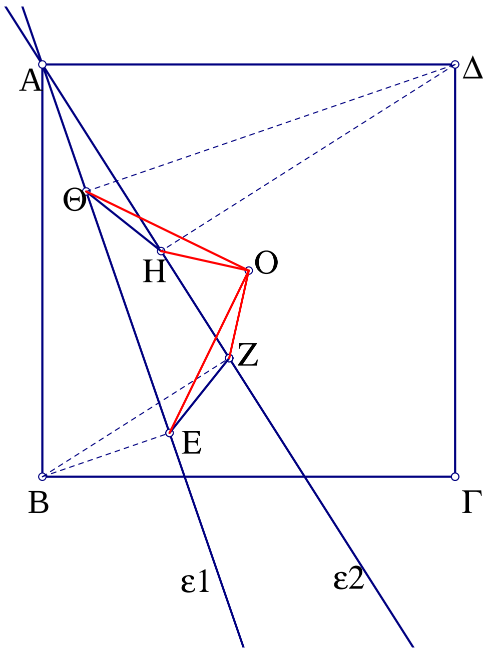
Σχήμα 31: Κορυφές τετραγώνου



Σχήμα 32: Στροφή του P κατά ορθή γωνία

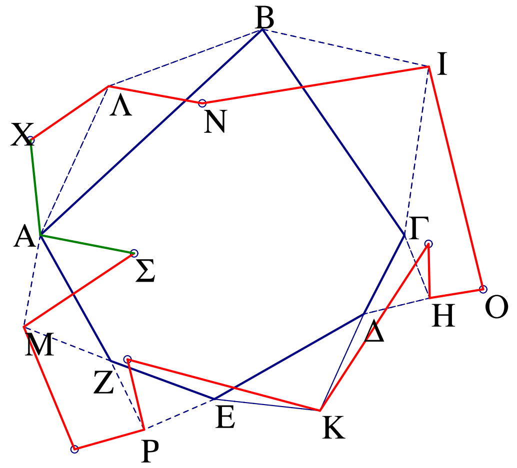


Σχήμα 33: Στροφή του P κατά ορθή γωνία



Σχήμα 34: Στροφή ορθής γωνίας περί το Ο

Πρόβλημα 2.11 Να κατασκευαστεί ν-γωνο, όταν δίνονται ν σημεία που αποτελούν κορυφές ισοσκελών τριγώνων με βάσεις τις πλευρές του ν-γώνου με δοσμένες τις γωνίες των κορυφών.



Σχήμα 35: Διαδοχικές στροφές

Απόδειξη:
Έστω ΑΒΓΔΕΖ το προς κατασκευή πολύγωνο για ν= 6 (Σχήμα 35)με τα ισοσκελή τρίγωνα στις πλευρές του και εξωτερικά αυτού. Η εικόνα ενός τυχαίου σημείου Χ μέσω της σύνθεσης των στροφών περί τις κορυφές των ισοσκελών τριγώνων με τις αντίστοιχες γωνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι το σημείο Μ. Η σύνθεση αυτή είναι στροφή, της οποίας το κέντρο είναι το σημείο Α καθώς η εικόνα του είναι το ίδιο το Α. Τα προηγούμενα ισχύουν υπό την προυπόθεση ότ το άθροισμα των γωνιών των στροφών δεν είναι πολλαπλάσιο του 360^o. Σε αυτή την περίπτωση η σύνθεση είναι μεταφορά ή ταυτοτική, οπότε έχουμε καμία ή άπειρες λύσεις αντίστοιχα. Δύο παραδείγματα έχουμε στις περιπτώσεις που όλες οι γωνίες είναι ίσες με 180^o, δηλαδή τα κέντρα των στροφών είναι μέσα των αντίστοιχων πλευρών: Στην περίπτωση περιττού πλήθους κορυφών δεν έχουμε καμία λύση, ενώ στην περίπτωση αρτίου πλήθους έχουμε άπειρες λύσεις [1].

Πρόβλημα 2.12 Να αποδειχθεί ότι τα κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές τυχαίου τριγώνου και εξωτερικά αυτού, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

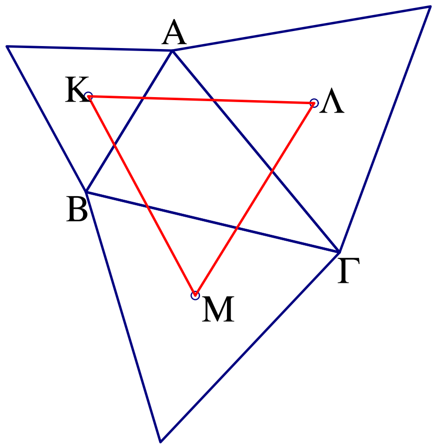
Απόδειξη:
Η σύνθεση τριών στροφών γωνίας 120^o, είναι μεταφορά ή ταυτοτική. Στην περίπτωσή μας, η κορυφή Α απεικονίζεται στο Α μέσω τριών τέτοιων στροφών με κέντρα τα σημεία Κ, Μ και Λ (Σχήμα 36). Επομένως εδώ έχουμε ταυτοτικό μετασχηματισμό.

$$R_l \circ R_m \circ R_k = id$$

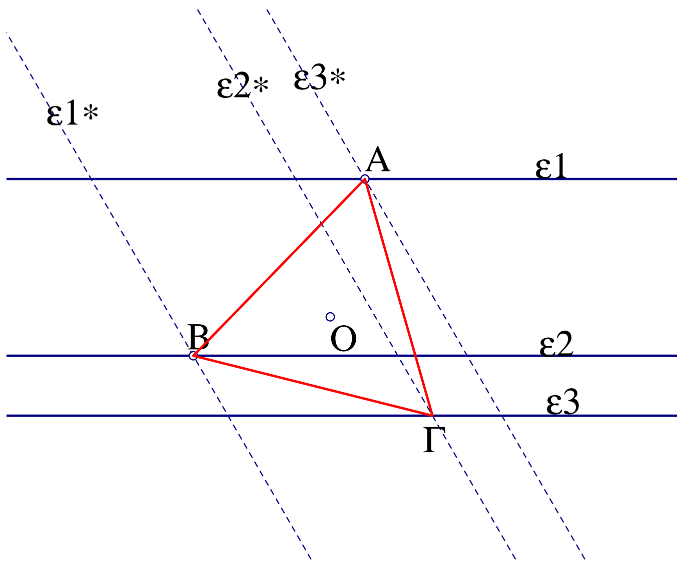
Για να συμβεί όμως αυτό, πρέπει η σύνθεση των στροφών $R_m \circ R_k$ να έχει κέντρο το σημείο Λ. Το κέντρο όμως αυτό προκύπτει σαν σημείο τομής ημιευθειών που σχηματίζουν με την ΚΜ γωνία ίση με $\frac{1}{2}120^o$ Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο [1].

Πρόβλημα 2.13 Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο, οι κορυφές του οποίου να βρίσκονται από μία πάνω σε τρείς παράλληλες ευθείες.

Απόδειξη:
Έστω ΑΒΓ το προς κατασκευή τρίγωνο και ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 οι δοσμένες ευθείες. Στρέφουμε



Σχήμα 36: ΚΛΜ ισόπλευρο

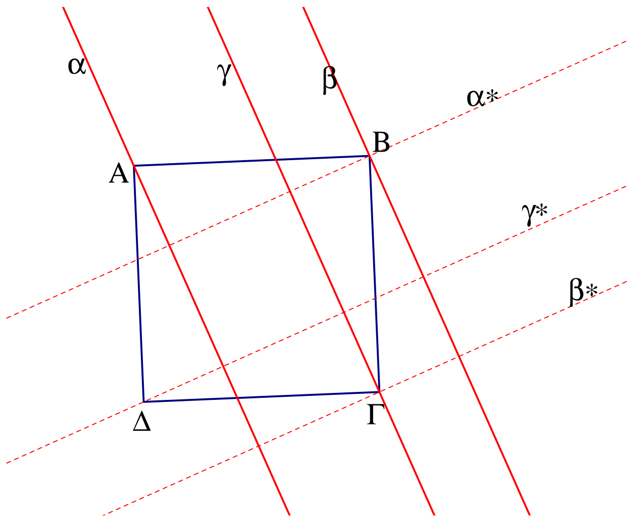


Σχήμα 37: Κατασκευή ισοπλεύρου

όλο το σχήμα κατά γωνία ω=120^o με κέντρο Ο το κέντρο του τριγώνου. Βλέπουμε ότι κάθε κορυφή του τριγώνου απεικονίζεται σε μία άλλη κορυφή του. Έτσι οι ζητούμενες κορυφές προσδιορίζονται όπως βλέπουμε στο σχήμα σαν τα σημεία τομής των ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 με τις εικόνες των ϵ_3, ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα (Σχήμα 37).

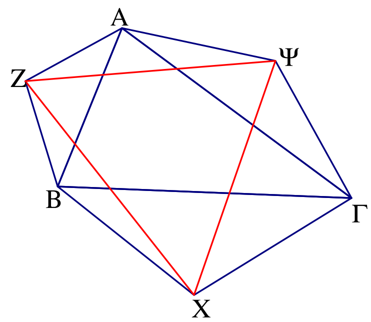
Πρόβλημα 2.14 Να κατασκευαστεί τετράγωνο, τέτοιο ώστε τρείς από τις κορυφές του να βρίσκονται πάνω σε τρείς δεδομένες ευθείες.

Απόδειξη:
Έστω ΑΒΓΔ το προς κατασκευή τετράγωνο και α, β και γ οι τρείς δεδομένες ευθείες, πάνω στις οποίες βρίσκονται οι κορυφές Α, Β και Γ αντίστοιχα (Σχήμα 38). Αν α*, β* και γ* οι εικόνες των α, β και γ αντίστοιχα μέσω στροφής ορθής γωνίας περί το κέντρο του τετραγώνου, βλέπουμε ότι η α* περνά από το β και η β* από το Γ, καθώς η κορυφή Α απεικονίζεται στη Β και η Β στη Γ. Επομένως η Β προσδιορίζεται σαν τομή της β με την α* και η Γ σαν τομή της γ με την β*. Η στροφή που θα εφαρμόσουμε στις τρείς ευθείες γίνεται με τυχαίο κέντρο, καθώς όποιο κέντρο και να επιλέξουμε το τελικό σχήμα παραμένει το ίδιο.



Σχήμα 38: Κατασκευή τετραγώνου

Πρόβλημα 2.15 Στις πλευρές τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζονται ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΧ,ΑΒΖ και ΑΓΨ με γωνίες κορυφών ίσες με α, β και γ αντίστοιχα. Αν α+β+γ=360^o, να δειχθεί ότι οι γωνίες του τριγώνου ΕΖΔ είναι ίσες με α/2, β/2, γ/2. Τι συμβαίνει στην περίπτωση που τα ισοσκελή τρίγωνα κατασκευαστούν από την μεριά του ίδιου του αρχικού τριγώνου; [1]

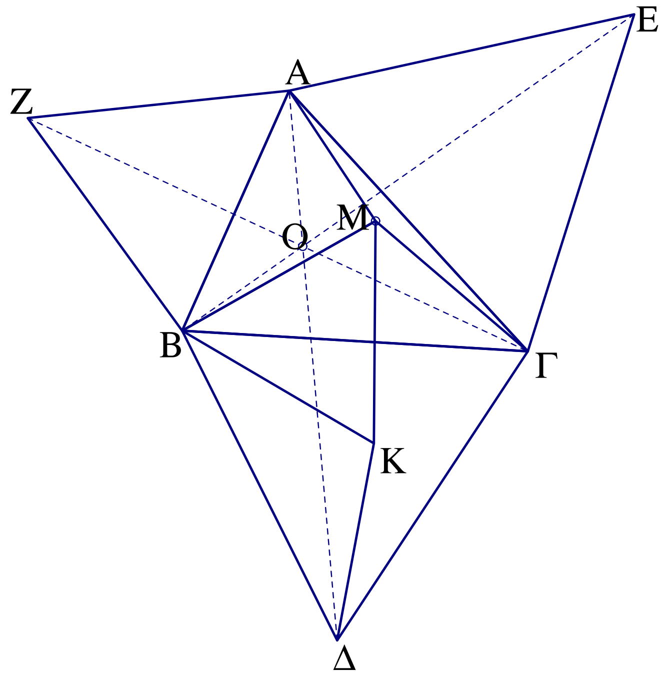


Σχήμα 39: Γωνίες τριγώνου ΧΨΖ

Απόδειξη:
Η κορυφή Α απεικονίζεται στον εαυτό της μέσω της σύνθεσης $R_z \circ R_x \circ R_y$ των τριών στροφών με κέντρα τα σημεία Ψ, Χ και Ζ και γωνίες ίσες με αυτές των κορυφών των αντίστοιχων τριγώνων. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο στην περίπτωση κατά την οποία η σύνθεση $R_x \circ R_y$ έχει κέντρο το σημείο Ζ, δηλαδή οι γωνίες Χ και Ψ να είναι ίσες με α/2 και β/2 αντίστοιχα (Σχήμα 39). Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το αμέσως προγούμενο πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση αυτού εδώ, για γωνίες α=β=γ=120^o.

Πρόβλημα 2.16 Να βρεθεί σημείο Ο του επιπέδου, του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων του από τις κορυφές δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ με γωνίες μικρότερες των 120^o να είναι ελάχιστο.

Απόδειξη:
Έστω τυχαίο σημείο Μ και ΜΑ, ΜΒ και ΜΓ οι αποστάσεις από τις κορυφές του τριγώνου. Στρέφουμε το τρίγωνο ΜΒΓ κατά γωνία ω=60^o, περί το σημείο Β, ώστε η εικόνα της ΒΓ να είναι η ΒΔ. Το ζητούμενο άθροισμα ισούται με το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΜΚΔ (Σχήμα 40). Όμως αυτό γίνεται ελάχιστο όταν η τεθλασμένη γίνει ευθύγραμμο τμήμα.



Σχήμα 40: Ελάχιστο άθροισμα

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή είναι το μήκος ΑΔ. Άρα η ζητούμενη θέση του Μ είναι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το Α με την κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ. Ομοίως πρέπει το σημείο Ο να βρίσκεται πάνω στίς ΒΕ και ΓΖ, όπου τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΖ είναι επίσης ισόπλευρα. Άρα η θέση που ελαχιστοποιεί το ζητούμενο άθροισμα είναι η τομή των τμημάτων ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, τα οποία έχοντας κοινό σημείο συντρέχουν. Τα τμήματα αυτά, εκτός του ότι είναι ίσα μεταξύ τους, σχηματίζουν το ένα με το άλλο γωνίες 60^o, καθώς το ένα είναι στροφή κάποιου από τα άλλα κατά γωνία 60^o. (π.χ. το ΑΕ είναι στροφή 60^o του ΓΖ περί το Β). Έτσι τελικά το ζητούμενο σημείο Ο βλέπει τις πλευρές του ΑΒΓ υπό γωνία 120^o. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο του *Fermat* (ή *Steiner*)

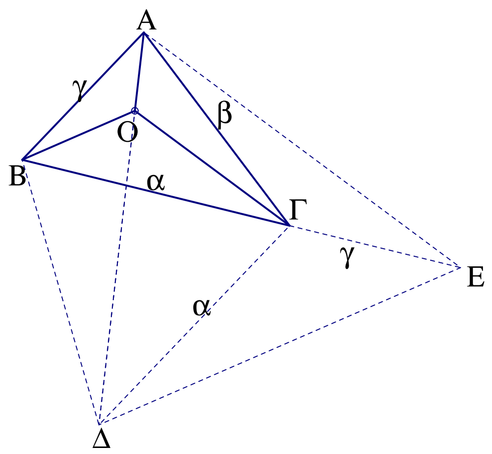
Πρόβλημα 2.17 Δίνεται τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β και γ και ισόπλευρο τρίγωνο Α*Β*Γ* πλευράς χ. Αν Ο είναι το σημείο *Fermat* του ΑΒΓ και Μ σημείο του εσωτερικού του Α*Β*Γ* με ΜΑ=α, ΜΒ=β και ΜΓ=γ, να δειχθεί ότι χ=ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ.

Απόδειξη:
Από το προηγούμενο πρόβλημα γνωρίζουμε ότι ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ=ΑΔ. Αν κατασκευάσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ στρέφοντας το ΑΒΔ περί το Δ κατά αρνητική φορά με γωνία 60^o, (Σχήμα 41) αυτό ισούται με το δοσμένο, καθώς το σημείο Γ απέχει από τις κορυφές του Δ, Α και Ε αποστάσεις ίσες με α,β και γ αντίσοιχα. Άρα χ=ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ.

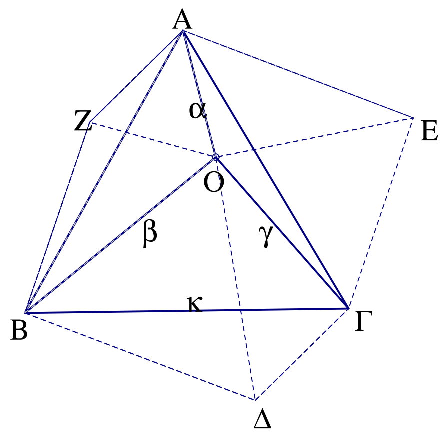
Πρόβλημα 2.18 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο στο εσωτερικό του. Αν ΟΑ=α, ΟΒ=β και ΟΓ=γ είναι γνωστές τιμές, να βρεθεί το εμβαδόν του ΑΒΓ.

Απόδειξη:
Στρέφουμε τα τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΑ και ΓΟΒ κατά 60^o γύρω από τα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα και θεωρούμε σαν εικόνες τους τα τρίγωνα ΑΖΒ, ΒΔΓ και ΑΓΕ αντίστοιχα (Σχήμα 42). Το εμβαδόν του εξαγώνου ΑΖΒΔΓΕ είναι διπλάσιο από το ζητούμενο. Ακόμα έχουμε:

$$E(AZB\Delta\Gamma E) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$



Σχήμα 41: Ισόπλευρο τρίγωνο

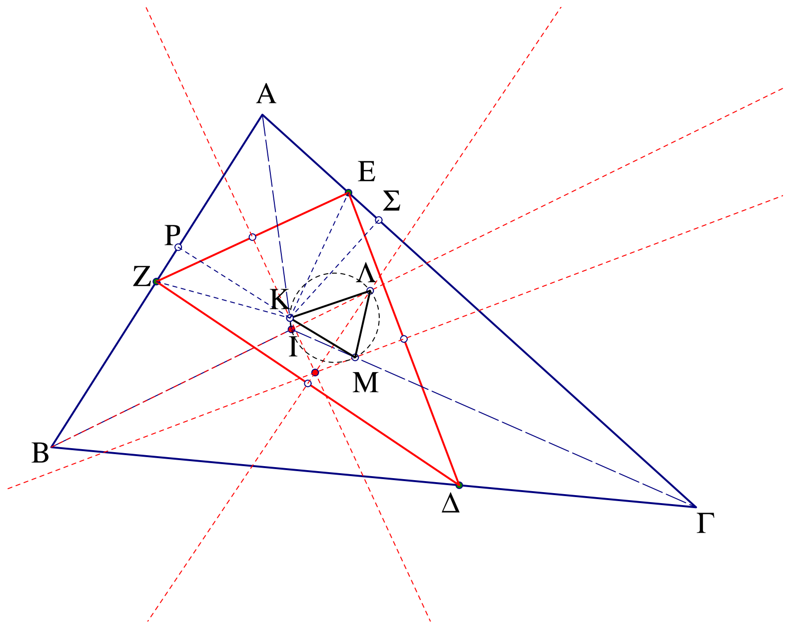


Σχήμα 42: Εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου

καθώς το εξάγωνο αποτελείται από τρία ισόπλευρα τρίγωνα (πλευρών α, β και γ) και τρία ίσα τρίγωνα με πλευρές α, β και γ.

Πρόβλημα 2.19 Έστω τρίγωνο ΔΕΖ εγγεγραμμένο σε δοθέν ΑΒΓ. Αν ΚΛΜ είναι το τρίγωνο που έχει για κορυφές τις τομές των μεσοκαθέτων των πλευρών του ΔΕΖ με τις αντίστοιχες διχοτόμους του ΑΒΓ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ διατηρεί σταθερά τα μέτρα των γωνιών του όταν οι κορυφές Δ, Ε και Ζ κινούνται πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΑΓ καιΑΒ αντίστοιχα, καθώς και ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του περνά από το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

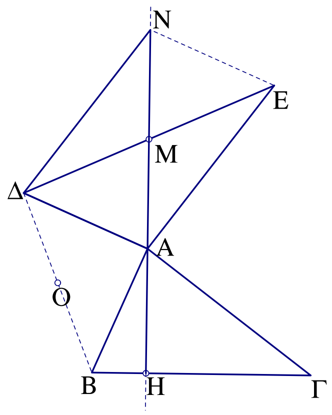
Απόδειξη:
Αν Κ είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας Α με την μεσοκάθετο της ΖΕ και Ρ, Σ οι προβολές του πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΚΡΖ και ΚΣΕ είναι ίσα, οπότε έχουμε ότι ΚΖ=ΚΕ και ∠ΖΚΕ=∠ΡΚΣ=180^o-Α. Άρα η εικόνα του Ζ μέσω στροφής R_K 180^o-Α περί το Κ είναι το Ε. Όμοια, η εικόνα του Ε είναι το Δ και του Δ είναι το Ζ, μέσω στροφών R_M καιR_Λ κέντρων Μ και Λ και γωνιών 180^o-Γ και 180^o-Β αντίστοιχα. Η σύνθεση $R_\Lambda \circ R_M \circ R_K$ των παραπάνω στροφών συνολικής γωνίας 360^o είναι ταυτοτική, δηλαδή μεταφορά μηδενικού διανύσματος. Για να συμβαίνει όμως αυτό, πρέπει το κέντρο της στροφής $R_M \circ R_K$ να ταυτίζεται με εκείνο της R_Λ. Άρα οι γωνίες του τριγώνου ΚΛΜ είναι: ∠ΛΚΜ=90^o-Α/2, ∠ΛΜΚ=90^o-Γ/2 και ∠ΚΛΜ=90^o-Β/2. Επομένως



Σχήμα 43: Τρίγωνο σταθερών γωνιών

το τετράπλευρο ΙΚΛΜ έχει τις απέναντι γωνίες του Ι και Λ παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο (Σχήμα 43).

Πρόβλημα 2.20 Στην κορυφή Α δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ⊥=ΑΒ και ΑΕ ⊥ =ΑΓ προς διαφορετικό πάντα ημιεπίπεδο από αυτό που βρίσκεται η τρίτη κορυφή του τριγώνου. Να δειχθεί ότι το ύψος ΑΗ διχοτομεί την ΔΕ.

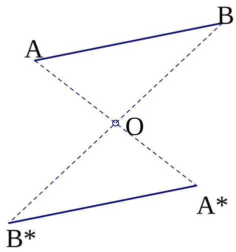


Σχήμα 44: ΔΜ=ΜΕ

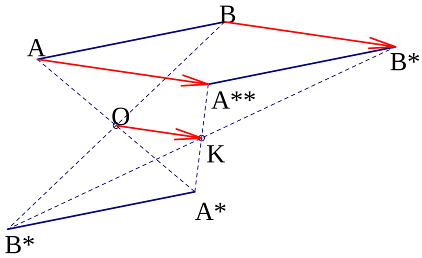
Απόδειξη:
Στρέφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ κατά γωνία ω=90^o με κέντρο Ο το μέσον της ΒΔ. Η εικόνα της ΒΓ είναι η ΑΝ που είναι προέκταση του ΑΗ και η εικόνα της ΑΓ είναι η ΔΝ, παράλληλη και ίση τηςΑΕ. Επομένως το ΑΔΝΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΑΝ διχοτομεί την ΔΕ (Σχήμα 44).

2.5 ΗΜΙΣΤΡΟΦΗ

Ορισμός 2.3 Η περίπτωση στροφής κατά γωνία ίση με 180^o ονομάζεται *ημιστροφή* ή συμμετρία ως προς σημείο (σχήμα 45).

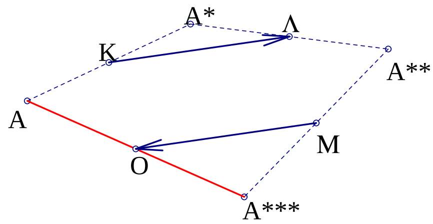


Σχήμα 45: Ημιστροφή



Σχήμα 46: Σύνθεση ημιστροφών

Πρόταση 2.7 (Σύνθεση ημιστροφών) Η σύνθεση δύο ημιστροφών $h_2 \circ h_1$ είναι μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο με $2\overline{OK}$ όπου O και K είναι τα κέντρα των h_1 και h_2 αντίστοιχα (Σχήμα 46). Η σύνθεση τριών ημιστροφών $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ είναι ημιστροφή ως προς κέντρο O το οποίο προκύπτει από μεταφορά του κέντρου της τρίτης κατά διάνυσμα αντίθετο του διανύσματος που ορίζουν τα δύο πρώτα κέντρα (σχήμα 47). Γενικά η σύνθεση άρτιου πλήθους ημιστροφών είναι μεταφορά και περιττού πλήθους είναι ημιστροφή.



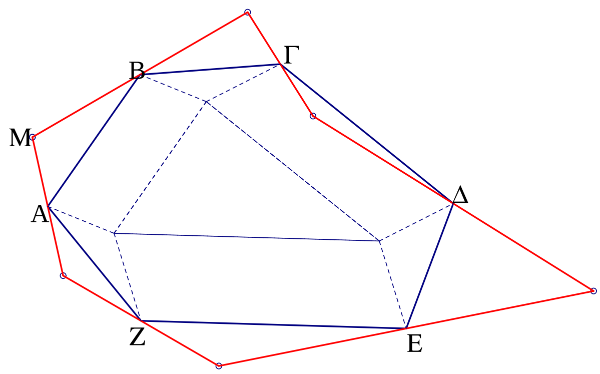
Σχήμα 47: Σύνθεση τριών ημιστροφών

Απόδειξη:
Όπως βλέπουμε στα σχήματα, η απόδειξη είναι προφανής, εφαρμόζοντας το θεώρημα που αναφέρει ότι: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης. Η σύνθεση άρτιου πλήθους ημιστροφών είναι σύνθεση μεταφορών ή αλλιώς στροφή κατά γωνία που είναι άρτιο πολλαπλάσιο του 180^o άρα μεταφορά, ενώ στην περίπτωση περιττού πλήθους έχουμε περιττό πολλαπλάσιο του 180^o, άρα ημιστροφή.

Πρόταση 2.8 Δίνονται n σημεία στο επίπεδο.Η εικόνα ενός τυχαίου σημείου του επιπέδου μέσω διαδοχικών ημιστροφών περί τα σημεία $O_1, O_2, ..., O_n$ παραμένει ίδια και στην περίπτωση που οι ημιστροφές γίνουν με αντίστροφη σειρά, στην περίπτωση που το n είναι περιττός: $h_n \circ h_{n-1} \circ ... \circ h_1 = h_1 \circ h_2 \circ ... \circ h_n$ Ισχύει το ίδιο στην περίπτωση άρτιου n·

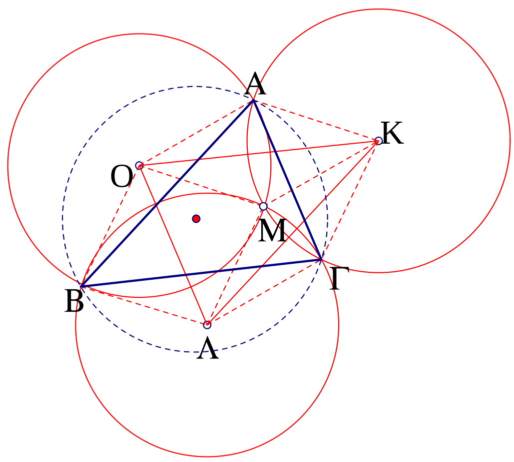
Απόδειξη:
Η σύνθεση περιττού πλήθους ημιστροφών, είναι ημιστροφή.Η ημιστροφή όμως, όπως και

η ανάκλαση, είναι μετασχηματισμός που ταυτίζεται με τον αντίστροφό του, δηλαδή είναι **ενελικτικός** (*involutoric*). Έτσιέχουμε:$(h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_1 \circ h_1)^{-1} = h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_1 \iff (h_1)^{-1} \circ (h_2)^{-1} \circ \ldots \circ (h_n)^{-1} = h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_1 \iff h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_n = h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_1$ Στην περίπτωση που το n είναι άρτιος, η σύνθεση είναι μεταφορά, η οποία όμως δεν ταυτίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό, εκτός αν το διάνυσμα της είναι μηδενικό (ταυτοτικός μετασχηματισμός). Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει κλειστή πολυγωνική γραμμή με πλευρές παράλληλες και ίσες με τα διανύσματα $\overline{O_1O_2}, \overline{O_3O_4}, \ldots, \overline{O_{n-1}O_n}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα έχουμε στο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ όπου που βλέπουμε στο σχήμα 48 [1].



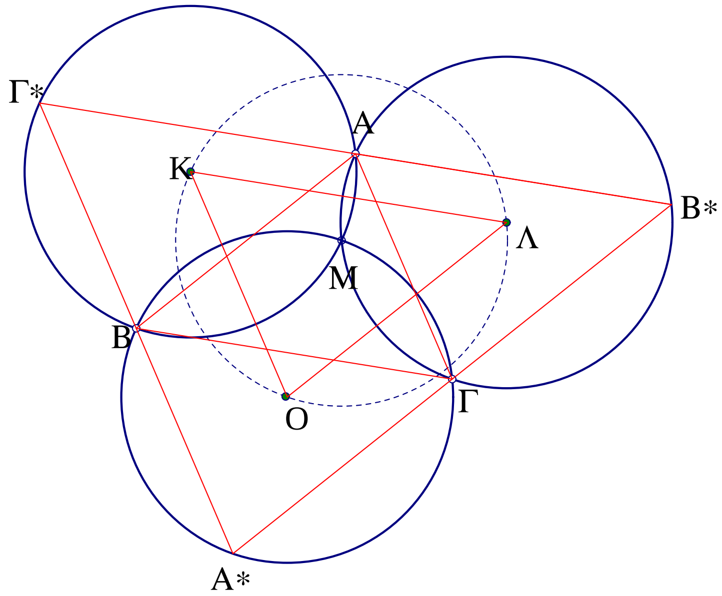
Σχήμα 48: Το Μ απεικονίζεται στο Μ

Πρόβλημα 2.21 Δίνονται τρείς ίσοι κύκλοι κέντρων Ο, Κ και Λ και ακτίνας R, διερχόμενοι από κοινό σημείο Μ. Αν Α, Β και Γ τα υπόλοιπα σημεία τομής τους, να δειχθεί ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με τους άλλους τρείς.



Σχήμα 49: Ίσοι κύκλοι

Απόδειξη:
Πρώτος τρόπος: Από τους ρόμβους ΑΟΜΚ, ΚΓΛΜ και ΟΒΛΜ (Σχήμα 49) βλέπουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει από ημιστροφή του ΟΚΛ γύρω από κάποιο κέντρο, δηλαδή είναι ίσα. Το τρίγωνο ΟΚΛ έχει περιγεγραμμένο κύκλο κέντρου Μ και ακτίνας ίσης με ΜΟ, δηλαδή με του ίδιου μήκους με την R. Επομένως το ίδιο θα συμβαίνει και με το τρίγωνο ΑΒΓ.
Δεύτερος τρόπος: Ο κάθε κύκλος προκύπτει από μεταφορά ενός από τους άλλους δύο κατά διάνυσμα μέτρου ίσου με την απόσταση των δύο κέντρων και κατάλληλη φορά (Σχήμα 50).



Σχήμα 50: Ίσοι κύκλοι

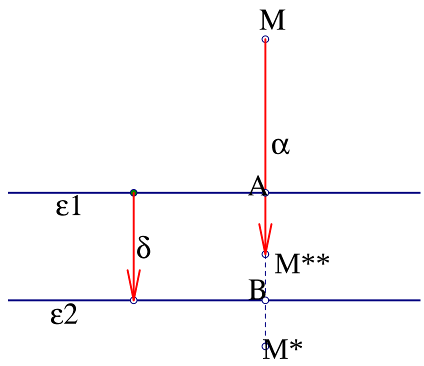
Οι εικόνες του κοινού σημείου Α των κύκλων Κ και Λ μέσω μεταφορών διανυσμάτων $\overline{K\Lambda}$ και $\overline{\Lambda K}$ είναι τα σημεία Β* και Γ* αντίστοιχα. Όμοια για τα σημεία Β και Γ. Εποένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ*, Α*ΒΓ και ΑΒ*Γ είναι ίσα μεταξύ τους καθώς κάθε ένα από αυτά είναι εικόνα μέσω μεταφοράς του άλλου. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με τα τρία προηγούμενα.

2.6 ΑΝΑΚΛΑΣΗ

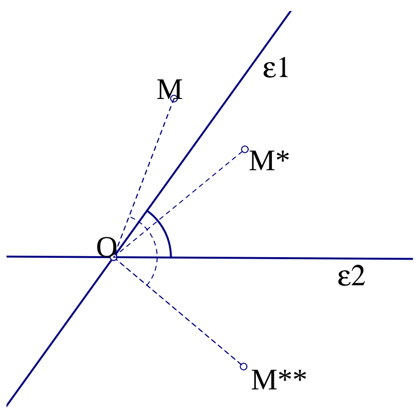
Ορισμός 2.4 Ορίζουμε σαν *ανάκλαση ή συμμετρία ή κατοπτρισμό* F_ε προς ευθεία ε του επιπέδου που ονομάζουμε και άξονα, τον μετασχηματισμό εκείνο κατά τον οποίο κάθε σημείο Μ του επιπέδου απεικονίζεται στο Μ*, έτσι ώστε η ευθεία ε να είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΜ*.

Προφανώς μία ανάκλαση αφήνει αμετάβλητα όλα τα σημεία του άξονα. Είναι εύκολο επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός F_ε^{-1} είναι ίσος με τον F_ε καθώς $F_\varepsilon \circ F_\varepsilon = id$.

Πρόταση 2.9 (**Σύνθεση δύο ανακλάσεων**) Έστω $F = F_{\varepsilon_2} \circ F_{\varepsilon_1}$ η σύνθεση δύο ανακλάσεων προς ευθείες ε_1 και ε_2. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
α) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε η σύνθεση είναι μεταφορά T_α διανύσματος ίσο με το διπλάσιο της απόστασης δ των δύο αξόνων, με φορά από τον πρώτο στον δεύτερο.
β)Αν ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο Ο, τότε έχουμε στροφή κέντρου Ο και γωνίας ω ίσης με το διπλάσιο της προσανατολισμένης γωνίας των ε_1 και ε_2.

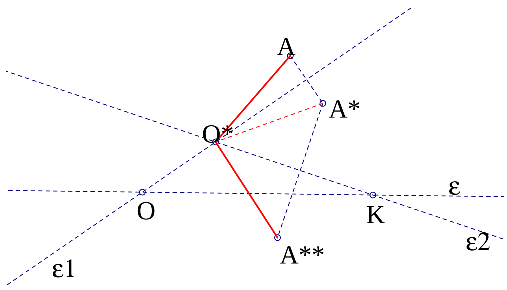


Σχήμα 51: Παράλληλοι άξονες



Σχήμα 52: Τεμνόμενοι άξονες

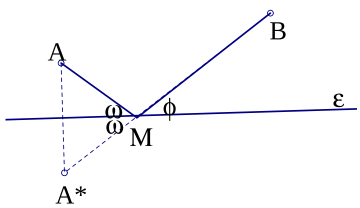
Απόδειξη:
α)$\overline{MM^{**}} = \overline{MM^*} + \overline{M^*M^{**}} = 2\overline{AM^*} + 2\overline{M^*B} = 2\overline{AB}$
β)Η γωνία ΜΟΜ** είναι διπλάσια της γωνίας των δύο ευθειών, και με τον ίδιο προσανατολισμό. Όμοια εξετάζουμε τις περιπτώσεις που το Μ βρίσκεται σε άλλες θέσεις ως προς τις δύο ευθείες.



Σχήμα 53: Σύνθεση δύο στροφών

2.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 2.22 Έστω ευθεία ε και Α, Β δύο σημεία προς το ίδιο μέρος της ε. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας, τέτοιο ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ να σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ε.



Σχήμα 54: ω=φ

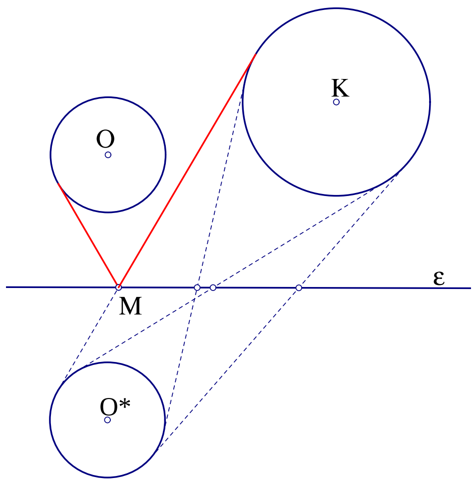
Αν Α* είναι η εικόνα του Α μέσω ανάκλασης στην ευθεία ε, το Μ είναι η τομή του ΑΒ με την ε (Σχήμα 54).

Πρόβλημα 2.23 Δίνεται ευθεία ε και δύο κύκλοι προς το ίδιο μέρος της ε. Ναβρεθεί σημείο Μ της ε, τέτοιο ώστε ένα από τα εφαπτόμενα τμήματα από τα Μ προς τον πρώτο κύκλο και ένα προς τον δεύτερο, να σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ε [1].

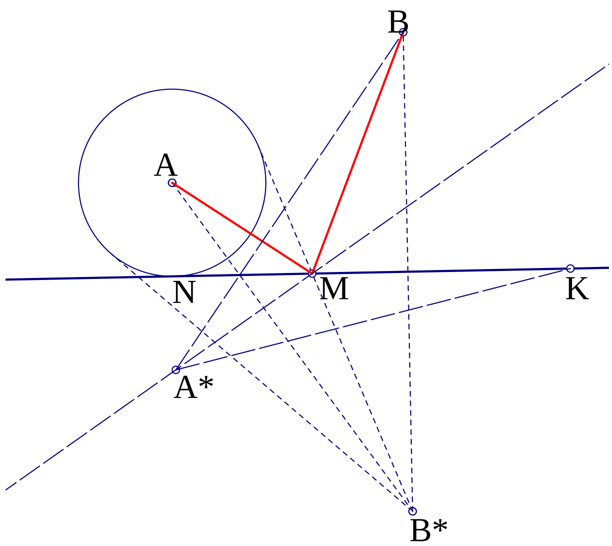
Απόδειξη:
Έστω (Ο*,ρ) η εικόνα του κύκλου (Ο,ρ) μέσω ανάκλασης ως προς την ευθεία ε. Φέρνουμε τα κοινά εφαπτόμενα τμήματα του (Ο*,ρ) με τον άλλο κύκλο (Κ,α). Τα κοινά σημεία αυτών των τμημάτων με την ευθεία ε αποτελούν λύσεις για το πρόβλημα (Σχήμα 55).

Πρόβλημα 2.24 Έστω ευθεία ε και Α, Β δύο σημεία προς το ίδιο μέρος της ε. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας, τέτοιο ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ να σχηματίζουν γωνίες με την ε τέτοιες ώστε η μία να είναι διπλάσια της άλλης [1].

Απόδειξη:
α΄ τρόπος:Έστω Α* και Β* οι εικόνες των Α και Β μέσω ανάκλασης στην ευθεία ε. Προφανώς η ευθεία Α*Μ διχοτομεί την γωνία ΒΜΚ όπου Μ είναι το ζητούμενο σημείο. Έτσι αν Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς Α*Μ, αυτό βρίσκεται πάνω στην ε καιΑ*Κ=Α*Β. Έτσι το Κ βρίσκεται σαν τομή του κύκλου κέντρου Α* και ακτίνας Α*Β με την ε. Στην συνέχεια το Μ προκύπτει σαν τομή της μεσοκαθέτου του ΒΚ μετην ε (Σχήμα 56). **β΄ τρόπος**:Έστω κύκλος κέντρου Α εφαπτόμενος στην ε. Το Μ προκύπτει σαν τομή του εφαπτόμενου τμήματος από το Β* προς τον κύκλο [1].



Σχήμα 55: Εφαπτόμενα τμήματα



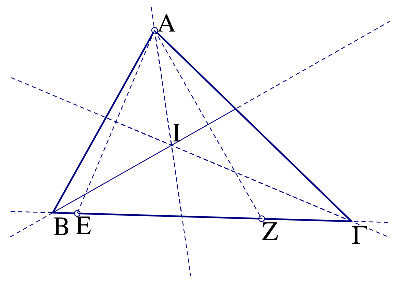
Σχήμα 56: Γωνία BMK=2AMN

Πρόβλημα 2.25 Έστω τρείς ευθείες συντρέχουσες και ένα σημείο A σε μία από αυτές. Κατασκευάστε τρίγωνο ABΓ, το όποίο έχει τις ευθείες αυτές γιά διχοτόμους.

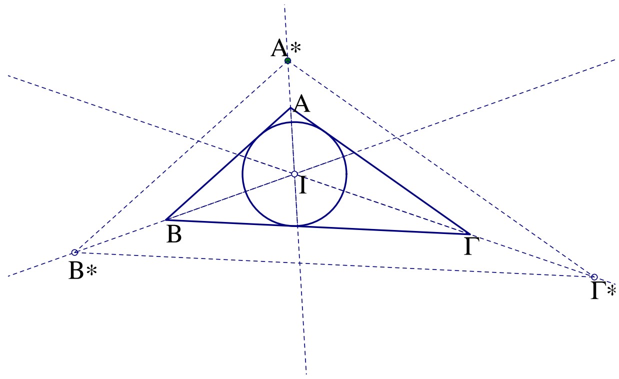
Απόδειξη:
Έστω Z και E τα συμμετρικά του A ως προς τις διχοτόμους των γωνιών B και Γ. Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω στην BΓ. Βρίσκοντας τα σημεία αυτά,φέρνουμε την ευθεία ZE η οποία μας προσδιορίζει τα B και Γ στα σημεία όπου τέμνει τις άλλες δύο δοσμένες ευθείες (Σχήμα 57). Αν δύο από τις τρείς δοσμένες ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, το πρόβλημα δεν έχει λύση [1].

Πρόβλημα 2.26 Δίνεται κύκλος ς και τρείς ευθείες διερχόμενες από το κέντρο του. Να κατασκευαστεί τρίγωνο του οποίου οι κορυφές βρίσκονται πάνω σάυτές τις ευθείες και είναι περιγεγραμμένο στον δοσμένο κύκλο [1].

Απόδειξη:
Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο A* πάνω σε μιά από τις δοθείσες ευθείες και κατασκευάζουμε με τον τρόπο του προηγούμενου προβλήματος, ένα τρίγωνο A*B*Γ* με κορυφές πάνω στις



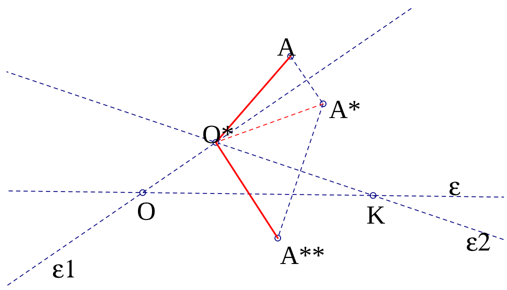
Σχήμα 57: Ε και Ζ είναι σημεία της ΒΓ



Σχήμα 58: Εγγεγραμμένος κύκλος

δοθείσες ευθείες. Στη συνέχεια φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές αυτού του τριγώνου, που να εφάπτονται στον δοσμένο κύκλο (Σχήμα 58).

2.8 ΣΥΝΘΕΣΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ ΓΕΝΙΚΑ- ΚΑΘΟΛΙΚΟΤΗΤΑ ΑΝΑΚΛΑΣΕΩΝ



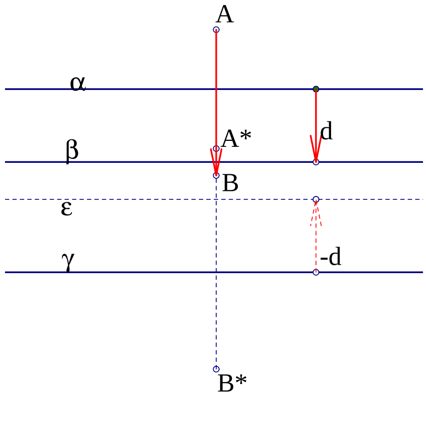
Σχήμα 59: α//β//γ

Βλέπουμε ότι κάθε στροφή καθώς και κάθε μεταφορά, γράφονται σαν σύνθεση ανακλάσεων. Γενικότερα θα αποδείξουμε παρακάτω ότι κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση όχι παραπάνω από τριών ανακλάσεων.

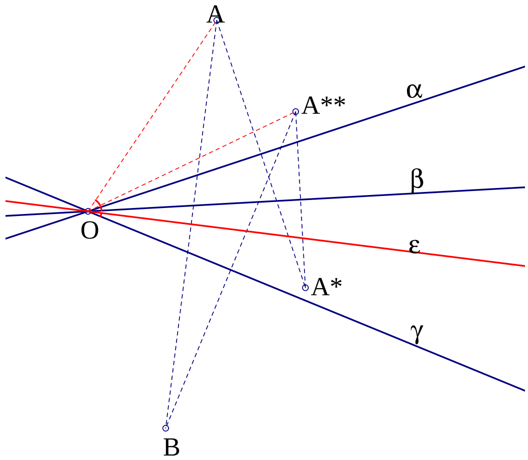
Με την βοήθεια της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να δούμε τώρα πιό ξεκάθαρα την σύνθεση δύο στροφών με κέντρα Ο, Κ και γωνίες α, β αντίστοιχα. Αντικαθιστούμε την πρώτη με δύο ανακλάσεις ως προς τις ΟΟ* και ΟΚ και την δεύτερη επίσης με δύο ανακλάσεις ως προς τις ευθείες ΟΚ και Ο*Κ. Η σύνθεση τους είναι στροφή κέντρου Ο* και γωνίας διπλάσιας από αυτή που σχηματίζουν οι Ο*Ο καιΟ*Κ (Σχήμα 59).

Ας δούμε όμως πρώτα τι συμβαίνει στην σύνθεση τριών ή γενικότερα ν ανακλάσεων.

Πρόταση 2.10 (**Σύνθεση τριών ανακλάσεων**) Η σύνθεση τριών ανακλάσεων με παράλληλους άξονες α//β//γ ή με άξονες που συντρέχουν σε σημείο Ο είναι ανάκλαση σε άξονα παράλληλο με τους τρείς ή που περνά από το Ο αντίστοιχα.



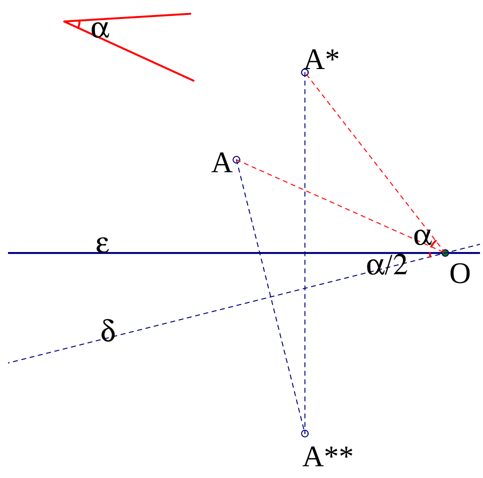
Σχήμα 60: α//β//γ



Σχήμα 61: Συντρέχουσες ευθείες

Απόδειξη:
Έστω ότι έχουμε τρείς ευθείες παράλληλες: α//β//γ (Σχήμα 60). Η σύνθεση των δύο πρώτων ανακλάσεων είναι όπως βλέπουμε μεταφορά κατά διάνυσμα $\overline{AB} = 2\overline{d}$. Η μεταφορά αυτή ισοδυναμεί με σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες ε//γ, όπου η ε είναι μεταφορά της γ κατά διάνυσμα ίσο με $-\overline{d}$. Έτσι τελικά έχουμε $F = F_\gamma \circ F_\beta \circ F_\alpha = F_\gamma \circ F_\gamma \circ F_\varepsilon = F_\varepsilon$ δηλαδή, ανάκλαση ως προς ε. Στην περίπτωση συντρεχουσών ευθειών (Σχήμα 61), η σύνθεση ισοδυναμεί με εκείνη στροφής περί το Ο κατά γωνία ίση με την γωνία των ευθειών α και β, με ανάκλαση ως προς άξονα γ. Επομένως έχουμε ανάκλαση ως προς ευθεία ε σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.11 (**Σύνθεση στροφής με ανάκλαση**) Η σύνθεση στροφής R_o κέντρου Ο κατά γωνία α με ανάκλαση F_ε ως προς ευθεία ε διερχόμενη από το Ο, είναι ανάκλαση ως προς ευθεία δ που προκύπτει από στροφή της ε περί το Ο κατά γωνία αντίθετη και ίση με το μισό της α.

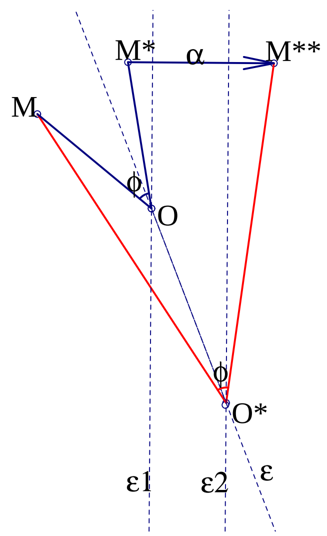


Σχήμα 62: Στροφή και ανάκλαση

Απόδειξη:
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την στροφή με δύο ανακλάσεις ως προς ευθείες των οποίων η γωνία ισούται με α/2. Επιλέγουμε την πρώτη, έστω δ να είναι στροφή της ε με κέντρο Ο και γωνία -α/2, οπότε η δεύτερη είναι η ίδια η ε. Δηλαδή $R_o = F_\varepsilon \circ F_\delta$. Επομένως έχουμε:

$$F_\varepsilon \circ R_o = F_\varepsilon \circ F_\varepsilon \circ F_\delta = F_\delta$$

Πρόταση 2.12 **(Σύνθεση στροφής με μεταφορά)** Η σύνθεση στροφής R_o και γωνίας φ με μεταφορά T_α διανύσματος α, είναι στροφή ίδιας γωνίας περί κάποιο κέντρο Ο*.



Σχήμα 63: Στροφή και μεταφορά

Απόδειξη:
Αντικαθιστούμε την μεταφορά με την σύνθεση δύο ανακλάσεων σε παράλληλες ευθείες ε1//ε2, με απόσταση α/2 μεταξύ τους, επιλέγοντας την ε1 να περνά από το Ο:

$$T_\alpha = F_{\varepsilon 2} \circ F_{\varepsilon 1}$$

Την στροφή την αντικαθιστούμε με την σύνθεση δύο ανακλάσεων στις ε (που περνά από το Ο) και ε2, ώστε να σχηματίζουν γωνία ίση με φ/2:

$$R_o = F_{\varepsilon 1} \circ F_\varepsilon$$

Έτσι έχουμε:

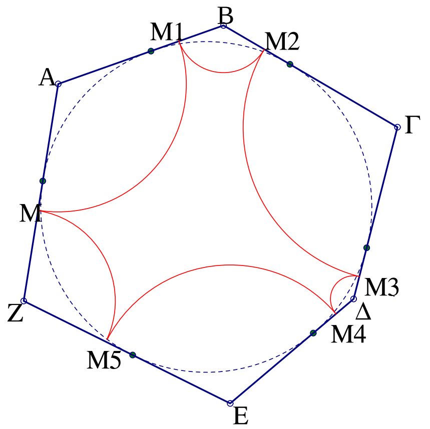
$$T_\alpha \circ R_o = F_{\varepsilon 2} \circ F_{\varepsilon 1} \circ F_{\varepsilon 1} \circ F_\varepsilon = F_{\varepsilon 2} \circ F_\varepsilon = R_{o*}$$

Δηλαδή καταλήξαμε στη σύνθεση δύο ανακλάσεων που ισοδυναμούν με στροφή γωνίας φ περί το σημείο Ο*, τομή των ευθειών ε και ε2 (Σχήμα 63).

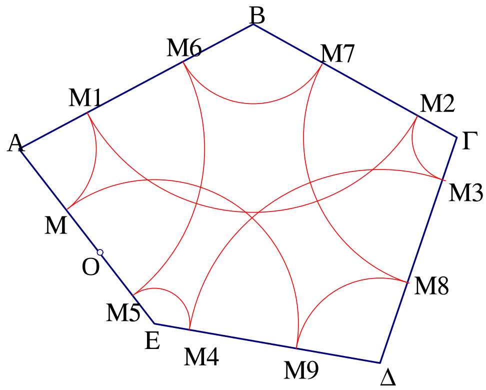
2.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 2.27 α) Δίνεται ν-γωνο με άρτιο πλήθος πλευρών περιγεγγραμμένο (ή περιγράψιμο) σε κύκλο. Να δειχθεί ότι γιά κάθε σημείο Μ μιάς πλευράς του υπάρχει κλειστή διαδρομή (που αρχίζει και τελειώνει στο Μ) αποτελούμενη από ν τόξα κέντρων στις κορυφές του ν-γώνου και με άκρα πάνω στις αντίστοιχες διαδοχικές πλευρές (Σχήμα 64 γιά ν=6). Δηλαδή το σημείο Μ απεικονίζεται στον εαυτό του μέσω ν διαδοχικών στροφών στις κορυφές του ν-γώνου με γωνίες τις αντίστοιχες σε κάθε κορυφή.

β) Δίνεται τυχαίο ν- γωνο για ν περιττό. Να δειχθεί εδώ ότι για κάθε σημείο Μ μιάς πέυράς του υπάρχει κλειστή διαδρομή από το Μ στο Μ που αποτελείται γενικά από 2ν τόξα (σε κάποια ειδική περίπτωση μας φτάνουν ν τόξα). Δηλαδή εδώ το Μ ταυτίζεται με τον εαυτό του μετά από 2ν διαδοχικές στροφές στις κορυφές του ν-γώνου, περνώντας 2 φορές από κάθε μία (Σχήμα 65 γιά ν=5).



Σχήμα 64: Κλειστή γραμμή ν τόξων



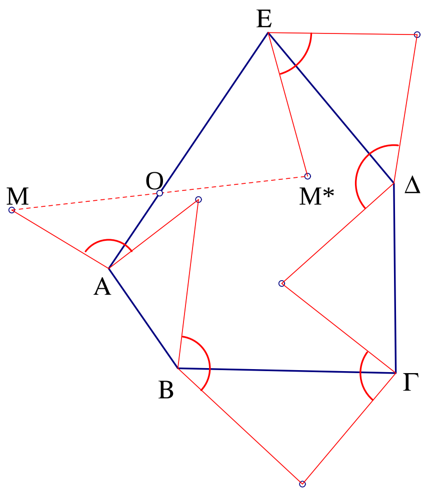
Σχήμα 65: Κλειστή γραμμή 2ν τόξων

Απόδειξη:
α) Η σύνθεση ν στροφών συνολικής γωνίας πολλαπλάσιου των 360^o, καθώς το ν-γωνο έχει άρτιο πλήθος πλευρών, είναι μεταφορά ή ταυτοτική. Ο ίδιος όμως μετασχηματισμός προκύπτει μετά από σύνθεση ανακλάσεων στις διχοτόμους των γωνιών του ν-γώνου. Καθώς όμως οι διχοτόμοι συντρέχουν στο κέντρο του εγγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου, η σύνθεση αυτή είναι στροφή με κέντρο το σημείο αυτό. Επομένως έχουμε ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο, άρα την ταυτοτική απεικόνιση.

β) Εδώ αρχικά έχουμε σύνθεση ν στροφών συνολικής γωνίας πολλαπλάσιου των 180^o, γιατί το ν είναι περιττός. Έτσι γενικά προκύπτει ημιστροφή ως προς κάποιο σημείο Ο της πλευράς που ξεκινήσαμε. Σαν σύνθεση όμως περιττού πλήθους ανακλάσεων στις διχοτόμους των γωνιών του ν-γώνου, έχουμε ολισθανάκλαση ή ανάκλαση. Το σημείο Ο όμως είναι σταθερό και στους δύο μετασχηματισμούς τωνπροηγούμενων συνθέσεων. Επομένως έχουμε ανάκλαση ως προς άξονα κάθετο στο Μ στην πλευρά του πολυγώνου. Αν επαναλάβουμε την ίδια σύνθεση, προκύπτει σύνθεση ανάκλασης με τον εαυτό της, άρα η ταυτοτική απεικόνιση [1].

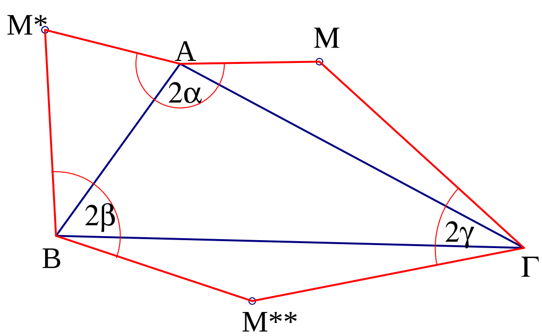
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

Πρόταση 2.13 Η σύνθεση στροφών με κέντρα τις κορυφές ενός ν-γώνου με περιττό ν και γωνίες τις αντίστοιχες σε κάθε κορυφή, είναι ημιστροφή με κέντρο σημείο μιάς πλευράς (ή της προέκτασης της) του πολυγώνου (Σχήμα 66).



Σχήμα 66: Σύνθεση ν στροφών

Πρόβλημα 2.28 Να δειχθεί ότι η σύνθεση των στροφών $R_\gamma \circ R_\beta \circ R_\alpha$ με κέντρα τις αντίστοιχες κορυφές τριγώνου ΑΒΓ και γωνίες στροφής διπλάσιες εκείνων του τριγώνου και με φορά αντίθετη της φοράς ΑΒΓ (από Γ προς Β, από Α προς Γ και από Β προς Α) είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Ισχύει αντίστοιχη πρόταση γιά τυχαίο ν-γωνο;



Σχήμα 67: Το Μ απεικονίζεται στον εαυτό του

Απόδειξη:
Έστω τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου και Μ* και Μ** οι εικόνες του μέσω των πρώτων δύο

στροφών. Θα δείξουμε ότι η σύνθεση των δύο αυτών με την τρίτη στροφή απεικονίζει τελικά το σημείο Μ στον εαυτό του (Σχήμα 67). Η κάθε μία από τις παραπάνω στροφές, ισοδυναμεί με σύνθεση δύο ανακλάσεων στις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου. Δηλαδή:

$$R_\alpha = F_\gamma \circ F_\beta$$

$$R_\beta = F_\alpha \circ F_\gamma$$

και

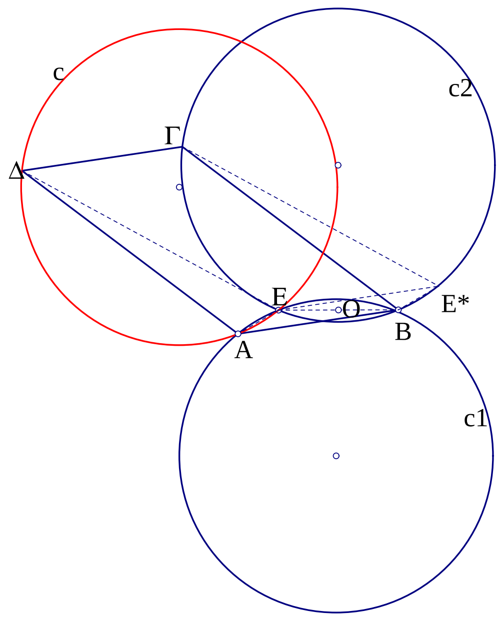
$$R_\gamma = F_\beta \circ F_\alpha$$

Έτσι έχουμε:

$$R_\gamma \circ R_\beta \circ R_\alpha = (F_\beta \circ F_\alpha) \circ (F_\alpha \circ F_\gamma) \circ (F_\gamma \circ F_\beta) = F_\beta \circ F_\beta = id$$

όπου F_α, F_β και F_γ είναι οι αντίστοιχες ανακλάσεις στις πλευρές του ΑΒΓ. Ομοίως αποδεικνύεται η ίδια πρόταση γιά τυχαίο ν-γωνο [1].

Πρόβλημα 2.29 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και δύο ίσοι κύκλοι c_1 και c_2 που διέρχονται από τις κορυφές Α, Β και Β, Γ αντίστοιχα. Αν Ε είναι το δεύτερο κοινό σημείο των παραπάνω κύκλων, να δειχθεί ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Ε, Α και Δ, είναι ίσος με τους δύο πρώτους.

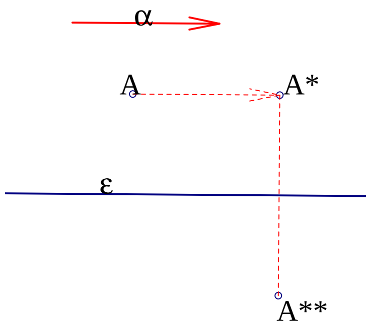


Σχήμα 68: Τρείς ίσοι κύκλοι

Απόδειξη:
Το μέσον Ο της κοινής χορδής των δύο δεδομένων κύκλων αποτελεί κέντρο συμμετρίας που απεικονίζει τον c_1 στον c_2. Αν Ε* είναι η εικόνα του Α μέσω αυτού του μετασχηματισμού, έχουμε ότι τα ΕΕ*, ΑΒ καιΔΓ είναι παράλληλα και ίσα μεταξύ τους. Άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΕΑΔ είναι μεταφορά του c_2 κατά διάνυσμα ίσο με $\overline{\Gamma\Delta}$, άρα ίσος με αυτόν (Σχήμα 68).

2.10 ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΗ

Ορισμός 2.5 Δίνεται ευθεία ε και διάνυσμα α παράλληλο με αυτην. Η σύνθεση $F_\varepsilon \circ T_\alpha$ της μεταφοράς T_α με την ανάκλαση F_ε ως προς την ευθεία, ονομάζεται *ολισθανάκλαση* (Σχήμα 69).



Σχήμα 69: Ολισθανάκλαση

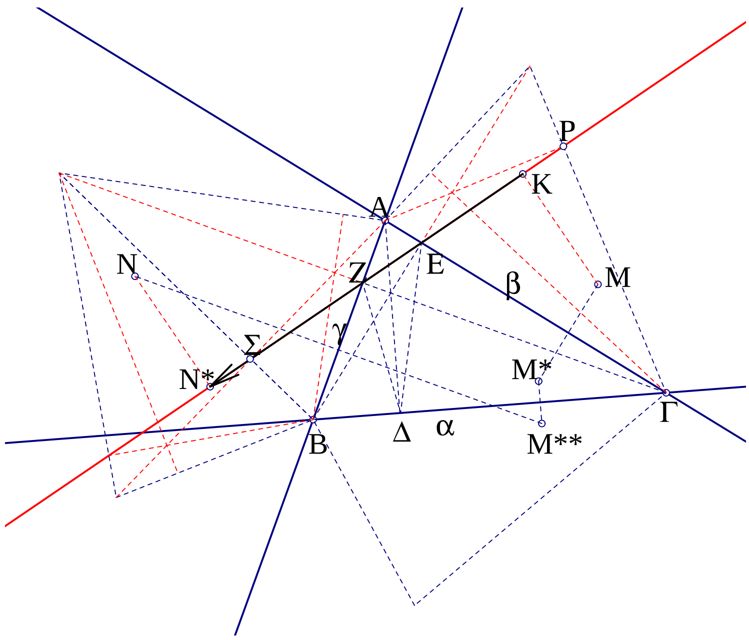
Προφανώς ο μετασχηματισμός αυτός, γράφεται σαν σύνθεση τριών ανακλάσεων. Είναι εύκολο επίσης να δούμε ότι η παραπάνω σύνθεση παραμένει ίδια και αν αλλάξουμε την σειρά των μετασχηματισμών που την απαρτίζουν

$$F_\varepsilon \circ T_\alpha = T_\alpha \circ F_\varepsilon$$

. Επίσης, η σύνθεση δύο ολισθανακλάσεων είναι μεταφορά διπλάσιου διανύσματος:

$$(F_\varepsilon \circ T_\alpha) \circ (F_\varepsilon \circ T_\alpha) = (T_\alpha \circ F_\varepsilon) \circ (F_\varepsilon \circ T_\alpha) = T_\alpha \circ T_\alpha = T_{2\alpha}$$

Πρόταση 2.14 (Σύνθεση τριών ανακλάσεων σε πλευρές τριγώνου) Η σύνθεση τριών ανακλάσεων σε άξονες ανα δύο τεμνόμενους σε σημεία A,B και Γ, είναι μία *ολισθανάκλαση*. Η ολισθανάκλαση αυτή έχει άξονα μία πλευρά του ποδικού τριγώνου του ΑΒΓ και διάνυσμα μεταφοράς ίσου με την περίμετρο του ποδικού τριγώνου.



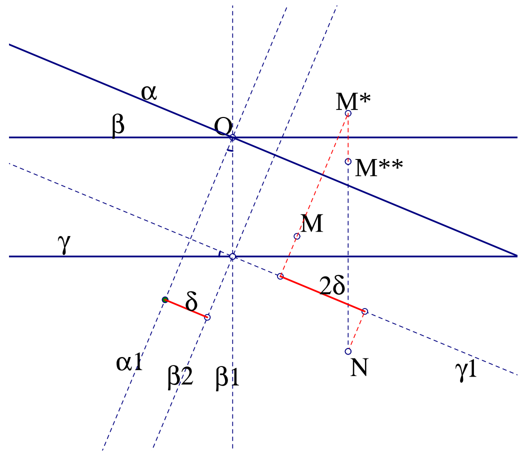
Σχήμα 70: Ανακλάσεις σε πλευρές τριγώνου

Απόδειξη:
Έστω M ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου και M*, M** και N οι εικόνες του μέσω των διαδοχικών ανακλάσεων στις β,α και γ. Στο σχήμα βλέπουμε ανακλάσεις του τριγώνου ΑΒΓ στις πλευρές του. Από την ιδιότητα του ποδικού τριγώνου να σχηματίζουν οι πλευρές του ίσες

γωνίες στις πλευρές του ΑΒΓ, προκύπτει ότι η ευθεία ΖΕ περνά από τα ίχνη των υψών και των συμμετρικών τριγώνων. Παρατηρούμε (Σχήμα 70) ότι ΚΝ*=ΡΣ=ΡΕ+ΕΖ+ΖΣ=ΔΕ+ΕΖ+ΖΔ και ΜΚ=ΝΝ* λόγω των ανακλάσεων του ΑΒΓ.

Μένει να δούμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε ανάκλαση σε ζεύγος παραλλήλων και μία τέμνουσα αυτές ευθεία.

Πρόταση 2.15 (Σύνθεση τριών ανακλάσεων σε δύο παράλληλες και μία τέμνουσα) Η σύνθεση τριών ανακλάσεων σε τρείς άξονες α,β και γ από τους οποίους οι δύο είναι παράλληλοι και ο τρίτος τους τέμνει, είναι μία ολισθανάκλαση.



Σχήμα 71: Ολισθανάκλαση

Απόδειξη:
Έστω α και β τεμνόμενες στο Ο και γ//β. Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο και Μ*, Μ** και Ν οι εικόνες μέσω διαδοχικών ανακλάσεων $F_\alpha(M) = M^*, F_\beta(M^*) = M^{**}, F_\gamma(M^{**}) = N$ στις α, β και γ αντίστοιχα (Σχήμα 71). Δηλαδή έχουμε:

$$F_\gamma \circ F_\beta \circ F_\alpha(M) = N$$

Η σύνθεση $F_\beta \circ F_\alpha$ ισοδυναμεί με $F_{\beta_1} \circ F_{\alpha_1}$, όπου οι ευθείες α_1 και β_1 διέρχονται από το Ο, σχηματίζουν γωνία ίδια με αυτή των α και β και $\beta_1 \perp \gamma$. Έτσι έχουμε:

$$F_\gamma \circ F_\beta \circ F_\alpha = F_\gamma \circ F_{\beta_1} \circ F_{\alpha_1}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τη σύνθεση $F_\gamma \circ F_{\beta_1}$ με την $F_{\gamma_1} \circ F_{\beta_2}$, όπου οι ευθείες β_2 και γ_1 είναι κάθετες μεταξύ τους και $\beta_2 parallel \alpha_1$. Έτσι έχουμε:

$$F_\gamma \circ F_{\beta_1} \circ F_{\alpha_1} = F_{\gamma_1} \circ F_{\beta_2} \circ F_{\alpha_1}$$

Αλλά η σύνθεση $F_{\beta_2} \circ F_{\alpha_1}$ είναι μεταφορά διανύσματος 2δ όπου δ η απόσταση των παραλλήλων $\beta_2 \parallel \alpha_1$, οπότε καταλήγουμε σε ολισθανάκλαση με άξονα την γ. Όμοια εργαζόμαστε σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ανάκλασης σε τρείς ευθείες που δεν είναι όλες παράλληλες και δεν συντρέχουν.

Γενικά ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.16 (Σύνθεση ανακλάσεων γενικά) Η σύνθεση άρτιου πλήθους ανακλάσεων είναι στροφή ή μεταφορά, ενώ γιά περιττό πλήθος έχουμε ανάκλαση ή ολισθανάκλαση.

Απόδειξη:
Πράγματι, ανα δύο οι ανακλάσεις αντικαθίστανται από στροφή ή μεταφορά. Αλλά η σύνθεση στροφών ή μεταφορών είναι πάλι στροφή ή μεταφορά. Αν τώρα έχουμε μία επί πλέον ανάκλαση, η σύνθεση ισοδυναμεί με στροφή ή μεταφορά και ανάκλαση, δηλαδή τελικά σύνθεση τριών ανακλάσεων.

Πρόταση 2.17 Έστω F_1, F_2, F_3 ανακλάσεις ως προς τρείς συντρέχουσες ευθείες. Αν το σημείο Α ανακλασθεί διαδοχικά στις τρείς και κατόπιν στις ίδιες με την ίδια πάλι σειρά, η τελική εικόνα είναι πάλι το Α:

$$F_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 = id$$

. Γενικά ισχύει το ίδιο γιά περιττό πλήθος συντρεχουσών ευθειών. Γιά ή συντρέχουσες ευθείες δεν ισχύει το ίδιο, καθώς θα έχουμε σύνθεση δύο ίσων ολισθανακλάσεων, δηλαδή μεταφορά.

$$F_3 \circ F_2 \circ F_1 = F_3 \circ F_2 \circ F_1$$

Γενικά, γιά περιττό πλήθος συντρέχουσών ευθειών, η σύνθεση δεν αλλάζει.

Γιά ανακλάσεις σε τέσσερις συντρέχουσες ευθείες έχουμε:

$$F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 = F_2 \circ F_1 \circ F_4 \circ F_3$$

γιά ανακλάσεις σε τέσσερις συντρέχουσες ευθείες.

Γιά τρείς τυχαίες ευθείες στο επίπεδο, ισχύει:

$$(F_3 \circ F_2 \circ F_1) \circ (F_3 \circ F_2 \circ F_1) \circ (F_1 \circ F_3 \circ F_2) \circ (F_1 \circ F_3 \circ F_2) = (F_1 \circ F_3 \circ F_2) \circ (F_1 \circ F_3 \circ F_2) \circ (F_3 \circ F_2 \circ F_1) \circ (F_3 \circ F_2 \circ F_1)$$

Απόδειξη:
Η ανάκλαση όπως και η ημιστροφή είναι ενελλικτικός μετασχηματισμός, δηλαδή ισούται με τον αντίστροφο του. Επίσης η σύνθεση περιττού πλήθους ανακλάσεων σε συντρέχουσες ευθείες είναι ανάκλαση. Η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη της αντίστοιχης πρότασης γιά ημιστροφές. Γιά τέσσερις συντρέχουσες ευθείες έχουμεότι η σύνθεση των 4 ανακλάσεων είναι σύνθεση δύο στροφών (η σύνθεση δύο ανακλάσεων είναι στροφή ως προς το σημείο τομής των αξόνων τους). Εδώ και τα δύο ζευγάρια ευθειών έχουν κοινό σημείο τομής, άρα η σύνθεση δεν αλλάζει αν αλλάξουμε τη σειρά των στροφών. Γιά τρείς τυχαίες (όχι απαραίτητα συντρέχουσες) ευθείες, η σύνθεση των τριών ανακλάσεων είναι ανάκλαση ή ολισθανάκλαση. Η σύνθεση όμως μιάς ολισθανάκλασης με τον εαυτό της είναι μία μεταφορά (στην περίπτωση ανάκλασης είναι ταυτοτική). Έτσι η τελευταία αλλαγή στη σειρά των τριάδων ανακλάσεων είναι στην ουσία εναλλαγή δύο μεταφορών.

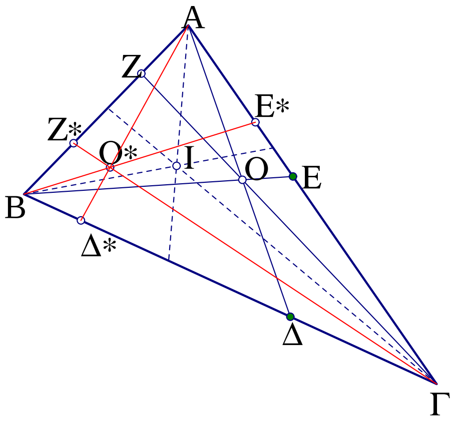
Πρόβλημα 2.30 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε και Ζ τρία σημεία στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ακόμη ΑΔ*, ΒΕ* και ΓΖ* οι εικόνες των ανακλάσεων των ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ στις διχοτόμους των γωνιών Α, Β και Γ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι αν τα τρία πρότυπα συντρέχουν (Σχήμα 72, τό ίδιο συμβαίνει και με τις εικόνες τους. Αν πάλι τα πρότυπα είναι παράλληλα, το ίδιο επίσης ισχύει γιά τις εικόνες τους [1].

Απόδειξη:
Σύμφωνα με την πρόταση 2.17, η σύνθεση τριών ανακλάσεων, αν επαναληφθεί με την ίδια σειρά, μας δίνει την ταυτοτική απεικόνιση, αν και μόνο αν οι τρείς άξονες συντρέχουν ή είναι παράλληλες. Δηλαδή αν F_1, F_2 και F_3 είναι οι ανακλάσεις στις ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ αντίστοιχα, τότε έχουμε:

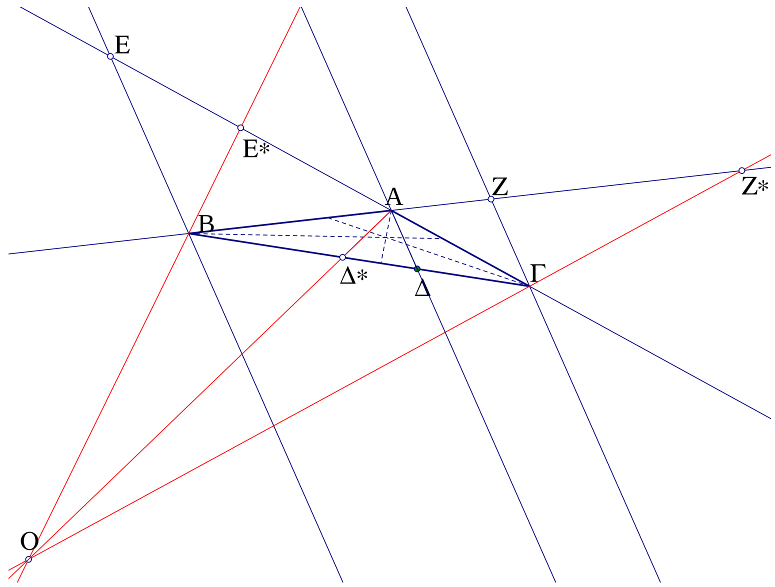
$$(F_3 \circ F_2 \circ F_1) \circ (F_3 \circ F_2 \circ F_1) = id$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για ανακλάσεις F_{1*}, F_{2*} και F_{3*} στις ΑΔ*, ΒΕ* και ΓΖ* αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση των ανακλάσεων διαδοχικά στις ΑΒ, ΑΔ και ΑΓ ισούται με την ανάκλαση στην ΑΔ*. Αυτό ισχύει γιατί η γωνία των δύο πρώτων ισούται με την γωνία των ΑΔ* και ΑΓ*, άρα η σύνθεση τους (που είναι στροφή κέντρου Α και γωνίας ίσης με την διπλάσια της γωνίας των δύο αξόνων) ισούται με την σύνθεση των ανακλάσεων στους άξονες ΑΔ* και ΑΓ (Σχήμα 74). Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και το γεγονός ότι η σύνθεση δύο ίσων ανακλάσεων είναι ταυτοτική, έχουμε: (Με F_α, (F_β και F_γ συμβολίζουμε τις ανακλάσεις στις πλευρές α, β και γ του ΑΒΓ αντίστοιχα)

$$F_\beta \circ (F_1 \circ F_\gamma) = F_\beta \circ (F_\beta \circ F_{1*}) = F_{1*}$$



Σχήμα 72: Ανάκλαση συντρεχουσών



Σχήμα 73: Ανάκλαση παραλλήλων

και ομοίως προκύπτουν οι ισότητες:

$$F_\gamma \circ (F_2 \circ F_\alpha) = F_\gamma \circ (F_\gamma \circ F_{2*}) = F_{2*}$$

$$F_\alpha \circ (F_3 \circ F_\beta) = F_\alpha \circ (F_\alpha \circ F_{3*}) = F_{3*}$$

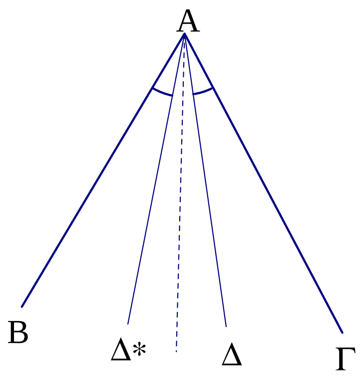
Επομένως έχουμε:

$$F_{3*} \circ F_{2*} \circ F_{1*} = F_\beta \circ F_1 \circ F_\gamma \circ F_\gamma \circ F_2 \circ F_\alpha \circ F_\alpha \circ F_3 \circ F_\beta = F_\beta \circ F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (F_{3*} \circ F_{2*} \circ F_{1*}) \circ (F_{3*} \circ F_{2*} \circ F_{1*}) = (F_\beta \circ F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_\beta) \circ (F_\beta \circ F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_\beta) =$$
$$= F_\beta \circ (F_1 \circ F_2 \circ F_3) \circ (F_1 \circ F_2 \circ F_3) \circ F_\beta = F_\beta \circ F_\beta = id$$

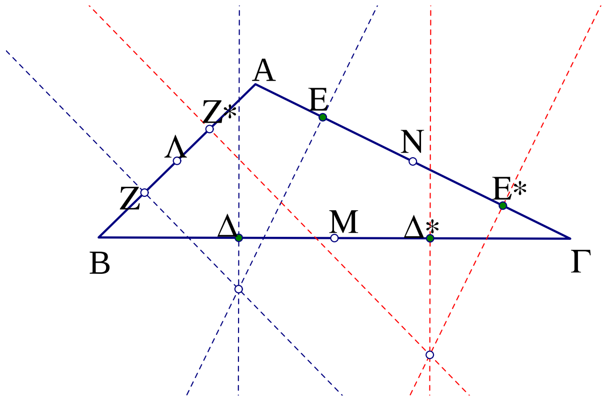
(Καθώς $(F_1 \circ F_2 \circ F_3) \circ (F_1 \circ F_2 \circ F_3) = id$). Έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο. Αν οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, με την ίδια διαδικασία αποδεικνύουμε ότι οι ΑΔ*, ΒΕ* και ΓΖ* συντρέχουν (Σχήμα 73).

Πρόβλημα 2.31 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε και Ζ τρία σημεία στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ακόμη Δ*, Ε* και Ζ* τα συμμετρικά των Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα



Σχήμα 74: Συμμετρικοί άξονες

ως προς τα μέσα των τριών πλευρών του τριγώνου (Σχήμα 75). Να δειχθεί ότι αν οι κάθετες προς τις αντιστοιχες πλευρές στα σημεία Δ, Ε και Ζ συντρέχουν, το ίδιο συμβαίνει και με τις κάθετες στα σημεία Δ*, Ε* και Ζ* [1].



Σχήμα 75: Συμμετρικές ως προς τα μέσα

Απόδειξη:
Έστω α, β και γ οι πλευρές του ΑΒΓ και δ, ε, ζ, δ*, ε*, ζ* οι κάθετες στα αντίστοιχα σημεία Δ, Ε, Ζ, Δ*, Ε*, Ζ* (Σχήμα 75). Η ανάκλαση ως προς δ* ισούται με την σύνθεση των ανακλάσεων στις χ, δ και ψ (Σχήμα 76):

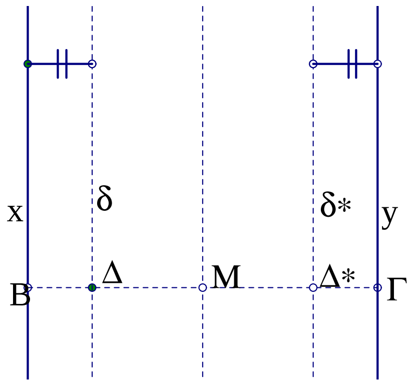
$$F_y \circ (F_\delta \circ F_x) = F_y \circ (F_y \circ F_{\delta *}) = F_{\delta *}$$

Άρα

$$F_{\delta *} = F_\alpha \circ h_\beta \circ F_\delta \circ h_\beta \circ F_\alpha$$

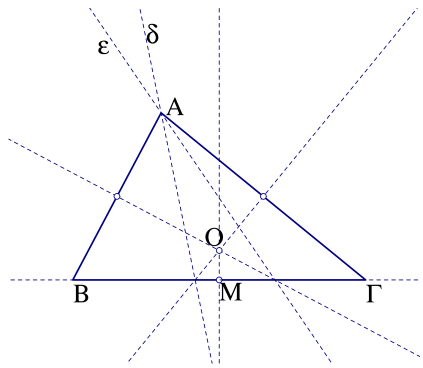
καθώς οι ανακλάσεις στις χ και ψ ισοδυναμούν με συνθέσεις της ανάκλασης στην α με τις αντίστοιχες ημιστροφές στα Β και Γ αντίστοιχα: $F_x = h_\beta \circ F_\alpha$ και $F_y = h_\gamma \circ F_\alpha$ Κάνοντας το ίδιο και με τις ανακλάσεις στις ε* και ζ*, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα (λαμβάνοντας πάντα υπ'οψιν ότι η σύνθεση δύο ίσων ημιστροφών ή ανακλάσεων είναι ταυτοτική) ότι:

$$(F_{\delta *} \circ F_{\varepsilon *} \circ F_{\zeta *}) \circ (F_{\delta *} \circ F_{\varepsilon *} \circ F_{\zeta *}) = id$$



Σχήμα 76: Ανακλάσεις σε παράλληλες

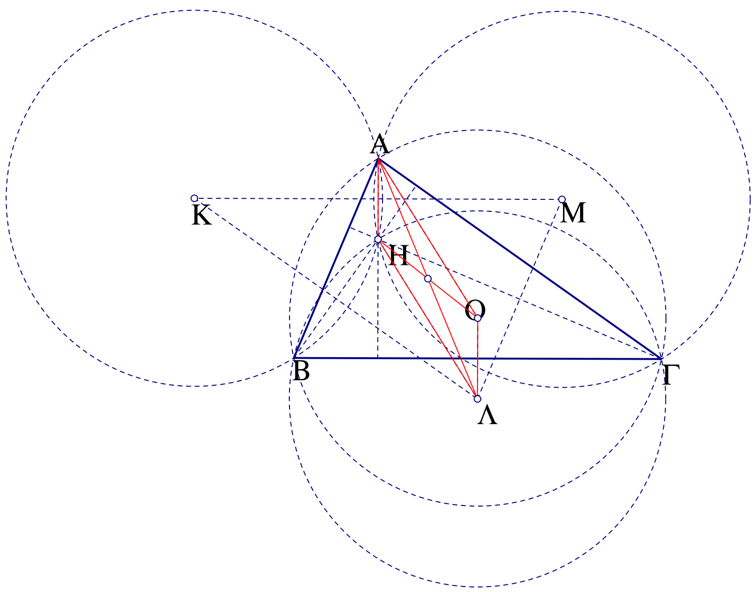
Πρόβλημα 2.32 Έστω τρείς συντρέχουσες ευθείες και ένα σημείο Μ μιάς από αυτές. Να βρεθεί τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο το Μ να είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και οι τρείς ευθείες να είναι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου [1].



Σχήμα 77: Τρείς μεσοκάθετοι

Απόδειξη:
Προφανώς, η ευθεία ΒΓ μας είναι γνωστή. Επομένως η κορυφή Α προσδιορίζεται σαν τομή των ευθεών ε και δ, συμμμετρικών της ΒΓ ως προς τις άλλες δύο δοθείσες ευθείες (Σχήμα77).

Πρόβλημα 2.33 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο του. Αν c_1, c_2, c_3, c_4 είναι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΓΗ, ΑΓΗ, ΑΒΗ, ΑΒΓ και Λ, Μ, Κ, Ο τα κέντρα τους αντίστοιχα, δείξτε ότι:
α) Οι τέσσερις κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους.
β) Το τετράπλευρο ΛΜΚΟ προκύπτει από το ΑΒΓΗ με ημιστροφή.

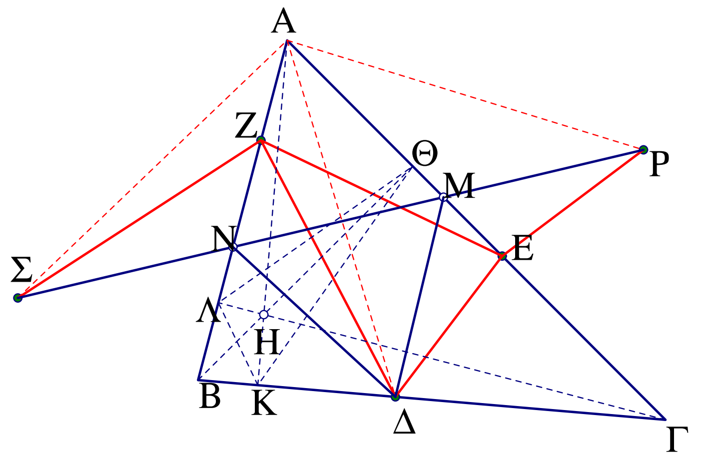


Σχήμα 78: ΛΜΚΟ=ΑΒΓΗ

Απόδειξη:
α) Ο κύκλος c_1 είναι συμμετρικός του c_4 ως προς ΒΓ γιατί το συμμετρικό του ορθόκεντρου ως προς μία πλευρά ενός τριγώνου, είναι σημείο του περιγεγραμμένου του κύκλου. Επομένως c_1=c_4 (όμοια και με τους άλλους δύο κύκλους).
β) Το τετράπλευρο ΑΗΛΟ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει ΛΟ//ΑΗ και ΛΗ=ΑΟ (Σχήμα78).

(Δεν μπορεί να είναι ισοσκελές τραπέζιο, καθώς οι παράλληλες πλευρές του δεν έχουν κοινή μεσοκάθετο). Άρα ΑΛ και ΗΟ έχουν κοινό μέσο, το οποίο προφανώς είναι το κέντρο της ζητούμενης ημιστροφής.

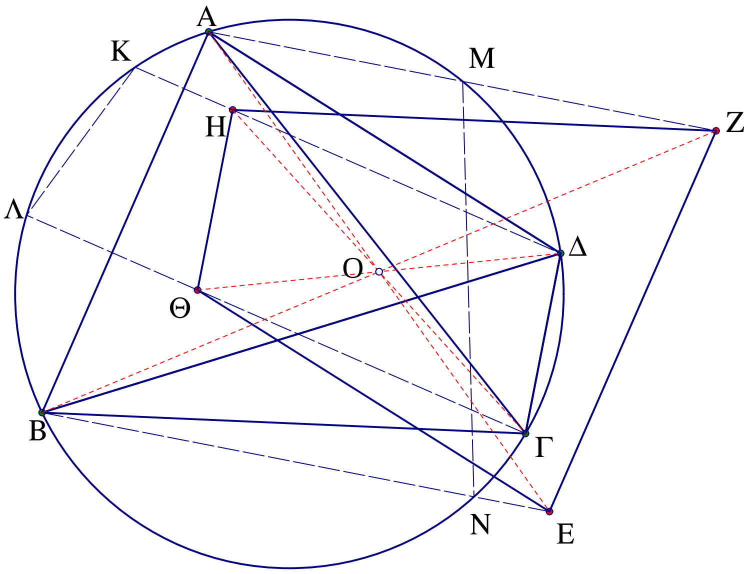
Πρόβλημα 2.34 Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου που εγγράφεται σε δοθέν οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι εκείνο που έχει κορυφές του τα ίχνη των υψών του, το ονομαζόμενο *ποδικό* ή *ορθικό* τρίγωνο του ΑΒΓ. Το πρόβλημα αυτό τέθηκε πρώτα το 1775 από τον Ιταλό Μαθηματικό $I.F.Fagnano$. Λύσεις έδωσαν μεταξύ άλλων και οι $Schwarz$, $Samelson$, $Izvolsky$ και $Fejer$.



Σχήμα 79: Τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου

Απόδειξη:
Έστω ΔΕΖ τρίγωνο εγγεγραμμένο στο δοθέν ΑΒΓ, με σταθερή την κορυφή Δ σε τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ και τις κορυφές Ζ και Ε να κινούνται στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Βρίσκουμε τα σημεία Σ και Ρ συμμετρικά του Δ ως προς ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα (Σχήμα 79). Η περίμετρος του ΔΕΖ ισούται με το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΣΖΕΡ, άρα είναι μικρότερη από το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΣΡ, το οποίο ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΔΝΜ, όπου Ν και Μ τα σημεία τομής της ΣΡ με τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα, από όλα τα εγγεγραμμένα στο ΑΒΓ τρίγωνα με σταθερή κορυφή στο Δ, την ελάχιστη περίμετρο έχει το ΔΝΜ. Παρατηρούμε όμως ότι η ΣΡ είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΣΡ το οποίο έχει σταθερά τα μέτρα των γωνιών του (επομένως και τις αναλογίες των πλευρών του, καθώς η γωνία της κορυφής του $\angle$ΣΑΡ είναι διπλάσια της σταθερής $\angle$ΒΑΓ. Έτσι, για να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος ΣΡ αρκεί ναελαχιστοποιήσουμε το μήκος ΑΣ. Αλλά ΑΣ=ΑΔ και η ελάχιστη τιμή του ΑΔ επιτυγχάνεται όταν το ΑΔ είναι ύψος του ΑΒΓ, δηλαδή ταυτίζεται με το ΑΚ. Τότε όμως το ΔΕΖ ταυτίζεται με το ποδικό τρίγωνο ΚΛΘ το οποίο είναι τελικά το ζητούμενο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου (Λύση $Fejer$).

Πρόβλημα 2.35 Έστω Α, Β, Γ ,Δ τέσσερα ομοκυκλικά σημεία σε κύκλο c και Η, Θ, Ζ, Ε τα ορθόκεντρα των τριγώνων ΑΔΒ, ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΒΓΔ. Να αποδειχθεί ότι: α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ προκύπτει από ημιστροφή του ΑΒΓΔ με κέντρο κάποιο σημείο Ο. β) Οι τετράδες ΑΒΘΗ, ΓΔΖΕ, ΑΔΗΖ, ΒΓΘΕ, ΒΔΗΕ, ΑΓΖΘ, ΕΖΗΘ είναι ομοκυκλικές και ανήκουν σε κύκλους ίσους προς τον c.

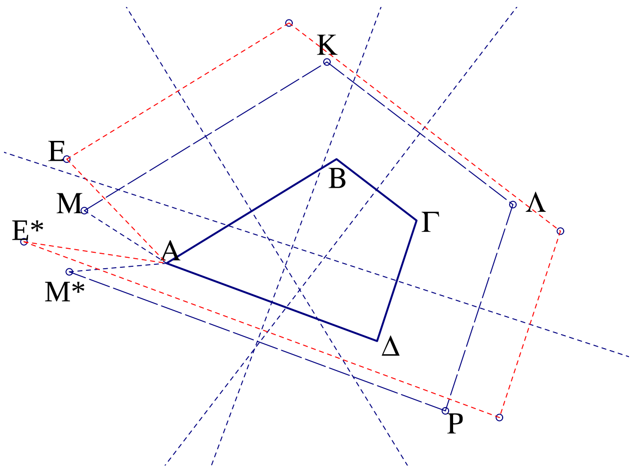


Σχήμα 80: ΕΖΗΘ=ΑΒΓΔ

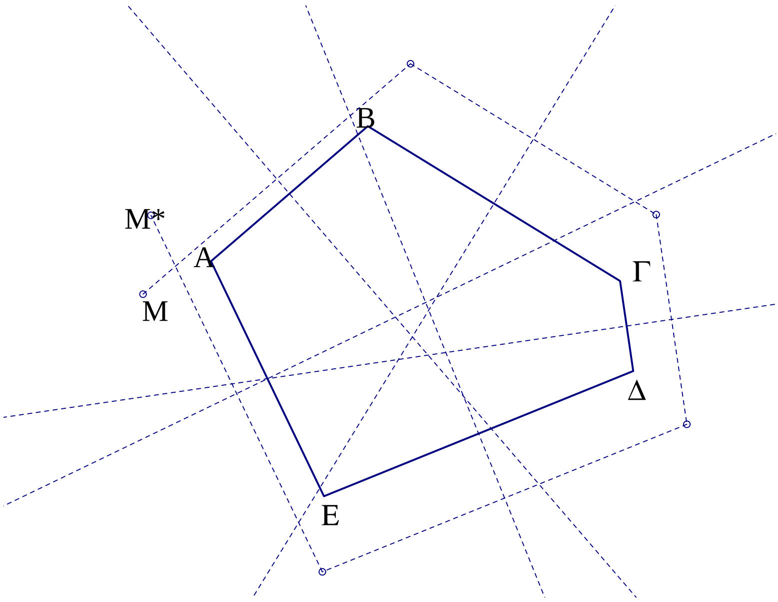
Απόδειξη:
α)Το συμμετρικό του ορθόκεντρου κάθε τριγώνου ως προς μία πλευρά του, βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο του κύκλο. Έτσι αν Κ και Λ είναι τα συμμετρικά των Η και Θ αντίστοιχα ως προς την ευθεία ΑΒ, το ΓΔΚΛ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο, άρα ισοσκελές. Επομένως το ΚΛ και ΔΓ είναι συμμετρικά ως προς την κοινή μεσοκάθετο των βάσεων του ισοσκελούς τραπεζίου. Τελικά το ΗΘ είναι η εικόνα του ΔΓ μέσω της σύνθεσης δύο ανακλάσεων με παράλληλους άξονες, επομένως είναι μία μεταφορά. Άρα ΔΘ και ΗΓ έχουν κοινό μέσο (έστω Ο). Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν αντίστοιχες κορυφές των ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν κοινό μέσον το σημείο Ο (Σχήμα 80).
β)Λόγω της συμμετρίας των ΗΘ και ΚΛ, η εικόνα του c μέσω ανάκλασης ως προς ΒΓ είναι κύκλος ίσος προς αυτον που περνά από τις κορυφές του ΑΒΘΗ. Όμοια και με τις άλλες τετράδες.

Πρόβλημα 2.36 Δίνονται ν ευθείες στο επίπεδο. Να κατασκευαστεί ν-γωνο του οποίου οι δοσμένες ευθείες να είναι:
α) Μεσοκάθετοι των πλευρών του.
β) Εσωτερικές ή εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του [1].

Απόδειξη:
α) Προφανώς η εύρεση έστω μιάς κορυφής του πολυγώνου, οδηγεί στην κατασκευή του. Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου. Η εικόνα του Μ* μέσω διαδοχικών ανακλάσεων στις μεσοκαθέτους των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,... ενός πολυγώνου ΑΒΓ... έχει την ιδιότητα να απέχει με το Μ την ίδια απόσταση από την κορυφή Α, καθώς ΜΑ=ΚΒ=ΛΓ=...=Μ*Α (Στα σχήματα 81 και 82 έχουμε περιπτώσεις για ν=4 ή 5). Έτσι η κορυφή Α βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της ΜΜ*. Ομοίως βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της ΕΕ* για κάποιο άλλο σημείο Ε και την εικόνα του Ε* μέσω των ίδιων ανακλάσεων. Έτσι προσδιορίζεται το Α σαν τομή των δύο μεσοκαθέτων. Σε αυτή την διαδικασία όμως δεν φαίνονται ποιές είναι οι προϋποθέσεις ύπαρξης ή μη λύσης του προβλήματος (μιάς ή περισσοτέρων). Ας δούμε μία άλλη αντιμετώπιση όπου γίνεται φανερή και η αναγκαιότητα διάκρισης των περιπτώσεων για ν περιττό ή άρτιο αριθμό. Η σύνθεση άρτιου αριθμού ανακλάσεων είναι μία στροφή ή μεταφορά. Στην περίπτωση λοιπόν του άρτιου ν, η κορυφή Α προσδιορίζεται σαν το σταθερό



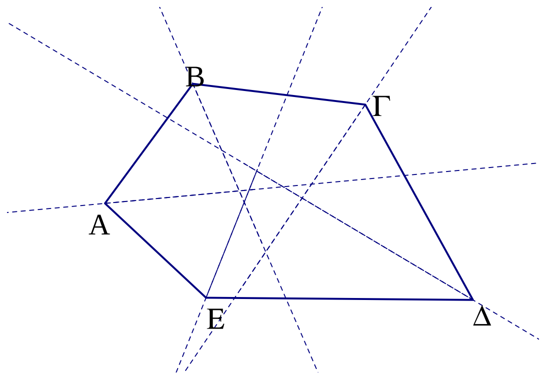
Σχήμα 81: ν=4



Σχήμα 82: ν=5

σημείο της προηγούμενης σύνθεσης, δηλαδή το κέντρο αν αυτή είναι στροφή. Δηλαδή έχουμε μοναδική λύση. Στην περίπτωση που έχουμε μεταφορά (μη μηδενικού διανύσματος), δεν έχουμε λύση. Τέλος στην περίπτωση που ησύνθεση των ν ανακλάσεων είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, τότε έχουμε άπειρες λύσεις καθώς κάθε σημείο είναι σταθερό.
Γιά ν περιττό αριθμό, η παραπάνω σύνθεση είναι ολισθανάκλαση ή ανάκλαση. Η μεν πρώτη δεν έχει σταθερά σημεία, άρα δεν μας δίνει λύση, η δε δεύτερη έχει σταθερά όλα τα σημεία του άξονα της άπειρες λύσεις).
β)Εδώ μας αρκεί η εύρεση του φορέα μιάς πλευράς του ν-γώνου. Έστω η περίπτωση του σχήματος 83 γιά ν=5. Η ευθεία ΑΕ είναι η σταθερή ευθεία της σύνθεσης όλων των ανακλάσεων ως προς τις διχοτόμους των γωνιών Α, Β, Γ, Δ και Ε. Γενικά, γιά την περίπτωση περιττού ν, η παραπάνω σύνθεση είναι ολισθανάκλαση ή ανάκλαση. Στην ολισθανάκλαση άχουμε μία σταθερή ευθεία, τον άξονα, οπότε έχουμε μοναδική λύση. Στην περίπτωση που η σύνθεση των ανακλάσεων στις ν ευθείες είναι ανάκλαση, έχουμε άπειρες λύσεις καθώς εκτός από τον άξονα συμμετρίας, σταθερές έχουμε όλες τις κάθετες σε αυτόν ευθείες.

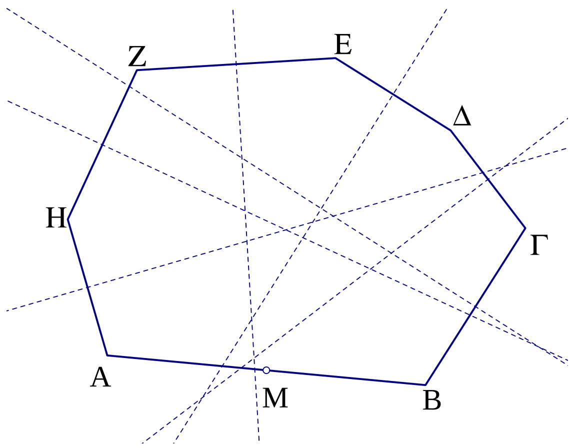
Γιά άρτιο πλήθος ευθειών, η σύνθεση είναι στροφή γωνίας ω περί κάποιο κέντρο Ο, ή μεταφορά κατά διάνυσμα α, ή ταυτοτική απεικόνιση. Στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα γενικά δεν έχει λύση, καθώς ο μετασχηματισμός της στροφής δεν έχει σταθερή ευθεία.



Σχήμα 83: Κατασκευή πολυγώνου

Εξαιρείται εδώ η περίπτωση της ημιστροφής (ω=180^o), οπότε έχουμε άπειρες λύσεις τις ευθείες που διέρχονται από το Ο. Και στην περίπτωση της μεταφοράς έχουμε άπειρες λύσεις όλες τις παράλληλες προς το διάνυσμα α ευθείες, ενώ άπειρες λύσεις έχουμε στην περίπτωση που η σύνθεση είναι ταυτοτική, καθώς οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου μπορεί να θεωρηθεί σαν φορέας της πλευράς του προς κατασκευή ν-γώνου.

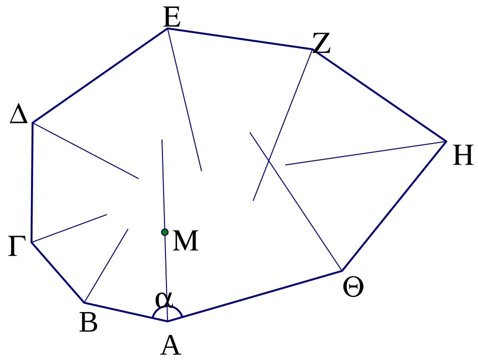
Πρόβλημα 2.37 Δίνονται ν-1 ευθείες και σημείο Μ του επιπέδου.Να κατασκευαστεί ν-γωνο στο οποίο το Μ να είναι:
α)Μέσον της μιάς πλευράς του και οι δεδομένες ευθείες μεσοκάθετοι των υπολοίπων πλευρών του.
β)Σημείο της διχοτόμου μιάς γωνίας του Α η οποία να έχει δεδομένη τιμή α και οι ευθείες να είναι διχοτόμοι των υπολοίπων γωνιών του [1].



Σχήμα 84: Μ μέσο της ΑΒ

Απόδειξη:

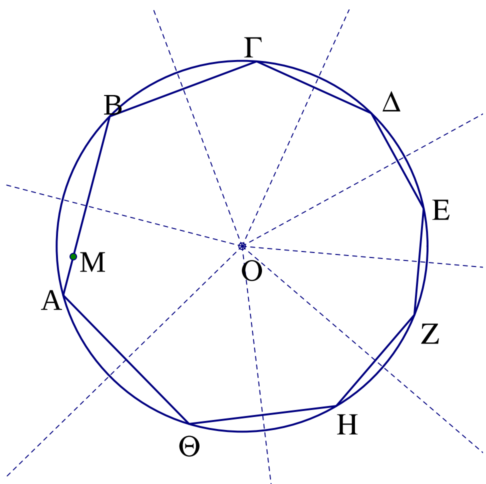
α)Έστω ΑΒΓΔΕΖ (Σχήμα 84) το προς κατασκευή ν-γωνο (ν=7).Το ζητούμενο εδώ είναι να βρούμε το σταθερό σημείο της σύνθεσης μιάς ημιστροφής περί το Ο με ν-1 ανακλάσεις στις μεσοκαθέτους των υπολοίπων πλευρών, καθώς η κορυφή Α απεικονίζεται στον εαυτό της μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού. Γνωρίζοντας ότι η ημιστροφή ισοδυναμεί με σύνθεση δύο ανακλάσεων, έχουμε συνολικά ν+1 ανακλάσεις. Στην περίπτωση περιττού ν έχουμε άρτιο πλήθος ανακλάσεων,δηλαδή γενικά στροφή (ή μεταφορά ή ταυτοτική). Η στροφή έχει ένα σταθερό σημείο (μοναδική λύση), ενώ η μεταφορά κανένα (καμία λύση) και η ταυτοτική άπειρα (άπειρες λύσεις). Στην περίπτωση άρτιου ν, (περιττό πλήθος ανακλάσεων), έχουμε



Σχήμα 85: Μ σημείο της διχοτόμου της α

ολισθανάκλαση ή ανάκλαση, δηλαδή καμία ή άπειρες λύσεις, τα σημεία του άξονα της ανάκλασης.
β)Έστω ΑΒΓΔΕΖΗΘ (Σχήμα 84) το ζητούμενο πολύγωνο (ν=8).Το πρόβλημα εδώ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και το προηγούμενο. Η στροφή περί το Α κατά γωνία 180^o-α απεικονίζει την ΑΒ στην ΒΓ. Η τελευταία απεικονίζεται πάλι στην ΑΒ έπειτα από ν-1 ανακλάσεις στις διχοτόμους των υπολοίπων γωνιών. Έτσι ζητάμε σταθερή ευθεία στην σύνθεση στροφής με ν-1 ανακλάσεις, δηλαδή πάλι ν+1 ανακλάσεις. Για ν περιττό έχουμε αδύνατο πρόβλημα για την στροφή και άπειρες λύσεις γιά τις περιπτώσεις που η σύνθεση είναι ημιστροφή, μεταφορά ή ταυτοτική. Γιά ν άρτιο, έχουμε μοναδική λύση για την περίπτωση της ολισθανάκλασης και άπειρες στην ανάκλαση.

Πρόβλημα 2.38 Να εγγραφεί ν-γωνο σε δεδομένο κύκλο έτσι ώστε:
α)Οι πλευρές του να είναι παράλληλες σε ν δεδομένες ευθείες.
β)Η μιά του πλευρά να περνά από δεδομένο σημείο Μ και οι υπόλοιπες να είναι παράλληλες με ν-1 δεδομένες ευθείες.



Σχήμα 86: Εγγραφή ν-γώνου

Απόδειξη:

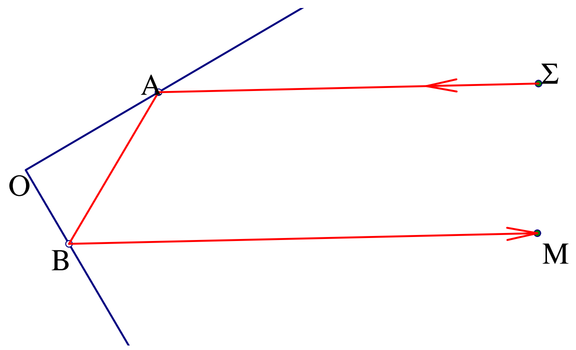
α) Έστω ΑΒΓΔΕΖΗΘ το ζητούμενο πολύγωνο του σχήματος 86(γιά ν=8). Η εικόνα της κορυφής Α μέσω ανακλάσεων στις μεσοκαθέτους των διαδοχικών πλευρών του είναι η ίδια η κορυφή Α. Έτσι αναζητάμε πάλι το σταθερό σημείο της σύνθεσης αυτών των ανακλάσεων.

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών θεωρούνται γνωστές καθώς έχουν γνωστή διεύθυνση και δεδομένο το κοινό τους σημείο Ο. Στην περίπτωση που το ν είναι άρτιος, η παραπάνω σύνθεση είναι στροφή περί το Ο, το οποίο είναι και το μόνο σταθερό της σημείο. Έτσι σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα δεν έχει λύση, παρά μόνο αν προκύπτει ταυτοτική απεικόνιση. Γιά ν πετιττό, η σύνθεση περιττού πλήθους ανακλάσεων σε συντρέχουσες στο Ο ευθείες, είναι ανάκλαση σε άξονα διερχόμενο επίσης από το Ο. Τα κοινά σημεία αυτού του άξονα με τον δεδομένο κύκλο μας δίνουν δύο λύσεις στο πρόβλημα, καθώς και τα δύο είναι σταθερά σημεία της ανάκλασης.
β)Και σε αυτή την περίπτωση οι μεσοκάθετοι των ν-1 πλευρών είναι γνωστές. Η εικόνα της κορυφής Β μέσω των ν-1 ανακλάσεων, είναι η κορυφή Α του πολυγώνου μας. Διακρίνουμε πάλι τις περιπτώσεις άρτιου ή περιττού ν. Στην περίπτωση του άρτιου, έχουμε περιττό πλήθος ανακλάσεων, άρα τελικά ανάκλαση ως προς άξονα διερχόμενο από το Ο. Γνωρίζοντας το σημείο Μ της πλευράς ΑΒ, κατασκευάζουμε την πλευρά αυτή φέρνοντας κάθετη από το Μ προς τον γνωστό πλέον άξονα. Δηλαδή έχουμε μοναδική λύση. Γιά περιττό ν, έχουμε σύνθεση άρτιου πλήθους ανακλάσεων, δηλαδή στροφή περί το Ο κατά γνωστή γωνία φ. Επομένως γνωρίζουμε και το απόστημα της χορδής ΑΒ. Έτσι η πλευρά ΑΒ κατασκευάζεται φέρνοντας από το σημείο Μ εφαπτόμενα τμήματα προς τον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ίσης με το γνωστό απόστημα. μπορεί εδώ να προκύψουν δύο, μία ή καμία λύση. Καμία λύση έχουμε και στην περίπτωση που η παραπάνω σύνθεση δίνει την ταυτοτική απεικόνιση.

Πρόβλημα 2.39 Να εξεταστεί πότε μία φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη διαδοχικά σε δύο επίπεδα κάτοπτρα που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία α, ανακλάται τελικά σε αντίθετη κατεύθυνση, παράλληλα προς την αρχική. Συγκεκριμένα, να δειχθεί ότι αυτό συμβαίνει μετά από ν ανακλάσεις και στα δύο κάτοπτρα (2ν συνολικά ανακλάσεις), για γωνία

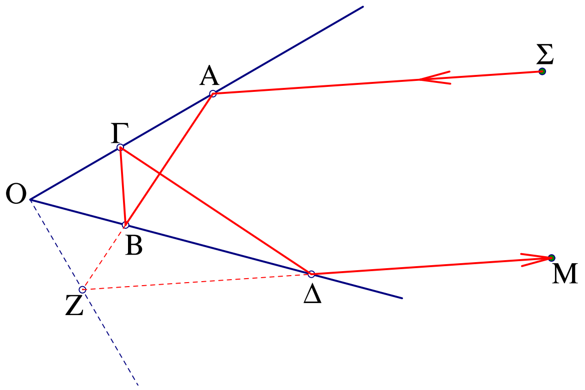
$$\alpha = \frac{90^0}{\nu}$$

(Ισχύει ότι αναφέρει ο νόμος της ανάκλασης, ότι δηλαδή προσπίπτουσα και ανακλώμενη σχηματίζουν ίσες γωνίες με το κάτοπτρο) [1].

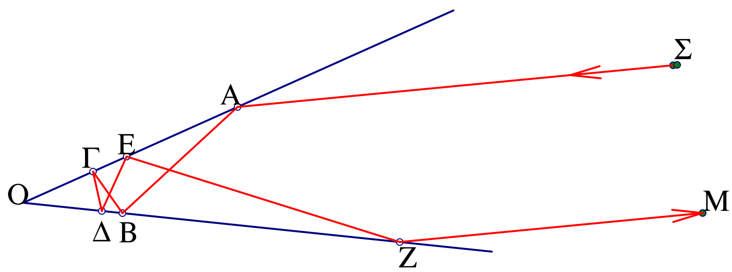


Σχήμα 87: Ανακλάσεις σε γωνία 90

Απόδειξη:
Στην περίπτωση που α=90^0, βλέπουμε εύκολα ότι το ζητούμενο γίνεται μετά από μία ανάκλαση σε κάθε πλευρά καθώς οι γωνίες Α και Β είναι παραπληρωματικές (Σχήμα 87). Απαραίτητη βέβαια συνθήκη εδώ όπως και στις επόμενες περιπτώσεις, είναι η γωνία της πρώτης προσπίπτουσας να είναι διάφορη της ορθής, καθώς σε αυτή την περίπτωση ανακλάται στην ίδια διαδρομή. Έστω τώρα α=45^0 (ν=2). Βλέπουμε εδώ ότι αυτή η περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, αν αντικαταστήσουμε την διαδρομή ΑΒΓΔΜ με την ΑΒΖΔΜ, όπου ΟΖ είναι η συμμετρική της ΟΓ ως προς την ΟΒ (Σχήμα 88). Όμοια μπορεί να χειριστούμε και τις περιπτώσεις ν=3,4,...κλπ. (Γιά ν=3 δες το σχήμα 89). Μπορούμε όμως να το δούμε γενικότερα, εφαρμόζοντας την σύνθεση ανακλάσων. Η σύνθεση δύο ανακλάσεων στις δύο



Σχήμα 88: Ανακλάσεις σε γωνία 45



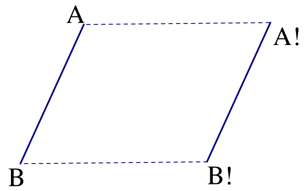
Σχήμα 89: Ανακλάσεις σε γωνία 30

πλευρές της γωνίας α, είναι στροφή κέντρου Ο και γωνίας 2α. Για να έχουμε λοιπόν τελική ανάκλαση με αντίθετη κατεύθυνση, πρέπει να έχουμε συνολική στροφή γωνίας 180^0. Άρα

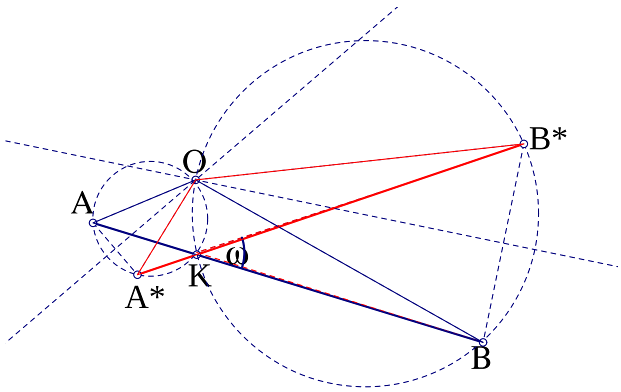
$$2\nu\alpha = 180^0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{90^0}{\nu}$$

3 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Πρόταση 3.1 (**Ομορρόπως ίσα σχήματα**) Κάθε δύο ομορρόπως ίσα σχήματα μπορούν να έρθουν σε σύμπτωση με την εφαρμογή μιάς στροφής η μιας μεταφοράς.



Σχήμα 90: Παράλληλη μεταφορά



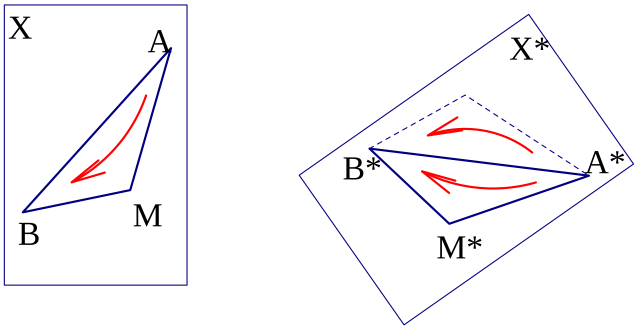
Σχήμα 91: Κέντρο στροφής

Απόδειξη:
Αν τα ευθύγραμμα τμήματα AB και A^*B^* είναι παράλληλα και ίσα, έχοντας την ίδια κατεύθυνση, τότε μία μεταφορά κατά διάνυσμα AA′ μας είναι αρκετή.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία τα AB και A′B′ σχηματίζουν γωνία ω, όπου $0 \leq \omega \leq 180^0$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και A^*B^* συμπίπτουν έφαρμόζοντας στροφή κέντρου O και γωνίας ω, όπου το O είναι η τομή των μεσοκαθέτων των AA^* και BB^* . Στην περίπτωση κατά την οποία τα τμήματα είναι παράλληλα με διαφορετική κατεύθυνση ισχύουν τα προηγούμενα με ω=180^o. Το παραπάνω σημείο O προκύπτει σαν το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων AA^*K και BB^*K Το τελευταίο είναι άμεση συνέπεια της ισότητας των τριγώνων με βάσεις τα AB και A^*B^*, και κοινή κορυφή το O, θεωρώντας το σαν το δεύτερο κοινό σημείο των παραπάνω κύκλων, αν παρατηρήσουμε ότι οι παρά τις βάσεις γωνίες βαίνουν στο ίδιο τόξο κάθε κύκλου.

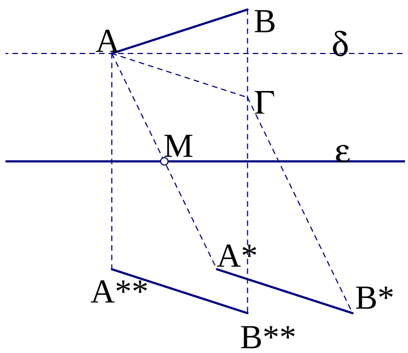
Έστω δύο ομορρόπως ίσα σχήματα X και X* και δύο σημεία A και B του πρώτου και τα αντίστοιχά τους A* καιB* του δεύτερου. Προφανώς ισχύει η ισότητα AB=A*B*, οπότε υπάρχει στροφή (ή μεταφορά) που απεικονίζει το τμήμα AB στο A*B*. Θα δείξουμε ότι κάθε σημείο M του πρώτου σχήματος απεικονίζεται μέσω αυτού του μετασχηματισμού στο αντίστοιχο της του δευτέρου σχήματος, δηλαδή όλο το X απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού στο X*. Έστω M* η εικόνα του M μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού. Θα δείξουμε ότι το M* είναι το αντίστοιχο σημείο του M στο σχήμα X*. Πρέπει να επιλέξουμε με ποιά από τις δυο κορυφές των τριγώνων του X* που σχηματίζονται με βάση την A*B* συμπίπτει το M*. (Και τα δύο τρίγωνα έχουν πλευρές ίσες με αυτές του ABM και είναι



Σχήμα 92: Ομορρόπως ίσα σχήματα

συμμετρικά ως προς Α*Β*, βλέπε σχήμα 92). Η εικόνα του ΑΒΜ μέσω στροφής ή μεταφοράς είναι τρίγωνο ίδιου προσανατολισμού. Επίσης, τα σχήματα Χ και Χ* έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Επομένως δεν μπορεί η εικόνα του Μ μέσω του μετασχηματισμού και το αντίστοιχο σημείο του Μ στο Χ* να είναι συμμετρικά ως προς ΑΒ, καθώς θα όριζαν τρίγωνα αντίθεων προσανατολισμών.

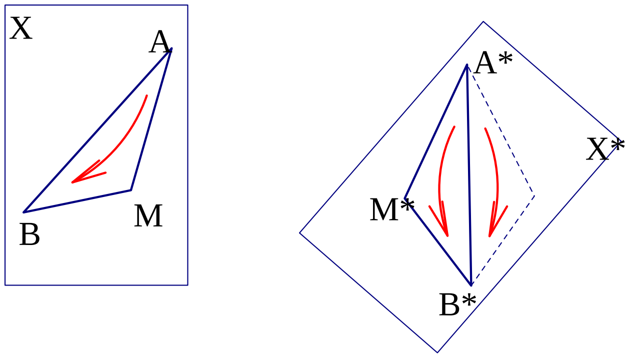
Πρόταση 3.2 (**Αντιρρόπως ίσα σχήματα**) Κάθε δύο αντιστρόφως ίσα σχήματα στο επίπεδο, μπορούν να ταυτισθούν με χρήση μιάς ανάκλασης ή ολισθανάκλασης.



Σχήμα 93: Ανάκλαση ή ολισθανάκλαση

Απόδειξη:
Θα δείξουμε πρώτα ότι δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να έρθουν σε σύμπτωση, μέσω μιάς ανάκλασης ή ολισθανάκλασης με άξονα ευθεία ε Σχήμα 93. Έστω ε ο ζητούμενος άξονας και ΑΒ=Α*Β* τα δύο ίσα τμήματα. Κάνουμε μεταφορά του δεύτερου σε θέση ΑΓ//=Α*Β*. Αν Α**Β** η εικόνα του ΑΒ μέσω ανάκλασης ως προς ε, τότε προφανώς Α**Β**//ΑΓ. Επίσης η διχοτόμος δ των ΑΒ και ΑΓ είναι παράλληλη της ε (η σύνθεση των ανακλάσεων του ΑΓ ως προς δ και ε δίνουν τμήμα παράλληλο του). Άρα η ε περνά από το μέσον Μ της ΑΑ*, οπότε μπορεί να προσδιοριστεί καθώς η διεύθυνση της είναι επίσης γνωστή (αυτή της δ).

Έστω τώρα δύο αντιρρόπως ίσα σχήματα Χ και Χ* και δύο σημεία Α και Β του πρώτου και τα αντίστοιχά τους Α* καιΒ* του δεύτερου. Με όμοιο τρόπο όπως προηγουμένως ότι η ανάκλαση ή ολισθανάκλαση που απεικονίζει το ΑΒ στο Α*Β*, απεικονίζει κάθε σημείο του Χ στο Χ*, άρα ολόκληρο το πρώτο σχήμα στο δεύτερο (Σχήμα 94). Η μόνη διαφορά εδώ είναι



Σχήμα 94: Αντιρρόπως ίσα σχήματα

ότι και ο μετασχηματισμός αλλάζει τον προσανατολισμό, αλλά και τα X, X* έχουν αντίθετο προσανατολισμό.

Από τις προτάσεις 3.1 και 3.2 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

Πρόταση 3.3 Κάθε δύο ίσα σχήματα του επιπέδου μπορούν να συμπέσουν μέσω ενός μετασχηματισμού στροφής, μεταφοράς, ανάκλασης ή ολισθανάκλασης.

Πρόταση 3.4 Κάθε δύο ίσα σχήματα του επιπέδου μπορούν να συμπέσουν μέσω ενός μετασχηματισμού που είναι σύνθεση ανακλάσεων σε δύο ευθείες ε1 και ε2, ή μιάς ανάκλασης σε ευθεία ε και μιάς ημιστροφής κέντρου O

Απόδειξη:
Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς ίσοδυναμεί με σύνθεση δύο ανακλάσεων σε παράλληλους άξονες. Η στροφή γράφεται σαν σύνθεση ανακλάσεων σε τεμνόμενες ευθείες. Η ολισθανάκλαση είναι σύνθεση τριών ευθειών ε1, ε2 και ε3 από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στην τρίτη. Η σύνθεση όμως των καθέτων ε2 και ε3 είναι ημιστροφή ως προς το σημείο τομής τους.

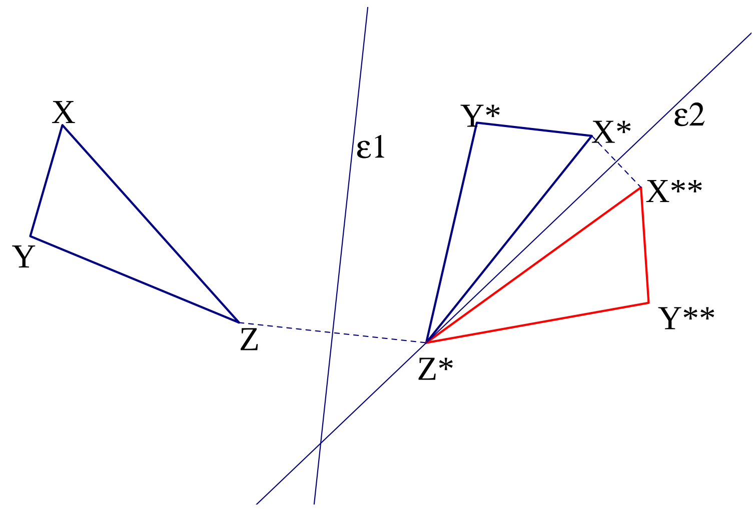
Συνδιάζοντας όλα τα προηγούμενα σχετικά με την σύνθεση των Ευκλείδειων μετασχηματισμών του επιπέδου συμπεραίνουμε ότι:

Πρόταση 3.5 Κάθε δύο ίσα σχήματα του επιπέδου μπορούν να συμπέσουν μέσω ενός μετασχηματισμού που είναι σύνθεση το πολύ τριών ανακλάσεων σε εθείες ε1, ε2 και ε3. Συγκεκριμένα στην περίπτωση των ομορρόπως ίσων σχημάτων μας αρκούν δύο ανακλάσεις, (σχήμα 95).

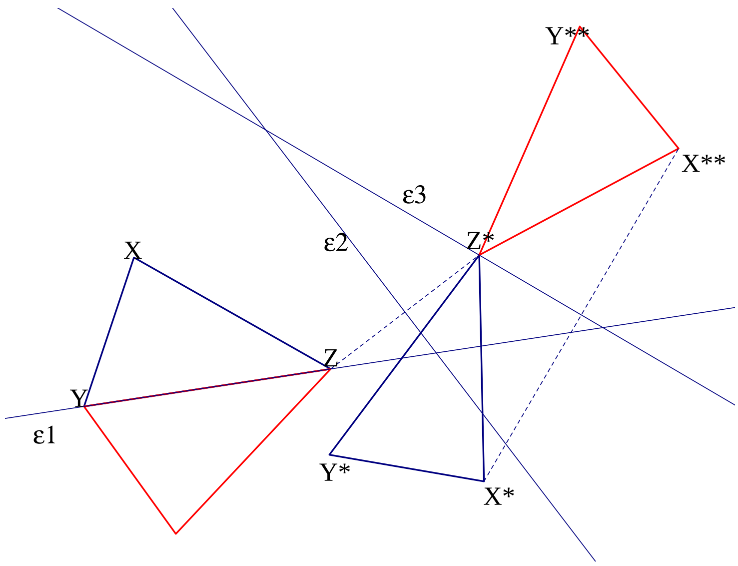
Απόδειξη:
Πραγματικά βλέπουμε ότι επιλέγοντας γιά άξονα της πρώτης ανάκλασης, την μεσοκάθετο του τμήματος XX* που ενώνει ένα σημείο του πρώτου σχήματος με το αντίστοιχο του του δεύτερου και της δεύτερης την μεσοκάθετο του X*X**(όπου X** η εικόνα του X μέσω της πρώτης ανάκλασης), επιτυγχάνουμε σύμπτωση του τριγώνου XΥZ με το ίσο του X*Υ*Z* (Σχήμα 95). Στην περίπτωση αντιρρόπως ίσων σχημάτων χρειαζόμαστε μία ή τρείς ανακλάσεις (Σχήμα 96). Αν XΥZ και X*Υ*Z* δύο αντιρρόπως ίσα τρίγωνα, οι ευθείες ε1 διερχόμενη από τα Υ και Z, ε2 μεσοκάθετος του ZZ* και ε3 μεσοκάθετος του X*X** είναι οι άξονες των ζητούμενων ανακλάσεων.

3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 3.1 Δίνονται δύο ευθείες ε1 και ε2 και από ένα σημείο A και B σε κάθε μία από αυτές. Να βρεθεί ευθεία ε, που να τέμνει τις δύο πρώτες σε σημεία X και Ψ αντίστοιχα,



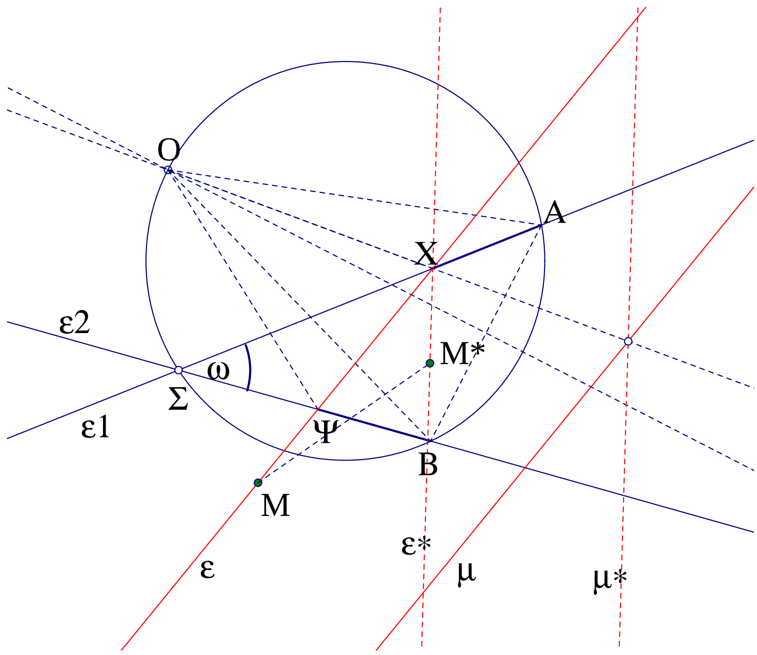
Σχήμα 95: Ανάκλαση σε δύο ευθείες



Σχήμα 96: Ανάκλαση σε τρείς ευθείες

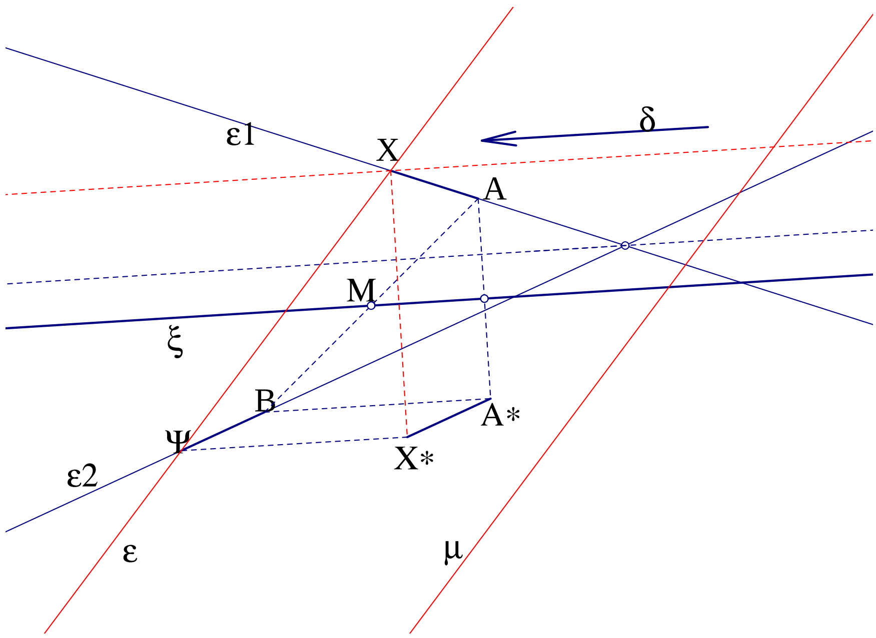
με ΑΧ=ΒΨ και τέτοια ώστε:
α)Να είναι παράλληλη προς δοθείσα μ.
β)Να περνά από δεδομένο σημειο Μ.
γ)Το τμήμα ΧΨ να έχει δοθέν μήκος α.

Απόδειξη:
Πρώτος τρόπος: Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει την ζητούμενη ευθεία ε και οι δεδομένες ευθείες είναι τεμνόμενες στο Σ σχηματίζοντας γωνία ω (Σχήμα 97). Τα τμήματα ΑΧ και ΒΨ έρχονται σε σύμπτωση μέσω στροφής κατά γωνία ω, με κέντρο Ο το οποίο βρίσκεται με τόν τρόπο που αναφέρουμε στην 3.1 σαν σημείο τομής του κύκλου ΣΑΒ με την μεσοκάθετο του ΑΒ (Με το σημείο Β να απεικονίζεται στο Α και το Ψ στο Χ).
α) Έστω μ* και ε* οι εικόνες των μ και ε αντίστοιχα μέσω της παραπάνω στροφής. Η ευθεία ε* περνά από το Χ και η ΟΧ διχοτομεί την γωνία των ε, ε* όπως και εκείνη των μ, μ*. Επομένως το σημείο Χ προσδιορίζεται σαν σημείο τομής της ευθείας ε1 με αυτήν που ορίζεται από το Ο και την τομή των μ και μ*.
β)Έστω Μ* η εικόνα του Μ μέσω της στροφής. Καθώς η γωνία των μ και μ* είναι γνωστή (ίση με την γωνία ω), το σημείο Χ βλέπει την ΜΜ* υπό γνωστή γωνία, άρα βρίσκεται σε



Σχήμα 97: Εύρεση ευθείας ε)

γνωστό τόξο.
γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΟΧΨ έχει γνωστές γωνίες και γνωστό μήκος α της βάσης άρα γναρίζουμε το μήκος των δύο ίσων πλευρών του. Άρα το σημείο Χ βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Ο και γνωστής ακτίνας, άρα είναι τομή γνωστού κύκλου με την ε1. *Δεύτερος τρόπος:* Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3.2 γιά τα αντιρρόπως ίσα σχήματα. Το ΑΧ

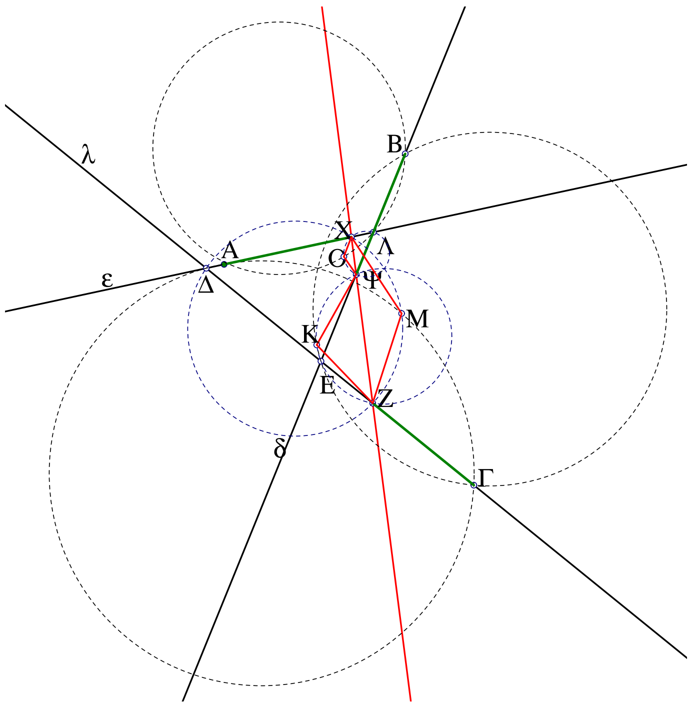


Σχήμα 98: Εύρεση ευθείας ε

έρχεται σε σύμπτωση με το ΒΨ μέσω ολισθανάκλασης . Η ολισθανάκλαση που απεικονίζει το ΑΧ στο ΒΨ, έχει άξονα ανάκλασης ξ παράλληλο της διχοτόμου της γωνίας των δεδομένων ευθειών και διερχόμενο από το μέσο της ΑΒ και διάνυσμα μεταφοράς δ ίσο με Α*Β, όπου Α* είναι η εικόνα της ανάκλασης του Α στον ξ(Σχήμα 98).
α) Το τρίγωνο ΧΧ*Υ έχει γνωστό το μήκος ΨΧ*=δ και γνωστά τα μέτρα των γωνιών του

καθώς είναι ορθογώνιο και οι πλευρές του ΨΧ* και ΧΨ έχουν γνωστές διευθύνσεις (Τις δ και μ αντίστοιχα). Επομένως το μήκος ΧΧ* είναι γνωστό, άρα και η απόσταση του σημείου Χ από την ευθεία ξ. Άρα το Χ βρίσκεται πάνω σε γνωστή παράλληλο της ξ.
γ)Και εδώ το παραπάνω τρίγωνο ΧΧ*Υ έχει γνωστά μήκη πλευρών, καθώς γνωρίζουμε τις ΧΨ=α και Χ*Υ=δ [1].

Πρόβλημα 3.2 Δίνονται τρείς ευθείες ε,δ και λ, καθώς και τρία σημεία Α, Β και Γ αυτών αντίστοιχα. Να βρεθεί ευθεία που τέμνει τις τρείς σε σημεία Χ, Ψ και Ζ, τέτοια ώστε ΑΧ=ΒΨ=ΓΖ.



Σχήμα 99: Ίσα τμήματα

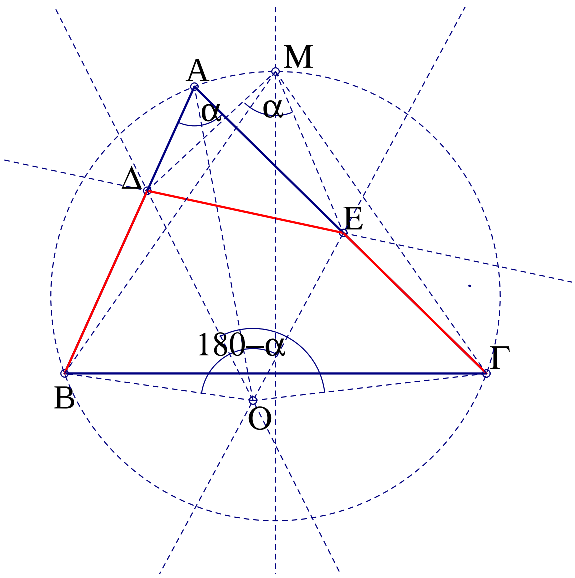
Απόδειξη:
Έστω ότι έχουμε βρεί την ζητούμενη ευθεία (Σχήμα 99) και έστω Ο το κέντρο στροφής R_o που απεικονίζει το ΑΧ στο ΒΨ και Κ το αντίστοιχο κέντρο στροφής R_κ που απεικονίζει το ΒΨ στο ΓΖ. Οι στροφές αυτές έχουν αντίστοιχα γωνίες ίσες με εκείνες που σχηματίζουν η ε με την δ, $(\widehat{(\varepsilon,\delta)})$ και η δ με την λ, $(\widehat{(\delta,\lambda)})$ αντίστοιχα. Άρα $\widehat{XO\Psi} = \widehat{(\varepsilon,\delta)}$ και $\widehat{\Psi KZ} = \widehat{(\delta,\lambda)}$. Επομένως το γνωστό τμήμα ΟΚ φαίνεται από το σημείο Ψ με γνωστή γωνία:

$$\widehat{O\Psi K} = \frac{\widehat{XO\Psi} \pm \widehat{\Psi KZ}}{2}$$

Πρόβλημα 3.3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ευθεία ε τέμνουσα τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε:

$$B\Delta = \Delta E = E\Gamma$$

Απόδειξη:
Πρώτος τρόπος: Έστω ότι έχει βρεθεί η ζητούμενη ευθεία (Σχήμα 100). Το σημείο τομής Μ της μεσοκαθέτου της ΒΓ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου, είναι το κέντρο στροφής γωνίας ίσης με την $\hat{A}$, μέσω της οποίας το σημείο Β απεικονίζεται στο Γ και το Δ στο Ε. Παρατηρούμε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΔΕ η γωνία της κορυφής του ισούται με



Σχήμα 100: ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ

$\widehat{A}$, δηλαδή μας είναι γνωστή. Επομένως ο λόγος των πλευρών του μας είναι γνωστός. Άρα έχουμε:

$$\frac{M\Delta}{\Delta B} = \frac{M\Delta}{\Delta E} = \lambda$$

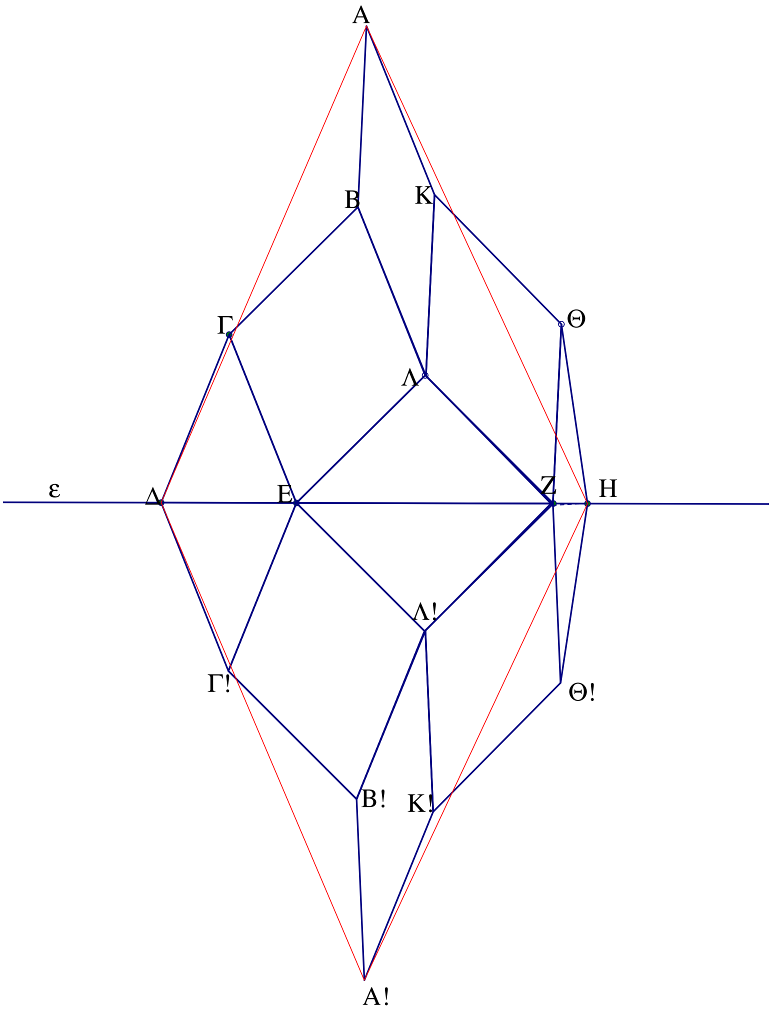
Άρα το Δ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα Μ και Β είναι γνωστός (Απολλώνιος κύκλος).
εμπηΔεύτερος τρόπος: Έστω Ο ένα παράκεντρο του τριγώνου ΑΔΕ, δηλαδή σημείο τομής μιάς εσωτερικής (της γωνίας Α) και δύο εξωτερικών (των γωνιών Δ και Ε) διχοτόμων του. Το τμήμα ΒΔ απεικονίζεται στο ΕΓ μέσω της σύνθεσης ανακλάσεων στις δύο αυτές εξωτερικές διχοτόμους ΔΟ και ΕΟ. Η σύνθεση όμως αυτή είναι στροφή οερί το Ο, γωνίας διπλάσιας της γωνίας των ευθειών αυτών. Προφανώς αυτή η γωνία στροφής ισούται με την εξωτερική της γωνίας Α του τριγώνου, δηλαδή με $180^o - \alpha$. Ακόμα, το σημείο Ο βλέπει την ΒΓ υπό γνωστή γωνία, ίση με:

$$\widehat{BO\Gamma} = \frac{3}{2}(90^o - \frac{\alpha}{2})$$

Άρα η θέση του Ο προσδιορίζεται σαν τομή της διχοτόμου της γωνίας Α με γνωστό τόξο (Σχήμα 100) [1].

Πρόβλημα 3.4 Δίνεται ευθεία ε και διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ,ΕΖ και ΖΗ πάνω σε αυτή. Με βάσεις αυτά τα τμήματα κατασκευάζουμε ισοσκελή τρίγωνα και στην συνέχεια ρόμβους έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα πλέγμα αποτελούμενο από ίσα ευθύγραμμα τμήματα όπως το Σχήμα 101. Να δειχθεί ότι η κορυφή Α του πλέγματος ισαπέχει από τα ακραία σημεία Δ και Η της ε. Η πρόταση ισχύει ανεξάρτητα από το πλήθος των διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων.

Απόδειξη:
Κατασκευάζουμε το συμμετρικό του σχήματος με άξονα συμμετρίας την ε. Έχουμε έτσι δημιουργήσει ένα μεγαλύτερο πλέγμα αποτελούμενο από ρόμβους με ίσες πλευρές. Η τεθλασμένη γραμμή ΗΘ!Κ!Α! είναι εικόνα μέσω παράλληλης μεταφοράς της ΑΒΓΔ. Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΗΑ! είναι παράλληλα και ίσα. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΑ!Η είναι παραλληλόγραμμο με άξονα συμμετρίας την ε, άρα είναι ρόμβος [18].

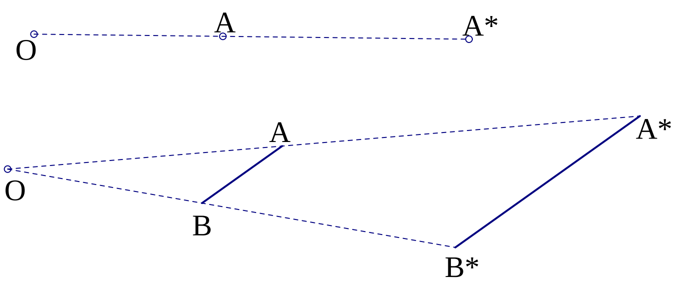


Σχήμα 101: ΑΔΗ ισοσκελές

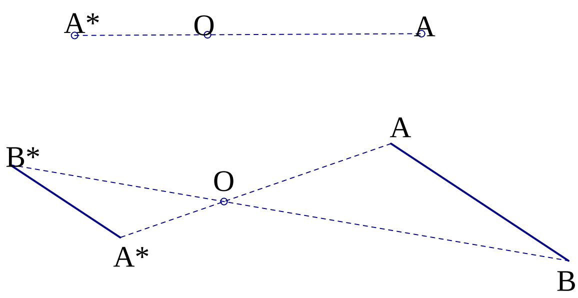
4 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Οι μετασχηματισμοί ομοιότητας είναι σημειακοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν ένα σχήμα σε ένα όμοιο του, δηλαδή διατηρούν τις γωνίες και τούς λόγους των αντιστοίχων αποστάσεων. Επομένως απεικονίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ευθύγραμμο τμήμα, μία ευθεία σε άλλη ευθεία, ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα όμοιό του, ένα κανονικό πολύγωνο σε ένα επίσης κανονικό με ίδιο πλήθος πλευρών, ένα ζεύγος παραλλήλων ευθειών σε ζεύγος επίσης παραλλήλων ευθειών, ένα κύκλο σε ένα άλλο κύκλο. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, για κάθε ζεύγος ομοίων σχημάτων υπάρχει ένας μοναδικός μετασχηματισμός ομοιότητας που απεικονίζει το ένα σχήμα στο άλλο.

4.1 ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ



Σχήμα 102: Θετική ομοιοθεσία



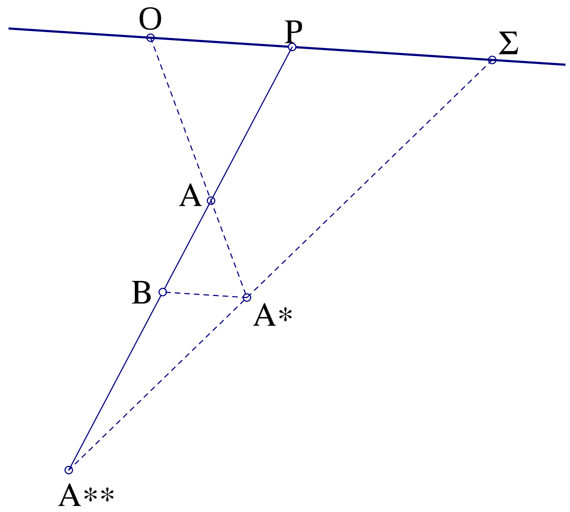
Σχήμα 103: Αρνητική ομοιοθεσία

Ορισμός 4.1 Έστω σημείο Ο του επιπέδου και αριθμός $k \in \Re$. Ορίζουμε ομοιοθεσία $H(O,k)$ κέντρου Ο και λόγου k τον μετασχηματισμό $H : E \longrightarrow E$ του επιπέδου στον εαυτό του που απεικονίζει κάθε σημείο Α του Ε στο Α* έτσι ώστε $\overline{OA} : \overline{OA*} = k$. Αν ο λόγος είναι θετικός, η εικόνα Α* βρίσκεται στην ημιευθεία ΟΑ (Σχήμα 102), ενώ για αρνητικό λόγο, οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΑ* είναι αντικείμενες (Σχήμα 103). Ομοιόθετα λέγονται δύο σχήματα για τα οποία υπάρχει ομοιοθεσία $H(O,k)$ που απεικονίζει το ένα στο άλλο.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $H^{-1}(O,k)$ είναι ομοιοθεσία $H(O,\frac{1}{k})$ κέντρου Ο και λόγου $\frac{1}{k}$. Παρατηρούμε ότι τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και Α*Β* είναι σε κάθε περίπτωση παράλληλα μεταξύ τους και ο λόγος τους Α*Β*:ΑΒ ισούται με την απόλυτη τιμή του λόγου ομοιοθεσίας.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΩΝ

Η σύνθεση $H_2(\Sigma,k_2) \circ H_1(O,k_1)$ είναι όπως θα δούμε ομοιοθεσία $H(P,k)$ όπου $k = k_2 \cdot k_1$.



Σχήμα 104: Σύνθεση ομοιοθεσιών

Πρόταση 4.1 Δίνονται σχήμα X και ομοιοθεσίες $H(O,k_1)$ και $H(\Sigma,k_2)$ μέσω των οποίων το X απικονίζεται πρώτα στο X* και μετά στο X**. Έστω A* η εικόνα σημείου A ενός σχήματος X μέσω ομοιοθεσίας $H(O,k_1)$ και A** η εικόνα σημείου A* του X* μέσω ομοιοθεσίας $H(\Sigma,k_2)$. Τότε το σημείο A** είναι εικόνα του A μέσω ομοιοθεσίας $H(P,k)$ το κέντρο P της οποίας είναι σημείο της ευθείας ΟΣ τέτοιο ώστε $\frac{OP}{P\Sigma}=\frac{k_2-1}{k_1k_2-k_2}$ και $k=k_2\cdot k_1$ (Σχήμα 104). Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται τα τρία κέντρα Ο, Σ και P των ομοιοθεσιών, ονομάζεται *άξονας ομοιότητας* των σχημάτων X, X* και X**.

Απόδειξη:
Έστω B η παράλληλη προς την ΟΣ προβολή του A* πάνω στην AP. Τότε έχουμε τις αναλογίες:

$$\frac{PO}{R\Sigma}=\frac{PO}{BA^*}\cdot\frac{BA^*}{P\Sigma}=\frac{PA}{AB}\cdot\frac{A^*A^{**}}{A^{**}\Sigma}=\frac{OA}{AA^*}\cdot\frac{A^*A^{**}}{A^{**}\Sigma}=\frac{1}{k_1-1}\cdot\frac{k_2-1}{k_2}=\frac{k_2-1}{k_1k_2-k_2}$$

Παρατήρηση:
Αν A2 είναι η εικόνα του A μέσω της σύνθεσης $H_1(O,k_1)\circ H_2(\Sigma,k_2)$ τότε η ευθεία που ενώνει το A2 με το A**, είναι παράλληλη του άξονα ομοιότητας .
Η παραπάνω πρόταση μπορεί να αποδειχθεί και με χρήση του θεωρήματος του Μενελάου. Μπορούμε όμως να την χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα αυτό, όπως και το αντιστοιχο του $Ceva$.

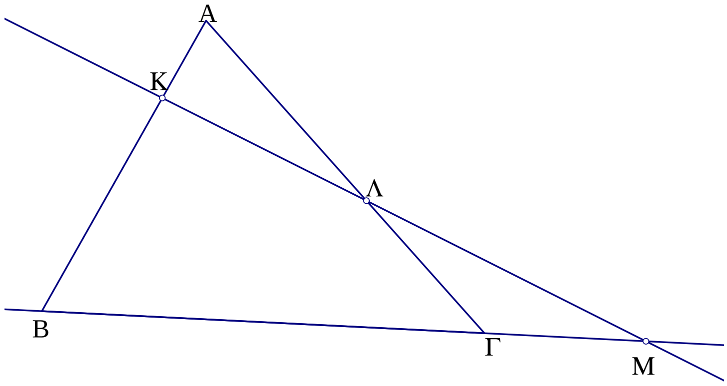
4.2 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ-$CEVA$

Πρόταση 4.2 Αν μία ευθεία τέμνει τις πλευρές AB, ΑΓ ,ΒΓ (η τις προεκτάσεις τους) δοθέντος τριγώνου σε σημεία K, Λ, M αντίστοιχα,τότε

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BM}{M\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}=1$$

(Θεώρημα Μενελάου).

Απόδειξη:
Θεωρούμε δύο ομοιοθεσίες $H_1(K,k_1)$ και $H_2(L,k_2)$ με λόγους $k_1=\frac{AK}{KB}$ και $k_2=\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}$ που απεικονίζουν το B στο A και το A στο Γ αντίστοιχα. Η σύνθεση τους $H_2\circ H_1$ είναι ομοιοθεσία



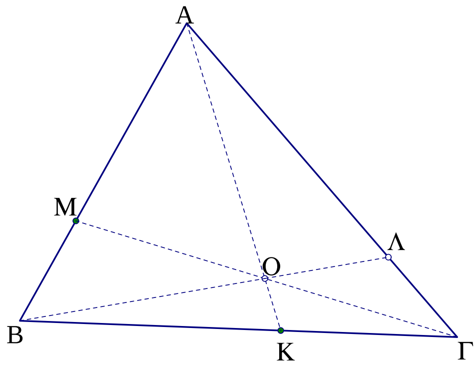
Σχήμα 105: Συνευθειακά σημεία

H_3 που απεικονίζει το Β στο Γ. Το κέντρο όμως αυτής της ομοιοθεσίας, βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΒΓ και στην ευθεία των κέντρων Κ και Λ, άρα είναι το σημείο Μ. Ο λόγος $k_3 = \frac{M\Gamma}{BM}$ της σύνθεσης αυτής ισούται με το γινόμενο $k_2 \cdot k_1$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. (Σχήμα 105)

Πρόταση 4.3 Αν Κ, Λ, Μ είναι σημεία των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ και οι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ συντρέχουν στο Ο, τότε

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{K\Gamma} \cdot \frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = 1$$

(Θεώρημα *Ceva*) Οι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ ονομάζονται σεβιανές του σημείου Ο για το τρίγωνο ΑΒΓ.



Σχήμα 106: Συντρέχουσες ευθείες

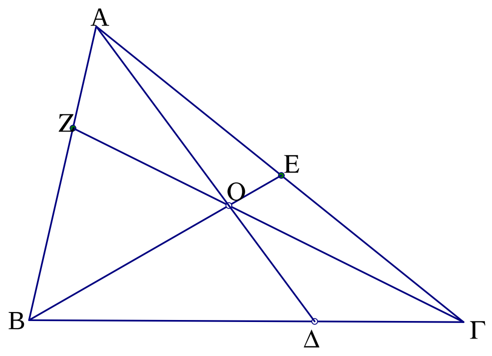
Απόδειξη:
Θεωρούμε τις ομοιοθεσίες: $H_1(M, k_1)$, $H_2(O, k_2)$, $H_3(A, k_3)$ και $H_4(\Gamma, k_4)$ με $k_1 = \frac{MA}{MB}$, $k_2 = \frac{OB}{O\Lambda}$, $k_3 = \frac{A\Gamma}{A\Lambda}$ και $k_4 = \frac{\Gamma A}{\Gamma\Lambda}$. Από τους μετασχηματισμούς αυτούς έχουμε:$H_2(\Lambda) = B$, $H_1(B) = A$, $(H_2 \circ H_1)(\Lambda) = A$ άρα

$$\frac{OB}{O\Lambda} \cdot \frac{MA}{MB} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda}$$

και όμοια $H_2(\Lambda) = B$, $H_1(B) = \Gamma$, $(H_2 \circ H_1)(\Lambda) = \Gamma$ άρα

$$\frac{OB}{O\Lambda} \cdot \frac{K\Gamma}{KB} = \frac{A\Gamma}{A\Lambda}$$

από τις οποίες με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο. (Σχήμα 106)



Σχήμα 107: Σεβιανές σημείου O

Πρόταση 4.4 Αν οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τρείς σεβιανές σημείου Ο τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε

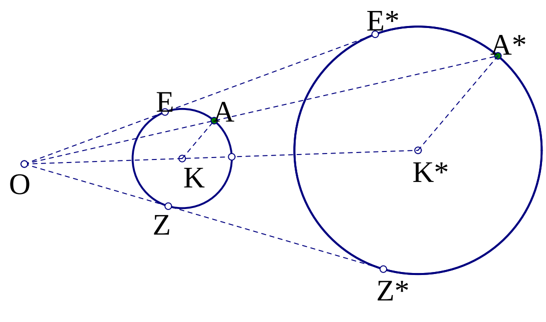
$$\frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AO}{O\Delta}$$

(Σχήμα 107) Η παραπάνω πρόταση, αναφέρεται σαν Θεώρημα *vanAubel* [19].

Απόδειξη:
Θεωρούμε τς ομοιοθεσίες: $H_1(Z, k_1)$, $H_2(E, k_2)$, $H_3(B, k_3)$ και $H_4(\Gamma, k_4)$ με $k_1 = \frac{AZ}{ZB}$, $k_2 = \frac{AE}{E\Gamma}$, $k_3 = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$ και $k_4 = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ Το Δ απεικονίζεται μέσω της H_4 στο Β και αυτό με τη σειρά του, μέσω της H_1 στο Α. Άρα η εικόνα του Δ μέσω της σύνθεσης $(H_1 \circ H_4)$, είναι το Α. Η σύνθεση αυτή είναι ομοιοθεσία με κέντρο το κοινό σημείο των ΔΑ και ΓΖ, δηλαδή το Ο και λόγο $\frac{AO}{O\Delta}$. Επομένως $\frac{AO}{O\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{AZ}{ZB}$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι:$\frac{AO}{O\Delta} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} \cdot \frac{AE}{E\Gamma}$. Αλλά

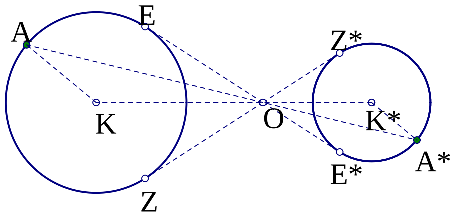
$$(\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}) + (\frac{B\Delta}{B\Gamma}) = 1 \Rightarrow \frac{\frac{AZ}{ZB}}{\frac{AO}{O\Delta}} + \frac{\frac{AE}{E\Gamma}}{\frac{AO}{O\Delta}} \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AO}{O\Delta}$$

ΟΜΟΙΟΘΕΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



Σχήμα 108: Εξωτερικό κέντρο δύο κύκλων

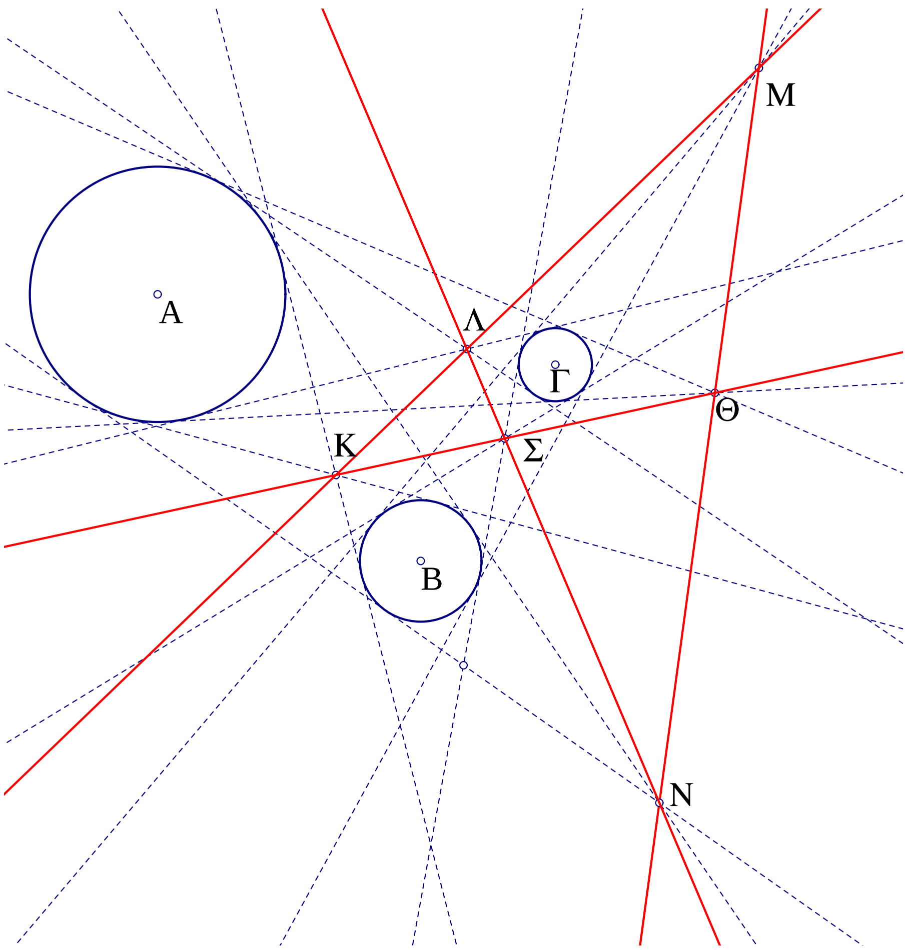
Πρόταση 4.5 Μία ομοιοθεσία $H(O, k)$ κέντρου Ο και λόγου κ, απεικονίζει κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας ρ σε κύκλο κέντρου Κ* και ακτίνας ρ* ίσης με $|\kappa| \cdot \rho$. Αντίστροφα, δύο άνισοι κύκλοι με διαφορετικα κέντρα, είναι πάντα ομοιόθετα σχήματα με κέντρο ομοιοθεσίας σημείο της διακέντρου αυτών και λόγο ίσο κατ' απόλυτη τιμή με τον λόγο των ακτίνων τους. Το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των εσωτερικών η εξωτερικών τους εφαπτομένων στις περιπτώσεις που αυτές υπάρχουν. (Σχήμα 108 η Σχήμα 109) Γενικότερα και για τις



Σχήμα 109: Εσωτερικό κέντρο δύο κύκλων

περιπτώσεις εκείνες στις οποίες δεν υπάρχει κοινή εσωτερική η εξωτερική εφαπτομένη, τα κέντρα ομοιοθεσίας χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα KK* των δύο κέντρων σε εσωτερικό και εξωτερικό λόγο ίσο με τον λόγο των αντιστοίχων ακτίνων τους.

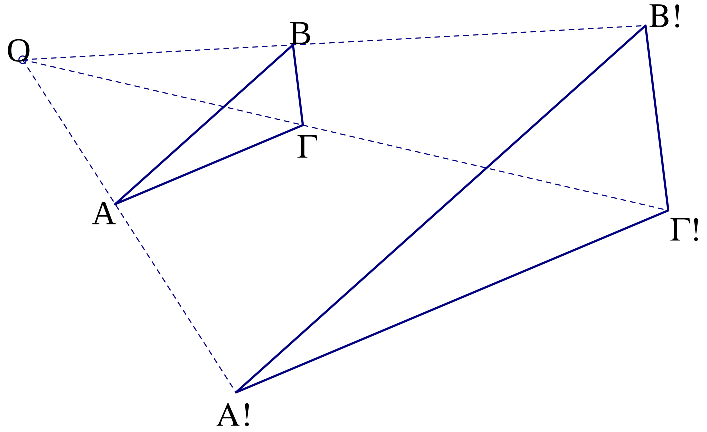
Απόδειξη:
Το ομοιόθετο της τυχαίας ακτίνας KA είναι το K*A* παράλληλο του KA και με σταθερό λόγο. Το ομοιόθετο της κάθετης σε κοινή εφαπτομένη ακτίνας είναι η κάθετη από το K* προς την κοινή εφαπτομένη. Αν A και A* είναι άκρα παράλληλων ακτίνων των δύο κύκλων, η ευθεία AA* περνά από το κέντρο ομοιοθεσίας.



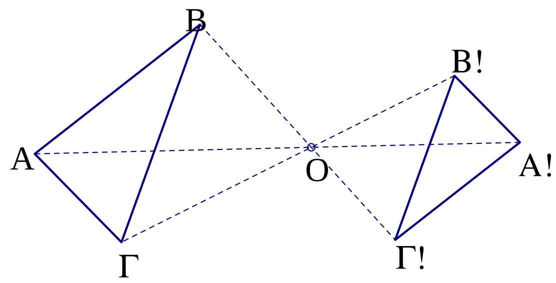
Σχήμα 110: Κέντρα ομοιοθεσίας τριών κύκλων

Πρόταση 4.6 Έστω τρείς κύκλοι διαφορετικών κέντρων και ακτίνων. Οι κύκλοι αυτοί έχουν ανά δύο, ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό κέντρο ομοιοθεσίας. Τα έξι αυτά κέντρα βρίσκονται ανά τρία σε τέσσερις άξονες ομοιότητας των σχημάτων αυτών (Σχήμα 110). Συγκεκριμένα κάθε ένας από τους τρείς άξονες περιέχει ένα κέντρο θετικής και δύο αρνητικής ομοιοθεσίας και ο τέταρτος περιέχει τα τρία κέντρα θετικής ομοιοθεσίας.

Απόδειξη:
Η απόδειξη είναι άμεση από την πρόταση που αναφέρεται στη σύνθεση ομοιοθεσιών, παρατηρώντας ότι η σύνθεση δύο αρνητικών ομοιοθεσιών είναι θετική ομοιοθεσία.



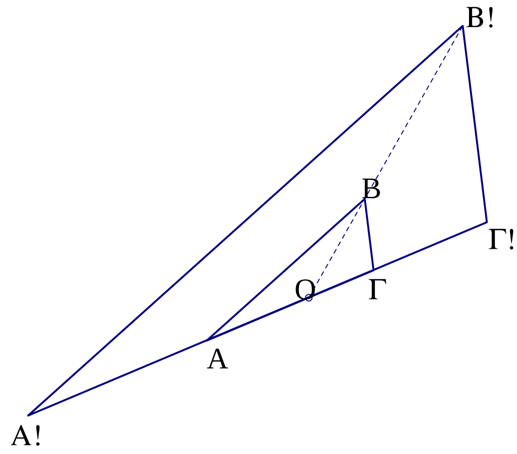
Σχήμα 111: Θετικά ομοιόθετα τρίγωνα



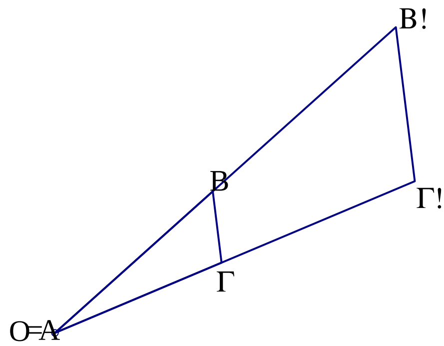
Σχήμα 112: Αρνητικά ομοιόθετα τρίγωνα

Πρόταση 4.7 Το ομοιόθετο τριγώνου ΑΒΓ ως προς ομοιοθεσία $H(O,\kappa)$ κέντρου Ο που δεν ανήκει σε πλευρά ούτε συμπίπτει με κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ, είναι τρίγωνο Α!Β!Γ! όμοιο του αρχικού με λόγο ομοιότητας ίσο με $|\kappa|$ και πλευρές παράλληλες με τις αντίστοιχες του αρχικού. Αντίστροφα, δύο όμοια τρίγωνα με παράλληλες πλευρές είναι ομοιόθετα, με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο τομής των ΑΑ!, ΒΒ! και ΓΓ! οι οποίες εύκολα αποδεικνύεται ότι συντρέχουν. Αν το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι παραπάνω ευθείες είναι εξωτερικό των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων έχουμε θετική ομοιοθεσία (Σχήμα 111), ενώ σε αντίθετη περίπτωση έχουμε αρνητική ομοιοθεσία (Σχήμα 112). Αν το κέντρο ομοιοθεσίας συμπίπτει με κορυφή του αρχικού τριγώνου, τα δύο από τα τρία ζεύγη ομολόγων πλευρών έχουν κοινό φορέα ,(Σχήμα 114) ενώ αν το κέντρο Ο ανήκει σε πλευρά του ΑΒΓ, η πλευρά αυτή έχει κοινό φορέα με την ομόλογή της.(Σχήμα 113)

Απόδειξη:
Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ!Β! είναι όμοια με λόγο ομοιότητας κ, άρα ΑΒ και Α!Β! είναι



Σχήμα 113: Το Ο ανήκει στην ΑΓ



Σχήμα 114: Το Ο ταυτίζεται με το Α

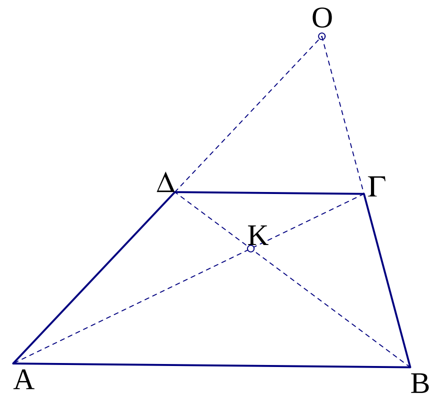
παράλληλα και Α!Β!:ΑΒ=κ. Αν ΑΒ//Α!Β! και Α!Β!:ΑΒ=κ τότε τα τρίγωνα ΟΑ!Β! και ΟΑΒ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας ίσο με κ, όπου Ο είναι το σημείο τομής των ΑΑ! και ΒΒ!.

Πρόταση 4.8 Η ευθεία που ενώνει το σημείο τομής των διαγωνίων με εκείνο των μη παραλλήλων πλευρών ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ, περνά από τα μέσα των παραλλήλων πλευρών του.

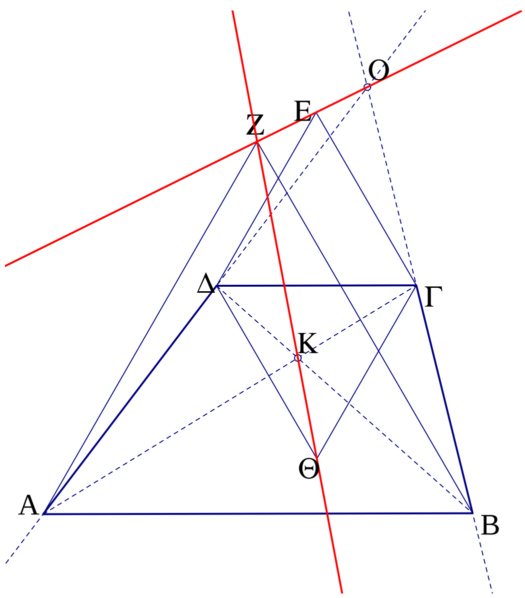
Απόδειξη:
Οι παράλληλες πλευρές κάθε τραπεζίου είναι ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα ως προς δύο ομοιωθεσίες. Μία θετική με κέντρο το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρων του και μία αρνητική με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Και στις δύο αυτές ομοιοθεσίες, το μέσον της μίας πλευράς απεικονίζεται στο μέσον της άλλης. Η ευθεία που ορίζεται από δύο ομόλογα σημεία περνά από το κέντρο ομοιοθεσίας(Σχήμα 115).

4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 4.1 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Με πλευρές τις παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ, κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ, ΓΔΕ και ΓΔΘ όπως στο Σχήμα 116. Να δειχθεί ότι η Ζϑ περνά από το σημείο τομής των διαγωνίων και η ΖΕ από το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ.



Σχήμα 115: Ομοιοθεσία στο τραπέζιο



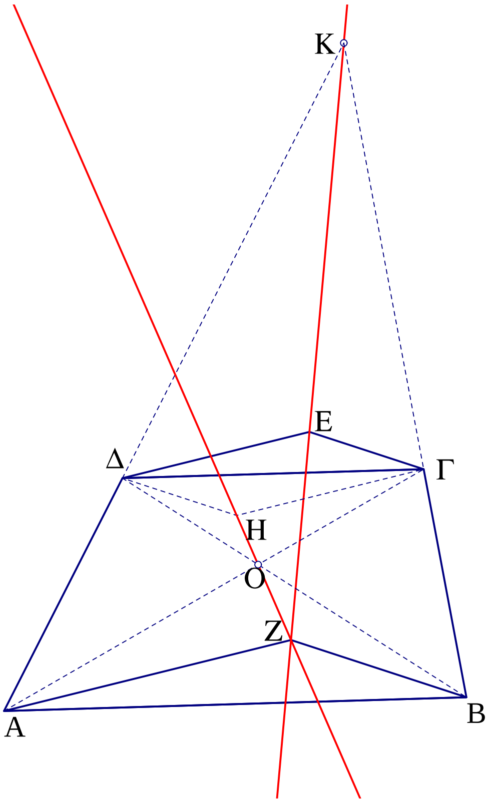
Σχήμα 116: Ισόπλευρα σε τραπέζιο

Απόδειξη:
Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΘ είναι ομοιόθετα με εσωτερικό κέντρο ομοιοθεσίας το Κ, ενώ τα ΑΒΖ και ΓΔΕ είναι ομοιόθετα με εξωτερικό κέντρο ομοιοθεσίας το Ο (Σχήμα 116). Το ίδιο συμβαίνει αν αντί για ισόπλευρα, κατασκευάσουμε όμοια μεταξύ τους τρίγωνα (Σχήμα 117)

Πρόβλημα 4.2 Αν ΑΒ και ΓΔ είναι οι παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του, να δειχθεί ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΕ και ΓΔΕ, εφάπτονται εξωτερικά στο Ε και η διάκεντρος τους περνά από το Ε.

Απόδειξη:
Το σημείο Ε είναι κέντρο αρνητικής ομοιοθεσίας που απεικονίζει την ΑΒ στην ΓΔ, άρα και τοτρίγωνο ΑΒΕ στο ΓΔΕ. Επομένως το σημείο Ε είναι κέντρο ομοιοθεσίας, άρα και σημείο επαφής των δύο κύκλων.

Πρόβλημα 4.3 Να εγγραφεί τετράγωνο σε δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ, με την μία πλευρά επί της ΒΓ και τις άλλες δύο κορυφές επί των ΑΒ και ΑΓ.



Σχήμα 117: Όμοια τρίγωνα σε τραπέζιο

Απόδειξη:
Το τετράγωνο ΒΓΔΘ πλευράς ΒΓ είναι ομοιόθετο του ζητούμενου με κέντρο ομοιοθεσίας το Α και λόγο ΘΚ:ΔΕ. Βρίσκοντας τα Θ και Κ, προσδιορίζουμε τα Δ και Ε.(Σχήμα 119)

Πρόβλημα 4.4 Σε δοθέν τετράπλευρο ΑΒΓΔ να εγγραφεί ρόμβος, με πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές του τετραπλεύρου

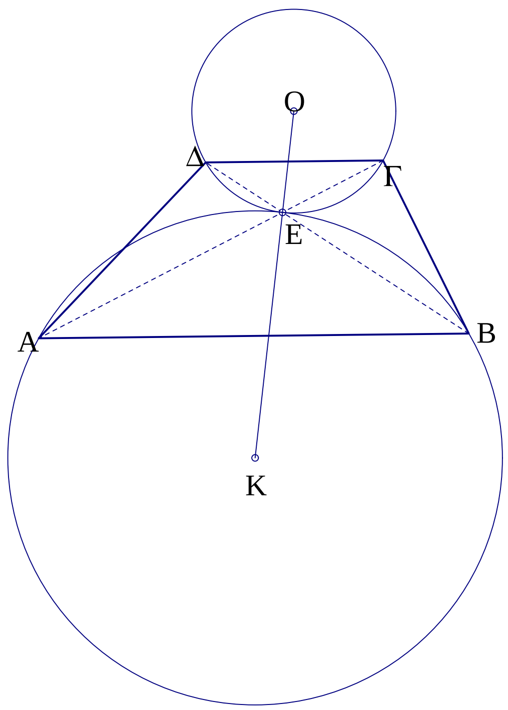
Απόδειξη:
Έστω ΚΛΜΝ ο ζητούμενος ρόμβος (Σχήμα120). Κατασκευάζομε ρόμβο ΒΔΖΕ με πλευρά την διαγώνιο ΒΔ του τετραπλεύρου. Οι δύο ρόμβοι είναι ομοιόθετα σχήματα με κέντρο την κορυφή Α, γιατί Α είναι το εξωτερικό κέντρο των ομοιόθετων τμημάτων ΒΔ και ΛΚ. Έτσι η ζητούμενη κατασκευή είναι πάντα δυνατή, καθώς οι ΑΕ και ΑΖ τέμνουν πάντα τις ΒΓ καιΓΔ, άρα τα σημεία Μ και Ν προσδιορίζονται.

Πρόβλημα 4.5 Να αχθεί ευθεία, διερχόμενη από δοθέν σημείο Μ και το σημείο τομής δύο δοθέντων τεμνόμενων ευθειών.

Απόδειξη:
Ορίζουμε ομοιοθεσία κέντρου Μ και λόγου αρκετά μικρού ώστε οι εικόνες των δοθέντων ευθειών μέσω του μετασχηματισμού αυτού να τέμνονται σε σημείο Ο που είναι προσεγγίσιμο. Η ευθεία ΟΜ διέρχεται και από το μη προσεγγίσιμο σημείο τομής των δοθέντων ευθειών, καθώς διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας και από την εικόνα του (Σχήμα 121) [2].

Πρόβλημα 4.6 Να αχθεί ευθεία διερχόμενη από δοθέν σημείο Μ και παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα δύο σημεία τομής δύο δοθέντων ζευγών τεμνόμενων ευθειών, τα οποία δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε σε κάποιο σχήμα.

Απόδειξη:
Έστω ε1, ε2 και ε3, ε4 δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών. Κατασκευάζομε τις εικόνες τους



Σχήμα 118: Εφαπτόμενοι κύκλοι

μέσω ομοιοθεσίας κέντρου Μ και λόγου αρκετά μικρου, ώστε οι εικόνες τους να τέμνονται σε σημεία που μπορούμε να προσεγγίσουμε (Σχήμα 122) [2].

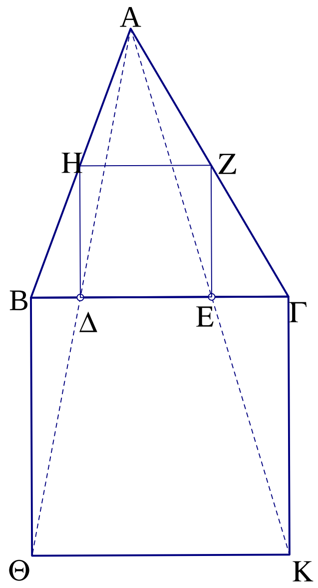
Πρόβλημα 4.7 Να αποδειχθεί ότι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται στην ευθεία που ορίζεται από το ορθόκεντρο Η και το περίκεντρο Ο (ευθεία του *Euler*) και χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΟΗ σε λόγο 1:2.

Απόδειξη:
Το τρίγωνο ΜΝΛ που ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ είναι ομοιόθετο αυτού με κέντρο Γ και λόγο $-\frac{1}{2}$. Το περίκεντρο Ο είναι ορθόκεντρο του ΜΝΛ, άρα απεικονίζεται στο Η, επομένως η ευθεία που ορίζουν περνά από το κέντρο ομοιοθεσίας Γ και $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$(Σχήμα 123).

Πρόβλημα 4.8 Να δειχθεί ότι οι ευθείες που άγονται από τα μέσα των πλευρών τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ παράλληλες προς τις διχοτόμους των απέναντι γωνιών, συντρέχουν σε σημείο Κ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει το έκκεντρο Ι με το βαρύκεντρο Γ του τριγώνου και $\frac{KG}{GI} = \frac{1}{2}$

Απόδειξη:
Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, τα τρίγωνα ΜΝΛ και ΑΒΓ είναι ομοιόθετα. Οι ευθείες που φέραμε παράλληλα με τις διχοτόμους του ΑΒΓ είναι ομοιόθετες με αυτές ως προς την ίδια ομοιοθεσία, άρα συντρέχουν σε σημείο Κ, που είναι η εικόνα του έκκεντρου Ι. (Σχήμα 124)

Πρόβλημα 4.9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ο εγγεγραμμένος του κύκλος (Ι,ρ), καθώς και οι τρείς παρεγγεγραμμένοι σε αυτό κύκλοι (I_α, ρ_α), (I_β, ρ_β) και (I_γ, ρ_γ). Να δειχθεί ότι:
α)Το αντιδιαμετρικό σημείο του σημείου επαφής του (Ι,ρ) με μία πλευρά του ΑΒΓ (έστω Ζ αντιδιαμετρικό του σημείου επαφής Ε με την α) και το σημείο επαφής του αντίστοιχου παρεγγεγραμμένου κύκλου με την ίδια πλευρά (έστω Κ), είναι συνευθειακά με την αντίστοιχη



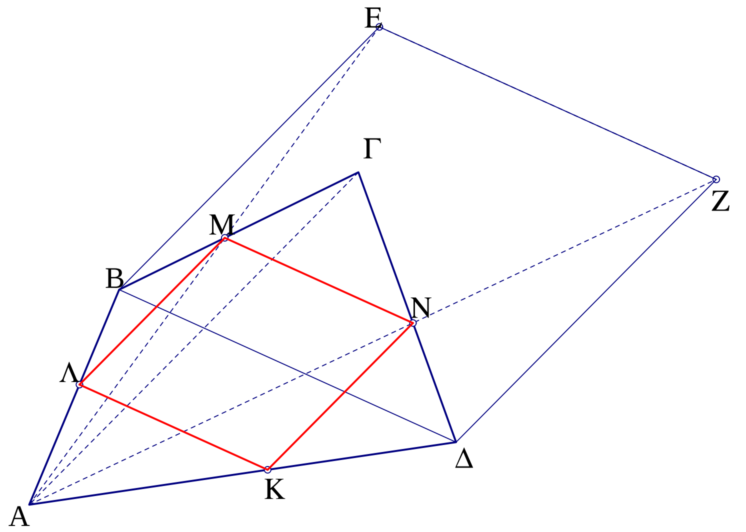
Σχήμα 119: Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο

κορυφή (δηλαδή τα Α, Κ και Ζ είναι συνευθειακά).
β)Οι ΑΚ, ΒΣ και ΓΡ συντρέχουν σε σημείο Ν, συνευθειακό με τα Ι και Γ και ισχύει $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$, όπου Σ και Ρ τα αντίστοιχα σημεία επαφής των (I_β, ρ_β) και (I_γ, ρ_γ) με τις αντίστοιχες πλευρές. Το σημείο Ν ονομάζεται σημείο *Nagel* του τριγώνου (Σχήμα 125).

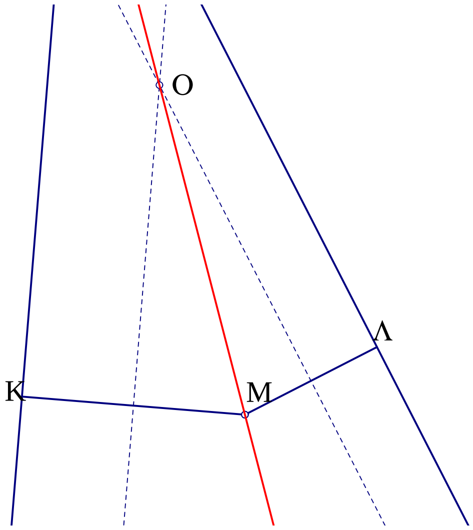
Απόδειξη:
α) Φέρνουμε την παράλληλη από το Ζ προς την ΒΓ, η οποία εφάπτεται του εγγεγραμμένου κύκλου και τέμνει τιε ΑΒ και ΑΓ στα Θ και Λ. Τα τρίγωνα ΑΘΛ και ΑΒΓ είναι ομοιόθετα με κέντρο Α και λόγο ΑΘ:ΑΒ, άρα το ίδιο ισχύει και για τους κύκλους (Ι,ρ) και (I_α, ρ_α). Άρα το σημείο Κ είναι η εικόνα του Ζ.
β) Το μέσο Μ της ΒΓ είναι μέσο και της ΕΚ καθώς ΒΕ=ΚΓ=τ-β, όπου τ η ημιπερίμετρος του ΑΒΓ. Άρα η ΑΚ είναι παράλληλη της ΙΜ και το ίδιο ισχύει για τις ΒΣ και ΓΡ με τις ΙΕ και ΙΠ αντίστοιχα. Έτσι οι ΑΚ, ΒΣ και ΓΡ συντρέχουν στο σημείο Ν με $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$ λόγω της ομοιοθεσίας των τριγώνων ΜΕΠ και ΑΒΓ με κέντρο το Γ.

Πρόβλημα 4.10 Να δειχθεί ότι τα μέσα Λ, Μ, Ν των πλευρών τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ, τα ίχνη των υψών του και τα μέσα των τμημάτων που ενώνουν τις κορυφές του με το ορθόκεντρο του, είναι ομοκυκλικά σημεία και το κέντρο του κύκλου τους είναι το μέσο της ΟΗ, όπου Ο το περίκεντρο και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου (Κύκλος των εννέα σημείων, η κύκλος του *Euler*).

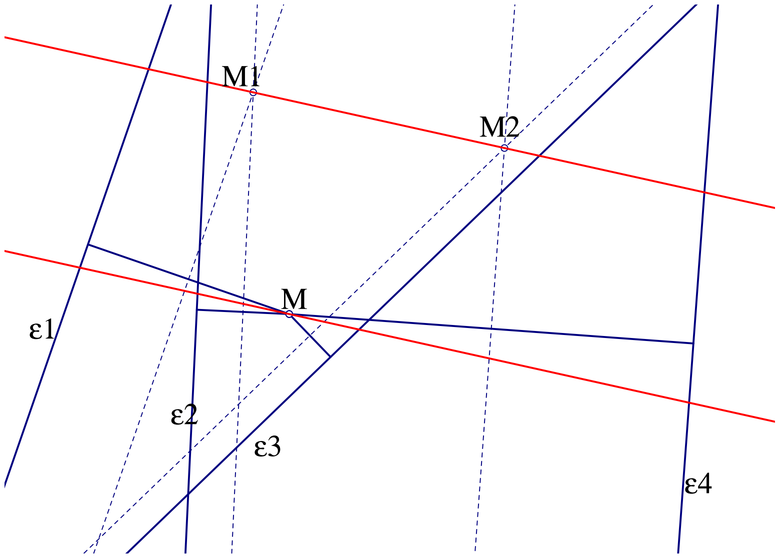
Απόδειξη:
Το τρίγωνο ΛΜΝ που όπως είδαμε είναι ομοιόθετο του αρχικου, έχει περίκεντρο το Κ,την εικόνα του Ο μέσω της ομοιοθεσίας κέντρου G και λόγου $\frac{1}{2}$. Άρα $\frac{GK}{GO} = \frac{1}{2}$. Επομένως το Κ είναι μέσο του ΗΟ και η ακτίνα του κύκλου είναι ,όπου Ρ η ακτίνα του περίκυκλου του ΑΒΓ. Αρκεί να δείξουμε ότι και τα υπόλοιπα 6 σημεία ανήκουν στον κύκλο (Κ,$\frac{R}{2}$. Το τρίγωνο ΣΡΠ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο Η και λόγο $\frac{1}{2}$, άρα ο περίκυκλος του είναι ο (Κ,$\frac{R}{2}$. Τα ίχνη τέλος των τριών υψών είναι σημεία του ίδιου κύκλου καθώς τα συμμετρικά τους ως προς άξονες κάθετους στις αντίστοιχες πλευρές, είναι τα μέσα των πλευρών αυτών. (Σχήμα 126).



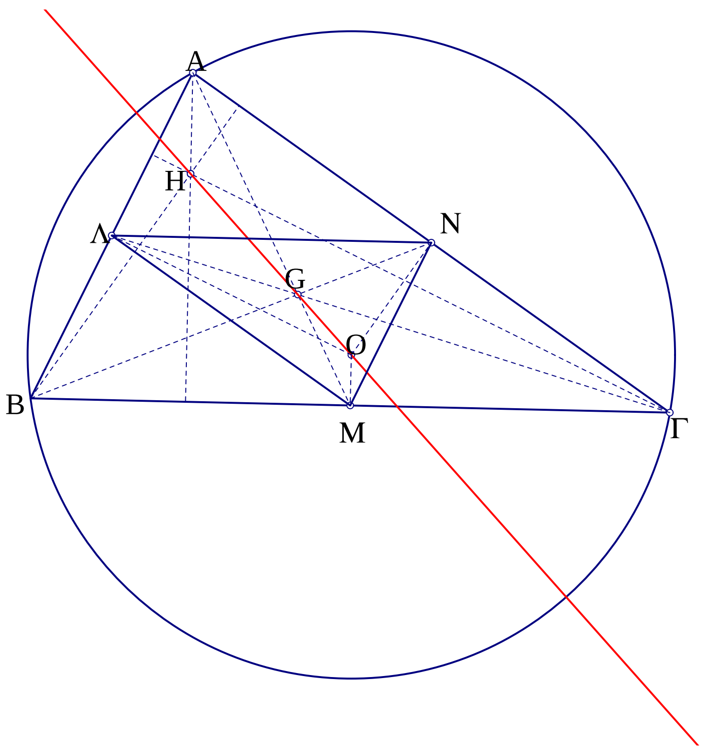
Σχήμα 120: Εγγραφή ρόμβου σε τετράπλευρο



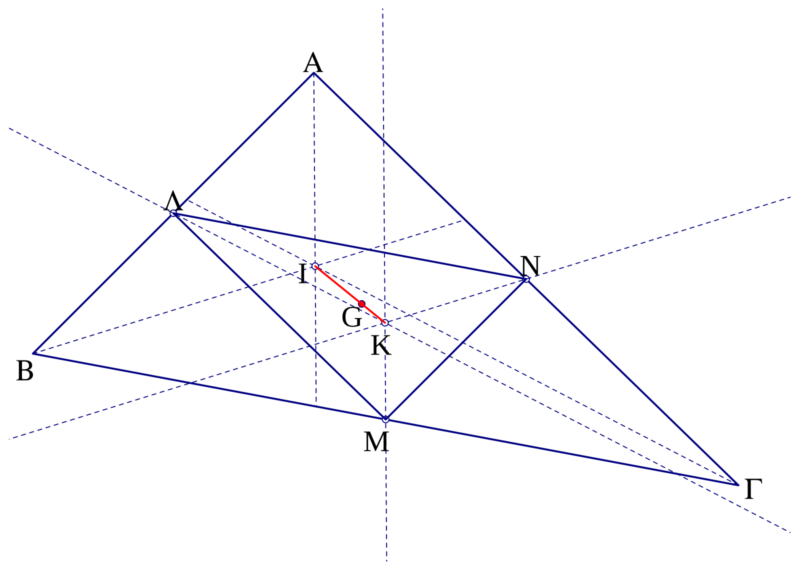
Σχήμα 121: Σημείο τομής δύο ευθειών



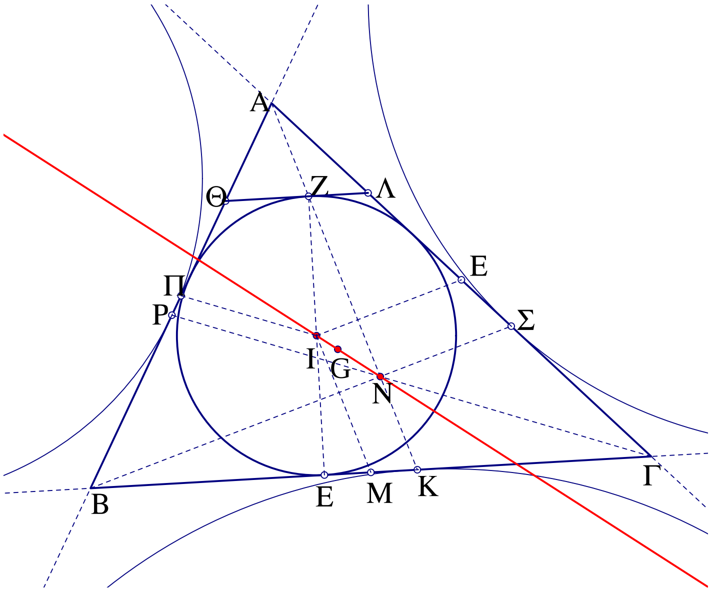
Σχήμα 122: Δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών



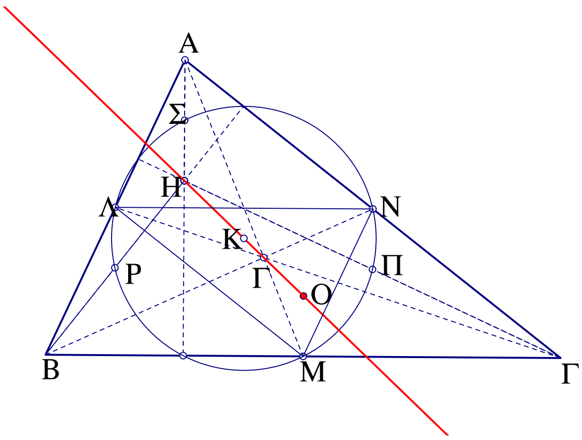
Σχήμα 123: Ευθεία *Euler*



Σχήμα 124: Συντρέχουσες ευθείες

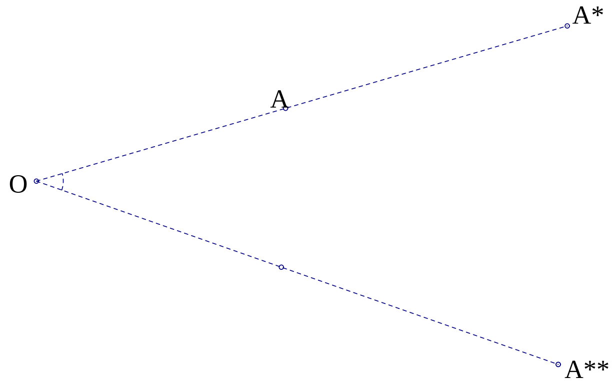


Σχήμα 125: Συνευθειακά κέντρα



Σχήμα 126: Κύκλος 9 σημείων

4.4 ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ(($Spiral\ Similarity$)



Σχήμα 127: Ομόρροπη ομοιότητα

Ορισμός 4.2 Ονομάζουμε *ομμόρροπο ομοιότητα* (*spiralsimilarity* η *homology*) την οποία συνήθως ονομάζουμε απλά ομοιότητα, τον μετασχηματισμό που είναι σύνθεση μιάς ομοιοθεσίας $H(O, \kappa)$ και μιάς ομορρόπου ισότητας. Δηλαδή μία ομοιότητα, ισοδυναμεί πάντα με σύνθεση μιάς θετικής ομοιοθεσίας με μία στροφή $R(O, \theta)$(Σχήμα 127). Το κέντρο Ο ονομάζεται *κέντρο η διπλό σημείο* ομοιότητας του μετασχηματισμού.

Παρατήρηση Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω σύνθεση είναι αντιμεταθετική. Αν η ομοιοθεσία $H(O, \kappa)$ είναι θετική, η αντίστοιχη σύνθεση με αρνητική ομοιοθεσία είναι ισοδύναμη με σύνθεση θετικής ομοιοθεσίας με στροφή κατά γωνία μεγαλύτερη κατά π καθώς η αρνητική ομοιοθεσία είναι σύνθεση της αντίστοιχης θετικής με μία ημιστροφή:

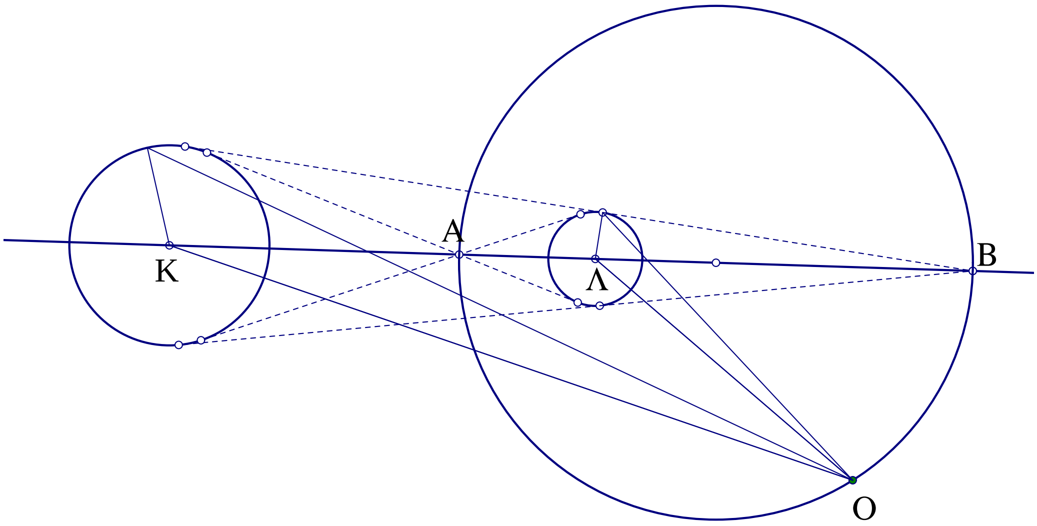
$$H(O, -\kappa) = H(O, \kappa)\circ R(O, \pi) \Rightarrow H(O, -\kappa)\circ R(O, \theta) = H(O, \kappa)\circ R(O, \pi)\circ R(O, \theta) = H(O, \kappa)\circ R(O, \pi+\theta)$$

Πρόταση 4.9 Δεδομένων δύο ομορρόπως ομοίων σχημάτων Χ και Υ, υπάρχει μία μοναδική ομοιότητα που απεικονίζει το Χ στο Υ. Ομορρόπως όμοια, λέγονται δύο όμοια σχήματα Χ και Ψ, τέτοια ώστε αν Χ* είναι η εικόνα του Χ μέσω θετικής ομοιοθεσίας λόγου ίσου με το λόγο ομοιότητας του Ψ προς το Χ, τα Χ* και Υ είναι ομορρόπως ίσα.

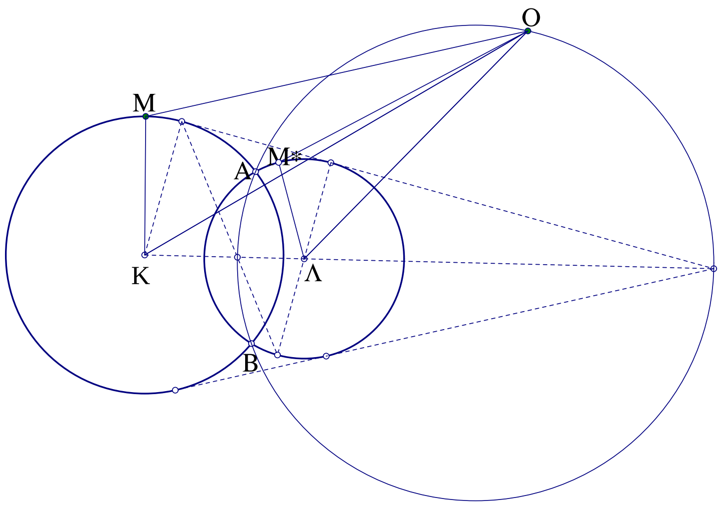
Κύκλος ομοιότητας Δίνονται δύο κύκλοι διαφορετικών κέντρων Κ και Λ και διαφορετικών ακτίνων. Ο Απολλώνιος κύκλος των Κ και Λ με λόγο ίσο με τον λόγο των αντίστοιχων ακτίνων τους, ονομάζεται ***κύκλος ομοιότητας***(*similaritycircle*) των δύο κύκλων και είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων ομοιοτήτων που απεικονίζουν τον ένα κύκλο στον άλλο (Σχήμα 128). Ο κύκλος ομοιότητας, στην περίπτωση ξένων μεταξύ τους κύκλων, έχει προφανώς διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα το εσωτερικό και το εξωτερικό κέντρο ομοιοθεσίας των δύο κύκλων. Στην περίπτωση τεμνόμενων κύκλων, ο κύκλος αυτός περνά από τα κοινά σημεία των δύο κύκλων (Σχήμα 129). Στην περίπτωση ομόκεντρων κύκλων, υπάρχει ένα μόνο κέντρο ομοιότητας, το κοινό τους κέντρο,το οποίο είναι κέντρο της ομοιοθεσίας που απεικονίζει τον ένα στον άλλο.

Πρόταση 4.10 Έστω δύο τεμνόμενοι σε σημεία Α και Β κύκλοι, κέντρων Ο και Κ. Κάθε ένα από τα σημεία τομής είναι κέντρο ομοιότητας γωνίας ίσης με την γωνία $\widehat{OAK}$ και λόγου ίσου με τον λόγο των ακτίνων τους. Επίσης το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο ομόλογα σημεία διέρχεται από το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων.

Απόδειξη:
Κέντρο ομοιότητας δύο κύκλων Έστω ΧΧ* ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα στους δύο κύκλους, που περνά από το Β. Το τρίγωνο ΑΧΧ* παραμένει όμοιο προς εαυτό και όμοιο προς το σταθερό ΑΟΚ.



Σχήμα 128: Κύκλος ομοιότητας

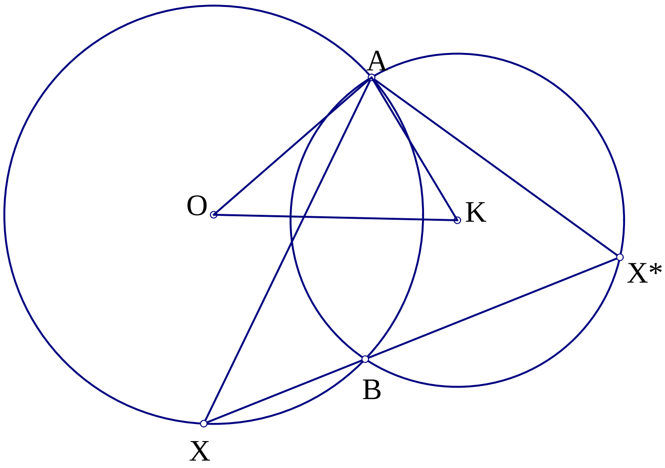


Σχήμα 129: Κύκλος ομοιότητας τεμνόμενων κύκλων

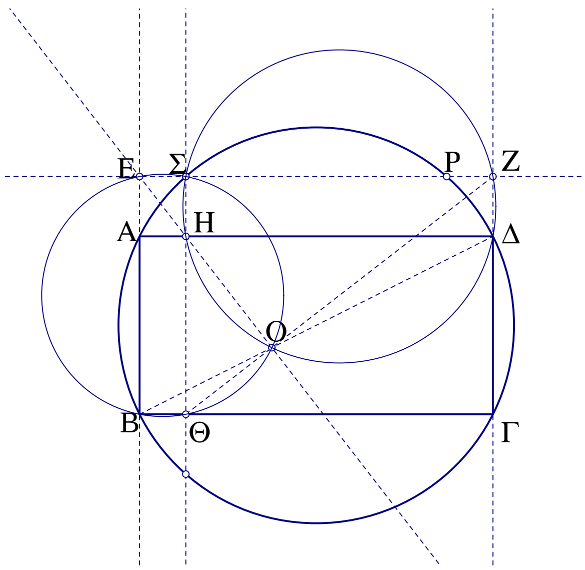
Πρόβλημα 4.11 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και σημείο Σ του κύκλου. Αν οι παράλληλες από το Σ προς τις πλευρές του ορθογωνίου τέμνουν τις πλευρές ΑΒ, ΓΔ, ΑΔ και ΒΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ αντίστοχα, να δειχθεί ότι οι ΕΗ και ΘΖ είναι κάθετες και τέμνονται πάνω στην διαγώνιο ΒΔ [10].

Απόδειξη:
Από την ομοιότητα των ορθογωνίων ΕΣΘΒ και ΗΣΖΔ, προκύπτει ότι το Σ είναι κέντρο ομοιότητας ορθής γωνίας που απεικονίζει τον περίκυκλο του πρώτου σε εκείνο του δεύτερου. Η εικόνα του Β είναι το Δ, του Θ είναι το Ζ και του Ε το Η. Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ, ΘΖ και ΕΗ περνάνε από το δεύτερο κοινό σημείο των δύο κύκλων, το Ο. Επί πλέον το Σ αποτρλεί και κέντρο ομοιότητας ορθής γωνίας, των ομοίων ορθογωνίων ΣΕΑΗ και ΣΘΓΖ. Επομένως οι ομόλογες διαγώνιες τους ΕΗ και ΘΖ τέμνονται καθετα (Σχήμα 131).

Πρόταση 4.11 Έστω Α*Β*Γ* η εικόνα ενός τριγώνου ΑΒΓ μέσω μιάς ομοιότητας και Α!, Β! και Γ! σημεία που χωρίζουν τις ΑΑ*, ΒΒ* και ΓΓ* σε ίσους λόγους. Τό τρίγωνο Α!Β!Γ!



Σχήμα 130: Κέντρο ομοιότητας δύο κύκλων



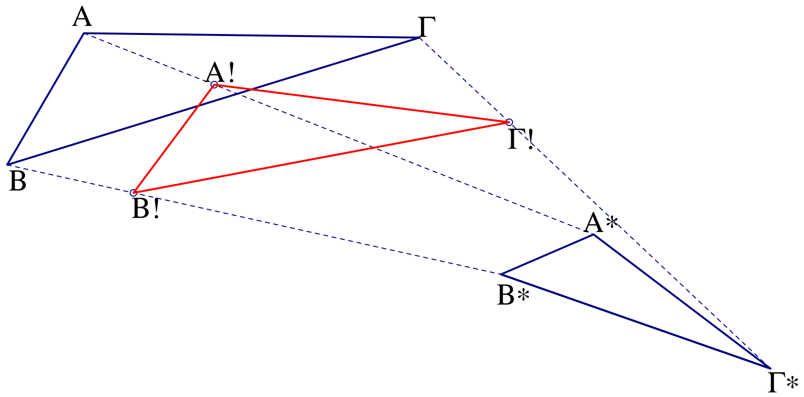
Σχήμα 131: Εγγεγραμμένο ορθογώνιο

είναι όμοιο με το αρχικό.

Απόδειξη:
Αν O το σταθερό σημείο της αρχικής ομοιότητας, τότε είναι το σταθερό σημείο άλλης ομοιότητας που απεικονίζει το AA* στο BB*, άρα και το AA! στο BB!. Έτσι υπάρχει ομοιότητα κέντρου O και γωνίας ίσης με την AOA! που απεικονίζει το AA! στο BB!. Άρα η ομοιότητα κέντρου O και γωνίας ίσης με $\widehat{AOB}$ απεικονίζει το AB στο A!B!. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η τελευταία ομοιότητα, απεικονίζει το AΓ στο A!Γ! και το BΓ στο B!Γ!, δηλαδή τελικά το τρίγωνο ABΓ στο A!B!Γ! (Σχήμα 132).

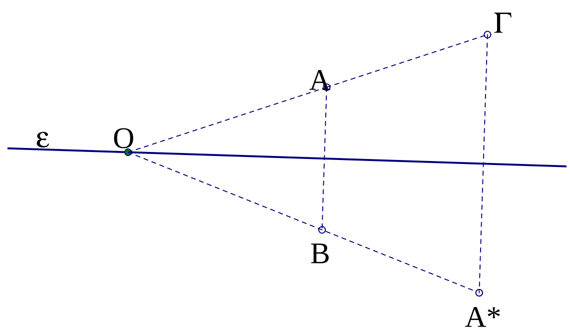
4.5 ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΣ(($Dilative\ Reflection$)

Ορισμός 4.3 Αντίρροπος ή σπειροειδής ομοιότητα ($dilativereflection$ η $antihomology$)ονομάζεται ο μετασχηματισμός που είναι σύνθεση μιάς ομοιοθεσίας $H(O,\kappa)$ και μιάς αντίρροπης ισότητας. Δηλαδή μία αντίρροπος ομοιότητα, ισοδυναμεί πάντα με τη σύνθεση μιάς ομοιοθεσίας



Σχήμα 132: Όμοια τρίγωνα

κέντρου Ο και μιάς ανάκλασης σε άξονα ε που περνά από το Ο. Το σημείο Ο ονομάζεται κέντρο της αντίρροπης ομοιότητας. (Σχήμα 133)

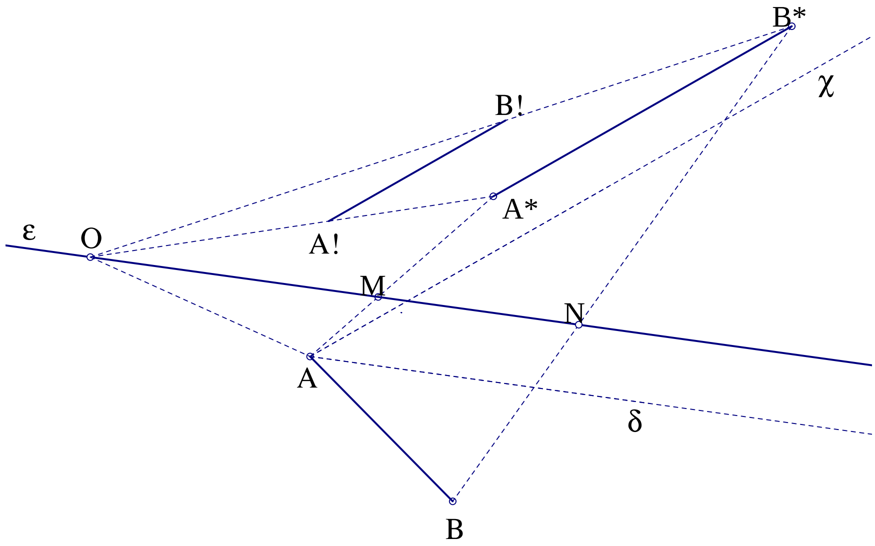


Σχήμα 133: Αντίρροπος ομοιότητα

Πρόταση 4.12 Δεδομένων δύο αντιρρόπως ομοίων σχημάτων Χ και Ψ, υπάρχει μία μοναδική αντίρροπος ομοιότητα που απεικονίζει το Χ στο Ψ. Αντιρρόπως όμοια λέγονται δύο όμοια σχήματα Χ και Ψ, τέτοια ώστε αν Χ* είναι η εικόνα του Χ μέσω ομοιοθεσίας λόγου ίσου με το λόγο ομοιότητας του Ψ προς το Χ, τα Χ* και Υ είναι αντιρρόπως ίσα.

Απόδειξη:
Έστω ΑΒ και Α*Β* δύο ομόλογα ευθύγραμμα τμήματα του μετασχηματισμού. Αν Ο είναι το διπλό σημείο του μετασχηματισμού, τότε οι λόγοι ΟΑ/ΟΑ* και ΟΒ/ΟΒ* είναι ίσοι με τον λόγο ΑΒ/Α*Β*. Επομένως ο άξονας ε του μετασχηματισμού περνά από τα σημεία Μ και Ν που χωρίζουν τα ΑΑ* και ΒΒ* σε λόγους ίσους με τους τρείς παραπάνω και διχοτομεί τις γωνίες που σχηματίζουν οι ΟΑ με ΟΑ*, ΟΒ και με ΟΒ*, όπως επίσης είναι παράλληλος της διχοτόμου δ της γωνίας που σχηματίζει το ΑΒ με την ημιευθεία Αχ, παράλληλη του Α*Β*. Έστω Α!Β! το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε. Το σημείο Ο προσδιορίζεται σαν κέντρο ομοιοθεσίας των Α!Β! και ΑΒ (Σχήμα 134).

Παρατήρηση 1:
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω αντίρροπο ομοιότητα, σαν σύνθεση ανάκλασης σε ευθεία ε! κάθετη στην ε και παράλληλη της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζει το ΑΒ με την ημιευθεία Αχ (Σχήμα 135). Και η ε!, όπως η ε, διέρχονται από το σημείο Ο, το οποίο είναι το σημείο τομής των Απολλώνιων κύκλων των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΑ* και ΒΒ* με λόγο ΑΒ/Α*Β*. Το Ο είναι κέντρο θετικής



Σχήμα 134: Κέντρο ομοιότητας

ομοιοθεσίας του A!B! με το AB, ενώ είναι κέντρο αρνητικής ομοιοθεσίας του A!!B!!, (εικόνας ανάκλασης του AB ως προς ε!) με το AB. Η ευθεία ε ονομάζεται *ευθεία των αναλόγων διαιρέσεων* για τις ευθείες AB και A!B!.

Παρατήρηση 2:

Στην περίπτωση που ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με 1, δηλαδή έχουμε AB=A*B*, η ευθεία ε ονομάζεται *ευθεία των μέσων* όπως την ονόμασε πρώτος ο *Chasles* το 1860. Στην περίπτωση αυτή, το ένα τμήμα απεικονίζεται στο άλλο μέσω ολισθανάκλασης με άξονα την ε (Σχήμα 136).

Πρόταση 4.13 Έστω τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, Λ, Ν τα αρμονικά συζυγή των Β, Δ με λόγο ίσο προς ΑΒ/ΓΔ και Κ, Μ τα αρμονικά συζυγή των Α, Γ με τον ιδιο λόγο. Τότε οι ΛΚ και ΜΝ τέμνονται κάθετα σε σημείο Ο που είναι κέντρο σπειροειδούς ομοιότητας που απεικονίζει την πλευρά ΑΒ στην ΓΔ.

Απόδειξη:

Προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, καθώς το σημείο Ο είναι κοινό σημείο των αντίστοιχων Απολλώνιων κύκλων των δύο διαγωνίων (Σχήμα 137).

Παρατήρηση:

Το δεύτερο κοινό σημείο Σ των δύο κύκλων είναι κέντρο ομόρροπης ομοιότητας που απεικονίζει την ΑΒ στην ΓΔ, επομένως είναι κοινό σημείο και των κύκλων ΑΡΒ και ΓΡΔ, όπου Ρ είναι το κοινό σημείο των ΑΓ και ΒΔ.

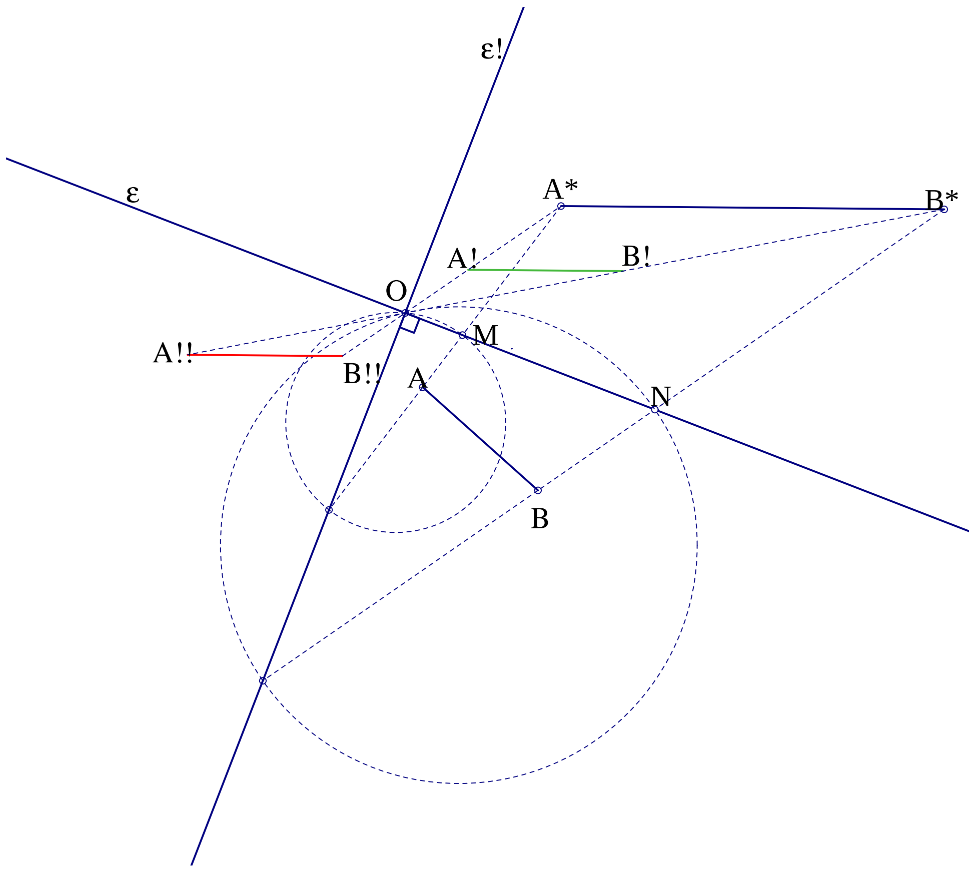
Πρόβλημα 4.12 Να κατασκευαστεί τετράπλευρο ΑΒΓΔ όταν δίνονται τα μήκη των τεσσάρων πλευρών του και το άθροισμα δύο απέναντι γωνιών του.

Απόδειξη:

Έστω ΑΒΓΔ το προς κατασκευή τετράπλευρο. Με πλευρά ΒΓ, κατασκευάζομε τετράπλευρο ΒΓΖΕ όμοιο του αρχικού, έτσι ώστε το τελευταίο να είναι εικόνα του αρχικού, μέσω αντιρρόπου ομοιότητας που απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ στο ΓΒ.

$$\widehat{\Delta AB} + \widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Gamma BE} + \widehat{BEZ} = 360^0$$

Επομένως το ΑΔΖΕ είναι τραπέζιο και κατασκευάζεται από τα γνωστά μήκη των τεσσάρων πλευρών του, καθώς οι πλευρές ΑΕ και ΔΖ είναι βάσεις τργώνων ΑΕΒ και ΔΖΓ αντίστοιχα, τα οποία έχοουν γνωστά μήκη των άλλων δύο πλευρών και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες με τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών του ΑΒΓΔ. (Σχήμα 138).



Σχήμα 135: Κέντρο ομοιότητας

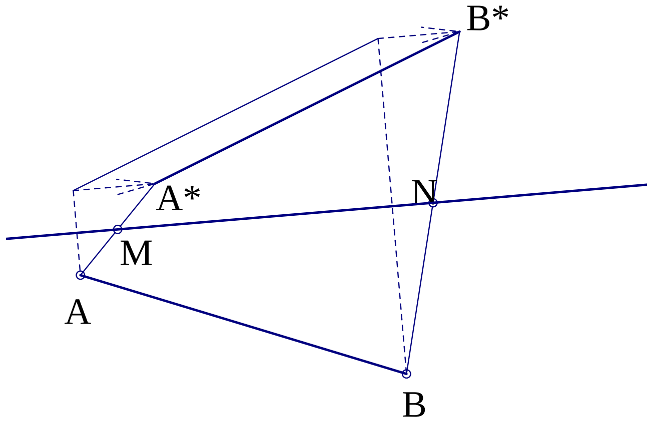
Πρόβλημα 4.13 Να αποδειχθεί ότι από τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ με δεδομένα μήκη πλευρών, το μέγιστο εμβαδόν έχει το εγγράψιμο.

Απόδειξη:
Εφαρμόζουμε την ομοιότητα του προηγούμενου προβλήματος και κατασκευάζουμε το τετράπλευρο ΔΓΕΖ. Στην θέση ΑΒΜΝ που το αρχικό τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, οι πλευρές ΝΗ και ΜΘ του όμοιού του ΝΜΘΗ, είναι προεκτάσεις των ΑΝ και ΒΜ (Σχήμα 139). Επίσης αποδεικνύεται ότι η προβολή της πλευράς ΗΘ πάνω στην ΑΒ είναι σταθερή για τις διάφορες θέσεις των κορυφών Γ και Δ, αν κρατήσουμε σταθερή τη θέση της ΑΒ και τα μήκη των πλευρών του αρχικού τετραπλεύρου. Επομένως το τραπέζιο ΑΒΘΗ έχει το μέγιστο ύψος από όλα όσα σχηματίζονται, επομένως και το μέγιστο εμβαδόν.

4.6 ΣΗΜΕΙΑ *BROCARD*

Πρόταση 4.14 Έστω O_1 και O_2 τα σημεία *Brocard* τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ και Χ το σημείο τομής των AO_1 και BO_2, Ρ το σημείο τομής των ΓO_1 και AO_2 και Υ το σημείο τομής των BO_1 και ΓO_2. Τότε τα O_1 και O_2 ισαπέχουν από το περίκεντρο Ο του ΑΒΓ και $\widehat{O_1OO_2} = 2\omega$ όπου ω η γωνία *Brocard* του ΑΒΓ. Επίσης το τρίγωνο ΥΡΧ είναι αντιρρόπως όμοιο του ΑΒΓ και οι κορυφές του ανήκουν στον κύκλο O_1O_2O (κύκλος *Brocard*). Το τρίγωνο ΥΡΧ ονομάζεται πρώτο τρίγωνο *Brocard* του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη:
Έστω ΔΕΖ το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία τομής με τον περίκυκλο του ΑΒΓ, των ευθειών που ορίζονται από το O_1 και κάθε μία από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου (Σχήμα 140). Τα τόξα ΒΔ, ΓΖ και ΑΕ έχουν μέτρο διπλάσιο της γωνίας *Brocard* ω. Επομένως το τρίγωνο ΔΕΖ είναι εικόνα του ΑΒΓ μέσω στροφής περί το Ο και γωνίας ίσης με 2ω. Από



Σχήμα 136: Ευθεία των μέσων

τις εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{A\Delta E} = \widehat{BZ\Delta} = \widehat{\Gamma EZ} = \omega$, προκύπτει ότι το σημείο O_1 είναι δεύτερο σημείο *Brocard* του τριγώνου ΔΕΖ. Επομένως το O_1 είναι εικόνα του O_2 μέσω στροφής κέντρου Ο και γωνίας 2ω. Από τατρίγωνα ΑΧΒ, ΒΥΓ και ΓΡΑ, βλέπουμε ότι $\widehat{BXO_1} = \widehat{O_1 \Upsilon O_2} = \widehat{APO_1} = 2\omega$, επομένως τα σημείας Χ, Υ και Ρ ανήκουν στον κύκλο O_1OO_2. Άρα γωνίες του τριγώνου ΧΥΡ είναι:

$$\widehat{X} = \widehat{PO_1\Upsilon} = \widehat{\Gamma}, \widehat{\Upsilon} = \widehat{XO_2P} = \widehat{A}, \widehat{P} = \widehat{XO_1\Upsilon} = \widehat{B}$$

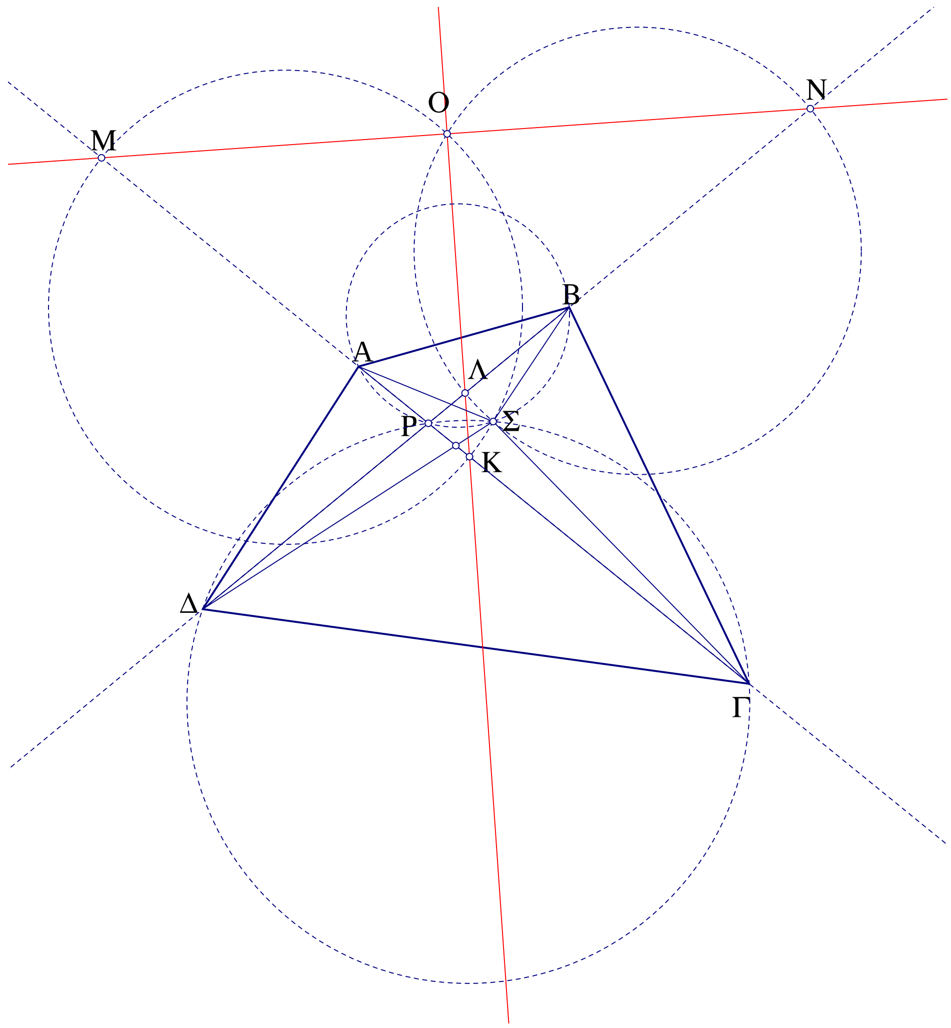
Πρόβλημα 4.14 Να δειχθεί ότι το πρώτο τρίγωνο *Brocard* ενός τριγώνου ΑΒΓ έχει κοινό βαρύκεντρο με το ΑΒΓ.

Απόδειξη:
Έστω ΡΛΣ το πρώτο τρίγωνο *Brocard* και G το βαρύκεντρο του ΑΒΓ. Αν Χ είναι το συμμετρικό του Ρ ως προς την ΒΓ (Σχήμα 141), τα τρίγωνα ΣΒΧ και ΛΧΓ είναι ίσα μεταξύ τους καθώς είναι και τα δύο όμοια με το ΑΒΓ (με αντίστοιχα κέντρα ομοιότητας τα Β και Γ) και επί πλέον έχουν ΒΧ=ΧΓ. Επομένως ΑΣ=ΣΒ=ΛΧ και ΣΧ=ΛΓ=ΑΛ. Από το παραλληλόγραμμο ΑΣΧΛ προκύπτει ότι οι ΑΧ και ΣΛ διχοτομούνται. Άρα το σημείο G είναι βαρύκεντρο του ΑΡΧ, επομένως και του ΡΣΛ.

Πρόβλημα 4.15 Να δειχθεί ότι οι προβολές των δύο σημείων *Brocard* τυχαίου τριγώνου στις πλευρές του, είναι ομοκυκλικά σημεία και τα τρίγωνα που ορίζονται από τις προβολές αυτές είναι ίσα.

Απόδειξη:
Έστω O_1 και O_2 το πρώτο και δεύτερο σημεία *Brocard* του τριγώνου αντίστοιχα και $A_1, B_1, \Gamma_1, A_2, B_2, \Gamma_2$ οι προβολές τους στις πλευρές του(Σχήμα 142). Τα τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι εικόνες του ΑΒΓ ομοιοτήτων λόγου $\lambda = \frac{O_1A_1}{O_1A} = \frac{O_2A_2}{O_2A}$, γωνίας ίσης με ω (κατά αντίθετες φορές) και κέντρων O_1 και O_2 αντίστοιχα. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα. Επίσης, οι εικόνες του περίκεντρου Ο του ΑΒΓ μέσω των παραπάνω μετασχηματισμών ταυτίζονται με το μέσο Κ του O_1O_2 καθώς το τρίγωνο O_1O_2O είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $\widehat{O} = 2\omega$ όπου ω είναι η γωνία *Brocard* του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4.16 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και A_1, B_1, Γ_1 σημεία του περιγεγραμμένου του κύκλου, τέτοια ώστε οι ευθείες $AB_1, B\Gamma_1, \Gamma A_1$ να σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Τότε το τρίγωνο ΔΕΖ που σχηματίζεται από τις ευθείες αυτές είναι



Σχήμα 137: Αναλλοίωτες ευθείες τετραπλεύρου

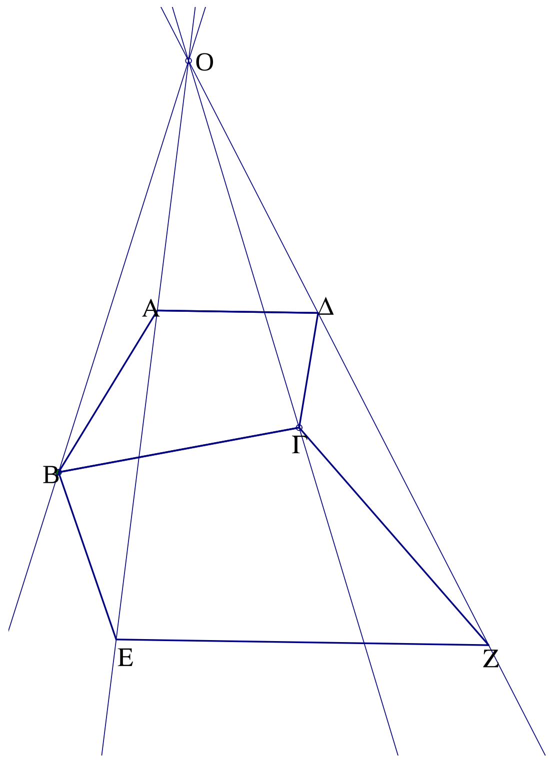
όμοιο με το ΑΒΓ με κοινό πρώτο σημείο *Brocard* (έστω O_1). Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ίσο με το αρχικό και έχει κοινό το δεύτερο σημείο *Brocard* (έστω O_2) μετο ΔΕΖ. Επίσης το O_1 είναι κέντρο ομοιότητας των ΑΒΓ και ΔΕΖ και το O_2 είναι κέντρο ομοιότητας του ΔΕΖ με το $A_1B_1\Gamma_1$.

Απόδειξη:
Απο τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AO_1\Delta B, \Gamma O_1 ZA$ και $BO_1E\Gamma$ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$\widehat{Z\Delta O_1} = \widehat{ABO_1}, \widehat{O_1\Delta E} = \widehat{O_1AB} = \widehat{O_1B\Gamma} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{Z\Delta E}$$

και όμοια αποδεικνύεται ότι $\widehat{\Delta EZ} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{A}$ (Σχήμα 143). Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει επίσης ότι το O_1 είναι κέντρο ομοιότητας που απεικονίζει το ΑΒΓ στό ΔΕΖ. Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ίσο με το αρχικό ΑΒΓ, καθώς είναι στροφή του ΑΒΓ κατα γωνία ίση με το μισό των ίσων τόξων $BB_1, \Gamma\Gamma_1, AA_1$. Αν θεωρήσουμε τώρα σαν αρχικό τρίγωνο το $A_1B_1\Gamma_1$, προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα για τα τρίγωνα ΔΕΖ και $A_1B_1\Gamma_1$ με κέντρο ομοιότητας το O_2.

Πρόβλημα 4.17 Δίνονται τρείς κύκλοι $(O_1, r_1)(O_2, r_1)$ και (O_3, r_3) , ανα δύο τεμνόμενοι. Έστω Α, Β τα σημεία τομής των δυο πρώτων κύκλων, Γ, Δ του δεύτερου με τον τρίτο και Ε, Ζ του τρίτου με τον πρώτο, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω P_1 τυχαίο σημείο του πρώτου κύκλου, P_2 το δεύτερο σημείο τομής της P_1A με τον δεύτερο, $_3$ τοδύτερο σημείο τομής της P_2G με τον τρίτο και P_4 τοαντίστοιχο σημείο τομής της P_3E με τον πρώτο κύκλο.



Σχήμα 138: Ομοιότητα τετραπλεύρου

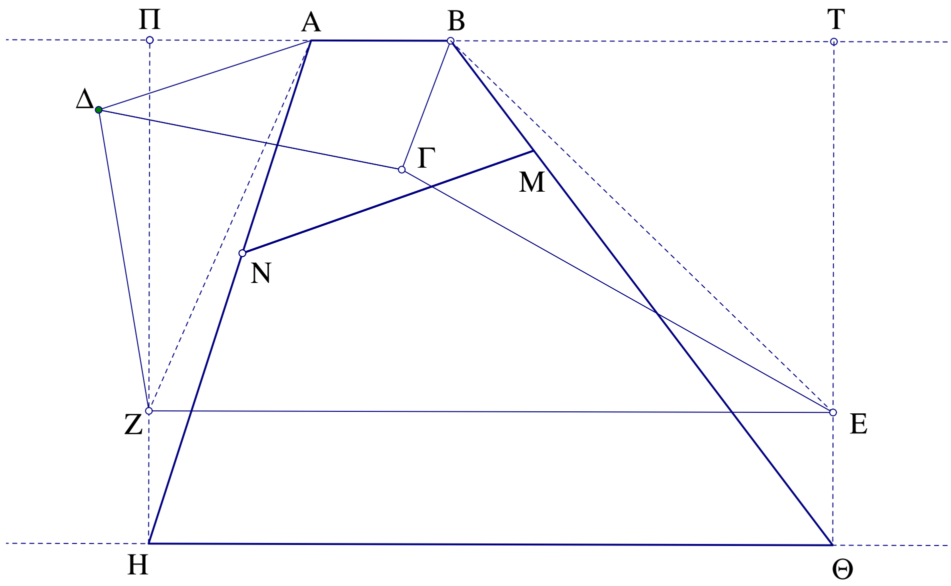
Όμοια ορίζουμε τα σημεία P_5, P_6 και P_7 με χρήση των άλλων σημείων τομής, Β, Δ και Ζ. Να δειχθεί ότι το P_7 ταυτίζεται με το P_1 (Σχήμα 144).

Απόδειξη:
Το P_2 είναι εικόνα του P_1 μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας κέντρου Α που απεικονίζει το O_1 στο O_2. Όμοια ορίζονται και τα P_2, P_3 και P_4. Έτσι το P_4 είναι εικόνα του R_1 μέσω σύνθεσης τριών ομοιοτήτων των οποίων το γινόμενο των λόγων ισούται με $\frac{r_1}{r_2}\frac{r_2}{r_3}\frac{r_3}{r_1} = 1$, άρα είναι στροφή κέντρου O_1 και γωνίας ίσης με το άθροισμα των τριών ομοιοτήτων. Όμοια το P_7 είναι εικόνα του P_4 μέσω σύνθεσης αντίστοιχων ομοιοτήτων ίδιων λόγων αλλά αντίθετων γωνιών με τις προηγούμενες. Έτσι το P_7 είναι εικόνα του P_4 μέσω αντίστροφου μετασχηματσμού αυτού που απεικόνιζε το P_1 στο P_4. Επομένως το P_7 ταυτίζεται με το P_1.

4.7 ΤΡΙΓΩΝΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ-ΚΥΚΛΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Πρόταση 4.15 Έστω Σ_1, Σ_2 και Σ_3 τρία όμοια σχήματα και O_1, O_2 και O_3 τα κέντρα ομοιότητας των $(\Sigma_2, \Sigma_3), (\Sigma_1, \Sigma_3)$ και (Σ_1, Σ_2) αντίστοιχα. Το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ ονομάζεται *τρίγωνο ομοιότητας* των τριών σχημάτων και ο περιγεγραμμένος του κύκλος ονομάζεται *κύκλος ομοιότητας* των σχημάτων αυτών. Αν A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 τρία αντίστοιχα τμήματα των σχημάτων αυτών και ΚΜΝ το τρίγωνο που σχηματίζεται από τους φορείς των τριών τμημάτων (Σχήμα 145), τότε: α) Οι ευθείες NO_1, MO_2, KO_3 συντρέχουν σε σημείο του κύκλου ομοιότητας. β) Οι περίκυκλοι των τριγώνων A_1A_2K, A_2A_3N και A_1A_3M έχουν κοινό σημείο που βρίσκεται στον κύκλο ομοιότητας των τριών σχημάτων.

Απόδειξη:
Έστω Ρ το σημείο τομής των MO_2 και KO_2. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα XO_2B_1M και XB_1KO_3 προκύπτει ότι οι γωνίες $\widehat{O_2XO_3}$ και $\widehat{MPK}$ είναι παραπληρωματικές. Επομένως τα σημεία O_2, O_3, Ρ και Χ είναι ομοκυκλικά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα σημεία O_2, O_3, Ρ και Υ είναι ομοκυκλικά. Επομένως οι MO_2 και KO_2 τέμνονται πάνω στον κύκλο $X\Upsilon O_2$ (ο ο•ποίος περνά και από το σημείο O_3. Όμοια αποδεικνύουμε ότι και οι MO_2 και



Σχήμα 139: Ομοιότητα τετραπλεύρου

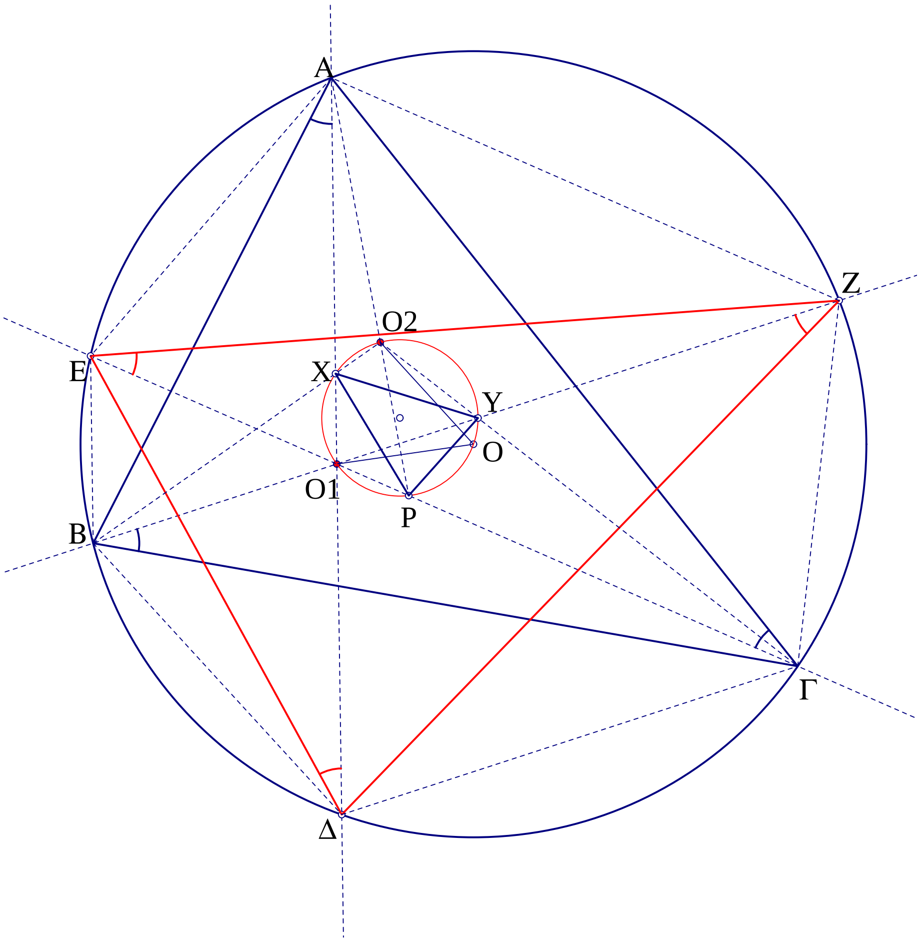
NO_1 τέμνονται •πάνω στον ίδιο κύκλο (Σχήμα 145).

Πρόταση 4.16 Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα, το A_1B_1 και το A_3B_3 και το σημείο O_2 που είναι κέντρο της ομοιότητας $S(O_2)$ που απεικονίζει το πρώτο στο δεύτερο. Αν απεικονίσουμε τώρα το A_1B_1 στο A_3B_3 μέσω σύνθεσης ομοιοθεσίας $H(O_3, \lambda)$ τυχαίου κέντρου O_3 και λόγου $\lambda = \frac{A_3B_3}{A_1B_1}$ με στοφή $R(O_1)$ κατάλληλου κέντρου O_1, το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ παραμένει όμοιο προς εαυτό, ανεξάρτητα από την επιλογή του σημείου O_3.

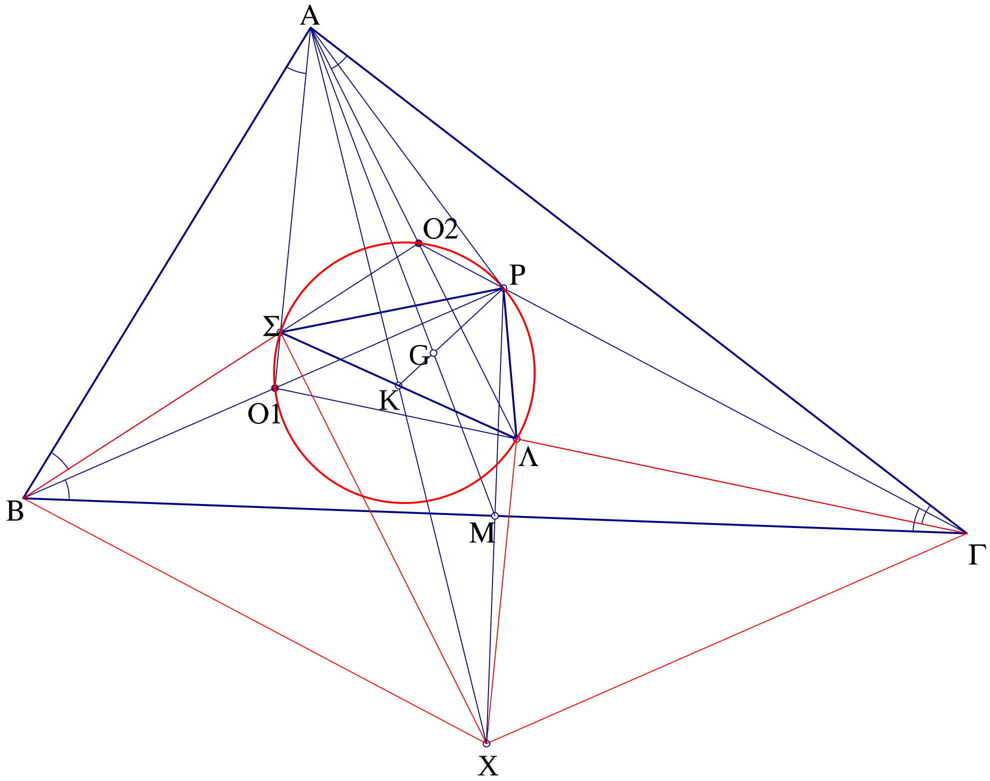
Απόδειξη:
Έστω Λ η αντίστροφη εικόνα του O_1 μέσω της $H(O_3, \lambda)$. Τότε, το Λ είναι επίσης αντίστροφη εικόνα του O_1 μέσω της ομοιότητας $S(O_2)$. Επομένως το τρίγωνο $O_1O_2\Lambda$ παραμένει όμοιο προς εαυτό. καθώς όμως το Λ διαιρεί το O_1O_3 σε σταθερό λόγο, έτσι και το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ παραμένει όμοιο προς εαυτό (Σχήμα 146). Στην ουσία, η πρόταση αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση της προηγούμενης, γιά την περίπτωση που το A_1B_1 είναι παράλληλο με το A_2B_2.

Πρόβλημα 4.18 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Να δειχθεί ότι τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΒΓΔ και ΑΓΔ είναι κορυφές τετραπλεύρου όμοιου με το αρχικό. Το ίδιο συμβαίνει με τα κέντρα των τεσσάρων κύκλων *Euler* των παραπάνω τριγώνων. Οι κύκλοι *Euler* αυτοί διέρχονται από κοινό σημείο [16].

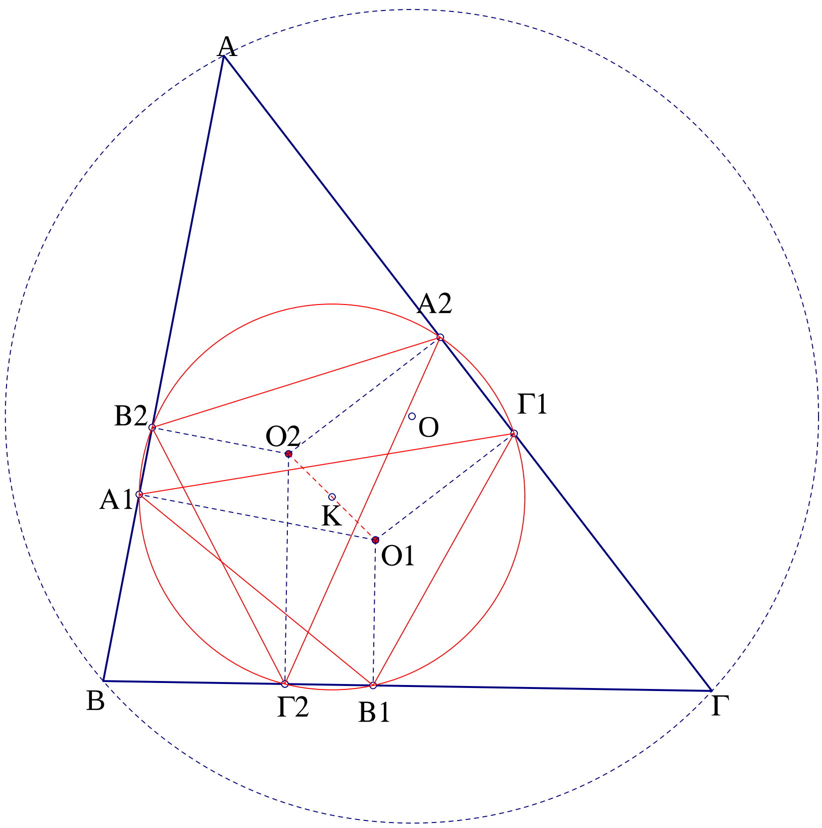
Απόδειξη:
Το τετράπλευρο $H_1H_2H_3H_4$ των ορθοκέντρων των τεσσάρων κύκλων *Euler* τριγώνων είναι εικόνα ημιστροφής του αρχικού, με κέντρο το σημείο Κ. Τα τετράπλευρα των βαρυκέντρων και των κέντρων των κύκλων *Euler* των παραπάνω τριγώνων είναι ομοιόθετα του $H_1H_2H_3H_4$ με κέντρο Ο. Οι κύκλοι *Euler* και των τεσσάρων τριγώνων περνάνε από το σημείο Κ (Σχήμα 147).



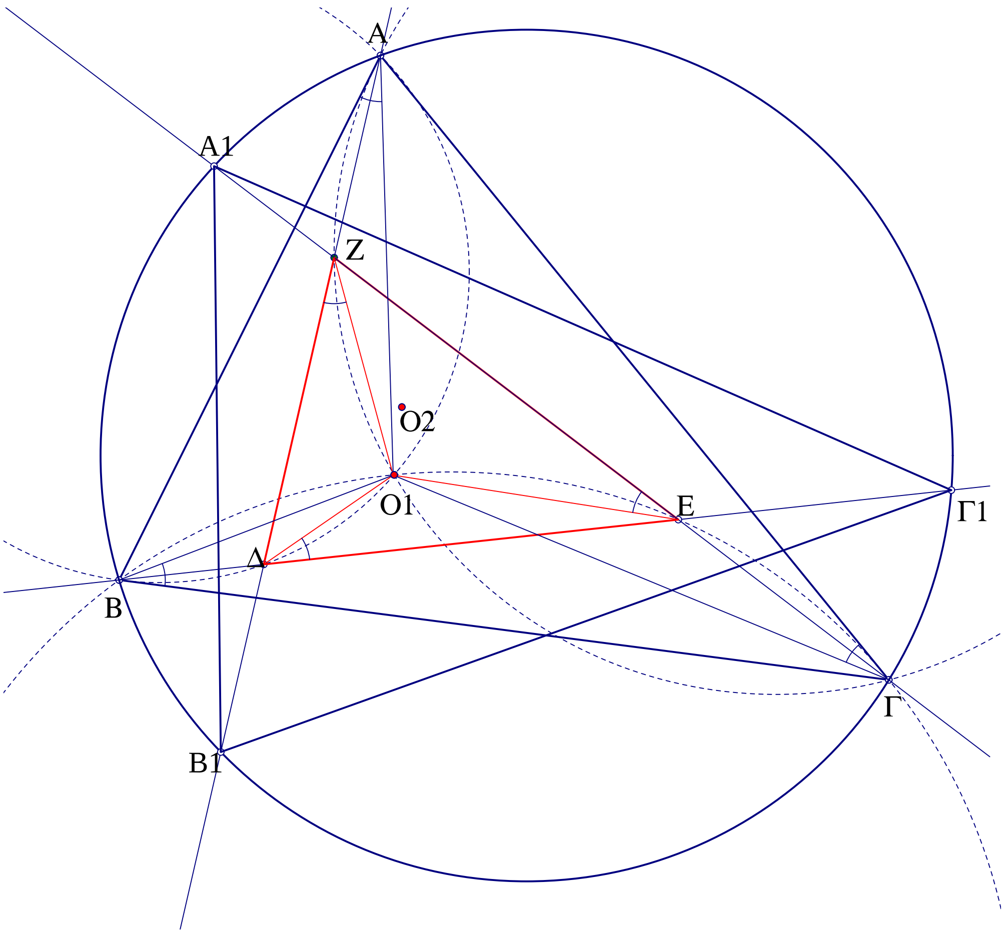
Σχήμα 140: 6 ομοκυκλικά σημεία



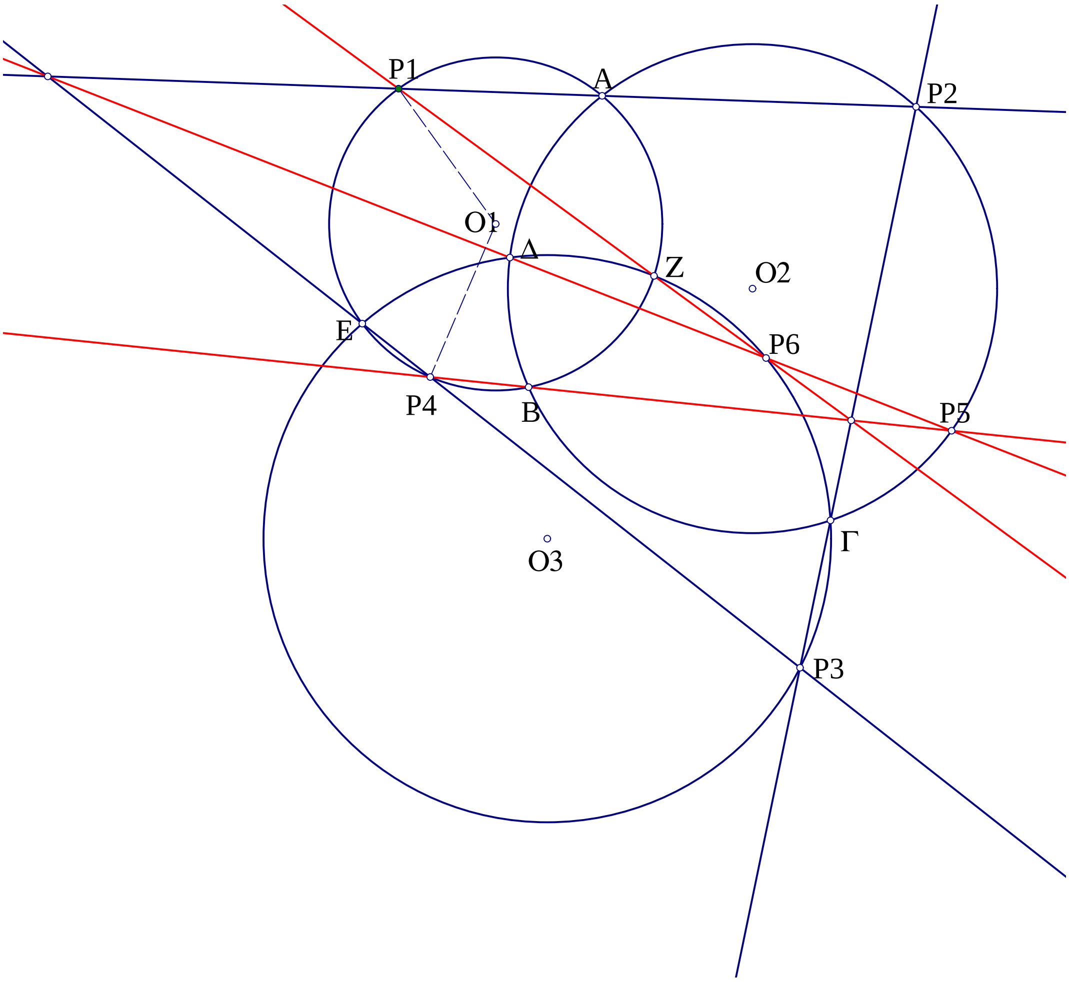
Σχήμα 141: Κέντρο βάρους τριγώνου *Brocard*



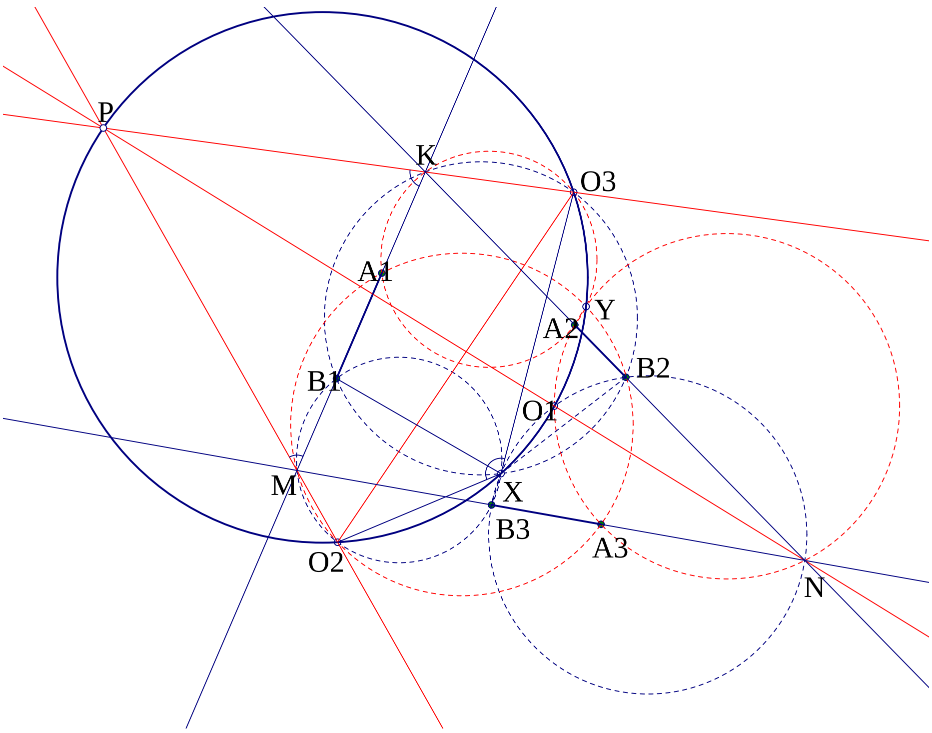
Σχήμα 142: 6 ομοκυκλικά σημεία



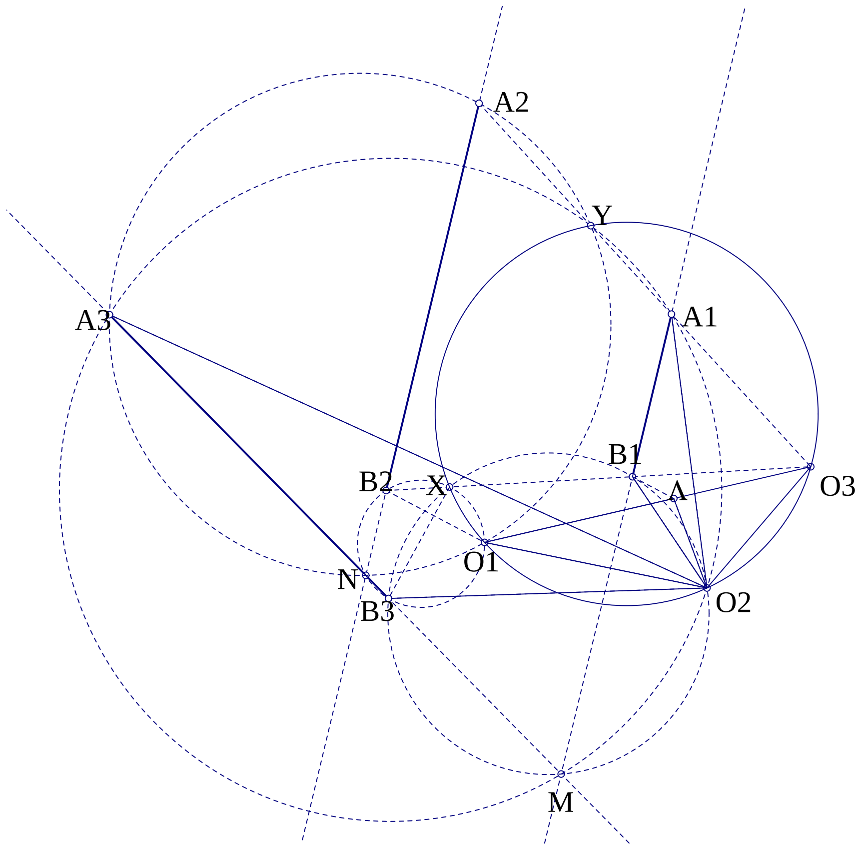
Σχήμα 143: Κοινό σημείο *Brocard*



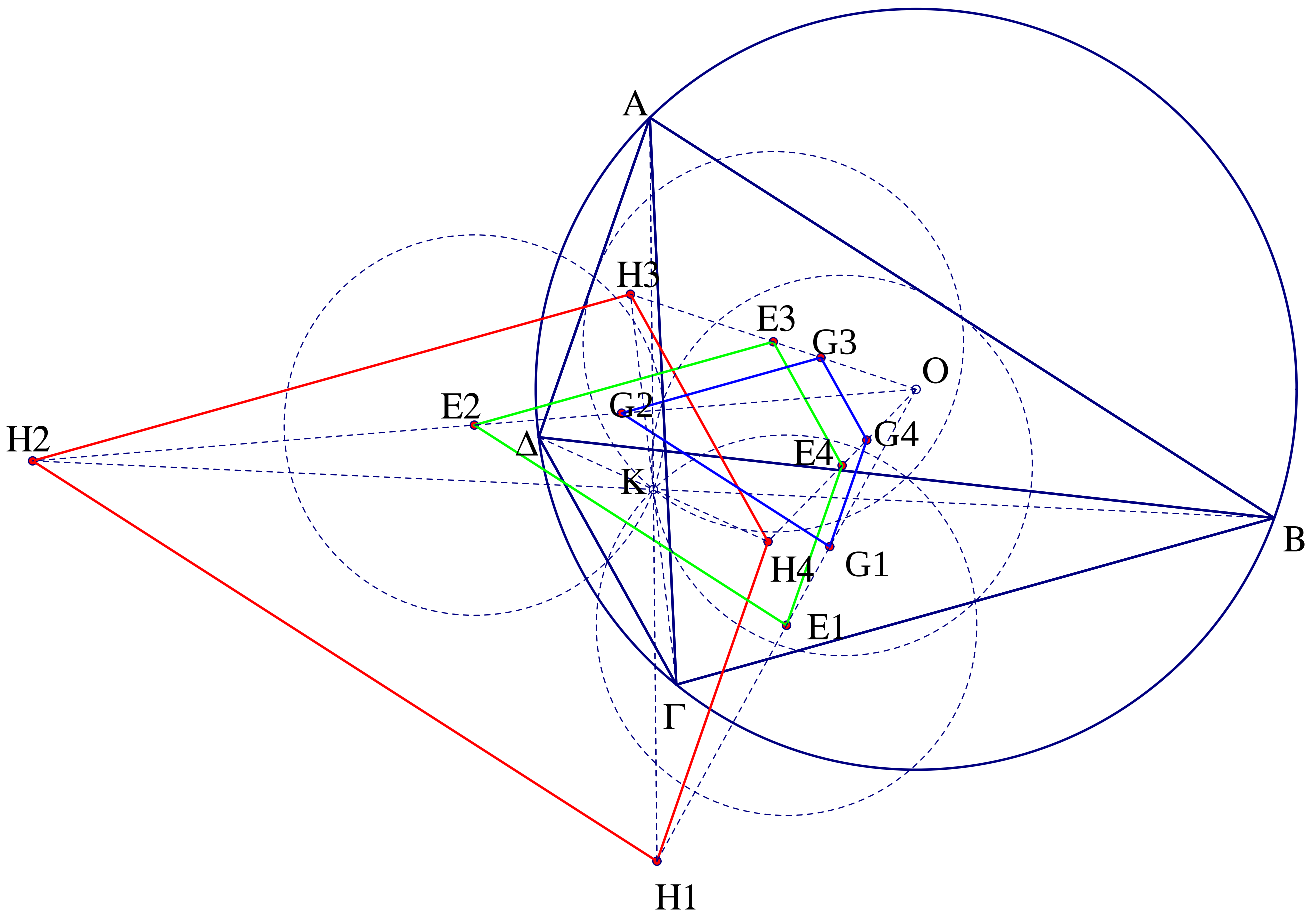
Σχήμα 144: Διαδοχικές ομοιότητες



Σχήμα 145: Τρίγωνο ομοιότητας



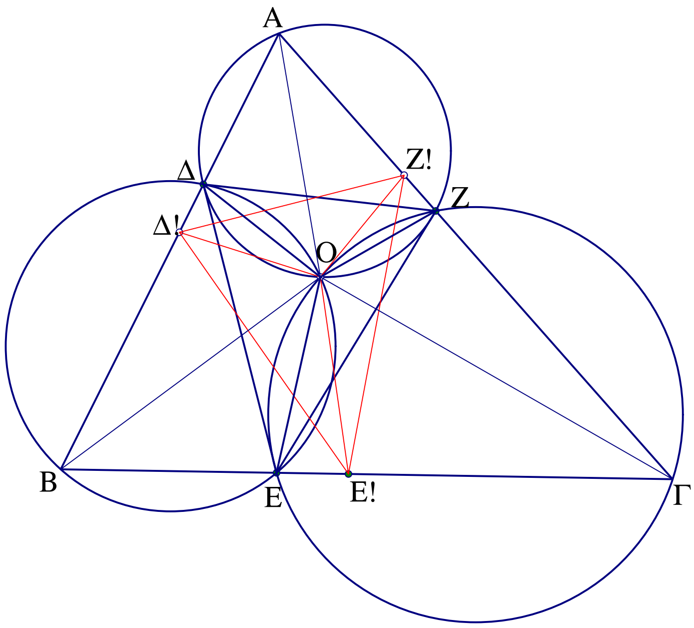
Σχήμα 146: Κέντρα ομοιότητας



Σχήμα 147: Ομοιόθετα τετράπλευρα

4.8 ΚΕΝΤΡΟ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Πρόταση 4.17 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τρία τυχαία σημεία Δ, Ε, Ζ, από ένα σε κάθε πλευρά του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Οι περίκυκλοι ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΕΖ άχουν κοινό σημείο Ο το οποίο είναι κέντρο ομοιότητας του τριγώνου ΔΕΖ με το τυχαίο τρίγωνο Δ!Ε!Ζ! εγγεγραμμένο στο αρχικό και όμοιο προς το ΔΕΖ.



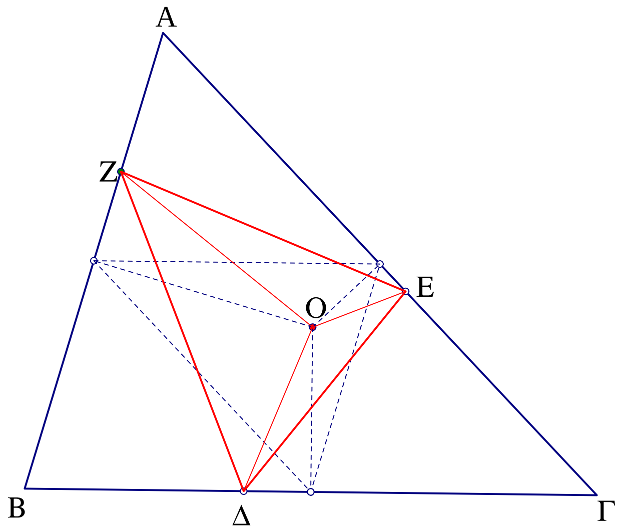
Σχήμα 148: Κέντρο εγγραφής τριγώνου

Απόδειξη:
Αν θεωρήσουμε το Ο σαν σημείο τομής των κύκλων ΑΔΖ και ΒΔΕ, ο κύκλος ΓΕΖ περνά από το Ο καθώς το τετράπλευρο ΓΕΟΖ είναι εγγράψιμο όπως προκύπτει από την ισότητα των γωνιών $\widehat{BEO} = \widehat{O\Delta A} = \widehat{OZ\Gamma}$. Αν στρέψουμε τις ημιευθείες ΟΔ, ΟΕ και ΟΖ κατα γωνία ω περί το Ο και ονομάσουμε Δ!, Ε! και Ζ! τα νέα σημεία τομής με τις πλευρές τπυ ΑΒΓ, έχουμε τρία νέα εγγράψιμα τετράπλευρα, τα ΒΕ!ΟΔ!, ΓΕ!ΟΖ! και ΑΖ!ΟΔ!. Από τις ισότητες γωνιών που προκύπτουν, καταλήγουμε ότι τα τρίγωνα Δ!Ε!Ζ! και ΔΕΖ είναι όμοια και το Ο έχει την ίδια θέση και στα δύο αυτά τρίγωνα. Έτσι η θέση του σημείου Ο εξαρτάται μόνο από τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ που θα εγγράψουμε στο ΑΒΓ. (Σχήμα 148)

Πρόβλημα 4.19 Σε δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ, να εγγραφεί τρίγωνο ΔΕΖ όμοιο με το αρχικό, με την κορυφή Δ πάνω στην ΒΓ, την Ε στην ΓΑ, την Ζ στην ΑΒ και κάθε γωνία του ΔΕΖ να ισούται με την απέναντι του ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι το κέντρο ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι το περίκεντρο του ΑΒΓ.

Απόδειξη:
Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να βρούμε το κέντρο ομοιότητας του ΑΒΓ με ένα οποιοδήποτε εγεγγραμμένο όμοιό του. Επιλέγουμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ, το οποίο είναι ομοιόθετο αυτού με κέντρο το Ο. (Σχήμα 149)

Πρόβλημα 4.20 Στις πλευρές δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ και ΓΑΖ, ομορρόπως όμοια μεταξύ τους. Να δειχθεί ότι τα τίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν κοινό κέντρο βάρους.



Σχήμα 149: Εγγραφή ομοίου τριγώνου

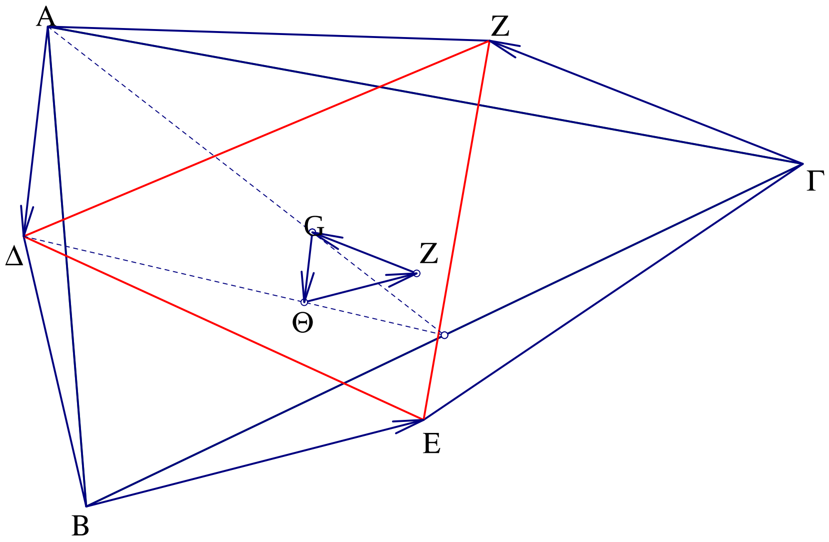
Απόδειξη:
Έστω G το κέντρο βάρους του ΑΒΓ. Θεωρούμε ότι η κορυφή Α μετακινείται στην θέση Δ και οι άλλες δύο κορυφές παραμένουν σταθερές. Τότε το κέντρο βάρους μετακινείται από το G στο σημείο Θ, όπου το διάνυσμα $G\Theta$ είναι ομοιόθετο του ΑΔ με λόγο 1/3 και κέντρο το μέσο της ΒΓ, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{G\Theta}= \frac{1}{3}\ \overrightarrow{A\Delta}$. Αν μετακινήσουμε τώρα την κορυφή Β στο Ε, έχουμε αντίστοιχη μετακίνηση του κέντρου βάρους Θ στο σημείο Ζ με $\overrightarrow{\Theta Z}= \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BE}$. Τέλος, μετακινώντας το Γ στο Ζ, έχουμε μετακίνηση του τελευταίου κέντρου βάρους, από το σημείο Ζ, κατά διάνυσμα ίσο με $\frac{1}{3}\ \overrightarrow{\Gamma Z}$. Επομένως, $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z}= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z}) = \overrightarrow{0}$, καθώς τα $\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ είναι εικόνες ομοιοτήτων ίδιων λόγων και γωνιών, των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$. Σχήμα 150

Πρόβλημα 4.21 Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο κέντρου Ο, και έστω Σ, Χ και Ψ τα σημεία τομής των ζευγών των ίσων πλευρών τους. Τότε το τρίγωνο ΣΧΨ είναι όμοιο των δύο αρχικών.

Απόδειξη:
ΤΟ ΔΕΖ είναι εικόνα στροφής του ΑΒΓ με κέντρο το Ο και γωνία ω. Το σημείο Ο είναι κοινό σημείο των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από τις ίσες πλευρές των δύο τριγώνων. Επομένως, αν Μ, Ν και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ, οι ΟΜ, ΟΝ και ΟΛ σχηματίζουν με τις ΟΣ, ΟΧ και ΟΨ γωνίες ίσες με $\frac{\omega}{2}$. Άρα τοτρίγωνο ΣΧΨ είναι εικόνα του ΜΝΛ, μέσω ομοιότητας κέντρου Ο, γωνίας $\frac{\omega}{2}$ και λόγου ίσου με $\frac{O\Sigma}{OM}$ (Σχήμα 151)

Πρόβλημα 4.22 Σε δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ να εγγραφεί τρίγωνο όμοιο με αυτό και με πλευρές κάθετες στις αντίστοιχες του αρχικού.

Απόδειξη:
Αν χρησιμοποιήσουμε τα δύο σημεία *Brocard* (πρώτο και δεύτερο σημείο στροφής), βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο τρίγωνα εγγεγραμμένα στο αρχικό, το $A_1B_1\Gamma_1$ που πρηκύπτει με ομοιότητα κέντρου O_1 και γωνία ορθή με θετική φορά (με το A_1 πάνω στην ΑΒ) και το $A_2B_2\Gamma_2$ με ομοιότητα αρνητικής ορθής γωνίας (με το A_2 πάνω στην ΑΓ). Τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ίσα λόγω των ίσων (κατά μέτρο) γωνιών ομοιότητας και τα περίκεντρά τους



Σχήμα 150: Τρίγωνα με κοινό κέντρο βάρους

συμπίπτουν με το αντιδιαμετρικό στον κύκλο OO_1O_2 (κύκλος *Brocard*) σημείο του περίκεντρου O, έστω σημείο Λ. Αυτό συμβαίνει γιατί οι γωνίες $\widehat{\Lambda OO_1}$ και $\widehat{\Lambda OO_2}$ είναι ίσες με την γωνία *Brocard* ω, επομένως οι λόγοι $O_1\Lambda/O_1O = O_2\Lambda/O_2O$ ισούνται με τον κοινό λόγο των αντίθετων ομοιοτήτων που μετασχηματίζουν το ΑΒΓ στα δύο ζητούμενα τρίγωνα (Σχήμα 152). Το σημείο Λ είναι το σημείο τομής των συμμετροδιαμέσων του ΑΒΓ ή σημείο *Lemoin*. Το τελευταίο προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι η A_1A_2 είναι αντιπαράλληλος της ΒΓ και το Λ είναι μέσο αυτής καθώς έχουμε:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{A_1\Gamma_1}{A_2B_2} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

.

Πρόβλημα 4.23 Δίνονται τρείς κύκλοι $(O, R_1), (K, R_2)$ και (I, R_3) με κοινή χορδή AB. Να δειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη στο α σε κάθε ένα από αυτούς, διαιρείται από τις άλλες δύο σε τμήματα ανάλογα. Έστω M και N τα σημεία τομής της εφαπτομένης στο A του (O, R_1) με τους (K, R_2) και (I, R_3) αντίστοιχα, καθώς και P, Σ τα αντίστοιχα σημεία τομής της εφαπτομένης στο A του (K, R_2) με τους άλλους κύκλους και E, Z τα σημεία τομής εφαπτομένης στο A του (I, R_3) με τους άλλους κύκλους. Τότε θα δείξουμε ότι:

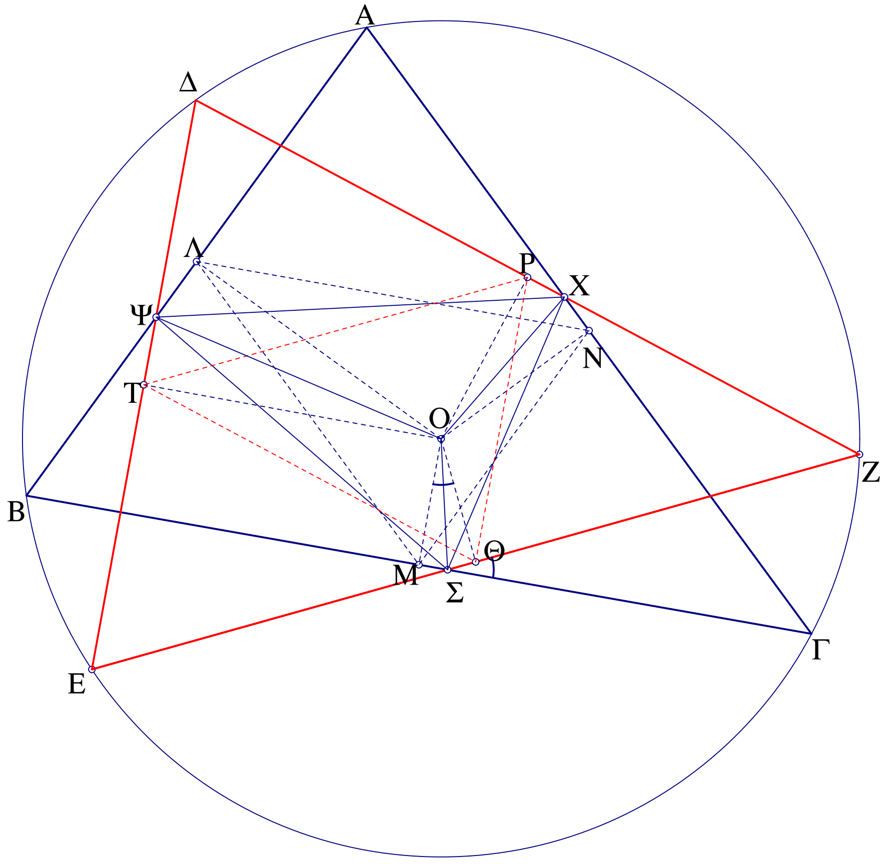
$$\frac{AN}{MN} = \frac{AE}{AZ} = \frac{AP}{P\Sigma}$$

(Σχήμα 153)

Απόδειξη:
Έστω M και N τα σημεία τομής της εφαπτομένης στο A του (O, R_1) με τους (K, R_2) και (I, R_3) αντίστοιχα, καθώς και P, Σ τα αντίστοιχα σημεία τομής της εφαπτομένης στο A του (K, R_2) με τους άλλους κύκλους και E, Z τα σημεία τομής εφαπτομένης στο A του (I, R_3) με τους άλλους κύκλους. Τότε θα δείξουμε ότι:

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AE}{AZ} = \frac{AP}{P\Sigma}$$

(Σχήμα 153)



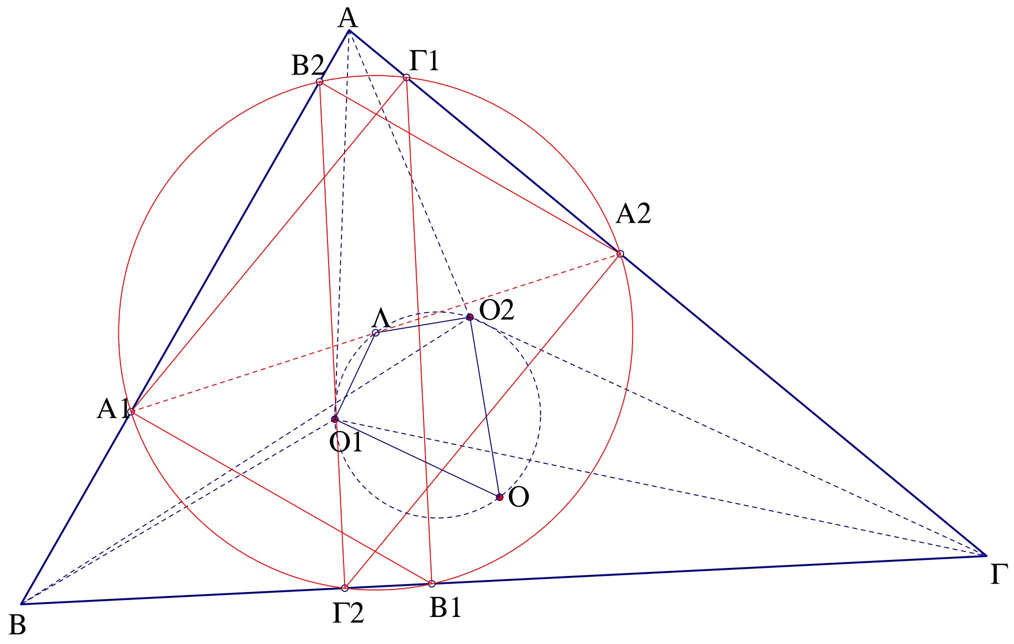
Σχήμα 151: Ίσα τρίγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο

Το σημείο Β είναι κέντρο ομοιότητας λόγου ίσου με R_1/R_2 που απεικονίζει τον κύκλο (K, R_2) στον (O, R_1) με το σημείο Μ να απεικονίζεται στο Α και το Ε στο Ζ. Επίσης, το Β είναι κέντρο άλλης ομοιότητας που απεικονίζει τον (I, R_3) στον (O, R_1) με το σημείο Ν να απεικονίζεται στο Α και το Α στο Ζ. Από την ομοιότητα των τριγώνων $MBA \approx EBZ$ και $BNA \approx BAZ$ προκύπτει ότι $\frac{AN}{MN} = \frac{AE}{AZ}$. Όμοια αποδεικνύεται και η άλλη ισότητα.

Πρόβλημα 4.24 Να δειχθεί ότι οι περίκυκλοι των τεσσάρων τριγώνων που σχηματίζονται από τέσσερις ανά δύο τεμνόμενες ευθείες, μη διερχόμενες τρείς από το ίδιο σημείο, έχχουν κοινό σημείο. Το σημείο αυτό, ονομάζεται σημείο *Miqel* της τετράδας αυτής. Επίσης, τα κέντρα των τεσσάρων κύκλων είναι ομοκυκλικά σημεία.

Απόδειξη:
Έστω ΑΒΚ, ΒΓΜ, ΑΔΜ και ΓΔΚ τα τέσσερα σχηματιζόμενα τρίγωνα με περίκεντρα τα Σ, Ν, Ρ και Ε αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε το Ο σαν κοινό σημείο των κύκλων ΑΒΚ και ΒΓΜ, τότε το σημείο αυτό, είναι κέντρο ομοιότητας που απεικονίζει το ΑΚ στο ΜΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΚΓ και ΟΑΜ είναι όμοια, με κέντρο ομοιότητας το Ο. Άρα το Ο είναι κοινό σημείο και των κύκλων ΑΔΜ και ΓΔΚ. Η γωνία $\widehat{\Sigma O E}$ ισούται με τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$, όπως προκύπτει από την ομοιότητα κέντρου Ο, του τριγώνου ΟΑΒ με το ΟΓΔ. Τέλος, από τις ομοιότητες των τριγώνων ΟΣΕ με ΟΑΔ καιΟΕΝ με ΟΔΜ, προκύπτει ότι και τα τρίγωνα ΣΕΝ και ΑΔΜ είναι όμοια με κέντρο το Ο. Επομένως τα σημεία Σ, Ν, Ρ και Ε είναι ομοκυκλικά (Σχήμα 154).

Πρόβλημα 4.25 Έστω τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και δύο τρίγωνα, το ΜΚΛ και το ΡΤΣ, εγ-



Σχήμα 152: Σημείο *lemoin*

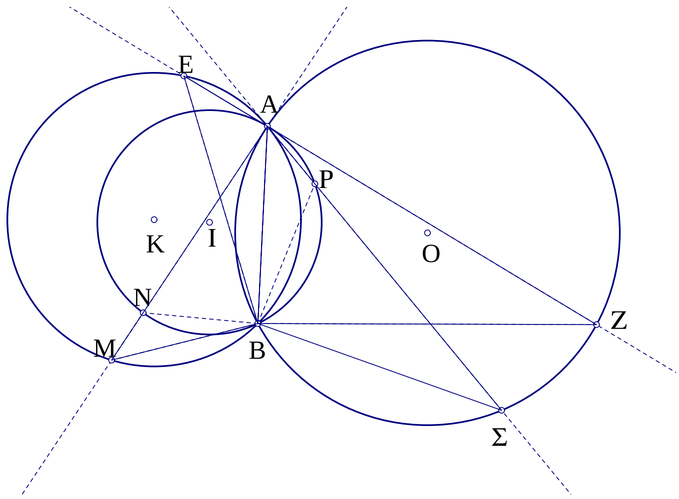
γεγραμμένα στο αρχικό, που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις αντίστοιχες πλευρές του ΑΒΓ, με το Μ να ανήκει στην ΑΒ, το Κ στην ΒΓ και το Λ στην ΑΓ γιά το πρώτο, ενώ το Ρ ανήκει στην ΑΓ, το Τ στην ΑΒ και το Σ στην ΒΓ. Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και οι κορυφές τους αποτελούν ομοκυκλική εξάδα σημείων.

Απόδειξη:
Τα δύο τρίγωνα, είναι προφανώς εικόνες ομοιοτήτων κέντρων O_1 και O_2 αντίστοιχα (σημεία *Brocard* του ΑΒΓ) και αντιθέτων γωνιών Από την ομοιότητα των τριγώνων O_1MA και O_2PA προκύπτει ότι οι δύο ομοιότητες έχουν ίδιο λόγο. Επομένως τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΡΤΣ είναι ίσα. Έστω σημείο Χ ρης διχοτόμου της γωνίας $\widehat{O_1OO_2}$ τέτοιο ώστε οι γωνίες $\widehat{XO_1O}$ και $\widehat{XO_2O}$ να είναι ίσες με την γωνία των δύο ομοιοτήτων. Από την ομοιότητα των ίσων τριγώνων XO_1O και XO_2O με τα O_1MA και O_2PA, προκύπτει ότι το σημείο Χ είναι η εικόνα του περίκεντρου Ο μέσω και των δύο ομοιοτήτων, άρα το Χ είναι κοινό περίκεντρο των ΜΚΛ και ΡΤΣ. (Σχήμα 155)

Πρόβλημα 4.26 α)Το ορθικό τρίγωνο τριγώνου ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του τριγώνου που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες του περίκυκλου του ΑΒΓ στις τρείς κορυφές του (Σχήμα 156). β)Το τρίγωνο των σημείων επαφής του εγγεγραμμένου σε τρίγωνο ΑΒΓ κύκλου, είναι ομοιόθετο του τριγώνου που ορίζεται από τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του ΑΒΓ (Σχήμα 157)[17].

Απόδειξη:
α)Οι πλευρές του ορθικού τριγώνου είναι αντιπαράλληλες των αντιστοίχων πλευρών του ΑΒΓ. Οι εφαπτόμενες του περίκυκλου του ΑΒΓ στις τρείς κορυφές του είναι και αυτές αντιπαράλληλες προς τις απέναντι πλευρές. Επομένως το ορθικό τρίγωνο έχει πλευρές παράλληλες προς τις αντίστοιχες εφαπτόμενες. β)Οι πλευρές του τριγώνου επαφής είναι κάθετες στις αντίστοιχες εσωτερικές διχοτόμους, άρα παράλληλες προς τις εξωτερικές διχοτόμους .

Πρόβλημα 4.27 α)Το ορθικό τρίγωνο του τριγώνου επαφών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ (Σχήμα 158).
β)Το τρίγωνο επαφών του ορθικού τριγώνου ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του τριγώ-



Σχήμα 153: Εφαπτόμενες τριών τεμνόμενων κύκλων

νου που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες του περίκυκλου του ΑΒΓ στις τρείς κορυφές του (Σχήμα 159).

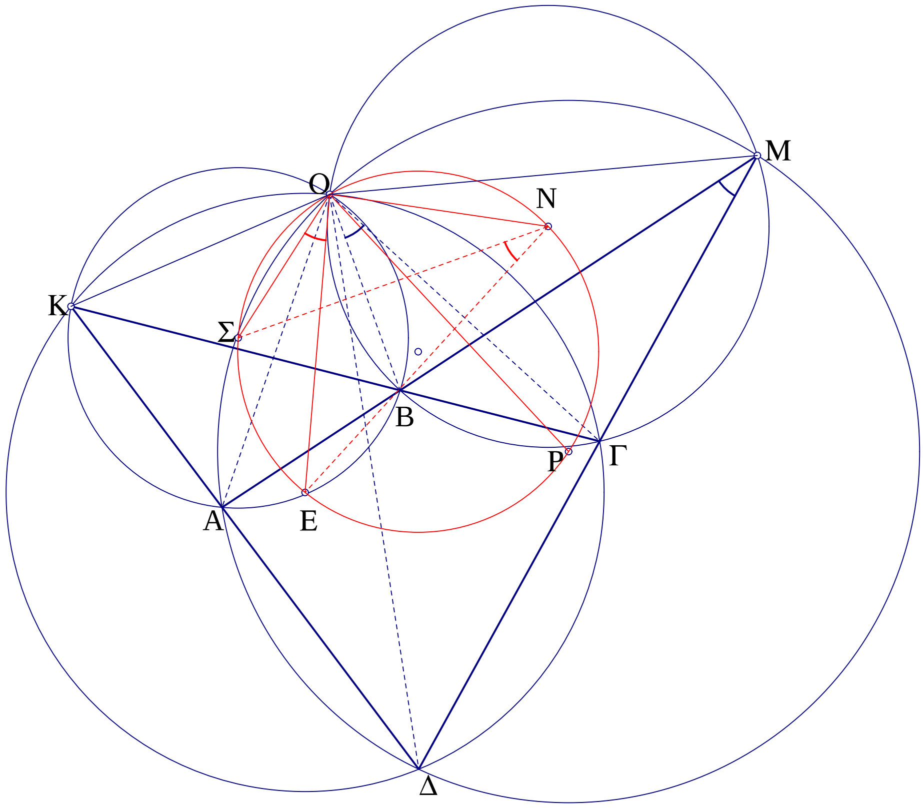
Απόδειξη:
α)Προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του α) του προηγούμενου προβλήματος στο τρίγωνο επαφών του ΑΒΓ.
β)Προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του β) του προηγούμενου προβλήματος στο ορθικό τρίγωνο του ΑΒΓ, καθώς οι πλευρές του ΑΒΓ είναι εξωτερικές διχοτόμοι του ορθικού τριγώνου.

Πρόβλημα 4.28 Έστω μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, Η το ορθόκεντρο του και μία τυχαία ευθεία ε διερχόμενη από το Η. Να δειχθεί ότι οι εικόνες της ε μέσω ανακλάσεων στις τρείς πλευρές του ΑΒΓ τέμνονται σε σημείο του περίκυκλου του τριγώνου. Επίσης, αν μία άλλη ευθεία εφάπτεται σε σταθερό κύκλο κέντρου Η, τότε οι εικόνες της μέσω των παραπάνω ανακλάσεων, εφάπτονται κύκλου της ίδιας ακτίνας, το κέντρο του οποίου είναισημείο του περίκυκλου του τριγώνου [2].

Απόδειξη:
Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου. Επομένως οι συμμετρικές της ε ως προς τις ΑΒ και ΑΓ περνάνε από τα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα (Σχήμα160). Επί πλέον η μεταξύ τους γωνία είναι διπλάσια της Α, καθώς η μία είναι εικόνα της άλλης μέσω στροφής γωνίας διπλάσιας της Α (διαφορετικής της ευθείας γωνίας) όπως προκύπτει από την σύνθεση ανακλάσεων σε τεμνόμενες ευθείες. Το τόξο ΚΑΛ έχει μέτρο ίσο με $180^0 - 2\widehat{A}$. Άρα το σημείο τομής των συμμετρικών της ε ως προς ΑΒ και ΑΓ βρίσκεται πάνω στον περίκυκλο του ΑΒΓ. Αν η αρχική ευθεία ε δεν περνά από το Η αλλά εφάπτεται κύκλου κέντρου Η, φέρνουμε την παράλληλη της ε από το Η. Οι συμμετρικές της ως προς τις ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ, εφάπτονται συμμετρικών κύκλων ως προς τις τρείς πλευρές, ενώ και οι τρείς εφάπτονται κύκλου ίδιας ακτίνας και κέντρου Ο (Σχήμα160).

Πρόβλημα 4.29 Αν οι συμμετρικές μιάς ευθείας ε ως προς τις πλευρές μη ορθογωνίου τριγώνου συντρέχουν σε σημείο Ο, τότε η ε περνά από το ορθόκεντρο Η και το Ο ανήκει στον περίκυκλο του ΑΒΓ. Αν οι ευθείες δεν συντρέχουν, τότε το τρίγωνο που σχηματίζουν παραμένει όμοιο προς εαυτό και το έκκεντρο του ανήκει στον περίκυκλο του ΑΒΓ [2].

Απόδειξη:
Από το προηγούμενο πρόβλημα προκύπτει ότι το τρίγωνο των τριών εικόνων της ε έχει εξωτερικές γωνίες ίσες με το διπλάσιο των αντιστοίχων γωνιών του ΑΒΓ. Η μόνη περίπτωση



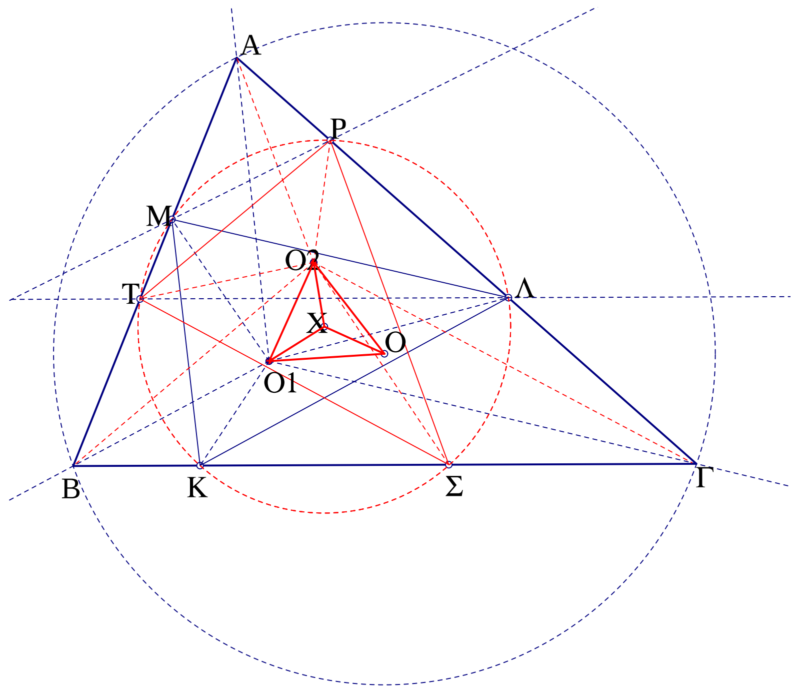
Σχήμα 154: Σημείο *miquel*

αυτές οι τρείς ευθείες να συντρέχουν, είναι η αρχική ευθεία ε να περνά από το ορθόκεντρο Η Ανακλάσεις ευθείας στις πλευρές τριγώνου.

Πρόβλημα 4.30 Δίνονται τρείς ίσοι κύκλοι διερχόμενοι από κοινό σημείο Α και τεμνόμενοι εκ νέου στα σημεία Ρ, Θ και Ν. Έστω ΗΣΧ το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις κοινές τους εφαπτόμενες. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του ΗΣΧ είναι τουλάχιστον εννέα φορές μεγαλύτερο από εκείνο του ΡΘΝ.

Απόδειξη:
Έστω Κ, Λ και Μ τα κέντρα των τριών κύκλων. Το σημείο Ο είναι περίκεντρο του ΚΛΜ και το τρίγωνο ΡΝΘ έχει γιά κορυφές του τα συμμετρικά του Ο ως προς τις πλευρές του ΚΛΜ. Επομένως το τρίγωνο που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του ΚΛΜ είναι ομοιόθετο του ΡΝΘ ως προς ομοιοθεσία $H(O, 1/2)$. Και το τρίγωνο ΚΛΜ όμως είναι ομοιόθετο του τριγώνου των μέσων των πλευρών του ως προς ομοιοθεσία $H(G, -2)$ όπου G το βαρύκεντρο του ΚΛΜ. Η σύνθεση όμως των παραπάνω ομοιοθεσιών είναι ομοιοθεσία $H(E, -1)$ όπου Ε είναι το κέντρο του κύκλου των εννέα σημείων του ΚΛΜ ο οποίος είναι και κύκλος των εννέα σημείων γιά το τρίγωνο ΡΝΘ. Επομένως τα τρίγωνα ΡΝΘ και ΚΛΜ είναι ίσα. Αν R και ρ είναι οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου του ΚΛΜ,ο λόγος ομοιότητας του ΗΣΧ πρός το ΚΛΜ είναι $\lambda = \frac{R+\rho}{\rho} = 1 + \frac{R}{\rho} \geq 3$ λόγω του θεωρήματος του *Euler*: $R \geq 2\rho$. Επομένως $\frac{(H\Sigma X)}{K\Lambda M} \geq 9$. (Σχήμα 162)

Πρόβλημα 4.31 Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α*Β*Γ*. Αν από τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου φέρουμε τμήματα παράλληλα και ίσα των τμημάτων ΑΑ*, ΒΒ* και ΓΓ* που συνδέουν ομόλογες κορυφές, τότε το τρίγωνο Α!Β!Γ! είναι όμοιο προς τα δύο δοθέντα.



Σχήμα 155: Ίσα εγγεγραμμένα τρίγωνα

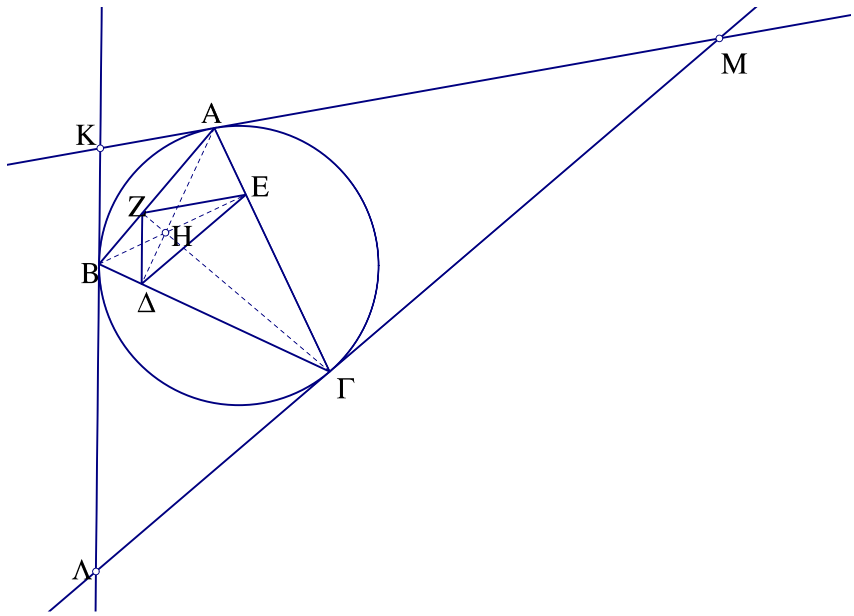
Απόδειξη:
Μεταφέρουμε τα ΟΑ!, ΟΒ! και ΟΓ! κατά διάνυσμα $\vec{v}=\vec{O\Gamma}$. Η εικόνα του Γ! είναι προφανώς το Γ* και έστω Δ και Ε οι εικόνες των Α! και Β! αντίστοιχα. Τότε τα Α*Δ και Β*Ε είναι παράλληλα και ίσα με τα ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως $\frac{A^*\Gamma^*}{A^*\Delta} = \frac{\Gamma^*B^*}{B^*E}$ και $\widehat{\Delta A^*\Gamma^*} = \widehat{EB^*\Gamma^*}$. Επομένως τα τρίγωνα $\Delta A^*\Gamma^*$ και $EB^*\Gamma^*$ είναι όμοια με κέντρο ομοιότητας το σημείο Γ*. Άρα και τα $A^*B^*\Gamma^*$ και $\Gamma^*\Delta E$ είναι όμοια με το ίδιο κέντρο ομοιότητας (Σχήμα 163).

Θεώρημα 4.1 Αν ένα σχήμα κινείται στο επίπεδο (παραμένοντας αναλλοίωτο) με τρόπο ώστε δύο μη παράλληλες ευθείες του να διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τότε κάθε άλλη ευθεία του, διέρχεται από σταθερό σημείο, ή εφάπτεται σταθερού κύκλου.

Απόδειξη:
Έστω Α και Β τα σταθερά σημεία και Ο το κοινό σημείο των δύο ευθειών. Το σημείο Ο κινείται στο τόξο ΑΟΒ του σταθερού κύκλου ΑΟΒ. Κάθε ευθεία ε του Σ που διέρχεται από το Ο, τέμνει τον κύκλο αυτό σε σταθερό σημείο Κ. Κάθε άλλη ευθεία παράλληλη υης ε, εφάπτεται σε σταθερό κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας ίσης με την απόσταση του Κ από αυτήν, καθώς η απόσταση αυτή, παραμένει σταθερή κατά τη κίνηση του Σ [2](Σχήμα 164).

Θεώρημα 4.2 Αν ένα σχήμα κινείται στο επίπεδο (παραμένοντας αναλλοίωτο) με τρόπο ώστε δύο σημεία του να κινούνται σε δύο τεμνόμενες σε σημείο Ο ευθείες, τότε υπάρχει ένας κύκλος, όλα τα σημεία του οποίου κινούνται σε ευθείες, διερχόμενες από το Ο.

Απόδειξη:
Έστω Α, Β και Α*, Β* δύο διαφορετικές θέσεις των σημείων του σχήματος, τα οποία κινούνται σε δύο τεμνόμενες στο Ο ευθείες. Αν Μ και Μ* είναι οι διαφορετικές θέσεις τυχαίου σημείου του Σ που ανήκουν στους κύκλους ΑΟΒ και ΑΟΒ, τα σημεία Ο, Μ και Μ* είναι συνευθειακά, καθώς τα αντίστοιχα τόξα των δύο κύκλων είναι ίσα [2] (Σχήμα 165).



Σχήμα 156: Ορθικό τρίγωνο

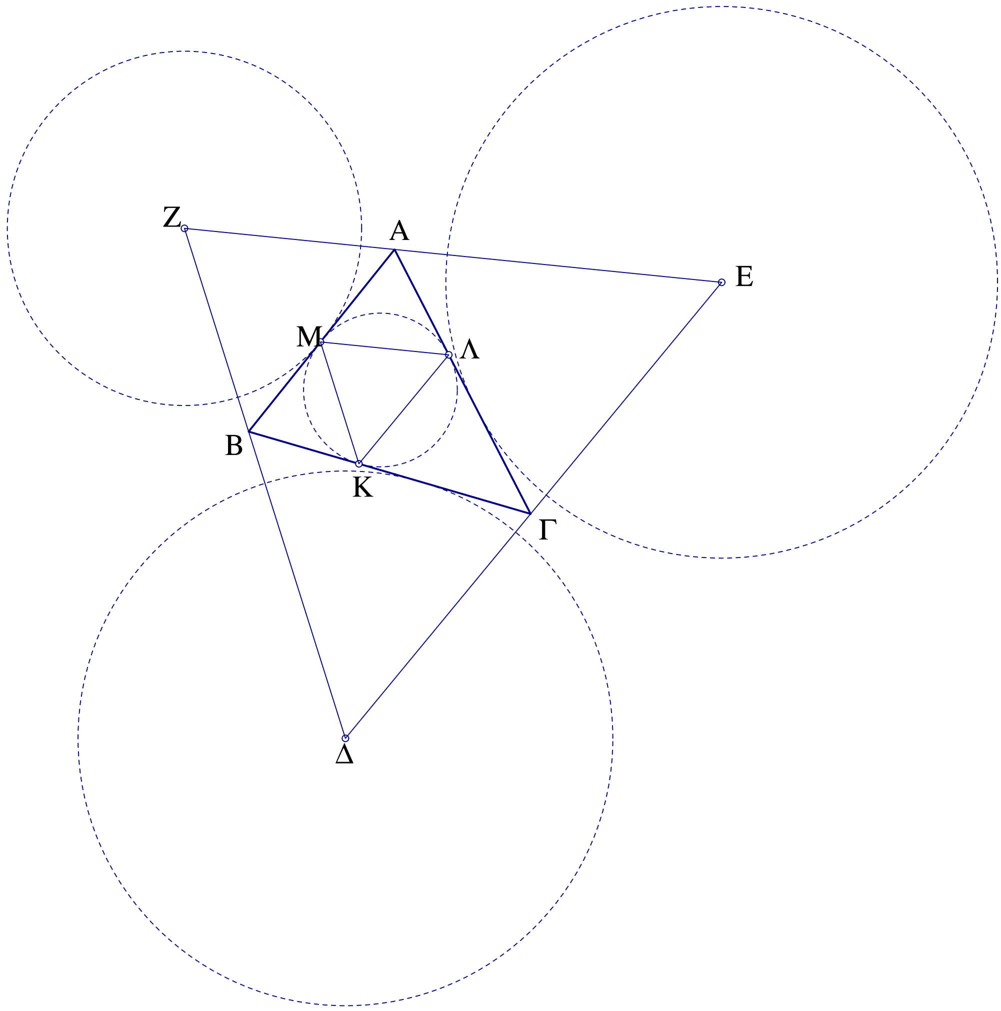
Θεώρημα 4.3 Αν ένα σχήμα Σ κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε να παραμένει όμοιο προς τον εαυτό του και τρία σημεία του κινούνται σε ευθείες, τότε κάθε σημείο του κινείται σε ευθεία.

Απόδειξη:
Έστω Σ και Σ* δύο διαφορετικές θέσεις του σχήματός μας. Αν Κ, Λ και Μ τα σημεία τομής των τριών ευθειών και Α, Α*, Β, Β* και Γ, Γ* οι διαφορετικές θέσεις τριών σημείων του σχήματος, οι κύκλοι ΑΒΚ, ΑΓΜ και ΒΓΛ έχουν κοινό σημείο Ο, το οποίο είναι σταθερό και ανεξάρτητο από τις θέσεις των Α, Β και Γ πάνω στις αντίστοιχες ευθείες (Σχήμα 166).Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που οι τρείς ευθείες συντρέχουν [2] (Σχήμα 167).

Θεώρημα 4.4 Αν ένα σχήμα Σ κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε να παραμένει όμοιο προς τον εαυτό του και τρείς μη συντρέχουσες ευθείες του διέρχονται από τρία σταθερά σημεία, τότε κάθε ευθεία του Σ διέρχεται από σταθερό σημείο και κάθε σημείο του κινείται σε κύκλο.

Απόδειξη:
Έστω Σ και Σ* δύο διαφορετικές θέσεις του σχήματός μας. Αν Α, Α* ,Β, Β* και Γ, Γ* τα σημεία τομής των τριών ευθειών στις δύο αυτές θέσεις, οι τετράδες σημείων που σχηματίζονται από ένα από τα προηγούμενα ζευγάρια σημείων και δύο από τα τρία σταθερά σημεία, είναι ομοκυκλικές και οι αντίστοιχοι κύκλοι είναι σταθεροί και τέμνονται σε σταθερό σημείο Ο. Επομένως το Ο είναι κέντρο ομοιότητας που απεικονίζει ένα τυχαίο σημείο του σχήματος στο σημείο Α. Άρα το σημείο Μ κινείται σε κύκλο που είναι η εικόνα μέσω της παραπάνω ομοιότητας, του κύκλου, πάνω στον οποίο κινείται το Α. Επίσης, αν μία ευθεία ε του σχήματος περνά από σταθερό σημείο Ρ διαφορετικό του Ο, κάθε άλλη ευθεία δ του σχήματος, θα περνά από άλλο σταθερό σημείο Ρ*, το οποίο θα είναι η εικόνα του Ρ μέσω της ομοιότητας κέντρου Ο που απικονίζει την ε στην δ [2] (Σχήμα 168).

Πρόβλημα 4.32 Στα *Οπτικά* και συγκεκριμένα στο βιβλίο V του $IbnAl-Haytam$, γνωστού και σαν $Alhazen$ εμφανίζεται το πρόβλημα της ανάκλασης σε σφαιρικούς, κυλινδρικούς ή κωνικούς καθρέφτες. Ο συγγραφέας στηρίζει την λύση του σε έξι γεωμετρικά λήμματα. Ένα από αυτά είναι το παρακάτω: Από δεδομένο σημείο κύκλου δεδομένης διαμέτρου δ=ΖΛ, να αχθεί ευθεία, η οποία να τέμνει τον κύκλο και την διάμετρο σε σημεία Σ και Ρ, των οποίων η απόσταση να ισούται με δοσμένο μήκος α. Κατασκευή: Θεωρούμε την ισοσκελή

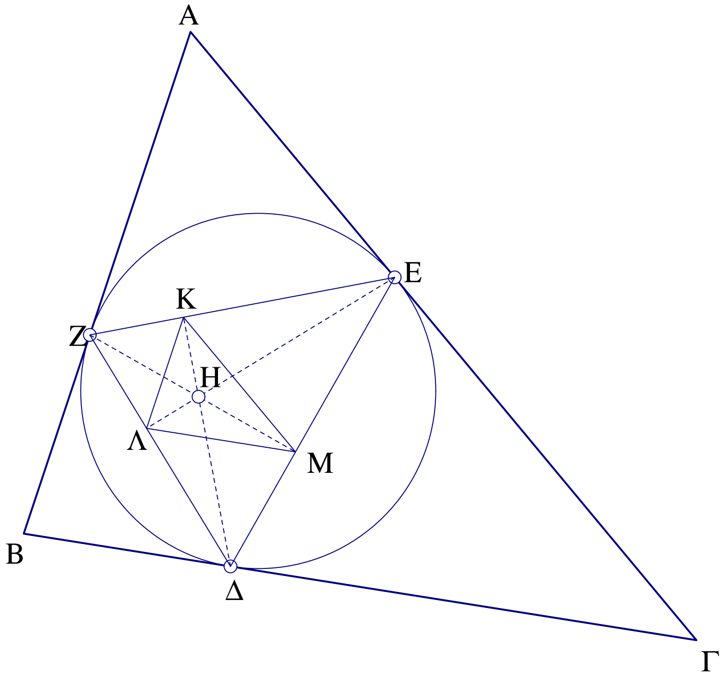


Σχήμα 157: Τρίγωνο σημείων επαφής

υπερβολή κέντρου Ο, διερχόμενη από το σημείο Μ αντιδιαμετρικό του Ο και με ασύμπτωτες τις ευθείες ΟΖ και ΟΛ. Με κέντρο το Μ και ακτίνα ίση με δ^2/α η οποία τέμνει την υπερβολή σε σημείο Τ (μπορεί να υπάρχουν μέχρι τέσσερα τάτοια σημεία). Η παράλληλη από το Ο προς την ΜΤ είναι η ζητούμενη.

Απόδειξη:
Έστω Σ και Ρ τα σημεία τομής της ζητούμενης ευθείας με τον κύκλο και την διάμετρο αντίστοιχα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΟΜΤ και ΡΣΘ είναι όμοια όπου Θ είναι το σημείο τομής της ΜΤ με τον κύκλο, καθώς επίσης και το αντιδιαμετρικό του Σ. Η ισότητα των έγγεγραμμένων γωνιώνΜ και Σ είναι προφανής. Έστω Ν το μέσον της ΜΤ. Από γνωστή ιδιότητα της υπερβολής προκύπτει ότι το Ν είναι μέσο και του ΧΥ, όπου Χ και Υ τα σημεία τομής της ΜΤ με τις δύο ασύμπτωτες της υπερβολής. Η γωνία $\widehat{ON\Upsilon}$ είναι διπλάσια της $\widehat{OX\Upsilon}$ η οποία ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων ΖΜ και ΟΘ, δηλαδή το μισό του τόξου ΘΛ. Επομένως το μέτρο της γωνίας $\widehat{ON\Upsilon}$ ισούται με το μέτρο του τόξου ΘΛ. Άρα οι γωνίες $\widehat{ON\Upsilon}$ και $\widehat{PK\Sigma}$ είναι ίσες. Επομένως τα τρίγωνα ΡΣΘ και ΟΜΤ είναι όμοια, με τις ΡΚ και ΟΝ να είναι διάμεσοι των τριγώνων ΡΣΘ και ΟΜΤ αντίστοιχα. Άρα

$$P\Sigma\Theta \approx OMT \Rightarrow \frac{\Sigma P}{OM} = \frac{\Sigma\Theta}{MT} \Rightarrow \Sigma P = \frac{\delta^2}{MT} = \alpha$$



Σχήμα 158: Ορθικό τριγώνου επαφών

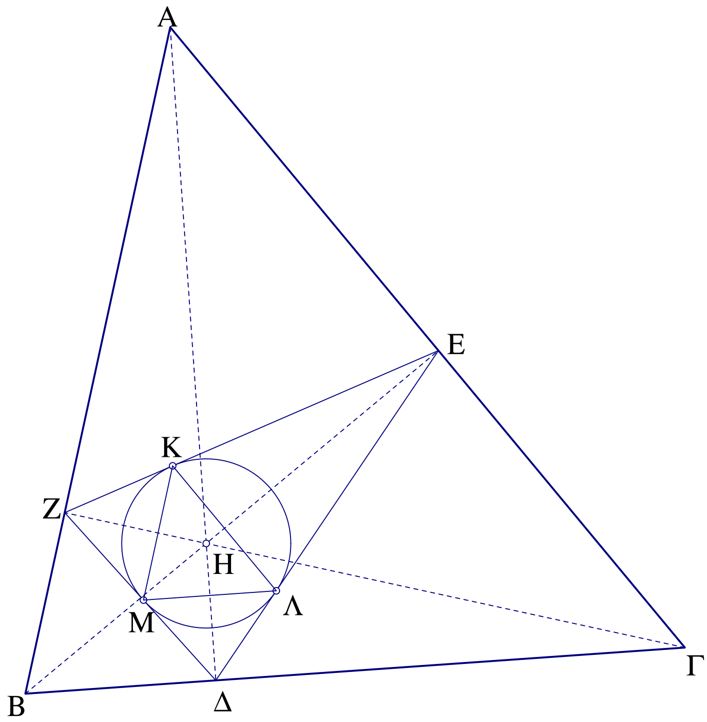
(Σχήμα 169)

Θεώρημα 4.5 Από τυχαίο σημείο Ο στο εσωτερικό τυχαίου τριγώνου ΧΥΖ, φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Θεωρούμε τα τρία όμοια τρίγωνα που σχηματίζουν αυτές οι ευθείες με τις πλευρές του ΧΥΖ. Αν στρέψουμε τα τρίγωνα αυτά περί το Ο σε τυχαίες θέσεις ΟΑΒ, ΟΓΔ και ΟΕΖ (Σχήμα 170), τότε το τρίγωνο που ορίζεται από τα μέσα Λ, Μ και Κ των ΒΓ, ΔΕ και ΑΖ αντίστοιχα, είναι πάντα όμοιο με το αρχικό (Θεώρημα $Clifford - Cayley$)

Απόδειξη:
Τα τρίγωνα ΖΕΟ και ΟΔΓ είναι όμοια. Επομένως και το τρίγωνο ΣΜΡ που ορίζεται από τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΖΟ, ΕΔ και ΟΓ που ενώνουν τις ομόλογες κορυφές, (Πρόταση) είναι όμοιο με αυτά. Επίσης παρατηρούμε ότι τα τμήματα ΣΚ και ΡΛ, σαν παράλληλα και ίσα με τα μισά των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα, έχουν λόγο ίσο με τον λόγο $\frac{OA}{OB} = \frac{M\Sigma}{MP}$ και γωνία ίση με την $\widehat{AOB} = \widehat{\Sigma MP}$. Επομένως τα τρίγωνα ΜΣΚ και ΜΡΛ είναι όμοια, με κέντρο ομοιότητας το Μ, άρα και τα ΣΜΡ και ΚΜΛ είναι όμοια με το ίδιο κέντρο ομοιότητας.

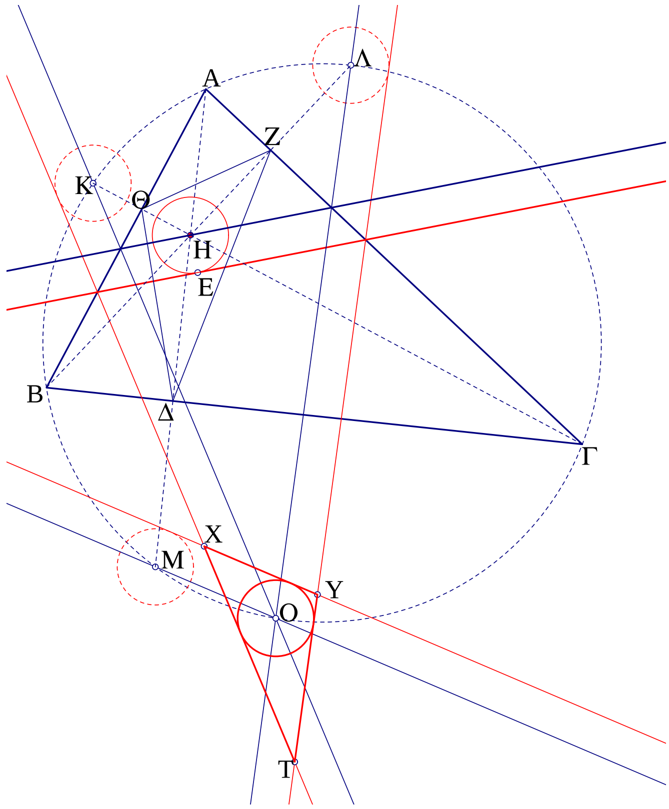
Πρόταση 4.18 Έστω ΑΒΓ και Α!Β!Γ! δύο (ομορρόπως όμοια τρίγωνα). Με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις ομόλογες κορυφές, κατασκευάζομε τρία όμοια μεταξύ τους τρίγωνα ΑΑ!Α*, ΒΒ!Β* και ΓΓ!Γ*. Τότε το τρίγωνο Α*Β*Γ* είναι όμοιο με τα δύο αρχικά (Σχήμα 171). Η πρόταση εξακολουθεί να ισχύει αν τα σημεία Α*, Β* και Γ* χωρίζουν τα ΑΑ!, ΒΒ! και ΓΓ! σε ίσους λόγους (Σχήμα 172).

Απόδειξη:
Έστω Ο το κέντρο ομοιότητας των αρχικών τριγώνων ΑΒΓ και Α!Β!Γ! που απεικονίζει το ΑΒ στο Α!Β!. Το Ο είναι κέντρο άλλης ομοιότητας που απεικονίζει το ΑΑ! στο ΒΒ!, άρα

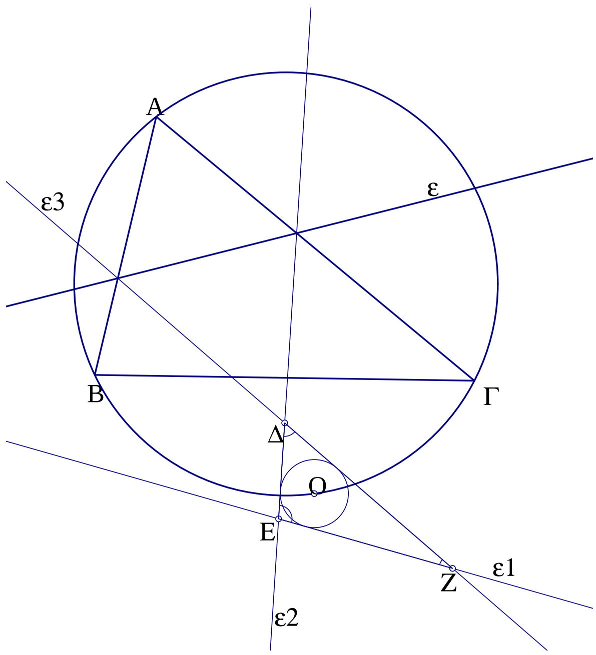


Σχήμα 159: Τρίγωνο επαφών ορθικού

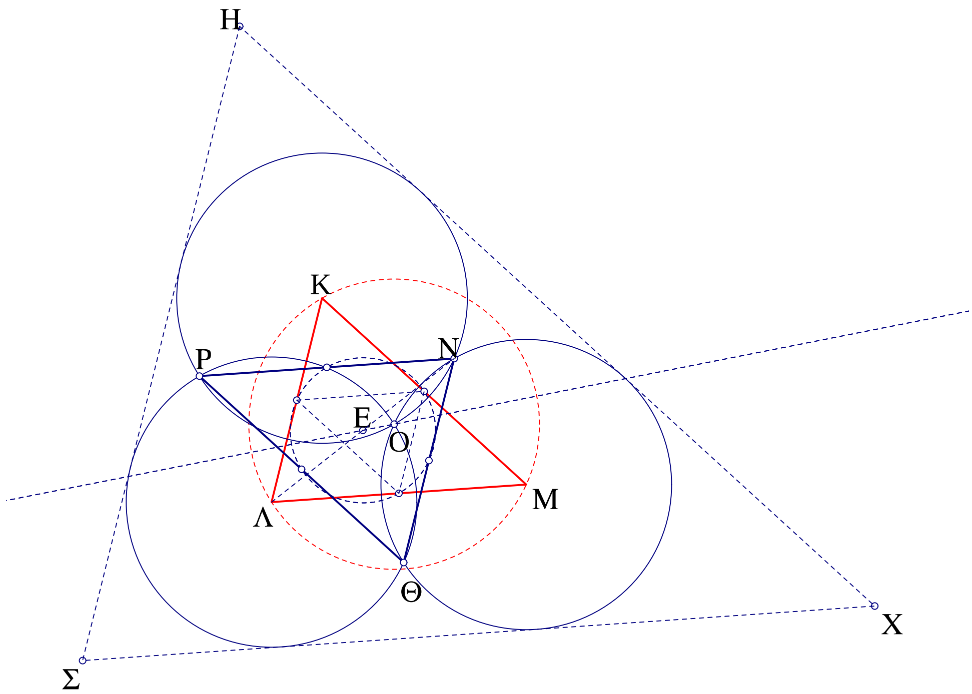
και το τρίγωνο ΑΑ!Α* στο ΒΒ!Β*. Δηλαδή ηομοιότητα αυτή απεικονίζει το ΑΑ* στο ΒΒ*. Επομένως υπάρχει ομοιότητα κέντρου Ο που απεικονίζει το ΑΒ στο Α*Β*. Όμοια, συμεραίνουμε ότι υπάρχει ομοιότητα κέντρου Ο που απεικονίζει το ΑΓ στο Α*Γ*. Οι δύο όμως τελευταίες ομοιότητες είναι ίσες καθώς απεικονίζουν το Α στο Α*. Επομένως η ομοιότητα αυτή απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο Α*Β*Γ*.



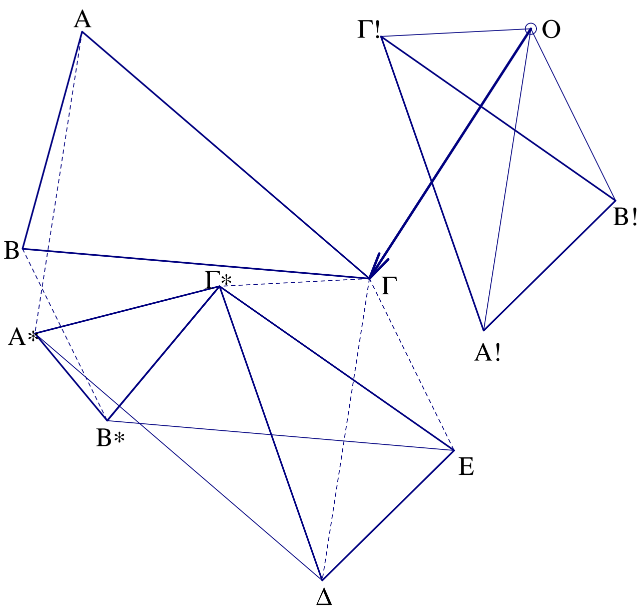
Σχήμα 160: Ανακλάσεις στις πλευρές τριγώνου



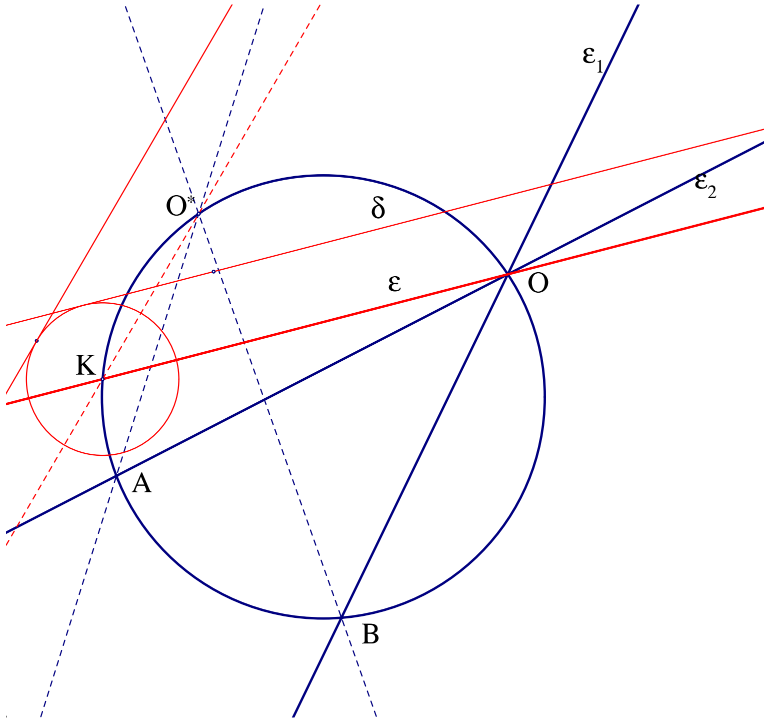
Σχήμα 161: Ανακλάσεις στις πλευρές τριγώνου



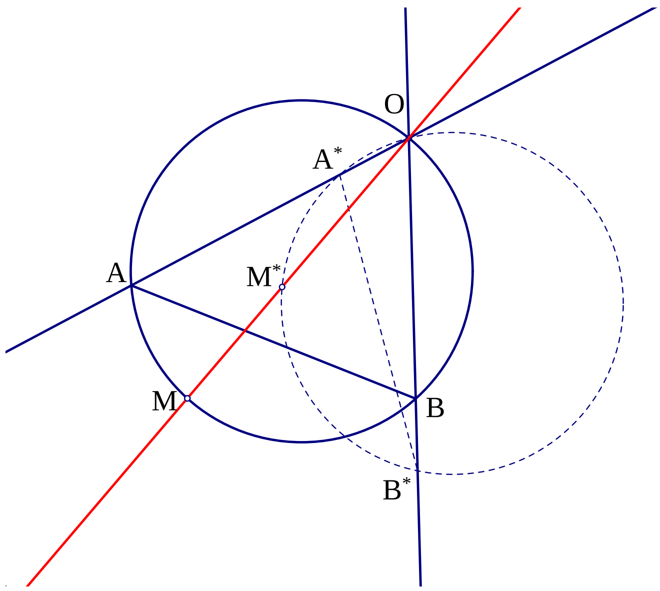
Σχήμα 162: Τρείς ίσοι κύκλοι



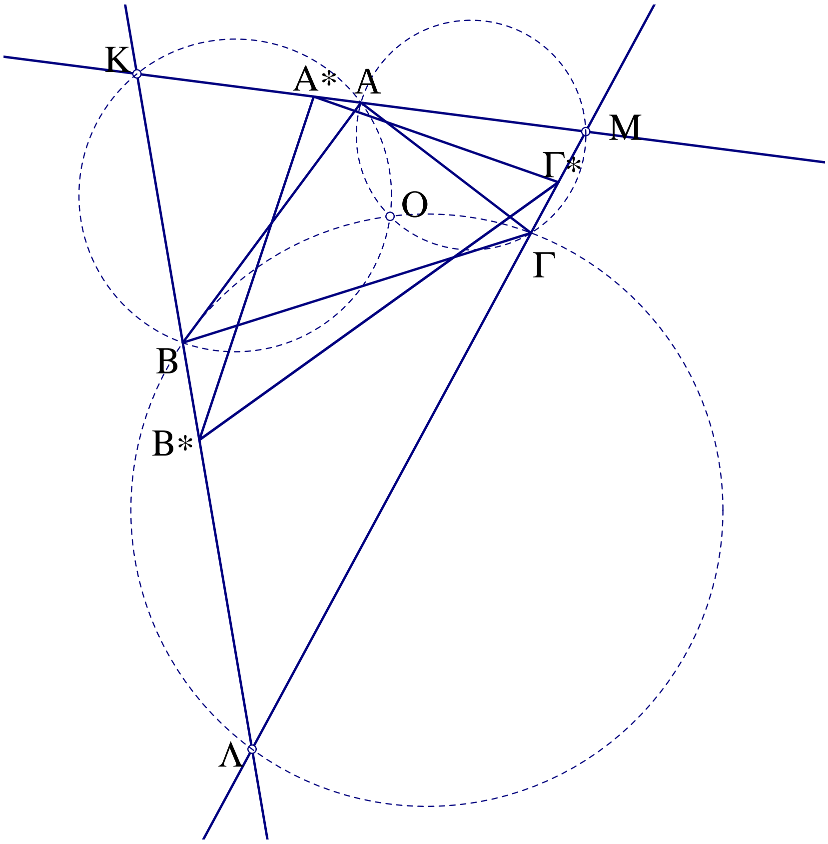
Σχήμα 163: Ομοιότητα τριγώνων



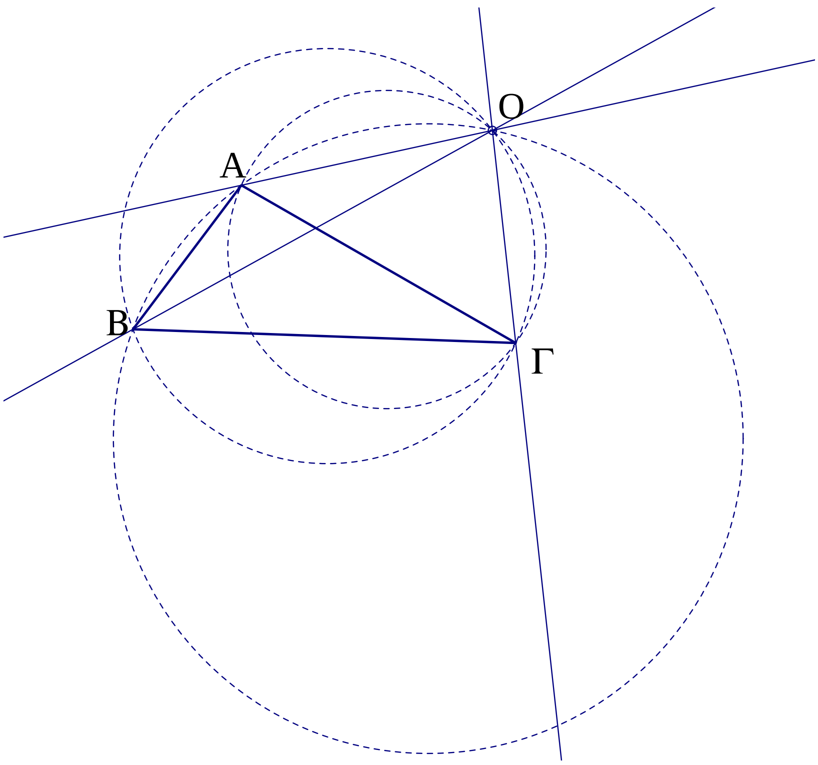
Σχήμα 164: Θεώρημα 1



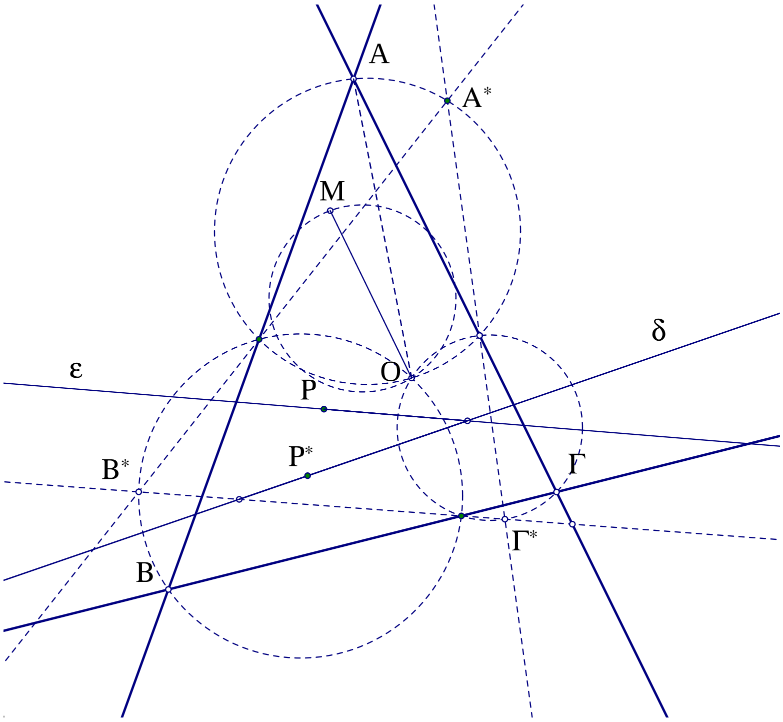
Σχήμα 165: Θεώρημα 2



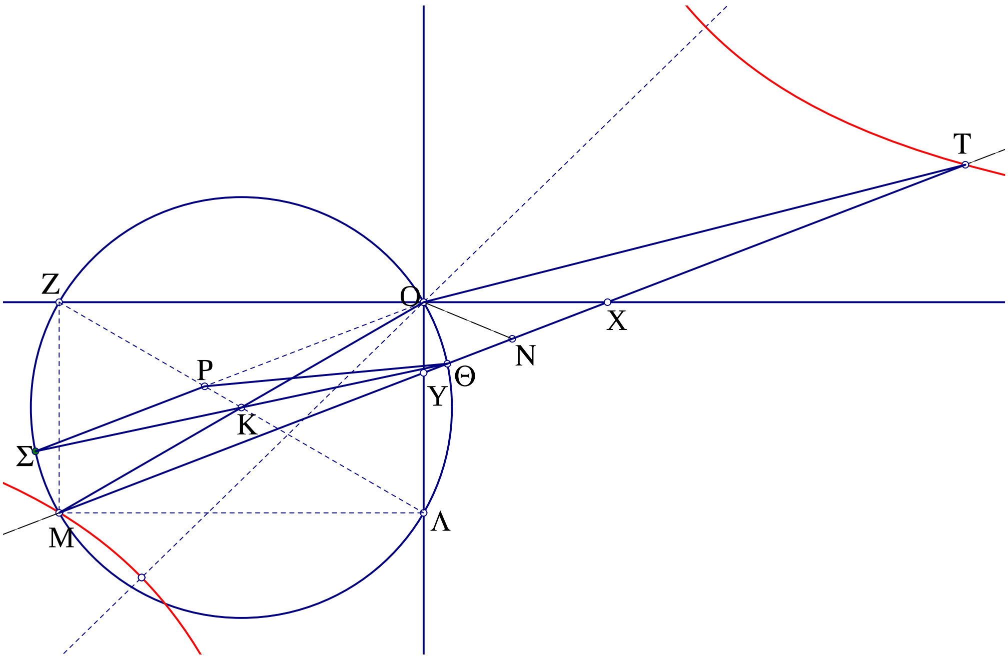
Σχήμα 166: Θεώρημα



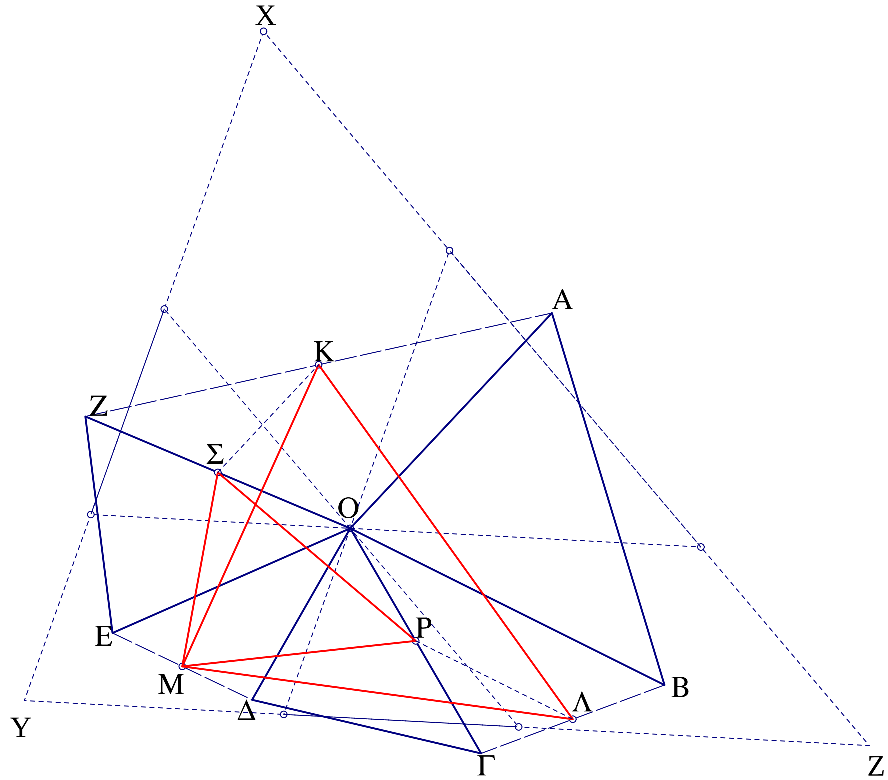
Σχήμα 167: Θεώρημα



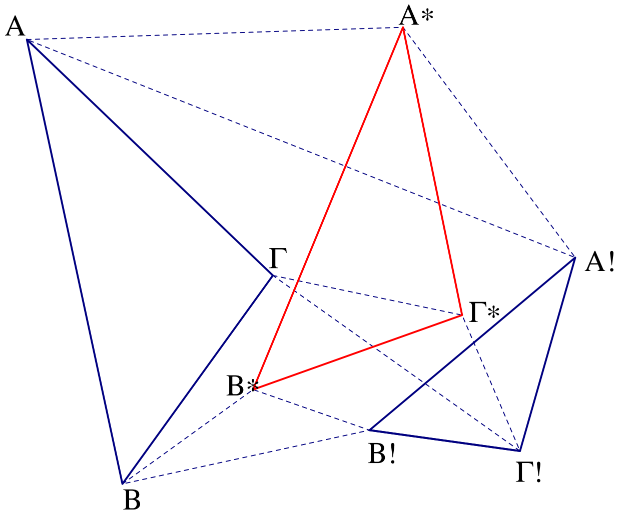
Σχήμα 168: Θεώρημα



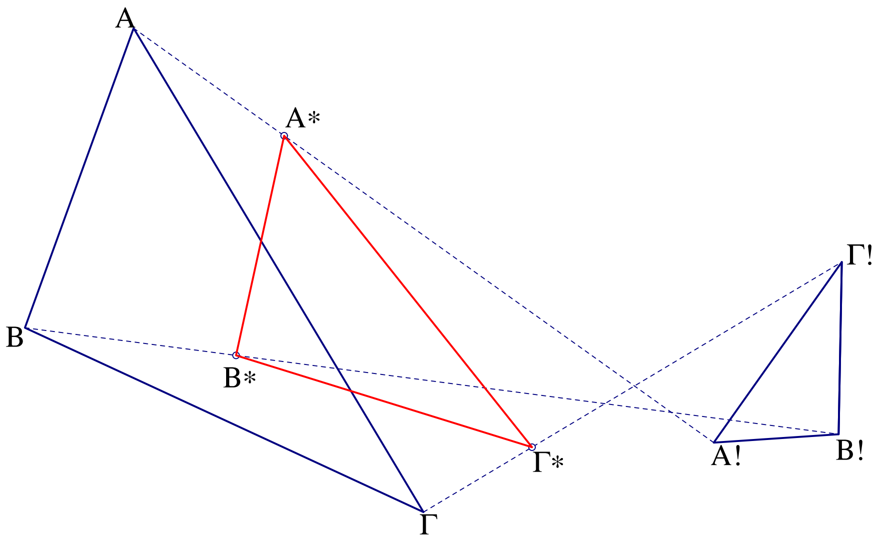
Σχήμα 169: Κατασκευή *Alhazen*



Σχήμα 170: Θεώρημα $Clifford - Cayley$



Σχήμα 171: Θεώρημα $Napoleon$



Σχήμα 172: Θεώρημα $Napoleon$

5 Βιβλιογραφία

Αναφορές

[1] *M. YAGLOM (1962), Geometric Transformations I, The Mathematical Association of America.*

[2] *M. YAGLOM (1968),Geometric Transformations II, The Mathematical Association of America.*

[3] *ΠΑΡΗ ΠΑΜΦΙΛΟΥ , Εισαγωγή στην Γεωμετρία (2000), Πανεπιστήμιο Κρήτης.*

[4] *HOWARD EVES, A Survey of Geometry, Volume I Allyn and Bacon, Boston 1963*

[5] *ROSS HONSBERGER, Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean Geometry The Mathematical Association of America. 1995*

[6] *ROGER A JOHNSON Advanced Euclidean Geometry Dover Publications, Inc New York 1960*

[7] *ΣΤΡΑΤΗ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ , Θεμέλια και βασική δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Εκδόσεις Gutenberg , Αθήνα 1985.*

[8] *ΣΠΥΡΟΥ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ, Ευκλειδειος Γεωμετρία Επίπεδος, Εκδοτικός Οίκος Αφων Παπαδημητρόπουλου, Αθήνα 1973.*

[9] *MURRAY S. KLAMKIN, U.S.A. Mathematical Olympiads 1972-1986 , Mathematical Association of America* 1988

[10] *BORIS PRITSKER, Γύρω από το κέντρο των προβλημάτων, Περιοδικό QUANTUM, Ελληνική Έκδοση, Τόμος 3, Τεύχος 4 (Ιούλιος Αύγουστος 1996) Εκδόσεις Κάτοπτρο*

[11] *VLADIMIR DUBROVSKY, Διαδοχικές αποκαλύψεις, Περιοδικό QUANTUM, Ελληνική Έκδοση, Τόμος 3, Τεύχος 4 (Ιούλιος Αύγουστος 1996) Εκδόσεις Κάτοπτρο*

[12] *HEINRICH DORRIE 100 Great Problems of Elementary Mathematics Dover Publications, Inc New York 1960*

[13] *F.G. – M., Ασκήσεις Γεωμετρίας (ΙΗΣΟΥΗΤΩΝ), Εκδόσεις Α. Καραβία Αθήνα 1952*

[14] *NATHAN ALTSHILLER−COURT College Geometry Barnes Noble, U.S.A. 1952*

[15] *R. L. FINNEY, Dynamic Proofs of Euclidean Theorems, Mathematics Magazine Vol*43, (1970)

[16] *FLOR CARTUYVELS, A Special Point in a Quadrirateral, TheAmericanMathematicalMonthly, Vol.*73, *No.*6, *pp.*616 − 619

[17] *SANDOR KISS, The Orthic of Intouch and the Intouch of Orthic Triangles, Forum Geome*
177

[18] *http : //www.cut − the − knot.org*

[19] *http : //www.mathworld.wolfram.com/*

Περιεχόμενα