Βέλτιστη διαχείριση τόπου αλιείας με φέρουσα ικανότητα η οποία εξαρτάται από την περιβαλλοντική ρύπανση

Μαγδαληνή Τσάτση
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

24 Φεβρουαρίου 2005

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Από αρχαιοτάτων χρόνων ο άνθρωπος ήταν άρρηκτα συνδεδεμένος με το φυσικό περιβάλλον. Η «μητέρα φύση» υπήρξε αρωγός, όχι μόνο στην επιβίωσή του, καλύπτοντας τις βιοποριστικές του ανάγκες, αλλά και στην τόσο σημαντική πολιτιστική του ακμή, προσφέροντας του οτιδήποτε απαραίτητο για την υλικο-πνευματική ανάπτυξη. Ιδιαίτερη αξία έχει η συνεισφορά του υδάτινου στοιχείου στη ζωή και εξέλιξη του ανθρώπου, κάθως του προσφέρει αναρίθμητα οφέλη σε ποικίλους τομείς της δραστηριότητας του.

Εκτός των άλλων, οι ωκεανοί και οι θάλασσες αποτελούν βασική πηγή βιοπορισμού κάθως, μέσω της αλιείας, εξυπηρετούν την ανάγκη για τροφή. Πηγή που, ακούσια ή μη, ο άνθρωπος θεωρεί ανεξάντλητη. Η θεώρηση του αυτή αποδεικνύεται καταστροφική τόσο για το περιβάλλον, όσο και για τον ίδιο.

Η ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη των καιρών μας τείνει να καταστρατηγήσει τα οφέλη που προσφέρει η θάλασσα στον άνθρωπο. Αυτό γιατί μαζί με αυτήν επήλθε εξέλιξη και στις αλιευτικές μεθόδους και τεχνολογίες με αποτέλεσμα η αλιεία να διευκολυνθεί, να γίνει περισσότερο μαζική και τελικά να μετατραπεί σε υπεραλιεία. Έτσι, η ωφέλιμη θαλάσσια πανίδα άρχισε να μειώνεται σε παγκόσμια βάση, με τέτοιους ρυθμούς, ώστε τα περισσότερα είδη της να μη μπορούν, μέσω της αναπαραγωγής, να διατηρήσουν το πληθυσμό τους σε υγιή επίπεδα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον αφανισμό πολυάριθμων θαλάσσιων οργανισμών και την ύπαρξη χιλιάδων ειδών που τείνουν στην εξαφάνιση μέσα σε μόνο δύο περίπου δεκαετίες από την αρχή της κρίσης της υπεραλιείας.

Η εξέλιξη της τεχνολογίας επέφερε επιπλέον την κατακόρυφη αύξηση του μεγέθους της ρύπανσης των ωκεανών σε παγκόσμια κλίμακα. Η βιομηχανική δραστηριότητα και οι μεγάλες συγκέντρωσεις πληθυσμού στα αστικά κέντρα, ενίσχυσε τη ρίψη εργοστασιακών και αστικών λυμάτων στη θάλασσα. Οι υποθαλάσσιες πυρηνικές δοκιμές, η ύπαρξη κακοσυντηρημένων πλοίων που προκαλούν διαρροές πετρελαίου, καθώς και οποιοδήποτε είδος ρύπανσης του φυσικού περιβάλλοντος που μπορεί να διαδοθεί μέσω του κύκλου του νερού στα διάφορα υδατικά οικοσυστήματα (π.χ φυτοφάρμακα, χημικά λιπάσματα) προκαλούν μια γενική διαταραχή της αρμονίας του υδάτινου περιβάλλοντος σε παγκόσμιο επίπεδο. Και αυτό γιατί οι ρύποι δε παραμένουν στάσιμοι στο τμήμα της θάλασσας στο οποίο ρίφθηκαν, αλλά συνεχώς κινούνται ή διαχέονται προσβάλλοντας οποιοδήποτε τμήμα της.

Η μόλυνση των θαλασσών ευθύνεται, παράλληλα με την υπεραλιεία, σε μεγάλο βαθμό για τη μείωση του πληθυσμού της υδρόβιας πανίδας. Στις μέρες μας πολλά κράτη αναγνωρίζουν πως η αντιμετώπιση του φαινομένου χρήζει δραστικών μέτρων και επενδύουν σε ειδικά προγράμματα ρύθμισης του ρυθμού αλιείας και εκπομπής ρύπων.

Ο κοινωνικά βέλτιστος έλεγχος ορισμένων φυσικών πόρων, όπως για παράδειγμα ενός τόπου αλιείας, έχει συνδεθεί με αστάθειες και πολλαπλές ισορροπίες [3],[14]. Τέτοια οικοσυστήματα είναι δύσκολο να ελέγχθουν γιατί οριακές αλλαγές στην μέθοδο διαχείρισης τους μπορεί να οδηγήσουν στη καταστροφή τους. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν όταν η περιβαλλοντική ρύπανση επιδρά στην εξέλιξη του φυσικού πόρου [13],[4].

Ένα θέμα που έχει τεράστια σημασία για το σχεδιασμό βέλτιστης στρατηγικής διαχείρισης ενός υδάτινου πόρου είναι η ανάγκη να οριστεί η φέρουσα ικανότητα του ως συνάρτηση του αποθέματος ρύπανσης που τον επιβαρύνει. Η ιδέα της φέρουσας ικανοτητας ή επιπέδου κορεσμού προέρχεται από τους κλάδους της βιολογίας και της οικολογίας. Ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός ατόμων που ένας φυσικός πόρος μπορεί να συντηρήσει επ;απειρον, χωρίς επιζήμιες συνέπειες στο οικοσύστημα του και εξαρτάται από την βιολογική δομή του π.χ αφθονία σε πλαγκτόν, παροχή καταφυγίων και άλλα. Δεδομένου ότι οι ρυπαντές αλειώνουν την ποιότητα ενός βιότοπου, είναι κατανοητό πως η φέρουσα ικανότητα εξαρτάται άμεσα από το απόθεμα ρύπανσης που συσσωρεύεται στο πόρο.

Στην εργασία αυτή μελετάται το πρόβλημα βέλτιστης διαχείρισης ενός τόπου αλιείας όταν η ρύπανση επηρεάζει την εξέλιξη του βιοοικονομικού μοντέλου. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι το απόθεμα ρύπανσης μειώνει το επίπεδο κορεσμού του πόρου και η εκπομπή ρύπων στον ιχθυότοπο προσφέρει οφέλη που αυξάνουν το καθαρό πλεόνασμα απο την εκμετάλλευση του.

Στο πρώτο κεφάλαιο μοντελοποιείται η δυναμική του οικοσυστήματος και εισάγεται η έννοια του κοινωνικού σχεδιαστή που στοχεύει στη βέλτιστη διαχείριση του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται το μοντέλο όταν ο ρυθμός εκπομπής ρύπων θεωρείται δεδομένος, οπότε δρα παραμετρικά στο πρόβλημα.

Στο τρίτο κεφάλαιο ο ρυθμός εκπομπής είναι ελέγξιμος. Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου οδηγεί στη μελέτη ενός ιδιόμορφα διαταραγμένου αυτόνομου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων [6],[10],[8]. Δείχνεται ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις το σύστημα αυτό έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. Προτείνεται πολιτική διαχείρισης ώστε η λύση του συστήματος να προσεγγίζει το σημείο αυτό.

Κεφάλαιο 2

Η μοντελοποίηση ενός τόπου αλιείας

Θεωρώ ένα ιχθυότοπο πού φιλοξενεί κάποιο πληθυσμό ιχθύων, με βιομάζα που δίνεται από την συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$ και ακολουθεί το λογιστικό μοντέλο εξέλιξης[1] [3],[9]:

$$\dot{x} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) = F(x). \tag{2.1}$$

Η $r > 0$ είναι μια σταθερά που ονομάζεται ουσιαστικός ρυθμός ανάπτυξης. Η $K > 0$ είναι μια σταθερά που ονομάζεται φέρουσα ικανότητα ή επίπεδο κορεσμού του πόρου. Αποτελεί ένα άνω φράγμα για τις τιμές της βιομάζας των ιχθύων και ισχύει: $lim_{t\to\infty}x(t) = K$, αν $x(0) > 0$ ([3] παρ.1.1).

Έστω ότι στον πόρο εκπέμπονται ρύποι με ρυθμό $e(t)$, όπου η $e(t)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η $P(t)$ είναι μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση που δίνει το απόθεμα της ρύπανσης, τότε ο ρυθμός συσσώρευσης του είναι:

$$\dot{P} = e - mP$$

όπου η $m > 0$ είναι σταθερά που εκφράζει την επί τοις εκατό δυνατότητα αυτοκαθαρισμού του περιβάλλοντος.

Υποθέτω ότι το επίπεδο κορεσμού επηρεάζεται από το απόθεμα ρύπανσης στον πόρο, δηλαδή $K = K(P)$ συνεχής δις -παραγωγίσιμη με $K_P < 0, K_{PP} < 0, \forall P$. Για κάθε τιμή του P η συνάρτηση $F(x, K(P)) = F(x, P)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{K(P)}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{K(P)}{2}, K(P)]$, παρουσιάζει στο σημείο $x_{max} = \frac{K(P)}{2}$ ολικό μέγιστο, το $F(\frac{K(P)}{2}, P) = \frac{rK(P)}{4}$ και είναι κοίλη στο $[0, K(P)]$.

[1] το t αγνοείται για απλούστευση των συμβολισμών

Υποθέτω επιπλέον ότι ο πληθυσμός που περιγράφει η λογιστική εξίσωση είναι αντικείμενο αλιείας με ρυθμό $h(t)$, όπου η $h(t)$ είναι μια συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της βιομάζας των ιχθύων γίνεται:

$$\dot{x} = rx\Big(1 - \frac{x}{K(P)}\Big) - h = F(x, P) - h$$

Παρουσιάζω τον κοινωνικό σχεδιαστή που σκοπεύει στη μεγιστοποίηση του καθαρού πλεονάσματος από την εκμετάλλευση του τόπου αλιείας. Αν ο ρυθμός εκπομπής ρύπων είναι προκαθορισμένος το καθαρό πλεόνασμα από την αλιεία ορίζεται ως:

$$u(h) - c(x)h$$

όπου η $u(h)$ είναι η συνάρτηση χρησιμότητας από την κατανάλωση του αλιεύματος, και έχει τις ιδιότητες:
$u(h)$ συνεχής τρεις φορές παραγωγίσιμη, $u_h > 0, u_{hh} < 0\ \forall h$,
$lim_{h \to 0} u_h(h) = +\infty$,
$c(x)$ η συνάρτηση κόστους της διαδικασίας της αλιείας ανά μονάδα h, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο της βιομάζας στον πόρο και έχει τις ιδιότητες:
$c(x)$ συνεχής δις -παραγωγίσιμη,$c_x < 0, c_{xx} > 0, \Big(xc(x)\Big)_x \leq 0, \forall x$. ([3], κεφ.5)
Το πρόβλημα μεγιστοποίησης που αντιμετωπίζει ο κοινωνικός σχεδιαστής είναι:

$$max_{\{h(t)\}} \int_0^\infty e^{-\delta t}(u(h) - c(x)h)dt$$

όπου,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, P) - h \\ \dot{P} &= e - mP \end{aligned}$$

με $\delta > 0$ να είναι ο συντελεστής προεξόφλησης του πλεονάσματος.

Αν ο ρυθμός εκπομπής ρύπων είναι ελέγξιμος, ο κοινωνικός σχεδιαστής υπολογίζει το καθαρό πλεόνασμα:

$$u(h) - c(x)h + B(e)$$

όπου η $B(e)$ είναι φραγμένη συνεχής, τρείς φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση που εκφράζει τα οφέλη από την εκπομπή ρύπων και έχει τις ιδιότητες: $B_e > 0, B_{ee} < 0$.
Το πρόβλημα μεγιστοποίησης γίνεται:

$$max_{\{h(t),\ e(t)\}} \int_0^\infty e^{-\delta t}(u(h) - c(x)h + B(e))dt$$

όπου,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,P) - h \\ \varepsilon \dot{P} &= e - mP\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ είναι μια αρκετά μικρή θετική παράμετρος. Η εμφάνιση της υποδηλώνει την ύπαρξη γρήγορων και αργών διαδικασιών στο οικοσύστημα. Η μόλυνση είναι γρήγορη μεταβλητή, κινείται με μεγάλη ταχύτητα και άρα προσαρμόζεται γρήγορα στις αλλαγές. Αντίθετα η βιομάζα του αλιεύματος είναι αργή μεταβλητή.

Κεφάλαιο 3

Η συμπεριφορά του συστήματος όταν ο ρυθμός εκπομπής ρύπων είναι δεδομένος

3.1 Το οικοσύστημα του ιχθυότοπου

Θεωρώ αρχικά την εκπομπή ρύπων προεπιλεγμένη $e(t) = \bar{e}(t)$ για παράδειγμα τέτοια ώστε $B(\bar{e}) = max_{e(t)}\{B(e)\}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της βιομάζας δίνεται από την σχέση:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K(P)})$$

και του αποθέματος ρύπανσης από την σχέση:

$$\dot{P} = \bar{e} - mP$$

Το σύστημα ισορροπεί όταν $\dot{x} = \dot{P} = 0$:

$$\begin{cases} rx(1 - \frac{x}{K(P)}) = 0 \\ \bar{e} - mP = 0 \end{cases} \stackrel{x \neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = K(P) \\ P = \frac{\bar{e}}{m} \end{cases}$$

Αν $K(\frac{\bar{e}}{m}) > 0$, υπάρχει σημείο ισορροπίας του συστήματος (σχήμα 1):

$$(x^*, P^*) = \Big(K(\frac{\bar{e}}{m}), \frac{\bar{e}}{m}\Big) \tag{3.1}$$

Η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος στο σημείο ισορροπίας (3.1) είναι:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x^* \\ P=P^*}} = \begin{bmatrix} -r & rK_P(\frac{\bar{e}}{m}) \\ 0 & -m \end{bmatrix}$$

$tr\mathcal{J} = -(r+m) < 0$, $|\mathcal{J}| = rm > 0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $R^2 - tr\mathcal{J}R + |\mathcal{J}| = 0$ έχει δυο αρνητικές πραγματικές ρίζες $R_1 = -m, R_2 = -r$. Αν $R_1 \neq R_2 \Longrightarrow r \neq m$ το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθής γενικευμένος κόμβος (improper stable node). Αν $R_1 = R_2 \Longrightarrow r = m$ το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθής γνήσιος κόμβος (proper stable node) ([15],κεφ.7 παρ.4.2).

Η επιρροή της ρύπανσης στην βιολογική ισορροπία

Ισχύει:

$$P^*(\bar{e}) = \frac{\bar{e}}{m} \Longrightarrow \frac{dP}{d\bar{e}} = \frac{1}{m} > 0$$
$$x^* = K(P^*(\bar{e})) \Longrightarrow \frac{dx^*}{dP^*}\frac{dP^*}{d\bar{e}} = \frac{K_P}{m} < 0,$$

.

Αν αυξηθεί ο ρυθμός εκπομπής ρύπων η βιολογική ισορροπία αποκαθίσταται σε χαμηλότερη τιμή για την βιομάζα και υψηλότερη τιμή για αποθέματος ρύπανσης (σχήμα 2).

3.2 Η επιρροή της αλιείας

Για να μελετήσω τις συνέπειες τις αλιευτικής διαδικασίας στο πόρο, θεωρώ το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

$$max_{\{h(t)\}} \int_0^\infty e^{-\delta t}[u(h) - c(x)h]dt$$

όπου

$$\dot{x} = F(x, P) - h \tag{3.2}$$
$$\dot{P} = \bar{e} - mP \tag{3.3}$$

με $F(x, P) = rx(1 - \frac{x}{K(P)})$

Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του προβλήματος είναι:

$$\mathcal{H}(x, h, P, q) = u(h) - c(x)h + q(F(x, P) - h)$$

και οι συνθήκες βελτιστοποίησης της είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = 0 \Longrightarrow u_h - c(x) = q \tag{3.4}$$

$$\dot{q} = \delta q - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Longrightarrow \dot{q} = (\delta - F_x(x,P))q + c_x h \tag{3.5}$$

Από την (3.4) παραγωγίζοντας ως προς t έχω: $u_{hh}\dot{h} - c_x\dot{x} = \dot{q}$ απ' όπου με χρήση των (3.5),(3.4),(3.3),(3.2) προκύπτει:

$$\dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big\{(\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big\} \tag{3.6}$$

Το τροποποιημένο Χαμιλτονιανό αυτόνομο δυναμικό σύστημα του προβλήματος γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big\{(\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big\} \\ \dot{x} = F(x,P)) - h \\ \dot{P} = e - mP \end{cases} \tag{3.7}$$

Το σύστημα ισορροπεί όταν $\dot{x} = \dot{h} = \dot{P} = 0$. Η τελευταία εξίσωση δίνει: $\bar{P} := \frac{\bar{e}}{m}$.

Πρόταση 3.2.1 *Αν υπάρχει ισορροπία* $(x^*, h^*, \bar{P})$ *με* $h^* > 0$, *τότε* $x^* > x_\delta$ *όπου* $x_\delta = \frac{r-\delta}{2r}K(\bar{P})$.

Απόδειξη
Αν το $(x^*, h^*, \bar{P})$ είναι σημείο ισορροπίας του (3.7) ισχυεί ότι $\frac{1}{u_{hh}(h^*)}\Big\{(\delta - F_x(x^*,\bar{P}))(u_h(h^*) - c(x^*)) + c_x(x^*)F(x^*,\bar{P})\Big\} = 0$. Είναι προφανές ότι $u_h(h^*) - c(x^*) \neq 0$. Η (3.6) γράφεται: $F_x(x^*,\bar{P}) - \frac{c_x(x^*)F(x^*,\bar{P})}{p(h^*)-c(x^*)} = \delta$, όπου $p(h) = u_h(h)$ η συνάρτηση ζήτησης. Για την τιμή x_δ της βιομάζας ισχύει $F_x(x_\delta,\bar{P}) = \delta$.
$\diamond$ *1η περίπτωση*: Αν $p - c(x^*) > 0$ τότε $\frac{c_x(x^*)F(x^*,\bar{P})}{p(h^*)-c(x^*)} < 0$, οπότε $F_x(x^*,\bar{P}) < \delta$ ή $F_x(x^*,\bar{P}) < F_x(x_\delta,\bar{P})$. Λόγω της κυρτότητας της $F(x,P)$ ως προς x, $(F_{xx} < 0)$ έχω $x^* > x_\delta$.
$\diamond$ *2η περίπτωση*: Αν $p - c(x^*) < 0$ οπότε $x^* < x_\delta$, αφού η παράσταση $p - c(x^*)$ εκφράζει τα κέρδη της επιχείρησης ανά μονάδα h, η βέλτιστη αντίδραση της στην προοπτική των αρνητικών κερδών είναι $h^* = 0$ ωσότου το stock να επανέλθει σε τέτοιο επίπεδο ώστε $p - c(x) > 0$. $\square$

Πρόταση 3.2.2 *Αν το δ είναι αρκετά μικρό, υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας (x^*, h^*) του συστήματοσ(3.7) με $x^* \in \Big(\frac{K(\bar{P})}{2}, K(\bar{P})\Big)$, το οποίο είναι σαγματικό. Επιπλέον αν υπάρχει σημείο ισορροπίας στο διάστημα $\Big(x_\delta, \frac{K(\bar{P})}{2}\Big)$, αυτό είναι σαγματικό ή ασταθές. Τελικά, το σύστημα (3.7) έχει περιττού πλήθους σημεία ισορροπίας στο διάστημα $\Big(x_\delta, K(\bar{P})\Big)$.*

Απόδειξη
Στην ισορροπία το σύστημα (3.7) γίνεται:

$$\begin{cases} 0 = (\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x h \\ h = F(x, \bar{P}) \end{cases}$$

απ'όπου προκύπτει ότι:

$$\Longrightarrow \Big(\delta - r + 2r\frac{x}{K(\bar{P})}\Big)\Big(u_h(F(x,\bar{P})) - c(x)\Big) + c_x F(x, \bar{P}) = 0$$

Ορίζω

$$f(x) = \Big(\delta - r + 2r\frac{x}{K(\bar{P})}\Big)\Big(u_h(F(x,\bar{P})) - c(x)\Big) + c_x F(x, \bar{P}), \quad f \in \mathcal{C}^2$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (3.7) είναι οι ρίζες της $f(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{2r}{K(\bar{P})}(u_h(F(x,\bar{P})) - c(x)) + (\delta - r + 2r\frac{x}{K(\bar{P})})(u_{hh}\frac{\partial F}{\partial x} - c_x) + \\ &+ c_{xx}F + c_x\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

Αν $\frac{\partial F}{\partial x} < 0 \Longrightarrow x \in \Big(\frac{K(\bar{P})}{2}, K(\bar{P})\Big)$ τότε $\frac{df}{dx} > 0$ και
⋄ για $x = K(\bar{P})$, $f(k(\bar{P})) = (\delta + r)(u_h(0) - c(K(\bar{P})) > 0$
⋄ για $x = \frac{K(\bar{P})}{2}$, $f(\frac{K(\bar{P})}{2}) = \delta\Big(u_h(\frac{rK(\bar{P})}{4}) - c(\frac{K(\bar{P})}{2})\Big) + c_x\frac{rK(\bar{P})}{4} < 0$ αν το δ είναι αρκετά μικρό.
Άρα στο διάστημα $\Big(\frac{K(\bar{P})}{2}, K(\bar{P})\Big)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος. Επιπλέον $f(x_\delta) = c_x F(x_\delta, \bar{P}) < 0$ οπότε υπάρχουν περιττού πλήθους σημεία ισορροπίας στο διάστημα $\Big(x_\delta, K(\bar{P})\Big)$. Οι πιθανές μορφές της καμπύλης $f(x)$ στην περίπτωση ενός ή τριών σημείων ισορροπίας απεικονίζονται στο (σχήμα 3).

Όσον αφορά την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος, έχω:

Στο σημείο M_1 το $x_1^* \in \left(\frac{K(\bar{P})}{2}, K(\bar{P})\right)$ οπότε $F_x(x_1^*, \bar{P}) < 0$. Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος (3.7) στο $M_1(x_1^*, h_1^*)$ είναι:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} F_x & -1 \\ \frac{1}{u_{hh}}(-F_{xx}(u_h - c(x)) - (\delta - F_x)c_x + c_{xx}F) & \delta - F_x + \frac{c_x}{u_{hh}} \end{bmatrix}$$

και ισχύει:

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}| &= F_x\Big(\delta - F_x + \frac{c_x}{u_{hh}}\Big) + \frac{1}{u_{hh}}(-F_{xx}(u_h - c(x)) - (\delta - F_x)c_x + c_{xx}F) < 0 \\ tr\mathcal{J} &= \delta + \frac{c_x}{u_{hh}} > 0 \end{aligned}$$

Το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό.

Στο σημείο ισορροπίας $M_2(x_2^*, h_2^*)$, με κατάλληλη επιλογή $\epsilon > 0$ έχουμε:
Αν $x = x_2^* + \epsilon$ τότε $f(x) < 0$ όποτε $\frac{1}{u_{hh}} f(x) > 0$ δηλαδή $\dot{x} > 0$
Αν $x = x_2^* - \epsilon$ τότε $f(x) > 0$ οπότε $\frac{1}{u_{hh}} f(x) < 0$ δηλαδή $\dot{x} < 0$
Το σημείο ισορροπίας M_2 είναι ασταθές, αφού οι τροχιές απομακρύνονται από αυτό.

Στο σημείο M_3 ξανά, με κατάλληλη επιλογή $\epsilon > 0$ έχουμε: Αν $x = x_2^* + \epsilon$ τότε $\dot{x} < 0$ και αν $x = x_2^* + \epsilon$ τότε $\dot{x} > 0$. Επιπρόσθετα το $tr\mathcal{J}\Big|_{(x_3^*, h_3^*)} > 0$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία θετική ιδιοτιμή. Άρα το M_3 είναι σαγματικό σημείο ισορροπίας. □

Είναι εύλογο να παρατηρήσουμε ότι η αλιευτική εκμετάλλευση έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της βιομάζας του αλιεύματος στον πόρο. Πράγματι, ενώ στο μοντέλο που περιγράφεται στη παράγραφο 3.1 η βιομάζα ισορροπεί στο επίπεδο $x^* = K(\frac{\bar{e}}{m})$, αν επιτραπεί η αλιεία το βέλτιστο επίπεδο μειώνεται σε τιμή μικρότερη του $K(\frac{\bar{e}}{m})$.

Η επιρροή της περιβαλλοντικής ρύπανσης στο μοντέλο

Είναι προφανές πως αν αυξηθεί ο ρυθμός εκπομπής ρύπων $e(t)$, αυξάνεται και το απόθεμα ρύπανσης στον πόρο αφού $\bar{P}_e(e) = \frac{1}{m} > 0$.Για κάθε τιμή του P, οι ρίζες της συνάρτησης $f(x, P) = (\delta - r + 2r\frac{x}{K(P)})(u_h(F(x, P)) - c(x)) + c_x F(x, P)$, είναι τα σημεία ισορροπίας του προβλήματος. Ενδεχόμενη μεταβολή της παραμέτρου P επηρεάζει την συνάρτηση αυτή:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = -2rx\frac{K_P}{K^2(P)}(u_h - c(x)) + (\delta - r + 2r\frac{x}{K(P)})u_{hh}\frac{\partial h}{\partial P} + c_x\frac{\partial h}{\partial P}$$

όπου $\frac{\partial h}{\partial P} = \frac{\partial F(x,P)}{\partial P} = rx^2 \frac{K_P}{K(P)} < 0$. Ισχύει $\frac{\partial f}{\partial P} > 0$ για κάθε $x \in [x_\delta, K(P)]$, οπότε αύξηση του αποθέματος της ρύπανσης έχει ως αποτέλεσμα την μεταφορά της καμπύλης $f(x,P)$ προς τα πάνω ($\forall x$, αν $P_1 < P_2, f(x,P_1) < f(x,P_2)$) και την παρουσία διακλαδώσεων των ισορροπιών. Ας υποθέσω ότι για αρκετά μικρό P_1 η καμπύλη βρίσκεται στην θέση 1 (Σχήμα4). Για μεγαλύτερη τιμή του P παρουσιάζονται πολλαπλές ισορροπίες M_1, M_2, M_3 με την M_2 να είναι ασταθής, την M_1 σαγματικο σημείο και την M_3 σαγματικό σημείο που υποδηλώνει υπεραλιεία (overfishing) ([3],κεφ.2) (Σχήμα4,θέση2). Η ισορροπία M_3 αποκαθίσταται σε χαμηλό επίπεδο βιομάζας και σχετικά υψηλό ρυθμό αλιείας, επιφέροντας αύξηση στην τιμή των ιχθύων και μείωση του πλεονάσματος του καταναλωτή.

Περαιτέρω αύξηση του P πιθανώς να έχει σημαντική επίπτωση στην εξέλιξη του φυσικού πόρου. Αν υπάρχει αρκετά μεγάλη τιμή P_3 ώστε $f(\frac{K(P_3)}{2}) = \delta(u_h(\frac{rK(P_3)}{4}) - c(\frac{K(P_3)}{2})) + c_x\frac{rK(P_3)}{4} > 0$ το σύστημα δεν παρουσιάζει ισορροπία στο $(\frac{K(P_3)}{2}, K(P_3))$ και μοναδική ισορροπία είναι η κατάσταση υπεραλιείας (Σχήμα4,θέση3).

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι και στις τρεις θέσεις του σχήματος 4 ο ρυθμός αλιείας μπορεί να είναι ο ίδιος. Παρότι ο ρυθμός αυτός θεωρείται φυσιολογικός στη θέση 1, φέρει τον πόρο σε κατάσταση υπεραλιείας στη θέση 3, λόγω του υψηλού αποθέματος ρύπανσης.

Κεφάλαιο 4

Η συμπεριφορά του συστήματος όταν ο ρυθμός εκπομπής ρύπων είναι ελέγξιμος

4.1 Το αρχικό πρόβλημα

Θεωρώ το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

$$max_{\{e(t),h(t)\}} \int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(h) - c(x)h + B(e)\Big)dt \tag{4.1}$$

όπου

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,P) - h \\ \varepsilon\dot{P} &= e - mP \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Παράρτημα 1, η Χαμιλτονιανή του προβλήματος είναι:

$$\mathcal{H}(x,P,h,e,q,\lambda) = u(h) - c(x)h + B(e) + q\Big(F(x,P) - h\Big) + \lambda(e - mP)$$

και οι συνθήκες βελτιστοποίησης του προβλήματος είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = 0 \Longrightarrow u_h - c(x) = q \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial e} = 0 \Longrightarrow B_e = -\lambda \tag{4.3}$$

$$\dot{q} = \delta q - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dot{q} = (\delta - F_x)q + c_x h \tag{4.4}$$

$$\varepsilon\dot{\lambda} = \delta\lambda - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P} \Longrightarrow \varepsilon\dot{\lambda} = (\delta + m)\lambda - qF_P \tag{4.5}$$

Από τις (4.2),(4.3),(4.4),(4.5), έχουμε:

$$\dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big)$$

$$\varepsilon\dot{e} = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big)$$

Έτσι, το τροποποιημένο Χαμιλτονιανό δυναμικό σύστημα (**MHDS**) του προβλήματος γίνεται:

$$\dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big) \tag{4.6}$$

$$\varepsilon\dot{e} = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big) \tag{4.7}$$

$$\dot{x} = F(x,P) - h \tag{4.8}$$

$$\varepsilon\dot{P} = e - mP \tag{4.9}$$

όπου

$$x = x(t,\varepsilon), h = h(t,\varepsilon), e = e(t,\varepsilon), P = P(t,\varepsilon)$$

Παρατήρηση 4.1.1 *Αν υπάρχει σημείο ισορροπίας* (x^*, h^*, e^*, P^*) *του παραπάνω συστήματος πρέπει:*

$$\lambda^* < 0, q^* > 0, \delta - F_x(x^*, P^*) > 0, u_h(h^*) - c(x^*) > 0$$

Απόδειξη
Από την (4.3) έχω ότι $\lambda^* = -B_e(e^*) < 0$. Από την (4.5) και επειδή $F_P < 0$, για να μηδενίζεται η ποσότητα $\dot{\lambda}$, πρέπει $q^* > 0$. Έτσι, η ποσότητα $u_h(h^*) - c(x^*) = q^*$ είναι θετική. Τελικά, από την εξίσωση (4.6) συμπεραίνω ότι $\delta - F_x(x^*, P^*) > 0$.□

Το $MHDS$ (4.6)-(4.9) παρουσιάζει ιδιόμορφη διαταραχή λόγω της εμφάνισης της μικρής θετικής παραμέτρου ε στις εξισώσεις (4.7) και (4.9). Τα x, h ονομάζονται αργές μεταβλήτες του προβλήματος και τα e, P γρήγορες μεταβλήτες. Ο διαχωρισμός αυτός έγκειται στο γεγονός ότι:

$$|(\dot{x}, \dot{h})| << |(\dot{e}, \dot{P})|$$

Η δυναμική ενός τέτοιου συστήματος περιγράφεται με της βοήθεια του αργού (reduced ή slow) προβλήματος και του γρήγορου (reduced boundary layer ή fast) προβλήματος που ορίζονται παρακάτω.

4.2 Το αργό πρόβλημα

Αν $\varepsilon = 0$ το $MHDS$ γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,P) - h & := f(x,h,e,P) \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big) & := g(x,h,e,P) \\ 0 = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big) & := \phi(x,h,e,P) \\ 0 = e - mP & := w(x,h,e,P) \end{cases} \tag{4.10}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις του(4.10) είναι αλγεβρικές ως προς τα x, h, P, e. Έτσι έχω:

$$0 = e - mP \Longrightarrow P = \frac{e}{m} \tag{4.11}$$

Αν αντικαταστήσω την (4.11) στην εξίσωση $\phi(x,h,e,P) = 0$ έχω $\phi(x,h,e) = (\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P(x, \frac{e}{m}) = 0$ και

$$\frac{\partial \phi}{\partial e} = (m+\delta)B_{ee} + (u_h - c(x))F_{pp}\frac{1}{m} < 0,$$

για κάθε τιμή των x, h, e. Από Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων ([5],παρ.C.6), η $\phi(x,h,e)$ είναι επιλύσιμη ως προς (x,h) και έστω

$$e = e(x,h) \tag{4.12}$$

η λύση της. Λόγω της (4.11) έχουμε $P = \frac{e(x,h)}{m}$ ή

$$P = P(x,h) \tag{4.13}$$

Επιπλέον $e(x,h), P(x,h) \in \mathcal{C}^{1,1}$ και είναι μονότονες συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, αν παραγωγίσω την εξίσωση

$$(\delta + m)B_e(e(x,h)) + (u_h(h) + c(x))F_P(x, \frac{e(x,h)}{m}) = 0$$

ως προς x προκύπτει ότι

$$(m+\delta)B_{ee}\frac{\partial e}{\partial x} - c_x F_P + (u_h - c(x))F_{PP}\frac{\partial e}{\partial x}\frac{1}{m} + (u_h - c(x))F_{Px} = 0$$

Επιλύοντας ως προς $\frac{\partial e}{\partial x}$ έχω:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{-c_x F_P + (u_h - c(x))F_{Px}}{(\delta + m)B_{ee} + (u_h - c(x))F_{PP}\frac{1}{m}} < 0$$

κοντά στο σημείο ισορροπίας αν $(xc(x))_x < 0$ καθώς ο αριθμητής γίνεται:

$$-c_x F_P + (u_h - c(x))F_{Px} = [-c_x x + 2(u_h - c(x))]rx\frac{K_P}{K^2(P)} =$$

$$[-(xc(x))_x + u_h + (u_h - c(x))]rx\frac{K_P}{K^2(P)} < 0.$$

Για την $P(x, h)$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial x}\frac{1}{m} < 0$. Ομοίως,

$$\frac{\partial e}{\partial h} = -\frac{u_{hh} F_P}{(\delta + m)B_{ee} + (u_h - c(x))F_{PP}\frac{1}{m}} > 0$$

και $\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\partial e}{\partial h}\frac{1}{m} < 0$

Η αντικατάσταση των $e(x, h), P(x, h)$ στις δυο πρώτες εξισώσεις του (4.10) δίνει το 2×2 σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, P(x, P(x, h)) - h \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big[(\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x, P(x, h))\Big] \end{cases} \tag{4.14}$$

Πρόταση 4.2.1 *Αν υπάρχει ισορροπία του συστήματος (4.14), τότε το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας είναι ασταθές ή σαγματικό σημείο.*

Απόδειξη

Ο Ιακωβιανός πίνακας του προβλήματος είναι:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} F_x + F_P\frac{\partial P}{\partial x} & F_P\frac{\partial P}{\partial h} - 1 \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{h}}{\partial x} &= \frac{1}{u_{hh}}\Big((-F_{xx} - F_{xP}\frac{\partial P}{\partial x})(u_h - c(x)) - (\delta - F_x)c_x + c_{xx}F + c_x F_x + c_x F_P\frac{\partial P}{\partial x}\Big) \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} &= \delta - F_x - \frac{1}{u_{hh}}F_{xP}\frac{\partial P}{\partial h}(u_h - c(x)) + \frac{1}{u_{hh}}c_x F_P\frac{\partial P}{\partial h} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} tr\mathcal{J} &= F_P\frac{\partial P}{\partial x} + \delta - \frac{1}{u_{hh}}F_{xP}\frac{\partial P}{\partial h}(u_h - c(x)) + \frac{1}{u_{hh}}c_x F_P\frac{\partial P}{\partial h} = \\ &= \delta - \frac{F_P}{m}\left(\frac{(u_h - c(x))F_{Px}}{(m + \delta)B_{ee} + (u_h - c(x))F_{PP}\frac{1}{m}}\right) + \\ &+ \frac{1}{m}F_{xP}(u_h - c(x))\left(\frac{F_P}{(m + \delta)B_{ee} + (u_h - c(x))F_{PP}\frac{1}{m}}\right) = \\ &= \delta > 0 \end{aligned}$$

δηλαδή οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $\mathcal{J}$ έχουν θετικό άθροισμα.

$\diamond$*1η περίπτωση*: Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ τότε $Re\Big(\lambda_i(t)\Big) > 0, i = 1, 2$. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής εστία (unstable focus).
$\diamond$*2η περίπτωση*: Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ τότε $\lambda_i > 0, i = 1, 2$. Το σημείο ισορροπίας είναι γενικευμένος ασταθής κομβος (unstable proper node) αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ή γνήσιος ασταθής κόμβος (unstable proper node) αν $\lambda_1 = \lambda_2$.
$\diamond$*3η περίπτωση*: Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό σημείο (saddle point).
$\diamond$*4η περίπτωση*: Αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = \delta$, τα σημεία ισορροπίας ανήκουν σε καμπύλη του επιπέδου φάσης και οι τροχιές αποκλείνουν από τα σημεία αυτά. ([15],κεφ.7,παρ.4.2 ,[1],παρ.10.1.5).$\square$

Υπόθεση 4.2.1 *Το πρόβλημα ότι (4.14) έχει σημείο ισορροπίας σαγματικού τύπου* $(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$. *Τότε υπάρχει τροχιά* $\Gamma(\tilde{x}(t), \tilde{h}(t))$ *με αρχικές τιμές σε γειτονία του* $(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$ *τέτοια ώστε*

$$(\tilde{x}(t), \tilde{h}(t)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} (\bar{x}_0, \bar{h}_0).$$

Λόγω συνέχειας των συναρτήσεων $e(x, h), P(x, h)$ *ισχύει:*

$$\tilde{e}(t) := e\Big(\tilde{x}(t), \tilde{h}(t)\Big) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} e(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$$

$$\tilde{P}(t) := P\Big(\tilde{x}(t), \tilde{h}(t)\Big) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} P(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$$

4.3 Η εξωτερική λύση του προβλήματος

Θεωρώ το εξωτερικό πρόβλημα :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, P) - h, & x(0, \varepsilon) = x^*(\varepsilon) \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x, P)\Big), & h(0, \varepsilon) = h^*(\varepsilon) \\ \varepsilon\dot{e} = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big), & \\ \varepsilon\dot{P} = e - mP, & \end{cases} \tag{4.16}$$

με αρχικές συνθήκες $x(0, \varepsilon) = x^*(\varepsilon),\ h(0, \varepsilon) = h^*(\varepsilon)$ για τις αργές μεταβλήτες, όπου $x^*(\varepsilon), h^*(\varepsilon) \in \mathcal{C}^\infty$. Οι συνθήκες αυτές θα επιλεγούν καταλλήλως αργότερα. Ισχύει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.3.1 *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 4.2.1. Τότε υπάρχουν αρχικές τιμές* (x_0, h_0) *ώστε το σύστημα (4.14) να έχει λύση* $(\bar{x}(t), \bar{h}(t))$, *συνεχής σε διάστημα* $[0, T]$, *για την οποία να ισχύει το παρακάτω:*
Υπάρχουν $\varepsilon_0', \rho_0 > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x^*(\varepsilon), h^*(\varepsilon) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_0^+)$,$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0'$ *με* $|(x^*(\varepsilon), h^*(\varepsilon)) - (x_0, h_0)| < \rho_0$, *το εξωτερικό πρόβλημα έχει λύση*

$$\Big(x^*(t,\varepsilon), h^*(t,\varepsilon), e^*(t,\varepsilon), P^*(t,\varepsilon)\Big)$$

(εξωτερική λύση) ορισμένη στο $[0, T] \times (0, \varepsilon_0')$, *για την οποία ισχυεί:*

$$\begin{aligned} x^*(t,\varepsilon) &= \bar{x}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ h^*(t,\varepsilon) &= \bar{h}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ e^*(t,\varepsilon) &= \bar{e}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ P^*(t,\varepsilon) &= \bar{P}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0, T], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0']$, *όπου* $\bar{e}(t) = e(\bar{x}(t), \bar{h}(t)), \bar{P}(t) = P(\bar{x}(t), \bar{h}(t))$.

Απόδειξη

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γρήγορου υποσυστήματος του $MHDS$:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{e} = \phi(x, h, e, P) \\ \varepsilon\dot{P} = w(x, h, e, P) \end{cases}$$

του στο σημείο $\Big(\bar{x}_0, \bar{h}_0, e(\bar{x}_0, \bar{h}_0), P(\bar{x}_0, \bar{h}_0)\Big)$ είναι:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \delta + m & \frac{1}{B_{ee}}(u_h - c(\bar{x}_0))F_{PP} \\ -1 & -m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} tr\mathcal{J} &= \delta > 0 \\ |\mathcal{J}| &= -m(\delta + m) - \frac{F_{PP}}{B_{ee}}(u_h - c(\bar{x}_0)) < 0 \end{aligned}$$

οπότε έχει ετερόσημες ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = \delta$. Έστω $\tilde{A}(t) = \Big(\tilde{x}(t), \tilde{h}(t), \tilde{e}(t), \tilde{P}(t)\Big)$ με $\tilde{x}, \tilde{h}, \tilde{e}, \tilde{P}$ να είναι αυτά που ορίζονται στην υπόθεση 4.2.1 και $\bar{A}_0(t) = \Big(\bar{x}_0, \bar{h}_0, \bar{e}_0, \bar{P}_0\Big)$. Έχουμε:

$$|\mathcal{J}|\Big|_{\tilde{A}(t)} = \frac{\partial\varphi}{\partial e}\frac{\partial w}{\partial P} - \frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial w}{\partial e}\Big|_{\tilde{A}(t)}$$

$$|\mathcal{J}|\Big|_{\bar{A}_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial e}\frac{\partial w}{\partial P} - \frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial w}{\partial e}\Big|_{\bar{A}_0}.$$

Αφού οι $\frac{\partial\varphi}{\partial e}, \frac{\partial\varphi}{\partial P}, \frac{\partial w}{\partial e}\frac{\partial w}{\partial P}$ είναι συνεχείς, έχω:

$$|\mathcal{J}|\Big|_{\tilde{A}(t)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} |\mathcal{J}|\Big|_{\bar{A}_0}$$

Άρα υπάρχει $T_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \geq T_0$ να ισχύει $|\mathcal{J}|\Big|_{\tilde{A}(t)} < 0$, οπότε υπάρχει T_0 ώστε οι ιδιότιμές του $\mathcal{J}\Big|_{\tilde{A}(t)}$ να έχουν ετερόσημα πραγματικά μέρη. Έστω ότι η λύση $\bar{A}(t) = (\bar{x}(t), \bar{h}(t), \bar{e}(t), \bar{P}(t)) = \tilde{A}(t)\Big|_{[T_0,T_1]}$ του (4.10) είναι συνεχής στο διάστημα $[T_0, T_1]$. Με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής για το χρόνο, και λόγω της παρακάτω πρότασης (Λήμμα 4.1.1, [11]):
"Αν η $\mathcal{X}(t)$ είναι λύση αυτόνομου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων με $t \in (r_1, r_2)$, για κάποια $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$ τότε η $\mathcal{X}(t+c)$ με $t \in (r_1 - c, r_2 - c)$ είναι επίσης λύση του για κάθε $c \in \mathbb{R}$",
μπορώ να θεωρήσω το παραπάνω διάστημα στη μορφή $[0, T]$, Έτσι, το (4.10) με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = \bar{x}(T_0) := x_0,\ h(0) = \bar{h}(T_0) := h_0, \tag{4.17}$$

$$e(0) = \bar{e}(T_0) := e_0,\ P(0) = \bar{P}(T_0) := P_0, \tag{4.18}$$

έχει συνεχή λύση $\bar{A}(t)$ στο $[0, T]$ και οι ιδιότιμές του $\mathcal{J}\Big|_{\bar{A}(t)}$ έχουν ετερόσημα πραγματικά μέρη για κάθε $t \in [0, T]$. Για την λύση αυτή ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 7.1.1 [Παραρτήμα 2] απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.$\square$

4.4 Το σύστημα οριακού στρώματος

Έστω ότι $x^*(t,\varepsilon), h^*(t,\varepsilon), e^*(t,\varepsilon), P^*(t,\varepsilon)$ είναι η εξωτερική λύση του προβλήματος (4.16) για κάποιες αρχικές τιμές $(x^*(\varepsilon), h^*(\varepsilon))$ ώστε να ικανοποιείται το Λήμμα 4.3.1. Ορίζω τις μεταβλητές $X = x - x^*, H = h - h^*, E = e - e^*$, $\Pi = P - P^*$ όπου (x, h, e, P) είναι η λύση του $MHDS$ με αρχικές συνθήκες

$$x(0,\varepsilon) = x(\varepsilon), h(0,\varepsilon) = h(\varepsilon), P(0,\varepsilon) = P(\varepsilon), e(0,\varepsilon) = e(\varepsilon).$$

Τότε το $MHDS$ γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \hat{f}(X,H,E,\Pi) & ,\ X(0,\varepsilon) = \hat{X}(\varepsilon) \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \hat{g}(X,H,E,\Pi) & ,\ H(0,\varepsilon) = \hat{H}(\varepsilon) \\ \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} = \hat{\phi}(X,H,E,\Pi) & ,\ E(0,\varepsilon) = \hat{E}(\varepsilon) \\ \varepsilon\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \hat{w}(X,H,E,\Pi) & ,\ \Pi(0,\varepsilon) = \hat{\Pi}(\varepsilon) \end{cases}$$

όπου,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(X,H,E,P) &= f(X+x^*,H+h^*,E+e^*,\Pi+P^*)-f(x^*,h^*,e^*,P^*)\\
\hat{g}(X,H,E,P) &= g(X+x^*,H+h^*,E+e^*,\Pi+P^*)-g(x^*,h^*,e^*,P^*)\\
\hat{\phi}(X,H,E,P) &= \phi(X+x^*,H+h^*,E+e^*,\Pi+P^*)-\phi(x^*,h^*,e^*,P^*)\\
\hat{w}(X,H,E,P) &= w(X+x^*,H+h^*,E+e^*,\Pi+P^*)-w(x^*,h^*,e^*,P^*)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\hat{X}(\varepsilon) &= x(\varepsilon)-x^*(\varepsilon)\\
\hat{H}(\varepsilon) &= h(\varepsilon)-h^*(\varepsilon)\\
\hat{E}(\varepsilon) &= e(\varepsilon)-e^*(0,\varepsilon)\\
\hat{\Pi}(\varepsilon) &= P(\varepsilon)-P^*(0,\varepsilon)
\end{aligned}$$

Θεωρώ τη νέα χρονική μεταβλητή $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ (γρήγορος χρόνος) και θα μελετήσω την συμπεριφορά της λύσης του $MHDS$ όταν $\varepsilon\to 0$ (οπότε $\tau\to\infty$). Με την αυτή την αλλαγή μεταβλητής, το σύστημα παίρνει την μορφή:

$$\begin{cases}
\frac{\partial X}{\partial \tau}=\varepsilon\hat{f}(X,H,E,\Pi) & ,X(0,\varepsilon)=\hat{X}(\varepsilon)\\
\frac{\partial H}{\partial \tau}=\varepsilon\hat{g}(X,H,E,\Pi) & ,H(0,\varepsilon)=\hat{H}(\varepsilon)\\
\frac{\partial E}{\partial \tau}=\hat{\phi}(X,H,E,\Pi) & ,E(0,\varepsilon)=\hat{E}(\varepsilon)\\
\frac{\partial \Pi}{\partial t}=\hat{w}(X,H,E,\Pi) & ,\Pi(0,\varepsilon)=\hat{\Pi}(\varepsilon)
\end{cases}\tag{4.19}$$

4.5 Το γρήγορο πρόβλημα

Για $\varepsilon=0$ το σύστημα (4.19) γίνεται:

$$\begin{cases}
\frac{\partial X_0}{\partial \tau}=0 & ,X_0(0)=\hat{X}(0)\\
\frac{\partial H_0}{\partial \tau}=0 & ,H_0(0)=\hat{H}(0)\\
\frac{\partial E_0}{\partial \tau}=\hat{\phi} & ,E_0(0)=\hat{E}(0)\\
\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}=\hat{w} & ,\Pi_0(0)=\hat{\Pi}(0)
\end{cases}\tag{4.20}$$

Λήμμα 4.5.1 *Για κάθε μικρό $\varepsilon>0$ υπάρχει μονοδιάστατη πολλαπλότητα $\Im(\varepsilon)$ ώστε το σύστημα (4.19) να έχει μοναδική λύση* $\Big(X(t,\varepsilon),H(t,\varepsilon),E(t,\varepsilon),\Pi(t,\varepsilon)\Big)$

στο $[0,T]$ *αν* $\Big(\hat{X}(\varepsilon),\hat{H}(\varepsilon),\hat{E}(\varepsilon),\hat{\Pi}(\varepsilon)\Big)\in \Im(\varepsilon)$. *Επιπλέον, υπάρχει μοναδική λύση του συστήματος (4.20) τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} X(t,\varepsilon) &= X_0(\tau)+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ H(t,\varepsilon) &= H_0(\tau)+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ E(t,\varepsilon) &= E_0(\tau)+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ \Pi(t,\varepsilon) &= \Pi_0(\tau)+\mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned}$$

για $0\le t\le T$ *και* $\varepsilon\to 0$. *Τελικά υπάρχουν θετικές σταθερές* $K_1,\delta_1,\varepsilon_0''$ *ώστε:*

$$\Big|\Big(X(t,\varepsilon),H(t,\varepsilon)\Big)\Big|+\Big|\Big(E(t,\varepsilon),\Pi(t,\varepsilon)\Big)\Big|\le K_1\exp\{-\delta_1\frac{t}{\varepsilon}\}$$

για $t\in[0,T], 0<\varepsilon\le\varepsilon_0''$.

[Παράρτημα 2, Λήμμα 7.1.2]

4.6 Η λύση του αρχικού προβλήματος

Θεωρώ το $MHDS$ με αρχικές συνθήκες

$$x(0,\varepsilon)=x(\varepsilon),h(0,\varepsilon)=h(\varepsilon),e(0,\varepsilon)=e(\varepsilon),P(0,\varepsilon)=P(\varepsilon)$$

όπου οι $x(\varepsilon),h(\varepsilon),e(\varepsilon),P(\varepsilon)$ είναι ομαλές συναρτήσεις του ε τέτοιες ώστε $x(0)=x_0,h(0)=h_0$ με x_0,h_0 όπως ορίζονται στο Λήμμα 4.3.1. Ονομάζω το πρόβλημα αυτό αρχικό πρόβλημα

Θεώρημα 4.6.1 *Για κάθε μικρό* $\varepsilon>0$ *υπάρχει μονοδιάστατη πολλαπλότητα* $\mathcal{S}(\varepsilon)$, *ώστε το αρχικό πρόβλημα να έχει μοναδική λύση*

$$\Big(x(t,\varepsilon),h(t,\varepsilon),e(t,\varepsilon),P(t,\varepsilon)\Big)$$

στο $[0,T]$ *αν* $(e(\varepsilon),P(\varepsilon))\in\mathcal{S}(\varepsilon)$. *Η λύση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή:*

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= x^*(t,\varepsilon)+X(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)\\ h(t,\varepsilon) &= h^*(t,\varepsilon)+H(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)\\ e(t,\varepsilon) &= e^*(t,\varepsilon)+E(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)\\ P(t,\varepsilon) &= P^*(t,\varepsilon)+\Pi(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)\end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0,T]$ *και* $\varepsilon > 0$ *μικρό. Η* $(x^*(t,\varepsilon), h^*(t,\varepsilon), e^*(t,\varepsilon), P^*(t,\varepsilon))$ *ονομάζεται εξωτερική λύση και η* $\Big(X(\frac{t}{\varepsilon}), H(\frac{t}{\varepsilon}), E(\frac{t}{\varepsilon}), \Pi(\frac{t}{\varepsilon})\Big)$ *λύση φραγμένου στρώματος.*
Για την εξωτερική λύση ισχύει:

$$\begin{aligned} x^*(t,\varepsilon) &= \bar{x}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ h^*(t,\varepsilon) &= \bar{h}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ e^*(t,\varepsilon) &= \bar{e}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ P^*(t,\varepsilon) &= \bar{P}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

ομοιόμορφα για $0 \leq t \leq T$ *όπου* $\Big(\bar{x}(t), \bar{h}(t), \bar{e}(t), \bar{P}(t)\Big)$ *η λύση του (4.10) με αρχικές συνθήκες* $(x_0, h_0) = (x(0), h(0))$ *όπως αυτές ορίζονται στο Λήμμα 4.3.1 .*
Για την λύση οριακού στρώματος ισχύει:

$$\begin{aligned} X(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon) &= X_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ H(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon) &= H_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ E(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon) &= E_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \Pi(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon) &= \Pi_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

ομοιόμορφα ως προς $0 \leq t \leq T$ *για* $\varepsilon \to 0$, *όπου* (X_0, H_0, E_0, Π_0) *η λύση του (4.20).*
Τέλος, υπάρχουν θετικές σταθέρες $K_1, \delta_1, \varepsilon_0''$ *τέτοια ώστε:*

$$\Big|\Big(X(\tau,\varepsilon), H(\tau,\varepsilon)\Big)\Big| + \Big|\Big(E(\tau,\varepsilon), \Pi(\tau,\varepsilon)\Big)\Big| \leq$$

$$\leq K_1 \Big|\Big((e(\varepsilon), P(\varepsilon)\Big) - \Big(e^*(0,\varepsilon), P^*(0,\varepsilon)\Big)\Big| \exp\{-\delta_1 \tau\}$$

για $0 \leq \tau \leq \frac{T}{\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0''$.

[Παράρτημα 2, Θεώρημα 7.3.1]

Κεφάλαιο 5

Ο σχεδιασμός πολιτικής διαχείρισης του τόπου αλιείας

5.1 Η ύπαρξη σταθερού σημείου στο επίπεδο φάσης του αρχικού προβλήματος

Η λύση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου ικανοποιεί το $MHDS$:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,P) - h \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big) \\ \varepsilon\dot{e} = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big) \\ \varepsilon\dot{P} = e - mP \end{cases} \tag{5.1}$$

Προς αποφυγήν πιθανής καταστροφής του πόρου, πρέπει η λύση να μην παρουσιάζει οριακές αποκλίσεις σε απείρο χρόνο. Ο κοινωνικός σχεδίαστης, προκειμένου να εξασφαλίσει αυτή την καλή συμπεριφορά, πρέπει να επέμβει ώστε η λύση να προσεγγίσει τη γειτονία κάποιου κρίσιμου σημείου του διαγράμματος φάσεων του $MHDS$.

Πρόταση 5.1.1 *Αν το αργό σύστημα έχει κρίσιμο σημείο ισορροπίας (x_0, h_0), τότε,για κάθε $\varepsilon > 0$, το $MHDS$ (5.1) έχει κρίσιμο σημείο ισορροπίας $\mathcal{K} = (x_0, h_0, e_0, P_0)$, όπου το (e_0, P_0) ανήκει στο σύνολο*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \Big\{(e,P) : \exists (x,h)\ \tau.\omega\ F(x,P) - h = 0 \wedge \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x,P)\Big) = 0.\Big\}$$

Απόδειξη

Θεωρώ το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big) = 0 \\ e - mP = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι επιλύσιμο ως προς e και P για κάθε (x, h). Έστω ότι $e(x, h)$ και $P(x, h)$ είναι οι αντίστοιχες λύσεις του[1].
Το αργό πρόβλημα είναι:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, P) - h \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x, P)\Big). \end{cases}$$

Έστω ότι το (x_0, h_0) είναι κρίσιμο σημείο του αργού προβλήματος και $e(x_0, h_0), P(x_0, h_0)$ είναι οι αντίστοιχες τιμές για το ρυθμό εκπομπής ρύπων και το απόθεμα ρύπανσης. Το σημείο $(e_0, P_0) = (e(x_0, h_0), P(x_0, h_0))$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$, που ορίζεται στη εκφώνηση.
Θεωρώ το πρόβλημα αρχικών τιμών **Π.Α.Τ**:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, P) - h, & x(0, \varepsilon) = x_0 \\ \dot{h} = \frac{1}{u_{hh}}\Big((\delta - F_x)(u_h - c(x)) + c_x F(x, P)\Big), & h(0, \varepsilon) = h_0 \\ \varepsilon \dot{e} = \frac{1}{B_{ee}}\Big((\delta + m)B_e + (u_h - c(x))F_P\Big), & e(0, \varepsilon) = e_0 \\ \varepsilon \dot{P} = e - mP, & P(0, \varepsilon) = P_0 \end{cases}$$

Προφανώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, το **Π.Α.Τ** έχει σταθερή ως προς το χρόνο λύση

$$\Big(x(t, \varepsilon), h(t, \varepsilon), e(t, \varepsilon), P(t, \varepsilon)\Big) = \Big(x_0, h_0, e_0, P_0\Big) \tag{5.2}$$

που αντιστοιχεί σε ένα κρίσιμο σημείο στο επίπεδο φάσης του $MHDS$. Η ευστάθεια του σημείου αυτού καθορίζεται από τη μελέτη του Ιακωβιανού πίνακα του συστήματος [Παράρτημα 3].□

5.2 Σχεδιασμός πολιτικής

Οι μεταβλητές κατάστασης ενός προβλήματος βελτίστου ελέγχου έχουν συνήθως δεδομένες αρχικές τιμές. Αντίθετα, οι αρχικές τιμές των μεταβλητών ελέγχου μπορούν να προσδιοριστούν από τον κοινωνικό σχεδιαστή.

Έστω ότι οι αρχικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης που δίνονται στον κοινωνικό σχεδιαστή είναι: $x(0, \varepsilon) = a(\varepsilon)$ και $P(0, \varepsilon) = d(\varepsilon)$, όπου οι συναρτήσεις $a(\varepsilon), d(\varepsilon) \in \mathcal{C}^1$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να γραφούν:
$a(\varepsilon) = a(0) + \mathcal{R}_1(\varepsilon)$, όπου $\mathcal{R}_1(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} a'(y)(\varepsilon - y)dy$,
$d(\varepsilon) = d(0) + \mathcal{R}_2(\varepsilon)$, όπου $\mathcal{R}_2(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} d'(y)(\varepsilon - y)dy$.

[1] Με την βοήθεια των συναρτήσεων αυτών ο κοινωνικός σχεδιαστής μπορεί να υπολογίζει το ρυθμό εκπομπής ρύπων και το απόθεμα ρύπανσης, ανάλογα με τις τιμές της βιομάζας των ιχθύων και του ρυθμού αλιείας.

Σκοπός του κοινωνικού σχεδιαστή είναι να επιλέξει κατάλληλες αρχικές συνθήκες για τις μεταβλητές ελέγχου ώστε η λύση του $MHDS$ για τις συνθήκες αυτές να παραμένει σε για κάθε χρονική στιγμή σε γειτονία κάποιου σημείου του επιπέδου φάσεων.

Το αργό σύστημα έχει σαγματικο σημείο ισορροπίας $(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πολλαπλότητα $\mathcal{W}_1$, (ευσταθής πολλαπλότητα) στο διάγραμμα φάσης του συστήματος ώστε αν η αρχική τιμή a της μεταβλητής $x(t,0)$ [2] ανήκει σε γειτονία του του $\bar{x}_0$, να υπάρχει αρχική τιμή b για την μεταβλήτη $h(t,0)$, ώστε το σημείο $A := (a,b) \in \mathcal{W}_1$. Αριθμητικές μέθοδοι για τον υπολογισμό της ευσταθούς πολλαπλότητας του περιγράφονται στο [2]. Επιπλέον, αν οι $x(t,A), h(t,A)$ είναι οι αντίστοιχες τροχιές για τις αρχικές τιμές (a,b), τότε $x(t,A) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}_0$ και $h(t,A) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \bar{h}_0$. Λόγω σύνεχειας των συναρτήσεων $e(x,h), P(x,h)$ ισχύει ότι $e(x(t,A), h(t,A)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} e(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$ και $P(x(t,A), h(t,A)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} P(\bar{x}_0, \bar{h}_0)$.

Θέτω στο αρχικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} X(\tau,\varepsilon) &= x(\varepsilon\tau,\varepsilon) - x^*(\varepsilon\tau,\varepsilon) \\ H(\tau,\varepsilon) &= h(\varepsilon\tau,\varepsilon) - h^*(\varepsilon\tau,\varepsilon) \\ E(\tau,\varepsilon) &= e(\varepsilon\tau,\varepsilon) - e^*(\varepsilon\tau,\varepsilon) \\ \Pi(\tau,\varepsilon) &= P(\varepsilon\tau,\varepsilon) - P^*(\varepsilon\tau,\varepsilon) \end{aligned}$$

όπου $\Big(x(t,\varepsilon), h(t,\varepsilon), e(t,\varepsilon), P(t,\varepsilon)\Big)$ είναι η λύση του $MHDS$ για αρχικές τιμές $\Big(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), d(\varepsilon)\Big)$, όπως αυτές θα επιλέγουν,
$\Big(x^*(t,\varepsilon), h^*(t,\varepsilon), e^*(t,\varepsilon), P^*(t,\varepsilon)\Big)$ είναι η λύση του εξωτερικού προβλήματος με αρχικές τιμές $(a(0) + \mathcal{R}_1, b + \mathcal{O}(\varepsilon)|_{t=0})$ και αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$. Για $\varepsilon = 0$

[2] Συμβολίζω a την τιμή $a(0)$

το σύστημα οριακού στρώματος γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{\partial X(\tau,0)}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial H(\tau,0)}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial E(\tau,0)}{\partial \tau} = \frac{1}{B_{ee}\Big(E(\tau)+e(a,b)\Big)}\Bigg((m+\delta)B_e\Big(E+e(a,b)\Big)+ \\ \qquad +\Big(u_h(b)-c(a)\Big)F_P\Big(a,\Pi(\tau)+P(a,b)\Big)\Bigg)- \\ \qquad -\frac{1}{B_{ee}\Big(e(a,b)\Big)}\Bigg((m+\delta)B_e\Big(e(a,b)\Big)+ \\ \qquad +\Big(u_h(b)-c(a)\Big)F_P\Big(a,P(a,b)\Big)\Bigg) \\ \frac{\partial \Pi(\tau,0)}{\partial \tau} = E - m\Pi. \end{cases}$$

το οποίο ονομάζεται γρήγορο σύστημα. Οι αρχικές τιμές του δίνονται από τις σχέσεις: $E(0,0) = e(0,0) - e(a,b)$, $\Pi(0,0) = P(0,0) - P(a,b) = d - P(a,b)$. Η τιμή $e(0,0)$ θα επιλεγεί από τον κοινωνικό σχεδιαστή. Το γρήγορο σύστημα εχει μοναδικό σημείο ισορροπιάς $(E^*,\Pi^*) = (0,0)$. Το σημείο αυτό σαγματικό, αφού ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \delta + m & \frac{1}{B_{ee}(e(a,b))}(u_h(b)-c(a))F_{PP}(a,P(a,b)) \\ 1 & -m \end{bmatrix}$$

του συστήματος έχει αρνητική ορίζουσα:

$$|\mathcal{J}| = -m(m+\delta) - \frac{1}{B_{ee}(e(a,b))}(u_h(b)-c(a))F_{PP}(a,P(a,b)) < 0.$$

Αν $\mathcal{W}_2$ είναι η ευσταθής πολλαπλότητα του τότε αν η αρχική τιμή $d - P(a,b)$ της μεταβλήτης $\Pi(\tau)$ ανήκει σε γειτονία του 0, υπάρχει αρχική τιμή c για τη μεταβλήτη $E(\tau)$ ώστε το σημείο $B = \Big(d - P(a,b), c\Big) \in \mathcal{W}_2$. Αν $E(\tau,B)$ και $\Pi(\tau,B)$ είναι οι αντίστοιχες τροχιές για τις αρχικές τιμές $\Big(d - P(a,b), c\Big)$, τότε ισχύει ότι $E(\tau,B) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $\Pi(\tau,B) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Αν επιλεγούν οι αρχικές τιμές $h(0,\varepsilon) = b + \mathcal{O}(\varepsilon)|_{t=0}$ και $e(0,\varepsilon) = c + e(a,b) + \mathcal{O}(\varepsilon)|_{t=0}$ για τις μεταβλητές ελέγχου, τότε από το Θεώρημα 4.6.1 η λύση του αρχικού συστήματος γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= x(t,A) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ h(t,\varepsilon) &= h(t,A) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ e(t,\varepsilon) &= e(x(t,A),h(t,A)) + E(t/\varepsilon,B) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ P(t,\varepsilon) &= P(x(t,A),h(t,A)) + \Pi(t/\varepsilon,B) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0, T]$ για κάποιο $T \in \mathbb{R}^{+}$.Η παραπάνω μορφή για τη λύση ισχύει ως την χρονική στιγμή T. Με κατάλληλες επεμβάσεις στη πορεία του συστήματος μπορώ να αναγκάσω τη λύση να προσεγγίσει το κρίσιμο σημείο.

Έστω ότι το $0 < \varepsilon < 1$ είναι αρκετά μικρό και σταθεροποιημένο. Μετράω τη τιμή των μεταβλήτων κατάστασης $x(T, \varepsilon), P(T, \varepsilon)$ την χρονική στιγμή T. Με τις τιμές αυτές για αρχικές τιμές επαναπροσδιορίζω τις κατάλληλες αρχικές τιμές για τις μεταβλητές ελέγχου ώστε η λύση του $MHDS$ ξαναπάρει την παραπάνω μορφή. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή αναγκάζω του προσθεταίους να ακολουθούν την ευσταθή πολλαπλότητα του αντίστοιχου συστήματος τους και την λύση του αρχικού προβλήματος, για κάθε αρκετά μεγάλη χρονική στιγμή, να παραμείνει σε κάποια γειτονιά του σημείου $(\bar{x}_0, \bar{h}_0, e(\bar{x}_0, \bar{h}_0), P(\bar{x}_0, \bar{h}_0))$.

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα 1

6.1 Η αρχή Μεγίστου του Pontryagin για πρόβλημα με μια διαταραγμένη μεταβλητή κατάστασης

Θεωρώ το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου

$$max_{\{u_1(t),u_2(t)\}} \int_0^T f(t, x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t))dt$$

όπου

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, u_1, u_2) \tag{6.1}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \tag{6.2}$$

με $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1,\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0$. Οι μεταβλητές u_1, u_2 ονομάζονται συναρτήσεις ελέγχου (control) ενώ οι x_1, x_2 συναρτήσεις κατάστασης (state). Έστω ότι το πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση $x_1^*, x_2^*, u_1^*, u_2^*$.Έστω $h_1(t), h_2(t)$ αυθαίρετες εφικτές μεταβολές. Ορίζω τις παραμετρικές οικογένειες των controls:

$$u_1(t) = u_1^*(t) + ah_1(t),\ u_2(t) = u_2^*(t) + ah_2(t)$$

Συμβολίζω $x_i = y_i(t, a)$, $i = 1, 2$ τις λύσεις των διαφορικών (6.3),(6.4) ως προς x_i για κάθε u_i της παραπάνω μορφής.Αν y_1, y_2 ομαλές ως προς t και a, έχω:
Αν $a = 0$ τότε $u_1 = u_1^*,\ u_2 = u_2^*$ οπότε $y_1(t, 0) = x_1^*,\ y_2(t, 0) = x_2^*$. Επιπλέον $y_i(0, 0) = x_i^0,\ i = 1, 2$.
Θεωρώ το συναρτησοειδές $J(a) = \int_0^T f dt$ το οποίο θέλω να μεγιστοποιήσω.

Έστω $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ παραγωγίσιμες.Τότε,

$$\begin{aligned}
J(a) &= \int_0^T f dt = \int_o^T f + \lambda_1(g_1 - \dot{x_1}) + \lambda_2(g_2 - \varepsilon \dot{x_2}) dt \\
&= \int_0^T f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + x_1 \dot{\lambda}_1 + \varepsilon \dot{\lambda}_2 x_2 dt - (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2)|_0^T \\
&= \int_0^T f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + x_1 \dot{\lambda}_1 + \varepsilon \dot{\lambda}_2 x_2 dt - \\
&- \lambda_1(T) x_1(T) - \varepsilon \lambda_2(T) x_2(T) + \lambda_1(0) x_1^* + \varepsilon \lambda_2(0) x_2^*
\end{aligned}$$

για κάθε u_1, u_2, x_1, x_2 εφικτές συναρτήσεις.
Θέτω $u_i = u_i^* + a h_i(t)\ i = 1, 2$, οπότε έχω:

$$J(a) = \int_0^T f(t, y_1(t,a), y_2(t,a), u_1 + ah_1, u_2 + ah_2) +$$

$$+\lambda_1 g_1(y_1(t,a), y_2(t,a), u_1 + ah_1, u_2 + ah_2) +$$

$$+\lambda_2 g_2(y_1(t,a), y_2(t,a), u_1 + ah_1, u_2 + ah_2) +$$

$$+y_1(t,a)\dot{\lambda}_1 + \varepsilon y_2(t,a)\dot{\lambda}_2) dt -$$

$$-\lambda_1(T) y_1(T,a) - \varepsilon \lambda_2(T) y_2(T,a) + \lambda_1(0) x_1^0 + \varepsilon \lambda_2(0) x_2^0$$

Αν $a = 0$ έχω $u_i = u_i^*,\ y_i = x_i^*$ και το συναρτησοειδές μεγιστοποιείται

$$0 = J'(0) = \int_0^T (\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} h_2) +$$

$$+\lambda_1(t)(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial a} + \frac{\partial g_1}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2} h_2) +$$

$$+\lambda_2(t)(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial a} + \frac{\partial g_2}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} h_2) +$$

$$+(\frac{\partial y_1}{\partial a}\dot{\lambda}_1 + \varepsilon \frac{\partial y_2}{\partial a}\dot{\lambda}_2) dt$$

$$+\lambda_1(T)\frac{\partial y_1}{\partial a}(T, 0) - \varepsilon \lambda_2(T)\frac{\partial y_2}{\partial a}(T, a) \Longrightarrow$$

$$\int_0^T (\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \dot{\lambda}_1)\frac{\partial y_1}{\partial a} +$$

$$+(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \varepsilon\dot{\lambda}_2)\frac{\partial y_2}{\partial a} +$$

$$+(\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_1})h_1 +$$

$$+(\frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_2})h_2 dt +$$

$$+\lambda_1(T)\frac{\partial y_1}{\partial a} + \varepsilon\lambda_2(T)\frac{\partial y_2}{\partial a} = 0$$

Θέτω,

$$\dot{\lambda}_1 = -(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1})$$

$$\varepsilon\dot{\lambda}_2 = -(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2})$$

,

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0$$

Τότε πρέπει

$$\int_0^T (\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_1})h_1 + (\frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_2})h_2 dt = 0$$

Αν $h_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_i},\ i = 1, 2$, πρέπει $\frac{\partial f}{\partial u_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_i} = 0\ i = 1, 2.$

Έτσι αν ορίσω τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση:

$$\mathbf{H}(t, x_1, x_2, u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) :=$$

$$:= f(t, x_1, x_2, u_1, u_2) + \lambda_1(t)g_1(x_1, x_2, u_1, u_2) + \lambda_2(t)g_2(x_1, x_2, u_1, u_2)$$

Τότε οι συνθήκες βελτιστοποίησης του συναρτησοειδούς μπορούν να γραφτούν:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_1} = 0$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda_1} \qquad x_1(0) = x_1^0$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda_2} \qquad x_2(0) = x_2^0$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1} \qquad \lambda_1(T) = 0$$

$$\varepsilon\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_2} \qquad \lambda_2(T) = 0$$

Παρατήρηση 6.1.1 *Αν οι f, g_1, g_2 είναι κοίλες στα x_1, x_2, u_1, u_2 και $\lambda_i(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, T]$, οι παραπάνω συνθήκες εκτός από αναγκαίες είναι και ικανές για την μεγιστοποίηση του συναρτησοειδούς.*

Απόδειξη Έστω $x_1^*, x_2^*, u_1^*, u_2^*, \lambda_1, \lambda_2$ οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες βελτιστοποίησης και x_1, x_2, u_1, u_2 οποιαδήποτε άλλη λύση του διαφορικών εξισώσεων (6.3),(6.4). Συμβολίζω,

$$f^* = f(t, x_1^*, x_2^*, u_1^*, u_2^*), g_i^* = g_i(t, x_1^*, x_2^*, u_1^*, u_2^*), i = 1, 2.$$

Θα δείξω ότι

$$D = \int_0^T f^* dt - \int_0^T f dt \geq 0$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^T f^* dt - \int_0^T f dt \overset{f \kappa o \iota \lambda \eta}{\geq} \int_0^T \sum_{i=1,2} (x_i^* - x_i)\frac{\partial f^*}{\partial x_i} + \sum_{i=1,2} (u_i^* - u_i)\frac{\partial f^*}{\partial u_i} dt = \\
&= \int_0^T (x_1^* - x_1)\frac{\partial f^*}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2)\frac{\partial f^*}{\partial x_2} + (u_1^* - u_1)\frac{\partial f^*}{\partial u_1} + (u_2^* - u_2)\frac{\partial f^*}{\partial u_2} dt = \\
&= \int_0^T (x_1^* - x_1)(-\lambda_1\frac{\partial g_1^*}{\partial x_1} - \lambda_2\frac{\partial g_2^*}{\partial x_1} - \dot{\lambda}_1) + \\
&+ (x_2^* - x_2)(-\lambda_1\frac{\partial g_1^*}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial g_2^*}{\partial x_2} - \varepsilon\dot{\lambda}_2) + (u_1^* - u_1)(-\lambda_1\frac{\partial g_1^*}{\partial u_1} - \lambda_2\frac{\partial g_2^*}{\partial u_1}) + \\
&+ (u_2^* - u_2)(-\lambda_1\frac{\partial g_1^*}{\partial u_2} - \lambda_2\frac{\partial g_2^*}{\partial u_2}) = \\
&= -\int_0^T (x_1^* - x_1)\dot{\lambda}_1 + (x_2^* - x_2)\varepsilon\dot{\lambda}_2 + \\
&+ \int_0^T -\lambda_1\Big[(x_1^* - x_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_2} + (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_1} + +(u_2^* - u_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_2}\Big] + \\
&+ \int_0^T -\lambda_2\Big[(x_1^* - x_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_2} + (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_1} + (u_2^* - u_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_2}\Big] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_0^T (\dot{x}_1^* - \dot{x}_1)\lambda_1 + (\varepsilon\dot{x}_2^* - \varepsilon\dot{x}_2)\lambda_2 - \Big[(x_1^* - x_1)\lambda_1 + (x_2^* - x_2)\varepsilon\lambda_2\Big]\Big|_0^T + \\
+ & \int_0^T -\lambda_1\Big[(x_1^* - x_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_2} + (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_1} + (u_2^* - u_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_2}\Big] + \\
+ & \int_0^T -\lambda_2\Big[(x_1^* - x_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_1} + (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_2} + (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_1} + (u_2^* - u_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_2}\Big]dt =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_0^T \lambda_1\Big[g_1^* - g_1^* - (x_1^* - x_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_1} - (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial x_2} - \\
- & (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_1} - (u_2^* - u_2)\frac{\partial g_1^*}{\partial u_2}\Big]dt + \\
+ & \int_0^T \lambda_2\Big[g_2^* - g_2^* - (x_1^* - x_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_1} - (x_2^* - x_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial x_2} - \\
- & (u_1^* - u_1)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_1} - (u_2^* - u_2)\frac{\partial g_2^*}{\partial u_2}\Big]dt \geq 0
\end{aligned}
$$

αφού $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2$ και $g_i, i = 1, 2$ κοίλες.
Εναλλακτικά, αντί $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2$ και $g_i, i = 1, 2$ κοίλες, μπορώ να έχω:
$\triangleright$ g_i κοίλη και $\lambda_i \leq 0$ για $i = 1$ ή 2 ή $i = 1, 2$
$\triangleright$ g_i γραμμική στα x_i, u_i και οι $\lambda_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2$.

6.2 Η έννοια της προεξόφλησης του πλεονάσματος και η τροποποιημενή Χαμιλτονιανή εξίσωση

Θεωρώ το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

$$
max_{\{u_1(t), u_2(t)\}} \int_0^T e^{-\delta t} f(t, x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t))dt
$$

όπου

$$
\dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, u_1, u_2) \tag{6.3}
$$

$$
\varepsilon\dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \tag{6.4}
$$

με $f, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1,\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0$. Ο παράγοντας $e^{-\delta t}$ έχει ως σκοπό της προεξόφληση του πλεονάσματος, δηλαδή της αναγωγή της αξίας του στα παρόντα δεδομένα [7]. Η Χαμιλτονιανή του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \quad & (t, x_1, x_2, u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = \\ = \quad & e^{-\delta t} f(t, x_1, x_2, u_1, u_2) + \lambda_1(t) g_1(x_1, x_2, u_1, u_2) + \lambda_2(t) g_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \end{aligned}$$

και το Χαμιλτονιανό σύστημα, του οποίου η λύση μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα είναι:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_i} = 0 \Longrightarrow e^{-\delta t} \frac{\partial f}{\partial u_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial u_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_i} = 0, i = 1, 2$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1} = -e^{-\delta t} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_2} = -e^{-\delta t} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$$

Έχω, $\mathbf{H} = e^{-\delta t}\Big(f + e^{\delta t}\lambda_1 g_1 + e^{\delta t}\lambda_2 g_2\Big)$ Θέτω $m_i = e^{\delta t}\lambda_i(t)$. Έστω

$$\mathcal{H} = e^{\delta t}\mathbf{H} = f + m_1 g_1 + m_2 g_2$$

Η $\mathcal{H}$ ονομάζεται τροποποιημένη Χαμιλτονιανή συνάρτηση του προβλήματος. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \delta t e^{\delta t}\lambda_1(t) + e^{\delta t}\dot{\lambda_2}(t) \\ &= \delta m_1 - e^{\delta t}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1} = \delta m_1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} \\ \varepsilon \dot{m}_2 &= \delta m_2 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Επιπλέον έχω:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_i} = 0 \Longrightarrow e^{\delta t}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_i} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0, i = 1, 2$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_1}, \varepsilon \dot{x}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_2}$$

$$m_i(T) = e^{\delta t}\lambda_i(T) = 0, i = 1, 2$$

Τελικά, οι συνθήκες βελτιστοποίησης του τροποποιημένου προβλήματος είναι: Αν

$$\mathcal{H} = f + m_1 g_1 + m_2 g_2$$

τότε

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0, i = 1, 2$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_1}, \qquad x_1(0) = x_1^0$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_2}, \qquad x_2(0) = x_2^0$$

$$\dot{m}_1 = \delta m_1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, \qquad m_1(T) = 0$$

$$\varepsilon \dot{m}_2 = \delta m_2 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2}, \qquad m_2(T) = 0$$

Τα παραπάνω επεκτείνονται και στην περίπτωση $T = \infty$ με τις κατάλληλες συνθήκες εγκαρσιότητας αντί των τελικών συνθηκών [12].

Κεφάλαιο 7

Παράρτημα 2

7.1 Προσέγγιση της λύσης ιδιόμορφα διαταραγμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Θεωρώ το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon), & x(0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \varepsilon), & y(0) = \eta(\varepsilon) \end{cases} \tag{7.1}$$

όπου $\varepsilon > 0$ μικρό, $x, f \in \mathbb{E}^m$, $y, g \in \mathbb{E}^n$ Αγνοώντας την αρχική συνθήκη για το y, αν $\varepsilon = 0$, ορίζω το reduced πρόβλημα:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y, 0), & x(0) = \xi(0) \\ 0 = g(t, x, y, 0) \end{cases} \tag{7.2}$$

Θεωρώ ότι ισχυουν οι παρακάτω υποθέσεις:

Υπόθεση 7.1.1 *Το προβλημα (7.2) έχει συνεχή λύση* $x = x_0(t),\ y = y_0(t)$ *σε κάποιο διάστημα* $[0, T]$.

Υπόθεση 7.1.2 *Οι συναρτήσεις* f, g *έχουν συνεχείς παραγώγους ως τάξη* $R+2$ *ως πρός τα ορίσματα* t, x, y *σε κάποια γειτονία των σημείων* $(t, x_0(t), y_0(t))$, $0 \leq t \leq T$ *και* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *για κάποιο* $\varepsilon_0 > 0$. *Επίσης οι αρχικές τιμές* $\xi(\varepsilon), \eta(\varepsilon)$ *είναι ομαλές συναρτήσεις του* ε *για* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Υπόθεση 7.1.3 *Ο Ιακωβιανός πίνακας* $g_y(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, x_0(t), y_0(t))$ *έχει* k *ιδιοτιμές,* $1 \leq k \leq n$, *με πραγματικά μέρη τέτοια ώστε* $\mathcal{R}e(\lambda(t)) \leq \mu$ *και* $n - k$ *ιδιοτιμές με πραγματικά μέρη τέτοια ώστε* $\mathcal{R}e(\lambda(t)) \geq \mu$ *για* $0 \leq t \leq T$, $\mu > 0$.

Η εξωτερική λύση του προβλήματος Έστω $\xi^*(\varepsilon)$ ομαλή συνάρτηση του ε. Θεωρώ το πρόβλημα

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x,y,\varepsilon), \quad x(0) = \xi^*(\varepsilon) \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = g(t,x,y,\varepsilon) \end{cases} \tag{7.3}$$

και έστω $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}^{R+1}$ λύση του προβλήματος αυτού. Μια τέτοια λύση έχει πεπερασμένη επέκταση Taylor:

$$(x^*, y^*) = (x_0^*, y_0^*) + \sum_{r=1}^{R}(x_r^*, y_r^*)\varepsilon^r + \mathcal{R}(t,\varepsilon).$$

Λόγω του (7.3) για τους συντελεστές της επέκτασης ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{dx_0^*}{dt} = f(t, x_0^*, y_0^*, 0), \quad x_0^*(0) = \xi_0^*(0) \\ 0 = g(t, x_0^*, y_0^*, 0) \end{cases}$$

και για $r = 1, ..., R+1$ ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{dx_r^*}{dt} = f_x^*(t)x_r^* + f_y^*(t)y_r^* + \mathcal{P}_r(t,\varepsilon), \qquad x_0^*(0) = \xi_r^* \\ \frac{dy_{r-1}^*}{dt} = g_x^*(t)x_r^* + g_y^*(t)y_r^* + \mathcal{Q}_r(t,\varepsilon) \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} \xi^*(\varepsilon) &= \sum_{r=0}^{R+1}\varepsilon^r + \Xi(\varepsilon) \\ f_x^*(t) &= f_x(t, x_0^*(t), y_0^*(t), 0), \quad \kappa.o.\kappa \end{aligned}$$

και τα $\mathcal{P}_r, \mathcal{Q}_r$ είναι πολυώνυμα των $x_1^*, y_1^*, ..., x_{r-1}^*, y_{r-1}^*$ με συντελεστές που εξαρτώνται από τα t, x_0^*, y_0^*.

Λήμμα 7.1.1 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3. Τότε υπάρχουν σταθερές $\varepsilon_0', \rho_0 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε ομαλή συνάρτηση $\xi^*(\varepsilon) \in \mathcal{E}^m$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0'$ με $\mid \xi^*(\varepsilon) - x_0(0)| < \rho_0$ το σύστημα (7.3) έχει λύση $x^*(t,\varepsilon), y^*(t,\varepsilon)$ που ορίζεται για $0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0'$ και ικανοποιεί:*

$$x^*(t,\varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} x_r^*(t)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

$$y^*(t,\varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} y_r^*(t)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

όπου το $\mathcal{O}$ ισχύει ομοιόμορφα για $0 \leq t \leq T,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0'$.
Επιπλέον, υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε:

$$\left|\frac{\partial x^*}{\partial \xi^*}(t,\varepsilon)\right| + \left|\frac{\partial y^*}{\partial \xi^*}(t,\varepsilon)\right| \leq K$$

για $0 \leq t \leq T,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0'$ και $|\ \xi^*(\varepsilon) - x_0(0)| < \rho_0$

Απόδειξη [[6], Λήμμα 1]

Θεωρώ ότι υπάρχει εξωτερική λύση του συστήματος (7.1) και έστω $X = x - x^*$,$Y = y - y^*$ στο (7.1) Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \hat{f}(t, X, Y, \varepsilon), & X(0) = \hat{\xi}(\varepsilon) \\ \varepsilon\frac{dY}{dt} = \hat{g}(t, X, Y, \varepsilon), & Y(0) = \hat{\eta}(\varepsilon) \end{cases} \tag{7.4}$$

όπου

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\varepsilon) &= \xi(\varepsilon) - \xi^*(\varepsilon) \\ \hat{\eta}(\varepsilon) &= \eta(\varepsilon) - y^*(0,\varepsilon) \\ \hat{f} &= f(t, x^* + X, y^* + Y, \varepsilon) - (t, x^*, y^*, \varepsilon) \end{aligned}$$

και $\hat{g}$ ομοίως.

Θεωρώ νέα χρονική μεταβλητή $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Θα μελετήσω τη λύση του (7.4) καθώς το $\varepsilon \to 0$ οπότε $\tau \to +\infty$. Στο νέο χρόνο το (7.4) γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \varepsilon\hat{f}(\varepsilon\tau, X, Y, \varepsilon), & X(0) = \hat{\xi}(\varepsilon) \\ \frac{dY}{d\tau} = \hat{g}(\varepsilon\tau, X, Y, \varepsilon), & Y(0) = \hat{\eta}(\varepsilon) \end{cases} \tag{7.5}$$

Ξανά με την βοήθεια των επεκτάσεων Taylor για τις X, Y το σύστημα (7.5) παράγει τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{d\tau} = 0, & X_0(0) = \hat{\xi}(0) \\ \frac{dY_0}{d\tau} = \hat{g}(0, X, Y, 0), & Y(0) = \hat{\eta}(0) \end{cases} \tag{7.6}$$

και για $r = 1, ..., R + 1$:

$$\begin{cases} \frac{dX_r}{d\tau} = P_r(\tau), & X_r(0) = \hat{\xi}_r \\ \frac{dY_r}{d\tau} = \hat{g}_X(\tau)X_r + \hat{g}_Y(\tau)Y_r + Q(\tau), & Y_r(0) = \hat{\eta}_r \end{cases} \tag{7.7}$$

με $\hat{\xi}(\varepsilon) = \sum_{r=0}^{R+1} \hat{\xi}_r \varepsilon^r + \hat{\Xi}$, $\hat{g}_X(\tau) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial X}(0, X_0(\tau), Y_0(\tau), 0)$ κ.ο.κ και τα P_r, Q_r είναι πολυώνυμα των $X_1, Y_1, ..., X_{r-1}, Y_{r-1}$ με συντελεστές που εξαρτώνται από τα $\tau, X_0(\tau), Y_0(\tau)$ Το παρακάτω λήμμα εξαρφαλίζει ότι τα προβλήματα αυτά έχουν λύσεις που ορίζονται για $\tau \in [0, +\infty)$ και τείνουν στο μηδέν όταν $\tau \to \infty$, αν οι αρχικές συνθήκες είναι κατάλληλες.

Λήμμα 7.1.2 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3. Τότε, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ υπάρχει k διάστασης πολλαπλότητα $\Im(\varepsilon) \subset \mathbb{E}^{m+n}$ τέτοια ώστε, αν $(\hat{\xi}(\varepsilon), \hat{\eta}(\varepsilon)) \in \Im(\varepsilon)$, το πρόβλημα (7.4) να έχει μοναδική λύση $X = X(t, \varepsilon), Y = Y(t, \varepsilon)$ στο $[0, T]$. Τα προβλήματα (7.6),(7.7), $r = 0, ..., R+1$, έχουν μοναδικές λύσεις που ορίζονται για $0 \le \tau < \infty$ και*

$$X(\tau, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} X_r(\tau)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

$$Y(\tau, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} Y_r(\tau)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

όπου $\mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$ ισχυεί ομοιόμορφα για $0 \le t \le T$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Τελικά υπάρχουν θετικές σταθερές $K_1, \delta_1, \varepsilon_0''$ τέτοιες ώστε:

$$|X(t, \varepsilon)| + |Y(t, \varepsilon)| \le K_1 \exp\{-\delta_1 t/\varepsilon\}$$

για $0 \le t \le T$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0''$.

Απόδειξη [[6], Λήμμα 2]

Η k διάστασης πολλαπλότητα $\Im(\varepsilon)$ στο $\mathbb{E}^{m+n}$ ορίζεται από k γραμμικούς συνδυασμούς των συντελεστών $(X(0), Y(0))$. Στην απόδειξη του Λήμματος 7.1.2 δείχνεται ότι οι πρώτοι m συντελεστές ενός σημείου που ανήκει στην πολλαπλότητα αυτή ορίζονται από μια εξίσωση της μορφής:

$$X(0) = \Omega(X(0), Y(0), \xi^*, \varepsilon)$$

Το λήμμα 7.1.2 μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα (7.1) αν οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν την σχέση:

$$\xi(\varepsilon) - \xi^*(\varepsilon) = \Omega(\xi(\varepsilon) - \xi^*(\varepsilon), \eta(\varepsilon) - y^*(0, \varepsilon), \xi^*(\varepsilon), \varepsilon) \tag{7.8}$$

Στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος δείχνεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό η σχέση 7.8 ορίζει μοναδική $\xi^*(\varepsilon)$ ώστε $\xi^*(0) = x_0(0)$.

Θεώρημα 7.1.3 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3. Τότε, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ υπάρχει k διάστασης πολλαπλότητα $\mathcal{S}(\varepsilon) \subset \mathbb{E}^n$ τέτοια ώστε, αν $\eta(\varepsilon) \in \mathcal{S}(\varepsilon)$, το πρόβλημα (7.1) να έχει μοναδική λύση $x = x(t,\varepsilon),\ y = y(t,\varepsilon)$. Επιπλέον, υπάρχει μια εξωτερική λύση $x = x^*(t,\varepsilon),\ y = y^*(t,\varepsilon)$ και λύση οριακού στρώματος $X(\tau,\varepsilon), Y(\tau,\varepsilon)$, τέτοιες ώστε:*

$$x(t,\varepsilon) = x^*(t,\varepsilon) + X(t \setminus \varepsilon, \varepsilon)$$

$$y(t,\varepsilon) = y^*(t,\varepsilon) + Y(t \setminus \varepsilon, \varepsilon)$$

για $0 \leq t \leq T,\ \varepsilon > 0$ μικρό.
Για την εξωτερική λύση ισχύει:

$$x^*(t,\varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} x_r^*(t)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

$$y^*(t,\varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} y_r^*(t)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

ομοιόμορφα ως προς $t \in [0,T]$, όπου τα $x_r^*(t), y_r^*(t)$ ορίζονται στο Λήμμα 7.1.1.
Για την λύση φραγμένου στρώματος ισχύει:

$$X(t \setminus \varepsilon, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} X_r(t \setminus \varepsilon)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

$$Y(t \setminus \varepsilon, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{R} Y_r(t \setminus \varepsilon)\varepsilon^r = \mathcal{O}(\varepsilon^{R+1})$$

ομοιόμορφα στο $0 \leq t \leq T$, με τα $X_r(t), Y_r(t)$ να ορίζονται στο 7.1.2.
Επιπλέον υπάρχουν σταθερές $K_1, \delta_1, \varepsilon_0''$ τέτοιες ώστε:

$$|X(\tau,\varepsilon)| + |Y(\tau,\varepsilon)| \leq K_1|\eta(\varepsilon) - y^*(0,\varepsilon)| \exp\{-\delta_1\tau\}$$

για $0 \leq t \leq T/\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0''$.

Απόδειξη [[6], Θεώρημα 1]

Κεφάλαιο 8

Παράρτημα 3

8.1 Ο Ιακωβιανός πίνακας του αρχικού προβλήματος

Ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathcal{J}$ του αρχικού συστήματος (5.1) υπολογισμένος στο κρίσιμο σημείο (5.2) είναι:

$$\begin{bmatrix} F_x & -1 & 0 & F_P \\ \frac{1}{u_{hh}}\Big(-F_{xx}(u_h - c(x)) - c_x(\delta - F_x) + c_{xx}F + c_xF_x\Big) & \delta - F_x & 0 & \frac{-F_{xP}(u_h - c(x)) + c_xF_P}{u_{hh}} \\ -c_x\frac{F_P}{\varepsilon B_{ee}} & \frac{u_{hh}F_P}{\varepsilon B_{ee}} & \frac{m+\delta}{\varepsilon} & \frac{u_h - c(x)}{\varepsilon B_{ee}}F_{PP} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{-m}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Αν $\Omega = \begin{vmatrix} F_x & 0 \\ -c_x\frac{F_P}{\varepsilon B_{ee}} & \frac{m+\delta}{\varepsilon} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta - F_x & \frac{-F_{xP}(u_h - c(x)) + c_xF_P}{u_{hh}} \\ 0 & \frac{-m}{\varepsilon} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & F_P \\ \frac{u_{hh}F_P}{\varepsilon B_{ee}} & \frac{1}{\varepsilon} \end{vmatrix}$,
ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 8.1.1 *Αν $|\mathcal{J}| > 0$ και $\Omega < 0$ τότε το κρίσιμο σημείο έχει τις ιδιότητες του σαγματικού σημείου ισορροπίας.*

[[13], Appendix]

Bibliography

[1] N.D. Alikakos and G.I. Kalogeropoulos. *Ordinary Differential Equations*. Singroni Ekdotiki, 2003.

[2] R.J Barro and X. Sala-i Martin. *Economic Growth*. McGraw-Hill,Inc., 1995.

[3] C.W. Clark. *Mathematical bioeconomics:The optimal management of renewable resourses*. Wiley-Interscience Publications, 1990.

[4] A.S. Crepin. Using fast and slow processes to manage coral reef fisheries with threshold effects. Technical report, Beijer International Institute of Ecological Economics. Disc.Paper 185, 2004.

[5] L.C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.

[6] F. Hoppensteadt. Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters. *Comm.on Pure and Appl.math.*, 24:807–840, 1971.

[7] M.I. Kamien and N.I. Schwartz. *Dymanic optimization:The calculus of variations and optimal control in economics and management*. Elsievier science Publications, 1981.

[8] P.V. Kokotovic. Applications of singular perturbation techniques to control theory. *Siam Review*, 26:501–550, 1984.

[9] J.D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer, 1993.

[10] R.E. O'Malley. *Introduction to singular perturbations*. Academic Press, 1974.

[11] D.A. Sanchez. *Ordinary differential equations and stability theory*. Dover Publications, 1979.

[12] A. Seierstad and K. Sydsaeter. *Optimal control with economic applications*. Elsevier Science Publications, 1987.

[13] O. Tahvonen. On dynamics of renewable resource harvesting and pollution control. *Environmental and resource economics*, 1:97–117, 1991.

[14] A. Xepapadeas and C. Roseta Palma. Instabilities and robust control in fisheries. *FEEM Working Paper*, 2004.

[15] Xepapadeas.A. *Advanced principles in environmental policy*. Edward Elgar Publications, 1997.