Αποτίμηση Δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού Τύπου - Μία Μη Γραμμική Εξίσωση BLACK-SCHOLES

ΒΑΡΔΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η αποτίμηση των δικαιωμάτων άρχισε να αποτελεί αντικείμενο μαθηματικής έρευνας στο χώρο της χρηματοοικονομίας, μετά από τη δημοσίευση τωνBlack-Scholes [BS1] οι οποίοι μεταξύ άλλων έδειξαν ότι η τιμή ενός *ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς* σε μία μετοχή ικανοποιεί μία διαφορική εξίσωση για την οποία θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Ενα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μία μετοχή είναι ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα, χωρίς να τον δεσμεύει με κάποια υποχρέωση, να αγοράσει στο μέλλον μία μετοχή, σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία, που καλείται *ημερομηνία λήξης* ή *χρόνος ωρίμανσης* του δικαιώματος και σε μία συγκεκριμένη τιμή που καλείται *τιμή άσκησης*. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από την τιμή άσκησης τότε συνήθως ο κάτοχος του ασκεί το δικαίωμα, αν όχι το αφήνει να εκπνεύσει χωρίς να πραγματοποιήσει κάποια συναλλαγή. Ο κάτοχος του δικαιώματος λέμε ότι έχει θετική θέση, ενώ αυτός από τον οποίο αγόρασε το δικαίωμα έχει αρνητική και λέμε ότι έχει πουλήσει, εγγράψει ή εκδώσει το δικαίωμα. Έστω λοιπόν $P(t)$ η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t, q η τιμή άσκησης και T η ημερομηνία λήξης. Τη χρονική στιγμή T βάσει των παραπάνω, αγνοώντας την αγορά του, η αξία του δικαιώματος για τον αγοραστή είναι $\max(P(T)-q,0)$ ενώ για τον πωλητή είναι $-\max(P(T)-q,0)$ καθώς πρέπει να αγοράσει τη μετοχή και να την παραδώσει. Για να αποκτήσουμε αυτό το δικαίωμα πρέπει να πληρώσουμε κάποιο αντίτιμο στον εκδότη του. Το πρόβλημα μας λοιπόν είναι η αποτίμηση του δικαιώματος, δηλαδή ο καθορισμός της τιμής αυτής.

Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις οι Black και Scholes έδειξαν ότι υπάρχει ένας τύπος που μας δίνει την τιμή αυτή. Ειδικότερα μεταξύ άλλων υπέθεσαν ότι η μετοχή ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown και ότι υπάρχει η δυνατότητα επένδυσης σ' ένα τραπεζικό λογαριασμό, που αποτελεί μία επένδυση μηδενικού κινδύνου, από την οποία πληρωνόμαστε βάσει σταθερού επιτοκίου. Επιπλέον υπέθεσαν ότι μπορούμε να μεταφέρουμε κεφάλαια από τη μετοχή προς τον τραπεζικό λογαριασμό και αντίστροφα, χωρίς να επιβαρυνόμαστε με κόστος συναλλαγής κατά την αγορά και πώληση μετοχών. Τότε βάσει ενός αντισταθμιστικού επιχειρήματος, μετακινώντας κεφάλαια από τη μετοχή προς τον τραπεζικό λογαριασμό και αντίστροφα, υπάρχει ένα δυναμικό αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, αποτελούμενο από μετοχές και διαθέσιμα στον τραπεζικό λογαριασμό τέτοιο ώστε τη χρονική στιγμή T με πιθανότητα ένα να αξίζει $\max(P(T)-q,0)$. Επίσης σε κάθε χρονική στιγμή $t<T$, η αξία του δικαιώματος ισούται με την αξία του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου, εκφρασμένη σε νομισματικές μονάδες. Λέμε τότε ότι έχουμε την πραγματοποίηση μίας *πλήρους αντιστάθμισης*. Η δυνατότητα δε της δημιουργίας αυτού του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου για κάθε παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν ονομάζεται

πλήρωση της αγοράς. Συγκεκριμένα έδειξαν ότι η τιμή του δικαιώματος $\Psi(p,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση,

$$\Psi_t + rp\Psi_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp} = r\Psi, \tag{1.1}$$

με τελική συνθήκη

$$\Psi(p,T) = \max(p-q,0), \tag{1.2}$$

όπου r είναι το σταθερό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ είναι η σταθερά της αστασίας (Volatility) της μετοχής και p η τιμή αυτής τη χρονική στιγμή t. Επιπλέον έλυσαν το πρόβλημα που περιγράφεται από τις (1.1) − (1.2). Συγκεκριμένα έδειξαν ότι η τιμή του δικαιώματος $\Psi(p,t)$, ικανοποιεί τη σχέση,

$$\Psi(p,t) = e^{-r(T-t)}[pN(d_1)e^{r(T-t)} - qN(d_2)],$$

όπου $d_1 = \ln(p/q)+(r+\sigma^2/2)(T-t)$, $d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T-t}$. Στον παραπάνω τύπο N η συνάρτηση κατανομής, μίας κανονικής κατανομής μέσου 0 και διασποράς 1, (βλέπε [BS1]).

Μία από τις βασικές υποθέσεις των Black και Scholes στην παραπάνω ανάλυση είναι ότι δεν έλαβαν υπόψη τους το κόστος συναλλαγής, κατά την αγορά και πώληση μετοχών, κάτι που είναι αρκετά σημαντικό μια και δε ζούμε στον κόσμο των Black και Scholes. Η δημιουργία δε αυτού του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου σε μία αγορά όπου λαμβάνουμε υπόψη μας το κόστος συναλλαγής, με το οποίο επιβαρυνόμαστε κατά την αγορά και πώληση μετοχών, κοστίζει αρκετά. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο, οπότε η αγορά και η πώληση δικαιωμάτων εμπεριέχει κάποιο κίνδυνο που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας.

Προσπαθούμε λοιπόν να κάνουμε αποτίμηση δικαιωμάτων σε μία αγορά με κόστος συναλλαγής. Δεν έχουμε πλέον τέλεια αντιστάθμιση οπότε απαιτούμαι μία ασθενέστερη αντισταθμιστική συνθήκη, που είναι η αξία του χαρτοφυλακίου να κυριαρχεί της αξίας του δικαιώματος. Με αυτή την ασθενέστερη συνθήκη, υπάρχει πάντα το τετριμένο χαρτοφυλάκιο, που αποτελείται από τη μετοχή που είναι γραμμένο το δικαίωμα και την οποία κρατάμε μέχρι τη λήξη του και η αξία του κυριαρχεί αυτή του δικαιώματος. Η τιμή του δικαιώματος, βάσει ενός επιχειρήματος εξισοροποιητικής κερδοσκοπίας, δε μπορεί να υπερβαίνει την αξία του ελάχιστου αρχικού χαρτοφυλακίου, που απαιτείται για την υποστήριξη αυτής της αντισταθμιστικής συνθήκης. Σε μία αγορά με κόστος συναλλαγής οι Soner-Shreve-Cvitanic έχουν δείξει ότι το φθηνότερο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιου που έχει την ιδιότητα, η αξία του να κυριαρχεί αυτής του δικαιώματος, είναι το τετριμμένο [SSC]. Φαίνεται λοιπόν η αναγκαιότητα μίας εναλλακτικής ασθενέστερης υπόθεσης έναντι της τέλειας αντιστάθμισης.

Αρκετές τέτοιες έχουν δοθεί στην προσπάθεια να γίνει αποτίμηση δικαιωμάτων σε μία αγορά με κόστος συναλλαγής. Για παράδειγμα ο Leland [L] θεώρησε ότι έχουμε συναλλαγές μόνο σε διακριτούς χρόνους και έδειξε χρησιμοποιώντας ένα τυπικό αντισταθμιστικό επιχείρημα, βασικό σημείο του οποίου είναι ότι ισχύει,

$$W(t+\Delta t) - W(t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t}, \tag{1.3}$$

ότι η τιμή του δικαιώματος ικανοποιεί πάλι μία εξίσωση όμοια με αυτή που μας δίνει ο τύπος των Black-Scholes αλλά με προσαρμοσμένη σταθερά της αστασίας

$$\hat{\sigma} = \sigma\Big(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

$W(\cdot)$ είναι μονοδιάστατη κίνηση Brown, σ είναι η αρχική σταθερά της αστασίας, μ το αναλογικό κόστος συναλλαγής, δηλαδή το ποσοστό επί της τιμής της μετοχής με το οποίο επιβαρυνόμαστε κατά την αγορά και πώληση μετοχών και Δt είναι η συχνότητα συναλλαγής. Στον παραπάνω τύπο τόσο το μ όσο και το Δt υποθέτουμε ότι είναι μικρά και διατηρούμε το $\mu/\sqrt{\Delta t}$ τάξης 1. Για παράδειγμα με $\sigma = 0.2$, $\mu = 0.01$ και μία συναλλαγή ανά εβδομάδα έχουμε ότι $\hat{\sigma} = \sigma 1.13$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω προσέγγιση του Leland χρησιμοποιείται ευρύτατα από αυτούς που ασχολούνται με την λειτουργία της αγοράς. Μία επέκταση της υπόθεσης, που αφορά στη κυρτότητα των τιμών του δικαιωμάτος έχει δοθεί από τους Avellaneda-Paras [AP]. Η βελτίωση μερικών αποτελεσμάτων του Leland, με αυστηρές αποδείξεις, έχει δοθεί από τους Kabanov-Safarian [KS].

Μία δεύτερη προσέγγιση είναι αυτή των Boyle-Vorst [BV], οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα σε διακριτό χρόνο, χρησιμοποιώντας ενα δυωνυμικό δέντρο για την εξέλιξη της τιμής της μετοχής. Συγκεκριμένα έδειξαν, χρησιμοποιώντας ένα κεντρικό οριακό θεώρημα, ότι η τιμή του δικαιώματος ικανοποιεί πάλι μία εξίσωση τύπου Black-Scholes αλλά με προσαρμοσμένη σταθερά της αστασίας,

$$\hat{\sigma} = \sigma\Big(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{\Delta t}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε πως εδώ Δt είναι το μέσο διάστημα για μία αλλαγή στη τιμή της μετοχής και όχι η συχνότητα συναλλαγής.

Μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή των Hodges-Neuberger [HN], οι οποίοι χρησιμοποίησαν μία κατάλληλη κοίλη μη φθίνουσα συνάρτηση που ονομάζεται *συνάρτηση ωφελιμότητας* και θεώρησαν τη διαφορά της ωφελιμότητας του τελικού χαρτοφυλακίου σε δύο περιπτώσεις, όταν υπάρχουν υποχρεώσεις σε δικαιώματα και όταν όχι.

Ο όρος ωφελιμότητα αναφέρεται στην ικανοποίηση που νοιώθει κάποιος καταναλώνοντας ένα αγαθό, οι καταναλωτικές δε προτιμήσεις απεικονίζονται μέσω μίας συνάρτησης ωφελιμότητας. Όταν έχουμε χρηματοοικονομικά προβλήματα τότε αναφερόμαστε σε νομισματικές μονάδες με την ωφελιμότητα στην περίπτωση αυτή να μετράει την ικανοποίηση μας που σχετίζεται με τα επίπεδα τιμών κάποιου χαρτοφυλακίου. Είπαμε παραπάνω ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι μία αύξουσα συνάρτηση επειδή καταναλώνοντας ή αυξάνοντας τα κεφάλαια μας όλο και περισσότερο, γινόμαστε όλο και πιο ευτυχισμένοι. Επιπλέον είναι κοίλη επειδή τα επιπλέον ποσά της κατανάλωσης πάνω από ένα επίπεδο, ας πούμε A, αυξάνουν την ικανοποίηση μας όλο και λιγότερο σε σχέση με το πως θα γινόταν το παραπάνω για ένα επίπεδο B μικρότερο του A ή ανάλογα όσο αυξάνουμε τα κεφάλαια μας, αυξάνουμε όλο και λιγότερο την ευτυχία μας.

Όταν προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη τιμή της ωφελιμότητας, με τη βοήθεια κατάλληλης εκθετικής συνάρτησης, όπως έκαναν οι Hodges-Neuberger, έχουμε οικονομίες όπου υπάρχει αβεβαιότητα, οπότε πρέπει με κάποιο τρόπο να χαρακτηρίσουμε τη συμπεριφορά μας απέναντι στον κίνδυνο και για να γίνει αυτό πρέπει να εισάγουμε *μέτρα αποφυγής κινδύνου*. Λέμε λοιπόν ότι κάποιος αποφεύγει τον κίνδυνο (χωρίς προσδοκούμενο κέρδος ή όφελος), όταν δεν είναι πρόθυμος να δεχθεί ή είναι αδιάφορος σε ένα δίκαιο παιχνίδι. Ένα παιχνίδι δηλαδή που θα του έδινε κέρδος h_1 με πιθανότητα π και ζημία h_2 με $1-\pi$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\pi h_1 + (1-\pi)h_2 = 0. \tag{1.6}$$

Επίσης λέμε ότι κάποιος *αποφεύγει αυστηρά* τον κίνδυνο, αν δεν είναι πρόθυμος να δεχθεί ένα δίκαιο παιχνίδι. Αν τώρα U είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας από τον ορισμό της (αυστηρής) αποφυγής του κινδύνου έχουμε

$$U(W_0)(>) \geq \pi U(W_0+h_1) + (1-\pi)U(W_0+h_2), \tag{1.7}$$

όπου W_0 είναι το αρχικό μας ποσό. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του δίκαιου παιχνιδιού παίρνουμε ότι

$$U[\pi(W_0+h_1)+(1-\pi)(W_0+h_2)](>) \geq \pi U(W_0+h_1)+(1-\pi)U(W_0+h_2). \tag{1.8}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι (αυστηρή) αποφυγή του κινδύνου επάγει (αυστηρά) κοίλη συνάρτηση ωφελιμότητας. Επίσης αντιστρέφοντας τα βήματα έχουμε ότι (αυστηρά) κοίλη συνάρτηση επάγει (αυστηρή) αποφυγή του κινδύνου. Οι άνθρωποι επίσης θα πλήρωναν για να αποφύγουν δίκαια παιχνίδια.

Υπάρχουν διάφορα μέτρα αποφυγής κινδύνου. Ένα από αυτά που μας ενδιαφέρει και που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια είναι αυτό του απόλυτου συντελεστή αποφυγής κινδύνου, το οποίο εισήγαγαν οι Pratt - Arrow, ορίζεται από τη σχέση

$$R_A(\cdot) = -\frac{U''(\cdot)}{U'(\cdot)}, \tag{1.9}$$

και είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας της συνάρτησης ωφελιμότητας. Χαρακτηρίζει δε τη συμπεριφορά μας, δηλαδή το πώς αντιμετωπίζουμε μία αξία που εμπεριέχει κίνδυνο, όταν είναι να διαλέξουμε μεταξύ αυτής και μίας που δεν εμπεριέχει κίνδυνο. Συγκεκριμένα ο Arrow [A] έδειξε ότι όταν ο R_A είναι αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση αντιμετωπίζουμε την αξία μας σαν ένα κανονικό αγαθό, που σημαίνει ότι η ζήτηση αυξάνει καθώς αυξάνουν τα χρηματικά μας διαθέσιμα, το αντίστροφο δε συμβαίνει για αύξουσα συνάρτηση του R_A. Τέλος όταν έχουμε σταθερό συντελεστή η ζήτηση δεν επηρεάζεται από το επίπεδο του αρχικού μας χαρτοφυλακίου.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας κατάλληλη, εκθετική, συνάρτηση ωφελιμότητας

$$U^\varepsilon(\xi) = 1 - e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^1, \tag{1.10}$$

για την οποία η τιμή του δικαιώματος είναι $\Psi^{\varepsilon,\mu}(p,t) = z^\varepsilon - z^{\varepsilon,f}$, όπου οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας θα οριστούν στη συνέχεια (σελίδα 10), p η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t και μ είναι το αναλογικό κόστος συναλλαγής, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του $\Psi^{\varepsilon,\mu}$ καθώς $\varepsilon \to 0$, $\mu \to 0$, $\mu/\sqrt{\varepsilon} = \alpha$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η οριακή τιμή ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Psi_t + rp\Psi_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp}[1 + S(e^{r(T-t)}\alpha^2 p^2 \Psi_{pp})] = r\Psi, \tag{1.11}$$

με τελική συνθήκη

$$\Psi(p,T,\alpha) = \max(p-q,0), \tag{1.12}$$

όπου r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και $\alpha = \mu\sqrt{\gamma N}$, όπου $\gamma N := \frac{1}{\varepsilon}$. Το N είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων που έχουμε πουλήσει, γ ο συντελεστής αποφυγής κινδύνου και $S(\cdot)$ μία μη γραμμική συνάρτηση που θα οριστεί στη συνέχεια. Επίσης, αν $w(T)$ είναι το τελικό μας χαρτοφυλάκιο θα δώσουμε για $t < T$ και $\kappa > 0$ ένα φράγμα για την πιθανότητα να χάσουμε την αντιστάθμιση κατά ένα ποσό κ. Συγκεκριμένα θα δείξουμε τη σχέση

$$\min \mathbb{P}\Big(w(T) \leq -\kappa | w(t) = \Psi(p,t,\alpha), P(t) = p\Big) \leq \exp(-\frac{\alpha^2}{\mu^2})[\kappa + O(\frac{\mu^2}{\alpha^2})], \tag{1.13}$$

οπου $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας, $w(t)$ και $P(t)$ είναι οι διαδικασίες που περιγράφουν το χαρτοφυλάκιο μας και τη τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα και $O(r)$ είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής που τείνει στο 0 καθώς

$r \downarrow 0$ και το ελάχιστο το θεωρούμε ως προς όλα τα χαρτοφυλάκια. Επίσης θα δούμε πως γενικεύεται αυτό το αποτέλεσμα σε άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα και θα κάνουμε μία σύγκριση με τα αποτελέσματα της μεθόδου του Leland.

2 Το μοντέλο της αποτίμησης δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου

2.1 Παρουσίαση του μοντέλου

Θεωρούμε μία αγορά η οποία αποτελείται από ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, που εμείς θα ονομάζουμε ομόλογο, το οποίο έχει τις ιδιότητες του τραπεζικού λογαριασμού που περιγράψαμε στην εισαγωγή και μία μετοχή η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$dP(s) = P(s)[ads + \sigma dW(s)], \qquad s \in [t, T], \tag{2.1}$$

$$P(t) = p, \tag{2.2}$$

όπου a είναι σταθερά που αντιπροσωπεύει το μέσο ρυθμό που αναμένουμε κέρδη από τη μετοχή, σ είναι η σταθερή σταθερά της αστασίας και $W(\cdot)$ μία συνηθισμένη μονοδιάστατη κίνηση Brown. Για απλότητα θα θεωρήσουμε αρχικά το επιτόκιο r της αγοράς ίσο με 0 και θα μελετήσουμε τη μη μηδενική περίπτωση αργότερα.

Έστω $X(\cdot)$, $Y(\cdot)$ οι στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες περιγράφουν τα χρηματικά μας διαθέσιμα στο ομόλογο και τον αριθμό των μετοχών αντίστοιχα . Μία επενδυτική στρατηγική είναι ένα ζεύγος $(L(\cdot), M(\cdot))$ από προσαρμοσμένες, αριστερά συνεχείς μη φθίνουσες διαδικασίες με $L(t) = M(t) = 0$, οι οποίες αντιπροσωπεύουν το συνολικό αριθμό των μετοχών που έχουν μεταφερθεί από το ομόλογο προς τη μετοχή και αντίστροφα. Δοθέντος ενός αναλογικού κόστους συναλλαγής $\mu \in (0, 1)$ και αρχικών τιμών x, y το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο,

$$X(s) = X(s, t, x, y, L(\cdot), M(\cdot)), \tag{2.3}$$

$$Y(s) = Y(s, t, x, y, L(\cdot), M(\cdot)), \tag{2.4}$$

κινείται βάσει των σχέσεων,

$$X(s) = x - \int_t^s P(\tau)(1+\mu)dL(\tau) + \int_t^s P(\tau)(1-\mu)dM(\tau), \qquad s \in [t, T], \tag{2.5}$$

$$Y(s) = y + L(s) - M(s), \qquad s \in [t, T]. \tag{2.6}$$

Η προσέγγιση των Hodges-Neuberger [HN] για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης q και ημερομηνία λήξης T, είναι η ακόλουθη. Έστω U η συνάρτηση ωφελιμότητας. Θεωρούμε πρώτα το προβλημα μεγιστοποίησης του τελικού χαρτοφυλακίου όταν δεν υπάρχουν υποχρεώσεις σε δικαιώματα αγοράς, οπότε η αντίστοιχη συνάρτηση τιμών είναι η παρακάτω,

$$V^f(x, y, p, t) := \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E}[U(X(T) + Y(T)P(T))]. \tag{2.7}$$

Εδώ όπως και παρακάτω, $(x, y, p, t) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, [0, T])$. Επίσης $\mathbb{E}$, αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή, ως προς ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, του χώρου μας $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι έχουμε πουλήσει N δικαιώματα αγοράς, οπότε το τελικό χαρτοφυλάκιο μας ισούται με

$$X(T) + Y(T)P(T) - N(P(T) - q)^+ \tag{2.8}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση τιμών είναι η

$$V(x, y, p, t) := \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E}[U(X(T) + Y(T)P(T) - N(P(T) - q)^+)]. \tag{2.9}$$

Οι Hodges-Neuberger έδειξαν ότι η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με τη μέγιστη λύση Λ (συνήθως μοναδική), της αλγεβρικής εξίσωσης

$$V(x + N\Lambda, y, p, t) = V^f(x, y, p, t). \tag{2.10}$$

Η ποσότητα Λ εξαρτάται εκτός από τη συνάρτηση ωφελιμότητας και από τα (x, y, p, t) και το N. Στον παραπάνω υπολογισμό αγνοήσαμε το κόστος που χρειαζόμαστε για την άσκηση του δικαιώματος, το οποίο υποθέτουμε ότι δεν είναι σημαντικό.

Περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας

$$U_\gamma(\xi) := 1 - e^{-\gamma\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^1, \tag{2.11}$$

όπου η παράμετρος γ είναι ο συντελεστής αποφυγής κινδύνου. Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι επειδή μπορούμε να μειώσουμε τις μεταβλητές που έχουμε, κάτι που μας απλοποιεί τους υπολογισμούς αρκετά. Μας δίνει επιπλέον τη δυνατότητα, να επιλύσουμε ευκολότερα με αριθμητικές μεθόδους ρεαλιστικά προβλήματα. Επίσης οι συναρτήσεις εκθετικής μορφής, που περιέχουν τον δεύτερο όρο της παραπάνω σχέσης είναι οι μόνες που έχουν σταθερό συντελεστή αποφυγής κινδύνου. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι η αντισταθμιστική μας πολιτική δεν εξαρτάται από το αν χάσαμε ή κερδίσαμε στις προηγούμενες συναλλαγές.

Τότε η τιμή του δικαιώματος Λ εξαρτάται από τα $(x, y, p, t), \gamma, N$. Βάσει των $(2.10) - (2.11)$, προκύπτει ότι: Η $\Lambda_1 := \Lambda(Nx, Ny, p, t; \gamma, N)$, ικανοποιεί τη σχέση

$$V_1(Nx + N\Lambda_1, Ny, p, t) = V_1^f(Nx, Ny, p, t),$$

με $U_{\gamma_1}(\xi) = 1 - e^{-\gamma_1\xi} = 1 - e^{-\gamma\xi}$. Επίσης η $\Lambda_2 := \Lambda(x, y, p, t; N\gamma, 1)$, ικανοποιεί τη σχέση

$$V_2(x + \Lambda_2, y, p, t) = V_2^f(x, y, p, t),$$

με $U_{\gamma_2}(\xi) = 1 - e^{-\gamma_2\xi} = 1 - e^{-\gamma N\xi}$, όπου V_1, V_2, ορίζονται όπως η V στις $(2.7) - (2.9)$. Βάσει των παραπάνω σχέσεων και της γραμμικότητας των $(2.5) - (2.6)$, προκύπτει ότι :

$$
\begin{aligned}
V_1^f(Nx, Ny, p, t) &= \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E}\Big[1 - \exp\big(-\gamma[NX(T) + NY(T)P(T)]\big)\Big], \\
V_2^f(x, y, p, t) &= \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E}\Big[1 - \exp\big(-\gamma N[X(T) + Y(T)P(T)]\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Άρα $V_1^f(Nx, Ny, p, t) = V_2^f(x, y, p, t)$ και επομένως

$$
\Lambda(Nx, Ny, p, t; \gamma, N) = \Lambda(x, y, p, t; \gamma N, 1). \tag{2.12}
$$

Οπότε πουλώντας N δικαιώματα με συντελεστή αποφυγής κινδύνου γ οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με το να πουλήσουμε ένα δικαίωμα με συντελεστή γN.

2.2 Ασυμπτωτική Ανάλυση

Η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε μία ασυμπτωτική ανάλυση καθώς το γN τείνει στο άπειρο. Θέτουμε λοιπόν

$$
\varepsilon := 1/\gamma N \tag{2.13}
$$

$$
U^\varepsilon(\xi) := 1 - e^{-\xi/\varepsilon}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^1. \tag{2.14}
$$

Τότε τα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης (2.7), (2.9), των Hodges-Neuberger, όπου $U \equiv U^\varepsilon, V^f(x, y, p, t) \equiv u^{\varepsilon, f}(x, y, p, t)$ και $V(x, y, p, t) \equiv u^\varepsilon(x, y, p, t)$, παίρνουν τη μορφή

$$
u^{\varepsilon, f}(x, y, p, t) = 1 - \inf_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E} \exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}[X(T) + Y(T)P(T)]\bigg), \tag{2.15}
$$

$$
u^{\varepsilon}(x, y, p, t) = 1 - \inf_{L(\cdot), M(\cdot)} \mathbb{E} \exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}[X(T) + Y(T)P(T) - (P(T) - q)^+]\bigg), \tag{2.16}
$$

όπου το f δηλώνει ότι δεν έχουμε υποχρεώσεις σε δικαιώματα. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $z^{\varepsilon, f}$, z^ε, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$
u^{\varepsilon, f}(x, y, p, t) = 1 - \exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z^{\varepsilon, f}(x, y, p, t)]\bigg), \tag{2.17}
$$

$$
u^{\varepsilon}(x, y, p, t) = 1 - \exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z^{\varepsilon}(x, y, p, t)]\bigg), \tag{2.18}
$$

και έχουμε

$$
z^{\varepsilon, f}(x, y, p, T) = 0, \qquad z^\varepsilon(x, y, p, T) = (p - q)^+. \tag{2.19}
$$

Επιπλέον η τιμή του δικαιώματος ικανοποιεί τη σχέση

$$\Lambda(x, y, p, t; 1/\varepsilon, 1) = z^{\varepsilon}(x, y, p, t) - z^{\varepsilon,f}(x, y, p, t). \tag{2.20}$$

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες των $z^{\varepsilon,f}, z^{\varepsilon}$. Αυτό θα γίνει στην Πρόταση 2.1, που θα δοθεί αμέσως μετά την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1 *Οι u^{ε}, $u^{\varepsilon,f}$ όπως ορίστηκαν στις (2.15) – (2.16), είναι οι μοναδικές, (ασθενείς) , λύσεις ιξώδους της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού,*

$$\min\Big\{-u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 u_{pp} - apu_p; -u_y + p(1+\mu)u_x; u_y - p(1-\mu)u_x\Big\} = 0. \tag{2.21}$$

Στη συνέχεια πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, θα δώσουμε μία μη αυστηρή αιτιολόγηση, της εξίσωσης προγραμματισμού που ικανοποιούν οι V, V^f, από τις οποίες προκύπτουν οι $u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon,f}$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οι V, V^f, ικανοποιούν τη σχέση,

$$\max\Big\{V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} + apV_p; V_y - p(1+\mu)V_x; -V_y + p(1-\mu)V_x\Big\} = 0. \tag{2.22}$$

Θεωρούμε προσωρινά μία μικρότερη κατηγορία επενδυτικών στρατηγικών, έτσι ώστε $(L(s), M(s))$ να είναι απόλυτα συνεχείς και να δίνονται από τις εξισώσεις,

$$L(s) = \int_t^s l(\xi)d\xi, \quad M(s) = \int_t^s m(\xi)d\xi, \tag{2.23}$$

όπου οι συναρτήσεις $l(\xi), m(\xi)$, είναι θετικές και ομοιόμορφα φραγμένες από το κ που είναι πεπερασμένο. Οπότε οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της μετοχής και την εξέλιξη των $X(s), Y(s)$ παίρνουν τη μορφή,

$$dX(s) = -P(s)(1+\mu)l(s)ds + P(s)(1-\mu)m(s)ds, \quad s \in [t, T], \tag{2.24}$$

$$dY(s) = l(s)ds - m(s)ds, \qquad s \in [t, T], \tag{2.25}$$

$$dP(s) = P(s)ads + P(s)\sigma dW(s), \qquad s \in [t, T]. \tag{2.26}$$

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων αποτελεί σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, όπου για το πρόβλημα μεγιστοποίησης της μέσης τιμής της ωφελιμότητας, βάσει της θεωρίας του βέλτιστου στοχαστικού ελέγχου (βλέπεFleming - Soner [FS], Θεώρημα 4.1- Σελ. 168), ανεξάρτητα της συνάρτησης ωφελιμότητας, για οποιαδήποτε απο τις V ή V^f, η εξίσωση Bellman έχει τη μορφή,

$$\max_{0 \le l, m \le \kappa} \Big\{(V_y - (1+\mu)pV_x)l - (V_y - (1-\mu)pV_x)m\Big\} + V_t + apV_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} = 0. \tag{2.27}$$

Η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική καθορίζεται θεωρώντας τις παρακάτω τρεις πιθανές περιπτώσεις :

$$(1) \qquad V_y - (1+\mu)pV_x \geq 0, \quad V_y - (1-\mu)pV_x > 0, \tag{2.28}$$

οπότε έχουμε το μέγιστο για $m = 0$ και $l = k$, αγοράζουμε δηλαδή στο μέγιστο ρυθμό κ.

$$(2) \qquad V_y - (1+\mu)pV_x < 0, \quad V_y - (1-\mu)pV_x \leq 0, \tag{2.29}$$

οπότε έχουμε το μέγιστο για $l = 0$ και $m = k$, πουλάμε δηλαδή στο μέγιστο ρυθμό κ.

$$(3) \qquad V_y - (1+\mu)pV_x \leq 0, \quad V_y - (1-\mu)pV_x \geq 0, \tag{2.30}$$

οπότε έχουμε το μέγιστο για $l = 0$ και $m = 0$, που σημαίνει ότι δεν πραγματοποιούμε καμία συναλλαγή.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει ότι έχουμε ένα πρόβλημα ελευθέρου συνόρου όπου αν η συνάρτηση τιμών $V(x, y, p, t)$ είναι γνωστή, η βέλτιστη στρατηγική του επενδυτή καθορίζεται από τις άνω ανισότητες. Το σύνολο των καταστάσεων χωρίζεται σε τρία χωρία, τα οποία ονομάζουμε αντίστοιχα, χωρίο *αγοράς*, *πώλησης* ή *χωρίο μηδενικής συναλλαγής*. Τα χωριά αγοράς και πώλησης σαφώς δεν τέμνονται. Τα αντίστοιχα σύνορα δε των άνω χωρίων με το χωρίο καμίας συναλλαγής τα συμβολίζουμαι με ∂B, ∂S αντίστοιχα.

Καθώς το κ τείνει στο ∞, η κλάση των επενδυτικών στρατηγικών συμπίπτει με αυτή που ορίστηκε αρχικά. Υποθέτουμε ότι ο χώρος καταστάσεων παραμένει πάλι χωρισμένος σ′ ένα χωρίο αγοράς, ένα χωρίο πώλησης και ένα χωρίο που δε πραγματοποιούμε συναλλαγές. Τότε η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική μας δηλώνει ότι πρέπει να κάνουμε μία συναλλαγή εώς το σύνορο ∂B ή ∂S ανάλογα αν βρισκόμαστε στο χωρίο αγοράς ή στο χωρίο πώλησης, συνοδευόμενες από συναλλαγές τοπικού τύπου στο σύνορο.

Στο χωρίο αγοράς η συνάρτηση τιμών παραμένει σταθερή κατά μήκος του μονοπατιού το οποίο μας δίνει η βέλτιστη στρατηγική επένδυσης (βλέπε Fleming - Rishel [FR] Θεώρημα 3.2- Σελίδα 82). Επομένως ισχύει,

$$V(x, y, p, t) = V(x - (1+\mu)p\delta_{y_b}, y + \delta_{y_b}, p, t), \tag{2.31}$$

όπου δ_{y_b} είναι ο αριθμός των μετοχών που αγοράστηκαν από τον επενδυτή. Αν $\delta_{y_b} \to 0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$V_y(x, y, p, t) - (1+\mu)pV_x(x, y, p, t) = 0. \tag{2.32}$$

Παρόμοια στο χωρίο πώλησης η συνάρτηση τιμών ικανοποιεί την

$$V(x, y, p, t) = V(x + (1-\mu)p\delta_{y_s}, y - \delta_{y_s}, p, t), \tag{2.33}$$

όπου δ_{y_s} είναι ο αριθμός των μετοχών που πουλήθηκαν από τον επενδυτή. Αν $\delta_{y_s} \to 0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$V_y(x,y,p,t) - (1-\mu)pV_x(x,y,p,t) = 0. \tag{2.34}$$

Στο χωρίο όπου δεν έχουμε συναλλαγές η συνάρτηση τιμών ικανοποιεί πάλι τις παραπάνω εξισώσεις που ισχύουν για την κλάση των απόλυτα συνεχών στρατηγικών επένδυσης και επομένως η συνάρτηση τιμών δίνεται από την

$$V_t + apV_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} = 0. \tag{2.35}$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι : Στο χωρίο αγοράς η V ικανοποιεί τη σχέση (2.32) και επίπλεον ότι,

$$-V_y(x,y,p,t) + (1-\mu)pV_x(x,y,p,t) < 0.$$

Στο χωρίο πώλησης η V ικανοποιεί τη σχέση (2.34) και επίσης ότι,

$$V_y(x,y,p,t) - (1+\mu)pV_x(x,y,p,t) < 0.$$

Τέλος στο χωρίο μηδενικής συναλλαγής η V ικανοποιεί τη σχέση (2.35) και επίπλεον ότι,

$$V_y(x,y,p,t) - (1-\mu)pV_x(x,y,p,t) \geq 0, V_y(x,y,p,t) - (1+\mu)pV_x(x,y,p,t) \leq 0.$$

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων επειδή ισχύει η(2.27) συνοψίζεται στη σχέση,

$$\max\Big\{V_y - (1+\mu)pV_x; -(V_y - (1-\mu)pV_x); V_t + apV_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp}\Big\} = 0, \tag{2.36}$$

για $(x,y,p,t) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, [0,T])$.
Απόδειξη Θεωρήματος 2.1: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση τιμών $V(x,y,p,t)$, όπου $V = u^\varepsilon$ ή $u^{\varepsilon,f}$, όπως αυτές ορίζονται από τις $(2.15)-(2.16)$, είναι ασθενής λύση ιξώδους της εξίσωσης,

$$\min\Big\{-V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} - apV_p; -V_y + p(1+\mu)V_x; V_y - p(1-\mu)V_x\Big\} = 0. \tag{2.37}$$

Στην περιπτωσή μας η κατάσταση S είναι η (x,y,p,t) και έστω ότι το σημείο, $S_0 = (x_0, y_0, p_0, t_0) \in E \times [0,T]$, όπου E είναι το σύνολο, $(x,y,p) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Από αποτέλεσμα του Zhu [Z], υπάρχει μία βέλτιστη επένδυση, που μας δίνουν οι $(L^*(s), M^*(s))$ όπου $S_0^*(s) = (X_0^*(s), Y_0^*(s), P_0^*(s), s)$, είναι η βέλτιστη τροχιά με $S_0^*(t_0) = S_0$.

Βάσει του ορισμού της λύσης ιξώδους, που δίνεται στο παράρτημα Α, πρέπει να δείξουμε ότι η V είναι υπόλυση και υπερλύση της εξίσωσης που περιγράφεται από τη σχέση (2.37). Για να δείξουμε αρχικά ότι η V είναι υπολύση, πρέπει για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi(S)$, τέτοια ώστε η $V(S) - \phi(S)$ έχει τοπικό μέγιστο στο S_0 να ισχύει,

$$\begin{aligned}\min\Big\{&-\phi_y(S_0) + p_0(1+\mu)\phi_x(S_0); \phi_y(S_0) - p_0(1-\mu)\phi_x(S_0) \\ &; -\phi_t(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 p_0^2 \phi_{pp}(S_0) - a p_0 \phi_p(S_0)\Big\} \leq 0.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $V(S_0) = \phi(S_0)$ και $V \leq \phi$ στο $E \times [0, T]$. Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Τότε βάσει της εξίσωσης (2.38) έχουμε ότι,

$$-\phi_y(S_0) + p_0(1+\mu)\phi_x(S_0) > 0, \tag{2.39}$$

$$\phi_y(S_0) - p_0(1-\mu)\phi_x(S_0) > 0, \tag{2.40}$$

και υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε

$$-\phi_t(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 p_0^2 \phi_{pp}(S_0) - a p_0 \phi_p(S_0) > \theta. \tag{2.41}$$

Από το γεγονός ότι η ϕ είναι ομαλή συνάρτηση έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}-\phi_y(S) + p(1+\mu)\phi_x(S) &> 0, &(2.42)\\ \phi_y(S) - p(1-\mu)\phi_x(S) &> 0, &(2.43)\\ -\phi_t(S) - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \phi_{pp}(S) - a p \phi_p(S) &> \theta, &(2.44)\end{aligned}$$

όπου $S = (x, y, p, t) \in B(S_0)$, μία περιοχή του S_0 . Βάσει του λήμματος 5.1, που θα δείξουμε στο παράρτημα Α, η συνάρτηση $S_0^*(s)$ δεν έχει πηδήματα $\mathbb{P}$ σχεδόν βεβαίως στο $S_0 = S_0^*(t_0)$. Επομένως αν $\tau(\omega) = \inf\{s \in [t_0, T] : S_0^*(s) \notin B(S_0)\}$, είναι μεγαλύτερο του t_0, $\mathbb{P}$ σχεδόν βεβαίως. Βάσει των (2.42) − (2.44), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\theta \quad & \mathbb{E} \quad (\tau - t_0) &(2.45)\\ < \quad & \mathbb{E} \quad \int_{t_0}^{\tau} [-\phi_y(S_0^*(s)) + P_0^*(s)(1+\mu)\phi_x(S_0^*(s))] dL^*(s) + \\ + \quad & \mathbb{E} \quad \int_{t_0}^{\tau} [\phi_y(S_0^*(s)) - P_0^*(s)(1-\mu)\phi_x(S_0^*(s))] dM^*(s) \\ + \quad & \mathbb{E} \quad \int_{t_0}^{\tau} [-\phi_t(S_0^*(s)) - \frac{1}{2}\sigma^2 (P_0^*(s))^2 \phi_{pp}(S_0^*(s)) - a P_0^*(s) \phi_p(S_0^*(s))] ds \\ = \quad & \mathbb{E} \quad [I_1] + \mathbb{E}[I_2] + \mathbb{E}[I_3],\end{aligned}$$

όπου $(L^*(s), M^*(s))$ είναι η βέλτιστη στρατηγική στο S_0. Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του Ito (βλέπε B. Oksendall [O]. Θεώρημα 4.2.1 - Σελίδα 48), στη $\phi(S)$, έχουμε ότι ισχύει,

$$\begin{aligned}\phi(S_0^*(\tau)) &= \phi(S_0) + \int_{t_0}^{\tau} \phi_t(S_0^*(s))ds - \int_{t_0}^{\tau} \phi_x(S_0^*(s))P_0^*(s)(1+\mu)dL^*(s) \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \phi_x(S_0^*(s))P_0^*(s)(1-\mu)dM^*(s) + \int_{t_0}^{\tau} \phi_y(S_0^*(s)dL^*(s) \\ &- \int_{t_0}^{\tau} \phi_y(S_0^*(s)dM^*(s) + \int_{t_0}^{\tau} \phi_p(S_0^*(s))aP_0^*(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \phi_p(S_0^*(s))\sigma P_0^*(s)dW(s) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tau} \phi_{pp}(S_0^*(s))\sigma^2(P_0^*(s))^2ds.\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε τη μέση τιμή, καταλήγουμε στη σχέση,

$$\mathbb{E}[\phi(S_0^*(\tau))] = \phi(S_0) - \mathbb{E}[I_1] - \mathbb{E}[I_2] - \mathbb{E}[I_3]. \tag{2.46}$$

Αφού $V(S) \leq \phi(S)$ και για όλα τα $S \in B(S_0)$ και $V(S_0) = \phi(S_0)$, από τις σχέσεις, (2.45)-(2.46), έχουμε ότι,

$$\mathbb{E}[V(S_0^*(\tau))] \leq V(S_0) - \mathbb{E}[I_1] - \mathbb{E}[I_2] - \mathbb{E}[I_3] < V(S_0) - \theta\mathbb{E}[\tau - t_0]. \tag{2.47}$$

Αλλά λόγω της βέλτιστης ιδιότητας των $(L^*(s), M^*(s))$, θα έπρεπε να είχαμε αντίθετη φορά στην ανισότητα.

Στη συνέχεια για να δείξουμε ότι η V είναι υπερλύση, πρέπει για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi(S)$, τέτοια ώστε η $V(S) - \phi(S)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο S_0 να ισχύει,

$$\begin{aligned}\min\Big\{&-\phi_y(S_0) + p_0(1+\mu)\phi_x(S_0); \phi_y(S_0) - p_0(1-\mu)\phi_x(S_0) \\ &; -\phi_t(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 p_0^2\phi_{pp}(S_0) - ap_0\phi_p(S_0)\Big\} \geq 0.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $V(S_0) = \phi(S_0)$ και $V \geq \phi$ στο $E \times [0, T]$. Αποδεικνύουμε ότι κάθε όρος της παραπάνω εξίσωσης είναι μη αρνητικός.

Θεωρούμε την στρατηγική $L(s) = L_0, t_0 < s$ και $M(s) = 0, t_0 < s$. Επειδή $S_0 = (x_0, y_0, p_0, t_0)$, είναι το σημείο που ξεκινάει η βέλτιστη τροχιά έχουμε,

$$V(x_0, y_0, p_0, t_0) \geq V(x_0 - (1+\mu)p_0L_0, y_0 + L_0, p_0, t_0). \tag{2.49}$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει επίσης και για την $\phi(x, y, p, t)$, οπότε διαιρώντας με το L_0 και αφήνοντας το $L_0 \to 0$ έχουμε,

$$\phi_y(S_0) - (1+\mu)p_0\phi_x(S_0) \leq 0. \tag{2.50}$$

Ομοια για να δείξουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι μη αρνητικός, χρησιμοποιούμε την $L(s) = 0, t_0 < s$ και $M(s) = M_0, t_0 < s$. Τέλος θεωρούμε την περίπτωση όπου καμία συναλλαγή δε λαμβάνει χώρα. Τότε έχουμε,

$$\mathbb{E}V(S_0^d) \le V(x_0, y_0, p_0, t_0), \tag{2.51}$$

όπου $S_0^d(s)$, είναι η τροχιά όταν $M(s) = L(s) = 0, t_0 \le s \le T$. Αυτή δίνεται από τη σχέση,

$$S_0^d(s) = (x_0, y_0, p_0 \exp[(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(s - t_0) + \sigma(W(s) - W(t_0))], s) \tag{2.52}$$

και $S_0^d(s) \in B(S_0)$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Ito, όπως ακριβώς και στο προηγούμενο μέρος της απόδειξης στο $\phi(x, y, p, t)$ και αφού θεωρήσουμε τη μέση τιμή παίρνουμε ότι,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \quad \phi(S_0^d(s)) = \phi(S_0(s)) \\ + &\mathbb{E} \quad (\int_{t_0}^{s} [\phi_t(S_0^d(\xi)) + aP_0^d(\xi)\phi_p(S_0^d(\xi)) + \frac{1}{2}\sigma^2(S_0^d(\xi))^2\phi_{pp}(S_0^d(\xi))]d\xi). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση και τη (2.51), προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(\int_{t_0}^{s} -[\phi_t(S_0^d(\xi)) + aP_0^d(\xi)\phi_p(S_0^d(\xi)) + \frac{1}{2}\sigma^2(S_0^d(\xi))^2\phi_{pp}(S_0^d(\xi))]d\xi) \ge 0. \tag{2.53}$$

Επιλέγοντας το $s \to t_0$, έχουμε και τον τρίτο όρο μη αρνητικό (για λεπτομερέστερη απόδειξη βλέπε Lions [L1]).

Για την απόδειξη της μοναδικότητας παραπεμπούμε στους Davis-Panas-Zariphopoulou [DPZ] και Ishii-Lions [IL]. □

Συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες των z^ε και $z^{\varepsilon,f}$ στη παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1 *Για κάθε $\varepsilon > 0$ οι $z^{\varepsilon,f}$, z^ε, είναι ανεξάρτητες του x και είναι συνεχείς λύσεις ιξώδους (viscocity solutions) της*

$$\max\Big\{-z_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 z_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (z_p - y)^2 - ap(z_p - y); |z_y| - \mu p\Big\} = 0, \tag{2.54}$$

στο $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^+ \times [0, T]$. Επιπλέον

$$-\frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2}(T - t) \le z^{\varepsilon,f}(y, p, t) \le z^\varepsilon(y, p, t), \tag{2.55}$$

$$z^{\varepsilon,f}(y, p, t) \le \mu p|y|, \quad z^\varepsilon(y, p, t) \le p + \mu p|y - 1|, \tag{2.56}$$

$$\varphi(p, t) - \frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2}(T - t) \le z^\varepsilon(y, p, t), \tag{2.57}$$

όπου φ λύνει τη μη γραμμική εξίσωση των Black-Scholes , που περιγράφεται από τη σχέση (1.1) .

Απόδειξη : Οι συναρτήσεις $z^{\varepsilon,f}$, z^{ε} που ορίζονται μέσω της εκθετικής συνάρτησης ωφελιμότητας και δίνονται από τις σχέσεις,

$$u^{\varepsilon,f}(x,y,p,t) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z^{\varepsilon,f}(x,y,p,t)]\right), \tag{2.58}$$

$$u^{\varepsilon}(x,y,p,t) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z^{\varepsilon}(x,y,p,t)]\right), \tag{2.59}$$

είναι ανεξάρτητες του x. Πράγματι από τις σχέσεις,

$$u^{\varepsilon,f}(x,y,p,t) = 1 - \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[X(T) + Y(T)P(T)]\right), \tag{2.60}$$

$$u^{\varepsilon}(x,y,p,t) = 1 - \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[X(T) + Y(T)P(T) - (P(T)-q)^{+}]\right), \tag{2.61}$$

έχουμε ότι

$$u^{\varepsilon,f}(x,y,p,t) = 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon}x) \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[W^{\varepsilon,f}(T)]\right), \tag{2.62}$$

$$u^{\varepsilon}(x,y,p,t) = 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon}x) \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} E\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[W^{\varepsilon}(T)]\right), \tag{2.63}$$

όπου $W^{\varepsilon,f}(T)$, $W^{\varepsilon}(T)$, δίνονται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} W^{\varepsilon,f}(T) &= X(T) - x + Y(T)P(T), \\ W^{\varepsilon}(T) &= X(T) - x + Y(T)P(T) - (P(T)-q)^{+}, \end{aligned}$$

από όπου φαίνεται (βλέπε (2.5) – (2.6)), ότι είναι ανεξάρτητες του x. Επομένως έχουμε το ζητούμενο. Θέτοντας

$$u(x,y,p,t) = 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z(y,p,t)]), \tag{2.64}$$

όπου $z = z^{\varepsilon}$ ή $z^{\varepsilon,f}$ και $u = u^{\varepsilon}$ ή $u^{\varepsilon,f}$ αντίστοιχα, επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι ομαλή, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{\varepsilon}(p - z_y)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z]), &(2.65)\\ u_x &= \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z]), &(2.66)\\ u_t &= -\frac{z_t}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z]), &(2.67)\\ u_p &= \frac{(y - z_p)}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - z]), &(2.68) \end{aligned}$$

$$u_{pp} = -[\frac{z_{pp}}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x+yp-z]) + \frac{(y-z_p)^2}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x+yp-z])]. \quad (2.69)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, βάσει της

$$\min\Big\{-u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 u_{pp} - apu_p; -u_y + p(1+\mu)u_x; u_y - p(1-\mu)u_x\Big\} = 0, \quad (2.70)$$

παίρνουμε τη σχέση

$$\max\Big\{-z_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 z_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (z_p - y)^2 - ap(z_p - y); |z_y| - \mu p\Big\} = 0. \quad (2.71)$$

Επομένως οι $z^{\varepsilon,f}$, z^ε είναι μοναδικές λύσεις ιξώδους της παραπάνω εξίσωσης και είναι ανεξάρτητες του x.

Στη συνέχεια αν θέσουμε $\widetilde{z}(y,p,t) = -\frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2}(T-t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} - \quad & \widetilde{z}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \widetilde{z}_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\widetilde{z}_p - y)^2 - ap(\widetilde{z}_p - y) = \qquad (2.72) \\ - \quad & \frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 y^2 + apy = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon}(py - \frac{a\varepsilon}{\sigma^2})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός μας δείχνει ότι η συνάρτηση

$$V(x,y,p,t) := U^\varepsilon(x + yp - \widetilde{z}(y,p,t)), \quad (2.73)$$

είναι υπερλύση της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού,

$$\min\Big\{-u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 u_{pp} - apu_p; -u_y + p(1+\mu)u_x; u_y - p(1-\mu)u_x\Big\} = 0. \quad (2.74)$$

Συνεπώς, επειδή η $u^{\varepsilon,f}$ είναι λύση, βάσει της αρχής σύγκρισης έχουμε ότι $u^{\varepsilon,f} \leq V$, οπότε και $z^{\varepsilon,f} \geq \widetilde{z}$, απ' όπου έπεται ότι $z^\varepsilon \geq \widetilde{z}$. Επομένως δείξαμε τη (2.55).

Στη συνέχεια θα δείξουμε τη σχέση (2.56). Υποθέτουμε αρχικά ότι $y = 1$. Διαλέγουμε $\widehat{L} \equiv \widehat{M} \equiv 0$. Τότε $(\widehat{X}(s), \widehat{Y}(s)) = (x, 1)$, λύνει τις εξισώσεις

$$X(s) = x - \int_t^s P(\tau)(1+\mu)dL(\tau) + \int_t^s P(\tau)(1-\mu)dM(\tau), \qquad s \in [t,T], \quad (2.75)$$

$$Y(s) = y + L(s) - M(s), \qquad s \in [t,T] \quad (2.76)$$

και επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x,1,p,t) &= 1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x + p - z^\varepsilon(1,p,t)]) \qquad (2.77) \\ &= \sup \mathbb{E}[U^\varepsilon(X(T) + Y(T)P(T) - (P(T)-q)^+)] \\ &\geq \mathbb{E}[U^\varepsilon(\widehat{X}(T) + \widehat{Y}(T)P(T) - (P(T)-q)^+)] \\ &= \mathbb{E}[U^\varepsilon(x + P(T) - (P(T)-q)^+)] \geq U^\varepsilon(x) \\ &= 1 - \exp(-\frac{x}{\varepsilon}), \end{aligned}$$

οπότε $z^\varepsilon(1,p,t) \le p$.

Έστω τώρα $y>1$. Διαλέγουμε $\widehat{L}\equiv 0, \widehat{M}(s)=y-1, s>t$, και παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(\widehat{X}(s),\widehat{Y}(s))=(x+p(1-\mu)(y-1),1)$, λύνει τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των $X(s), Y(s)$ και παρόμοια έχουμε,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x,y,p,t) &= 1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x+py-z^\varepsilon(y,p,t)]) \quad (2.78)\\ &= \sup \mathbb{E}[U^\varepsilon(X(T)+Y(T)P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &\ge \mathbb{E}[U^\varepsilon(\widehat{X}(T)+\widehat{Y}(T)P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &= \mathbb{E}[U^\varepsilon(x+p(1-\mu)(y-1)+P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &\ge U^\varepsilon(x+p(1-\mu)(y-1))\\ &= 1-\exp(-\frac{x+p(1-\mu)(y-1)}{\varepsilon}), \end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε ότι,

$$x+py-z^\varepsilon(y,p,t) \ge x+p(1-\mu)(y-1),$$

οπότε προκύπτει ότι $z^\varepsilon(y,p,t)\le p+p\mu(y-1)$. Έστω τώρα $y<1$. Διαλέγουμε $\widehat{L}=1-y, \widehat{M}(s)\equiv 0, s>t$ και παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το ζεύγος $(\widehat{X}(s),\widehat{Y}(s))=(x-p(1+\mu)(1-y),1)$, λύνει τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των $X(s), Y(s)$ και παρόμοια έχουμε,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x,y,p,t) &= 1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}[x+py-z^\varepsilon(y,p,t)]) \quad (2.79)\\ &= \sup \mathbb{E}[U^\varepsilon(X(T)+Y(T)P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &\ge \mathbb{E}[U^\varepsilon(\widehat{X}(T)+\widehat{Y}(T)P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &= \mathbb{E}[U^\varepsilon(x-p(1+\mu)(1-y)+P(T)-(P(T)-q)^+)]\\ &\ge U^\varepsilon(x-p(1+\mu)(1-y))\\ &= 1-\exp(-\frac{x-p(1+\mu)(1-y)}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι,

$$x+py-z^\varepsilon(y,p,t) \ge x-p(1+\mu)(1-y),$$

οπότε $z^\varepsilon(y,p,t)\le p+p\mu(1-y)$. Πήραμε λοιπόν το άνω φράγμα για το $z^\varepsilon(y,p,t)$. Όμοια παίρνουμε για το $z^{\varepsilon,f}(y,p,t)$, αφού πρώτα δείξουμε ότι, $z^{\varepsilon,f}(0,p,t)\le 0$.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη μας θεωρώντας τη συνάρτηση,

$$\widehat{z}(y,p,t) = \varphi(p,t) - \frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2}(T-t), \tag{2.80}$$

όπου φ, λύνει τη γραμμική εξίσωση των Black-Scholes και έχουμε,

$$\begin{aligned}
& - \quad \widehat{z}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \widehat{z}_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\widehat{z}_p - y)^2 - ap(\widehat{z}_p - y) \qquad (2.81)\\
= & - \quad \varphi_t - \frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \varphi_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\varphi_p - y)^2 - ap(\varphi_p - y)\\
= & - \quad \frac{\varepsilon a^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\varphi_p - y)^2 - ap(\varphi_p - y)\\
= & - \quad \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\Big(p(y-\varphi_p) - \frac{a\varepsilon}{\sigma^2}\Big)^2 \le 0,
\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη σχέση ο πρώτος και ο τρίτος όρος μηδενίζονται, αφού φ ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση. Ο παραπάνω υπολογισμός μας δείχνει ότι η συνάρτηση,

$$V(x,y,p,t) := U^{\varepsilon}(x + yp - \widehat{z}(y,p,t)), \tag{2.82}$$

είναι υπερλύση της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού,

$$\min\Big\{-u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 u_{pp} - apu_p; -u_y + p(1+\mu)u_x; u_y - p(1-\mu)u_x\Big\} = 0. \tag{2.83}$$

Συνεπώς επειδή η u^{ε} είναι λύση, βάσει της αρχής σύγκρισης έχουμε $u^{\varepsilon} \le V$, οπότε και $z^{\varepsilon} \ge \widehat{z}$. $\Box$

Στην συνέχεια δίνουμε ένα κάτω φράγμα για το z^{ε}, που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Η απόδειξη του είναι συνέπεια της παραπάνω πρότασης και δίνεται στο παράρτημα.

Λήμμα 2.1 *Για κάθε $\mu \le 1/2, 0 < \eta \le T$ υπάρχει σταθερά $K(\eta)$, τέτοια ώστε:*

$$z^{\varepsilon}(y,p,t) \ge \mu p|y| - K(\eta)T\varepsilon, \tag{2.84}$$

για κάθε $0 \le t \le T - \eta$, $p \in (0,\infty)$ και $y \in \mathbb{R}^1$.

3 Μία μη γραμμική εξίσωση τύπου Black-Scholes

3.1 Παρουσίαση και μία άμεση συνέπεια του κυρίου θεωρήματος

Αναφέρουμε το κύριο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη θα δοθεί στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1 *Υποθέτουμε ότι* $\mu = \alpha\sqrt{\varepsilon}$, *για κάθε σταθερό* $\alpha > 0$. *Καθώς* $\varepsilon \downarrow 0$,

$$z^{\varepsilon,f} \to 0, \qquad z^{\varepsilon} \to \Psi. \tag{3.1}$$

Ψ *είναι η μοναδική λύση ιξώδους της εξίσωσης,*

$$\Psi_t + rp\Psi_p + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp}[1 + S(e^{r(T-t)}\alpha^2 p^2 \Psi_{pp})] = r\Psi, \tag{3.2}$$

στο $[0,\infty) \times [0,T]$ *με τελική συνθήκη*

$$\Psi(p,T,\alpha) = \max(p-q,0), \tag{3.3}$$

που ικανοποιεί

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\Psi(p,s)}{p} = 1, \tag{3.4}$$

ομοιόμορφα για $s \in [0,T]$, *όπου η* $S(A)$ *είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{d}{dA}[S(A)] = \frac{S(A)+1}{2\sqrt{AS(A)} - A}, \quad \forall A \neq 0, \quad A \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

με $S(0) = 0$.

Στην ανάλυση που έχουμε κάνει μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι το επιτόκιο της αγοράς είναι ίσο με μηδέν. Η περίπτωση που αφορά στο μη μηδενικό επιτόκιο και η αντίστοιχη περιγραφή των εξισώσεων του μοντέλου μας μελετάται παρακάτω στη Παράγραφο 3.3.

Στη συνέχεια όταν η εξάρτηση από το α είναι σημαντική, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\Psi(p,s,\alpha)$, διαφορετικά το $\Psi(p,s)$. Στο παραπάνω θεώρημα η σύγκλιση του $z^{\varepsilon,f}$ στο 0 είναι άμεση από τη Πρόταση 2.1. Η συμπεριφορά του $z^{\varepsilon,f}$ καθώς $\varepsilon \to 0$ με σταθερό μ, έχει μελετηθεί από τους Whalley-Willmott [WW]. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η μη γραμμική επέκταση της εξίσωσης του Leland, που έδωσαν οι Avellaneda-Paras [AP], έχει την ίδια μορφή με την (3.2), με

$$\widehat{S}(A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \frac{A}{|A|}, \tag{3.6}$$

όπου Δt είναι η συχνότητα συναλλαγής.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μία συνέπεια του θεωρήματος, που είναι ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να χάσουμε την αντιστάθμιση κατά ένα ποσό ίσο με κ.

Θεώρημα 3.2 *Για δεδομένα α, κ, σταθερά, θετικά και αρχικά δεδομένα, $X(t) = x, Y(t) = y, P(t) = p$, έχουμε ότι*

$$\inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{P}\big(X(T) + Y(T)P(T) - (P(T) - q)^+ \leq -\kappa\big) \qquad (3.7)$$
$$\leq \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\mu^2}\left[\kappa + x + yp - \Psi(p,t,\alpha) + O(\frac{\mu^2}{\alpha^2})\right]\right),$$

όπου $O(r)$ συμβολίζει κάθε συνάρτηση μίας μεταβλητής, με $O(r) \to 0$ καθώς $r \downarrow 0$.

Απόδειξη : Θέτουμε,

$$\varepsilon := \frac{\mu^2}{\alpha^2}, \quad Z(T) := X(T)+Y(T)P(T)-(P(T)-q)^+, \quad F(\xi) := e^{-\xi/\varepsilon}. \qquad (3.8)$$

Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
\inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{P}(Z(T) \leq -\kappa) &= \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Z(T)\leq -\kappa\}}) \\
&= \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{P}(F(Z) \geq F(-\kappa)) \\
&\leq \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\left(\frac{F(Z)}{F(-\kappa)}\right) = (1 - u^\varepsilon(x,y,p,t))e^{-\kappa/\varepsilon} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left[\kappa + x + yp - z^\varepsilon(y,p,t)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\mu^2}\left[\kappa + x + yp - \Psi(p,t,\alpha) + O(\frac{\mu^2}{\alpha^2})\right]\right),
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του z^ε, σύμφωνα με το βασικό θεώρημα. □

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν υπάρχει βέλτιστό ζεύγος $(L^*(s), M^*(s))$, τότε το άνω θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί για να λάβουμε μία εκτίμηση χωρίς το infimum.

3.2 Μη αυστηρή παραγωγή της μη γραμμικής εξίσωσης τύπου Black-Scholes

Συνεχίζουμε δίνοντας μία μη αυστηρή αιτιολόγηση της εξίσωσης (3.2), για την περίπτωση μηδενικού επιτοκίου r. Η αυστηρή απόδειξη θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο. Υποθέτουμε αρχικά ότι η συνάρτηση z^ε έχει τη μορφή,

$$z^\varepsilon(y,p,t) \approx \Psi(p,t) + \varepsilon C(r^\varepsilon, A), \tag{3.9}$$

όπου Ψ και C είναι δύο συναρτήσεις που θα καθοριστούν παρακάτω και επιπλέον υποθέτουμε ότι,

$$\begin{aligned} r^\varepsilon = r^\varepsilon(y,p,t) &:= \alpha p \frac{\Psi_p(p,t) - y}{\sqrt{\varepsilon}}, \\ A = A(p,t) &:= \alpha^2 p^2 \Psi_{pp}(p,t). \end{aligned}$$

Στην προσπάθεια μας να δείξουμε το ζητούμενο θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση z^ε είναι λύση της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού,

$$\max\Big\{-z_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 z_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (z_p - y)^2 - ap(z_p - y); |z_y| - \mu p\Big\} = 0, \tag{3.10}$$

το οποίο θα μας δώσει τις εξισώσεις τις οποίες ικανοποιούν οι Ψ, C. Οπότε αρχίζουμε λαμβάνοντας προσεγγιστικές εκφράσεις για το z^ε, παραγωγίζοντας την προσεγγιστική σχέση που έχουμε. Στους υπολογισμούς αυτούς που θα ακολουθήσουν, υποθέτουμε ότι το r^ε έχει τάξη ένα και κρατάμε μόνο τους όρους τάξης ένα. Αλλά αφού ο συντελεστής του z_p^ε στην παραπάνω εξίσωση είναι ε^{-1}, κρατάμε μόνο τους όρους που είναι τάξης $\sqrt{\varepsilon}$ στο ανάπτυγμα του z_p^ε. Επίσης όπως είχαμε πει $\mu = \alpha\sqrt{\varepsilon}$, οπότε βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} z_t^\varepsilon &\approx \Psi_t, \qquad z_y^\varepsilon \approx -\mu p C_r, \\ z_p^\varepsilon &\approx \Psi_p + \varepsilon r_p^\varepsilon C_r = \Psi_p + \varepsilon\Big(\frac{r^\varepsilon}{p} + \frac{\alpha p \Psi_{pp}}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) C_r \approx \Psi_p + \sqrt{\varepsilon}\Big(\frac{A}{\alpha p}\Big) C_r, \\ z_{pp}^\varepsilon &\approx \Psi_{pp} + \varepsilon (r_p^\varepsilon)^2 C_{rr} \approx \Psi_{pp} + \Big(\frac{A}{\alpha p}\Big)^2 C_{rr}. \end{aligned}$$

Ο περιορισμός $|z_y^\varepsilon| \leq \mu p$, στη σχέση (2.56), είναι ισοδύναμος με τη σχέση $|C_r| \leq 1$. Θέτουμε στην συνέχεια,

$$I^\varepsilon := -z_t^\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 z_{pp}^\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (z_p^\varepsilon - y)^2 - ap(z_p^\varepsilon - y), \tag{3.11}$$

οπότε βάσει των παραπάνω σχέσεων έχουμε,

$$\begin{aligned} I^\varepsilon &\approx -\Psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 (\Psi_{pp} + \frac{A^2}{\alpha^2 p^2} C_{rr}) \\ &- \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\Psi_p - y + \sqrt{\varepsilon}\frac{A}{ap} C_r)^2 - ap(\Psi_p - y) \\ &= -\Psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} A^2 C_{rr} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(r^\varepsilon + AC_r)^2 \ - a\sqrt{\varepsilon}\frac{r^\varepsilon}{\alpha} \\ &\approx -\Psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\Big[A^2 C_{rr} + (r^\varepsilon + AC_r)^2\Big]. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια βάσει της προσεγγιστικής έκφρασης για το I^{ε}, η σχέση (3.10), γράφεται στη μορφή

$$\max\Big\{-\Psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[A^2 C_{rr} + (r^{\varepsilon} + AC_r)^2]; |C_r| - 1\Big\} = 0, \quad (3.12)$$

για όλα τα p, t, r^{ε}. Αφού η εξίσωση ισχύει για όλα τα y και επομένως για όλα τα r, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση H του A έτσι ώστε να έχουμε ότι,

$$-\Psi_t(p,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp}(p,t) = H(A(p,t)) \quad (3.13)$$

Θέτοντας στη συνέχεια

$$S(A) := \frac{2\alpha^2}{A\sigma^2} H(A), \quad (3.14)$$

και κοιτάζοντας τον ορισμό του $A(p,t)$ βλέπουμε ότι βάσει της παραπάνω εξίσωσης αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $H(A)$ στη (3.13), η Ψ ικανοποιεί την εξίσωση,

$$\Psi_t + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \Psi_{pp}[1 + S(\alpha^2 p^2 \Psi_{pp})] = 0. \qquad \square$$

Παρατήρηση: Επιπλέον βάσει της σχέσης (3.13), η (3.12) γραφέται στη μορφή

$$\max\Big\{H(A) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[A^2 C_{rr} + (r + AC_r)^2]; |C_r| - 1\Big\} = 0. \quad (3.15)$$

Αν σε αυτή αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $H(A)$, καταλήγουμε στη σχέση,

$$\max\Big\{-A^2 C_{rr}(r;A) - (r + AC_r(r;A))^2 + AS(A); |C_r(r;A)| - 1\Big\} = 0, \quad (3.16)$$

Χωρίς επιπλέον περιορισμούς η παρπάνω εξίσωση έχει περισσότερες από μία λύσεις. Για παράδειγμα $S(A) = 0$ με $C(r;A) = r$ ή $C(r;A) = -r$, είναι δύο διαφορετικές λύσεις. Για να έχει η παραπάνω εξίσωση μοναδική λύση βάσει των σχέσεων (2.56) – (2.84), επειδή το z^{ε} συμπεριφέρεται όπως το $\mu p|y|$ για αρκετά μεγάλες τιμές του $|y|$, για να ταιριάξουμε αυτή τη συμπεριφορά, το $C(r;A)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση,

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{C(r;A)}{|r|} = 1. \quad (3.17)$$

Επιπλέον οι συνθήκες $C_r(0;A) = C(0;A) = 0$, είναι απαραίτητες για τη μοναδικότητα της λύσης. Στο παράρτημα Β, θα κατασκευάσουμε μία μοναδική λύση $(S(A), C(r;A))$, όπου θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $S(A)$ ικανοποιεί τη σχέση (3.5) και η C τη (3.17) με τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες.

3.3 Απόδειξη του κυρίου θεωρήματος

Στο σημείο αυτό δίνουμε την απόδειξη του κυρίου Θεωρήματος 3.1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, για το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r.

Περίπτωση $r \neq 0$ **:** Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $r \neq 0$, θεωρώντας ότι ισχύει για μηδενικό επιτόκιο. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι εξισώσεις $(2.1-2.6)$, με τη διαφορά ότι η εξίσωση (2.5), που περιγράφει την κίνηση του $X(s)$ έχει τη μορφή:

$$dX(s) = rX(s)ds - P(s)(1+\mu)dL(s) + P(s)(1-\mu)dM(s), \quad s \in [t,T]. \tag{3.18}$$

Θέτοντας στη συνέχεια,

$$\widetilde{X}(s) := e^{r(T-t)}X(s), \quad \widetilde{Y}(s) := Y(s), \quad \widetilde{P}(s) := P(s), \tag{3.19}$$

έχουμε ότι η τριάδα $(\widetilde{X}(s), \widetilde{Y}(s), \widetilde{P}(s))$, επαληθεύει τις $(2.1-2.6)$, με $\tilde{a} = a - r$ και αρχικά δεδομένα,

$$(\widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t), \widetilde{P}(t)) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) := (e^{r(T-t)}x, y, e^{r(T-t)}p). \tag{3.20}$$

Η ανάλυση που είχαμε κάνει στη μη μηδενική περίπτωση μας οδηγεί στο να θέσουμε,

$$\widetilde{u}^{\varepsilon,f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, t) := 1 - \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[\widetilde{X}(T) + \widetilde{Y}(T)\widetilde{P}(T)]\right),$$

$$\widetilde{u}^{\varepsilon}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, t) := 1 - \inf_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}[\widetilde{X}(T) + \widetilde{Y}(T)\widetilde{P}(T) - N(\widetilde{P}(T) - q)^+]\right)$$

και αφού $(\widetilde{X}(T), \widetilde{Y}(T), \widetilde{P}(T)) = (X(T), Y(T), P(T))$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}(x,y,p,t) &= \widetilde{u}^{\varepsilon}(e^{r(T-t)}x, y, e^{r(T-t)}p, t), \\ u^{\varepsilon,f}(x,y,p,t) &= \widetilde{u}^{\varepsilon,f}(e^{r(T-t)}x, y, e^{r(T-t)}p, t). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια όπως και στη μηδενική περίπτωση ορίζουμε ανάλογα τα $\widetilde{z}^{\varepsilon}, \widetilde{z}^{\varepsilon,f}$ που δίνονται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^{\varepsilon,f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, t) &:= 1 - \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}[\tilde{x} + \tilde{y}\tilde{p} - \widetilde{z}^{\varepsilon,f}(\widetilde{y}, \widetilde{p}, t)]\Big), \\ \widetilde{u}^{\varepsilon}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, t) &:= 1 - \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}[\tilde{x} + \tilde{y}\tilde{p} - \widetilde{z}^{\varepsilon}(\widetilde{y}, \widetilde{p}, t)]\Big), \end{aligned}$$

οπότε βάσει του Θεωρήματος 3.1, έχουμε ότι το $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}, t : \alpha)$, που ορίζεται από τη σχέση,

$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}, t : \alpha) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\Big(\widetilde{z}^{\varepsilon}(\widetilde{y}, \widetilde{p}, t) - \widetilde{z}^{\varepsilon,f}(\widetilde{y}, \widetilde{p}, t)\Big), \tag{3.21}$$

λύνει τη μη γραμμική εξίσωση (3.2), με $r = 0$.

Είχαμε αναφέρει νωρίτερα ότι η τιμή του δικαιώματος $\Lambda^\varepsilon(y,p,t)$ ορίζεται να είναι η μοναδική λύση της αλγεβρικής εξίσωσης,

$$u^\varepsilon(x + \Lambda^\varepsilon, y, p, t) = u^{\varepsilon,f}(x, y, p, t). \tag{3.22}$$

Οπότε βάσει των παραπάνω σχέσεων που έχουμε για τις $\widetilde{u}^{\varepsilon,f}, \widetilde{u}^\varepsilon$, προκύπτει ότι,

$$\Lambda^\varepsilon(y,p,t) = e^{-r(T-t)}[\widetilde{z}^\varepsilon(y, e^{r(T-t)}p, t) - \widetilde{z}^{\varepsilon,f}(y, e^{r(T-t)}p, t)] \tag{3.23}$$

και επομένως ισχύει ότι,

$$\begin{aligned}
\Psi(p, t : \alpha) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Lambda^\varepsilon(y,p,t) \\
&= e^{-r(T-t)} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\widetilde{z}^\varepsilon(y, e^{r(T-t)}p, t) - \widetilde{z}^{\varepsilon,f}(y, e^{r(T-t)}p, t)] \\
&= e^{-r(T-t)} \widetilde{\Psi}(e^{r(T-t)}p, t : \alpha).
\end{aligned}$$

Οπότε αφού η $\widetilde{\Psi}$ ικανοποιεί τη βασική μας εξίσωση με $r = 0$, η Ψ πρέπει να ικανοποιεί την έξίσωση μας με μη μηδενικό r, κάτι που μπορούμε να επαληθεύσουμε και με πράξεις, αντικαθιστώντας αρχικά στην εξίσωση (3.2), τη $\Psi(p, t : \alpha)$ και εκμεταλευόμαστε στη συνέχεια το γεγονός ότι η $\widetilde{\Psi}$, ικανοποιεί αυτή με μηδενικό επιτόκιο.

Περίπτωση $\mathbf{r = 0}$: Στην απόδειξη που θα ακολουθήσει το βασικό μας εργαλείο θα είναι η θεωρία των λύσεων ιξώδους που δόθηκε από τους Crandall - Lions [CL]. Ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε τα ασθενή όρια για τη λύση ιξώδους των Barles-Perthame [BP1] και τη μέθοδο της διαταραχής της συνάρτησης ελέγχου του Evans [E]. Ακολουθώντας τη δημοσίευση των Barles-Perthame [BP2] για $(y,p,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0,\infty) \times [0,T]$, ορίζουμε

$$z^*(y,p,t) := \limsup_{\rho \downarrow 0} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} Z^+(y,p,t;\varepsilon,\rho), \tag{3.24}$$

όπου

$$Z^+(y,p,t;\varepsilon,\rho) := \sup\{z^\varepsilon(\widehat{y},\widehat{p},\widehat{t}) : |y - \widehat{y}| + |p - \widehat{p}| + |t - \widehat{t}| \le \rho\} \tag{3.25}$$

και

$$z_*(y,p,t) := \liminf_{\rho \downarrow 0} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} Z^-(y,p,t;\varepsilon,\rho), \tag{3.26}$$

όπου

$$Z^-(y,p,t;\varepsilon,\rho) := \inf\{z^\varepsilon(\widehat{y},\widehat{p},\widehat{t}) : \widehat{y} \epsilon \mathbb{R}^1, |p - \widehat{p}| + |t - \widehat{t}| \le \rho\}. \tag{3.27}$$

Βάσει της Πρότασης 2.1, οι συναρτήσεις z^* και z_* είναι καλώς ορισμένες και από τον ορισμό της η z_* είναι ανεξάρτητη του y. Επιπλέον αφού $|z^\varepsilon_y| \leq \mu p$, έχουμε

$$z^\varepsilon(y_1, p_1, t_1) - z^\varepsilon(y_2, p_1, t_1) \leq \mu p_1 |y_1 - y_2|, \qquad (3.28)$$

για όλα τα $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^1, p_1 \in (0, \infty), t_1 \in [0, T]$. Επομένως και η συνάρτηση z^* είναι ανεξάρτητη του y. Από τη σχέση (2.56) και τον ορισμό των z^*, z_* προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} z^*(0,t) &= z_*(0,t) = 0, \qquad\qquad \forall t \in [0,T], \\ \varphi(p,t) &\leq z_*(p,t) \leq z^*(p,t) \leq p, \end{aligned}$$

για όλα τα $p \in [0, \infty)$ και $t \in [0, T]$. Επομένως αφού η σχέση

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\Psi(p,s)}{p} = 1,$$

ικανοποιείται από την Black-Scholes τιμή, θα ικανοποιείται και από τις z^* και z_*.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη θα είναι η συνηθισμένη για τις λύσεις ιξώδους και είναι η εξής: Δείχνουμε αρχικά ότι οι z_*, z^*, είναι αντίστοιχα υπερλύση και υπολύση των εξισώσεων $(3.2) - (3.3)$. Στη συνέχεια βάσει ενός θεωρήματος σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι είναι ίσες με τη μοναδική συνεχή λύση Ψ που ικανοποιεί τις $(3.2 - 3.4)$. Στη θεωρία των λύσεων ιξώδους, συνήθως οι αποδείξεις για την υπερλύση και υπολύση είναι όμοιες κάτι που δε συμβαίνει στην περίπτωση μας, εξαιτείας τόσο του ορισμού των z^*, z_* όσο και της μη συμμετρίας του z^ε. Αρχικά δείχνουμε ότι:

Λήμμα 3.1 *Η z^* είναι υπολύση ιξώδους των* $(3.2) - (3.3)$.

Απόδειξη : Έστω $w(p,t)$ μία λεία συνάρτηση ελέγχου και $(p_0, t_0) \in (0, \infty) \times [0, T]$ είναι ένα αυστηρά τοπικό μέγιστο της διαφοράς $z^* - w$ στο $(0, \infty) \times [0, T]$. Προσθέτοντας ένα μικρό τετραγωνικό όρο, αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$w_{pp}(p_0, t_0) \neq 0. \qquad (3.29)$$

Για να δείξουμε ότι η z^* είναι υπολύση ιξώδους πρέπει να δείξουμε ότι : Αν $t_0 < T$, τότε

$$-w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 w_{pp}[1 + S(\alpha^2 p^2 w_{pp})] \leq 0, \qquad (3.30)$$

στο σημείο (p_0, t_0). Επίσης αν $t_0 = T$ είτε ότι ισχύει η παραπάνω εξίσωση στο (p_0, t_0) είτε ότι $z^*(p_0, t_0) \leq (p_0 - q)^+$. Προχωράμε δίνοντας την απόδειξη του παραπάνω σε πέντε βήματα.

1. Υποθέτουμε ότι $t_0 = T$. Αν $z^*(p_0, t_0) \leq (p_0 - q)^+$, τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Οπότε υποθέτουμε ότι $t_0 < T$ ή $t_0 = T$ και $z^*(p_0, T) > (p_0 - q)^+$.
2. Έχουμε ότι $\mu = \alpha\sqrt{\varepsilon}$. Για ε θετικό και $0 < \delta \ll 1$ θέτουμε

$$A := A^\delta(p,t) = \alpha^2 p^2 (1+\delta)^2 w_{pp}(p,t), \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon,\delta}(y,p,t) &:= (1+\delta)\alpha p \frac{w_p(p,t) - y}{\sqrt{\varepsilon}}, & (3.32) \\ w^{\varepsilon,\delta}(y,p,t) &:= w(p,t) + \varepsilon C\big(r^{\varepsilon,\delta}(y,p,t); A^\delta(p_0,t_0)\big), & (3.33) \end{aligned}$$

όπου $C(\cdot; A)$ λύνει την εξίσωση

$$\max\Big\{-A^2 C_{rr} - (r + AC_r)^2 + AS(A); |C_r| - 1\Big\} = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Αυτή τη λύση την κατασκευάζουμε στο Παράρτημα B. Στη συνέχεια θέτουμε $A_0 = A^\delta(p_0, t_0)$. Αφού $p_0 > 0$ και $w_{pp}(p_0, t_0) \neq 0$, έχουμε ότι $A_0 \neq 0$.
3. Σταθεροποιούμε το δ και έχουμε ότι: $(w_p(p_0, t_0), p_0, t_0)$ είναι ένας τοπικός μεγιστοποιητής της συνάρτησης,

$$(y,p,t) \mapsto z^*(p,t) - w(p,t) - |y - w_p(p_0,t_0)|^4 \tag{3.35}$$

και

$$z^*(y,p,t) := \limsup_{\rho \downarrow 0} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} Z^+(y,p,t;\varepsilon,\rho), \tag{3.36}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}, p \in [0,\infty), t \in [0,T]$. Επιπλέον η συνάρτηση $w^{\varepsilon,\delta}$ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο w στο $\mathbb{R} \times [0,\infty) \times [0,T]$. Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο των Barles-Perthame (βλέπε Παράρτημα [BP2]), υπάρχει μία ακολουθία $\varepsilon_n \downarrow 0$ και τοπικοί μεγιστοποιητές $(y_n, p_n, t_n) \in \mathbb{R}^1 \times (0,\infty) \times [0,T)$ της συνάρτησης,

$$(y,p,t) \mapsto z^{\varepsilon_n}(y,p,t) - w^{\varepsilon_n,\delta}(y,p,t) - |y - w_p(p,t)|^4, \tag{3.37}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις,

$$(p_n, t_n) \mapsto (p_0, t_0), \quad z^{\varepsilon_n}(y_n, p_n, t_n) \mapsto z^*(p_0, t_0), \quad y_n \mapsto w_p(p_0, t_0). \tag{3.38}$$

Υποστηρίζουμε ότι $t_n < T$ για αρκετά μεγάλα n. Πράγματι αν $t_0 < T$ τότε ο ισχυρισμός έπεται από την σύγκλιση του t_n στο t_0. Υποθέτουμε ότι $t_0 = T$ και $z^*(p_0, T) > (p_0 - q)^+$. Έστω ότι $t_n = T$. Τότε

$$(p_0 - q)^+ < z^*(p_0, T) = \lim z^{\varepsilon_n}(y_n, p_n, T) = \lim (p_n - q)^+ = (p_0 - q)^*. \tag{3.39}$$

Επομένως $t_n < T$ για αρκετά μεγάλα n.
4. Από το γεγονός ότι (y_n, p_n, t_n) είναι τοπικοί μεγιστοποιητές της συνάρτησης που ορίζεται από τη σχέση (3.35) και επειδή η συνάρτηση z^{ε_n} είναι λύση

ιξώδους, της εξίσωσης προγραμματισμού που δίνεται από τη σχέση (2.54) αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $z^{\varepsilon_n,\delta} := w^{\varepsilon_n,\delta}(y,p,t) + |y - w_p(p,t)|^4$, στο σημείο αυτό έχουμε ότι ισχύει:

$$
\begin{aligned}
z_p^{\varepsilon_n,\delta} &= w_p + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha(1+\delta)p_n} AC_r(\cdots) + E_1, && (3.40)\\
z_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} &= w_{pp} + \Big(\frac{A}{\alpha(1+\delta)p_n}\Big)^2 C_{rr}(\cdots) + E_2, && (3.41)\\
z_t^{\varepsilon_n,\delta} &= w_t + E_3, && (3.42)
\end{aligned}
$$

όπου $(\cdots) = (r^{\varepsilon_n,\delta}(y_n,p_n,t_n);A_0)$ και

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \varepsilon_n \frac{r^{\varepsilon_n,\delta}}{p_n} C_r(\cdots) + 4(w_p - y_n)^3 w_{pp},\\
E_2 &:= C_{rr}(\cdots)\Big[\varepsilon_n \frac{(r^{\varepsilon_n,\delta})^2}{p_n^2} + 2\sqrt{\varepsilon_n}\alpha(1+\delta) r^{\varepsilon_n,\delta} w_{pp}\Big]\\
&+ 4(w_p - y_n)^3 w_{ppp} + 12(w_p - y_n)^2 (w_{pp})^2,\\
&+ \alpha(1+\delta)\sqrt{\varepsilon_n} C_r(\cdots)[2w_{pp} + p_n w_{ppp}],\\
E_3 &:= \alpha(1+\delta)p_n\sqrt{\varepsilon_n} w_{pt} C_r(\cdots) + 4(w_p - y_n)^3 w_{pt}.
\end{aligned}
$$

Επειδή ισχύει η (2.54) στο σημείο (y_n,p_n,t_n) για τη $z^{\varepsilon_n,\delta}$, ισχύει

$$
\begin{aligned}
0 \geq &- z_t^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 z_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2\varepsilon_n}\sigma^2 p_n^2 (z_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n)^2 - ap_n(z_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n)\\
= &- z_t^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 z_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2\varepsilon_n}\sigma^2 \Big[p_n(z_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n) + \frac{a\varepsilon_n}{\sigma^2}\Big]^2 + \frac{a^2\varepsilon_n}{2\sigma^2}\\
= &- w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 \Big[w_{pp} + \frac{A^2}{\alpha^2(1+\delta)^2 p_n^2} C_{rr}(\cdots)\Big] + F_1\\
&- \frac{\sigma^2 p_n^2}{2\varepsilon_n}\Big[w_p - y_n + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\alpha(1+\delta)p_n}(AC_r(\cdots) + F_2)\Big]^2,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= -\frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 E_2 - E_3 + \frac{a^2\varepsilon_n}{2\sigma^2},\\
F_2 &:= \frac{\alpha(1+\delta)}{\sqrt{\varepsilon_n}}(p_n E_1 + \frac{a\varepsilon_n}{\sigma^2})\\
&= \alpha(1+\delta)\sqrt{\varepsilon_n}\Big(r^{\varepsilon_n,\delta} C_r(\cdots) + \frac{a}{\sigma^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια γράφουμε την παραπάνω ανισότητα στη μορφή

$$\begin{aligned} 0 \geq \ & - \ w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp} \\ & - \ \frac{\sigma^2}{2(1+\delta)^2\alpha^2}\Big[A^2 C_{rr}(\cdots) + (r^{\varepsilon_n,\delta} + AC_r(\cdots) + F_2)^2\Big] + F_1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

5. Έστω $o(1)$ κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Από τη σχέση (3.36), προκύπτει ότι $r^{\varepsilon_n,\delta} = \frac{o(1)}{\sqrt{\varepsilon_n}}$ και επομένως ισχύει

$$E_1 = \sqrt{\varepsilon_n}o(1), \quad E_2 = o(1), \quad E_3 = o(1), \tag{3.44}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} |F_1| + |F_2| = 0. \tag{3.45}$$

Επίσης βάσει της σχέσης (3.36), για το $A = A^\delta(p_n, t_n)$, έχουμε ότι:

$$A - A_0 = o(1). \tag{3.46}$$

Επιπλέον από την Πρόταση 2.1 ισχύει

$$\mu p_n = \alpha\sqrt{\varepsilon_n}p_n \geq |z_y^{\varepsilon_n,\delta}| = |\alpha\sqrt{\varepsilon_n}p_n(1+\delta)C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0) + 4(w_p - y_n)^3|. \tag{3.47}$$

Στο Παράρτημα Β, δείχνουμε ότι $rC_r(r; A) \geq 0$ για όλα τα $r \in \mathbb{R}^1$ και $A \neq 0$. Επομένως βάσει του ορισμού του $r^{\varepsilon_n,\delta}$, $C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0)$ και $4(w_p - y_n)^3$, έχουν το ίδιο πρόσημο. Λόγω της ανισότητας (3.47) παίρνουμε ότι:

$$|C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0)| < 1. \tag{3.48}$$

Επομένως από τη σχέση (6.15) στο Παράρτημα Β, προκύπτει ότι

$$|r^{\varepsilon_n,\delta}| \leq g(A_0). \tag{3.49}$$

Αυτή η σχέση μας λέει ότι, το $r^{\varepsilon_n,\delta}$ παραμένει φραγμένο, ανεξάρτητα του n και του δ.
6. Αφού $|C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0)| < 1$, από τη σχέση (6.1), προκύπει ότι:

$$A_0^2 C_{rr}(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0) + \big(r^{\varepsilon_n,\delta} + A_0 C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0)\big)^2 = A_0 S(A_0). \tag{3.50}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $r^{\varepsilon_n,\delta}$ είναι φραγμένο ανεξάρτητα του n και του δ, την προηγούμενη σχέση και τις $(3.46 - 3.49)$, έχουμε

$$\begin{aligned} A^2 C_{rr}(\cdots) + \big(r^{\varepsilon_n,\delta} + AC_r(\cdots) + F_2\big)^2 &= A^2 C_{rr}(\cdots) - A_0^2 C_{rr}(\cdots) \\ +A_0^2 C_{rr}(\cdots) &+ \big(r^{\varepsilon_n,\delta} + (A - A_0)C_r(\cdots) + A_0 C_r(\cdots) + F_2\big)^2 \\ \leq A_0^2 C_{rr}(\cdots) + \big(r^{\varepsilon_n,\delta} &+ A_0 C_r(r^{\varepsilon_n,\delta}; A_0)\big)^2 + o(1) = A_0 S(A_0) + o(1). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Από την παραπάνω σχέση, τη (3.43) και επειδη $A_0 = \alpha^2 p_0^2 (1+\delta)^2 w_{pp}(p_0,t_0)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} - & \quad w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp} - \frac{\sigma^2}{2} p_0^2 w_{pp}(p_0,t_0) S\big(\alpha^2(1+\delta) p_0^2 w_{pp}(p_0,t_0)\big) \\ \leq & \quad -F_1 \quad + \frac{\sigma^2}{2(1+\delta)^2\alpha^2} o(1). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται αφήνοντας πρώτα το$n \to \infty$ και μετά το $\delta \downarrow 0$, οπότε έχουμε το δεύτερο μέρος της παραπάνω ανισότητας μικρότερο ή ίσο του 0. □

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι το z^* είναι υπερλύση ιξώδους. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, μέρη της απόδειξης είναι διαφορετικά από αυτή του προηγούμενου λήμματος.

Λήμμα 3.2 *Η z_* ϵίναι υπϵρλύση ιξώδους των* $(3.2) - (3.3)$.

Απόδειξη : Αφού η z^ε, βάσει της Πρότασης 2.1, είναι μεγαλύτερη από τη Black-Scoles τιμή φ μείον $\frac{\varepsilon a^2(T-t)}{2\sigma^2}$ ισχύει

$$z_*(p,T) \geq \varphi(p,T) = (p-q)^+. \tag{3.53}$$

Επομένως η z_* είναι υπερλύση της (3.3).

Επίσης έστω $w(p,t)$ είναι μία ομαλή συνάρτηση ελέγχου και $(p_0,t_0) \in (0,\infty) \times [0,T)$, ένα σημείο που ελαχιστοποιεί αυστηρά τη συνάρτηση $z_* - w(p,t)$, στο $(0,\infty)\times[0,T)$. Τότε χρείαζεται να δείξουμε ότι

$$-w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 w_{pp}[1 + S(\alpha^2 p^2 w_{pp})] \geq 0, \tag{3.54}$$

στο σημείο (p_0,t_0). Δίνουμε την απόδειξη σε τέσσερα βήματα.
1. Για ε θετικό και $0 \ll \delta < 1$ θέτουμε :

$$A := A^\delta(p,t) = \alpha^2 p^2 (1-\delta)^2 w_{pp}(p,t), \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon,\delta}(y,p,t) &:= (1-\delta)\alpha p \frac{w_p(p,t) - y}{\sqrt{\varepsilon}}, & (3.56) \\ A_0 &:= A^\delta(p_0,t_0). & (3.57) \end{aligned}$$

Όπως στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w_{pp}(p_0,t_0) \neq 0$ και επομένως $A_0 \neq 0$.

Βασική διαφορά με την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος είναι ότι θεωρήσαμε τη διαταραχή $|y - w(p,t)|^4$, για να κατασκευάσουμε μία ακολουθία από μεγιστοποιητές. Για τεχνικούς λόγους που θα γίνουν φανεροί παρακάτω στο βήμα 3, δεν μπορούμε να κάνουμε και τώρα το ίδιο. Ξεπερνάμε αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιώντας το λήμμα που ακολουθεί τη Πρόταση2.1. Έστω C όπως στο Παράρτημα B και $\chi : \mathbb{R}^1 \to: \mathbb{R}^1$, μία ομαλή κοίλη συνάρτηση αποκοπής που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\chi(t) = t, \qquad t \leq R, \qquad \frac{d}{dt}\chi(t) = 0, \qquad t \geq 2R, \tag{3.58}$$

όπου $R > C(g(A_0); A_0)$ επιλέγεται έτσι ώστε η $\widetilde{C} := \chi(C)$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$-A_0^2\widetilde{C}_{rr} - (r + A_0\widetilde{C}_r(r; A_0))^2 \leq -A_0 S(A_0), \tag{3.59}$$

για όλα τα r. Η συνάρτηση χ αποκόπτει τη C μόνο στο χωρίο όπου $|C_r| = 1$, ενώ διατηρεί τις βασικές ιδιότητες της C. Η ύπαρξη της συνάρτησης χ και του R, έπεται από τη κατασκευή του C που δίνεται στο Παράρτημα B. Ορίζουμε

$$w^{\varepsilon,\delta}(y, p, t) := w(p, t) + \varepsilon\widetilde{C}(r^{\varepsilon,\delta}(y, p, t); A_0). \tag{3.60}$$

2. Θέτουμε $2\eta = \min(T - t_0, p_0)$ έτσι ώστε $0 < \eta \leq T$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $z^\varepsilon - w^{\varepsilon,\delta}$, που ορίζεται στο

$$Q_\eta := \mathbb{R}^1 \times [p_0 - \eta, p_0 + \eta] \times [t_0 - \eta, t_0 + \eta]. \tag{3.61}$$

Η συνάρτηση $\widetilde{C}$ είναι φραγμένη. Κάνοντας χρήση του λήμματος που ακολουθεί τη Πρόταση 2.1, που μας δίνει ένα κάτω φράγμα για το z^ε, έχουμε ότι υπάρχει ένα σημείο που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $z^\varepsilon - w^{\varepsilon,\delta}$, στο Q_η. Τότε υπάρχει ακολουθία $\varepsilon_n \downarrow 0$ και τοπικοί ελαχιστοποιητές $(y_n, t_n, p_n) \in Q_\eta$, της συνάρτησης $z^{\varepsilon_n} - w^{\varepsilon_n,\delta}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις :

$$(p_n, t_n) \to (p_0, t_0), \qquad z^{\varepsilon_n}(y_n, p_n, t_n) \to z_*(p_0, t_0). \tag{3.62}$$

(Βλέπε Παράρτημα Barles-Perthame [BP2])
3. Στο σημείο (y_n, p_n, t_n), αν παραγωγίσουμε ως προς y και θεωρήσουμε απόλυτη τιμή έχουμε ότι:

$$|w_y^{\varepsilon_n,\delta}| = \alpha\sqrt{\varepsilon_n}p_n(1 - \delta)|\widetilde{C}_r(r^{\varepsilon,\delta}; A_0)|. \tag{3.63}$$

Αφού $|\widetilde{C}_r(r; A_0)| \leq 1$, για όλα τα $r \in \mathbb{R}^1$, προκύπτει ότι :

$$|w_y^{\varepsilon_n,\delta}| \leq \alpha\sqrt{\varepsilon_n}p_n(1 - \delta) < \alpha\sqrt{\varepsilon_n}p_n = \mu p_n. \tag{3.64}$$

Από την Πρόταση 2.1, επειδή η z^ε είναι λύση ιξώδους, προκύπτει ότι η $w^{\varepsilon_n,\delta}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$0 \leq -w_t^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2\varepsilon_n}\sigma^2 p_n^2(w_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n)^2 - ap_n(w_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n), \tag{3.65}$$

στο σημείο (y_n, p_n, t_n).
4. Προχωράμε όπως στην απόδειξη του βήματος4 του προηγούμενου λήμματος. Ανάλογα έχουμε :

$$
\begin{aligned}
w_p^{\varepsilon_n,\delta} &= w_p + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha(1-\delta)p_n} A\widetilde{C}_r(\cdots) + E_1, && (3.66)\\
w_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} &= w_{pp} + \Big(\frac{A}{\alpha(1-\delta)p_n}\Big)^2 \widetilde{C}_{rr}(\cdots) + E_2, && (3.67)\\
w_t^{\varepsilon_n,\delta} &= w_t + E_3, && (3.68)
\end{aligned}
$$

όπου $(\cdots) = (r^{\varepsilon_n,\delta}(y_n, p_n, t_n); A_0)$ και

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \varepsilon_n \frac{r^{\varepsilon_n,\delta}}{p_n} \widetilde{C}_r(\cdots),\\
E_2 &:= \widetilde{C}_{rr}(\cdots)\Big[\varepsilon_n \frac{(r^{\varepsilon_n,\delta})^2}{p_n^2} + 2\sqrt{\varepsilon_n}\alpha(1-\delta) r^{\varepsilon_n,\delta} w_{pp}\Big]\\
&+ \alpha(1-\delta)\sqrt{\varepsilon_n}\widetilde{C}_r(\cdots)[2w_{pp} + p_n w_{ppp}],\\
E_3 &:= \alpha(1-\delta)p_n\sqrt{\varepsilon_n} w_{pt}\widetilde{C}_r(\cdots).
\end{aligned}
$$

Συνεχίζοντας έχουμε

$$
\begin{aligned}
0 \leq &- w_t^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2\varepsilon_n}\sigma^2 p_n^2 (w_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n)^2 - a p_n (w_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n)\\
= &- w_t^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp}^{\varepsilon_n,\delta} - \frac{1}{2\varepsilon_n}\sigma^2 \Big[p_n(w_p^{\varepsilon_n,\delta} - y_n) + \frac{a\varepsilon_n}{\sigma^2}\Big]^2 + \frac{a^2\varepsilon_n}{2\sigma^2}\\
= &- w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 \Big[w_{pp} + \frac{A^2}{\alpha^2(1-\delta)^2 p_n^2}\widetilde{C}_{rr}(\cdots)\Big] + F_1\\
&- \frac{\sigma^2 p_n^2}{2\varepsilon_n}\Big[w_p - y_n + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\alpha(1-\delta)p_n}(A\widetilde{C}_r(\cdots) + F_2)\Big]^2,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= -\frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 E_2 - E_3 + \frac{a^2\varepsilon_n}{2\sigma^2},\\
F_2 &:= \frac{\alpha(1-\delta)}{\sqrt{\varepsilon_n}}(p_n E_1 + \frac{a\varepsilon_n}{\sigma^2})\\
&= \alpha(1-\delta)\sqrt{\varepsilon_n}\Big(r^{\varepsilon_n,\delta}\widetilde{C}_r(\cdots) + \frac{a}{\sigma^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια γράφουμε την παραπάνω ανισότητα στη μορφή

$$
\begin{aligned}
0 \leq &- w_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_n^2 w_{pp} && (3.69)\\
&- \frac{\sigma^2}{2(1-\delta)^2\alpha^2}\Big[A^2\widetilde{C}_{rr}(\cdots) + (r^{\varepsilon_n,\delta} + A\widetilde{C}_r(\cdots) + F_2)^2\Big] + F_1.
\end{aligned}
$$

Αφού η $\chi(t)$ είναι σταθερή για $t > 0$ αρκετά μεγάλα, υπάρχει $\widetilde{R} > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|r| > \widetilde{R}$, τότε

$$\widetilde{C}_r(r; A_0) = \widetilde{C}_{rr}(r; A_0) = 0. \tag{3.70}$$

Αυξάνοντας το $\widetilde{R}$, αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\widetilde{R}^2 \geq A_0 S(A_0). \tag{3.71}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις $|r^{\varepsilon_n,\delta}| \leq \widetilde{R} + 1$ και $|r^{\varepsilon_n,\delta}| > \widetilde{R} + 1$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε το ζητούμενο, μέσω των σχέσεων (3.59), (3.69). Συγκεκριμένα εκτιμούμε τους όρους και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της $\widetilde{C}$ προχορώντας όπως στο προηγούμενο λήμμα. Στη δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι $|r^{\varepsilon_n,\delta}| > \widetilde{R} + 1$. Από τον ορισμό του $\widetilde{R}$ και επειδή $\widetilde{C}_r = \widetilde{C}_{rr} = 0$, οι όροι F_1, F_2 συγκλίνουν στο 0. Επομένως οι όροι στη δεύτερη σειρά της σχέσης (3.69), είναι ίσοι με

$$-\frac{\sigma^2}{2(1-\delta)^2\alpha^2}\left(r^{\varepsilon_n,\delta} + o(1)\right)^2 + o(1). \tag{3.72}$$

Αφού $|r^{\varepsilon_n,\delta}| > \widetilde{R}+1$, έπεται ότι $|r^{\varepsilon_n,\delta} + o(1)| \geq \widetilde{R}$, για όλα τα επαρκώς μεγάλα n και από τη σχέση (3.71) έχουμε:

$$(r^{\varepsilon_n,\delta} + o(1))^2 \geq \widetilde{R}^2 \geq A_0 S(A_0). \tag{3.73}$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη αφήνοντας πρώτα το n να πάει στο άπειρο και μετά το δ στο μηδέν. $\square$

Επιστρέφουμε στην περίπτωση της απόδειξης του μηδενικού επιτοκίου. Στα δύο προηγούμενα λήμματα, έχουμε δείξει ότι οι z_*, z^* είναι υπερλύση και υπολύση αντίστοιχα, των (3.2) – (3.3). Ξέρουμε επίσης ότι $z_* \leq z^*$. Για να τελειώσουμε αρκεί να δείξουμε ότι και $z_* \geq z^*$, στο $[0,\infty) \times [0,T]$. Για να πετύχουμε αυτό χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα σύγκρισης.

Γράφουμε τη μη γραμμική εξίσωση (3.2) στην παρακάτω μορφή:

$$\Psi_t + F(p^2\Psi_{pp}) = 0, \tag{3.74}$$

στο $(0,\infty) \times (0,T)$, όπου

$$F(M) = \frac{1}{2}\sigma^2 M[1 + S(\alpha^2 M)], \tag{3.75}$$

για $M \in \mathbb{R}^1$. Επειδή η S ικανοποιεί την εξίσωση (3.5), έχουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{S(A)}{A} = 1.$$

Οπότε η S αυξάνει γραμμικά καθώς πηγαίνουμε προς το άπειρο. Βάσει αυτού και του ορισμού της, η F θα αυξάνει τατραγωνικά προς το άπειρο. Ειδικότερα η F δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^1$. Επομένως δε μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθεία ένα από τα συνηθισμένα θεωρήματα σύγκρισης από τη θεωρία των λύσεων ιξώδους, ακόμα και αν εξίσωση ορίζεται σε ένα φραγμένο χωρίο. Επιπλέον η εξίσωση (3.2), ορίζεται σε ένα μη φραγμένο χωρίο, με μη φραγμένη λύση και αυτή είναι μία δεύτερη δυσκολία που πρέπει να ξεπεράσουμε.

Αρχικά αντιμετωπίζουμε το δεύτερο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (3.4). Για $\eta > 0$ θέτουμε

$$z_\eta(p,t) = z^*(p,t) - \eta(p+1), \tag{3.76}$$

στο $[0,\infty) \times [0,T]$. Τότε η z_η, είναι επίσης υπολύση των (3.2) – (3.3). Επίσης επειδή ισχύει η (3.4), έχουμε

$$\lim_{p\to\infty} (z_\eta(p,t) - z_*(p,t)) = -\infty, \tag{3.77}$$

ομοιόμορφα για $t \in [0,T]$. Επιπλέον από τη $z^*(0,t) = z_*(0,t)$, προκύπτει ότι $z_\eta(0,t) = z_*(0,t) - \eta$, για όλα τα $t \in [0,T]$. Τώρα υποθέτουμε ότι

$$\max\big\{z^*(p,t) - z_*(p,t) : (p,t) \in [0,\infty) \times [0,T]\big\} \geq 0. \tag{3.78}$$

Τότε υπάρχει ένα σημείο $(p_0, t_0) \in (0,\infty) \times [0,T]$, που να μεγιστοποιεί τη διαφορά $z_\eta - z_* = z^* - z_* - \eta(p+1)$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι $p_0 > 0$.

Για να ξεπεράσουμε τη δυσκολία που προκύπτει από τη μη γραμμικότητα της F, κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής. Συγκεκριμένα θέτουμε $p = e^x$. Για $x \in \mathbb{R}^1$ και $t \in [0,T]$, έστω

$$u_\eta(x,t) := z_\eta(e^x,t), \qquad u_*(x,t) := z_*(e^x,t). \tag{3.79}$$

Οι u_η , u_* τότε ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned} u_x &= e^x z_x, \\ u_{xx} &= e^{2x} z_{xx} + e^x z_x. \end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι είναι αντίστοιχα υπολύση και υπερλύση της

$$-u_t - F(u_{xx} - u_x) = 0, \tag{3.80}$$

στο $\mathbb{R}^1 \times (0,T)$. Επιπλέον $x_0 := \ln p_0$ και t_0 μεγιστοποιεί τη διαφορά $u_\eta - u_*$. Τώρα επειδή η μη γραμμικότητα είναι ανεξάρτητη του x, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα συνηθισμένο θεώρημα σύγκρισης (βλέπε Crandall- Ishii - Lions

[CIL]-Θεώρημα 3.3- Σελίδα 18). Βάσει αυτού έχουμε ότι στο σημείο (p_0, t_0) ισχύει :

$$u_\eta(x_0, t_0) - u_*(x_0, t_0) \leq 0. \tag{3.81}$$

Επομένως $z_\eta \leq z_*$ στο παραπάνω σημείο, οπότε και σε κάθε άλλο αφού αυτό μεγιστοποιεί τη διαφορά. Αφήνοντας τώρα το η να πάει προς το μηδέν έχουμε ότι $z^* \leq z_*$ στο $[0, \infty) \times [0, T]$. Αφού από κατασκευή $z^* \geq z_*$, συμπεραίνουμε ότι $z^* = z_*$. Επειδή z^*, z_* είναι άνω ημισυνεχής υπολύση και κάτω ημισυνεχής υπερλύση αντίστοιχα, των $(3.2) - (3.3)$, η συνάρτηση Ψ που ορίζεται από τη σχέση $\Psi = z^* = z_*$, στο $[0, \infty) \times [0, T]$, είναι μία συνεχή λύση των $(3.2) - (3.3)$. Επιπλέον βάσει του ορισμού των z^*, z_* και της ισότητας $z^* = z_*$ έπεται η τοπικά ομοιόμορφη σύγκλιση του z^ε στο Ψ.$\square$

4 Συμπεράσματα

4.1 Βέλτιστη αντιστάθμιση

Η θεωρία του βέλτιστου στοχαστικού ελέγχου όπως περιγράφεται από τους (Fleming - Soner [F-S] - Κεφάλαιο 8), μας δίνει μία γενική στρατηγική για το πώς κατασκευάζουμε βέλτιστους στοχαστικούς ελέγχους. Ειδικότερα για το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε η διαδικασία $(X^*(\cdot), Y^*(\cdot), P(\cdot))$, που μας δηλώνει η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική, πρέπει να παραμείνει εντός ενός χωρίου που ονομάζεται *χωρίο παραμονής* και περιγράφεται από τη σχέση:

$$\mathbb{C}(t) := \big\{(x, y, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty) : |z_y^\varepsilon(y, p, t)| < \mu p\big\}. \tag{4.1}$$

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(y, p, t) &\approx \Psi(p, t : \alpha) + \varepsilon C\Big(\alpha p \frac{\Psi_p(p, t) - y}{\sqrt{\varepsilon}}; \alpha^2 p^2 \Psi_{pp}(p, t)\Big), & (4.2)\\ z_y^\varepsilon(y, p, t) &\approx -\mu p C_r(\cdots), & (4.3)\end{aligned}$$

από τη σχέση

$$|C_r(r; A)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |r| < g(A), \tag{4.4}$$

που περιγράφεται στο Παράρτημα Β, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(t) &\approx \big\{(x, y, p) : |C_r\Big(\alpha p \frac{\Psi_p(p, t) - y}{\sqrt{\varepsilon}}; \alpha^2 p^2 \Psi_{pp}(p, t : \alpha)\Big)| < 1\big\} & (4.5)\\ &= \big\{(x, y, p) : |\Psi_p(p, t : \alpha) - y| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha p} g(\alpha^2 p^2 \Psi_{pp}(p, t))\big\}. & (4.6)\end{aligned}$$

Επομένως η βέλτιστη τιμή y^*, είναι περίπου ίση με $\Psi_p(p, t : \alpha)$ και η βέλτιστη στρατηγική είναι να κρατήσουμε το $Y^*(s)$ στο διάστημα

$$\big[\Psi_p(P(s), s : \alpha) - \Gamma(P(s), s), \Psi_p(P(s), s : \alpha) + \Gamma(P(s), s)\big], \tag{4.7}$$

για όλα τα $s \in [t, T]$. Στην παραπάνω εξίσωση

$$\Gamma(p, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha p} g(\alpha^2 p^2 \Psi_{pp}(p, t)), \tag{4.8}$$

όπου g, όπως στη σχέση (4.4).

4.2 Διόρθωση υψηλότερης ακρίβειας

Βάσει της μη αυστηρής αιτιολόγησης της μη γραμμικής εξίσωσης τύπουBlack-Scholes, που δόθηκε στη Παράγραφο 3.2 και αιτιολογήθηκε μερικώς από τη χρήση της διαταραγμένης συνάρτησης ελέγχου που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του κυρίου θεωρήματος, περιμένουμε ότι προσεγγιστικά η συνάρτηση z^ε, έχει τη μορφή που περιγράφεται από τη σχέση (4.2). Επειδή $\mu = \alpha\sqrt{\varepsilon}$, και $C(r; A) \approx |r|$, για μεγάλες τιμές του $|r|$, η παραπάνω προσεγγιστική έκφραση απλοποιείται ως εξής:

$$z^\varepsilon(y,p,t) \approx \Psi(p,t:\alpha) + \mu p|\Psi_p(p,t:\alpha) - y|. \tag{4.9}$$

Αν και η τιμή του μ πρακτικά είναι πολύ μικρή, ο επιπλέον διορθωτικός όρος μπορεί να είναι αρκετά σημαντικός όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μία μετοχή με ημερομηνία λήξης ένα χρόνο από σήμερα και τιμή εξάσκησης έστω$q = 40$, νομισματικές μονάδες. Έστω επιπλέον ότι οι παράμετροι αγοράς είναι:

$$\sigma = 0.2, \qquad \mu = 0.01, \qquad r = 0.$$

Τότε για τα περισσότερα $t > 0$, η τιμή της συνάρτησης $\Psi_p(40,t)$, είναι μεγαλύτερη του μισού και για $p = 40, y = 0$, ο διορθωτικός όρος είναι τουλάχιστον 0.2, ενώ η Black-Scholes τιμή στο σημείο $t = 1$, είναι

$$\varphi(40,1) = 3.17.$$

Επιπλέον

$$\Psi(40,1:0.02) = 3.86, \qquad\qquad \Psi(40,1:0.03) = 4.13.$$

Το παραπάνω παράδειγμα παρουσιάζεται στην εργασία τωνBarles-Soner [BS2], όπου για τον υπολογισμό του Ψ έχει χρησιμοποιηθεί ένα απλό άμεσο σχήμα πεπερασμένων διαφορών.

Επειδή η βέλτιστη αντισταθμιστική τιμή y^*, είναι περίπου ίση με το Ψ_p, ο διορθωτικός όρος $\mu p|\Psi_p(p,t:\alpha) - y|$, είναι απλά ίσος με το αρχικό κόστος το οποίο απαιτείται για να μεταβάλλουμε τον αριθμό των μετοχών από την αρχική τιμή y, στη βέλτιστη τιμή $y^* = \Psi_p$.

4.3 Γενίκευση σε άλλα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Για την αποτίμηση ενός δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου σε μία μετοχή, λαμβάνοντας υπόψη μας το κόστος συναλλαγής κατά την αγορά και πώληση μετοχών, χρησιμοποιήσαμε μία τεχνική που βασίστηκε στη μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας και τη χρήση μίας ασυμπτωτικής ανάλυσης. Αυτή η μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοσθεί και σε άλλα δικαιώματα αγοράς ή πώλησης, όπου σε αναλογία με το δικαίωμα αγοράς ένα δικαίωμα πώλησης μας δίνει τη δυνατότητα να πουλήσουμε στο μέλλον μία μετοχή. Ειδικότερα ένα παράδειγμα είναι το δικαίωμα αγοράς όπου λαμβάνουμε υπόψη μας το κόστος που απαιτείται για να αγοράσουμε το υποκείμενο προϊόν που πρέπει να παραδώσουμε στην ημερομηνία λήξης. Στην περίπτωση αυτή το τελικό χαρτοφυλάκιο, $w(T)$, δίνεται από τη σχέση

$$w(T) = X(T) + Y(T)P(T) - \mu|Y(T)P(T)| - (P(T) - q)^+. \tag{4.10}$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $u^\varepsilon, z^\varepsilon$, ορίζονται όπως στο Κεφάλαιο 2 και ορίζουμε

$$\begin{aligned}\widehat{u}^\varepsilon(x,y,p,t) &:= \sup_{L(\cdot),M(\cdot)} \mathbb{E}U^\varepsilon(w(T)) \\ &:= 1 - \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}[x + yp - \widehat{z}^\varepsilon(x,y,p,t)]\Big).\end{aligned}$$

Έστω $\widehat{\Lambda}^\varepsilon$, η αντίστοιχη τιμή του δικαιώματος. Τότε

$$\widehat{\Lambda}^\varepsilon = \widehat{z}^\varepsilon - z^{\varepsilon,f} \geq z^\varepsilon - z^{\varepsilon,f} = \Lambda^\varepsilon. \tag{4.11}$$

Οπότε αν τροποποιήσουμε κατάλληλα την απόδειξη, αφήνοντας το ε να πάει στο 0, έχουμε ότι το $\widehat{\Lambda}^\varepsilon$ συγκλίνει στο Ψ.

4.4 Αριθμητική εφαρμογή

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα μερικών αριθμητικών εφαρμογών που έχουν δοθεί στην εργασία των Barles-Soner. Συγκεκριμένα γίνεται μία σύγκριση των αποτελεσμάτων που μας δίνει η μέθοδος του Leland [L], μ' αυτά που μας δίνει η μη γραμμική εξίσωση (3.2). Συγκεκριμένα θεωρούμε

$$\sigma = 0.2, \qquad r = 0.1,$$

και ένα χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, για όλους τους υπολογισμούς, Έχουμε υπολογίσει τη τιμή του δικαιώματος όταν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 100, για διάφορες τιμές εξάσκησης μεταξύ 80 και 120. Στους πίνακες 1, 2 έχουν δοθεί τα αποτελέσματα της μεθόδου του Leland, για συναλλαγές ανά μήνα και ανά εβδομάδα αντίστοιχα. Στον πίνακα 3, δίνονται τα αποτελέσματα που έχουν υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης (3.2). Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ δεν εμφανίζεται το μ άμεσα αλλά η παράμετρος α. Η τιμή του μ είναι πολύ σημαντική για το άνω φράγμα της πιθανότητας να χάσουμε την αντιστάθμιση κατά ένα ποσό ίσο με κ. Για να δείξουμε αυτή την εξάρτηση στις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα 3, έχουμε υπολογίσει την ποσότητα

$$\beta_\kappa := \exp\Big(-\frac{\alpha^2}{\mu^2}\kappa\Big), \tag{4.12}$$

με $\kappa = 1$. Αυτοί οι αριθμοί είναι τα ασυμπτωτικά άνω φράγματα για την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[X(T) + Y(T)P(T) - (P(T) - q)^+ \leq -\kappa | w(t) = \Psi(p, t : \alpha)], \tag{4.13}$$

όπου $w(t) = X(t) + Y(t)P(t)$ είναι το αρχικό χαρτοφυλάκιο.

Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησημοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τη τιμή του δικαιώματος στη περίπτωση της γραμμικής και μη γραμμικής σταθεράς της αστασίας, είναι διαφορετικές. Αυτό φαίνεται από τη διαφορά που παρουσιάζεται στη τιμή για $\alpha = 0$ και $\mu = 0$, στο πίνακα 3 και στους 1, 2 αντίστοιχα. Συγκεκριμένα και στις δύο περιπτώσεις έχουν χρησιμοποιηθεί σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Επίσης επειδή η τιμή της μη γραμμικής σταθεράς της αστασίας κοντά στην ημερομηνία λήξης είναι αρκετά μεγάλη χρησιμοποιήθηκε ένα μικρό χρονικό βήμα κοντά στην ημερομηνία λήξης το οποίο αυξήθηκε όσο απομακρυνόμαστε από αυτή.

Πίνακας 1: Μέθοδος του *Leland*, με μηνιαίες συναλλαγές.

	$\mu = 0.0$	$\mu = 0.0025$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$
Τιμή εξάσκησης	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα
80	27.97	28.00	28.10	28.58
90	19.93	20.01	20.22	21.12
100	13.27	13.35	13.64	14.92
110	8.09	8.22	8.62	10.10
120	4.67	4.78	5.14	6.58
σταθερά της αστασίας $\widehat{\sigma}$	0.2	0.2034	0.2134	0.2492

Πίνακας 2: Μέθοδος του *Leland*, με εβδομαδιαίες συναλλαγές.

	$\mu = 0.0$	$\mu = 0.0025$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$
Τιμή εξάσκησης	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα
80	27.97	28.05	28.25	29.42
90	19.93	20.12	20.53	22.42
100	13.27	13.49	14.09	16.602
110	8.09	8.43	9.16	11.98
120	4.67	4.95	5.66	8.48
σταθερά της αστασίας $\widehat{\sigma}$	0.2	0.2070	0.2265	0.2918

Πίνακας 3: Μη γραμμική εξίσωση των $Black - Scholes$.

	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.02$
Τιμή εξάσκησης	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα	Δικαίωμα
80	27.96	28.17	28.33	28.64
90	19.92	20.44	20.79	21.40
100	13.23	14.03	14.56	15.44
110	8.08	9.13	9.76	10.79
120	4.62	5.64	6.28	7.31
$\beta_1, \mu = 0.025$	0.0	0.0018	10^{-7}	1.6×10^{-28}
$\beta_1, \mu = 0.01$	0.0	0.78	0.37	0.018

5 Παράρτημα Α

5.1 Λύση ιξώδους

Θεωρούμε μία μη γραμμική δεύτερης τάξης μερική διαφορική εξίσωση του τύπου

$$F(S, W, DW, D^2W) = 0, \tag{5.1}$$

στο $E \times [0, T]$, όπου $E \subseteq \mathbb{R}^3$, DW, D^2W συμβολίζουν την κλίση και τη δεύτερη παράγωγο του W ανίστοιχα και F συνεχής που ικανοποιεί την

$$F(x, p, q, A + N) \leq F(x, p, q, A), \quad N \geq 0. \tag{5.2}$$

Βάσει των Crandall- Ishii - Lions [CIL] έχουμε ότι:

Ορισμός 5.1 *Μία συνεχή συνάρτηση $W : \overline{E} \times [0, T] \longrightarrow R$ είναι λύση ιξώδους (ασθενή λύση) της $F = 0$ αν,*
1)W είναι ασθενής υπολύση στο $E \times [0, T]$, που σημαίνει ότι για κάθε συνάρτηση $\phi \in C^{2,1}(\overline{E} \times [0, T])$ και κάθε τοπικό μέγιστο σημείο $S_0 \in E \times [0, T]$, της $W - \phi$ ισχύει ότι,

$$F(S_0, W(S_0), D\phi(S_0), D^2\phi(S_0)) \leq 0. \tag{5.3}$$

2)W είναι ασθενής υπερλύση στο $E \times [0, T]$, που σημαίνει ότι για κάθε συνάρτηση $\phi \in C^{2,1}(\overline{E} \times [0, T])$ και κάθε τοπικό ελάχιστο σημείο $S_0 \in E \times [0, T]$ της $W - \phi$, ισχύει ότι,

$$F(S_0, W(S_0), D\phi(S_0), D^2\phi(S_0)) \geq 0. \tag{5.4}$$

5.2 Απόδειξη βοηθητικών λημμάτων

Λήμμα 5.1 *Εστω ότι ισχύει η σχέση,*

$$-\phi_y(S_0) + p_0(1+\mu)\phi_x(S_0) > 0. \tag{5.5}$$

Συμβολίζουμε με $A(\omega)$, το γεγονός ότι η βέλτιστη τροχιά $S_0^*(s)$, έχει ένα πήδημα μεγέθους ε κατά μήκος της $(-(1+\mu)p_0, 1, 0, 0)$. Εστω η κατάσταση μετά το πήδημα, είναι η $(x_0 - (1+\mu)p_0\varepsilon, y_0 + \varepsilon, 0, 0) \in B(S_0)$. Τότε

$$(\phi_y(S_0) - p_0(1+\mu)\phi_x(S_0))\mathbb{P}(A) \geq 0, \tag{5.6}$$

και επομένως $\mathbb{P}(A) = 0$. Όμοια αν

$$\phi_y(S_0) - p_0(1-\mu)\phi_x(S_0) > 0, \tag{5.7}$$

ισχύει ότι η βέλτιστη τροχιά δεν έχει πηδήματα κατά μήκος της $((1-\mu)p_0, -1, 0, 0)$, $\mathbb{P}$ σχεδόν βεβαίως στο S_0.

Απόδειξη του Λήμματος 5.1: Επειδή το $S_0 = (x_0, y_0, p_0, t_0)$, είναι το σημείο όπου ξεκινάει η τροχιά που δηλώνει η βέλτιστη στρατηγική επένδυσης έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, p_0, t_0) &= \mathbb{E}[V(x_0 - (1+\mu)\varepsilon p_0, y_0 + \varepsilon, p_0, t_0)] \\ &= \int_{A(\omega)} V(x_0 - (1+\mu)\varepsilon p_0, y_0 + \varepsilon, p_0, t_0) d\mathbb{P} \\ &+ \int_{\Omega - A(\omega)} V(x_0, y_0, p_0, t_0) d\mathbb{P} \end{aligned} \tag{5.8}$$

και επομένως, αφού $V(S) \leq \phi(S)$ για $S \in B(S_0)$ και $V(S_0) = \phi(S_0)$, έπεται ότι

$$\int_{A(\omega)} [\phi(x_0 - (1+\mu)\varepsilon p_0, y_0 + \varepsilon, p_0, t_0) - \phi(x_0, y_0, p_0, t_0)] d\mathbb{P} \geq 0. \tag{5.9}$$

Αρα

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} [\int_{A(\omega)} \frac{\phi(x_0 - (1+\mu)\varepsilon p_0, y_0 + \varepsilon, p_0, t_0) - \phi(x_0, y_0, p_0, t_0)}{\varepsilon} d\mathbb{P}] \geq 0, \tag{5.10}$$

οπότε

$$\int_{A(\omega)} \limsup_{\varepsilon \to 0} [\frac{\phi(x_0 - (1+\mu)\varepsilon p_0, y_0 + \varepsilon, p_0, t_0) - \phi(x_0, y_0, p_0, t_0)}{\varepsilon}] d\mathbb{P} \geq 0, \tag{5.11}$$

που μας δίνει το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Λήμματος 2.1: Σταθεροποιούμε ένα $\eta > 0$ και έστω $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, μία λεία μη φθίνουσα συνάρτηση, που ικανοποιεί $g(t) = 0$ για $t \leq 0$ και $g(t) = 1$ για $t \geq \eta$. Ορίζουμε

$$\psi(y,p,t) = g(T-t)\mu p|y| - K\varepsilon(T-t), \tag{5.12}$$

όπου $K > 0$ σταθερά που θα καθοριστεί στην συνέχεια. Υπολογίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned}
&- \quad \psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \psi_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\psi_p - y)^2 - ap(\psi_p - y) = \\
&- \quad \varepsilon K + g'(T-t)\mu p|y| - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (g(T-t)\mu|y| - y)^2 \\
&- \quad ap(g(T-t)\mu|y| - y) \leq \\
&- \quad \varepsilon K + g'(T-t)\mu p|y| - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (1-\mu)^2 |y|^2 + ap|y|.
\end{aligned}$$

Επειδή ισχύουν οι

$$\begin{aligned}
g'(T-t)\mu p|y| &\leq \varepsilon \left[\frac{g'(T-t)\mu}{\sigma(1-\mu)}\right]^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\sigma^2 p^2 (1-\mu)^2 |y|^2, \\
ap|y| &\leq \varepsilon \frac{a^2}{\sigma^2(1-\mu)^2} + \frac{1}{4\varepsilon}\sigma^2 p^2 (1-\mu)^2 |y|^2,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

υπάρχει σταθερά K, που εξαρτάται από το η, έτσι ώστε να ισχύει,

$$-\psi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \psi_{pp} - \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2 p^2 (\psi_p - y)^2 - ap(\psi_p - y) \leq 0. \tag{5.14}$$

Επιπλέον $|\psi_y(y,p,t)| \leq \mu p$ για $y \neq 0$ και αν αυξήσουμε αρκετά το K έτσι ώστε $K \geq a^2/2\sigma^2$ από την (2.55) έχουμε $\psi(y,p,t) \leq z^\varepsilon(y,p,t)$ αν $y = 0$ ή $t = T$. Βάσει της σχέσης (2.54) έχουμε ότι $\psi \leq z^\varepsilon$ στο σύνολο $\mathbb{R} \times [0,\infty] \times [0,T]$. Από αυτό για $t = 0$, παίρνουμε το ζητούμενο βάσει των ιδιοτήτων της g. □

6 Παράρτημα Β

Δίνουμε στο σημείο αυτό μία λύση για την ανισότητα μεταβολών

$$\max\Big\{-A^2C_{rr}(r)-(r+AC_r)^2+AS(A);|C_r|-1\Big\}=0, \qquad \forall r\in\mathbb{R}, \quad (6.1)$$

με τις συνθήκες

$$\lim_{|r|\to\infty}\frac{C(r;A)}{|r|}=1, \qquad C_r(0;A)=C(0;A)=0, \qquad (6.2)$$

όπου A μία γνωστή παράμετρος και άγνωστοι είναι η συνάρτηση $C(\cdot;A)$ και η σταθερά $S(A)$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι r δεν είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, αλλά μία μεταβλητή. Αρχικά κατασκευάζουμε μία λύση. Για σταθερό πραγματικό αριθμό $A\neq 0$ θέτουμε

$$W := C_r(r;A). \qquad (6.3)$$

Οπότε η συνάρτηση W λύνει την εξίσωση

$$\max\Big\{-A^2W_r(r)-(r+AW)^2+AS(A);|W|-1\Big\}=0, \qquad \forall r\in\mathbb{R}. \quad (6.4)$$

Περιμένουμε βάσει της (6.2), η W να είναι μία μη φθίνουσα περιττή συνάρτηση. Επομένως ψάχνουμε για σταθερές $S(A)$, $g>0$ και μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$W:[0,\infty)\to[0,\infty), \qquad (6.5)$$

που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A^2W_r(r)+(r+AW(r))^2=AS(A), &\qquad r\in(0,g), \qquad (6.6)\\ W(r)=1, &\qquad r\in[g,\infty),\\ W(r)\le 1, \quad A^2W_r(r)+(r+AW(r))^2\ge AS(A), &\qquad r\in(0,\infty), \end{aligned}$$

με συνοριακή συνθήκη την $W(0)=0$. Από το γεγονός ότι η W είναι λεία έχουμε ότι $W_r(g)=0$ και από τη σχέση (6.6), έχουμε ότι ισχύει

$$\sqrt{AS(A)}=g+A. \qquad (6.7)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:
Περίπτωση Α >0. Από τη σχέση (6.6), αν θέσουμε αρχικά $W:=\frac{u'}{u}$ και έπειτα $w:=u\exp(\frac{r^2}{2A})$, μετά από πράξεις παίρνουμε ότι

$$W(r)=\frac{1}{A}\Big[\lambda\tanh\Big(\frac{\lambda r}{A}\Big)-r\Big], \qquad r\in[0,g], \qquad (6.8)$$

όπου $\lambda = (AS(A)+A)^{\frac{1}{2}}$. Χρησιμοποιώντας την $W(g)=1$ και την (6.7), επειδή ισχύει η (6.8), έχουμε ότι

$$0 = F(S(A),A) := \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S(A)}{1+S(A)}}\right) - \sqrt{1+S(A)}\Big(\sqrt{S(A)}-\sqrt{A}\Big). \tag{6.9}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας ως προς A, παίρνουμε τη σχέση

$$S'(A) = -\frac{F_A(S(A),A)}{F_S(S(A),A)} = \frac{1+S(A)}{2\sqrt{AS(A)}-A}. \tag{6.10}$$

Στην παραπάνω σχέση

$$F_A(S(A),A) = \frac{1}{2\sqrt{S(A)}\sqrt{1+S(A)}}\Big(\sqrt{AS(A)}-2S(A)\Big),$$

$$F_S(S(A),A) = \frac{S'(A)}{2\sqrt{S(A)}\sqrt{1+S(A)}} - \frac{S'(A)}{2\sqrt{1+S(A)}}\Big(\sqrt{S(A)}-\sqrt{A}\Big)$$
$$-\sqrt{1+S(A)}\Big(\frac{S'(A)}{2\sqrt{S(A)}}-\frac{1}{2\sqrt{A}}\Big).$$

Περίπτωση A <0. Όμοια από την (6.6) έχουμε ότι

$$W(r) = \frac{1}{A}\Big[\lambda\tanh\Big(-\frac{\lambda r}{A}\Big)-r\Big], \qquad r\in[0,g], \tag{6.11}$$

όπου $\lambda = (-AS(A)-A)^{\frac{1}{2}}$. Στην συνέχεια λύνουμε ως προς $S(A)<0$. Χρησιμοποιώντας την $W(g)=1$ και την (6.7) έχουμε ότι

$$0 = F(S(A),A) := \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{-S(A)}{1+S(A)}}\right) - \sqrt{1+S(A)}\Big(\sqrt{-S(A)}-\sqrt{-A}\Big). \tag{6.12}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας ως προς A, παίρνουμε τη σχέση

$$S'(A) = -\frac{F_A(S(A),A)}{F_S(S(A),A)} = \frac{1+S(A)}{2\sqrt{AS(A)}-A}, \tag{6.13}$$

όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Περίπτωση A $=0$**.** Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι αν $A\to 0$ τότε $S(A)\to 0$ και θέτουμε $S(0)=g(0)=0, W=1$.

Επειδή ισχύει η (6.3), η συνάρτηση

$$C(r;A) := \int_0^{|r|} W(\xi)d\xi, \qquad r\in\mathbb{R}^1, \tag{6.14}$$

ικανοποιεί τη σχέση (6.1). Επίσης από την κατασκευή της C προκύπτει ότι

$$|C_r(r;A)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |r| < g(A), \tag{6.15}$$

$$rC_r(r;A) \geq 0 \tag{6.16}$$

και ότι για όλα τα r και τα A, για κάθε $a > 0$ ότι

$$\inf_{r,|A|\leq a}\{C(r;A) - |r|\} \geq -\infty. \tag{6.17}$$

Επίσης για $A \neq 0$, χρησιμοποιώντας τη σχέση που έχουμε για το $S'(A)$, έχουμε ότι

$$\frac{d}{dA}[A(1+S(A))] = (1+S(A))\frac{2\sqrt{AS(A)}}{2\sqrt{AS(A)} - A} \tag{6.18}$$

και επειδή

$$1 + S(A) \geq 0, \qquad 2\sqrt{AS(A)} - A \geq 0, \tag{6.19}$$

για κάθε $A \neq 0$, προκύπτει ότι $\frac{d}{dA}[A(1+S(A))] \geq 0$ από το οποίο έχουμε ότι $A(1+S(A))$ είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση του A, επειδή είναι συνεχής στο $A = 0$.

Τελειώνουμε δείχνοντας τη μοναδικότητα του ζεύγους $(C(r;A), S(A))$. Θεωρούμε δύο διαφορετικές λύσεις $(C(r;A), S(A))$ και $(C'(r;A), S'(A))$, που ικανοποιούν τις $(6.1) - (6.2)$. Για $\mu < 1$, κοντά στο 1, εισάγουμε τη συνάρτηση

$$r \to \mu C(r;A) - C'(r;A). \tag{6.20}$$

Βάσει της (6.2), η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο, του συνόλου των πραγματικών αριθμών, έστω $\overline{r}$. Αφού οι C και C' είναι ομαλές συναρτήσεις έχουμε ότι

$$\mu C_r(\overline{r};A) = C'_r(\overline{r};A), \qquad \mu C_{rr}(\overline{r};A) \leq C'_{rr}(\overline{r};A). \tag{6.21}$$

Αλλά αφού $|C_r(\overline{r};A)| \leq 1$ και $\mu < 1$, έπεται ότι $|C'_r(\overline{r};A)| < 1$, και επομένως

$$-A^2C'_{rr}(\overline{r};A) - (\overline{r} + AC'_r(\overline{r};A))^2 + AS'(A) = 0. \tag{6.22}$$

Πολλαπλασιάζοντας την αντίστοιχη εξίσωση (6.22) που ισχύει για τη συνάρτηση $C_r(\overline{r};A)$ με το μ και αφαιρώντας την από την προηγούμενη, το αποτέλεσμα είναι

$$(\overline{r} + AC'_r(\overline{r};A))^2 - \mu(\overline{r} + AC_r(\overline{r};A))^2 + \mu AS(A) - AS'(A) \leq 0. \tag{6.23}$$

Από την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας ότι $\mu < 1, |C_r(\overline{r};A)| < 1$, οδηγούμαστε στη σχέση

$$\begin{aligned}\mu AS(A) - AS'(A) &\leq (\mu-1)\overline{r}^2 + \mu(1-\mu)A^2[C_r(\overline{r};A)]^2 \\ &\leq \mu(1-\mu)A^2.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το μ να πάει προς το 1, έχουμε ότι $S(A) = S'(A)$. Επιπλέον από τη σχέση (6.6) παίρνουμε και ότι $C(r;A) = C'(r;A)$.$\square$

Αναφορές

[A] K. Arrow : *Essays in the theory of risk bearing*, Amsterrdam (1970)

[AP] M. Avellaneda A. Paras : *Optimal hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs* , Applied Mathematical Finance **1.** 63-94 (1994)

[BP1] G. Barles, B. Perthame : *Exit time problems in control and vanishing viscosity solutions of Hamilton -Jacobi -Bellman equations*, SIAM J. Cont. Opt. **26.** 1113-1148 (1988)

[BP2] G. Barles, B. Perthame : *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping problems*, Math. Modeling Numerical Analysis **21.** 557-579 (1987)

[BS1] F. Black, M. Scholes : *The pricing of options and corporate liabilities,* J. Polit. Econ. **81.** 637-659 (1973)

[BS2] G. Barles, H. M. Soner: *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black Scholes equation*, Finance and Stochastics **2.** 369-397 (1998)

[BV] P. P. Boyle, T. Vorst : *Option replication in discrete time with transaction costs* , J. Finance **40.** 1283-1301 (1985)

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions : *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27.** 1-67 (1992)

[CL] M. G. Crandall, P. L. Lions : *Viscosity solutions of Hamilton -Jacobi equations*, Trans. AMS **277.** 1-43 (1983)

[DPZ] M. Davis, V. G. Panas, T. Zariphopoulou : *European option pricing with transaction fees* , SIAM J. Cont. Opt. **31.** 470-493 (1993)

[E] L. C. Evans : *The pertrurbed test function technique for viscosity solutions of partial differential equations*, Proc. Royal Soc. Endimburg Sect. **A 111.** 359-375 (1989)

[FR] W. H. Fleming, R. W. Rishel : *Deterministic and stochastic optimal control,* Berling, Heimdelberg, New York Spinger (1975)

[FS] W. H. Fleming, H. M. Soner : *Controlled Markov Processes and Viscocity Solutions,* Berling, Heimdelberg, New York Spinger (1992)

[HN] S. D. Hodges, A. Neuberger : *Optimal replication and hedging of contingent claims under transaction costs* , Rev. Future Markats **8.** 222-239 (1989)

[IL] H. Ishii P. L. Lions : *Viscosity solutions of fully non-linear second order eliptic partial differential equations*, J. Differential equations **83.** 26-78 (1993)

[KS] Y. M. Kabanov, M. M. Safarian : *On Leland's strategy of option pricing with transaction costs* , Finance and stochastics **1.** 239-250 (1997)

[L] H. E. Leland : *Option pricing and replication with transaction costs* , J. Finance **40.** 1283-1301 (1985)

[L1] P. L. Lions : *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations parts* $1, 2$, Partial Differential Equations **8.** 1101-1174, 1229-1276 (1983)

[O] B. Oksendall : *Stochastic differential equations* , Springer (2000)

[SSC] H. M. Soner, S. E. Shreve, J. Cvitanic : *Optimal investment and consumption with transaction costs* , Ann. Appl. Propab. **4.** 609-692 (1994)

[WW] A. E. Whalley, P. Willmott : *An Asymptotic Analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs*, Math. Finance **7.** 307-324 (1997)

[Z] H. Zhu *Characterization of variational inequalities in singular control,* Ph.D. thesis , Brown University, Providence, RI, (1991)