ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΕ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΑΚΟΥΣ ΚΛΑΔΟΥΣ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΣΚΟΥΡΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ   2007

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΕΤΡΑΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»
ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύνοψη

Η εργασία έχει 3 μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε μια σύνοψη σχετικά με την εφαρμογή των διαφορικών παιγνίων σε ολιγοπωλιακούς κλάδους. Αναλύουμε τα βασικά τεχνικά χαρακτηριστικά και το πώς μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και να αντιμετωπίσουμε ένα δυναμικό οικονομικό ολιγοπωλιακό πρόβλημα.

Στο δεύτερο μέρος κάνουμε μια αναφορά σε κάποια προβλήματα που εξακολουθούν να υπάρχουν στις σημερινές μοντελοποιήσεις επικεντρωμένοι περισσότερο στο πρόβλημα της άμεσης ανταπόκρισης ανάμεσα σε μακροχρόνιες και βραχυχρόνιες μεταβλητές.

Στο τρίτο μέρος επιχειρούμε παράλληλα με διαφήμιση να πάρουμε και προσπάθεια έρευνας για ανάπτυξη του προϊόντος και να επιλύσουμε το μοντέλο αυτό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΗΜΕΡΙΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΉΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΙΑΦΗΜΙΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ R&D

1 ΣΥΝΟΨΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΕ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΑΚΟΥΣ ΚΛΑΔΟΥΣ

1.1 Εισαγωγή

Στην οικονομική επιστήμη το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας ειδικά στην μικροοικονομία και στην βιομηχανική οργάνωση έχει αναπτυχθεί με βάση στατικά μοντέλα. Ακόμα και το θέμα της στρατηγικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις επιχειρήσεις με το χρόνο, έχει μοντελοποιηθεί κυρίως με επαναλαμβανόμενα παίγνια που είναι στην ουσία στατικά. Στην πραγματικότητα όμως αυτό δεν εκφράζει το πρόβλημα που μελετάμε και επιλύουμε και αυτό φαίνεται και στην διαφορά των αποτελεσμάτων ανάμεσα στο στατικό και δυναμικό μοντέλο.

Η θεωρία των διαφορικών παιγνίων ξεκίνησε το 1954 από τον Isaacs άλλα για μεγάλο διάστημα έμεινε στο περιθώριο της έρευνας στα οικονομικά και ο κύριος λόγος είναι ότι ο Isaacs και πολλοί άλλοι επιστήμονες που ασχολιόντουσαν με τον τομέα αυτό όπως οι Arrow , Bellman, Nash, Von Neumann, Tucker κ.τ.λ.π ήταν απορροφημένοι και περιορισμένοι επιστημονικά από την κυβέρνηση των ΗΠΑ και της Ρωσίας ώστε να ασχοληθούν με στρατιωτικά προβλήματα, τομέας όπου βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή τα διαφορικά παίγνια επίσης. Οι πρώτες δημοσιεύσεις έγιναν το 1965 από τον Isaacs και από τον Potryagin το 1966. Συνεπώς οι εφαρμογές στα οικονομικά είναι σχετικά πρόσφατες και αναλογικά όχι τόσο ανεπτυγμένες

1.2 Περιγραφή και τεχνικά χαρακτηριστικά

Θα παραθέσουμε στην αρχή μια απλή περιγραφή και κάποια βασικά τεχνικά χαρακτηριστικά τα οποία θα δώσουν μία θεωρητική βάση που θα βοηθήσει κάποιον να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα διαφορικών παιγνίων. Η διαφορά με ένα απλό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι ότι ο κάθε παίχτης μεγιστοποιεί όχι απλά ως προς τις δικές του μεταβλητές , αλλά και ως προς την συμπεριφορά των υπολοίπων παιχτών όπως θα δούμε αναλυτικότερα παρακάτω.

1.2.1 Περιγραφή και δομή προβλήματος διαφορικών παιγνίων

Σε ένα πρόβλημα διαφορικών παιγνίων και βελτίστου ελέγχου έχουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε κάποια συνάρτηση αξίας η οποία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες. Υπάρχουν οι μεταβλητές που ελέγχουμε εμείς καθορίζοντας τις τιμές τους. Το πως όμως θα επηρεάσει αυτή η επιλογή τα αποτελέσματα μας εξαρτάται από τον μηχανισμό που περιγράφει το μοντέλο μας.

Για παράδειγμα το πως θα κινηθεί ένα αυτοκίνητο δεν εξαρτάται μόνο από το πόσο γκάζι θα πατήσουμε αλλά και απο τον μηχανισμό του αυτοκινήτου. Οι μεταβλητές που ελέγχουμε εμείς λέγονται **μεταβλητές ελέγχου (control variables),** ενώ οι μεταβλητές τις οποίες δεν καθορίζουμε, αλλά λαμβάνουν τιμές ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται και ανάλογα και με τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου από τις οποίες υπάρχει εξάρτηση, ονομάζονται **μεταβλητές κατάστασης (state variables)**

οι παίχτες , στην περίπτωση οικονομικών προβλημάτων οι επιχειρήσεις, επιλέγουν την στρατηγική τους, δηλαδή παίρνουν αποφάσεις επιλέγοντας τιμές στις μεταβλητές ελέγχου όπως για παράδειγμα την ποσότητα που θα παράγουν ή το ποσό που θα διαθέσουν για επένδυση. Αυτές οι επιλογές επιδρούν και καθορίζουν τις τιμές στις μεταβλητές κατάστασης.

Για να επιλύσουμε συνεπώς το πρόβλημα χρειαζόμαστε τον μηχανισμό μεταβολλής της κατάστασης του συστήματος.

Εφόσον έχουμε πρόβλημα διαφορικών παιγνίων, κάθε μεταβλητή κατάστασης ή διάνυσμα μεταβλητών θα μεταβάλλεται σύμφωνα με μια διαφορική εξίσωση ως προς τον χρόνο

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t), u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής x_i ως προς τον χρόνο t και ο ρυθμός αυτός εξαρτάται από τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου και κατάστασης. Το $\left(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)$ είναι το διάνυσμα των επιλογών όλων των παιχτών, δηλαδή της τιμής της μεταβλητής ελέγχου για κάθε παίχτη στο χρόνο t. Εφόσον έχουμε πρόβλημα παιγνίων και όχι βελτίστου ελέγχου η συνάρτηση f εξαρτάται από τις επιλογές όλων των παιχτών $u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)$ και όχι μόνο από το $u_i(t)$.

Επίσης συνήθως χρειαζόμαστε και μια αρχική συνθήκη ειδικά αν το πρόβλημά μας είναι πεπερασμένου ορίζοντα και είναι λογικό διότι αν ξέρουμε για παράδειγμα ότι κάτι αυξήθηκε κατά κάποιο ποσό, για να ξέρουμε την τιμή του πρέπει να ξέρουμε και πόσο ήταν αρχικά ή σε κάποιο σημείο. Συνήθως λοιπόν η αρχική συνθήκη στο χρόνο t = 0 θεωρείται γνωστή $\{x_i(t)\}_{i=1}^N = \{x_{0,i}(t)\}_{i=1}^N$ πράγμα βέβαια που δεν είναι απαραίτητο αφού μπορούμε να έχουμε την συνθήκη σε κάποιο άλλο χρόνο.

Το σύνολο των διαφορικών εξισώσεων αυτών για όλες τις τιμές του ι καλείται δυναμικό σύστημα του προβλήματος

Σε κάθε δυναμικό πρόβλημα υπάρχει τουλάχιστον μία μεταβλητή ως προς τον χρόνο που εξαρτάται από τις τιμές της ίδιας στο παρελθόν και επίσης από τις επιλογές των παιχτών.

Στην περίπτωση μας θα εξετάσουμε την εφαρμογή πάνω σε οικονομικά προβλήματα και συγκεκριμένα σε ολιγοπωλιακούς κλάδους όπου οι παίχτες θα είναι N επιχειρήσεις και οι μεταβλητές και τα μεγέθη θα είναι οικονομικά. Για παράδειγμα θα καθορίζουμε την παραγομένη ποσότητα δεδομένου ότι η τιμή μεταβάλλεται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο που δίνεται από μια συνήθη διαφορική εξίσωση με κάποια αρχική συνθήκη. Επίσης η συνάρτηση αξίας θα έχει προφανώς σχέση με το κέρδος.

1.2.2 Η συνάρτηση αξίας (objective function)

Κάθε παίχτης έχει να μεγιστοποιήσει ή να ελαχιστοποιήσει μια συνάρτηση αξίας. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι έχουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος $\pi_i(t)$. Η συνάρτηση του κέρδους για τον παίχτη i εξαρτάται από τις επιλογές του ίδιου αλλά και των αντιπάλων του. Σκοπός του i είναι να μεγιστοποιήσει τη ροή του κέρδους σε μία χρονική περίοδο $\left[0,T\right]$ όπου το T μπορεί να είναι και άπειρο. δηλαδή

$$\max_{u_i(t)} J_i = \int_0^T \pi_i(t) e^{-\rho t} dt$$

Όπου ρ είναι ο συντελεστής υποτίμησης (discount rate) , για παράδειγμα το συνεχές επιτόκιο. Δηλαδή ο όρος $e^{-\rho t}$ εκφράζει το πόσο χάνει την αξία του με το χρόνο το κέρδος. Επίσης θεωρούμε συνήθως το ρ ίδιο και σταθερό για όλες τις επιχειρήσεις.

Το κέρδος συνήθως θα είναι το γινόμενο της ποσότητας με την τιμή αφαιρόντας τα εκάστοτε κόστη ανάλογα με το μοντέλο

Για να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης ουσιαστικά κάθε παίχτης επιλέγει τιμή στην μεταβλητή ελέγχου του $u_i(t)$ καθορίζοντας έτσι μια τροχιά για τον έλεγχο του μέσω της μεταβλητής κατάστασης.

1.2.3 Πληροφόρηση

Ιδιαίτερη σημασία έχει και το είδος της πληροφόρησης που έχει ο κάθε παίχτης σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,T]$. Στη θεωρία των δυναμικών παιγνίων διακρίνουμε 3 περιπτώσεις πληροφόρησης. Ο τρόπος που εργαζόμαστε ανάλογα με την πληροφόρηση είναι συγκεκριμένος και θα το δούμε παρακάτω.

- **Open loop (OLI)**

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει κοινή γνώση για το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης στον χρόνο $t = 0$. Επομένως στην αρχή κάθε παίχτης επιλέγει την διαδρομή της μεταβλητής ελέγχου λαμβάνοντας υπόψιν την αναμενόμενη συμπεριφορά των αντιπάλων.

- **Closed loop (CLI)**

Με closed-loop (ή ιστορικά επαναλαμβανόμενη) πληροφορία οι παίχτες γνωρίζουν σε κάθε χρονική στιγμή όλη την ιστορία στο $[0,\tau)$

- **Feedback**

Εδώ οι παίχτες γνωρίζουν σε κάθε χρονική στιγμή t την κατάσταση την χρονική στιγμή t -1, δηλαδή το διάνυσμα $X(t-1) = \{ x_1(t-1), x_2(t-1), \ldots, x_N(t-1) \}$. Η γενικότερα το $X(t-\varepsilon)$. Αυτός ο τρόπος πληροφόρησης δεν έχει μελετηθεί ιδιαίτερα στη διαφορικά ολιγοπωλιακά παίγνια.

1.2.4 Σενάρια ισορροπίας

Όπως και στα στατικά παίγνια μπορούμε να περιγράψουμε την στρατηγική αλληλεπίδρασης με διαφορετικούς τρόπους.

- Πρώτον μπορούμε με τον κλασσικό τρόπο όπου η κάθε επιχείρηση παρατηρεί την συμπεριφορά των υπολοίπων και αντιδρά σύμφωνα με αυτή. Για παράδειγμα στην ισορροπία κατά Nash η επιλογή των μεταβλητών ελέγχου για κάθε παίχτη του δίνει βέλτιστο αποτέλεσμα ως προς τις επιλογές των άλλων. Αυτή είναι και η περίπτωση που θα μελετήσουμε εδώ.
- Δεύτερον μπορούμε να έχουμε το μοντέλο ηγέτη-ακόλουθου την ισορροπία κατά Stackelberg όπου ο ηγέτης παίρνει υπόψιν την λογική βέλτιστη στρατηγική του ακολούθου και μπαίνει στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του σαν επιπλέον παράμετρος
- Τρίτον μπορεί να υπάρχει συνεργασία μεταξύ των παιχτών. Μπορούν για παράδειγμα να έχουν μια κοινή συνάρτηση ωφελιμότητας και να μεγιστοποιούν το κοινό συνολικό κέρδος. Για παράδειγμα στην βιομηχανική οργάνωση οι επιχειρήσεις κάνουν ένα καρτέλ και μεγιστοποιούν τα κέρδη ως προς την επένδυση για R&D ώστε να μειώσουν το οριακό κόστος ή να βελτιώσουν τα προϊόντα

1.2.5 Τρόποι επίλυσης.

1.2.5.1 Αναλυτική θεωρητική επίλυση

Θα κάνουμε μια σκιαγράφηση του πιο συνηθισμένου και μάλλον πιο αποτελεσματικού, για τις περισσότερες περιπτώσεις, τρόπου επίλυσης τέτοιου είδους προβλημάτων

Θεωρούμε $u_{-i}(t)$ και $x_{-i}(t)$ το διάνυσμα που περιέχει τις τιμές της μεταβλητής ελέγχου και κατάστασης αντίστοιχα για όλους τους παίχτης εκτός του i .

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης για τον παίχτη i.

$$\max_{u_i(t)} J_i = \int_0^T \pi_i\left(x_i(t), x_{-i}(t), u_i(t), u_{-i}(t)\right) e^{-\rho t} dt \qquad (1)$$

Και οι μεταβλητές κατάστασης να ικανοποιούν το δυναμικό σύστημα

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_i(t) = f\left(\{x_i(t)\}_{i=1}^N, \{u_i(t)\}_{i=1}^N\right) \qquad (2)$$

με αρχικές συνθήκες $\{x_i(t)\}_{i=1}^N = \{x_{0,i}(t)\}_{i=1}^N$

Αν $u_i^*(t)$ και $x_i^*(t)$ ο βέλτιστος έλεγχος και η βέλτιστη τροχιά, σύμφωνα λοιπόν με την αρχή Potryagin η $u_i^*(t)$ που μεγιστοποιεί την J_i θα μεγιστοποιεί κατά μήκος της $x_i^*(t)$ και την Χαμιλτονιανή που ορίζεται ως εξής.

$$H\left(x_i(t), u_i(t), \lambda_i(t), t\right) \equiv \left[\pi_i\left(x_i(t), x_{-i}(t), u_i(t), u_{-i}(t)\right) + \lambda_i(t) \cdot f\left((x_i(t), \{u_i(t)\}_{i=1}^N\right)\right] e^{-\rho t} \qquad (3)$$

Δηλαδή εξάγουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης αξίας στην μεγιστοποίηση αυτής της συνάρτησης.

Η πρώτη τάξης συνθήκη για την Χαμιλτονιανή ως προς $u_i(t)$ είναι

$$\frac{\partial H\left(x_i(t), u_i(t), \lambda_i(t), t\right)}{\partial u_i(t)} = 0 \qquad (4)$$

Η $\lambda_i(t) = \mu_i(t) e^{\rho t}$ είναι μια συνεχής και κατά τμήματα παραγωγήσιμη συνάρτηση που ονομάζεται (co-state variable) η οποία έχει ένα αντίστοιχο ρόλο με τους πολλαπλασιαστές Lagrance στα στατικά προβλήματα βελτιστοποίησης και η οποία ικανοποιεί τα εξής (στη βέλτιστη τροχιά και στο βέλτιστο έλεγχο)

Αν ορίσουμε $H_i(t) \equiv H\left(x_i(t), u_i(t), \lambda_i(t), t\right)$

Στα open loop προβλήματα στα οποία η βέλτιστη απάντηση του κάθε παίχτη λαμβάνεται άμεσα η συνθήκη για την co-state variable είναι

$$-\frac{\partial H_i\left(t\right)}{\partial x_i(t)} = \frac{\partial \mu_i(t)}{\partial t} \text{ με } \frac{\partial \lambda_i(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mu_i(t) e^{\rho t}}{\partial t} = e^{\rho t}\frac{\partial \mu_i(t)}{\partial t} + \rho\lambda_i(t)$$

επομένως η τελική σχέση είναι

$$^{*} \qquad -e^{\rho t}\frac{\partial H_i\left(t\right)}{\partial x_i(t)} = \frac{\partial \lambda_i(t)}{\partial t} - \rho\lambda_i(t) \qquad (5o)$$

Αν το πρόβλημα μας είναι closed-loop τότε η συνθήκη αλλάζει.

$$-e^{\rho t}\frac{\partial H_i(t)}{\partial x_i(t)} - e^{\rho t}\sum_{i\neq j}\frac{\partial H_i(t)}{\partial u_j(t)}\cdot\frac{\partial u_j^*(t)}{\partial x_i(t)} = \frac{\partial \lambda_i(t)}{\partial t} - \rho\lambda_i(t) \qquad (5c)$$

Το $u_i^*(t)$ είναι ο βέλτιστος έλεγχος που ενδεχομένως να βγαίνει και άμεσα λύνοντας πρώτα την συνθήκη (4). Ο όρος $\frac{\partial H_i(t)}{\partial u_j(t)}\cdot\frac{\partial u_j^*(t)}{\partial x_i(t)}$ εκφράζει την επίδραση του feedback από τον j στον ι μέσω της κάθε μεταβλητής ελέγχου.

Όταν δεν υπάρχει τέτοιο feedback τότε η closed-loop λύση καταλήγει στην open-loop. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχουμε τέλειο παίγνιο και η ισορροπία κατά Nash είναι τέλεια ισορροπία υποπαιγνίων (ή Markov)

Επίσης ειδικά σε προβλήματα πεπερασμένου ορίζοντα συνηθίζουμε να θέτουμε

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_i(t)\cdot x_i(t) = 0 \qquad (6)$$

Έπειτα για να βρούμε το ευσταθές σημείο (x^*, u^*) μπορούμε να λύσουμε

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = g(x,u) = 0 \\ \dot{x}_i(t) = f(x,u) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

[*] Η Χαμιλτονιανή μπορεί να οριστεί και χωρίς τον όρο $e^{-\rho t}$ και να μην εμφανιστεί ούτε σε αυτήν την σχέση. Το τελικό αποτέλεσμα πάντως είναι πάντα όπως το δίνουμε εδώ ώστε ο αριστερός όρος να μην περιέχει τελικά όρο $e^{-\rho t}$.

Η ευστάθεια του συστήματος στη γειτονιά του σημείου ευστάθειας εξαρτάται από το ίχνος και την ορίζουσα του πίνακα των μερικών παραγώγων

$$J = \begin{bmatrix} f_x(x^*,u^*) & f_u(x^*,u^*) \\ g_x(x^*,u^*) & g_u(x^*,u^*) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Υπολογίζουμε το ίχνος του πίνακα

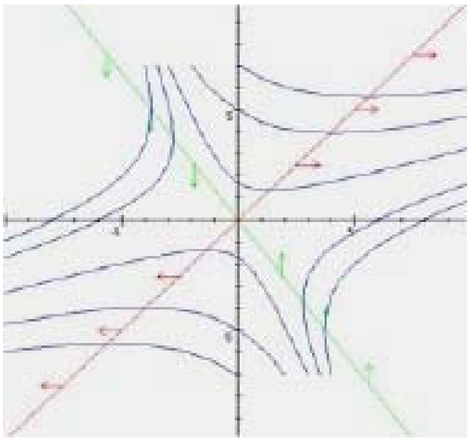
$$Tr(J) = f_x(x^*,u^*) + g_u(x^*,u^*)$$

Και την ορίζουσα

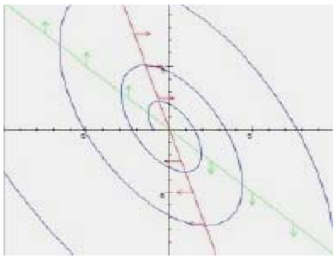
$$\Delta(J) = f_x(x^*,u^*)g_u(x^*,u^*) - g_x(x^*,u^*)f_u(x^*,u^*)$$

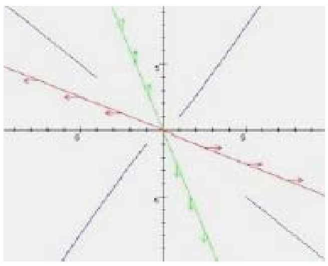
Έχουμε έπειτα τις εξής περιπτώσεις

- Αν $\Delta(J) < 0$
τότε έχουμε **σάγμα**



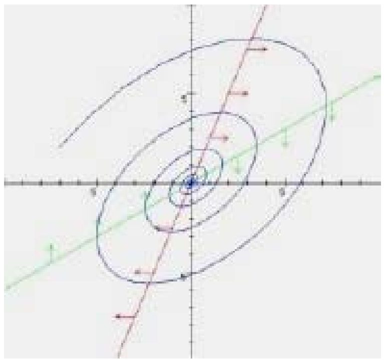
- Αν $\Delta(J) > 0$ και $Tr(J) > 0$
Τότε έχουμε **ασταθή ισορροπία**, Αν $\left(Tr(J)\right)^2 < 4\Delta(J)$ τότε η τροχιά είναι σπείρα που κινείται εξωτερικά , ενώ αν $\left(Tr(J)\right)^2 \geq 4\Delta(J)$ τότε είναι ευθείες που κινούνται προς τα έξω

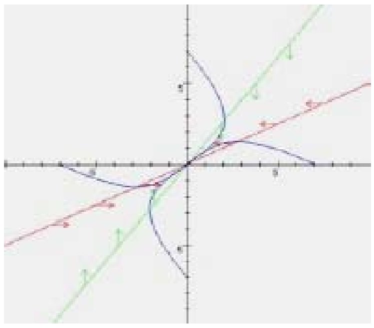




- Αν $\Delta(J) > 0$ και $Tr(J) < 0$

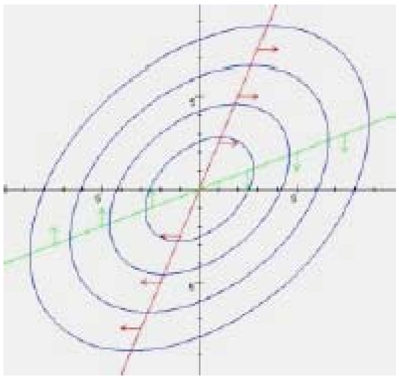
Τότε έχουμε **ευσταθή ισορροπία.** Αν $\left(Tr(J)\right)^2 < 4\Delta(J)$ τότε η τροχιά είναι σπείρα που κινείται εσωτερικά , ενώ αν $\left(Tr(J)\right)^2 \geq 4\Delta(J)$ τότε είναι ευθείες που κινούνται εσωτερικά





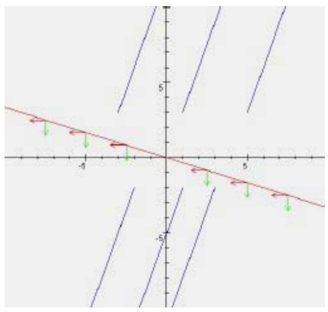
- Αν $\Delta(J) > 0$ και $Tr(J) = 0$

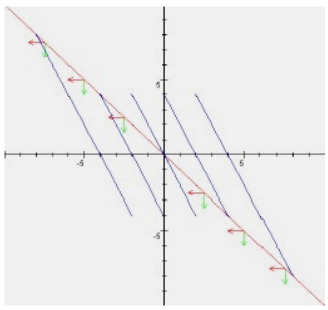
Σε αυτήν την περίπτωση οι τροχιές είναι **ελλειπτικές**



- Αν $\Delta(J) = 0$

Τότε έχουμε **εκφυλισμένη περίπτωση** καθώς αφού η ορίζουσα είναι μηδέν τότε τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix}$ είναι μηδέν και οδηγεί τη λύση να είναι μια συλλογή από παράλληλες ευθείες.





Και προφανώς πρέπει το σημείο που βρήκαμε να ικανοποιεί και τις εξισώσεις (4) και (5). Η ισορροπία του συστήματος εξαρτάται βέβαια επίσης από τον ορίζοντα του προβλήματος και τις συνθήκες αρχικών η τελικών τιμών. Σε περίπτωση ειδικά που έχουμε περιορισμούς τελικών τιμών, η ισορροπία του συστήματος θα συγκλίνει τελικά εκεί..

Στην ευσταθή ισορροπία κατά Nash η ανάλυση των ιδιοτήτων ενός δυναμικού συστήματος είναι κάτι ξεχωριστό και ανεξάρτητο από από την ισορροπία ενός διαφορικού παιγνίου. Ἐχουμε ισορροπία κατά Nash όταν η στρατηγική κάθε παίχτη αποτελεί βέλτιστη απάντηση στις στρατηγικές όλων των υπολοίπων παιχτών. Από την πλευρά της ανάλυσης του δυναμικού συστήματος ισορροπία σημαίνει ότι οι μεταβλητές μένουν στάσιμες με το χρόνο. Σε μία ευσταθή ισορροπία κατά Nash θέλουμε να ισχύουν και τα δύο. Στην πιο απλή αλλά και πολύ συνηθισμένη στην θεωρία περίπτωση, παίρνουμε συμμετρία ανάμεσα στις επιχειρήσεις θεωρώντας ίσα τα μεγέθη τους και ανάλογες τις στρατηγικές τους.

1.2.5.2 Αριθμητικές μέθοδοι

Στην αναλυτική επίλυση χρησιμοποιούμε συνήθως γραμμικά ή τετραγωνικά μοντέλα τα οποία δεν ανταποκρίνονται όμως πάντα στην πραγματικότητα.

Συγκεκριμένα απαιτούν η συνάρτηση απόδοσης να είναι τετραγωνική και το δυναμικό σύστημα, δηλαδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την μεταβολή των μεταβλητών κατάστασης να είναι γραμμικές. Γι αυτό τα μοντέλα αυτά δεν μπορούν να επιλύσουν εκτός των άλλων προβλήματα με περιορισμούς φραγμάτων όπως μη αρνητικότητα ή περιορισμούς στην ποσότητα παραγωγής.

Στις αριθμητικές μεθόδους χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον η αρχή δυναμικού προγραμματισμού ως τρόπος επίλυσης. Για να επιλυθούν αναλυτικά οι εξισώσεις Bellman που προκύπτουν, ειδικά αν είναι παραπάνω από δευτέρου βαθμού το σύστημα, τις περισσότερες φορές δεν έχει καν αναλυτική λύση. Τέτοια μοντέλα μπορούν να επιλυθούν όμως με ειδικές αριθμητικές μεθόδους.

Μία τέτοια μέθοδος είναι για παράδειγμα η μέθοδος της ορθογώνιας σύγκρισης του Chebyshev (Chebyshev orthogonal collocation method) την οποία όμως δεν θα δούμε αναλυτικά. Περιληπτικά αυτή η μέθοδος προσεγγίζει τις εξισώσεις Bellman χρησιμοποιώντας έναν άγνωστο γραμμικό συνδυασμό από θεμελιώδεις πολυωνυμικές συναρτήσεις Chebyshev. Οι άγνωστες παράμετροι βρίσκονται απαιτώντας την ικανοποίηση των εξισώσεων Bellman , όχι σε όλα τα σημεία αλλά σε ένα μικρό αριθμό διακριτικά επιλεγμένων σημείων, κόμβων που καλούμε “collocation nodes”

Επιλέγοντας έναν ίσο αριθμό κόμβων και γνωστών θεμελιωδών συναρτήσεων μπορεί να υπολογιστεί μια προσεγγιστική λύση των εξισώσεων Bellman λύνοντας μία πεπερασμένης διάστασης μη γραμμική ρίζα με κάποια επαναληπτική μέθοδο όπως τη μέθοδο Newton ή quasi-Newton.

Τέτοιου είδους αριθμητικές μέθοδοι παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όχι μόνο από επιστημονική πλευρά αλλά και από άποψη εφαρμογής σε πραγματικά προβλήματα.

1.3 Είδη προβλημάτων σε ολιγοπωλιακούς κλάδους

Οι περισσότερες εφαρμογές των διαφορικών παιγνίων στα οικονομικά βρίσκονται στον τομέα της βιομηχανικής οργάνωσης και μετά στην μακροοικονομία.

Τα προβλήματα διαφορικών παιγνίων σε ολιγοπωλειακούς κλάδους μπορούν να διαχωριστούν σε τέσσερις κατηγορίες

- **(1) Ολιγοπωλιακά παίγνια με δυναμικές τιμές**
- **(2) Ολιγοπωλιακά παίγνια με συσσώρευση κεφαλαίου για παραγωγή**
- **(3) Παίγνια έρευνας και ανάπτυξης, R&D (research & development)**
- **(4) Παίγνια διαφήμισης**

Ο διαχωρισμός αυτός είναι ανάλογα με τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε και μοντελοποιούμε το πρόβλημα. Δηλαδή σε κάθε κατηγορία προβλήματος θεωρούμε ότι είναι διαφορετικά τα μεγέθη που μπορούμε να ελέγξουμε και διαφορετικός μηχανισμός επίδρασης πάνω σε διαφορετικές μεταβλητές κατάστασης.

Ας δούμε συνοπτικά ένα πίνακα με τις μεταβλητές σε κάθε είδος προβλήματος

ΕΙΔΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ
Με Δυναμικές τιμές	**Ποσότητα παραγωγής**	**τιμή**
Με συσσώρευση κεφαλαίου για παραγωγή	Α) *Πρόβλημα Coutnot* : **Ποσότητα παραγωγής** Β) *Πρόβλημα Bertrant* : **Τιμή** Γ) **Επίπεδο Επένδυσης**	**Ποσότητα κεφαλαίου**
Ερευνας και ανάπτυξης R&D	**Ποσότητα παραγωγής, R&D effort**	Α) *Ανάπτυξη προιόντος*: **Βαθμός υποκαταστατικότητας** Β) *Ανάπτυξη παραγωγικής διαδικασίας*: **κόστος**
Διαφήμισης	**Ποσότητα παραγωγής, Advertising effort**	**Μέγεθος αγοράς** (ή Βαθμός υποκαταστατικότητας)

Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά κάθε μία περίπτωση από αυτές.

1.3.1 Ολιγοπωλιακά παίγνια με δυναμικές τιμές

Ίσως ο απλούστερος τρόπος για να σκεφτούμε την δυναμική της αλληλεπίδρασης της αγοράς είναι ότι οι τιμές εξελίσσονται με τον χρόνο σύμφωνα με κάποιους αποδεκτούς κανόνες. Συνεπώς σε τέτοιου είδους προβλήματα έχουμε σαν μεταβλητή κατάστασης την τιμή άρα έχουμε και μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον τρόπο που μεταβάλλεται η τιμή με τον χρόνο και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση αξίας των κερδών ως προς την ποσότητα η οποία σε αυτά τα προβλήματα είναι η μεταβλητή ελέγχου.

1.3.1.1 Απλοποιημένο πρόβλημα με δυσπροσάρμοστες τιμές (price stickiness) και ομογενή αγαθά.

Ας δούμε για αρχή ένα σχετικά απλό παράδειγμα. Θεωρούμε ένα ολιγοπώλιο όπου σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,\infty)$ N επιχειρήσεις παράγουν ποσότητες $q_i(t)$ $i \in \mathbb{Z} \cap [1,\mathrm{N}]$ του ίδιου ομογενούς αγαθού και το συνολικό κόστος να είναι

$$C_i\left(t\right) = cq_i(t) - \frac{1}{2}q_i^2\left(t\right) \ . \qquad (9)$$

Σε κάθε περίοδο η ζήτηση της αγοράς περιγράφεται από την εξίσωση

$$\hat{p}\left(t\right) = A - B\sum_{i=1}^{N} q_i(t) \qquad (10)$$

και η μεταβολή της τιμής δίνεται από την σχέση

$$\dot{p}\left(t\right) = w\left(\hat{p}\left(t\right) - p\left(t\right)\right) \qquad (11)$$

με αρχική συνθήκη $p\left(0\right) = 0$ και $p\left(t\right) \geq 0 \ \forall t \in [0,T]$

Το κέρδος σε κάθε χρονική στιγμή είναι $\pi_t\left(t\right) = q_i(t)\left(p\left(t\right) - C_i\left(t\right)\right)$ αφού το κέρδος για κάθε μονάδα παραγωγής είναι ίσο με την τιμή που πωλείται μείον το κόστος παραγωγής. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνολική ροή του κέρδους ως προς την ποσότητα δηλαδή έχουμε την συνάρτηση αξίας

$$\max_{q_i(t)} J_i = \int_0^T q_i(t)\left(p\left(t\right) - c - \frac{1}{2}q_i\left(t\right)\right)e^{-\rho t}dt \qquad (12)$$

Το δυναμικό που δίνεται από την (11) δείχνει ότι η τιμή ρυθμίζεται αναλογικά ανάμεσα στην τιμή που δίνεται από την αντίστροφη καμπύλη ζήτησης και το υπάρχων επίπεδο τιμών σύμφωνα με το βάρος w. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη τιμή έχει η σταθερά w τόσο πιο γρήγορα κινείται το επίπεδο τιμών προς αυτό που δίνει η καμπύλη ζήτησης. Αυτά τα μεγέθη μας λένε ότι ο μηχανισμός των τιμών είναι «δυσπροσάρμοστος» (sticky). Δηλαδή οι επιχειρήσεις αντιμετωπίζουν κόστος επιλογής στο να ρυθμίσουν τις τιμές τους σύμφωνα με την καμπύλη ζήτησης. Μπορούν λοιπόν να ρυθμίσουν αν θέλουν την παραγόμενη ποσότητα ώστε οι τιμές να συγκλίνουν άμεσα με την τιμή ισορροπίας $\hat{p}(t)$. Εν γένει όμως αυτό δεν συμφέρει τις επιχειρήσεις.

Επιλύωντας τώρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης υπολογίζουμε την Χαμιλτονιανή του συστήματος αναλογικά με την σχέση (3) που είχαμε αναφέρει προηγουμένως

$$H(q_i(t), p(t), \lambda_i(t), t) = e^{-\rho t}\left\{ q_i(t)\left(p(t) - c - \frac{1}{2}q_i(t)\right) + \lambda_i(t)\cdot w\left(A - B\sum_{i=1}^{N} q_i(t) - p(t)\right)\right\} \quad (13)$$

Η Χαμιλτονιανή μεγιστοποιείται ως προς το $q_i(t)$ άρα έχουμε

$$\frac{\partial H\left(q_i(t), p(t), \lambda_i(t), t\right)}{\partial q_i(t)} = 0 \Leftrightarrow p(t) - c - q_i(t) - \lambda_i(t)Bw = 0$$

Συνεπώς έχουμε

$$q_i^*(t) = \begin{cases} p(t) - c - \lambda_i(t)Bw & , p(t) > c + q_i(t) + \lambda_i(t)Bw \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases} \quad (14)$$

στο open-loop πρόβλημα η άλλη συνθήκη που έχουμε αναλογικά με την σχέση (5ο) είναι

$$-q_i(t) + \lambda_i(t)w = \frac{\partial \lambda_i(t)}{\partial t} - \rho\lambda_i(t) \Rightarrow \frac{\partial \lambda_i(t)}{\partial t} = \lambda_i(t)(w+\rho) - q_i(t) \quad (15)$$

και έχουμε ακόμα ότι $\lim_{t\to\infty} \mu_i(t)\cdot p(t) = 0$

Διαφορίζοντας την (14) έχουμε $\dot{q}_i(t) = \dot{p}(t) - Bw\left[\lambda_i(t)(w+\rho) - q_i(t)\right]$ (16)

Παίρνοντας τώρα υπόθεση συμμετρίας ανάμεσα στις επιχειρήσεις έχουμε ότι $q_i(t) = q_j(t) = q(t)$ η σχέση (10) γίνεται $\hat{p}(t) = A - NBq(t)$

Επομένως για την τιμή έχουμε

$$\dot{p}_i\left(t\right)=w\left(\hat{p}\left(t\right)-p\left(t\right)\right)=w\left(A-NBq(t)-p\left(t\right)\right)\equiv f(p,q) \qquad (17)$$

Και στην (16) αντικαθιστούμε την (10) και έχουμε

$$\dot{q}_i\left(t\right)=w\left(\hat{p}\left(t\right)-p\left(t\right)\right)-Bw\left[\lambda_i(t)(w+\rho)-q_i\left(t\right)\right]$$

και από την (14) έχουμε ότι $w\lambda_i(t)=\dfrac{p(t)-c-q(t)}{B}$

επομένως καταλήγουμε τελικά

$$\dot{q}\left(t\right)=wA+(w+\rho)c-\left(2w+\rho\right)p(t)+\left[wB(1-N)+w+\rho\right]q(t)\equiv g(p,q) \qquad (18)$$

Και λύνοντας σύμφωνα με την σχέση (7) για να βρούμε τα ευσταθή σημεία ισορροπίας.

$$\begin{cases}\dot{q}\left(t\right)=g(x,u)=0\\ \dot{p}_i\left(t\right)=f(x,u)=0\end{cases}$$

Και καταλήγουμε στην λύση $q^*=\dfrac{\left(A-c\right)\left(w+\rho\right)}{\left(w+\rho\right)\left(1+BN\right)+wB}$ και $p^*=A-Nq^*$

Ο πίνακας των μερικών παραγώγων είναι

$$J^*=\begin{bmatrix}f_p(p^*,q^*) & f_q(p^*,q^*)\\ g_p(p^*,q^*) & g_q(p^*,q^*)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-w & -wBN\\ -(2w+\rho) & w+\rho-wB(N-1)\end{bmatrix}$$

Για το είδος της ευστάθειας υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των μερικών παραγώγων

$$\Delta\left(J^*\right)=-w^2-w\rho+w^2B\left(N-1\right)-2w^2BN-wBN\rho=-w\left(\rho+w\right)-w^2B\left(N+1\right)-wBN\rho$$

Η οποία είναι αρνητική άρα το σημείο ευστάθειας είναι σάγμα.

1.3.1.2 Γενικό πρόβλημα με διαφοροποιήσιμα αγαθά

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα γενικότερο πρόβλημα ολιγοπωλίου με διαφοροποιήσιμα αγαθά και μελετάμε πως επιδρούν η διαφοροποίηση των αγαθών και η δυσπροσαρμοστηκότητα των τιμών στην ισορροπία.

Οι ιδιότητες ενός διαφορικού παιγνίου με ομογενή αγαθά είναι γνωστές. Συγκεκριμένα

A) Το στατικό παίγνιο απαιτεί χαμηλότερο επίπεδο παραγωγής σε σύγκριση με το ευσταθές σημείο ισορροπίας του διαφορικού παιγνίου. Και επιπλέον η ευσταθής Nash ισορροπία στο open-loop πρόβλημα είναι χαμηλότερη σε σύγκριση με το closed-loop.

B) Όσο μεγαλύτερη είναι η δυσπροσαρμοστηκότητα των τιμών τόσο μεγαλύτερο είναι το επίπεδο παραγωγής στην ευσταθή Nash ισορροπία.

Επιπλέον όταν τα προϊόντα είναι διαφοροποιήσιμα ο συντελεστής διαφοροποίησης των αγαθών επηρεάζει καθορίζοντας το επίπεδο παραγωγής για την ανταπόκριση της ποσότητας στην δυσπροσαρμοστηκότητα των τιμών. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο (συμμετρικός) βαθμός διαφοροποίησης τόσο χαμηλότερο είναι το επίπεδο παραγωγής στην ευσταθή ισορροπία.

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το δυναμικό σύστημα για τις τιμές

$$\dot{p}_i(t) = s_i\left(\hat{p}_i(t) - p_i(t)\right)$$

Όπου $s_i \in (0,1)$ εκφράζει την δυσπροσαρμοστηκότητα των τιμών (price stickiness) για την κάθε επιχείρηση, σε αναλογία με το ενιαίο βάρος w που είχαμε στο προηγούμενο μοντέλο. Όσο μικρότερο είναι το s_i τόσο μικρότερη είναι η προσαρμοστηκότητα των τιμών αφού μειώνεται ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή για να κινηθεί προς την τιμή που ορίζει η αγορά..

Η ενδεικτική θεωρητική τιμή που καθορίζεται από τις προτιμήσεις των καταναλωτών και που εκφράζει την καμπύλη ζήτησης θεωρούμε να είναι

$$\hat{p}_i(t) = A_i(t) - Bq_i(t) - D\sum_{j\neq i} q_j$$

Η παράμετρος A_i μετράει το μέγεθος της αγοράς ή την τιμή εξασφάλισης και για απλοποίηση την θεωρούμε αργότερα ίδια για όλα τα αγαθά. Ενώ $D \in [0, B]$ είναι ο συμμετρικός βαθμός αντικαταστατικότητας (degree of substitutability) του προϊόντος που παράγει ο i , σε σχέση με ένα προϊόν μιας άλλης επιχείρησης. Δηλαδή αν D = B τότε τα προϊόντα είναι ομογενή και αντικατάστατα ενώ αν D = 0 τότε δεν υπάρχει στρατηγική αλληλεπίδραση και κάθε επιχείρηση δρα σαν μονοπωλητής. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος D τόσο μικρότερη είναι ο (συμμετρικός) βαθμός διαφοροποίησης.

Το κόστος παραγωγής το παίρνουμε όπως πριν

$$C_i(t) = cq_i(t) - \frac{1}{2}q_i^2(t)\ , \quad c_i \in (0, A_i)$$

Και ως συνέπεια η συνάρτηση των κερδών θα είναι

$$\pi_i(t) = q_i(t)\left(p_i(t) - c_i - \frac{1}{2}q_i(t)\right)$$

Έτσι το πρόβλημα μεγιστοποίησης για την επιχείρηση i είναι το εξής

$$\max_{q_i(t)} J_i = \int_0^T q_i(t)\left(p_i(t) - c_i - \frac{1}{2}q_i(t)\right)e^{-\rho t}dt$$

s.t. $\dot{p}_i(t) = s_i\left(\hat{p}_i(t) - p_i(t)\right)$,i = 1,…N

s.t $p_i(0) = p_{i,0}$,i = 1,…N

Και η Χαμιλτονιανή που προκύπτει είναι

$$H_i(t) = e^{-\rho t}\left\{q_i(t)\left(p_i(t) - c_i - \frac{1}{2}q_i(t)\right) + \lambda_i^i(t)\cdot s_i\left(A_i - Bq_i(t) - D\sum_{i\neq j} q_j(t) - p_i(t)\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j\neq i}\lambda_j^i(t)s_j\left(A_j - Bq_j(t) - D\sum_{k\neq j} q_k(t) - p_j(t)\right)\right.$$

Λύνοντας για το open-loop πρόβλημα με τον συνήθη τρόπο και παίρνοντας συμμετρία ανάμεσα στις επιχειρήσεις δηλαδή:
$\forall i = 1,...N \;\; s_i = s \;\;, c_i = c \;\;, p_i = p \;, A_i = A$
Ενώ για την co-state μεταβλητή στην συμμετρία θέτουμε $\lambda_i^i = \lambda_{own}$ και $\lambda_j^i = \lambda_{other}$
Δεν μπορούμε να θέσουμε $\lambda_{own} = \lambda_{other}$ καθότι η επίδραση της τιμής στην «ποικιλία» του αγαθού που παράγει κάθε επιχείρηση για δικό της κέρδος είναι προφανώς διαφορετική από την επίδραση που προέρχεται από τις «ποκιλίες» που παράγουν οι αντίπαλοι.

καταλήγουμε στην ευσταθή λύση

$$q_{ol}^* = \frac{(s+\rho)(A-c)}{(s+\rho)\left[1+B+D(N-1)\right]+sB}$$

$$p_{ol}^* = A - \frac{\left[B+D(N-1)\right](s+\rho)(A-c)}{(s+\rho)\left[1+B+D(N-1)\right]+sB}$$

με το σημείο $\left(q_{ol}^*, p_{ol}^*\right)$ να αποτελεί σάγμα αν υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα των μερικών παραγώγων στο σημείο αυτό.

Στο αντίστοιχο closed-loop πρόβλημα η ευσταθής λύση που είναι επίσης σάγμα είναι

$$q_{cl}^{*}=\frac{\left[\rho+s\left(1+B+D(N-2)\right)\right]\left(s+\rho\right)\left(A-c\right)}{\left[\rho+s\left(1+B+D(N-2)\right)\right]\left[\left(s+\rho\right)\left[1+B+D(N-1)\right]+sB\right]-(N-1)s^{2}D^{2}}$$

$$p_{cl}^{*}=A-\left[B+D(N-1)\right]q_{cl}^{*}$$

1.3.2 Προβλήματα με συσσώρευση κεφαλαίου για παραγωγή (capital accumulation for production)

Αυτό το μοντέλο περιγράφει και αφορά την ανάγκη των επιχειρήσεων να επενδύσουν σε κεφάλαιο έτσι ώστε να παράγουν το τελικό αγαθό προς τον καταναλωτή. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε δεδομένο τον τρόπο που μεταβάλλεται η ποσότητα κεφαλαίου και συνήθως δίνεται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού ώστε να έχει αναλυτική λύση το πρόβλημα, συνεπώς αυτή είναι state variable. Η μεγιστοποίηση γίνεται ως προς την control variable που είναι είτε η ποσότητα παραγωγής αν έχουμε πρόβλημα Cournot όπου δηλαδή οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται ως προς τις ποσότητες παραγωγής, είτε η τιμή αν έχουμε πρόβλημα Bertrand οπού δηλαδή οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται ως προς την τιμή. Επίσης μπορούμε σαν μεταβλητή ελέγχου να έχουμε και την επένδυση χρήματος.

1.3.2.1 Μοντέλο Ramsey

Το ποιο γνωστό τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο του Ramsey. Έστω μια αγορά με N επιχειρήσεις οι οποίες παράγουν στο χρόνο $t\in[0,\infty)$ αγαθά διαφοροποιήσιμα μεταξύ τους. Σε κάθε χρονική στιγμή η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι

$$p_i\left(t\right)=A-Bq_i\left(t\right)-D\sum_{j\neq i}q_j \qquad (9)$$

όπου $D\in[0,B]$ είναι ο συμμετρικός βαθμός αντικαταστατικότητας (degree of substitutability) του προϊόντος που παράγει ο i με ένα προϊόν μιας άλλης επιχείρησης. Δηλαδή αν D = B τότε τα προϊόντα είναι ομογενή και αντικατάστατα ενώ αν D = 0 τότε δεν υπάρχει στρατηγική αλληλεπίδραση και κάθε επιχείρηση δρα σαν μονοπωλητής.

Η παραγωγή οποιουδήποτε προϊόντος i απαιτεί κεφάλαιο k το οποίο συσσωρεύεται με το χρόνο και δημιουργεί χωρητικότητα για παραγωγή. Για κάθε χρόνο t το επίπεδο παραγωγής είναι $y_i\left(t\right)=f\left(k_i(t)\right)$ με $\frac{\partial f\left(k_i(t)\right)}{\partial k_i(t)}>0$ και $\frac{\partial^2 f\left(k_i(t)\right)}{\partial k_i(t)^2}<0$

Ένας λογικός περιορισμός είναι ότι η ποσότητα πώλησης είναι μικρότερη ή ίση από την ποσότητα παραγωγής δηλαδή $q_i\left(t\right)\leq y_i\left(t\right)$

Η ποσότητα πώλησης επανεισάγεται στην διαδικασία παραγωγής παραχωρώντας συσσώρευση χωρητικότητας αυξάνοντας τον ρυθμό μεταβολής του κεφαλαίου σύμφωνα με την εξίσωση

$$\dot{k}_i(t) = f\left(k_i(t)\right) - q_i(t) - \delta k_i(t) \qquad (11)$$

όπου το δ δηλώνει τον ρυθμό υποτίμησης του κεφαλαίου με τον χρόνο, π.χ. τον πληθωρισμό. Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση μας υποθέτουμε ότι η μεταβλητή κόστους για κάθε μονάδα παραγωγής είναι σταθερή και ίση με μηδέν. Το κόστος του κεφαλαίου παρουσιάζεται ως το κόστος ευκαιρίας , δηλαδή την διαφορά με το αν επένδυε το κεφάλαιο κάπου αλλού όπως για παράδειγμα σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο.

Από την (9) προσθέτοντας για i =1 έως N έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N} p_i\left(t\right) = N \cdot A - B\sum_{i=1}^{N} q_i\left(t\right) - D(N-1)\sum_{i=1}^{N} q_i\left(t\right) = N \cdot A - \left(B + D(N-1)\right)\left[q_i(t) + \sum_{i \neq j} q_j(t)\right]$$

και αντικαθιστώντας το $\sum_{i \neq j} q_j(t)$ από την (9) ξανά καταλήγουμε στην άμεση συνάρτηση ζήτησης

$$q_i(t) = \frac{1}{B + D\left(N-1\right)} \cdot \left[A - \frac{B + D\left(N-2\right)q_i(t)}{B-D} + \frac{D}{B-D}\sum_{j \neq i} p_j\left(t\right)\right] \qquad (10)$$

Τα κέρδη της επιχείρησης i είναι

$$\pi_i\left(t\right) = p_i\left(t\right) q_i(t) \qquad (12)$$

Και συνεπώς έχουμε να μεγιστοποιήσουμε το

$$J_i = \int_0^T \pi_i\left(t\right) e^{-\rho t} dt \qquad (13)$$

υπό τον περιορισμό του δυναμικού συστήματος (11). Τώρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι επιχειρήσεις καθορίζουν την ποσότητα $q_i(t)$ η οποία τότε θα είναι η μεταβλητή ελέγχου (ανταγωνισμός Cournot) διαφορετικά αν έχουμε ανταγωνισμό Bertrand παίρνουμε αντίστοιχα αντί την ποσότητα την τιμή $p_i\left(t\right)$ και επιλύουμε.

Ας δούμε λίγο την σχέση ανάμεσα στην επένδυση κεφαλαίου και την σφοδρότητα του ανταγωνισμού της αγοράς όπως αυτή αποδεικνύεται από τους Colombo και Labracciosa (2005). Συγκεκριμένα σε ένα δυναμικό ολιγοπώλιο, πως μια μεταβολή στον αριθμό των επιχειρήσεων στον κλάδο επηρεάζει τα σημεία ευστάθειας της επένδυσης σε ποσότητα επένδυσης κεφαλαίου, ποσότητα παραγωγής της βιομηχανίας και κοινωνική ευημερία.

Όταν η καμπυλότητα της αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης της αγοράς είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό των επιχειρήσεων στον κλάδο, Τα επίπεδα της επένδυσης στο σημείο ισορροπίας αυξάνουν καθώς ο αριθμός των επιχειρήσεων αυξάνει και αντίστροφα.

Επίσης η ποσότητα κεφαλαίου στην βιομηχανία αυξάνει αν η ελαστικότητα της επένδυσης ως προς τον αριθμό των επιχειρήσεων είναι μικρότερη από μονάδα.

Αποδεικνύεται ότι μια αύξηση στον αριθμό των ενεργών επιχειρήσεων στην βιομηχανία επηρεάζει την ποσότητα επένδυσης , παραγωγής και το κοινωνικό βέλτιστο. Η παράγωγος της επένδυσης ανά επιχείρηση ως προς το πλήθος τους έχει το ίδιο πρόσημο με την διαφορά ανάμεσα στην καμπυλότητα της αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης γ,και το πλήθος των επιχειρήσεων Ν. Αυτό συνεπάγεται πως με μια επαρκώς κυρτή καμπύλη ζήτησης , η σχέση ισορροπίας ανάμεσα στο μέγεθος της επένδυσης και την σφοδρότητα του ανταγωνισμού της αγοράς είναι θετική διαφορετικά αρνητική.

Το πρόσημο της παραγώγου της ποσότητας παραγωγής της βιομηχανίας ως προς Ν εξαρτάται από την ελαστικότητα της επένδυσης.

Όπως λοιπόν και στο στατικό παίγνιο Cournot για να αυξηθεί ο ποσότητα παραγωγής πρέπει οι επιχειρήσεις να μειώσουν την επένδυση αναλογικά λιγότερο από την αύξηση του πλήθους τους Ν. Η κοινωνική ευημερία πηγαίνει αναλογικά με την ποσότητα παραγωγής της βιομηχανίας στην περίπτωση που ο συντελεστής υποτίμησης είναι μηδέν. Αν όμως το κεφάλαιο υποτιμάται με τον χρόνο η κοινωνική ευημερία αυξάνει αν αυξάνει και η ποσότητα παραγωγής διαφορετικά η επίδραση είναι απροσδιόριστη.

1.3.2.2 Περίπτωση ασυμμετρίας σε πρόβλημα συσσώρευσης κεφαλαίου

Ας δούμε τώρα και ένα πρόβλημα στο οποίο δεν θα θεωρήσουμε συμμετρία ανάμεσα στις επιχειρήσεις. Πράγμα που είναι μεν δυσκολότερο υπολογιστικά άλλα ρεαλιστικότερο καθώς εν γένει οι επιχειρήσεις που ανταγωνίζονται διαφέρουν ως προς τις βάσεις και τα μεγέθη τους.

Μελετάμε σε ένα πρόβλημα συσσώρευσης κεφαλαίου για παραγωγή ένα ασύμμετρο δυοπώλιο. Η επένδυση και η εκμετάλλευση της χωρητικότητας είναι οι μεταβλητές ελέγχου και η επιλογές χωρητικότητας οι μεταβλητές κατάστασης.

Δομές ασύμμετρης χωρητικότητας οφείλονται σε διαφορές των επιχειρήσεων στα οικονομικά τους θεμέλια (όπως διαφορετικό κόστος επένδυσης διαφορετικό ποσοστό υποτίμησης του χρήματος κ.τ.λ.π) Το θέμα είναι πόσο επηρεάζουν τη συμπεριφορά στην αγορά..

Έστω δύο επιχειρήσεις i, j που παράγουν ομογενή αγαθά και ανταγωνίζονται σε άπειρο χρονικό ορίζοντα $t \in [0,\infty)$. Θεωρούμε $q_i(t), q_j(t)$ τις ποσότητες που πουλούν οι i, j αντίστοιχα. Για χάρη απλότητας θα θεωρήσουμε το σταθερό κόστος παραγωγής ίσο με μηδέν. Η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης θα είναι και για τις δύο επιχειρήσεις

$$\mathrm{P}_i(t) = \mathrm{P}_j(t) = A - q_i(t) - q_j(t) \quad (\delta 1)$$

Ενώ η ποσότητα κεφαλαίου, η διαφορετικά η χωρητικότητα για παραγωγή μεταβάλλεται σύμφωνα με το ακόλουθο δυναμικό σύστημα.

$$\dot{k}_i(t) = I_i(t) - \delta_i k_i(t)$$
$$\dot{k}_j(t) = I_j(t) - \delta_j k_j(t) \qquad (\delta 2)$$

Όπου $I_i(t)$ και $I_j(t)$ είναι το μη αρνητικό επίπεδο της επένδυσης και δ_i, δ_j ο ρυθμός υποτίμησης του χρήματος τον οποίο θεωρούμε σταθερό.

Το στιγμιαίο,οριακό κόστος για την επένδυση κάθε επιχείρησης είναι γραμμικό της μορφής $C_i(I_i) = b_i I_i$ και $C_j(I_j) = b_j I_j$ με b_i, b_j θετικές παραμέτρους. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η επιχείρηση i είναι περισσότερο αποτελεσματική με $b_i < b_j$ και $\delta_\iota < \delta_j$

Επίσης θεωρούμε ότι $\forall t \in [0, \infty)$ η παραγωγή $q_i(t)$ κάθε επιχείρησης είναι κάποια αναλογία $a_i(t) \in [0,1]$ της χωρητικότητας $k_i(t)$, δηλαδή το $a_i(t)$ εκφράζει την εκμετάλλευση της χωρητικότητας για τον i, και αντίστοιχα όλα και για τον j.

Συνεπώς η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης (δ2) μπορεί να γραφεί σαν

$$\mathrm{P}_i(t) = \mathrm{P}_j(t) = A - a_i(t)k_i(t) - a_j(t)k_j(t) \qquad (\delta 3)$$

Και τα κέρδη των επιχειρήσεων θα είναι $\pi_i(\bullet, t) = P_i q_i - b_i I_i$ και $\pi_j(\bullet, t) = P_j q_j - b_j I_j$ την ροή των οποίων θέλουν να μεγιστοποιήσουν σε άπειρο ορίζοντα. Δηλαδή η συνάρτηση αξίας της επιχείρησης i θα είναι

$$\max_{I_i} \int_0^T \pi_i(\bullet, t) e^{-\rho t} dt \qquad (\delta 4)$$

Λύνοντας τώρα το πρόβλημα αυτό της μεγιστοποίησης η Χαμιλτονιανή θα είναι:

$$\begin{aligned} &H_i(t) = \left(A - a_i(t)k_i(t) - a_j(t)k_j(t)\right) a_i(t)k_i(t) - b_i I_i \\ &+\lambda_{ii}(t)\left(I_i(t) - \delta_i k_i(t)\right) + \lambda_{ij}(t)\left(I_j(t) - \delta_j k_j(t)\right) \end{aligned} \qquad (\delta 5)$$

Ας υπολογίσουμε στο πρόβλημα Cournot , δηλαδή σε ανταγωνισμό ως προς τις ποσότητες παραγωγής, την open-loop Nash ισορροπία.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης ως προς την Χαμιλτονιανή θα έχουμε:

$$\frac{\partial H_i(t)}{\partial a_i(t)} = k_i(t)\left[A - 2a_i(t)k_i(t) - a_j(t)k_j(t)\right] = 0 \qquad (\delta 6)$$

$$\frac{\partial H_i(t)}{\partial I_i(t)} = -b + \lambda_{ii}(t) = 0 \qquad (\delta 7)$$

και επίσης θα έχουμε

$$-\frac{\partial H_i(t)}{\partial k_i(t)} = \frac{\partial \lambda_{ii}(t)}{\partial t} - \rho \lambda_{ii}(t)$$

$$\Rightarrow -a_i(t)\left[A-2a_i(t)k_i(t)-a_j(t)k_j(t)\right]+\delta_i\lambda_{ii}(t)=\frac{\partial\lambda_{ii}(t)}{\partial t}-\rho\lambda_{ii}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\lambda_{ii}(t)}{\partial t}=\left(\rho+\delta_i\right)\lambda_{ii}(t)-a_i(t)\left[A-2a_i(t)k_i(t)-a_j(t)k_j(t)\right] \qquad (\delta 8)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $k_i(t)>0$ και τις συνθήκες εγκαρσιότητας έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\mu_{ii}(t)\cdot k_i(t)=0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty}\mu_{ij}(t)\cdot k_j(t)=0 \qquad (\delta 9)$$

Από την (δ7) έχουμε ότι $\lambda_{ii}(t)=b_i$, όπου b_i είναι σταθερή παράμετρος άρα παραγωγίζοντας έχουμε και ότι $\frac{\partial\lambda_{ii}(t)}{\partial t}=0$

Επομένως η (δ8) γίνεται

$$\left(\rho+\delta_i\right)b_i=a_i(t)\left[A-2a_i(t)k_i(t)-a_j(t)k_j(t)\right]$$

Από την συνθήκη ευστάθειας έχουμε $\dot{k}_i(t)=0 \Leftrightarrow k_i^*=\frac{I_i^*}{\delta_i}$

Οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\left(\rho+\delta_i\right)b_i=a_i(t)\left[A-2a_i(t)\frac{I_i(t)}{\delta_i}k_i(t)-a_j(t)\frac{I_j(t)}{\delta_j}\right] \qquad (\delta 10)$$

$$\Rightarrow A-2a_i(t)\frac{I_i(t)}{\delta_i}k_i(t)-a_j(t)\frac{I_j(t)}{\delta_j}=\frac{\left(\rho+\delta_i\right)b}{a_i(t)}>0$$

Μαζί με την συνθήκη $k_i^*=\frac{I_i^*}{\delta_i}$ η (δ6) μπορεί να γραφεί

$$\frac{\partial H_i(t)}{\partial a_i(t)}=\frac{I_i^*\left(\rho+\delta_i\right)b_i}{\delta_i a_i(t)}>0 \qquad (\delta 11)$$

Επομένως εφόσον ο ρυθμός μεταβολής της Χαμιλτονιανής ως προς το $a_i(t)$ είναι γνήσια θετικός, το σημείο ευστάθειας για το $a_i(t)$ θα είναι στη μέγιστη τιμή που παίρνει στο άκρο του περιορισμού του, δηλαδή $a_i^{ss}=1$.

Σε πλήρη αντιστοιχία και για το j έχουμε ότι

$$a_j(t)\left[A-2a_j(t)\frac{I_j(t)}{\delta_j}k_i(t)-a_i(t)\frac{I_i(t)}{\delta_i}\right]=\left(\rho+\delta_j\right)b_i \qquad (\delta 12)$$

και καταλήγουμε ότι $a_j^{ss}=1$. Συνεπώς αντικαθιστώντας για $a_i^{ss}=1$ και $a_j^{ss}=1$ στις (δ10) και (δ12) καταλήγουμε στην εξής ισορροπία

$$I_i^{*ol}=\frac{A+\left(\rho+\delta_j\right)b_j-2\left(\rho+\delta_i\right)b_i}{3}\delta_i \qquad \text{και} \qquad k_i^{*ol}=\frac{A+\left(\rho+\delta_j\right)b_j-2\left(\rho+\delta_i\right)b_i}{3}$$

$$I_j^{*ol} = \frac{A + (\rho + \delta_i) b_i - 2(\rho + \delta_j) b_j}{3} \delta_i \qquad \text{και} \qquad k_i^{*ol} = \frac{A + (\rho + \delta_i) b_i - 2(\rho + \delta_j) b_j}{3}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι το βέλτιστο επίπεδο επένδυσης και επιλογής χωρητικότητας εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά {ρ,δ,b} της ίδιας όσο και της ανταγωνίστριας επιχείρησης.

1.3.3 R&D παίγνια (έρευνας και ανάπτυξης)

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων είναι τα προβλήματα που μια επιχείρηση θέλει να υπολογίσει ποια είναι η βέλτιστη επιλογή για το πόσο πρέπει να επενδύσει για έρευνα ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Το R&D συμβολίζει Research & Development δηλαδή έρευνα και ανάπτυξη.

Η έρευνα στα οικονομικά επικεντρώνεται σε 2 διαφορετικούς τομείς.

(1) Ανάπτυξη της διαδικασίας παραγωγής (process innovation)
Έχουμε ένα ολιγοπώλιο όπου οι εταιρίες επενδύουν σε R&D δραστηριότητα με σκοπό να βελτιώσουν την παραγωγική διαδικασία και ειδικότερα να μειώσουν το κόστος παραγωγής. Δηλαδή έχουμε έρευνα η οποία έχει κάποιο κόστος και από την άλλη μειώνει μέσω ενός δυναμικού μηχανισμού το οριακό κόστος.

(2) Ανάπτυξη του παραγόμενου προϊόντος (product innovation)
Είναι ανάλογη περίπτωση με πριν αλλά διαφέρει το αποτέλεσμα. Εδώ η έρευνα μειώνει την υποκαταστατικότητα του προϊόντος σε σχέση με τα προϊόντα των άλλων επιχειρήσεων.

Εκτός από τον διαχωρισμό σύμφωνα με το αποτέλεσμα της έρευνας υπάρχει άλλος ένας διαχωρισμός ανεξάρτητος από τον προηγούμενο και έχει σχέση με τον τρόπο που συμπεριφέρονται οι επιχειρήσεις μεταξύ τους

(α) Μη συνεργατικά R&D παίγνια
Σε αυτήν την περίπτωση η κάθε επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της με τον κλασσικό τρόπο σύμφωνα με την αναμενόμενη στρατηγική των αντιπάλων

(β) Συνεργατικά R&D παίγνια
Εδώ οι επιχειρήσεις δημιουργούν ένα Cartel και μεγιστοποιούν τη συνολική ροή κέρδους του κλάδου ως προς το συνολικό διάνυσμα του R&D effort όλων των επιχειρήσεων που απαρτίζουν τον κλάδο.

1.3.3.1 R&D παίγνια για ανάπτυξη παραγωγής (process innovation)

Έστω ένα ολιγοπώλιο με N επιχειρήσεις που πουλάνε ένα ομογενές αγαθό σε συνεχή χρόνο $t \in [0,T)$. Η καμπύλη ζήτησης έχει ως εξής.

$$p(t) = A - q_i(t) - Q_{-i}(t)$$

όπου $Q_{-i}(t) \equiv \sum_{i \neq j} q_j(t)$,δηλαδή είναι το σύνολο της παραγωγής όλων των υπολοίπων επιχειρήσεων εκτός της i. Κάθε επιχείρηση εφοδιάζει την αγορά με κάποια τεχνολογία που χαρακτηρίζεται από κάποιο οριακό κόστος c_i. Επομένως το συνολικό κόστος παραγωγής είναι $C_i\left(c_i(t), q_i(t)\right) = c_i(t) q_i(t)$

Η μεταβολή του οριακού κόστους με τον χρόνο για κάθε επιχείρηση i δίνεται από το ακόλουθο δυναμικό σύστημα

$$\dot{c}_i(t) = c_i(t)\left(-k_i(t) - \beta K_i(t) + \delta\right)$$

με αρχικές συνθήκες $c_i(t) = c_{oi} \in \mathbb{R}^+$

Ό̈που $k_i(t)$ είναι το R&D effort του i στον χρόνο t και $K_i(t) \equiv \sum_{i \neq j} k_j(t)$ είναι το συνολικό R&D effort από όλες τις υπόλοιπες επιχειρήσεις. . Έχουμε θεωρήσει ότι κάθε επιχείρηση λαμβάνει ένα αναλογικά θετικό αντίκτυπο (spillover) στην ανάπτυξη που επιτυγχάνει κάποια άλλη λόγω διάχυσης της τεχνολογίας στην αγορά. Η παράμετρος $\beta \in [0,1]$ εκφράζει το ποσοστό της διάχυσης αυτής που θα λάβει και ο i. Η παράμετρος $\delta \in [0,1]$ είναι μια σταθερά που εκφράζει τον ρυθμό υποτίμησης , συγκεκριμένα μετράει το πόσο μειώνεται η παραγωγική αποτελεσματικότητα λόγω γήρανσης της τεχνολογίας.. Το κόστος της R&D προσπάθειας το θεωρούμε να είναι $\Gamma\left(k_i(t)\right) = b\left(k_i(t)\right)^2$ με $b \in \mathbb{R}^+$. Θεωρούμε λογικό να πάρουμε το κόστος να είναι κυρτή συνάρτηση ως προς το $k_i(t)$ γιατί όσο μεγαλύτερο είναι το επίπεδο τεχνολογίας τόσο περισσότερη έρευνα χρειάζεται για να επιτύχουμε κάποια επιπλέον βελτίωση.

Σαν μεταβλητή ελέγχου θεωρούμε το R&D effort και την παραγόμενη ποσότητα $q_i(t)$ ενώ η μεταβλητή κατάστασης είναι το κόστος $c_i(t)$

Επομένως η συνάρτηση αξίας που έχουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι

$$\int_0^\infty \left\{\left[A - q_i(t) - Q_{-i}(t) - c_i(t)\right] q_i(t) - b\left(k_i(t)\right)^2\right\} \cdot e^{-\rho t} dt$$

̈Θεωρώντας μη συνεργατική συμπεριφορά κάθε παίχτης μεγιστοποιεί την συνάρτηση αξίας του ως προς την δικιά του ποσότητα και προσπάθεια έρευνας. Λύνοντας με τον τρόπο που έχουμε αναφέρει αποδεικνύεται ότι η open-loop Nash ισορροπία είναι τέλεια ισορροπία υποπαιγνίων (ή Markov) και ότι η βέλτιστη R&D επένδυση όλης της βιομηχανίας αυξάνει μονοτονικά με τον αριθμό των επιχειρήσεων που απαρτίζουν το ολιγοπώλιο κατά μήκος και της τροχιάς ισορροπίας και στην ευσταθή κατάσταση. Συγκεκριμένα η βέλτιστη μεμονωμένη προσπάθεια επένδυσης πάντα φθίνει ενώ η συναθροιστική R&D επένδυση αυξάνει πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τις στατικές μελέτες. Η δραστική διαφορά με το αμφιλεγόμενο στατικό μοντέλο βασίζεται στην ομαλοποίηση της επένδυσης σε μακροχρόνιο ορίζοντα, πράγμα που εξ ορισμού αποκλείεται στην στατική περίπτωση

1.3.3.2 R&D *παίγνια για ανάπτυξη του παραγόμενου προϊόντος* (product innovation)

Στην περίπτωση αυτή σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο εισάγουμε στη καμπύλη ζήτησης μια μεταβλητή $s(t) \in [0,1]$ που εκφράζει τον βαθμό υποκαταστατικότητας ανάμεσα στα προϊόντα. Η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης λοιπόν θα είναι

$$p(t) = A - q_i(t) - s(t)Q_{-i}(t) \qquad ^{*}$$

Δηλαδή αν $s(t) = 1$ τότε τα προϊόντα είναι ομογενή ενώ αν $s(t) = 0$ τότε είναι πλήρως διαφοροποιήσιμα και ο κάθε παίχτης δρα σαν μονοπωλητής. Η διαφορά με άλλα μοντέλα όπως του Ramsey που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι ότι δεν είναι σταθερά άλλα μεταβλητή και παίζει τον ρόλο μεταβλητής κατάστασης. Χρειαζόμαστε μία συνήθη διαφορική εξίσωση που θα περιγράφει τον τρόπο που μεταβάλλεται. Θεωρούμε λοιπόν την

$$\dot{s}(t) = s(t)\left(-x_i(t) - \sum_{i \neq j} x_j(t) + \delta\right)$$

όπου το $x_i(t)$ είναι η προσπάθεια για R&D πού καταβάλει η επιχείρηση i για να μειώσει την υποκαταστατηκότητα του προϊόντος, δηλαδή κάτι αντίστοιχο με το $k_i(t)$ στην προηγούμενη περίπτωση . Η παράμετρος $\delta \in [0,1]$ είναι μια σταθερά που εκφράζει τον ρυθμό υποτίμησης ανάλογα με πριν.

Το κόστος της R&D δραστηριότητας στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε να είναι $C_i(x_i(t)) = \gamma\left(x_i(t)\right)^2$. Συνεπώς το κέρδος στην περίπτωση αυτή αν έχουμε ένα σταθερό οριακό κόστος c θα είναι

$$\pi_i(t) = \left(A - c - q_i(t) - s(t)Q_{-i}(t)\right)q_i(t) - \gamma\left(x_i(t)\right)^2$$

την ροή αυτού του κέρδους θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς το R&D effort $x_i(t)$. (Και ενδεχομένως ως και προς την ποσότητα)

---

* Βέβαια το πιο ρεαλιστικό θα ήταν να άλλαζε η υποκαταστατικότητα για κάθε ζεύγος και η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης να είχε την μορφή $p_i(t) = A - q_i(t) - \sum_{i \neq j} s_{ij}(t)q_j(t)$ με $s_{ij}(t) = s_{ji}(t) \;\; \forall i, j = 1,\ldots,\mathrm{N}$ αλλά το πρόβλημα θα γινόταν αρκετά πολύπλοκο και δεν έχει μελετηθεί ως σήμερα πέρα από την περίπτωση του δυοπωλίου.

1.3.3.3 R&D για ταυτόχρονη ανάπτυξη προϊόντος και διαδικασίας παραγωγής.

Φυσικά μπορούμε να πάρουμε ταυτόχρονα από την μία προσπάθεια έρευνας για ανάπτυξη προϊόντος και από την άλλη για βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας. Αυτό επίσης μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε και μια σύγκριση ανάμεσα στους 2 τρόπους.

Αν πάρουμε ένα δυοπώλιο σε αντιστοιχία με τα 2 προηγούμενα παραδείγματα και θεωρώντας με τον ίδιο τρόπο τις μεταβλητές και τις παραμέτρους
Η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης θα είναι

$$p_i(t) = A - q_i(t) - s(t)q_j(t)$$

και οι μεταβλητές κατάστασης θα είναι από την μία η υποκαταστατικότητα των αγαθών $s(t)$ ακολουθώντας την δυναμική εξίσωση

$$\dot{s}(t) = s(t)\left(-x_i(t) - x_j(t) + \delta\right)$$

Και επίσης το οριακό κόστος $c_i(t)$ με δυναμικό σύστημα

$$\dot{c}_i(t) = c_i(t)\left(-k_i(t) - \beta k_j(t) + \delta\right)$$

έχοντας βέβαια και κάποιες αρχικές συνθήκες

Τα κέρδη την ροή των οποίων θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς τις μεταβλητές ελέγχου θα είναι

$$\pi_i(t) = \left(A - c - q_i(t) - s(t)Q_{-i}(t)\right)q_i(t) - \gamma\left(x_i(t)\right)^2 - b\left(k_i(t)\right)^2$$

δηλαδή η συνάρτηση αξίας είναι

$$J_i = \int_0^\infty \pi_i(t)e^{-\rho t}dt$$

Οι μεταβλητές ελέγχου για το παίχτη i στην περίπτωση αυτή θα είναι οι προσπάθεια έρευνας και για τους 2 τρόπους, δηλαδή το $x_i(t)$ και το $k_i(t)$ και επίσης η παραγωγή $q_i(t)$
Η Χαμιλτονιανή θα είναι

$$H_i(t) = e^{\rho t}\left[\pi_i(t) + \lambda_\iota(t)\dot{s}(t) + \lambda_{\iota i}(t)\dot{c}_i(t) + \lambda_{\iota j}(t)\dot{c}_j(t)\right]$$

Η αναλυτική επίλυση υπάρχει στο paper των Lambertini και Mantovani (2005) Βρίσκουμε τελικά ότι το κίνητρο για επένδυση ανάπτυξης που θα μειώνει το κόστος είναι συγκριτικά μεγαλύτερο από ότι για ανάπτυξη που μειώνει την υποκαταστατικότητα. Μια εξήγηση για αυτό είναι ότι όταν επιτυγχάνεται από κάποιον ανάπτυξη προϊόντος έχουμε μέσω της καμπύλης ζήτησης πλήρη διάχυση ενώ στην ανάπτυξη διαδικασίας έχουμε μια ποσοστιαία διάχυση.

Η R&D δραστηριότητα για το προϊόν και την διαδικασία παραγωγής είναι συμπληρωματικές στην γειτονιά του ευσταθούς σημείου ισορροπίας. Αν το οριακό κόστος για ανάπτυξη διαδικασίας παραγωγής είναι αρκετά χαμηλό τότε η σταυροειδής επίδραση της αλλαγής στην υποκαταστατικότητα των προϊόντων πάνω στην ανάπτυξη διαδικασίας είναι μεγαλύτερη απ'ότι η επίδραση της αλλαγής του οριακού κόστους στην ανάπτυξη του προϊόντος και αντίστροφα

Επίσης ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες μπορούμε να έχουμε 3 περιπτώσεις για την βέλτιστη συμπεριφορά.

Α) Οι επιχειρήσεις να επενδύουν και στις δύο R&D επενδύσεις από την αρχή μέχρι να φτάσουμε στο σημείο ευστάθειας.

Β) Να επενδύουν αρχικά μόνο στην μία από τις δύο και μετά να φτάνουν σε σημείο ευσταθείας είτε με την μία είτε και με τις δύο.

Γ) Να μην επενδύουν σε καμία R&D δραστηριότητα.

1.3.3.4 Σύγκριση συνεργατικών και ανταγωνιστικών R&D παιγνίων

Ὃπως είπαμε και προηγουμένως τα R&D παίγνια χωρίζονται επίσης σε συνεργατικά και μη συνεργατικά δηλαδή ανταγωνιστικά. Μπορούμε να συγκρίνουμε για μια R&D επένδυση που αφορά την βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας (process innovation). Και στην περίπτωση που συνεργάζονται και στην περίπτωση που ανταγωνίζονται αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό σημείο ευστάθειας, και το οποίο αποτελεί σάγμα. Ας δούμε λίγο κάποια συμπεράσματα για το τι συμφέρει τις επιχειρήσεις συγκρίνοντας τις δυο αυτές περιπτώσεις σύμφωνα με τους Cellini-Lambertini (2004) και Navas-Kort (2005)

Συγκρίνοντας το ευσταθή επίπεδα κέρδους και την συνολική ευημερία της βιομηχανίας αποφαίνεται ότι τα ιδιωτικά και κοινωνικά κίνητρα για R&D συνεργασία συμπίπτουν για όλα τα επίπεδα της διάχυσης που χαρακτηρίζει την εξελικτική δραστηριότητα.. Και τελικά η συνεργασία υπερτερεί της ανταγωνιστικότητας και από τις δύο πλευρές. Δημιουργώντας ένα Καρτέλ για την έρευνα και ανάπτυξη οδηγεί τις επιχειρήσεις να επενδύουν περισσότερο απ'ότι στην ανταγωνιστική περίπτωση για όλα τα αποδεκτά επίπεδα διάχυσης β, και του οριακού κόστους.

Η συνεργασία αυξάνει την ικανότητα διαχείρισης μεγαλύτερων αναπτυξιακών σχεδίων και επίσης υπό συνθήκες συνεργασίας είναι βέλτιστο να ξοδευτούν περισσότερα για ένα δεδομένο αναπτυξιακό σχέδιο. Αυτό το γεγονός οδηγεί σε συντομότερη ολοκλήρωση της αναπτυξιακής διαδικασίας και συνεπώς σε συντομότερη εκμετάλλευση της εξέλιξης ,δηλαδή υψηλότερο κέρδος για τις επιχειρήσεις λόγω της μείωσης του οριακού κόστους. Αλλά και η κοινωνική ευημερία αυξάνει εφόσον έχουμε μεγαλύτερη παραγωγή και μικρότερες τιμές.

Αποδεικνύεται ότι ο R&D ρυθμός εξέλιξης είναι μία αύξουσα και αυστηρά κυρτή συνάρτηση του χρόνου έτσι ώστε η R&D επένδυση να είναι μέγιστη στα τελικά στάδια της εξέλιξης της διαδικασίας παραγωγής.

Επίσης όσον αφορά στο βέλτιστο μέγεθος της κοινοπραξίας αποδεικνύεται ότι εξαρτάται δραστικά από την συνάρτηση κόστους της R&D επένδυσης. Ενώ στην πλήρως συνεργατική περίπτωση είναι πάντα επιθυμητό να αυξηθεί ο αριθμός των επιχειρήσεων, στα άλλα σενάρια ο βέλτιστος αριθμός των επιχειρήσεων εξαρτάται από το αναλογικό βάρος των τετραγωνικών και γραμμικών όρων της συνάρτησης κόστους.

Τέλος μια σύγκριση με το κοινωνικά ΄βέλτιστο R&D effort δείχνει ότι η κοινωνία θα θεωρούσε πιο επικερδές να εκτελέσει R&D σχέδια που η κοινοπραξία ενδεχομένως να απέρριπτε. Και για επικερδή σχέδια η κοινωνία θα αγόρευε για περισσότερες πηγές σε κάθε στάδιο του σχεδίου δημιουργώντας μια μόνιμη καθυστέρηση στην εισαγωγή νέων τεχνολογιών από την κοινωνική άποψη.

1.3.4 Παίγνια διαφήμισης

Τα παίγνια διαφήμισης είναι ο λιγότερο ανεπτυγμένος κλάδος του. Γενικά σε αυτήν την περίπτωση έχουμε σε μερική αναλογία με τα R&D παίγνια μία επένδυση διαφήμισης η οποία φέρει ένα θετικό αντίκτυπο και θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο μας συμφέρει να επενδύσουμε σε αυτό ώστε να έχουμε μέγιστη απόδοση, δηλαδή μέγιστη ροή κέρδους.

Μία περίπτωση είναι η διαφήμιση να μειώσει την αντικαταστατηκότητα του προϊόντος που παράγει η επιχείρηση σε σχέση με τα προϊόντα των άλλων. Αυτή η περίπτωση είναι σε πλήρη αντιστοιχία με το πρόβλημα 1.3.3.2 όπου έχουμε εξέλιξη του προϊόντος (product innovation).

Μία άλλη περίπτωση είναι να η διαφημιστική επένδυση να στοχεύει σε αύξηση της καμπύλης ζήτησης (ή του μεγέθους της αγοράς)

Σε αυτήν την περίπτωση το πιο λογικό είναι να πάρουμε την καμπύλη ζήτησης να είναι συνάρτηση του μεγέθους της αγοράς. Αυτό που κάνουν οι Cellini και Lambertini είναι να θεωρούν την παράμετρο που στα κλασσικά μοντέλα είναι σταθερά στην καμπύλη ζήτησης να είναι μια μεταβλητή που αυξάνεται με το advertising effort.

Στο paper “Advertising in a Differential Oligopoly game” η καμπύλη ζήτησης που θεωρούν είναι

$$p(t) = \left(A(t) - Q(t)\right)^{\frac{1}{a}}$$

Με $Q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)$ και $a \in \left(0, +\infty\right)$

Θεωρούμε $k_i(t)$ να είναι το advertising effort το οποίο αποσκοπεί στην αυξηση του $A(t)$. Η εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή της μεταβλητής κατάστασης η οποία είναι το $A(t)$ θα έχει ως εξής.

$$\frac{dA(t)}{dt} = k_i(t) + K_{-i}(t) - \delta A(t)$$

Με $K_{-i}(t) = \sum_{i \neq j} k_j(t)$ και δ μια θετική σταθερά.

Μεταβλητές ελέγχου είναι η ποσότητα $q_i(t)$ και το advertising effort $k_i(t)$

Το κόστος της διαφήμισης το θεωρούμε να είναι μια κυρτή συνάρτηση όπως $C_i(t) = b\left(A_i(t)\right)^2$ καθώς όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των καταναλωτών , τόσο περισσότερη προσπάθεια χρειάζεται για κάποια συγκεκριμένη αύξηση.

Αυτό που έχουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι το

$$MaxJ_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[\left(A(t) - q_i(t) - Q_{-i}(t)\right)^{\frac{1}{a}} q_i(t) - b\left(k_i(t)\right)^2\right]dt$$

Με $Q_{-i}(t) = \sum_{i \neq j} q_j(t)$

Για την επίλυση ακολουθείται η κλασσική μέθοδος που έχουμε περιγράψει.

2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΗΜΕΡΙΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΉΣΕΩΝ

2.1 ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Οι δυναμικές μοντελοποιήσεις που επιλύονται με διαφορικά παίγνια είναι μεν πιο ρεαλιστικές αλλά και πάλι με την μορφή που χρησιμοποιούνται σήμερα δεν ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα. Το ένα μη ρεαλιστικό κομμάτι είναι προφανώς οι «χονδροκομμένες» και ανακριβείς εξισώσεις που περιγράφουν τις μεταβολές και τις αξίες των μεταβλητών. Επίσης υπάρχουν και διάφοροι παράμετροι που επηρεάζουν από λίγο το μοντέλο και οι οποίοι παραλείπονται. Φυσικά αυτά προέρχονται για λόγους αποφυγής πολυπλοκότητας. Ένα πλήρως ρεαλιστικό μοντέλο ενδεχομένως δεν θα έχει καν αναλυτική θεωρητική λύση.

Άλλο ένα πρόβλημα που έχουν οι σημερινές μοντελοποιήσεις είναι ότι παίρνουν άμεση ανταπόκριση ανάμεσα σε μακροπρόθεσμες και βραχυπρόθεσμες μεταβλητές. Για παράδειγμα σε ένα R&D game με process innovation effort οι μοντελοποιήσεις που χρησιμοποιούνται θεωρούν ότι κάθε παραμικρό R&D effort έχει άμεσα μια αντίστοιχη θετική ανταπόκριση στο κόστος. Στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει προφανώς κάτι τέτοιο αφού η τεχνολογική ανάπτυξη εντάσσεται στην παραγωγική διαδικασία μετά την ολοκλήρωση του ερευνητικού σχεδίου και με κάποια ενδεχόμενη απορρόφηση λόγω εκπαίδευσης προσωπικού και αναβάθμισης των παραγωγικών μέσων.

Ένας τρόπος που λύνει εν μέρει αυτό το πρόβλημα άλλα δυστυχώς δημιουργεί ακόμα πιο σημαντικά προβλήματα είναι η χρήση αργών και γρήγορων μεταβλητών. Ας δούμε μια σύντομη περιγραφή.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΓΩΝ ΚΑΙ ΓΡΗΓΟΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.2.1 Σύντομη περιγραφή

Έχουμε ένα δυναμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x,y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Με $0 < \varepsilon \ll 1$. Σε αυτήν την περίπτωση τα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι οι γρήγορες μεταβλητές και τα $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ είναι οι αργές μεταβλητές. Αν μετασχηματίσουμε τον χρόνο t ως $\tau = \varepsilon t$ τότε το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y)$$

Τα x και y εξακολουθούν να είναι οι γρήγορες και αργές μεταβλητές αντίστοιχα αλλά ο χρόνος τ είναι ο αργός χρόνος ενώ ο χρόνος t είναι ο κανονικός γρήγορος χρόνος.
Εφόσον λοιπόν $f(x, y) \neq 0$ τότε θα έχουμε

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \gg \left|\frac{dy}{dt}\right|$$

Αυτός είναι και ο λόγος που καλούμε την x γρήγορη μεταβλητή και την y αργή , εφόσον σε σύγκριση με την x η y είναι σχεδόν σταθερή.

Το γρήγορο υποσύστημα (FS) είναι

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Ενώ το αργό υποσύστημα (SS) είναι

$$0 = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y)$$

Η δυναμική του αρχικού συστήματος μπορεί να εξηγηθεί και μέσω των υποσυστημάτων. Πρέπει πρώτα να καταλάβουμε την δυναμική του γρήγορου υποσυστήματος (FS). Εφόσον το y θεωρείται σταθερό στο (FS) το λαμβάνουμε σαν διακλαδωτική παράμετρο.
Δίνοντας μας μια περιοχή D του y το FS μπορεί να έχει ευσταθείς λύσεις (attractors) δύο τύπων.
α) Ευσταθή ισορροπία β) ευσταθείς περιοδικές λύσεις
Αν $\forall y \in D$ υπάρχουν 2 ευσταθείς λύσεις (stable attractors) τότε λέμε ότι είναι διπλά ευσταθές (bistable)
Για το κλασσικό μοντέλο FitzHugh-Nagumo

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - y \quad \text{με} \quad f(x) = x(a - x)(x - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(x - x_0 - \gamma y)$$

με (a, x_0, γ) να είναι πραγματικές παράμετροι , m=1 , n=1 το σύστημα είναι διπλά ευσταθές για κάποιο διάστημα D του y.
Παρόλο που η τιμή της y είναι σταθερή στο (FS) η λύση του θα προσεγγίσει γρήγορα μια από τις λύσεις (attractors). Ποια ακριβώς εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του x. Καθώς είναι συνηθισμένη η περίπτωση , μία η περισσότερες

ισορροπίες να είναι ευσταθείς για κάποιο εύρος του y. Συνεπώς για εκείνα τα y η λύση του γρήγορου υποσυστήματος θα προσεγγίσει ταχέως αυτές τις ευσταθείς ισορροπίες. Σημειώστε ότι για αυτήν την ισορροπία $f(x,y)=0$, και είναι μια από τις εξισώσεις του (SS)

Εφόσον ασυμπτωτικά το (FS) περιγράφει την δυναμική του αρχικού συστήματος μόνο για χρόνους τάξης $\boldsymbol{O}(1)$ αναμένουμε την λύση να συμπεριφέρεται σαν την λύση του (FS) μέχρι να φτάσουμε κοντά σε αυτές τις ισορροπίες. Όταν οι τροχιές του συστήματος έχουν φτάσει αυτές τις ισορροπίες τότε αναμένουμε οι λύσεις να προσεγγίζονται από το αργό υποσύστημα (SS). Παρατηρώντας ξανά ότι $f(x,y)=0$ για το (SS) , αυτό εκφράζει την κίνηση στην $f=0$ στον χώρο (x,y)

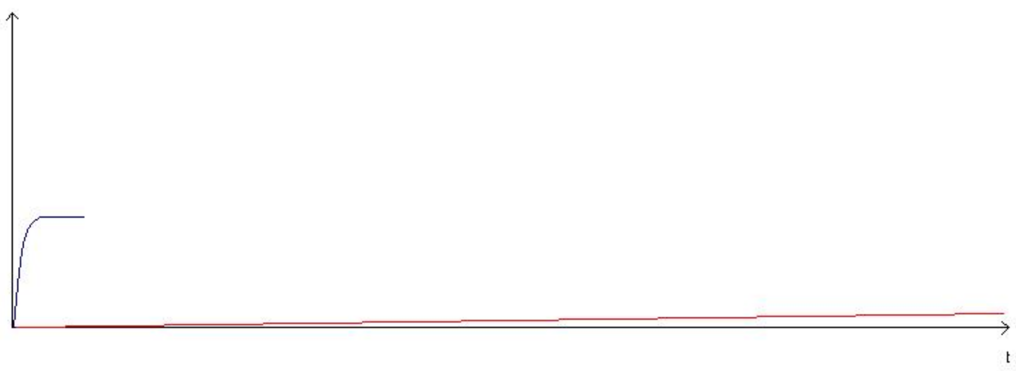
Στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων, βρίσκουμε μια περιοχή D του y για την οποία μια συγκεκριμένη διακλάδωση S(D) της ισορροπίας του γρήγορου υποσυστήματος είναι ευσταθής. Αυτή η «διακλάδωση» είναι μια ευσταθής πολλαπλότητα για την γρήγορη ροή στην οποία οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι (τουλάχιστον τοπικά) attracted.
Συγκεκριμένα το

$$S(D) \equiv \{ (x,y) : f(x,y) = 0 \ , \ (x,y) \text{ ευσταθές στο (FS)} \ , y \in D \ \}$$

είναι μια ευσταθής πολλαπλότητα. Το μοντέλο FitzHugh-Nagumo έχει δύο ξένες μεταξύ τους ευσταθείς πολλαπλότητες $S(D_1)$ και $S(D_2)$ με $D = D_1 \cap D_2$ να είναι η περιοχή διπλής ευσταθείας.

2.2.3 Συμπεράσματα χρήσης

Στην ουσία όμως όπως φαίνεται από την περιγραφή αυτό που κάνει η μέθοδος αυτή είναι ότι θεωρεί η αργή μεταβλητή να κινείται τόσο αργά ώστε να είναι αμελητέα η ταχύτητα σε σύγκριση με την γρήγορη. Παίρνοντας το $\varepsilon \to 0$ δεν σημαίνει ότι η αργή μεταβλητή είναι σταθερή και αρχίζει να κινείται μετά που θα ισορροπήσει η γρήγορη,
αλλά ότι κινείται εξ αρχής τόσο αργά που ο χρόνος ισορροπίας της άλλης μεταβλητής είναι αμελητέος. Και βέβαια το πρόβλημα είναι ότι μετά που θα ισορροπήσει η γρήγορη μεταβλητή, η αργή θα συνεχίσει να κινείται εξίσου αργά σε διαφορετικής τάξης χρόνο. Αυτό είναι κάτι που δεν ανταποκρίνεται καθόλου στο μοντέλο μας. Γι αυτό το λόγο και η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο σε συστήματα που παρουσιάζουν μεγάλη απορρόφηση από την φύση όπως οικοσυστήματα.



Επίσης άλλο ένα πρόβλημα σε οικονομικά μοντέλα είναι ότι οι μεταβολές που περιγράφονται από το δυναμικό σύστημα εξαρτώνται συνήθως και από άλλους παράγοντες εκτός από την μεταβλητή στην οποία υπάρχει απορρόφηση όπως ρυθμοί υποτίμησης ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος.

Για παράδειγμα στην περίπτωση του R&D effort η μεταβολή του οριακού κόστους στα κλασσικά μοντέλα δίνεται από την εξίσωση

$$\dot{c}_i(t) = c_i(t)\left(-k_i(t) - \beta K_i(t) + \delta\right) \qquad (1)$$

Η παράμετρος $\delta \in [0,1]$ είναι μια σταθερά που εκφράζει τον ρυθμό υποτίμησης , συγκεκριμένα μετράει το πόσο μειώνεται η παραγωγική αποτελεσματικότητα λόγω γήρανσης της τεχνολογίας και των μέσων παραγωγής.

Αν πάρουμε το οριακό κόστος να είναι αργή μεταβλητή αυτό απορροφά όλους τους παράγοντες που την επηρεάζουν και όχι μόνο το R&D effort.

Από την άλλη λόγω της παραμέτρου $e^{-\rho t}$ στην ροή του κέρδους που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το κόστος του R&D effort υπερτιμάται σε σχέση με το αποτέλεσμα σε τάξη μεγέθους $1/\varepsilon$ όση είναι και η διαφορά τάξης ανάμεσα στον αργό και γρήγορο χρόνο. Πρακτικά αν πάρουμε για παράδειγμα ένα R&D effort κόστους K ,σε 100 χρόνια αν το επιτόκιο είναι 4% η αξία του θα είναι περίπου 55K σε 200 χρόνια 2980K και σε 1000 χρόνια $2,35 \cdot 10^{17} K$

Συνεπώς ένα τέτοιο μοντέλο από την μία υποτιμά το οριακό κόστος και από την άλλη υπερτιμά το κόστος του R&D effort καθότι θεωρεί ότι καθυστερεί να φανεί το αποτέλεσμα και μάλιστα σε σημείο που αφού παίρνουμε $\varepsilon \to 0$ σημαίνει ότι το κόστος του R&D σε σχέση με το αποτέλεσμα πάει προς το άπειρο και το βέλτιστο R&D effort προς το μηδέν.

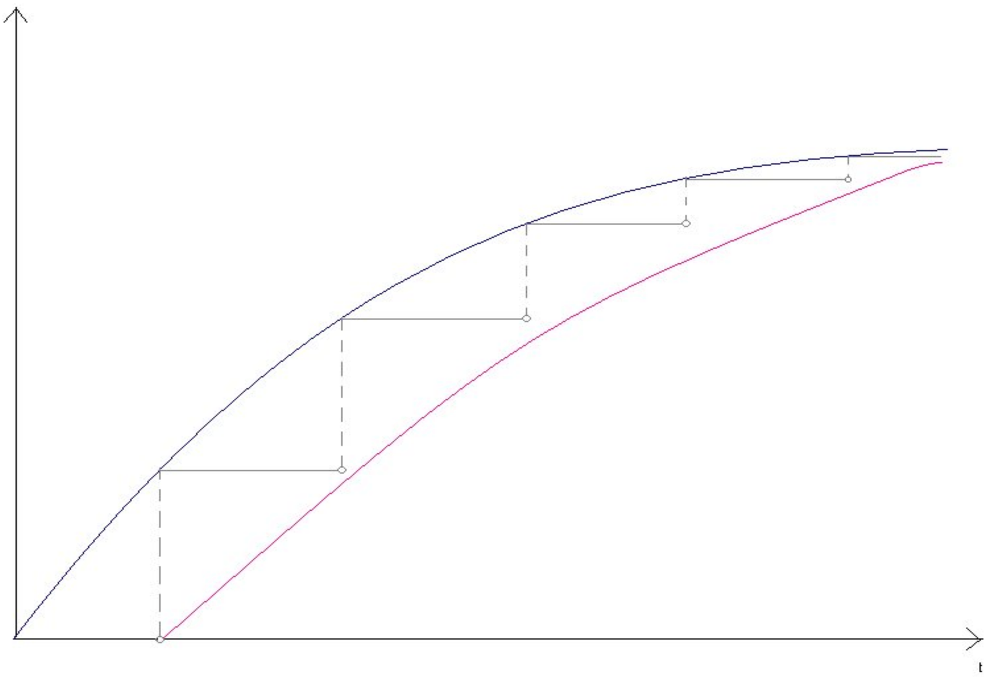
Για να έχει νόημα στην περίπτωση την δικιά μας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον χρόνο ισορροπίας της γρήγορης μεταβλητής να είναι αμελητέος. Τότε όμως επανερχόμαστε ουσιαστικά στο αρχικό μοντέλο που έχουμε άμεση επίδραση των μεταβλητών.

2.3 Απορρόφηση μέσω συναρτήσεων στις εξισώσεις κίνησης.

Σε περιπτώσεις όπως αυτές που υπάρχει κάποια απορρόφηση σε ίδιας τάξης χρόνο μπορούμε να την εισάγουμε μέσω συναρτήσεων στις εξισώσεις που περιγράφουν το δυναμικό σύστημα. Το θετικό είναι ότι μπορούμε να εισάγουμε οποιαδήποτε απορρόφηση επιθυμούμε. Βέβαια αυτό μπορεί να περιπλέξει αρκετά το πρόβλημα ή μπορεί ακόμα και να μην λύνεται αναλυτικά.

Ανάλογα με τον τύπο του προϊόντος και της παραγωγής μπορεί να έχουμε τεράστιες διαφορές στο πως επιδρά η μια μεταβλητή στην άλλη. Αυτό που κάνουμε είναι η μεταβλητή όπως χρησιμοποιείται στο δυναμικό σύστημα να μπαίνει με μια συνάρτηση απορρόφησης $A^{k_i}(t) = A\left(k_i(t)\right)$. Δηλαδή η εξίσωση (1) θα γινόταν

$$\dot{c}_i(t) = c_i(t)\left(-A^{k_i}(t) - \beta\sum_{i\neq j} A^{k_j}(t) + \delta\right)$$



Αν για παράδειγμα έχουμε το R&D effort να εντάσσεται ανά περιόδους στην παραγωγική διαδικασία μετά την αποπεράτωση του κάθε ερευνητικού σχεδίου η συνάρτηση απορρόφησης θα είναι θεωρώντας την περίοδο να είναι μία χρονική μονάδα

$$A^{k_i}(t) = \sum_{j=1}^{[t]} k_i(j-1)\ 1_{[j-1,j)}$$

Αυτό όμως το πρόβλημα είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί αναλυτικά. Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την απορρόφηση λόγω εκπαίδευσης προσωπικού και αναβάθμισης των παραγωγικών μέσων δημιουργώντας και μια πιο ομαλή συνάρτηση που θα φράσσεται από την προηγούμενη και που ενδεχομένως να είναι τόσο ομαλή ώστε το πρόβλημα να λύνεται.

$$A^{k_i}(t) \leq \sum_{j=1}^{[t]} k_i(j-1)\ 1_{[j-1,j)}$$

Όμως και αυτό είναι δύσκολο να επιτύχουμε το φράγμα με μια απλή συνάρτηση ειδικά αν δεν έχουμε περιορισμούς για τον τύπο της συνάρτησης $k_i(t)$.

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να βάλουμε μια απλή συνάρτηση όπως $A^{k_i}(t) = k_i(t-1)$ και η οποία θα προσεγγίζει κάπως την απορρόφηση.

Γενικά τα αποτελέσματα που βγάζουν τα σημερινά μοντέλα που έχουν καθιερωθεί και επιλυθεί σίγουρα δεν είναι ακριβή, και μην ξεχνάμε και τις ιδιαιτερότητες που υπάρχουν για την παραγωγή ή ανάπτυξη του εκάστοτε προϊόντος. παρόλα ταύτα μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα γενικής στρατηγικής .

Το να εισάγουμε κάποια σύνθετη συνάρτηση απορρόφησης η ένα πιο πολύπλοκο δυναμικό σύστημα θα μπορούσε να γίνει ενδεχομένως μέσω επαναληπτικών αριθμητικών μεθόδων αλλά και πάλι προς το παρόν δεν είναι δυνατή η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος.

3 ΔΙΑΦΗΜΙΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ R&D

3.1 Εισαγωγή

Ο τομέας ο οποίος είναι ο λιγότερο ανεπτυγμένος είναι τα διαφορικά παίγνια διαφήμισης, Advertising differential games.

Στην εργασία αυτή θα δούμε τον τρόπο διαχείρισης τέτοιων προβλημάτων τα οποία στηρίζονται στην εισαγωγή του μεγέθους τις αγοράς στην καμπύλη ζήτησης. Αντί να πάρουμε την σταθερά που υπάρχει στα κλασσικά μοντέλα παίρνουμε αυτόν τον όρο να είναι συνάρτηση του πλήθους των καταναλωτών και ο τρόπος μεταβολής του πλήθους αυτού να δίνεται από μια συνήθη διαφορική εξίσωση.

Επιπρόσθετα, θα πάρουμε αυτό παράλληλα με R&D product innovation. Για την περιγραφή αυτού του κομματιού θα θεωρήσουμε τα κλασσικά μοντέλα που υπάρχουν όπως περιγράφονται και στο πρώτο κεφάλαιο ως προς την εισαγωγή του βαθμού υποκαταστατηκότητας στην καμπύλη ζήτησης και τον ρυθμό μεταβολής της υποκαταστατηκότητας θεωρώντας απλά την διάχυση στην εξίσωση που δίνει (spillover) να είναι μηδέν.

η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο του Dixit θα είναι

$$p_1(t) = A - q_1(t) - s(t)q_2(t)$$

Η σταθερά Α που χρησιμοποιείται σε όλα τα κλασσικά μοντέλα περιλαμβάνει διάφορους παράγοντες της αγοράς που θεωρούμε ότι είναι σταθεροί, συμπεριλαμβανομένου και του μεγέθους της. Η μεταβλητή N(t) θα εκφράζει το μέγεθος της αγοράς δηλαδή το πλήθος των καταναλωτών για το προϊόν αυτό. Το advertising effort αποσκοπεί στην αύξηση του μεγέθους της αγοράς το οποίο προφανώς δεν θα είναι σταθερό. Επομένως θα πάρουμε το Α να είναι συνάρτηση του N(t). Θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει γραμμική αναλογία και η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης θα είναι αν A>0

$$p_1(t) = AN(t) - q_1(t) - s(t)q_2(t)$$

3.2 Διαφήμιση παράλληλα με ανάπτυξη του προϊόντος.

Έχουμε δύο επιχειρήσεις σε μία αγορά που απαρτίζουν ένα δυοπώλιο και παράγουν ένα ομογενές αρχικά αγαθό. Κάθε μία διαθέτει συγκεκριμένη τεχνολογία παραγωγής που εκφράζεται μέσω ενός σταθερού οριακού κόστους $c_1, c_2 \geq 0$

Στην αρχή το προϊόν δεν είναι ιδιαίτερα γνωστό στο καταναλωτικό κοινό, οπότε και οι επιχειρήσεις επενδύουν σε ένα advertising effort $D_1(t), D_2(t)$ ώστε να αυξήσουν την ζήτηση , δηλαδή το πλήθος των καταναλωτών.

Εφόσον διαφοροποιείται το προϊόν διαφοροποιείται και το μέγεθος της αγοράς. Θεωρούμε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση για την επιχείρηση 1 (και εντελώς αναλογικά για την 2).

$$\dot{N}_1(t) = a\left(D_1(t) + s(t)D_2(t)\right) - hN_1(t) \qquad (2)$$

με αρχική συνθήκη $N_1(0) = N_{1,0}$

Το α είναι μια θετική σταθερά που εκφράζει την αποτελεσματικότητα της διαφήμισης στην αγορά και το h είναι μια σταθερά που εκφράζει τον βαθμό δυσαρέσκειας από το προϊόν και ουσιαστικά τον ρυθμό μείωσης των καταναλωτών. Στην αρχή το προϊόν είναι άγνωστο και ο καταναλωτής πείθεται μέσω της διαφήμισης να το χρησιμοποιήσει. Αν το h είναι κοντά στο μηδέν σημαίνει ότι οι περισσότεροι καταναλωτές που το χρησιμοποιούν είναι ικανοποιημένοι και θα συνεχίσουν να το καταναλώνουν. Ουσιαστικά εκφράζει μια αναλογία πελατών που χάνονται καθώς δοκιμάζοντας το προϊόν δεν έμειναν ευχαριστημένοι. Επίσης είναι εύκολο να υπολογιστεί στατιστικά στην πράξη. Το h θα μπορούσε να πάρει και αρνητικές τιμές καθώς μπορεί να υπάρχει εξάπλωση μέσω των ίδιων των καταναλωτών, δηλαδή ο καταναλωτής να έχει μείνει ικανοποιημένος σε τέτοιο βαθμό που να το προτείνει και σε άλλους καταναλωτές και συνολικά αυτοί οι πελάτες να υπερβαίνουν εκείνων που δεν έμειναν ευχαριστημένοι και δεν διατίθενται να το αγοράσουν ξανά.

Ως $s(t)$ θεωρούμε τον βαθμό υποκαταστατικότητας ανάμεσα στα δύο προϊόντα, στην αρχή αφού είναι ομογενή θα ισχύει $s(0) = 1$ και η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης βάζοντας πάλι τον αρχικό όρο να είναι συνάρτηση του μεγέθους της αγοράς θα είναι

$$p_1(t) = AN_1(t) - q_1(t) - s(t)q_2(t) \qquad (3)$$

Οι επιχειρήσεις προκειμένου να διαφοροποιήσουν το προϊόν τους, επενδύουν σε R&D effort $k_1(t), k_2(t)$. Θεωρούμε οριζόντια διαφοροποίηση, δηλαδή το effort του ενός έχει αντίστοιχο θετικό αντίκτυπο στον άλλο ανάλογα με το πόσο ομογενή είναι τα αγαθά. Αυτό γίνεται όταν η διαφήμιση επικεντρώνεται στην αξία του αγαθού γενικότερα. Για παράδειγμα αν παράγουν μπανάνες να διαφημίζουν πόσο υγιεινές και απαραίτητες είναι οι μπανάνες.

Ο βαθμός υποκαταστατικότητας θα μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$\dot{s}(t) = -s(t)\left(k_1(t) + k_2(t) - \delta\right) \qquad (4)$$

Με αρχική συνθήκη s(0) = 1

Το $\delta \in [0,1]$ είναι μια σταθερά που εκφράζει τον ρυθμό μείωσης ανάλογα με τα κλασσικά υπάρχοντα μοντέλα.

Το πλήθος των καταναλωτών $N(t)$ και ο βαθμός υποκαταστατικότητας $s(t)$ αποτελούν τις δύο μεταβλητές κατάστασης του συστήματος μας.

Θεωρούμε το κόστος για την επίτευξη των commercial και R&D efforts να είναι κυρτή συνάρτηση της μορφής $\beta\left(D_1(t)\right)^2$ και $\gamma\left(k_1(t)\right)^2$ αντίστοιχα με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ καθώς όσο περισσότεροι είναι οι καταναλωτές τόσο μεγαλύτερη διαφημιστική προσπάθεια χρειάζεται για να προσελκύσουμε καταναλωτές από τους εναπομείναντες οι οποίοι δεν έχουν πεισθεί μέχρι την δεδομένη στιγμή.

Συνεπώς υπολογίζοντας το κέρδος θα είναι

$$\pi_1(t) = \left(p_1(t) - c_1\right) q_1(t) - \gamma\left(k_1(t)\right)^2 - \beta\left(D_1(t)\right)^2$$

$$= \left[AN(t) - q_1(t) - s(t) q_2(t) - c_1\right] q_1(t) - \gamma\left(k_1(t)\right)^2 - \beta\left(D_1(t)\right)^2 \qquad (5)$$

Τελικός μας στόχος είναι να μεγιστοποιήσουμε την συνολική ροή κέρδους σε ένα χρονικό διάστημα $\left[0, \infty\right)$ ως προς τα R&D και commercial effort τα οποία αποτελούν τις μεταβλητές ελέγχου. Δηλαδή να υπολογίσουμε το

$$\max_{k_1, A_1} \int_0^\infty \pi_1(t) e^{-\rho t} dt$$

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} H_1(t) = e^{-\rho t} \Big\{ & \left(AN_1(t) - c_1\right) q_1(t) - q_1^2(t) - s(t) q_2(t) q_1(t) - \beta\left(D_1(t)\right)^2 - \gamma\left(k_1(t)\right)^2 \\ & + \lambda_1(t)\Big(\left[a\left(D_1(t) + s(t) D_2(t)\right)\right] - hN(t)\Big) - \lambda_2(t) s(t)\left(k_1(t) + k_2(t) - \delta\right)\Big\} \end{aligned} \qquad (6)$$

Παίρνουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης ως προς τις μεταβλητές ελέγχου

F.O.C.

- $\dfrac{\partial H_1(t)}{\partial q_1(t)} = 0 \Rightarrow AN_1(t) - c_1 - 2q_1(t) - s(t) q_2(t) = 0$

$$\Rightarrow \; q_1(t) = \frac{1}{2}\left(AN_1(t) - c_1 - s(t) q_2(t)\right)$$

Επίσης λύνοντας αντίστοιχα για την δεύτερη επιχείρηση έχουμε

$$q_2(t) = \frac{1}{2}\left(AN_2(t) - c_2 - s(t)q_1(t)\right)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$q_1^*(t) = \frac{1}{2}AN_1(t) - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}s(t)AN_2(t) + \frac{1}{4}s(t)c_2 + \frac{1}{4}s^2(t)q_1^*(t) \;\Rightarrow$$

$$q_1^*(t)\left(1 - \frac{s^2(t)}{4}\right) = \frac{1}{4}AN_1(t) - \frac{1}{2}c_1 - \frac{s(t)}{4}AN_2(t) + \frac{1}{4}s(t)c_2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; q_1^*(t)\left(1 - \frac{s^2(t)}{4}\right) = \frac{1}{2}A\left(N_1(t) - \frac{1}{2}s(t)N_2(t)\right) - \frac{1}{2}\left(c_1 - \frac{1}{2}s(t)c_2\right)$$

Θα πάρουμε υπόθεση συμμετρίας ανάμεσα στις 2 επιχειρήσεις δηλαδή $c_1 = c_2 = c$, $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$, $k_1(t) = k_2(t) = k(t)$ και $D_1(t) = D_2(t) = D(t)$ τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται αφού και $s(t) \le 1$ άρα $s(t) \ne 2$ και απαλείφοντας τον όρο $\left(1 - \frac{s(t)}{2}\right)$ έχουμε

$$q_1^*(t)\left(1 + \frac{s(t)}{2}\right) = \frac{1}{2}AN(t) - \frac{c}{2} \Rightarrow$$

$$q_1^*(t) = \frac{AN(t) - c}{2 + s(t)} \qquad (8)$$

- $$\frac{\partial H_1(t)}{\partial k_1(t)} = 0 \Rightarrow -2\gamma k_1(t) - \lambda_2(t)s(t) = 0 \;\Rightarrow$$

$$k_1^*(t) = \frac{-\lambda_2(t)s(t)}{2\gamma} \qquad (9)$$

- $$\frac{\partial H_1(t)}{\partial D_1(t)} = 0 \Rightarrow -2\beta D_1(t) + \lambda_1(t)\alpha = 0 \;\Rightarrow$$

$$D_1^*(t) = \frac{a\lambda_1(t)}{2\beta} \qquad (10)$$

Παίρνοντας τις συνθήκες για τις μεταβλητές κατάστασης έχουμε

- $$-\frac{\partial H_1(t)e^{\rho t}}{\partial N_1(t)} = \dot{\lambda}_1(t) - \rho\lambda_1(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -Aq_1(t) + \lambda_1(t)h = \dot{\lambda}_1(t) - \rho\lambda_1(t)$$

Από την σχέση (10) έχουμε ότι $\lambda_1(t) = \frac{2\beta}{a}D_1(t)$ και $\dot{\lambda}_1(t) = \frac{2\beta}{a}\dot{D}_1(t)$
Συνεπώς η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\frac{-2\beta}{a}\dot{D}_1(t) = Aq_1(t) - \frac{2\beta}{a}hD_1(t) - \frac{2\beta}{a}\rho D_1(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \dot{D}_1(t) = \frac{-aA}{2\beta}q_1(t) + (h+\rho)D_1(t) \qquad (11)$$

- $$-\frac{\partial H_1(t)e^{\rho t}}{\partial s(t)} = \dot{\lambda}_2(t) - \rho\lambda(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q_1(t)q_2(t) - \lambda_1(t)aD_2(t) + \lambda_2(t)\big(k_1(t) + k_2(t) - \delta + \rho\big) = \dot{\lambda}_2(t)$$

Αντικαθιστώντας από την (9) το $\lambda_2(t) = -\frac{2\gamma\kappa_1(t)}{s(t)}$ η σχέση γίνεται και από την (10) το $\lambda_1(t) = \frac{2\beta}{a}D_1(t)$ έχουμε

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\big(k_1(t) + k_2(t) - \delta + \rho\big)\frac{2\gamma k_1(t)}{s(t)} + q_1(t)q_2(t) - 2\beta D_1(t)D_2(t) \qquad (12)$$

Από την σχέση (9) παίρνοντας την παράγωγο ως προς τον χρόνο έχουμε

$$\dot{k}(t) = -\frac{1}{2\gamma}\big(\dot{\lambda}_2(t)s(t) + \dot{s}(t)\lambda_2(t)\big)$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε από την (4) την (9) και την (12) έχουμε

$$\dot{k}_1(t) = -\frac{1}{2\gamma}\left[-\left(k_1(t)+k_2(t)-\delta+\rho\right)\frac{2\gamma k_1(t)}{s(t)}s(t) + q_1(t)q_2(t)s(t) - 2\beta D_1(t)D_2(t)s(t) - \right.$$

$$\left. -s(t)\left(k_1(t)+k_2(t)-\delta\right)\frac{-2\gamma k_1(t)}{s(t)} \right]$$

$$\Rightarrow \dot{k}_1(t) = \rho k_1(t) - \frac{q_1(t)q_2(t)s(t)}{2\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}D_1(t)D_2(t)s(t) \qquad (13)$$

Έχουμε θεωρήσει συμμετρία ανάμεσα στις 2 επιχειρήσεις δηλαδή $c_1 = c_2 = c$, $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$, $k_1(t) = k_2(t) = k(t)$ και $D_1(t) = D_2(t) = D(t)$. Για να βρούμε τα ευσταθή σημεία ισορροπίας λύνουμε το παρακάτω σύστημα στα σημεία βελτιστοποίησης.

$$\begin{cases} \dot{D}(t) = f_1\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) = 0 \\ \dot{k}(t) = f_2\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) = 0 \\ \dot{N}(t) = f_3\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) = 0 \\ \dot{s}(t) = f_4\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Από τις σχέσεις (11) και (8) έχουμε ότι

$$\dot{D}(t) = \frac{-aA}{2\beta}\frac{AN(t)-c}{2+s(t)} + (h+\rho)D(t) \equiv f_1\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) \qquad (14)$$

Από τις σχέσεις (13) και (8) έχουμε

$$\dot{k}(t) = \rho k(t) - \frac{s(t)}{2\gamma}\left(\frac{AN(t)-c}{2+s(t)}\right)^2 + \frac{\beta}{\gamma}D^2(t)s(t) \equiv f_2\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) \qquad (15)$$

Ενώ από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε κατευθείαν ότι

$$f_3\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) \equiv a\left(\left(1+s(t)\right)D(t)\right) - hN(t) \qquad (16)$$

$$f_4\left(N(t), s(t), D(t), k(t)\right) \equiv -s(t)\left(2k(t)-\delta\right) \qquad (17)$$

Συνεπώς υπολογίζουμε

$$\dot{D}(t) = 0 \Rightarrow D(t) = \frac{aA}{2\beta(\rho+h)} \cdot \frac{AN(t)-c}{2+s(t)} \qquad (18)$$

$$\dot{k}(t)=0 \Rightarrow k(t)=\frac{\beta s(t)}{\rho\gamma}D^2(t)-\frac{s(t)}{2\gamma\rho}\left(\frac{AN(t)-c}{2+s(t)}\right)^2 \qquad (19)$$

$$\dot{N}(t)=0 \Rightarrow N(t)=\frac{\left(1+s(t)\right)a}{h}D(t) \qquad (20)$$

$$\dot{s}(t)=0 \Rightarrow s^*=0 \quad \text{ή} \quad k^*=\frac{\delta}{2}$$

- <u>Περίπτωση 1</u> Αν $s^*=0$

Από την (19) έχουμε $k^*=0$

πράγμα που είναι λογικό καθώς αν το s έχει ισορροπήσει στο 0 δεν θα είχε κάποιο σκοπό το R&D effort αφού απλά θα είχε κόστος χωρίς να αλλάζει τίποτα.

Ααπό την (20) έχουμε

$$N^*=\frac{a}{h}D^* \quad (20^{\alpha})$$

Και από την (18)

$D^*=\frac{aA}{4\beta(\rho+h)}\left(AN^*-c\right)$ αντικαθιστώντας από την (20^{α}) γίνεται

$$D^*=\frac{a^2A^2}{4h\beta(\rho+h)}D^*-\frac{aAc}{4\beta(\rho+h)} \Rightarrow D^*=\frac{\frac{aAc}{4\beta(\rho+h)}}{\frac{a^2A^2}{4h\beta(\rho+h)}-1} \Rightarrow$$

$$D^*=\frac{aAch}{a^2A^2-4h\beta(\rho+h)} \qquad (21)$$

Και αντικαθιστώντας και από την (20^{α}) θα έχουμε $N^*=\frac{a^2Ac}{a^2A^2-4h\beta(\rho+h)}$

και από την (8) $q^*=\frac{AN^*-c}{2+s(t)} \Rightarrow q^*=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2A^2c}{a^2A^2-4h\beta(\rho+h)}-c\right)$

Άρα η λύση τελικά θα είναι

$$s^*=0$$

$$k^* = 0$$

$$D^* = \frac{aAch}{a^2A^2 - 4h\beta(\rho+h)}$$

$$N^* = \frac{a^2Ac}{a^2A^2 - 4h\beta(\rho+h)}$$

$$q^* = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2A^2c}{a^2A^2 - 4h\beta(\rho+h)} - c\right)$$

Ο περιορισμός που έχουμε είναι ότι $a^2A^2 > 4h\beta(\rho+h)$ για να είναι θετικές οι τιμές μας. Πράγμα που είναι φυσιολογικό στην πράξη αφού οι μεταβλητές α,Α,β είναι συνήθως τάξης $O(1)$ ενώ οι οι μεταβλητές ρ και h τάξης συνήθως $O(10^{-2})$ ή $O(10^{-1})$

Ο άλλος περιορισμός είναι $\frac{a^2A^2c}{a^2A^2 - 4h\beta(\rho+h)} \geq c \Rightarrow$

$a^2A^2c \geq a^2A^2c - 4h\beta c(\rho+h) \Rightarrow h(\rho+h) \geq 0$ δηλαδή $h \notin (-\rho, 0)$

Επίσης βλέπουμε ότι όταν ο όρος $4h\beta(\rho+h)$ πλησιάζει το a^2A^2 ότι οι τιμές των μεταβλητών μας πηγαίνουν στο άπειρο. Αυτό συμβαίνει διότι δεν έχουμε πάρει περιορισμό για το πλήθος των υποψήφιων καταναλωτών και μας λέει ότι ακόμα και αν χάνουμε πάρα πολλούς πελάτες μέχρι ένα σημείο, μπορούμε να κάνουμε πολύ μεγάλη διαφήμιση και να παίρνουμε πάρα πολλούς καινούργιους πελάτες συνέχεια άλλα επειδή στην πράξη υπάρχει φράγμα στην ποσότητα των υποψήφιων καταναλωτών τα αποτελέσματα όταν ο παρανομαστής είναι πολύ κοντά στο μηδέν δεν είναι ακριβή σε αντίθεση με άλλα εύρη τιμών που δεν μας επηρεάζει ιδιαίτερα η έλλειψη του φράγματος.

- <u>Περίπτωση 2</u> Αν $k^* = \frac{\delta}{2}$

Η (18) μέσω τις (20) γίνεται

$$D^* = \frac{aA}{2\beta(\rho+h)} \frac{\frac{A}{h}(1+s^*)aD^* - c}{2+s^*} \Rightarrow$$

$$D^* - \frac{a^2A^2\left(1+s^*\right)}{2\beta h\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)}D^* = -\frac{aAc}{2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)} \Rightarrow$$

$$D^* = \frac{\dfrac{aAc}{2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)}}{\dfrac{a^2A^2\left(1+s^*\right)}{2\beta h\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D^* = \frac{aAch}{a^2A^2\left(1+s^*\right)-2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)}$$

Και συνεπώς από την (20^{α}) έχουμε

$$N^* = \frac{a^2Ac\left(1+s\right)}{a^2A^2\left(1+s\right)-2\beta h\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)}$$

Για να υπολογίσουμε το s^* αντικαθιστούμε στην (19) και έχουμε

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\beta}{\rho\gamma}\frac{a^2A^2c^2h^2}{\left(a^2A^2\left(1+s^*\right)-2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)h\right)^2} - \frac{s^*}{2\gamma\rho\left(2+s^*\right)^2}\left(\frac{a^2Ac\left(1+s^*\right)}{a^2A^2\left(1+s^*\right)-2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)h}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \rho\gamma\delta\left(a^2A^2\left(1+s^*\right)-2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)h\right)^2 = 2\beta a^2A^2c^2h^2 - \frac{s^*}{\left(2+s^*\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ \rho\gamma\delta\left(2+s^*\right)^2\left(a^2A^2\left(1+s^*\right)-2\beta\left(\rho+h\right)\left(2+s^*\right)h\right)^2 = 2\beta a^2A^2c^2h^2\left(2+s^*\right)^2 - s^*$$

Έχουμε ένα πολυώνυμο $6^{ου}$ βαθμού το οποίο δεν έχει γενική λύση. Συνεπώς υπολογίζουμε κάθε φορά ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων μας τις διαφορετικές πραγματικές λύσεις με $s \in [0,1]$ και επίσης ανάλογα με πριν $a^2A^2 > 4h\beta\left(\rho+h\right)$

Επιπλέον θα πρέπει να ελέγξουμε και την ευστάθεια των λύσεων για να επιλέξουμε ποια η ποιες θα είναι αποδεκτές. Για την ευστάθεια της εκάστοτε λύσης υπολογίζουμε τον πίνακα των μερικών παραγώγων.

$$J\left(s,k,N,D\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{s}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{s}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{s}}{\partial D} \\ \frac{\partial \dot{k}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial D} \\ \frac{\partial \dot{N}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial D} \\ \frac{\partial \dot{D}}{\partial s} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial D} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους από τις σχέσεις (14) (15) (16) (17)

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial s}=\delta-2k \qquad \frac{\partial \dot{s}}{\partial k}=-2s$$

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial N}=0 \qquad \frac{\partial \dot{s}}{\partial D}=0$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial s}=-\frac{\beta}{\gamma}D^{*2}-\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{AN-c}{2+s}\right)^2+\frac{s}{2\gamma}\frac{\left(AN-c\right)^2 2\left(2+s\right)}{\left(2+s\right)^4}=\frac{-\beta}{\gamma}D^2+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{AN-c}{2+s}\right)^2\left(1-\frac{2s}{2+s}\right)$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}=\rho$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial N}=\frac{s}{2\gamma\left(2+s\right)^2}2\left(AN-c\right)A=\frac{As\left(AN-c\right)}{\gamma\left(2+s\right)^2}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial D}=\frac{2\beta}{\gamma}sD$$

$$\frac{\partial \dot{N}}{\partial s}=aD \qquad \frac{\partial \dot{N}}{\partial k}=0$$

$$\frac{\partial \dot{N}}{\partial N}=-h \qquad \frac{\partial \dot{N}}{\partial D}=2a$$

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial s}=\frac{aA(AN-c)}{2\beta(2+s)^2}$$

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial k}=0$$

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial N}=-\frac{aA^2}{2\beta(2+s)} \qquad \frac{\partial \dot{D}}{\partial D}=\rho+h$$

Συνεπώς ο πίνακας έχει ως εξής

$$J\left(s^*,k^*,N^*,D^*\right)=\begin{bmatrix} \delta-2k^* & -2s^* & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\gamma}D^{*2}+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{AN^*-c}{2+s^*}\right)^2\left(1-\frac{2s^*}{2+s^*}\right) & \rho & \frac{As^*\left(AN^*-c\right)}{\gamma\left(2+s^*\right)^2} & \frac{2\beta}{\gamma}s^*D^* \\ a & 0 & -h & 2a \\ \frac{aA\left(AN^*-c\right)}{2\beta\left(2+s^*\right)^2} & 0 & -\frac{aA^2}{2\beta\left(2+s^*\right)} & \rho+h \end{bmatrix}$$

Για να είναι το σημείο $\left(s^*,k^*,N^*,D^*\right)$ ευσταθές πρέπει οι 4 ιδιοτιμές του πίνακα $J\left(s^*,k^*,N^*,D^*\right)$ να είναι εναλλάξ αρνητικές και θετικές , δηλαδή οι δύο ιδιοτιμές αρνητικές και οι δύο θετικές.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορούμε να βγάλουμε γενική απάντηση. Γι αυτό ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων για κάθε τετράδα αποδεκτών λύσεων που μας δίνει το πρόβλημα από τις περιπτώσεις 1 και 2 υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα και κρατάμε την ευσταθή ή ευσταθείς λύσεις.

3.3 Συμπεράσματα

Μολονότι το πρόβλημα αυτό δεν έχει γενική λύση λόγω της πολυπλοκότητας των αλληλεπιδράσεων παρατηρούμε ότι σε όλα τα δυνατά αποτελέσματα το πόσο που θα επενδύσουμε σε διαφήμιση είναι σχεδόν ανάλογο με τον ρυθμό απώλειας των πελατών μας h πράγμα που είναι λογικό φυσικά. .Σε περίπτωση που δεν έχουμε απώλεια πελατών, μακροπρόθεσμα δεν θα χρειάζεται θα επενδύουμε σε διαφήμιση.

Και φυσικά σε ένα πραγματικό πρόβλημα που θα υπήρχε και άνω φράγμα στο μέγεθος της αγοράς τα πράγματα θα ήταν ακόμα χειρότερα για κάποια επιχείρηση που θα είχε μεγάλο ρυθμό απώλειας πελατών αφού η επήρεια της διαφήμισης θα ήταν μικρότερη σε κάποιον που έχει δοκιμάσει ήδη το προϊόν.

4 Γενικά συμπεράσματα

Γενικά ένα γραμμικό – τετραγωνικό πρόβλημα διαφορικών παιγνίων όπως είδαμε είναι δυνατό να αντιμετωπιστεί στις περισσότερες απλές περιπτώσεις αφού ο τρόπος που εργαζόμαστε είναι συγκεκριμένος και οι πράξεις συνήθως δεν είναι τόσο σύνθετες και δεν απαιτούν πολύ ιδιαίτερες γνώσεις και τεχνικές. Οι διαφορετικές μοντελοποιήσεις που υπάρχουν σήμερα είναι αυτές που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Βέβαια αυτό δεν αποκλείει και μια διαφορετική μοντελοποίηση ανάλογα με τα δεδομένα που έχουμε και ακόμα υπάρχει αρκετό περιθώριο έρευνας στον τομέα αυτό είτε με μια καινούργια μοντελοποίηση είτε με κάποιο συνδυασμό των υπαρχόντων.

Βέβαια όταν το μοντέλο γίνει πιο πολύπλοκο συνδυάζοντας διαφορετικές επιδράσεις και βάζοντας ταυτόχρονα διάφορες μεταβλητές κατάστασης και ελέγχου όπως επιχειρήσαμε στο κεφάλαιο 3, αυτό ενδεχόμενα δεν θα έχει γενική λύση όπως είδαμε και στην περίπτωση μας. πράγμα που δεν μπορεί να βγάλει μια γενική θεωρία. Φυσικά όμως μπορεί και πάλι να μας δώσει κάποια χρήσιμα συμπεράσματα, ειδικά στην μελέτη ενός πραγματικού προβλήματος που έχουμε συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους μας.

Στην πραγματικότητα κάθε επιχείρηση και κάθε επιχειρηματικός τομέας κινείται με δικούς του μηχανισμούς τους οποίους θα μπορούσαμε να εισάγουμε σε κάθε πραγματική μελέτη. Βέβαια αυτό θα δημιουργούσε ένα ενδεχομένως πολύπλοκο πρόβλημα. Γι αυτό η ευρεία και ρεαλιστική εφαρμογή στην πραγματική οικονομία θα γίνει με την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων στον κλάδο που έχουν ξεκινήσει τα τελευταία χρόνια. Πάντως και με τα απλοποιημένα μοντέλα μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τον τρόπο που εξαρτώνται οι μεταβλητές μεταξύ τους.

REFERENCES

[1] Celllini R. and L. Lambertini A Differential oligopoly game with differentiated goods and sticky prices (to appear in European Journal of Operational Research, 2007)

[2] Celllini R. and L. Lambertini (2003) "Advertising in a Differential Oligopoly Game", Journal of Optimisation Theory and Applications, vol. 116 n. 1., pp. 61-81

[3] Celllini R. and L. Lambertini (2004) R&D Incentives and Market structure : A Dynamic Analysis (working paper)

[4] Lambertini L. and A. Mantovani (2004) Identifying reaction Function in Differential Oligopoly games (working paper)

[5] Celllini R. and L. Lambertini (2004) Dynamic R&D with Spillovers : Competition vs Cooperation. (working paper)

[6] Colombo L. and Labreccioza P (2005) Capital Accumulation and the intensity of Market competition : a Differential game (working paper)

[7] Engwerda J. (2005) The open-loop linear quadratic differential game revisited (discussion paper)

[8] Fleming W.H and R.W. Rishel. Deterministic and Stohastic Optimal control. Springer Verlag, 2000

[9] Lambertini L. and A. Mantovani (2005) Process and product Innovation :a Differential Game approach to Product Life circle (working paper)

[10] Lambertini L. and G.Rossini (2004) The gains from cooperative R&D with a concave technology and spillovers (working paper)

[11] Miranda M.J. and D.V. Vedenov (2000) Numerical Solution of Dynamic Oligopoly Games with Capacity Constraints (presented at Stanford 2000 Summer Workshop)

[12] Navas J. and P.M. Kort (2005) Time to complete and research joint ventures: A differential game approach (to appear in Journal of Economic Dynamics and Control, 2006)

[13] Villeneuve B. and Zhang Y. (2005) Asymetric Duopoly in a Differential Game of Capacity Accumulation. (working paper)

[14] Τσάτση Μαγδαληνή. Βελτιστη διαχείριση τόπου αλιείας με φέρουσα ικανότητα η οποία εξαρτάται από την περιβαλλοντική ρύπανση. Μεταπτυχιακή διατριβή τμήμα μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης. (2005)