Οικονομική Ανάπτυξη και
μη - Ανανεώσιμοι Φυσικοί Πόροι

Βαμβουκάκης Ιωαν.Κωνσταντίνος
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

19 Μαρτίου 2007

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η προσπάθεια να κατανοήσουμε τις αιτίες πίσω από τις τεράστιες διαφορές στα επίπεδα διαβίωσης ανάμεσα στις χώρες, καθώς και τις ταχύτατες αλλαγές αυτών των επιπέδων παγκοσμίως, απότελεί ένα κεντρικό θέμα συζήτησης για την οικονομική επιστήμη από την εποχή των κλασσικών οικονομολόγων .

Αν και η παραδοσιακή θεωρία μεγέθυνσης έχει αναζητήσει και έχει καταφέρει να εξηγήσει την διαδικασία πίσω από την οικονομική ανάπτυξη , ψάχνοντας τρόπους μέσω των οποίων οι κυβερνήσεις μπορούν να επηρεάσουν τους ρυθμούς ανάπτυξης, δεν είχε δοθεί μεγάλη προσοχή, μέχρι και τις πρόσφατες δεκαετίες, στην σχέση οικονομικής ανάπτυξης και του περιβάλλοντος. Σε αυτές τις δεκαετιές, επιχειρήθηκε εκτεταμένη έρευνα, η οποία προσπάθησε και προσπαθεί να διερευνήσει την σύνδεση αυτή, ειδικά όσον αφορά με θέματα που έχουν σχέση με την επίδραση των φυσικών πόρων στην διαδικασία ανάπτυξης μίας οικονομίας.

Η εργασία αυτή μπόρουμε να πούμε ότι κινείται πάνω σε τρεις βασικούς άξονες. Αρχικά στόχος μας, είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες ενός μοντέλου ενδογενούς ανάπτυξης όπου η συνάρτηση παραγωγής εξαρτάται από μη-ανανεώσιμούς φυσικούς πόρους και κατά δεύτερον να ελέγξουμε αν αυτή η εξάρτηση του μοντέλου από τους φυσικούς πόρους είναι ικανή να εξαλείψει το (non-robustness problem) των μοντέλων αυτών. Κατά τρίτον στοχεύουμε να αποδείξουμε ότι το συμπέρασμα των Rodriguez and Sachs (1999) σύμφωνα με το οποίο το αρχικό απόθεμα του φυσικού πόρου επηρεάζει αρνητικά την αύξηση του Α.Ε.Π. μιας χώρας με αφθονία φυσικών πόρων δεν ισχύει απαραίτητα.

Μπορούμε να διαχωρήσουμε τους φυσικούς πόρους σε δύο κύριες κατηγορίες. Τους ανανεώσιμους και τους μη - ανανεώσιμους. Ανανεώσιμοι πόροι είναι αυτοί που μπορούν να αναγεννηθούν φυσικά μέσα σε ένα λογικό χρονικό διάστημα και το απόθεμά τους μπορεί να αυξηθεί μέσω ανθρώπινης παρέμβασης. Ως τέτοιους μπορούμε να αναφέρουμε τα δέντρα, πληθυσμούς ζώων, την ηλιακή και αιολική ενέργεια, κ.α. Σε αντίθεση, μη-ανανεώσιμοι φυσικοί πόροι είναι αυτοί οι οποίοι δεν ανανεώνονται ή ανανεώνονται τόσο αργά από φυσικές ή τεχνητές διαδικασίες με αποτέλεσμα να θεωρούμε για πρακτικούς λόγους, ό,τι όταν αυτοί χρησιμοποιηθούν, δεν μπορούν να είναι διαθέσιμοι ξ-ανά μέσα σε ένα λογικό χρονικό διάστημα. Προφανή παραδείγματα τέτοιων φυσικών πόρων είναι τα αποθέματα πετρελαίου και ορυκτών.

Με βάση αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να πούμε ότι η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος εξετάζει τις παρενέργειες της εισαγ-ωγής μη-ανανεώσιμων φυσικών πόρων σε ενα μοντέλο ενδογενούς ανάπτυξη-ς. Τα κλασσικά μοντέλα ενδογενούς ανάπτυξης παρουσιάζουν ενα πρόβλη-μα γνωστό ως το πρόβλημα της μη-ευρωστίας (non-robustness problem) το οποίο δημιουργείται γιατί απαιτούνται, σταθερές αποδόσεις (τουλάχιστον α-συμπωτικά) σε κάθε παράγοντα παραγωγής της οικονομίας για να διατηρηθεί αύξηση κεφαλαίου. Η παραμικρή αύξηση απόδοσης θα οδηγούσε σε εκρηκτική ανάπτυξη (άπειρη απόδοση σε πεπερασμένο χρόνο). Ενώ η παραμικρή μείωση απόδοσης οδηγεί σε στάσιμη ανάπτυξη εκτός αν κάποιος εξωγενής παράγ-ων (π.χ. πληθυσμός) αυξάνει. Αυτό το γεγονός είναι γνωστό ως πρόβλημα knife-edge της κλασσικής θεωρίας της ενδογενούς ανάπτυξης και αποτελεί μια μεγάλη πρόκληση, μια και υποννοεί την μη ύπαρξη βέλτιστων αποτελεσμάτων για το μοντέλου με την παραμικρή αλλαγή των παραμέτρων.

Υπάρχει η αίσθηση οτι η εισαγωγή μη-ανανεώσιμων πόρων στο μοντέλο θα μπορούσε να εξαλείψει το knife-edge problem γιατί η τάση της οικονομίας που δημιουργείται από την ανάγκη να εξορυχθούν διαδοχικά μικρότερες ποσότητες του φυσικού απόθέματος, ίσως αντισταθμίσει τα εκρηκτικά αποτελέσμάτα που δημιουργούνται από τις αυξανόμενες αποδόσεις των παραγόντων παραγωγής του μοντέλου. Ακόμα όμως και αν αυτή η αίσθηση είναι σωστή, παραμένει το πρόβλημα να εξετάσει κανείς τους περιορισμούς που απαιτούνται για να έχουμε ευστάθεια και βέλτιστα αποτελέσματα.

Η προσέγγιση μας σε αυτό το πρόβλημα είναι βασισμένη σε μία επέκταση του μοντέλου του Stiglitz(1974). Ο Stiglitz είχε επικεντρωθεί στην περίπτωση όπου σταθερές αποδόσεις λαμβάνονται υπόψιν μαζί για το κεφάλαιο, το ερ-γατικό δυναμικό και τον φυσικό πόρο. Εμείς θα επεκτείνουμε την ανάλυση αυτή βρίσκοντας μονοπάτια σταθερής ανάπτυξης για μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων. Σε αυτή την περίπτωση όπως θα δούμε είτε: (α) αυξανόμενες αποδόσεις στο κεφάλαιο ή (β) αυξανόμενες αποδόσεις μαζί στο κεφάλαιο και στο εργατικό δυναμικό σε συνδυασμό με αύξηση του πληθυσμού, απαιτούν-ται για να είναι εφικτή η διατήρηση της κατα κεφαλήν ανάπτυξης. Επιπλέον αυτών των συνθηκών απαιτούνται και άλλοι περιορισμοί στις παραμέτρους ώ-στε η διατήρηση της ανάπτυξης να είναι βέλτιστη. Τελικά θα γίνει φανερό οτι η ευστάθεια είναι δυνατή μόνο όταν η συνθήκη (β) ισχύει. Δηλαδή, αν δεν υπ-άρχει αύξηση πληθυσμού το knife-edge problem της θεωρίας της ενδογενούς ανάπτυξης επανεμφανίζεται σαν πρόβλημα αστάθειας.

Στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας ερευνούμε το δυναμικό κατά Ramsey ενός μοντέλού με μη-ανανεώσιμους φυσικούς πόρούς ως προς την οικονομική ανάπτυξη σε εναν νοητό κόσμο που αποτελείται από δύο χώρες. Συγκεκριμένα αναλύουμε πώς ο αρχικός πλούτος των μη-ανανεώσιμων πόρων επηρεάζει το εισόδημα, την ανάπτυξη και την ευημερία σε αυτόν τον νοητό κόσμο. Θα δείξουμε, το αν μια πλούσια σε πόρους χώρα αναπτύσεται πιο αργά ή πιο γρήγορα από μια άλλη χώρα εξαρτάται από την οικονομική της δομή. Η ανάλυση αυτή μας παρέχει εναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να δούμε πως οι διαφορές του κεφαλαίου και των μη-ανανεώσιμων πόρων ανάμεσα στις δύο χώρες επηρεάζουν την οικονομική απόδοση εαν αγνοήσουμε άλλες διαφορές μεταξύ των χωρών. Όπως ο Chiarella (1980), θα καταλήξούμε στο συμπέρασμα ότι το κλάσμα της κατανάλωσης των δύο χώρών είναι σταθερό με τον χρόνο. Και πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε οτι το κλάσμα της κατανάλωσης της πλούσιας χώρας ως προς την κατανάλωση της χώρας με έλλειψη φυσικών πόρων ειναι σταθερό και καθορίζεται από το κλάσμα των τιμών των μετοχών σε κάθε χρονικό σημείο. Ο πλούτος της εύρωστης χώρας θα δείξουμε οτι αυξάνει σε συνάρτηση του αρχικού αποθέματος του πόρου, γεγονός πού έρχεται σε αντιπαράθεση, ως έναν βαθμό, με την αρνητική επίδραση του αρχικού αποθέματος του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου πάνω στην τιμή του πόρου (Resource Curse).

Θα αποδείξουμε ακόμα οτι ο αρχικός πλούτος του πόρου έχει θετική επίδραση στο ρυθμό αύξησης του Α.Ε.Π. της πλούσιας σε πόρους χώρας εφόσον η ελαστικότητα της αρχικής τιμής του πόρου σε σχέση με το αρχικό απόθεμα της, είναι μεγαλύτερο από μείον ένα.

Θα καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα γιατί το αν μία πλούσια σε φυσικούς πόρους χώρα αναπτύσεται πιο γρήγορα ή πιο αργά από μία άλλη οικονομία χωρίς πόρους εξαρτάται από την δομή της οικονομίας και όχι μονοσήμαντα από το απόθεμα του φυσικού πόρου. Το λανθασμένο αυτό αποτέλεσμα των Rodriguez and Sachs (1999) οφείλεται στο γεγονός ότι θεώρησαν μια απομονωμένη χώρα και έτσι απέτυχαν να λάβουν υπόψιν τους τις εξωτερικές σχέσεις που επηρεάζουν το δυναμικό μετάβασης του υπόλοιπου κόσμου. Παρόλο που είναι δυνατόν μια οικονομία πλούσια σε πόρους να αναπτύσεται πιο αργά απο μία άλλη φτωχότερη λόγω π.χ. ενοικίου οι Rodriguez and Sachs (1999) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το να κατέχεις μία μεγάλη ποσότητα φυσικών πόρων από μόνο του είναι ικανό να παράγει αρνητική ανάπτυξη, κάτι το οποίο θα δείξουμε ότι δεν ισχύει.

Τελικώς θα δείξουμε ότι μια τεχνολογική αλλαγή όπως, η αποταμίευση του πόρου, μπορει να ευνοήσει την αύξηση του πλούτου της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων σε σύγκριση με την οικονομία που έχει έλλειψη φυσικών πόρων.

Κεφάλαιο 2

Ενδογενής Ανάπτυξη

Στα μέσα της δεκαετίας του 1980, μία ομάδα θεωρητικών οικονομολόγων με προεξέχοντα τον Paul Romer(1986) διαφώνησαν με την εξήγηση της μακροπρόθεσμης αύξησης παραγωγής από εξωγενείς παράγοντες. Αύτη η διαφωνία έδωσε κίνητρο για την κατασκευή μίας νέας τάξης από μοντέλα ανάπτυξης στα οποία τα καθοριστικά δεδομένα της ανάπτυξης ήταν ενδογενή σε αυτά. Ο καθορισμός της μακροπρόθεσμης ανάπτυξης από στοιχεία εσωτερικά στο μοντέλο παρά από κάποιες εξωγενείς μεταβλητές, όπως η τεχνολογική πρόοδος , είναι ο λόγος για το όνομα ενδογενής ανάπτυξη.

Η ιδιότητα "κλειδί" των ενδογενών μοντέλων είναι η απουσία των φθίνουσων αποδόσεων στο κεφάλαιο. Στην ανάλυση μας διαχωρίζουμε την ημι-ενδογενή ανάπτυξη από την αυστηρά ενδογενή ανάπτυξη. Το χαρακτηριστικό που καθορίζει τα μοντέλα αυστηρής ενδογενούς ανάπτυξης, που ερευνήθηκαν από τους Barro and Sala-i-Martin,(1995) είναι οτι μακροπρόθεσμα η κατά κεφαλήν κατανάλωση αυξάνει με σταθερά θετικό ρυθμό, ακόμα και με την απουσία κάθε εξωτερικά αυξανόμενου παράγοντα.

Σε αντίθεση, ασθενής ενδογενής ανάπτυξη (Groth 1992) ή ημι-ενδογενής ανάπτυξη (Jones 1995) ορίζεται σαν μακροπρόθεσμη αύξηση της κατά κεφαλήν κατανάλωσης με σταθερά θετικό ρυθμό παρά την απουσία εξωγενούς τεχνολογικής ανάπτυξης. Ένα πρώιμο μοντέλο ημι - ενδογενούς ανάπτυξης αυτής της λογικής είναι η διάσημη εργασία του Arrow(1962) με όνομα Learning-By-Doing. Άλλα παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι οι τροποποιήσεις του μοντέλου του Romer (1990) R&D που προτάθηκαν απο τους Groth (1992) και Jones (1995). Αυτά τα συμβατικά μοντέλα ημι-ενδογενούς ανάπτυξης διαφέρουν από τα μοντέλα αυστηρής ενδογενούς ανάπτυξης σε δύο σημεία:(α) Είναι λιγότερο απαιτητικά όσον αφορά τις αποδόσεις των παραγωγικών παραγόντων και (β) υπονοούν μακροπρόθεσμους ρυθμούς ανάπτυξης οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι από τις επιλογές των παραμέτρων.

Όπως θα δούμε, όμως, επιτρέποντας μη-ανανεώσιμους φυσικούς πόρους να εισέλθουν στην συνάρτηση παραγωγής φέρνει ευνοϊκά αποτελέσματα. Η πρώτη ιδιότητα των ημι-ενδογενών μοντέλων διατηρείται ενώ η δεύτερη ιδιότητα παύει να ισχύει. Πράγματι, η ημι-ενδογενης ανάπτυξη δίνει έναν σημαντικό ρόλο στις επιλογές των παραμέτρων σαν παράγοντες που θα καθορίσουν τους μακροπρόθεσμους ρυθμούς ανάπτυξης.

Ο Stiglitz (1974) παρουσίασε ένα βέλτιστο μοντέλο ανάπτυξης με μη - ανανεώσιμους πόρους το οποίο στηριζόταν σε εξωγενή τεχνολογική πρόοδο ώστε να δημιουργήσει ανάπτυξη. Ενας σημαντικός αριθμός από papers που ακολούθησαν όπως των Robson(1980),Takayma(1980), Jones, Manueli(1997), Aghion and Howitt (1998), Scholz, Ziemens (1999), και Schou (2000), εξέτασαν τις παρενέργειες της παρουσίας των μη-ανανεώσιμων πόρων σε μοντέλα ενδογενούς ανάπτυξης. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των papers είναι οτι οι φυσικοί πόροι δεν εμφανίζονται στην συνάρτηση παραγωγής του μοντέλου. Αυτή είναι μία βασική διαφορά συγκρινόμενη με το μοντέλο που θα παρουσιάσουμε στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας μας και σαφέστατα ένα μη ρεαλιστικό χαρακτηριστικό, αφού μοιάζει απίθανο ο τομέας που δημιουργεί την ανάπτυξη να είναι εντελώς ανεξάρτητος του φυσικού κεφαλαίου άρα και των μη-ανανεώσιμων φυσικών πόρων.

Οι Aghion και Howitt(1998) θεώρησαν ένα μοντέλο ΑΚ με την πηγή να εισάγεται στο μοντέλο σε μορφή συνάρτησης Cobb-Douglas. Στο μοντέλο αυτό, όμως, προκύπτει ότι είναι αδύνατο να διατηρηθεί η ανάπτυξη χωρίς εξωγενή τεχνολογική πρόοδο. Όπως θα δούμε όμως, στο Κεφάλαιο 3 το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αναστραφεί (χωρίς να παραβιαστεί η ευστάθεια) εισάγωντας αύξηση πληθυσμού.

Παρόλο που το μοντέλο μας παρουσιάζει τους μη-ανανεώσιμους φυσικούς πόρους με την συνηθισμένη έννοια (ορυκτά καύσιμα), υπάρχει μία εναλλακτική εκδοχή του μοντέλου. Αντί να σκεφτόμαστε τα αποθέματα π.χ. του πετρελαίου στο έδαφος , μπορούμε να σκεφτούμε το απόθεμα σαν ποιότητα του περιβάλλοντος. Εφόσον η μόλυνση είναι ένα αναπόφευκτο παράγωγο της οικονομικής δραστηριότητας τότε το περιβάλλον που παρουσιάζεται σαν ποιότητα του φυσικού κεφαλαίου σταδιακά θα υποβαθμιστεί με έναν παρόμοιο τρόπο όπως μειώνεται το παραδοσιακό απόθεμα του πόρου. Με αυτή την λογική ο Stokey (1998) και οι Aghion και Howitt (1998) παρουσίασαν μοντέλα ανάπτυξης όπου η μοντελοποίηση της μόλυνσης παρουσιάζεται με έναν παρόμοιο τρόπο με την συνήθη αναπαράσταση των μη-ανανεώσιμων πόρων.

Σε αυτά τα μοντέλα, το να διατηρηθεί η ανάπτυξη είτε είναι αδύνατο είτε μηβέλτιστο όταν δεν υπάρχει εξωγενής τεχνολογική πρόοδος. Θα παρατηρήσουμε ότι τα απότελέσματα αυτά δεν ισχύουν απαραιτήτως όταν επιτρέπεται αύξηση πληθυσμού και αυξανόμενες αποδόσεις στους παράγοντες παραγωγής.

Κεφάλαιο 3

Το Μοντέλο των Μη-Ανανεώσιμών Φυσικών Πόρων

Για να διασφαλίσουμε οτι οι μη-ανανεώσιμοι πόροι είναι απαραίτητο στοιχείο για την συνάρτηση παραγωγής και δεν αποκλείουν μακροπρόθεσμη αύξηση της κατανάλωσης, ακολουθούμε την θεώρηση του Stiglitz και υποθέτουμε μία συνάρτηση παραγωγής μορφής Cobb-Douglas:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), R(t)) = AK(t)^a L(t)^\beta R(t)^\gamma \ \ A, a > 0, 0 < \beta, \gamma < 1, \tag{3.1}$$

όπου με $Y(t)$ συμβολίζουμε την παραγωγή, με $K(t)$ το απόθεμα του κεφαλαίου, $L(t)$ είναι το εργατικό δυναμικό, και με $R(t)$ είναι η εισροή του μη-ανανεώσιμου πόρου όλα υπολογισμένα την χρονική στιγμή t . Ακόμα με A συμβολίζουμε το επίπεδο της τεχνολογίας. Σε αντίθεση με τον Stiglitz(1974) , θεωρούμε ότι δεν υπάρχει τεχνολογική πρόοδος. Πιο σημαντικά, δεν θέτουμε κάποιο πάνω όριο για το a. Αν και ο Stiglitz(1974) και άλλοι επικεντρώθηκαν στην περίπτωση όπου $a + \beta + \gamma = 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παράμετροι a, β, και γ θα αθροίζονται σε μία μεγαλύτερη τιμή.

Για την ελαστικότητα παραγωγής του φυσικού πόρου, εμπειρικές παρατηρήσεις πόρων οπως για παράδειγμα ορυκτών καυσίμων συνήθως θεωρούν το γ να είναι σχετικά χαμηλό, για παράδειγμα λιγότερο από 0.05. Παρά ταύτα, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, μία εναλλακτική θεώρηση της πηγής επιτρέπει στις δυνατές τιμές του γ να γίνουν μεγαλύτερες: το R μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει την ροή μόλυνσης η οποία είναι ένα αναπόφευκτο παράγωγο της οικονομικής δραστηριότητας το οποίο μπορεί να επιτρέψει στο γ τιμές λίγο μεγαλύτερες από 0.05. Σε αυτή την περίπτωση η μόλυνση αφαιρεί από την ποιότητα του περιβάλλοντος, την οποία θεωρούμε σαν μέρος του αποθέματος του φυσικού κεφαλαίου. Αν και αυτή η θεώρηση είναι δυνατή, στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα αναφερόμαστε στο R σαν έναν μη-ανανεώσιμο φυσικό πόρο. Σε κάθε περίπτωση , φαίνεται λογικό να θεωρούμε το $\gamma < 1$ όπως στην εξίσωση (3.1).

Όποια και να είναι η θεώρηση για το R, η παραγωγή χρησιμοποιείται για κατανάλωση και για επένδυση σε αγαθά κεφαλαίου έτσι ώστε

$$K' = Y - C - \delta K \equiv I - \delta K, \qquad \delta \geq 0, \qquad K(0) = K_0 > 0, \tag{3.2}$$

όπου $C \equiv cL$ είναι η συνολική κατανάλωση, I είναι οι ακαθάριστες επενδύσεις, δ ο ρυθμός υποτίμησης του κεφαλαίου και το K_0 είναι δεδομένο.Το εργατικό δυναμικό L ,μεγαλώνει με ένα σταθερό εξωγενή ρυθμό $n \geq 0$, δηλαδή, $L(t) = L(0)e^{nt}$, $L(0) = L_0 > 0$ όπου το L_0 είναι δεδομένο.

Το απόθεμα του φυσικού πόρου S μειώνεται με την εξόρυξη του φυσικού προϊόντος σύμφωνα με την σχέση:

$$S' = -R, \qquad S(0) = S_0 > 0. \tag{3.3}$$

όπου S_0 είναι δεδομένο. Όπως και το μοντέλο του Stiglitz το μοντέλο μας δεν περιλαμβάνει κόστος εξόρυξης και αβεβαιότητα. Δεδομένου των K_0, S_0 και L_0, ένα μονοπάτι $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ θα ονομάζεται εφικτό αν : (α) K και S είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, (β) C, Y, και R κατα σημείο συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, (γ) το μονοπάτι ικανοποιεί την εξίσωση (3.1) για κάθε $t \geq 0$, καθώς και τις εξισώσεις (3.2) και (3.3) για όλα τα $t \geq 0$, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας των C και R, και (δ) το μονοπάτι ικανοποιεί τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας

$$C, R \geq 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ \ t\ \ \geq 0 \tag{3.4}$$

και

$$K, S \geq 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ \ t \geq 0 \tag{3.5}$$

Οι συνθήκες (3.3),(3.4) και (3.5) σε ένα εφικτό μονοπάτι μας δίνουν τον περιορισμό

$$\int_0^{\infty} R(t)dt \leq S_0, \tag{3.6}$$

δίνοντάς μας ένα πεπερασμένο πάνω όριο για την εξόρυξη του φυσικού πόρου στο άπειρο μέλλον. Προφανώς από αυτόν τον περιορισμό έχουμε ότι η εξόρυξη του πόρου πρέπει να προσεγγίζει το μηδέν για $t \to \infty$.

Ένα εφικτό μονοπάτι $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ θα ονομάζεται ισορροπημένο μονοπάτι ανάπτυξης (από 'δω και στο εξής συντομογραφημένα Ι.Μ.Α.) εάν C, Y, K, R

και S είναι γνησίως θετικα για όλα τα $t \geq 0$ και μεταβάλονται με σταθερούς ρυθμούς (κάποιοι εκ των οποίων μπορεί να είναι αρνητικοί). Έστω οτι το σύμβολο g_x δηλώνει τον ρυθμό μεγέθυνσης μιας μεταβλητής $x > 0$, έτσι ώστε $g_x \equiv \dot{x}/x$.

Λήμμα 3.1 Σε ένα Ι.Μ.Α. τα ακόλουθα ισχύουν :
(α)$g_S = g_R < 0$
(β)$R(0) = -g_R S(0)$, και

$$\lim_{t\to\infty} S = 0 \tag{3.7}$$

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α •

Ο ορισμός ενός Ι.Μ.Α. περιλαμβάνει την προϋπόθεση οτι το g_S είναι σταθερο, δηλαδή για ένα Ι.Μ.Α. εννοείται οτι ο φυσικός πόρος θα καταναλωθεί οριακά.

Οι λόγοι παραγωγής - κεφαλαίου, κατανάλωσης - κεφαλαίου, και ο ρυθμός εξόρυξης του πόρου θα ονομάζονται z, x, και u, αντίστοιχα, δηλαδή

$$z \equiv \frac{Y}{K}, \qquad x \equiv \frac{C}{K}, \qquad u \equiv \frac{R}{S} \tag{3.8}$$

Αυτοί οι λόγοι είναι βασικά εργαλεία για την ανάλυσή μας. Με βάση αυτούς μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3.2) σαν

$$g_K = z - x - \delta \tag{3.9}$$

Όμοια, από την (3.3)

$$g_S = -u. \tag{3.10}$$

Σε ένα Ι.Μ.Α. , εξ ορισμού z, x, και u είναι πάντα θετικά. Εκ των προτέρων δεν αποκλείεται να ισχύει $x > z$, δηλαδή επιτρέπουμε στις ακαθάριστες επενδύσεις $I(\equiv Y - C)$ να είναι αρνητικές.
Λήμμα 3.2
Σε ένα Ι.Μ.Α., τα $g_Y = g_C \equiv g$, και u ειναι σταθερά. Εάν, επιπρόσθετα, $g_K = g$, τότε επίσης τα z και x είναι σταθερά. Μία ικανή συνθήκη για να ισχύει $g_K = g$ σε ένα Ι.Μ.Α. είναι $I \neq 0$ σε κάποιο χρονικό διάστημα (οι ακαθάριστες επενδύσεις δεν μπορούν να εξαφανιστουν).
Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α. •

Από την λογαριθμική παραγώγιση της εξίσωσης (3.1) ως προς τον χρόνο, θα έχουμε

$$g_Y = a g_K + \beta n + \gamma g_R. \tag{3.11}$$

Ορίζουμε σαν σταθερή κατάσταση ένα εφικτό μονοπάτι όπου τα C, Y, K, R και S ειναι γνησίως θετικά για κάθε $t \geq 0$ και μεταβάλλονται με σταθερούς ρυθμούς (όχι απαραίτητα θετικούς), δηλαδή τα g_C, g_Y, g_K, g_R, και g_S όπου z και x είναι σταθερά. Δηλαδή, μία σταθερή κατάσταση είναι ένα Ι.Μ.Α. τέτοιο ώστε z και x ειναι σταθερά (σε αντίθεση με το u που είναι σταθερό σε κάθε Ι.Μ.Α.,Λήμμα 3.2).

Εξ'ορισμού των z και x, μία σταθερή κατάσταση έχει $g_C = g_Y = g_K = g$ ίσα με μία σταθερά. Μία σταθερή κατάσταση από εδώ και στο εξής θα περιγράφεται επαρκώς από τις σταθερές τιμές των g, g_R, z, x και u, δηλαδή από ένα διάνυσμα $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$ όπου $u^* = -g_S^* = -g_R^* > 0$ (από την εξίσωση (3.10) και το Λήμμα 3.1) και επιπλεόν όπου z^* και x^* ειναι θετικά (από τον ορισμό ενός Ι.Μ.Α.).

Ο ρυθμός αύξησης g_c της κατά κεφαλήν κατανάλωσης $g_c = g_C - n$, σε ένα Ι.Μ.Α., όπου συνεχίζουμε να δηλώνουμε τον κοίνο ρυθμό αύξησης των C και Y με g, θα έχουμε

$$g_c = g - n \tag{3.12}$$

Για να αποφύγουμε την μείωση της κατα κεφαλήν κατανάλωσης, κάποια θετική καθαρή επένδυση $(I - \delta K)$ χρειάζεται για να αντισταθμίσει την μείωση της χρησιμοποίησης του φυσικού πόρου με τον χρόνο.

Πράγματι:

Λήμμα 3.3
Σε ένα Ι.Μ.Α. με $g_c \geq 0$, οι καθαρές επενδύσεις, $I - \delta K$, πρέπει να είναι θετικές για όλα τα t.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α. •

Τίθεται τώρα το ερώτημα : Είναι δυνατόν, η συσσώρευση του κεφαλαίου να μπορεί να υποστηρίξει σταθερή κατά κεφαλήν ανάπτυξη; Η διαίσθηση μας λέει οτι η απάντηση είναι ναι, αφού δύο εξισορροπιστικές δυνάμεις συνυπάρχουν στο μοντέλο. Πρώτον, πρέπει να περιμένουμε οτι η τάση της οικονομίας που προκύπτει από την ανάγκη να εξόρυχθούν διαδοχικά μικρότερες ποσότητες από τον πόρο, αντισταθμίζεται από από τις αυξανόμενες αποδόσεις στο κεφάλαιο. Δεύτερον, οι δυναμικά εκρηκτικές συνέπειες αυτού του τύπου των αυξανόμενων αποδόσεων ίσως εξισσοροπείται από την μείωση της χρησιμοποίησης του πόρου. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει πως η διαίσθηση μας είναι σωστή.

Πρόταση 3.1
Υπάρχει ένα Ι.Μ.Α. με $g_c > 0$ αν και μόνον αν

$$a > 1 \ \ or \ \ (a+\beta-1)n > 0 \tag{3.13}$$

Απόδειξη
Θεωρούμε ένα Ι.Μ.Α. με $g_c > 0$. Τότε, από το Λήμμα 3.3, $I > \delta K \geq 0$ για όλα τα t. Τώρα, από το Λήμμα 3.2, $g_K = g_Y = g$, και η εξίσωση (3.11) παίρνει την μορφή $(1-a)g - \gamma g_R = \beta n$. Από το Λήμμα 3.1, $g_R < 0$, και για αυτό $(1-a)g < \beta n$. Από την εξίσωση (3.12) θα έχουμε $(1-a)g_c < (a+\beta-1)n$. Τώρα αφού $g_c > 0$, $a \leq 1$ είναι φανερό οτι θα $(a+\beta-1)n > 0$. •

Αυτή η πρόταση μας λέει πως για να επιτρέψει το μοντέλο μας σταθερή κατά κεφαλήν ανάπτυξη (χωρίς εξωγενή τεχνολογική πρόοδο), χρειάζονται είτε αυξανόμενες αποδόσεις από κοινού στο κεφάλαιο και στο εργατικό δυναμικό σε συνδυασμό με αύξηση πληθυσμου είτε αυξανόμενες αποδοχές στο κεφάλαιο καθ'εαυτό. Τουλάχιστον μία από αυτές τις συνθήκες απαιτείται ώστε η συσσώρευση του κεφαλαίου να αντισταθμίσει τις συνέπειες από την απαραίτητη μείωση της χρησιμοποίησης του πόρου με το χρόνο. Για αυτόν τον λόγο η μελέτη μας λαμβάνει υπόψιν της την αύξηση πληθυσμού και επιτρέπει μεγαλύτερο εύρος τιμών για το a από ό,τι ο Stiglitz(1974) και οι Dasgupta και Heal (1974,1979).

3.1 Βέλτιστα Μονοπάτια

Υποθέτουμε προτιμήσεις χρησιμότητας με ένα σταθερό ρυθμό χρονικής προτίμησης ρ. Έστω οτι η στιγμιαία χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού με άπειρη διάρκεια ζωής είναι ίση με

$$U(c) = \frac{(c^{1-\varepsilon} - 1)}{(1-\varepsilon)}$$

όπου $\varepsilon > 0$ είναι μία σταθερά, η αριθμητική τιμή ελαστικότητας της οριακής χρησιμότητας. Η διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας μετά από αυτό παίρνει την μορφή

$$\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} L(t) e^{-\rho t} dt, \qquad \rho > n \geq 0 \tag{3.14}$$

όπου L τώρα ερμηνεύεται σαν το μέγεθος της οικογένειας ή του νοικοκυριού η οποία μεγαλώνει με ρυθμό n (τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού) επίσης υποθέτουμε $\rho > n$ για να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση του ολοκληρώματος. Ο κοινωνικός σχεδιαστής θέλει να μεγιστοποιήσει την εξίσωση (3.14) υπό τις συνθήκες (3.1)-(3.5).

Η Χαμιλτονιανή για το πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή είναι:

$$H = \frac{c^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} L + \mu_1(F(K,L,R) - cL - \delta K) - \mu_2 R \tag{3.15}$$

όπου μ_1 και μ_2 είναι μεταβλητές που σχετίζονται με το κατεξοχήν κεφάλαιο και το απόθεμα του πόρου, αντίστοιχα. Αναγκαίες συνθήκες για να υπάρχει λύση είναι αυτές που δίνονται από τις πρωτοτάξιες συνθήκες και τις συνθήκες εγκαρσιότητας

$$c^{-\varepsilon} = \mu_1 \tag{3.16}$$

$$\mu_1 F_R = \mu_2 \tag{3.17}$$

$$\dot{\mu_1} = -(F_K - \delta)\mu_1 + \rho\mu_1 \tag{3.18}$$

$$\dot{\mu_2} = \rho\mu_2 \tag{3.19}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu_1 K = 0 \tag{3.20}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu_2 S = 0 \tag{3.21}$$

Παρατηρούμε ότι η (3.19) μας δίνει

$$\mu_2 = \mu_2(0)e^{\rho t}.$$

Εισάγοντας αυτή στην (3.21) θα έχουμε $\lim_{t\to\infty}\mu_2(0)S = 0$, η οποία, εφόσον ισχύει $\mu_2(0) > 0$ από τις εξισώσεις (3.17) και (3.16), είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$\lim_{t\to\infty} S = 0 \tag{3.22}$$

από την οποία προκύπτει ότι για να έχουμε βελτιστοποίηση είναι απαραίτητο να μην μείνει αχρησιμοποίητο κανένα μέρος του αποθέματος του φυσικού πόρου.

Παραγωγίζοντας την (3.16) λογαριθμικά ως προς τον χρόνο και συνδυάζοντάς την με την εξίσωση (3.18) μας δίνει τον κανόνα του Ramsey

$$g_c = \frac{1}{\varepsilon}(F_K - \delta - \rho) = \frac{1}{\varepsilon}(az - \delta - \rho) \tag{3.23}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό Cobb-Douglas της F και από τον ορισμό του $z \equiv Y/K$. Όμοια, παραγωγίζοντας την (3.17) λογαριθμικά ως προς τον χρόνο και σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.18) και

(3.19) θα δώσουν τον κανόνα του Hotelling για την βέλτιστη εξόρυξη του πόρου

$$\frac{\dot{F}_R}{F_R} = F_K - \delta \qquad or \qquad g_Y - g_R = az - \delta \tag{3.24}$$

χρησιμοποιώντας ξανά τον ορισμό Cobb-Douglas της F.

3.1.1 Βέλτιστες Σταθερές Καταστάσεις

Λόγω του μεγάλου εύρους των παραμέτρων, η ανάλυση μας είναι κάπως πιο περίπλοκη από την συνήθη ανάλυση σταθερών καταστάσεων. Πιό συγκεκριμένα, πρέπει να δείξουμε προσοχή στις εξ' ορισμού γνησίως θετικές τιμές των μεταβλητών σε μία σταθερή κατάσταση (οι λόγοι παραγωγής - κεφαλαίου z, κατανάλωσης - κεφαλαίου x, και ο ρυθμός εξόρυξης της πηγής u). Δηλαδή πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να διακρίνουμε την διαφορά μεταξύ μιας σταθερής κατάστασης και μίας νοητής ασυμπτωτικής σταθερής κατάστασης όπου z, x, και/ή u προσεγγίζουν το μηδέν.

Προχωρώντας βήμα βήμα, ορίζουμε ότι ένα εφικτό μονοπάτι που ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες (3.16)-(3.19) ονομάζεται υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι. Ένα υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας (3.20) και(3.21) για να είναι βέλτιστο μονοπάτι.

Λήμμα 3.4
Έστω ότι το $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ είναι ένα υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι τέτοιο ώστε $\lim_{t\to\infty} g_C = \lim_{t\to\infty} g_Y = \lim_{\to\infty} g_K = \bar{g}$.Τοτε:
(α) για κάποιο $\bar{g}_R \leq 0, \lim_{t\to\infty} \bar{g_R} = \bar{g}$, και τα $\bar{g}$, $\bar{g}_R$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(1-a)\bar{g} - \gamma\bar{g}_R = \beta n \tag{3.25}$$

$$(\varepsilon - 1)\bar{g} + \bar{g}_R = \varepsilon n - \rho \tag{3.26}$$

και
(β) εάν, επιπρόσθετα, οι συνθήκες εγκαρσιότητας (3.20) και (3.21) ισχύουν, τότε $\lim_{t\to\infty} g_S = \bar{g}_R < 0$.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α •

Έχουμε ορίσει ένα Ι.Μ.Α. σαν ένα εφικτό μονοπάτι στο οποίο Y, K, C, R και S είναι θετικά και αλλάζουν με σταθερούς (όχι κατά ανάγκη θετικούς) ρυθμούς. Τώρα θα εισάγουμε την γενικότερη έννοια του ασυπτωτικού μονοπατιού. Ένα εφικτό μονοπάτι $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ θα ονομάζεται ασυπτωτικό εάν υπάρχουν σταθερές $\bar{g}_C, \bar{g}_Y, \bar{g}_K, \bar{g}_R$, και $\bar{g}_S$, τέτοίες ώστε στο μονοπάτι $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$, να ισχύει $(g_C, g_Y, g_K, g_R, g_S) \to (\bar{g}_C, \bar{g}_Y, \bar{g}_K, \bar{g}_R, \bar{g}_S)$ για $t \to \infty$. Όμοια, ένα υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι το οποίο είναι ασυπτωτικό θα ονομάζεται ασυπτωτικό υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι. Οι οριακοί ρυθμοί μεγέθυνσης $\bar{g}_C, \bar{g}_Y, \bar{g}_K, \bar{g}_R,$ και $\bar{g}_S$ θα ονομάζονται ασυπτωτικοί ρυθμοί μεγέθυνσης.

Λήμμα 3.5
Έστω το $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ είναι ασυμπτωτικό υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι με ασυπτωτικούς ρυθμούς μεγέθυνσης $\bar{g}_C, \bar{g}_Y, \bar{g}_K, \bar{g}_R$ και $\bar{g}_S$.Υποθέτουμε ότι $\bar{g}_C = \bar{g}_Y = \bar{g}_K = \bar{g}$.Τότε:
(α)$\lim_{t\to\infty}(z, x, u) = (\bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, όπου

$$\bar{z} = \frac{1}{a}(\bar{g} - \bar{g}_R + \delta) \tag{3.27}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{a}[-(1-\gamma)\bar{g}_R + \beta n + (1-a)\delta] \tag{3.28}$$

$$\bar{u} = -\bar{g}_S \tag{3.29}$$

(β)$\bar{g}_R \leq 0$.Εάν $\bar{g}_R < 0$, τότε η συνθήκη εγκαρσιότητας (3.20) ικανοποιείται και
(γ)$\bar{g}_S \leq 0$.Εάν $\bar{g}_S < 0$, τότε η συνθήκη εγκαρσιότητας (3.21) ικανοποιείται.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα A •

Πόρισμα
Υπό τις συνθήκες (α) του Λήμματος 3.5, τα ακόλουθα ισχύουν:
(ι) $\bar{g} \geq \bar{g}_R - \delta$
(ιι) $\bar{z} > 0$ αν και μόνο αν $\bar{g} > \bar{g}_R - \delta$
(ιιι) Εάν $\bar{g}_R < 0$, τότε $\bar{x} > 0$ αν και μόνο αν είτε $a \leq 1$ ή $a > 1 \wedge \delta < -(1-\gamma)\bar{g}_R/(a-1) + \beta n/(a-1)$.

Απόδειξη
Τα ερωτήματα (ι) και (ιι) προκύπτουν από τον ορισμό, $\bar{z} \geq 0$ επομένως, από την (3.27), $\bar{g} \geq \bar{g}_R - \delta$ και $\bar{z} > 0$ αν και μόνο αν $\bar{g} > \bar{g}_R - \delta$. (ιιι) όταν $\bar{g}_R < 0$, τότε από την (3.28) προκύπτει ότι αν και μόνο αν ισχύει είτε $a \leq 1$ ή $a > 1 \wedge \delta < (1-\gamma)\bar{g}_R/(1-a) - \beta n/(1-a)$, τότε $\bar{x} > 0$. •

Όπως έχουμε τονίσει από πρίν μία σταθερή κατάσταση, ορισμένη ως Ι.Μ.Α. τέτοια ώστε οι ρυθμοί z και x είναι σταθεροί (σε αντίθεση με την σταθερότητα του u η οποία ικανοποιείται σε κάθε Ι.Μ.Α.), έχει $g_C = g_Y = g_K = g$, σταθερά. Για το λόγο αυτόν, μία σταθερή κατάσταση περιγράφεται πλήρως από τις σταθερές τιμές των g, g_R, z, x και u, δηλαδή από το διάνυσμα $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$.

Μία οριακή κατάσταση, $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, ενός ασυπτωτικού μονοπατιού τέτοια ώστε τα : (ι) $C, Y,$ και K να έχουν τον ίδιο ασυπτωτικο ρυθμό μεγέθυνσης $\bar{g}$ και (ιι) τα z και x να είναι ασυπτωτικά σταθερά θα ονομάζεται ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση.

Σε αντίθεση με μία αληθινή σταθερή κατάσταση, η ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση δεν χρειάζεται να είναι ταυτόχρονα και εφικτό μονοπάτι (αφού τα $\bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}$, και/ή $\bar{u}$ μπορεί να είναι μήδεν). Επιπρόσθετα, δεν χρειάζεται να ισχύει $\bar{u} = -\bar{g}_R$ (αφού αυτή η ισότητα είναι αναγκαία μόνο για ένα βέλτιστο ασυπτωτικό μονοπάτι).

Το Λήμμα 3.5 και το Πόρισμά του, μας παρέχουν έναν εύκολο τρόπο να ελέγχουμε αν μία ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση ικανοποιεί τις γνησίως θετικά συνθήκες που απαιτούνται από μία αληθινά σταθερή κατάσταση και τις συνθήκες εγκαρσιότητας που απαιτούνται από μία βέλτιστη σταθερή κατάσταση. Η σπουδαιότητα των κριτηρίων του Πορίσματος προκύπτει από το γεγονός ότι $\bar{g}_R$ και $\bar{g}$, όπως καθορίζονται από τις (3.25) και (3.26), είναι ανεξάρτητα από τον ρυθμό υποτίμησης του κεφαλαίου δ. Επιπλέον, το αντίστροφο κομμάτι του ερωτήματος (ιιι) του Πορίσματος τονίζει το γεγονός ότι αν και μόνο αν $a > 1$, τότε είναι δυνατόν να διαλέξουμε δ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε ένα έτσι και αλλίως ασυπτωτικά υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι να καταλήγει έχοντας $\bar{x} < 0$.

Από την άλλη πλευρά, εάν το δ είναι "μικρό", τότε δεν προκύπτει αυτό το πρόβλημα. (Αφού ο Stiglitz (1974), και άλλοι υπέθεσαν $a < 1$ και/ή $\delta = 0$, και το προβλήμα δεν εμφανίζεται ποτέ εκεί). Το πάνω όριο για το δ αντικατοπτρίζει το γεγονός οτι δοθέντος του, g_R, το να διατηρηθεί κάποιος ρυθμός αύξησης παραγωγής g_Y απαιτεί μία συγκεκριμένη ποσότητα συσσώρευσης κεφαλαίου (καθαρές επενδύσεις), όπως η σχέση (3.11) μας δείχνει. Το υπόλοιπο μέρος των καθαρών επενδύσεων είναι μια γραμμικά αύξουσα συνάρτηση του δ και ίσως ένα τυχαία μεγάλο δ εμπεριέχει τον κίνδυνο οι ακαθάριστες επενδύσεις να απορροφήσουν την συνολική παραγωγή, μην αφήνοντας χώρο για την κατανάλωση, όπως δείχνει η σχέση (3.9). Όμως, αυτός ο κίνδυνός δεν μπορεί να υλοποιηθεί εφόσον $a < 1$ μία και σε αυτή την περίπτωση, ο ρυθμός παραγωγής - κεφαλαίου z μετατρέπεται σε μία ένα- προς -ένα σχέση με το δ, από τον κανόνα του Hotelling (3.24).

Σε αντιστοιχία με την σχέση (3.27) του Λήμματος 3.5, και από (ι) και (ιι) του Πορίσματος του, δεδομένου του g_R και σε αντιστοιχία με τον κανόνα του Hotelling για να είναι οι αποδόσεις του κεφαλαίου $(az - \delta)$ και οι οριακές αποδόσεις του πόρου ταυτόχρονα θετικά (και στην πραγματικότητα ίσα μεταξύ τους), ένας μη-αρνητικός ρυθμός παραγωγής απαιτείται.

Οι λύσεις για τους ρυθμούς ανάπτυξης μπορούν να παραχθούν από τις εξισώσεις (3.25) και (3.26). Έστω D η ορίζουσα του γραμμίκου συστήματος των (3.25) και (3.26)

$$D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma \tag{3.30}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του συστήματος δεν εξαρτάται από τα ρ, β, n και δ του προβλήματος. Θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση $D \neq 0$. Πράγματι, η $D > 0$ μοιάζει να είναι η πιο ρεαλιστική περίπτωση αφού για να ισχύει $D \leq 0$ απαιτείται μία σεβαστή ποσότητα αυξανόμενων αποδόσεων $(a + \gamma \geq 1 + \varepsilon\gamma)$. Παρόλα αυτά δεν θα απόκλείσουμε εκ των προτέρων την περίπτωση $D < 0$ η οποία, τουλάχιστον από θεωρητική άποψη, χρήζει κάποιου ενδιαφέροντος γιατί δημιουργεί ένα διαφορετικό δυναμικό. Δεδομένου $D \neq 0$, και λύνοντας το σύστημα των (3.25) και (3.26) θα πάρουμε τους ακόλουθους ρυθμούς ανάπτυξης σε μία ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση

$$\bar{g} = \frac{(\beta + \gamma\varepsilon)n - \gamma\rho}{D} \tag{3.31}$$

$$\bar{g}_R = \frac{[\varepsilon(1 - a - \beta) + \beta]n - (1 - a)\rho}{D} \tag{3.32}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις λύσεις μπορούμε εύκολα να βρούμε τις τιμές των λόγων παραγωγής - κεφαλαίου, κατανάλωσης - κεφαλαίου, και του ρυθμού εξόρυξης του φυσικού πόρου σε μία ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση, όταν $D \neq 0$.
Εισάγωντας την (3.31) και (3.32) στην (3.27) θα έχουμε

$$\bar{z} = \frac{(a + \beta + \gamma - 1)\varepsilon n + (1 - a - \gamma)\rho}{aD} + \frac{\delta}{a} \tag{3.33}$$

Από τις εξισώσεις (3.32) και (3.28) προκύπτει

$$\bar{x} = \frac{[\varepsilon(a + \beta + \gamma - 1 - a\gamma) - a\beta]n + (1 - a)(1 - \gamma)\rho}{aD} + \frac{1 - a}{a}\delta \tag{3.34}$$

Τελικώς, σε μία ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση με $\bar{g}_S = \bar{g}_R$, θα έχουμε από τις σχέσεις (3.10) και (3.32)

$$\bar{u} = -\bar{g}_R = \frac{[\varepsilon(a + \beta - 1) - \beta]n + (1 - a)\rho}{D} \tag{3.35}$$

Οι σχέσεις (3.31),(3.32),(3.33),(3.34) και (3.35) αποτελούν γενικεύσεις των αντίστοιχων σχέσεων του Stiglitz (1974), αφού όπως ήδη έχουμε αναφέρει σε αυτές τις εξισώσεις οι παράμετροι α, β, γ δεν αθροίζονται στην τιμή 1, καθώς επίσης δεν έχουμε και τεχνολογική πρόοδο.

Μία ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι πως το μεγαλύτερο εύρος των παραμέτρων επηρεάζει την ύπαρξη και τον χαρακτήρα των βέλτιστων σταθερών καταστάσεων, υπενθυμίζοντας ότι ένα υποψήφιο μονοπάτι, για να είναι σταθερή κατάσταση, πρέπει οι λόγοι παραγωγής - κεφαλαίου, κατανάλωσης - κεφαλαίου , και ο ρυθμός εξόρυξης του φυσικού πόρου να είναι αυστηρώς θετικοί. Συνοψίζουμε την απάντηση στο ερώτημα ύπαρξης στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.2
Δεδομένου του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14), υποθέτουμε ότι
$D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma \neq 0$. Έστω τα $\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}$, και $\bar{u}$ ορίζονται από τις σχέσεις (3.31),(3.32),(3.33),(3.34) και (3.35) αντίστοιχα.
Τότε:
(α) υπάρχει μία σταθερή κατάσταση $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$ που ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας αν και μόνο αν $a, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, n$ και δ παίρνουν τιμές τέτοιες ώστε: (ι) $\bar{g}_R < 0$, (ιι) $\bar{z} > 0$ και (ιιι) είτε $a \leq 1$ ή $a > 1 \wedge \delta < -(1-\gamma)\bar{g}_R/(a-1) + \beta n/(a-1)$. Αυτό το σύνολο των παραμέτρων έχουν μη-κενό εσωτερικό και
(β) η σταθερή κατάσταση $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$ είναι μοναδική και ίση με $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α •

Παρατήρηση 1
Στην ειδική περίπτωση, $a + \beta + \gamma = 1$, που αναλύθηκε από τον Stiglitz (1974), τα (α.ιι) και (α.ιιι) ικανοποιούνται αυτομάτως. Σε αυτήν την περίπτωση το μόνο που έχουμε να ελεγξουμέ είναι το (α.ι). Τελικώς, μία περίπτωση που παραβιάζεται η (α.ι) για κάθε $\gamma \in (0,1)$ είναι: $\varepsilon n > \rho > n > 0$, $0 < a < 1$, $0 < \beta \leq (\varepsilon n - \rho)(1-a)/[(\varepsilon-1)n]$. Μία περίπτωση που παραβιάζεται η (α.ιι) για κάθε $\beta \in (0,1)$ και κάθε $\rho > 0$ είναι : $n = \delta = 0$, $a + \gamma > 1$, $\varepsilon > (a+\gamma-1)/\gamma$.

Παρατήρηση 2
Η Πρόταση 3.2 μιλάει για σταθερές καταστάσεις που ικανοποιούν τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας και όχι για βέλτιστες σταθερές καταστάσεις. Αυτό γιατί εκτός της περίπτωσης $a + \gamma \leq 1$ δεν έχουμε μπορέσει να αποδείξουμε ότι η σταθερή κατάσταση που ερευνούμε είναι βέλτιστη. Εικάζουμε πως ακόμα και αν $a + \gamma > 1$ (τουλάχιστον όσο ισχύει $D > 0$, δηλαδή $a + \gamma < 1 + \varepsilon\gamma$), μία σταθερή κατάσταση που ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας είναι πράγματι βέλτιστη αλλιώς, δεν υπάρχει μια βέλτιστη σταθερή κατάσταση.

Στην περίπτωση της οικονομικής ανάπτυξης δεν υπάρχει σοβαρός λόγος για να να περιορίσουμε την προσοχή μας σε σταθερές καταστάσεις αντί για ασυπτωτικά σταθερές καταστάσεις. Πράγματι, το παρακάτω Λήμμα δείχνει οτι δεδομένου ενός βέλτιστου ασυπτωτικά μονοπατιού με ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$ τέτοια ώστε $\bar{g} \geq 0$, τότε, γενικά η $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$ είναι μία αληθής σταθερή κατάσταση. Ομοίως, επειδή θα επικεντρωθούμε στην βέλτιστη ανάπτυξη, δεν υπάρχει σοβαρός λόγος να περιορίσουμε την ανάλυση μας σε σταθερές καταστάσεις αντί για μονοπάτια ισορροπίας. Συγκεκριμένα, κάθε βέλτιστο Ι.Μ.Α. είναι μια βέλτιστη σταθερή κατάσταση:

Λήμμα 3.6
(α)Δεδομένου ένος ασυπτωτικού μονοπατιού $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ με ασυπτωτικά σταθερή κατάσταση $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, τότε: (ι) $\bar{u} = -\bar{g}_R > 0$ (ιι) $\bar{z} > 0$ όταν $\bar{g} \geq 0$ και (ιιι) $\bar{x} > 0$, εκτός στην περίπτωση knife-edge όπου ταυτόχρονα ισχύει $a > 1$ και $\delta = -(1-\gamma)\bar{g}_R/(a-1) + (\beta n/a - 1)$ και
(β) δεδομένου ενός Ι.Μ.Α. $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ τότε z, x και u είναι σταθερά και θετικά.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α •

Σε αντίθεση με το (α) του Λήμματος 3.6, οτάν $\rho = 0$(μηδενικός προεξοφλητικός παράγων) ίσως υπάρχουν ασυπτωτικά βέλτιστα μονοπάτια $\bar{g} = \bar{z} = \bar{x} = \bar{u} = 0$. Για την περίπτωση $a + \beta + \gamma = 1$, $\delta = 0$, δηλαδή χωρίς πληθυσμιακή αύξηση και τεχνολογική πρόοδο, το οποίο αποδείχθηκε από τους Stiglitz (1974) και Dasgupta και Heal(1979) υπό τον όρο $a > \gamma$, και $\varepsilon > (1-\gamma)/(a-\gamma)$.

Εάν εισάγουμε την (3.31) στην (3.12) θα πάρουμε τον κατά κεφαλή ρυθμό κατανάλωσης σε μία σταθερή κατάσταση η οποία ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες εξισώσεις και την συνθήκη εγκαρσιότητας

$$g_c^* = g^* - n = \frac{(a+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{D} \tag{3.36}$$

Πρόταση 3.3
Δεδομένου του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14), και υποθέτοντας $D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma \neq 0$.Τότε υπάρχει μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$, ικανοποιώντας τις πρωτοτάξιες εξισώσεις και την συνθήκη εγκαρσιότητας, αν και μόνο αν, σε αντίθεση με το (α.ι) και (α.ιιι) της Πρότασης 3.2, οι παράμετροι ικανοποιούν την σχέση

$$\frac{(a+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{D} > 0 \tag{3.37}$$

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α $\bullet$

Πόρισμα
Εάν $D > 0$, τότε μία σταθερή κατάσταση, που ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας, έχει $g_c^* > 0$ αν και μόνο αν

$$a + \beta > 1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad n > \frac{\gamma\rho}{a + \beta + \gamma - 1} \tag{3.38}$$

Απόδειξη
Εάν υποθέσουμε $D > 0$. Τότε, από την (3.36), $g_c^* > 0 \Leftrightarrow (a+\beta-1)n > \gamma(\rho - n)$. Με δεδομένο ότι $\rho > n$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (3.38) $\bullet$

Το συμπέρασμα από το Πόρισμα της Πρότασης 3.3 είναι ότι όταν $D > 0$, το να διατηρηθεί βέλτιστη κατα κεφαλήν ανάπτυξη απαιτούνται δύο προϋποθέσεις: αυξανόμενες αποδόσεις στο κεφάλαιο και στο εργατικό δυναμικό μαζί με μία ικανοποιητική ποσότητα αύξησης πληθυσμού. Από την Πρόταση 3.1 γνωρίζουμε ότι μόνο όταν είτε $a > 1$ ή $a + \beta > 1$ και $n > 0$ είναι δυνατόν να αντισταθμίστούν οι επιπτώσεις της μείωσης του φυσικού πόρου και να κάνει την διατήρηση της κατα κεφαλήν ανάπτυξης τεχνικά πραγματοποιήσιμη. Συμπεραίνουμε δηλαδή, ότι υπάρχει συνδυασμός παραμέτρων τέτοιος ώστε να διατηρείται η αύξηση της κατά κεφαλήν κατανάλωσης.

3.1.2 Δυναμικά Μετάβασης

Από την εξίσωση (3.9), και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $x \equiv C/K$ και $z \equiv Y/K$, θα έχουμε

$$\dot{x} = (g_C - z + x + \delta)x \tag{3.39}$$

$$\dot{z} = (g_Y - z + x + \delta)z \tag{3.40}$$

Εισάγωντας την (3.9) και τον κανόνα του Hotelling (3.24), στην (3.11) παράγουμε την σχέση:

$$g_Y = az - \frac{a}{1-\gamma}x + \frac{\beta n + (\gamma - a)\delta}{1-\gamma} \tag{3.41}$$

Χρησιμοποιώντας αυτη την έκφραση στην (3.40),θα βρούμε

$$\dot{z} = \left[(a-1)z + \frac{1-a-\gamma}{1-\gamma}x + \frac{\beta n + (1-a)\delta}{1-\gamma}\right]z \tag{3.42}$$

Εισάγωντας την $g_C = g_c + n$ και τον κανόνα του Ramsey (3.23) μέσα στην (3.39) θα πάρουμε :

$$\dot{x} = \left[\left(\frac{a}{\varepsilon} - 1\right) z + x - \frac{\delta + \rho}{\varepsilon} + n + \delta\right] x \tag{3.43}$$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα $u \equiv R/S$ ως προς τον χρόνο, και χρησιμοποιώντας την (3.3), θα πάρουμε :

$$\dot{u} = (g_R + u)u \tag{3.44}$$

Από την (3.24) και (3.41), θα πάρουμε :

$$\dot{u} = \left(\frac{-a}{1-\gamma} x + \frac{\beta n + (1-a)\delta}{1-\gamma} + u\right) u \tag{3.45}$$

Το δυναμικό των z, x και u περιγράφεται πλήρως από το σύστημα (3.42)-(3.43) και (3.45). Χρησιμοποιούμε το γεγονός οτι το σύστημα μπορεί να διασπαστεί : οι σχέσεις (3.42) και (3.43) αποτελούν ένα δυναμικό υποσύστημα για τα z και x. Στην σταθερή κατάσταση, θα ισχύει $\dot{z} = \dot{x} = 0$. Δημιουργώντας τον Ιακωβιανό Πίνακα αποτιμημένο στην σταθερή κατάσταση θα έχουμε:

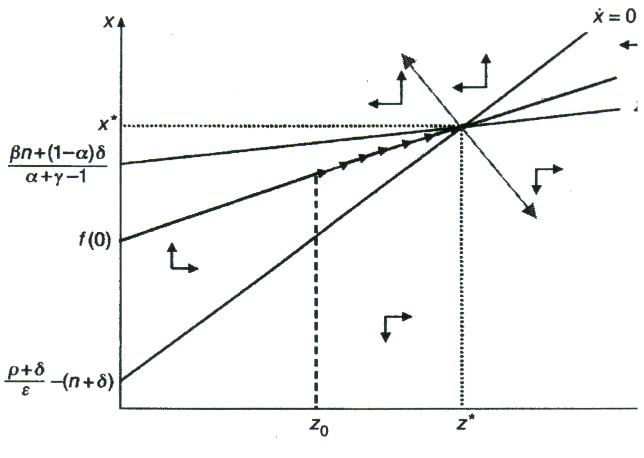
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-1)z^* & \frac{1-a-\gamma}{1-\gamma} z^* \\ \\ (\frac{a}{\varepsilon} - 1)x^* & x^* \end{bmatrix}$$

Το ίχνος της J είναι: $(a-1)z^* + x^* = az^* - g^* - \delta = -g_R^* > 0$, από την (3.9), και (3.27), και το (α.ι) της Πρότασης 3.2. Εντεύθεν, τουλάχιστον μία ιδιοτιμή είναι θετική (ή έχει θετικό πραγματικό μέρος). Η ορίζουσα, Δ, της J είναι:

$$\Delta = a \frac{D}{(\gamma - 1)\varepsilon} z^* x^* \tag{3.46}$$

όπου η D είναι δεδομένη από την (3.30). Η Δ είναι αρνητική (δηλώνοντας πραγματικές ιδιοτιμές αντίθετου προσήμου) αν και μόνον αν $D > 0$. Στην περίπτωση των σταθερών αποδόσεων ($a + \beta + \gamma = 1$) η συνθήκη $D > 0$ ικανοποιείται αυτόματα. Αλλά όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, εάν υπάρχει μία ικανοποιητική ποσότητα από αυξανόμενες αποδόσεις ως προς τον K και R, τότε η D μπορεί να είναι αρνητική.

Στο Σχήμα 1, έχει σχεδιαστεί ένα διάγραμμα φάσης για μία συγκεκριμένη τιμή των παραμέτρων που ικανοποιεί τα $n > 0, a > 1$, και $D > 0$ (η τελευταία συνθήκη επιτυγχάνεται όταν $\varepsilon > a \geq 1$). Τα $\dot{z} = 0$ και $\dot{x} = 0$ είναι ευθείες γραμμές όπως φαίνονται στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 1

Στην γειτονιά της σταθερής κατάστασης, διαμέσου του σαγματικού μονοπατιού θα έχουμε

$$\dot{z} = \lambda(z - z^*) \tag{3.47}$$

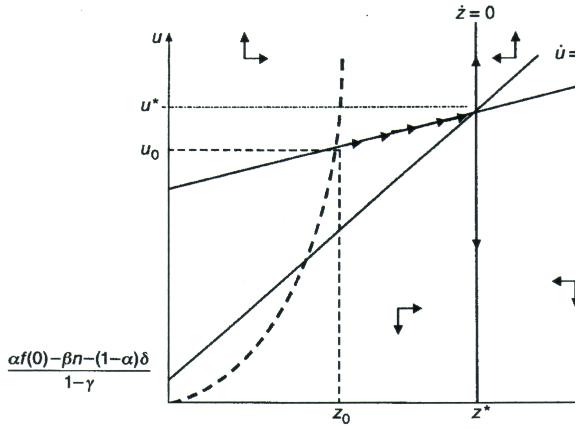
$$x = f(z) \tag{3.48}$$

όπου η σταθερά λ είναι η αρνητική ιδιοτιμή της J, και f είναι μία γραμμική συνάρτηση η οποία μπορεί να καθοριστεί.

Από αυτό το γεγονός, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα φάσης ως προς z και u (Σχήμα 2) χρησιμοποιώντας την (3.47) και (3.45), όπου το x έχει αντικατασταθεί από την $f(z)$ της σχέσεως (3.48). Η Ιακωβιανή του συστήματος, αποτιμημένη σε μία σταθερή κατάσταση, έχει ιδιοτιμές λ και u^* $(\lambda < 0 < u^*)$. Οι καμπύλες ίσων τάσεων $\dot{z} = 0$ και $\dot{u} = 0$ είναι ευθείες γραμμές. Αντικαθιστώντας με uS το R στην συνάρτηση παραγωγής (3.1) θα έχουμε

$$z = AK^{a-1}L^{\beta}u^{\gamma}S^{\gamma} \tag{3.49}$$

κάτι το οποίο μας δείχνει ότι, δεδομένου των K, L και S, οι τιμές των z και u δεν είναι ανεξάρτητες αρχικά από τα $K(0) = K_0$, $L(0) = L_0$ και $S(0) = S_0$ έχουμε δηλαδή ότι $u_0 = A^{-1/\gamma}K_0^{(1-a)/\gamma}L_0^{-\beta/\gamma}S_0^{-1}z_0^{1/\gamma} \equiv B(0)z_0^{1/\gamma}$. Αυτή η συνοριακή συνθήκη αναπαραστάται με την διακεκομμένη καμπύλη του Σχήματος 2. Η τομή αυτής της καμπύλης και του σαγματικού μονοπατιού προσδιορίζει μοναδικά (τουλάχιστον τοπικά) τις αρχικές τιμές των z_0 και u_0, που απαιτούνται για σύγκλιση στην σταθερή κατάσταση. Η μοναδική τομή μεταξύ της γραμμής $z = z_0$ και του σαγματικού μονοπατιού του Σχήματος 1 δίνουν το απαιτούμενο x_0. Η κίνηση της οικονομίας μέσα στον χρόνο είναι διαμέσου του σαγματικού μονοπατιου των Σχημάτων 1 και 2 προς το σημείο σταθερής κατάστασης.



ΣΧΗΜΑ 2

Οι κλίσεις των $\dot{x} = 0$ και $\dot{z} = 0$ στο Σχήμα 1 μπορούν να είναι είτε θετικές ή αρνητικές, κάτι που εξαρτάται από τις παραμέτρους. Στην περίπτωση που αναλύουμε το a είναι λιγό πάνω από την μονάδα έτσι ώστε η κλίση $\dot{z} = 0$ να είναι θετική (αν και λίγο κατω από το 1) και το ε είναι αρκετά πάνω από το a έτσι ώστε η $\dot{x} = 0$ να είναι ψηλότερα από την $\dot{z} = 0$ (η οποία, όταν $a > 1$ είναι προαπαιτούμενο για την ευστάθεια της σταθερής κατάστασης). Η περίπτωση πού φαίνεται στο Σχήμα 2 είναι αυτή της οικονομίας χωρίς φυσικούς πόρους αφού $B(0)z^{*1/\gamma} > u^*$.(Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν έχουμε μία οικονομία πλούσια σε φυσικές πόρους , η διακεκομμένη καμπύλη θα έτεμνε το σαγματικό μονοπάτι δεξιά από το σημείο σταθερής κατάστασης.)

Από την συνοριακή συνθήκη που προκύπτει από την (3.49), θα ορίσουμε ένα αυθεντικό τριδιάστατο δυναμικό σύστημα σαν σαγματικά ευσταθές αν και μόνον αν η Ιακωβιανή του συστήματος έχει μία αρνητική ιδιοτιμή και δύο θετικές (ή δύο ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος). Από την άλλη πλευρά, ένα δυναμικό σύστημα θα το αποκαλούμε μη - ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές ή έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

Πρόταση 3.4

Το δυναμικό του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14) περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις (3.42),(3.43) και (3.45). Μία σταθερή κατάσταση (z^*, x^*, u^*) είναι σαγματικά ευσταθής αν και μόνον αν $D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma > 0$, και είναι μη - ευσταθής αν $D < 0$.

Απόδειξη

Βλέπε Παράρτημα Α •

Πόρισμα

Μία σαγματικά ευσταθής κατάσταση έχει $g_c^* > 0$ αν και μόνο αν

$$a + \beta > 1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad n > \frac{\gamma\rho}{a + \beta + \gamma - 1} \tag{3.50}$$

Απόδειξη

Από την Πρόταση 3.4, ένα σαγματικά ευσταθές σημείο έχει $D > 0$. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε το Πόρισμα της Πρότασης 3.3 •

Οι Προτάσεις 3.2 και 3.4 μαζί, μας δίνουν την ύπαρξη μίας ευσταθούς σταθερής κατάστασης ακόμα και έξω από το εύρος των παραμέτρων που εξετάστηκαν από τον Stiglitz (1974). Πράγματι, τα Σχήματα 1 και 2 μας δίνουν την εικόνα ότι η ύπαρξη μίας ευσταθούς κατάστασης είναι συμβατή με τιμές του a πάνω από την μονάδα, έτσι ώστε να μπορεί να υπάρξουν αυξανόμενες αποδόσεις ως προς το κεφάλαιο. Επιπλέον, από το Πόρισμα της Πρότασης 3.4 προκύπτει ότι για να έχω βέλτιστη ευσταθή ανάπτυξη πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα δύο χαρακτηριστικά: αυξανόμενες αποδόσεις ως προς το κεφάλαιο και το εργατικό δυναμικό μαζί με μία ικανοποιητική ποσότητα πληθυσμιακής αύξησης.

Από την άλλη πλευρά, εάν $D < 0$ υπάρχει, συνδυασμός παραμέτρων τέτοιος ώστε να έχουμε σταθερή κατα κεφαλήν ανάπτυξη και να ικανοποιούνται οι πρωτοτάξιες συνθήκες καθώς και η συνθήκη εγκαρσιότητας, αλλά παρολά αυτά η σταθερή κατάσταση είναι μη - ευσταθής: Μετά από μία διαταραχή σε μία από τις προκαθορισμένες μεταβλητές, K, L, ή S, δεν είναι βέλτιστο για τα (z, x, u) να κινηθούν πίσω προς το σημείο (z^*, x^*, u^*).

Συνδέοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με τους ορισμούς του Κεφαλαίου 2, όπου ορίσαμε την αυστηρά ενδογενή ανάπτυξη και την ασθενώς ενδογενή ανάπτυξη, από την Πρόταση 3.4 και από το Πόρισμα της έχουμε τις παρακάτω ενδιαφέρουσες προεκτάσεις:

Σε ένα μοντέλο βέλτιστης ανάπτυξης με συνάρτηση της μορφής Cobb-Douglas με μή-ανανεώσιμους φυσικούς πόρους, τα ακόλουθα ισχύουν:
(α)Δεν υπάρχει ευσταθής σταθερή κατάσταση με (αυστηρά) ενδογενή ανάπτυξη, ούτε ως σαν knife-edge περίπτωση
(β)Μία ευσταθής κατάσταση με ασθενώς - ενδογενή ανάπτυξη υπάρχει αν και μονο αν:
(ι) $a + \gamma < 1 + \varepsilon\gamma$ (δηλαδή $D > 0$) και(ιι) υπάρχουν ταυτόχρονα αυξημένες αποδόσεις ως προς το κεφάλαιο και ως προς το εργατικό δυναμικό μαζί, και μία ικανή ποσότητα αύξησης πληθυσμού.

(γ) η ασθενώς ενδογενής ανάπτυξη παρουσιάζει την ιδιότητα (παρόμοια με αυτή της αυστηρά ενδογενούς ανάπτυξης) οτι μακροπρόθεσμα κατα κεφαλήν ανάπτυξη εξαρτάται από την τεχνολογία και από την επιλογή παραμέτρων.

Η τελευταία παρατήρηση, η οποία προκύπτει από την σχέση (3.36), επιτρέπει στις κυβερνήσεις με μια κατάλληλη φορολογία και με μία πολιτική επιχορηγήσεων να επηρεάσουν όχι μόνο την κλίμακα όπου έχουμε την ανάπτυξη, αλλά και τον μακροπρόθεσμο ρυθμό ανάπτυξης μίας οικονομίας. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα συμβατικά μοντέλα ασθενούς ενδογενούς ανάπτυξης όπου οι τυχόν αλλαγές πολιτικής δεν έχουν σημαντικά αποτελέσματα. Αυτή η διαφορά προέρχεται από το γεγονός οτι σε αυτά τα μοντέλα οι μη - ανανεώσιμοι φυσικοί πόροι δεν έχουν θέση στην συνάρτηση παραγωγής.

3.2 Η Περίπτωση χωρίς Αύξηση Πληθυσμού

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση ενός μοντέλου χωρίς πληθυσμιακή αύξηση ώστε να έχουμε μια πλήρη εικόνα για τον χαρακτήρα των σταθερών καταστάσεων και αν αυτές είναι όντως μη - ευσταθείς. Εκτός και αν σε αντίθετη περίπτωση σημειώνεται, όταν μιλάμε για μια σταθερή κατάσταση θα καταλαβαίνουμε οτι είναι μία σταθερή κατάσταση που ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας.

Πρόταση 3.5
Υποθέτουμε ότι $n = 0$.Τότε:
(α) από την $\rho > 0$, δεν μπορεί να υπάρξει ευσταθής κατάσταση με $g_c^* = 0$. Όταν $D(\equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma) = 0$, δεν υπάρχει καμμία σταθερή κατάσταση
(β)όταν $D \neq 0$, υπάρχει μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$ αν και μονο αν $a > 1$, $D < 0$, και $\delta < -(1-\gamma)\rho/D$ και
(γ) μια σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$ είναι μη - ευσταθής.

Απόδειξη
Βλέπε Παράρτημα Α •

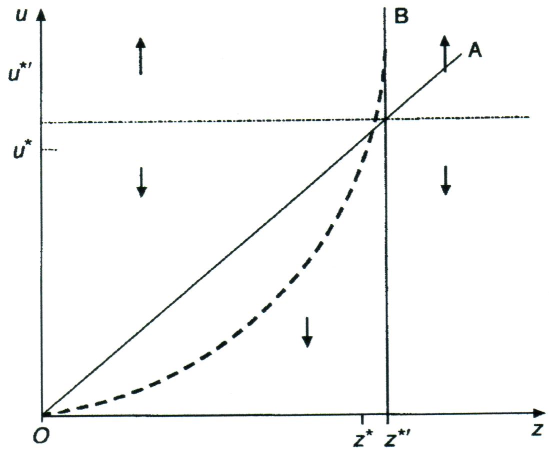
Ήδη από την Πρόταση 3.1 γνωρίζουμε ότι όταν $n = 0$, για να απαιτήσουμε την διατήρηση ανάπτυξης χρειάζεται η ισχυρή υπόθεση των αυξανόμενων αποδόσεων στο κεφάλαιο ($a > 1$). Αλλά όπως η Πρόταση 3.5 μας υπενθυμίζει, η πραγμάτοση αυτης της ανάπτυξης εξαρτάται από τις παραμέτρους.

Η προϋπόθεση των αυξανόμενων αποδόσεων ως προς το κεφάλαιο έγκειται στο γεγονός ότι πρέπει να ισχύει $a > 1$ ώστε να κανει τον κανονα του Ramsey ικανό να υποστηρίξει διατήρηση ανάπτυξης όταν $n = 0$. Εάν αντίθετως ισχύει, $a \leq 1$, τότε το οριακό προϊόν του κεφαλαίου τείνει στο μηδέν καθώς έχουμε συσσώρευση κεφαλαίου, το εργατικό δυναμικό παραμένει σταθερό και η χρήση του φυσικού πόρου μειώνεται.

Σε κάθε περίπτωση, λόγω της μη -ευστάθειας του συστήματος, η σταθερή κατάσταση με ανάπτυξη δεν είναι δελεαστική. Η πραγματοποίηση της προϋποθέτει την ύπαρξη κατάλληλων αρχικών συνθήκων. Πράγματι, για κάθε δεδομένο K_0 και L_0, S_0 αυτά πρεπεί να ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη

$$K_0^{a-1} L_0^{\beta} S_0^{\gamma} = z^* u^{*-\gamma} \tag{3.51}$$

από την εξίσωση (3.49). Θεωρούμε το παρακάτω πείραμα όπου, για ευκολία, θέτουμε $\delta = 0$ (επιπρόσθετα $n = 0$). Θεωρούμε, ότι βρισκόμαστε στην θέση ισορροπίας (z^*, x^*, u^*) λόγω κάποιας σύμπτωσης, μέχρι τον χρόνο t_1, το οποίο, στο επίπεδο (z, u), είναι το σημείο (z^*, u^*) του Σχήματος 3. Στο αντίστοιχο διάγραμμα φάσης για τα z και x το σημείο σταθερής κατάστασης (z^*, x^*) είναι μη - ευσταθές (πηγή). Το Σχήμα 3 προϋποθέτει $z = z^*$ και $x = x^*$ για ολά τα $t < t_1$. Τότε μία προς τα πάνω μετατόπιση λαμβάνει χώρα, στον ρυθμό χρονικής προτίμησης ρ δηλώνοντας ότι τα z^*, x^* και u^* μετατοπίζονται προς τα πάνω κατά αναλογία οπως δείχνουν οι σχέσεις (3.33),(3.34) και (3.35) με $n = \delta = 0$, δηλαδή η μετατόπιση θα είναι πάνω στην οριζόντια γραμμή όπως η γραμμή του Σχήματος 3.



ΣΧΗΜΑ 3

Εάν φανταστούμε για μία στιγμή ότι τα οι z και x αμέσως μετατοπίζονται στην νέα σταθερή κατάσταση $z^{*'}$ και $x^{*'}$. Τα βέλη στο Σχήμα 3 δείχνουν την κατεύθυνση της κίνησης του u μετά την χρονική στιγμή t_1 σύμφωνα με την διαφορική εξίσωση $\dot{u} = (-ax^{*'}/(1-\gamma) + u)u$ η οποία είναι ίδια με την εξίσωση

(3.45) εάν θέσουμε $n = 0 = \delta$ και $(z, x) = (z^{*'}, x^{*'})$. Αυτό υποδηλώνει μία κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση αρχίζοντας από το σημείο B του Σχήματος 3 (B είναι το σημειό όπου η διακεκομμένη καμπύλη που αναπαριστά την συνοριακή συνθήκη (3.51) με z^* και x^* αφού αντικατασταθεί από το z και x αντιστοίχως, τέμνει την κατακόρυφη γραμμή $z = z^{*'}$).

Ο αυξανόμενος ρυθμός εξόρυξης του u θα προκαλέσει την εξάντληση του αποθέματος του φυσικού πόρου σε πεπερασμένο χρόνο κατι το οποίο δεν μπορεί να είναι βέλτιστο. Στην αντίθετη περίπτωση όπου την χρονική στιγμή t_1 ο ρυθμός του χρόνου προτίμησης ρ μετατοπίζεται προς τα κάτω, το σημείο B θα είναι κάτω από την νέα σταθερή κατάσταση $(z^{*'}, u^{*'})$ έτσι ώστε η κίνηση του u να είναι προς τα κάτω αφήνοντας κάποιο από το απόθεμα του πόρου αχρησιμοποίητο για πάντα. Για αυτό, η εκ προοιμίου πρόβλεψη οτι την χρονική στιγμή t_1, τα z και x μετατοπίζονται στις νέες τιμές των σταθερών καταστάσεων καταρίπτεται αφού μετά από μία διαταραχή η οικονομία δεν επιστρέφει στην νέα της σταθερή κατάσταση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όταν ένας μη - ανανεώσιμος φυσικός πόρος εισάγεται στην παραγωγική διαδικασία τότε αυστηρά ενδογενής ανάπτυξη δεν υπάρχει ούτε ως σαν knife-edge περίπτωση. Εναλλακτικά μπορούμε να πουμέ οτι μια περιπτωση knife-edge επανεμφανίζεται με έναν διαφορετικό και ακόμα πιο πρώϊμο τρόπο: Σταθερή ανάπτυξη χώρις την εξωγενή διέγερση της πληθυσμιακής αύξησης απαιτεί όχι μονο την ισχυρή υπόθεση του $a > 1$, αλλά επίσης και τις αρχικές συνθήκες να ταιριάζουν ακριβώς με τις συνθήκες σταθερής κατάστασης όπως φαίνεται από την σχέση (3.51).

Κεφάλαιο 4

Φυσικοί Πόροι Σε Μία Οικονομία Δύο Χωρών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία νοητή οικονομία που αποτελείται από δύο χώρες. Συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε πως ο αρχικός παραγωγικός πλούτος των μη-ανανεώσιμών πόρων επηρεάζει το εισόδημα και την ανάπτυξη, των χωρών αυτών. Θα δείξουμε αναλυτικά ότι, για το αν μία πλούσια σε πόρους χώρα αναπτύσεται γρηγορότερα ή πιο αργά από μία άλλη χώρα εξαρτάται από την οικονομική της δομή.

Αναλυτικότερα θα μοντελοποιήσουμε μία παγκόσμια οικονομία αποτελούμενη από δύο χώρες οι οποίες εμπλέκονται στο διεθνές εμπόριο. Επιτρέπουμε στις δύο χώρες να εμπέλεκονται στην παραγωγή του τελικού προϊόντος. Το κεφάλαιο και ο μη-ανανεώσιμος φυσικός πόρος χρησιμοποιούνται σαν παράγοντες παραγωγής και υποθέτουμε ότι και οι δύο χώρες έχουν πρόσβαση στην ίδια τεχνολογία για να παράγουν το τελικό προϊόν. Μία μόνο χώρα κατέχει εξ ολοκλήρου το απόθεμα του φυσικού πόρου, και έχει έναν τομέα εξόρυξης του πόρου ο οποίος καταναλώνει τον πόρο μεγιστοποιώντας τα προεξοφληθέντα κέρδη. Οι οικονομίες εμπορεύονται το τελικό προϊόν και τον φυσικό πόρο, αλλά δεν επιτρέπουμε τον διεθνή δανεισμό.

Κάθε χώρα έχει έναν αντιπροσωπευτικό καταναλωτή ο οποίος ικανοποιείται καταναλώνοντας το τελικό προϊόν μεγιστοποιώντας την στιγμιαία χρησιμότητα, η οποία δεσμέευται από έναν ορισμένο προϋπολογισμό. Το επιτόκιο ενοικίασης του κεφαλαίου κάθε χώρας είναι καθορισμένο ενδογενώς και είναι ίσο με το οριακό φυσικό προϊον του κεφαλαίου σε κάθε χώρα. Επιπλεόν μία συμψηφιστική συνθήκη αγοράς για τον μη-ανανεώσιμο πόρο καθορίζει ενδογενώς την τιμή του.

4.1 Το Μοντέλο

Όπως ήδη αναφέραμε θεωρούμε ένα οικονομικό περιβάλλον που αποτελείται από δύο χώρες από τις οποίες η μία είναι προικισμένη με έναν μη-ανανεώσιμο φυσικό πόρο ενέργειας (θα ονομάζεται χώρα 1) και η άλλη είναι μία χώρα με έλλειψη φυσικών πόρων (που θα αναφέρεται σαν χώρα 2). Ο αντιπροσωπευτικός καταναλώτης κάθε χώρας προσδοκεί να μεγιστιποιήσει την χρησιμότητα της κατανάλωσης κάτω από έναν ορισμένο προϋπολογοσμό. Οι καταναλωτές των δύο χωρών έχουν ακριβώς τις ίδιες προτιμήσεις. Αν και η χώρα 1 κατέχει και μπορεί να καταναλώσει τον μη-ανανεώσιμο φυσικό πόρο, και οι δύο οικονομίες έχουν μία ποσότητα κεφαλαίου που η καθεμία συνδυάζει με τον μη-ανανεώσιμο φυσικό πόρο ώστε να παράγουν ένα πανομοιότυπο τελικό προϊόν.

Η τεχνολογία του τελικού προϊόντος δίνεται από την σχέση:

$$Y_i = F(K_i, R_i) = K_i^a (e^{\eta t} R_i)^{1-a} \tag{4.1}$$

όπου K_i και R_i για $i = 1, 2$ δηλώνουν την ποσότητα του κεφαλαίου και του μη-ανανεώσιμου πόρου που χρησιμοποιείται στην συνάρτηση παραγωγής Y_i της χώρας i και η είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της τεχνολογικής προόδου . Έστω ότι το r_i δηλώνει το επιτόκιο ενοικίασης του κεφαλαίου στην χώρα i. Για να μεγιστοποιήσουμε τα κέρδη, ο τομέας του τελικού προϊόντος της χώρας i θέτει το οριακό φυσικό προϊόν κάθε παράγοντα να είναι ίσο με την τιμή ενοικίου όπως φαίνεται παρακάτω :

$$r_i = a\frac{Y_i}{K_i} \qquad\qquad q = (1-a)\frac{Y_i}{R_i}. \tag{4.2}$$

όπου το q δηλώνει την τιμή του μη-ανανεώσιμου πόρου. Η χώρα 1 εξάγει το προϊον της πηγής στην χώρα 2. Με την απουσία των εμπορικών διαταραχών, ο φυσικός πόρος πωλείται στην ίδια τιμή και στις δύο χώρες. Αναδιατάσσοντας αυτές τις εκφράσεις θα έχουμε:

$$Y_i = q\frac{R_i}{1-a} = r_i\frac{K_i}{a} \qquad \Rightarrow \qquad K_i = \frac{a}{1-a}\frac{q}{r_i}R_i. \tag{4.3}$$

Αντικαθιστώντας το K_i από την εξίσωση (4.3) στην εξίσωση (4.1) θα παράγουμε

$$Y_i = \left(\frac{a}{1-a}\frac{q}{r_i}\right)^a e^{(1-a)\eta t} R_i. \tag{4.4}$$

Εξισώνοντας αυτήν την έκφραση με το Y_i από την εξίσωση (4.3), παράγει μία σχέση ανάμεσα στο επιτόκιο του ενοικίου του κεφαλαίου r και την τιμή του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου :

$$r_i = \left(a^a(1-a)^{1-a}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\frac{e^{\eta t}}{q}\right)^{\frac{1-a}{a}}. \tag{4.5}$$

Η εξίσωση (4.5) μας δείχνει, ότι η τάση Hecksher-Ohlin για την εξίσωση των τιμών των παραγόντων ικανοποιείται. Χρησιμοποιώντας το γεγονός $r_1 = r_2 = r$ και την εξίσωση (4.3) θα έχουμε

$$R_i = \frac{1-a}{a}\frac{r}{q}K_i \tag{4.6}$$

υποδεικνύοντας ότι ο λόγος του $\frac{R_i}{K_i}$ είναι ο ίδιος και για τις δύο χώρες.

4.1.1 Ο Τομέας Εξόρυξης

Με δεδομένο ότι το , r_1 είναι το ακαθάριστο επιτόκιο της χώρας 1, ορίζουμε

$$\omega(t) = e^{-\int_0^t (r_1(t)-\delta)d\tau} \tag{4.7}$$

με δ να είναι η τιμή υποτίμησης του κεφαλαίου. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η εξόρυξη του φυσικού πόρου είναι ανέξοδη.

Χρησιμοποιώντας $\omega(t)$ να δηλώνει τα προεξοφληθέντα κέρδη, ο τομέας εξόρυξης βρίσκει το βέλτιστο μονοπάτι εξόρυξης $R(t)$ ώστε να μεγιστοποιήσουμε την παρούσα τιμή των κερδών υπό τον περιορισμό ότι η συνολική εξόρυξη του πόρου δεν ξεπερνάει το αρχικό απόθεμα του μη- ανανεώσιμου φυσικού πόρου, δηλαδή

$$max \int_0^\infty q(t)R(t)\omega(t)dt \tag{4.8}$$

με

$$\int_0^\infty R dt \leq S_0.$$

Η Λαγκραντζιανή αυτού του προβλήματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$Ł = qRe^{-\int_0^t (r_1(\tau)-\delta)d\tau} - \lambda R \tag{4.9}$$

και οι αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε μέγιστο καθώς και η συνθήκη εγκαρσιότητας δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$q = \lambda e^{\int_0^t (r_1(\tau)-\delta)d\tau}, \qquad \dot{\lambda} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} qRe^{-\int_0^t (r_1(\tau)-\delta)d\tau} = 0. \tag{4.10}$$

Μία διαφορική εξίσωση για το q θα προκύψει εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz ο οποίος θα μας δώσει

$$\frac{\dot{q}}{q} = r_1(t) - \delta. \tag{4.11}$$

Αυτή η συνθήκη υποδηλώνει ότι η τιμή q, του μη-ανανεώσιμου πόρου πρέπει να αυξάνει με το επιτόκιο , ή ισοδύναμα, η συνθήκη απόδοσης Solow-Stiglitz ισχύει. Η εξίσωση (4.11) υποδηλώνει ότι ο φυσικός πόρος λειτουργεί σαν μετοχή για την οικονομία η οποία για να έχει κίνητρο να διατηρήσει τον πόρο πρέπει η τιμή του να αυξάνει με το επιτόκιο. Αντικαθιστώντας το r_1 από την εξίσωση (4.5) στην εξίσωση (4.11), θα παράγουμε μία εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνηση της τιμής του μη -ανανεώσιμου φυσικού πόρου q :

$$\frac{\dot{q}}{q} = r_1 - \delta = \left(a^a(1-a)^{1-a}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\frac{e^{\eta t}}{q}\right)^{\frac{1-a}{a}} - \delta. \tag{4.12}$$

Πράγματι, αυτή η διαφορική εξίσωση έχει μια αναλυτική λύση που δίνεται από την :

$$q(t) = \left(\frac{\Lambda}{\eta+\delta} e^{\frac{1-a}{a}\eta t} + \frac{1}{e^{\frac{1-a}{a}\delta t}} \left(q(0)^{\frac{1-a}{a}} - \frac{\Lambda}{\eta+\delta}\right)\right)^{\frac{a}{1-a}}, \tag{4.13}$$

όπου $\Lambda = (a^a(1-a)^{1-a})^{\frac{1}{a}}$ και $q(0)$ απομένουν να καθοριστούν. Το σημαντικό που προκύπτει από αυτή την εξίσωση είναι ότι, η τιμή του μη - ανανεώσιμου φυσικού πόρου μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί σε συνάρτηση από το $q(0)$ σε σχέση με το $\left(\frac{\Lambda}{\eta+\delta}\right)^{\frac{a}{1-a}}$.

Παρατηρώντας τις εξισώσεις (4.5), (4.12) και (4.13) προκύπτει ότι ο μακροπρόθεσμος ρυθμός αύξησης του q είναι ίσος με :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{q}}{q} = \eta \tag{4.14}$$

Δηλαδή, ο ρυθμός ανάπτυξης της τεχνολογικής προόδου ως προς τον φυσικό πόρο, -η- επηρεάζει θετικά τον μακροπρόθεσμο ρυθμό ανάπτυξης της τιμής του. Παρόμοια με το βασικό μοντέλο του Ramsey στο οποίο η τεχνολογική πρόοδος ως προς το εργατικό δυναμικό επηρεάζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αύξησης του μισθού, εδώ ο ρυθμός ανάπτυξης της τεχνολογικής προόδου ως προς τον φυσικό πόρου επηρεάζει θετικά την μακροπρόθεσμη τιμή του πόρου.

4.2 Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης του Καταναλωτή

4.2.1 Η Πλούσια σε Φυσικούς Πόρους Χώρα

Ο αντιπροσωπευτικός καταναλωτης της χώρας 1 λύνει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας υπό έναν συγκεκριμένο προϋπολογισμό όπως φαίνεται παρακάτω

$$max \int_0^\infty \frac{c_1(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \tag{4.15}$$

υπό την συνθήκη

$$\dot{K}_1(t) = (r_1 - \delta)K_1(t) + \pi(t) - c_1(t) \tag{4.16}$$

$$\text{με δεδομένο ότι} \qquad K_1(0) = K_{0,1} > 0,$$

όπου $\frac{1}{\theta} > 0$ ειναι η ελαστικότητα της αντικατάστασης, - $\rho > 0$ - είναι το προεξοφληθέν επιτόκιο, και -δ- είναι ο σταθερός ρυθμός υποτίμησης του κεφαλαίου. Ακόμα το -π- δηλωνει τα κέρδη του τομέα εξόρυξης. Το αρχικό και στιγμιαίο t απόθεμα του κεφαλαίου για την χώρα 1 είναι $K_{0,1}$ και $K_1(t)$, αντιστοίχως. Εφόσον η εξόρυξη είναι ανέξοδη ισχύει $\pi(t) = q(t)R(t)$. Δηλαδή, η συνθήκη για τον προϋπολογισμό της χώρας 1 που δίνεται από την εξίσωση (4.16) μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{K}_1(t) = (r_1 - \delta)K_1(t) + q(t)R(t) - c_1(t). \tag{4.17}$$

Με δεδομένο ότι μόνο η χώρα 1 κατέχει τον φυσικό πόρο, ο ρυθμός εξόρυξης αποτελείται από ότι χρησιμοποιείται για την εσωτερική κατανάλωση συν μια ποσότητα που προορίζεται για το εξωτερικό.

4.2.2 Η Χώρα με Έλλειψη Φυσικών Πόρων

Ο αντιπροσωπευτικός καταναλωτης της χώρας 2 λύνει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας υπό ένα συγκεκριμένο προϋπολογισμό όπως φαίνεται παρακάτω

$$max \int_0^\infty \frac{c_2(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \tag{4.18}$$

υπό την συνθήκη

$$\dot{K}_2(t) = (r_2 - \delta)K_2(t) - c_2(t) \tag{4.19}$$

με δεδομένο

$$K_2(0) = K_{0,2} > 0.$$

Όπου $K_{0,2}$ και $K_2(t)$ είναι, αντίστοιχα, το αρχικό και το στιγμιαίο ως προς τον χρόνο t απόθεμα κεφαλαίου της χώρας 2.

Η συνθήκη Euler για το πρόβλημα του καταναλωτή της χώρας i δίνεται, όπως δείχνουμε στο Παράρτημα Γ, από την σχέση

$$\frac{\dot{c}_i}{c_i} = \frac{r_i - \delta - \rho}{\theta} \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i = 1, 2 \tag{4.20}$$

με την συνθήκη εγκαρσιότητας

$$\lim_{t \to \infty} \frac{K_i}{e^{\rho t} c_i^{\theta}} = 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i = 1, 2. \tag{4.21}$$

Παρατηρούμε ότι με την εξίσωση των r_1 και r_2 θα προκύψει ότι c_1 και c_2 αυξάνουν με ακριβώς τον ίδιο ρυθμό. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $r_1 = r_2 = r$, και $r - \delta = \frac{\dot{q}}{q}$, τότε από την (4.20) θα προκύψει

$$\frac{\dot{c}_i}{c_i} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\dot{q}}{q} - \rho\right) \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i = 1, 2. \tag{4.22}$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$c_i(t) = \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{c_i(0)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}} \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i = 1, 2. \tag{4.23}$$

Εφόσον το $q(t)$ κατά την διάρκεια της μετάβασης μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί, η $c_i(t)$ μπορεί να ακολουθήσει μία παρόμοια πορεία, επηρεασμένη από το προεξοφληθέν επιτόκιο και τον συντελεστή ελαστικότητας της αποκατάστασης. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.23) τότε η συνθήκη εγκαρσιότητας της χώρας i μπορεί να γραφεί καλύτερα ως εξής:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{K_i}{q(t)} = 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i = 1, 2. \tag{4.24}$$

4.3 Χαρακτηρισμός Θέσεων Ισορροπίας

Μία θέση ισορροπίας για αυτή την οικονομία είναι ένα μονοπάτι των ποσοτήτων $c_i(t), Y_i(t), K_i(t), R_i(t), R(t)$ και των τιμών $q(t), r_i(t)$ για $i = 1, 2$ έτσι ώστε τα $c_i(t)$ και $K_i(t)$ να λύνουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης για τον καταναλωτή της χώρας i, και τα $Y_i(t), K_i(t), R_i(t)$ να λύνουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης του τομέα παραγωγής του αγαθού i, και το $R(t)$ να λύνει το πρόβλημα μεγιστοποίησης του τομέα εξόρυξης του φυσικού πόρου της χώρας 1.

Οπότε

$$R_1(t) + R_2(t) = R(t). \tag{4.25}$$

Πρόταση 4.1
Ο λόγος $\frac{c_1(t)}{c_2(t)}$ είναι σταθερός για όλα τα t και ισούται με την παρούσα τιμή του κλάσματος των μετοχών της χώρας 1 και της χώρας 2 $\left(\frac{q(t)S(t)+K_1(t)}{K_2(t)}\right)$ την χρονική στιγμή t.

Απόδειξη.
Βλέπε Παράρτημα Β. •

Έστω $\mu \equiv \frac{c_1(t)}{c_2(t)}$ όπου μ είναι μία σταθερά. Εφόσον $\mu = \frac{c_1(t)}{c_2(t)} = \frac{q(t)S(t)+K_1(t)}{K_2(t)}$ για όλα τα t τότε,

$$\mu = \frac{c_1(t)}{c_2(t)} = \frac{q(0)S_0 + K_{0,1}}{K_{0,2}} \tag{4.26}$$

Παρατήρηση: Αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει ότι η σχετική κατανάλωση είναι καθορισμένη από την χρονική στιγμή μηδέν. Γεγονός αρκετά σημαντικό γιατί η κατανάλωση επηρεάζεται για πάντα από τον αρχικό πλούτο της κάθε χώρας, δηλαδή, από την τιμή της μετοχής της κάθε χώρας την χρονική στιγμή $t = 0$. Εφόσον τα $S_0, K_{0,1}$ και $K_{0,2}$ είναι δεδομένα, τότε το μ μπορεί να προσδιοριστεί εάν το $q(0)$ είναι γνωστό.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει τα εξής:

Πόρισμα 1.
i.Ανάμεσα στις δύο χώρες έχουμε ισοτιμία των παραγόντων. Το επιτόκιο ενοικίασης του κεφαλαίου ανάμεσα στις χώρες είναι ίσο παρά την απουσιά διεθνούς δανεισμού.
ii.Το κριτήριο αποδοτικότητας των Solow-Stiglitz ότι δηλαδή η τιμή του μη-ανανεώσιμής φυσικού πόρου αυξάνει με τον ρυθμό του επιτοκίου ικανοποιείται.
iii.Ο ρυθμός ανάπτυξης του Harrod επηρεάζει θετικά την μακροπρόθεσμη αύξηση της τιμής του μη - ανανεώσιμου πόρου.
iv.Ο λόγος της κατανάλωσης της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων ως προς την χώρα με έλλειψη φυσικών πόρων είναι σταθερός ως προς τον χρόνο.
v.Ο λόγος $\frac{c_1(t)}{c_2(t)}$ ισούται με τον λόγο των τιμών των μετοχών κάθε οικονομίας $\left(\frac{q(t)S(t)+K_1(t)}{K_2(t)}\right)$.

4.3.1 Το Αναγμένο Σύστημα

Για να μελετήσουμε τις μακροπρόθεσμες ιδιότητες ευστάθειας του μοντέλου, είναι χρήσιμό να κανονικοποιήσουμε τις μεταβλητές του, ώστε να μειώσουμε τις διαστάσεις του συστήματος.

Πρόταση 4.2
Μία θέση ισορροπίας, εάν αυτή υπάρχει, συγκλίνει σε ένα Ι.Μ.Α με ρυθμούς ανάπτυξης:

$$g_q = \eta, \qquad g_{K_i} = g_{c_i} = \frac{\eta - \rho}{\theta} \equiv g_K, \qquad g_{R_i} = g_R = g_S = \frac{(1-\theta)\eta - \rho}{\theta}. \tag{4.27}$$

για $i = 1, 2$ και το r είναι σταθερό.
Απόδειξη.
Βλέπε Παράρτημα Β. •

Παρατήρηση: Το σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από την εξίσωση (4.27), είναι ότι, αν και το $S(0)$ είναι ένας μη-ανανεώσιμος φυσικός πόρος, αυτές οι οικονομίες είναι ευσταθείς αφού ($g_{c_i} \geq 0$) αν ο ρυθμός ανάπτυξης της τεχνολογικής προόδου είναι ίσος με ή μεγαλύτερος από το προεξοφληθέν επιτόκιο.

Έστω ότι ισχύει $K = K_1 + K_2$. Οι μεταβλητες κανονικοποιούνται από τους αντίστοιχούς τους ρυθμούς ανάπτυξης όπως φαίνεται παρακάτω

$$\hat{K} = \frac{K}{e^{g_K t}}, \qquad \hat{K}_i = \frac{K_i}{e^{g_K t}}, \qquad \hat{c}_i = \frac{c_i}{e^{g_K t}}, \tag{4.28}$$
$$\hat{q} = \frac{q}{e^{\eta t}}, \qquad \hat{S} = \frac{S}{e^{g_S t}}, \qquad \hat{R} = \frac{R}{e^{g_S t}}, \qquad R_i = \frac{R_i}{e^{g_S t}}.$$

Με αυτόν τον τρόπο οι κανονικοποιημένες μεταβλητές ($\hat{}$) θα παραμείνουν σταθερές κατά μήκος ενός Ι.Μ.Α. Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του μοντέλου είναι χρήσιμό να μειώσουμε το σύστημα των εξισώσεων στο μικρότερο δυνατό αριθμό διαφορικών εξισώσεων. Έστω

$$T \equiv \frac{\hat{S}}{\hat{K}}, \qquad g \equiv \frac{\hat{c}_2}{\hat{S}}, \qquad \hat{c}_1 = \mu \hat{c}_2 \tag{4.29}$$

όπου T είναι μία μεταβλητή κατάστασης g είναι μία μεταβλητή ελέγχου, και $\mu > 0$ είναι μία σταθερά. Εφόσον όλες οι μεταβλητές είναι κανονικοποιημένες τα T και g θα παραμείνουν μακροπρόθεσμα σταθερά. Ακόμα εφόσον τα c_1

και c_2 αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό, τότε θα ισχύει $\hat{c_1}(t) = \mu\hat{c_2}(t)$ για όλα τα t. Παίρνοντας την χρονική παράγωγο του T και χρησιμοποιώντας την σχέση $\dot{\hat{S}} = -\hat{R} - g_S\hat{S}$, καθώς και την εξίσωση (4.6) και (4.25) έτσι ώστε $\hat{R} = \frac{r}{q}\frac{1-a}{a}\hat{K}$ θα πάρουμε:

$$\dot{T} = -\frac{r}{q}\frac{1-a}{a} - T\left(\frac{r}{a} - \delta - \eta - (1+\mu)gT\right) \tag{4.30}$$

Σημείωνουμε ότι $\hat{c_2} = g\hat{S}$ και $\frac{\hat{c_2}}{\hat{K}} = gT$. Όμοια, παίρνοντας την λογαριθμική χρονική παράγωγο του g θα μας δώσει:

$$\dot{g} = \left(\frac{r-\delta-\rho}{\theta} - \eta + \frac{r}{\hat{q}}\frac{1-a}{a}\frac{1}{T}\right)g \tag{4.31}$$

και

$$\dot{\hat{q}} = (r-\delta-\eta)\hat{q} \tag{4.32}$$

με

$$r = \left(\frac{a^a(1-a)^{1-a}}{\hat{q}^{1-a}}\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{4.33}$$

Δηλαδή, οι πρωτοτάξιες συνθήκες του μοντέλου μπορούν να μειώθούν σε έ-να σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων, $(4.32), (4.30)$ και (4.31) των τριών μεταβλητών T, g και $\hat{q}$.

4.3.2 Ευστάθεια

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας του αναγμένου συστήματος. Το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά μοναδικό εάν η Ιακωβιανή του αναγμένου συστήματος έχει δύο ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη και μία ιδιοτιμή με αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο λόγος για αυτό είναι ότι η αρχική συνθήκη για το $T(0)$ είναι δεδομένη αλλά τα $q(0)$, και $g(0)$ είναι ελεύθερα. Έστω

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{q}} \\ \dot{g} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{q}(\hat{q}, g, T) \\ \overline{g}(\hat{q}, g, T) \\ \overline{T}(q, \hat{g}, T) \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

Θέτοντας τους λόγους $\frac{\dot{T}}{T}$, $\frac{\dot{g}}{g}$ και $\frac{\dot{\hat{q}}}{\hat{q}}$ ίσους με μηδέν και αντικαθιστώντας την (4.33) θα πάρουμε τις σταθερές καταστάσεις των $T, g, \hat{q}$ και r αντιστοίχως που δίνονται από:

$$\hat{q}^* = \left(\frac{a^a(1-a)^{1-a}}{(\delta+\eta)^a}\right)^{\frac{1}{1-a}} \qquad g^* = \left(\frac{\eta+\delta(1-a)}{a} - g_K\right)\frac{1}{(1+\mu)T^*} \quad (4.35)$$

$$T^* = \frac{r^*}{\hat{q}^*}\frac{1-a}{a}\frac{1}{\eta-g_K} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad r^* = \eta+\delta \quad (4.36)$$

οι μεταβλητές με τον εκθέτη $*$ δηλώνουν τιμές σταθερών καταστάσεων. Ο Ιακωβιανός πίνακας της (4.34) αποτιμημένος στις σταθερές καταστάσεις είναι ίσος με

$$J^* = \begin{pmatrix} -\frac{1-a}{a}r^* & 0 & 0 \\ \bar{g}_q^* & 0 & \bar{g}_T^* \\ \bar{T}_q^* & \bar{T}_g^* & \bar{T}_T^* \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

όπου $\bar{g}_q^*$ δηλώνει την μερική παράγωγο της $\bar{g}$ ως προς το q αποτιμημένο στην σταθερή κατάσταση, όμοια και για τα υπόλοιπα στοιχεία της J^*.

Οι ιδιοτιμές (ξ_i) της J^* δίνονται από τις σχέσεις $\xi_1 = -\frac{1-a}{a}r^* = -\frac{1-a}{a}(\eta+\delta)$ μαζί με τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς το ξ

$$\xi(\bar{T}_T - \xi) + \bar{T}_g\bar{g}_T = 0 \quad (4.38)$$

οι οποίες είναι ίσες με

$$\xi_2 = -g_S > 0 \qquad \xi_3 = (1+\mu)g^*T^* > 0. \quad (4.39)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3
Το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά μοναδικό.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\xi_1 = -\frac{1-a}{a}(\eta+\delta)$ είναι αρνητική. Στο Παράρτημα Β θα δείξουμε ότι οι ξ_2 και ξ_3 είναι οι λύσεις της εξίσωσης (4.38) οι οποίες είναι θετικές. Εφόσον υπάρχει μία αρνητική ιδιοτιμή το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά μοναδικό και ευσταθες. •

Παρατήρηση: Αυτό το αποτέλεσμα διευκολύνει την εμπειρική ανάλυση αφού μας επιτρέπει να μην ψάξουμε για άλλες θέσεις ισορροπίας.

4.4 Ανάπτυξη

Για να εξηγήσουμε πώς οι μη-ανανεώσιμοι φυσικοί πόροι επηρεάζουν την αύξηση του GDP, θα εξετάσουμε το μερίδιο του GDP της χώρας i σε σχέση με το συνολικό GDP. Αν το μερίδιο του GDP της χώρας i σε σχέση με το παγκόσμιο GDP αλλάζει κατά την διάρκεια του μονοπατιού αύξησης, τότε μία από τις δύο χώρες κατά την μετάβαση αυξάνει πιο αργά από την άλλη.

Έστω ότι το $s_i(t)$ δηλώνει το μερίδιο του GDP της χώρας i σε σχέση με το παγκόσμιο GDP όπως φαίνεται παρακάτω

$$s_i(t) = \frac{GDP_i(t)}{GDP^w(t)}, \tag{4.40}$$

όπου το $GDP^w(t)$ είναι ίσο με $GDP_1(t) + GDP_2(t)$.

Συγκεκριμένα σημειώνουμε ότι $GDP^w = rK + qR = rK + \frac{1-a}{a}rK$ και $s_2(t) = a\frac{K_2(t)}{K(t)}$ όπου όπως πριν $K = K_1 + K_2$. Αυτό οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.4
Την χρονική στιγμή μηδέν, το μερίδιο της χώρας i στον GDP για $i = 1, 2$ ως προς το συνολικό GDP^w δεν εξαρτάται από τον φυσικό πόρο και

$$s_1(0) = \frac{K_{0,1} + (1-a)K_{0,2}}{K_0}, \qquad s_2(0) = a\frac{K_{0,2}}{K_0} \tag{4.41}$$

όπου K_0 δηλώνει το άθροισμα των αρχικών αποθεμάτων του κεφαλαίου της χώρας 1 και 2 ($K_{0,1} + K_{0,2}$).

Απόδειξη. Το GDP κάθε χώρας δίνεται αντιστοίχως από τις σχέσεις

$$GDP_1 = rK_1 + qR \qquad GDP_2 = rK_2. \tag{4.42}$$

Από την εξίσωση (4.6) και την συμψηφιστική συνθήκη της αγοράς (4.25) θα προκύψει

$$R = \frac{r}{q}\frac{1-a}{a}(K_1 + K_2) \tag{4.43}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στον ορισμό του GDP της χώρας 1 και υπολογίζοντας το GDP^w θα προκύψει η παραπάνω πρόταση.

Παρατήρηση:
Ένας από τους λόγους που το μερίδιο $s_i(0)$ της χώρας i δεν εξαρτάται από το απόθεμα του πόρου S, αλλά από το κεφάλαιο, είναι ότι η παραγωγικότητα του $R(0)$ επηρεάζεται από το κεφάλαιο αλλά όχι από το απόθεμα του φυσικού πόρου.

Έστω ότι το k_i είναι το μερίδιο του κεφαλαίου της χώρας i ως προς το (συνολικό) κεφάλαιο όπως παραπάνω

$$k_i = \frac{K_i}{K} = \frac{\hat{K}_i}{\hat{K}} \tag{4.44}$$

Εφόσον K_i και K αυξάνουν μακροπρόθεσμα με τον ίδιο ρυθμό, το μερίδιο του κεφάλαιου της χώρας i μακροπρόθεσμα θα δίνεται από:

$$k_i^* = \frac{\hat{K}_i^*}{\hat{K}^*} \tag{4.45}$$

όπου την χρονική στιγμή μηδέν τα $k_{0,1} = \frac{K_{0,i}}{K_0}$ είναι δεδομένα. Για την περίπτωση της χώρας 2 ισχύει:

$$\hat{K}_2^* = k_2^* \hat{K}^*. \tag{4.46}$$

Έχουμε δείξει ήδη ότι ο λόγος της κατανάλωσης ανάμεσα στις χώρες είναι ίσος με :

$$\frac{c_1(t)}{c_2(t)} = \mu = \frac{q(t)S(t) + K_1(t)}{K_2(t)} \tag{4.47}$$

όπου το μ είναι σταθερό για κάθε t. Αυτό δηλώνει ότι

$$\frac{q(0)S(0) + K_1(0)}{K_2(0)} = \frac{\hat{q}\hat{S}^* + \hat{K}_1^*}{\hat{K}_2^*} \tag{4.48}$$

όπου, όπως πριν, οι μεταβλητές με τον εκθέτη $(*)$ δηλώνουν τις σταθερές καταστάσεις και($\hat{}$) δηλώνουν τις κανονικοποιημένες μεταβλητές. Η συνθήκη (4.48) μπορεί να γραφεί καλύτερα ως:

$$\frac{q(0)S(0) + K_1(0)}{K_2(0)} = \frac{\hat{q}^*\hat{S}^*}{k_2^*\hat{K}^*} + \frac{1 - k_2^*}{k_2^*} \tag{4.49}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση $T^* = \frac{\hat{S}^*}{\hat{K}^*}$ θα πάρουμε:

$$\frac{q(0)S(0) + (1 - k_2(0))K(0)}{k_2(0)K(0)} = \frac{\hat{q}^*}{k_2^*}T^* + \frac{1 - k_2^*}{k_2^*} \tag{4.50}$$

Λύνοντας ως προς το k_2^* έχουμε:

$$k_2^* = \frac{k_2(0)K(0)(1 + q^*T^*)}{K(0) + q(0)S(0)} \tag{4.51}$$

Εφόσον το μερίδιο του GDP της χώρας 2 ως προς το συνολικό GDP είναι ίσο με $s_2(t) = a\frac{K_2(t)}{K(t)}$, μακροπρόθεσμα το s_2 θα ισούται με:

$$s_2^* = ak_2^* = a\frac{k_2(0)K(0)(1 + q^*T^*)}{K(0) + q(0)S(0)}. \tag{4.52}$$

Δηλαδή, εάν

$$s_2(0) = a\frac{K_{0,2}}{K_0} < s_2^* = a\frac{k_2(0)K_0(1 + q^*T^*)}{K_0 + q(0)S_0}. \tag{4.53}$$

τότε προκύπτει το αποτέλεσμα ότι η χώρα με έλλειψη φυσικών πόρων κατά την μετάβαση αναπτύσσεται οικονομικά γρηγορότερα από την χώρα με αφθονία φυσικών πόρων. Ένα αποτέλεσμα που φαίνεται συμβατό με τα αποτελέσματα των Sachs και Warner(1995).

Αλλά σε πιο βαθμό το s_2^* επηρεάζεται από τον φυσικό πόρο και πως; Το πρόβλημα μας βρίσκεται στο γεγονός ότι γενικά δεν είναι δυνατό να λύσουμε την εξίσωση για την τιμή της πηγής την χρονική στιγμή μηδέν $q(0)$. Εάν $q(0)$ εξαρτάται από το S_0, και ίσως από το K_0, τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει μία τέτοια λύση για το $q(0)$ και συμβολίζουμε αυτή την λύση με

$$Q_0(S_0, K_0) \tag{4.54}$$

Η επίδραση του S_0 πάνω στο s_2^* δίνεται από:

$$\frac{\partial s_2^*}{\partial S_0} = -a\frac{k_2(0)K(0)(1 + q^*T^*)}{(K(0) + q(0)S(0))^2}q(0)\left(1 + \frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)}\right) \tag{4.55}$$

Πρόταση 4.5

Εάν $s_2(t)$ είναι μία μονότονη συνάρτηση του χρόνου και αν $(1 + \frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)}) > 0$, τότε ο μη-ανανεώσιμος φυσικός πόρος ενισχύει την αύξηση του GDP της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων.

Απόδειξη.
Εξετάζοντας την εξίσωση (4.55) μας δείχνει ότι αν ισχύει $(1 + \frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)}) > 0$ τότε το αποτέλεσμα του S_0 ως προς το s_2^* είναι αρνητικό. Επιπλέον εφόσον

$$s_1^* = 1 - s_2^* \tag{4.56}$$

το αποτέλεσμα του S_0 πάνω στο s_1^* είναι θετικό. •

Παρατήρηση:
Μέχρι στιγμής έχουμε κατοχυρώσει συνθήκες από τις οποιές τα εμπειρικά αποτελέσματα των Sachs και Warner (1995) είναι εφικτά.

Δυστυχώς δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $(1+\frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)}) > 0$ εφόσον μάλιστα περιμένουμε $\frac{\partial Q_0}{\partial S_0} < 0$. Δηλαδή, όσο το απόθεμα του πόρου αυξάνει περιμένουμε η τιμή του πόρου $q(0)$ να μειώνεται. Αν και γενικά δεν μπορούμε να απόδείξουμε ότι $(\frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)}) > -1$, υπάρχουν αριθμητικές λύσεις που επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα αυτό. Στην αναλυτική μας λύση θα δούμε ότι $\frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S(0)}{q(0)} > -a$. Παρακάτω θα προχωρήσουμε με μία αναλυτική λύση για την ειδική περίπτωση όπου $a = \theta$.

4.5 Η Αναλυτική Λύση

Μέχρι στιγμής οι τεχνικές ολοκλήρωσης μας έχουν δώσει μία γενική αναλυτική λύση. Παρακάτω θα προχωρήσουμε με μία αναλυτική λύση για την περίπτωση όπου οι τιμές των των παραμέτρων είναι περιορισμένες, $(a = \theta)$.

Πρόταση 4.6
Εάν $a = \theta$ η τιμή του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου και της συνολικής κατανάλωσης $(C \equiv c_1 + c_2)$ την χρονική στιγμή μηδεν είναι ισο με:

$$q(0) = \frac{(1-a)a^a}{(\rho-(1-a)\eta)^a}\left(\frac{K_0}{S_0}\right)^a \qquad C(0) = K_0\left(\delta\frac{1-a}{a} + \frac{\rho}{a}\right) \tag{4.57}$$

και ο ρυθμός εξόρυξης του πόρου και του συνολικού κεφαλαίου $(K \equiv K_1 + K_2)$ για κάθε t είναι ίσος με:

$$R(t) = \frac{\rho-(1-a)\eta}{a}S_0 e^{\frac{(1-a)\eta-\rho}{a}t} \qquad K(t) = K_0\left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{\rho}{\theta}t}. \tag{4.58}$$

Απόδειξη. Βλέπε Παράρτημα Β. •

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial Q_0}{\partial S_0}\frac{S_0}{q(0)} = -a \tag{4.59}$$

Η Πρόταση 4.5 μας υποδεικνύει ότι με έναν ικανοποιητικά μεγάλο αρχικό πλούτο του μη-ανανεώσιμου πόρου, η χώρα με αφθονία φυσικών πόρων μπορεί να επιτύχει μεγαλύτερους ρυθμούς αύξησης του GDP της από την οικονομία με έλλειψη πόρων. Αυτό το απότελεσμα έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελεσματα των Rodriquez και Sachs (1999). Αντίθεση αυτή των αποτελεσμάτων έγκειται στο γεγονός ότι οι Rodriguez και Sachs(1999) θεώρησαν μία απομονωμένη χώρα, και έτσι απέτυχαν να λάβουν υπόψιν τους τις συνδέσεις μεταξύ των χωρών και τις επιδράσεις αυτων των συνδέσεων στο παγκόσμιο δυναμικό μετάβασης.

Από την σχέση (4.57) παρατηρούμε ότι η συνολική κατανάλωση την χρονική στιγμή μηδέν $(C(0))$ εξαρτάται από το συνολικό αρχικό κεφάλαιο K_0. Και επιπλέον η κατανάλωση την χρονική στιγμή μηδέν δεν επηρεάζεται από το αρχικό απόθεμα του μη - ανανεώσιμου φυσικού πόρου. Στο Παράρτημα Β, δειχνουμε ότι για να ισχύει η συνθήκη εγκαρσιότητας, πρέπει να ισχύει $\rho-(1-a)\eta > 0$, αποτέλεσμα που εγγυάται ότι $q(0) > 0$. Επιπλέον, ο περιορισμός $a = \theta$ υπονοεί ότι ο ρυθμός κατανάλωσης του φυσικού πόρου R μειώνεται με τον σταθερό αρνητικό ρυθμό $\frac{(1-a)\eta-\rho}{a}$.

Πρόταση 4.7

Εάν $a = \theta$, η σταθερά $\mu \equiv \frac{c_1(t)}{c_2(t)}$ είναι ίση με:

$$\mu = \frac{\frac{(1-a)a^a}{(\rho-(1-a)\eta)^a}(K_{0,1}+K_{0,2})^a S_0^{1-a} + K_{0,1}}{K_{0,2}} \tag{4.60}$$

Απόδειξη.

Αντικαθιστώντας το $q(0)$ στην εξίσωση $\left(\frac{q(0)S(0)+K_{0,1}}{K_{0,2}}\right)$ θα πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. •

Παρατήρηση:

Από έναν απλό υπολογισμό μπορούμε να πάρουμε την επίδραση του $K_{0,2}$ πάνω στο μ. Η επίδραση του αρχικού κεφαλαίου της χώρας 2 πάνω στο μ είναι αρνητική και αυτό γιατί, το απόθεμα του κεφαλαίου της χώρας 2 επηρεάζει αρνητικά την κατανάλωση της χώρας με αφθονία πόρων σε σχέση με την οικονομία με έλλειψη πόρων. Σημειώνουμε ότι ο λόγος $\frac{c_1}{c_2}$ επηρεάζεται από το απόθεμα του φυσικού πόρου την χρονική στιγμή μηδέν. Η επίδραση του S_0 πάνω στο μ είναι ίσο με :

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_0} = \frac{(1-a)(1-a)a^a}{(\rho-(1-a)\eta)^a}\frac{1}{K_{0,2}}\left(\frac{K_{0,1}+K_{0,2}}{S_0}\right)^a \tag{4.61}$$

Όμως, η επίδραση αυτή είναι σημαντική μέχρι το σημείο το οποίο η μετοχή του πόρου είναι υψηλή. Συγκεκριμένα, εάν το $(1-a)$ είναι μικρό, τότε το όφελος του καταναλωτή της χώρας 1 που προέρχεται από την ιδιοκτησία του πόρου, είναι σχετικά μικρό. Το συμπέρασμά μας προέρχεται παρατηρώντας ότι ο συντελεστής $(1-a)$ είναι ο εκθέτης του αποθέματος του πόρου (S_0^{1-a}). Άρα, ένας σχετικά μικρός εκθέτης $(1-a)$ μειώνει δραστικά την επίδραση του φυσικού πόρου.

Ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι, η κατανάλωση της χώρας 1 (η οικονομία με αφθονία φυσικών πόρων) σχετικά με την κατανάλωση της χώρας 2 (η οικονομία χωρίς φυσικούς πόρους) αυξάνει αναλογικά με το μέγεθος του ρυθμού αύξησης της τεχνολογικής προόδου -η-.

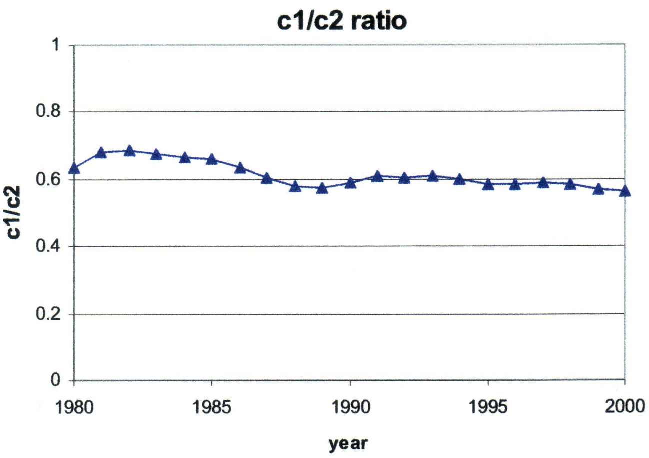
4.6 Προσομοιώσεις

Το κύριο ενδιαφέρον μας σε αυτή την παράγραφο είναι ότι η αναλυτική μας λύση , υποστήριζε ουσιαστικά ότι μεγαλύτερες ποσότητες από τον φυσικό πόρο επιδρούν θετικά στον ρυθμό ανάπτυξης της πλούσιας σε πόρους οικονομίας, ίσως είναι μόνο συμπτωματικό. Για να διαπιστώσουμε αν αυτό όντως ισχύει, προσομοίωνουμε το μοντέλο δίνοντας τιμές στις παραμέτρους που είναι πιο συμβατές με άλλα χαρακτηριστικά του μοντέλου. Πρώτον θέλουμε να διαπιστώσουμε αν πράγματι ο λόγος $\frac{c_1}{c_2}$ είναι σταθερός ως προς τον χρόνο.

Αργότερα βρίσκουμε οτι οι αρχικές τιμές του αποθέματος της πηγής και του κεφαλαίου είναι σε συνάφεια με την σχέση $\frac{c_1}{c_2} = \frac{q(0)S(0)+K_{0,1}}{K_{0,2}}$ όπως το μοντέλο υποδεικνύει. Παρακάτω χρησιμοποιούμε τις πληροφορίες από την World Bank World Development (WDI,2004) για την περίοδο 1980-2000. Όταν ήταν αδύνατο να πάρουμε το μερίδιο της κατανάλωσης του GPD από την $WDI(2004)$ χρησιμοποιούμε το International Monetary Fund International Financial Statistics Yearbook(2002).

Συνδυάζοντας και τις δύο πηγές πληροφοριών, μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις περισσότερες μη - πετρελαιοπαραγωγικές χώρες καθώς και τις πετρελαιοπαραγωγικές. Ακολουθώντας την λογική του μοντέλου μας όσο περισσότερο γίνεται

, διαιρέσαμε τον κόσμο σε δύο περιοχές, μια περιοχή πλουσια σε μη-ανανεώσιμους φυσικούς πόρους (περιλαμβάνοντας χώρες των οποίων οι εξαγωγές πετρελαίου είναι πάνω από το 25% των συνολικών εξαγωγών τους) και μία περιοχή με έλλειψη φυσικών πόρων. Το δείγμα μας αποτελείται από 74 χώρες με έλλειψη πόρων και 19 χώρες πλουσιες σε πόρους. Προχωρώντας παρακάτω προσθέσαμε τα επίπεδα κατανάλωσης ωστε να πάρουμε την δυναμική ισοτιμία των χωρών κάθε περιοχής και διαιρέσαμε αυτόν τον αριθμό με τον πληθυσμό της κάθε χώρας, ώστε να πάρουμε την κατα κεφαλήν κατανάλωση της πλούσιας σε πόρους χώρας (c_1) και της οικονομίας με έλλειψη πόρων (c_2).
Το Σχήμα 4 δέιχνει ότι το κλάσμα $\mu = \frac{c_1}{c_2}$ την περίοδο 1980-2000:

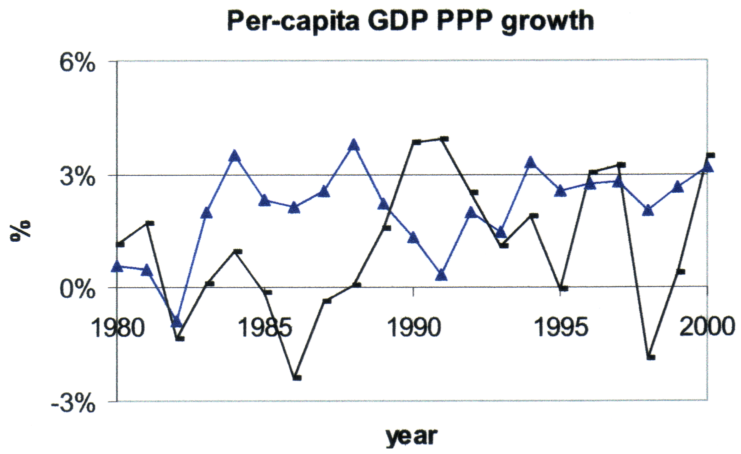


ΣΧΗΜΑ 4

Η μεγαλύτερη τιμή για τον λόγο $\frac{c_1}{c_2}$ παρατηρείται στο ξεκίνημα της δεκαετίας του 80 κάτι που συνδέεται με την πετρελαϊκή κρίση της περιόδου αυτής. Παρατηρούμε ότι, ο λόγος της κατα κεφαλήν κατανάλωσης παραμένει ανάμεσα στο χωρίο 56-68 %. Πιο συγκεκριμένα, κατά την διάρκεια της δεκαετίας 1990 το κλάσμα μεταβάλεται μεταξύ του χωρίου 56-61%.

Το Σχήμα 5 μας δείχνει την ανάπτυξη των δύο περιοχών. Από το σχήμα φαίνεται ότι πράγματι για τις πετρελαιοπαραγωγικές χώρες το GDP αυξάνει πιο αργά κατά μεσο όρο στην διάρκεια της περιόδου 1980-2000 (ο ετήσιος μέσος όρος για τις πετρελαιοπαραγωγικές χώρες ήταν 1.1 % εναντι 2% για τις μη - πατρελαιοπαραγωγικές χώρες). Έφοσον ο στόχος μας είναι να διαπιστώσουμε, το αν, μια χώρα κατέχει μεγαλύτερες ποσότητες του φυσικού πόρου είναι αυτό ικανό από μόνο του να προκαλέσει μικρότερους ή αρνητικούς ρυθμούς ανάπτυξης, όπως οι Rodriguez και Sachs υποστηρίζουν, βλέπουμε ότι το Σχήμα 5 δεν υποστηρίζει ούτε απορρίπτει αυτόν τον ισχυρισμό.

Για να υλοποιήσουμε τις προσομοιώσεις υποθέτουμε τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων: $a = 0.82, \theta = 2.5$ (μία σχετικά μεγάλη τιμή, αλλά θέλουμε να ξεφύγουμε από την τιμή του $a)$ $\delta = 0.04, \rho = 0.03$ και $\eta = 0.1$ (η τιμή του $\eta = 0.1$ δημιουργεί μία μακροπρόθεσμη ανάπτυξη της τάξεως του 2.8% ($g_K = \frac{\eta-\rho}{\theta}$)).



ΣΧΗΜΑ 5

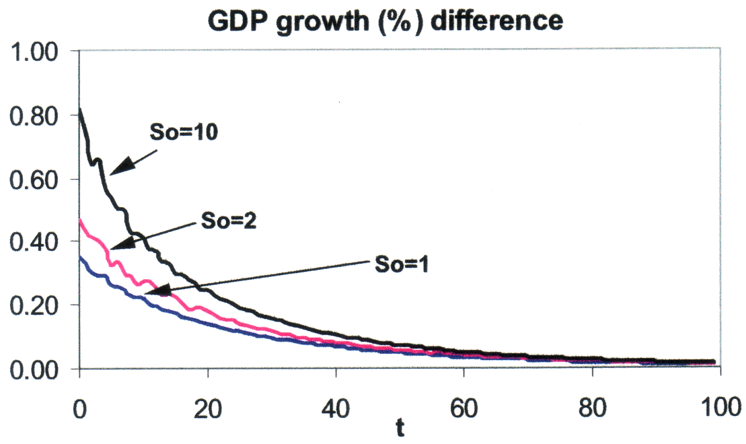
Στην συνέχεια επιλέγουμε τιμές για τις παραμέτρους $S_0(=1)$, $K_{0,1}(=10)$, και $K_{0,2}(=90)$ που δίνουν στον λόγο της κατανάλωσης των δύο χωρών την τιμή $\frac{c_1}{c_2} = 0.62$. Στις προσομειώσεις μας απλά αυξάνουμε το απόθεμα του μη - ανανεώσιμου φυσικού πόρου για να δούμε αν πράγματι μπορεί να δημιουργήσει χαμηλότερους ρυθμούς ανάπτυξης για την περιοχή με αφθονία πόρων σε σχέση με την περιοχή με έλλειψη φυσικών πόρων.

Στο Σχήμα 6 παρουσιάζουμε την διαφορά της αύξησης του GPD μεταξύ της χώρας με αφθονία πόρων και της χώρας με έλλειψη φυσικών πόρων

$$(\frac{G\dot{D}P_1}{GDP_1} * 100 - \frac{G\dot{D}P_2}{GDP_2} * 100)$$

για τις τρείς διαφορετικές τιμές του αποθέματος της μη-ανανεώσιμής πηγής (1,2 και 10).

Από το Σχήμα 6 παρατηρούμε ότι αυξήσεις στο απόθεμα του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου αυξάνουν θετικά την διαφορά μεταξύ των ρυθμών ανάπτυξης, δηλώνοντας ότι καθώς το αρχικό απόθεμα του φυσικού πόρου αυξάνει η οικονομία της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων αναπτύσσεται. Άρα είμαστε σε θέση να υποστηρίξουμε ότι μεγαλύτερα αποθέματα του πόρου δεν επηρεάζουν αρνητικά την αύξηση του GDP της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων κάτι που και η αναλυτική λύση μας υποδεικνύει.



ΣΧΗΜΑ 6

$$(\frac{G\dot{D}P_1}{GDP_1} * 100 - \frac{G\dot{D}P_2}{GDP_2} * 100)$$

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζουμε πως η τιμή του μη-ανανεώσιμου πόρου την χρονική στιγμή μηδέν μεταβάλλεται ως αποτέλεσμα της μεταβολής του αποθέματος του φυσικού πόρου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

	S =1	S=2	S= 10
q(0)	45.8833	23.3479	4.8472
μ	0.6200	0.6300	0.6497

Από τον Πίνακα 1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν το αρχικό απόθεμα του φυσικού πόρου είναι ίσο με 1 η τιμή του πόρου είναι ίση με 45.88. Εάν διπλασιάσουμε το απόθεμα του πόρου στην τιμή $S_0 = 2$ η τιμή του πόρου μειώνεται και γίνεται ίση με 23.35. Όμως,βλέπουμε ότι αυτή η μείωση είναι, είναι κάτι λιγότερο από αντιστρόφως ανάλογη της αύξησης του αποθέματος του πόρου, δηλώνοντας ότι η ελαστικότητα της τιμής του πόρου είναι αρνητική και μεγαλύτερη από μείον ένα.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι συμβατό, με την Πρόταση 4.5 η οποία δηλώνει ότι αν η ελαστικότητα της τιμής του πόρου ως προς το απόθεμα του, την χρονική στιγμή μηδέν, είναι μεγαλύτερη από μείον ένα(-1), τότε αυτό είναι ικάνο ώστε το απόθεμα του φυσικού πόρου να επηράσει θετικά τον ρυθμό αύξησης του εισοδήματος της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων.

Στον Πίνακα 1 έχουμε συμπεριλάβει επίσης την τιμή για το $\mu = \frac{c_1}{c_2}$ για διαφορετικά επίπεδα του αρχικού αποθέματος του φυσικού πόρου. Οι προσομοιώσεις μας υποστηρίζουν ότι η επίδραση της αύξησης του πόρου ως προς την σχετική κατανάλωση των δύο χωρών $(\frac{c_1}{c_2})$ είναι μικρή αλλά θετική. Αυτό στηρίζεται στο γεγονός ότι μεγαλύτερες ποσότητες αποθέματος του μη -ανανεώσιμου φυσικού πόρου επιδρούν αρνητικά στην τιμή του πόρου και επομένως η επίδραση τους πάνω στο μ είναι μικρή.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας μελετήσαμε ένα μοντέλο βέλτιστης ανάπτυξης με την συνάρτηση παραγωγής να είναι της μορφής Cobb-Douglas, με μη-ανανεώσιμους φυσικούς πόρους και χωρίς τεχνολογική πρόοδο.

Μία ευσταθής σταθερή κατάσταση υπάρχει για μεγαλύτερο εύρος τιμων των παραμέτρων από αυτές που εξετάστηκαν από τον Stiglitz (1974). Πράγματι, η ύπαρξη και η ευστάθεια μίας σταθερής κατάστασης δείξαμε ότι είναι συμβατή με αυξανόμενες αποδόσεις του κεφαλαίου. Μία υψηλή ελαστικότητα παραγωγής κεφαλαίου δεν οδηγεί απαραίτητα σε μονοπάτια εκρηκτικής μεγέθυνσης γιατί η αυξανόμενη ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε τον φυσικό πόρο έχει αντίρροπη επίδραση. Παρόλα αυτά, η αύξηση του πληθυσμού είναι μία αναγκαία συνθήκη για να διατηρήσουμε ευσταθή κατα κεφαλήν ανάπτυξη. Αυτό υποδεικνύει ότι το επεκτεταμένο μοντέλο βέλτιστης ανάπτυξης του Stiglitz που παρουσιάσαμε στην εργασία μας δεν αλλοιώνει την έννοια της ενδογενούς ανάπτυξης με την αυστηρή έννοια της λέξης, δηλαδή το μοντέλο δεν μπορεί να παράγει θετική και ευσταθή κάτα κεφαλήν ανάπτυξη χώρις να στηρίζεται στην αύξηση πληθυσμού.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η πρόκληση να δημιουργήσουμε ένα γενικό μοντέλο αυστηρής ενδογενούς ανάπτυξης δεν είναι εφικτό απλά συμπεριλαμβάμοντας μη-ανανεώσιμους πόρους στην συνάρτηση παραγωγής. Αντιθέτως, στην ανάλυση μας το πρόβλημα knife-edge της ενδογενούς ανάπτυξης μετατρέπεται σε πρόβλημα ευστάθειας εκτός αν υπάρχει αύξηση πληθυσμού. Δείξαμε λοιπόν ότι όταν οι μη-ανανεώσιμοι πόροι εισάγονται στο μοντέλο ,η ύπαρξη και η ευστάθεια της βέλτιστης κατα κεφαλήν ανάπτυξης απαιτεί αυξανόμενες αποδόσεις στο κεφάλαιο και στο εργατικό δυναμικό μαζί με αύξηση πληθυσμού πάνω από κάποια ελάχιστη τιμή. Επιπλέον, το μοντέλο της ημι-ενδογενους ανάπτυξης χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ο ρυθμός της μακροπρόθεσμης τεχνολογικής ανάπτυξης εξαρτάται από την τεχνολογία καθώς επίσης και από κατάλληλες επιλογές των παραμέτρων, μία ιδιότητα η οποία συχνά φαινόταν να ανήκει αποκλειστικά σε μοντέλα αυστηρά ενδογενούς ανάπτυξης.

Στην συνέχεια στο τέταρτο κεφάλαιο, εξετάζουμε την επίδραση των μη-ανανεώσιμων πόρων στην οικονομική ανάπτυξη και ευημερία σε μία οικονομία που αποτελείται από δύο χώρες. Εισαγούμε μία οικονομία με αφθονία φυσικών πόρων και μία άλλη οικονομία με έλλειψη φυσικών πόρων σε ένα neoclassical μοντέλο ανάπτυξης. Όπως και σε άλλα μοντέλα εμπορίου, η εξίσωση της τιμής των παραγόντων μεταξύ των χωρών αποδεικνύεται να ισχύει. Δηλαδή, το επιτόκιο ενοικίασης του κεφαλαίου μεταξύ των χωρών είναι ίσος ακόμα και με την απουσία διεθνούς δανεισμού. Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ρυθμοί ανάπτυξης της κατανάλωσης μεταξύ των χωρών είναι ίσοι, και για αυτό το κλάσμα της κατανάλωσης είναι σταθερό. Δείξαμε επιπλεόν ότι το κλάσμα της κατανάλωσης της πλούσιας σε πόρους χώρας ως προς την οικονομία με έλλειψη φυσικών πόρων ισούται με το κλάσμα της τιμής των μετοχων σε κάθε χρονική στιγμή. Παρόλο που ο πλούτος της χώρας 1 αυξάνει σε σχέση με το αρχικό απόθεμα του πόρου , το αποτέλεσμα αυτό ερχεται σε αντίθεση, ως ένα βαθμό, με την υπόθεση της αρνητικής επίδρασης του αρχικού αποθέματος του φυσικού πόρου ως προς την τιμή του.

Δείχνουμε επιπλέον, ότι το αρχικό απόθεμα του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου έχει θετική επίδραση πάνω στην αύξηση του ρυθμού GDP της πλούσιας σε πόρους χώρας εφόσον η ελαστικότητα της αρχικής τιμής του πόρου ως προς το αρχικό απόθεμα της πηγής είναι μεγαλύτερη από μείον ένα (-1). Μία αναλυτική λύση του μοντέλου κάτω από έναν συγκεκριμένο περιορισμό των παραμέτρων υποστηρίζει ότι πράγματι αυτή η ελαστικότητα είναι μικρότερη από μείον ένα. Επομένως, βρίσκουμε ότι τα αποτελέματα των Rodriguez και Sachs(1999), σύμφωνα με τα οποία το αρχικό απόθεμα του πόρου επηρεάζει αρνητικά την αύξηση του GDP μίας οικονομίας που εξαγει έναν μη-ανανεώσιμο φυσικό πόρο , δεν ισχύουν γενικά. Αυτή η αντίφαση προέρχεται από το γεγονός ότι οι Rodriguez, Sachs(1999) θεώρησαν μία απομονωμένη χώρα, και έτσι απέτυχαν να λάβουν υπόψιν τους τυχόν επιπλοκές στο δυναμικό μετάβασης.

Τελικώς, δείξαμε ότι μία τεχλολογική πρόοδος - αποταμίευση του μη - ανανεώσιμου φυσικού πόρου - μπορεί να ευνοήσει την ευημερία της χώρας με αφθονία φυσικών πόρων όταν συγκρίνεται με μία άλλη οικονομία που χαρακτηρίζεται από έλλειψη φυσικών πόρων.

Κεφάλαιο 6

Παραρτήματα

6.1 Παράρτημα Α

Στο Παράρτημα Α παραθέτουμε τις αποδείξεις των Λημματων 3.1-3.6 και των Προτάσεων 3.1-3.5 του Κεφαλαίου 3.

Λήμμα 3.1 Σε ένα Ι.Μ.Α τα ακόλουθα ισχύουν :
(α)$g_S = g_R < 0$
(β)$R(0) = -g_R S(0)$, και

$$\lim_{t\to\infty} S = 0 \qquad (3.7)$$

Απόδειξη του Λήμματος 3.1
Θεωρούμε ένα Ι.Μ.Α.
(α)Από την εξίσωση (3.3) έχουμε $g_S = -R/S$ παραγωγίζοντας αυτήν ως προς τον χρόνο θα έχουμε $\dot{g}_S = -(g_R - g_S)R/S = 0$ εξ ορισμού ενός Ι.Μ.Α. Επομένως, $g_S = g_R$. Για κάθε σταθερό g_R θα έχουμε $\int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty R(0)e^{g_R t}dt$. Εάν $g_R \geq 0$, τότε η (3.6) δεν θα ισχύει, επομένως $g_R < 0$ και

$$\int_0^\infty R(t)dt = -\frac{R(0)}{g_R}.$$

(β)Από την (3.3) $\dot{S(0)}/S(0) = -R(0)/S(0) = g_R$, που προκύπτει εφαρμόζοντας το (α) για $t = 0$, επομένως $R(0) = -g_R S(0)$. Τελικώς η λύση της (3.3) μπορεί να γραφεί ως $S(t) = S(0)e^{g_S t}$. Τότε εφόσον g_S είναι μία αρνητική σταθερά, $S(t) \to 0$ καθώς το $t \to \infty$. •

Οι λόγοι

$$z \equiv \frac{Y}{K}, \qquad x \equiv \frac{C}{K} \ \textit{και} \ u \equiv \frac{R}{S}, \quad (3.8)$$

είναι σημαντικοί για την ανάλυση μας. Βάση αυτών μπορούμε να γράψουμε την (3.2) ως

$$g_K = z - x - \delta. \qquad (3.9)$$

Όμοια, από την (3.3) θα παρουμε:

$$g_S = -u \qquad (3.10)$$

Λήμμα 3.2
Σε ένα Ι.Μ.Α, ισχύει $g_Y = g_C \equiv g$, και το u είναι σταθερό. Εάν, επιπρόσθετα, $g_K = g$, τότε επίσης το z και το x είναι σταθερά. Μία ικανή συνθήκη για να ισχυέι $g_K = g$ σε ένα Ι.Μ.Α είναι $I \neq 0$ σε ένα μη - εκφυλισμένο χρονικό διάστημα (δηλαδή οι ακαθάριστες επενδύσεις δεν εξαφανίζονται).

Απόδειξη του Λήμματος 3.2
Θεωρούμε ένα Ι.Μ.Α.Τότε η σχέση (3.10) μας υποδεικνύει ότι το u πρέπει να είναι σταθερό εφόσον το g_S είναι σταθερό από τον ορισμό ενός Ι.Μ.Α. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (3.9) θα έχουμε $\dot{g}_K = \dot{z} - \dot{x} = (g_Y - g_K)z - (g_C - g_K)x = 0$ εφόσον το g_K είναι σταθερό σε ένα Ι.Μ.Α. Διαιρώντας με το z (το οποίο είναι θετικό σε ένα Ι.Μ.Α) και αναδιατάσσοντας την σχέση θα έχουμε

$$g_Y - g_K = (g_C - g_K)\frac{x}{z}. \qquad (6.1)$$

Αλλά αυτό είναι άτοπο εκτός αν $g_Y = g_C$ πραγματί, εάν $g_Y < g_C$, τότε $\frac{x}{z} \to \infty$, και εάν $g_Y > g_C$, τότε $\frac{x}{z} \to 0$, και οι δύο περιπτώσεις είναι μη συμβατες με την σχέση (6.1) και την υποτιθέμενη σταθερότητα των g_Y, g_K, και g_C. Επομένως, $g_Y = g_C \equiv g$ σε ένα Ι.Μ.Α. Εάν, επιπρόσθετα, $g_K = g$ τότε $z(\equiv Y/K)$ και $x(\equiv C/K)$ είναι σταθερά. Εάν από την άλλη, $g_K \neq g_Y = g_C$, τότε από την (6.1) προκύπτει $\frac{x}{z} \equiv 1$, δηλαδή, $C = Y$ ή $I = 0$. Για αυτό, από την σχέση $I \neq 0$ προκύπτει $g_K = g_Y = g_C$ σε ένα Ι.Μ.Α. •

Παραγωγίζοντας την (3.1) λογαριθμικά ως προς τον χρόνο, θα παρουμε

$$g_Y = a g_K + \beta n + \gamma g_R. \qquad (3.11)$$

Το Λημμα 3.2 υποδηλώνει ότι το γεγονός $I = 0$ ίσως επιτρέπει $g_K = -\delta$ και σε αυτή την περίπτωση να παρεκτραπούν από την κοινή τιμή των g_Y και g_C σε ένα I.M.A. Ενώ όταν $I = 0$ για κάθε t θα έχουμε $x = z$ για όλα τα t, κάτι που δεν αποτρέπει τα x και z να αυξάνουν ή να μειώνονται μαζί. Το μονοπάτι του K που δίνεται από την (3.9) είναι, όπως κάποιος μπορεί να υποστηρίξει, ασύνδετο από το μονοπάτι Y και C. Σε ένα I.M.A, εάν $I = 0$, δηλαδή, $x = z$, τότε $g_Y = g_C$ μπορεί να πάρει την όποια αρνητική τιμή δίνεται για το g_R χωρίς συνέπειες για το $g_K(= -\delta)$. Σε ένα I.M.A, δηλώνοντας τον κοινό ρυθμό αύξησης των C και Y με g θα έχουμε

$$g_c = g - n \qquad (3.12)$$

Λήμμα 3.3
Σε ένα I.M.A με $g_c \geq 0$, η καθαρή επένδυση, $I - \delta K$, πρέπει να είναι θετική για ολά τα t.

Απόδειξη του Λήμματος 3.3
Θεωρούμε ένα I.M.A. Από το Λήμμα 3.2,έχουμε ότι $g_Y = g_C = g$ είναι ίσα με μία σταθερά. Υποθέτουμε ότι $g_c \geq 0$, δηλαδή, $g \geq n$, από την (3.12). Τώρα υποθέτοντας ότι $I \leq \delta K$ από την σχέση(3.2)ισχύει , $g_K \leq 0$, γεγονός που σε συνδυασμό με την (3.11), $g \leq \beta n + \gamma g_R < \beta n \leq n$, όπου χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά ότι, $g_R < 0$ και ότι $\beta < 1$. Αυτό όμως το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με την σχέση $g \geq n$ επομένως, $I > \delta K$ για όλα τα t. •

Λήμμα 3.4
Έστω ότι το $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ είναι ένα βέλτιστο υποψήφιο μονοπάτι ανάπτυξης τέτοιο ώστε $\lim_{t\to\infty} g_C = \lim_{t\to\infty} g_Y = \lim_{\to\infty} g_K = \bar{g}$.Τότε :
(α) για κάποιο $\bar{g}_R \leq 0, \lim_{t\to\infty} \bar{g}_R = \bar{g}$, και $\bar{g}$ και $\bar{g}_R$ ικανοποιούν

$$(1 - a)\bar{g} - \gamma \bar{g}_R = \beta n \qquad (3.25)$$

$$(\varepsilon - 1)\bar{g} + \bar{g}_R = \varepsilon n - \rho \qquad (3.26)$$

και
(β) Εάν, επιπρόσθετα, ισχύουν οι συνθήκες εγκαρσιότητας (3.20) και (3.21), τότε $\lim_{t\to\infty} g_S = \bar{g}_R < 0$.

Απόδειξη του Λήμματος 3.4

Θεωρούμε ένα βέλτιστο υποψήφιο μονοπάτι ανάπτυξης $(C,Y,K,R,S)_{t=0}^{\infty}$ τέτοιο ώστε $\lim_{t\to\infty} g_C = \lim_{t\to\infty} g_Y = \lim_{t\to\infty} g_K = \bar{g}$.
(α)Από την (3.11) έχουμε ότι $\lim_{t\to\infty} g_R = \frac{1}{\gamma}[(1-a)\bar{g}-\beta n] \equiv \bar{g}_R$. Αν την αναδιατάξουμε θα πάρουμε την (3.25). Εάν $\bar{g}_R > 0$, τότε η (3.6) θα παραβιαστεί, επομένως $\bar{g}_R \leq 0$. Εφόσον $c \equiv C/L$, $\lim_{t\to\infty} g_c = \bar{g} - n$. Άρα συνδυάζοντας (3.23) και (3.24) θα μας δώσουν την (3.26).
(β)Υποθέτοντας ότι ισχύει η (3.20) και (3.21) και χρησιμοποιώντας την (3.18) και (3.23),θα έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty}(\frac{\dot{K}}{K}+\frac{\dot{\mu}}{\mu}-\rho) = \bar{g} + \lim_{t\to\infty}(\delta - F_K) = \bar{g} - \lim_{t\to\infty}(\varepsilon\frac{\dot{c}}{c}+\rho)$$
$$= (1-\varepsilon)\bar{g} + \varepsilon n - \rho < 0 \tag{6.2}$$

εφόσον σε αντίθετη περίπτωση η (3.20) δεν θα ικανοποιείται. Συνδυάζοντας αυτήν με την (3.26), συμπεραίνουμε ότι $\bar{g}_R < 0$.Τελικά, ολοκληρώνοντας την (3.3) θα πάρουμε $S(t) = S(0) - \int_0^t R(0)e^{\int_0^\tau g_R(\omega)d\omega}d\tau \to 0$ για $t \to \infty$, από την (3.22) η οποία προέρχεται από την (3.21). Επομένως

$$g_S(t) = \frac{-R(t)}{S(t)} = \frac{-R(0)e^{\int_0^t g_R(\tau)d\tau}}{S(0) - R(0)\int_0^t e^{\int_0^\tau g_R(\omega)d\omega}d\tau}$$

όπου επίσης ο αριθμητής τείνει $\to 0$ για $t \to \infty$ εφόσον $\lim_{t\to\infty} g_R(t) = \bar{g}_R < 0$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hopital θα πάρουμε $\lim_{t\to\infty} g_S(t) = \lim_{t\to\infty} g_R(t) = \bar{g}_R$. •

Λήμμα 3.5
Έστω ότι το $(C,Y,K,R,S)_{t=0}^{\infty}$ είναι ένα ασυπτωτικά υποψήφιο βέλτιστο μονοπάτι ανάπτυξης με ασυπτωτικούς ρυθμούς ανάπτυξης: $\bar{g}_C, \bar{g}_Y, \bar{g}_K, \bar{g}_R$ και $\bar{g}_S$.Υποθέτουμε ότι $\bar{g}_C = \bar{g}_Y = \bar{g}_K = \bar{g}$.Τότε :
(α)$\lim_{t\to\infty}(z,x,u) = (\bar{z},\bar{x},\bar{u})$, όπου

$$\bar{z} = \frac{1}{a}(\bar{g} - \bar{g}_R + \delta) \tag{3.27}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{a}[-(1-\gamma)\bar{g}_R + \beta n + (1-a)\delta] \tag{3.28}$$

$$\bar{u} = -\bar{g}_S \tag{3.29}$$

(β)$\bar{g}_R \leq 0$.Εάν $\bar{g}_R < 0$, τότε η συνθήκη εγκαρσιότητας (3.20) ικανοποιείται και
(γ)$\bar{g}_S \leq 0$.Εάν $\bar{g}_S < 0$, τότε η συνθήκη εγκαρσιότητας (3.21) ικανοποεέιται.

Απόδειξη του Λήμματος 3.5
(α)Αν πάρουμε το όριο της (3.24) θα πάρουμε την (3.27). Από την (3.9), αν πάρουμε το όριο της θα έχουμε

$$\bar{g} = \bar{z} - \bar{x} - \delta.$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με a θα έχουμε $a\bar{x} = a\bar{z} - a\delta - a\bar{g} = (1-a)\bar{g} - \bar{g}_R + (1-a)\delta$, από την (3.24). Εισάγοντας την (3.25), θα πάρουμε την (3.28). Από την (3.10),η u συγκλίνει σε κάποιο $\bar{u} = -\lim_{t\to\infty} g_S = -\bar{g}_S$, από υπόθεση.
(β)Από το Λήμμα 3.4, το ζευγάρι $(\bar{g}, \bar{g}_R)$ ικανοποιεί την (3.25) και (3.26). Η συνθήκη (3.6) απαιτεί να ισχύει $\bar{g}_R \leq 0$. Όταν $\bar{g}_R < 0$, τότε η (3.26) δηλώνει ότι $(1-\varepsilon)\bar{g} + \varepsilon n - \rho < 0$ επομένως η (3.26) ισχύει αποδεικνύοντας την (3.20).
(γ)Από την σχέση (3.10) και από $u \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} g_S = \bar{g}_S \leq 0$. Υποθέτοντας ότι $\bar{g}_S < 0$.Τότε από την $S(t) = S(0)e^{\int_0^t g_S(\tau)d\tau}dt$ θα προκύψει η (3.22), και άρα και η (3.21). •

Λήμμα 3.6
(α) Δοδέντος ενός ασυπτωτικού μονοπατιού $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ με ασυπτωτικά σταθερές καταστάσεις $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, τότε : (ι) $\bar{u} = -\bar{g}_R > 0$ (ιι) $\bar{z} > 0$ όταν $\bar{g} \geq 0$ και (ιιι) $\bar{x} > 0$, εκτός στην περίπτωση knife-edge όπου ταυτόχρονα ισχύουν $a > 1$ και $\delta = -(1-\gamma)\bar{g}_R/(a-1) + (\beta n/a - 1)$ και
(β) δεδομένου ενός βέλτιστου I.M.A. $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ τότε τα z, x και u είναι σταθερά και θετικά.

Απόδειξη του Λήμματος 3.6
(α)Από το (β) του Λήμματος 3.4 θα πάρουμε το (ι). Τότε το (ιι) θα προκύψει από την (3.27). Για το (ιιι), από τον ορισμό, έχουμε $\bar{x} \geq 0$. Επιπλέον η σχέση (3.28) δείχνει ότι $\bar{x} > 0$ εάν ίσχύει είτε $a \leq 1$ ή ($a > 1$ και $\delta < \frac{1-\gamma}{a-1}(-g_R) + \frac{\beta n}{a-1}$), και $\bar{x} = 0$ εάν $a > 1$ και $\delta = \frac{1-\gamma}{a-1}(-\bar{g}_R) + \frac{\beta n}{a-1}$.
(β)Από το Λήμμα 3.2, προκύπτει ότι κάθε I.M.A. $(C, Y, K, R, S)_{t=0}^{\infty}$ έχει $g_C = g_Y = g$, ίσα με μία σταθερά . Εάν $g_K \neq g$, τότε το $z(\equiv Y/K)$ δεν είναι σταθερό και επομένως, από την (3.23), το $g_C(= g_c + n)$ δεν θα είναι σταθερό, αντικρούοντας το γεγονός ότι το μονοπάτι ήταν I.M.A.. Επομένως, $g_K = g$.Τότε, z και x είναι σταθερά. Τελικώς, τα z και x πρέπει να είναι θετικά, από τον ορισμό του I.M.A.. •

Πρόταση 3.2
Δεδομένου του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14), και υποθέτοντας ότι ισχύει $D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma \neq 0$. Έστω $\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}$, και $\bar{u}$ να ορίζονται με την (3.31),(3.32),(3.33),(3.34) και (3.35) αντίστοιχα. Τότε:

(α) υπάρχει μία σταθερή κατάσταση $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$ ικανοποιώντας τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας αν και μόνο αν οι παράμετροι $a, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, n$ και δ παίρνουν την τιμές τέτοιες ώστε: (ι) $\bar{g}_R < 0$, (ιι) $\bar{z} > 0$ και (ιιι) είτε $a \leq 1$ ή $a > 1 \wedge \delta < -(1-\gamma)\bar{g}_R/(a-1) + \beta n/(a-1)$. Αυτό το σύνολο των παραμέτρων έχει μη - κενό εσωτερικό και
(β) η σταθερή κατάσταση $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$ είναι μοναδική και ίση με $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$.

Απόδειξη της Πρότασης 3.2
Από τον ορισμό μίας σταθερής κατάστασης, τα z και x είναι σταθερά, επομένως και, $g_C = g_Y = g_K = g$, είναι ίσα με σταθερές. Επιπρόσθετα , εάν είμαστε πάνω σε ένα Ι.Μ.Α μία σταθερή κατάσταση έχει $g_S = g_R < 0$, από το Λήμμα 3.1.
(β)Επομένως, οι συνθήκες του Λήμματος 3.5 ικανοποιούνται από μία βέλτιστη σταθερή κατάσταση, $(g^*, g_R^*, z^*, x^*, u^*)$, εάν μία τέτοια υπάρχει, και δοδέντος $D \neq 0$, είναι ίση με $(\bar{g}, \bar{g}_R, \bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$, επομένως είναι μοναδική.
(α)προκύπτει από την (3.29) (εφόσον $\bar{g}_S = \bar{g}_R < 0$) και (3.28) του Λήμματος 3.5,η σχέση (3.28) θα δώσει $\bar{x} > 0$ μονό αν η (α.ιιι) ισχύει. Από την άλλη πλεύρα, υποθέτοντας ότι τα $a, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, n$ και δ είναι τέτοια ώστε τα (α.ι), (α.ιι) και (α.ιιι) ισχύουν. Τότε, από το Πόρισμα του Λήμματος 3.5 ,έχουμε $\bar{x} > 0$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα Ι.Μ.Α. που να ικανοποιεί τις πρωτοτάξιες συνθήκες καθορίζοντας το $\bar{g}$ από την (3.27) και θέτοντας $g_C = g_Y = g_K = \bar{g}$ και $g_S = -\bar{u} = \bar{g}_R < 0$. Από το (β) και (γ) του Λήμματος του 3.5, οι δύο συνθήκες εγκαρσιότητας ισχύουν επίσης. Αυτό αποδεικνύει το ευθύ κομμάτι του θεωρήματος. Τελικώς, για να δούμε αν το σύνολο των επιτρεπόμενων τιμών των παραμέτρων έχουν μη-κενό εσωτερικό, έστω a, β και γ να είναι τέτοια $a + \beta + \gamma = 1$ τότε $\bar{z} > 0, D > 0$ επιπρόσθετα, έστω $0 < n < (1-a)\rho/[\varepsilon(1-a-\beta)+\beta]$ τότε $\bar{u} = -\bar{g}_R > 0$ και $\bar{x} > 0$
από το Πόρισμα του Λήμματος 3.5, εφόσον $a < 1$. •

Πρόταση 3.3
Δεδομένου του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14), και υποθέτοντας $D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma \neq 0$. Τότε υπάρχει μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$, ικανοποιώντας τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας, αν και μόνο αν, επιπρόσθετα με το (α.ι) και (α.ιιι) της Πρότασης 3.2, οι παράμετροι ικανοποιούν

$$\frac{(a+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{D} > 0 \qquad (3.37)$$

Απόδειξη της Πρότασης 3.3
Ήδη γνωρίζουμε από την Πρόταση 3.2 ότι μία σταθερή κατάσταση, που ικανοποιεί

τις πρωτοτάξιες συνθήκες και την συνθήκη εγκαρσιότητας, υπάρχει αν και μόνο αν τα (α.ι), (α.ιι) και (α.ιιι) της Πρότασης 3.2 ικανοποιούνται. Σε μία τέτοια σταθερή κατάσταση, από την (3.36), θα ισχύει $g_c^* > 0$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (3.37). Τελικά, από το (α) του Λήμματος 3.6 βλεπούμε ότι η (α.ιι)της Πρότασης 3.2 ικανοποιείται αυτόματα όταν $g_c^* > 0$ αφού αυτό μας δίνει $\bar{g} = g_c^* + n > 0$. •

Πρόταση 3.4

Το δυναμικό του μοντέλου (3.1)-(3.5) και (3.14) περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις (3.42),(3.43) και (3.45). Μία σταθερή κατάσταση (z^*, x^*, u^*) είναι saddle-point ευσταθής αν και μόνο αν $D \equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma > 0$, και είναι μη - ευσταθής αν $D < 0$.

Απόδειξη της Πρότασης 3.4

Ο Ιακωβιανός Πίνακας του δυναμικού συστήματος $z, x,$ και u αποτιμημένη στην σταθερή κατάσταση, είναι:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-1)z^* & \frac{1-a-\gamma}{1-\gamma} & 0 \\ \\ (\frac{a}{\varepsilon} - 1)x^* & x^* & 0 \\ \\ 0 & \frac{-a}{1-\gamma}u^* & u^* \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

το ίχνος της είναι:

$$(a-1)z^* + x^* + u^* = 2u^* > 0 \tag{6.4}$$

από την (3.9) και (3.27), και την Πρόταση 3.2. Η ορίζουσα $\bar{\Delta}$, του πίνακα είναι

$$\bar{\Delta} = a\frac{1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma}{(\gamma - 1)\varepsilon} z^* x^* u^* \equiv a\frac{D}{(\gamma - 1)\varepsilon} z^* x^* u^* \tag{6.5}$$

Από την (6.3) βλέπουμε ότι το u^* είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα, άρα τουλάχιστον μία ιδιοτιμή είναι πραγματική και θετική. Αν και μόνο αν $D > 0$, τότε $\bar{\Delta} < 0$. Επομένως, αν και μόνο αν $D > 0$, θα υπάρξει μία αρνητική ιδιοτιμή και δύο πραγματικές θετικές ιδιοτιμές. Βλέποντας την συνοριακή συνθήκη (3.49) θα έχουμε saddle-point ευστάθεια.

Υποθέτοντας, στην αντίθετη περίπτωση ότι $D < 0$. Τότε $\bar{\Delta} > 0$, κάτι το οποίο δημιουργεί δύο δυνατές περιπτώσεις: είτε όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές (είτε έχουν θετικά πραγματικά μέρη) ή υπάρχει μία θετική ιδιοτιμή και δύο ιδιοτιμές με μη-θετικά πραγματικά μέρη. Αλλά αυτή η τελευταία περίπτωση μπορεί να αποκλειστεί εφόσον το ίχνος του πάνω αριστερά υποπίνακα $2x2$ της $\bar{J}$ είναι ίσο με $-g_R^* = u^* > 0$ οπώς δείξαμε στην παράγραφο 3.2. Επομένως, το σύστημα είναι μη - ευσταθές. •

Πρόταση 3.5(Η Περίπτωση με $n = 0$)
Υποθέτουμε ότι $n = 0$.Τότε:
(α) Βλέποντας ότι ισχύει $\rho > 0$, δεν μπορεί να υπάρξει σταθερή κατάσταση με $g_c^* = 0$. Όταν $D(\equiv 1 - a + (\varepsilon - 1)\gamma) = 0$, δεν υπάρχει σταθερή κατάσταση
(β) όταν $D \neq 0$, υπάρχει μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$ αν και μόνο αν $a > 1$, $D < 0$, και $\delta < -(1 - \gamma)\rho/D$ και
(γ) μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$ είναι μη - ευσταθής.

Απόδειξη της Πρότασης 3.5
Υποθέτουμε ότι $n = 0$.
(α) Εάν $D \neq 0$, τότε $g_c^* \neq 0$, από την (3.36). Εάν $D = 0$, τότε οι σχέσεις (3.25) και (3.26) μας δείχνουν ότι δεν υπάρχει μία σταθερή κατάσταση όταν $n = 0$.
(β)Το ερώτημα αυτό είναι μία ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.3. Πράγματι,η σχέση (3.37) μας δείχνει: $g_c^* > 0 \Leftrightarrow -\gamma\rho/D > 0 \Leftrightarrow D < 0$. Όταν $D < 0$, από την σχέση (3.32), $g_R^* < 0 \Leftrightarrow a > 1$. Επιπλεόν, για $D < 0$ και $a > 1$, από την σχέση (3.34), $x^* > 0 \Leftrightarrow \delta < -(1 - \gamma)g_R^*/(a - 1) \Leftrightarrow \delta < (1 - \gamma)\rho/(-D)$ από την σχέση (3.32)
(γ) Από το (β) ερώτημα, μία σταθερή κατάσταση με $g_c^* > 0$ προϋποθέτει $D < 0$. Τότε, από την Πρόταση 3.4, η σταθερή κατάσταση είναι μη - ευσταθής. •

6.2 Παράρτημα Β

Σε αυτό το Παράρτημα θα δώσουμε τις αποδείξεις των Προτάσεων 4.1-4.6 του Κεφαλαίου 4.

Πρόταση 4.1
Ο λόγος $\frac{c_1(t)}{c_2(t)}$ είναι σταθερός για κάθε t και ίσος με τον λόγο των μετοχών της χώρας 1 και της χώρας 2 $\left(\frac{q(t)S(t)+K_1(t)}{K_2(t)}\right)$ την χρονική στιγμή t.

Απόδειξη της Πρότασης 4.1
Χρησιμοποιώντας την (4.23), και $r - \delta = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}$ ο περιορισμός του προϋπολογισμού της χώρας 2 μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\dot{K}_2(t)}{q(t)} - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\frac{K_2(t)}{q(t)} = -\left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{c_2(0)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}\frac{1}{q(t)}. \tag{6.6}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της σχέσεως (6.6) είναι ίσο με $\frac{d\frac{K_2}{q}}{dt}$, έτσι ολοκληρώνοντας την (6.6) θα πάρουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_2(t)}{q(t)} - \frac{K_2(\tau)}{q(\tau)} = -\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_\tau^\infty \frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}. \tag{6.7}$$

Χρησιποποιώντας την συνθήκη εγκαρσιότητας (4.24) θα πάρουμε την σχέση

$$K_2(\tau) = q(\tau)\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_\tau^\infty \frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}. \tag{6.8}$$

Εφόσον ο λόγος $\frac{c_1}{c_2}$ είναι σταθερός για όλα τα t, υποθέτουμε ότι $c_1(t) = \mu c_2(t)$ όπου μ είναι μία σταθερά.Οι εξισώσεις (4.6) και (4.25) δηλώνουν ότι

$$R = \frac{r}{q}\frac{1-a}{a}(K_1 + K_2). \tag{6.9}$$

Ο περιορισμός του προϋπολογισμού του καταναλωτή της χώρας 1 μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{K}_1 - (r-\delta)K_1 + \mu c_2 = q\frac{r}{q}\frac{1-a}{a}(K_1 + K_2). \tag{6.10}$$

χρησιμοποιώντας $\frac{\dot{q}}{q} = r - \delta$, $\dot{S} = -R$ και θέτοντας $c_2(t) = \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{c_2(0)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}$, διαιρώντας με το q και ολοκληρώνοντας θα παρουμε:

$$\int_\tau^\infty \left(\frac{\dot{K}_1(t)}{q(t)} - \frac{\dot{q(t)}}{q(t)}\frac{K_1(t)}{q(t)} + \frac{\mu}{q(t)}\left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{c_2(0)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}} \right) dt = \int_\tau^\infty R(t)dt = S(\tau) - \lim_{t\to\infty} S(t). \tag{6.11}$$

Εφόσον η κατανάλωση του φυσικού πόρου είναι ανέξοδη $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. Για αυτό, η σχέση (6.11) μπορεί να γραφεί ως

$$\int_\tau^\infty \frac{d\frac{K_1}{q}}{dt}dt + \mu\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_\tau^\infty \frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}dt = S(\tau) \tag{6.12}$$

ή

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_1(t)}{q(t)} - \frac{K_1(\tau)}{q(\tau)} + \mu\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_\tau^\infty \frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}dt = S(\tau). \tag{6.13}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη εγκαρσιότητας (εξίσωση) (4.24) και αναδιατασσοντας θα έχουμε

$$\mu q(\tau)\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_\tau^\infty \frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}dt = q(\tau)S(\tau) + K_1(\tau). \tag{6.14}$$

Από την εξίσωση (6.8) θα παράγουμε

$$q(\tau)\frac{c_2(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}}\int_{\tau}^{\infty}\frac{q(t)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}dt = K_2(\tau), \tag{6.15}$$

και για αυτό ,

$$\mu = \frac{q(\tau)S(\tau)+K_1(\tau)}{K_2(\tau)}. \tag{6.16}$$

•

Πρόταση 4.2

Ένα σημείο ισορροπίας, εάν αυτό υπάρχει, συγκλίνει σε ένα Ι.Μ.Α με ρυθμούς ανάπτυξης

$$g_q = \eta, \qquad g_{K_i} = g_{c_i} = \frac{\eta-\rho}{\theta} \equiv g_K, \qquad g_{R_i} = g_R = g_S = \frac{(1-\theta)\eta-\rho}{\theta}.$$

για $i = 1, 2$ και r να είναι σταθερό.

Απόδειξη της Πρότασης 4.2 Πρώτα παρατηρούμε ότι από τις εξισώσεις (4.5),(4.12) και (4.13) ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεγέθυνσης του q και η μακροπρόθεσμή τιμή του r είναι ίση με

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{q}}{q} = \eta = g_q, \qquad \lim_{t\to\infty} r = \eta+\delta \equiv r^* \tag{6.17}$$

επομένως, το r είναι σταθερό μακροπρόθεσμα. Άρα, ο κατά χώρα ρυθμός ανάπτυξης της κατανάλωσης είναι σταθερός μακροπρόθεσμα και δεδομένος από την σχέση

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{c}_i}{c_i} = \lim_{t\to\infty}\frac{r-\delta-\rho}{\theta} = \frac{\eta-\rho}{\theta} = g_{c_i} \tag{6.18}$$

Οι πρωτοτάξιες συνθήκες για τον τομέα παραγωγής του τελικού προϊόντος σε κάθε χώρα (εξίσωση (4.6)) και η συνθήκη για το R (εξίσωση (4.25)) θα μας δώσουν

$$R = \frac{1-a}{a}\frac{r}{q}(K_1+K_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{1-a}q\frac{R}{K} = r \tag{6.19}$$

όπου $K = K_1 + K_2$. Εφόσον το r είναι σταθερό μακροπρόθεσμα, η σχέση (6.19) δηλώνει ότι μακροπρόθεσμα ο ρυθμός αύξησης του K και του R πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{q}}{q} + \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{R}}{R} - \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K} - \lim\frac{\dot{R}}{R} = \eta \tag{6.20}$$

Παρατηρώντας ότι $\dot{S} = -R$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του S είναι ίσος με τον λόγο $\frac{\dot{S}}{S} = -\frac{R}{S}$. Εφόσον η εξόρυξη είναι ανέξοδη, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο και τα δύο R και S προσεγγίζουν το μηδέν. Χρησιμοποιώντας τώρα τον κανόνα του L'Hopital θα έχουμε ότι:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{S}}{S} = \lim_{t\to\infty} -\frac{R}{S} = \lim_{t\to\infty} -\frac{\dot{R}}{\dot{S}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{R}}{R}. \tag{6.21}$$

Η σχέση (6.21) δηλώνει ότι καθώς $t \to \infty$ τα R και S αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό που απομένει να δείξουμε είναι ότι $g_{c_i} = g_{K_i}$. Παρατηρώντας ότι η σχέση (6.19) δηλώνει ότι το $q\frac{R}{K}$ είναι σταθερό μακροπρόθεσμα, αφού μακροπρόθεσμα τα S και R αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό, τότε, έχουμε την περίπτωση όπου $\chi \equiv \frac{qS}{K}$ είναι σταθερό μακροπρόθεσμα. Παίρνοντας την λογαριθμική παράγωγο ως προς το χρόνο του χ, και χρησιμοποιώντας ότι $\dot{S} = -R$ και $qR = \frac{1-a}{a}Kr$ θα πάρουμε

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \dot{q}\frac{S}{K}\frac{1}{\chi} + \frac{q\dot{S}}{K}\frac{1}{\chi} - \frac{qS}{K}\frac{\dot{K}}{K}\frac{1}{\chi}. \tag{6.22}$$

Περνώντας στο όριο θα έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\chi}}{\chi} = 0 = \eta - \lim_{t\to\infty} \frac{1-a}{a}\frac{r}{\chi} - \lim_{t\to\infty} \left(r - \delta + r\frac{1-a}{a} - \frac{C}{K} \right) \tag{6.23}$$

όπου $C = c_1 + c_2$. Εφόσον και το c_1 και το c_2 αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό,τότε και το C επίσης θα αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό με τα c_i. Παρατηρώντας ακόμα ότι το χ είναι σταθερό μακροπρόθεσμα ($\frac{\dot{\chi}}{\chi} = 0$), άρα για να ισχύει η εξίσωση (6.23) πρέπει ο λόγος $\frac{C}{K}$ να είναι σταθερός μακροπρόθεσμα και για αυτό τα, C και K πρέπει ασυπτωτικά να αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό. Για αυτό, $g_{c_i} = g_K$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (6.20) θα πάρουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\eta(1-\theta) - \rho}{\theta} = g_R$$

Για να ισχύει η συνθήκη εγκαρσιότητας (4.10) πρέπει να έχουμε την περίπτωση όπου $g_R = g_S < 0$. Τελικά, εφόσον $K = K_1 + K_2$ τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$g_{K_i} = g_K = g_{c_i} \bullet$$

Πρόταση 4.3

Το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά μοναδικό.

Απόδειξη της Πρότασης 4.3
Η Ιακωβιανός Πινακας J^* είναι ίσος με

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-a}{a}r^* & 0 & 0 \\ \hat{g}_q & 0 & -\frac{g^*}{T^{*2}}\frac{r^*}{q^*}\frac{1-a}{a} \\ \hat{T}_q & (1+\mu)T^{*2} & (1+\mu)g^*T^* - g_S \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

Οι ιδιοτιμές του J^* είναι οι τιμές του ξ που λύνουν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\left(-\frac{1-a}{a}r^* - \xi\right)\left(-\xi\left[(1+\mu)g^*T^* - g_S - \xi\right] + \frac{r^*}{q^*}\frac{1-a}{a}(1+\mu)g^*\right) = 0 \tag{6.25}$$

Μία από τις λύσεις της (6.25) δίνεται από

$$\xi_1 = -\frac{1-a}{a}r^* < 0 \tag{6.26}$$

Οι δύο άλλες τιμές για το ξ είναι αυτές που λύνουν την δευτεροτάξια εξίσωση του ξ δίνονται από την σχέση

$$\xi^2 - \xi[(1+\mu)g^*T^* - g_*T^* - g_S] + \frac{r^*}{q^*}\frac{1-a}{a}(1+\mu)g^* = 0 \tag{6.27}$$

ή

$$\xi^2 + b\xi + d = 0 \tag{6.28}$$

όπου $b = -((1+\mu)g^*T^* - g_S)$ και $d = \frac{r^*}{q^*}\frac{1-a}{a}(1+\mu)g^*$. Χρησιμοποιώντας την σχέση για το g^* από την σχέση (4.35) θα πάρουμε

$$\left(\frac{\eta + \delta(1-a)}{a} - g_K\right) = (1+\mu)T^*g^*. \tag{6.29}$$

Αντικαθιστώντας το T^* από την (4.36) στην (6.29) θα έχουμε

$$\frac{r^*}{q^*}\frac{1-a}{a}(1+\mu)g^* = (\eta - g_K)\left(\frac{\eta + \delta(1-a)}{a} - g_K\right). \tag{6.30}$$

Η αντικατάσταση της σχέσεως (6.29) στην (6.30) θα μας δώσει

$$\frac{r^*}{\hat{q}^*}\frac{1-a}{a}(1+\mu)g^* = (\eta - g_K)(1+\mu)T^*g^* \Rightarrow \frac{r^*}{\hat{q}^*}\frac{1-a}{a} = (\eta - g_K)T^*. \tag{6.31}$$

Από την σχέση (4.27) έχουμε την περίπτωση $(\eta - g_K) = -g_S$. Χρησιμοποιώντας την (6.31) παρατηρούμε ότι το d μπορεί να γραφεί ως

$$d = -g_S(1+\mu)g^*T^* \tag{6.32}$$

Οι δύο άλλες ιδιοτιμές του J^* είναι ίσες με

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2} \tag{6.33}$$

όπου $D = ((1+\mu)g^*T^* - g_S)^2 + 4g_S(1+\mu)g^*T^*$. Εάν κανουμε κάποιες αντικαταστάσεις στο D θα πάρουμε

$$\begin{aligned} D &= (1+\mu)^2(g^*T^*)^2 + 2g_S(1+\mu)g^*T^* + g_S^2 \\ &= ((1+\mu)g^*T^* + g_S)^2 \end{aligned} \tag{6.34}$$

αντικαθιστώντας στην σχέση (6.33) θα παρουμε

$$\frac{-b \pm ((1+\mu)g^*T^* + g_S)}{2} \tag{6.35}$$

οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του J^* είναι ίσες με

$$\xi_2 = -g_S \qquad\qquad \xi_3 = (1+\mu)g^*T^*$$

οι οποίες είναι θετικές. •

Πρόταση 4.6
Εάν $a = \theta$ η τιμή του μη-ανανεώσιμου φυσικού πόρου και η συνολική κατανάλωση ($C \equiv c_1 + c_2$) την χρονική στιγμή μηδέν είναι ίσα με:

$$q(0) = \frac{(1-a)a^a}{(\rho-(1-a)\eta)^a}\left(\frac{K_0}{S_0}\right)^a \qquad\qquad C(0) = K_0\left(\delta\frac{1-a}{a} + \frac{\rho}{a}\right)$$

και ο ρυθμός εξόρυξης και το συνολικό κεφάλαιο ($K \equiv K_1 + K_2$) για όλα τα t είναι ίσο με

$$R(t) = \frac{\rho-(1-a)\eta}{a}S_0 e^{\frac{(1-a)\eta-\rho}{a}t} \qquad\qquad K(t) = K_0\left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{\rho}{\theta}t}.$$

Απόδειξη της Πρότασης 4.6
Εδώ θα δείξουμε ότι το $q(0)$ είναι ίσο με $q(0) = \frac{(1-a)a^a}{(\rho-(1-a)\eta)^a}\left(\frac{K_0}{S_0}\right)^a$ όταν $a = \theta$. Εφόσον $R = \frac{1-a}{a}\frac{r}{q}(K_1 + K_2)$. Για να καθορίσουμε το R πρέπει να βρούμε μία λύση για το συνολικό κεφάλαιο $K = K_1 + K_2$.Εφόσον ισχύει $\dot{K} = \dot{K}_1 + \dot{K}_2$

και χρησιμοποιώντας και τους δύο περιορισμούς για τους προϋπολογισμούς και ενθυμούμενοι ότι $C = c_1 + c_2$, τότε το $\dot{K}$ είναι ίσο με

$$\dot{K} = (r-\delta)K + \frac{1-a}{a}rK - C, \tag{6.36}$$

η οποία είναι μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση με ένα μεταβλητό συντελεστή. Χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\dot{q}}{q} = r - \delta$, η γενική της λύση δίνεται από

$$K(t) = K_0 e^{\int_0^t \frac{r(\xi)}{a} - \delta d\xi} - \int_0^t C(\tau) e^{\int_\tau^t \frac{r(\xi)}{a} - \delta d\xi} d\tau \tag{6.37}$$

$$= K_0 \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{\delta(\frac{1-a}{a})t} - \int_0^t C(\tau) \left(\frac{q(t)}{q(\tau)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{\delta(\frac{1-a}{a})(t-\tau)} d\tau. \tag{6.38}$$

Θέτωντας $a = \theta$ και $C(t) = \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{C(0)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}}$ από την (4.23) θα έχουμε ότι

$$K(t) = K_0 \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{\delta(\frac{1-a}{a})t} - \frac{C(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_0^t q(t)^{\frac{1}{a}} \frac{q(\tau)^{\frac{1}{\theta}}}{q(\tau)^{\frac{1}{a}}} \frac{e^{\delta(\frac{1-a}{a})(t-\tau)}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}} d\tau$$

$$= K_0 \left(\frac{q(t)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{a}} e^{\delta(\frac{1-a}{a})t} + \frac{C(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \frac{q(t)^{\frac{1}{a}} \left(e^{-\frac{\rho}{\theta}t} - e^{\delta(\frac{1-a}{a})t}\right)}{(\delta(\frac{1-a}{a}) + \frac{\rho}{\theta})}. \tag{6.39}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $r = \left(\frac{a^a(1-a)^{1-a}e^{(1-a)\eta t}}{q^{1-a}}\right)^{\frac{1}{a}}$ από την (4.5), θα πάρουμε ότι το κλάσμα $\frac{r}{q}$ είναι ίσο με

$$\frac{r}{q} = \frac{a(1-a)^{\frac{1-a}{a}} e^{(\frac{1-a}{a})\eta t}}{q^{\frac{1}{a}}}. \tag{6.40}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $R = \frac{1-a}{a}\frac{r}{q}K = \frac{(1-a)^{\frac{1}{a}} e^{(\frac{1-a}{a})\eta t}}{q^{\frac{1}{a}}}K$, $\int_0^\infty R dt = S_0$ και (6.39) θα πάρουμε ότι

$$\int_0^\infty R(t)dt = (1-a)^{\frac{1}{a}} \int_0^\infty \left(\frac{K_0}{q(0)^{\frac{1}{a}}} e^{\frac{1-a}{a}(\eta+\delta)t} + \frac{C(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \frac{\left(e^{(\frac{1-a}{a}\eta - \frac{\rho}{\theta})t} - e^{\frac{1-a}{a}(\eta+\delta)t}\right)}{\frac{1-a}{a}\delta + \frac{\rho}{\theta}}\right) dt \tag{6.41}$$

$$= \frac{(1-a)^{\frac{1}{a}}}{q(0)^{\frac{1}{a}}} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{a\left(e^{\frac{1-a}{a}(\eta+\delta)t} - 1\right)}{(\eta+\delta)(1-a)} \left(K_0 - \frac{C(0)}{\frac{1-a}{a}\delta + \frac{\rho}{\theta}}\right) + \frac{C(0)\left(e^{(\frac{1-a}{a}\eta - \frac{\rho}{\theta})t} - 1\right)}{(\frac{1-a}{a}\eta - \frac{\rho}{\theta})(\frac{1-a}{a}\delta + \frac{\rho}{\theta})} \right).$$

Η εξίσωση (6.41) για να συγκλίνει στην σταθερά S_0 πρέπει να ισχύει ότι

$$C(0) = K_0 \left(\delta \frac{1-a}{a} + \frac{\rho}{\theta} \right). \tag{6.42}$$

Για να ισχύει η συνθήκη εγκαρσιότητας πρέπει να ισχύει $(\frac{1-a}{a}\eta - \frac{\rho}{\theta}) < 0$, αυτό δηλώνει ότι η σχέση (6.41) συγκλίνει. Λύνοντας ως προς το $q(0)$ θα πάρουμε

$$q(0) = \frac{(1-a)a^a}{(\rho - (1-a)\eta)^a} \left(\frac{K_0}{S_0} \right)^a \tag{6.43}$$

$$K(t) = K_0 \left(\frac{q(t)}{q(0)} \right)^{\frac{1}{a}} e^{\delta(\frac{1-a}{a})t} - \frac{C(0)}{q(0)^{\frac{1}{\theta}}} \int_0^t q(t)^{\frac{1}{a}} \frac{q(\tau)^{\frac{1}{\theta}}}{q(\tau)^{\frac{1}{a}}} \frac{e^{\delta(\frac{1-a}{a})(t-\tau)}}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}} d\tau$$

$$= K_0 \left(\frac{q(t)}{q(0)} \right)^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{\rho}{\theta}t} = q(t)^{\frac{1}{a}} \frac{(\rho - (1-a)\eta)}{e^{\frac{\rho}{\theta}t}(1-a)^{\frac{1}{a}} a} S_0. \tag{6.44}$$

Αντικαθιστώντας την (6.44) στην $R(t) = \frac{1-a}{a}\frac{r(t)}{q(t)}K(t)$ καθώς και την λύση για το $q(0)$ θα έχουμε

$$R = \frac{1-a}{a}\frac{r}{q}K = \frac{\rho - (1-a)\eta}{a} S_0 e^{\frac{(1-a)\eta - \rho}{a}t}. \tag{6.45}$$

•

6.3 Παράρτημα Γ

Εδώ θα παράγουμε την συνθήκη του Euler για το πρόβλημα του καταναλωτή της χώρας i. Θα αρχίσουμε με την έκφραση της Χαμιλτονιανής

$$J = u(c)e^{-\rho t} + \nu[(r_2 - \delta)K_2(t) - c_2(t)] \tag{6.46}$$

όπου η μεταβλητή ν είναι η τιμή shadow του εισοδήματος και η συνάρτηση $u(c)$-που συχνά ονομάζεται συνάρτηση felicity -συσχετίζει την ροή της χρησιμότητας κατά άτομο στην κατά άτομο ποσότητα της κατανάλωσης, c. Υποθέτουμε ότι η $u(c)$ είναι αύξουσα ως προς c και κοίλη -$u'(c) > 0, u''(c) < 0$. Αυτή η κοιλότητα δημιουργεί το εξής χαρακτηριστικό: τα νοικοκυριά ακολουθούν ένα σχετικά ομοιόμορφο πρότυπο σύμφωνα με το οποίο το c είναι πολύ χαμηλό σε κάποιες περιόδους και πολύ υψηλό σε άλλες. Επίσης υποθέτουμε ότι η $u(c)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Inada: $u'(c) \to \infty$ καθώς $c \to 0$, και $u'(c) \to 0$ καθώς $c \to \infty$. Ο πολλαπλασιαστής, $e^{-\rho t}$ ονομάζεται προεξοφλητικός παράγων και περικλείει τον ρυθμό της χρονικής προτίμησης, $\rho > 0$. Μία θετική τιμή για το ρ σημαίνει ότι τα utils αποτομόνται λιγότερο το αργότερο που λαμβάνονται. Υποθέτουμε ότι $\rho > n$, κάτι το οποίο δηλώνει ότι η συνάτηση χρησιμότητας U είναι φραγμένη έαν το c είναι σταθερό με το χρόνο.

Οι πρωτοτάξιες συνθήκες για το μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας είναι

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \Rightarrow \nu = u'(c)e^{-\rho t} \tag{6.47}$$

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial K_2} \Rightarrow \dot{\nu} = -(r_2 - \delta)\nu \tag{6.48}$$

Η εξίσωση (6.48) είναι γνωστή η εξίσωση του Euler ή ο κανόνας του Ramsey της βέλτιστης αποταμίευσης.

Η συνθήκη εγκαρσιότητας δίνεται από την σχέση:

$$\lim_{t\to\infty} = \frac{K_i}{e^{\rho t}c_i^{\theta}} = 0 \qquad for \;\; i = 1,2 \tag{6.49}$$

Εάν παραγωγίσουμε την σχέση (6.47) ως προς τον χρόνο και αντικαταστήσουμε το ν από αυτή την εξίσωση για το $\dot{\nu}$ από την εξίσωση (6.48), τότε θα πάρουμε την βασική συνθήκη για την κατανάλωση ως προς τον χρονο :

$$r = \rho - \left(\frac{du'/dt}{u'}\right) = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot(\dot{c}/c). \tag{6.50}$$

Αυτή η εξίσωση μας λέει ότι τα νοικοκυριά επιλέγουν την κατανάλωση έτσι ώστε να εξισώσουν τον ρυθμό απόδοσης, r, στον ρυθμό της χρονικής προτίμησης, ρ, συν τον ρυθμό μείωσης της οριακής χρησιμότητας της κατανάλωσης, u', λόγω της αύξησης της κατά κεφαλήν κατανάλωσης, c.

Υποθέτουμε τώρα ότι η u παίρνει την μορφή:

$$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)} \tag{6.51}$$

όπου $\theta > 0$. Όσο μεγαλύτερο είναι το θ, τόσο ταχύτερη είναι η μείωση στο $u'(c)$ σε απάντηση της αύξησης του c και επομένως τόσο λιγότερο πρόθυμα είναι τα νοικοκυριά να αποδεχθούν παρεκκλίσεις με το χρόνο από το ομοιόμορφο πρότυπο του c. Καθώς το θ προσεγγίζει το 0, η συνάρτηση χρησιμότητας τείνει να πάρει μία γραμμική μορφή ως προς το c. Αυτή η γραμμικότητα σημαίνει ότι τα νοικοκυριά είναι αδιάφορα για τον χρόνο της κατανάλωσης εάν ισχύει $r = \rho$.

Η μορφή της συνάτρησης $u(c)$ στην εξίσωση (6.51) δηλώνει ότι η συνθήκη βελτιστοποίησης από την εξίσωση (6.50) απλοποιείται στην παρακάτω μορφή

$$\dot{c}_i/c_i = \frac{r_i - \delta - \rho}{\theta} \qquad for \quad i = 1,2.\bullet \tag{6.52}$$

Βιβλιογραφία

[1] **Aghion P. and Howitt, P.(1998).**Endogenous Growth Theory,MIT Press,Cambridge,MA.

[2] **Arrow,K.J.(1962)** The economic implications of learning by doing,Review of Economiv Studies,29,155-173.

[3] **Barro,R.J. and Sala-i-Martin,X.(1995)** Economic Growth,McGraw-Hill,New York.

[4] **Chiarella,C.(1980)** Optimal depletion of a nonrenewable resource when technological progress is endogenous,in M.C. Kemp and N.V.Long(eds),Exhaustible Resources,Optimality, and Trade,North-Holland,Amsterdam.

[5] **Dasgupta,P.and Heal,G.(1974)** The opttimal depletion of exhaustible resources,Review of Economic Studies,Symposioum Issue,3-28.

[6] **Dasgupta,P. and Heal,G.(1979).**Economic Theory and Exhaustible Resources, Nisbet/Cambridge University Press,Cambridge.

[7] **Ding and Field (2004).**Natural resource abundance and economic growth.Department of Resource Economics,University of Massachusetts Amherst,Working paper no.2004-7

[8] **Geldrop,Jan H. Van and Cees A.M.Withagen(1993).** General equilibrium and international trade with exhaustible resources.Journal of International Economics,34,341-357.

[9] **Geldrop,Jan H. Van and Cees A.M.Withagen(1994).**General equilibrium in an economy with exhaustible resource and an unbounbed horizon.Journal of Economic Dynamics and Control, 18,1011-1035.

[10] **Groth,C.(1992).** On a model of endogenous growth.Nationalokonomisk Tidssikrift,130,350-359

[11] **Groth, C.(2001).** Efficient endogenous growth and non-renewable resources,Institute of Economics,University of Copenhagen.

[12] **Groth,C. and Schou,P.(2004).**Capital taxation,Growth, and Non-renewable Resources,Insitute of Economics,University of Copenhagen.

[13] **Hall,R.E(1990).**Invariance properties of Solow's residual,in P.Diamond(ed.),Growth/Productivity/Unemployement.Essays to celebrate Bob Solow's Birthday,MIT Press,Cambridge MA.

[14] **Hartick,J.M.(1995).**Constant consumption paths in open economies with exhaustible resources.Review of International Economics,3,275-283.

[15] **International Monetery Fund (2002).**International Financial Statistics Yearbook,Washington DC,USA.

[16] **Jones,L.E. and Manuelli,R.E.(1990)**A convex model of equilibrium growth:theory and policy implications,Journal of Political Economy,98,1008-1038.

[17] **Jones,C.I.(1995).** R&D-based models of economic growth,Journal of Political Economy,103,759-784.

[18] **Jones,L.E. and Manuelli,R.E.(1997).** The sources of growth,Journal of Economic Dynamics and Control,21,75-114.

[19] **Neumayer,E.(2000).** Scarce or abundant?The economics of natural resource availability,Journal of Economic Surveys,14,307-335

[20] **Rebelo,S.(1991).** Long-run policy analysis and long-run growth,Journal of Political Economy,99,3,500-521.

[21] **Robson,A.J.(1980).** Costly innovation and natural resources,International economic Review,21,17-30.

[22] **Rodriguez,F. and Sachs,J.D.(1999).**Why do resource-abundant economies grow more slowly?Journal of Economic Growth,4,277-303.

[23] **Romer,P.M.(1990).**Endogenous technological change,Journal of Political economy,98,S71-102.

[24] **Sachs,J.D. and Warner,A.M.(1995).** Natural resource abundance and economic growth.NBER Working Paper 5398.

[25] **Seierstad,Atle, and Sydsaeter K.(1987).** Optimal Control theory with Economic Applications,North-Holland,Amsterdam.

[26] **Scholz,C.M. and Ziemes,G.(1999).**Exhaustible resources,monopolistic competition, and endogenous growth,Enviromental and Resource Economics,13,169-185.

[27] **Schou,P.(2000).** Polluting nonrenewable resources and growth, Enviromental and Resource Economics,16,211-227.

[28] **Solow,R.M.(1974)** Intergenerational Equity and Exhaustible Resources.Review of Economic Studies (Symposium on the economics of exhaustible resources),41, 29-45.

[29] **Solow,R.M.(1994)** Perspectives on growth theory,Journal of Economic Perspectives,8,45-54.

[30] **Solow,R.(1999).** Neoclassical growth theory, in J.B.Taylor and M.Woodford, eds., Handbook of Macroeconomics, Vol.I(Elsevier,Amsterdam).

[31] **Stiglitz,J.(1974a).** Growth with exhaustible natural resources:efficient and optimal growth paths,Review of economic Studies,Symposium Issue,123-137.

[32] **Stiglitz,J.(1974b).**Growth with Exhaustible Natural Resources:The Competitive Economy.Review of Economic Studies,Symposium Issue,139-152.

[33] **Stijns,J.P.(2001).** Natural resource abundance and economic growth revisited Unpublished manuscript.Department of Economics,University of California Berkeley.

[34] **Suzuki,H.(1976).**On the Possibility of Steadily Growning per capita Consumption in an Economy with a wasting and Non-Replenishable Resource.Review of Economic Studies 43,527-535.

[35] **Takayma,A.(1980).**Optimal technical progress with exhaustible resources,in M.C.Kemp and N.V.Long(eds),Exhaustible Resources,Optimality and Trade,North-Holland,Amsterdam.

[36] **Withagen,C.(1990).** Topoics in resource economics,in F.van der Ploeg(ed.)Advanced Lectures in Quantitative Economics,Academic Press,London.

[37] **World Bank (2004).**World Development Indicators CD.

[38] **Xepapadeas,A.(1997a).**Advanced Principles in Enviromental Policy(Edward Elgar Publishers, Cheltenham)

[39] **Xepapadeas,A.(1997b).**Economic development and enviromental pollution:Traps and growth,Structural Change and Economic Dynamics 8:327-350.

[40] **Xepapadeas A. and de Zeeuw,A.(1999).** Enviromental policy and competitiveness:The Porter and the composition of capital, Journal of Enviromental Economics Management 37: 165-182.

[41] **Xepapadeas,A.(2003).**Economic Growth and the Enviroment,Handbook of Enviromental Economics.