ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΗΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΣΕ ΣΧΗΜΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΟΓΚΟΥ ΓΙΑ ΝΟΜΟΥΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

ΣΦΑΚΙΑΝΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

4 Ιουνίου 2002

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός μας στην εργασίας αυτή είναι να μελετήσουμε μια, σχετικά, καινούργια formulation των διαφορικών εξισώσεων.Ονομάζεται kinetic formulation και έχει προκύψει από την προσπάθεια διασύνδεσης των μοντέλων στην Μηχανική των Συνεχών Μέσων (ή μακροσκοπικών εξισώσεων όπως η θερμότητα, Navier-Stokes) και των κινητικών μοντέλων που προκύπτουν από πιο λεπτομερειακή μελέτη της εξέλιξης της μάζας.

Η διασύνδεση αυτή βασίζεται σε ένα όριο (π.χ υδροδυναμικό όριο) και η οποία έχει μελετηθεί και από τους ιδρυτές (Maxwell, Boltzmann, Hilbert κ.α) της κινητικής θεωρίας των αερίων. Η ελπίδα πάντα ήταν ότι το όριο αυτό θα φώτιζε μερικά από τα πολύπλοκα φαινόμενα που εμφανίζονται σε μακροσκοπικό επίπεδο.

Κλασικό παράδειγμα αυτή της προσπάθειας είναι τα B.G.K μοντέλα της εξίσωσης του Boltzman τα οποία μπορούν να βρεθούν στα [5, 16].

Μπορεί, λοιπόν, υπό αυτό το πρίσμα, η θεωρία αυτή να είναι μια συνεισφορά στο γενικότερο πρόβλημα. Μάλιστα όσον αφορά στο όριο αυτό, μπορούμε όχι μόνο να το αναλύσουμε αλλά και να γράψουμε, σε μακροσκοπικό επίπεδο, μία κινητική εξίσωση που να περιλαμβάνει συναρτήσεις που έχουν την μορφή πυκνότητας και των οποίων η κατανομή της ταχύτητας τους να είναι λύσεις ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης κάποιων συναρτησοειδών που έχουν μορφή εντροπίας. Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε αναφορά σε ένα Λήμμα που αφορά στην ελαχιστοποίηση αυτή και οφείλεται στον Yann Brenier και βρίσκεται στην δουλειά του [3].

Θα ξεκινήσουμε το πρώτο Κεφάλαιο με τους απαραίτητους ορισμούς για ασθενείς λύσεις, λύσεις εντροπίας και κινητικές λύσεις ενός Νόμου Διατήρησης. Θα προχωρήσουμε σε ένα Θεώρημα που μας εξασφαλίζει την μοναδικότητας των Κινητικών λύσεων και συνδέει την μοναδική Κινητική λύση με την λύση Εντροπίας. Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ σημαντικό Θεώρημα των Lions, Perthame και Tadmor από την δουλειά τους [15].

Στο δεύτερο Κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε ορίζοντας το σχήμα με το οποίο θα δουλέψουμε (Enquist-Oscher), η επιλογή του οποίου έγινε κυρίως διότι παρουσιάζει καλή συμπεριφορά σε περίπτωση shock. Παιρνώντας στο αντίστοιχο αριθμητικό σχήμα της Κινητικής Εξίσωσης, θα συνάγουμε ιδιότητες όπως η Αρχή Μεγίστου και οι τοπικές Ανισότητες Εντροπίας. Θα κλείσουμε το δεύτερο Κεφάλαιο με δύο Θεωρήματα που θα μας δώσουν την σύγκλιση της Προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος μας στην λύση Εντροπίας, για να το καταφέρουμε θα χρησιμοποιήσουμε όλα τα προηγούμενα, κυρίως όμως το Θεώρημα Μοναδικότητας Κινητικών λύσεων.

Μπαίνουμε στο τρίτο Κεφάλαιο, θίγονται μερικά στοιχεία από την Θεωρία Πεπερασμένων Όγκων και εισάγοντας το αντίστοιχο Enquist-Oscher σχήμα. Δείχνουμε Αρχή Μεγίστου και Ανισότητες Εντροπίας για την περίπτωση αυτή και μετά δείχνουμε ένα καινούριο Θεώρημα που αφορά στην σύγκλιση της Προσεγγιστικής λύσης στην λύση Εντροπίας.

Τα πρώτα δύο κεφάλαιο βασίζονται στη δουλειά [2] των Botchorishvili, Perthame, Vasseur ενώ το τρίτο κεφάλαιο είναι καινούρια δουλεία που έγινε σε συνεργασία με τον καθηγητή μου κο. Χαράλαμπο Μακριδάκη.

Κεφάλαιο 1

Κινητική Μορφή

1.1 Κινητική μορφή της Διαφορικής Εξίσωσης.

Θεωρούμε την εξίσωση του Νόμου Διατήρησης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial A(u)}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

με $A(\cdot)$ να είναι ομαλή συνάρτηση *ροής* και $u = u(t,x)$ συνάρτηση στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες:

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}) \tag{1.2}$$

Η ύπαρξη κλασικής λύσης (C^1) του προβλήματος (1.1),(1.2) εξασφαλίζεται μόνο τοπικά στον χρόνο, ακόμα και στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη u_0 είναι ομαλή συνάρτηση(βλ. Λήμμα 2.1.2 [13]). Ας γενικεύσουμε, λοιπόν, την έννοια της λύσης του Νόμου Διατήρησης (1.1),(1.2).

Ορισμός 1.1.1 *Μία συνάρτηση $u(\cdot,\cdot)$ λέγεται λύση με την έννοια των κατανομών (ή ασθενής λύση) του προβλήματος (1.1),(1.2) όταν*

$$u \in L^\infty([0,T) \times \mathbb{R}),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T u(t,x) \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} dtdx + \int_{\mathbb{R}} \int_0^T A(u(t,x)) \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial x} dtdx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x,0) dx = 0, \ \textit{για κάθε} \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,T)).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι ασθενείς λύσεις είναι όντως «ασθενέστερες» των κλασικών λύσεων (βλ. [10] σελ .27), εννοώντας ότι οι κλασικές λύσεις είναι και ασθενείς λύσεις. Στην περίπτωση των ασθενών λύσεων δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε C^1 ομαλότητα οπότε στερούμαστε και μοναδικότητας [10].

Σε πολλά φυσικά προβλήματα οι ασθενείς λύσεις απαιτείται να ικανοποιούν επιπλέον, και μία σειρά από «φράγματα»-ανισώσεις, τα οποία μοιάζουν με τα φράγματα εντροπίας, και τα οποία μας δίνουν την πολυπόθητη μοναδικότητα. Οπότε ακολουθώντας το [10], ζητάμε από την ασθενή λύση του προβλήματος να ικανοποιεί, με την έννοια των κατανομών, την πλήρη οικογένεια ανισοτήτων εντροπίας :

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \frac{\partial \eta(u)}{\partial x} \leq 0, \tag{1.3}$$

με $S(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ να είναι κυρτή συνάρτηση εντροπίας και $\eta(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ η αντίστοιχη συνάρτηση *ροής εντροπίας* που ορίζεται από την σχέση:

$$\eta'(u) = S'(u)a(u),$$

με:

$$a(u) = A'(u) \in C^1(\mathbb{R}).$$

Ορίζουμε λοιπόν:

Ορισμός 1.1.2 *Μία ασθενής λύση $u \in L^\infty([0,T) \times \mathbb{R})$ του προβλήματος (1.1), (1.2) λέγεται λύση εντροπίας όταν ικανοποιεί την συνθήκη εντροπίας (1.3), με την έννοια των κατανομών, για όλες τις συναρτήσεις εντροπίας $S(\cdot)$, δηλαδή:*
για κάθε συνάρτηση εντροπίας $S(\cdot)$, με ροή εντροπίας $\eta(\cdot)$, για κάθε $\phi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R})$, με $\phi(t,x) \geq 0$, για όλα τα t, x να ισχύει:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} S(u(t,x))\phi_t(t,x)dtdx + \int_{\mathbb{R}} S(u(0,x))\phi(0,x)dx$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\phi_x(t,x)dtdx \geq 0.$$

Πριν εισάγουμε την κινητική μορφή της Διαφορικής Εξίσωσης, πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση *πυκνότητας* ή αλλιώς συνάρτηση *υπογραφής*:

$$X(\xi;u) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } 0 < \xi \leq u \\ -1, & \text{όταν } u \leq \xi < 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας μας ενδιαφέρουν κυρίως:

- $\int_{\mathbb{R}} X(\xi; u) d\xi = u$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $\int_{\mathbb{R}} X(\xi; u) g'(\xi) d\xi = g(u)$ για κάθε ομαλή συνάρτηση g με $g(0) = 0$.
- $\int_{\mathbb{R}} X(\xi, u_1) - X(\xi, u_2) d\xi = u_1 - u_2$ για κάθε $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Οι Lions, Perthame, Tadmor [15] έδειξαν ότι η Διαφορική Εξίσωση και η οικογένεια των ανισοτήτων εντροπίας μπορούν ναγραφούν ισοδύναμα σε μί-α **κινητική** εξίσωση της συνάρτησης πυκνότητας $X(\xi; u(t,x))$, συγκεκριμένα έδειξαν ότι μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\frac{\partial X(\xi; u(t,x))}{\partial t} + a(\xi) \frac{\partial X(\xi; u(t,x))}{\partial x} = \frac{\partial m(t,x,\xi)}{\partial \xi},$$

με την έννοια των κατανομών, για κάποιο μη-αρνητικό, φραγμένο μέτρο m τέτοιο ώστε $m(t,x,\xi) = 0$ για $|\xi| > \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$.
Πράγματι, αν ισχύει η παραπάνω σχέση τότε παρατηρώντας ότι $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} X(\xi; u(t,x)) d\xi$ έχουμε $g(u(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} g'(\xi) X(\xi; u(t,x)) d\xi$ για κάθε ομαλή συνάρτηση g, με $g(0) = 0$.
Προκύπτει, με φυσιολογικό τρόπο, το εξής αντίστροφο ερώτημα:

Αν η $f(t,x,\xi)$ ικανοποιεί την εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\partial f(t,x,\xi)}{\partial t} + \frac{\partial (a(\xi) f(t,x,\xi))}{\partial x} = \frac{\partial m(t,x,\xi)}{\partial \xi},$$

με την έννοια των κατανομών για κάποιο $m(t,x,\xi)$ μη-αρνητικό, φραγμένο μέτρο με συμπαγή -ως προς ξ- φορέα, πότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μίας συνάρτησης $u = u(t,x)$ τέτοια ώστε $f(t,x,\xi) = X(\xi; u(t,x))$; Το ερώτημα αυτό θα είναι ο πρώτος στόχος στην εργασία αυτή.

Έτσι, πλέον, μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της Κινητικής Λύσης του προβλήματος (1.1),(1.2), και το αναλαμβάνει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.1.3 *Η συνάρτηση $f(t,x,\xi) \in L^\infty\Big([0,T); L^\infty(\mathbb{R}^2_{x,\xi}) \cap L^1(\mathbb{R}^2_{x,\xi})\Big)$ λέγεται κινητική λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) όταν είναι λύση με την έννοια των κατανομών του προβλήματος της εξίσωσης μεταφοράς:*

$$\frac{\partial f(t,x,\xi)}{\partial t} + a(\xi) \frac{\partial f(t,x,\xi)}{\partial x} = \frac{\partial m(t,x,\xi)}{\partial \xi}, \tag{1.4}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$f(0,x,\xi) = X(\xi; u_0(x)), \quad u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

δηλαδή όταν ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)\Big[\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x,\xi) + a(\xi)\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x,\xi)\Big]dxd\xi dt$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} m(t,x,\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(t,x,\xi)dxd\xi dt - \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u_0(x))\phi(0,x,\xi)dxd\xi, \quad (1.5)$$

για όλες τις συναρτήσεις ελέγχου $\phi(t,x,\xi) \in C_c^\infty\Big([0,T) \times \mathbb{R}^2_{x,\xi}\Big)$ *και όταν επιπλέον ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:*

$$|f(t,x,\xi)| = sgn(\xi)f(t,x,\xi) \leq 1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial f(t,x,\xi)}{\partial \xi} = \delta(\xi) - \nu(t,x,\xi), \quad (1.7)$$

με $\nu(t,x,\xi)$ *μη-αρνητικό μέτρο τέτοιο ώστε* $\int_{\mathbb{R}} \nu(t,x,\xi)d\xi = 1$ *για όλα τα* t,x.

Συνεχίζουμε τώρα με το βασικό θεώρημα της παραγράφου αυτής με το οποίο δείχνουμε -κάτω από κάποιες επιπλέον συνθήκες- Μοναδικότητα των Κινητικών Λύσεων. Θα δείξουμε ότι οι Κινητικές Λύσεις έχουν την μορφή $f(t,x,\xi) = X(\xi;u(t,x))$ με $u(\cdot,\cdot)$ να είναι η Λύση Εντροπίας του προβλήματος (1.1). Αποτελεί λοιπόν αυτό το Θεώρημα την απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε πριν από τον Ορισμό(1.1.3).

1.2 Το Θεώρημα Μοναδικότητας

Θεώρημα 1.2.1 *(Μοναδικότητα των κινητικών λύσεων)*
Έστω $f(t,x,\xi) \in L^\infty\Big([0,T); L^1(\mathbb{R}^2_{x,\xi}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2_{x,\xi}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x; L^1(\mathbb{R}_\xi))\Big)$ *κινητική λύση του προβλήματος (1.1),(1.2) τέτοια ώστε, σχεδόν για κάθε* $t > 0$, *για κάθε κυρτή συνάρτηση εντροπίας* $S(\xi)$ *και για όλες τις μη-αρνητικές συναρτήσεις ελέγχου* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *να ικανοποιεί :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)\phi(x)S'(\xi)dxd\xi - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)f(\tau,x,\xi)d\tau d\xi dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u_0(x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi, \quad (1.8)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)\phi(x)d\xi dx \xrightarrow{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx. \quad (1.9)$$

Τότε $f(t,x,\xi) = X(\xi;u(t,x))$, *όπου* $u(t,x)$ *είναι η λύση εντροπίας του προβλήματος (1.1),(1.2) και* $u(t,x) \xrightarrow{t\to 0} u_0(x)$ *ισχυρά στον* $L^p_{loc}(\mathbb{R})$, *για κάθε*

$1 \leq p < \infty$ και ειδικότερα $f(t,x,\xi) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} X(\xi; u_0(x))$ στον $L^p_{loc}(\mathbb{R}_x; L^1(\mathbb{R}_\xi))$ για κάθε $1 \leq p < \infty$.

Απόδειξη

Η απόδειξη αυτή βασίζεται στην σύγκριση των $|f|$ και f^2, κάτι που είναι δυνατό λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης που η f ικανοποιεί.

Κανονικοποιούμε χρησιμοποιώντας τον πυρήνα :

$$\omega_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon_1}\omega_1(\frac{t}{\varepsilon_1})\frac{1}{\varepsilon_2}\omega_2(\frac{x}{\varepsilon_2}),$$

με $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ και ω_1, ω_2 δύο μη-αρνητικούς κανονικοποιητές στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$, απαιτώντας $supp(\omega_1) \subset (-\infty, 0]$ και εξασφαλίζοντας έτσι την κανονικοποίηση για κάθε $t > 0$.

Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας την σχέση:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(t,x,\xi) + a(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(t,x,\xi) = \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}(t,x,\xi),$$

με την έννοια των κατανομών, δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi(t,x,\xi) \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^2)$ ισχύει:

$$\int f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x,\xi) + \int f_\varepsilon(0,x,\xi)\phi(0,x,\xi)$$
$$+ \int a(\xi) f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x,\xi) = \int m_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(t,x,\xi), \tag{1.10}$$

όπου $f_\varepsilon(t,x,\xi) = f(t,x,\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)$ και $m_\varepsilon(t,x,\xi) = m(t,x,\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)$.

- Η απόδειξη της σχέσης (1.10).
  Ξαναγράφουμε την σχέση (1.5) με μεταβλητές (s,y) στη θέση των (t,x) και:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f(s,y,\xi)\Big[\frac{\partial \phi}{\partial s}(s,y,\xi) + a(\xi)\frac{\partial \phi}{\partial y}(s,y,\xi)\Big] dy d\xi ds$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} m(s,y,\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(s,y,\xi) dy d\xi ds - \int_{\mathbb{R}^2} f(0,y,\xi)\phi(0,y,\xi) dy d\xi.$$

  Θεωρούμε την συνάρτηση ελέγχου $\phi(s,y,\xi) = \psi(\xi)\omega_\varepsilon(t-s, x-y)$, με $\psi(\xi) \in D(\mathbb{R})$. Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial s}\omega_\varepsilon(t-s,x-y) = -\frac{\partial}{\partial t}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)$$

καθώς επίσης:

$$\frac{\partial}{\partial y}\omega_\varepsilon(t-s,x-y) = -\frac{\partial}{\partial x}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)$$

οπότε :

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} f(s,y,\xi)\psi(\xi)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)$$
$$+a(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)\Big)d\xi dyds$$
$$=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} m(s,y,\xi)\psi'(\xi)\omega_\varepsilon(t-s,x-y)d\xi dyds$$
$$-\int_{\mathbb{R}^2} f(0,y,\xi)\psi(\xi)\omega_\varepsilon(t,x-y)dyd\xi.$$

Επειδή τώρα $t>0$ και $supp(\omega_1)\subset(-\infty,0]$ έχουμε ότι $\omega_\varepsilon(t,x-y)=0$.

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} f(s,y,\xi)\psi(\xi)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)$$
$$+a(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\omega_\varepsilon(t-s,x-y)\Big)d\xi dyds$$
$$=-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} m(s,y,\xi)\psi'(\xi)\omega_\varepsilon(t-s,x-y)d\xi dyds$$

ισοδύναμα:

$$\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)f(t,x,\xi)*\frac{\partial}{\partial t}\omega_\varepsilon(t,x)d\xi+\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)a(\xi)f(t,x,\xi)*\frac{\partial}{\partial x}\omega_\varepsilon(t,x)d\xi$$
$$=-\int_{\mathbb{R}}\psi'(\xi)m(t,x,\xi)*\omega_\varepsilon(t,x)d\xi.$$

Και από το (Παρ.5) ότι :

$$\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}f_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi+\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)a(\xi)\frac{\partial}{\partial x}f_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi$$
$$=-\int_{\mathbb{R}}\psi'(\xi)m_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi.$$

Που, λόγω της ομαλότητας που παρουσιάζουν οι $f_\varepsilon, m_\varepsilon$ ως προς t,x, είναι ακριβώς η ζητούμενη σχέση (1.10).

Χωρίζουμε τώρα την απόδειξη σε βήματα. Στο πρώτο βήμα θα δείξουμε μία χρήσιμη σχέση για την $|f|$, στο δεύτερο βήμα θα κάνουμε το ίδιο για την f^2, στο τρίτο βήμα θα δείξουμε την συνέχεια της f στο $t=0$ και στο τελευταίο βήμα συγκρίνοντας τις $|f|, f^2$, θα βρούμε την μορφή της f.

Πρώτο βήμα

Θα πολλαπλασιάσουμε την:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(t,x,\xi) + a(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(t,x,\xi) = \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}(t,x,\xi),$$

που ισχύει με την έννοια των κατανομών, με $sgn(\xi)$, θα ολοκληρώσουμε ως προς ξ, θα πάρουμε όρια καθώς $\varepsilon \to 0$ και τελικά θα δείξουμε ότι :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} |f(t,x,\xi)| d\xi + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}} a(\xi)|f(t,x,\xi)| d\xi = -2m(t,x,0). \qquad (1.11)$$

Για να πολλαπλασιάσουμε με $sgn(\xi)$ και να ολοκληρώσουμε ως προς ξ κάνουμε τα εξής :

- Έστω $\psi_\delta(\xi)$ οικογένεια ομαλών[1] συναρτήσεων τ.ω $\psi_\delta(\xi) \xrightarrow{\delta\to 0} sgn(\xi)$ ξ-σχεδόν παντού.
  Θα δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση ελέγχου $\phi(t,x)$ έχουμε :

  $$\int_{t,x,\xi} f_\varepsilon(t,x,\xi)\psi_\delta(\xi)\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t} \xrightarrow{\delta\to 0} \int_{t,x,\xi} f_\varepsilon(t,x,\xi) sgn(\xi)\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}.$$

  Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι:

  $$\int_{t,x,\xi} \underbrace{f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}(\psi_\delta(\xi) - sgn(\xi))}_{g_\delta(t,x,\xi)} \to 0$$

  Αν δείξουμε ότι $g_\delta(t,x,\xi) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ σχεδόν παντού και ότι $|g_\delta| < h$ με $h \in L^1$ τότε $\int_{t,x,\xi} g_\delta(t,x,\xi) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$

  - Φανερά $g_\delta(t,x,\xi) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ σχεδόν παντού.
  - $|f_\varepsilon \frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}(\psi_\delta(\xi) - sgn(\xi))| = |f_\varepsilon|\|\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}\||\psi_\delta(\xi) - sgn(\xi)|$
    $\leq 2|f_\varepsilon|\|\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}|$. Το 2 επιτυγχάνεται με προσεκτική επιλογή της οικογένειας $\psi_\delta(\xi)$.

[1] Αποκοπή και ομαλοποίηση στην $sgn(\xi)$.

Έχοντας δείξει ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με $sgn(\xi)$ και να ολοκληρώσουμε ως προς ξ συνεχίζουμε έχοντας:

$$\int_{\mathbb{R}} sgn(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}d\xi + \int_{\mathbb{R}} a(\xi)sgn(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}d\xi = \int_{\mathbb{R}} sgn(\xi)\frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}d\xi,$$

με την έννοια των κατανομών. Οπότε έχουμε, για $\phi \in C_c^\infty\Big([0,T)\times\mathbb{R}\Big)$:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} sgn(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}\phi(t,x)d\xi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)sgn(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}\phi(t,x)d\xi dxdt$$

$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} sgn(\xi)\frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}\phi(t,x)d\xi dxdt$$

ισοδύναμα, επειδή $sgn(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi) = |f_\varepsilon(t,x,\xi)|$ (Παράρτημα Θεώρ.2) προκύπτει:

$$-\int_{\mathbb{R}^2} sgn(\xi)f_\varepsilon(0,x,\xi)\phi(0,x)dxd\xi - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|f_\varepsilon(t,x,\xi)|\frac{\partial\phi}{\partial t}d\xi dxdt$$

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)|f_\varepsilon(t,x,\xi)|\frac{\partial\phi}{\partial x}d\xi dxdt$$

$$= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial}{\partial\xi}sgn(\xi)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dxdt$$

ισοδύναμα, επειδή $\frac{\partial sgn(\xi)}{\partial \xi} = 2\delta(\xi)$ (Παράρτημα Θεώρ.1) προκύπτει:

$$\int_{\mathbb{R}^2} sgn(\xi)f_\varepsilon(0,x,\xi)\phi(0,x)dxd\xi + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|f_\varepsilon(t,x,\xi)|\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)d\xi dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)|f_\varepsilon(t,x,\xi)|\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)d\xi dxdt$$

$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} 2\delta(\xi)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dxdt$$

ισοδύναμα:

$$\int_{\mathbb{R}^2} sgn(\xi)f_\varepsilon(0,x,\xi)\phi(0,x)dxd\xi + \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(t,x,\xi)|d\xi\Big)\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} a(\xi)|f_\varepsilon(t,x,\xi)|d\xi\Big)\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)dxdt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(2 \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi) m_\varepsilon(t,x,\xi) d\xi\Big) \phi(t,x) dxdt.$$

Άρα έχουμε με την έννοια των κατανομών ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,\xi)| d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} a(\xi) |f_\varepsilon(t,x,\xi)| d\xi = -2m_\varepsilon(t,x,0).$$

Παιρνάμε, τώρα στο όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ στην σχέση αυτή.
Θεωρούμε συνάρτηση ελέγχου $\phi(t,x) \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R})$ με την βοήθεια της οποίας η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |f_\varepsilon(t,x,\xi)| \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} d\xi dxdt + \int_{\mathbb{R}^2} |f_\varepsilon(0,x,\xi)| \phi(0,x) d\xi dx$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi) |f_\varepsilon(t,x,\xi)| \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial x} d\xi dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} 2m_\varepsilon(t,x,0) \phi(t,x) dtdx.$$

Εξετάζουμε κάθε ένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα ξεχωριστά.

- Για το πρώτο ολοκλήρωμα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι:

  $$|f_\varepsilon(t,x,\xi)| |\partial_t \phi(t,x)| \leq \int_{s,y} |f(s,y,\xi)| |\omega_\varepsilon(t-s,x-y)| dyds |\partial_t \phi(t,x)|,$$

  που ανήκει στον $L^1([0,T) \times \mathbb{R}^2_{x,\xi})$ διότι,

  $$\int_{t,x,\xi,s,y} |f(s,y,\xi)| |\omega_\varepsilon(t-s,x-y)| dyds |\partial_t \phi(t,x)| d\xi dxdt =$$

  $$\int_{s,y,\xi} |f(s,y,\xi)| \Big(\int_{t,x} |\omega_\varepsilon(t-s,x-y) \partial_t \phi(t,x)| dxdt \Big) d\xi dyds \leq$$

  $$M \int_{s=0}^T \int_{y,\xi} |f(s,y,\xi)| d\xi dyds = M \int_{s=0}^T \|f(s,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} ds$$

  $$\leq MT \|f\|_{L^\infty},$$

  όπου $M = \sup_{t,x} |\partial_t \phi(t,x)|$. Έχοντας επιπλέον την κατά σημείο σύγκλιση της $|f_\varepsilon(t,x,\xi) \partial_t \phi(t,x)|$ στην $|f(t,x,\xi) \partial_t \phi(t,x)|$ προκύπτει ότι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει καθώς $\varepsilon \to 0$ στο ολοκλήρωμα:

  $$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |f(t,x,\xi)| \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} d\xi dxdt.$$

- Με την ίδια διαδικασία δείχνουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει, καθώς $\varepsilon \to 0$ στο:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(0,x,\xi)|\phi(0,x)d\xi dx.$$

- Ομοίως το τρίτο ολοκλήρωμα συγκλίνει, καθώς $\varepsilon \to 0$ στο:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)|f(t,x,\xi)|\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial x} d\xi dx dt.$$

- Χρησιμοποιώντας το Θεώρ.9 του Παραρτήματος έχουμε ότι το τέταρτο ολοκλήρωμα συγκλίνει, καθώς $\varepsilon \to 0$ στο:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} 2m(t,x,0)\phi(t,x)dt dx.$$

Οπότε έχουμε δείξει με την έννοια των κατανομών την ζητούμενη σχέση (1.11).

<u>Δεύτερο βήμα</u>
Θα πολλαπλασιάσουμε την:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(t,x,\xi) + a(\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(t,x,\xi) = \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}(t,x,\xi),$$

με f_ε, θα ολοκληρώσουμε ως προς ξ, θα πάρουμε όρια καθώς $\varepsilon \to 0$ και τελικά θα δείξουμε ότι :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} f^2(t,x,\xi)d\xi + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}} a(\xi)f^2(t,x,\xi)d\xi \geq -2m(t,x,0). \tag{1.12}$$

Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν με f_ε, ολοκληρώνουμε ως προς ξ και προκύπτει :

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}d\xi + \int_{\mathbb{R}} a(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}d\xi = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \xi}d\xi,$$

με την έννοια των κατανομών. Οπότε για κάθε $\phi(t,x) \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial f_\varepsilon(t,x,\xi)}{\partial t}\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial f_\varepsilon(t,x,\xi)}{\partial x}\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial m_\varepsilon(t,x,\xi)}{\partial \xi}\phi(t,x)d\xi dx dt$$

ισοδύναμα,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t}(f_\varepsilon^2(t,x,\xi))\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)\frac{\partial}{\partial x}(f_\varepsilon^2(t,x,\xi))\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 2f_\varepsilon(t,x,\xi)\frac{\partial m_\varepsilon(t,x,\xi)}{\partial \xi}\phi(t,x)d\xi dx dt$$

ισοδύναμα,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^2(t,x,\xi)d\xi\Big)\phi(t,x)dx dt$$

$$+\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_{\mathbb{R}} a(\xi)f_\varepsilon^2(t,x,\xi)d\xi\Big)\phi(t,x)dx dt$$

$$= -2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f_\varepsilon(t,x,\xi)}{\partial \xi}m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt.$$

Το δεξί μέλος τώρα γίνεται :

$$-2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial \xi}(t,x,\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$\overset{(1.7)}{=} -2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\delta(\xi)-\nu(t,x,\xi)) * \omega_\varepsilon(t,x)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$= -2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$+2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nu(t,x,\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$= -2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$+2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nu(t,x,\xi) * \omega_\varepsilon(t,x)m_\varepsilon(t,x,\xi)\phi(t,x)d\xi dx dt$$

$$\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} -2m_\varepsilon(t,x,0)\phi(t,x)dx dt.$$

Οπότε έχουμε :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^2(t,x,\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a(\xi) f_\varepsilon^2(t,x,\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) dx dt$$

$$\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} -2m_\varepsilon(t,x,0)\phi(t,x) dx dt.$$

Άρα έχουμε με την έννοια των κατανομών ότι :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^2(t,x,\xi) d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} a(\xi) f_\varepsilon^2(t,x,\xi) d\xi \geq -2m_\varepsilon(t,x,0).$$

Παίρνουμε τέλος τα όρια καθώς $\varepsilon \to 0$, όπως στο Πρώτο Βήμα και προκύπτει η (1.12).

Τρίτο βήμα

Εφόσον η f ικανοποιεί την (1.6):

$$|f(t,x,\xi)| = sgn(\xi) f(t,x,\xi) \leq 1,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Brenier (Παρ.6) και προκύπτει ότι η συνάρτηση $u(\cdot,\cdot)$ με, $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,\xi) d\xi$, ικανοποιεί για κάθε κυρτή, Lipschitz συνεχή συνάρτηση S, με $S(0) = 0$ την σχέση:

$$S(u(t,x)) \leq \int_{\mathbb{R}} S'(\xi) f(t,x,\xi) d\xi,$$

διότι:

$$S(u(t,x)) = S\Big(\int_{\mathbb{R}} f(t,x,\xi) d\xi\Big) - S(0) \overset{Br}{\leq} \int_{\mathbb{R}} S'(\xi) f(t,x,\xi) d\xi.$$

Όμως, χρησιμοποιώντας την (1.8), έχουμε, για όλες τις μη-αρνητικές συναρτήσεις ελέγχου $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} S(u(t,x))\phi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} S'(\xi) f(t,x,\xi) d\xi\Big)\phi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)\phi(x) S'(\xi) dx d\xi$$

$$\overset{(1.8)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi; u_0(x))\phi(x) S'(\xi) dx d\xi$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)f(\tau,x,\xi)dxd\xi d\tau.$$

Παίρνοντας τώρα όρια και στα 2 μέλη έχουμε ότι καθώς $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} S(u(t,x))\phi(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u_0(x))S'(\xi)\phi(x)dxd\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}} S(u_0(x))\phi(x)dx. \qquad (1.13)$$

Έχουμε ότι $f(t,x,\xi) \in L^\infty\Big([0,T)\times L^1(\mathbb{R}^2_{x,\xi})\cap L^\infty(\mathbb{R}^2_{x,\xi})\cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times L^1(\mathbb{R}_\xi))\Big)$.
Απ'οπου βλέπουμε ότι: $u(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_x)$, $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_x)$ άρα $u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_x)$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Επίσης βλέπουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq c \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [0,T)$.
Περνάμε τώρα στη ζητούμενη σύγκλιση,

$$u(t,x) \xrightarrow{t\to 0} u_0(x) \text{ ισχυρά στον } L^p_{loc}(\mathbb{R}).$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές, για κάθε $1 \leq p < \infty$, για κάθε $g \in L^p(K)$ ότι:

$$\int_K u(t,x)g(x)dx \to \int_K u_0(x)g(x)dx.$$

Τα όρια που θα εμφανίζονται μέχρι το τέλος του Τρίτου Βήματος θα είναι καθώς $t \to 0$.
Έστω λοιπόν $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές, $1 \leq p < \infty$, $g \in L^p(K)$.
Γνωρίζουμε από υπόθεση (1.9) ότι για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx.$$

Εύκολα δείχνουμε ότι η σύγκλιση αυτή διατηρείται για κάθε $\phi \in C_c^\infty(K)$ ανεξαρτήτως προσήμου:

$$\text{για κάθε } \phi \in C_c^\infty(K): \quad \int_K u(t,x)\phi(x)dx \to \int_K u_0(x)\phi(x)dx.$$

Τώρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\phi \in C_c^\infty(K)$ τέτοια ώστε $\|\phi - g\|_{L^p(K)} < \varepsilon$. Η ύπαρξη μίας τέτοιας ϕ εξασφαλίζεται από την πυκνότητα του $C_c^\infty(K)$ στον $L^p(K)$. Επιπλέον έχουμε ότι $\|\phi - g\|_{L^1(K)} < |K|^{1/q}\varepsilon$ και

$$|\int_K u(t,x)g(x)dx - \int_K u_0(x)\phi(x)dx|$$

$$= |\int_K u(t,x)\phi(x)dx + \int_K u(t,x)(g(x)-\phi(x))dx - \int_K u_0(x)g(x)dx|$$
$$\leq |\int_K u(t,x)\phi(x)dx - \int_K u_0(x)g(x)dx| + |\int_K u(t,x)(g(x)-\phi(x))dx|.$$

Το πρώτο απόλυτο στην τελευταία γραμμή φράσσεται (στο όριο) από:

$$\|u_0\|_{L^\infty(K)}\|\phi - g\|_{L^1(K)} = \|u_0\|_{L^\infty(K)}|K|^{1/q}\varepsilon$$

και το δεύτερο φράσσεται (ομοιόμορφα ως προς t) από:

$$c|K|^{1/q}\varepsilon.$$

Οπότε:

$$|\int_K u(t,x)g(x)dx - \int_K u_0(x)\phi(x)dx| \leq \Big(\|u_0\|_{L^\infty(K)} + c\Big)|K|^{1/q}\varepsilon.$$

Άρα, επειδή $u(t,\cdot), u_0(\cdot) \in L^p(K)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$, έχουμε:

$$u(t,\cdot) \rightharpoonup u_0(\cdot) \text{ στον } L^p(K) - w. \tag{1.14}$$

Πόρισμα αυτής της ασθενούς σύγκλισης (Παράρτημα Θεώρ.8) είναι:

$$\|u_0\|_{L^p(K)} \leq \liminf_t \|u(t,\cdot)\|_{L^p(K)}. \tag{1.15}$$

Επιλέγοντας, τώρα $S(\cdot) = |\cdot|^p$ για κάποιο $2 < p < \infty$ στην (1.13) έχουμε για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$ ότι:

$$\lim_t \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^p \phi(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^p \phi(x)dx.$$

Η ανίσωση αυτή περνάει για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις λόγω πυκνότητας του $C_c^\infty(\mathbb{R})$ στον $L^1(\mathbb{R})$, οπότε και για την χαρακτηριστική συνάρτηση $X_K(x)$ έχουμε:

$$\lim_t \int_K |u(t,x)|^p dx \leq \int_K |u_0(x)|^p dx$$

ή ισοδύναμα:

$$\lim_t \|u(t,\cdot)\|_{L^p(K)} \leq \|u_0\|_{L^p(K)}. \tag{1.16}$$

Οι σχέσεις (1.15) και (1.16) μας δίνουν $\lim_t \|u(t,\cdot)\|_{L^p(K)} = \|u_0\|_{L^p(K)}$ και μαζί με την (1.14):

$$u(t,\cdot) \rightharpoonup u_0(\cdot) \text{ στον } L^p(K) - w$$

και το Θεώρημα 2.11 του [14] -που παραθέτουμε στο Παράρτημα Θεώρ. 8 χωρίς απόδειξη- παίρνουμε

$$u(t,\cdot) \to u_0(\cdot) \text{ στον } L^p(K).$$

Κλείνουμε το Τρίτο Βήμα με την παρατήρηση ότι:

$$u(t,\cdot) \to u_0(\cdot), \text{ ισχυρά στον } L^p_{loc}(\mathbb{R}) \text{ για κάθε } 1 \leq p < \infty.$$

Τέταρτο βήμα

Αφαιρούμε τις εξισώσεις (1.11) και (1.12) και παίρνουμε με την έννοια των κατανομών:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} |f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)d\xi + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}} a(\xi)\Big(|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)\Big)d\xi \leq 0. \tag{1.17}$$

Η f ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $f(0,x,\xi) = X(\xi;u_0(x))$ οπότε:

$$|f(0,x,\xi)| - f^2(0,x,\xi) = |X(\xi;u_0(x))| - X^2(\xi;u_0(x)) = 0. \tag{1.18}$$

Θεωρούμε $\phi_\delta \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$ με $\phi_\delta \geq 0$ και $\phi_\delta(t,x) = \phi_1(t)\phi_{2\delta}(x)$, όπου η $\phi_{2\delta}(x)$ ορίζεται να είναι 1 όταν $x \in [-1/\delta, 1/\delta]$ και να σβήνει ομαλά και ομοιόμορφα για όλα τα δ έξω από το $[-1/\delta,1/\delta]$. Η προηγούμενη σχέση τώρα γίνεται:

$$\int_{t,x,\xi}\Big(|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)\Big)\phi_1'(t)\phi_{2\delta}(x)d\xi dx dt$$
$$+\int_{t,x,\xi} a(\xi)\Big(|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)\Big)\phi_1(t)\phi_{2\delta}'(x)d\xi dx dt \geq 0,$$

από Θ.Κ.Σ έχουμε ότι η προηγούμενη παράσταση συγκλίνει καθώς $\delta \to 0$ στην

$$\int_{t,x,\xi}(|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)\phi_1'(t)d\xi dx dt \geq 0, \text{ για κάθε } \phi_1 \in C_c^\infty([0,T)).$$

Από την (1.6) έχουμε τώρα ότι $|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi) \geq 0$, οπότε

$$\int_{x,\xi}|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)dxd\xi \geq 0 \text{ για όλα τα } t.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σύνολο $A \subset [0,T)$ θετικού μέτρου έτσι ώστε

$$\forall t \in A: \int_{x,\xi}|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi)dxd\xi > 0,$$

επιλέγοντας για $\phi_1(t)$ μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση (μαζί με τις προηγούμενες προϋποθέσεις) έχουμε:

$$0 \leq \int_0^T \Big(\int_{x,\xi} |f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi) dx d\xi \Big) \phi_1'(t) dt$$

$$= \int_A \Big(\int_{x,\xi} |f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi) dx d\xi \Big) \phi_1'(t) dt < 0.$$

Έτσι για t, x, ξ σχεδόν παντού στο $[0,T) \times \mathbb{R}^2_{x,\xi}$ έχουμε ότι:

$$|f(t,x,\xi)| - f^2(t,x,\xi) = 0.$$

Δηλαδή, σχεδόν για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = 0$ ή -1 ή 1 σχεδόν παντού.
Προχωράμε τώρα στο να δείξουμε ότι η f είναι της μορφής:

$$f(t,x,\xi) = X(\xi; g(t,x))$$

για κάποια συνάρτηση g.
Για το σκοπό αυτό σταθεροποιούμε t, x και έχουμε ότι:

$$f(t,x,\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial f(t,x,s)}{\partial s} ds,$$

και από την (1.7): $\frac{\partial f(t,x,\xi)}{\partial \xi} = \delta(\xi) - \nu(t,x,\xi)$ έχουμε:

$$f(t,x,\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \delta(s) ds - \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s) ds.$$

Οπότε:

- Για $\xi < 0$ έχουμε $f(t,x,\xi) = -\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s) ds$.
- Για $\xi > 0$ έχουμε $f(t,x,\xi) = 1 - \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s) ds$.

Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη το πρόσημο της f όπως αυτό μας δίνεται από την (1.6): $0 \leq sgn(\xi) f(t,x,\xi) \leq 1$ καθώς και το γεγονός ότι $f(t,x,\xi)$=-1 ή 0 ή 1 έχουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s) ds = \begin{cases} -f(t,x,\xi) = 0 \text{ ή } 1 & \text{,όταν } \xi < 0 \\ 1 - f(t,x,\xi) = 0 \text{ ή } 1 & \text{,όταν } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Άρα για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s) ds$ =0 ή 1. Περνάμε σε δύο ισχυρισμούς, τώρα:

- Ισχυρισμός I
  $\{\xi : \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 1\} \neq \emptyset$.
  Αν, όχι τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ θα είχαμε: $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 0$, οπότε $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds = 0$ κάτι που αντιβαίνει με τις προϋποθέσεις για το μέτρο ν όπως αυτές φαίνονται στον Ορισμό(1.1.3).

- Ισχυρισμός II
  Το $\inf\{\xi : \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 1\}$ υπάρχει.
  Έστω ότι υπήρχε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\xi_n\}$ με $\xi_n \searrow -\infty$ και τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να είχαμε $\int_{-\infty}^{\xi_n} \nu(t,x,s)ds = 1$ τότε: για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ θα υπήρχε n_0 έτσι ώστε $\xi_{n_0} < \xi$ και κατά συνέπεια:

  $$\int_{-\infty}^{\xi_{n_0}} \nu(t,x,s)ds + \int_{\xi_{n_0}}^{\xi} \nu(t,x,s)ds + \int_{\xi}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds = 1$$

  Το πρώτο από τα τρία ολοκληρώματα είναι ίσο με 1 και τα άλλα δύο είναι μη-αρνητικά, τουλάχιστον, οπότε δείξαμε ότι:
  Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ θα είχαμε $\int_{\xi}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds = 0$, και η υποαθροιστικότητα του μέτρου ν θα μας έδινε το άτοπο ώς εξής:

  $$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-n}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds = 0.$$

Βασιζόμενοι στους 2 προηγούμενους ισχυρισμούς, ορίζουμε για κάθε t, x,

$$\xi_0 = \inf\{\xi : \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 1\}.$$

Δύο χρήσιμες παρατηρήσεις για την τιμή του $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds$,

- Για κάθε $\xi < \xi_0$, ισχύει ότι $0 \leq \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds \neq 1$ έχοντας όμως ότι $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds \leq \int_{\mathbb{R}} \nu(t,x,s)ds = 1$ προκύπτει ότι $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds < 1$.

- Για κάθε $\xi > \xi_0$, ισχύει ότι $1 \leq \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t,x,s)ds = 1$, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 1$.

Και τώρα προκύπτει η τιμή της συνάρτησης $f(t,x,\xi)$.

- Πρώτη εκδοχή: $\xi_0 < 0$.
  Για κάθε $\xi < \xi_0$ έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = -\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds$, όμως $-1 < -\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds \leq 0$ και επειδή $f(t,x,\xi)$ = -1 ή 0 ή 1 έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = 0$.
  Για κάθε $\xi_0 \leq \xi < 0$ έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = -\int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = -1$.
  Για κάθε $0 \leq \xi$ έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = 1 - \int_{-\infty}^{\xi} \nu(t,x,s)ds = 0$.
  Συνεπώς δείξαμε ότι:
$$f(t,x,\xi) = \begin{cases} -1 & ,\text{όταν } \xi_0 \leq \xi < 0 \\ 0 & ,\text{αλλού.} \end{cases}$$
  Ορίζοντας λοιπόν:
$$g(t,x) = \xi_0,$$
  έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = X(\xi; g(t,x))$.

- Δεύτερη εκδοχή: $\xi_0 \geq 0$.
  Ομοίως δείχνουμε ότι:
$$f(t,x,\xi) = \begin{cases} 1 & ,\text{όταν } 0 \leq \xi < \xi_0 \\ 0 & ,\text{αλλού.} \end{cases}$$
  Ορίζοντας, πάλι:
$$g(t,x) = \xi_0,$$
  έχουμε ότι $f(t,x,\xi) = X(\xi; g(t,x))$.

Παρατηρούμε ότι η $g(t,x)$ είναι καλά ορισμένη διότι το inf ενός συνόλου είναι μονοσήμαντο.
Συνεπώς υπάρχει συνάρτηση $g(t,x)$ τέτοια ώστε
$$f(t,x,\xi) = X(\xi; g(t,x)),$$
για σχεδόν όλα τα t, x, ξ οπότε και
$$g(t,x) = \int_{\xi} f(t,x,\xi)d\xi.$$
Επιπλέον, από το Βήμα 3 έχουμε για σχεδόν όλα τα t, x:
$$u(t,x) = \int_{\xi} f(t,x,\xi)d\xi,$$

Δηλαδή για σχεδόν όλα τα t, x προκύπτει ότι $g(t,x) = u(t,x)$. Οπότε για σχεδόν όλα τα t, x, ξ έχουμε ότι:

$$f(t,x,\xi) = X(\xi; u(t,x)).$$

Προχωράμε τώρα στην σύγκλιση της $f(t,x,\xi)$ καθώς $t \to 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $K_x \subset \mathbb{R}_x$ συμπαγές έχουμε:

$$\int_{K_x}\int_{\xi} |f(t,x,\xi) - X(\xi; u_0(x))| d\xi dx$$

$$= \int_{K_x}\int_{\xi} |X(\xi; u(t,x)) - X(\xi; u_0(x))| d\xi dx$$

$$= \int_{K_x} |u(t,x) - u_0(x)| dx \xrightarrow{t \to 0} 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας (σελ.3) και η σύγκλιση αποδείχθηκε ήδη στο Τρίτο Βήμα της απόδειξης αυτής. Άρα:

$$f(t,x,\xi) \to X(\xi; u_0(x)) \text{ στον } L^p_{loc}(\mathbb{R}_x; L^1(\mathbb{R}_\xi)).$$

Μένει τέλος να δείξουμε ότι η $u(\cdot,\cdot)$ είναι η μοναδική Λύση Εντροπίας του προβλήματος (1.1), (1.2) που όμως προκύπτει από τα προηγούμενα και από την δουλειά των Lions, Perthame, Tadmor οι οποίοι στην εργασία τους [15] έδειξαν ότι, ικανοποιώντας η συνάρτηση f τα προηγούμενα θα πρέπει η αντίστοιχη συνάρτηση u να είναι Λύση Εντροπίας του Προβλήματος (1.1),(1.2). Οπότε ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Θεωρήματος (1.2.1), και απαντήθηκε και το αρχικό μας ερώτημα. □

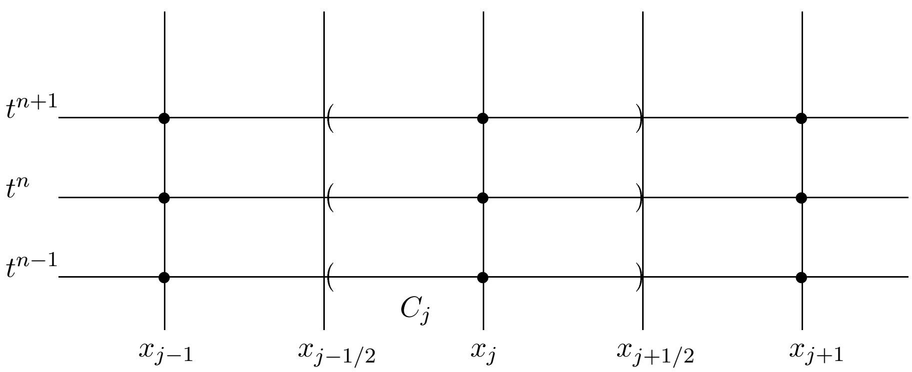
Σχόλιο. Είναι φανερό ότι η απόδειξη δεν εξαρτάται από το πλήθος των χωρικών μεταβλητών. Το θεώρημα ισχύει και σε πολλές μεταβλητές.

Θα συνεχίσουμε στις επόμενες παραγράφους με εφαρμογές του Θεωρήματος (2.1) σε σχήματα μία ή περισσοτέρων διαστάσεων.

Κεφάλαιο 2

Σχήμα Engquist-Oscher σε μία διάσταση

2.1 Το σχήμα μας



Θεωρούμε ομοιόμορφο πλέγμα, με κομβικά σημεία $x_j,\ x_j \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{Z}$ και μεταξύ τους απόσταση σταθερή και ίση με Δx. Ονομάζουμε C_j το διάστημα $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, με $x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$ και πλάτος Δx.

Η ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης προκύπτει από το Λήμμα(2.2.1)του [13].

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,t^{n+1}) - u(x,t^n)dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} A(u(x_{j+1/2},t)) - A(u(x_{j-1/2},t))dt = 0$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα περιγράφει την μεταβολή της ποσότητας -που η συνάρτηση u αντιπροσωπεύει- στο διάστημα C_j κατά την διάρκεια του $[t^n, t^{n+1}]$, το δεύτερο εκφράζει την αρνητική διαφορά της ροής της ίδιας ποσότητας στα άκρα του διαστήματος C_j, $x_{j+1/2}, x_{j-1/2}$ κατά την διάρκεια του $[t^n, t^{n+1}]$.

Μερικούς συμβολισμούς τώρα:

- $a_+(\xi), a_-(\xi)$ να είναι, το θετικό και το αρνητικό μέρος της $a(\xi)$ που ορίζονται από τις σχέσεις $\begin{cases} a_+(\xi) = \max\{a(\xi), 0\} \\ a_-(\xi) = \min\{a(\xi), 0\} \end{cases}$.

- $A(u, v)$ να είναι η συνηθισμένη Engquist-Oscher αριθμητική ροή, δηλαδή

$$A(u,v) = \int_0^u a_+(\xi)d\xi + \int_0^v a_-(\xi)d\xi + A(0).$$

  Πριν συνεχίσουμε με την διακριτοποίηση του προβλήματος μας θα δούμε κάποιες ιδιότητες της αριθμητικής ροής $A(u, v)$.

  - Lipschitz συνέχεια:
    Για κάθε u_1, u_2, v, με $|u_1|, |u_2|, |v| \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ και για $M = \max_{|\xi|<\|u_0\|} |a(\xi)|$ έχουμε:
    $|A(u_1, v) - A(u_2, v)| = |\int_0^{u_1} a_+(\xi)d\xi + \int_0^v a_-(\xi)d\xi - \int_0^{u_2} a_+(\xi)d\xi - \int_0^v a_-(\xi)d\xi| = |\int_{u_2}^{u_1} a_+(\xi)d\xi| \leq M|u_1 - u_2|$.
    Και με παρόμοιο τρόπο για την δεύτερη συντεταγμένη του $A(\cdot, \cdot)$.

  - Μονοτονία:
    $A(u, v) - A(w, v) = \int_0^u a_+(\xi)d\xi + \int_0^v a_-(\xi)d\xi - \int_0^w a_+(\xi)d\xi - \int_0^v a_-(\xi)d\xi = \int_w^u a_+(\xi)d\xi$, επειδή τώρα $a_+(\xi) \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι στην πρώτη μεταβλητή της, η $A(\cdot, \cdot)$ είναι αύξουσα. Όμοια έχουμε ότι στην δεύτερη μεταβλητή της, η $A(\cdot, \cdot)$ είναι φθίνουσα.

  - Συνέπεια:
    $A(u, u) = \int_0^u a_+(\xi)d\xi + \int_0^u a_-(\xi)d\xi + A(0) = \int_0^u a(\xi)d\xi + A(0) = \int_0^u A'(\xi)d\xi + A(0) = A(u)$.

Χρησιμοποιώντας την Engquist-Oscher αριθμητική ροή $A(\cdot, \cdot)$, διακριτοποιούμε το πρόβλημα και προκύπτει:

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(A(u_j^n, u_{j+1}^n) - A(u_{j-1}^n, u_j^n)) = 0,$$

με αρχικές τιμές:

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{C_j} u_0(x)dx.$$

Όπως η Δ.Ε έτσι και το σχήμα μας έχει κινητική μορφή την οποία εισάγει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1 *(Σχήμα Κινητικής Μορφής)*
Θέτουμε:

- $u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{C_j} u_0(x)dx,$
- $u_j^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)d\xi$ *με* $f_j^{n+1}(\xi)$ *να ορίζεται αναδρομικά από την :*

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi) + |a(\xi)|X_j^n(\xi) - a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)\Big), \tag{2.1}$$

όπου $X_j^n(\xi) = X(\xi; u_j^n)$.

Τότε η u_j^n *ικανοποιεί το Engquist-Oscher σχήμα:*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A(u_j^n, u_{j+1}^n) - A(u_{j-1}^n, u_j^n)), \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Μάλιστα η σχέση (2.1) θα ονομάζεται στο εξής κινητική μορφή του Engquist-Oscher σχήματος.
**Παρατήρηση: Δεν ορίζονται οι συναρτήσεις* $f_j^0(\xi)$.

Απόδειξη
Πράγματι υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.1):

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(a_+(\xi)X_j^n(\xi) + a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)$$
$$-a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi) - a_-(\xi)X_j^n(\xi)\Big).$$

Ολοκληρώνουμε, τώρα, ως προς ξ,

$$\int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} X_j^n(\xi)d\xi - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)X_j^n(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)d\xi$$
$$-\int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)X_j^n(\xi)d\xi\Big)$$

από τις υποθέσεις του Θεωρήματος και τον ορισμό της συνάρτησης $X_j^n(\xi)$ έχουμε:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_0^{u_j^n} a_+(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^n} a_-(\xi)d\xi$$
$$-\int_0^{u_{j-1}^n} a_+(\xi)d\xi - \int_0^{u_j^n} a_-(\xi)d\xi\Big),$$

τέλος από τον ορισμό της Engquist-Oscher αριθμητικής ροής:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A(u_j^n, u_{j+1}^n) - A(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$

και τελειώσαμε. □

Μία χρήσιμη, για τα επόμενα, ισοδύναμη μορφή της σχέσης (2.1) είναι η εξής:

$$\begin{aligned} f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi)(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi), \end{aligned} \tag{2.2}$$

η οποία είναι απλή αναδιάταξη των όρων της (2.1).

Θα συνεχίσουμε στην επόμενη παράγραφο με δύο Θεωρήματα που αφορούν στην σύγκλιση του σχήματός μας.

2.2 Σύγκλιση του σχήματος

Πριν προχωρήσουμε στην σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος που κατασκευάσαμε θα δούμε δύο Λήμματα που αφορούν στην Αρχή Μεγίστου και στις Ανισότητες Εντροπίας.

Λήμμα 2.2.1 *(Αρχή Μεγίστου)*
Με C.F.L συνθήκη

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{|\xi| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} |a(\xi)| \le 1,$$

έχουμε για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι

$$|u_j^n| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Απόδειξη(Με επαγωγή στο n)

- Εύκολα βλέπουμε, από τον ορισμό του u_j^0 ότι $|u_j^0| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, για κάθε $j \in \mathbb{Z}$.

- Υποθέτουμε τώρα ότι $|u_j^n| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$.
Τώρα, για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ από την κινητική μορφή του σχήματος (2.2):

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi)(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi),$$

ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς ξ έχουμε :

$$\int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}}(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|)X_j^n(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)d\xi$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)d\xi$$

ισοδύναμα από τον ορισμό της $X_j^n(\xi) = X(\xi; u_j^n)$:

$$u_j^{n+1} = \int_0^{u_j^n} \underbrace{1-\frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|}_{+} d\xi + \int_0^{u_{j+1}^n} \underbrace{-\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)}_{+} d\xi$$

$$+\int_0^{u_{j-1}^n} \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)}_{+} d\xi.$$

Αυξάνοντας τα άνω άκρα των ολοκληρωμάτων έως $\sup_j u_j^n$ προκύπτει:

$$u_j^{n+1} \le \int_0^{\sup_j u_j^n} 1-\frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|d\xi + \int_0^{\sup_j u_j^n} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^{\sup_j u_j^n} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)d\xi,$$

τέλος επειδή $a_+(\xi) - a_-(\xi) = |a(\xi)|$ έχουμε:

$$u_j^{n+1} \le \sup_j u_j^n.$$

Όμοια, ελλατώνοντας τα άνω άκρα των ολοκληρωμάτων έως $\inf_j u_j^n$ αποδεικνύεται ότι:

$$u_j^{n+1} \ge \inf_j u_j^n.$$

Άρα $|u_j^{n+1}| \le \sup_j |u_j^n|$, συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι: $|u_j^{n+1}| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. □

Ορισμός 2.2.1 *Ορίζουμε την αριθμητική ροή εντροπίας $\eta(\cdot,\cdot)$ για δοσμένη συνάρτηση εντροπίας $S(\cdot)$ ως εξής:*

$$\eta(u,v) = \int_0^u a_+(\xi)S'(\xi)d\xi + \int_0^v a_-(\xi)S'(\xi)d\xi.$$

Ιδιότητες της αριθμητικής ροής εντροπίας $\eta(\cdot,\cdot)$ που μας ενδιαφέρουν:

- Lipschitz συνέχεια:
  $|\eta(u,v)-\eta(w,v)| = |\int_w^u a_+(\xi)S'(\xi)d\xi| \le M\|S'\|_\infty |u-w|$,
  για $M = max_{|\xi|<\|u_0\|_{L^\infty}} |a(\xi)|$.

- Συνέπεια
  $\eta(u,u) = \int_0^u a_+(\xi)S'(\xi)d\xi + \int_0^u a_-(\xi)S'(\xi)d\xi = \int_0^u a(\xi)S'(\xi)d\xi = \eta(u)$.

Περνάμε σε ένα Λήμμα που αφορά στις τοπικές Ανισότητες Εντροπίας που το Σχήμα μας ικανοποιεί.

Λήμμα 2.2.2 *(Ανισότητες εντροπίας)*
Για κάθε κυρτή συνάρτηση εντροπίας $S(\cdot)$ και για την αντίστοιχη αριθμητική ροή εντροπίας $\eta(\cdot,\cdot)$, έχουμε :

$$S(u_j^{n+1}) - S(u_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\eta(u_j^n, u_{j+1}^n) - \eta(u_{j-1}^n, u_j^n)) \le 0, \tag{2.3}$$

ή ακριβέστερα, αποσαφινίζοντας το αρνητικό πρόσημο της (2.3) έχουμε:

$$\begin{aligned} X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(& a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi) + a_+(\xi)X_j^n(\xi) \\ & -a_-(\xi)X_j^n(\xi) - a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)\Big) = \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

με u_j^n ορισμένα από το Θεώρημα 2.1.1 (Σχήμα Κινητικής Μορφής) και για κάποιες μη-αρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις $m_j^{n+1}(\xi)$.

Απόδειξη
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (2.2) με $sgn(\xi)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} sgn(\xi)f_j^{n+1}(\xi) = (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|)sgn(\xi)X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)sgn(\xi)X_{j+1}^n(\xi) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)sgn(\xi)X_{j-1}^n(\xi). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $sgn(\xi)f_j^{n+1}(\xi)$ είναι κυρτός συνδυασμός των θετικών συναρτήσεων

$$sgn(\xi)X_{j-1}^n(\xi),\ sgn(\xi)X_j^n(\xi),\ sgn(\xi)X_{j+1}^n(\xi)$$

οι οποίες εξ'ορισμού είναι άνω φραγμένες από το 1 οπότε για κάθε j,n,ξ έχουμε τις συναρτήσεις $sgn(\xi)f_j^{n+1}(\xi)$ έχουμε:

$$0 \le sgn(\xi)f_j^{n+1}(\xi) = |f_j^{n+1}(\xi)| \le 1. \tag{2.5}$$

Συνεχίζουμε ορίζοντας τις συναρτήσεις που θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην δημιουργία των μέτρων που εμφανίζονται,

$$m_j^{n+1}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} X_j^{n+1}(s) - f_j^{n+1}(s)ds.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $m_j^{n+1}(\cdot)$ ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η συνέχεια της $m_j^{n+1}(\cdot)$.
  Έπεται άμεσα από την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων $X_j^{n+1}(\xi)$, $f_j^{n+1}(\xi)$.

- Μελέτη της $m_j^{n+1}(\cdot)$.
  Θα υποθέσουμε ότι $u_j^{n+1} \geq 0$, τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε και στην περίπτωση $u_j^{n+1} \leq 0$.
  Λόγω της συνέχειας τους αρκεί να μελετήσουμε τις συναρτήσεις m_j^{n+1} στα διαστήματα

  $$(-\infty, 0), (0, u_j^{n+1}), (u_j^{n+1}, +\infty).$$

  Εύκολα βλέπουμε ότι η m_j^{n+1}:

  - στο $(-\infty, 0)$ είναι αύξουσα,
  - στο $(0, u_j^{n+1})$ είναι αύξουσα,
  - στο $(u_j^{n+1}, +\infty)$ είναι φθίνουσα.

  Επίσης, από τους ορισμούς των X_j^{n+1}, f_j^{n+1} μπορούμε να δείξουμε ότι:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} m_j^{n+1}(\xi) = 0.$$

  Δηλαδή κάθε μια εκ των συναρτήσεων m_j^{n+1} είναι θετική και φραγμένη.

- Συμπάγεια του φορέα της $m_j^{n+1}(\cdot)$.
  Η f_j^{n+1} είναι κυρτός συνδυασμός των $X_{j-1}^n, X_j^n, X_{j+1}^n$ όπως βλέπουμε από την σχέση (2.2):

  $$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi)(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a(\xi)|) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)$$

  $$+\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi),$$

οπότε ορίζοντας

$$m = min\{u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}\},$$
$$M = max\{u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}\},$$

έχουμε ότι $suppf^{n+1}_j \subset [m, M]$.
Από τα παραπάνω και από την $\int_{-\infty}^{+\infty} X^{n+1}_j(\xi) - f^{n+1}_j(\xi)d\xi = 0$ (η οποία ισχύει διότι $\lim_{x\to\pm\infty} m^{n+1}_j(\xi) = 0$) έχουμε την ζητούμενη συμπάγεια του φορέα της m^{n+1}_j.

- Η m^{n+1}_j είναι $L^1(\mathbb{R})$ συνάρτηση.
  Πλέον είναι φανερό λόγω της συνέχειας της και της συμπάγειας του φορέα της.

Η ολοκληρωσιμότητα των X^{n+1}_j, f^{n+1}_j μας επιτρέπει (Θεώρημα Παραγωγισιμότητας του Lebesgue) να έχουμε :

$$X^{n+1}_j(\xi) - f^{n+1}_j(\xi) = \frac{\partial m^{n+1}_j(\xi)}{\partial \xi},\ \text{ξ-σχεδόν παντού.} \tag{2.6}$$

Αντικαθιστούμε τώρα την τελευταία σχέση (2.6) στην (2.1) και προκύπτει

$$X^{n+1}_j(\xi) - X^n_j(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(a_-(\xi)X^n_{j+1}(\xi) + |a(\xi)|X^n_j(\xi) - a_+(\xi)X^n_{j-1}(\xi)\Big)$$
$$= \frac{\partial m^{n+1}_j(\xi)}{\partial \xi},$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (2.4). Έτσι αποδείξαμε το δεύτερο ερώτημα του Λήμματος.

Έστω τώρα κυρτή συνάρτηση εντροπίας $S(\cdot)$ και $\eta(\cdot,\cdot)$ η αντίστοιχη αριθμητική ροή εντροπίας. Θα πολλαπλασιάσουμε την σχέση (2.4) -που μόλις αποδείξαμε- με $S'(\xi)$ και θα ολοκληρώσουμε ως προς ξ, για να πάρουμε την (2.3).

$$\int_{\mathbb{R}} X^{n+1}_j(\xi)S'(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}} X^n_j(\xi)S'(\xi)d\xi + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)X^n_{j+1}(\xi)S'(\xi)d\xi$$
$$+\int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)X^n_j(\xi)S'(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)X^n_j(\xi)S'(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)X^n_{j-1}(\xi)S'(\xi)d\xi\Big)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m^{n+1}_j(\xi)}{\partial \xi}S'(\xi)d\xi$$

ισοδύναμα:

$$S(u_j^{n+1}) - S(0) - S(u_j^n) + S(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_0^{u_{j+1}^n} a_-(\xi) S'(\xi) d\xi$$

$$+ \int_0^{u_j^n} a_+(\xi) S'(\xi) d\xi - \int_0^{u_j^n} a_-(\xi) S'(\xi) d\xi - \int_0^{u_{j-1}^n} a_+(\xi) S'(\xi) d\xi \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} S'(\xi) d\xi$$

Από τον ορισμό του της $\eta(\cdot,\cdot)$ έχουμε :

$$S(u_j^{n+1}) - S(u_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\eta(u_j^n, u_{j+1}^n) - \eta(u_{j-1}^n, u_j^n) \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} S'(\xi) d\xi$$

Το δεξί μέλος είναι αρνητικό διότι η $S(\cdot)$ είναι κυρτή συνάρτηση και η $m_j^{n+1}(\cdot)$ είναι θετική. Οπότε καταλήγουμε στην:

$$S(u_j^{n+1}) - S(u_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\eta(u_j^n, u_{j+1}^n) - \eta(u_{j-1}^n, u_j^n)) \leq 0,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (2.3).

Έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη του Λήμματος. □

Προχωράμε τώρα, ορίζοντας την συνάρτηση που περιγράφει την προσεγγιστική λύση του προβλήματος.

Ορισμός 2.2.2 *Ορίζουμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος μας για σχήμα πλάτους Δx, να είναι η κατά-τμήματα σταθερή συνάρτηση $u_{\Delta x}$ ορισμένη ως:*

$$u_{\Delta x}(t,x) = u_j^n, \text{ όταν } t \in [t^n, t^{n+1}), \text{ και } x \in C_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}),$$

με u_j^n ορισμένα από το Θεώρημα 2.1.1 (Σχήμα Κινητικής Μορφής).

Περνάμε τώρα στα δύο Θεωρήματα που θα μας δώσουν την σύγκλιση του σχήματος μας.

Το πρώτο Θεώρημα μας δίνει την σύγκλιση της οικογένειας των προσεγγιστικών λύσεων χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μοναδικότητας Κινητικών Λύσεων (Θεώρ. 1.2.1). Οι υποθέσεις του πρώτου Θεωρήματος αποδεικνύονται στο δεύτερο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1 *(Το βοηθητικό Θεώρημα)*
Έστω ότι η οικογένεια προσεγγιστικών λύσεων $u_{\Delta x}(t,x) \in L^{\infty}(0,T;L^1(\mathbb{R}))$ *ικανοποιεί για κάποιες κατανομές* $\Psi_{\Delta x}(t,x,\xi)$*, κάποια μέτρα* $m_{\Delta x}(t,x,\xi)$ *και κάποιες συναρτήσεις* $\Psi_{0,\Delta x}(t), \Psi_{1,\Delta x}(t)$ *τις παρακάτω σχέσεις:*

$$\frac{\partial X(\xi;u_{\Delta x}(t,x))}{\partial t} + a(\xi)\frac{\partial X(\xi;u_{\Delta x}(t,x))}{\partial x} = \frac{\partial m_{\Delta x}(t,x,\xi)}{\partial \xi} + \Psi_{\Delta x}(t,x,\xi), \tag{2.7}$$

$$\Psi_{\Delta x}(t,x,\xi) \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ με την έννοια των κατανομών}, \tag{2.8}$$

$$m_{\Delta x}(t,x,\xi) \geq 0, \quad \|m_{\Delta x}\|_{M^1} \leq 2\|u_0\|_{L^1}\|u_0\|_{L^\infty}, \tag{2.9}$$

για κάθε $t \in [0,T)$*, τα παρακάτω ομοιόμορφα φράγματα ,*

$$\|u_{\Delta x}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1}, \quad \|u_{\Delta x}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty}, \tag{2.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u_{\Delta x}(t,x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)X(\xi;u_{\Delta x}(\tau,x))dxd\xi d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u_0(x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi + \Psi_{0,\Delta x}(t), \tag{2.11}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_{\Delta x}(t,x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx + \Psi_{1,\Delta x}(t), \tag{2.12}$$

για όλες τις μη-αρνητικές συναρτήσεις ελέγχου $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *και όλες τις ομαλές, κυρτές συναρτήσεις εντροπίας* $S(\cdot)$*. Επίσης* $\Psi_{i,\Delta x},\ i = 0,1$ *είναι φραγμένες συναρτήσεις με την ιδιότητα:*

$$\begin{aligned} \Psi_{0,\Delta x}(t) &\overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ στον } L^\infty([0,T)) - w^\star, \\ \Psi_{1,\Delta x}(t) &\overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \Psi_1(t) \text{ στον } L^\infty([0,T)) - w^\star, \end{aligned} \tag{2.13}$$

με $\Psi_1(t)$ *συνεχή και* $\Psi_1(0) = 0$*.*
Τότε, καθώς $\Delta x \to 0$*, η* $u_{\Delta x}(t,x)$ *συγκλίνει ισχυρά στον* $L^p_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty$*, στην μοναδική λύση εντροπίας του προβλήματος (1.1),(1.2).*

Απόδειξη
Θα περάσουμε στο όριο, καθώς $\Delta x \to 0$, στις παραπάνω σχέσεις, θα καταλήξουμε σε μία συνάρτηση $f(t,x,\xi)$ η οποία θα είναι κινητική λύση του προβλήματος (1.1),(1.2) (βλ. Ορισμό 1.1.3) και θα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μοναδικότητας (Θεώρ. 1.2.1).

- Βήμα 1
Ορίζουμε αρχικά $\Omega = [0,T) \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$. Από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας έχουμε ότι $\|X(\cdot; u_{\Delta x}(\cdot,\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ οπότε υπάρχει συνάρτηση $f \in L^\infty(\Omega)$ έτσι ώστε για κατάλληλη υπακολουθία της $u_{\Delta x}$ να έχουμε:

$$X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f(t,x,\xi), \text{ στον } L^\infty(\Omega) - w^\star, \tag{2.14}$$

ειδικότερα:

$$u_{\Delta x}(t,x) \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(t,x,\xi) d\xi, \text{ στον } L^\infty([0,T) \times \mathbb{R}) - w^\star,$$

διότι:

  - Η απόδειξη προκύπτει από μία παρατήρηση.
  Από την (2.10) έχουμε ότι $\|u_{\Delta x}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$.
  Οπότε $supp_\xi X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \subset [-\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_0\|_{L^\infty}](=: K)$ και κατά συνέπεια $supp_\xi f(t,x,\xi) \subset K$.
  Από την ασθενή σύγκλιση της $X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))$, έχουμε για κάθε $\phi(t,x) \in L^1([0,T) \times \mathbb{R})$ ότι :

$$\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(t,x) X_K(\xi) dt dx d\xi \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega f(t,x,\xi)\phi(t,x) X_K(\xi) dt dx d\xi,$$

  ή αλλιώς:

$$\int_{t,x} \int_K X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(t,x) d\xi dx dt \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_{t,x} \int_K f(t,x,\xi)\phi(t,x) d\xi dx dt,$$

  ισοδύναμα:

$$\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(t,x) d\xi dx dt \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega f(t,x,\xi)\phi(t,x) d\xi dx dt,$$

  τέλος:

$$\int_{t,x} u_{\Delta x}(t,x)\phi(t,x) dx dt \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_{t,x} \Big(\int_\xi f(t,x,\xi) d\xi \Big) \phi(t,x) dx dt.$$

  Έχουμε έτσι την ασθενή σύγκλιση της $u_{\Delta x}$.

Παρομοίως, από την (2.9) έχουμε την ύπαρξη ενός μη-αρνητικού και φραγμένου μέτρου $m(t,x,\xi)$ έτσι ώστε:

$$m_{\Delta x}(t,x,\xi) \stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} m(t,x,\xi), \text{ στον } M - w^{\star}. \tag{2.15}$$

Έχουμε τώρα την (2.7) με την έννοια των κατανομών:

$$\int_{\Omega} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_t(t,x,\xi)dxdtd\xi$$

$$+\int_{x,\xi} X(\xi; u_{\Delta x}(0,x))\phi(0,x,\xi)d\xi dx$$

$$+\int_{\Omega} a(\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_x(t,x,\xi)dxdtd\xi$$

$$= \int_{\Omega} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi)dxdtd\xi - \int_{\Omega} \Psi_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi(t,x,\xi)dxdtd\xi$$

Παιρνώντας στο όριο, καθώς $\Delta x \to 0$, παρατηρούμε :

- Λόγω της (2.14) έχουμε:
  $\int_{\Omega} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_t(t,x,\xi) \to \int_{\Omega} f(t,x,\xi)\phi_t(t,x,\xi)$
- Από την κατασκευή της η $u_{\Delta x}(0,x)$ ικανοποιεί:
  $\int_{x,\xi} X(\xi; u_{\Delta x}(0,x))\phi(0,x,\xi) \to \int_{x,\xi} X(\xi; u_0(x))\phi(0,x,\xi)$
- Λόγω πάλι της (2.14) έχουμε:
  $\int_{\Omega} a(\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_x(t,x,\xi) \to \int_{\Omega} a(\xi)f(t,x,\xi)\phi_x(t,x,\xi)$
- Λόγω της (2.15) έχουμε:
  $\int_{\Omega} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi) \to \int_{\Omega} m(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi)$
- Λόγω της (2.8) έχουμε:
  $\int_{\Omega} \Psi_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi(t,x,\xi) \to 0$

Από τις παρατηρήσεις αυτές έχουμε ότι η συνάρτηση $f(t,x,\xi)$ ικανοποιεί την :

$$\int_{\Omega} f(t,x,\xi)\phi_t(t,x,\xi) + \int_{x,\xi} X(\xi; u_0(x))\phi(0,x,\xi)$$

$$+\int_{\Omega} a(\xi)f(t,x,\xi)\phi_x(t,x,\xi) = \int_{\Omega} m(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi),$$

Συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί την σχέση (1.5).

- Βήμα 2

Παιρνώντας στο όριο στις (2.11),(2.12) προκύπτουν οι (1.8),(1.9).
Έχουμε την (2.11) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi$$

$$-\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(\tau,x))dxd\xi d\tau$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi; u_0(x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi + \Psi_{0,\Delta x}(t).$$

Παίρνουμε $h(\cdot) \in L^1([0,T))$. Πολλαπλασιάζουμε με $h(t)$ και ολοκληρώνουμε ως προς t. Παρατηρούμε τα εξής:

- Έχουμε ότι $\phi(x)S'(\xi)h(t) \in L^1(\Omega)$ διότι η $S'(\cdot)$ είναι ομαλή με συμπαγή φορέα ($|\xi| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$), η $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ και η $h \in L^1([0,T))$, οπότε:

$$\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(x)S'(\xi)h(t)dtdxd\xi$$

$$\stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega f(t,x,\xi)\phi(x)S'(\xi)h(t)dtdxd\xi.$$

- Από την ασθενή σύγκλιση της $u_{\Delta x}(t,x)$ έχουμε ότι:

$$\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(\tau,x))a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)X_{(0,t)}(\tau)d\tau dxd\xi$$

$$\stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega f(\tau,x,\xi)a(\xi)\phi(x)S'(\xi)X_{(0,t)}(\tau)d\tau dxd\xi,$$

όπου $X_{(0,t)}(\tau)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $(0,t)$.

Παρατηρώντας, τώρα, ότι

$$|\int_{x,\xi}\int_0^T X(\xi; u_{\Delta x}(\tau,x))a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)X_{(0,t)}(\tau)dxd\xi d\tau h(t)|$$

$$\leq th(t)\int_{x,\xi}|a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)|dxd\xi,$$

και βασιζόμενοι στο γεγονός

$$\int_0^T t|h(t)|dt \leq T \int_0^T |h(t)|dt < \infty,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, οπότε παίρνουμε:

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi; u_{\Delta x}(\tau,x))a(\xi)\phi'(x)S'(\xi)h(t)dxd\xi d\tau dt$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau,x,\xi)a(\xi)\phi(x)S'(\xi)h(t)dxd\xi d\tau dt.$$

– Από την (2.13) έχουμε για την ακολουθία συναρτήσεων $\Psi_{0,\Delta x}$ ότι:

$$\int_0^T \Psi_{0,\Delta x}(t)h(t)dt \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0.$$

Μαζεύοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)\phi(x)S'(\xi)dxd\xi - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} a(\xi)f(\tau,x,\xi)\phi'(x)S'(\xi)dxd\xi d\tau$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} X(\xi; u_0(x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi.$$

Που είναι η ζητούμενη σχέση (1.8).
Περνάμε τώρα στην απόδειξη της σχέσης (1.9).
Έχουμε τώρα, για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ την (2.12) :

$$\int_{\mathbb{R}} u_{\Delta x}(t,x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx + \Psi_{1,\Delta x}(t).$$

Έστω $h(t) \in L^1(0,T)$. Φανερά, τότε $h(t)\phi(x) \in L^1((0,T)\times\mathbb{R})$, οπότε από την ασθενή σύγκλιση της $u_{\Delta x}$:

$$\int_{t,x} u_{\Delta x}(t,x)\phi(x)h(t)dxdt \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{t,x} \Big(\int_\xi f(t,x,\xi)d\xi\Big)\phi(x)h(t)dxdt.$$

Επίσης από την (2.12) έχουμε:

$$\int_{t,x} u_{\Delta x}(t,x)\phi(x)h(t)dxdt = \int_{t,x} u_0(x)\phi(x)h(t)dxdt$$

$$+\int_t \Psi_{1,\Delta x}(t)h(t)dt.$$

Το οποίο συγκλίνει από την (2.13), καθώς $\Delta x \to 0$ στο :

$$\int_{t,x} u_0(x)\phi(x)h(t)dxdt + \int_t \Psi_1(t)h(t)dt.$$

Άρα, από μοναδικότητα του ασθενούς ορίου :

$$\int_\Omega f(t,x,\xi)\phi(x)h(t)dtdxd\xi = \int_{t,x} u_0(x)\phi(x)h(t)dtdx + \int_t \Psi_1(t)h(t)dt.$$

Και επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $h(t) \in L^1(0,T)$, έπεται ότι :

$$\int_{x,\xi} f(t,x,\xi)\phi(x)dxd\xi = \int_x u_0(x)\phi(x)dx + \Psi_1(t).$$

Και από την συνέχεια της $\Psi_1(t)$ στο 0 (2.13) έχουμε :

$$\lim_{t\to 0}\int f(t,x,\xi)\phi(x)dxd\xi = \int u_0(x)\phi(x)dx,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (1.9).

- Βήμα 3

  Πρώτα η απόδειξη της (1.6).

  Παρατηρούμε από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας ότι:

$$0 \le sgn(\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \le 1. \tag{2.16}$$

Οπότε για κάθε μη-αρνητική συνάρτηση ελέγχου $\phi(t,x,\xi)$ έχουμε

$$0 \le \int_\Omega sgn(\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi(t,x,\xi)dtdxd\xi \le \int_\Omega \phi(t,x,\xi)dtdxd\xi.$$

Παρατηρούμε ότι $sgn(\xi)\phi(t,x,\xi) \in L^1(\Omega)$ και περνάμε στο όριο, καθώς $\Delta x \to 0$, οπότε :

$$0 \le \int_\Omega sgn(\xi)f(t,x,\xi)\phi(t,x,\xi)dtdxd\xi \le \int_\Omega \phi(t,x,\xi)dtdxd\xi.$$

Άρα, $0 \le sgn(\xi)f(t,x,\xi) \le 1$, που είναι η ζητούμενη (1.6).

Η απόδειξη της (1.7) τώρα.

Εύκολα βλέπουμε (Παρ.7) ότι:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi; u_{\Delta x}) = \delta(\xi) - \delta(u_{\Delta x} - \xi), \tag{2.17}$$

με την έννοια των κατανομών. Θεωρούμε συναρτήσεις ελέγχου $\phi_1(t) \in C_c^\infty([0,T))$, $\phi_2(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_3(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρ.4 του Παραρτήματος η (2.17) γράφεται ώς:

$$-\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3'(\xi)dtdxd\xi$$

$$= \int_\Omega \delta(\xi)\phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3(\xi)dtdxd\xi$$

$$-\int_\Omega \delta(u_{\Delta x}(t,x)-\xi)\phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3(\xi)dtdxd\xi.$$

Από την ασθενή σύγκλιση της $X(\xi; u_{\Delta x})$ έχουμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει, καθώς $\Delta x \to 0$, στο

$$\int_\Omega f(t,x,\xi)\phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3'(\xi)dtdxd\xi.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του Δx.
Για το τρίτο χρησιμοποιούμε ότι τα $u_{\Delta x}$ είναι φραγμένα μέσα στο K οπότε ορίζοντας $\delta_{\Delta x} = \delta(u_{\Delta x} - \xi)$ έχουμε $\delta_{\Delta x}(K) = 1$, $\delta_{\Delta x}(K^c) = 0$. Βασιζόμενοι τώρα στην $\delta_{\Delta x}(E) \to \nu(E)$ για κάθε $|E| < \infty$ προκύπτει ότι $\nu(K) = 1$, $\nu(K^c) = 0$ και φυσικά ν θετικό. Οπότε, από το Θεώρημα Ασθενής Συμπάγειας στο χώρο των Radon μέτρων, συγκλίνει στο:

$$\int_{t,x,\xi} \phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3(\xi)\nu(t,x,\xi)dtdxd\xi.$$

Συνοψίζοντας:

$$-\int_\Omega f(t,x,\xi)\phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3'(\xi)dtdxd\xi = \int_\Omega \phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3(\xi)\delta(\xi)dtdxd\xi$$

$$-\int_\Omega \phi_1(t)\phi_2(x)\phi_3(\xi)\nu(t,x,\xi)dtdxd\xi.$$

Που είναι η ζητούμενη σχέση (1.7).

- Βήμα 4
  Είδαμε μέχρι τώρα ότι η $f(t,x,\xi)$ είναι κινητική λύση του προβλήματος (1.1),(1.2) υπό το πρίσμα Ορισμού (1.2.3) και ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μοναδικότητας (Θεώρ. 1.2.1), οπότε η $f(t,x,\xi)$ είναι της μορφής:
  $$f(t,x,\xi) = X(\xi; u(t,x)),$$

με $u(t,x)$ να είναι λύση εντροπίας του προβλήματος (1.1),(1.2).
Έχουμε δείξει λοιπόν μέχρι τώρα ότι:

$$X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \rightharpoonup X(\xi; u(t,x)) \text{ στον } L^\infty(t,x,\xi) - w^\star.$$

Προχωράμε δείχνοντας ότι $X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \to X(\xi; u(t,x))$ $t,x,\xi \in \Omega$ σχεδόν παντού.
(Με άτοπο)
Έστω ότι υπάρχει $K \subset \Omega$ με $|K| > 0$, μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|K| < \infty$, και $a > 0$ έτσι ώστε για κάθε $t,x,\xi \in K$ να έχουμε ότι:

$$\Big| |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))| - |X(\xi; u(t,x))| \Big| > a,$$

δηλαδή:

$$\text{είτε } |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))| > |X(\xi; u(t,x))| + a,$$
$$\text{είτε } |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))| < |X(\xi; u(t,x))| - a.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω από το K:

$$\text{είτε } \int_K |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))| \geq \int_K |X(\xi; u(t,x))| + a|K|,$$
$$\text{είτε } \int_K |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))| \leq \int_K |X(\xi; u(t,x))| - a|K|.$$

Η ασθενής σύγκλιση, τώρα, της $X(\xi; u_{\Delta x}) \rightharpoonup X(\xi; u)$ στον $L^\infty - w\star$ μας δίνει για κάθε $g(t,x,\xi) \in L^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) g(t,x,\xi) \to \int_\Omega X(\xi; u(t,x)) g(t,x,\xi).$$

Επιλέγοντας για g την $g(t,x,\xi) = sgn(\xi) X_K(t,x,\xi) \in L^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\int_K |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \to \int_K X(\xi; u(t,x)).$$

Παίρνοντας τώρα το όριο καθώς το $\Delta x \to 0$, οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται:

$$\text{είτε } \int_K |X(\xi; u(t,x))| \geq \int_K |X(\xi; u(t,x))| + a|K|,$$
$$\text{είτε } \int_K |X(\xi; u(t,x))| \leq \int_K |X(\xi; u(t,x))| - a|K|.$$

Δηλαδή , είτε $0 \geq a|K|$ είτε $0 \leq -a|K|$, που σε κάθε περίπτωση είναι άτοπο διότι $a, |K| > 0$.
Έχοντας δείξει την σχεδόν παντού σύγκλιση της $|X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))|$ στην $|X(\xi; u(t,x))|$, έχουμε εύκολα την σχεδόν παντού σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))$ στη συνάρτηση $X(\xi; u(t,x))$, ως άμεση συνέπεια του προσήμου της συνάρτησης πυκνότητας $X(\xi, w)$.
Συνεχίζουμε δείχνοντας την σχεδόν παντού σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $u_{\Delta x}(t,x)$ στη συνάρτηση $u(t,x)$.
(Με άτοπο)
Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $K \subset [0,T) \times \mathbb{R}_x$ με $|K| > 0$ έτσι ώστε:

$$\text{για κάθε } (t,x) \in K \text{ να έχουμε: } |u_{\Delta x}(t,x) - u(t,x)| \geq \varepsilon.$$

Τότε όμως για κάθε $(t,x) \in K$ έχουμε:

$$\Big| \int_\xi X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) - X(\xi; u(t,x)) d\xi \Big| \geq \varepsilon,$$

ή αλλιώς για κάθε $(t,x) \in K$ έχουμε:

$$\int_\xi |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) - X(\xi; u(t,x))| d\xi \geq \varepsilon.$$

Άτοπο διότι $\|u_{\Delta x}\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ και $u \in L^\infty$ και εφαρμόζοντας Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε:

$$\int_\xi |X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) - X(\xi; u(t,x))| d\xi \to 0,$$

για σχεδόν όλα τα $(t,x) \in K$.
Άρα για σχεδόν όλα τα $(t,x) \in K$ έχουμε ότι η $u_{\Delta x}(t,x)$ συγκλίνει στην $u(t,x)$.
Από την τελευταία έχουμε ότι

$$u_{\Delta x}(\cdot,\cdot) \rightharpoonup u(\cdot,\cdot), \text{ στον } L^p(K) - w.$$

Τώρα από την ασθενή σύγκλιση:

$$X(\cdot; u_{\Delta x}(\cdot,\cdot)) \rightharpoonup X(\cdot; u(\cdot,\cdot)) \text{ στον } L^\infty(K) - w^\star,$$

προκύπτει επιλέγοντας κατάλληλα την L^1 συνάρτηση ότι

$$\|u_{\Delta x}(\cdot,\cdot)\|_{L^p(K)} \to \|u(\cdot,\cdot)\|_{L^p(K)}.$$

Από τις συγκλίσεις αυτές προκύπτει,

$$u_{\Delta x}(\cdot,\cdot) \rightharpoonup u(\cdot,\cdot) \text{ στον } L^p_{loc}([0,T) \times \mathbb{R}).$$

Έτσι τελείωσε η απόδειξη του Βοηθητικού Θεωρήματος. □

Το δεύτερο Θεώρημα βασίζεται στις πραγματικές υποθέσεις του προβλήματος μας και δείχνοντας τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1 έχουμε την σύγκλιση του σχήματος μας στην μοναδική λύση εντροπίας του Νόμου Διατήρησης (1.1), (1.2).

Θεώρημα 2.2.2 *(Το Βασικό Θεώρημα)*
Υποθέτουμε την C.F.L συνθήκη:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{|\xi| \leq \|u_0\|_{L^\infty}} \leq 1.$$

Το Engquist-Oscher κινητικό σχήμα, που προκύπτει από το Θεώρ. (2.1.1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A(u_j^n, u_{j+1}^n) - A(u_{j-1}^n, u_j^n)),$$

ικανοποιεί τα παρακάτω :

- *Όλες τις τοπικές Ανισότητες Εντροπίας (Λήμμα 2.2.2).*
- *Την Αρχή Μεγίστου (Λήμμα 2.2.1).*
- *Καθώς $\Delta x \to 0$ η ακολουθία $u_{\Delta x}(t,x)$ συγκλίνει στον $L^p_{loc}([0,T] \times \mathbb{R})$, για κάθε $1 \leq p < \infty$, $T > 0$ στην μοναδική λύση εντροπίας του προβλήματος (1.1),(1.2).*

Απόδειξη
Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του βοηθητικού Θεωρήματος (Θεώρ. 2.2.1). Υπενθυμίζουμε ότι $\Omega = [0,T) \times \mathbb{R}^2$.

- Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι $u_{\Delta x} \in L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}))$ όπως θα δείξουμε στην απόδειξη της σχέσης (2.10).
- Ορίζουμε το "μέτρο" $m_{\Delta x}$.
  $m_{\Delta x}(t,x,\xi) = \frac{1}{\Delta t} m_j^{n+1}(\xi)$, όταν $x \in C_j$ και $t \in (t^n, t^{n+1}]$, έτσι ώστε να έχουμε $m_j^{n+1}(\xi) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)dt$, για κάθε $x \in C_j$.
- Απόδειξη της (2.7)
  Έχουμε την (2.4)

$$X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(a_-(\xi)(X_{j+1}^n(\xi) - X_j^n(\xi))$$

$$+a_+(\xi)(X_j^n(\xi) - X_{j-1}^n(\xi)\Big) = \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}.$$

Θεωρούμε, τώρα, την συνάρτηση ελέγχου $\phi(t,x,\xi) \in C_c^\infty(\Omega)$ και ορίζουμε $\phi_j^n(\xi) := \phi(t^n, x_j, \xi)$. Η $\phi_j^n(\xi)$ είναι συνάρτηση ελέγχου στον $\mathbb{R}_\xi$. Οπότε, πολλαπλασιάζουμε την (2.4) με $\phi_j^n(\xi)$ και ολοκληρώνουμε ως προς ξ:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)(X_{j+1}^n(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi \\
&+\int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)(X_j^n(\xi) - X_{j-1}^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi\Big) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} m_j^{n+1}(\xi)\frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Επειδή η $\phi(t,x,\xi)$ έχει συμπαγή φορέα, μπορούμε να αθροίσουμε ως προς $j \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ (μάλιστα τα αθροίσματα είναι πεπερασμένα) και να περάσουμε τα αθροίσματα κάτω από τα ολοκληρώματα.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \sum_{j,n} (X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_-(\xi)\sum_{j,n}(X_{j+1}^n(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi \\
&+\int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)\sum_{j,n}(X_j^n(\xi) - X_{j-1}^n(\xi))\phi_j^n(\xi)d\xi\Big) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \sum_{j,n} m_j^{n+1}(\xi)\frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi}d\xi. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Κάνουμε τώρα μερικές παρατηρήσεις, κάθε μία από αυτές αφορά σε ένα από τα παραπάνω διπλά αθροίσματα τα οποία θυμίζουμε ότι είναι πεπερασμένα λόγω της συμπάγειας του φορέα της συνάρτησης φ.

– Πρώτη παρατήρηση.
  Ξεκινάμε αθροίζοντας κατά παράγοντες,

$$\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} (X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)$$

$$= -\underbrace{\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_j^{n+1}(\xi) - \phi_j^n(\xi)) X_j^{n+1}(\xi)}_{A} - \underbrace{\sum_j \phi_j^0(\xi) X_j^0(\xi)}_{B}$$

$$= -A - B.$$

* Για το άθροισμα A χρησιμοποιούμε ότι:

$$(\phi_j^{n+1}(\xi) - \phi_j^n(\xi)) X_j^{n+1}(\xi)$$

$$= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_t(x_j, t, \xi) X_j^n(\xi) dt + O(\Delta t),$$

οπότε το άθροισμα A γίνεται:

$$A = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_t(x_j, t, \xi) X_j^n(\xi) dt + O(\Delta t),$$

συνεχίζουμε τώρα πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με Δx,

$$A = \frac{1}{\Delta x} \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_t(x_j, t, \xi) X_j^n(\xi) dt dx + O(\Delta t).$$

Από τον ορισμό, τώρα, της $u_{\Delta x}$ προκύπτει ότι:

$$A = \frac{1}{\Delta x} \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_t(x_j, t, \xi) X(\xi; u_{\Delta x}(t, x)) dt dx$$

$$+ O(\Delta t).$$

Προσθαφαιρούμε τώρα $\phi_t(t, x, \xi)$ και παίρνουμε:

$$A = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_t(x, t, \xi) X(\xi; u_{\Delta x}(t, x)) dt dx$$

$$+ \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Big(\phi_t(x_j, t, \xi)$$

$$- \phi_t(x, t, \xi) \Big) X(\xi; u_{\Delta x}(t, x)) dt dx + O(\Delta t).$$

Εφαρμόζοντας Taylor στο δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε ότι:

$$A = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} X(\xi; u_{\Delta x}(t, x)) \phi_t(t, x, \xi) dt dx + O(\Delta t).$$

∗ Για το άθροισμα B έχουμε :

$$B = \frac{1}{\Delta x}\sum_j \int_{C_j} X(\xi; u_j^0)\phi(0, x_j, \xi)dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\sum_j \int_{C_j} (\phi(0,x,\xi) + \phi(0,x_j,\xi) - \phi(0,x,\xi))X(\xi; u_j^0)dx,$$

Σπάμε το ολοκλήρωμα και κάνουμε Taylor, οπότε:

$$B = \frac{1}{\Delta x}\int_{\mathbb{R}} \phi(0,x,\xi)X(\xi; u_{\Delta x}(0,x))dx + O(\Delta x)$$

Η πρώτη παρατήρηση τελικά κλείνει ώς εξής:

$$\sum_j \sum_{n=0}^{\infty}(X_j^{n+1}(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)$$

$$= -\frac{1}{\Delta x}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x))\phi_t(t,x,\xi)dtdx$$

$$-\frac{1}{\Delta x}\int_{\mathbb{R}} X(\xi; u_{\Delta x}(0,x))\phi(0,x,\xi)dx + O(\Delta x).$$

– Δεύτερη παρατήρηση.
Έχουμε αθροίζοντας κατά παράγοντες:

$$\sum_j \sum_{n=0}^{\infty}(X_{j+1}^n(\xi) - X_j^n(\xi))\phi_j^n(\xi)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_j (\phi_j^n(\xi) - \phi_{j-1}^n(\xi))X_j^n(\xi).$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι :

$$\phi_j^n(\xi) - \phi_{j-1}^n(\xi) = \int_{C_j} \phi_x(t^n, x, \xi)dx + O(\Delta x).$$

Οπότε το άθροισμα γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_j \int_{C_j} \phi_x(t^n, x, \xi)X(\xi; u_j^n)dx + O(\Delta x)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j} \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_x(t^n, x, \xi) X(\xi; u_j^n) dt dx + O(\Delta x)$$

Όπως πριν προσθέτουμε και αφαιρούμε $\phi_x(t,x,\xi)$, κατόπιν σπάμε το ολοκλήρωμα και από Taylor κλείνουμε την Δεύτερη παρατήρηση,

$$\sum_{j} \sum_{n=0}^{\infty} (X_{j+1}^n(\xi) - X_j^n(\xi)) \phi_j^n(\xi)$$

$$= -\frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \phi_x(t,x,\xi) dt dx + O(\Delta x).$$

– Τρίτη παρατήρηση.
Όπως πριν δείχνουμε ότι :

$$\sum_{j} \sum_{n=0}^{\infty} (X_j^n(\xi) - X_{j-1}^n(\xi)) \phi_j^n(\xi)$$

$$= -\frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} X(\xi; u_{\Delta x}(t,x)) \phi_x(t,x,\xi) dt dx + O(\Delta x).$$

– Τέταρτη παρατήρηση.
Εφαρμόζουμε τις ίδιες τεχνικές και στον όρο

$$\sum_{j} \sum_{n} m_j^{n+1}(\xi) \frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi}.$$

Από τον ορισμό του $m_{\Delta x}$ έχουμε ότι:

$$\sum_{j} \sum_{n} m_j^{n+1}(\xi) \frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi} = \sum_{j} \sum_{n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t, x_j, \xi) dt \frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \sum_{j} \sum_{n} \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi) dt dx \frac{\partial \phi_j^n(\xi)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \sum_{j} \sum_{n} \int_{C_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi) \Big(\phi_\xi(t,x,\xi) + \phi_\xi(t^n,x,\xi)$$

$$-\phi_\xi(t,x,\xi) + \phi_\xi(t^n, x_j, \xi) - \phi_\xi(t^n,x,\xi) \Big)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\sum_j\sum_n\int_{C_j}\int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi)$$

$$+\frac{1}{\Delta x}\sum_j\sum_n\int_{C_j}\int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\Big(\phi_\xi(t^n,x,\xi)-\phi_\xi(t,x,\xi)\Big)$$

$$+\frac{1}{\Delta x}\sum_j\sum_n\int_{C_j}\int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\Big(\phi_\xi(t^n,x_j,\xi)-\phi_\xi(t^n,x,\xi)\Big)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $|\phi_\xi(t^n,x,\xi)-\phi_\xi(t,x,\xi)| = O(\Delta t)$ έχουμε ότι:

$$|\frac{1}{\Delta x}\sum_j\sum_n\int_{C_j}\int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\Big(\phi_\xi(t^n,x,\xi)-\phi_\xi(t,x,\xi)\Big)|$$

$$\leq O(\Delta t)\frac{1}{\Delta x}\int_x\int_t |m_{\Delta x}(t,x,\xi)|dtdx.$$

Ομοίως ο άλλος όρος φράσσεται:

$$|\frac{1}{\Delta x}\sum_j\sum_n\int_{C_j}\int_{t^n}^{t^{n+1}} m_{\Delta x}(t,x,\xi)\Big(\phi_\xi(t^n,x_j,\xi)-\phi_\xi(t^n,x,\xi)\Big)|$$

$$\leq O(\Delta x)\frac{1}{\Delta x}\int_x\int_t |m_{\Delta x}(t,x,\xi)|dtdx.$$

Και έτσι τελείωσε και η Τέταρτη παρατήρηση.

Με τις παρατηρήσεις αυτές η (2.18) γίνεται:

$$-\frac{1}{\Delta x}\int_\Omega X(\xi;u_{\Delta x}(t,x))\phi_t(t,x,\xi)dtdxd\xi$$

$$-\frac{1}{\Delta x}\int_{x,\xi} X(\xi;u_{\Delta x}(0,x))\phi(0,x,\xi)dxd\xi$$

$$-\frac{1}{\Delta x}\int_\Omega a(\xi)X(\xi;u_{\Delta x})\phi_x dtdxd\xi$$

$$= -\frac{1}{\Delta x}\int_\Omega m_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi_\xi(t,x,\xi)dtdxd\xi$$

$$+\frac{1}{\Delta x}\int_\Omega \Psi_{\Delta x}(t,x,\xi)\phi(t,x,\xi)dtdxd\xi,$$

όπου στην $\Psi_{\Delta x}(t,x,\xi)$ έχουμε απορροφήσει όλους τους παράγοντες που εμφανίζονται στα $O(\Delta x)$ στις προηγούμενες παρατηρήσεις.
Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω με Δx έχουμε την ζητούμενη σχέση (2.7) με την έννοια των κατανομών.

- Απόδειξη της (2.9)

  – Το πρόσημο του $m_{\Delta x}$.
  Έστω $(t,x,\xi)\in\Omega$ τότε υπάρχουν j,n έτσι ώστε $x\in C_j$, $t\in(t^n,t^{n+1}]$ και $m_{\Delta x}(t,x,\xi)=\frac{1}{\Delta t}m_j^{n+1}(\xi)\geq 0$, από τον ορισμό του m_j^{n+1}.

  – Το M^1 φράγμα του $m_{\Delta x}$.
  Έχουμε την (2.2):

$$f_j^{n+1}(\xi)=X_j^n(\xi)-\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)-\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_j^n(\xi)+$$

$$+\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_j^n(\xi)+\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)$$

  Πολλαπλασιάζουμε με ξ και μετά ολοκληρώνουμε ως προς ξ,

$$\int_{\mathbb{R}}f_j^{n+1}(\xi)\xi d\xi=\int_0^{u_{j+1}^n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)\xi d\xi+\int_0^{u_j^n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)\xi d\xi$$

$$+\int_0^{u_j^n}\xi d\xi+\int_0^{u_j^n}\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)\xi d\xi+\int_0^{u_{j-1}^n}\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)\xi d\xi.$$

  Αθροίζουμε την προηγούμενη ως προς j, κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και παίρνουμε:

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}}f_j^{n+1}(\xi)\xi d\xi=\sum_j\int_0^{u_j^n}\xi d\xi,$$

  δηλαδή,

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}}f_j^{n+1}(\xi)\xi d\xi=\sum_j\frac{1}{2}(u_j^n)^2.$$

  Αφαιρούμε και από τα 2 μέλη το $\sum_j\frac{1}{2}(u_j^{n+1})^2$, αφού πρώτα, παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{2}(u_j^{n+1})^2=\int_{\mathbb{R}}X_j^{n+1}(\xi)\xi d\xi$,

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}}(f_j^{n+1}(\xi)-X_j^{n+1}(\xi))\xi d\xi=\frac{1}{2}\sum_j\Big((u_j^n)^2-(u_j^{n+1})^2\Big).$$

Πολλαπλασιάζουμε με Δx και αθροίζουμε ως προς n ,

$$\sum_{j,n} \Delta x \int_{\mathbb{R}} (f_j^{n+1}(\xi) - X_j^{n+1}(\xi))\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,n} \Delta x \Big((u_j^n)^2 - (u_j^{n+1})^2 \Big).$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την (2.6):

$$X_j^{n+1}(\xi) - f_j^{n+1}(\xi) = \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi},$$

και την σχέση:

$$\frac{1}{2} \sum_{j,n} \Delta x \Big((u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2 \Big) = \frac{1}{2} \sum_{j} \Delta x \Big((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2 \Big),$$

όπου N είναι ο μέγιστος φυσικός τέτοιος ώστε $N\Delta t \leq T$ και έχουμε:

$$\sum_{j,n} \Delta x \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} \xi d\xi = \frac{1}{2} \sum_{j} \Delta x \Big((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2 \Big)$$

ή

$$-\sum_{j,n} \Delta x \int_{\mathbb{R}} m_j^{n+1}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{j} \Delta x \Big((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2 \Big)$$

ή

$$-\int_{\xi} \sum_{j,n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_j} m_{\Delta x}(t, x, \xi) dx dt d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j} \Delta x \Big((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2 \Big)$$

ή

$$-\int_{\xi} \int_0^T \int_x m_{\Delta x}(t, x, \xi) dx dt d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j} \Delta x \Big((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2 \Big).$$

Παίρνουμε απόλυτα και επειδή $m_{\Delta x} \geq 0$ έπεται:

$$\int_\xi \int_0^T \int_x |m_{\Delta x}(t,x,\xi)| dx dt d\xi$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_j \Delta x |u_j^{N+1} - u_j^0||u_j^{N+1} + u_j^0|$$

ή

$$\|m_{\Delta x}\|_M \leq \frac{1}{2} \sum_j \Delta x |u_j^{N+1} - u_j^0||u_j^{N+1} + u_j^0|$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty} \sum_j \Delta x \Big(|u_j^{N+1}| + |u_j^0| \Big).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\text{για κάθε } n \neq 0, \quad \sum_j \Delta x |u_j^n| = \sum_j \int_{C_j} |u_j^n| dx$$

$$= \sum_j \int_{C_j} |u_{\Delta x}(t^n, x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |u_{\Delta x}(t^n, x)| dx = \|u_{\Delta x}(t^n, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

καθώς επίσης:

$$\sum_j \Delta x |u_j^0| = \sum_j \Delta x | \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u_0(x) dx|$$

$$\leq \sum_j \int_{C_j} |u_0(x)| dx = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

οπότε:

$$\|m_{\Delta x}\|_M \leq \|u_0\|_{L^\infty} \Big(\|u_{\Delta x}(t^{N+1}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \Big)$$

$$\overset{(2.10)}{\leq} 2 \|u_0\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^1}.$$

Η απόδειξη της (2.9) τελειώνει παρατηρώντας ότι δεν υπάρχει σύγκρουση με την απόδειξη της (2.10), που μόλις χρησιμοποιήσαμε, όπως αμέσως θα φανεί.

- Απόδειξη της (2.10)

– Το L^1 φράγμα.
Έχουμε πάλι την (2.2) :

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_j^n(\xi)$$

$$+\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_j^n(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi).$$

Την πολλαπλασιάζουμε με $sgn(\xi)$ και ολοκληρώνουμε ως προς ξ.

$$\int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)sgn(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} X_j^n(\xi)sgn(\xi)d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_j^n(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_j^n(\xi)sgn(\xi)d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi)sgn(\xi)d\xi.$$

Το αριστερό μέλος πρώτα,

$$\int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)sgn(\xi)d\xi \overset{(2.5)}{=} \int_{\mathbb{R}} |f_j^{n+1}(\xi)|d\xi \geq |\int_{\mathbb{R}} f_j^{n+1}(\xi)d\xi|$$

$$= |u_j^{n+1}|$$

Το δεξί μέλος τώρα,

$$|u_j^n| + \int_0^{u_j^n} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^n} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)sgn(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^{u_{j+1}^n} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j-1}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)sgn(\xi)d\xi.$$

Δηλαδή, μέχρι τώρα, έχουμε δείξει ότι:

$$|u_j^{n+1}| \leq |u_j^n|$$

$$+\int_0^{u_j^n} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^n} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)sgn(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^{u_{j+1}^n} -\frac{\Delta t}{\Delta x}a_-(\xi)sgn(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j-1}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x}a_+(\xi)sgn(\xi)d\xi.$$

Αθροίζουμε ως προς j και τα δύο μέλη και κάνουμε αναγωγή των ομοίων ολοκληρωμάτων οπότε,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |u_j^n|$$

Επαγωγικά λοιπόν,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |u_j^n| \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |u_j^0|$$

Περνάμε στις $L^1(\mathbb{R})$ νόρμες τώρα και για κάθε $t \in [0,T)$ έχουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $t \in [t^n, t^{n+1})$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\|u_{\Delta x}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u_{\Delta x}(t,x)|dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{C_j} |u_{\Delta x}(t,x)|dxdt = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x |u_j^n| \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x |u_j^0| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\int_{C_j} u_0(x)dx| \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{C_j} |u_0(x)|dx = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

– Το L^∞ φράγμα.
  Έχει ήδη αποδειχθεί στην Αρχή Μεγίστου (Λήμμα 2.2.1) αφού παρατηρήσουμε ότι $u_{\Delta x}(t,x) = u_j^n$ όταν $t \in [t^n, t^{n+1})$ και $x \in C_j$.

• Απόδειξη των (2.11),(2.13i)
  Έχουμε πάλι την (2.2)

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(- a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi) - a_-(\xi)X_j^n(\xi) \\ + a_+(\xi)X_j^n(\xi) + a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)\Big).$$

Θεωρούμε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$ και S κυρτή στον $\mathbb{R}$ συνάρτηση, ορίζουμε $\phi_j = \phi(x_j)$ για $j \in \mathbb{Z}$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.2) με $\phi_j S'(\xi)$ και ολοκληρώνουμε ως προς ξ.

$$\int_\xi f_j^{n+1}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \int_\xi X_j^n(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big\{$$

$$\int_0^{u_{j-1}^n} -a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^n} -a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^n} a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$
$$+\int_0^{u_{j+1}^n} a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi\Big\}.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6)

$$X_j^{n+1}(\xi) - f_j^{n+1}(\xi) = \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial\xi},$$

παίρνουμε:

$$\int_\xi X_j^{n+1}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \int_\xi X_j^{n}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big\{\int_0^{u_{j-1}^n} -a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^n} -a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$
$$+\int_0^{u_j^n} a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^n} a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi\Big\}$$
$$+\int_\xi \frac{\partial m_j^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\phi_j S'(\xi)d\xi.$$

Αναδρομικά λοιπόν έχουμε:

$$\int_\xi X_j^{n+1}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \int_\xi X_j^{0}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n}\Big\{\int_0^{u_{j-1}^k} -a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^k} -a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$
$$+\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^k} a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi\Big\}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\int_\xi \frac{\partial m_j^{k+1}(\xi)}{\partial\xi}\phi_j S'(\xi)d\xi.$$

Αθροίζουμε τώρα ως προς j και παίρνουμε:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{n+1}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{0}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big\{\int_0^{u_{j-1}^k} -a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_j^k} -a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^k} a_-(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi\Big\}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi \frac{\partial m_j^{k+1}(\xi)}{\partial \xi}\phi_j S'(\xi)d\xi.$$

Κάνουμε τώρα αναγωγές μέσα στα άγκιστρα και:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{n+1}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{0}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big\{\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)S'(\xi)(\phi_j-\phi_{j+1})d\xi$$

$$+\int_0^{u_j^k} a_-(\xi)S'(\xi)(\phi_{j-1}-\phi_j)\xi\Big\}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi \frac{\partial m_j^{k+1}(\xi)}{\partial \xi}\phi_j S'(\xi)d\xi.$$

Έστω τώρα $t\in[0,T)$ τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t\in[t^n,t^{n+1})$ και η προηγούμενη σχέση μας δίνει:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{n}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi X_j^{0}(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big\{\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)S'(\xi)(\phi_j-\phi_{j+1})d\xi$$

$$+\int_0^{u_j^k} a_-(\xi)S'(\xi)(\phi_{j-1}-\phi_j)\xi\Big\}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi \frac{\partial m_j^{k+1}(\xi)}{\partial \xi}\phi_j S'(\xi)d\xi.$$

Παρατηρούμε τώρα :

– Για το πρώτο άθροισμα.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_\xi X_j^n(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t^n, x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi$$

$$-\frac{1}{\Delta x}\sum_j \int_\xi S'(\xi)X_j^n(\xi)\int_{C_j}(x-x_j)\phi'(x_{j_0})dxd\xi,$$

για κάποια x_{j_0} ανάμεσα στα x, x_j. Εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία -με δείκτη Δx- συναρτήσεων ως προς $t(t^n)$:

$$\sum_j \int_\xi S'(\xi)X_j^n(\xi)\int_{C_j}(x-x_j)\phi'(x_{j_0})dxd\xi,$$

είναι στον $L^\infty([0,T))$, είναι ομοιόμορφα φραγμένη και συγκλίνει, καθώς $\Delta x \to 0$, στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ στην μηδενική συνάρτηση.

– Για το δεύτερο άθροισμα.

$$\sum_j \int_\xi X_j^0(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi = \sum_j \int_\xi X(\xi; u_j^0)(\xi)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$= \sum_j \int_\xi X(\xi; \frac{1}{\Delta x}\int_{C_j} u_0(x)dx)\phi_j S'(\xi)d\xi$$

$$= \sum_j \phi_j\Big(S(\frac{1}{\Delta x}\int_{C_j} u_0(x)dx) - S(0)\Big)$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \sum_j \phi_j \frac{1}{\Delta x}\int_{C_j} S(u_0(x))dx - \sum_j \phi_j S(0)$$

$$= \sum_j \phi_j \frac{1}{\Delta x}\int_{C_j}\int_\xi X(\xi; u_0(x))S'(\xi)d\xi dx - \sum_j \phi_j S(0)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\sum_j \int_\xi \int_{C_j} X(\xi; u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx$$

$$+\frac{1}{\Delta x}O(\Delta x) - \sum_j \phi_j S(0)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x,\xi} X(\xi;u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx + \frac{1}{\Delta x}O(\Delta x) - \sum_j \phi_j S(0).$$

Ο όρος $O(\Delta x)$ που εμφανίζεται παραπάνω είναι ανεξάρτητος του $t(t^n)$ και κατά συνέπεια συγκλίνει στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ στη μηδενική συνάρτηση.

– Για το τρίτο άθροισμα.
Γνωρίζουμε ότι $\phi_j - \phi_{j+1} = -\Delta x\phi'(x_j) - O(\Delta x^2)$. Οπότε:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)S'(\xi)(\phi_j - \phi_{j+1})d\xi$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_+(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)\phi'(x_j)dxd\xi$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_+(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^k,x))\phi'(x)S'(\xi)a_+(\xi)dxd\xi$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_+(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi$$

– Για το τέταρτο άθροισμα.
Γνωρίζουμε ότι $\phi_{j-1} - \phi_j = -\Delta x\phi'(x_j) - O(\Delta x^2)$. Οπότε, όπως και στο τρίτο άθροισμα έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{u_j^k} a_-(\xi)S'(\xi)(\phi_{j-1} - \phi_j)d\xi$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^k,x))\phi'(x)S'(\xi)a_-(\xi)dxd\xi$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_-(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi.$$

– Για το πέμπτο άθροισμα.
  Το άθροισμα:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi \frac{\partial m_j^{k+1}(\xi)}{\partial \xi}\phi_j S'(\xi)d\xi$$

  είναι αρνητικό διότι $m_j^{n+1} \geq 0$, $\phi_j \geq 0$ και η S είναι κυρτή.

Έτσι λοιπόν, μαζεύοντας τις προηγούμενες παρατηρήσεις, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x}\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^n,x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi \\
&-\frac{1}{\Delta x}\sum_j\int_\xi S'(\xi)X_j^n(\xi)\int_{C_j}(x-x_j)\phi'(x_{j_0})dxd\xi \\
\leq\ &\frac{1}{\Delta x}\int_{x,\xi} X(\xi;u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx+\frac{1}{\Delta x}O(\Delta x)-\sum_j\phi_j S(0) \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^k,x))\phi'(x)S'(\xi)a_+(\xi)dxd\xi \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_+(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^k,x))\phi'(x)S'(\xi)a_-(\xi)dxd\xi \\
&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_\xi\int_{C_j} a_-(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας, τώρα, με Δx και επειδή $a_-(\xi)+a_+(\xi)=a(\xi)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_\xi\int_x X(\xi;u_{\Delta x}(t^n,x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi \\
&-\sum_j\int_\xi S'(\xi)X_j^n(\xi)\int_{C_j}(x-x_j)\phi'(x_{j_0})dxd\xi \\
\leq\ &\int_{x,\xi} X(\xi;u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx+O(\Delta x)-\Delta x\sum_j\phi_j S(0)
\end{aligned}$$

$$+\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t^k, x))\phi'(x)S'(\xi)a(\xi)dxd\xi$$

$$+\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_\xi \int_{C_j} a(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi$$

Περνώντας το Δt στον προτελευταίο όρο μέσα στο ολοκλήρωμα και μετατρέποντας τον σε $\Delta t = \int_{t^k}^{t^{k+1}} 1dt$ και αναδιατάσσοντας τους παραπάνω όρους παίρνουμε:

$$\int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t^n, x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi$$

$$\leq \int_{x,\xi} X(\xi; u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t, x))\phi'(x)S'(\xi)a(\xi)dxd\xi dt$$

$$-\sum_j \int_\xi S'(\xi)X_j^n(\xi) \int_{C_j} (x - x_j)\phi'(x_{j_0})dxd\xi$$

$$+O(\Delta x) - \Delta x \sum_j \phi_j S(0)$$

$$+\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_\xi \int_{C_j} a(\xi)X_j^k(\xi)S'(\xi)O(\Delta x^2)dxd\xi,$$

ή τέλος μαζεύοντας τους τρεις τελευταίους όρους στην συνάρτηση $\Psi_{0,\Delta x}$ έχουμε:

$$\int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t^n, x))\phi(x)S'(\xi)dxd\xi$$

$$\leq \int_{x,\xi} X(\xi; u_0(x))S'(\xi)\phi(x)d\xi dx$$

$$+\int_0^{t^n} \int_\xi \int_x X(\xi; u_{\Delta x}(t, x))\phi'(x)S'(\xi)a(\xi)dxd\xi dt + \Psi_{0,\Delta x}(t).$$

- Απόδειξη των (2.12),(2.13ii)
  Θεωρούμε την (2.2):

$$f_j^{n+1}(\xi) = X_j^n(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(- a_+(\xi)X_{j-1}^n(\xi) - a_-(\xi)X_j^n(\xi) \\ + a_+(\xi)X_j^n(\xi) + a_-(\xi)X_{j+1}^n(\xi)\Big).$$

  Ολοκληρώνουμε ως προς ξ χρησιμοποιώντας ότι $\int_\xi f_j^{n+1}(\xi)d\xi = u_j^{n+1}$ και παίρνουμε:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\int_0^{u_j^n} a_+(\xi)d\xi - \int_0^{u_j^n} a_-(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^n} a_-(\xi)d\xi \\ - \int_0^{u_{j-1}^n} a_+(\xi)d\xi\Big).$$

  Αναδρομικά :

$$u_j^n = u_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^{u_j^k} a_+(\xi)d\xi - \int_0^{u_j^k} a_-(\xi)d\xi \\ + \int_0^{u_{j+1}^k} a_-(\xi)d\xi - \int_0^{u_{j-1}^k} a_+(\xi)d\xi\Big).$$

  Θεωρούμε συνάρτηση ελέγχου $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ορίζουμε $\phi_j = \phi(x_j)$. Πολλαπλασιάζουμε με ϕ_j την παραπάνω σχέση, αθροίζουμε ως προς j και πολλαπλασιάζουμε με Δx. Παίρνουμε:

$$\Delta x\sum_j u_j^n\phi_j = \Delta x\sum_j u_j^0\phi_j - \Delta t\sum_j \phi_j\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{ \int_0^{u_j^k} a_+(\xi)d\xi \\ - \int_0^{u_j^k} a_-(\xi)d\xi + \int_0^{u_{j+1}^k} a_-(\xi)d\xi - \int_0^{u_{j-1}^k} a_+(\xi)d\xi\Big\}. \quad (2.19)$$

  Παρατηρούμε τώρα για την (2.19),

  – Το πρώτο άθροισμα της (2.19) γίνεται:

$$\Delta x\sum_j u_j^n\phi_j = \sum_j u_j^n\int_{C_j}\phi(x_j)dx$$

$$= \sum_j u_j^n\int_{C_j}\phi(x)dx + \sum_j u_j^n\int_{C_j}\phi(x_j) - \phi(x)dx$$

$$= \sum_j \int_{C_j} u_{\Delta x}(t^n, x)\phi(x)dx + \sum_j u_j^n \int_{C_j} \phi(x_j) - \phi(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u_{\Delta x}(t^n, x)\phi(x)dx + \sum_j u_j^n \int_{C_j} \phi(x_j) - \phi(x)dx$$

Ο δεύτερος όρος στην προηγούμενη σχέση ως συνάρτηση του t (t^n) φράσσεται για κάποια y_{x,x_j} ανάμεσα στα x, x_j :

$$\sum_j |u_j^n| \int_{C_j} |\phi(x_j) - \phi(x)|dx \leq \sum_j |u_j^n| \int_{C_j} \Delta x |\phi'(y_{x,x_j})|dx$$

$$\leq \sum_j |u_j^n| \int_{C_j} \Delta x \|\phi'\|_\infty dx \leq \Delta x^2 \|\phi'\|_\infty \|u_{\Delta x}(t^n, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\overset{(2.10)}{\leq} \Delta x^2 \|\phi'\|_\infty \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Τρία συμπεράσματα προκύπτουν για το $\sum_j u_j^n \int_{C_j} \phi(x_j) - \phi(x)dx$:

1. Είναι φραγμένο ως συνάρτηση του t.
2. Συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση, καθώς $\Delta x \to 0$.
3. Συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση στον $L^\infty(\mathbb{R}) - w^\star$, καθώς $\Delta x \to 0$.

– Όπως πριν, γράφουμε τον όρο $\Delta x \sum_j u_j^0 \phi_j$ της (2.19) ώς εξής:

$$\Delta x \sum_j u_j^0 \phi_j = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx + \sum_j \int_{C_j} u_0(x)(\phi(x_j) - \phi(x))dx.$$

Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος αυτού είναι ανεξάρτητος του t (t^n) και φράσσεται:

$$\sum_j \int_{C_j} |u_0(x)||\phi(x_j) - \phi(x)|dx \leq \sum_j \int_{C_j} |u_0(x)|\Delta x|\phi'(y_{x_j,x})dx$$

$$\leq \Delta x \sum_j \int_{C_j} |u_0(x)dx\|\phi'\|_\infty \leq \Delta x \|u_0\|_{L^\infty} \|\phi'\|_\infty.$$

Άρα συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση στον $L^\infty(\mathbb{R}) - w^\star$.

– Ο τρίτος όρος της (2.19) γράφεται ως εξής:

$$\Delta t \sum_j \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \phi_j \Big(a_+(\xi) X_j^k(\xi) - a_-(\xi) X_j^k(\xi)$$

$$+ a_-(\xi) X_{j+1}^k(\xi) - a_+(\xi) X_{j-1}^k(\xi) \Big) d\xi$$

$$= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} a_+(\xi) \sum_j \Big(X_j^k(\xi)\phi_j - X_{j-1}^k \phi_j \Big)$$

$$+ a_-(\xi) \sum_j \Big(X_{j+1}^k(\xi)\phi_j - X_j^k \phi_j \Big) d\xi$$

$$= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} a_+(\xi) \sum_j X_j^k(\xi)(\phi_j - \phi_{j+1})$$

$$+ a_-(\xi) \sum_j X_j^k(\xi)(\phi_{j-1} - \phi_j) =$$

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_j \int_{\mathbb{R}} a_+(\xi)(\phi_j - \phi_{j+1}) X_j^k(\xi) + a_-(\xi)(\phi_{j-1} - \phi_j) X_j^k(\xi) d\xi.$$

Και φράσσεται από:

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_j \int_{\mathbb{R}} \|a\|_\infty |u_j^k| \Big(|\phi_j - \phi_{j+1}| + |\phi_{j-1} - \phi_j| \Big)$$

$$\leq 2\|a\|_\infty \|u_0\|_{L^\infty} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_j |\phi_j - \phi_{j+1}|$$

$$\leq 2\|a\|_\infty \|u_0\|_{L^\infty} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \sum_j \Big| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi'(x) dx \Big|$$

$$\leq 2\|a\|_\infty \|u_0\|_{L^\infty} \|\phi'\|_{L^1} n\Delta t = 2t^n \|a\|_\infty \|u_0\|_\infty \|\phi'\|_{L^1}.$$

Όπου παρατηρούμε ότι ο όρος στον οποίο καταλήξαμε είναι ανεξάρτητος του Δx και είναι συνεχής στο $t = 0$.

Κατά συνέπεια η (2.19) γίνεται :

$$\int_{\mathbb{R}} u_{\Delta x}(t^n, x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x)dx + \Psi_{1,\Delta x}(t),$$

όπου,

$$\Psi_{1,\Delta x}(t) = \sum_j u_j^n \int_{C_j} \phi(x_j) - \phi(x)dx + \sum_j \int_{C_j} u_0(x)(\phi(x_j) - \phi(x))dx$$

$$-\Delta t \sum_j \phi_j \sum_{k=0}^{n-1} \Big\{ \int_0^{u_j^k} a_+(\xi)d\xi - \int_0^{u_j^k} a_-(\xi)d\xi$$

$$+ \int_0^{u_{j+1}^k} a_-(\xi)d\xi - \int_0^{u_{j-1}^k} a_+(\xi)d\xi \Big\},$$

με $\Psi_{1,\Delta x}$ να συγκλίνει στον $L^\infty(\mathbb{R}) - w^\star$ όπως στην εκφώνηση.
Και έτσι αποδείξαμε τις (2.12), (2.13 ii).

Δείξαμε λοιπόν ότι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1, έτσι έχουμε την ζητούμενη σύγκλιση του σχήματος μας. □

Κεφάλαιο 3

Σχήμα Engquist-Oscher Πεπερασμένου Όγκου

3.1 Η Κινητική μορφή της Διαφορικής Εξίσωσης

Ας θεωρήσουμε ένα Νόμο Διατήρησης σε δύο χωρικές διαστάσεις.

$$u_t(t,x,y) + f_1(u(t,x,y))_x + f_2(u(t,x,y))_y = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

με f_1, f_2 ομαλές συναρτήσεις ροής και $u(\cdot,\cdot,\cdot)$ η άγνωστη πραγματική συνάρτηση. Θεωρούμε επίσης τις αρχικές συνθήκες :

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

Όπως στην περίπτωση της μίας διάστασης η ασθενής λύση δεν είναι μοναδικά ορισμένη. Για να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα της ασθενούς λύσης, εφοδιάζουμε την Διαφορική Εξίσωση με την πλήρη οικογένεια των ανισοτήτων εντροπίας. Ζητάμε, λοιπόν, από τις ασθενείς λύσεις του προβλήματος (3.1),(3.2) να ικανοποιούν, με την έννοια των κατανομών, την πλήρη οικογένεια ανισοτήτων εντροπίας:

$$\frac{\partial S(u(t,x,y))}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1(u(t,x,y))}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2(u(t,x,y))}{\partial y} \le 0,$$

όπου $S \in C^2(\mathbb{R})$ κυρτή συνάρτηση εντροπίας και $\eta_1, \eta_2 \in C^1(\mathbb{R})$ οι αντίστοιχες ροές εντροπίας που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\eta_1'(\xi) = S'(\xi) f_1'(\xi), \quad \eta_2'(\xi) = S'(\xi) f_2'(\xi).$$

Ανάλογα με την περίπτωση της μίας διάστασης έτσι και εδώ η Κινητική μορφή της Διαφορικής Εξίσωσης θα είναι:

$$\frac{\partial X(\xi;u(t,x,y))}{\partial t}+f_1'(\xi)\frac{\partial X(\xi;u(t,x,y))}{\partial x}+f_2'(\xi)\frac{\partial X(\xi;u(t,x,y))}{\partial y}= \\ =\frac{\partial m(t,x,y,\xi)}{\partial \xi}, \quad (3.3)$$

που ισχύει με την έννοια των κατανομών στον $\mathbb{R}^2_{x,y}\times[0,T)\times\mathbb{R}_\xi$, όπου m είναι μη-αρνητικό φραγμένο μέτρο, $X(\xi,u)$ η συνάρτηση πυκνότητας ορισμένη όπως και στο Κεφάλαιο 1.
Όπως στο Κεφάλαιο 1, έτσι και εδώ ορίζουμε την Κινητική λύση της Διαφορικής Εξίσωσης :

Ορισμός 3.1.1 *Η συνάρτηση*

$$f(t,x,y,\xi)\in L^\infty\Big([0,T)\times L^\infty(\mathbb{R}^3_{x,y,\xi})\cap L^1(\mathbb{R}^3_{x,y,\xi})\Big),$$

λέγεται κινητική λύση του προβλήματος (3.1),(3.2) όταν είναι λύση με την έννοια των κατανομών του προβλήματος

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y,\xi)+f_1'(\xi)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y,\xi)+f_2'(\xi)\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y,\xi)=\frac{\partial m}{\partial \xi}(t,x,y,\xi), \quad (3.4)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$f(0,x,y,\xi)=X(\xi;u_0(x,y)),\quad u_0(x,y)\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

δηλαδή όταν ικανοποιεί την σχέση:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,y,\xi)\Big[\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x,y,\xi)+f_1'(\xi)\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x,y,\xi)\\ +f_2'(\xi)\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,x,y,\xi)\Big]dxdyd\xi dt\\ =\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} m(t,x,y,\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(t,x,y,\xi)dxdyd\xi dt\\ -\int_{\mathbb{R}^3}X(\xi;u_0(x,y))\phi(0,x,y,\xi)dxdyd\xi,\end{aligned} \quad (3.5)$$

για όλες τις συναρτήσεις ελέγχου $\phi(t,x,y,\xi)\in C_c^\infty\Big([0,T)\times\mathbb{R}^3_{x,y,\xi}\Big)$, και όταν επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$|f(t,x,y,\xi)|=sgn(\xi)f(t,x,y,\xi)\le 1, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}(t,x,y,\xi)=\delta(\xi)-\nu(t,x,y,\xi), \quad (3.7)$$

με $\nu(t,x,y,\xi)$ *μη-αρνητικό μέτρο τέτοιο ώστε* $\int_{\mathbb{R}} \nu(t,x,y,\xi)d\xi = 1$ *για όλα τα* t,x,y.

Όπως ήδη έχουμε θίξει, το Θεώρημα Μοναδικότητας (Θεώρ.1.2.1), ισχύει και σε περισσότερες από μία χωρικές διαστάσεις. Το επαναλαμβάνουμε λοιπόν χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.1.1 *(Μοναδικότητα των κινητικών λύσεων)*
Έστω $f(t,x,y,\xi) \in L^\infty\Big([0,T); L^\infty(\mathbb{R}^3_{x,y,\xi}) \cap L^1(\mathbb{R}^3_{x,y,\xi}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2_{x,y}; L^1(\mathbb{R}_\xi))\Big)$ *κινητική λύση του προβλήματος (3.1),(3.2) τέτοια ώστε, για σχεδόν κάθε* $t > 0$, *για κάθε κυρτή συνάρτηση εντροπίας* $S(\xi)$ *και για όλες τις μη-αρνητικές συναρτήσεις ελέγχου* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ *να ικανοποιεί:*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,y,\xi)\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_1'(\xi)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}S'(\xi)f(\tau,x,y,\xi)d\tau d\xi dxdy \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_2'(\xi)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}S'(\xi)f(\tau,x,y,\xi)d\tau d\xi dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_0(x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x,y)\phi(x,y)dxdy \xrightarrow{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy. \qquad (3.9)$$

Τότε $f(t,x,y,\xi) = X(\xi;u(t,x,y))$, *όπου* $u(t,x,y)$ *είναι η λύση εντροπίας του προβλήματος (3.1),(3.2) και* $u(t,x,y) \xrightarrow{t\to 0} u_0(x,y)$ *στον* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ *και ειδικότερα* $f(t,x,y,\xi) \xrightarrow{t\to 0} X(\xi;u_0(x,y))$ *στον* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Προχωράμε τώρα στο σχήμα μας, αφού πρώτα δώσουμε μερικούς απαραίτητους συμβολισμούς-ορισμούς που αφορούν στη Θεωρία Σχημάτων Πεπερασμένου Όγκου.

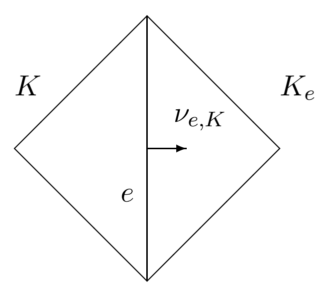
3.2 Συμβολισμοί

- Με T_h θα συμβολίζουμε την οικογένεια των μη-κενών, ανοικτών, μη-επικαλυπτόμενων, τριγώνων του $\mathbb{R}^2$ τέτοιων ώστε:

  $$\cup_{K\in T_h}\bar{K} = \mathbb{R}^2,$$

  και τέτοιων ώστε καμία κορυφή ενός να τέμνει εσωτερικά πλευρά ενός άλλου.

- Αν $K \in T_h$, τότε με ∂K θα συμβολίζουμε το σύνολο των πλευρών του K.
- Για κάθε πλευρά e τριγώνου K, συμβολίζουμε με $\nu_{e,K}$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο του τριγώνου στην πλευρά αυτήν.
- Με Γ_h συμβολίζουμε το σύνολο των πλευρών όλων των τριγώνων της οικογένειας T_h.
- Δοσμένης πλευράς e ενός τριγώνου K, συμβολίζουμε με K_e το μοναδικό τρίγωνο της οικογένειας T_h που συνορεύει με το τρίγωνο K στην πλευρά e.
- Συμβολίζουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου K με $|K|$ και το μήκος της πλευράς e αυτού με $|e|$.
- Συμβολίζουμε με h_K την "διάμετρο" του τριγώνου K. Ορίζουμε $h = \sup_{K \in T_h} h_K$ (ανεξάρτητη από την παράμετρο διακριτοποίησης h) και υποθέτουμε ότι $h < 1$.
- Κανονική ονομάζεται μία οικογένεια T_h όταν υπάρχει σταθερά γ έτσι ώστε :
$$h_K \leq \gamma p_K, \quad \forall K \in T_h,$$
όπου p_K είναι η διάμετρος της μέγιστης μπάλλας B που περιέχεται στο τρίγωνο K.



3.3 Το σχήμα Engquist-Oscher.

Ορίζουμε δ να είναι το βήμα στο χρόνο και $t^n = n\delta$.
Ορίζουμε, επίσης, $a(\cdot) = \begin{pmatrix} f_1'(\cdot) \\ f_2'(\cdot) \end{pmatrix}$.

Η πράξη $\cdot$ που εφεξής θα εμφανίζεται θα εκφράζει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^2$.
Το σχήμα που θα δουλέψουμε θα είναι το Engquist-Oscher σχήμα Πεπερασμένου Όγκου, δηλαδή θα αναζητήσουμε μία κατά-τμήματα σταθερή συνάρτηση u_h με

$$u_h(t,x,y) = u_K^n, \text{ στο } K \times [t^n, t^{n+1})$$

και u_K^n ορισμένο αναδρομικά από την:

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| g^K(u_K^n, u_{K_e}^n), \text{ για } n > 0, \tag{3.10}$$

με αρχικές προσεγγίσεις ορισμένες ως:

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x,y) dxdy, \tag{3.11}$$

και $g^K(\cdot,\cdot)$ να είναι η Engquist-Oscher αριθμητική ροή ορισμένη ως εξής:

$$g^K(u,v) = \int_0^u (\nu_{e,K} \cdot a(s))_+ ds + \int_0^v (\nu_{e,K} \cdot a(s))_- ds. \tag{3.12}$$

Συνεπώς το Engquist-Oscher σχήμα που θα δουλέψουμε είναι:

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ \int_0^{u_K^n} (\nu_{e,K} \cdot a(s))_+ ds + \int_0^{u_{K_e}^n} (\nu_{e,K} \cdot a(s))_- ds \Big\}. \tag{3.13}$$

Μπορούμε τώρα, ακολουθώντας το Θεώρημα 2.1.1 να εισάγουμε την Κινητική Μορφή του σχήματος μας. Έχουμε λοιπόν :

Θεώρημα 3.3.1 *(Σχήμα Κινητικής Μορφής)*
Θέτοντας:

- $u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x,y) dxdy$ *και*
- $u_K^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_K^{n+1}(\xi) d\xi$ *με* $f_K^{n+1}(\xi)$ *να ορίζεται αναδρομικά από την:*

$$f_K^{n+1}(\xi) = X_K^n(\xi) - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) + (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) \Big\}, \tag{3.14}$$

όπου $X_K^n(\xi) = X(\xi, u_K^n)$.

Τότε η u_K^n ικανοποιεί το Engquist-Oscher σχήμα:

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| g^K(u_K^n, u_{K_e}^n), \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Μάλιστα η σχέση (3.14) θα ονομάζεται στο εξής κινητική μορφή του σχήματος μας.

Απόδειξη
Ολοκληρώνουμε την (3.14) ως προς ξ,

$$\int_{\mathbb{R}} f_K^{n+1}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} X_K^n(\xi) d\xi - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ \int_{\mathbb{R}} (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) d\xi$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) d\xi \Big\},$$

ισοδύναμα,

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ \int_0^{u_K^n} (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ d\xi$$

$$+ \int_0^{u_{K_e}^n} (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- d\xi \Big\},$$

που γίνεται τέλος, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $g^K(\cdot,\cdot)$,

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| g^K(u_K^n, u_{K_e}^n).$$

Δείξαμε λοιπόν ποιά θα είναι η μορφή του Κινητικού Σχήματος μας. □

Κάποιες παρατηρήσεις χρήσιμες για την συνέχεια είναι οι εξής:

- Έχουμε ότι:

$$\sum_{e \in \partial K} |e| g^K(u_K^n, u_K^n) = 0. \tag{3.15}$$

Απόδειξη
Για $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = (a, b)$, $\forall x \in K$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $div\phi(x) = 0$, $\forall x \in K$. Οπότε:

$$0 = \int_K div\phi(x) dx = \int_{\partial K} \phi \cdot n = \sum_{e \in \partial K} \int_e \phi \cdot n = \sum_{e \in \partial K} |e| \phi \cdot \nu_{e,K}$$

$$= \Big(\sum_{e\in\partial K} |e|\nu_{e,K}\Big) \cdot \phi.$$

Άρα $\sum_{e\in\partial K} |e|\nu_{e,K} = 0$, συνεπώς $\Big(\sum_{e\in\partial K} |e|\nu_{e,K}\Big) \cdot a(s) = 0$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\sum_{e\in\partial K} |e| \int_0^{u_K^n} \nu_{e,K} \cdot a(s)ds = 0$ ή αλλιώς:

$$\sum_{e\in\partial K} |e| g^K(u_K^n, u_K^n) = 0.$$

- Το σχήμα (3.10) μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας την (3.15), στην μορφή:

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e\in\partial K} |e| \Big(g^K(u_K^n, u_{K_e}^n) - g^K(u_K^n, u_K^n)\Big). \tag{3.16}$$

- Κατά συνέπεια η κινητική μορφή (3.14) του σχήματος μπορεί να γραφεί, επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του Θεωρήματος (3.3.1), ως εξής:

$$\begin{aligned} f_K^{n+1}(\xi) = X_K^n(\xi) - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e\in\partial K} |e| \Big\{ &(\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) \\ &+ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) - (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) \\ &- (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

*Παρά την φανερή απλοποίηση δύο όρων μέσα στα άγκιστρα, θα κρατήσουμε την (3.17) ώς έχει.

Συνεχίζουμε τώρα με δύο Λήμματα. Στο πρώτο δείχνουμε, χρησιμοποιώντας την κινητική μορφή του σχήματος, ότι ικανοποιείται η Αρχή Μεγίστου και στο δεύτερο ότι ικανοποιούνται οι Ανισότητες Εντροπίας.

Λήμμα 3.3.1 *(Αρχή Μεγίστου)*
Με C.F.L συνθήκη:

$$\sup_{|\xi| \le \|u_0\|_{L^\infty}} \frac{\delta}{|K|} \sum_{e\in\partial K} |e| |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)| < 1,$$

έχουμε ότι:

$$|u_K^n| \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

για κάθε $K \in T_h$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη(Με επαγωγή)

- Εύκολα βλέπουμε ότι $|u_K^0| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.
- Αν τώρα $|u_K^n| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$, έχουμε ότι για κάθε $K \in T_h$ μπορούμε να γράψουμε την (3.17) στην μορφή:

$$f_K^{n+1}(\xi) = X_K^n(\xi) - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)| X_K^n(\xi)$$

$$+ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) - (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) \Big\}.$$

Ισοδύναμα:

$$f_K^{n+1}(\xi) = \Big(1 - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)| \Big) X_K^n(\xi)$$

$$+ \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)$$

$$- \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi).$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς ξ:

$$u_K^{n+1} = \int_0^{u_K^n} \underbrace{1 - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)|}_{+} \, d\xi$$

$$+ \int_0^{u_K^n} \underbrace{\frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+}_{+} \, d\xi$$

$$+ \int_0^{u_{K_e}^n} \underbrace{-\frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_-}_{+} \, d\xi.$$

  - Αυξάνουμε τα άνω άκρα των ολοκληρωμάτων έως $\sup_K u_K^n$ και παίρνουμε ότι $u_K^{n+1} \leq \sup_K u_K^n$, για κάθε K, n.
  - Μειώνουμε τα άνω άκρα των ολοκληρωμάτων έως $\inf_K u_K^n$ και παίρνουμε ότι $u_K^{n+1} \geq \inf_K u_K^n$, για κάθε K, n.

Οπότε δείξαμε ότι $|u_K^{n+1}| \leq \sup_K |u_K^n|$ για κάθε K, n. Συνεπώς από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $|u_K^{n+1}| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Λήμμα 3.3.2 *(Ανισότητες Εντροπίας)*
Για κάθε συνάρτηση εντροπίας $S \in C^2(\mathbb{R})$ και για $\eta_1, \eta_2 \in C^1(\mathbb{R})$ τις αντίστοιχες ροές εντροπίας έχουμε:

$$S(u_K^{n+1}) - S(u_K^n) + \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ \eta_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - \eta_{e,K}(u_K^n, u_K^n) \Big\} \leq 0, \tag{3.18}$$

ή ακριβέστερα:

$$X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) - (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi) \Big\} = \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}, \tag{3.19}$$

όπου $\eta_{e,K}(u,v) = \int_0^u (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ S'(\xi) d\xi + \int_0^v (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- S'(\xi) d\xi$ είναι η αριθμητική ροή εντροπίας σε δύο διαστάσεις και $m_K^{n+1}(\cdot)$ είναι κατάλληλες μη-αρνητικές φραγμένες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Απόδειξη
Γράφουμε την (3.17) στην μορφή:

$$f_K^{n+1}(\xi) = \Big(1 - \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)| \Big) X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} -|e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi),$$

είναι, δηλαδή, η f_K^{n+1}, κυρτός συνδυασμός των $X_K^n, X_{K_e}^n$ με $e \in \partial K$.
Συνεπώς :

$$0 \leq f_K^{n+1}(\xi) sgn(\xi) = |f_K^{n+1}(\xi)| \leq 1. \tag{3.20}$$

Συνεχίζουμε ορίζοντας για κάθε $K \in T_h$,

$$m_K^{n+1}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} X_K^{n+1}(s) - f_K^{n+1}(s) ds,$$

χρησιμοποιώντας, τώρα, το Θεώρημα Παραγωγισιμότητας του Lebesque έχουμε,

$$\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} = X_K^{n+1}(\xi) - f_K^{n+1}(\xi). \tag{3.21}$$

Παρατηρούμε ότι $m_K^{n+1}(\xi) \geq 0$ για κάθε ξ ανεξαρτήτως προσήμου του u_K^{n+1}, διότι η $m_K^{n+1}(\xi)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αύξουσα στο $(-\infty, u_k^{n+1})$, φθίνουσα στο $(u_K^{n+1}, +\infty)$ και η τιμή της στα $\pm\infty$ είναι μηδενική διότι οι φορείς των $X_K^{n+1}(\xi), f_K^{n+1}(\xi)$ είναι πεπερασμένοι.
Αντικαθιστούμε τώρα την (3.21) στην (3.17) και έχουμε:

$$X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) \\ -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)\Big\} = \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi},$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (3.19).
Συνεχίζουμε προσθαφαιρώντας τον όρο $(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)$ και η (3.19) γίνεται:

$$X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) \\ +(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) \\ -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)\Big\} = \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα με $S'(\xi)$ και ολοκληρώνουμε ως προς ξ,

$$\int_{\mathbb{R}} X_K^{n+1}(\xi)S'(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}} X_K^n(\xi)S'(\xi)d\xi + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{ \\ \int_{\mathbb{R}}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)S'(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)S'(\xi)d\xi \\ -\int_{\mathbb{R}}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)S'(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)S'(\xi)d\xi\Big\} \\ = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}S'(\xi)d\xi.$$

Από τους ορισμούς των $X_K^n(\cdot), \eta_{e,K}(\cdot,\cdot)$ έχουμε:

$$S(u_K^{n+1}) - S(u_K^n) + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{\eta_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) \\ -\eta_{e,K}(u_K^n, u_K^n)\Big\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}S'(\xi)d\xi.$$

Κλείνουμε παρατηρώντας ότι το δεξί μέλος είναι αρνητικό, λόγω της κυρτότητας της $S(\cdot)$ και του προσήμου της $m_K^{n+1}(\cdot)$, $m_K^{n+1}(\xi) \geq 0$ για κάθε ξ.
Άρα:

$$S(u_K^{n+1}) - S(u_K^n) + \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ \eta_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - \eta_{e,K}(u_K^n, u_K^n) \Big\} \leq 0,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (3.18). □

Έχοντας αποδείξει τις προηγούμενες ιδιότητες για το αριθμητικό σχήμα μπορούμε να προχωρήσουμε στο ουσιαστικό μέρος της εργασίας αυτής. Θα ορίσουμε την προσεγγιστική λύση u_h του προβλήματος μας και σε δύο Θεωρήματα θα μελετήσουμε την σύγκλιση αυτής στην λύση Εντροπίας του προβλήματος.

Ορισμός 3.3.1 *Ορίζουμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος μας, να είναι η κατά-τμήματα σταθερή συνάρτηση u_h ορισμένη ως:*

$$u_h(t,x,y) = u_K^n, \text{ όταν } t \in [t^n, t^{n+1}), \text{ και } (x,y) \in K.$$

Θεώρημα 3.3.2 *(Το βοηθητικό Θεώρημα)*
Έστω ότι η οικογένεια προσεγγιστικών λύσεων $u_h(t,x,y) \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^2))$ ικανοποιεί για κάποια σταθερά K_m, κάποια κατανομή $\Psi_h(t,x,y,\xi)$, κάποιο μέτρο $m_h(t,x,y,\xi)$ και κάποιες συναρτήσεις $\Psi_{0,h}(t), \Psi_{1,h}(t)$ τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\frac{\partial X(\xi;u_h(t,x,y))}{\partial t} + f_1'(\xi)\frac{\partial X(\xi;u_h(t,x,y))}{\partial x} + f_2'(\xi)\frac{\partial X(\xi;u_h(t,x,y))}{\partial y} = \frac{\partial m_h(t,x,y,\xi)}{\partial \xi} + \Psi_h(t,x,y,\xi), \quad (3.22)$$

$$\Psi_h(t,x,y,\xi) \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ με την έννοια των κατανομών}, \quad (3.23)$$

$$m_h(t,x,y,\xi) \geq 0, \quad \|m_h\|_{M^1} \leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \quad (3.24)$$

για κάθε $t \in [0,T)$ τα παρακάτω ομοιόμορφα φράγματα,

$$\|u_h(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \quad \|u_h(t,\cdot,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \quad (3.25)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_h(t,x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_1'(\xi)\phi_x(x,y)S'(\xi)X(\xi;u_h(\tau,x))dxdyd\xi d\tau$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_2'(\xi)\phi_y(x,y)S'(\xi)X(\xi;u_h(\tau,x))dxdyd\xi d\tau$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_0(x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi + \Psi_{0,h}(t), \quad (3.26)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_h(t,x,y)\phi(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy + \Psi_{1,h}(t), \quad (3.27)$$

για όλες τις μη-αρνητικές συναρτήσεις ελέγχου $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ *και τις κυρτές συναρτήσεις εντροπίας* $S(\cdot)$. *Επιπλέον* $\Psi_{i,h},\ i=0,1$ *είναι φραγμένες συναρτήσεις με την ιδιότητα:*

$$\Psi_{0,h}(t) \xrightarrow{h\to 0} 0 \ \textit{στον}\ L^\infty([0,T)) - w^\star,$$
$$\Psi_{1,h}(t) \xrightarrow{h\to 0} \Psi_1(t) \ \textit{στον}\ L^\infty([0,T)) - w^\star, \quad (3.28)$$

με $\Psi_1(t)$ *συνεχή και* $\Psi_1(0)=0$.

Τότε, καθώς $h\to 0$, *η* $u_h(t,x,y)$ *συγκλίνει ισχυρά στον* $L^p_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^2)$, $1\leq p<\infty$ *για όλα τα* $T>0$, *στην μοναδική λύση εντροπίας του προβλήματος (3.1),(3.2).*

Απόδειξη
Θεωρούμε Ω να είναι $\Omega=[0,T)\times\mathbb{R}^3$.

- Βήμα 1
  Ισχύει ότι $|X(\xi;u_h(t,x,y))|\leq 1$ για κάθε $(t,x,y,\xi)\in\Omega$ οπότε υπάρχει συνάρτηση $f\in L^\infty(\Omega)$ έτσι ώστε:

  $$X(\xi;u_h(t,x,y)) \xrightarrow{h\to 0} f(t,x,y,\xi), \ \text{στον}\ L^\infty(\Omega)-w^\star,$$

  επιπλέον:

  $$u_h(t,x,y) \xrightarrow{h\to 0} \int_{\mathbb{R}_\xi} f(t,x,y,\xi)d\xi, \ \text{στον}\ L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2)-w^\star.$$

  Από την (3.24) εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός μη-αρνητικό μέτρο $m\in M(\Omega)$ τέτοιου ώστε:

  $$m_h(t,x,y,\xi) \xrightarrow{h\to 0} m(t,x,y,\xi), \ \text{στον}\ M(\Omega)-w^\star.$$

  Γράφουμε τώρα την (3.22) με την έννοια των κατανομών και περνάμε στο όριο καθώς $h\to 0$ οπότε προκύπτει, όπως και στο αντίστοιχο Θεώρημα 2.2.1 του Κεφ. 2 ότι:

  $$\int_\Omega f(t,x,y,\xi)\phi_t(t,x,y,\xi) + \int_{x,y,\xi} f(0,x,y,\xi)\phi(0,x,y,\xi)$$

$$+\int_\Omega f_1'(\xi)f(t,x,y,\xi)\phi_x(t,x,y,\xi)+\int_\Omega f_2'(\xi)f(t,x,y,\xi)\phi_y(t,x,y,\xi)$$
$$=\int_\Omega m(t,x,y,\xi)\phi_\xi(t,x,y,\xi),$$

που είναι η σχέση (3.5).

- Βήμα 2
  Περνάμε στο όριο στις σχέσεις
  (3.26):

$$\int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_h(t,x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} f_1'(\xi)\phi_x(x,y)S'(\xi)X(\xi;u_h(\tau,x))dxdyd\xi d\tau$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} f_2'(\xi)\phi_y(x,y)S'(\xi)X(\xi;u_h(\tau,x))dxdyd\xi d\tau$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_0(x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi+\Psi_{0,h}(t),$$

  και (3.27):

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_h(t,x,y)\phi(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy+\Psi_{1,h}(t)$$

  και προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις
  (3.8):

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,y,\xi)\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} f_1'(\xi)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}S'(\xi)f(\tau,x,y,\xi)d\tau d\xi dxdy$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} f_2'(\xi)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}S'(\xi)f(\tau,x,y,\xi)d\tau d\xi dxdy$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^3} X(\xi;u_0(x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi,$$

  και (3.9):

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x,y)\phi(x,y)dxdy\xrightarrow{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy.$$

- Βήμα 3
  Εύκολα έχουμε,
  $$0 \leq sgn(\xi)X(\xi; u_h(t,x,y)) \leq 1,$$
  οπότε περνώντας στο όριο καθώς $t \to 0$ έχουμε:
  $$0 \leq sgn(\xi)f(t,x,y,\xi) \leq 1,$$
  που είναι η σχέση (3.6).
  Επίσης,
  $$\frac{\partial X(\xi; u_h(t,x,y))}{\partial \xi} = \delta(\xi) - \delta(u_h(t,x,y) - \xi) \text{ (Παρ. 7)},$$
  περνώντας στο όριο $t \to 0$ προκύπτει:
  $$\frac{\partial f}{\partial \xi}(t,x,y,\xi) = \delta(\xi) - \nu(t,x,y,\xi),$$
  με ν μη-αρνητικό με μοναδιαία μάζα ως προς ξ μέτρο, που είναι η σχέση (3.7).

- Βήμα 4
  Κλείνουμε με τις L^p συγκλίσεις, όπως στο Κεφάλαιο 2.
  Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του αντίστοιχου βήματος του Βοηθητικού Θεωρήματος (Θεωρ. 2.2.1) του Κεφ. 2 έχουμε ότι η $u_h(t,x,y)$ συγκλίνει στην $u(t,x,y)$ ισχυρά.

Έτσι τελείωσε η απόδειξη του Βοηθητικού Θεωρήματος. □

Θεώρημα 3.3.3 *(Το Βασικό Θεώρημα)*
Υποθέτουμε την C.F.L συνθήκη:
$$\sup_{|\xi| \leq \|u_0\|_{L^\infty}} \frac{\delta}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| |\nu_{e,K} \cdot a(\xi)| \leq 1.$$
Το αριθμητικό σχήμα:
$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\delta}{K} \sum_{e \in \partial K} |e| g^K(u_K^n, u_{K_e}^n)$$
ικανοποιεί τα παρακάτω:

- *Οι προσεγγιστικές λύσεις είναι L^∞ φραγμένες(Αρχή Μεγίστου).*

- *Ισχύουν όλες οι Τοπικές Συνθήκες Εντροπίας.*
- *Καθώς $h \to 0$ η $u_h(\cdot,\cdot,\cdot)$ συγκλίνει στον $L^p_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^2)$, $\forall 1 \le p < \infty$, $\forall T > 0$ στην μοναδική λύση εντροπίας του προβλήματος (3.1),(3.2).*

Απόδειξη
Έχουμε μέχρι τώρα δείξει ότι το αριθμητικό σχήμα μας ικανοποιεί τις Τοπικές Συνθήκες Εντροπίας και την Αρχή Μεγίστου. Μένει να δείξουμε ότι ικανοποιεί και τις απαιτήσεις του Βοηθητικού Θεωρήματος (Θεωρ. 3.3.2) οπότε και θα έχουμε αποδείξει και την ζητούμενη σύγκλιση.

- Ξεκινάμε ορίζοντας τα μέτρα m_h που εμφανίζονται στο Θεωρ.3.3.2. Ορίζουμε

  $$m_h(t,x,y,\xi) = \frac{1}{\delta} m_K^{n+1}(\xi), \text{ όταν } (x,y)\in K \text{ και } t\in(t^n,t^{n+1}],$$

  έτσι έχουμε $m_K^{n+1}(\xi) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_h(t,x,y,\xi)dt$, για κάθε $x \in K$.

- Απόδειξη της (3.22)
  Παίρνουμε την (3.19) που έχει αποδειχθεί στο Λήμμα 3.3.2:

  $$X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)$$
  $$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)\Big\} = \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}.$$

  Θεωρούμε $\phi(t,x,y,\xi)\in C_c^\infty(\Omega)$ και ορίζουμε $\phi_K^n(\xi) = \phi(t^n,x_K,y_K,\xi)$ όπου x_K, y_K οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου K. Πολλαπλασιάζουμε με $|K|\phi_K^n(\xi)$ την προηγούμενη σχέση και ολοκληρώνουμε ως προς ξ:

  $$\int_\xi |K|\Big(X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi)\Big)\phi_K^n(\xi)d\xi + \int_\xi \delta\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$
  $$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)\Big\}\phi_K^n(\xi)d\xi$$
  $$= \int_\xi \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}|K|\phi_K^n(\xi)d\xi.$$

  Αθροίζουμε ως προς K και n και παίρνουμε:

  $$\sum_{K,n}\int_\xi |K|(X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi))\phi_K^n(\xi)d\xi + \sum_{K,n}\int_\xi \delta\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_{-}X^n_{K_e}(\xi)-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_{-}X^n_K(\xi)\Big\}\phi^n_K(\xi)d\xi$$

$$=\sum_{K,n}\int_\xi \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}|K|\phi^n_K(\xi)d\xi. \tag{3.29}$$

1. Το πρώτο άθροισμα της (3.29):

$$\sum_{K,n}\int_\xi |K|(X_K^{n+1}(\xi)-X_K^n(\xi))\phi^n_K(\xi)d\xi$$

$$=\underbrace{-\sum_{K,n}\int_\xi |K|(\phi_K^{n+1}(\xi)-\phi_K^n(\xi))X_K^{n+1}(\xi)d\xi}_{A}$$

$$\underbrace{-\sum_{K}\int_\xi |K|X_K^0(\xi)\phi_K^0(\xi)d\xi.}_{B}$$

Παίρνουμε το A και:

$$A=\underbrace{-\sum_{K,n}\int_\xi |K|(\phi_K^{n+1}(\xi)-\phi_K^n(\xi))X_K^{n}(\xi)d\xi}_{A_1}$$

$$\underbrace{-\sum_{K,n}\int_\xi |K|(\phi_K^{n+1}(\xi)-\phi_K^n(\xi))(X_K^{n+1}(\xi)-X_K^n(\xi))d\xi}_{A_2}$$

Τώρα παίρνουμε το A_1 και έχουμε:

$$A_1=-\sum_{K,n}\int_\xi |K|\int_{t^n}^{t^{n+1}}\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)dtX_K^n(\xi)d\xi$$

$$=-\sum_{K,n}\int_\xi\int_K\int_{t^n}^{t^{n+1}}\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)X(\xi;u_h(t,x,y))dtdxdyd\xi$$

$$=-\sum_{K,n}\int_\xi\int_K\int_{t^n}^{t^{n+1}}\phi_t(t,x,y,\xi)X(\xi;u_h(t,x,y))dtdxdyd\xi$$

$$-\sum_{K,n}\int_\xi\int_K\int_{t^n}^{t^{n+1}}X(\xi;u_h(t,x,y))$$

$$\Big(\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)-\phi(t,x,y,\xi)\Big)dtdxdyd\xi.$$

Το πρώτο μέρος του A_1 ισούτε με:

$$-\int_\xi\int_{\mathbb{R}_{x,y}}\int_t\phi_t(t,x,y,\xi)X(\xi;u_h(t,x,y))dtdxdyd\xi,$$

το δεύτερο μέρος του A_1 συγκλίνει στο μηδέν καθώς $h\to 0$ -εύκολα φράσσεται από $Ch\|u_h\|_{L^1}\leq Ch\|u_0\|_{L^1}$- και γράφεται στην μορφή:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2_{x,y}}\int_{\mathbb{R}_\xi}\Big\{-\sum_{K,n}|K|X(\xi;u_h(t,x_K,y_K))\delta(x_K)$$

$$+X(\xi;u_h(t,x,y))\Big\}\phi_t(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt.$$

Περνάμε στο A_2 και βλέπουμε ότι

$$A_2=-\sum_{K,n}\int_\xi|K|\Big\{\phi_K^{n+1}(\xi)-\phi_K^n(\xi)\Big\}\Big\{X_K^{n+1}(\xi)-X_K^n(\xi)\Big\}d\xi$$

$$=-\sum_{K,n}\int_\xi|K|\int_{t^n}^{t^{n+1}}\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)dt\Big\{X_K^{n+1}(\xi)-X_K^n(\xi)\Big\}d\xi$$

$$=-\sum_{K,n}\int_\xi|K|\int_{t^n}^{t^{n+1}}\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)\Big\{X(\xi;u_h(t+\delta,x_K,y_K))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x_K,y_K))\Big\}dtd\xi$$

$$=-\int_\xi\int_0^T\sum_K|K|\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)\Big\{X(\xi;u_h(t+\delta,x_K,y_K))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x_K,y_K))\Big\}dtd\xi$$

$$=-\int_\xi\int_0^T\sum_K\int_K\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)\Big\{X(\xi;u_h(t+\delta,x,y))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x,y))\Big\}dtd\xi.$$

Φράσοντας τώρα τον τελευταίο όρο παίρνουμε

$$|A_2|\leq\int_\xi\int_0^T\sum_K\int_K|\phi_t(t,x_K,y_K,\xi)\Big\{X(\xi;u_h(t+\delta,x,y))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x,y))\Big\}|dxdydtd\xi.$$

Η συμπάγεια του φορέα της ϕ κάνει τα ορίσματα των ολοκληρωμάτων πεπερασμένα και φράσοντας την παίρνουμε

$$A_2 \le \|D\phi\|_\infty \int_\xi \int_0^T \sum_K \int_K |X(\xi;u_h(t+\delta,x,y))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x,y))|dxdydtd\xi$$

$$= \|D\phi\|_\infty \int_\xi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |X(\xi;u_h(t+\delta,x,y))$$

$$-X(\xi;u_h(t,x,y))|dxdydtd\xi \longrightarrow 0$$

Επιπλέον έχουμε ότι ο όρος A_2 γράφεται στην μορφή:

$$A_2 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2_{x,y}} \int_{\mathbb{R}_\xi} \Big\{ -\sum_{K,n} |K|(\delta(t^{n+1})-\delta(t^n))\delta(x_K,y_K)$$

$$(X_K^{n+1}(\xi)-X_K^n(\xi)\Big\}\phi(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt.$$

Το B τώρα:

$$B = -\sum_K \int_\xi |K| X_K^0(\xi)\phi_K^0(\xi)d\xi$$

$$= -\sum_K \int_\xi \int_K X(\xi;u_h(0,x,y))\phi(0,x_K,y_K,\xi)dxdyd\xi$$

$$= -\sum_K \int_\xi \int_K X(\xi;u_h(0,x,y))\phi(0,x,y,\xi)dxdyd\xi$$

$$+\sum_K \int_\xi \int_K X(\xi;u_h(0,x,y))(\phi(0,x,y,\xi)-\phi(0,x_K,y_K,\xi))dxdyd\xi.$$

Όπως πριν παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος του B γράφεται ως:

$$-\int_\xi \int_{\mathbb{R}^2_{x,y}} X(\xi;u_h(0,x,y))\phi(0,x,y,\xi)dxdyd\xi,$$

και το δεύτερο μέρος του B συγκλίνει στο 0 και μπορεί να γραφεί στην ζητούμενη μορφή.

Συνεπώς το πρώτο άθροισμα της (3.29) είναι ίσο με:

$$-\int_\xi \int_{\mathbb{R}_{x,y}} \int_t \phi_t(t,x,y,\xi)X(\xi;u_h(t,x,y))dtdxdyd\xi$$

$$-\int_\xi \int_{\mathbb{R}_{x,y}} X(\xi; u_h(0,x,y))\phi(0,x,y,\xi)dxdyd\xi$$
$$+\int_\xi \int_{\mathbb{R}_{x,y}} \int_t \psi_h(t,x,y,\xi)\phi(t,x,y,\xi)dtdxdyd\xi,$$

όπου στην κατανομή $\psi_h(t,x,y,\xi)$ έχουμε μαζέψει όλους τους όρους που περίσεψαν κατά την διάρκεια της προηγούμενης διαδικασίας και που δείξαμε ότι κάθε ένας από αυτούς συγκλίνει με την έννοια των κατανομών στην μηδενική συνάρτηση.

2. Το δεύτερο άθροισμα της (3.29):

$$\sum_{K,n} \int_\xi \delta \sum_{e\in\partial K} |e| \Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_{K_e}(\xi)$$
$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_K(\xi) \Big\} \phi^n_K(\xi) d\xi.$$

Παρατηρώντας ότι $\sum_{e\in\partial K} |e|\nu_{e,K} = \overrightarrow{0}$ έχουμε όπως πριν:

$$\sum_{K,n} \int_\xi \delta \sum_{e\in\partial K} |e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi)) X^n_K(\xi)\phi^n_K = 0,$$

οπότε προσθέτοντας την παράσταση αυτή στο δεύτερο άθροισμα προκύπτει:

$$\int_\xi \sum_n \delta \sum_{K,e} |e| \Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X^n_K(\xi) + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_{K_e}(\xi)$$
$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X^n_K(\xi) \Big\} \phi^n_K(\xi) d\xi - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_K(\xi) \Big\} \phi^n_K$$
$$= \int_\xi \sum_n \delta \sum_{e\in\Gamma_h} |e| \Big[\Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X^n_K(\xi) + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_{K_e}(\xi)$$
$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X^n_K(\xi) - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^n_K(\xi) \Big\} \phi^n_K$$
$$+(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ X^n_{K_e}(\xi) + (\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- X^n_K(\xi)$$
$$-(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ X^n_{K_e}(\xi) - (\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- X^n_{K_e}(\xi) \Big\} \phi^n_{K_e} \Big] d\xi.$$

Προσθαφαιρούμε την παράσταση

$$\int_\xi \sum_n \delta \sum_K \sum_{e\in\partial K} X^n_K(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi)) \int_e \phi(t^n,x,y,\xi)d\xi,$$

η οποία παρατηρούμε ότι ισούτε με

$$\int_\xi \sum_n \delta \sum_K \sum_{e\in\partial K} \Big\{ X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+$$

$$+X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- \Big\} \int_e \phi(t^n,x,y,\xi)d\xi$$

$$= \int_\xi \sum_n \delta \sum_{e\in\Gamma_h} \Big\{ X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ + X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_-$$

$$+X_{K_e}^n(\xi)(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ + X_{K_e}^n(\xi)(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- \Big\} \int_e \phi(t,x,y,\xi)d\xi$$

Οπότε η προηγούμενη παράσταση ισούτε με,

$$\Big[\int_\xi \sum_n \delta \sum_{e\in\Gamma_h} |e| \Big[\Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)$$

$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi) - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi) \Big\} \phi_K^n$$

$$+(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ X_{K_e}^n(\xi) + (\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)$$

$$-(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ X_{K_e}^n(\xi) - (\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) \Big\} \phi_{K_e}^n \Big] d\xi \Big]$$

$$-\int_\xi \sum_n \delta \sum_K \sum_{e\in\partial K} X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi)) \int_e \phi(t^n,x,y,\xi)d\xi.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα των Cauchy-Schwartz και εκμεταλευόμενοι την σχέση

$$\sum_{K\in T_h} |K||X_K^n(\xi) - X_{K_e}^n(\xi)|^2 < c,$$

που αποδεικνύει για τέτοιου είδους σχήματα ο Vila στην εργασία του [11] προκύπτει ότι ο πρώτος όρος συγκλίνει στο μηδεν.
Ο δεύτερος όρος είναι με την σειρά του ίσος με,

$$-\int_\xi \sum_n \delta \sum_K \sum_{e\in\partial K} X_K^n(\xi)(\nu_{e,K}\cdot a(\xi)) \int_e \phi(t^n,x,y,\xi)d\xi.$$

$$= -\int_{t,x,y,\xi} f_1'(\xi) X(\xi; u_h(t,x,y)) \phi_x(t,x,y,\xi)$$

$$-\int_{t,x,y,\xi} f_2'(\xi) X(\xi; u_h(t,x,y)) \phi_y(t,x,y,\xi).$$

3. Το τρίτο άθροισμα της (3.29):

$$\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}|K|\phi_K^n(\xi)d\xi.$$

Έχοντας ορίσει $m_h(t,x,y,\xi)=\frac{1}{\delta}m_K^{n+1}(\xi)$ όταν $(x,y)\in K$, $t\in(t^n,t^{n+1}]$, προκύπτει ότι:

$$\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}|K|\phi_K^n(\xi)d\xi$$

$$=\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\delta|K|\phi_K^n(\xi)d\xi$$

$$=\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K\phi_K^n(\xi)dxdydtd\xi$$

$$=\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K\phi(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt$$

$$+\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K(\phi_K^n(\xi)-\phi(t,x,y,\xi))d\xi dxdydt.$$

Ο πρώτος όρος γράφεται ως:

$$\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K\phi(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt$$

$$=-\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}m_K^{n+1}(\xi)\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K\phi_{\xi}(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt$$

$$=-\sum_{K,n}\int_{\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K m_h(t,x,y,\xi)\phi_{\xi}(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt$$

$$=-\int_t\int_{x,y}\int_{\xi}m_h(t,x,y,\xi)\phi_{\xi}(t,x,y,\xi)d\xi dxdydt.$$

Και ο δεύτερος ως εξής:

$$\sum_{K,n}\int_{\xi}\frac{1}{\delta}\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_K(\phi_K^n(\xi)-\phi(t,x,y,\xi))d\xi dxdydt$$

$$= \sum_{K,n} \int_\xi \frac{1}{\delta} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \phi(t,x,y,\xi) d\xi dx dy dt$$

$$- \sum_{K,n} \int_\xi \frac{1}{\delta} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} \delta K | \phi_K^n(\xi) d\xi dx dy dt$$

$$= - \sum_{K,n} \int_\xi \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \frac{1}{\delta} m_K^{n+1}(\xi) \phi_\xi(t,x,y,\xi) d\xi dx dy dt$$

$$- \int_t \int_{x,y,\xi} \sum_{K,n} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} |K| \delta(x_K, y_K) \delta(t^n) \phi(t,x,y,\xi) dx dy dt d\xi$$

$$= \int_t \int_{x,y,\xi} \Big\{ \frac{\partial m_h(t,x,y,\xi)}{\partial \xi}$$

$$- \sum_{K,n} \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} |K| \delta(x_K, y_K) \delta(t^n) \Big\} \phi(t,x,y,\xi) dx dy dt d\xi.$$

Άρα το τρίτο άθροισμα της (3.29) είναι ίσο με

$$- \int_t \int_{x,y} \int_\xi m_h(t,x,y,\xi) \phi_\xi(t,x,y,\xi) d\xi dx dy dt$$

$$+ \int_t \int_{x,y} \int_\xi \psi_h(t,x,y,\xi) \phi(t,x,y,\xi) d\xi dx dy dt.$$

Συνοψίζοντας τις παρατηρήσεις για τα τρία αθροίσματα της (3.29) έχουμε την ζητούμενη σχέση (3.22) με τη έννοια των κατανομών και ταυτόχρονα έχουμε αποδείξει και την σχέση (3.23).

- Απόδειξη της (3.24)
  Το θετικό πρόσημο του μέτρου m_h είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $m_h = \frac{1}{\delta} m_K^{n+1}$ και του προσήμου του m_K^{n+1} από τις Ανισότητες Εντροπίας (Λήμμα 3.3.2).
  Για το φράγμα της νόρμας του m_h παίρνουμε την (3.14):

$$|K| f_K^{n+1}(\xi) = |K| X_K^n(\xi) - \delta \sum_{e \in \partial K} |e| \Big\{ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)$$

$$+ (\nu_{e,K} \cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi) \Big\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με ξ, ολοκληρώνουμε ως προς ξ και αθροίζουμε ως προς K:

$$\sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi f_K^{n+1}(\xi)\xi d\xi$$

$$= \sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi X_K^n(\xi)\xi d\xi - \delta \int_\xi \sum_{K\in T_h} \sum_{e\in\partial K} |e| \Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)\xi$$

$$+(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)\xi \Big\} d\xi.$$

Το διπλό άθροισμα στην προηγούμενη σχέση, μπορούμε να το γράψουμε θεωρώντας ώς κέντρο αναφοράς τις πλευρές $e \in \Gamma_h$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες:

$$(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_+ = -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_-,$$
$$(\nu_{e,K_e}\cdot a(\xi))_- = -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+,$$

ώς εξής:

$$\sum_{e\in\Gamma_h} |e| \Big\{ (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)\xi + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)\xi \Big\}$$

$$+|e| \Big\{ -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)\xi - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)\xi \Big\} = 0.$$

Άρα:

$$\sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi f_K^{n+1}(\xi)\xi d\xi$$

$$= \sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi X_K^n(\xi)\xi d\xi.$$

Αφαιρούμε τώρα $\sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi X_K^{n+1}(\xi)\xi d\xi$ και από τα δύο μέλη,

$$\sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi (f_K^{n+1}(\xi) - X_K^{n+1}(\xi))\xi d\xi =$$

$$\sum_{K\in T_h} |K| \Big(\int_\xi X_K^n(\xi)\xi d\xi - \int_\xi X_K^{n+1}(\xi)\xi d\xi \Big).$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21): $\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} = X_K^{n+1}(\xi) - f_K^{n+1}(\xi)$ και αλλάζοντας τα πρόσημα παίρνουμε:

$$\sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} \xi d\xi$$

$$= \sum_{K\in T_h} |K|\Big(\frac{1}{2}(u_K^{n+1})^2 - \frac{1}{2}(u_K^n)^2\Big),$$

δηλαδή:

$$- \sum_{K\in T_h} |K| \int_\xi m_K^{n+1}(\xi)d\xi$$
$$= \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K|(u_K^{n+1} - u_K^n)(u_K^{n+1} + u_K^n),$$

από τον ορισμό του μέτρου $m_h(t,x,y,\xi)$ -στην αρχή της απόδειξης- έχουμε:

$$- \sum_{K\in T_h} \int_\xi \int_K \int_{t^n}^{t^{n+1}} m_h(t,x,y,\xi)dtdxdyd\xi$$
$$= \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K|(u_K^{n+1} - u_K^n)(u_K^{n+1} + u_K^n),$$

ή αλλιώς:

$$- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\xi \int_{\mathbb{R}^2} m_h(t,x,y,\xi)dxdyd\xi dt$$
$$= \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K|(u_K^{n+1} - u_K^n)(u_K^{n+1} + u_K^n).$$

Αθροίζουμε ώς προς n οπότε:

$$- \int_0^T \int_\xi \int_{\mathbb{R}^2} m_h(t,x,y,\xi)dtdxdyd\xi$$
$$= \sum_n \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K|\Big((u_K^{n+1})^2 - (u_K^n)^2\Big)$$
$$= \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K| \sum_n \Big((u_K^{n+1})^2 - (u_K^n)^2\Big)$$
$$= \sum_{K\in T_h} \frac{1}{2}|K|\Big((u_K^{N+1})^2 - (u_K^0)^2\Big).$$

Παίρνουμε απόλυτα και με βάση το πρόσημο του $m_h(m_h(t,x,y,\xi) \geq 0,$ για κάθε $t,x,y,\xi)$ έχουμε:

$$\int_0^T \int_\xi \int_{\mathbb{R}^2} |m_h(t,x,y,\xi)|dxdyd\xi dt$$

$$= |\sum_{K\in T_h}\frac{1}{2}|K|\Big((u_K^{N+1})^2-(u_K^0)^2\Big)|,$$

ή

$$\|m_h\|_M \leq \sum_{K\in T_h}\frac{1}{2}|K||u_K^{N+1}-u_K^0||u_K^{N+1}+u_K^0|$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty}\sum_{K\in T_h}|K|\Big(|u_K^{N+1}|+|u_K^0|\Big).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\|u_h(t^n,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}=\int_{\mathbb{R}^2}|u_h(t^n,x,y)|dxdy$$

$$=\sum_{K\in T_h}\int_K|u_h(t^n,x,y)|dxdy=\sum_{K\in T_h}\int_K|u_K^n|dxdy=\sum_{K\in T_h}|K||u_K^n|,$$

οπότε:

$$\|m_h\|_M\leq\|u_0\|_{L^\infty}\Big(\|u_h(t^{N+1},\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\Big)$$

$$\overset{(3.25)}{\leq} 2\|u_0\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1}.$$

*Παρατήρηση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.25) χωρίς πρόβλημα εφόσον η απόδειξη της (όπως αμέσως θα δούμε) δεν εξαρτάται από την (3.24) ούτε από συνέπειες αυτής.

- Απόδειξη της (3.25)
  Το L^1 φράγμα πρώτα:
  Ξεκινάμε με την (3.14):

$$|K|f_K^{n+1}(\xi)=|K|X_K^n(\xi)-\delta\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+X_K^n(\xi)$$

$$+(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_-X_{K_e}^n(\xi)\Big\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $sgn(\xi)$, ολοκληρώνουμε ως προς ξ και αθροίζουμε ως προς K και αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι:

$$\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+X_K^n(\xi)sgn(\xi)$$

$$+|e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_-X_{K_e}^n(\xi)sgn(\xi)=$$

$$\sum_{e\in\Gamma_h} |e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)sgn(\xi) + |e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)sgn(\xi)$$
$$-|e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^n(\xi)sgn(\xi) - |e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)sgn(\xi) = 0,$$

έχουμε:

$$\sum_{K\in T_h}\int_\xi |K| f_K^{n+1}(\xi)sgn(\xi)d\xi = \sum_{K\in T_h}\int_\xi |K| X_K^n(\xi)sgn(\xi)d\xi.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.20):

$$sgn(\xi)f_K^{n+1}(\xi) = |f_K^{n+1}(\xi)|$$

και την:

$$u_K^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_K^{n+1}(\xi)d\xi$$

έχουμε:

$$\sum_{K\in T_h}|K||u_K^{n+1}| \le \sum_{K\in T_h}|K||u_K^n|.$$

Επαγωγικά λοιπόν έχουμε ότι:

$$\sum_{K\in T_h}|K||u_K^n| \le \sum_{K\in T_h}|K||u_K^0|.$$

Περνάμε στις L^1 νόρμες τώρα και για κάθε $t\in[t^n,t^{n+1})$ έχουμε:

$$\|u_h(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2}|u_h(t,x,y)|dxdy = \sum_{K\in T_h}\int_K |u_h(t,x,y)|dxdy$$
$$= \sum_{K\in T_h}\int_K |u_K^n|dxdy = \sum_{K\in T_h}|K||u_K^n| \le \sum_{K\in T_h}|K||u_K^0|$$
$$= \sum_{K\in T_h}|\int_K u_0(x,y)dxdy| \le \sum_{K\in T_h}\int_K |u_0(x,y)|dxdy = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Το L^∞ φράγμα της u_h είναι απλή συνέπεια του Ορισμού της (Ορισμός 3.3.1)

$$u_h(t,x,y) = u_K^n,\ \text{όταν}\ t\in[t^n,t^{n+1}),\ \text{και}\ (x,y)\in K,$$

και της Αρχής Μεγίστου για το αριθμητικό σχήμα (Λήμμα 3.3.1).

- Απόδειξη της (3.26)
  Παίρνουμε την (3.19):

$$X_K^{n+1}(\xi) - X_K^n(\xi) + \frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^n(\xi)$$

$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^n(\xi)\Big\} = \frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial \xi}.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi(x,y)S'(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ και ορίζουμε $\phi_K = \phi(x_K, y_K)$ όπου x_K, y_K οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου Κ. Πολλαπλασιάζουμε με $|K|\phi_K S'(\xi)$ την προηγούμενη σχέση, ολοκληρώνουμε ως προς ξ, αθροίζουμε ως προς $K \in T_h$ και θεωρώντας $t \in [t^n, t^{n+1})$, θέτουμε $n = i$ και αθροίζουμε από ως προς i από 0 μέχρι n,

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{K\in T_h}\int_\xi |K|(X_K^{i+1}(\xi) - X_K^i(\xi))\phi_K S'(\xi)d\xi + \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{K\in T_h}\int_\xi \delta \sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^i(\xi) - (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^i(\xi)\Big\}\phi_K S'(\xi)d\xi$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{K\in T_h}\int_\xi \frac{\partial m_K^{i+1}(\xi)}{\partial\xi}|K|\phi_K S'(\xi)d\xi. \qquad (3.30)$$

Μελετάμε τώρα τα επιμέρους ολοκληρώματα που παρουσιάζονται στην (3.30) με σκοπό να δείξουμε ότι από κάθε έναν εξ'αυτών προκύπτει ένας αντίστοιχος όρος της ζητούμενης σχέσης (3.26).

1. Το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.30)

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{K\in T_h}\int_\xi |K|(X_K^{i+1}(\xi) - X_K^i(\xi))\phi_K S'(\xi)d\xi$$

$$= \sum_K \int_\xi |K| X_K^{n+1}(\xi)\phi_K S'(\xi)d\xi - \sum_K \int_\xi |K| X_K^0(\xi)\phi_K S'(\xi)d\xi$$

$$= \int_\xi \sum_K X_K^{n+1}(\xi)S'(\xi)\int_K \phi_K dxdyd\xi$$

$$-\sum_K (S(u_K^0) - S(0))\phi_K \int_K 1dxdy$$

$$\begin{aligned}
&\overset{Jensen}{\geq} \int_{x,y,\xi} X(\xi; u_h(t^{n+1}, x, y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi \\
&\quad - \sum_K |K|\phi_K \frac{1}{|K|}\int_K S(u_o(x,y))dxdy + O(h) \\
&= \int_{x,y,\xi} X(\xi; u_h(t^{n+1}, x, y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdyd\xi \\
&\quad - \int_{x,y,\xi} X(\xi; u_0(x,y))\phi(x,y)S'(\xi)dxdy + O(h).
\end{aligned}$$

Όπου καθ'υπέρβαση χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $O(h)$ για να συμβολίσουμε ό,τι περισσεύει από τις παραπάνω διαδικασίες και τα οποία συγκλίνουν στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ στην μηδενική συνάρτηση.

2. Το δεύτερο ολοκλήρωμα της (3.30)

   Πρώτα παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [t^n, t^{n+1})$, για κάθε $\phi(x,y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ και για κάθε $S(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ κυρτή, ισχύει

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_1'(\xi)\phi_x(x,y)S'(\xi)X(\xi; u_h(\tau, x, y))dxdyd\xi d\tau \\
&= \sum_{i=0}^n \delta \sum_{K\in T_h} \int_\xi f_1'(\xi)X_K^i(\xi)S'(\xi)\int_K \phi_x(x,y)dxdyd\xi \\
&= \sum_{i=0}^n \delta \sum_{K\in T_h} \int_\xi f_1'(\xi)X_K^i(\xi)S'(\xi)\sum_{e\in\partial K}\int_e \nu_{e,K}^1\phi.
\end{aligned}$$

   Παρομοίως έχουμε:

$$I_2 = \sum_{i=0}^n \delta \sum_{K\in T_h} \int_\xi f_2'(\xi)X_K^i(\xi)S'(\xi)\sum_{e\in\partial K}\int_e \nu_{e,K}^2\phi.$$

   Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις δίνουν μαζί:

$$I_1 + I_2 = \sum_{i=0}^n \delta \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}\int_\xi\int_e (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))\phi(x,y)X_K^i(\xi)S'(\xi).$$

   Παρατηρούμε τώρα ότι το δεύτερο άθροισμα της (3.30) γίνεται:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{K\in T_h}\int_\xi \delta \sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^i(\xi)$$

$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^i(\xi)\Big\}\phi_K S'(\xi)d\xi$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\delta\int_\xi S'(\xi)\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^i(\xi)$$

$$-(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_K^i(\xi)\Big\}\phi_K d\xi$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\delta\int_\xi S'(\xi)\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))X_K^i(\xi)\phi_K d\xi$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\delta\int_\xi S'(\xi)\sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^i(\xi)(\phi_K-\phi_{K_e})d\xi$$

$$=I_1+I_2+O(h),$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει κάνοντας τις ίδιες πράξεις όπως και στην απόδειξη της (3.22). Ο όρος $O(h)$ χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τους όρους που περισεύουν από τις πράξεις και συγκλίνουν στην μηδενική συνάρτηση στον $L^\infty([0,T))$, καθώς $h\to 0$.

3. Το τρίτο ολοκλήρωμα της (3.30):

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{K\in T_h}\int_\xi \frac{\partial m_K^{i+1}(\xi)}{\partial\xi}|K|\phi_K S'(\xi)d\xi,$$

είναι αρνητικό διότι $\phi\geq 0$, $m_k^{n+1}(\xi)\geq 0$, S κυρτή.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει η σχέση (3.26).

- Απόδειξη της (3.27)
  Ξεκινάμε, αυτή τη φορά με την σχέση (3.14), η οποία χρησιμοποιώντας την (3.21) γίνεται:

$$X_K^{n+1}(\xi)=X_K^n(\xi)-\frac{\delta}{|K|}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+X_K^n(\xi)+(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_-X_{K_e}^n(\xi)\Big\}+\frac{\partial m_K^{n+1}(\xi)}{\partial\xi}.$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$|K|X_K^n(\xi)=|K|X_K^0(\xi)-\delta\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^j(\xi) + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^j(\xi)\Big\}$$

$$+|K|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial m_K^{j+1}(\xi)}{\partial\xi}.$$

Ορίζουμε x_K να είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου K και ϕ_K να είναι η τιμή της ϕ στο σημείο αυτό. Πολλαπλασιάζουμε τώρα με ϕ_K, αθροίζουμε ως προς K και ολοκληρώνουμε ως προς ξ. Η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\int_\xi \sum_{K\in T_h}|K|X_K^n(\xi)\phi_K d\xi = \int_\xi \sum_{K\in T_h}|K|X_K^0(\xi)\phi_K d\xi$$

$$-\int_\xi \sum_{K\in T_h}\delta\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^j(\xi) + (\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X_{K_e}^j(\xi)\Big\}\phi_K d\xi$$

$$+\int_\xi \sum_{K\in T_h}|K|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial m_K^{j+1}(\xi)}{\partial\xi}\phi_K d\xi.$$

1. Το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_\xi \sum_{K\in T_h}|K|X_K^n(\xi)\phi_K d\xi = \sum_{K\in T_h}|K|u_K^n\phi_K = \sum_{K\in T_h}u_K^n\int_K \phi_K dxdy$$

$$= \sum_{K\in T_h}\int_K \phi(x,y)u_h(t^n,x,y) + \sum_{K\in T_h}u_K^n\int_K \phi_K - \phi(x,y)dxdy.$$

Ο πρώτος όρος γράφεται ως:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\phi(x,y)u_h(t^n,x,y)dxdy$$

και ο δεύτερος φράσσεται:

$$|\sum_{K\in T_h}\int_K u_h(t,x,y)\phi_K - \phi(x,y)dxdy|$$

$$\leq \sum_{K\in T_h}\int_K |u_h(t,x,y)||\phi_K - \phi(x,y)|dxdy$$

$$\leq h\|D(\phi)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_h(t,x,y)|dxdy$$
$$\overset{(3.25)}{\leq} h\|D(\phi)\|_\infty \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Οπότε το $\sum_{K\in T_h}\int_K u_h(t,x,y)\phi_K - \phi(x,y)dxdy$ συγκλίνει στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ στην μηδενική συνάρτηση.

2. Το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_\xi \sum_{K\in T_h} |K| X_K^0(\xi)\phi_K d\xi$$

$$= \sum_{K\in T_h} |K| u_K^0 \phi_K = \sum_{K\in T_h} \phi_K \int_K u_0(x,y)dxdy$$
$$= \sum_{K\in T_h} \int_K u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy$$
$$+ \sum_{K\in T_h} \int_K u_0(x)(\phi_K - \phi(x,y))dxdy.$$

Ο πρώτος όρος γράφεται ως:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy$$

και ο δεύτερος φράσσεται:

$$|\sum_{K\in T_h} \int_K u_0(x,y)(\phi_K - \phi(x,y)dxdy|$$

$$\leq h\|D\phi\|_\infty \sum_{K\in T_h} \int_K |u_0(x,y)|dxdy$$
$$= h\|D\phi\|_\infty \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Οπότε το $\sum_{K\in T_h}\int_K u_0(x,y)\phi_K - \phi(x,y)dxdy$ συγκλίνει καθώς $h\to 0$ στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ στην μηδενική συνάρτηση.

3. Το τρίτο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_\xi \sum_{K\in T_h} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{e\in\partial K} \delta|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X_K^j(\xi)$$

$$+(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X^j_{K_e}(\xi)\Big\}\phi_K d\xi$$

$$= \int_0^{t^n}\int_\xi \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ X(\xi;u_h(t,x_K,y_K))$$

$$+(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- X(\xi;u_h(t,x_{K_e},y_{K_e}))\Big\}\phi_K d\xi = I$$

για το οποίο ισχύει ότι:

$$|I| \le \int_0^{t^n}\int_\xi \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{$$

$$sgn(u_h(t,x_K,y_K))\int_0^{u_h(t,x_K,y_K)}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ d\xi$$

$$+sgn(u_h(t,x_{K_e},y_{K_e}))\int_0^{u_h(t,x_{K_e},y_{K_e})} -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- d\xi\Big\}|\phi_K|$$

$$\overset{(3.25)}{\le} \int_0^{t^n}\int_\xi \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|\Big\{\int_{-\|u_0\|_{L^\infty}}^{\|u_0\|_{L^\infty}}(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_+ d\xi$$

$$+\int_{-\|u_0\|_{L^\infty}}^{\|u_0\|_{L^\infty}} -(\nu_{e,K}\cdot a(\xi))_- d\xi\Big\}|\phi_K|$$

$$= t^n \sum_{K\in T_h}\sum_{e\in\partial K}|e|\int_{-\|u_0\|_{L^\infty}}^{\|u_0\|_{L^\infty}}|\nu_{e,K}\cdot a(\xi)||\phi_K| d\xi,$$

που καθώς $t\to 0$ το παραπάνω μηδενίζεται, επίσης επειδή είναι φραγμένο ως προς t συγκλίνει στον $L^\infty([0,T)) - w^\star$ καθώς $h\to 0$.

4. Το τέταρτο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_\xi \sum_{K\in T_h}|K|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial m_K^{j+1}(\xi)}{\partial\xi}\phi_K d\xi = 0$$

διότι

$$\int_\xi \frac{\partial m_K^{j+1}(\xi)}{\partial\xi} d\xi = 0.$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\phi(x,y)u_h(t^n,x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2}u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy + \Psi_{1,h}(t),$$

με $\Psi_{1,h}(t) \xrightarrow{h\to 0} \Psi_1(t)$ και $\Psi_1(t)$ συνεχή με $\Psi_1(0)=0$. Που είναι η ζητούμενη σχέση (3.27).

Έτσι δείξαμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Βοηθητικού Θεωρήματος (Θεωρ. 3.3.2), οπότε η ακολουθία $u_h(t,x,y)$ συγκλίνει στην μοναδική Λύση Εντροπίας $u(t,x,y)$ του Προβλήματος (3.1),(3.2) και ολοκληρώσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος. $\square$

Κεφάλαιο 4

Παραρτήματα

1. $\frac{\partial}{\partial x} sgn(x) = 2\delta(x)$ με την έννοια των κατανομών, διότι :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} sgn(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} sgn(x)\phi'(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} sgn(x)\phi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} sgn(x)\phi'(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \phi'(x)dx = 2\phi(0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 2\delta(x)\phi(x)dx$$

2. $sgn(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi) = |f_\varepsilon(t,x,\xi)|$, διότι :

   - Φανερά :

$$sgn(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi) \leq |f_\varepsilon(t,x,\xi)|$$

   - Επίσης, με βάση την σχέση (3), έχουμε :

$$|f_\varepsilon(t,x,\xi)| \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |f(s,y,\xi)|\omega_\varepsilon(t-s,x-y)dsdy$$

$$= sgn(\xi)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(s,y,\xi)\omega_\varepsilon(t-s,x-y)dsdy$$

$$= sgn(\xi)f_\varepsilon(t,x,\xi)$$

3. $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}\Big(f^2(x)\Big)'$ με την έννοια των κατανομών ,διότι :

$$\int f(x)f'(x)\phi(x)dx$$

$$= -\int f(x)f'(x)\phi(x)dx - \int f^2(x)\phi'(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int f(x)f'(x)\phi(x)dx = -\int f^2(x)\phi'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x)\phi(x)dx = \int \Big(\frac{1}{2}f^2(x)\Big)'\phi(x)dx$$

4. Ευθύ ή Tensor Γινόμενο (Neto σελ:83)
$(\phi \otimes \psi)(x,y) = \phi(x)\psi(y)$
$C_c^\infty(\Omega) \otimes C_c^\infty(\Omega') = \Big\{u(x,y) | u(x,y) = \sum \phi_j(x)\psi_j(y)\Big\}$
Αποδεικνύεται ότι $C_c^\infty(\Omega) \otimes C_c^\infty(\Omega')$ είναι πυκνό στον $C_c^\infty(\Omega \times \Omega')$

5. Μερικές Παράγωγοι για Κατανομές (Neto σελ:94)
Ισχύει ότι : $\frac{\partial}{\partial x}\Big((S*T)(x)\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}S*T\Big)(x) = \Big(S*\frac{\partial}{\partial x}T\Big)(x)$

6. Λήμμα του Brenier.
Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$, με $0 \leq sgn(x)f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, κυρτή, Lipcshitz, τότε :

$$h\Big(\int f(x)dx\Big) - h(0) \leq \int h'(x)f(x)dx$$

7. Έχουμε ότι $\frac{\partial X(\xi;u)}{\partial \xi} = \delta(\xi) - \delta(u-\xi)$ με την έννοια των κατανομών.
Έστω $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Η $\frac{\partial X(\xi;u)}{\partial \xi}$ δίνεται από τα παρακάτω:

$$\int_{\mathbb{R}^2} X(\xi;u)\frac{\partial \phi(\xi,u)}{\partial \xi}d\xi du$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbb{R}} X(\xi;u)\frac{\partial \phi(\xi,u)}{\partial \xi}d\xi du + \int_{0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} X(\xi;u)\frac{\partial \phi(\xi,u)}{\partial \xi}d\xi du$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{u}^{0} -\frac{\partial \phi(\xi,u)}{\partial \xi}d\xi du + \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{u} \frac{\partial \phi(\xi,u)}{\partial \xi}d\xi du$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \phi(0,u) - \phi(u,u)du + \int_{0}^{\infty} \phi(u,u) - \phi(0,u)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(u,u) - \phi(0,u) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \delta(u-\xi)\phi(\xi,u) du d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi)\phi(\xi,u) du d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (\delta(u-\xi) - \delta(\xi))\phi(\xi,u) du d\xi.$$

8. Ασθενής Κάτω Ημισυνέχεια των Νορμών (Θεώρημα 2.11 [14])
   Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ η L^p-νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής δηλαδή: όποτε:
   $$f_k \rightharpoonup f \text{ ασθενώς στον } L^p(\Omega)$$
   τότε:
   $$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p \geq \|f\|_p.$$
   Στην περίπτωση $p = \infty$ κάνουμε την επιπλέον τεχνική υπόθεση ότι το μέτρο μ του χώρου είναι σ-πεπερασμένο.
   Αν επιπλέον $1 < p < \infty$ και $\lim_{k\to 0} \|f_k\|_p = \|f\|_p$ τότε:
   $$f_k \to f, \text{ ισχυρά στον } L^p(\Omega).$$

9. Ισχυρή σύγκλιση συνέλιξης κατανομής με κανονικοποιητή.
   Θεώρημα 3.3 σελ.97 στο [1].
   Αν $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ οι συναρτήσεις $T * \omega_\varepsilon$ συγκλίνουν ισχυρά στη T στον $D'(\mathbb{R}^n)$.

Βιβλιογραφία

[1] Barros-Neto Josè. *An Introduction to the Theory of Distributions.* Marcel Dekker Inc NY, 1973.

[2] Botchorishvilli Ramaz, Perthame Benoit, Vasseur Alexis. Equilibrium Schemes for Scalar Conservation Laws with Stiff Sources. *Preprint*, 00:000–000, 2000.

[3] Brenier Y. Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en dimensions N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimensions N+1. *Journal of Differential Equations*, 50:375–390, 1983.

[4] Cockburn Bernardo, Coquel Frédéric, LeFloch Philippe. An erre estimate for Finite Volume Methods for Multidimensional Conservation Laws. *Math. of Comp.*, 63:77–103, 1994.

[5] DiPerna R., Lions P.L. *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global Existence and Weak Stability.* Ann. Math., 1989.

[6] DiPerna Ronald. Measure-Valued Solutions to Conservation Laws. *Arch. Rational Mech. Anal*, 88:223–270, 1985.

[7] Dunford, Schwartz. *Linear Operators Part1.* Interscience Publishers Inc,New York, 1957.

[8] Evans C.Lawrence. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations.* A.M.S, 1990.

[9] Eymart Robert, Gallouët Thierry, Herbin Raphaèlle. *Finite Volume Methods.* Handbook of Numerical Analysis, 1997.

[10] Godlewski Edwige, Raviart Pierre-Arnaud. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Ellipses-Paris, 1990.

[11] J.-P. Vila. Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. Explicit monote schemes. *Math. Anal. Numér*, 28:267–295, 1994.

[12] Katsaoynis th., Makridakis Ch. Finite Volume Relaxation schemes for Multidimensional Conservation Laws. *Math. Comp.*, 70:533–553, 2000.

[13] Kröner Dietmar. *Numerical Schemes for Scalar Conservation Laws.* Wiley-Teubner, 1997.

[14] Lieb Elliot, Loss Michael. *Analysis.* A.M.S, 1996.

[15] Lions P.l, Perthame B., Tadmor E. A Kinetic Formulation of Multidimensional Scalar Conservation Laws and Related Equations. *Journal of A.M.S*, 7:169–191, 1994.

[16] Perthame B. Global existence of solutions to the B.G.K model of Boltzmann equations. *Journal of Diff. Equations*, 81:191–205, 1989.

[17] Perthame Benoit. Uniqueness and error estimates in first order quasilinear conservation laws via the Kinetic Entropy Defect Measure. *Preprint*, 00:000–000, 1998.

[18] Perthame Benoit, Tadmor Eitan. A Kinetic Equation with Kinetic Entropy Functions for Scalar Conservation Laws. *Comm. Math. Phys.*, 136:501–517, 1991.

[19] Perthame Benoit, Tzavaras Athanasios. Kinetic formulation for systems of two Conservation Laws and Elastodynamics. *Preprint*, 00:000–000, 2000.

[20] Rudin Walter. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.