

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

Ελαχιστοποίηση της Ευκλείδειας Norm
των Τελεστών των SOR και MSOR
Επαναληπτικών Μεθόδων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Παρασκευάς Στρατής

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Απόστολος Χατζηδήμος

17 Οκτωβρίου 2005

Περιεχόμενα

1	Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων	5
1.1	Εισαγωγή	5
1.2	Ταχύτητα συγκλίσεως μιας επαναληπτικής μεθόδου	7
2	Επαναληπτική μέθοδος SOR	11
2.1	Εισαγωγή	11
2.2	Σύγκλιση της μεθόδου	13
2.2.1	Η σχέση του Young	13
2.2.2	Supremum φασματικής ακτίνας του \mathcal{L}_ω	14
2.2.3	Περιοχή συγκλίσεως της SOR	15
2.3	Βέλτιστη SOR μέθοδος	20
2.4	Jordan κανονική μορφή του πίνακα \mathcal{L}_{ω_b}	24
3	Ευκλείδεια norm του \mathcal{L}_ω	27
3.1	Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών και Ορθογώνιες Ομοιότητες	27
3.1.1	Ιδιάζουσες τιμές του πίνακα M και ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B	29
3.2	Ελαχιστοποίηση της $\ \mathcal{L}_\omega\ _2$	30
4	Επαναληπτική μέθοδος MSOR	41
4.1	Παρουσίαση της μεθόδου	41
4.2	Σύγκλιση της μεθόδου	43
4.2.1	Η σχέση του Young	44
4.2.2	Supremum φασματικής ακτίνας του $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$	44
4.2.3	Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου	45
4.3	Βέλτιστη MSOR μέθοδος	49
5	Ευκλείδεια norm του $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$	55
5.1	Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών και Ορθογώνιες Ομοιότητες	55

5.2	Ελαχιστοποίηση της $\ \mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\ _2$	58
A'	Συμβολισμοί	73
B'	Χρήσιμες έννοιες	75
B'.1	Θεωρία πινάκων	75
B'.2	Jordan κανονική μορφή ενός πίνακα	77
B'.3	Απαλείφουσα πολυωνύμων	78
B'.4	Κατασκευή του μεταθετικού πίνακα P	81
Γ'	Γραφικές Παραστάσεις	83
	Βιβλιογραφία	93

Κεφάλαιο 1

Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

1.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$Ax = b, \quad (1.1)$$

όπου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $\det(A) \neq 0$ και $x, b \in \mathbb{C}^n$, του οποίου τη λύση θέλουμε να προσεγγίσουμε με χρήση επαναληπτικών μεθόδων. Ορίζουμε λοιπόν την παρακάτω διάσπαση του πίνακα A :

$$A = M - N, \quad (1.2)$$

λαμβάνοντας όμως υπ' όψιν τους ακόλουθους δύο περιορισμούς:

- α) Ο (προ)ρυθμιστής πίνακας M πρέπει να είναι αντιστρέψιμος πίνακας.
- β) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων M πρέπει να επιλύεται με πολύ λιγότερες πράξεις, από ένα άλλο με πίνακα συντελεστών αγνώστων A .

Κατασκευάζουμε έτσι το επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

όπου $T = M^{-1}N \in \mathbb{C}^{n,n}$, $c = M^{-1}b \in \mathbb{C}^n$ και $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε. Ο πίνακας T στο συγκεκριμένο σχήμα ονομάζεται επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου που χρησιμοποιούμε.

Η μέθοδος αυτή, με σχήμα που δίνεται από τη σχέση (1.3), παράγει μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, η οποία υπό κατάλληλες συνθήκες μπορεί να συγκλίνει στη λύση του αρχικού συστήματος (1.1).

Σημείωση 1.1.1. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν η ακολουθία των παραγόμενων αυτών διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα, τότε αυτή θα συγκλίνει στη λύση $x = A^{-1}b$ του αρχικού συστήματος (1.1).

Πράγματι, έστω συγκλίνουσα ακολουθία $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, με $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = y$. Χρησιμοποιούμε τότε όρια για $k \rightarrow \infty$ στη σχέση (1.3), με αποτέλεσμα να έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y &= Ty + c \iff y = M^{-1}Ny + M^{-1}b \\ \iff My &= Ny + b \iff (M - N)y = b \\ \iff Ay &= b \iff y = A^{-1}b, \quad \text{αφού } \det(A) \neq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ολοκληρώνουμε στο σημείο αυτό την πρώτη Παράγραφο του παρόντος εισαγωγικού Κεφαλαίου με ένα θεμελιώδες Θεώρημα, το οποίο μας περιγράφει τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση μιας επαναληπτικής μεθόδου της μορφής (1.3). Χρειαζόμαστε ωστόσο, το ακόλουθο βοηθητικό Λήμμα, την απόδειξη του οποίου συναντάμε στο [3], σελ.69.

Λήμμα 1.1.1. Για τις διαδοχικές δυνάμεις του πίνακα $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0 \quad \text{αν-ν} \quad \rho(T) < 1, \tag{1.5}$$

όπου $\rho(T)$ είναι η φασματική ακτίνα των ιδιοτιμών του πίνακα T , δηλαδή το μεγαλύτερο από τα μέτρα των ιδιοτιμών του πίνακα αυτού.

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε το συγκεκριμένο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγόμενων διανυσμάτων από τον αλγόριθμο (1.3), στη λύση $x = A^{-1}b$ του αρχικού συστήματος (1.1), είναι η εξής:

$$\rho(T) < 1. \tag{1.6}$$

Απόδειξη. Έχοντας ως στόχο την προσέγγιση της λύσεως του συστήματος $Ax = b$ σε διαδοχικά βήματα, ορίζουμε ως $e^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ το διάνυσμα-σφάλμα των υπολογισμών μας στην k επανάληψη, όπου $k = 0, 1, 2, \dots$. Έχουμε δηλαδή ότι:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

Με χρήση των σχέσεων (1.3) και (1.7) προκύπτει ότι:

$$e^{(k+1)} = Te^{(k)}, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.8}$$

ενώ επαγωγικά οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

με $e^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε.

Για να επιτύχουμε τώρα τη ζητούμενη σύγκλιση πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το διάνυσμα-σφάλμα $e^{(k)}$ τείνει στο μηδενικό διάνυσμα, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων k τείνει στο άπειρο, δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0, \quad (1.10)$$

για οποιαδήποτε επιλογή του αρχικού σφάλματος $e^{(0)} \in \mathbb{C}^n$.

Μπορούμε ωστόσο να δούμε ότι αν στη θέση του $e^{(0)}$ στη σχέση (1.9), θέσουμε διαδοχικά τα διανύσματα-στήλες e^j , για $j = 1(1)n$, του μοναδιαίου πίνακα $I \in \mathbb{R}^{n,n}$, παίρνουμε ως $e^{(k)}$ τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα T^k . Έτσι, εξαιτίας της τελευταίας σχέσεως έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0, \quad (1.11)$$

δηλαδή ότι οι στήλες του πίνακα T^k οριακά τείνουν στο μηδενικό διάνυσμα. Οπότε, αξιοποιούμε το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα βάσει του Λήμματος 1.1.1, που παρουσιάσαμε προηγουμένως, αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο.

Σημείωση 1.1.2. Το Θεώρημα αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά στο [3], σελ.69-70.

✓.

1.2 Ταχύτητα συγκλίσεως μιας επαναληπτικής μεθόδου

Θεωρούμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

και, έχοντας ως στόχο την προσέγγιση της λύσεως του συστήματος $Ax = b$ σε διαδοχικά βήματα, ορίσαμε προηγουμένως το διάνυσμα-σφάλμα $e^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ των υπολογισμών μας στην k επανάληψη με $k = 0, 1, 2, \dots$, ενώ επαγωγικά καταλήξαμε στην σχέση (1.9). Χρησιμοποιώντας τώρα μια οποιαδήποτε διανυσματική *norm* $\|\cdot\|$ στη σχέση

αυτή βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& \|e^{(k)}\| = \|T^k e^{(0)}\| \\
& \implies \|e^{(k)}\| \leq \|T^k\| \|e^{(0)}\| \\
& \implies \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|T^k\|, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots \text{ και } e^{(0)} \neq 0 \\
& \implies \sup_{e^{(0)} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|T^k\|, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

όπου ως norm του πίνακα T^k χρησιμοποιήσαμε τη φυσική norm που προκύπτει από την παραπάνω διανυσματική norm $\|\cdot\|$ ως εξής:

$$\|T^k\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|T^k x\|}{\|x\|}, \quad \text{με } T^k \in \mathbb{C}^{n,n}. \tag{1.14}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως μέσω της ποσότητας $\|T^k\|$ ελέγχουμε κατά κάποιο τρόπο, το ποσοστό κατά το οποίο ελαττώθηκε η norm του τυχαίου αρχικού μας σφάλματος $e^{(0)}$ έπειτα από k επαναλήψεις του αλγορίθμου (1.12). Ωστόσο, επειδή η μείωση της norm του αρχικού σφάλματος ισοδυναμεί με προσέγγιση της λύσεως $x = A^{-1}b$ του συστήματος (1.1), είναι ιδιαίτερο ενδιαφέροντος η μελέτη της ταχύτητας με την οποία επιτυγχάνεται η προσέγγιση αυτή.

Παραθέτουμε επομένως τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.2.1. Θεωρούμε τον επαναληπτικό πίνακα $T_1 \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ορίζουμε ως μέση ταχύτητα συγκλίσεως του αντίστοιχου επαναληπτικού αλγορίθμου της μορφής (1.12) μετά από k επαναλήψεις, την έκφραση που δίδεται από τον τύπο:

$$\mathcal{R}_k(T_1^k) = -\ln(\|T_1^k\|^{\frac{1}{k}}) = -\frac{\ln \|T_1^k\|}{k}, \tag{1.15}$$

όταν $\|T_1^k\| < 1$, για κάποιο $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ και για μια φυσική norm $\|\cdot\|$.

Εάν έχουμε επίσης επαναληπτικό πίνακα $T_2 \in \mathbb{C}^{n,n}$, για τον οποίο ισχύει ότι $\|T_2^k\| < 1$ και ταυτοχρόνως έχουμε ότι $\mathcal{R}(T_1^k) > \mathcal{R}(T_2^k)$, λέμε πως πίνακας T_1 είναι επαναληπτικά ταχύτερος του T_2 για k επαναλήψεις.

✓.

Επεκτείνουμε τώρα τον τελευταίο ορισμό στην περίπτωση όπου το πλήθος των επαναλήψεων των διαδοχικών βημάτων του αλγορίθμου τείνει στο άπειρο, και έτσι έχουμε ότι:

Ορισμός 1.2.2. Η μέση ασυμπτωτική ταχύτητα συγκλίσεως του επαναληπτικού αλγορίθμου (1.12) δίδεται από τον τύπο:

$$\mathcal{R}_\infty(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k(T^k) = -\ln \rho(T), \quad (1.16)$$

όπου $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ο επαναληπτικός πίνακας του αλγορίθμου, με $\rho(T) < 1$. Ωστόσο, πρέπει να σημειώσουμε ότι η δεύτερη ισότητα του ορισμού αυτού είναι συνέπεια ενός Θεωρήματος του Varga, που παρουσιάζουμε στην συνέχεια στην ίδια αυτή Παράγραφο.

✓.

Είναι επομένως σαφές από τους παραπάνω ορισμούς, πως η ταχύτητα συγκλίσεως μιας επαναληπτικής μεθόδου για $k \rightarrow \infty$ καθορίζεται πλήρως από τη φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου, ενώ στην περίπτωση όπου το k είναι πεπερασμένο, είναι η συμπεριφορά της φυσικής *norm* του επαναληπτικού πίνακα εκείνη, που ρυθμίζει την ταχύτητα συγκλίσεως της συγκεκριμένης μεθόδου.

Άρα, στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητη η μελέτη της συμπεριφοράς της ποσότητας $\|T^k\|$ για μικρές θετικές ακεραίες τιμές του k , και το σπουδαίο εργαλείο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι το ακόλουθο Θεώρημα που δανειζόμαστε από τον Varga (βλέπε [11], σελ.68-73).

Θεώρημα 1.2.1. Έστω πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $\rho(T) > 0$. Ισχύει τότε ότι:

$$\frac{1}{\kappa(S)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\|T^k\|}{\binom{k}{p-1} [\rho(T)]^{k-p+1}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|T^k\|}{\binom{k}{p-1} [\rho(T)]^{k-p+1}} \leq \kappa(S), \quad (1.17)$$

όπου p είναι η τάξη του μεγαλύτερου *block* της Jordan κανονικής μορφής $J = S^{-1}TS$ του πίνακα T , όταν όμως το *block* αυτό συνδέεται με μια ιδιοτιμή λ του T , τέτοια ώστε $|\lambda| = \rho(T)$.

Ακόμη, $\kappa(S) = \|S\| \|S^{-1}\|$ είναι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα S , όταν $\|\cdot\|$ είναι μια φυσική *norm*.

Απόδειξη. (βλέπε [11], σελ.68-73)

Σημείωση 1.2.1. Συναντάμε επίσης το σημαντικό αυτό Θεώρημα και στο [13], στις σελίδες 85-88.

✓.

Μπορούμε έτσι από το Θεώρημα αυτό, με διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξή του, να διαπιστώσουμε ότι καθώς $k \rightarrow \infty$, η $\|T^k\|$ συγκλίνει στο 0, ομοίως με την ποσότητα $\binom{k}{p-1} [\rho(T)]^{k-p+1}$.

Παρατηρούμε λοιπόν πως όταν $p = 1$, η ποσότητα $\|T^k\|$ η οποία ελέγχει την ταχύτητα συγκλίσεως της μεθόδου, συμπεριφέρεται όπως η ποσότητα $[\rho(T)]^k$ ανεξάρτητα από το πλήθος των επαναλήψεων k .

Ωστόσο, είναι δυνατόν ο επαναληπτικός πίνακας T κάποιας μεθόδου στην Jordan κανονική μορφή του να περιέχει block υποπίνακα που σχετίζεται με ιδιοτιμή λ , τέτοια ώστε $|\lambda| = \rho(T)$, με τάξη $p \geq 2$. Στην περίπτωση αυτή και για λίγες σε πλήθος επαναλήψεις k , η φασματική ακτίνα του πίνακα T δεν αποτελεί πλέον αξιόπιστο μέτρο ελέγχου της ταχύτητας συγκλίσεως της μεθόδου. Το φαινόμενο αυτό συναντάται όπως θα δούμε αργότερα και σε μια ειδική περίπτωση της SOR μεθόδου, την οποία και μελετάμε αναλυτικά.

Τέλος, στο Σχήμα Γ'.1 του Παραρτήματος Γ' παρουσιάζουμε ως παράδειγμα, τις γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά της $\|T^k\|$ όταν $p = 1$ και $p = 2$, όπου είναι εμφανές το φαινόμενο που περιγράψαμε προηγουμένως.

✓.

Κεφάλαιο 2

Επαναληπτική μέθοδος SOR

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix}, \quad \text{με } n = p + q \text{ και } p \geq q, \quad (2.1)$$

όταν οι $D_1 \in \mathbb{C}^{p,p}$, $D_2 \in \mathbb{C}^{q,q}$ είναι διαγώνιοι πίνακες και $H \in \mathbb{C}^{p,q}$, $K \in \mathbb{C}^{q,p}$.

Θεωρούμε ταυτόχρονα τη συνήθη διάσπαση του πίνακα αυτού, δηλαδή έχουμε ότι:

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} D_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & D_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ -K & \mathcal{O} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{O} & -H \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Γνωρίζουμε τώρα πως με χρήση αυτής ακριβώς της διασπάσεως, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους επαναληπτικούς πίνακες των μεθόδων *Jacobi* και *SOR*. Πράγματι, ο πίνακας $B = D^{-1}(L + U)$ είναι ο επαναληπτικός πίνακας της *Jacobi* μεθόδου, με επαναληπτικό σχήμα που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

και $c = D^{-1}b$, ενώ η *SOR* (Successive Over-Relaxation) μέθοδος αντίστοιχα, με επαναληπτικό πίνακα της μορφής $\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$, έχει επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + c_\omega, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

και $c_\omega = \omega(D - \omega L)^{-1}b$, όπου $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι η λεγόμενη *SOR*-παράμετρος.

Παραθέτουμε στη συνέχεια ορισμένες σημαντικές έννοιες, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά στο υπόλοιπο τμήμα της εργασίας αυτής, με στόχο πάντοτε τη μελέτη ορισμένων εκ των ιδιοτήτων των επαναληπτικών μεθόδων, που μόλις αναφέραμε. Ξεκινάμε λοιπόν με τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 2.1.1. Ένας μη-διαγώνιος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $a_{ii} \neq 0$, για $i = 1(1)n$, καλείται δικυκλικός αν-ν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P , τέτοιος ώστε:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} D_1 & B \\ C & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.5)$$

όπου D_1, D_2 διαγώνιοι πίνακες όχι απαραίτητα ίδιων διαστάσεων.

Παράδειγμα. Τριδιαγώνιοι πίνακες με μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία, όπως επίσης και οι πίνακες της μορφής (2.5).

✓.

Ορισμός 2.1.2. Ένας δικυκλικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ καλείται συνεπώς διατεταγμένος αν-ν ισχύει ότι:

$$\sigma\left(D^{-1}\left(\alpha L + \frac{1}{\alpha}U\right)\right) \equiv \sigma\left(D^{-1}(L + U)\right) \equiv \sigma(B), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Σημειώνουμε δε, πως με $\sigma(B)$ συμβολίζουμε το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα B , δηλαδή στην ουσία το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του πίνακα αυτού.

Παράδειγμα. Πινάκες που ικανοποιούν το συγκεκριμένο ορισμό μπορούμε να δούμε πως είναι τόσο οι τριδιαγώνιοι πίνακες με μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία, όσο και οι πίνακες που έχουν τη μορφή της σχέσεως (2.5).

✓.

Ολοκληρώνουμε τώρα την εισαγωγική αυτή Παράγραφο, παρουσιάζοντας μια αρκετά χρήσιμη Πρόταση σχετικά με τις ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B , σύμφωνα πάντοτε με τη μορφή που εμφανίζει ο αρχικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Πρόταση 2.1.1. Υποθέτουμε ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας. Τότε οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ εμφανίζονται σε αντίθετα ζεύγη.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μη-μηδενική ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του Jacobi πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ισχύουν τότε τα παρακάτω:

$$\mu \in \sigma(B) \setminus \{0\} \iff \mu \in \sigma\left(D^{-1}(L + U)\right) \setminus \{0\}. \quad (2.7)$$

Ισοδύναμα τώρα, εξαιτίας του ότι ο A είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας, διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mu &\in \sigma\left(D^{-1}\left[\alpha L + \frac{1}{\alpha}U\right]\right) \setminus \{0\}, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \iff \mu &\in \sigma\left(D^{-1}\left[(-1)L + \frac{1}{(-1)}U\right]\right) \setminus \{0\} \\ \iff -\mu &\in \sigma\left(D^{-1}(L + U)\right) \setminus \{0\}, \quad \text{όπως ζητούσαμε.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Σημείωση 2.1.1. Η Πρόταση αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά στο [3], σελ.90.

✓.

2.2 Σύγκλιση της μεθόδου

Επόμενο βήμα στην εργασία αυτή είναι να προσδιορίσουμε το χωρίο εκείνο, όπου όταν το ω βρίσκεται εντός του, τότε η SOR θα συγκλίνει. Χαρακτηρίζουμε το χωρίο αυτό ως περιοχή συγκλίσεως της συγκεκριμένης μεθόδου και έτσι λαμβάνοντας υπ' όψιν ορισμένους περιορισμούς για τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το χωρίο αυτό.

Παρουσιάζουμε λοιπόν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στην προσπάθειά μας αυτή, που δεν είναι άλλο από την περίφημη σχέση του Young.

2.2.1 Η σχέση του Young

Θεώρημα 2.2.1. Υποθέτουμε ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας. Τότε, αν $\mu \in \sigma(B)$ και $\lambda \neq 0$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda, \quad (2.9)$$

έχουμε ότι $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$, και αντίστροφα.

Απόδειξη. Μελετάμε την ορίζουσα του πίνακα $\mathcal{L}_\omega - \lambda I$, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις ιδιότητες οριζουσών. Παρατηρούμε έτσι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) &= \det\left((D - \omega L)^{-1}\left[(1 - \omega)D + \omega U\right] - \lambda I\right) \\ &= \frac{1}{\det(D)}(-1)^n \det\left((\lambda + \omega - 1)D - \omega \lambda L - \omega U\right) \\ &= (-\omega \lambda^{\frac{1}{2}})^n \det\left(\frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{\frac{1}{2}}}I - \left[D^{-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}U\right)\right]\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Εξισώνοντας τώρα τις σχέσεις αυτές με το 0 έχουμε ότι:

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega) \setminus \{0\} \iff \mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{\frac{1}{2}}} \in \sigma\left(D^{-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}U\right)\right). \quad (2.11)$$

Ωστόσο, επιλέξαμε να εργαστούμε με το δικυκλικό και συνεπώς διατεταγμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ της σχέσεως (2.1). Επομένως, είναι σαφές σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.2, πως ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$\mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{\frac{1}{2}}} \in \sigma\left(D^{-1}(L + U)\right) \equiv \sigma(B). \quad (2.12)$$

Επισημαίνουμε τέλος πως η ζητούμενη σχέση (2.9) προκύπτει από τη σχέση:

$$\mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.13)$$

όταν υψώσουμε αυτή στο τετράγωνο. Λαμβάνοντας δηλαδή υπ' όψιν την Πρόταση 2.1.1, που μας εξασφαλίζει ότι $\mu \in \sigma(B) \setminus \{0\} \iff -\mu \in \sigma(B) \setminus \{0\}$, μπορούμε να ισχυριστούμε πως στην ουσία οι σχέσεις (2.9) και (2.13) είναι ισοδύναμες.

Σημείωση 2.2.1. Το συγκεκριμένο Θεώρημα παρουσιάζεται αναλυτικά στην παραπομπή [3], σελ.91.

✓.

2.2.2 Supremum φασματικής ακτίνας του \mathcal{L}_ω

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση του Young (2.9), που μόλις αποδείξαμε, παρουσιάζουμε μια σημαντική διευκρίνιση ως προς την περιοχή συγκλίσεως της SOR μεθόδου. Στόχος μας είναι το να θέσουμε τις κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε μέσω της εργασίας αυτής, να μελετάμε τη σύγκλιση μιας γενικότερης κατηγορίας SOR προβλημάτων, που συναντάμε στην πράξη.

Πράγματι, για $\mu \in \sigma(B)$ και $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$ ισχύει ότι:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \iff \lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (2.14)$$

$$\text{όπου} \begin{cases} b := b(\omega, \mu) = \omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1), \\ c := c(\omega) = (1 - \omega)^2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Παρατηρούμε δηλαδή πως για το τυχαίο $\mu \in \sigma(B)$ το τριώνυμο στη (2.14) παρουσιάζει τις ρίζες $\lambda_1^{(\mu)}, \lambda_2^{(\mu)} \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.1. Η SOR μέθοδος συγκλίνει ισχυρά αν-ν ισχύει ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_\omega) < 1, \quad (2.16)$$

$$\text{όπου } \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_\omega) := \max_{\mu \in S_B} \psi(\mu), \quad (2.17)$$

$$\text{όταν } \psi(\mu) := \max \left\{ |\lambda_1^{(\mu)}|, |\lambda_2^{(\mu)}| \right\}, \quad (2.18)$$

για το τυχαίο $\mu \in S_B$, με χρήση της σχέσεως του Young (2.9).

Ορίζουμε επίσης πως S_B είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B .

Σημείωση 2.2.2. Είναι σαφές σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, πως όταν η SOR συγκλίνει ισχυρά, θα συγκλίνει ταυτόχρονα και με τη συνήθη έννοια συγκλίσεως μιας επαναληπτικής μεθόδου, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Επίσης, αυτό που μας προσφέρει ο ορισμός αυτός είναι ότι στην ουσία μελετάμε πλέον ένα συνεχές πρόβλημα, το οποίο περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις όλα τα προβλήματα εκείνα, όπου το διακριτό σύνολο $\sigma(B)$ είναι υποσύνολο του S_B .

✓.

Υστερα επομένως από όλα τα παραπάνω, είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε την περιοχή συγκλίσεως της SOR επαναληπτικής μεθόδου. Ως μοναδική αρχική συνθήκη δεχόμαστε πως $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ωστόσο, στο υπόλοιπο της εργασίας αυτής και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρούμε πως $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, εκτός και αν σαφώς το σημειώνουμε διαφορετικά.

2.2.3 Περιοχή συγκλίσεως της SOR

Θεώρημα 2.2.2. (Kahan) Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση (είτε ισχυρή είτε με τη συνήθη έννοια) της SOR μεθόδου είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} |\omega - 1| < 1, \quad \text{όταν } \omega \in \mathbb{C} \\ \text{ή} \\ \omega \in (0, 2), \quad \text{όταν } \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πως η SOR συγκλίνει ισχυρά. Τότε, έχουμε ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_\omega) < 1 \implies \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1, \quad (2.20)$$

γνωρίζουμε δηλαδή ότι για όλες τις ιδιοτιμές λ_i , με $i = 1(1)n$, του πίνακα \mathcal{L}_ω ισχύει ότι $|\lambda_i| < 1$. Σύμφωνα τώρα με την Γραμμική Άλγεβρα έχουμε ότι:

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.21)$$

Μπορούμε επομένως να παρατηρήσουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \lambda_i &= \det \left((D - \omega L)^{-1} \left[(1 - \omega)D + \omega U \right] \right) \\ &= \det \left((D - \omega L)^{-1} \right) \det \left((1 - \omega)D + \omega U \right) \\ &= \frac{1}{\det(D)} (1 - \omega)^n \det(D) = (1 - \omega)^n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Χρησιμοποιώντας μέτρα στο πρώτο και στο τελευταίο τμήμα της σχέσεως αυτής, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n |\lambda_i| < 1 &\iff \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right| < 1 \\ &\iff |(1 - \omega)^n| < 1 \iff |\omega - 1| < 1, \quad \text{όπως ζητούσαμε.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Σημείωση 2.2.3. Συναντάμε το Θεώρημα αυτό στο [3], σελ.87.

✓.

Μπορούμε στο σημείο αυτό να διακρίνουμε και να μελετήσουμε αναλυτικά δύο διαφορετικές περιπτώσεις ως προς την περιοχή σύγκλισης της SOR, σύμφωνα πάντοτε με την επιλογή του αρχικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Πράγματι παρατηρούμε τα παρακάτω:

Περίπτωση α'

Υποθέτουμε ότι ο δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (2.24)$$

είναι ταυτόχρονα Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος ή γενικότερα υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου Jacobi πίνακα B είναι πραγματικές, με $S_B \subset (-1, 1)$. Έχουμε δηλαδή για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ότι:

$$0 \leq \mu^2 \leq \beta^2, \quad \mu \in 0 \leq \beta < 1. \quad (2.25)$$

Διατυπώνουμε την κεντρική Πρόταση της περιπτώσεως αυτής.

Πρόταση 2.2.1. Η SOR μέθοδος συγκλίνει ισχυρά αν-ν $\omega \in (0, 2)$.

Απόδειξη. Έστω ιδιοτιμές $\mu \in S_B$ και $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσεως του Young:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \iff \lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (2.26)$$

$$\text{όπου } \begin{cases} b := b(\omega, \mu) = \omega^2 \mu^2 - 2(\omega - 1), \\ c := c(\omega) = (\omega - 1)^2. \end{cases} \quad (2.27)$$

Υποθέτουμε πως η SOR συγκλίνει ισχυρά. Έχουμε τότε ισοδύναμα ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_\omega) < 1 \quad (2.28)$$

$$\iff |\lambda| < 1, \text{ για το τυχαίο } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega).$$

Σημείωση 2.2.4. Χρήσιμη κρίνεται στο σημείο αυτό η Θεωρία των πολυωνύμων Schur, μέσω της οποίας μπορούμε να αξιοποιήσουμε κατάλληλα την τελευταία αυτή σχέση. Παρουσιάζουμε λοιπόν στη συνέχεια μια σύντομη αναφορά στα πιο σημαντικά για την εργασία μας, σημεία της Θεωρίας αυτής, ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [6], Παράγραφος 6.8, σελίδες 491-496.

Πολυώνυμα Schur

Θεωρούμε το k -βαθμού πολυώνυμο p με:

$$p := p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (2.29)$$

όπου $a_i \in \mathbb{C}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $a_k a_0 \neq 0$.

Ορίζουμε επίσης το πολυώνυμο p_1 με:

$$p_1 := p_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [p^*(0)p(\lambda) - p(0)p^*(\lambda)], \quad (2.30)$$

όπου $p^*(\lambda)$ είναι το k -βαθμού πολυώνυμο με συντελεστές τους συζυγείς μιγαδικούς συντελεστές του πολυωνύμου $p(\lambda)$, σε αντίστροφη όμως σειρά. Δηλαδή:

$$p^*(\lambda) = \bar{a}_0 \lambda^k + \bar{a}_1 \lambda^{k-1} + \dots + \bar{a}_{k-1} \lambda + \bar{a}_k. \quad (2.31)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

Ορισμός 2.2.2. Το πολυώνυμο $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο Schur αν-ν όλες οι ρίζες του έχουν μέτρο < 1 .

Θεώρημα 2.2.3. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο Schur αν-ν το $p_1(\lambda)$ είναι πολυώνυμο Schur και παράλληλα ισχύει ότι:

$$|p^*(0)| > |p(0)| \iff |\bar{a}_k| > |a_0| \iff \left| \frac{a_0}{a_k} \right| < 1. \quad (2.32)$$

Απόδειξη. (βλέπε [6], σελ.493-494)

✓.

Επομένως, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε την ειδική περίπτωση που μας ενδιαφέρει, την περίπτωση δηλαδή όπου το πολυώνυμο $p(\lambda)$ είναι ουσιαστικά ένα τριώνυμο. Πράγματι, όταν:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + c, \quad \text{με } b, c \in \mathbb{C}, \quad (2.33)$$

παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} p^*(\lambda) &= \bar{c}\lambda^2 - \bar{b}\lambda + 1, \\ p_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} [p^*(0)p(\lambda) - p(0)p^*(\lambda)] = [1 - |c|^2]\lambda + c\bar{b} - b. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Υποθέτουμε λοιπόν πως όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $p(\lambda)$ έχουν μέτρο < 1 . Τότε, το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο Schur και έτσι με χρήση του Θεωρήματος 2.2.3 εξασφαλίζουμε την ισχύ των ακόλουθων σχέσεων:

$$\left| \frac{b - c\bar{b}}{1 - |c|^2} \right| < 1, \quad \text{όπου } 1 - |c| > 0. \quad (2.35)$$

Ισοδύναμα τώρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |b - c\bar{b}| &< 1 - |c|^2 \\ \iff |b - c\bar{b}| + |c|^2 &< 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Τέλος, εάν μελετήσουμε την ακόμη πιο ειδική περίπτωση όπου $b, c \in \mathbb{R}$, από τη (2.35) προκύπτουν οι σχέσεις που θα χρειαστούμε στην εργασία αυτή. Προκύπτει δηλαδή ότι:

$$|b| < 1 + c \quad \text{και} \quad |c| < 1. \quad (2.37)$$

✓.

Επιστρέφουμε ύστερα από τη μικρή αυτή παρένθεση στη φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα της SOR μεθόδου, οπότε και διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} |\lambda| < 1, \text{ για το τυχαίο } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega) \\ \iff |b| < 1 + c \text{ και } |c| < 1. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Αναλυτικά οι τελευταίες ανισότητες δίνουν ότι:

$$|b| < 1 + c \iff \begin{cases} \omega^2(\mu^2 + 1) - 4\omega + 4 > 0, \\ \omega^2(\mu^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\text{και } |c| < 1 \iff 0 < \omega < 2. \quad (2.40)$$

Από τις σχέσεις αυτές, λαμβάνοντας υπ' όψιν την σχέση (2.25), προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\omega \in (0, 2). \quad (2.41)$$

Σημειώνουμε δε, πως χρησιμοποιήσαμε ισοδυναμίες στην απόδειξη αυτή, με αποτέλεσμα να εξασφαλίζεται έτσι η ισχύς και της αντίστροφης κατευθύνσεως.

✓.

Περίπτωση β'

Υποθέτουμε τώρα ότι ο Jacobi πίνακας B που αντιστοιχεί στον ίδιο αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, έχει μονάχα φανταστικές ιδιοτιμές. Έχουμε δηλαδή για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ότι:

$$-\alpha^2 \leq \mu^2 \leq 0, \text{ με } 0 \leq \alpha < +\infty. \quad (2.42)$$

Η παρακάτω Πρόταση περιέχει τις σχετικές πληροφορίες ως προς την περιοχή συγκλίσεως της SOR, στη δεύτερη αυτή περίπτωση.

Πρόταση 2.2.2. Η SOR συγκλίνει ισχυρά αν-ν $\omega \in (0, \frac{2}{1+\alpha})$.

Απόδειξη. Ομοίως με πριν, χρησιμοποιούμε τη σχέση του Young (2.9), όπως επίσης και τη Θεωρία των πολωνύμων Schur που αναπτύξαμε προηγουμένως. Βλέπουμε λοιπόν ότι:

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (2.43)$$

$$\text{με } \begin{cases} b := b(\omega, \mu) = \omega^2\mu^2 - 2(\omega - 1), \\ c := c(\omega) = (\omega - 1)^2. \end{cases} \quad (2.44)$$

Έστω ότι η SOR συγκλίνει ισχυρά, δηλαδή ισοδύναμα:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_\omega) < 1, \text{ για το τυχαίο } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega) \quad (2.45)$$

$$\iff |b| < 1 + c \text{ και } |c| < 1. \quad (2.46)$$

Αναλυτικά βλέπουμε ότι:

$$|b| < 1 + c \iff \begin{cases} \omega^2(\mu^2 + 1) - 4\omega + 4 > 0, \\ \omega^2(\mu^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\text{και } |c| < 1 \iff 0 < \omega < 2. \quad (2.48)$$

Οπότε, μελετώντας τις ανισότητες αυτές και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (2.42) οδηγούμαστε ισοδύναμα στο συμπέρασμα πως:

$$\omega \in \left(0, \frac{2}{1 + \alpha}\right). \quad (2.49)$$

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, η ισχύς της αντίστροφης κατευθύνσεως εξασφαλίζεται από τις ισοδυναμίες που μόλις χρησιμοποιήσαμε.

✓.

2.3 Βέλτιστη SOR μέθοδος

Για δικυκλικούς και συνεπώς διατεταγμένους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ μπορούμε σε ορισμένες περιπτώσεις να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη SOR μέθοδο. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε την τιμή της παραμέτρου ω , για την οποία η αντίστοιχη SOR συγκλίνει ασυμπτωτικά ταχύτερα. Προφανώς, η δυνατότητα αυτή είναι σημαντική, αφού μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ταχύτητα με την οποία, η επαναληπτική μέθοδος που επιλέξαμε, συγκλίνει στη λύση του προβλήματός μας.

Παρουσιάζουμε λοιπόν στο σημείο αυτό μια γεωμετρική προσέγγιση του συγκεκριμένου ζητήματος, την οποία με περισσότερες λεπτομέρειες, παραθέτει ο Young στο βιβλίο του *Iterative Solution of Large Linear Systems* [13], στις σελίδες 191-200.

Θεωρούμε τις μιγαδικές ιδιοτιμές $\mu \in S_B$ και $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$ των επαναληπτικών πινάκων B και \mathcal{L}_ω αντίστοιχα. Γνωρίζουμε πως οι ιδιοτιμές αυτές συνδέονται μεταξύ τους μέσω

της γνωστής πλέον σχέσεως του Young:

$$\begin{aligned} (\lambda + \omega - 1)^2 &= \omega^2 \mu^2 \lambda \\ \iff \lambda + \omega - 1 &= \omega \mu \lambda^{\frac{1}{2}} \\ \iff \mu &= \frac{1}{\omega} \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega-1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι:

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \rho e^{i\theta} \quad \text{και} \quad \mu = x + iy, \quad (2.51)$$

όπου ρ, θ, x και y πραγματικοί με:

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0, \\ x &= \frac{1}{\omega} \left(\rho + \frac{\omega-1}{\rho} \right) \cos \theta, \\ y &= \frac{1}{\omega} \left(\rho - \frac{\omega-1}{\rho} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Μπορούμε να διακρίνουμε στο σημείο αυτό δύο περιπτώσεις: Πράγματι έστω ότι $\rho^2 \neq |\omega - 1|$. Τότε, το σημείο (x, y) του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν τις τελευταίες σχέσεις, βρίσκεται πάνω στην έλλειψη E_ρ , που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$E_\rho : \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (2.53)$$

όταν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} b &:= b(\omega, \rho) = \left| \frac{1}{\omega} \left(\rho + \frac{\omega-1}{\rho} \right) \right|, \\ a &:= a(\omega, \rho) = \left| \frac{1}{\omega} \left(\rho - \frac{\omega-1}{\rho} \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Εάν πάλι ισχύει ότι $\rho^2 = |\omega - 1|$, παρατηρούμε ότι το ίδιο σημείο (x, y) βρίσκεται τώρα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα:

$$|x| \leq \frac{2\sqrt{\omega-1}}{\omega} \quad \text{και} \quad y = 0, \quad \text{όταν} \quad \omega \geq 1 \quad (2.55)$$

και αντίστοιχα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα:

$$x = 0 \quad \text{και} \quad |y| \leq \frac{2\sqrt{\omega-1}}{\omega}, \quad \text{όταν} \quad \omega < 1. \quad (2.56)$$

Καταχρηστικά, μπορούμε να αποκαλούμε τα τμήματα αυτά ελλείψεις, αν και είναι σαφές πως δεν ικανοποιούν καμία εξίσωση της μορφής (2.53).

Συμπερασματικά, αυτό που δείξαμε μέχρι στιγμής, είναι ότι η έλλειψη E_ρ ουσιαστικά αποτελεί εικόνα των κύκλων C_ρ και $C_{\frac{|\omega-1|}{\rho}}$, όπου:

$$\begin{aligned} C_\rho : \quad |\lambda^{\frac{1}{2}}| &= \rho, \\ C_{\frac{|\omega-1|}{\rho}} : \quad |\lambda^{\frac{1}{2}}| &= \frac{|\omega-1|}{\rho}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Οι κύκλοι αυτοί ταυτίζονται όταν $\rho^2 = |\omega - 1|$, όπου στην περίπτωση αυτή η έλλειψη E_ρ που τους αντιστοιχεί είναι το ευθύγραμμο τμήμα που είδαμε προηγουμένως.

Επιπλέον, αν $\rho^2 \geq |\omega - 1|$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η έλλειψη E_ρ αυξάνει σε μέγεθος καθώς αυξάνεται το ρ και ομοίως όταν $\rho^2 \leq |\omega - 1|$ η έλλειψη E_ρ εξασθενεί καθώς το ρ μειώνεται. Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε πως υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στο εξωτερικό του E_ρ και στο εξωτερικό του C_ρ στην πρώτη περίπτωση και μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στο εξωτερικό του E_ρ και στο εσωτερικό του C_ρ , στη δεύτερη περίπτωση αντίστοιχα.

Για περισσότερες λεπτομέρειες αλλά και κάποια σχήματα που θα βοηθούσαν στην καλύτερη κατανόηση της προσεγγίσεως αυτής, προτείνουμε φυσικά στον αναγνώστη την Παράγραφο 6.4 του βιβλίου του Young [13].

Είμαστε τώρα σε θέση έπειτα από τον αναγκαίο αυτό πρόλογο, να προχωρήσουμε στη μελέτη της ταχύτητας συγκλίσεως της SOR μεθόδου, ξεκινώντας από το επόμενο Θεώρημα, στο οποίο γίνεται εμφανής η χρησιμότητα της μέχρι τώρα γεωμετρικής προσεγγίσεως.

Θεώρημα 2.3.1. Έστω ότι $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας της μορφής (2.1). Τότε η SOR μέθοδος είναι ισχυρά συγκλίνουσα, όταν για κάποιο θετικό αριθμό D και τυχαία ιδιοτιμή $\mu = x + iy$ του Jacobi πίνακα B , το σημείο (x, y) βρίσκεται στο εσωτερικό της ελλείψεως $E(1, D)$, όπου:

$$E(1, D) : \quad x^2 + \frac{y^2}{D^2} = 1 \tag{2.58}$$

και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\omega \in (0, \frac{2}{1+D})$.

Αντίστροφα τώρα, εάν η SOR συγκλίνει, τότε όλες οι ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B βρίσκονται στο εσωτερικό της ελλείψεως $E(1, D)$ για κάποιο $D > 0$, ενώ τέλος στην περίπτωση όπου το μ είναι σημείο της ελλείψεως αυτής και η SOR συγκλίνει, τότε ισχύει η σχέση (2.58).

Απόδειξη. (βλέπε [13], σελ.193-194)

Πόρισμα 2.3.1. Σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του τελευταίου Θεωρήματος, η SOR συγκλίνει για κάποιο ω αν-ν για κάθε ιδιοτιμή $\mu \in S_B$ ισχύει ότι:

$$|\operatorname{Re}\mu| < 1. \quad (2.59)$$

Επίσης, αν η τελευταία σχέση ισχύει, μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιο $\tilde{\omega}$ εντός της περιοχής συγκλίσεως της μεθόδου, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι:

$$\rho(\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}) < 1, \text{ για κάθε } \omega \in (0, \tilde{\omega}). \quad (2.60)$$

✓.

Για να προσδιορίσουμε τώρα το $\tilde{\omega}$ αυτό, επιλέγουμε D κατάλληλα μεγάλο, ώστε όλες οι ιδιοτιμές του B να βρίσκονται εντός της ελλείψεως $E(1, D)$. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε:

$$D = \frac{\alpha}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.61)$$

όπου $\alpha := \max_{\mu \in S_B}(\operatorname{Im}\mu)$ και $\beta := \max_{\mu \in S_B}(\operatorname{Re}\mu)$.

Μπορούμε ύστερα από τα παραπάνω, να προσδιορίσουμε την τιμή της παραμέτρου ω , για την οποία ελαχιστοποιείται η φασματική ακτίνα του πίνακα \mathcal{L}_{ω} , σύμφωνα πάντοτε με κατάλληλους περιορισμούς για τις ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B .

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας B έχει πραγματικές και φανταστικές ιδιοτιμές. Αναζητάμε λοιπόν τη μικρότερη τιμή του ϱ , για την οποία υπάρχει ω με $\varrho^2 \geq |\omega - 1|$ και ταυτόχρονα, τέτοια ώστε οι ιδιοτιμές αυτές να βρίσκονται στο κλειστό εσωτερικό της ελλείψεως (2.53). Επειδή ακριβώς έχουμε ότι $\varrho^2 \geq |\omega - 1|$, με χρήση της (2.54) προκύπτει ότι:

$$b = \frac{1}{\omega} \left(\varrho + \frac{\omega - 1}{\varrho} \right), \quad a = \frac{1}{\omega} \left(\varrho - \frac{\omega - 1}{\varrho} \right). \quad (2.62)$$

Επιλύοντας τις τελευταίες σχέσεις ως προς ϱ και ω έχουμε ότι:

$$\omega = \frac{2}{1 + (1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.63)$$

$$\varrho = \frac{\omega(a + b)}{2} = \frac{a + b}{1 + (1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.64)$$

Παρατηρούμε ότι με τη συγκεκριμένη επιλογή των ω και ϱ έχουμε ότι $\varrho^2 \geq |\omega - 1|$, αφού ισχύει:

$$\varrho - |\omega - 1|^{\frac{1}{2}} = \frac{a + b - |a^2 - b^2|^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \geq 0. \quad (2.65)$$

Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = \frac{(1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + 1 - b^2 - ab}{(1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + (1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2} > 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial b} = \frac{(1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + 1 + a^2 + ab}{(1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + (1 + a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2} > 0, \quad (2.67)$$

εξαιτίας του ότι:

$$1 + a^2 - b^2 - (1 - b^2 - ab)^2 = (a + b)^2(1 - b^2) > 0. \quad (2.68)$$

Μπορούμε επομένως να ισχυριστούμε ότι το ρ λαμβάνει τη μικρότερη τιμή του, όταν αντίστοιχα οι παράμετροι a και b ελαχιστοποιούνται. Δηλαδή αναφερόμαστε στην περίπτωση όπου $a := \alpha$ και $b := \beta$. Τότε, βλέπουμε ότι:

$$\omega_b = \frac{2}{1 + (1 + \alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.69)$$

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \left[\frac{\alpha + \beta}{1 + (1 + \alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2. \quad (2.70)$$

Σημείωση 2.3.1. Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι η μελέτη της ειδικότερης περιπτώσεως, όπου ο *Jacobi* πίνακας B παρουσιάζει μονάχα πραγματικές ιδιοτιμές και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\sigma(B) \subset (-1, 1)$, παρουσιάζεται αναλυτικά στις Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας των Δουγαλή, Νούτσου και Χατζηδήμου, στις σελίδες 92-94. Πρόκειται για προσέγγιση περισσότερο αλγεβρική, που ως σημείο εκκίνησης χρησιμοποιεί τη σχέση του *Young* του παρόντος Κεφαλαίου.

✓.

2.4 Jordan κανονική μορφή του πίνακα \mathcal{L}_{ω_b}

Το 1954 ο *Young* στην εργασία του *Iterative Methods for Solving Partial Differential Equations of Elliptic Type* (βλέπε [12]) απέδειξε ότι όταν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος, αντιστρέψιμος με θετικά διαγώνια στοιχεία και ταυτόχρονα οι ιδιοτιμές του B είναι πραγματικές με μέτρο < 1 , τότε η *Jordan* κανονική μορφή του \mathcal{L}_{ω_b} δεν είναι διαγώνια.

Στην περίπτωση τώρα που ο πίνακας A έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.71)$$

πάλι από τον Young, έχουμε την απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού, στο βιβλίο του [13], στις σελίδες 234-239. Η διαδικασία που χρησιμοποιείται για την απόδειξη αυτή, πολύ περιγραφικά έχει ως εξής:

Θέτουμε για διευκόλυνση των υπολογισμών μας ότι:

$$F := -D_1^{-1}H \quad \text{και} \quad G := -D_2^{-1}K. \quad (2.72)$$

Τότε, ο Jacobi πίνακας B έχει τη μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & F \\ G & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.73)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$B^2 = \begin{bmatrix} FG & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & GF \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (2.74)$$

και έτσι για το τυχαίο $\mu \in \sigma(B)$ έχουμε ότι:

$$\mu^2 \in \sigma(B^2) \iff \mu^2 \in \sigma(FG) \cup \sigma(GF). \quad (2.75)$$

Μπορούμε δηλαδή να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B , μέσω των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων των πινάκων FG και GF . Στόχος είναι να κατασκευάσουμε έτσι μια βάση από ιδιοδιανύσματα του Jacobi πίνακα B .

Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές των B και \mathcal{L}_{ω_b} συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσεως του Young:

$$(\lambda + \omega_b - 1)^2 = \omega_b^2 \mu^2 \lambda. \quad (2.76)$$

Εντοπίζουμε με τον τρόπο αυτό τα ιδιοδιανύσματα αλλά και τα κύρια (*principal*) διανύσματα του \mathcal{L}_{ω_b} , κατασκευάζοντας τους πίνακες S και J της Jordan κανονικής μορφής του \mathcal{L}_{ω_b} :

$$S^{-1}\mathcal{L}_{\omega_b}S = J. \quad (2.77)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ , το μέτρο της οποίας αντιστοιχεί στην $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$, είναι ίση με 2. Επομένως, όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 1.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου, η τάξη του μεγαλύτερου block της Jordan κανονικής μορφής του \mathcal{L}_{ω_b} , όταν το block αυτό συνδέεται με μια ιδιοτιμή λ του \mathcal{L}_{ω_b} με $|\lambda| = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$, είναι ίση με $p = 2$.

Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα $\|T^k\|$ η οποία ελέγχει την ταχύτητα συγκλίσεως της μεθόδου έχει συμπεριφορά για κάποιο μικρό αριθμό επαναλήψεων k , διαφορετική από αυτήν της φασματικής ακτίνας του \mathcal{L}_{ω_b} (βλέπε Θεώρημα 1.2.1). Άρα, η φασματική ακτίνα του \mathcal{L}_{ω_b} δεν αποτελεί πλέον αξιόπιστο μέτρο ελέγχου της ταχύτητας συγκλίσεως της μεθόδου, για λίγες πάντοτε σε πλήθος επαναλήψεις. Για $k \rightarrow \infty$ δεν τίθεται θέμα φυσικά, αφού η $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$ μας εξασφαλίζει το ζητούμενο.

Σύμφωνα επομένως με τα παραπάνω, είναι σαφές πλέον το γιατί επιλέγουμε στην παρούσα εργασία να ασχοληθούμε με τη μελέτη της $\|T^k\|$ και φυσικά την ελαχιστοποίηση αυτής. Να σημειώσουμε τέλος, ότι επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε την Ευκλείδεια norm $\|\cdot\|_2$, μελετώντας σε πρώτη φάση την απλούστερη περίπτωση όπου $k = 1$.

✓.

Κεφάλαιο 3

Ευκλείδεια norm του \mathcal{L}_ω

3.1 Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών και Ορθογώνιες Ομοιότητες

Ως σημείο εκκίνησης του παρόντος Κεφαλαίου ορίζουμε να είναι το Θεώρημα Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών (*Singular Value Decomposition*) ενός πίνακα, του οποίου η σημασία είναι θεμελιώδης για τους επόμενους συλλογισμούς.

Θεώρημα 3.1.1. Θεωρούμε πίνακα $M \in \mathbb{C}^{p,q}$ και έστω $q = \min\{p, q\}$. Τότε υπάρχει πίνακας $\Sigma = [\sigma_{ij}] \in \mathbb{R}^{p,q}$ με $\sigma_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{qq} \geq 0$, όπως επίσης υπάρχουν και δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες $U \in \mathbb{C}^{p,p}$ και $V \in \mathbb{C}^{q,q}$, τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι $M = U\Sigma V^H$. Ωστόσο, αν $M \in \mathbb{R}^{p,q}$ μπορούμε να επιλέξουμε τους U και V να είναι ορθογώνιοι πίνακες.

Απόδειξη. (βλέπε [7], σελ.144-145)

✓.

Μπορούμε αμέσως τώρα να διαπιστώσουμε τη χρησιμότητα του Θεωρήματος αυτού, στη μελέτη ορισμένων εκ των ιδιοτήτων ενός πίνακα της επιλογής μας.

Πράγματι, θεωρούμε το δικυκλικό και συνεπώς διατεταγμένο πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ -N & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad \text{με } n = p + q \text{ και } p \geq q, \quad (3.1)$$

όπου σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα, η Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (*S.V.D.*) του πίνακα $M \in \mathbb{C}^{p,q}$ έχει ως εξής:

$$M = U\Sigma V^H, \quad (3.2)$$

όταν γνωρίζουμε ότι οι U, V είναι ορθομοναδιαίοι πίνακες, δηλαδή έχουμε ότι:

$$UU^H = I_p \quad \text{και} \quad VV^H = I_q, \quad (3.3)$$

$$\text{ενώ} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{qq} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p,q} \quad (3.4)$$

είναι ο πίνακας που περιέχει τις διατεταγμένες κατά φθίνουσα σειρά ιδιάζουσες τιμές σ_{ii} , για $i = 1, 2, \dots, q$, του πίνακα M . Σημειώνουμε δε, πως με στόχο την απλοποίηση των παραστάσεων που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, δεχόμαστε ότι $\sigma_i := \sigma_{ii}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, όπως επίσης για να αποφύγουμε τυχόν τετριμμένες περιπτώσεις δεχόμαστε πως $\sigma_i > 0$ για κάθε $i \geq 1$.

Ακόμη, χρησιμοποιούμε πίνακα N της μορφής:

$$\begin{aligned} N &= EM^H = (V\tilde{E}V^H)(V\Sigma^H U^H) \\ &= V\tilde{E}\Sigma^H U^H \in \mathbb{C}^{p,q}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{με} \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q,q} \quad \text{και} \quad \begin{cases} e_i = +1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q\} \\ \text{ή} \\ e_i = -1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q\}, \end{cases} \quad (3.6)$$

έχοντας ως απώτερο στόχο, την αναλυτική μελέτη των επιμέρους περιπτώσεων, που μας προσφέρει η επιλογή αυτή.

Σημείωση 3.1.1. Στο υπόλοιπο τμήμα της εργασίας αυτής, σημείο εκκίνησης για όλους τους συλλογισμούς που ακολουθούν, αποτελεί η ιδέα της μελέτης των μεθόδων Υπερχαλάρωσης, χρησιμοποιώντας τις ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα σε συνδιασμό με τη σχέση του Young, που είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Θα πρέπει λοιπόν να σημειώσουμε, ότι πρόκειται για ιδέα των Golub και De Pillis, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο [4].

✓.

3.1.1 Ιδιάζουσες τιμές του πίνακα M και ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B

Ο επαναληπτικός Jacobi πίνακας B , που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη επιλογή του αρχικού πίνακα A της σχέσεως (3.1), είναι ο ακόλουθος:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ N & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (3.7)$$

Θέλουμε στο σημείο αυτό να προσδιορίσουμε τη σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B με τις ιδιάζουσες τιμές σ_i , για $i = 1, 2, \dots, q$, του πίνακα M .

Θεωρούμε τυχαία ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του πίνακα B . Παρατηρούμε λοιπόν ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\mu \in \sigma(B) \iff \mu^2 \in \sigma(B^2), \quad (3.8)$$

$$\text{όπου } B^2 = BB = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ N & \mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ N & \mathcal{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MN & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & NM \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (3.9)$$

Έχουμε δηλαδή ισοδύναμα πως:

$$\mu^2 \in \sigma(MN) \cup \sigma(NM), \quad \text{όταν:} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} MN &= MEM^H = (USV^H)(V\tilde{E}V^H)(V\Sigma^H U^H) \\ &= U\Sigma\tilde{E}\Sigma^H U^H, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} NM &= EM^H M = (V\tilde{E}V^H)(V\Sigma^H U^H)(USV^H) \\ &= V\tilde{E}\Sigma^H \Sigma V^H. \end{aligned}$$

Σημείωση 3.1.2. Είναι προφανές πως οι πίνακες MN και $\Sigma\tilde{E}\Sigma^H$ είναι όμοιοι μεταξύ τους, όπως αντίστοιχα συμβαίνει με τους πίνακες NM και $\tilde{E}\Sigma^H\Sigma$. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε πως οι MN και NM παρουσιάζουν τις ίδιες μη-μηδενικές ιδιοτιμές, κάτι το οποίο γίνεται σαφές από την αναλυτική μορφή των παρακάτω δύο πινάκων:

$$\Sigma\tilde{E}\Sigma^H = \begin{bmatrix} e_1\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2\sigma_2^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_q\sigma_q^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p,p} \quad (3.12)$$

$$\text{και } \tilde{E}\Sigma^H\Sigma = \begin{bmatrix} e_1\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2\sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_q\sigma_q^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q,q}. \quad (3.13)$$

Επομένως, οδηγούμαστε στο παρακάτω σημαντικό συμπέρασμα:

$$\mu^2 \in \sigma(B^2) \iff \mu^2 \in \sigma(MN) \iff \mu^2 \in \sigma(\Sigma\tilde{E}\Sigma^H) \quad (3.14)$$

$$\iff \begin{cases} \mu^2 = e_i\sigma_i^2, & \text{για κάποιο } i \in \{1, 2, \dots, q\} \\ \text{ή} \\ \mu^2 = 0 \iff \mu = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

✓.

3.2 Ελαχιστοποίηση της $\|\mathcal{L}_\omega\|_2$

Ο επαναληπτικός πίνακας \mathcal{L}_ω της SOR μεθόδου, για τον πίνακα A της σχέσεως (3.1) που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε στην προηγούμενη παράγραφο, έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega M \\ \omega(1-\omega)N & \omega^2 NM + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (3.16)$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega U\Sigma V^H \\ \omega(1-\omega)V\tilde{E}\Sigma^H U^H & \omega^2 V\tilde{E}\Sigma^H\Sigma V^H + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$= \begin{bmatrix} U & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega\Sigma \\ \omega(1-\omega)\tilde{E}\Sigma^H & \omega^2\tilde{E}\Sigma^H\Sigma + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^H & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V^H \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Θέτουμε τώρα ότι:

$$Q := \begin{bmatrix} U & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (3.19)$$

$$\text{και } \Gamma_\omega := \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega\Sigma \\ \omega(1-\omega)\tilde{E}\Sigma^H & \omega^2\tilde{E}\Sigma^H\Sigma + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad (3.20)$$

και έτσι, μέχρι στιγμής δείξαμε ότι ο πίνακας \mathcal{L}_ω έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_\omega = Q\Gamma_\omega Q^H. \quad (3.21)$$

Χρησιμοποιούμε στο σημείο αυτό κατάλληλο μεταθετικό πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n,n}$, η αναλυτική παρουσίαση του οποίου γίνεται στο Παράρτημα Β', ώστε να ισχύει ότι:

$$\Delta(\omega) = P\Gamma_\omega P^T = \begin{bmatrix} \Delta_1(\omega) & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \Delta_2(\omega) & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \Delta_q(\omega) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & (1-\omega)I_{p-q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad (3.22)$$

όταν για το τυχαίο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ έχουμε:

$$\Delta_i(\omega) = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega\sigma_i \\ \omega(1-\omega)e_i\sigma_i & \omega^2 e_i\sigma_i^2 + 1-\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}. \quad (3.23)$$

Επομένως, διαπιστώνουμε ότι:

$$\mathcal{L}_\omega = QP^T \Delta(\omega) PQ^H \quad (3.24)$$

$$\text{και } \mathcal{L}_\omega^H \mathcal{L}_\omega = QP^T \Delta^H(\omega) \Delta(\omega) PQ^H, \quad (3.25)$$

όταν γνωρίζουμε πως:

$$(QP^T)^{-1} = PQ^H \quad \text{και} \quad (3.26)$$

$$\Delta^H(\omega) \Delta(\omega) = \begin{bmatrix} \Delta_1^H(\omega) \Delta_1(\omega) & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \Delta_2^H(\omega) \Delta_2(\omega) & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \Delta_q^H(\omega) \Delta_q(\omega) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & (1-\omega)^2 I_{p-q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}. \quad (3.27)$$

Τώρα λοιπόν, είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε την αιτία εκτέλεσης των παραπάνω υπολογισμών. Πράγματι, το ζητούμενο στην παράγραφο αυτή δεν είναι άλλο από την ποσότητα:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_\omega\|_2^2 &= \rho(\mathcal{L}_\omega^H \mathcal{L}_\omega) = \rho(\Delta^H(\omega)\Delta(\omega)) \\
&= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq q} \rho(\Delta_i^H(\omega)\Delta_i(\omega)), (1-\omega)^2 \right\} \\
&= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq q} \|\Delta_i(\omega)\|_2^2, (1-\omega)^2 \right\},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

όταν για το τυχαίο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ γνωρίζουμε πως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\Delta_i^H(\omega)\Delta_i(\omega) &= \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega(1-\omega)e_i\sigma_i \\ \omega\sigma_i & \omega^2e_i\sigma_i^2 + 1-\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega\sigma_i \\ \omega(1-\omega)e_i\sigma_i & \omega^2e_i\sigma_i^2 + 1-\omega \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+\omega^2-2\omega+\omega^2e_i^2\sigma_i^2+\omega^4e_i^2\sigma_i^2+ & \omega\sigma_i-\omega^2\sigma_i+\omega^3e_i^2\sigma_i^3+\omega e_i\sigma_i+ \\ -2\omega^3e_i^2\sigma_i^2 & -\omega^4e_i^2\sigma_i^3-2\omega^2e_i\sigma_i+\omega^3e_i\sigma_i \\ \omega\sigma_i-\omega^2\sigma_i+\omega^3e_i^2\sigma_i^3-\omega^4e_i^2\sigma_i^3+ & \omega^2\sigma_i^2+\omega^4e_i^2\sigma_i^4+1+\omega^2-2\omega+ \\ +\omega e_i\sigma_i-2\omega^2e_i\sigma_i+\omega^3e_i\sigma_i & +2\omega^2e_i\sigma_i^2-2\omega^3e_i\sigma_i^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Σημείωση 3.2.1. Η norm $\|\cdot\|_2$ που μόλις χρησιμοποιήσαμε είναι γνωστή ως Ευκλείδεια ή Φασματική norm ενός πίνακα.

Θεωρούμε τώρα μια τυχαία ιδιοτιμή $\vartheta \in \mathbb{C}$ του πίνακα $\Delta_i^H(\omega)\Delta_i(\omega)$ και έτσι βλέπουμε ότι:

$$\vartheta \in \sigma(\Delta_i^H(\omega)\Delta_i(\omega)) \tag{3.30}$$

$$\iff \det(\Delta_i^H(\omega)\Delta_i(\omega) - \vartheta I) = 0 \tag{3.31}$$

$$\iff \vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \tag{3.32}$$

$$\text{όπου} \begin{cases} T := T(\omega, e_i, \sigma_i^2) = (1-\omega)^2(1+\omega^2e_i^2\sigma_i^2) + \omega^2\sigma_i^2 + (1-\omega+\omega^2e_i\sigma_i^2)^2, \\ c := c(\omega) = (1-\omega)^4. \end{cases} \tag{3.33}$$

Βρισκόμαστε επομένως στο σημείο, όπου μπορούμε πλέον να μελετήσουμε δύο ξεχωριστές περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει η δίτιμη μεταβλητή e_i για όλα ταυτοχρόνως τα $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Περίπτωση α'

Εστω ότι $e_i = +1$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Έχουμε τότε ότι $\tilde{E} = I_q$ και $N = M^H$, με αποτέλεσμα ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ -M^H & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (3.34)$$

να είναι Ερμιτιανός, δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Ζητάμε επιπλέον να είναι και θετικά ορισμένος πίνακας.

Μελετάμε τώρα αναλυτικά την περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας όμως υπ' όψιν πως σύμφωνα με αυτά που αποδείξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, η SOR μέθοδος συγχλίνει ισχυρά αν-ν $\omega \in (0, 2)$.

Πρόταση 3.2.1. *Ο αντίστοιχος Jacobi πίνακας:*

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ M^H & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (3.35)$$

έχει όλες τις ιδιοτιμές του πραγματικές, και μάλιστα ισχύει ότι:

$$0 \leq \mu^2 \leq \beta^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (3.36)$$

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $\mu \in S_B \iff \exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε: $Bx = \mu x$

$$\iff D^{-1}(L + U)x = \mu x \iff (L + U)x = \mu Dx$$

$$\iff (-D + L + U)x = (\mu - 1)Dx \iff Ax = (1 - \mu)Dx \quad (3.37)$$

$$\iff x^H Ax = (1 - \mu)x^H Dx.$$

Οι πίνακες A και D είναι Ερμιτιανοί και θετικά ορισμένοι, με συνέπεια να ισχύει ότι:

$$x^H Ax > 0 \quad \text{και} \quad x^H Dx > 0. \quad (3.38)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση του συστήματος (3.37) βλέπουμε ότι:

$$1 - \mu > 0 \iff \mu < 1, \quad \text{για το τυχαίο } \mu \in S_B. \quad (3.39)$$

Σύμφωνα ωστόσο με την Πρόταση 2.1.1, έχουμε πως οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα B εμφανίζονται σε αντίθετα ζεύγη. Οπότε, τελικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως:

$$\text{για κάθε } \mu \in S_B \text{ ισχύει ότι: } |\mu| < 1 \iff \rho(B) < 1. \quad (3.40)$$

✓.

Όσον αφορά τώρα τον πίνακα \mathcal{L}_ω της SOR μεθόδου, παρατηρούμε ότι αυτός παρουσιάζει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega M \\ \omega(1-\omega)M^H & \omega^2 M^H M + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (3.41)$$

ενώ το τριώνυμο (3.32) έχει ως εξής:

$$\vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \quad (3.42)$$

με $\vartheta := \vartheta^{(i)}$ καθώς η ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχεί σε κάποιο από τα $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, και

$$\begin{cases} T := T(\omega, \sigma_i^2) = (1-\omega)^2(1+\omega^2\sigma_i^2) + \omega^2\sigma_i^2 + (1-\omega+\omega^2\sigma_i^2)^2, \\ c = c(\omega) = (1-\omega)^4. \end{cases} \quad (3.43)$$

Μελετάμε την διακρίνουσα Δ του τελευταίου τριωνύμου. Πράγματι ισχύει ότι:

$$\Delta = T^2 - 4c = [T - 2(1-\omega)^2][T + 2(1-\omega)^2] > 0, \quad \text{επειδή:} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} T + 2(1-\omega)^2 = (1-\omega)^2(1+\omega^2\sigma_i^2) + \omega^2\sigma_i^2 + (1-\omega+\omega^2\sigma_i^2)^2 + 2(1-\omega)^2 > 0, \\ T - 2(1-\omega)^2 = \omega^2\sigma_i^2[(2-\omega)^2 + \omega^2\sigma_i^2] > 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

αφού ζητήσαμε προηγουμένως να υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, τέτοιο ώστε $\sigma_i \neq 0$, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζουμε πως η περιοχή σύγκλισης της SOR είναι το διάστημα $(0, 2)$.

Επομένως, το τριώνυμο (3.42) έχει τις παρακάτω πραγματικές ρίζες:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{2} [T + \sqrt{T^2 - 4c}] \in \mathbb{R}^+ \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{2} [T - \sqrt{T^2 - 4c}] \in \mathbb{R}^+, \quad \text{με } \vartheta_1 > \vartheta_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Παρατηρούμε ακόμη πως η συνάρτηση $\vartheta_1 := \vartheta_1(T)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του T , ενώ το $T := T(\omega, \sigma_i^2)$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του σ_i^2 , αφού:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \sigma_i^2} &= \omega^2 \left[(2 - \omega)^2 + 2\omega^2 \sigma_i^2 \right] > 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial (\sigma_i^2)^2} &= 2\omega^4 > 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ και για το τυχαίο $\omega \in (0, 2)$.

Άρα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η συνάρτηση T μεγιστοποιείται, όταν η μεταβλητή σ_i^2 λαμβάνει την μέγιστη τιμή της, δηλαδή έχουμε ότι:

$$T(\beta^2) := T(\omega; \beta^2) = \max_{1 \leq i \leq q} T(\omega, \sigma_i^2). \quad (3.48)$$

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, δείξαμε ότι η σχέση (3.28) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\omega\|_2^2 &= \max \left\{ \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], (1 - \omega)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

επειδή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right] \geq (1 - \omega)^2. \quad (3.50)$$

Παρουσιάζουμε λοιπόν τώρα το ακόλουθο Θεώρημα, η απόδειξη του οποίου δεν είναι άλλη από τους παραπάνω συλλογισμούς.

Θεώρημα 3.2.1. Για τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ της σχέσεως (3.34) ισχύουν τα παρακάτω:

$$\min_{\omega \in (0,2)} \|\mathcal{L}_\omega\|_2^2 = \min_{\omega \in (0,2)} \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], \quad (3.51)$$

$$\text{όταν} \begin{cases} T(\beta^2) = (1 - \omega)^2(1 + \omega^2\beta^2) + \omega^2\beta^2 + (1 - \omega + \omega^2\beta^2)^2, \\ c = c(\omega) = (1 - \omega)^4. \end{cases} \quad (3.52)$$

✓.

Είμαστε πλέον σε θέση να καθορίσουμε εκείνο το $\hat{\omega} \in (0, 2)$, το οποίο ελαχιστοποιεί τη $\|\mathcal{L}_\omega\|_2^2$.

Πρόταση 3.2.2. Η τιμή του $\omega \in (0, 2)$ η οποία ελαχιστοποιεί την $\|\mathcal{L}_\omega\|_2^2$, είναι η μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο $(0, 1)$ της τεταρτοβάθμιας εξισώσεως:

$$f(\omega) = (\beta^2 + \beta^6)\omega^4 + (1 - 4\beta^4)\omega^3 + (-5 + 4\beta^2 + 4\beta^4)\omega^2 + (8 - 8\beta^2)\omega - 4\beta^2 - 4 = 0. \quad (3.53)$$

Πιο συγκεκριμένα $\hat{\omega} \in (0, \omega^*)$, όπου ω^* : η μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο $(0, 1)$ της τριτοβάθμιας εξισώσεως:

$$g(\omega) := (\beta^2 + \beta^4)\omega^3 - 3\beta^2\omega^2 + (1 - 2\beta^2)\omega - 1. \quad (3.54)$$

Απόδειξη. (βλέπε [5], Θεώρημα 2.2, σελ.195-196)

✓.

Περίπτωση β'

Υποθέτουμε πως $e_i = -1$ για το τυχαίο $i \in \{1, \dots, q\}$.

Τότε προφανώς ισχύει ότι $\tilde{E} = I_q$ και $N = -M^H$, ενώ ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ M^H & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (3.55)$$

είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος.

Μελετάμε λοιπόν τώρα αναλυτικά και τη δεύτερη αυτή περίπτωση, θυμίζοντας ότι στο προηγούμενο Κεφάλαιο δείξαμε ότι η αντίστοιχη περιοχή συγκλίσεως της SOR μεθόδου δεν είναι άλλη από το διάστημα $(0, \frac{2}{1+\alpha})$.

Πρόταση 3.2.3. Ο αντίστοιχος Jacobi πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ -M^H & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (3.56)$$

είναι αντι-Ερμιτιανός, με αποτέλεσμα όλες οι ιδιοτιμές του να είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί.

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $\mu \in S_B$. Έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$\exists x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ τέτοιο ώστε: } Bx = \mu x$$

$$\iff (Bx)^H = (\mu x)^H \iff x^H B^H = \bar{\mu} x^H$$

$$\iff -x^H B = \bar{\mu} x^H, \text{ επειδή } B^H = -B \text{ ως αντι-Ερμιτιανός}$$

$$\iff -x^H Bx = \bar{\mu} x^H x \iff -x^H Bx = \bar{\mu} \|x\|_2^2 \quad (3.57)$$

$$\iff -\mu x^H x = \bar{\mu} \|x\|_2^2, \text{ επειδή } Bx = \mu x$$

$$\iff -\mu \|x\|_2^2 = \bar{\mu} \|x\|_2^2 \iff -\mu = \bar{\mu}, \text{ αφού } \|x\|_2 \neq 0$$

$$\iff \mu \in i\mathbb{R}.$$

✓.

Σημείωση 3.2.2. Μπορούμε ύστερα από τα παραπάνω να ισχυριστούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι για το τυχαίο $\mu \in S_B$ έχουμε :

$$-\alpha^2 \leq \mu^2 \leq 0, \quad \mu \in 0 \leq \alpha < +\infty. \quad (3.58)$$

Κατ' αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση, παρατηρούμε ότι η SOR μέθοδος έχει επαναληπτικό πίνακα:

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{bmatrix} (1-\omega)I_p & \omega M \\ -\omega(1-\omega)M^H & -\omega^2 M^H M + (1-\omega)I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (3.59)$$

ενώ το τριώνυμο (3.32) έχει την μορφή:

$$\vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \quad (3.60)$$

$$\text{όπου } \begin{cases} T = T(\omega, \sigma_i^2) = (1-\omega)^2(1+\omega^2\sigma_i^2) + \omega^2\sigma_i^2 + (1-\omega-\omega^2\sigma_i^2)^2, \\ c = c(\omega) = (1-\omega)^4. \end{cases} \quad (3.61)$$

Το τριώνυμο (3.60) έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$, ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, αλλά για $\omega \in (0, \frac{2}{1+\alpha})$, με συνέπεια να παρουσιάζει τις παρακάτω δύο πραγματικές ρίζες:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \left[T + \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+, \quad (3.62)$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \left[T - \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+, \quad \mu\epsilon \quad \vartheta_1 > \vartheta_2 > 0.$$

Εύκολα μπορούμε πάλι να διαπιστώσουμε, ότι η συνάρτηση $\vartheta_1 := \vartheta_1(T)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του T , με το $T := T(\omega, \sigma_i^2)$ να αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του σ_i^2 . Είναι δηλαδή σαφές ότι:

$$T(\alpha^2) := T(\omega; \alpha^2) = \max_{1 \leq i \leq q} T(\omega, \sigma_i^2). \quad (3.63)$$

Ομοίως τώρα με την προηγούμενη περίπτωση, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι:

$$\frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right] \geq (1 - \omega)^2, \quad (3.64)$$

η σχέση (3.28) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\omega\|_2^2 &= \max \left\{ \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right], (1 - \omega)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Οπότε, συνοψίζουμε τα προηγούμενα στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 3.2.4. Για τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ της σχέσεως (3.55) ισχύει ότι:

$$\min_{\omega \in (0, \frac{2}{1+\alpha})} \|\mathcal{L}_\omega\|_2^2 = \min_{\omega \in (0, \frac{2}{1+\alpha})} \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right] \quad (3.66)$$

$$\text{όπου} \quad \begin{cases} T(\alpha^2) = (1 - \omega)^2(1 + \omega^2\alpha^2) + \omega^2\alpha^2 + (1 - \omega - \omega^2\alpha^2)^2, \\ c = c(\omega) = (1 - \omega)^4. \end{cases} \quad (3.67)$$

✓.

Απομένει τέλος η ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right]$.

Πρόταση 3.2.5. Το $\omega \in (0, \frac{2}{1+\alpha})$ εκείνο, για το οποίο ελαχιστοποιείται η $\|\mathcal{L}_\omega\|_2^2$, είναι το $\hat{\omega} = \frac{1}{1+\alpha^2}$, με $0 \leq \alpha < +\infty$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right]$ είναι παραγωγίσιμη ως προς ω στο $(0, \frac{2}{1+\alpha})$ και έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου

βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[T + \sqrt{T^2 - 4c} \right] &= 0 \\ \implies \frac{dT}{d\omega} \sqrt{T^2 - 4c} - 2 \frac{dc}{d\omega} + T \frac{dT}{d\omega} &= 0 \\ \implies T \frac{dT}{d\omega} \frac{dc}{d\omega} - \left[\frac{dc}{d\omega} \right]^2 - c \left[\frac{dT}{d\omega} \right]^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\text{όταν} \begin{cases} \frac{dT}{d\omega} = 4 \left[(\alpha^4 + \alpha^2) \omega^3 + \omega - 1 \right], \\ \frac{dc}{d\omega} = 4(\omega - 1)^3. \end{cases} \quad (3.69)$$

Αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση τις γνωστές ποσότητες και έχουμε ισοδύναμα την παρακάτω δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ω :

$$\alpha^2(\alpha^2 + 1)\omega^2 + \omega - 1 = 0, \quad (3.70)$$

όπου επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta = (1 + 2\alpha^2)^2 > 0$, παρουσιάζει τις ακόλουθες δύο ρίζες:

$$\omega = -\frac{1}{\alpha^2} \in \mathbb{R}, \quad \text{απορρίπτεται αφού πρέπει } \omega \in \left(0, \frac{2}{1+\alpha} \right), \quad (3.71)$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η ρίζα $\omega = \frac{1}{\alpha^2 + 1}$ προφανώς ανήκει στο χωρίο συγκλίσεως της SOR, και έτσι με χρήση του κανόνα της δεύτερης παραγώγου επιβεβαιώνουμε ότι στο σημείο αυτό όντως επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της $\|\mathcal{L}_\omega\|_2$, όπως ζητούσαμε.

✓.

Κεφάλαιο 4

Επαναληπτική μέθοδος MSOR

4.1 Παρουσίαση της μεθόδου

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$Ax = b, \quad (4.1)$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ και } x, b \in \mathbb{C}^n. \quad (4.2)$$

Οι πίνακες $D_1 \in \mathbb{C}^{p,p}$, $D_2 \in \mathbb{C}^{q,q}$ είναι διαγώνιοι, ενώ $H \in \mathbb{C}^{p,q}$ και $K \in \mathbb{C}^{q,p}$. Επίσης, δεχόμαστε ότι $p + q = n$, με $p \geq q$.

Με χρήση της συνήθους διασπάσεως του πίνακα A :

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} D_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & D_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ -K & \mathcal{O} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{O} & -H \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

εφαρμόζουμε τη γνωστή SOR μέθοδο στο παραπάνω γραμμικό σύστημα:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + c_\omega, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

όπου γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1} \left[(1 - \omega)D + \omega U \right] \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (4.5)$$

$$c_\omega = (D - \omega L)^{-1} \omega b \in \mathbb{C}^n.$$

Οπότε, το προηγούμενο επαναληπτικό σχήμα έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (D - \omega L)^{-1} \left[(1 - \omega)D + \omega U \right] x^{(k)} + (D - \omega L)^{-1} \omega b \\ &\iff (D - \omega L)x^{(k+1)} = \left[(1 - \omega)D + \omega U \right] x^{(k)} + \omega b. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην τελευταία σχέση τους αντίστοιχους πίνακες με την αναλυτική τους μορφή, βλέπουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} D_1 & \mathcal{O} \\ \omega K & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega)D_1 & -\omega H \\ \mathcal{O} & (1 - \omega)D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega b_1 \\ \omega b_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\iff \begin{bmatrix} D_1 x_1^{(k+1)} \\ \omega K x_1^{(k+1)} + D_2 x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega)D_1 x_1^{(k)} - \omega H x_2^{(k)} + \omega b_1 \\ (1 - \omega)D_2 x_2^{(k)} + \omega b_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Εξισώνουμε τις γραμμές των πινάκων αυτών και έτσι ισοδύναμα έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} D_1 x_1^{(k+1)} &= (1 - \omega)D_1 x_1^{(k)} - \omega H x_2^{(k)} + \omega b_1, \\ \omega K x_1^{(k+1)} + D_2 x_2^{(k+1)} &= (1 - \omega)D_2 x_2^{(k)} + \omega b_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό μια νέα επαναληπτική μέθοδο, γενίκευση της γνωστής SOR μεθόδου. Πράγματι, η μέθοδος αυτή προκύπτει εάν στις δύο τελευταίες εξισώσεις χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές παραμέτρους ω_1, ω_2 , στη θέση της μοναδικής μέχρι στιγμής SOR-παραμέτρου ω . Προκύπτουν τότε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} D_1 x_1^{(k+1)} &= (1 - \omega_1)D_1 x_1^{(k)} - \omega_1 H x_2^{(k)} + \omega_1 b_1, \\ \omega_2 K x_1^{(k+1)} + D_2 x_2^{(k+1)} &= (1 - \omega_2)D_2 x_2^{(k)} + \omega_2 b_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Με στόχο τη διευκόλυνση των υπολογισμών μας, θέτουμε ότι:

$$\begin{cases} F := -D_1^{-1}H, \\ G := -D_2^{-1}K \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} c_1 := D_1^{-1}b_1, \\ c_2 := D_2^{-1}b_2, \end{cases} \quad (4.11)$$

οπότε, ισοδύναμα οι εξισώσεις του συστήματος (4.10) έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \omega_1 (F x_2^{(k)} + c_1) + (1 - \omega_1) x_1^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= \omega_2 (G x_1^{(k+1)} + c_2) + (1 - \omega_2) x_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάσαμε μια νέα επαναληπτική μέθοδο, της οποίας η SOR όντως αποτελεί ειδική περίπτωση, μιας και η νέα μέθοδος χρησιμοποιεί δύο παραμέτρους για να ελέγχει την ταχύτητα με την οποία συγκλίνει. Η νέα αυτή μέθοδος ονομάζεται *Modified Successive Over-Relaxation (MSOR)* μέθοδος και έχει επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} x^{(k)} + c_{\omega_1, \omega_2}, \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

$$\text{όπου } \mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = \begin{bmatrix} (1 - \omega_1)I_p & \omega_1 F \\ \omega_2(1 - \omega_1)G & \omega_1 \omega_2 GF + (1 - \omega_2)I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n, n} \quad (4.14)$$

$$\text{και } c_{\omega_1, \omega_2} = \begin{bmatrix} \omega_1 c_1 \\ \omega_1 \omega_2 G c_1 + \omega_2 c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (4.15)$$

Σημείωση 4.1.1. *Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε, ότι για τον επαναληπτικό πίνακα $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$ της MSOR μεθόδου ισχύει ότι:*

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = \mathcal{L}_{0, \omega_2} \mathcal{L}_{\omega_1, 0} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}_{\omega, \omega} = \mathcal{L}_{\omega}, \quad (4.16)$$

κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο, εξαιτίας της ίδιας της διαδικασίας, με την οποία κατασκευάσαμε τη μέθοδο αυτή.

✓.

4.2 Σύγκλιση της μεθόδου

Μελετάμε τώρα τις παραμέτρους εκείνες που επηρεάζουν αλλά και εξασφαλίζουν τη σύγκλιση της νέας αυτής μεθόδου. Πράγματι, όπως και στην περίπτωση της SOR που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2, είναι σαφές πως χρήσιμα εργαλεία στην προσπάθειά μας αυτή είναι τα ακόλουθα:

- α) Η σχέση του Young (γενικευμένη μορφή).
- β) Supremum φασματικής ακτίνας του πίνακα $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$.
- γ) Θεωρία πολυωνύμων Schur.

4.2.1 Η σχέση του Young

Όπως προφανώς υποφιαζόμαστε, η μαθηματική αυτή σχέση αποτελεί μια γενίκευση της ήδη γνωστής σχέσεως του Young, που συναντήσαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο, με σημασία σαφώς ιδιαίτερη. Παρουσιάζουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ της μορφής (4.2), ενώ $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$ και B οι αντίστοιχοι MSOR και Jacobi πίνακες. Τότε:

α) Εάν $\mu \in \sigma(B)$ και υπάρχει $\lambda \neq 0$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\lambda + \omega_1 - 1)(\lambda + \omega_2 - 1) = \omega_1 \omega_2 \mu^2 \lambda, \quad \text{τότε } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}). \quad (4.17)$$

β) Εάν $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει $\mu \in \sigma(B)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η προηγούμενη σχέση.

Απόδειξη. (βλέπε [13], σελ.273-274)

Σημείωση 4.2.1. Είναι προφανές ότι αν στη σχέση αυτή χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες παραμέτρους $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, οδηγούμαστε στη σχέση του Young:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda, \quad (4.18)$$

που είδαμε στο Κεφάλαιο 2.

✓.

4.2.2 Supremum φασματικής ακτίνας του $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$

Ομοίως με την περίπτωση της SOR, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.2.1. Η MSOR μέθοδος συγκλίνει ισχυρά αν-ν ισχύει ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) < 1, \quad (4.19)$$

$$\text{όπου } \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) := \max_{\mu \in S_B} \psi(\mu), \quad (4.20)$$

$$\text{όταν } \psi(\mu) := \max \left\{ |\lambda_1^{(\mu)}|, |\lambda_2^{(\mu)}| \right\}, \quad (4.21)$$

για το τυχαίο $\mu \in S_B$, με χρήση της σχέσεως του Young.

Πρέπει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό, ότι ο συγκεκριμένος ορισμός μας παρέχει τη δυνατότητα να μελετήσουμε ένα συνεχές πρόβλημα, όπου σαν ειδικές περιπτώσεις περιέχει όλα εκείνα τα προβλήματα, όπου το διακριτό σύνολο $\sigma(B)$ είναι υποσύνολο του S_B . Θυμίζουμε πως ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση της SOR μεθόδου, προηγουμένως.

✓.

4.2.3 Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου

Διαθέτουμε τώρα τα κατάλληλα εργαλεία, για να βρούμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ως προς τις παραμέτρους ω_1, ω_2 , ώστε η MSOR μέθοδος να συγκλίνει ισχυρά. Δηλαδή, έχουμε πλέον τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την περιοχή συγκλίσεως της συγκεκριμένης μεθόδου. Διακρίνουμε επομένως τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, όπως στο Κεφάλαιο 2, τις οποίες και εξετάζουμε αναλυτικά:

Περίπτωση α'

Υποθέτουμε ότι για τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (4.22)$$

γνωρίζουμε ότι ο αντίστοιχος Jacobi πίνακας B έχει μονάχα πραγματικές ιδιοτιμές, με $S_B \subset (-1, 1)$. Έχουμε δηλαδή για το τυχαίο $\mu \in S_B$ πως ισχύει ότι:

$$0 \leq \mu^2 \leq \beta^2, \quad \mu \in 0 \leq \beta < 1. \quad (4.23)$$

Η κεντρική και προς απόδειξη Πρόταση, της συγκεκριμένης περιπτώσεως, αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης περιπτώσεως της SOR μεθόδου, και δεν είναι άλλη από την ακόλουθη:

Πρόταση 4.2.1. Η MSOR μέθοδος συγκλίνει ισχυρά αν-ν $(\omega_1, \omega_2) \in (0, 2) \times (0, 2)$.

Απόδειξη. Για $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2})$ και $\mu \in S_B$ χρησιμοποιώντας τη σχέση του Young, που προηγουμένως παρουσιάσαμε, βλέπουμε ότι:

$$(\lambda + \omega_1 - 1)(\lambda + \omega_2 - 1) = \omega_1 \omega_2 \mu^2 \lambda \quad (4.24)$$

$$\iff \lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (4.25)$$

$$\text{όπου} \quad \begin{cases} b := b(\omega_1, \omega_2, \mu) = 2 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_1 \omega_2 \mu^2, \\ c := c(\omega_1, \omega_2) = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2). \end{cases} \quad (4.26)$$

Υποθέτουμε πως η MSOR συγκλίνει ισχυρά. Έχουμε επομένως ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) < 1 \quad (4.27)$$

$$\iff |\lambda| < 1, \quad \text{για το τυχαίο } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}). \quad (4.28)$$

Η Θεωρία των πολυωνύμων Schur, που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2, παρέχει την απαραίτητη βοήθεια και στο σημείο αυτό! Έχουμε δηλαδή ισοδύναμα ότι:

$$|b| < 1 + c \text{ και } |c| < 1. \quad (4.29)$$

Εξετάζουμε αρχικά τη δεύτερη από τις ανισότητες αυτές, διαπιστώνοντας ότι:

$$|c| < 1 \iff \begin{cases} \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2 + 2 > 0, \\ \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2 < 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Το σκιαγραφημένο χωρίο στο Σχήμα Γ'.2, που παραθέτουμε στο Παράρτημα Γ' της εργασίας αυτής, παρουσιάζει τις λύσεις των συγκεκριμένων ανισοτήτων.

Ομοίως, η μελέτη της πρώτης ανισότητας δίνει ότι:

$$|b| < 1 + c \iff \begin{cases} 4 - 2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_1\omega_2 + \mu^2\omega_1\omega_2 > 0, \\ (1 - \mu^2)\omega_1\omega_2 > 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\iff \begin{cases} 4 - 2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_1\omega_2 + \mu^2\omega_1\omega_2 > 0, \\ \omega_1\omega_2 > 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $1 - \mu^2 > 0$, αφού γνωρίζουμε πως για το τυχαίο $\mu \in S_B$, ισχύει ότι $\mu \in (-1, 1)$.

Δείξαμε δηλαδή μέχρι στιγμής, ότι η μέθοδος συγκλίνει ισχυρά, αν εξασφαλίσουμε ότι οι παράμετροι ω_1, ω_2 είναι ομόσημοι (βλέπε το Σχήμα Γ'.3 του Παραρτήματος Γ'), ενώ ταυτόχρονα ισχύει η ακόλουθη σχέση για το τυχαίο $\mu \in S_B$:

$$\mu^2 > -\frac{(2 - \omega_1)(2 - \omega_2)}{\omega_1\omega_2}. \quad (4.33)$$

Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε την ισχύ της για την ελάχιστη τιμή του μ^2 , καθώς $\mu \in S_B$. Βλέπουμε τότε ότι:

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in S_B} \mu^2 &> -\frac{(2 - \omega_1)(2 - \omega_2)}{\omega_1\omega_2} \\ \iff 0 &> -\frac{(2 - \omega_1)(2 - \omega_2)}{\omega_1\omega_2} \\ \iff (2 - \omega_1)(2 - \omega_2) &> 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Οπότε, το σκιαγραφημένο ανοικτό τετράγωνο $(0, 2) \times (0, 2)$, που παρουσιάζουμε στο Σχήμα Γ'.4 του Παραρτήματος Γ', αποτελεί στη συγκεκριμένη περίπτωση την περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου.

Σημειώνουμε πως η ισχύς της αντίστροφης κατευθύνσεως εξασφαλίζεται από τις ισοδυναμίες, που μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω διαδικασία. ✓.

Εξετάζουμε αναλυτικά και τη δεύτερη περίπτωση.

Περίπτωση β'

Έστω ότι ο Jacobi πίνακας B έχει μονάχα φανταστικές ιδιοτιμές, δηλαδή έχουμε ότι $S_B \subset i\mathbb{R}$ και έτσι για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ισχύει:

$$-\alpha^2 \leq \mu^2 \leq 0, \quad \mu \in 0 \leq \alpha < +\infty. \quad (4.35)$$

Η Πρόταση τώρα, που παρουσιάζει τη ζητούμενη περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 4.2.2. Η MSOR είναι ισχυρά συγκλίνουσα αν-ν $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D}$, όπου:

$$\mathcal{D} := \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \omega_1 < 2 \text{ και } 0 < \omega_2 < \frac{4 - 2\omega_1}{2 - (1 - \alpha^2)\omega_1} \right\}. \quad (4.36)$$

Απόδειξη. Ομοίως με πριν, χρησιμοποιούμε τη σχέση του Young:

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (4.37)$$

$$\text{με } \begin{cases} b := b(\omega_1, \omega_2, \mu) = 2 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\mu^2, \\ c := c(\omega_1, \omega_2) = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2). \end{cases} \quad (4.38)$$

Υποθέτουμε ότι η MSOR συγκλίνει ισχυρά. Τότε:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) < 1 \quad (4.39)$$

$$\iff |\lambda| < 1, \text{ για το τυχαίο } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}). \quad (4.40)$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τη Θεωρία των πολυωνύμων Schur, βλέπουμε ότι ισοδύναμα ισχύουν τα παρακάτω:

$$|b| < 1 + c \text{ και } |c| < 1, \quad (4.41)$$

$$\text{όπου } |c| < 1 \iff \begin{cases} \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2 + 2 > 0 \\ \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2 < 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, ορίζεται το σκιαγραφημένο χωρίο του Σχήματος Γ'.2 (βλέπε Παράρτημα Γ'), ενώ από τη μελέτη της πρώτης ανισότητας βλέπουμε ότι:

$$|b| < 1 + c \iff \begin{cases} (2 - \omega_1)(2 - \omega_2) + \mu^2\omega_1\omega_2 > 0, \\ (1 - \mu^2)\omega_1\omega_2 > 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Παρατηρούμε τώρα, πως επειδή για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ισχύει ότι $1 - \mu^2 > 0$, έχουμε ότι:

$$\omega_1\omega_2 > 0 \iff \omega_1, \omega_2 : \text{ομόσημοι (βλέπε Σχήμα Γ'.3)}. \quad (4.44)$$

Απομένει λοιπόν η μελέτη της ακόλουθης ανισότητας:

$$\begin{aligned} (2 - \omega_1)(2 - \omega_2) + \mu^2\omega_1\omega_2 &> 0 \\ \iff \mu^2 &> -\frac{(2-\omega_1)(2-\omega_2)}{\omega_1\omega_2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για το τυχαίο $\mu \in S_B$, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει για το $\min_{\mu \in S_B} \mu^2 = -\alpha^2$. Άρα, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 &> -\frac{(2-\omega_1)(2-\omega_2)}{\omega_1\omega_2} \\ \iff \frac{(2-\omega_1)(2-\omega_2)}{\omega_1\omega_2} &> \alpha^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Διακρίνουμε τώρα δύο υποπεριπτώσεις, όπου η πρώτη εξ αυτών:

$$\begin{aligned} 2 - \omega_1 < 0 &\iff \omega_1 > 2 \\ \text{και } 2 - \omega_2 < 0 &\iff \omega_2 > 2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

απορρίπτεται, εξαιτίας των μέχρι στιγμής περιορισμών, όπως αυτοί παρουσιάζονται στο Σχήμα Γ'.3. Άρα, εξετάζουμε την υποπερίπτωση όπου:

$$\begin{aligned} 2 - \omega_1 > 0 &\iff \omega_1 < 2 \\ \text{και } 2 - \omega_2 > 0 &\iff \omega_2 < 2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τους τελευταίους περιορισμούς, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{(2-\omega_1)(2-\omega_2)}{\omega_1\omega_2} &> \alpha^2 \\ \iff 4 - 2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_1\omega_2 - \alpha^2\omega_1\omega_2 &> 0 \\ \iff \left[2 - (1 - \alpha^2)\omega_1\right]\omega_2 &< 4 - 2\omega_1. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $2 - (1 - \alpha^2)\omega_1$ είναι πάντοτε θετική, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $0 \leq \alpha < +\infty$ και $\omega_1 > 0$, εξαιτίας φυσικά του Σχήματος Γ'.3.

Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε πως η ζητούμενη περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου ορίζεται στην περίπτωση αυτή, από την επίλυση των παρακάτω ανισοτήτων:

$$0 < \omega_1 < 2 \quad \text{και} \quad 0 < \omega_2 < \frac{4 - 2\omega_1}{2 - (1 - \alpha^2)\omega_1}. \quad (4.50)$$

Γραφικά μπορούμε να δούμε τη μορφή του χωρίου αυτού, διακρίνοντας μάλιστα περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει το $\alpha \in [0, +\infty)$. Πράγματι, οι περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά στα Σχήματα Γ'.5, Γ'.6 και Γ'.7 του Παραρτήματος Γ'.

Τέλος, επειδή χρησιμοποιήσαμε ισοδυναμίες στην απόδειξη αυτή, προφανώς ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση.

✓.

4.3 Βέλτιστη MSOR μέθοδος

Σε ορισμένες περιπτώσεις δικυκλικών και συνεπώς διατεταγμένων πινάκων $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε επακριβώς τη βέλτιστη MSOR μέθοδο. Μπορούμε δηλαδή να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες MSOR-παραμέτρους ω_1, ω_2 εντός φυσικά της περιοχής συγκλίσεως της μεθόδου, ώστε η μέση ασυμπτωτική ταχύτητα συγκλίσεως της να μεγιστοποιείται. Παρουσιάζουμε λοιπόν στη συνέχεια, τη μελέτη των προηγούμενων δύο περιπτώσεων, μιας και σε αυτές έχουμε ήδη προσδιορίσει τις αντίστοιχες περιοχές συγκλίσεως της μεθόδου.

Πράγματι, εξετάζουμε αρχικά την πρώτη περίπτωση, όπου όπως είδαμε λίγο νωρίτερα, ο Jacobi πίνακας B παρουσιάζει μονάχα πραγματικές ιδιοτιμές με $S_B \subset (-1, 1)$. Τότε, από τον Young έχουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 4.3.1. Όταν για τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις που περιγράφονται στην Περίπτωση α' της προηγούμενης Παραγράφου, ισχύει ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1, \quad (4.51)$$

και για κάθε $(\omega_1, \omega_2) \in (0, 2) \times (0, 2) \setminus \{(\omega_b, \omega_b)\}$ βλέπουμε πως ισχύει ότι:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) > \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \omega_b - 1. \quad (4.52)$$

Απόδειξη. Ο Young στο βιβλίο του *Iterative Solution of Large Linear Systems* παρουσιάζει αναλυτικά τη συγκεκριμένη απόδειξη στις σελίδες 279-281. Κεντρικός άξονας αυτής της αποδείξεως είναι το ακόλουθο σημαντικό Λήμμα, το οποίο επίσης παρουσιάζεται αναλυτικά στη σελίδα 186 του βιβλίου αυτού.

Λήμμα 4.3.1. Θεωρούμε τα παρακάτω τριώνυμα:

$$\begin{aligned} x^2 - b_1x + c &= 0, \\ x^2 - b_2x + c &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Τότε, $\rho(b_1, c) \geq \rho(b_2, c)$ αν-ν $|b_1| \geq |b_2|$. Επίσης αν $b_2^2 - 4c \geq 0$ και $|b_1| > |b_2|$ έχουμε ότι $\rho(b_1, c) > \rho(b_2, c)$. Υπ' όψιν πως $\rho(b_i, c)$, με $i = 1, 2$, είναι το μεγαλύτερο από τα μέτρα των ριζών του αντίστοιχου τριωνύμου.

✓.

Εξετάζουμε τώρα κατ' αναλογία και τη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 4.3.2. Σύμφωνα με τις προϋποθέσεις που περιγράφονται στην Περίπτωση β' της προηγούμενης Παραγράφου, βλέπουμε ότι όταν ο Jacobi πίνακας B έχει μονάχα φανταστικές ιδιοτιμές, ισχύουν τα εξής:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) \geq \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}), \quad (4.54)$$

για κάθε $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D} := \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \omega_1 < 2 \text{ και } 0 < \omega_2 < \frac{4-2\omega_1}{2-(1-\alpha^2)\omega_1} \right\}$.

Απόδειξη. Είδαμε πως οι ιδιοτιμές $\mu \in S_B$ και $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2})$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσεως:

$$(\lambda + \omega_1 - 1)(\lambda + \omega_2 - 1) = \omega_1\omega_2\mu^2\lambda \quad (4.55)$$

$$\iff \lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (4.56)$$

$$\text{με } \begin{cases} b := b(\omega_1, \omega_2, \mu) = 2 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\mu^2 = 1 + c - \omega_1\omega_2(1 - \mu^2), \\ c := c(\omega_1, \omega_2) = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2). \end{cases} \quad (4.57)$$

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2})$, τέτοιο ώστε $|\lambda| = \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2})$.

Οπότε, έχοντας ως βάση το τριώνυμο (4.56) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το Λήμμα 4.3.1, κατασκευάζουμε ένα νέο τριώνυμο:

$$\lambda^2 - \tilde{b}\lambda + c = 0, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \tilde{b} &= \max_{\mu \in S_B} |b(\mu)| = \max_{\mu \in S_B} |1 + c - \omega_1\omega_2(1 - \mu^2)| \\ &= \max \left\{ |1 + c - \omega_1\omega_2|, |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Εξετάζουμε αναλυτικά τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Υποθέτουμε αρχικά πως:

$$\begin{aligned} |1 + c - \omega_1\omega_2| &\leq |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| \\ \iff |1 + c - \omega_1\omega_2| - |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| &\leq 0 \\ \iff [1 + c - \omega_1\omega_2]^2 - [1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)]^2 &\leq 0 \\ \iff \omega_1\omega_2\alpha^2 [2 + 2c - \omega_1\omega_2(2 + \alpha^2)] &\leq 0 \\ \iff \omega_1\omega_2 \geq \frac{2(1+c)}{2+\alpha^2}, \quad \text{αφού } (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\omega_1\omega_2(1 + \alpha^2) &\leq \frac{-2(1+c)(1+\alpha^2)}{2+\alpha^2} \\ \iff 1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2) &\leq 1 + c - \frac{2(1+c)(1+\alpha^2)}{2+\alpha^2} \\ \iff 1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2) &\leq \frac{-\alpha^2(1+c)}{2+\alpha^2} \\ \iff |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| &\geq \frac{\alpha^2(1+c)}{2+\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ομοίως, στην περίπτωση όπου:

$$\begin{aligned} |1 + c - \omega_1\omega_2| &\geq |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| \\ \iff |1 + c - \omega_1\omega_2| - |1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)| &\geq 0 \\ \iff [1 + c - \omega_1\omega_2]^2 - [1 + c - \omega_1\omega_2(1 + \alpha^2)]^2 &\geq 0 \\ \iff \omega_1\omega_2 \leq \frac{2(1+c)}{2+\alpha^2}, \quad \text{επειδή } (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

μπορούμε χωρίς δυσκολία να διαπιστώσουμε ότι:

$$\begin{aligned}
-\omega_1\omega_2 &\geq \frac{-2(1+c)}{2+\alpha^2} \\
\iff 1+c-\omega_1\omega_2 &\geq 1+c-\frac{2(1+c)}{2+\alpha^2} \\
\iff 1+c-\omega_1\omega_2 &\geq \frac{\alpha^2(1+c)}{2+\alpha^2} \\
\iff \left|1+c-\omega_1\omega_2\right| &\geq \frac{\alpha^2(1+c)}{2+\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Δείξαμε δηλαδή πως σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι:

$$\tilde{b} \geq \frac{\alpha^2(1+c)}{2+\alpha^2} = \frac{2r(1+c)}{1+r^2} \geq 0, \tag{4.64}$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν πως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
r &:= \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = 1 - \omega_b, \\
\omega_b &= \frac{2}{1+\sqrt{1+\alpha^2}} \iff \alpha^2 = \frac{4(1-\omega_b)}{\omega_b^2} = \frac{4r}{(1-r)^2}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Σημείωση 4.3.1. Θυμίζουμε ότι οι τελευταίες αυτές σχέσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων (2.69) και (2.70), που αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 2.

Σύμφωνα τώρα με το Λήμμα 4.3.1, είναι σαφές ότι:

$$\rho_{\sup}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) = \rho(\tilde{b}, c) \geq \rho(c), \tag{4.66}$$

όταν $\rho(c)$ είναι το μεγαλύτερο από τα μέτρα των ριζών του τριωνύμου:

$$\mathcal{P}(\lambda, c) := \lambda^2 - \frac{2r(1+c)}{1+r^2}\lambda + c = 0. \tag{4.67}$$

Εάν τώρα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε στη θέση του c την ποσότητα $c_0 := r^2$, μπορούμε να δούμε πως προκύπτει ότι:

$$\rho(c) > \rho(c_0) = r = 1 - \omega_b, \quad \text{για κάθε } c \neq c_0. \tag{4.68}$$

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό αυτό.

Αν $c > c_0$ τότε $\rho(c) \geq c^{\frac{1}{2}} > c_0^{\frac{1}{2}} = r = \rho(c_0)$.

Αν $c < c_0$ τότε $\mathcal{P}(r, c) < 0$ και $\mathcal{P}(\lambda, c) > 0$ για κάποιες τιμές του $\lambda > r$. Οπότε, από το Θεώρημα Bolzano γνωρίζουμε πως για τις πραγματικές ρίζες r_1 και r_2 του

τριωνύμου (4.67) ισχύει ότι $0 \leq r < r_1 \leq r_2 < \lambda$. Δηλαδή, ισοδύναμα βλέπουμε ότι $r = \rho(c_0) < \rho(c) = r_2$.

Διακρίνουμε τέλος τις παρακάτω περιπτώσεις:
Έστω πως $\alpha = 0 \iff r = 0 \iff \omega_b = 1$. Τότε:

$$\rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}) \geq \rho_{\text{sup}}(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = 1 - \omega_b = 0. \quad (4.69)$$

Εάν πάλι δεχτούμε ότι $\alpha > 0$ και κατά συνέπεια $r > 0$, μπορούμε να δούμε πως με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\omega_1 \omega_2 = (1 - r)^2$, ισχύει ότι:

$$\tilde{b} > 2r. \quad (4.70)$$

Πράγματι, έστω πως $\omega_1 \omega_2 > (1 - r)^2$. Τότε:

$$1 + \alpha^2 = 1 + \frac{4r}{(1 - r)^2} = \frac{(1 + r)^2}{(1 - r)^2}, \quad (4.71)$$

και έτσι:

$$\begin{aligned} 1 + c_0 - \omega_1 \omega_2 (1 + \alpha^2) &= 1 + c_0 - \omega_1 \omega_2 \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} < -2r \\ \iff |1 + c_0 - \omega_1 \omega_2 (1 + \alpha^2)| &> 2r \iff \tilde{b} > 2r. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ομοίως, όταν $\omega_1 \omega_2 < (1 - r)^2$ βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 + c_0 - \omega_1 \omega_2 &> 1 + c_0 - (1 - r)^2 = 2r \\ \iff |1 + c_0 \omega_1 \omega_2| &> 2r \iff \tilde{b} > 2r. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Στην περίπτωση δε όπου $\omega_1 \omega_2 = (1 - r)^2$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 - r = \omega_b, \quad (4.74)$$

με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $\tilde{b} = 2r$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το Λήμμα 4.3.1 για τα τριώνυμα:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \tilde{b}\lambda + c_0 &= 0, \\ \lambda^2 - 2r\lambda + c_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

επιβεβαιώνουμε το ζητούμενο.

✓.

Κεφάλαιο 5

Ευκλείδεια norm του $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$

5.1 Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών και Ορθογώνιες Ομοιότητες

Θεωρούμε το δικυκλικό και συνεπώς διατεταγμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ -N & I_q \end{bmatrix}, \quad \text{με } p + q = n \text{ και } p \geq q. \quad (5.1)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών για τον πίνακα $M \in \mathbb{C}^{p,q}$, μπορούμε να διαπιστώσουμε τα παρακάτω:

$$M = U\Sigma V^H, \quad (5.2)$$

όπου U, V : ορθομοναδιαίοι πίνακες με:

$$\begin{aligned} UU^H &= I_p, \\ VV^H &= I_q, \end{aligned} \quad (5.3)$$

όπου Σ είναι ο πίνακας που περιέχει τις διατεταγμένες κατά φθίνουσα σειρά ιδιάζουσες τιμές σ_{ii} , για $i = 1, 2, \dots, q$, του πίνακα M ,

$$\text{με } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{qq} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (5.4)$$

Πρέπει στο σημείο αυτό να τονίσουμε, ότι για να αποφύγουμε τη μελέτη τετριμμένων περιπτώσεων, δεχόμαστε ότι $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{qq} > 0$, ενώ ταυτόχρονα με στόχο την απλοποίηση των συμβολισμών θέτουμε $\sigma_i := \sigma_{ii}$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Θεωρούμε επίσης ότι ο πίνακας $N \in \mathbb{C}^{q,p}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$N = EM^H = (V\tilde{E}V^H)M^H, \quad (5.5)$$

$$\text{όταν } \tilde{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q,q}, \quad \mu \varepsilon \begin{cases} e_i = +1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q\} \\ \text{ή} \\ e_i = -1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q\}, \end{cases} \quad (5.6)$$

με στόχο ακριβώς τη μετέπειτα αναλυτική μελέτη των περιπτώσεων, που μας προσφέρει η επιλογή αυτή.

Ο Jacobi επαναληπτικός πίνακας B , που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη επιλογή του πίνακα A είναι ο εξής:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ N & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (5.7)$$

ενώ σε προηγούμενη Παράγραφο δείξαμε πως για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ισχύει ότι:

$$\mu^2 = e_i \sigma_i^2, \quad \text{για κάποιο } i \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad (5.8)$$

σχέση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στους παρακάτω συλλογισμούς.

Συνεχίζουμε τώρα τη μελέτη της MSOR μεθόδου κατ' αναλογία με την SOR μέθοδο, που είδαμε στο Κεφάλαιο 3. Πράγματι, έχουμε ότι ο επαναληπτικός πίνακας της MSOR έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = \begin{bmatrix} (1 - \omega_1)I_p & \omega_1 M \\ \omega_2(1 - \omega_1)N & (1 - \omega_2)I_q + \omega_1\omega_2 NM \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (5.9)$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - \omega_1)I_p & \omega_1 U \Sigma V^H \\ \omega_2(1 - \omega_1) V \tilde{E} \Sigma^H U^H & (1 - \omega_2)I_q + \omega_1\omega_2 V \tilde{E} \Sigma^H \Sigma V^H \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

λαμβάνοντας φυσικά υπ' όψιν ότι:

$$\begin{aligned} N &= EM^H = (V\tilde{E}V^H)(V\Sigma^H U^H) = V\tilde{E}\Sigma^H U^H, \\ NM &= (V\tilde{E}\Sigma^H U^H)(U\Sigma V^H) = V\tilde{E}\Sigma^H \Sigma V^H. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = \begin{bmatrix} U & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \omega_1)I_p & \omega_1 \Sigma \\ \omega_2(1 - \omega_1)\tilde{E}\Sigma^H & (1 - \omega_2)I_q + \omega_1\omega_2\tilde{E}\Sigma^H\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^H & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V^H \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

και έτσι θέτοντας:

$$Q := \begin{bmatrix} U & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (5.13)$$

$$\text{και } \Gamma_{\omega_1, \omega_2} := \begin{bmatrix} (1 - \omega_1)I_p & \omega_1 \Sigma \\ \omega_2(1 - \omega_1)\tilde{E}\Sigma^H & (1 - \omega_2)I_q + \omega_1\omega_2\tilde{E}\Sigma^H\Sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad (5.14)$$

ισοδύναμα οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = Q\Gamma_{\omega_1, \omega_2}Q^H. \quad (5.15)$$

Χρησιμοποιούμε ξανά, όπως και στην περίπτωση της SOR μεθόδου, κατάλληλο μεταθετικό πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ (βλέπε Παράρτημα Β'), τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_1, \omega_2) &= P\Gamma_{\omega_1, \omega_2}P^T = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_1(\omega_1, \omega_2) & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \Delta_2(\omega_1, \omega_2) & \cdots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \Delta_q(\omega_1, \omega_2) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & (1 - \omega_1)I_{p-q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

όταν για το τυχαίο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ έχουμε ότι:

$$\Delta_i(\omega_1, \omega_2) = \begin{bmatrix} 1 - \omega_1 & \omega_1\sigma_i \\ \omega_2e_i\sigma_i - \omega_1\omega_2e_i\sigma_i & 1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2e_i\sigma_i^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}. \quad (5.17)$$

Επομένως, δείξαμε μέχρι στιγμής ότι:

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = QP^T\Delta(\omega_1, \omega_2)PQ^H \quad \text{και} \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}^H\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = QP^T\Delta^H(\omega_1, \omega_2)\Delta(\omega_1, \omega_2)PQ^H, \quad (5.19)$$

λαμβάνοντας όμως υπ' όψιν ότι $(PQ^H)^{-1} = QP^T$.

✓.

5.2 Ελαχιστοποίηση της $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2$

Ζητούμενο στην παρούσα Παράγραφο είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2 &= \rho\left(\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}^H \mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\right) = \rho\left(\Delta^H(\omega_1, \omega_2)\Delta(\omega_1, \omega_2)\right) \\ &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq q} \rho\left(\Delta_i^H(\omega_1, \omega_2)\Delta_i(\omega_1, \omega_2)\right), (1 - \omega_1)^2 \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq q} \|\Delta_i(\omega_1, \omega_2)\|_2^2, (1 - \omega_1)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

όταν για το τυχαίο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\Delta_i^H(\omega_1, \omega_2)\Delta_i(\omega_1, \omega_2) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2\omega_1 + \omega_1^2 + \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^2 + & \omega_1 \sigma_i - \omega_1^2 \sigma_i + \omega_2 e_i \sigma_i - \omega_2^2 e_i \sigma_i + \\ -2\omega_1 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^2 & + \omega_1 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^3 - \omega_1 \omega_2 e_i \sigma_i + \\ & + \omega_1 \omega_2^2 e_i \sigma_i - \omega_1^2 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \sigma_i - \omega_1^2 \sigma_i + \omega_2 e_i \sigma_i - \omega_2^2 e_i \sigma_i + & \omega_1^2 \sigma_i^2 + 1 + \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^4 + \\ + \omega_1 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^3 - \omega_1 \omega_2 e_i \sigma_i + & -2\omega_2 + 2\omega_1 \omega_2 e_i \sigma_i^2 - 2\omega_1 \omega_2^2 e_i \sigma_i^2 \\ + \omega_1 \omega_2^2 e_i \sigma_i - \omega_1^2 \omega_2^2 e_i^2 \sigma_i^3 & \end{bmatrix},$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν φυσικά, ότι οι MSOR-παράμετροι ω_1, ω_2 βρίσκονται μέσα σε κάποιο συγκεκριμένο χωρίο, όπως αυτό ορίστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Έτσι, αν $\vartheta := \vartheta^{(i)} \in \mathbb{C}$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, είναι τυχαία ιδιοτιμή του πίνακα $\Delta_i^H(\omega_1, \omega_2)\Delta_i(\omega_1, \omega_2)$, έχουμε ότι:

$$\vartheta \in \sigma\left(\Delta_i^H(\omega_1, \omega_2)\Delta_i(\omega_1, \omega_2)\right) \quad (5.22)$$

$$\iff \det\left(\Delta_i^H(\omega_1, \omega_2)\Delta_i(\omega_1, \omega_2) - \vartheta I\right) = 0 \quad (5.23)$$

$$\iff \vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \quad (5.24)$$

$$\text{με } \begin{cases} T := T(\omega_1, \omega_2, e_i, \sigma_i^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2 \sigma_i^2) + \omega_1^2 \sigma_i^2 + (1 - \omega_2 + \omega_1 \omega_2 e_i \sigma_i^2)^2, \\ c := c(\omega_1, \omega_2) = (1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2. \end{cases} \quad (5.25)$$

Μελετάμε τώρα αναλυτικά τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, που προκύπτουν ανάλογα με την τιμή που λαμβάνουν οι δίτιμες μεταβλητές e_i , για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Περίπτωση α'

Υποθέτουμε πως ισχύει ότι: $e_i = +1$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\tilde{E} = I_q$ και $N = M^H$, με αποτέλεσμα ο εξ υποθέσεως θετικά ορισμένος πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ -M^H & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad (5.26)$$

να είναι Ερμιτιανός, δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Ταυτόχρονα δε, ο αντίστοιχος Jacobi πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ M^H & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (5.27)$$

είναι Ερμιτιανός, ενώ για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ισχύει ότι:

$$0 \leq \mu^2 \leq \beta^2, \quad \mu \in 0 \leq \beta < 1. \quad (5.28)$$

Σημείωση 5.2.1. Η περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου για την περίπτωση αυτή, αποδειξάμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο ότι είναι το ανοικτό τετράγωνο $(0, 2) \times (0, 2)$.

Παρουσιάζουμε λοιπόν τώρα την αναλυτική μελέτη της πρώτης αυτής περιπτώσεως, ξεκινώντας με την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 5.2.1. Για τον συγκεκριμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχουμε ότι:

$$\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2 = \begin{cases} \max \left\{ (1 - \omega_1)^2, (1 - \omega_2)^2 \right\}, & \text{όταν } T(0) \geq T(\beta^2), \\ \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], & \text{όταν } T(\beta^2) \geq T(0), \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\mu \in \begin{cases} T(\beta^2) := T(\omega_1, \omega_2; \beta^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2\beta^2) + \omega_1^2\beta^2 + (1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\beta^2)^2, \\ c = (1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2. \end{cases} \quad (5.30)$$

Απόδειξη. Το τριώνυμο (5.24) λαμβάνει την μορφή:

$$\vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \quad (5.31)$$

$$\text{με } \begin{cases} T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2\sigma_i^2) + \omega_1^2\sigma_i^2 + (1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\sigma_i^2)^2, \\ c = (1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2, \end{cases} \quad (5.32)$$

όπως επίσης είναι σαφές ότι έχει δύο πραγματικές θετικές ρίζες ϑ_1 και ϑ_2 , αφού ισχύει ότι:

$$\vartheta_1\vartheta_2 = c \in \mathbb{R}^+ \quad \text{και} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = T \in \mathbb{R}^+. \quad (5.33)$$

Έτσι, οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου (5.31) είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{2} \left[T + \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+, \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{2} \left[T - \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+, \quad \text{με } \vartheta_1 > \vartheta_2 > 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το $\vartheta_1 := \vartheta_1(T)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του T , αφού:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial T} = \frac{\sqrt{T^2 - 4c} + T}{\sqrt{T^2 - 4c}} > 0, \quad (5.35)$$

ενώ το $T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2)$ αποτελεί κυρτή συνάρτηση του σ_i^2 , επειδή:

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_i^2} = (1 - \omega_1)^2\omega_2^2 + \omega_1^2 + 2(1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\sigma_i^2)\omega_1\omega_2 \quad (5.36)$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial (\sigma_i^2)^2} = 2\omega_1^2\omega_2^2 > 0. \quad (5.37)$$

Επομένως, η συνάρτηση $T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε μία από τις δύο ακραίες τιμές της μεταβλητής σ_i^2 . Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$T(\beta^2) = \max_{1 \leq i \leq q} T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2) \quad (5.38)$$

$$\text{είτε} \quad T(0) = \max_{1 \leq i \leq q} T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2),$$

όταν γνωρίζουμε πως:

$$T(\beta^2) = T(\omega_1, \omega_2; \beta^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2\beta^2) + \omega_1^2\beta^2 + (1 - \omega_2 + \omega_1\omega_2\beta^2)^2, \quad (5.39)$$

$$T(0) = T(\omega_1, \omega_2; 0) = (1 - \omega_1)^2 + (1 - \omega_2)^2.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2 &= \max \left\{ \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], \frac{1}{2} \left[T(0) + \sqrt{T^2(0) - 4c} \right] \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right], \max \{ (1 - \omega_1)^2, (1 - \omega_2)^2 \} \right\}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

✓.

Είναι λοιπόν αναγκαίο να εξετάσουμε πότε συμβαίνει καθεμιά από τις υποπεριπτώσεις αυτές, και ακριβώς για το σκοπό αυτό ορίζουμε τα χωρία:

$$\begin{aligned} RI &:= \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in (0, 2) \times (0, 2) : T(0) \geq T(\beta^2) \right\}, \\ RII &:= \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in (0, 2) \times (0, 2) : T(0) \leq T(\beta^2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου προφανώς ισχύει ότι: $RI \cup RII = (0, 2) \times (0, 2)$.

Οπότε, είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το βασικό Θεώρημα της Παραγράφου αυτής, σύμφωνα με το οποίο προσδιορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων ω_1 και ω_2 που ελαχιστοποιούν την $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2$, με την προϋπόθεση ότι οι τιμές αυτές ανήκουν στην κατάλληλη περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου, δηλαδή στο ανοικτό τετράγωνο $(0, 2) \times (0, 2)$.

Θεώρημα 5.2.1. Για το συγκεκριμένο πίνακα A και για το τυχαίο $\beta \in [0, 1)$, το διατεταγμένο ζεύγος $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$ το οποίο ελαχιστοποιεί την $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2$ δίδεται ως εξής:

$$\begin{cases} (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = \left(\frac{1}{1+\beta^2}, \frac{1}{1-\beta^2} \right) \text{ και έτσι: } \|\mathcal{L}_{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2}\|_2 = \left[\frac{\beta^2}{1+\beta^2} \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{όταν } \beta^2 \in [0, \frac{1}{3}], \\ (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = \left(\frac{4}{5+\beta^2}, \frac{4}{3-\beta^2} \right) \text{ και έτσι: } \|\mathcal{L}_{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2}\|_2 = \frac{1+\beta^2}{3-\beta^2}, & \text{όταν } \beta^2 \in [\frac{1}{3}, 1). \end{cases} \quad (5.42)$$

Απόδειξη. Εστιάζουμε αρχικά την προσοχή μας στη μελέτη της διαφοράς:

$$D := T(\beta^2) - T(0) = \beta^2 \left(\left[(1 + \beta^2)\omega_2^2 + 1 \right] \omega_1^2 + 2(1 - 2\omega_2)\omega_2\omega_1 + \omega_2^2 \right), \quad (5.43)$$

ως συνάρτηση του ω_1 .

Πράγματι, για τη διακρίνουσα $d = 4\omega_2^3 \left[(3 - \beta^2)\omega_2 - 4 \right]$ του τελευταίου τριωνύμου,

μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{cases} d > 0, & \text{όταν } \omega_2 \in \left(\frac{4}{3-\beta^2}, 2\right), \\ d = 0, & \text{όταν } \omega_2 = \frac{4}{3-\beta^2}, \\ d < 0, & \text{όταν } \omega_2 \in \left(0, \frac{4}{3-\beta^2}\right). \end{cases} \quad (5.44)$$

Πιο αναλυτικά τώρα, εάν $d = 0$, το τριώνυμο (5.43) παρουσιάζει μια διπλή ρίζα ως προς ω_1 , την $\omega_1 = \frac{4}{5+\beta^2}$. Γνωρίζουμε έτσι ότι για τιμές του ω_1 μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη ρίζα αυτή, το συγκεκριμένο τριώνυμο εμφανίζει πρόσημο θετικό, δηλαδή $(\omega_1, \omega_2) \in RII$.

Λήμμα 5.2.1. *Εστω ότι $d > 0$, δηλαδή γνωρίζουμε πως $\omega_2 \in \left(\frac{4}{3-\beta^2}, 2\right)$ για το τυχαίο $\beta \in [0, 1)$. Τότε το τριώνυμο (5.43) παρουσιάζει δύο διακριτές, πραγματικές ρίζες $\hat{\omega}_1$ και $\hat{\omega}_2$, τέτοιες ώστε $0 < \hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < 2$.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι το τριώνυμο (5.43) έχει δύο πραγματικές, διακριτές μεταξύ τους ρίζες. Απομένει λοιπόν το να προσδιορίσουμε την ακριβή τους θέση, ως προς το διάστημα $(0, 2)$. Η συγκεκριμένη διαδικασία δεν είναι δύσκολη, μονάχα χρονοβόρα. Παραπέμπουμε λοιπόν για περισσότερες λεπτομέρειες στο [5], σελ.198.

✓.

Είναι τώρα η κατάλληλη στιγμή για να μελετήσουμε την περιοχή RI .

Πρόταση 5.2.2. *Εστω ότι $(\omega_1, \omega_2) \in RI$. Τότε, η ελαχιστοποίηση της $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2$ επιτυγχάνεται στο σημείο $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = \left(\frac{4}{5+\beta^2}, \frac{4}{3-\beta^2}\right)$ και έτσι έχουμε ότι:*

$$\|\mathcal{L}_{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2}\|_2 = \frac{1 + \beta^2}{3 - \beta^2}. \quad (5.45)$$

Απόδειξη. (βλέπε [5], σελ.198)

✓.

Για να ολοκληρώσουμε τη μελέτη της διακρίνουσας d του τριωνύμου (5.43), ελέγχουμε και την περίπτωση όπου $d < 0$. Τότε το τριώνυμο αυτό παρουσιάζει δύο μιγαδικές ρίζες ως προς ω_1 , ενώ το πρόσημό του είναι παντού θετικό. Δηλαδή ισχύει ότι $T(\beta^2) > T(0)$ και έτσι $(\omega_1, \omega_2) \in RII$.

Επομένως, οφείλουμε να εξετάσουμε αναλυτικά και την περιοχή RII .

Πρόταση 5.2.3. Έστω ότι $(\omega_1, \omega_2) \in RII \setminus \{-1, 1\}$. Τότε τα $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$ που ελαχιστοποιούν τη $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2$, βρίσκονται μεταξύ των στάσιμων σημείων της συναρτήσεως:

$$\zeta := \frac{1}{2} \left[T(\beta^2) + \sqrt{T^2(\beta^2) - 4c} \right]. \quad (5.46)$$

Επιπλέον, αυτά τα στάσιμα σημεία είναι οι κοινές ρίζες των παρακάτω δύο πολυωνύμων ως προς ω_1 :

$$\begin{cases} P_1(\omega_1) := a_1\omega_1^2 + b_1\omega_1 + c_1 = 0, \\ P_2(\omega_1) := a_2\omega_1^2 + b_2\omega_1 + c_2 = 0, \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\text{όπου} \begin{cases} a_1 := a_1(\omega_2) = (\beta^6 - \beta^2)\omega_2^4 + (\beta^4 + \beta^2)\omega_2^3 + (2\beta^4 + \beta^2 - 1)\omega_2^2 + \\ \quad + (\beta^2 + 1)\omega_2 + (\beta^2 + 1), \\ b_1 := b_1(\omega_2) = (-3\beta^4 + 2\beta^2 + 1)\omega_2^4 + (2\beta^4 - 4\beta^2 - 2)\omega_2^3 + \\ \quad + (-2\beta^2 + 2)\omega_2^2 + (2\beta^2 - 2)\omega_2, \\ c_1 := c_1(\omega_2) = (2\beta^2 - 2)\omega_2^4 + (-3\beta^2 + 5)\omega_2^3 + (\beta^2 - 3)\omega_2^2 \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\text{και} \begin{cases} a_2 := a_2(\omega_2) = (\beta^4 + \beta^2)\omega_2 + \beta^2 + 1, \\ b_2 := b_2(\omega_2) = (-\beta^4 + \beta^2)\omega_2^2 - 4\beta^2\omega_2 - 2, \\ c_2 := c_2(\omega_2) = (\beta^2 - 1)\omega_2^2 + 2\omega_2. \end{cases} \quad (5.49)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της πρώτης παραγώγου, προσδιορίζουμε τα στάσιμα σημεία της συναρτήσεως ζ , καθώς $(\omega_1, \omega_2) \in RII$. Επιλύουμε έτσι το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega_1} = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \omega_2} = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \left[T^2 - 4(1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - 4(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \left[T^2 - 4(1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -T \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - 4(1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2). \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \left[T^2 - 4(1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - 4(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)^2, \\ (\omega_1 - 1) \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - (\omega_2 - 1) \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = 0. \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega_1} (\omega_1 - 1) \right]^2 = 2T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} (\omega_1 - 1) - 4(1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_1} (\omega_1 - 1) - \frac{\partial T}{\partial \omega_2} (\omega_2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (5.53)$$

Το $T(\beta^2)$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (5.39). Μπορούμε λοιπόν να δούμε ότι:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = 2(1 + \omega_2^2 \beta^2 + \beta + \omega_2^2 \beta^2) \omega_1 - 2(1 + 2\omega^2 \beta - \omega_2 \beta), \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_2} = 2\omega_2 \beta (1 + \beta) \omega_1^2 + 2\beta (1 - 4\omega_2) \omega_1 + 2(\omega_2 \beta - 1 + \omega_2).$$

Αντικαθιστούμε τώρα όλες τις γνωστές ποσότητες στο τελευταίο σύστημα εξισώσεων και ύστερα από αρκετές πράξεις έχουμε το αποτέλεσμα, που περιγράφεται στην εκφώνηση της συγκεκριμένης Προτάσεως.

✓.

Πρόταση 5.2.4. Οι εξισώσεις $P_1(\omega_1) = 0$ και $P_2(\omega_1) = 0$ της προηγούμενης Προτάσεως έχουν μια κοινή ρίζα, όταν η απαλείφουσά (resultant) τους $R := R(P_1, P_2)$ γίνεται ίση με 0. Δηλαδή ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$R := R(\omega_2) = (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0 \quad (5.55)$$

$$\Leftrightarrow t_{11} \omega_2^{11} + t_{10} \omega_2^{10} + t_9 \omega_2^9 + t_8 \omega_2^8 + t_7 \omega_2^7 + t_6 \omega_2^6 + t_5 \omega_2^5 + t_4 \omega_2^4 + t_3 \omega_2^3 + t_2 \omega_2^2 = 0, \quad (5.56)$$

όπου:

$$\begin{cases} t_{11} := -\beta^{16} + 5\beta^{14} + 5\beta^{10} + 5\beta^8 - 9\beta^6 + 5\beta^4 - \beta^2, \\ t_{10} := \beta^{16} - 11\beta^{14} + 34\beta^{12} - 39\beta^{10} + 39\beta^6 - 34\beta^4 + 11\beta^2 - 1, \\ t_9 := 2\beta^{14} - 22\beta^{12} + 58\beta^{10} - 46\beta^8 - 26\beta^6 + 62\beta^4 - 34\beta^2 + 6, \\ t_8 := 4\beta^{14} - 27\beta^{12} + 40\beta^{10} + 13\beta^8 - 60\beta^6 + 23\beta^4 + 16\beta^2 - 9, \\ t_7 := 20\beta^{12} - 104\beta^{10} + 140\beta^8 + 16\beta^6 - 148\beta^4 + 88\beta^2 - 12, \\ t_6 := 4\beta^{12} + 16\beta^{10} - 108\beta^8 + 112\beta^6 + 60\beta^4 - 128\beta^2 + 44, \\ t_5 := 24\beta^{10} - 56\beta^8 - 16\beta^6 + 80\beta^4 - 8\beta^2 - 24, \\ t_4 := 52\beta^8 - 104\beta^6 - 16\beta^4 + 104\beta^2 - 36, \\ t_3 := 48\beta^6 - 48\beta^4 - 48\beta^2 + 48, \\ t_2 := 16\beta^4 - 16. \end{cases} \quad (5.57)$$

Επιπλέον, καθώς $0 \leq \beta < 1$, οι 11 ρίζες της απαλείφουσας R είναι οι ακόλουθες:

$$0, 0, 1, -\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{1-\beta^2}, \frac{2}{1-\beta^2}, \frac{2}{1-\beta^2}, -\left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}, -\left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ωστόσο, οι τιμές του $\omega_2 \in (0, 2) \setminus \{1\}$ που όντως είναι αποδεκτές ως συντεταγμένες πιθανών στάσιμων σημείων της συναρτήσεως ζ της προηγούμενης Προτάσεως, είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{1}{1-\beta^2}, \\ \omega_2 = \left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad \text{καθώς } 0 < \beta^2 < \frac{1}{2}. \quad (5.58)$$

Απόδειξη. (βλέπε [5], σελ.200)

✓.

Σημείωση 5.2.2. Στο τελευταίο Θεώρημα χρησιμοποιήσαμε χωρίς περαιτέρω ερμηνεία, την έννοια της απαλείφουσας δύο πολυωνύμων. Με στόχο λοιπόν το να μη διακόψουμε τη ροή της παρούσας αποδεικτικής διαδικασίας, παραθέτουμε τις απαραίτητες πληροφορίες για το θέμα αυτό, στο Παράρτημα Β', στις τελευταίες σελίδες αυτής της εργασίας.

Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 με την παρουσίαση της ακόλουθης Προτάσεως.

Πρόταση 5.2.5. Οι κοινές λύσεις των παραπάνω εξισώσεων $\begin{cases} P_1(\omega_1) = 0 \\ P_2(\omega_2) = 0 \end{cases}$ δίδονται από την έκφραση:

$$\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (5.59)$$

και είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{cases} (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{1+\beta^2}, \frac{1}{1-\beta^2}\right), & \text{για κάθε } \beta^2 \in (0, \frac{1}{2}), \\ (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2(5-3\beta^2)-(7-\beta^2)(2-2\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta^2)[3-\beta^2-2(2-2\beta^2)^{\frac{1}{2}}]}, \left[\frac{2}{1-\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right), & \text{για κάθε } \beta^2 \in (0, \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (5.60)$$

Ωστόσο, από αυτές μονάχα η πρώτη για $\beta^2 \in (0, 1/3]$ βρίσκεται εντός του RII.

Απόδειξη. (βλέπε [5], σελ.200-201)

✓.

Περίπτωση β'

Δεχόμαστε ότι ισχύει: $e_i = -1$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\tilde{E} = -I_q$ και $N = -M^H$, με αποτέλεσμα ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} I_p & -M \\ M^H & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (5.61)$$

να είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Ταυτόχρονα, ο αντίστοιχος Jacobi πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & M \\ -M^H & \mathcal{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (5.62)$$

είναι αντι-Ερμιτιανός, ενώ για το τυχαίο $\mu \in S_B$ ισχύει ότι:

$$-\alpha^2 \leq \mu^2 \leq 0, \text{ για } 0 \leq \alpha < +\infty. \quad (5.63)$$

Μελετάμε αναλυτικά την περίπτωση αυτή, έχοντας όμως υπ' όψιν, πως η περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου βρέθηκε να είναι το χωρίο \mathcal{D} , με:

$$\mathcal{D} := \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \omega_1 < 2 \text{ και } 0 < \omega_2 < \frac{4 - 2\omega_1}{2 - (1 - \alpha^2)\omega_1} \right\}. \quad (5.64)$$

Πράγματι, το τριώνυμο (5.24) παρουσιάζει τη μορφή:

$$\vartheta^2 - T\vartheta + c = 0, \quad (5.65)$$

$$\text{με } \begin{cases} T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2\sigma_i^2) + \omega_1^2\sigma_i^2 + (1 - \omega_2 - \omega_1\omega_2\sigma_i^2)^2, \\ c := c(\omega_1, \omega_2) = (1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2, \end{cases} \quad (5.66)$$

ενώ η διακρίνουσά του είναι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θετική, με συνέπεια το τριώνυμο αυτό να παρουσιάζει δύο πραγματικές ρίζες ϑ_1 και ϑ_2 , με $\vartheta_1 > \vartheta_2 > 0$, όταν:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \left[T + \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+, \quad (5.67)$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \left[T - \sqrt{T^2 - 4c} \right] \in \mathbb{R}^+.$$

Ωστόσο, το $\vartheta_1 := \vartheta_1(T)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του T , όπου το $T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του σ_i^2 , για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, αφού ισχύει ότι:

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_i^2} = (\omega_1 - \omega_2)^2 + \omega_1^2\omega_2^2 + 2\omega_1^2\omega_2^2\sigma_i^2 > 0 \quad (5.68)$$

$$\text{και } \frac{\partial T^2}{\partial (\sigma_i^2)^2} = 2\omega_1^2\omega_2^2 > 0, \quad (5.69)$$

για κάθε $\omega_1, \omega_2 \in (0, 2) \setminus \{1\}$, αλλά και για το τυχαίο $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Είναι επομένως λογικό να δεχτούμε ότι η συνάρτηση $T := T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, όταν το σ_i^2 μεγιστοποιείται. Έχουμε δηλαδή ότι:

$$T(\alpha^2) := T(\omega_1, \omega_2; \alpha^2) = \max_{1 \leq i \leq q} T(\omega_1, \omega_2, \sigma_i^2) \quad (5.70)$$

και έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

$$\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2 = \max \left\{ \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right], \max \left\{ (1 - \omega_1)^2, (1 - \omega_2)^2 \right\} \right\}, \quad (5.71)$$

$$\text{με } \begin{cases} T(\alpha^2) = (1 - \omega_1)^2(1 + \omega_2^2\alpha^2) + \omega_1^2\alpha^2 + (1 - \omega_2 - \omega_1\omega_2\alpha^2)^2, \\ c = (1 - \omega_1)^2(1 - \omega_2)^2. \end{cases} \quad (5.72)$$

✓.

Λήμμα 5.2.2. Στην παρούσα περίπτωση δεν χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις *RI* και *RII*, όπως είδαμε προηγουμένως, μιας και ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right] > \max \left\{ (1 - \omega_1)^2, (1 - \omega_2)^2 \right\}. \quad (5.73)$$

Απόδειξη. Πράγματι, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως επειδή ισχύει ότι:

$$T(\alpha^2) > T(0), \quad \text{για κάθε } (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D}, \quad (5.74)$$

έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right] > \max \left\{ (1 - \omega_1)^2, (1 - \omega_2)^2 \right\}, \quad (5.75)$$

το οποίο είναι αυτό που ζητούσαμε.

✓.

Άρα, βλέπουμε ότι:

$$\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2^2 = \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right] \quad (5.76)$$

και είμαστε έτσι σε θέση να διατυπώσουμε το κεντρικό Θεώρημα της περιπτώσεως, που τώρα μελετάμε.

Θεώρημα 5.2.2. Για τη συγκεκριμένη επιλογή του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, μονάχα το διατεταγμένο ζεύγος $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = \left(\frac{1}{\alpha^2+1}, \frac{1}{\alpha^2+1}\right) \in \mathcal{D}$ ελαχιστοποιεί τη $\|\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}\|_2$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της πρώτης παραγώγου, προσδιορίζουμε αρχικά τα στάσιμα σημεία της συναρτήσεως ϕ , όπου:

$$\phi := \phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \left[T(\alpha^2) + \sqrt{T^2(\alpha^2) - 4c} \right], \quad (5.77)$$

και έπειτα μεταξύ των σημείων αυτών, αναζητάμε εκείνα που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση ϕ .

Πράγματι για $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{D}$ επιλύουμε το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial \omega_1} T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - c \left[\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial c}{\partial \omega_1} \right]^2 = 0, \\ \frac{\partial c}{\partial \omega_2} T \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - c \left[\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right]^2 - \left[\frac{\partial c}{\partial \omega_2} \right]^2 = 0. \end{cases} \quad (5.78)$$

Η συνάρτηση $T(\alpha^2)$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (5.72). Έτσι, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial T(\alpha^2)}{\partial \omega_1} = (2 + 2\omega_2^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\omega_2^2 \alpha^4) \omega_1 - 2\omega_2 \alpha^2 - 2, \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial T(\alpha^2)}{\partial \omega_2} = 2\omega_2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) \omega_1^2 - 2\omega_1 \alpha^2 + 2\omega_2 \alpha^2 + 2\omega_2 - 2, \quad (5.80)$$

όπως επίσης και

$$\frac{\partial c}{\partial \omega_1} = 2(\omega_1 - 1)(\omega_2 - 1)^2, \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \omega_2} = 2(\omega_2 - 1)(\omega_1 - 1)^2. \quad (5.82)$$

Εργαζόμαστε αρχικά με την πρώτη από τις παραπάνω δύο εξισώσεις του συστήματος (5.78), αντικαθιστώντας τις γνωστές ποσότητες, με αποτέλεσμα ισοδύναμα να έχουμε το παρακάτω τριώνυμο ως προς ω_1 :

$$\begin{aligned} & \left[\omega_2^4 \alpha^6 + 2\omega_2^4 \alpha^4 + \omega_2^4 \alpha^2 - \omega_2^3 \alpha^4 - \omega_2^3 \alpha^2 + 2\omega_2^2 \alpha^4 + 3\omega_2^2 \alpha^2 + \omega_2^2 - \omega_2 \alpha^2 - \omega_2 + \alpha^2 + 1 \right] \omega_1^2 + \\ & + \left[\omega_2^4 \alpha^4 + 2\omega_2^4 \alpha^2 + \omega_2^4 - 2\omega_2^3 \alpha^4 - 4\omega_2^3 \alpha^2 - 2\omega_2^3 + 2\omega_2^2 \alpha^2 + 2\omega_2^2 - 2\omega_2 \alpha^2 - 2\omega_2 \right] \omega_1 + \\ & + \omega_2^2 \alpha^2 - \omega_2^3 \alpha^2 - \omega_2^3 + \omega_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Οι δύο πραγματικές ρίζες που διαθέτει το τριώνυμο αυτό είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\omega_2(1-\omega_2)}{\omega_2^2\alpha^2+1}, \\ \omega_1 &= \frac{\omega_2}{\omega_2^2\alpha^2+\omega_2^2-\omega_2+1}.\end{aligned}\tag{5.84}$$

Ομοίως, εργαζόμαστε τώρα με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (5.78), οπότε και οδηγούμαστε στο παρακάτω πολυώνυμο ως προς ω_1 :

$$\begin{aligned}& \left[\omega_2^2\alpha^6 + 2\omega_2^2\alpha^4 + \omega_2^2\alpha^2 + \omega_2\alpha^4 + 2\omega_2\alpha^2 + \omega_2 \right] \omega_1^4 + \\ & + \left[-\omega_2^2\alpha^4 - \omega_2^2\alpha^2 - 2\omega_2\alpha^4 - 4\omega_2\alpha^2 - 2\omega_2 - \alpha^2 - 1 \right] \omega_1^3 + \\ & + \left[2\omega_2^2\alpha^4 + 3\omega_2^2\alpha^2 + \omega_2^2 + 2\omega_2\alpha^2 + 2\omega_2 + \alpha^2 + 1 \right] \omega_1^2 + \\ & + \left[-\omega_2^2\alpha^2 - 2\omega_2\alpha^2 - \omega_2^2 - 2\omega_2 \right] \omega_1 + \omega_2^2\alpha^2 + \omega_2^2 = 0.\end{aligned}\tag{5.85}$$

Οι ρίζες δε του πολυωνύμου αυτού είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1+\sqrt{1-4\omega_2^2\alpha^2-4\omega_2}}{2(\omega_2\alpha^2+1)}, \\ \omega_1 &= \frac{1-\sqrt{1-4\omega_2^2\alpha^2-4\omega_2}}{2(\omega_2\alpha^2+1)}, \\ \omega_1 &= \frac{\omega_2+1+\sqrt{-3\omega_2^2+2\omega_2+1-4\omega_2^2\alpha^2}}{2(\omega_2\alpha^2+\omega_2)}, \\ \omega_1 &= \frac{\omega_2+1-\sqrt{-3\omega_2^2+2\omega_2+1-4\omega_2^2\alpha^2}}{2(\omega_2\alpha^2+\omega_2)}.\end{aligned}\tag{5.86}$$

Ζητάμε στο σημείο αυτό τις κοινές λύσεις των πολυωνύμων (5.83) και (5.85). Οπότε, εξισώνουμε τα συστήματα (5.84) και (5.86), και βλέπουμε έτσι πως το μοναδικό ζεύγος (ω_1, ω_2) που επαληθεύει τα συστήματα αυτά και ταυτόχρονα ανήκει στο χωρίο συγκλίσεως \mathcal{D} της σχέσεως (5.64), είναι το ακόλουθο:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2+1}, \frac{1}{\alpha^2+1} \right).\tag{5.87}$$

Προσδιορίσαμε λοιπόν το κρίσιμο σημείο της συναρτήσεως $\phi := \phi(\omega_1, \omega_2)$, σύμφωνα πάντοτε με τους ζητούμενους περιορισμούς, και απομένει τώρα να δείξουμε ότι

πρόκειται για σημείο ολικού ελαχίστου της συναρτήσεως αυτής. Πράγματι, με στόχο τη χρήση του κανόνα της δεύτερης παραγώγου, υπολογίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \frac{T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_1}}{2\sqrt{T^2 - 4c}}, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1^2} = \frac{(T+1)}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right]^2 - \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_1^2} - \frac{\left[T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_1} \right]^2}{2(T^2 - 4c)}. \quad (5.89)$$

Εντελώς συμμετρικά τώρα προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \frac{T \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_2}}{2\sqrt{T^2 - 4c}}, \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_2^2} = \frac{(T+1)}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_2^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right]^2 - \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_2^2} - \frac{\left[T \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_2} \right]^2}{2(T^2 - 4c)}, \quad (5.91)$$

ενώ χρειαζόμαστε επίσης και την ποσότητα:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} = \frac{(T+1)}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} - \frac{\left[T \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_1} \right] \left[T \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - 2 \frac{\partial c}{\partial \omega_2} \right]}{2(T^2 - 4c)}. \quad (5.92)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις ποσότητες που παρουσιάζονται στις παραπάνω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} &= (2\omega_2^2 \alpha^4 + 2\omega_2^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2)\omega_1 - 2\omega_2 \alpha^2 - 2, \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_2} &= (2\omega_2 \alpha^4 + 2\omega_2 \alpha^2)\omega_1^2 - 2\alpha^2 \omega_1 + 2\omega_2 \alpha^2 + 2\omega_2 - 2, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1^2} &= 2\omega_2^2 \alpha^4 + 2\omega_2^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_2^2} &= 2\omega_1^2 \alpha^4 + 2\omega_1^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} &= 4\omega_1 \omega_2 \alpha^4 + 4\omega_1 \omega_2 \alpha^2 - 2\alpha^2 \end{aligned} \quad (5.93)$$

και ακόμη:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial \omega_1} &= (\omega_2 - 1)^2(2\omega_1 - 2), \\ \frac{\partial c}{\partial \omega_2} &= (\omega_1 - 1)^2(2\omega_2 - 2), \\ \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_1^2} &= 2(\omega_2 - 1)^2, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_2^2} &= 2(\omega_1 - 1)^2, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} &= 4(\omega_1 - 1)(\omega_2 - 1).\end{aligned}\tag{5.94}$$

Θεωρούμε λοιπόν το σημείο $\mathcal{P}_0 = \left(\frac{1}{\alpha^2+1}, \frac{1}{\alpha^2+1}\right)$ και έτσι μπορούμε τώρα, ύστερα από αρκετές πράξεις, να διαπιστώσουμε πως ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \omega_1}(\mathcal{P}_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1^2}(\mathcal{P}_0) &> 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1^2}(\mathcal{P}_0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_2^2}(\mathcal{P}_0) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}(\mathcal{P}_0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_2 \partial \omega_1}(\mathcal{P}_0) &> 0.\end{aligned}\tag{5.95}$$

Όμως, οι τελευταίες αυτές σχέσεις δηλώνουν σύμφωνα με τον κανόνα της δεύτερης παραγώγου, πως η συνάρτηση $\phi := \phi(\omega_1, \omega_2)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο συγκεκριμένο σημείο \mathcal{P}_0 , ακριβώς δηλαδή όπως ζητούσαμε.

✓.

Παράρτημα Α'

Συμβολισμοί

Πίνακες :

- I_p Ο μοναδιαίος $p \times p$ πίνακας.
 \mathcal{O} Ο μηδενικός πίνακας, με διαστάσεις ανάλογα με την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται.
 A^T Ο ανάστροφος του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n_1, n_2}$.
 A^H Ο συζυγής μιγαδικός ανάστροφος του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n_1, n_2}$.
 P Ένας μεταθετικός πίνακας, με διαστάσεις ανάλογα με την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται.
 B Ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Jacobi.
 \mathcal{L}_ω Ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου, με παράμετρο ω .
 \mathcal{L}_{ω_b} Ο επαναληπτικός πίνακας της βέλτιστης SOR μεθόδου, ως προς την ταχύτητα συγκλίσεως, με παράμετρο $\omega = \omega_b$.
 $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$ Ο επαναληπτικός πίνακας της MSOR μεθόδου, με παραμέτρους ω_1, ω_2 .
 $\mathcal{L}_{\omega_b, \omega_b}$ Ο επαναληπτικός πίνακας της βέλτιστης MSOR μεθόδου, ως προς την ταχύτητα συγκλίσεως, με παραμέτρους $\omega_1 = \omega_2 = \omega_b$.

Χαρακτηριστικά Πινάκων :

- $\det(A)$ Η ορίζουσα του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$.
 $\sigma(A)$ Το φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του.
 S_A Το μικρότερο κυρτό σύνολο, που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$.
 $\rho(A)$ Η φασματική ακτίνα του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$, δηλαδή το μεγαλύτερο από τα μέτρα των ιδιοτιμών του πίνακα αυτού.
 $\rho_{\text{sup}}(A)$ Supremum φασματικής ακτίνας του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$.
 $\|A\|$ Μια φυσική norm του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n, n}$.

- $\|A\|_2$ Η Ευκλείδεια (Φασματική) norm του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.
- $\mathcal{R}_k(A^k)$ Η μέση ταχύτητα συγκλίσεως του επαναληπτικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ στο μηδενικό πίνακα, ύστερα από k επαναλήψεις.
- $\mathcal{R}_\infty(A)$ Η μέση ασυμπτωτική ταχύτητα συγκλίσεως του επαναληπτικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ στο μηδενικό πίνακα.
- $\kappa(A)$ Ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Λοιποί συμβολισμοί :

- \mathbb{R} Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- \mathbb{C} Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
- $\text{Re}\mu$ Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\mu \in \mathbb{C}$.
- $\text{Im}\mu$ Το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\mu \in \mathbb{C}$.
- $x^{(k)}$ Το διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, έπειτα από την k -οστή επανάληψη.
- $e^{(k)}$ Το διάνυσμα-σφάλμα ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, έπειτα από την k -οστή επανάληψη.
- $R(p, q)$ Η απαλείφουσα των πολυωνύμων p και q .
- $\|x\|$ Η norm του διανύσματος $x \in \mathbb{C}^n$.

✓.

Παράρτημα Β'

Χρήσιμες έννοιες

Β'.1 Θεωρία πινάκων

Παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό ορισμένες σημαντικές έννοιες, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε χωρίς ιδιαίτερες διευκρινίσεις στο κείμενο που προηγήθηκε.

Ορισμός Β'.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με την ιδιότητα $A^H = A$ καλείται *Ερμιτιανός*, ενώ αν ικανοποιεί τη σχέση $A^T = A$, *συμμετρικός*. Σημειώνουμε δε, πως ένας πραγματικός Ερμιτιανός πίνακας είναι προφανώς συμμετρικός. Επίσης, *αντι-Ερμιτιανός* ονομάζεται ο πίνακας A για τον οποίο ισχύει ότι $A^H = -A$.

Όταν ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι Ερμιτιανός μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι παρουσιάζει ορισμένες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του είναι πραγματικά, όπως συμβαίνει και για τις ιδιοτιμές του, ενώ ταυτόχρονα διαθέτει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^j \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, τα οποία μπορούμε να τα επιλέξουμε έτσι ώστε να είναι ορθοκανονικά, δηλαδή να ισχύει ότι:

$$(x^j, x^k)_2 = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{αν-ν } j = k \\ 0, & \text{αν-ν } j \neq k \end{cases}, \quad \text{καθώς } j = 1(1)n \text{ και } k = 1(1)n. \quad (\text{B'.1})$$

✓.

Ορισμός Β'.1.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $A^H = A$. Τότε ο Ερμιτιανός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος αν-ν ισχύει ότι: $(x, Ax)_2 (= (Ax, x)_2) > 0$.

Έστω ότι έχουμε έναν Ερμιτιανό και θετικά ορισμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Μπορούμε τότε να αποδείξουμε συγκεκριμένο Θεώρημα, το οποίο αναφέρει πως αν διαγράψουμε

μια οποιαδήποτε γραμμή του και την αντίστοιχη στήλη του, ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που απομένει θα είναι επίσης Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος. Προφανώς, με διαδοχική εφαρμογή του Κανόνα-Θεωρήματος αυτού, μπορούμε να δείξουμε ότι οσοδήποτε γραμμές και αντίστοιχες στήλες αν διαγράψουμε από τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, ο νέος πίνακας που προκύπτει είναι πάλι Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος. Ωστόσο, η ιδιότητα αυτή μας εξασφαλίζει ταυτόχρονα ότι ο αρχικός πίνακας A θα έχει όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του θετικά, κάτι το οποίο θα συμβαίνει και για τις ιδιοτιμές του.

Στην ειδική περίπτωση τώρα όπου ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, γνωρίζουμε ότι επιδέχεται *ανάλυση κατά Cholesky*, δηλαδή υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $l_{ii} > 0$, για $i = 1(1)n$, τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $LL^T = A$.

✓.

Ορισμός Β'.1.3. Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ χαρακτηρίζονται ως όμοιοι (συμβολίζουμε $A \sim B$), εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$, τέτοιος ώστε να ισχύει ότι:

$$A = Q^{-1}BQ. \quad (\text{B'.2})$$

Ο μετασχηματισμός $A \rightarrow Q^{-1}AQ$ ονομάζεται *μετασχηματισμός ομοιότητας* και ο πίνακας Q *πίνακας ομοιότητας* του μετασχηματισμού αυτού. Επίσης, η σχέση $A \sim B$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, αφού ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- α) $A \sim A$ (ανακλαστική ιδιότητα),
- β) $A \sim B \implies B \sim A$ (συμμετρική ιδιότητα) και ακόμη
- γ) $A \sim B$ και $B \sim C \implies A \sim C$ (μεταβατική ιδιότητα).

Πρόταση Β'.1.1. Όταν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι όμοιοι, έχουν το ίδιο φάσμα ιδιοτιμών.

Απόδειξη. Έστω τυχαία ιδιοτιμή $\gamma \in \sigma(A)$. Τότε ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \det(A - \gamma I) = 0 &\iff \det(Q^{-1}BQ - \gamma I) = 0 \\ &\iff \det(Q^{-1}) \det(B - \gamma I) \det(Q) = 0 \iff \det(B - \gamma I) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B'.3})$$

δείξαμε δηλαδή ότι $\gamma \in \sigma(B)$, όπως και ζητούσαμε.

✓.

B'.2 Jordan κανονική μορφή ενός πίνακα

Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο Θεώρημα για να παρουσιάσουμε την *Jordan κανονική μορφή* ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Θεώρημα B'.2.1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{C}^{n,n}$, τέτοιος ώστε να ισχύει ότι:

$$A = SJS^{-1}, \quad (\text{B'.4})$$

όταν γνωρίζουμε ότι:

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p) \text{ και } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i, n_i}, \quad (\text{B'.5})$$

για $i = 1(1)p$ και $\sum_{i=1}^p n_i = n$.

Συνεχίζουμε με κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τη συγκεκριμένη ανάλυση του πίνακα A . Πράγματι, πρέπει να τονίσουμε ότι η *Jordan κανονική μορφή* ενός πίνακα είναι μοναδική, εκτός από τυχόν μεταθέσεις των διαγωνίων blocks του πίνακα J , ενώ τα λ_i που εμφανίζονται στις διαγωνίους των block πινάκων J_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι διακριτές μεταξύ τους τότε η *Jordan κανονική μορφή* του είναι διαγώνια.

Επίσης, για κάθε block J_i υπάρχει μια στήλη του πίνακα S , η οποία είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A . Οι υπόλοιπες στήλες του S που συνδέονται με το J_i , ονομάζονται *κύρια (principal) διανύσματα* του A . Θεωρούμε δε ότι *βαθμός* ενός κυρίου διανύσματος είναι ο μικρότερος ακέραιος k , για τον οποίο ισχύει ότι:

$$(A - \lambda I)^k u = 0, \quad (\text{B'.6})$$

όταν λ είναι μια ιδιοτιμή που συνδέεται με το u . Προφανώς ένα ιδιοδιάνυσμα είναι ένα κύριο διάνυσμα με βαθμό 1. Ακόμη, σε ένα block J_i μεγέθους n_i , αντιστοιχούν n_i κύρια διανύσματα, ένα για κάθε βαθμό $1, 2, \dots, n_i$.

Τέλος, ονομάζουμε *αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής $\lambda \in \sigma(A)$ το πλήθος των ιδιοτιμών του A που είναι ίσες με λ , ενώ *γεωμετρική πολλαπλότητα* καλείται η διάσταση του γραμμικού διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A , που συνδέονται με την ιδιοτιμή αυτή.

✓.

B'.3 Απαλείφουσα πολυωνύμων

Θεωρούμε τα παρακάτω δύο πολυώνυμα μιας μεταβλητής:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \\ q(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n, \end{aligned} \tag{B'.7}$$

όπου $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, για $i = 0(1)m$ και $j = 0(1)n$, με $a_0a_m \neq 0$, $b_0b_n \neq 0$ και $m \leq n$.

Παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ως προς τους συντελεστές των παραπάνω πολυωνύμων, ώστε να έχουν τα πολυώνυμα αυτά κοινή ρίζα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\varrho \neq 0$, για το οποίο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^m + a_1\varrho^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\varrho + a_m = 0, \\ q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^n + b_1\varrho^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\varrho + b_n = 0. \end{aligned} \tag{B'.8}$$

Γνωρίζουμε τώρα ότι αν στο σύστημα των εξισώσεων (B'.8), προσθέσουμε νέες εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \varrho^k p(\varrho) &= 0, \text{ με } k = 1(1)n - 1, \\ \varrho^l q(\varrho) &= 0, \text{ με } l = 1(1)m - 1, \end{aligned} \tag{B'.9}$$

τότε το νέο σύστημα θα έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό σύστημα (B'.8).

Θεωρούμε επομένως το παρακάτω, ισοδύναμο με το (B'.8), νέο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
 \varrho^{n-1}p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^{m+n-1} + a_1\varrho^{m+n-2} + \dots + a_{m-1}\varrho^n + a_m\varrho^{n-1} = 0, \\
 \varrho^{n-2}p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^{m+n-2} + a_1\varrho^{m+n-3} + \dots + a_{m-1}\varrho^{n-1} + a_m\varrho^{n-2} = 0, \\
 &\vdots \\
 \varrho^2p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^{m+2} + a_1\varrho^{m+1} + \dots + a_{m-1}\varrho^3 + a_m\varrho^2 = 0, \\
 \varrho p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^{m+1} + a_1\varrho^m + \dots + a_{m-1}\varrho^2 + a_m\varrho = 0, \\
 p(\varrho) = 0 &\iff a_0\varrho^m + a_1\varrho^{m-1} + \dots + a_{m-1}\varrho + a_m = 0, \\
 \\
 \varrho^{m-1}q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^{n+m-1} + b_1\varrho^{n+m-2} + \dots + b_{n-1}\varrho^m + b_n\varrho^{m-1} = 0, \\
 \varrho^{m-2}q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^{n+m-2} + b_1\varrho^{n+m-3} + \dots + b_{n-1}\varrho^{m-1} + b_n\varrho^{m-2} = 0, \\
 &\vdots \\
 \varrho^2q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^{n+2} + b_1\varrho^{n+1} + \dots + b_{n-1}\varrho^3 + b_n\varrho^2 = 0, \\
 \varrho q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^{n+1} + b_1\varrho^n + \dots + b_{n-1}\varrho^2 + b_n\varrho = 0, \\
 q(\varrho) = 0 &\iff b_0\varrho^n + b_1\varrho^{n-1} + \dots + b_{n-1}\varrho + b_n = 0.
 \end{aligned}
 \tag{B'.10}$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες, το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix}
 a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m \\
 b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\
 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 \\
 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \varrho^{n+m-1} \\
 \varrho^{n+m-2} \\
 \vdots \\
 \varrho^n \\
 \vdots \\
 \varrho^m \\
 \vdots \\
 \varrho \\
 1
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}.
 \tag{B'.11}$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι το ομογενές αυτό σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις στην περίπτωση που η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του ισούται με 0. Άρα, η ζητούμενη συνθήκη δεν είναι άλλη από την ακόλουθη:

$$R(p, q) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B'.12})$$

Η συγκεκριμένη ορίζουσα είναι γνωστή ως ορίζουσα του *Sylvester* ή απαλείφουσα (*resultant*) των παραπάνω πολυωνύμων p και q .

Ως παράδειγμα τώρα, παρουσιάζουμε την ειδική περίπτωση, όπου τα πολυώνυμα p και q που χρησιμοποιούμε, δεν είναι άλλα από τα P_1 και P_2 πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, ως προς την τυχαία μεταβλητή ω_1 , της σχέσεως (5.47). Πράγματι, έστω ότι:

$$P_1 := P_1(\omega_1) = a_1\omega_1^2 + b_1\omega_1 + c_1 = 0, \quad (\text{B'.13})$$

$$P_2 := P_2(\omega_1) = a_2\omega_1^2 + b_2\omega_1 + c_2 = 0.$$

Τότε, η απαλείφουσά τους υπολογίζεται ως εξής:

$$R := R(P_1, P_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B'.14})$$

και έτσι εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι:

$$R = 0 \iff (a_1c_2 - a_2c_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = 0. \quad (\text{B'.15})$$

✓.

B'.4 Κατασκευή του μεταθετικού πίνακα P

Αναφερθήκαμε σε προηγούμενα σημεία της εργασίας αυτής, στην ύπαρξη κατάλληλου μεταθετικού πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n,n}$, όπου με χρήση αυτού, δείξαμε ότι οι πίνακες \mathcal{L}_ω και $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2}$ μπορούν να γραφούν υπό τις εξής μορφές:

$$\mathcal{L}_\omega = QP^T \Delta(\omega) PQ^H \quad \text{και} \quad (\text{B'.16})$$

$$\mathcal{L}_{\omega_1, \omega_2} = QP^T \Delta(\omega_1, \omega_2) PQ^H, \quad (\text{B'.17})$$

για κατάλληλους πίνακες $Q, \Delta(\omega), \Delta(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $(PQ^H)^{-1} = QP^T$.

Πιο συγκεκριμένα, αυτό που διαπιστώσαμε ήταν ότι μέσω του πίνακα P καταφέραμε να μετασχηματίσουμε τους πίνακες Γ_ω και $\Gamma_{\omega_1, \omega_2}$ σε block διαγώνιους πίνακες $\Delta(\omega)$ και $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ αντίστοιχα. Παραθέτουμε λοιπόν ένα απλό παράδειγμα για να παρουσιάσουμε τη διαδικασία αυτή, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι πίνακες Γ_ω και $\Gamma_{\omega_1, \omega_2}$ έχουν τις μορφές που ορίζονται από τις σχέσεις (3.20) και (5.14), αντίστοιχα.

Παράδειγμα B'.4.1. Θεωρούμε πίνακα $\Gamma_\omega \in \mathbb{C}^{5,5}$, τέτοιο ώστε:

$$\Gamma_\omega = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{array} \right]. \quad (\text{B'.18})$$

Χρησιμοποιούμε τότε το μεταθετικό πίνακα $P \in \mathbb{R}^{5,5}$, ο οποίος παράγεται σύμφωνα με τη διαδικασία:

$$P : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B'.19})$$

Κατασκευάζουμε έτσι τον block διαγώνιο πίνακα $\Delta(\omega) \in \mathbb{C}^{5,5}$, με:

$$\Delta(\omega) = P\Gamma(\omega)P^T = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{array} \right]. \quad (\text{B'.20})$$

Ομοίως κατασκευάζουμε το ζητούμενο μεταθετικό πίνακα P , αν στη διάθεσή μας έχουμε τον πίνακα $\Gamma_{\omega_1, \omega_2} \in \mathbb{C}^{n, n}$.

Τέλος, για την πληρότητα της μελέτης αυτής, παραθέτουμε και τη γενικότερη περίπτωση πινάκων $\Gamma_{\omega}, \Gamma_{\omega_1, \omega_2} \in \mathbb{C}^{n, n}$, με $n = p + q$ και $p \geq q$.

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή αν $x := [x_k] \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε το μεταθετικό πίνακα P , να έχει την παρακάτω μορφή:

$$[P(x)]_k = [x_{\pi(k)}], \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{B'.21})$$

όπου οι μεταθέσεις π στους ακεραίους $\{1, 2, \dots, n\}$, πραγματοποιούνται σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:

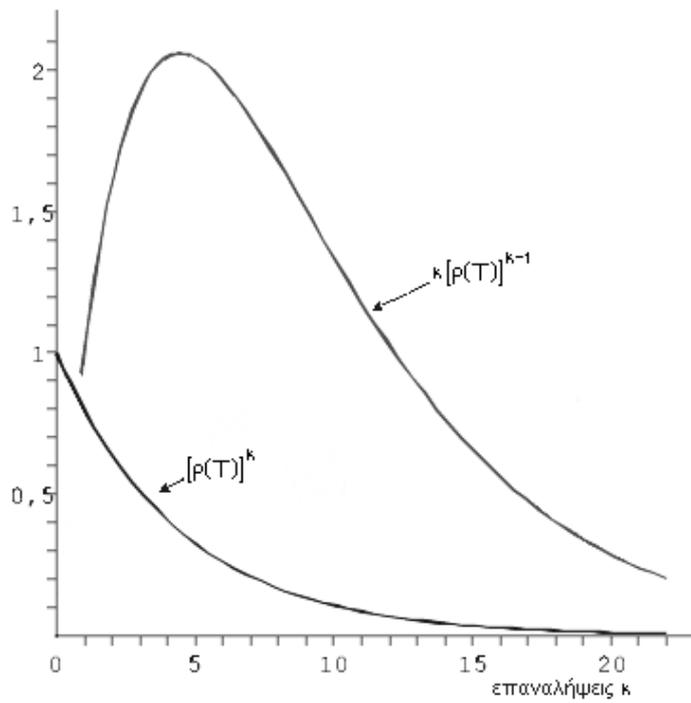
$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi : k \longrightarrow 2k - 1, & \text{όταν } 1 \leq k \leq q, \\ \pi : k \longrightarrow k + q, & \text{όταν } q + 1 \leq k \leq p, \\ \pi : k \longrightarrow 2(k - p), & \text{όταν } p + 1 \leq k \leq p + q = n. \end{array} \right. \quad (\text{B'.22})$$

✓.

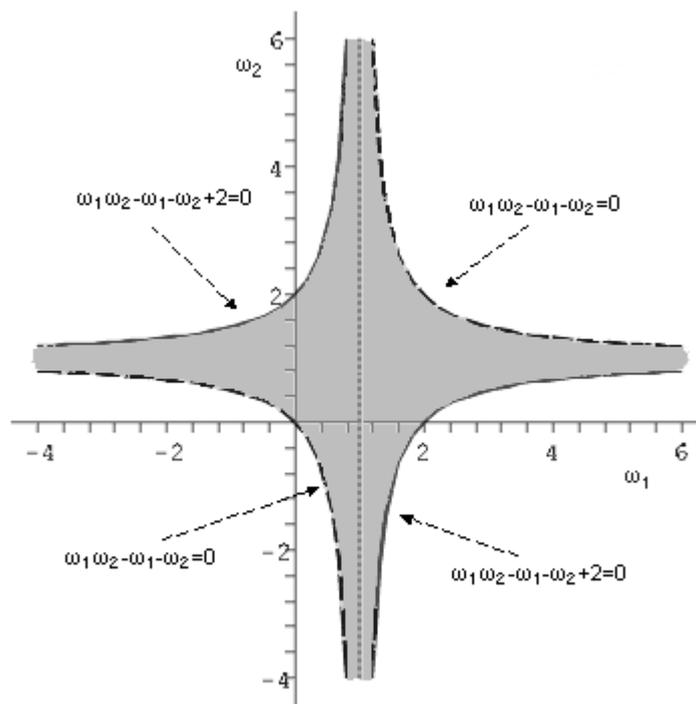
Παράρτημα Γ΄

Γραφικές Παραστάσεις

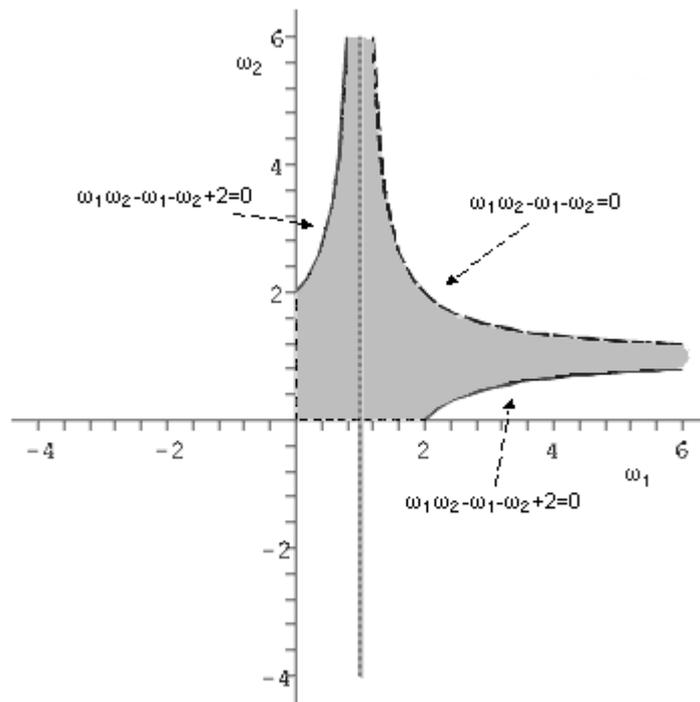
Παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό ορισμένα χρήσιμα γραφήματα, με στόχο την καλύτερη κατανόηση συγκεκριμένων εννοιών, που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορα σημεία στο κείμενο που προηγήθηκε.



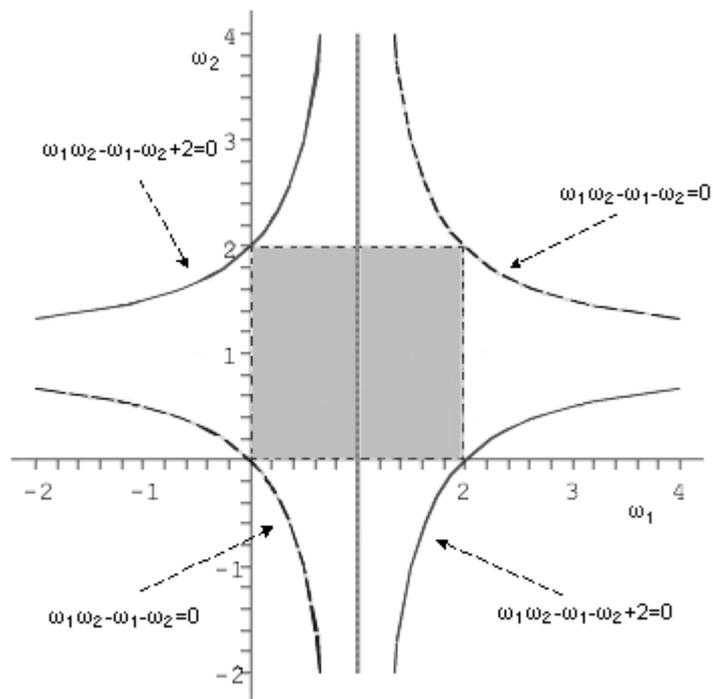
Σχήμα Γ'.1: Γραφικές παραστάσεις των $[\rho(T)]^k$ και $k[\rho(T)]^{k-1}$, για $\rho(T) = 0.8$.



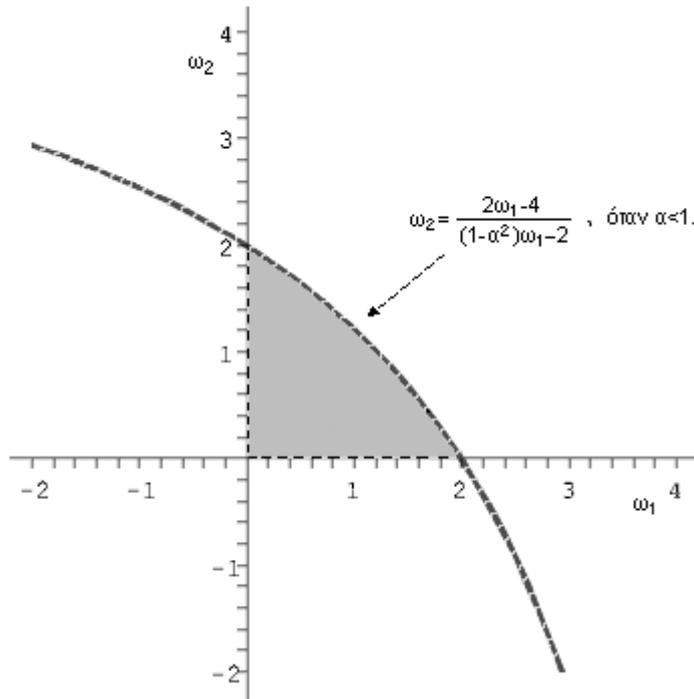
Σχήμα Γ'.2: Γραφική επίλυση της ανισότητας $|c| < 1$.



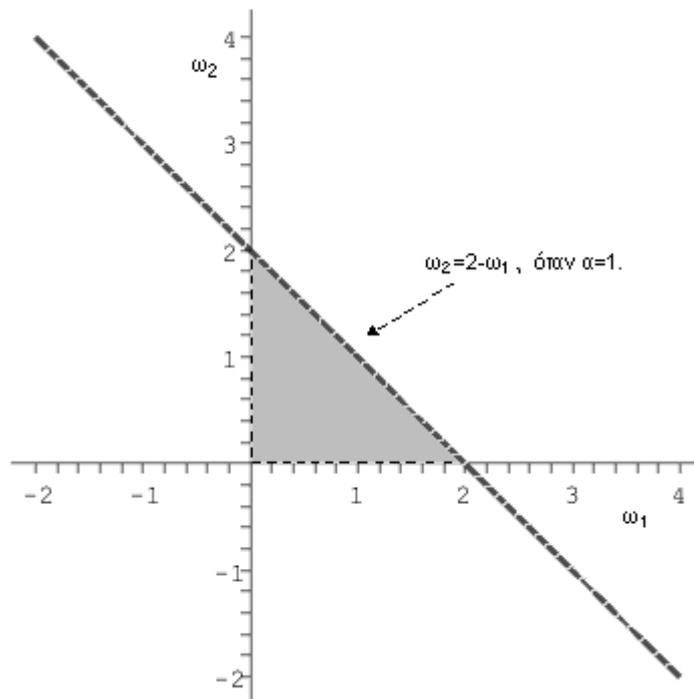
Σχήμα Γ'.3: Γραφική επίλυση της ανισότητας $|c| < 1$, όταν ω_1, ω_2 ομόσημοι.



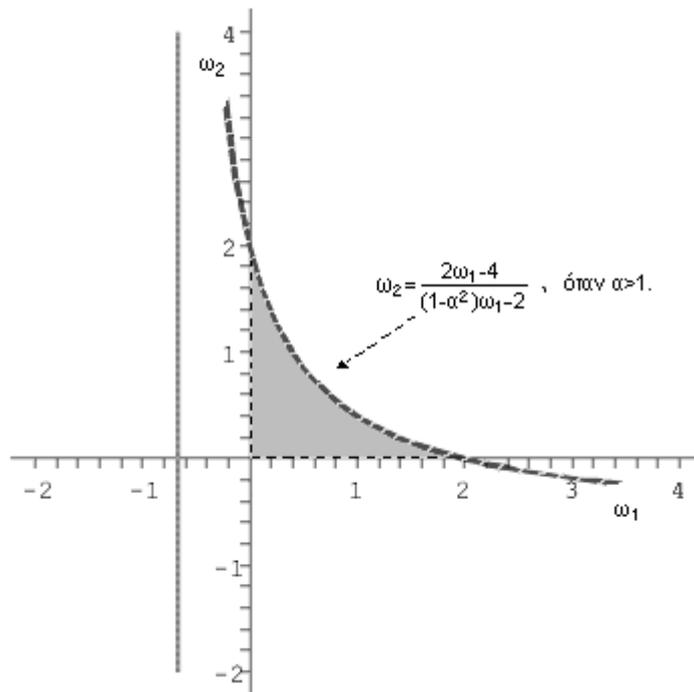
Σχήμα Γ'.4: Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου, όταν για τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύουν οι συνθήκες που περιγράφονται στην Περίπτωση α' της σελίδας 45.



Σχήμα Γ'.5: Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου, όταν για τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύουν οι συνθήκες που περιγράφονται στην Περίπτωση β' της σελίδας 47 και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\alpha < 1$.



Σχήμα Γ'.6: Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου, όταν για τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύουν οι συνθήκες που περιγράφονται στην Περίπτωση β' της σελίδας 47 και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\alpha = 1$.



Σχήμα Γ'.7: Περιοχή συγκλίσεως της MSOR μεθόδου, όταν για τον αρχικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύουν οι συνθήκες που περιγράφονται στην Περίπτωση β' της σελίδας 47 και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\alpha > 1$.

Ευρετήριο

ακολουθία

- διανυσμάτων, 5
- συγκλίνουσα, 5

διάνυσμα

- norm, 74
- κύριο(principal), 25, 77
- βαθμός, 77
- μηδενικό, 7
- ορθοκανονικά(πληθ.), 75
- σφάλμα, 6, 74
- στήλη, 7

επαναληπτικό(ς)

- αλγόριθμος, 7
- σχήμα, 5

Θεώρημα

- Bolzano, 53
- Kahan, 15
- Varga, 9
- Young, 9, 13, 22, 44
- Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών πίνακα, 27

μέθοδος

- Jacobi, 11
- MSOR, 43
- SOR, 11
- βέλτιστη, 20
- επαναληπτική, 5
- ισχυρή σύγκλιση, 15
- περιοχή σύγκλισης, 13
- σύγκλιση, 6, 13

norm

- διανυσματική, 8
- Ευκλείδεια, 32, 74
- Φασματική, 32
- φυσική, 8

παράμετρος

- MSOR(πληθ.), 43
- SOR, 11

πίνακα(ς)

- όμοιοι(πληθ.), 29
- Jordan κανονική μορφή, 9, 77
- block, 9, 77
- norm, 73
- supremum φασματικής ακτίνας, 15, 44, 73
- Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών, 27
- ανάλυση κατά Cholesky, 76
- ανάστροφος, 73
- αντι-Ερμιτιανός, 36, 75
- αντιστρέψιμος, 5
- δείκτης κατάστασης, 9, 74
- διάσπαση, 5
- συνήθης, 11
- διαγώνιος, 11
- δικυκλικός, 12
- επαναληπτικά ταχύτερος, 8
- επαναληπτικός, 5
- Jacobi, 11, 73
- MSOR, 43, 73
- SOR, 11, 73
- βέλτιστη MSOR, 73
- βέλτιστη SOR, 73

- Ερμιτιανός, 16, 75
- φάσμα ιδιοτιμών, 12, 73
- φασματική ακτίνα, 6, 73
- ιδιοτιμές, 12
- θετικά ορισμένος, 16, 75
- μεταθετικός, 12, 73, 81
- μετασχηματισμός ομοιότητας, 76
- μηδενικός, 73
- μοναδιαίος, 7, 73
- ομοιότητας, 76
- ορίζουσα, 73
 - Sylvester, 80
- ορθογώνιος, 27
- ορθομοναδιαίος, 27
- ρυθμιστής, 5
- συμμετρικός, 75
- συνεπώς διατεταγμένος, 12
- συντελεστών, 5
- συζυγής μιγαδικός ανάστροφος, 73
- τάξη, 9
- τριδιαγώνιος, 12
- πολλαπλότητα
 - αλγεβρική, 25, 77
 - γεωμετρική, 77
- πολυώνυμο
 - Schur, 18
 - απαλείφουσα(resultant), 64, 74, 80
- σύστημα
 - γραμμικό, 5
- ταχύτητα συγκλίσεως
 - ασυμπτωτική, 9, 74
 - μέση, 8, 74

Βιβλιογραφία

- [1] Γ.Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ ΚΑΙ Β.Α. ΔΟΥΓΛΑΗΣ. *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο Κρήτης, 2002.
- [2] Π. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ. ΤΣΑΚΛΙΔΗΣ. *Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2001.
- [3] Β.Α. ΔΟΥΓΛΑΗΣ, Δ. ΝΟΥΤΣΟΣ ΚΑΙ Α. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΣ. *Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας*, Ηράκλειο Κρήτης, Οκτώβρης 2001.
- [4] G.H. GOLUB AND J.E. DE PILLIS. *Toward an Effective 2-parameter Method*, in *Iterative Methods for Large Linear Systems*, by D. R. Kincaid and L. Hayes, eds., Academic Press, New York, 1990, pp.107-118.
- [5] A. HADJIDIMOS AND M. NEUMANN. *Euclidean Norm Minimization of the SOR Operators*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.19, No.1, January 1998, pp.191-204.
- [6] P. HENRICI. *Applied and Computational Complex Analysis*, Volume 1, Wiley-Interscience Publication, New York, 1988.
- [7] R.A. HORN AND C.R. JOHNSON. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [8] R.A. HORN AND C.R. JOHNSON. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [9] I. DA SILVA MILLÉO. *Minimization of the l_2 -Norms of the SOR and MSOR Operators Applied to Skew-symmetric Matrices*, M.Sc. Dissertation Thesis, Department of Mathematics, Federal University of Paraná, Curitiba, Paraná, Brazil, 2001.
- [10] T. MUIR. *A Treatise on the Theory of Determinants*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

- [11] R.S. VARGA. *Matrix Iterative Analysis, 2nd, revised and expanded edition*, Springer, Berlin, 2000.
- [12] D.M. YOUNG. *Iterative Methods for Solving Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Trans. Math. Soc. 76, 1954, pp.92-111.
- [13] D.M. YOUNG. *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.