ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία
στην κατεύθυνση Μαθηματικά για την Εκπαίδευση

Το Θεώρημα του Πτολεμαίου

(Μια σύντομη ανασκόπηση από την αρχαιότητα έως τις μέρες μας)

Γιαννίνα Ρασούλη
Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Πλατής

Ηράκλειο 2012

Επιτροπή αξιολόγησης

- Χρήστος Κουρουνιώτης
- Πάρις Πάμφιλος
- Ιωάννης Πλατής (επιβλέπων)

Ευχαριστίες

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Ιωάννη Πλατή για την υπομονή, την καθοδήγηση, τις συμβουλές και την οργάνωση που μου παρείχε σε στιγμές που δυσκολευόμουν να βάλω σε τάξη όλο αυτόν τον όγκο πληροφοριών. Παρά το φορτωμένο του πρόγραμμα είχε πάντα χρόνο για συζητήσεις προσφέροντάς μου μια διαφορετική οπτική σε πολυάριθμα θέματα, ενώ με τις αλλεπάλληλες υποδείξεις του με βοήθησε ώστε η εργασία αυτή να φτάσει στην τελική της μορφή. Όποιο λάθος εξακολουθεί να υπάρχει είναι βέβαια δικό μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και το Στρατή που με έχουν στηρίξει όλα αυτά τα χρόνια και που ανέχτηκαν τα άγχη και τα δύσκολα ωράριά μου, καθώς και τη φίλη μου Χριστίνα για την πολύτιμη βοήθειά της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης, κυρίο Χρήστο Κουρουνιώτη και κύριο Πάρι Πάμφιλο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία είναι πάνω στη Γεωμετρία, τον πιο προσβάσιμο κλάδο των μαθηματικών. Για πάνω από δυο χιλιετίες η καλή γνώση της Γεωμετρίας ήταν ένα από τα κριτήρια που οδηγούσαν στο χαρακτηρισμό ένος ανθρώπου ως μορφωμένο. Στη σχολή του Πλάτωνα υπήρχε η επιγραφή "Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω", ενώ το 18ο και 19ο αι. η δημοσίευση προβλημάτων Γεωμετρίας γινόταν για να διασκεδάσει και να προσφέρει διανοητική ικανοποίηση στα άνω κοινωνικά στρώματα.

Θα ασχοληθούμε με ένα θεώρημα που παρουσιάστηκε από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο την ύστερη αρχαία εποχή και επηρέασε τον κλάδο της Αστρονομίας. Θα μελετήσουμε αρχικά το ιστορικό πλαίσιο της εποχής και τι ήταν αυτό που οδήγησε τον Πτολεμαίο στο επικείμενο θεώρημα. Στη συνέχεια, διατηρώντας μια ιστορική σκοπιά στην εξέλιξη διάφορων Γεωμετριών θα μελετήσουμε εφαρμογές του Θεωρήματος του Πτολεμαίου. Ξεκινώντας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, θα δούμε στη συνέχεια πώς στην Γεωμετρία της Αντιστροφής έχουμε εύκολες αποδείξεις για κάποια θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ θα καταλήξουμε σε όμορφα γενικευμένα αποτελέσματα στην ομάδα του Heisenberg.

Περιεχόμενα

Γνωρίζω πως γεννήθηκα θνητός και εφήμερος, μα σα μαντεύω τις πυκνές,
τις αμφίδρομες έλικες των αστεριών, τα πόδια μου δεν πατάνε πια στη γη,
πλάι στο Δία τρέφομαι σα θεός, χορταίνω με αμβροσία

Κλαύδιος Πτολεμαίος, επίγραμμα από την Αλμαγέστη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιστορικό πλαίσιο

1. Αλεξάνδρεια

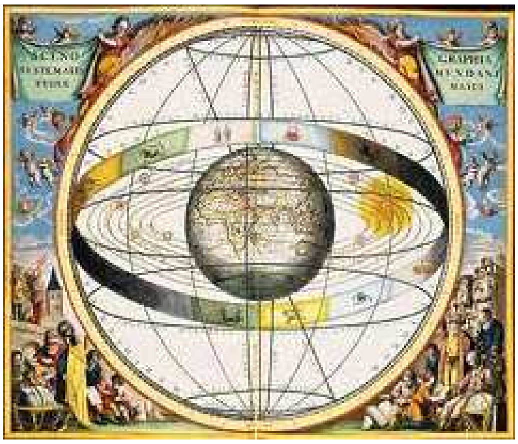
Με βαθιά γνώση και στρατηγική διορατικότητα, ο Μέγας Αλέξανδρος είχε επιλέξει την Αλεξάνδρεια ως το κέντρο του μελλοντικού κόσμου και είχε ξεκινήσει την οικοδόμηση της πόλης. Πολύ σύντομα, η Αλεξάνδρεια έγινε μια ανθηρή εμπορική μητρόπολη καθώς και ένα πολιτιστικό κέντρο πρώτης τάξεως. Ανάμεσα στα πολλά πλεονεκτήματα της Αλεξάνδρειας ήταν και η μεγάλης διάρκειας ειρήνη: κατά την διάρκεια της κυριαρχίας των Πτολεμαίων, που κράτησε σχεδόν για 300 χρόνια, (από το 305 ως το 30 π.Χ.), η πόλη δεν γνώρισε εξωτερικές συγκρούσεις. Μία μικρή διακοπή υπήρξε όταν η Αίγυπτος έγινε μέρος της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας και η Pax Romana εγκαταστήθηκε στη χώρα.

Δεν αποτελεί έκπληξη ότι η Αλεξάνδρεια ήταν ένας παράδεισος για τους λόγιους και ότι πάνω από μισό εκατομμύριο από τα αρχαία επιτεύγματα των λογίων προήλθε από αυτή την πόλη. Σχεδόν κάθε σπουδαίος μαθηματικός της αρχαιότητας ήταν είτε φοιτητής είτε διδάσκαλος στο Σεράπειο της Αλεξάνδρειας, ένα κτήριο που μαζί με τη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας λειτουργούσε σαν Πανεπιστήμιο.

Ο πρώτος βασιλιάς Πτολεμαίος (ο Σωτήρ) ίδρυσε το Μουσείο, το οποίο συγκέντρωσε κορυφαίους ποιητές και λόγιους αμοιβώμενους πλουσιοπάροχα από τους βασιλικούς θησαυρούς. Περιλάμβανε μια παγκοσμίως ξακουστή βιβλιοθήκη, στην οποία ο βασιλιάς Πτολεμαίος ο Β' ο Ευεργέτης πρόσθεσε ολόκληρες τις συλλογές των βιβλίων του Αριστοτέλη και του Θεοφράστου. Όλοι όσοι καλλιεργούσαν τις επιστήμες και τα γράμματα συνέρρεαν στην Αλεξάνδρεια: φιλόλογοι, ιστορικοί, γεωγράφοι, μαθηματικοί, αστρονόμοι, φιλόσοφοι και ποιητές. Τα έργα του Ομήρου αναλύονταν και ξεκαθαρίζονταν από τις αλλοιώσεις, θεμελιώθηκε η επιστήμη της χρονολόγησης και στην Αστρονομία θεμελιώθηκαν θεωρίες όπως των επίκυκλων και των έκκεντρων κύκλων που ερμήνευαν τις προσεκτικές παρατηρήσεις που είχαν γίνει. Οι ίδιοι άνθρωποι που έφεραν την τεράστια ανάπτυξη της Αστρονομίας, ο Αρίσταρχος, ο Αρχιμήδης, ο Ερατοσθένης και ο Απολλώνιος, ήταν επίσης οι κορυφαίοι μαθηματικοί του καιρού τους και οδήγησαν τα Μαθηματικά σε πρωτοφανή άνθηση. Ο Αρχιμήδης κατοικούσε στην αυλή του Ιέρωνος στις Συρακούσες, και επικοινωνούσε τακτικά με τον Ερατοσθένη, τον διευθυντή της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Ο δε Απολλώνιος έζησε και αυτός εκεί.

Όταν η βασιλική εύνοια και η υποστήριξη έπαυσαν, οι τέχνες και οι επιστήμες σταδιακά μαράζωσαν. Την περίοδο της άνθησης του 3ου π.Χ. αιώνα ακολούθησαν αιώνες σιγανής παρακμής: οι βασιλείς που διαδέχτηκαν τον Πτολεμαίο Γ΄ (τον Φιλάδελφο) δεν ήθελαν να διαθέσουν χρήματα στην επιστήμη. Μαζί με όλα τούτα επέρχεται και το τέλος των αρχαίων χρόνων που σημαδεύεται από την κυριαρχία της Ρώμης. Το 212 π.Χ. οι Συρακούσες υπέκυψαν σε Ρωμαϊκή πολιορκία, το 146 π.Χ. η Καρχηδόνα παραδόθηκε στην Αυτοκρατορία της Ρώμης και την ίδια χρονιά, η τελευταία από τις ελληνικές πόλεις, η Κόρινθος, επίσης παραδόθηκε και η Ελλάδα έτσι έγινε προάστειο της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Η Μεσοποταμία κατακτήθηκε το 65 π.Χ. και η Αίγυπτος παρέμεινε υπό την κυριαρχία των Πτολεμαίων ως το 30 π.Χ. Ο ελληνικός πολιτισμός διαχύθηκε μέσα στη ρωμαϊκή ζωή και ο Χριστιανισμός άρχισε να εξαπλώνεται ιδιαίτερα ανάμεσα στους φτωχούς και τους δούλους. Οι Ρωμαίοι διαχειριστές εισέπρατταν πολλούς φόρους αλλά δεν αναμειγνύονταν σε άλλα ζητήματα οικονομικής οργάνωσης των ανατολικών αποικιών. Στο πλαίσιο αυτό, και λόγω ιδίως της ισχυρότατης θεμελίωσης που υπήρξε κατά την πρώιμη περίοδο, μία σημαντική αναζωογόνηση των επιστημών παρουσιάζεται στην Αλεξάνδρεια στους πρώτους μετά Χριστόν αιώνες.

Ίσως το αποκορύφωμα της ανάπτυξης των Θετικών Επιστημών συνολικά, ήταν η Μεγίστη του Κλαύδιου Πτολεμαίου (περίπου το 140 π.Χ.). Ήταν ο Πτολεμαίος αυτός που μαζί με τον Ίππαρχο (περίπου το 130 π.Χ.) ολοκλήρωσαν το έργο των μεγάλων Αλεξανδρινών προπατόρων τους.



Η επικράτηση του Χριστιανισμού σημαδεύει το τέλος της κάθε μορφής ανάπτυξης των Θετικών Επιστημών στη Ρωμαϊκή επικράτεια.

Ο Μέγας Κωνσταντίνος ήταν ο πρώτος Ρωμαίος αυτοκράτορας που ασπάστηκε το Χριστιανισμό και υπέγραψε το 313 μ.Χ. το Διάταγμα των Μεδιολάνων με το οποίο κατοχυρώθηκε η ανεξιθρησκία και η θρησκευτική ελευθερία. Ιδιαίτερη αναφορά έγινε για τον Χριστιανισμό, ο οποίος καθίστατο θρησκεία επιτρεπτή και νόμιμη για τους Ρωμαίους πολίτες και οι χριστιανοί ελεύθεροι μπορούσαν να ασκήσουν τα θρησκευτικά τους καθήκοντα. Όμως, ο Χριστιανισμός δεν αναγνωριζόταν ακόμη ως επίσημη και προστατευόμενη θρησκεία της Αυτοκρατορίας. Το 330 μ.Χ. ο Μέγας Κωνσταντίνος μετέφερε την πρωτεύουσα της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας από την Ρώμη στο Βυζάντιο και την ονόμασε Κωνσταντινούπολη. Το 395 μ.Χ. η Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία χωρίστηκε στην Ανατολική και την Δυτική Αυτοκρατορία με την Ελλάδα να υπάγεται στην Ανατολική. Η οικονομική δομή και των δύο αυτοκρατοριών βασιζόταν στη γεωργία όπου δούλευαν πολλοί δούλοι. Τέτοιες συνθήκες ήταν αποπνικτικές για το οποιοδήποτε επιστημονικό έργο και έτσι ήρθε μια σταδιακή εξασθένιση στην παραγωγική σκέψη, ιδιαίτερα στο δυτικό μέρος όπου ακόμη περισσότεροι ασχολούνταν με το εμπόριο δούλων. Στην τελική παρακμή του δουλεμπορίου, με τις καταστροφικές του συνέπειες στην Ρωμαϊκή οικονομία, η επιστήμη βρισκόταν σε ένα πολύ μέτριο επίπεδο. Η Αλεξανδριανή σχολή σταδιακά έσβηνε και η δημιουργική σκέψη έδινε τη θέση της στην συλλογή και το σχολιασμό αυτών που ήδη υπήρχαν. Δύσκολες μέρες ακολούθησαν τη μάχη του Χριστιανισμού ενάντια στην αρχαία θρησκεία και τελικά, το 641 μ.Χ. οι Άραβες κατέλαβαν την Αλεξάνδρεια.

2. Τριγωνομετρία

Η προέλευση της Τριγωνομετρίας δεν είναι ξεκάθαρη. Σίγουρα όμως, όπως και άλλοι κλάδοι των μαθηματικών, δεν ήταν έργο ενός μόνο ανθρώπου ή έθνους. Θεωρήματα για λόγους πλευρών ομοίων τριγώνων ήταν γνωστά και χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους. Στον πάπυρο Rhind αναφέρονται κάποια προβλήματα γύρω από τη συνεφαπτομένη των διεδρικών γωνιών στη βάση μιας πυραμίδας ενώ στην πινακίδα Plimpton 332 περιέχονται στήλες με ορθογώνια τρίγωνα με ρητές πλευρές. Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι του 4ου και 5ου αιώνα π.Χ. είχαν συγκετρώσει έναν σημαντικό όγκο πληροφοριών από παρατηρήσεις που είχαν κάνει και είναι πλέον γνωστό ότι πολλά από αυτά πέρασαν και στους Έλληνες. Από την πρώιμη αυτή Αστρονομία γεννήθηκε η Σφαιρική Τριγωνομετρία.

Η συστηματική μελέτη των σχέσεων ανάμεσα σε γωνίες ή τόξα ενός κύκλου και τις αντίστοιχες τους χορδές συναντάται για πρώτη φορά στους Έλληνες. Η χρήση των χορδών ως εργαλεία μέτρησης επίκεντρων και εγγεγραμμένων γωνιών σε κύκλους ήταν γνωστή στους Έλληνες από την εποχή του Ιπποκράτη και είναι πιθανό ο Εύδοξος να είχε χρησιμοποιήσει λόγους και μετρήσεις γωνιών για να καθορίσει το μέγεθος της Γης και τις σχετικές αποστάσεις ανάμεσα στη Γη και τη Σελήνη. Στα έργα του Ευκλείδη δεν υπάρχει Τριγωνομετρία με την αυστηρή έννοια της λέξεως, αλλά υπήρχαν θεωρήματα ισοδύναμα με συγκεκριμένους τριγωνομετρικούς νόμους και κανόνες (Β΄ βιβλίο των Στοιχείων).

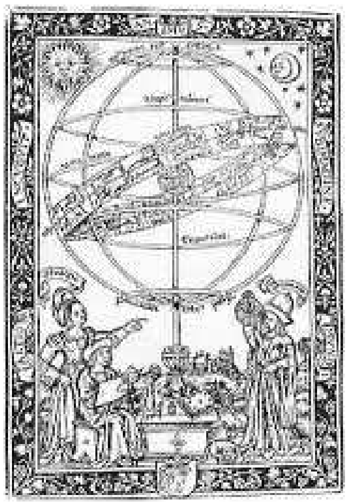
Όλο και περισσότερο οι αστρονόμοι της (πρώιμης) Αλεξανδρινής εποχής, όπως ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (279-194 π.Χ.) γνωστός για τη μέτρηση της Γης που έκανε και ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (310-230 π.Χ.), εργάζονταν επάνω σε προβλήματα με τρόπο που υποδείκνυε την ανάγκη για περαιτέρω συσχέτιση γωνιών και χορδών. Ο Αρίσταρχος σύμφωνα με τον Αρχιμήδη και τον Πλούταρχο πρότεινε ένα ηλιοκεντρικό σύστημα μιάμιση χιλιετία πριν τον Κοπέρνικο, αλλά αν και όλα τα γραπτά του πάνω σε αυτό το θέμα έχουν χαθεί, υπάρχει ωστόσο ένα προγενέστερο γραπτό στο οποίο μιλά για ένα γεωκεντρικό σύμπαν στο οποίο τα επιχειρήματά του στηρίζονται σε παρατηρήσεις γωνιών ανάμεσα στη Γη, τη Σελήνη και τον Ήλιο.

Από τους πιο διαπρεπείς αστρονόμους της αρχαιότητας ήταν ο Ίππαρχος, μία μεταβατική φυσιογνωμία ανάμεσα στη Βαβυλώνια Αστρονομία και το έργο του Πτολεμαίου, που έκανε τις μεγαλύτερες του ανακαλύψεις γύρω στο 140 π.Χ. Ο Ίππαρχος υπολόγισε ότι τα άστρα μετακινούνται από την θέση τους κατά 1/72 της μοίρας κάθε χρόνο ένα φαινόμενο που οφείλεται σε μια απειροελάχιστη κυκλική κίνηση του άξονα της Γης και η οποία χρειάζεται 25.800 χρόνια περίπου για να συμπληρωθεί. Ανακάλυψε δηλαδή ότι το εαρινό ισημερινό σημείο μετακινείται πάνω στην εκλειπτική με αντίθετη φορά 50 δευτερόλεπτα του ενός λεπτού της μοίρας κάθε χρόνο. Πράγμα που σημαίνει ότι με την πάροδο των αιώνων αλλάζει σιγά-σιγά και το άστρο που σημαδεύει τον Βόρειο Ουράνιο Πόλο. Πάνω σε αυτό το φαινόμενο της μετάπτωσης των ισημεριών στηρίζεται σήμερα ολόκληρο το οικοδόμημα της Αστρονομίας θέσεως.

Επί πλέον ο Ίππαρχος κατόρθωσε να προσδιορίσει με μεγάλη ακρίβεια ότι το μέγεθος του ηλιακού έτους είναι 365,242 ημέρες όταν με σύγχρονες μεθόδους προσδιορίζεται σε 365,242199 ημέρες. Ακόμη, το 129 π.Χ. μία ηλιακή έκλειψη τον βοήθησε να προσδιορίσει ότι η διάμετρος της Σελήνης είναι ίση με το 1/3 της γήινης όταν οι σημερινές τιμές αναφέρουν την διάμετρο της Γης ίση με 12.756 χιλιόμετρα και την διάμετρο της Σελήνης ίση με 3.476 χιλιόμετρα.

Ο Ίππαρχος ήταν αυτός που εισήγαγε στην Ελλάδα την διαίρεση του κύκλου σε 360^o. Αν και δεν έχουν σωθεί έργα του, ο σχολιαστής του 4ου π.Χ. αιώνα, Θέων της Αλεξάνδρειας[1], του αποδίδει μια πραγματεία 12 βιβλίων στην οποία ασχολείται με την κατασκευή ενός πίνακα χορδών. Ένας μεταγενέστερος πίνακας που δόθηκε από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο, (που πιστεύεται ότι ήταν πολύ επηρρεασμένος από την πραγματεία του Ίππαρχου), δίνει τα μήκη των χορδών όλων των επίκεντρων γωνιών από $\frac{1}{2}^o$ έως 180^o

[1]Θέων ο Αλεξανδρεύς (335-405 μ.Χ.): Μαθηματικός, αστρονόμος και τελευταίος διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας πριν την καταστροφή της. Έκδοσε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ενώ έγραψε σχόλια πάνω σε σημαντικά έργα συγγραφέων των ελληνιστικών χρόνων, ανάμεσα σε αυτά και πάνω στη Μεγίστη.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Theon_of_Alexandria*



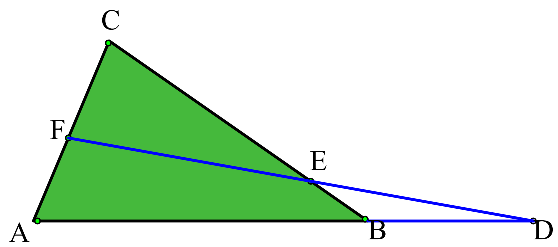
με βήμα $\frac{1}{2}^o$, για δοθέντα κύκλο. Η ακτίνα του κύκλου διαιρείται σε 60 ίσα μέρη και τα μήκη των χορδών εκφράζονται σε εξηκοστά παίρνοντας ένα από αυτά τα μέρη σαν μονάδα. Ο πίνακας χορδών είναι ισοδύναμος με τον πίνακα ημιτόνων, αφού μας δίνει τα ημίτονα των γωνιών μεταξύ 0^o και 90^o, ανά τέταρτο μοίρας.

Ο Θέων επίσης αναφέρει μια πραγματεία 6 βιβλίων του Μενελάου της Αλεξάνδρειας, την *Περί υπολογισμού των χορδών κύκλου* και τα *Σφαιρικά*. Στο Βιβλίο Ι θέτει τις βάσεις για σφαιρικά τρίγωνα ανάλογες με αυτές που έθεσε ο Ευκλείδης για τα τρίγωνα του επιπέδου. Στο Βιβλίο ΙΙ περιγράφει την εφαρμογή της Σφαιρικής Γεωμετρίας σε αστρονομικά φαινόμενα, ενώ στο Βιβλίο ΙΙΙ ασχολείται με την Τριγωνομετρία και περιέχει και το γνωστό Θεώρημα του Μενελάου, σύμφωνα με το οποίο αν οι πλευρές AB, BC, CA ενός τριγώνου τέμνονται από μια ευθεία στα σημεία D, E, F αντίστοιχα, τότε

$$AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF.$$

Αυτό το θεώρημα το επέκτεινε και σε σφαιρικά τρίγωνα σε μια μορφή ισοδύναμη με την

$$\sin AD \sin BE \sin GF = \sin BD \sin CE \sin AF.$$



Το Θεώρημα του Μενελάου έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη Σφαιρική Τριγωνομετρία και την Αστρονομία, αλλά μακράν το πιο σημαντικό έργο Τριγωνομετρίας με τη μεγαλύτερη επηρροή ήταν η Μεγίστη του Πτολεμαίου ο οποίος έζησε μισό αιώνα μετά το Μενέλαο.

Η εξαφάνιση πολλών εργασιών των αρχαίων Ελλήνων πάνω στην Αστρονομία οφείλεται στο γεγονός ότι η η Μεγίστη του Πτολεμαίου επισκίασε όλες τις παλαιότερες εργασίες καθιστώντας τις περιττές. Ο Πτολεμαίος έγραψε αυτή τη μεγάλη και αποφασιστικής σημασίας εργασία του πάνω στην Αστρονομία γύρω στα 150 μ.Χ. Το έργο αυτό που άσκησε τεράστια επίδραση διακρίνεται για την πληρότητα, την πυκνότητα και την κομψότητά του. Μεταγενέστεροι σχολιαστές, για να διακρίνουν αυτή την εργασία από λιγότερο σηματικές, τη χαρακτήρισαν με το υπερθετικό μεγίστη. Ακόμα αργότερα, οι Άραβες μεταφραστές έβαλαν σαν πρόθεμα το αραβικό άρθρο αλ και από τότε η εργασία είναι γνωστή ως Αλμαγέστη. Το έργο περιλαμβάνει δεκατρία βιβλία και στο πρώτο βιβλίο, ανάμεσα σε στοιχειώδη θέματα Αστρονομίας, βρίσκουμε ήδη τον πίνακα χορδών που αναφέραμε παραπάνω, μαζί με μια σύντομη επεξήγηση του τρόπου υπολογισμού του από μια παραγωγική γεωμετρική πρόταση, γνωστή σήμερα ως Θεώρημα του Πτολεμαίου. Στην Παράγραφο 3.2 θα επεκταθούμε ακόμη περισσότερο γύρω από την Μεγίστη.

3. Κλαύδιος Πτολεμαίος (100-178 μ.Χ.)

3.1. Η ζωή και το έργο του Πτολεμαίου. Ξέρουμε πολύ λίγα για τη ζωή του Κλαύδιου Πτολεμαίου, του τελευταίου μεγάλου Έλληνα αστρονόμου. Η ζωή και η προσωπικότητά του είναι αξιοσημείωτα επισκιασμένες εν συγκρίσει με ό, τι γνωρίζουμε για κάποιους άλλους επιφανείς επιστήμονες του αρχαίου κόσμου, αλλά ο λόγος είναι εμφανής: Ο Πλούταρχος μας έδωσε μια γλαφυρή βιογραφική απεικόνιση τόσο του Αριστοτέλη όσο και του Αρχιμήδη αλλά όχι του Πτολεμαίου παρότι ήταν σύγχρονος του, προτιμώντας κάποιον Ρωμαίο αντίστοιχό του. Ακόμη, ο λεξικογράφος Διογένης Λαέρτιος δεν αναφέρει καν το όνομά του, και επίσης η μεταγενέστερη παράδοση αναφορικά με τον Πτολεμαίο είναι πολύ σπάνια.

Ο τόπος στον οποίο γεννήθηκε ο Πτολεμαίος δεν είναι γνωστός. Το αληθινό του όνομα Κλαύδιος είναι ρωμαϊκό, το δεύτερό του όνομα Πτολεμαίος μπορεί να αποτελεί ένδειξη ότι προερχόταν από μία εκ των διαφόρων αιγυπτιακών πόλεων οι οποίες πήραν το όνομά τους από Πτολεμαίους βασιλείς, ίσως από την Ptolemais Hermeiu στη μέσο Αίγυπτο. Ακριβές είναι μόνο το γεγονός ότι εκτέλεσε τις παρατηρήσεις του στην Αλεξάνδρεια, όπως αναφέρεται σε διάφορα σημεία της Μεγίστης.

Όλα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι έζησε και πέθανε ειρηνικά, απαρατήρητος από την πλειοψηφία του κόσμου και αφιερώνοντας τον εαυτό του στην συγγραφή των επιστημονικών έργων υψηλής τεχνικής φύσεως, ανίκανος να προσελκύσει την προσοχή των λόγιων της ύστερης αρχαιότητας. Λίγα απομεινάρια από τα χέρια αυτών έχουν συλλεχθεί από τον Boll (1894) και τον Fischer (1932), μαζί με μερικά στοιχεία από τους μετέπειτα Άραβες συγγραφείς και μια λιγότερο ή περισσότερο θρυλική περιγραφή-για παράδειγμα ότι ήταν μετρίου αναστήματος, με ένα χλωμό πρόσωπο, μια μαύρη, μυτερή γενειάδα, ένα μικρό στόμα και μια ήπια και ευχάριστη φωνή και άλλα τέτοιου τύπου. Αυτό είναι στην πραγματικότητα μια τυπική περιγραφή ενός Στωικού φιλοσόφου, χωρίς ιστορική αξία. Το αποτέλεσμα είναι ότι η εικόνα μας για τον Πτολεμαίο έγκειται αποκλειστικά στο έργο του από όπου μπορούν να προέλθουν τουλάχιστον κάποια βιογραφικά στοιχεία.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος ήταν για την Αστρονομία ότι ήταν ο Ευκλείδης για την Επίπεδη Γεωμετρία, ο Απολλώνιος για τις κωνικές τομές και ο Νικόμαχος για την Αριθμητική. Έβαλε σε μια πραγματεία τις ανακαλύψεις προγενέστερων του, ταξινομώντας τις συστηματικά ενώ χάρη στην ευφυία του έκανε το έργο του να είναι εξαίρετο πρότυπο για πολλούς αιώνες. Το σπουδαιότερο έργο του, η Μεγίστη, περιέχει πολλές πληροφορίες για την αρχαία Αστρονομία. Έγραψε επίσης για τη γεωγραφία, τη μουσική και τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά ενώ ασχολήθηκε και με τη στερεογραφική προβολή για να φτιάξει χάρτες. Επιχείρησε ακόμη να αποδείξει ότι το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη έπεται από τα άλλα αιτήματα και αξιώματα των Στοιχείων, σε μια απόπειρα να αφαιρέσει το αξίωμα αυτό από τις αρχικές υποθέσεις του Ευκλείδη. Ακόμη, του καταλογίζεται συχνά ένα έργο για την οπτική, τα *Οπτικά*.

Στην Μεγίστη υπάρχει μια περίληψη των υπολογισμών του Ερατοσθένη, του Ποσειδώνειου και άλλων ως προς το μέγεθος της Γης, τη θέση κάποιων πλανητών και το μέγεθος νησιών και χωρών. Στην εφαρμογή των μαθηματικών στην Αστρονομία και τη Γεωγραφία, ο Πτολεμαίος είναι μακράν ο πρώτος ανάμεσα σε άλλους Έλληνες μαθηματικούς.

Στην εισαγωγή της Μεγίστης, ο Πτολεμαίος κάνει μια πρωτοφανή δήλωση. Ισχυρίζεται ότι η Φυσική και η Θεολογία είναι εικοτολογικές και ότι μόνο τα Μαθηματικά παρέχουν αναμφισβήτητη γνώση. Ακόμη, υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά μπορούν να συνεισφέρουν σημαντικά στη Φυσική. Σε κάποιο άλλο σημείο αναφέρει ότι αν και πίστευε ότι οι αστρονομικές του υποθέσεις ήταν όσο το δυνατόν πιο ακριβείς, θεωρούσε ότι μόνο κάποιες από τις συνιστώσες της υπόθεσης ήταν σωστές.

Ας εξετάσουμε πρώτα τη λίστα των παρατηρήσεων που καταγράφονται στη Μεγίστη. Περίπου το ένα τρίτο του συνολικού αριθμού οφείλονται στον ίδιο τον Πτολεμαίο, η πρώτη παρατήρηση αφορά την έκλειψη της

Σελήνης στην Αλεξάνδρεια το 9ο έτος της Βασιλείας του Αδριανού, ακριβέστερα, στις 5 Απριλίου 125 μ.Χ. Η τελευταία παρατήρηση αφορά τη μέγιστη αποχή του Ερμή που πραγματοποιήθηκε κατά το 4ο έτος της Βασιλείας του Αντωνίνου Πίου, δηλαδή στις 2 Φεβρουαρίου 141 μ.Χ., επίσης στην Αλεξάνδρεια. Αυτό δείχνει ότι Πτολεμαίος συνέλεξε τα στοιχεία για τις πλανητικές του θεωρίες την περίοδο 125-141 μ.Χ., και ότι η Μεγίστη πρέπει να είχε ολοκληρωθεί μετά από αυτό το διάστημα. Υπάρχουν επαρκή στοιχεία που αποδεικνύουν ότι ο Πτολεμαίος συνέχισε την επιστημονική του δραστηριότητα, αφού ολοκλήρωσε τη Μεγίστη. Έτσι γνωρίζουμε ότι κατά το δέκατο έτος της Βασιλείας του Αντωνίνου (147/48 μ.Χ.) ανέγειρε μια στήλη στην πόλη της Κάνωπος περίπου 15 μίλια ανατολικά της Αλεξάνδρειας, στην οποία υπήρχε μια επιγραφή που περιείχε βελτιωμένες παραμέτρους των πλανητικών μοντέλων. Ακόμα καλύτερες παράμετροι βρίσκονται στους λεγόμενους Εύχρηστους - Πίνακες ή Tabulae manuales, οι οποίοι ως εκ τούτου φαίνεται να έχουν ακόμη μεταγενέστερη ημερομηνία. Επίσης η εργασία για την Πλανητική Υπόθεση καθώς και το αστρολογικό Τετράβιβλος είναι μεταγενέστερα από τη Μεγίστη, όπως ρητά αναφέρεται στα κείμενα. Τέλος, φαίνεται ότι η μεγάλη πραγματεία του Πτολεμαίου στη Γεωγραφία είναι αργότερα από τους Εύχρηστους Πίνακες. Αν αναλογιστούμε ότι ο Πτολεμαίος άφησε επίσης έναν σημαντικό αριθμό άλλων έργων στην Οπτική, την Αρμονία, τα Μαθηματικά και την Φιλοσοφία, συνειδητοποιούμε ότι ένα μεγάλο εύρος ετών ήταν απαραίτητο για την παραγωγή τους.

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι η επιστημονική δραστηριότητα του Πτολεμαίου εκτάθηκε περίπου από το 125 μ.Χ. έως την βασιλεία του Μάρκου Αυρήλιου (161-180). Αυτό συμφωνεί επίσης με μια δήλωση του Ολυμπιόδωρου ότι ο Πτολεμαίος εργάστηκε στην πόλη της Κάνωπος για 40 χρόνια. Αναλόγως τα νέα όργανα που ο ίδιος επινόησε και κατασκεύασε πρέπει να έχουν τοποθετηθεί εκεί σε κάποιου είδος παρατηρητήριο. Η αναμφισβήτητη παράδοση ότι ανέγειρε την στήλη στην γειτονική Κάνωπο εμφανίζει σύνδεση με αυτήν την τοποθεσία. Ίσως είχε το σπίτι του σε αυτή τη μικρότερη πόλη, που προσέφερε καλύτερες δυνατότητες για μια ήρεμη ζωή μελέτης από ότι στην θορυβώδη πρωτεύουσα του Ελληνιστικού κόσμου. Πιθανότατα οι ημερομηνίες γέννησης και θανάτου του είναι περίπου 100 και 165 μΧ.

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η Αλεξάνδρεια από το 282 π.Χ φημιζόταν για τις μεγάλες προσωπικότητες που φιλοξενούσε, όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Ερατοσθένης, ενώ οι βιβλιοθήκες της ήταν ανυπέρβλητες στον αρχαίο κόσμο περιέχοντας εκεί πολλές εκατοντάδες χιλιάδες συγγράμματα τόσο Ελληνικής όσο και Ανατολικής προέλευσης. Εδώ ο Πτολεμαίος είχε πρόσβαση όχι μόνο στα αποτελέσματα του Ίππαρχου, του Αρίσταρχου και του πρώτου Αλεξανδρινού αστρονόμου Τιμοχάρη[2], αλλά και στις παρατηρήσεις που έγιναν στην Αθήνα από τον Μέτωνα[3] και τον Ευκτήμονα[4] τον 5ο π.Χ αιώνα, και ακόμη και σε πολύ αρχαίες Βαβυλωνιακές καταγραφές οι οποίες του επέτρεψαν να χρησιμοποιήσει μια σεληνιακή έκλειψη που παρατηρήθηκε στη Βαβυλώνα το 721 π.Χ. Υπάρχει μία μόνο αναφορά σε έναν σύγχρονο επιστήμονα, τον Θέωνα της Σμύρνης[5], που έδωσε μερικές από τις παρατηρήσεις του κατά την περίοδο 127-132 μ.Χ. στον Πτολεμαίο, ο οποίος μπορεί να ήταν φίλος του ή μαθητής του. Το προσόν του Πτολεμαίου ήταν ότι ήταν πιο προσεκτικός από ό,τι οι περισσότεροι Ελληνιστικοί συγγραφείς, αναγράφοντας τις πηγές του και αναγνωρίζοντας τους προκατόχους του, αλλά ήταν η μεγάλη Αλεξανδρινή βιβλιοθήκη που του επέτρεψε να το πράξει.

Αναφερόμαστε κυρίως στον Πτολεμαίο ως αστρονόμο, αλλά με μια ματιά στους τίτλους των διασωζόμενων έργων του ή όσων έχουν χαθεί αποκαλύπτεται ως επιστήμονας με πολύ πιο καθολικά ενδιαφέροντα. Είναι σχεδόν σαν να ήθελε να συνθέσει μια τεράστια "εγκυκλοπαίδεια εφαρμοσμένων μαθηματικών" ως αντιστάθμισμα σε ήδη υπάρχουσες περιεκτικές εκθέσεις των καθαρών μαθηματικών. Θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι ο Πτολεμαίος πέτυχε την εκτέλεση αυτού του έργου. Ωστόσο, θα ήταν λάθος να τον θεωρήσουμε ως απλό μεταγλωττιστή στα αποτελέσματα των άλλων. Επειδή πάντα αναγνώριζε τη συμβολή των παλαιότερων επιστημόνων τα δικά του αποτελέσματα ξεχωρίζουν σαφώς και το έργο του περιέχει σημαντική προσωπική συμβολή. Το επιστημονικό του πνεύμα και η αγάπη

[2]Τιμοχάρης: Αστρονόμος από την Αλεξάνδρεια, που οι υπολογισμοί του χρησιμοποιήθηκαν από τον Ίππαρχο για την ανακάλυψη της προσπτώσεως των ισημεριών.
Πηγή: *http://el.wiktionary.org*

[3]Μέτων: Έλληνας μαθηματικός, αστρονόμος, γεωμέτρης και μηχανικός ο οποίος έζησε στην Αθήνα τον 5ο π.Χ. αιώνα. Είναι πιο γνωστός για τους υπολογισμούς που αφορούν τον επώνυμο Μετωνικό κύκλο που εισήγαγε το 432 π.Χ.το σεληνιακό Αττικό ημερολόγιο, σύμφωνα με το οποίο υποθέτει ότι 19 ηλιακά έτη είναι ίσα με 235 σεληνιακούς μήνες, που ισούνται με 6940 ημέρες. Ο αρχαιότερος γνωστός αστρονομικός υπολογιστής του κόσμου, ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων (2ος αιώνας π.Χ.), εκτελεί υπολογισμούς με βάση τον Μετωνικό κύκλο.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org/wiki/Meton*

[4]Ευκτήμων ο Αθηναίος: Αστρονόμος, μετεωρολόγος και γεωγράφος της κλασικής εποχής (5ος αιώνας π.Χ.). Υπήρξε μαθητής του Μέτωνος με τον οποίο πραγματοποίησε μία σειρά παρατηρήσεων των ηλιοστασίων προκειμένου να υπολογισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η διάρκεια του τροπικού έτους, ενώ καθόρισαν και τις σχέσεις του ηλιακού και σεληνιακού έτους. Ο κρατήρας Ευκτήμων στο βόρειο ημισφαίριο της Σελήνης πήρε το όνομά του προς τιμήν του.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org/wiki/Euctemon*

[5]Θέων ο Σμυρναίος (ή Θέων ο Πλατωνικός): Μαθηματικός και φιλόσοφος, που γεννήθηκε στη Σμύρνη και άκμασε κατά το τέλος του 1 αιώνα, και τις αρχές του 2 αιώνα μ.Χ. Ήταν οπαδός της πλατωνικής φιλοσοφίας και ασχολήθηκε ειδικά με τη σπουδή των πλατωνικών διαλόγων. Ο Θέων απέδιδε ως οπαδός της πλατωνικής φιλοσοφίας μυστηριακή σημασία κάθαρσης στα Μαθηματικά.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Theon_of_Smyrna*

του για έρευνα αποδεικνύονται σαφώς από το γεγονός ότι δεν εφησυχάστηκε από αυτά που είχε ήδη επιτύχει: μόλις τελείωσε τη Μεγίστη, ένα σπάνιο και αξιοσημείωτο διανοητικής προσπάθειας σύγγραμμα, ο Πτολεμαίος αμέσως άρχισε να βελτιώνει τόσο τις θεωρίες του περί γεωγραφικού πλάτους όσο και τις παραμέτρους του σεληνιακού μοντέλου, όπως φαίνεται από την επιγραφή στην στήλη Κάνωπος και τους Εύχρηστους Πίνακες. Αλλά το γεγονός ότι είχε τόσο ασίγαστη ορμή να καλυτερεύει τα αποτελέσματά των αστρονομικών του παρατηρήσεων, είναι πιθανόν ότι παρά την πληθώρα τον ενδιαφερόντων του κατά βάθος η καρδιά του να ήταν αφιερωμένη στη Αστρονομία, ακριβώς όπως διατηρείται από την παράδοση.

3.2. Τα έργα του Πτολεμαίου. Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τα κυριότερα έργα του Πτολεμαίου. Σαφέστατα το σημαντικότερο έργο του Πτολεμαίου είναι η Μεγίστη, ωστόσο ασχολήθηκε και με τη Γεωγραφία, γράφοντας τη Γεωγραφική Υφήγηση, ενώ στο έργο του Πλανησφαίριο περιγράφει τη στερεογραφική προβολή. Στο έργο του Οπτικά ασχολείται με τη διάθλαση του φωτός, ενώ προς μεγάλη έκπληξη στην Τετράβιβλο καταπιάνεται με πολύ απλούστερα Μαθηματικά και αστρολογία. Υπάρχουν ακόμη βιβλία αστρολογικά και μουσικά στα οποία όμως δεν θα επεκταθούμε.

Η Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξις, ή Μεγίστη, ή Αλμαγέστη

Η Μαθηματική Σύνταξη τυπώθηκε αρχικά σε συντομευμένη μορφή από τον Johann Mueller στη Βενετία το 1496, γνωστό ως Regiomontanus[6] που κατασκεύασε έναν πίνακα εφαπτομένων, ενώ η πρώτη πλήρης έκδοση ήταν το 1515 πάλι στη Βενετία.

Το καθοριστικό, λοιπόν, ελληνικό έργο για την Αστρονομία, που γράφτηκε από τον Πτολεμαίο γύρω στο 150 μ.Χ. και επηρρέασε πολλούς αργότερα, στηριζόταν σε γραπτά του Ίππαρχου και ξεχώριζε για την συμπάγεια και την κομψότητα του.

Η πραγματεία αποτελείται από δεκατρία βιβλία. Το Βιβλίο Ι περιέχει ανάμεσα σε κάποια εισαγωγικά για την Αστρονομία, τον πίνακα των χορδών μαζί με μια επεξήγηση για το πως αυτός προέκυψε από το Θεώρημα του Πτολεμαίου. Στο Βιβλίο ΙΙ μελετώνται φαινόμενα που σχετίζονται με τη

[6] Regiomontanus ή Johannes Muller von Königsberg (1437-1476): Γερμανός μαθηματικός, αστρονόμος και μεταφραστής. Το έργο του πάνω στην Αριθμητική και την Άλγεβρα ήταν ανάμεσα στα πρώτα που είχε συμβολική Άλγεβρα. Ήταν μαθητής του Peuerbach και ήταν δάσκαλος του δάσκαλου του Κοπέρνικου. Υπάρχουν εικασίες ότι είχε καταλήξει σε μια ηλιοκεντρική θεωρία πριν το θάνατό του, ενώ έχει δοθεί το όνομά του σε έναν κρατήρα της Σελήνης.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus*

σφαιρικότητα της Γης, ενώ γίνεται διαίρεση μιας ουράνιας σφαίρας σε ζώνες. Στα Βιβλία III, IV, V γίνεται μελέτη του γεωκεντρικού συστήματος της Αστρονομίας με τη χρήση επικυκλίων και περιγραφή του αστρολάβου που ήταν σημαντικό αστρονομικό εργαλείο. Στο Βιβλίο IV εμφανίζεται μια λύση του Προβλήματος των τριών σημείων: Να βρεθεί σημείο από το οποίο ζεύγη από τρία δοθέντα σημεία βλέπονται από δοθείσες γωνίες. Αυτό το πρόβλημα έχει μακρά ιστορία και μερικές φορές αναφέρεται ως "Πρόβλημα του Snell " ή ως "Πρόβλημα του Pothenot ". Στο Βιβλίο VI , όπου παρουσιάζεται η θεωρία των ελλείψεων, υπολογίζεται με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων ο π. Τα Βιβλία VII, VIII είναι κατάλογοι 1028 σταθερών αστέρων, ενώ τα υπόλοιπα βιβλία είναι αφιερωμένα στους πλανήτες. Η Μεγίστη παρέμεινε το κύριο έργο Αστρονομίας μέχρι την εποχή του Κοπέρνικου και του Κέπλερ.

Η Μεγίστη ήταν έργο αστρονομικό, αποτελούμενο από πολλά βιβλία, υπέρτατης δεξιοτεχνίας και πρωτοτυπίας. Τα κοινά κλάσματα ήταν πάρα πολύ άβολα για τους αστρονομικούς υπολογισμούς. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι Έλληνες αστρονόμοι υιοθέτησαν τα βαβυλωνιακά εξηκονταδικά κλάσματα. Δεν γνωρίζουμε ποιός ήταν ο πρώτος που τα χρησιμοποιήσε, διότι η θαυμάσια Μεγίστη του Κλαύδιου Πτολεμαίου, όπως προαναφέραμε, είχε ως επακόλουθο τα έργα των προγενεστέρων του να περιπέσουν στη λήθη. Στη Μεγίστη, ο κύκλος διαιρείται, κατά το βαβυλωνιακό τρόπο, σε 360 μοίρες, κάθε μοίρα σε 60 πρώτα λεπτά και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά. Όταν ο Πτολεμαίος θεωρεί έναν κύκλο, συνήθως διαιρεί τη διάμετρο σε 120 μέρη και, κατόπιν, υποδιαιρεί το κάθε μέρος σύμφωνα με το ίδιο σχήμα. Για το μηδέν χρησιμοποιεί το σύμβολο 'ο', μια συντομογραφία του ουδέν που σημαίνει τίποτα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το χρησιμοποιεί ως σύμβολο μη ύπαρξης και όχι όπως το χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα. Επέκτεινε τη χρήση εξηκονταδικών κλασμάτων και ανέπτυξε τον πίνακα των χορδών που είχε χρησιμοποιηθεί από τον Ίππαρχο.

Το έργο αυτό, όπως προαναφέραμε, περιλαμβάνει επίσης μια τριγωνομετρία και περιέχει τον πίνακα για τις χορδές κύκλου, οι οποίες αντιστοιχούν σε γωνίες που αυξάνουν διαδοχικά κατά μισή μοίρα. Δηλαδή, ο πίνακας παρέχει το ανάλογο ενός πίνακα ημιτόνων, γιατί σύμφωνα με τον τύπο είναι χορδή $\alpha = 2R\sin\frac{a}{2}$. Οι τιμές που δίνει ο Πτολεμαίος αντιστοιχούν σε $R = 60$. Για τη χορδή της 1^o έχει βρει την τιμή $(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3} = 0,17453$ και για το π έχει δώσει την τιμή $(3, 8, 30) = \frac{377}{120} = 3,14166$. Στην Μεγίστη συναντάμε και τα ανάλογα των τύπων για το ημίτονο και το συνημίτονο του αθροίσματος και της διαφοράς των δυο γωνιών, καθώς επίσης μιαν απαρχή Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Η διατύπωση των θεωρημάτων ήταν γεωμετρική. Ο τωρινός τριγωνομετρικός συμβολισμός χρονολογείται από πολύ μεταγενέστερη εποχή.

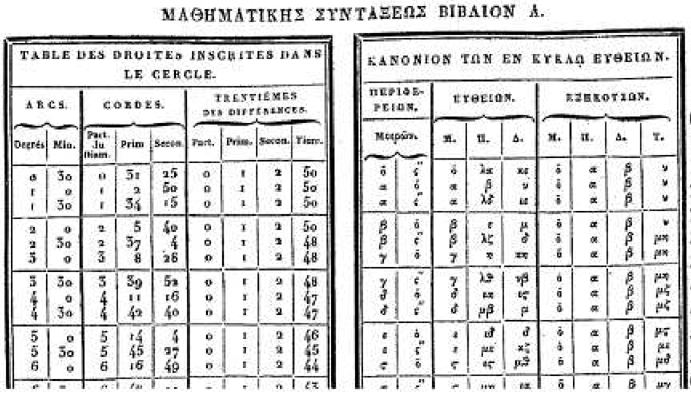
Η Αλμαγέστη είχε την ίδια μοίρα με πολλά άλλα μεγάλα επιστημονικά έργα. Συζητήθηκε από πολλούς, αλλά μελετήθηκε σοβαρά μόνο από λίγους. Ωστόσο ήταν εξίσου σημαντική στην αρχαία επιστήμη όσο και το

Principia του Νεύτωνα το 17ο αιώνα και αναμφίβολα ήταν πιο σπουδαίο από το De revolutionibus του Κοπέρνικου που επισκίασε τον Πτολεμαίο και το έργο του. Η Αλμαγέστη ήταν το ζενίθ της ελληνικής Αστρονομίας και κυριαρχούσε στην αρχαιότητα ως παράδειγμα του πως μια μεγάλη και σημαντική κλάση φυσικών φαινομένων μπορούσε να περιγραφεί με μαθηματικούς όρους ώστε η μελλοντική τους πορεία να μπορεί να προβλεφθεί με λογική ακρίβεια.

Δίδαξε τους επιστήμονες πολλών εποχών πώς τα γεωμετρικά και κινητικά μοντέλα μπορούν να κατασκευαστούν και μέσω εμπειρικών δεδομένων που προκύπτουν από προσεκτικές παρατηρήσεις που προσομοιάζουν τη φύση με ένα τρόπο που επηρρέασε την επιστημονική μέθοδο μέχρι σήμερα. Είναι αλήθεια ότι οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει εκλεπτυσμένες αλγεβρικές μεθόδους για να εξηγούν αυτά τα φαινόμενα. Όμως, από όσο γνωρίζουμε δεν προσπάθησαν ποτέ να συγκεντρώσουν τις μεθόδους και τα αποτελέσματά τους σε ένα κατανοητό έργο συγκρίσιμο με αυτό του Πτολεμαίου.

Η γενική αποδοχή της ονομασίας Αλμαγέστη για τη (Μεγάλη) Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου φανερώνει την επίδραση που είχαν στη Δύση οι αραβικές μεταφράσεις. Πολλά έργα των Ελλήνων κλασικών, που αλλιώς θα είχαν χαθεί, διασώθηκαν χάρη σε αυτές τις μεταγραφές και μεταφράσεις.

Η Αλμαγέστη του Πτολεμαίου, πιστεύεται ότι οφείλει πολλά στο *Περί της πραγματείας των εν κύκλω ευθειών* του Ίππαρχου, αλλά το μέγεθος αυτής της οφειλής δεν μπορεί να εκτιμηθεί. Είναι προφανές ότι στην Αστρονομία ο Πτολεμαίος έκανε χρήση του καταλόγου που είχε συντάξει ο Ίππαρχος για τις θέσεις άστρων αλλά δεν μπορεί να ξεκαθαριστεί αν οι τριγωνομετρικοί πίνακες του Πτολεμαίου προέκυψαν κατά μεγάλο μέρος από το έργο του Ίππαρχου. Ευτυχώς, η Αλμαγέστη έχει διασωθεί ως σήμερα και έτσι έχουμε όχι μόνο του τριγωνομετρικούς τύπους αλλά και μια ιδέα από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για να προκύψουν. Κεντρικό ρόλο σε αυτούς τους υπολογισμούς, όπως προαναφέραμε, έπαιξε το γνωστό Θεώρημα του Πτολεμαίου.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du diam.	Prim	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

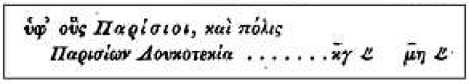
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ο	∠'	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	ο	α	β	ν	ο	α	β	ν
α	∠'	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν
β	ο	β	ε	μ	ο	α	β	ν
β	∠'	β	λζ	δ	ο	α	β	μη
γ	ο	γ	η	κη	ο	α	β	μη
γ	∠'	γ	λθ	νβ	ο	α	β	μη
δ	ο	δ	ια	ιϛ	ο	α	β	μζ
δ	∠'	δ	μβ	μ	ο	α	β	μζ
ε	ο	ε	ιδ	δ	ο	α	β	μϛ
ε	∠'	ε	με	κζ	ο	α	β	με
ϛ	ο	ϛ	ιϛ	μθ	ο	α	β	μδ

0	30	0	31	25
1	0	1	2	50
1	30	1	34	15
2	0	2	5	**39**
2	30	2	37	4
3	0	3	8	28
3	30	3	39	**53**
4	0	4	11	**17**
4	30	4	42	40
5	0	5	14	4
5	30	5	45	27
6	0	6	16	49

Ήταν η χορδή της διαφοράς δυο τόξων που ήθελε ο Πτολεμαίος αρχικά να υπολογίσει και που του φάνηκε τελικά πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό των πινάκων του. Επίσης χρήσιμος του ήταν ο υπολογισμός της χορδής του μισού τόξου. Δηλαδή αν η χορδή ενός τόξου είναι γνωστή, τότε και η χορδή του μισού τόξου του ήταν επίσης γνωστή. Έτσι, ο Πτολεμαίος μπορούσε να φτιάξει τον πίνακα των χορδών όσο ακριβή επιθυμούσε, αφού είχε τύπους ισοδύναμους με τους σημερινούς. Με όλους αυτούς τους τύπους για τα αθροίσματα και τις διαφορές χορδών, τις χορδές των μισών τόξων και μια καλή εκτίμηση για τη χορδή της $\frac{1}{2}^o$, ο Πτολεμαίος έφτιαξε τον πίνακά του, που αποτελούνταν από τις χορδές των τόξων από $\frac{1}{2}^o$ έως 180^o για κάθε $\frac{1}{2}^o$, που είναι ισοδύναμος με τον πίνακα ημιτόνων από $\frac{1}{4}^o$ έως 90^o με βήμα $\frac{1}{4}^o$. Ο πίνακας αυτός ήταν βασικό μέρος του βιβλίου Ι της Αλμαγέστης και ήταν αναντικατάστατο εργαλείο για τους αστρονόμους της επόμενης χιλιετίας. Τα υπόλοιπα 12 βιβλία αυτής της πραγματείας, περιέχουν ανάμεσα σε άλλα, τη θεωρία κύκλων και επικυκλίων για τους πλανήτες, γνωστή ως Πτολεμαϊκό σύστημα. Όπως ο Αρχιμήδης και ο Ίππαρχος, ο Πτολεμαίος πίστευε σε ένα γεωκεντρικό σύμπαν μιας και η ιδέα μιας Γης που κινείται, αντιμετώπιζε πολλές δυσκολίες. Εκτός από την κοινή λογική την οποία εξέφραζε, το Πτολεμαϊκό σύστημα είχε το πλεονέκτημα της εύκολης αναπαράστασης.

Γεωγραφική Υφήγησις

Άλλο ένα σημαντικό έργο του Πτολεμαίου είναι η Γεωγραφική Υφήγηση που αποτελείται από 8 βιβλία που ήταν τόσο σημαντικά στη Γεωγραφία όσο η Μεγίστη στην Αστρονομία. Σε αυτό προσδιορίζεται η θέση των τόπων της Γης από τα γεωγραφικά τους μήκη και πλάτη, όπως χρησιμοποιούνται σήμερα με αριθμητικές συντεταγμένες, σε αντίθεση με τον Απολλώνιο που αν και είχε κάνει χρήση συντεταγμένων νωρίτερα, για το χαρακτηρισμό κωνικών τομών, δεν πρόσδιδε σε αυτές αριθμητικές τιμές. Στη Γεωγραφική Υφήγηση γινόταν ακόμη περιγραφή της χαρτογραφικής προβολής και περιείχε 8000 πόλεις, ποτάμια και άλλα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της Γης. Δυστυχώς δεν υπήρχε ικανοποιητικός τρόπος να μετρηθούν σωστά τα γεωγραφικα μήκη και έτσι υπήρχαν σημαντικά λάθη.


ὑφ' οὓς Παρίσιοι, καὶ πόλις
Παρισίων Λουκοτεκία ....κγ ∠ μη ∠

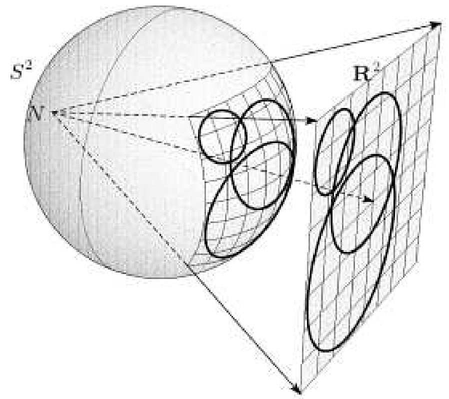
Σε μια γραμμή από τη Γεωγραφική Υφήγηση του Πτολεμαίου, ένα μέρος που αναφέρεται ως "*πόλις Παρισσίων*", αναφέρεται να έχει γεωγραφικό ύψος $48\frac{1}{2}^o$ και γεωγραφικό μήκος $23\frac{1}{2}^o$. Το γεωγραφικό ύψος είναι σωστό καθώς έχει απόκλιση $\frac{1}{3}^o$, όμως το γεωγραφικό μήκος ήταν πιο δύσκολο να μετρηθεί εκείνη την εποχή για αυτό και κοντά στην περιοχή της Ινδίας υπήρχε απόκλιση πάνω από 30^o. Ένα ακόμη λάθος ήταν μια εσφαλμένη εκτίμηση για το μέγεθος της Γης που στην πραγματικότητα ήταν αρκετά μεγαλύτερη από την εκτίμηση που είχε κάνει ο Πτολεμαίος. Αυτό το λάθος ήταν που παραπλάνησε και τον Κολόμβο που πίστευε ότι η Ινδία ήταν πιο κοντά απ'ότι πραγματικά ήταν.

Ανάλημμα ή Πλανησφαίριο

Ο Πτολεμαίος σε διάφορες μονογραφίες, που έχουν διασωθεί μόνο σε λατινικές μεταφράσεις από τα Αραβικά, περιγράφει δυο τρόπους προβολής χάρτη. Στο Ανάλημμα, περιγράφεται η στερεογραφική προβολή, η κλασική σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ σφαίρας και επιπέδου, στην οποία σημεία από μια σφαίρα προβάλλονται μέσω γραμμών που περνούν από το νότιο πόλο, πάνω στο επίπεδο του ισημερινού. Γνώριζε ότι μέσω ενός τέτοιου μετασχηματισμού ο κύκλος που δεν περνά από τον πόλο προβολής, προβάλλεται ως κύκλος στο επίπεδο, ενώ ένας κύκλος που περνά από τον πόλο προβολής προβάλλεται ως ευθεία.

Ο Πτολεμαίος επίσης γνώριζε ότι μια τέτοια απεικόνιση είναι σύμμορφη, δηλαδή διατηρεί τις γωνίες. Η σημαντική συμβολή του Πτολεμαίου στη Γεωγραφία φαίνεται από το γεγονός ότι χάρτες του Μεσαίωνα που έφτασαν στα χέρια μας ως χειρόγραφα, είχαν ως πρωτότυπα τους χάρτες που έκανε ο Πτολεμαίος πάνω από χίλια χρόνια πριν.

Ο Πτολεμαίος ήταν ο αρχιτέκτονας της Σφαιρικής Γεωμετρίας την οποία ανέπτυξε κυρίως για τις εφαρμογές της στην Αστρονομία και τη Γεωγραφία. Η στερεογραφική προβολή αποτελεί την υποδομή για την κατασκευή του αστρολάβου. Αυτό το όργανο το χρησιμοποιούσαν για να προσδιορίζουν, πάνω στη Γη τις τοποθεσίες.



Οπτικά

Ο Πτολεμαίος λέγεται ότι έγραψε τα *Οπτικά*, που αποτελούνται από 5 βιβλία και που έχουν διασωθεί μόνο σε μια λατινική μετάφραση μιας αραβικής εκδοχής. Σε αυτό το έργο ασχολείται με τη Φυσική της όρασης, τη Γεωμετρία των ειδώλων και αποπειράται να βρει ένα νόμο για τη διάθλαση του φωτός.

Τετράβιβλος

Στην Τετράβιβλο παρουσιάζεται μια πλευρά του Πτολεμαίου που δεν φαινόταν στα άλλα του έργα. Η Μεγίστη αποτελεί έργο με ωραία Μαθηματικά και ακριβείς παρατηρήσεις που όλα μαζί συνθέτουν ένα επιστημονικό βιβλίο Αστρονομίας. Στην Τετράβιβλο χρησιμοποιούνται πολύ απλούστερα

Μαθηματικά και μελετάται η αστρολογία, που αυτό δείχνει ότι ο συγγραφέας της αποδεχόταν τις προκαταλήψεις της εποχής. Μάλιστα, μπορούμε να πούμε ότι διαφέρει από την Μεγίστη όσο η Αστρονομία από την αστρολογία. Είναι σαν δύο έργα που το ένα γράφτηκε για τη μάζα κάνοντας απλά χρήση αριθμητικής και αστρολογίας ενώ το άλλο χρησιμοποιούσε σύνθετη και εκλεπτυσμένη ελληνική Γεωμετρία.

Άλλα έργα

Άλλα έργα του είναι οι *Πίνακες*, που είναι αστρολογικό, τα *Αρμονικά* που είναι περί μουσικής, η *Άπλωσις της επιφανείας σφαίρας*, που είναι η μαθηματική θεωρία του αστρολάβου και υπάρχει μόνο στα αραβικά, οι *Φάσεις των απλανών αστέρων* και οι *Υποθέσεις των πλανητών*.

3.3. Η εξάπλωση των Αστρονομικών παρατηρήσεων του Πτολεμαίου. Για περισσότερο από έναν αιώνα μετά τον θάνατο του Πτολεμαίου οι Ελληνιστικοί επιστήμονες ήταν σιωπηλοί σχετικά με το έργο του, αλλά υπάρχει κάθε λόγος να υποθέσουμε ότι το έργο του έχαιρε υψηλής εκτίμησης στην Αλεξανδρινή σχολή, όπου ο μαθηματικός Πάππος[7] έγραψε το πρώτο από τα πολλά σχόλια για την Αλμαγέστη. Μόνο τα βιβλία V και VI έχουν διασωθεί (Ρώμη, 1931). Κατά το δεύτερο ήμισυ του 4ου μ.Χ. αιώνα ένα νέο σχόλιο δημοσιεύθηκε από τον Θέωνα και το μεγαλύτερο μέρος αυτής της εργασίας σώζεται. Σύμφωνα με την παράδοση η διάσημη κόρη του Θέωνα, Υπατία[8] , έγραψε επίσης σχετικά με τον Πτολεμαίο πριν δολοφονηθεί από τον φανατισμένο χριστιανικό όχλο το 415 μ.Χ. λίγο πριν την επικείμενη πτώση της Σχολής της Αλεξανδρείας. Αλλά ακόμα και μετά την ημερομηνία αυτή ο Βυζαντινός μαθηματικός και νεοπλατωνικός

[7]Πάππος ο Αλεξανδρεύς (3ος - 4ος αιώνας μ.Χ.): Γεωμέτρης και μηχανικός που γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια της ρωμαϊκής Αιγύπτου κατά την εποχή του Αυτοκράτορα Διοκλητιανού. Θεωρείται από τους τελευταίους Έλληνες μαθηματικούς, καθώς μετά απ΄ αυτόν η εν λόγω επιστήμη παρέμεινε για μεγάλο χρονικό διάστημα σε στασιμότητα. Συγκέντρωσε στο έργο του "Συναγωγή", τα σπουδαιότερα Μαθηματικά ευρήματα του ελληνικού κόσμου στους τομείς της Γεωμετρίας και της Αριθμητικής, συμπληρωμένα και σχολιασμένα από τον ίδιο.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_of_Alexandria*

[8]Υπατία (370-416): Νεοπλατωνική φιλόσοφος, αστρονόμος και μαθηματικός που έζησε στην Αλεξάνδρεια. Έγραψε σχόλια πάνω σε έργα του Διόφαντου και του Πτολεμαίου, ενώ έχει δώσει το όνομά της σε αστεροειδή.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Hypatia*

φιλόσοφος Πρόκλος[9] ήταν σε θέση να μελετήσει Αστρονομία στην Αλεξάνδρεια. Αργότερα έγινε επικεφαλής της παλιάς πλατωνικής Ακαδημίας στην Αθήνα, όπου έγραψε την *Υποτύπωση ή Εισαγωγή στην Αστρονομία του Ίππαρχου και του Πτολεμαίου* . Αυτό ήταν το τελευταίο ελληνικό έργο βασισμένο στις αστρονομικές παρατηρήσεις του Πτολεμαίου πριν από το κλείσιμο της Ακαδημίας του Πλάτωνα το 529 μ.Χ. που σήμανε και το τέλος του πολιτισμού του αρχαίου κόσμου.

Ήδη, πριν ο Ελληνιστικός πολιτισμός φτάσει στο τελικό του στάδιο, η Ελληνική Επιστήμη είχε αρχίσει να εισέρχεται στους πολιτισμούς της Ανατολής. Από την ταραγμένη σχολή της Αλεξάνδρειας, οι μελετητές της Αντιόχειας και της Αθήνας μετανάστευσαν στην Μεσοποταμία και την Περσία, και ακόμη και στην Ινδία ο αντίκτυπος της Ελληνικής Αστρονομίας διαφάνηκε στη μεγάλη Σανσκριτική Siddhantas περίπου από το 500 μ.Χ. και μετά. Αυτά τα αστρονομικά εγχειρίδια βασίζονται σε πλανητικές θεωρίες ελληνικής προέλευσης, που περιέχουν εξίσου προπτολεμαϊκά και Πτολεμαϊκά χαρακτηριστικά. Οι λεπτομέρειες της διαβίβασης αυτής δεν είναι πλήρως γνωστές και η εξάπλωση της Ελληνικής Αστρονομίας στον λαό της ανατολής αποτελεί σε μεγάλο βαθμό ένα ζήτημα μελλοντικής έρευνας. Μέχρι τώρα όμως δεν έχουμε αποδείξεις ότι είτε οι Πέρσες είτε οι Ινδοί, κατείχαν ποτέ την Αλμαγέστη στη δική τους γλώσσα.

3.4. Η Αλμαγέστη μεταξύ των Αράβων. Είναι πιθανό πως υπήρχε μια μετάφραση της Αλμαγέστης στην συριακή γλώσσα, μέσω της οποίας οι Άραβες απέκτησαν μεγάλο μέρος της γνώσης τους για τον Αρχαίο πολιτισμό, όταν άρχισαν να καλλιεργούν την επιστήμη και τη φιλοσοφία στη Βαγδάτη κάτω από την ηγεσία του Khalif al-Mansur (754-775). Αλλά είναι βέβαιο ότι οι πρώτες γνώσεις τους στην Αστρονομία προήλθαν από το ινδικό Siddhantas που μεταφράστηκε στα Αραβικά περίπου το 773 μ.Χ. Το αποτέλεσμα ήταν ότι τα πρώτα σημαντικά αστρονομικά έργα του μουσουλμανικού κόσμου επηρεάστηκαν έντονα από την ινδική Αστρονομία. Αυτό συνέβη π.χ. με τους μεγάλους *zij*, τη συλλογή αστρονομικών πινάκων με κανόνες για τη χρήση τους, γραμμένη από τον Πέρση επιστήμονα al-Khwarizmi[10]. Έτσι ειδικές ινδικές έννοιες και μέθοδοι που κατά καιρούς

[9]Πρόκλος ο Διάδοχος (412 - 485): Νεοπλατωνικός φιλόσοφος που όρισε ένα από τα πιο περίτεχνα και πλήρους ανάπτυξης συστήματα νεοπλατωνισμού κοντά στο τέλος της κλασικής περιόδου της φιλοσοφίας που άσκησε μεγάλη επιρροή στη δυτική μεσαιωνική φιλοσοφία και στην ισλαμική σκέψη. Έγραψε πολλά θεωρητικά έργα, και οι πληροφορίες που περιέχονται σε ένα από αυτά έχουν εξαιρετική σημασία για την ανασύνθεση του τρωικού μύθου στο σύνολό του. Διηύθυνε την Ακαδημία Πλάτωνος από το 450 μέχρι τον θάνατό του.
Πηγή: *http : //en.wikipedia.org/wiki/Proclus*

[10]Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850): Πέρσης μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος και λόγιος. Τον 12ο αι. Λατινικές μεταφράσεις των έργων του εισήγαγαν το δεκαδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης στο Δυτικό κόσμο. Ασχολήθηκε με την επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων, ενώ η λέξη Άλγεβρα προκύπτει από την λέξη al-jabr, μια από τις δυο πράξεις που χρησιμοποίησε για να λύσει τετραγωνικές

εμφανίζονται στη δυτική Αστρονομία μπορούν να αναχθούν σε μια λατινική μετάφραση από τον Αδελάρδο του Μπαθ[11] από μια αραβική έκδοση αυτού του έργου.

Είναι περίεργο το γεγονός ότι ο Πτολεμαίος έγινε γνωστός στους Άραβες ως αστρονόμος πριν μάθουν σχετικά με τα αστρονομικά επιτεύγματά του. Στην πραγματικότητα, ήδη πριν το 800 μ.Χ. υπήρχε μια αραβική μετάφραση της Τετραβίβλου γραμμένη από το γιατρό Al-Batriq, ενώ η Αλμαγέστη έπρεπε να περιμένει έως μια μεταγενέστερη ημερομηνία πριν γίνει προσβάσιμη στους λόγιους μουσουλμάνους. Δυστυχώς η λογοτεχνική ιστορία της αραβικής Αλμαγέστης είναι μάλλον ασαφής και δεν γνωρίζουμε πότε και από ποιον έγινε η πρώτη μετάφραση. Ένας πιθανός υποψήφιος είναι ο εβραϊκός Ραββίνος Sahl al-Tabari[12] ο οποίος άκμασε κατά πάσα πιθανότητα κατά την έναρξη του 9ου αιώνα. Ωστόσο, οι περισσότεροι μελετητές έχουν την τάση να αμφιβάλλουν για την ύπαρξη της μετάφρασης σε μια τόσο πρόωρη ημερομηνία. Μια άλλη πιθανότητα είναι να έκανε τη μετάφραση ένας ανώνυμος λόγιος -στο Δικαστήριο της Βαγδάτης το 827 μ.Χ. με βάση το ελληνικό κείμενο.

Περίπου την ίδια εποχή μια άλλη μετάφραση έγινε στη Βαγδάτη από τον al-Hajjaj ibn Yusuf[13], του οποίου η έκδοση εμφανίστηκε το 829-30 και λέγεται ότι έχει βασιστεί σε ένα συριακό κείμενο. Ήταν αυτή η μετάφραση που έδωσε στην εργασία του Πτολεμαίου τον τρέχοντα τίτλο. Ονομαζόταν Kitab al-mijisti, όπου kitab σημαίνει "βιβλίο" και al-mijisti είναι ο αραβικός όρος που μεταφράστηκε αργότερα στα Λατινικά ως Αλμαγέστη.

Η τελική και πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη αραβική έκδοση της Αλμαγέστης ήταν η μετάφραση από τα Ελληνικά που έγινε από τον Ishaq ibn

---

εξισώσεις. Η λέξη αλγόριθμος προκύπτει από την λατινική ονομασία του ονόματος του που είναι Algoritmi .
Πηγή: $http://en.wikipedia.org$

[11]Adelard of Bath (1080-1152): Άγγλος φιλόσοφος, γνωστός για τις μεταφράσεις του από τα Αραβικά και τα Ελληνικά στα Λατινικά. Μετέφρασε πολλά επιστημονικά βιβλία Αστρονομίας, Μαθηματικών και Φιλοσοφίας, ενώ ήταν από τους πρώτους που χάρη στις μεταφράσεις του εισήγαγε το ινδικό αριθμητικό σύστημα στην Ευρώπη. Επίσης έθεσε το ερώτημα ως προς το σχήμα της Γης, ο ίδιος πίστευε πως είναι επίπεδη, και πως παραμένει σταθερή στο διάστημα.
Πηγή: $https://en.wikipedia.org/wiki/Adelard\_of\_Bath$

[12]Abu al-Hasan Ali ibn Sahl Rabban al-Tabari(838-870 ή 810-855 ή 783-858): Πέρσης μουσουλμάνος λόγιος και γιατρός ζωροαστρικής καταγωγής που έγραψε την πρώτη Ιατρική εγκυκλοπαίδεια. Μιλούσε πολύ καλά Ελληνικά και Συριακά και έτσι μπόρεσε να αξιοποιήσει συριακές μεταφράσεις αρχαίων ελληνικών κειμένων του Ιπποκράτη, του Γαληνού ή του Διόσκουρου.
Πηγή: $http://en.wikipedia.org/wiki/Ali\_ibn\_Sahl\_Rabban\_alTabari$

[13]Al-Hajjaj ibn Yusuf (661-714): Άραβας πολιτικός και υπουργός άμυνας λέγεται ότι ως πολεμιστής σκότωσε 100.000 άνδρες. Υπήρξε κυβερνήτης του Ιράκ και διέταξε την αλλαγή της γώσσας από Pahlavi σε Αραβικά, ενώ ήταν αυτός που έκοψε για πρώτη φορά νόμισμα αλλάζοντας για πάντα τις συναλλαγματικές τακτικές της χώρας. Ακόμη δίδασκε το Κοράνι σε νεαρούς μαθητές.
Πηγή: $http://en.wikipedia.org/wiki/Al-Hajjaj\_ibn\_Yusuf$

Hunain ο οποίος πέθανε στη Βαγδάτη το 910/11 και ήταν γιος και συνεργάτης ενός από τους πιο ταλαντούχους και πολυγραφότατους μεταφραστές της Βαγδάτης, με το όνομα Hunain ibn Ishaq[14]. Ο Ishaq στερούνταν εξειδικευμένων γνώσεων Αστρονομίας, η μετάφραση του όμως αναθεωρήθηκε από τον αστρονόμο Thabit ibn Qurra[15], που ήταν διάσημος μεταφραστής.

Κατά τη διάρκεια του 9ου αιώνα η Αλμαγέστη κατάφερε έτσι να διασωθεί από την λήθη χάρη στους Άραβες μελετητές. Το αποτέλεσμα ήταν ότι η μουσουλμανική Αστρονομία σύντομα στράφηκε μακριά από την επιρροή των Ινδών και απέκτησε τον χαρακτήρα του Πτολεμαίου. Αυτό συναντάται τόσο σε εγχειρίδια στοιχειώδους εισαγωγής στην Αστρονομία, όπως σύντομες συλλογές δημιουργημένες από τον al-Farghani[16] στο μέσο του 9ου αιώνα αλλά και από μεγάλες επιστημονικές εκθέσεις, όπως το περίφημο zij του al-Battani[17] πάνω στο οποίο στηρίζεται η πληθώρα των γνώσεων μας για την αραβική Αστρονομία. Η Αλμαγέστη γέννησε ένα μεγάλο αριθμό λιγότερο ή περισσότερο αναθεωρημένων εκδόσεων μεταξύ των οποίων ένα

[14]Hunayn ibn Ishaq (809-873): Γνωστός Ασσύριος λόγιος και επιστήμονας που έχει μείνει γνωστός ως ο πιο παραγωγικός μεταφραστής έργων από τα Ελληνικά στα Αραβικά και τα Συριακά στην εποχή του. Γνώριζε Αραβικά, Συριακά, Ελληνικά και Περσικά. Σε αντίθεση με άλλους μεταφραστές, που μετέφραζαν λέξη προς λέξη, εκείνος πρώτα διάβαζε όλο το κείμενο για να έχει μια γενικότερη εικόνα και έπειτα ξαναέγραφε το κείμενο με δικά του λόγια αποδίδοντας το νόημα. Αυτό βοήθησε να συγκεντρωθεί αργότερα σε διάστημα μόλις 100 χρόνων όλη η γνώση γύρω από την αρχαία ελληνική Ιατρική.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org/wiki/Hunayn_ibn_Ishaq*

[15]Thabit ibn Qurra al-Harrani (826-901): Μαθηματικός, γιατρός, αστρονόμος και μεταφραστής που έζησε στη Βαγδάτη. Έκανε σημαντικές ανακαλύψεις στην Άλγεβρα, την Γεωμετρία και την Αστρονομία, ενώ στη Φυσική θεωρείται ένας από τους θεμελιωτές της στατικής. Μιλούσε Συριακά, Ελληνικά και Αραβικά και έτσι μετέφρασε πολλά έργα του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου. Ανακάλυψε μια εξίσωση για να βρίσκει φίλους αριθμούς ενώ λέγεται ότι βρήκε τη λύση σε ένα πρόβλημα σκακιού χρησιμοποιώντας μια εκθετική σειρά. Υπολόγισε τη διάρκεια του ημερολογιακού χρόνου σε 365 μέρες, 6 ώρες, 9 λεπτά και 12 δευτερόλεπτα, έχοντας δηλαδή σφάλμα μόλις 6 δευτερόλεπτα.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org*

[16]Ahmad Muhammad ibn Kathir al-Farghani: Πέρσης αστρονόμος, γνωστός και με το όνομα Alfraganus, από τους πιο γνωστούς του 9ου αιώνα. Ασχολήθηκε με τον υπολογισμό της διαμέτρου της Γης, ενώ επέβλεψε και την κατασκευή του Νιλόμετρου, ενός έργου που εξυπηρετούσε στον καθορισμό της στάθμης και της καθαρότητας των νερών του ποταμού Νείλου. Εκτός από τα *Στοιχεία Αστρονομίας ουράνιων κινήσεων*, που ήταν μια περίληψη της Αλμαγέστης, έγραψε μια πραγματεία πάνω στον αστρολάβο. Ο κρατήρας Alfraganus στη Σελήνη, έχει ονομαστεί έτσι προς τιμήν του.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org*

[17]Allah Muhammad al-Battani (858-929): Μουσουλμάνος αστρονόμος, αστρολόγος και μαθηματικός, γνωστός και με το όνομα Albategnius. Ανακάλυψε αρκετές τριγωνομετρικές σχέσεις, ενώ το κύριο του έργο ήταν το Kitab az-Zij, ένα βιβλίο που περιείχε αστρονομικούς πίνακες που στηριζόταν αρκετά στο έργο του Πτολεμαίου. Ο κρατήρας Albategnius στη Σελήνη, έχει πάρει το όνομά του προς τιμήν του.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org*

από τα πιο σημαντικά ήταν μια μακρά παράφραση από το Μαυριτανικό αστρονόμο Jabir ibn Afflah[18], με το όνομα Geber από τους Λατίνους. Αυτή χρονολογείται από το 1140 μ.Χ. και παρασχέθηκε στα Λατινικά από τον Gerard της Κρεμόνα[19].

3.5. Ο Πτολεμαίος κατά τον Λατινικό Μεσαίωνα. Στον λατινικό Μεσαίωνα, ο 12ος αιώνας σηματοδοτεί το μεγάλο χάσμα στην ιστορία της Αστρονομίας. Πριν από εκείνη την εποχή ο Πτολεμαίος ήταν γνωστός μόνο κατ΄ όνομα στους συγγραφείς των οποίων οι αστρονομικές γνώσεις προέρχονταν από τον Πλίνιο και άλλους μεταγλωττιστές, όχι όμως και από την αρχική Ελληνιστική παράδοση. Κατά την διάσημη εγκυκλοπαίδεια του Ισιδώρου της Σεβίλλης, περίπου το 631 μ.Χ., αναφέρεται ως Ptolemaeus rex Alexandriae και έτσι συγχέεται με τους Πτολεμαίους βασιλείς της Αιγύπτου. Ως εκ τούτου στα μεσαιωνικά χειρόγραφα συχνά παριστάνεται με ένα βασιλικό στέμμα, μια εικονογραφική παράδοση που εμμένει ακόμα και στην εποχή των έντυπων βιβλίων αν και ο μύθος είχε από καιρό καταρριφτεί. Η πραγματική ταυτότητα του Πτολεμαίου γνωστοποιήθηκε στους Λατινικούς αστρονόμους μέσω μιας μακράς σειράς μεταφράσεων των έργων του μετά τον 12ο αιώνα. Επίσης αυτήν την εποχή η αστρολογία προηγούταν της Αστρονομίας, μια από τις πρώτες μεταφράσεις της Τετραβίβλου στα Λατινικά έγινε το 1138 μ.Χ. από τον Πλάτωνα του Tivoli[20]. Το 1143 μ.Χ. ακολούθησε το Πλανησφαίριο σε μετάφραση του Herman της Καρινθίας[21] και το 1154 η Οπτική μεταφράστηκε από τον Ευγένιο της Σικελίας[22]. Όλες

[18]Abu Muhammad Jabir ibn Aflah (1100-1150): Μουσουλμάνος αστρονόμος και μαθηματικός που ζούσε στη Σεβίλλη. Το έργο του βοήθησε να διαδοθεί η Τριγωνομετρία στην Ευρώπη και ενέπνευσε τον Κοπέρνικο.
Πηγή:*http://en.wikipedia.org/wiki/Jabir_ibn_Aflah*

[19]Gerard της Κρεμόνα (1114-1187): Από τους πιο σημαντικούς Ιταλούς μεταφραστές επιστημονικών βιβλίων που έζησε στην Ισπανία. Συνολικά μετέφρασε 87 βιβλία από τα Αραβικά, ανάμεσα στα οποία εκτός από την Αλμαγέστη ήταν και η Κύκλου Μέτρησης του Αρχιμήδη, τα Στοιχεία του Ευκλείδη και έργα του al-Khwarizmi.
Πηγή: *http://en.wikipedia.org/wiki/Gerard_of_Cremona*

[20]Πλάτων του Τίβολι ή Plato Tiburtinus: Ιταλός μαθηματικός, αστρονόμος και μεταφραστής που έζησε τον 12ο αι. Είναι γνωστός για τις μεταφράσεις που έκανε από τα Εβραϊκά και τα Αραβικά στα Λατινικά, ενώ λέγεται ότι ήταν ο πρώτος που μετέφρασε κείμενο σχετικό με τον αστρολάβο, που ήταν αστρονομικό όργανο, από τα Αραβικά. Εκτός από την Αλμαγέστη μετέφρασε και τα Σφαιρικά του Θεοδόσιου από τα Αραβικά στα Λατινικά.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Plato_Tiburtinus*

[21]Herman της Καρινθίας (1100 - 1160): Φιλόσοφος, αστρονόμος, αστρολόγος, μαθηματικός, συγγραφέας και μεταφραστής. Ήταν από τους πιο σημαντικούς μεταφραστές Αραβικών αστρονομικών έργων τον 12ο αι. και άσκησε μεγάλη επηρροή στην ανάπτυξη της Αστρονομίας στην Ευρώπη. Ανάμεσα στις μεταφράσεις του συγκαταλέγονται τα Στοιχεία του Ευκλείδη και το Κοράνι.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Herman_of_Carinthia*

[22]Ευγένιος της Σικελίας ή του Παλέρμο (1130-1202): Αξιωματικός του Βασιλείου της Σικελίας τον 12ο αι., ελληνικής καταγωγής και που συγχρόνως ήταν επιτυχημένος

αυτές οι εκδόσεις βασίστηκαν σε προηγούμενες αραβικές μεταφράσεις. Τα όσα γνωρίζουμε για την λατινική Αλμαγέστη οφείλονται κυρίως στις έρευνες του Haskins (1924), ο οποίος εδραίωσε την ύπαρξη πολλών μη ευρέως χρησιμοποιούμενων μεταφράσεων. Στην πραγματικότητα πραγματοποιήθηκαν τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές εκδόσεις, είτε από τα Ελληνικά ή τα Αραβικά:

1) Η μετάφραση έγινε περίπου το 1160 μ.Χ. στη Σικελία απευθείας από την Ελληνική, από έναν ανώνυμο μεταφραστή. Ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα το 1909 από τους Lockwood και Bjembo και είναι η πρώτη γνωστή Λατινική έκδοση της Αλμαγέστης. Τέσσερα χειρόγραφα είναι γνωστά, από τα οποία έχει ολοκληρωθεί επιτυχώς μόνο το Vat. Lat. 2056. Ο μικρός αριθμός των χειρογράφων δείχνει ότι αυτή η έκδοση χρησιμοποιούνταν ελάχιστα. Στην πραγματικότητα σύντομα ξεπεράστηκε από

2) Τη μετάφραση που έγινε το 1175 μ.Χ. από τα Αραβικά από έναν από τους ποιο παραγωγικούς μεταφραστές του 12ου αιώνα, τον Gerard της Κρεμόνα, που αναφέραμε νωρίτερα ο οποίος έζησε και εργάστηκε στο Τολέδο. Ο Carmody (1956) διαπιστώνει την ύπαρξη τουλάχιστον 32 διασωζόμενων χειρογράφων, χωρίς να ξεκαθαρίζει αν είναι όλα πλήρη.

3) Μία τρίτη μετάφραση σώζεται μόνο σε τμήματα. Σύμφωνα με τον Haskins αυτή έγινε από τα Αραβικά, πιθανότατα στην Ισπανία κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια του 13ου αιώνα.

4) Τέλος, υπάρχει μια τέταρτη έκδοση από τα πρώτα τέσσερα βιβλία της Αλμαγέστης. Μόνο ένα αντίγραφο είναι γνωστό και το κείμενο μπορεί να μην είχε ευρεία κυκλοφορία. Ο μεταφραστής είναι ανώνυμος, δούλεψε πριν από το 1300 μ.Χ., αλλά δεν ξέρουμε πού.

Είναι πιθανό ότι πραγματοποιήθηκαν και άλλες πλήρεις ή μερικές μεταφράσεις, αλλά κατά την παρούσα κατάσταση των μεσαιωνικών σπουδών, είναι αδύνατον να έφτασαν ακόμα και σε μια κατά προσέγγιση έρευνα ολόκληρου του τομέα. Ούτε καν μια λίστα ελέγχου των σωζόμενων χειρογράφων δεν έχει δημοσιευθεί. Οι Peters και Knobel (1915) καταγράφουν έναν κατάλογο 21 ελληνικών, 8 Λατινικών και 4 Αραβικών χειρογράφων. Ο Zinner (1925) κατείχε 24 χειρόγραφα τα οποία αποκαλεί "Γερμανικό πολιτιστικό τομέα" περιλαμβανομένου της Ιταλίας, του Βελγίου, της Πολωνίας, και της Τσεχοσλοβακίας, εκτός από τη Γερμανία και την Αυστρία, αλλά δίνει μόνο πολύ μικρές βιβλιογραφικές πληροφορίες χωρίς διάκριση μεταξύ των διαφόρων μεταφράσεων.

Ως εκ τούτου πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η λογοτεχνική παράδοση της Αλμαγέστης κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα αποτελεί θέμα μελλοντικής έρευνας ίσης σημασίας ως προς την κατανόηση της Αστρονομίας κατά τον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επιχειρήσουμε μόνον μερικά αβέβαια συμπεράσματα.

ποιητής και μεταφραστής.
Πηγή:*https://en.wikipedia.org/wiki/Eugenius_of_Palermo*

Πρώτον, ο αριθμός των χειρογράφων και η συμβολή τους στις διάφορες μεταφράσεις δείχνει ότι η έκδοση του Gerard της Κρεμόνα ήταν η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις αστρονομικές βιβλιογραφίες του Μεσαίωνα, μεταξύ των οποίων η πιο περιεκτική είναι η περίφημη Astronomie Speculum του 13ου αιώνα, πιθανώς γραμμένη από τον Άγιο Αλβέρτο τον Μέγα[23]. Πρώτα αναφέρει ένα βιβλίο, αλλά μόνο για να το απορρίψει ως εσφαλμένο. Σύμφωνα με την Speculum μία καλή εισαγωγή στην Αστρονομία είναι η Αλμαγέστη.

Δεύτερον, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι παρά την υψηλή εκτίμηση που έχαιρε η Αλμαγέστη από τους μεσαιωνικούς αστρονόμους σπάνια διδασκόταν. Ο μικρός αριθμός των σωζόμενων χειρογράφων, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η πλειοψηφία των αστρονόμων ποτέ δεν κατείχε ένα αντίγραφο ούτε καν είχε πρόσβαση σε αυτά μέσω των βιβλιοθηκών. Δεν είναι δύσκολο να μαντέψουμε τον λόγο. Η Αλμαγέστη είναι μια άκρως τεχνική εργασία που ακόμα και σήμερα εξακολουθεί να παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και ασάφειες για ένα σύγχρονο αναγνώστη. Πρέπει να ήταν ακόμη πιο δύσκολο για έναν μεσαιωνικό λόγιο εξοπλισμένο με λιγότερη αστρονομική και μαθηματική γνώση. Πρέπει να θυμόμαστε ότι τα στοιχεία του Ευκλείδη είχαν μεταφραστεί μόνο λίγο πριν την Αλμαγέστη, και απαιτούνταν μεγάλη προσπάθεια για να αφομοιώσουν τόσο μεγάλες και απαιτητικές πραγματείες.

Η Αστρονομία ήταν μία από τις επτά Φιλελεύθερες Τέχνες, όπου όλες μαζί κατά τα μεσαιωνικά έτη σχημάτιζαν το βασικό πλαίσιο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο στα σχολεία του 12ου αιώνα όσο και στα πανεπιστήμια του 13ου και μετέπειτα αιώνων. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μεσαιωνικός φοιτητής έπρεπε να παρακολουθήσει ένα μάθημα Αστρονομίας ως προετοιμασία για τον βαθμό του Γνώστη τεχνών, πριν του επιτραπεί να προχωρήσει σε πιο εξειδικευμένες μελέτες δικαίου, Ιατρικής ή Θεολογίας. Σε αυτό το εισαγωγικό επίπεδο ήταν προφανώς αδύνατη η χρήση της Αλμαγέστης ως βιβλίο ενός μαθητή. Παρέμενε ως τεχνική εργασία για προχωρημένους σπουδαστές, ενώ στους συνήθεις φοιτητές έπρεπε να παρέχονται πιο εύκολα αφομοιώσιμα εγχειρίδια. Από λογοτεχνικής απόψεως η ιστορία της Μεσαιωνικής Αστρονομίας είναι η ιστορία του πώς η Αστρονομία του Πτολεμαίου εξομοιώνεται, διδάσκεται και φορμάρεται στην λατινική της μορφή χωρίς άμεση χρήση της Αλμαγέστης.

Στη παρούσα εργασία δεν θα ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία με κάθε λεπτομέρεια, αλλά θα αναφέρουμε μόνο μερικές από τις κύριες οδούς

[23]Albertus Magnus (1193/1206-1280): Γνωστός και ως Αλβέρτος ο Μέγας είναι καθολικός Άγιος. Αναφέρεται ως ο μεγαλύτερος Γερμανός φιλόσοφος και θεολόγος του Μεσαίωνα. Τα γραπτά του συγκεντρώθηκαν το 1899 σε 38 τόμους. Καταπιάνονταν με θέματα από τη Λογική, τη Θεολογία, τη Βοτανολογία, την Αστρονομία, τη Ζωολογία, τη Χημεία, τη Γεωγραφία και πολλά άλλα, όλα αποτέλεσμα παρατήρησης και λογικής. Ήταν ίσως ο πιο πολυ-διαβασμένος συγγραφέας της εποχής του.
Πηγή:*https://en.wikipedia.org/wiki/Albertus_Magnus*

κατά μήκος των οποίων αυτή προχώρησε. Κατά πάσα πιθανότητα, ήταν δυνατόν να χρησιμοποιήθηκε μια συντετμημένη έκδοση ή μια παράφραση της Αλμαγέστης. Από αυτό το είδος έχουμε ήδη αναφέρει το De astronomia από τον Jabir ibn Afflah, η οποία έδωσε μια σύνοψη όλης της Αλμαγέστης. Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εγχειρίδιο που αποδίδεται εσφαλμένα στον ίδιο συντάκτη ήταν το Almagestum parvum ή Almagesti minoris libri VI. Ήταν προσιτό σε μια Λατινική μετάφραση από τον Gerard της Κρεμόνα και κατέστη μια εισαγωγή των μαθηματικών τμημάτων της Αλμαγέστης.

Ακόμη και τα έργα αυτού του είδους ήταν πάρα πολύ δύσκολα για τους φοιτητές που είχαν μόλις μάθει Σφαιρική Αστρονομία από ένα στοιχειώδες εγχειρίδιο όπως η ευρέως χρησιμοποιούμενη Tractatus de sphera του Johannes de Sacrobosco[24]. Αυτό το εξαιρετικά δημοφιλές έργο περιείχε περίπου μια σελίδα για την πλανητική θεωρία, και έπρεπε να συμπληρωθεί από μια εισαγωγή στην πλανητική θεωρία περίπου στο ίδιο επίπεδο. Πολλά τέτοια εισαγωγικά έργα είναι γνωστά, αλλά το πιο δημοφιλές ήταν το Theorica planetarum. Η εργασία αυτή έχει αποδοθεί στον Gerard της Κρεμόνα καθώς και στον αστρολόγο του 13ου αιώνα Gerard της Sabbioneta, αλλά φαίνεται τελικά να είναι το έργο ενός άγνωστου συντάκτη από το τελευταίο μισό του 13ου αιώνα. Στο κείμενο υπήρχαν σφάλματα, το πιο κρίσιμο ήταν ο λανθασμένος προσδιορισμός των σταθερών σημείων. Αλλά είχε το πλεονέκτημα ότι ήταν σύντομο, με σαφείς ορισμούς των κυριότερων εννοιών των διάφορων πλανητικών μοντέλων της Αλμαγέστης, απεικονίζοντας τα με διαγράμματα. Αυτά τα προφανή πλεονεκτήματα το εξασφάλισαν ως τυπικό ακαδημαϊκό βιβλίο πλανητικής Αστρονομίας σχεδόν για 300 χρόνια. Το 14ο και 15ο αιώνα σχεδόν κάθε φοιτητής έπρεπε να το γνωρίζει. Έχουν απομείνει ακόμη περισσότερα από 200 χειρόγραφα, εκτός από ένα μεγάλο αριθμό παραλλαγμένων εκδόσεων και σχολίων.

3.6. Η Αλμαγέστη την εποχή της τυπογραφίας και του ανθρωπισμού. Μέχρι να φτάσουμε στον 15ο αιώνα η Αλμαγέστη φαίνεται να παραμελήθηκε από τη πλειοψηφία των μελετητών. Αν και γνώριζαν την ύπαρξή της, καλλιεργούσαν την Αστρονομία μέσω δευτερευόντων κειμένων. Το γεγονός ότι το έργο του Πτολεμαίου περισώθηκε από την λήθη οφείλεται σε μια μικρή ομάδα επιστημόνων επηρεασμένων από το κίνημα του ανθρωπισμού και την προτίμηση για κάθε τι ελληνικό, συμπεριλαμβανομένων των ελληνικών πηγών για τις φυσικές επιστήμες. Η κεντρική φιγούρα στην νέα αυτή εξέλιξη ήταν ένας νεαρός αυστριακός λόγιος, ο George Peurbach[25] που πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ακαδημαϊκής του

[24]Johannes de Sacrobosco (1195-1256): Πιθανότατα Βρετανός λόγιος, μοναχός και αστρονόμος άσκησε έντονη κριτική στη χρήση του Ιουλιανού ημερολογίου, υποστηρίζοντας ότι έχει απόκλιση 10 ημερών.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_de_Sacrobosco*

[25]Georg von Peurbach(1732-1807): Αυστριακός αστρονόμος, μαθηματικός και κατασκευαστής μουσικών οργάνων, που σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης. Θεωρείται ο πατέρας της μαθηματικής και παρατηρησιακής Αστρονομίας, γι'αυτό και έχει

ζωής στο πανεπιστήμιο της Βιέννης, στο οποίο οι κάτοχοι βαθμών Γνώστη, ήδη από το 1451, έδιναν διαλέξεις σε κλασικά πεδία. Ένας από τους Γνώστες που δίδαξε τουλάχιστον μια φορά στο πανεπιστήμιο, ήταν και ο περίφημος Ιταλός λόγιος Aeneas Silvius Piccolomini (μετέπειτα Πάπας Πίος II), που ήταν παπικός λεγάτος της Αυστρίας κατά τα έτη 1443-1455 που θεωρείται ότι εγκαινίασε το ανθρωπιστικό κίνημα. Οι ανθρωπιστικές ροπές του Peurbach διαφάνηκαν από το γεγονός ότι το έτος 1454 δίδασκε τόσο την Αινειάδα του Βιργιλίου όσο και την πλανητική θεωρία. Οι τελευταίες διαλέξεις δημοσιοποιήθηκαν με τη μορφή ενός νέου εγχειρίδιου που ονομάστηκε Theoricae nouae planetarum. Το βιβλίο αυτό είχε σαφώς την πρόθεση να αντικαταστήσει το παλιό Theorica planetarum ως ένα τυπικό εγχειρίδιο[26]. Στο πέρασμα του χρόνου άρχισε να απολαμβάνει μια τεράστια δημοτικότητα. Ο Zinner (1938) αναφέρει τουλάχιστον 56 εκτυπώσεις του λατινικού κειμένου μέχρι το 1653, εκτός από τις μεταφράσεις σε Γαλλικά, Ιταλικά και Εβραϊκά. Από γλωσσική άποψη το βιβλίο δεν φαίνεται να απορρέει από ανθρωπιστική πένα, γραμμένο με το σύνηθες λατινικό ιδίωμα των Μεσαιωνικών αστρονόμων. Επίσης ακολουθεί την παλιά λατινική στο διακανονισμό των θεματικών ενοτήτων, και η γενική εντύπωση είναι ότι αποτελεί μια πολύ προσεκτική έκθεση κατά μήκος παραδοσιακών γραμμών. Ο Πτολεμαίος αναφέρεται σε ορισμένα σημεία προς το τέλος του βιβλίου, αλλά τίποτα δεν δείχνει ότι ο Peurbach προετοίμασε την Αλμαγέστη ως λεπτομερές αντικείμενο μελέτης για τις διαλέξεις του.

Τα επόμενα χρόνια φαίνεται μια ριζική αλλαγή στην κατάσταση αυτή, προερχόμενη από δυο μεγάλους Βυζαντινούς στοχαστές, οι οποίοι αναζήτησαν καταφύγιο στη Δύση τα ταραγμένα χρόνια πριν η Κωνσταντινούπολη πέσει στους Τούρκους το 1453. Ο πρώτος από αυτούς ήταν ο Κρητικός φιλόσοφος Γεώργιος της Τραπεζούντας[27] που έζησε στην Ιταλία κατά το 1430 και έγινε γραμματέας του Πάπα Νικόλαου V για τον οποίο έκανε ένα μεγάλο αριθμό μεταφράσεων από τα Ελληνικά μεταξύ των οποίων μια πλήρης λατινική έκδοση της Αλμαγέστης, που δημοσιεύθηκε το 1451. Αυτή ήταν η πρώτη φορά που το κύριο έργο του Πτολεμαίου εμφανίστηκε σε μετάφραση από το πρωτότυπο, αν αγνοήσουμε την λιγότερο σημαίνουσα σικελική έκδοση που αναφέρθηκε παραπάνω.

πάρει το όνομά του ένας κρατήρας στη Σελήνη.
Πηγή: $http://en.wikipedia.org/wiki/Georg\_von\_Peuerbach$

[26]Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ο Κοπέρνικος έλαβε προφανώς τις πρώτες αστρονομικές του γνώσεις από το βιβλίο του Peurbach κατά την περίοδο 1491-96, όταν ήταν φοιτητής στη Κρακοβία όπου δίδασκε ο Albert του Brudzewo.

[27]Γεώργιος Τραπεζούντιος (1395 - 1472): Έλληνας λόγιος του 15ου αιώνα, γνωστός για τις μεταφράσεις του, που άφησε πολυάριθμα συγγράμματα. Τον Ιούλιο του 1453 έστειλε στον Μωάμεθ Β μια πραγματεία σχετικά με τη χριστιανική πίστη, όπου περιεχόταν η συγκλονιστική πρόταση να ενωθούν ο Χριστιανισμός και το Ισλάμ. Ο Τραπεζούντιος επαινέθηκε από τους συγχρόνους του για την μεγάλη παιδεία του, ωστόσο είχε τραχύ ύφος προς τους αντιπάλους του.
$Phg'h : http://en.wikipedia.org/wiki/George\_of\_Trebizond$

Αλλά οι μεταφράσεις του Γεωργίου της Τραπεζούντας ήταν πολύ βιαστικά γραμμένες και ευάλωτες στην κριτική από άλλους μελετητές. Επιπλέον, ήταν φανατικός Αριστοτελικός που συχνά προσέβαλε την πλατωνική συμπάθεια άλλων ανθρωπιστών της Αναγέννησης. Τέλος, είναι αμφίβολο κατά πόσον κατείχε τα απαραίτητα αστρονομικά προσόντα για να μεταφράσει την Αλμαγέστη στα Λατινικά. Για αυτό το σκοπό απαιτούνταν ένας φιλολογικά αρμόδιος αστρονόμος ως μεταφραστής. Το 1460 μ.Χ. επισκέφτηκε την Βιέννη ένας διαπρεπής ανθρωπιστής και παπικός λεγάτος, ο περίφημος καρδινάλιος Ιωάννης Βησσαρίων[28] που ήταν πρωτεργάτης του ανθρωπιστικού κινήματος στη Ρώμη. Η ιδιωτική συλλογή του από ελληνικά χειρόγραφα έγινε αργότερα ο πυρήνας της βιβλιοθήκης του Αγίου Μάρκου στη Βενετία. Η αντιπαλότητα του Βησσαρίωνα με τον Γεώργιο της Τραπεζούντας ήταν γνωστή και κατέληξε το 1469 σε μια πραγματεία που ονομαζόταν Calumniatorem Platonis (Εναντίον του συκοφάντη του Πλάτωνα). Όμως, ήδη κατά τη διάρκεια της παραμονής του στη Βιέννη προσπάθησε να διορθώσει τις ατέλειες της μετάφρασης της Αλμαγέστης, πείθοντας τον Peurbach να κάνει μια νέα μετάφραση από τα Ελληνικά. Ο Peurbach εργάστηκε με μεγάλη προθυμία και κατάφερε να τελειώσει μια παράφραση των πρώτων έξι βιβλίων πριν από τον πρόωρο θάνατό του το 1461. Την ανολοκλήρωτη εργασία του παρέλαβε ο μαθητής του Johannes Muller, ή Ρεγιομοντάνος, που έχουμε ξανασυναντήσει νωρίτερα, που το ίδιο έτος ακολούθησε τον Βησσαρίωνα στην Ρώμη. Αργότερα ταξίδεψε με τον καρδινάλιο σε διάφορα σημεία της Ιταλίας πριν γίνει καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Πρέσσμπουργκ το 1465. Εκεί έμεινε μέχρι το 1471, έως ότου εγκατασταθεί τελικά στη Νυρεμβέργη.

Στη Νυρεμβέργη ο Ρεγιομοντάνος δημιούργησε κάτι που στην λατινική Ευρώπη δεν είχαν δει ποτέ πριν - ένα ίδρυμα επιστημονικής έρευνας έξω από τα πανεπιστήμια και ανεξάρτητο από αυτά. Έλαβε γενναιόδωρη υποστήριξη από ένα πλούσιο πολίτη που ονομαζόταν Μπερνάρντ Βάλτερ (1436-1508) και αποτελούνταν από ένα παρατηρητήριο, ένα εργαστήριο για αστρονομικά όργανα και ένα τυπογραφικό πιεστήριο για την δημοσίευση επιστημονικής λογοτεχνίας.

Έτσι αρχίζει η ιστορία των έντυπων εκδόσεων της Αλμαγέστης. Σε μια διαφημιστική αφίσα που δημοσίευσε ο Ρεγιομοντάνος το 1474 μ.Χ, ανακοίνωσε ότι είχε προς πώληση την πλανητική θεωρία του Peurbach, που έτσι έγινε το πρώτο τυπωμένο βιβλίο θεωρητικής Αστρονομίας. Στην αφίσα όμως ανακοίνωσε επίσης ότι θα τύπωνε μια νέα μετάφραση της Αλμαγέστης:

[28]Βησσαρίων (1408 - 1472): Βυζαντινός λόγιος και Καρδινάλιος της Καθολικής εκκλησίας, μαθητής του Γεωργίου Γεμιστού (Πλήθωνος). Συνέγραψε πλήθος θεολογικών έργων, κυρίως προς υπεράσπιση της Ένωσης των Εκκλησιών. Σημαντικότατο θεωρείται το φιλοσοφικό του έργο για την υπεράσπιση της Πλατωνικής φιλοσοφίας, την οποία κατά κάποιους προσπάθησε να εντάξει στη Χριστιανική σκέψη.
Πηγή: *https : //en.wikipedia.org/wiki/Basilios_Bessarion*

Magna compositio Ptolemaei; quam uulgo uocant Almagestum noua traductione. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο Ρεγιομοντάνος είχε τη μετάφραση από τον Peurbach στο μυαλό του από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ίδιος είχε την πρόθεση να την ολοκληρώσει. Ωστόσο ο ξαφνικός θάνατος του Ρεγιομοντάνου είχε σαν αποτέλεσμα το έργο να μην ολοκληρωθεί. Το 1496 ένας Γερμανός τυπογράφος εκτύπωσε στη Βενετία το μέρος της μετάφρασης που είχε ολοκληρώσει ο Ρεγιομοντάνος.

Έτσι η πρώτη προσπάθεια για την έντυπη έκδοση του θεμελιώδους έργου της Αστρονομίας δεν ήταν τίποτα άλλο από μία ατελής παράφραση. Η ανάγκη για την μετάφραση της Αλμαγέστης εντάθηκε τη στιγμή όπου η κραυγή για έντυπες εκδόσεις σχεδόν κάθε κλασικού συγγραφέα ακούστηκε σε όλη την Ευρώπη. Ιδιαίτερα επειδή η άλλη κύρια εργασία του Πτολεμαίου στη Γεωγραφία ήταν ήδη στην αγορά εδώ και πολλά χρόνια, τυπωμένη το 1475 από τον Hermann του Λιχτενστάιν στην Vicenza, και αργότερα το 1482 (Ulm), 1486 (Ulm), και 1490 (Ρώμη). Επίσης η αστρολογική Τετράβιβλος εμφανίστηκε στα Λατινικά ως Liber quadripartitus, τυπωμένη τα έτη 1484 και 1493 (Βενετία), επιβεβαιώνοντας έτσι το γενικό κανόνα ότι ο Πτολεμαίος πρώτα αποκτούσε την φήμη του αστρολόγου και έπειτα του αστρονόμου.

Την τιμή της πρώτης πλήρους μετάφρασης της Αλμαγέστης απέκτησε τελικά ο Petrus Lichtenstein, ο οποίος το 1515 εκτύπωσε τη παλιά μετάφραση του Gerard της Κρεμόνα. Έτσι η εκτυπωμένη Αλμαγέστη μπήκε στον κόσμο της Αναγέννησης σε μία λατινική μετάφραση προερχόμενη από μια αραβική έκδοση του αρχικού ελληνικού κειμένου. Η μετάφραση απευθείας από την Ελληνική ήταν σαφώς προτιμότερη, παρ΄όλα αυτά το 1528 ο διάσημος εκδοτικός οίκος Giunti της Βενετίας θεώρησε σωστό να δημοσιεύσει την αναξιόπιστη λατινική μετάφραση του 1451 από τον Γεώργιο της Τραπεζούντας.

Αυτές οι δύο αποκλίνουσες εκδόσεις κατέστησαν επιτακτική την ανάγκη μιας τυπωμένης έκδοσης από το Ελληνικό πρωτότυπο κείμενο. Προετοιμάστηκε από τους Simon Gryneus και Joachim Camerarius από ένα, πλέον χαμένο, χειρόγραφο στη Νυρεμβέργη που ήταν παλαιότερα στην κατοχή του Ρεγιομοντάνος. Η έκδοση εμφανίστηκε στη Βασιλεία το 1538. Έτσι, επιτέλους, η αρχική Αλμαγέστη είχε διασωθεί. Αλλά οι δύο αναξιόπιστες λατινικές εκδόσεις παρέμειναν οι μόνες μεταφράσεις για εκατονταετίες στο μέλλον.

Οι νέες εκδόσεις κατέστησαν πλέον δυνατή τη μελέτη των τεχνικών πτυχών της Αλμαγέστης, τη στιγμή που το γενικό επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων ήταν βελτιωμένο- εν μέρει χάρη στο πρώτο εγχειρίδιο επιπέδου και Σφαιρικής Τριγωνομετρίας του Ρεγιομοντάνου, τυπωμένο το 1533 αρκετά μετά το θάνατό του. Κατά ένα τρόπο το μέγα έργο του Κοπέρνικου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα από τα κύρια αποτελέσματα του ανανεωμένου ενδιαφέροντος για την θεωρητική Αστρονομία ως μαθηματική πειθαρχία και για ακόμη έναν αιώνα ο Πτολεμαίος διατήρησε τη θέση του ως ο μεγαλύτερος όλων των αστρονόμων. Το 1651 ο αστρονόμος Giovanni Battista Riccioli[29] έδωσε τον τίτλο Almagestum novum στο τεράστιο εγχειρίδιο Αστρονομίας του - ένα από τα πιο ολοκληρωμένα που έχουν ποτέ γραφτεί - και χαιρέτισε τον Πτολεμαίο ως Πρίγκιπα των αστρονόμων, γεωγράφων, και Αστρολόγων.

3.7. Η παρακμή του Πτολεμαίου. Έπειτα απο μια κυριαρχία σχεδόν 1500 ετών, το αστέρι του Πτολεμαίου άρχισε να σβήνει. Ο Κοπέρνικος είχε πλέον αποδείξει την μαθηματική πιθανότητα μιας ηλιοκεντρικής θεωρίας του Ηλιακού συστήματος και παρόλο που στη νέα θεωρία χρησιμοποιήθηκε η ίδια μαθηματική τεχνική με την Αλμαγέστη, πολλοί είναι αυτοί που την προτίμησαν. Αυτό δε συνέβη μόνο για φιλοσοφικούς σκοπούς, αλλά και επειδή ο Κοπέρνικος εξήγησε τη σειρά των πλανητών που κατά την παλιά Αστρονομία υπήρξε αυθαίρετη. Ο Κέπλερ προκάλεσε ακόμα μεγαλύτερη θεωρητική επανάσταση συνάγοντας τους νόμους για την κίνηση των πλανητών από τις παρατηρήσεις του Tycho Brache[30] και τέλος ο Γαλιλαίος, με τη βοήθεια του τηλεσκοπίου, απέδειξε πως ήταν πλέον αδύνατη η προάσπιση των παραδοσιακών φυσικών εννοιών για την φύση των ουράνιων σωμάτων. Αυτές οι έννοιες ήταν κυρίως Αριστοτελικές, αλλά απέκτησαν μια βαθιά σύνδεση με το όνομα του Πτολεμαίου. Αλλά ακόμα και ένας στρατευμένος "Κοπερνικός" όπως ο Γαλιλαίος έτρεφε υψηλή εκτίμηση για τον Πτολεμαίο, διατηρώντας την πεποίθηση ότι τόσο ο Πτολεμαίος όσο και ο Αριστοτέλης θα ήταν "Κοπερνικανοί" εάν γνώριζαν τις παρατηρήσεις και τους υπόλοιπους λόγους που οδήγησαν τον Κοπέρνικο να αλλάξει το σύστημα του κόσμου. Πολλοί όμως ήταν λιγότερο ορθολογικοί και τελικά κατέστη σαφές ότι η νέα Αστρονομία δεν σήμαινε μόνο την καταστροφή της πλανητικής θεωρίας του Πτολεμαίου, αλλά συμπαρέσυρε επίσης και τη δική του επιστημονική φήμη.

Τον 18ο αιώνα λίγοι είχαν επαρκή ιστορική συνοχή για να συνειδητοποιήσουν ότι ακόμη και αν η Αστρονομία του Πτολεμαίου έπρεπε να απορριφθεί, αυτός ο ίδιος υπήρξε πολύ καλύτερος επιστήμονας από τους περισσότερους που τώρα μιλούσαν αλαζονικά για τα λάθη του (ότι δεν ήταν

[29]John Baptist Ricioli (1598-1671): Ο Giovanni Battista Riccioli ήταν Ιταλός Ιησουίτης αστρονόμος, που δούλευε για να διαψεύσει τον Κοπέρνικο. Μελέτησε τη Σελήνη και συνέταξε σεληνιακούς χάρτες.
Πηγή: *http://www.astronomy-for-kids-online.com/john-baptist-riccioli-biography.html*

[30]Tycho Brache (1546-1601): Δανός ευγενής που έμεινε γνωστός για τις ακριβείς αστρονομικές μετρήσεις του, τις οποίες έκανε χωρίς τη χρήση τηλεσκοπίου. Πήρε μέρος σε μονομαχία για να υπερασπιτεί τη ορθότητα ενός μαθηματικού τύπου και κατέληξε να χάνει ένα κομμάτι από τη μύτη του. Παρατήρησε ότι "νέα αστέρια", σήμερα γνωστά ως σουπερνόβα, ήταν πάνω από την ατμόσφαιρα και τη Σελήνη. Συνεισέφερε ακόμη στην Ιατρική, καθώς τα φαρμακευτικά σκευάσματά του χρησιμοποιούνταν μέχρι και το 1900. Ένας κρατήρας στη Σελήνη έχει πάρει το όνομα του προς τιμήν του.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe*

Κοπερνικός) ή για τον δογματισμό του (που πίστευε σε φυσικές κυκλικές κινήσεις). Αυτή η υποβάθμιση εδραιώθηκε με τους μεγάλους γάλλους αστρονόμους, μεταξύ των οποίων ήταν και ο Jerome Le Francais Lalande[31], που προσπάθησε να στερήσει από το έργο του Πτολεμαίου κάθε αυθεντική έννοια. Ο Lalande στην σκιαγράφηση της ιστορίας της Αστρονομίας που περιέλαμβε στο έργο του Astronomie, λέει ότι "ο οποιοσδήποτε είχε την πεποίθηση ότι ο Πτολεμαίος δεν ήταν παρατηρητής και ότι πήρε ό,τι καλό υπάρχει στο έργο του από τον Ίππαρχο και τους προκατόχους του".

Από τώρα και στο εξής ο μύθος του Πτολεμαίου ως απλός μιμητής του Ίππαρχου είναι φαινόμενο σχεδόν σε κάθε απολογισμό της ιστορίας της Αστρονομίας, με την αξιοσημείωτη εξαίρεση του Laplace. Για τον Lalande, ο Πτολεμαίος είναι σημαντικός μόνο επειδή διατήρησε μερικές πολύτιμες παρατηρήσεις των αρχαίων, και επειδή η Αλμαγέστη διατήρησε ζωντανή την Αστρονομία κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, μέχρι τη στιγμή που ο Κοπέρνικος την αναζωογόνησε. Αλλά αν και ήταν επομένως αδύνατον να στερήσει απο το έργο του Πτολεμαίου κάθε αστρονομική σημασία, ο Lalande θεώρησε εντελώς ασυγχώρητο το γεγονός ότι στιγματίστηκε η μνήμη του απο την αστρολογία: αποδίδεται στον Πτολεμαίο ένα βιβλίο βασισμένο σε αστρολογικές προβλέψεις που ονομάζεται Liber quadripartitus.

Ωστόσο οι περισσότεροι κριτικοί το θεωρούν ανάξιο της μάθησης και της φήμης του συγγραφέα, γιατί στην Αλμαγέστη δεν υπάρχει τίποτα παρόμοιο με το είδος αυτής της φαντασίας. Αυτή η αποτυχημένη προσπάθεια να σωθεί ο Πτολεμαίος από τη δική του προσωπική πίστη στην αστρολογία, αποκαλύπτει την περίεργη έλλειψη ιστορικής συνέχειας η οποία ήταν ένα απο τα χαρακτηριστικά του Διαφωτισμού. Η αξιολόγηση του Πτολεμαίου απο τον Lalande βασίζεται σαφώς, όχι στην βαθιά κατανόηση του ρόλου της Αστρονομίας και της αστρολογίας στην Ελληνιστική κοινωνία, αλλά κατόπιν της πεφωτισμένης γνώμης του 18ου αιώνα για το πως θα έπρεπε να λειτουργεί ένας αστρονόμος.

Μια ακόμα χειρότερη τύχη περίμενε τη φήμη του Πτολεμαίου όταν ο Jean-Baptiste-Delambre[32] πήρε το νήμα από τον Lalande. Ο Delambre δεν ήταν μόνο ένας εξαιρετικά ικανός αστρονόμος και ένας από τους πατέρες του μετρικού συστήματος, αλλά και ένας από τους καλύτερα ενημερωμένους

[31]Jerome Lalande(1732-1807): Γάλλος αστρονόμος και συγγραφέας, μέλος της Σουηδικής Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών. Έκανε παρατηρήσεις που αργότερα οδήγησαν στην ανακάλυψη της τροχιάς του Ποσειδώνα, ενώ και ένας κρατήρας στη Σελήνη έχει πάρει το όνομά του προς τιμήν του.
Πηγή: *http : //en.wikipedia.org*

[32]Jean Baptiste Joseph, chevalier Delambre(1749 - 1822): Γάλλος μαθηματικός και αστρονόμος, που έγραψε πολλά βιβλία πάνω στην ιστορία της Αστρονομίας. Ήταν από τους πρώτους αστρονόμους που έβγαλαν αστρονομικές εξισώσεις από αναλυτικούς τύπους. Ήταν ιππότης του Τάγματος του Αγίου Μιχαήλ και της Λεγεώνας της Τιμής. Το όνομά του είναι ένα από τα 72 ονόματα που έχουν χαρακτεί στον Πύργο του Eiffel, ενώ έχει δώσει και το όνομά του σε κρατήρα στη Σελήνη.
Πηγή: *http : //en.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Delambre*

μεταξύ των ιστορικών της Αστρονομίας όλων των εποχών. Το έργο του Histoire de l'Astronomie Ancienne (1817) εξακολουθεί να αποτελεί ένα ορυχείο πληροφοριών σχετικά με την αρχαία Αστρονομία.

Παρόλα αυτά, ο Delambre φαίνεται να υπήρξε ιδιαίτερα αρνητικός, όταν αναγκάστηκε να αξιολογήσει τον Πτολεμαίο. Έτσι εμφανίζεται θυμωμένος με τον Πτολεμαίο για την κάπως υπεροπτική περιγραφή των αστρονομικών του οργάνων λέγοντας: "Στο πρώτο κεφάλαιο του 5ου βιβλίου της Αλμαγέστης μας διαβεβαιώνει ότι παρατήρησε το φεγγάρι με έναν αστρολάβο, που περιγράφει χωρίς να δώσει ούτε την ακτίνα ούτε τη διαίρεση σε μοίρες. Αυτό είναι μετά βίας ο τρόπος που περιγράφει ένας αστρονόμος το όργανο που έχει χρησιμοποιήσει."

Όμοια, ο Delambre είναι ιδιαίτερα δυσαρεστημένος με την περιγραφή των παρατηρήσεών του Πτολεμαίου, ιδιαιτέρως με την μέτρηση της περιμέτρου της γης που αναφέρεται στο κεφάλαιο 3 του πρώτου βιβλίου της Γεωγραφίας, σχολιάζοντας: "Είναι αυτός ο τρόπος να περιγράψει κάποιος νέες και σημαντικές διαδικασίες - αν είναι πραγματικές;" Ο τελευταίος υπαινιγμός δεν βγήκε από την πένα του Delambre , το καθιστά σαφές με τα λόγια του μη επιτρέποντας καμία αμφιβολία: "Μπορούμε να παραδεχθούμε ότι ο Πτολεμαίος είχε δεί αυτές οι εκλείψεις, όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ήταν παρατηρητής αστρονόμος. Λαμβάνει μία τιμή της εκκεντρότητας της Σελήνης τόσο κοντά σε ό, τι συνήγαγε από τις τρεις Βαβυλωνιακός εκλείψεις, που κανείς μπαίνει στον πειρασμό να πιστέψει ότι οι τρεις αυτές εκλείψεις είναι υπολογισμοί που έγιναν με τη βοήθεια πινάκων." Σε κάποιο άλλο σημείο κάνει το εξής σχόλιο: "Παρατηρούσε ο Πτολεμαίος; Δεν ήταν οι παρατηρήσεις που ισχυρίζεται ότι πραγματοποιήσε υπολογισμούς με πίνακες και παραδείγματα που προορίζονται για την καλύτερη κατανόηση των θεωριών του;" Αυτή είναι χωρίς αμφιβολία η πιο σοβαρή κατηγορία εναντίον του Πτολεμαίου που έγινε ποτέ.

Τώρα πια δεν είναι ένας μάλλον ασήμαντος οπαδός του Ίππαρχου - είναι μια επιστημονική απάτη, εξαπατώντας με την ίδια την μέθοδο της επιστήμης και προδίδοντας τον εμπειρικό χαρακτήρα της Αστρονομίας, αυτοαναγορεύεται αποτελέσματα που υπολογίζονται από τη θεωρία συγκαλυμμένα ως εμπειρικά δεδομένα για την υποστήριξη της ίδιας του της θεωρίας. Μετά από αυτό, είναι μόνο μικρή παρηγοριά που ο Delambre συγκαταβαίνει την παραδοχή ότι ο Πτολεμαίος είχε το μοναδικό πλεονέκτημα ότι είναι προπομπός του Κέπλερ, καθότι στη σεληνιακή του θεωρία συστρέφει έναν από τους κύκλους σε οβάλ σχήμα που ομοιάζει με τροχιά Κέπλερ: "Επιτρέπεται κανείς να πιστέψει ότι αυτή η υπόθεση του Πτολεμαίου καθοδήγησε τον Κέπλερ προς την κατεύθυνση της έλλειψης." Έτσι ο Πτολεμαίος είχε την τιμή της προετοιμασίας του δρόμου για τον Κέπλερ, ο οποίος με τη σειρά του προετοίμασε τον δρόμο για τον Νεύτωνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το Θεώρημα και η η Ανισότητα του Πτολεμαίου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε για πρώτη φορά με λεπτομέρειες για το Θεώρημα και την ανισότητα του Πτολεμαίου. Θα δούμε πως οδηγήθηκε σε αυτό το θεώρημα από την επιθυμία του να κατασκευάσει ένα πίνακα χορδών και θα μελετήσουμε αναλυτικά τα βήματα που ακολούθησε για να υπολογίσει τη χορδή $\frac{1}{2}^{o}$. Έπειτα, θα δούμε ποιες είναι οι συνέπειες του θεωρήματος του Πτολεμαίου με κυριότερες το Πυθαγόρειο Θεώρημα, το Θεώρημα Van Schooten, το Θεώρημα Wallace-Simpson και διάφορες ισοπεριμετρικές ανισότητες. Τέλος, θα δούμε μια γενίκευση του θεωρήματος του Πτολεμαίου που δόθηκε από τον John Casey, και θα αναφέρουμε το Πρόβλημα το Thébault.

1. Θεώρημα και Ανισότητα του Πτολεμαίου

Θεωρημα 2.1. **Το Θεώρημα του Πτολεμαίου**: Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δυο ζευγών των απέναντι πλευρών.

Αποδειξη. Έστω $ABCD$ ένα τυχαίο τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο και έστω E το σημείο εκείνο της διαγωνίου AC ώστε

$$\angle ABE = \angle DBC.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τη γωνία $\angle EBD$ έχουμε ότι $\angle ABD = \angle EBC$. Όμως, $\angle BDA = \angle BCE$, διότι βλέπουν το ίδιο τόξο, άρα λοιπόν το τρίγωνο ABD είναι όμοιο με το BCE.
Άρα,

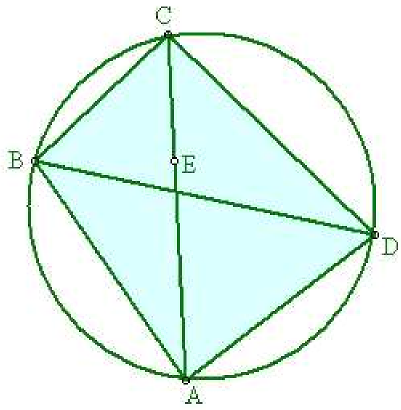
$$BC : CE = BD : DA \quad \text{και} \quad BC \cdot AD = BD \cdot CE.$$

Πάλι, αφού $\angle ABE = \angle DBC$ και $\angle BAE = \angle BDC$, έχουμε ότι το τρίγωνο ABE είναι όμοιο με το τρίγωνο BCD.
Άρα,

$$BA : AE = BD : DC \quad \text{και} \quad BA \cdot DC = BD \cdot AE.$$

Άρα,

$$BC \cdot AD = BD \cdot CE \quad \text{και} \quad AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

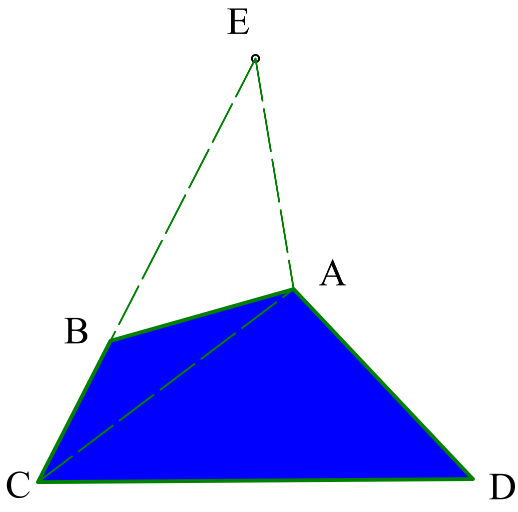


και το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Θεωρημα 2.2. **Η ανισότητα του Πτολεμαίου:** Σε ένα τετράπλευρο $ABCD$ έχουμε ότι

$$AC \cdot DB \leq AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το $ABCD$ είναι εγγράψιμο.



Αποδειξη. Στο τετράπλευρο $ABCD$ θεωρούμε σημείο E, τέτοιο ώστε τα τρίγωνα ACD και AEB να είναι όμοια δηλαδή $\angle ABE = \angle CDA$ και $\angle BAE = \angle CAD$.

Τότε

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC}$$

οπότε
$$BE = \frac{AB \cdot DC}{AD}.$$
Ακόμη, αφού $\angle EAC = \angle BAD$, έχουμε
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$
άρα τα τρίγωνα EAC και BAD είναι όμοια. Έτσι:
$$EC = \frac{AC \cdot DB}{AD}.$$
Στην περίπτωση που το τετράπλευρο δεν είναι εγγράψιμο, τότε
$$\angle ABE + \angle CBA = \angle ADC + \angle CBA \neq 180.$$
Εφαρμόζοντας τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο EBC, έχουμε
$$EC < EB + BC.$$
Από νωρίτερα έχουμε ότι
$$\frac{AC \cdot DB}{AD} < \frac{AB \cdot DC}{AD} + BC$$
άρα
$$AC \cdot DB < AB \cdot DC + BC \cdot AD.$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε την ανισότητα του Πτολεμαίου
$$AC \cdot DB < AB \cdot DC + BC \cdot AD$$
με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το $ABCD$ είναι εγγράψιμο. □

2. Το Θεώρημα του Πτολεμαίου στην Αλμαγέστη-Τριγωνομετρικοί πίνακες

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Πτολεμαίος για να υπολογίσει τον πίνακα χορδών ή ημιτόνων στην Αλμαγέστη. Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, τα σύγχρονα δεκαδικά κλάσματα στη θέση των αρχαίων εξηνταδικών κλασμάτων, και θα δώσουμε τις λεπτομέρειες της μεθόδου σε μικρά βήματα υπό τη μορφή προτάσεων και πορισμάτων.

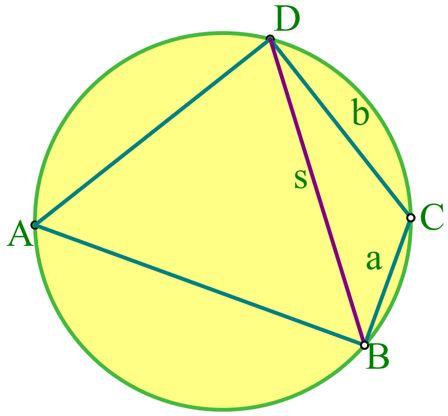
Βήμα 1
Το πρώτο βήμα είναι το Θεώρημα 2.1

Βήμα 2

Πορισμα 2.1. *Αν a και b είναι οι χορδές δύο τόξων κύκλου με ακτίνα ίση με τη μονάδα, τότε*
$$s = \frac{a}{2}(4 - b^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2}(4 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

είναι η χορδή του αθροίσματος των δύο τόξων[1].

Αποδειξη. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ότι $AC = 2$ είναι η διάμετρος, $BC = a$ και $CD = b$.
Όμως αφού οι γωνίες $\angle ABC$ και $\angle ADC$ βαίνουν σε ημικύκλιο, έπεται



ότι τα τρίγωνα ABC και ADC θα είναι ορθογώνια. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε τότε ότι

$$AB = (4 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad AD = (4 - b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο τετράπλευρο του παραπάνω σχήματος, έχουμε $2s = a \cdot (4 - b^2)^{\frac{1}{2}} + b \cdot (4 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, από το οποίο έπεται το ζητούμενο. □

Βήμα 3

Πορισμα 2.2. *Αν a και b, $a \geq b$, είναι οι χορδές δύο τόξων κύκλου με ακτίνα ίση με τη μονάδα, τότε*

$$d = \frac{a}{2}(4 - b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2}(4 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

είναι η χορδή της διαφοράς των δύο τόξων[2].

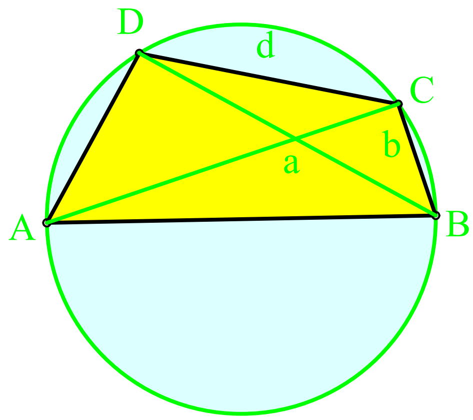
[1] **Παρατήρηση**: Το παραπάνω Πόρισμα είναι ισοδύναμο με την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad 0 < a, b < \frac{\pi}{2}.$$

[2] **Παρατήρηση**: Το παραπάνω Πόρισμα είναι ισοδύναμο με την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \qquad 0 < a, b < \frac{\pi}{2}.$$

Αποδειξη. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ότι AB=2 είναι η διάμετρος, $BD = a$ και $BC = b$.



Όμως αφού οι γωνίες $\angle ACB$ και $\angle ADB$ βαίνουν σε ημικύκλιο, έπεται ότι τα τρίγωνα ABC και ADB θα είναι ορθογώνια. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε τότε ότι

$$AD = (4 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad AC = (4 - b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο τετράπλευρο του παραπάνω σχήματος, έχουμε $a \cdot (4 - b^2)^{\frac{1}{2}} = 2d + b \cdot (4 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Βήμα 4

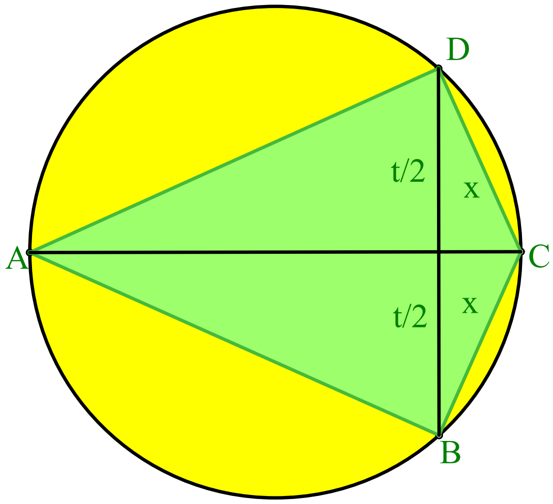
Πορισμα 2.3. *Αν t είναι η χορδή του ελάσσονος τόξου κύκλου με ακτίνα ίση με τη μονάδα, τότε η χορδή του μισού τόξου είναι ίση με*[3]

$$x = \left[2 - (4 - t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Αποδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο τετράπλευρο $ADCB$ του κύκλου στον οποίο η AC είναι διάμετρος, και παίρνουμε $BD = t$ και BD να είναι η κάθετος στο AC.

[3]**Παρατήρηση**: Το παραπάνω Πόρισμα είναι ισοδύναμο με την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin\frac{\theta}{2} = \left[\frac{(1 - \cos\theta)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

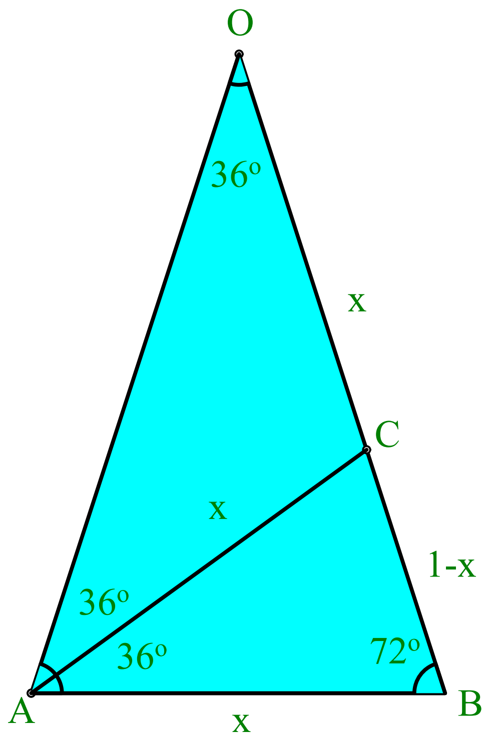


Έχουμε
$$2t = x \cdot (4 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
άρα
$$t^2 = x^2(4 - x^2)$$
δηλαδή
$$x^4 - 4x^2 + t^2 = 0.$$
Λύνοντας ως προς x^2 και παίρνοντας μόνο τη θετική λύση, δηλαδή
$$x^2 = 2 + (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
άρα λοιπόν αφού το x παριστάνει χορδή, παίρνουμε τη θετική λύση,
$$x = \left[2 - (4 - t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$
$\square$

Βήμα 5

Πρόταση 2.1. *Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο AOB με $\angle AOB = 36^o$. Τότε*
$$\angle OAB = \angle OBA = 72^o.$$

Απόδειξη. Φέρνουμε την διχοτόμο AC της $\angle BAO$. Τότε τα τρίγωνα AOB και BAC είναι όμοια άρα έχουμε ότι $AB : CB = OB : AB$. Αν ονομάσουμε το $AB = x$ και πάρουμε $OB = 1$, τότε βρίσκουμε ότι $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, δηλαδή $x^2 + x - 1 = 0$. Τότε $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180$ με ακρίβεια τεσσάρων



δεκαδικών ψηφίων. Άρα λοιπόν, σε έναν κύκλο με ακτίνα ίση με τη μονάδα, χορδή $36^o = 0,6180$. Αυτός είναι ο συζυγής της χρυσής τομής[4] που βρίσκεται παντού μέσα στη φύση. $\square$

Βήμα 6

Σε ένα κύκλο με ακτίνα ίση με τη μονάδα, γνωρίζουμε ότι χορδή $60^o = 1$, άρα από το Πόρισμα 2.2 προκύπτει ότι στον κύκλο αυτό

$$\begin{aligned}\text{χορδή } 24^o &= \text{χορδή } (60^o - 36^o) = \frac{1}{2}(4 - 0,6180^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{0,6180}{2}(4 - 1^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0,4158.\end{aligned}$$

Βήμα 7

[4] Η χρυσή τομή ϕ που ισούται περίπου με 1,618, ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών $\frac{\alpha}{\beta}$ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$. Θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και για το λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, τόσο κατά την αρχαία Ελλάδα όσο και κατά την Αναγέννηση. Την χρυσή τομή εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας, ενώ συμβολίζεται με το γράμμα ϕ προς τιμήν του Φειδία, του γνωστότερου ίσως γλύπτη της ελληνικής αρχαιότητας, και του σημαντικότερου της κλασικής περιόδου. Πηγή: *https : //el.wikipedia.org/wiki/*Χρυσή_τομή

Από το Πόρισμα 2.3, υπολογίζουμε διαδοχικά στον κύκλο με μοναδιαία ακτίνα, τις χορδές των γωνιών $12^o, 6^o, 3^o, 90'$ και $45'$ παίρνοντας χορδή $90' = 0,0262$ και χορδή $45' = 0,0131$.

Βήμα 8

Από τη σχέση $\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$, $b < a < 90^o$, έχουμε $\frac{\text{χορδή}60'}{\text{χορδή}45'} < \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ δηλαδή

$$\text{χορδή } 1^o < \frac{4}{3}\text{χορδή } 45' = \frac{4}{3}0,0131 = 0,01747.$$

Ακόμη, $\frac{\text{χορδή}90'}{\text{χορδή}60'} < \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ οπότε

$$\text{χορδή } 1^o > \frac{2}{3}\text{χορδή } 90' = \frac{2}{3}0,0262 = 0,01747.$$

Άρα, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων, χορδή $1^o = 0,0175$.

Βήμα 9

Από το Πόρισμα 2.3 μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη χορδή $\frac{1}{2}^o$.

Βήμα 10

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μπορεί να κατασκευαστεί πίνακας χορδών ανά $\frac{1}{2}^o$ στον κύκλο με μοναδιαία ακτίνα.

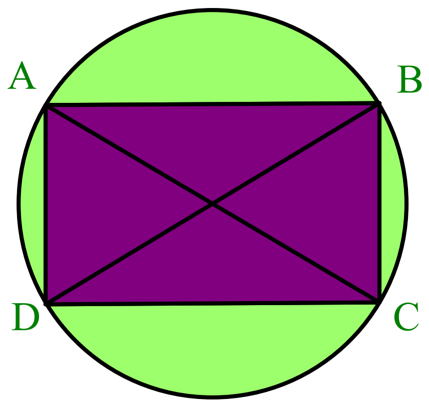
3. Συνέπειες του Θεωρήματος του Πτολεμαίου

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποιες προτάσεις που έπονται από το Θεώρημα του Πτολεμαίου. Πρώτη είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα, στην περίπτωση που το εγγεγραμμένο τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, ενώ ακολουθούν τα θεωρήματα Van Schooten και Wallace-Simpson. Ακολουθούν κάποια φράγματα που προκύπτουν για το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου, ενώ στην τελευταία παράγραφο θα δούμε το Θεώρημα του Casey το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Πτολεμαίου, σύμφωνα με το οποίο αν τέσσερις κύκλοι με κέντρα M_1, M_2, M_3, M_4 και κοινές εξωτερικές εφαπτομένες $t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$, εφάπτονται εξωτερικά σε κύκλο κέντρου M, τότε $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$.

3.1. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Πτολεμαίου αν θεωρήσουμε ορθογώνιο τετράπλευρο.

Θεωρημα 2.3. *Το Πυθαγόρειο*[5] *θεώρημα*
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών.

Αποδειξη. Θεωρούμε ορθογώνιο $ABCD$ με πλευρές $AB = b, BC = c$ και διαγώνιο $AC = a$. Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε ότι



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

δηλαδή

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

3.2. Το Θεώρημα Van Schooten. Το παρακάτω είναι γνωστό και σαν Θεώρημα του Van Schooten[6] .

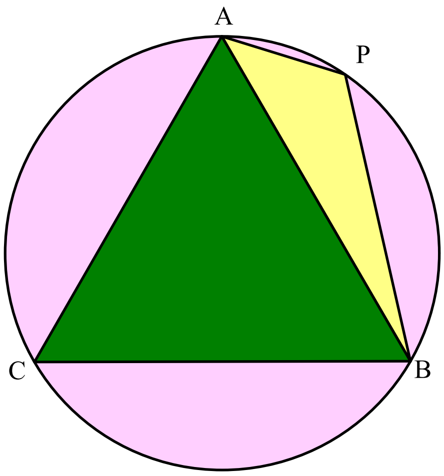
Θεωρημα 2.4. *Αν το P είναι σημείο του τόξου AB του κύκλου που είναι περιγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο ABC, τότε*

$$PC = PA + PB.$$

Αποδειξη. Από το Θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε ότι για το τετράπλευρο $APBC$ ισχύει $AB \cdot PC = PA \cdot BC + PB \cdot AC$, δηλαδή το ζητούμενο, αφού $AB = AC = BC$. □

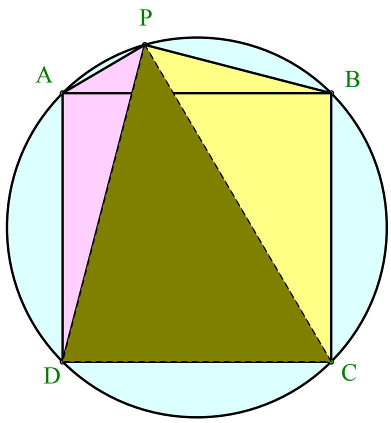
[5]Πυθαγόρας (περίπου 579-500 π.Χ): Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Επίσης έχουν αποδοθεί σε αυτόν διάφορες γεωμετρικές ανακαλύψεις με γνωστότερο το ομώνυμό του θεώρημα. Μια πολύ σημαντική ανακάλυψη που έκανε ο Πυθαγόρας είναι η αριθμητική ερμηνεία του σύμπαντος. Μετρώντας τα κατάλληλα μήκη της χορδής ενός μονόχορδου, διαπίστωσε πως τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα μπορεί να εκφρασθούν σε απλές αριθμητικές αναλογίες των τεσσάρων πρώτων ακεραίων αριθμών.
Πηγή: $https://el.wikipedia.org/wiki/$Πυθαγόρας

[6]Frans Van-Schooten (1615-1660): Ολλανδός μαθηματικός που ασχολήθηκε κυρίως με την Αναλυτική Γεωμετρία μεταφράζοντας και σχολιάζοντας την *Γεωμετρία* του Descartes . Ήταν ο πρώτος που πρότεινε ότι οι ιδέες αυτές μπορούσαν να επεκταθούν στον 3-διάστατο χώρο. Πηγή: $https://en.wikipedia.org/wiki/Frans\_van\_Schooten$



ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. *Αν το P είναι σημείο του τόξου AB του κύκλου που είναι περιγεγραμμένο σε*
(α) ένα τετράγωνο $ABCD$, τότε $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$
(β) ένα κανονικό πεντάγωνο $ABCDE$, τότε $PC + PE = PA + PB + PD$
(γ) ένα κανονικό εξάγωνο $ABCDEF$ τότε $PD + PE = PA + PB + PC + PZ$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για το (α), θα εφαρμόσουμε δυο φορές το Θεώρημα του Πτολεμαίου στα τετράπλευρα $APCD$ και $BCDP$.



Είναι

$$PD \cdot \delta = PA \cdot \alpha + PC \cdot \alpha,$$
$$PC \cdot \delta = PB \cdot \alpha + PD \cdot \alpha,$$

όπου a και d η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με PC και την δεύτερη με PD, έχουμε

$$PC \cdot PD \cdot d = PC(PA + PC)a$$

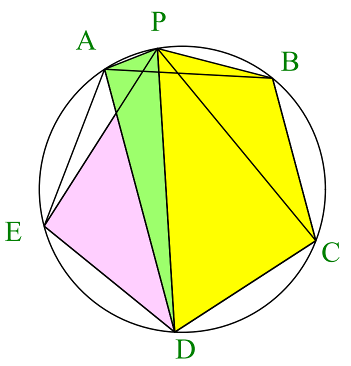
και

$$PD \cdot PC \cdot d = PD(PB + PD)a,$$

δηλαδή προκύπτουν ίσα πρώτα μέλη, άρα

$$(PA + PC)PC \cdot a = (PB + PD)PD \cdot a,$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο.
Για το (β), θα εφαρμόσουμε τρεις φορές το Θεώρημα του Πτολεμαίου στα τετράπλευρα $PCDE, PCDA$ και $PBCD$.



Έχουμε

$$\begin{aligned} PD \cdot EC &= PC \cdot ED + CD \cdot PE, \\ PD \cdot AC &= PC \cdot DA + CD \cdot PA, \\ PC \cdot BD &= PB \cdot CD + BC \cdot PD. \end{aligned}$$

Άρα, αν θέσουμε a να είναι την πλευρά πενταγώνου και d την απόσταση δυο διαδοχικών κορυφών του, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} PD \cdot d &= PC \cdot a + PE \cdot a, \\ PD \cdot d &= PC \cdot d + PA \cdot a, \\ PC \cdot d &= PB \cdot a + PD \cdot a. \end{aligned}$$

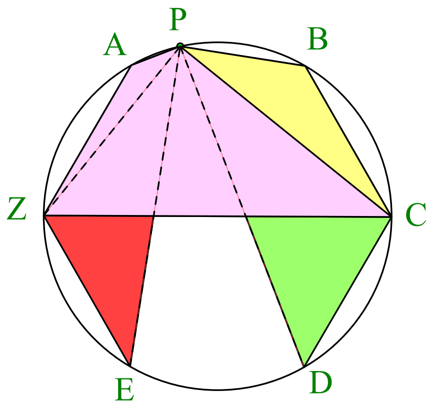
Εξισώνοντας τις δυο πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$PC \cdot a + PE \cdot a = PC \cdot d + PA \cdot a$$

και αντικαθιστώντας έπειτα το $PC \cdot d$ προκύπτει

$$PC \cdot a + PE \cdot a = PA \cdot a + PB \cdot a + PD \cdot a,$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο.
Τέλος για το (γ), εφαρμόζουμε το θεώρημα τέσσερις φορές στα τετράπλευρα $PBCD, PEZA, PBCZ$ και $PCZA$.



Έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} PC \cdot BD &= PB \cdot CD + PD \cdot BC, \\ PZ \cdot EA &= PE \cdot ZA + PA \cdot EZ, \\ PC \cdot BZ &= PB \cdot CZ + PZ \cdot BC, \\ PZ \cdot CA &= PC \cdot ZA + PA \cdot CZ, \end{aligned}$$

οπότε αν θέσουμε a την πλευρά του κανονικού εξαγώνου, d την απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών και R τη διάμετρο του κύκλου, έχουμε

$$\begin{aligned} PC \cdot d &= PB \cdot a + PD \cdot a, \\ PZ \cdot d &= PE \cdot a + PA \cdot a, \\ PC \cdot d &= PB \cdot R + PZ \cdot a, \\ PZ \cdot d &= PC \cdot a + PA \cdot R. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας κατά μέλη την πρώτη με την τρίτη και την δεύτερη με την τέταρτη σχέση, έχουμε

$$\begin{aligned} PB \cdot a + PD \cdot a &= PB \cdot R + PZ \cdot a, \\ PE \cdot a + PA \cdot a &= PC \cdot a + PA \cdot R. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε

$$PB \cdot a + PD \cdot a + PE \cdot a + PA \cdot a = PB \cdot R + PZ \cdot a + PC \cdot a + PA \cdot R.$$

Όμως, ισχύει ότι $R = 2a$ άρα

$$PD \cdot a + PE \cdot a = PA \cdot a + PB \cdot a + PC \cdot a + PZ \cdot a,$$

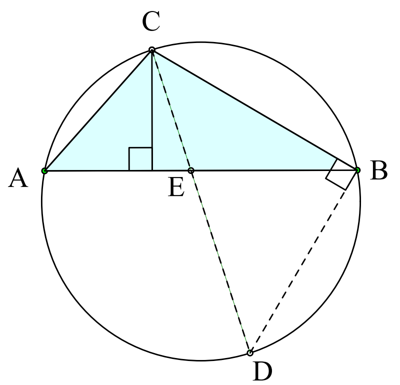
απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο. □

3.3. Φράγματα για το εμβαδόν. Σε αυτό εδώ το κομμάτι, θα μελετήσουμε πώς με τη χρήση του θεωρήματος του Πτολεμαίου, μπορούν να προκύψουν φράγματα για το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου, ενώ θα δούμε και ότι από όλα τα τετράπλευρα με σταθερές πλευρές, το εγγεγραμμένο τετράπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Λημμα 2.1. *Έστω C τυχαίο σημείο κύκλου με κέντρο O και διάμετρο R. Τότε η απόσταση d του C από τη χορδή AB του κύκλου είναι*

$$d = \frac{AC \cdot BC}{R}.$$

Αποδειξη. Φέρνουμε τη διάμετρο CD.



Εφόσον η γωνία $\angle CBD$ βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή. Ακόμη οι γωνίες $\angle CAB$ και $\angle CDB$ είναι ίσες αφού βαίνουν στο ίδιο τόξο. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ACE και CBD είναι όμοια, άρα λοιπόν θα έχουμε ότι $\frac{CE}{AC} = \frac{BC}{CD}$. Δηλαδή $d = CE = \frac{AC \cdot BC}{R}$. □

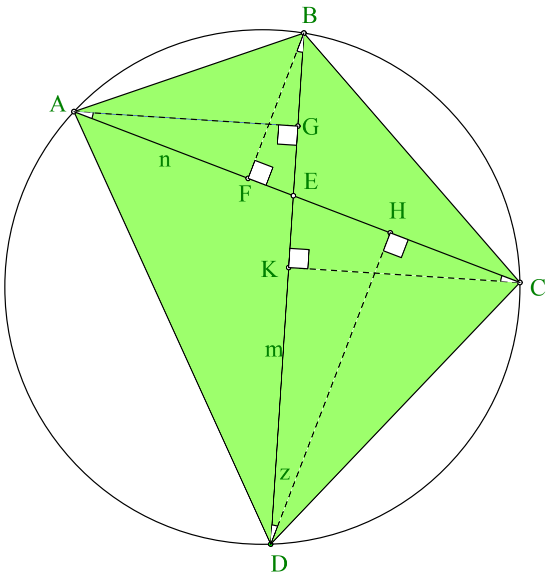
Θεωρημα 2.6. *Έστω $ABCD$ ένα κυκλικό τετράπλευρο διαμέτρου R. Συμβολίζουμε τις διαγωνίους BD και AC με m και n και τη γωνία μεταξύ κάθε διαγωνίου και της καθέτου πάνω στην άλλη με z. Τότε:*

$$m = \frac{AB \cdot BC + CD \cdot AD}{R\cos z} \text{ και } n = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{R \cos z}.$$

Αποδειξη. Φέρνουμε τις κάθετες AG και CK στη διαγώνιο m και τις κάθετες BF και DH στη διαγώνιο n. Τότε $\angle EAG = \angle FBE = \angle ECK = \angle HDE$.

Από το Λήμμα 2.1 έχουμε ότι

$$BF = \frac{AB \cdot BC}{R} \text{ και } DH = \frac{CD \cdot AD}{R}$$



Όμως
$$BF = BE\cos z \quad \text{και} \quad DH = DE\cos z.$$

Άρα
$$m = BE+ED = \frac{BF}{\cos z}+\frac{DH}{\cos z} = \frac{AB\cdot BC}{R\cos z}+\frac{CD\cdot AD}{R\cos z} = \frac{AB\cdot BC + CD\cdot AD}{R\cos z}.$$

Όμοια, πάλι από το Λήμμα 2.1 έχουμε ότι
$$AG = \frac{AB\cdot AD}{R} \text{ και } CK = \frac{BC\cdot CD}{R}.$$

Όμως,
$$AG = AE\cos z \quad \text{και} \quad CK = EC\cos z.$$

Άρα
$$n = AE+EC = \frac{AG}{\cos z}+\frac{CK}{\cos z} = \frac{AB\cdot AD}{R\cos z}+\frac{BC\cdot CD}{R\cos z} = \frac{AB\cdot AD + BC\cdot CD}{R\cos z}.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7. *Έστω Q τετράπλευρο με πλευρές $AB = a, BC = b, CD = c, d = AD$, διαγωνίους $m = BD, n = AC$, εμβαδό E και περίμετρο L το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου R. Τότε,*
α) $\frac{n}{m} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$.
β) $n = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ *και* $m = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$.
γ) $E = \frac{1}{2R}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$.

δ) $E \le \frac{ab+cd}{2}$ και $E \le \frac{ad+bc}{2}$ με την ισότητα να ισχύει σε μια εκ των δυο σχέσεων αν δυο απέναντι γωνίες είναι ορθές.
ε) $E \le \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το Q είναι ορθογώνιο.
στ) $E \le \frac{L^2}{16}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το Q είναι τετράγωνο.

Απόδειξη. [7] α) Προκύπτει αμέσως διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις $m = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{R \cos z}$ και $n = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{R \cos z}$ που αποδείξαμε στο θεώρημα 2.4.

β) Ισχύει ότι $m^2 = mn\frac{m}{n}$. Αλλά από το Θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε ότι

$$mn = ac + bd \quad \text{άρα} \quad m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Όμοια,

$$n^2 = mn\frac{n}{m} = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

γ) Έστω E_1, E_2, E_3, E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ACD, ABC, ABD και BCD αντίστοιχα. Τότε $E = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ με

$$E_1 = n\frac{ab}{2R}, \ \ E_2 = n\frac{cd}{2R}, \ \ E_3 = m\frac{ad}{2R}, \ \ E_4 = m\frac{bc}{2R}.$$

Άρα

$$E = E_1 + E_2 = \frac{n}{2R}(ab+cd) \quad \text{και} \quad E = E_3 + E_4 = \frac{m}{2R}(ad+bc)$$

οπότε

$$\begin{aligned} E^2 = (E_1+E_2)(E_3+E_4) &= \frac{mn}{(2R)^2}(ab+cd)(ad+bc) \\ &= \frac{1}{(2R)^2}(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc). \end{aligned}$$

δ) Έχουμε ότι

$$E = E_1 + E_2 = \frac{n}{2R}(ab+cd) = (\frac{ab+cd}{2})\frac{n}{R} \le \frac{ab+cd}{2} \ \text{αφού} \ n \le R.$$

Η ισότητα ισχύει αν $n = R$ δηλαδή αν $\angle ADC = 90^o$, τότε όμως και η απέναντι γωνία θα είναι ορθή.

Όμοια,

$$E = E_3 + E_4 = \frac{m}{2R}(ad+bc) = (\frac{ad+bc}{2})\frac{m}{R} \le \frac{ad+bc}{2} \ \text{αφού} \ m \le R.$$

[7] Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος $ac + bd$ υποδηλώνει τη διδιάστατη περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$ac + bd \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

.

Η ισότητα ισχύει αν $m = R$ δηλαδή αν $\angle BCD = 90^o$, τότε όμως και η απέναντι γωνία θα είναι ορθή.

ε) Από το δ) έχουμε ότι

$$2E \leq \frac{ab+cd}{2} + \frac{ad+bc}{2},$$

δηλαδή

$$E \leq \frac{ab+cd+ad+bc}{4} = \frac{(a+c)(b+d)}{4}.$$

στ) Από το ε) έχουμε ότι $E \leq \frac{4(a+c)(b+d)}{16}$. Όμως,

$$\begin{aligned}
4(a+c)(b+d) &= 4(ab+bc+ad+cd) \\
&= 2(ab+bc+ad+cd+bd+ac) + 2(ab+bc+ad+cd-bd-ac) \\
&= 2(ab+bc+ad+cd+bd+ac) + 2a(b-c) + 2d(c-b) + 2bc + 2ad \\
&= 2(ab+bc+ad+cd+bd+ac) + 2(a-d)(b-c) + 2bc + 2ad \\
&\leq 2(ab+bc+ad+cd+bd+ac) + (a-d)^2 + (b-c)^2 + 2bc + 2ad \\
&= 2(ab+bc+ad+cd+bd+ac) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\
&= (a+b+c+d)^2.
\end{aligned}$$

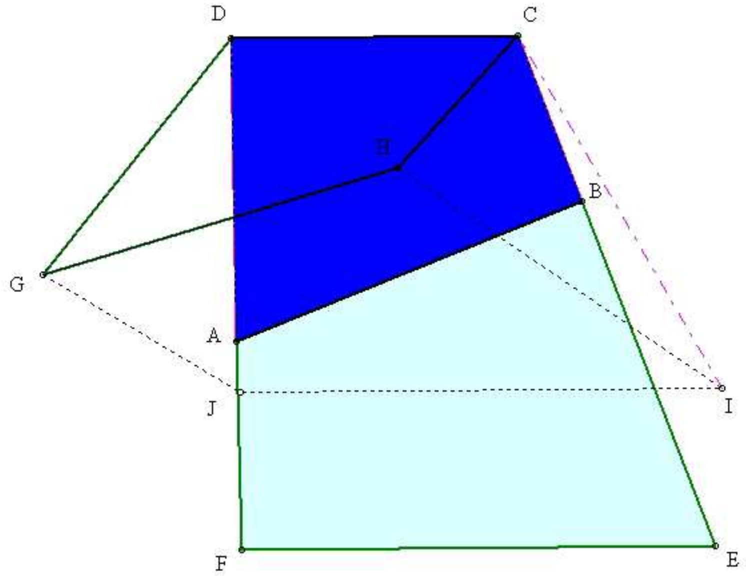
Έτσι, έχουμε ότι $E \leq \frac{4(a+c)(b+d)}{16} \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{16}$, με την ισότητα να ισχύει αν $a = b = c = d$ με τις πλευρές κάθετες ανά δύο, δηλαδή στο τετράγωνο. □

Η παραπάνω σχέση κρύβει μια ισοπεριμετρική ανισότητα για τετράπλευρα, δηλαδή ανάμεσα στα τετράπλευρα με σταθερή περίμετρο, αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.

Πρόταση 2.2. *Από όλα τα τετράπλευρα με σταθερές πλευρές, το εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

Απόδειξη. Έστω $ABCD$ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο και $GHCD$ ένα άλλο τυχαίο τετράπλευρο με ίδια μήκη με το προηγούμενο, δηλαδή $GH = a$, $HC = b$, $CD = c$, $DG = d$. Κατασκευάζουμε ακόμη τα τετράπλευρα $EFAB$ και $IJGH$ όμοια με τα $ABCD$ και $GHCD$ αντίστοιχα. Τότε,

- $FE//DC$ αφού το $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο και οι DAF και CBE είναι ευθείες γραμμές, οπότε $\widehat{FEB} = \widehat{DAB} = \pi - \widehat{DCB}$.



- $JI//DC$ αφού

$$\begin{aligned}
\widehat{CDJ}+\widehat{DJI} &= (\widehat{CDG}-\widehat{JDG})+(\widehat{GJI}-\widehat{GJD})\\
&= (\widehat{CDG}-\widehat{JDG})+(\widehat{CHG}-\widehat{GJD})\\
&= (\widehat{CDG}+\widehat{CHG})-(\widehat{JDG}-\widehat{GJD})\\
&= (\widehat{CDG}+\widehat{CHG})-(\pi-\widehat{DGJ})\\
&= (\widehat{CDG}+\widehat{CHG})+(\widehat{DGH}+\widehat{HGJ})-\pi\\
&= (\widehat{CDG}+\widehat{CHG})+(\widehat{DGH}+\widehat{HCD})-\pi\\
&= 2\pi-\pi=\pi
\end{aligned}$$

Αφού και οι δυο λόγοι ομοιότητας των τετραπλεύρων είναι $\frac{a}{c}$, έχουμε ότι τα εμβαδά των $ABEF$ και $GHIJ$ είναι $\frac{a^2}{c^2}$ φορές αυτά των $ABCD$ και $GHCD$ αντίστοιχα.

Αρκεί να δείξουμε ότι $(DCEF)\geq(DCHIJGD)$. Αφού $GD\cdot GJ = HC\cdot HI$ και $\widehat{DGJ}=\widehat{CHI}$, έχουμε ότι $(DGJ)=(CHI)$, άρα

$$(DCHIJGD)=(DCHG)+(GHIJ)=(DCIJ).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\vec{CD}\cdot\vec{DJ} &= \vec{CD}\cdot(\vec{DG}+\vec{GJ}) = \vec{CD}\cdot\vec{DG}+\vec{CD}\cdot\vec{GJ}\\
&= \vec{CD}\cdot\vec{DG}+\frac{c^2}{a^2}(\vec{IJ}\cdot\vec{GJ}) = \vec{CD}\cdot\vec{DG}-\vec{CH}\cdot\vec{HG}\\
&= \frac{1}{2}(a^2+b^2-CG^2)-\frac{1}{2}(c^2+d^2-CG^2)\\
&= \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2),
\end{aligned}$$

δηλαδή δεν εξαρτάται από τη θέση του J. Έτσι, το JF είναι κάθετο στο DC, ενώ εντελώς όμοια προκύπτει και ότι το IE είναι κάθετο στο DC. Το διάνυσμα $\vec{DJ}=\vec{DG}+\vec{GJ}$ έχει σταθερή προβολή πάνω στο $\vec{CD}$ ενώ το ίδιο ισχύει και για το $\vec{CI}$. Συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $DCEF$ έχει το μεγαλύτερο ύψος ανάμεσα στα άλλα τετράπλευρα που έχουν κατασκευαστεί με τον ίδιο τρόπο όπως το $DCIJ$. Αφού όλα αυτά τα τετράπλευρα έχουν ίδιες βάσεις, το $DCEF$ θα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. □

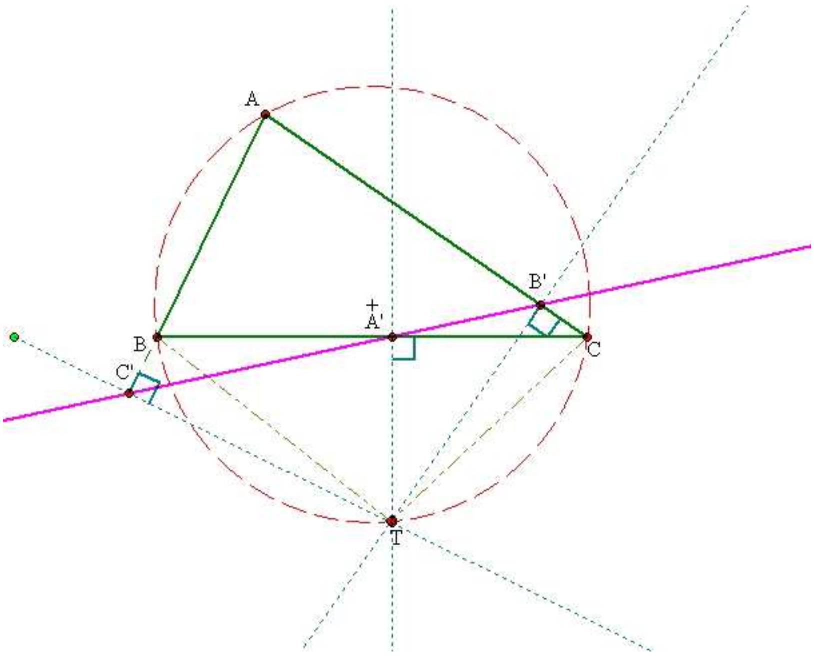
3.4. Το Θεώρημα Wallace-Simson. Το παρακάτω θεώρημα είναι γνωστό ως *θεώρημα* $Wallace-Simson$ αν και σύμφωνα με ιστορικούς το ανακάλυψε μόνο ο William Wallace[8] το 1797. Το όνομα Simson αποδόθηκε καθώς το θεώρημα είχε πολλές από τις κλασσικές ιδέες του Simson[9].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8. *Έστω ευθεία l που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου ABC με τέτοιο τρόπο ώστε οι κάθετες από τα σημεία τομής A', B', C' να τέμνονται στο σημείο T. Τότε το σημείο T θα βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, φέρνοντας τις TB και TC, προκύπτουν τα τετράπλευρα $TC'BA'$ και $TCB'A'$ που είναι εγγράψιμα σε κύκλο, αφού $BA'T+BC'T=\pi$ και η TC φαίνεται από τις μη προσκείμενες κορυφές A', B' υπό ίσες γωνίες ($\frac{\pi}{2}$). Αφού λοιπόν τα τετράπλευρα $TC'BA'$ και $TCB'A'$ είναι εγγράψιμα, κάθε πλευρά φαίνεται από τις μη προσκείμενες σε αυτήν κορυφές υπό ίσες γωνίες. Έτσι, οι γωνίες $\angle C'TB$ και $\angle BA'C'$ είναι ίσες αφού

[8]William Wallace (1768-1843): Σκωτσέζος μαθηματικός και αστρονόμος. Εκτός από την ευθεία του Wallace που αν και τη δημοσίευσε νωρίτερα, αποδόθηκε στον Simson, απέδειξε και ένα αποτέλεσμα για ισεμβαδικά πολύγωνα που αργότερα έγινε γνωστό ως Θεώρημα Bolyai-Gerwien. Επίσης σημαντική ήταν η προώθηση του "Ευρωπαϊκού" Απειροστικού λογισμού που έκανε στη Βρετανία, ενώ εφηύρε και τον ειδογράφο.
Πηγή: $https://en.wikipedia.org$

[9]Robert Simson (1687-1768): Σκωτσέζος μαθηματικός που μετέφρασε και σχολίασε πολλά αρχαία κείμενα γεωμετρών, ανάμεσα στους οποίους ήταν ο Ευκλείδης και ο Απολλώνιος.
Πηγή: $https://en.wikipedia.org/wiki/Robert\_Simson$



βλέπουν την $C'B$, και οι γωνίες $\angle CTB$ και $\angle B'A'C$ είναι ίσες αφού βλέπουν την $B'C$. Αλλά οι $\angle BA'C'$ και $\angle B'A'C$ είναι ίσες ως κατά κορυφήν, άρα

$$\angle C'TB = \angle BA'C = \angle B'A'C = \angle CTB'.$$

Έτσι, οι γωνίες $\angle C'TB'$ και $\angle BTC$ είναι ίσες αφού

$$\angle C'TB' = \angle C'TB + \angle BTB' = \angle B'TC + \angle BTB' = \angle BTC.$$

Αλλά η γωνία $\angle C'TB'$ είναι παραπληρωματική της $\angle BAC$ καθώς το $C'TB'A$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο αφού

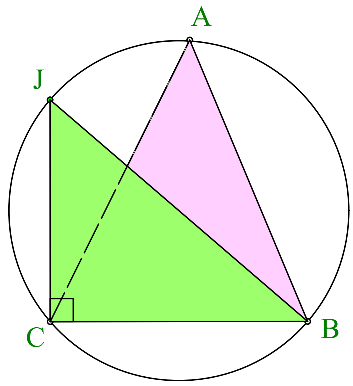
$$\angle AB'T + \angle AC'T = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι και οι BTC, BAC είναι συμπληρωματικές γωνίες, άρα το $BACT$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, οπότε το σημείο T είναι επί του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC. $\square$

Παρακάτω διατυπώνουμε κάποια αποτελέσματα που θα χρειαστούμε για να δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Wallace-Simson με τη χρήση του θεωρήματος του Πτολεμαίου.

Λημμα 2.2. *Νόμος των ημιτόνων. Για κάθε εγγεγραμμένο τρίγωνο ABC σε κύκλο ακτίνας R, ισχύει ότι*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Αποδειξη. Φέρνουμε τη διάμετρο JC και τη χορδή BJ.

Τότε η $\angle JBC$ είναι ορθή αφού το τρίγωνο JBC βαίνει σε ημικύκλιο. Έτσι,

$$\sin J = \frac{a}{JC} = \frac{a}{2R},$$

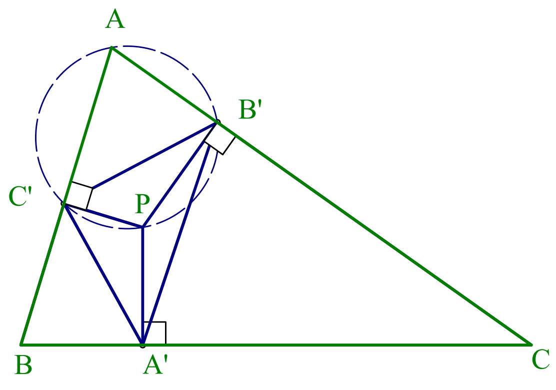
άρα

$$2R = \frac{a}{\sin J} \quad \text{αλλά} \quad \hat{J} = \hat{A} \quad \text{οπότε} \quad 2R = \frac{a}{\sin A}.$$

Όμοια προκύπτουν και τα υπόλοιπα. □

Θεωρημα 2.9. *Αν το ποδικό σημείο P απέχει x, y, z από τις κορυφές του τριγώνου ABC, τότε το ποδικό τρίγωνο $A'B'C'$ έχει πλευρές $\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R}$.*

Αποδειξη. Για το ποδικό τρίγωνο $A'B'C'$ έχουμε ότι τα C', B' βρίσκονται πάνω σε κύκλο διαμέτρου AP αφού $\angle AC'P = \angle AB'P = \frac{\pi}{2}$.



Δηλαδή το P ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του $AB'C'$. Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB'C'$ και στο τρίγωνο ABC και έχουμε αντίστοιχα

$$\frac{B'C'}{\sin A} = AP, \quad \frac{a}{\sin A} = 2R,$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$B'C' = a\frac{AP}{2R}.$$

Όμοια προκύπτουν και άλλες δυο σχέσεις. □

Στο κομμάτι που ακολουθεί, θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Wallace με χρήση του θεωρήματος του Πτολεμαίου.

Απόδειξη. Στο εκφυλισμένο ποδικό τρίγωνο $A'B'C'$, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$B'C' = a\frac{AT}{2R}, A'C' = b\frac{BT}{2R}, A'B' = c\frac{CT}{2R}.$$

Όμως, $A'B' + A'C' = B'C'$ άρα αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην προηγούμενη, έχουμε

$$c\frac{CT}{2R} + b\frac{BT}{2R} = a\frac{AT}{2R}$$

δηλαδή

$$AB \cdot CT + AC \cdot BT = BC \cdot AT$$

που όμως από το Θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει μόνο όταν και τα τέσσερα σημεία είναι πάνω στον κύκλο, άρα το T βρίσκεται πάνω στον κύκλο. □

3.5. Το Θεώρημα του Casey. Ίσως η πιο αναπάντεχη γενίκευση του θεωρήματος του Πτολεμαίου είναι αυτή που έδωσε ο Ιρλανδός μαθηματικός John Casey[10].

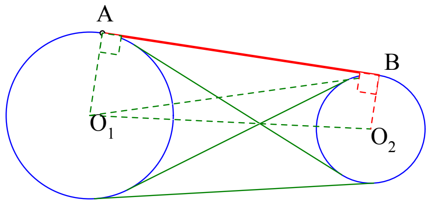
[10] John Casey (1820-1891): Ιρλανδός γεωμέτρης, αυτοδίδακτος, γνωστός για το ομώνυμο θεώρημά του το οποίο συχνά αναφέρεται και ως *γενικευμένο Θεώρημα του Πτολεμαίου*. Το θεώρημα αυτό μαζί με το αντίστροφό του χρησιμοποιούνται για να αποδείξουν πολλά αποτελέσματα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.
Πηγή: *https : //en.wikipedia.org*

Λημμα 2.3. *Έστω* (O, R_1) *και* (O, R_2) *δυο κύκλοι που δεν περιέχονται ο ένας μέσα στον άλλο. Τότε το μήκος της κοινής τους εξωτερικής εφαπτομένης είναι*

$$\sqrt{(O_1O_2)^2 - (R_1 - R_2)^2}.$$

Αν οι κύκλοι είναι ξένοι, τότε το μήκος της κοινής τους εσωτερικής εφαπτομένης είναι

$$\sqrt{(O_1O_2)^2 - (R_1 + R_2)^2}.$$



Λημμα 2.4. *Έστω* (O, R) *μη εκφυλισμένος κύκλος και έστω δυο κύκλοι* (O_1, R_1) *και* (O_2, R_2) *που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία* P_1 *και* P_2 *αντίστοιχα. Έστω ότι οι κύκλοι* O_1 *και* O_2 *δεν περιέχουν το* O. *Τότε:*
α)Αν οι (O_1, R_1) *και* (O_2, R_2) *εφάπτονται σε αυτόν εξωτερικά, τότε*

$$t_{12} = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R + R_1)(R + R_2)}.$$

β)Αν οι (O_1, R_1) *και* (O_2, R_2) *εφάπτονται σε αυτόν εσωτερικά, τότε*

$$t_{12} = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R - R_1)(R - R_2)}.$$

γ)Αν ο (O_1, R_1) *εφάπτεται σε αυτόν εσωτερικά και ο* (O_2, R_2) *εξωτερικά, τότε*

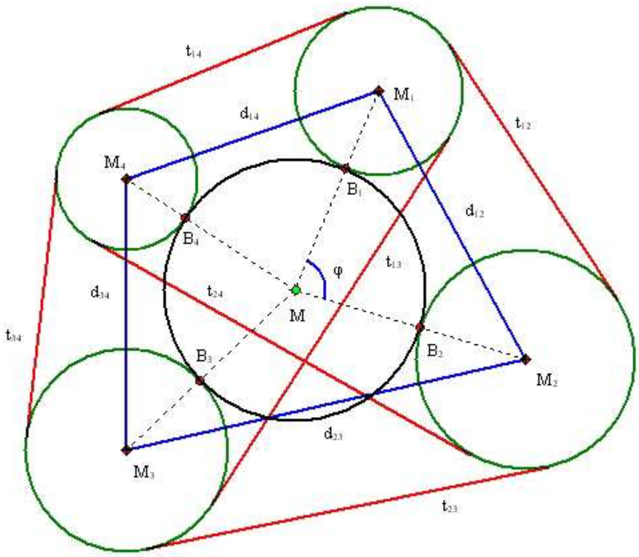
$$t_{12} = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R + R_1)(R - R_2)}.$$

Η απόδειξη έπεται αμέσως αν εφαρμόσουμε το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα OO_1O_2 και OP_1P_2 και χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα.

Διατυπώνουμε τώρα το Θεώρημα του Casey:

Θεωρημα 2.10. *Αν τέσσερις κύκλοι με κέντρα* M_1, M_2, M_3, M_4 *και κοινές εξωτερικές εφαπτομένες* $t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$, *εφάπτονται εξωτερικά σε κύκλο κέντρου* M, *τότε*

$$t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}.$$



Αποδειξη.

$$t_{12}^2 = d_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2,$$
$$d_{12}^2 = (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2)\cos\phi$$
$$(B_1B_2)^2 = 2R^2(1 - \cos\phi),$$

συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε ότι

$$t_{12}^2 = (B_1B_2)^2 \frac{1}{R^2}(R + r_1)(R + r_2).$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $B_1B_2B_3B_4$, έχουμε ότι

$$B_1B_3 \cdot B_2B_4 = B_1B_4 \cdot B_2B_3 + B_1B_2 \cdot B_3B_4$$

ή

$$\frac{t_{13}R \cdot t_{24}R}{\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)(R + r_3)(R + r_4)}} = \frac{t_{14}R \cdot t_{23}R + t_{12}R \cdot t_{34}R}{\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)(R + r_3)(R + r_4)}}$$

δηλαδή

$$t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}.$$

□

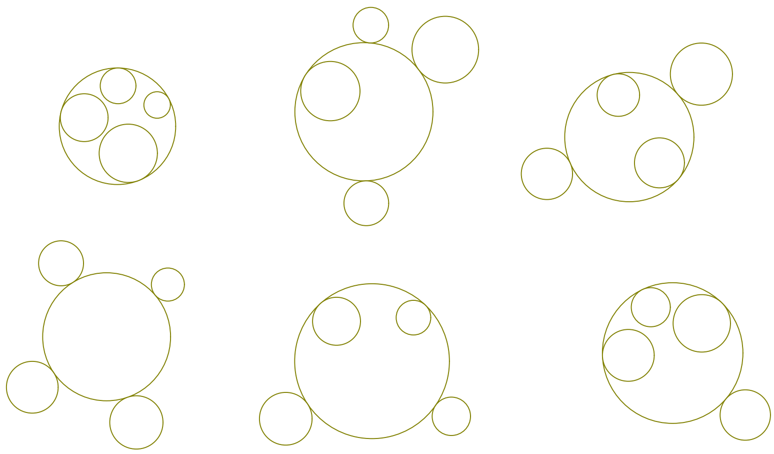
Το Θεώρημα του Casey αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Πτολεμαίου, το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι τέσσερις κύκλοι έχουν ακτίνα 0.

Ωστόσο υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις με τις οποίες δεν καταπιάστηκε ο Casey. Αν και συνήθως το Θεώρημα το Casey είναι που εννοεί κανείς όταν αναφέρεται στο γενικευμένο Θεώρημα του Πτολεμαίου, κάποιες φορές στη βιβλιογραφία ως γενικευμένο Θεώρημα του Πτολεμαίου, αναφέρεται το θεώρημα που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Αυτές θα συζητήσουμε παρακάτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11. *Αν τέσσερις κύκλοι με κέντρα O_1, O_2, O_3, O_4 και κοινές εξωτερικές εφαπτομένες $t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$, εφάπτονται σε κύκλο κέντρου M, στα σημεία A, B, C και D αντίστοιχα, τότε*

$$t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι διάφορες περιπτώσεις.



Ας μελετήσουμε την περίπτωση όπου 2 κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και δυο εξωτερικά. Από το θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε ότι

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη με την $\frac{\sqrt{(R+R_1)(R+R_2)(R-R_3)(R-R_4)}}{R^2}$, τότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει το ζητούμενο. Όλες οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται με παρόμοιους πολλαπλασιασμούς κατά μέλη, της μορφής $\frac{\sqrt{(R\pm R_1)(R\pm R_2)(R\pm R_3)(R\pm R_4)}}{R^2}$, ανάλογα το πως εφάπτονται οι κύκλοι σε κάθε περίπτωση. □

3.6. Το (Εξωτερικό) Θεώρημα του Thébault. Το θεώρημα αυτό αποτελεί γενίκευση του αρχικού θεωρήματος που πρότεινε ο Thébault[11] υπό τη μορφή προβλήματος, στο ένθετο "Problems and solutions"του περιοδικού "Monthly".Εμφανίστηκαν κάποιες λύσεις το 1973 στην Ολλανδία οι οποίες όμως έγιναν πιο γνωστές ευρέως το 1989 όταν το καναδικό έντυπο Crux Mathematicorum δημοσίευσε την απλουστευμένη λύση του Veldkamp που ήταν από τους πρώτους δυο ερευνητές που απέδειξαν το θεώρημα στην Ολλανδία. Στο τέλος του ίδιου έτους, ο Ελβετός δάσκαλος R.

[11]Victor Thébault (1882-1960): Γάλλος γεωμέτρης που είναι γνωστός για τα τρία προβλήματα Γεωμετρίας που έθεσε.

Stark, δημοσίευσε στο ελβετικό έντυπο "Elemente der Mathematik" την πρώτη σύνθετη λύση ενός πιο γενικευμένου προβλήματος του οποίου ειδική λύση ήταν αυτό του Thébault. Αυτή η γενίκευση, που βασίζεται σε ένα ιδιαίτερο τετράγωνο γνωστό στον J. Neuberg, είχε παρατηρηθεί το 1983 σε ένα σχόλιο του συντάκτη του Monthly σε μια δημοσίευση που περιείχε την πρώτη μετρική λύση του Άγγλου K.B. Taylor που ήταν περί τις 24 σελίδες. Το 1986 εμφανίστηκε μια πολύ πιο σύντομη απόδειξη που οφείλεται στον G. Turnwald. Το 2001, ο R. Shail θεώρησε στην αναλυτική του προσέγγιση, ένα πολύ πιο πλήρες πρόβλημα, στο οποίο αυτό του Stark εμφανιζόταν σαν ειδική περίπτωση. Αυτή η τελευταία γενίκευση μελετήθηκε πάλι από τον S. Gueron με έναν περισσότερο μετρικό παρά πλήρη τρόπο. Το 2003, το Monthly δημοσίευσε τη λύση του B.J. English που υπήρχε ήδη από το 1975 αλλά "είχε χαθεί στο χρόνο." Χάρη στο JSTOR ο J.L Ayme ανακάλυψε σε μια παλιά έκδοση του Monthly ότι το πρόβλημα του Shail είχε ήδη προταθεί το 1905 από τον εκπαιδευτή της στρατιωτικής σχολής του Τόκυο, Y. Sawayama και είχε επιλυθεί γεωμετρικά από τον ίδιο προσεγγίζοντάς το συνθετικά και μετρικά. Έτσι, συχνά στη βιβλιογραφία, το πρόβλημα του Thébault, αναφέρεται και ως Sawayama-Thébault.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.12. *Έστω τρίγωνο ABC, (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του και D ένα σημείο επί της BC τέτοιο ώστε $\angle BDA = \theta$. Ας πάρουμε (O,r_1) να είναι ο κύκλος που εφάπτεται της BC στο σημείο P, και επί της AD στο M, ενώ εφάπτεται εξωτερικά του O. Όμοια, ας πάρουμε (O,r_2) να είναι ο κύκλος που εφάπτεται της BC στο σημείο Q, και επί της AD στο N, ενώ εφάπτεται εξωτερικά του O. Αν (I_a,r_a) είναι ο εξωτερικός κύκλος του τριγώνου που εφάπτεται στα AB, AC, BC, επί της BC. Τότε:*
α)$r_a = r_1\sin^2(\frac{\theta}{2}) + r_2\cos^2(\frac{\theta}{2})$.
β)Οι ευθείες l_1, l_2 που περνούν από τα σημεία P και Q αντίστοιχα και είναι παράλληλες στο AD, εφάπτονται του κύκλου (I_a,r_a).
γ)Τα O_1, O_2 και I_a είναι συγγραμμικά.
δ)$\frac{O_1I_a}{O_2I_a} = \cot^2(\frac{\theta}{2})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. α)Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$AB = c, BC = a, AC = b, DP = x, DQ = y,$$

τότε αν εφαρμόσουμε το γενικευμένο Θεώρημα του Πτολεμαίου στο ABO_1C έχουμε

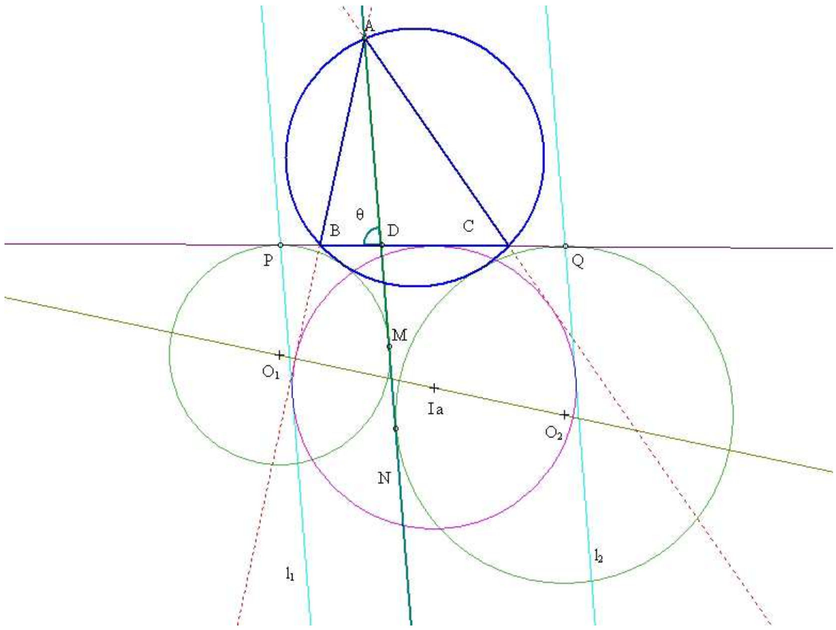
$$c(CD + x) + b(x - BD) = a(AD + x)$$

που δίνει την

$$x(c + b - a) = aAD + bBD - cCD \tag{2.1}$$

Όμοια, εφαρμόζοντας το γενικευμένο Θεώρημα του Πτολεμαίου στο ABO_2C, έχουμε

$$y(c + b - a) = aAD + cCD - bBD \tag{2.2}$$



Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.1) και (2.2) έχουμε

$$(c+b-a)(x+y) = 2aAD.$$

Αφού $\cot(\frac{\theta}{2}) = \frac{r_1}{x}$ και $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{r_2}{y}$, έχουμε

$$(c+b-a)\big(\frac{r_1}{\cot(\frac{\theta}{2})} + \frac{r_2}{\tan(\frac{\theta}{2})}\big) = 2aAD.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$, προκύπτει

$$(c+b-a)\big(r_1\sin^2(\frac{\theta}{2}) + r_2\cos^2(\frac{\theta}{2})\big) = aAD\sin\theta = 2E_{ABC}.$$

Όμως, $r_a(c+b-a) = 2E_{ABC}$, άρα $r_a = r_1\sin^2(\frac{\theta}{2}) + r_2\cos^2(\frac{\theta}{2})$.

β)Ας συμβολίσουμε με R την τομή της l_1 με την AB. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Θεώρημα το Πτολεμαίου στο ABO_1C έχουμε

$$bBP + c(a+BP) = a(AD+BD+BP)$$

ή ισοδύναμα

$$BP(b+c-a) = a(AD+BD-c). \tag{2.3}$$

Αφού τα τρίγωνα BPR και BDA είναι όμοια, έχουμε ότι

$$\frac{PR}{AD} = \frac{BP}{BD} = \frac{BR}{BA},$$

οπότε

$$PR = \frac{BP\cdot AD}{BD}, \quad BR = \frac{BP\cdot c}{BD} \tag{2.4}$$

Αν πάρουμε r'_a να είναι η ακτίνα εξωτερικού κύκλου του τριγώνου PBR που εφάπτεται στις PB, BR, RP επί της πλευράς BR, τότε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του β), αρκεί να δείξουμε ότι $r_a = r'_a$. Όπως και νωρίτερα, παρατηρούμε ότι

$$r'_a = \frac{2E_{PRB}}{PB + PR - BR}. \tag{2.5}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε ότι

$$\frac{E_{PRB}}{E_{ABD}} = \frac{BP^2}{BD^2}, \ \text{ οπότε } \ E_{PRB} = \frac{BP^2}{BD^2} \cdot E_{ABD}.$$

Από την $\frac{E_{ABD}}{E_{ABC}} = \frac{BD}{a}$, προκύπτει $E_{PRB} = \frac{BP^2}{aBD} \cdot E_{ABC}$. Τέλος, αντικαθιστώντας την (2.4) στην (2.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned} r'_a &= \frac{2BP^2 \cdot E_{ABC}}{aBD\left(\frac{BP \cdot AD}{BD} + BP - \frac{c}{B} PBD\right)} \\ &= \frac{BP \cdot 2E_{ABC}}{a(AD + BD - c)} \overset{(2.3)}{=} \frac{2E_{ABC}}{c + b - a} = r_a. \end{aligned}$$

γ) Έστω T η προβολή του I_a πάνω στο BC. Από το β) έχουμε ότι

$$\angle TPI_a = \frac{\theta}{2}, \text{ και } \angle TQI_a = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Για να αποδείξουμε το γ) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{PT}{QT} = \frac{r_1 - r_a}{r_a - r_2}.$$

Έχουμε ότι

$$PT = r_a \cot \frac{\theta}{2} \text{ και } QT = r_a \tan \frac{\theta}{2},$$

οπότε

$$\frac{r_1 - r_a}{r_a - r_2} = \frac{r_1 - r_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} - r_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{r_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - r_2} = \frac{(r_1 - r_2) \cos^2 \frac{\theta}{2}}{(r_1 - r_2) \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{PT}{QT}.$$

δ)

$$\frac{O_1 I_a}{O_2 I_a} = \frac{PT}{QT} = \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γεωμετρία της Αντιστροφής και Θεώρημα του Πτολεμαίου

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια αρχική εισαγωγή στη Γεωμετρία της Αντιστροφής και έπειτα με τη χρήση της αντιστροφής θα αποδείξουμε το Θεώρημα και την ανισότητα του Πτολεμαίου. Στη συνέχεια θα δούμε πώς το Θεώρημα του Πτολεμαίου εφαρμόζεται στην απόδειξη ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης, του Προβλήματος του Fermat, το οποίο στη συνέχεια θα δούμε ότι συνδέεται με το Θεώρημα του Ναπολέοντα. Τέλος, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στον Arthur Cayley ο οποίος μελετώντας προβλήματα σχετικά με το Θεώρημα του Πτολεμαίου, δουλεύοντας ένα πρόβλημα αποστάσεων είχε ως παράπλευρο αποτέλεσμα το Θεώρημα του Πτολεμαίου σε μορφή οριζουσών.

1. Γεωμετρία της αντιστροφής

Σε αυτή την ενότητα θα μιλήσουμε για την Γεωμετρία της Αντιστροφής και τη χρήση της στη μελέτη κύκλων και ευθειών.

Κύριο εργαλείο μας είναι η αντιστροφή, που είναι μια γενίκευση της έννοιας της ανάκλασης σημείων ως προς μια ευθεία. Όπως η ανάκλαση ως προς μια ευθεία αντιστοιχίζει σημεία από τη μια μεριά της ευθείας στην άλλη, έτσι και η αντιστροφή ως προς κύκλο αντιστοιχίζει σημεία εντός του κύκλου σε σημεία εκτός του κύκλου κι αντίστοιχα.

Για την αποφυγή δυσκολιών θα θεωρούμε τις ευθείες ως κύκλους άπειρης ακτίνας έχοντας στο μυαλό μας ότι τα άκρα τους ενώνονται σ'ενα σημείο στο άπειρο. Έτσι, ο όρος *γενικευμένος κύκλος* αναφέρεται είτε σε ευκλείδεια ευθεία είτε σε κύκλο.

Για να καταστήσουμε πιο σαφή την ιδέα των σημείων στο άπειρο, εισάγουμε μια νέα έννοια, αυτή του *επεκτεταμένου επιπέδου*. Αυτό περιέχει το $\mathbb{R}^2$ μαζί με ένα επιπλέον σημείο το οποίο ορίζουμε να είναι το σημείο στο άπειρο. Αυτό το επεκτεταμένο επίπεδο είναι που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη της γεωμετρίας της αντιστροφής.

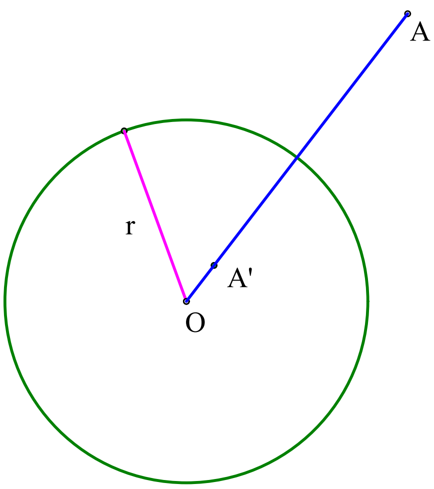
Οι μετασχηματισμοι αυτής της γεωμετρίας, γνωστοί κι ως μετασχηματισμοί αντιστροφής, ορίζονται να είναι συνθέσεις αντιστροφών.

Οι μετασχηματισμοί αντιστροφής:

(1) Διατηρούν τις γωνίες που σχηματίζουν δυο τεμνόμενες καμπύλες (είναι δηλαδή σύμμορφες απεικονίσεις).
(2) Απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

Οι ιδιότητες αυτές είναι που μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε την Γεωμετρία της Αντιστροφής για την απόδειξη θεωρημάτων όπως αυτό του Πάππου, του Steiner, των Απολλώνιων κύκλων αλλά και του Πτολεμαίου όπως θα δούμε παρακάτω.

Ορισμος 3.1. *Έστω C ένας κύκλος κέντρου O κι ακτίνας r, και A ένα σημείο διάφορο του O. Αν A' είναι ένα σημείο πάνω στην ευθεία OA που βρίσκεται από την ίδια πλευρά του O με το A και ικανοποιεί την εξίσωση $OA \cdot OA' = r^2$, τότε λέμε το A' αντίστροφο του A ως προς τον κύκλο C. Το σημείο O λέγεται κέντρο της αντιστροφής κι ο C λέγεται κύκλος της αντιστροφής. Ο μετασχηματισμός $t(A) = A' \quad (A \in \mathbb{R}^2 - \{0\})$ είναι γνωστός ως αντιστροφή στο C.*



Για παράδειγμα, αν C είναι ο μοναδιαίος κύκλος $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, τότε το αντίστροφο σημείο του $(0, 2)$ είναι το $(0, \frac{1}{2})$.

Παρατηρήσεις:

(1) Αφού το $OA \cdot OA' = r^2 > 0$, κανένα από τα OA και OA' δεν μπορεί να είναι 0, άρα κανένα από τα A ή A' δεν μπορεί να συμπίπτει με το O.

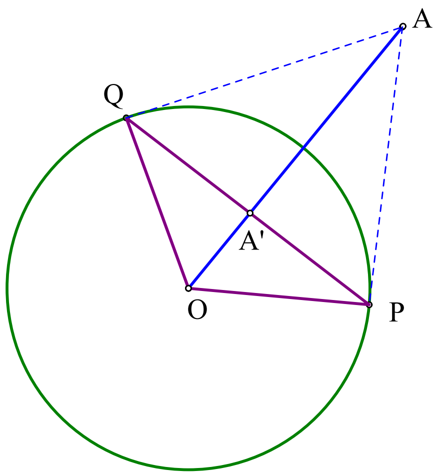
(2) Η αντιστροφή μετασχηματίζει το επίπεδο ως εξής: στέλνει στοιχεία εντός του κύκλου C σε στοιχεία εκτός αυτού κι αντίστροφα αφού αν $OA < r$ τότε $OA' = \frac{r^2}{OA} > r$ ενώ αν $OA > r$ τότε $OA' = \frac{r^2}{OA} < r$.

(3) Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στον κύκλο αντιστοιχίζεται στον εαυτό του.

(4) Προφανώς αν A' είναι το αντίστροφο του A τότε το A είναι το αντίστροφο του A' αφού $OA \cdot OA' = r^2 = OA' \cdot OA$ και λέμε ότι τα A και A' είναι *αντίστροφα σημεία* ως προς τον κύκλο C. Με αυτή την έννοια η αντιστροφή μοιάζει με την ανάκλαση, με την έννοια ότι αν κάνουμε αντιστροφή στην αντιστροφή παίρνουμε πάλι το αρχικό σημείο, δηλαδή υπάρχει ο t και ισχύει $t^{-1} = t$. Τέτοιοι μετασχηματισμοί λέγονται *αυτο-αντίστροφοι*.

(5) Από την ύπαρξη του t^{-1} συμπεραίνουμε ότι η αντιστροφή είναι $1-1$ απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ στο $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Ακολουθεί ένας γεωμετρικός τρόπος εύρεσης του αντίστροφου σημείου A' ενός σημείου A ως προς κύκλο C.



Έστω A σημείο εκτός του κύκλου C με κέντρο O και ακτίνα r, και έστω AP και AQ δυο εφαπτόμενες στον κύκλο από το A. Έστω A' το σημείο τομής των PQ και OA. Τότε τα A' και A είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον C. Αυτό ισχύει διότι τα τρίγωνα OPA και OAP είναι όμοια αφού

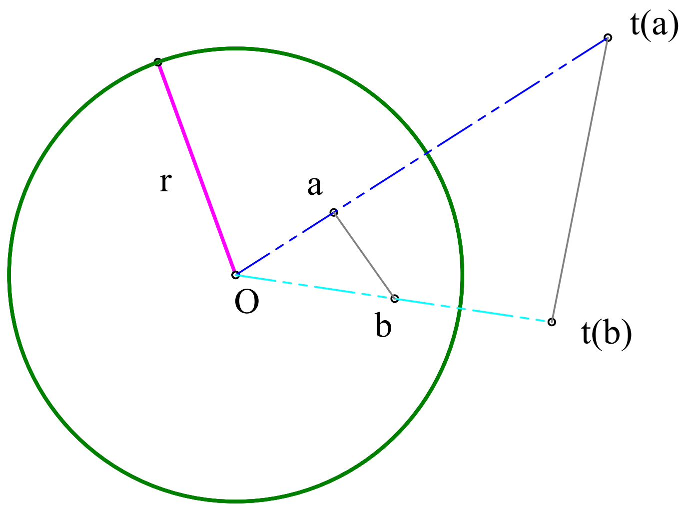
$$\angle OA'P = \angle OPA \text{ και } \angle A'OP = \angle A'OQ.$$

Από την ομοιότητα έχουμε ότι

$$\frac{OA'}{OP} = \frac{OP}{OA}, \text{ δηλαδή } OA' \cdot OA = OP^2 = r^2.$$

Λημμα 3.1. *Έστω a, b σημεία στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Τότε μέσω της αντιστροφής t σε κύκλο C κέντρου O και ακτίνας r, η απόσταση μεταξύ των $t(a)$ και $t(b)$ είναι*

$$\frac{r^2}{|a||b|}|a-b|. \tag{3.1}$$



Απόδειξη : Η αντιστροφή ως προς τον C μπορεί να αναπαρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού

$$t(z) = \frac{r^2}{z}, \text{ όπου } z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Από το παραπάνω έχουμε ότι

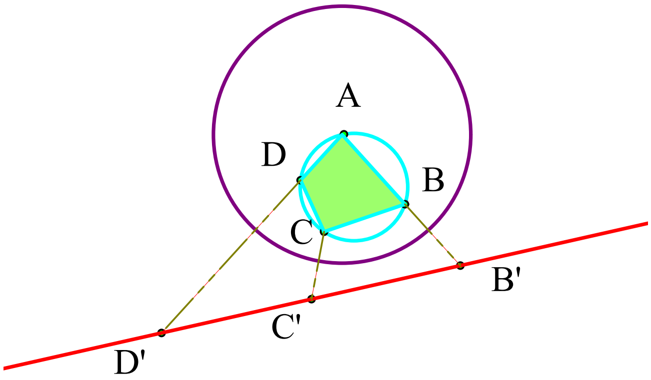
$$t(a) - t(b) = \frac{r^2}{\bar{a}} - \frac{r^2}{\bar{b}} = \frac{r^2}{\bar{a}\bar{b}}(\bar{b} - \bar{a}).$$

Άρα λοιπόν,

$$|t(a) - t(b)| = \frac{r^2}{|a||b|}|b-a|.$$

2. Θεώρημα και ανισότητα του Πτολεμαίου

Τώρα, έχοντας οργανώσει τα εργαλεία που θα χρειαστούμε είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα και την ανισότητα του Πτολεμαίου με τη χρήση της αντιστροφής.



Απόδειξη: Θεωρήματος 2.1: Έστω ο μετασχηματισμός t που είναι η αντιστροφή του τετράπλευρου $ABCD$ ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$ με κέντρο A και ακτίνα 1. Ο t στέλνει το A στο ∞, τον κύκλο $\mathcal{C}$ σε μια επεκτεταμένη ευθεία l και τα σημεία B, C, D του $\mathcal{C}$ στα σημεία B', C', D' αντίστοιχα πάνω στην l. Αφού τα B, C, D είναι με αυτήν τη διάταξη στον $\mathcal{C}$, έχουμε ότι B', C', D' θα έχουν αυτή τη διάταξη στην l, άρα

$$B'C' + C'D' = B'D'. \tag{3.2}$$

Αφού ο t είναι αυτο-αντίστροφος, έχουμε ότι

$$t(B') = B,\ t(C') = C,\ t(D') = D.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το προηγούμενο λήμμα, από την (3.1) έχουμε ότι

$$B'C' = \frac{BC}{AB \cdot AC},\ C'D' = \frac{CD}{AC \cdot AD},\ \text{και}\ B'D' = \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

Όμως από την (3.2) έχουμε ότι

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD},$$

ή ισοδύναμα ότι

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Πορισμα 3.1. *Ανισότητα του Πτολεμαίου*
Αν A, B, C, D είναι τέσσερα σημεία στο επίπεδο, τότε

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$$

εκτός και αν τα προαναφερθέντα σημεία βρίσκονται με τη διάταξη A, B, C, D πάνω σε κύκλο ή σε ευθεία, οπότε ισχύει η ισότητα

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Αν τα σημεία A, B, C, D δεν βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο, δηλαδή αν το $ABCD$ δεν είναι εγγράψιμο, τότε τα B', C', D' δεν θα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, άρα αντί της (3.2) θα έχουμε την

$$B'C' + C'D' \geq B'D'$$

από την οποία προκύπτει η ανισότητα του Πτολεμαίου

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

3. Πτολεμαίος, Fermat, Ναπολέων, Cayley

Το Θεώρημα του Πτολεμαίου δελέασε τους αριθμοθεωρίστες να αναζητήσουν εγγράψιμα τετράπλευρα με πλευρές ακεραίου μήκους. Συνδυάζοντας τρίγωνα που προκύπτουν από πυθαγόρειες τριάδες[1] όπως για παράδειγμα οι (3,4,5) και (8,15,17), ο Barisien[2] γύρω στο 1913 κατασκεύασε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο με $a = 75, b = 68, c = 40, d = 51, e = 77, f = 84$. Η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου σε αυτό το παράδειγμα είναι $2R = 85$ και οι διαγώνιες είναι κάθετες. Πολλοί σημαντικοί μαθηματικοί ήρθαν στον πειρασμό να βρουν τέτοια τετράπλευρα, από τον Bascare το μεσαίωνα μέχρι τον Euler[3] το 18ο αι, με την τελική άνθιση αυτής της μορφής 'τέχνης' να βρίσκεται στον 19ο αι. Η εφαρμογή του θεωρήματος του Πτολεμαίου στο παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ευφυής, αλλά όπως πολλές αποδείξεις στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, είναι αδύνατο να γνωρίζουμε ποιός πραγματικά την έδωσε πρώτος. Το πρόβλημα αυτό τέθηκε

[1] Πυθαγόρειες τριάδες είναι τριάδες αριθμών της μορφής (x, y, z) που έχουν την ιδιότητα να συμπεριφέρονται σαν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή το τετράγωνο ενός αριθμού από την τριάδα, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο, για παράδειγμα, $z^2 = x^2 + y^2$.

[2] E.N. Barisien: Ασχολήθηκε κυρίως με θέματα της Θεωρίας Αριθμών, κάνοντας διάφορες παρατηρήσεις ανάμεσα στις οποίες ήταν η παραπάνω καθώς και οι:

- Το τρίγωνο με πλευρές 7, 15, 20 έχει εμβαδό και περίμετρο ίσα με 42. Πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά με 10, προκύπτει τρίγωνο με ακέραια ύψη.
- Το άθροισμα p διαδοχικών τετραγώνων δεν είναι τετράγωνο για $p < 20$, εκτός από $p = 2, 11$ χωρίς όμως να μελετήσει την περίπτωση όπου $p = 13$.
- Οι 1, 5, 9, 11, 15, 16 και 3, 4, 8, 10, 14, 18 και 2, 6, 7, 10, 14, 18 και 1, 5, 9, 12, 13, 17 έχουν το ίδιο άθροισμα και άθροισμα τετραγώνων.

Πηγή: *http://archive.org/stream/historyoftheoryo02dickuoft/historyoftheoryo02dickuoft_djvu.txt*

[3] Leonhard Euler (1707-1783): Ελβετός μαθηματικός και φυσικός που έκανε σημαντικές ανακαλύψεις στη Γεωμετρία, στον Απειροστικό λογισμό, στη Θεωρία Γράφων, στη Μηχανική και σε πολλά άλλα. Εισήγαγε επίσης πολλές έννοιες στη Μαθηματική Ανάλυση όπως την έννοια της μαθηματικής συνάρτησης και τη βάση του φυσικού λογαρίθμου, e, από το αρχικό του ονόματός του. Έκανε ευρεία χρήση δυναμοσειρών και ανάμεσα σε πολλά άλλα σημαντικά αποτελέσματα ήταν και ο τύπος $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler*

από τον Fermat[4] που απαντήθηκε από τον Torricelli[5](1659). Το πρόβλημα αναφέρεται ως Πρόβλημα του Steiner[6] ή Πρόβλημα του Fermat καθώς ο τελευταίος είχε θέσει το ερώτημα νωρίτερα. Ζητείται να βρεθεί το σημείο εκείνο P που ελαχιστοποιεί το άθροισμα $PA+PB+PC$. Αυτό το σημείο είναι γνωστό και ως *σημείο Fermat*.

3.1. Το Πρόβλημα του Fermat. Έστω A, B, C τρία σημεία στο επίπεδο. Να βρεθεί σημείο P ώστε η ποσότητα $PA+PB+PC$ να είναι ελάχιστη.

Αποδειξη. Έστω B και C οξείες γωνίες ενός τριγώνου ABC. Σχηματίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο BCD προς τη μεριά εκατέρωθεν του A. Τότε από την ανισότητα του Πτολεμαίου, εκτός και αν το P είναι πάνω στον κύκλο που περνά από τα B, C, D με τα σημεία να έχουν διάταξη B, P, C, D, έχουμε

$$BP \cdot CD + PC \cdot DB > PD \cdot BC,$$

δηλαδή

$$PB + PC > PD \quad \text{αφού} \quad CD = DB = BC.$$

Άρα

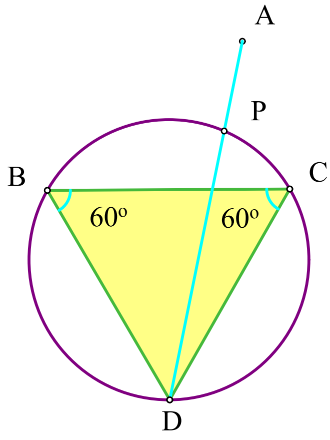
$$PA + PB + PC > PA + PD.$$

Τώρα, εκτός και αν το P είναι στο ευθύγραμμο τμήμα AD, έχουμε ότι $PA+PD > AP$. Άρα εκτός και αν $P = P'$, όπου P' είναι η τομή του AD με τον κύκλο , έχουμε $PA+PB+PC > AD$.

[4]Pierre de Fermat (1601 ή 1607/8-1665): Γάλλος δικηγόρος και ερασιτέχνης μαθηματικός με σημαντικές ανακαλύψεις που οδηγήσαν στον Απειροστικό Λογισμό όπως είναι σήμερα. Έκανε επίσης μεγάλες συνεισφορές σε τομείς όπως η Αναλυτική Γεωμετρία, οι Πιθανότητες και η Θεωρία Αριθμών. Είναι γνωστός και για το περίφημο *Τελευταίο Θεώρημα του Fermat* που διατύπωσε στο περιθώριο μιας σελίδας ενός βιβλίου, το οποίο αποδείχθηκε μόλις το 1995 από τον Andrew Wiles.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat*

[5]Evangelista Torricelli (1608-1647): Ιταλός φυσικός και μαθηματικός γνωστός για την εφεύρεση του βαρόμετρου. Υπήρξε καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Πίζα και έλυσε πολλά σημαντικά προβλήματα της εποχής όπως η εύρεση του εμβαδού ενός κυκλοειδούς ή η εύρεση του κέντρου βάρους.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli*

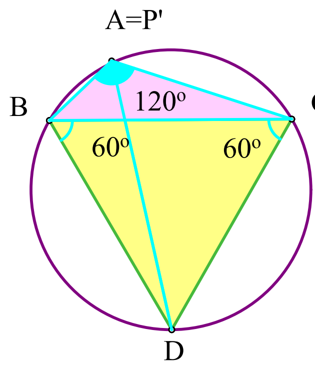
[6]Steiner Jacob (1976-1963): Ελβετός μαθηματικός που ασχολήθηκε κυρίως με τη Γεωμετρία και θεωρείται ο μεγαλύτερος 'καθαρός' γεωμέτρης μετά τον Απολλώνιο. Απεχθανόταν την Ανάλυση ενώ ανάμεσα σε άλλα, ασχολήθηκε με προβλήματα ελαχιστοποίησης/μεγιστοποίησης και με τη Συνδυαστική.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner*



Αλλά αν $P = P'$ τότε οι παραπάνω ανισότητες γίνονται ισότητες οπότε $P'A + P'B + P'C = AD$. Έτσι,

$$P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC,$$

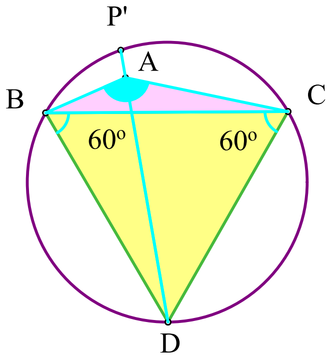
άρα το P' είναι το ζητούμενο σημείο.



Αν $\angle BAC = 120^o$, τότε $A = P'$ και το A είναι το ζητούμενο σημείο.

Αν $\angle BAC > 120^o$, τότε το A είναι πάλι το ζητούμενο σημείο, ενώ το P' βλέπει την BC από γωνία 120^o και τις AB και AC από γωνία 60^o. $\square$

Ως πόρισμα έχουμε ότι το P είναι η τομή τριών κύκλων που κατασκευάζονται από τις τρεις πλευρές του δοθέντος τριγώνου ABC. Αξίζει να



παρατηρήσει κανείς τη σύνδεση με το Θεώρημα του Ναπολέοντος[7] σύμφωνα με το οποίο τα κέντρα αυτών των τριών κύκλων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Το Θεώρημα του Ναπολέοντα*
Αν ενώσουμε τα κέντρα βάρους των παραπάνω ισόπλευρων τριγώνων, σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο που είναι γνωστό και ως τρίγωνο του Ναπολέοντος.

---

[7]Το θεώρημα αυτό συχνά αποδίδεται στο Ναπολέοντα αλλά αρκετές δημοσιεύσεις που έχουν υπάρξει σύμφωνα με αυτό το θέμα προκαλούν αμφιβολίες γύρω από το αν πράγματι ο Ναπολέων απέδειξε αυτό το θεώρημα. Η πρώτη αναφορά που υπάρχει για αυτό το πρόβλημα, που αργότερα έγινε γνωστό ως Θεώρημα του Ναπολέοντα, ήταν το 1825 στο γυναικείο περιοδικό Ladie's Diary . Το πρόβλημα τέθηκε από τον W. Rutherford που ήταν από μόνος του πολύ ικανός μαθηματικός και σίγουρα μπορούσε να το αποδείξει και μόνος του. Γενικά δεν υπάρχει αναφορά στο Ναπολέοντα, ούτε στο πρόβλημα ούτε στις δημοσιευμένες απαντήσεις το 1826. Η πρώτη αναφορά σε αυτό το πρόβλημα ως Θεώρημα του Ναπολέοντα έγινε στην 17η έκδοση του Elementi di Geometria του Faifofer το 1911, όπου υπό τη μορφή σχολίου αναφέρεται ότι αυτή είναι μια προτεινόμενη απόδειξη από τον Ναπολεόντα στον Lagrange.

Ο Rutherford ίσως να μην ήταν ο πρώτος που έθεσε το πρόβλημα, ωστόσο το 1825 που τέθηκε, ο Ναπολέων ήδη είχε αποβιώσει προ τετραετίας. Είναι γνωστό βέβαια ότι συζητούσε πολλά γεωμετρικά προβλήματα με γνωστούς μαθηματικούς της εποχής , ενώ υπηρέτησε στο στρατό μαζί με τους Fourier, Laplace και Lagrange . Λέγεται μάλιστα ότι όταν ο Laplace έδωσε ένα αντίγραφο του έργου του Mecanique Celeste στο Ναπολέοντα να το μελετήσει, ο τελευταίος αφού το μελέτησε ολόκληρο του είπε ότι σε όλον αυτόν τον τόμο γύρω από το σύμπαν δεν υπήρχε ούτε μια αναφορά στο Θεό. Ο Laplace λέγεται ότι του απάντησε "Κύριε, δεν χρειάστηκα αυτή την υπόθεση." Σύμφωνα πάντως με τους Coxeter και Greitzer, η πιθανότητα να γνώριζε ο Ναπολέων αρκετή γεωμετρία για να αποδείξει αυτό το πρόβλημα είναι ίδια με την πιθανότητα να ήξερε επαρκώς Αγγλικά ώστε να συνθέσει το διάσημο παλίνδρομο κείμενο, που του αποδίδεται, ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.

Πηγές: *http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon%27s_theorem

Αποδειξη. Έχουμε ότι το AO_2 είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ισόπλευρου τριγώνου πλευράς b, άρα

$$AO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Εντελώς όμοια προκύπτει ότι

$$AO_3 = \frac{c}{\sqrt{3}} \text{ και } CO_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Επιπρόσθετα

$$\angle O_3AO_2 = 60^o + \widehat{A},$$

οπότε το τρίγωνο ABB' είναι όμοιο με το τρίγωνο AO_2O_3 με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{\sqrt{3}}$, οπότε

$$O_2O_3 = \frac{BB'}{\sqrt{3}}.$$

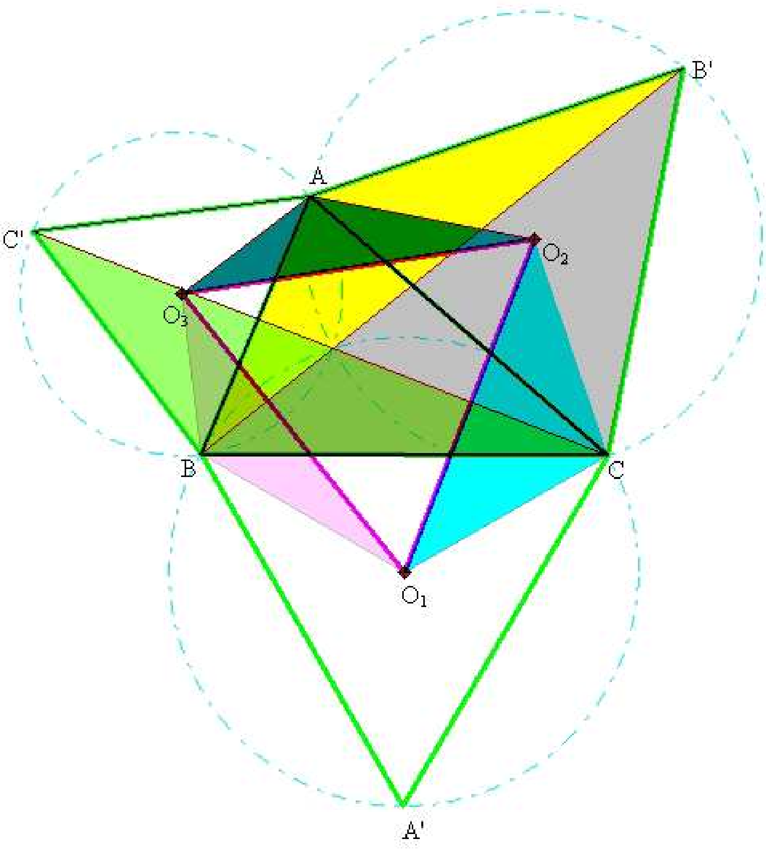
Όμοια έχουμε ότι το τρίγωνο $CB'B$ είναι όμοιο με το τρίγωνο CO_1O_2 με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{\sqrt{3}}$, οπότε

$$O_1O_2 = \frac{BB'}{\sqrt{3}} = O_2O_3.$$

Όμοια

$$O_1O_3 = \frac{CC'}{\sqrt{3}} = \frac{BB'}{\sqrt{3}} = O_2O_3,$$

οπότε το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρο. □



Ο Arthur Cayley[8] μελέτησε προβλήματα σχετικά με το Θεώρημα του Πτολεμαίου πολλές φορές. Στην πρώτη του δημοσίευση, ως προπτυχιακός φοιτητής, θεώρησε τη Γεωμετρία των αμοιβαίων αποστάσεων 5 σημείων στο χώρο και ως παράπλευρο αποτέλεσμα προέκυψε το Θεώρημα του Πτολεμαίου μέσω οριζουσών. Η λύση του ήταν γραμμένη στη μορφή συμμετρικής ορίζουσας,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & f^2 & c^2 & 9 \end{vmatrix}$$

[8]Arthur Cayley(1821-1895): Βρετανός μαθηματικός, ο πρώτος που έδωσε τον ορισμό της ομάδας όπως τον ξέρουμε σήμερα, ενώ είναι γνωστός και για τα ομώνυμα θεωρήματά του, το θεώρημα Cayley σύμφωνα με το οποίο κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας μεταθέσεων της G, και το Θεώρημα Cayley-Hamilton σύμφωνα με το οποίο κάθε πίνακας είναι ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, το οποίο όμως απέδειξε για πίνακες διάστασης 2 και 3.
Πηγή: *https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley*

Παρατηρούμε ότι πίσω από το ότι η $D = 0$ κρύβεται το Θεώρημα του Πτολεμαίου, αφού παραγοντοποιώντας την D έχουμε ότι

$$D = (ac+bd+ef)(ac+bd-ef)(ac-bd+ef)(ac-bd-ef).$$

4. Διπλοί λόγοι

4.1. Μετασχηματισμοί Mobius.

Ορισμός 3.2. *Μετασχηματισμό Möbius ονομάζουμε μια απεικόνιση*

$$g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ της μορφής } g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

για $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ *με* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *και* $ad - bc \neq 0$. *Ορίζουμε* $g(-\frac{d}{c}) = \infty$ *και* $g(\infty) = \frac{a}{c}$ *για* $c \neq 0$, *ενώ* $g(\infty) = \infty$ *αν* $c = 0$.

Με τον παραπάνω ορισμό, ο g είναι μια $1-1$ και επί απεικόνιση από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$. Ακόμη, αφού και $ad - bc \neq 0$, ο g^{-1} ορίζεται και είναι της ίδιας μορφής, ο g^{-1} με

$$g^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a},\ g^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty,\ g^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

Πρόταση 3.1. *Η σύνθεση δυο μετασχηματισμών Mobius είναι πάλι μετασχηματισμός Mobius .*

Απόδειξη: Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ και $f(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$. Τότε,

$$(g \circ f)(z) = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c'\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(ca'+dc')z + (cb'+dd')}.$$

Πρόταση 3.2. *Κάθε μετασχηματισμός Möbius είτε έχει το πολύ δυο σταθερά σημεία είτε είναι ταυτοτικός.*

Απόδειξη: Έστω $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

Έστω $c \neq 0$. Τότε όλα τα σταθερά σημεία είναι λύσεις της εξίσωσης $z = \frac{az+b}{cz+d}$, ισοδύναμα της $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ που όμως είναι το πολύ δυο.

Έστω $c = 0$. Τότε $f(z) = \frac{az+b}{d}$, άρα $f(\infty) = \infty$ δηλαδή ένα σταθερό σημείο είναι το ∞. Τότε όλα τα υπόλοιπα σταθερά σημεία είναι λύσεις της εξίσωσης $z = \frac{az+b}{d}$, ισοδύναμα της $(d-a)z = b$.

- Αν $a = d$, τότε $b = 0$ άρα $f(z) = z$ και ο μετασχηματισμός είναι ταυτοτικός.
- Αν $a \neq d$, τότε τα υπόλοιπα σταθερά σημεία είναι λύσεις της εξίσωσης $z = \frac{b}{d-a}$ που είναι μόνο μια, άρα μαζί με το ∞ που έχουμε από πριν, έχουμε δυο σταθερά σημεία.

Θεώρημα 3.2. *Για κάθε ζεύγος διαφορετικών μεταξύ τους σημείων* (z_1, z_2, z_3) *και* (w_1, w_2, w_3) *του* $\hat{\mathbb{C}}$, *υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Mobius* f *ώστε* $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$, *και* $f(z_3) = w_3$.

Αποδειξη. *Ύπαρξη:* Κατασκευάζουμε έναν βοηθητικό μετασχηματισμό Möbius h με

$$h(z_1) = 0,\ h(z_2) = 1 \text{ και } h(z_3) = \infty.$$

Ένας τέτοιος h είναι ο

$$h(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Όμοια, υπάρχει ένας g με

$$g(w_1) = 0,\ g(w_2) = 1 \text{ και } g(w_3) = \infty.$$

Ένας τέτοιος g είναι ο

$$g(w) = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}.$$

Έχουμε ότι για $f = g^{-1} \circ h$ ισχύει

$$f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2 \text{ και } f(z_3) = w_3.$$

Μοναδικότητα: Έστω άλλος ένας μετασχηματισμός Möbius $\tilde{f}$ με την ιδιότητα

$$\tilde{f}(z_1) = w_1,\ \tilde{f}(z_2) = w_2, \text{ και } \tilde{f}(z_3) = w_3.$$

Τότε ο $f^{-1} \circ \tilde{f}$ θα έχει τουλάχιστον τρία σταθερά σημεία άρα από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι είναι ταυτοτικός. Άρα $f = \tilde{f}$. □

4.2. Αναπαραστάσεις με πίνακες. Κάθε 2×2 πίνακας $A \in GL(2, \mathbb{C})$, επάγει μια απεικόνιση g στο $\mathcal{M}$ μέσω της απεικόνισης $A \to g_A$ όπου $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και $g_A = \frac{az+b}{cz+d}$. Συμβολίζουμε την απεικόνιση $A \to g_A$ με Φ.

Για την απεικόνιση Φ ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Η Φ απεικονίζει τον $GL(2, \mathbb{C})$ επί του $\mathcal{M}$.
(2) Ο Φ είναι ομομορφισμός αφού για $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$g_A(g_B(z))) = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = g_{AB}(z)$$

όπου AB είναι το γινόμενο των πινάκων A και B.

(3) $Ker\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}$, αφού αν λύσουμε την $\frac{az+b}{cz+d} = z$ για όλα τα $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και πάρουμε
- $z = 0$ προκύπτει ότι $b = 0$
- $z = \infty$ προκύπτει ότι $c = 0$
- $z = 1$ προκύπτει $a = d$.

Για αυτόν τον λόγο άλλωστε η $\mathcal{M}$ είναι ισόμορφη με την $GL(2, \mathbb{C})/K$ και την $SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$, ενώ η g_A καθορίζει τον πίνακα A ως στοιχείο της κλάσης που αποτελείται από τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του πίνακα A.

Θεωρημα 3.3. *$A \in SU(2, \mathbb{C})$ αν και μόνο αν ο g είναι ισομετρία του χορδικού μετρικού χώρου $(\hat{\mathbb{C}}, d)$.*

Αποδειξη. Ο g είναι ισομετρία αν και μόνο αν για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$,

$$\frac{|g^{(1)}(z)|}{1 + |g(z)|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Ισοδύναμα,

$$1 + |z|^2 = |az + b|^2 + |cz + d|^2$$

ή

$$1 + |z|^2 = (|a|^2 + |c|^2)|z|^2 + (|b|^2 + |d|^2) + 2\Re(a\bar{b} + c\bar{d})z$$

που είναι ισοδύναμο με

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \text{ και } a\bar{b} + c\bar{d} = 0$$

που ισοδυναμεί με

$$\bar{A}^t A = I \text{ δηλαδή } A \in SU(2, \mathbb{C}).$$

□

4.3. Διπλοί λόγοι. Για τέσσερα διαφορετικά στοιχεία z_1, z_2, z_3, z_4 του $\mathbb{C}$, ορίζουμε το διπλό τους λόγο ως

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}. \tag{3.3}$$

Επεκτείνουμε τον ορισμό μέσω της συνέχειας και στην περίπτωση που κάποιο από τα z_i είναι ∞, για παράδειγμα το z_4 και έχουμε έτσι,

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \tag{3.4}$$

Αξίζει να σημειώσουμε την παρακάτω χρήσιμη ιδιότητα,

$$[z, 1, 0, \infty] = z. \tag{3.5}$$

Λημμα 3.2. *Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Möbius.*
Δηλαδή αν $g \in \mathcal{M}$, τότε

$$[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \tag{3.6}$$

Αποδειξη. Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$. Τότε,

$$g(z) - g(w) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{(ad-bc)(z-w)}{(cz+d)(cw+d)} \tag{3.7}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] &= \frac{(g(z_4) - g(z_2))(g(z_3) - g(z_1))}{(g(z_4) - g(z_1))(g(z_3) - g(z_2))} \\
&\overset{(3.7)}{=} \frac{\frac{(ad-bc)(z_4-z_2)}{(cz_4+d)(cz_2+d)} \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}}{\frac{(ad-bc)(z_4-z_1)}{(cz_4+d)(cz_1+d)} \frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}} \\
&= \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4].
\end{aligned}$$

□

Λημμα 3.3. *Αν $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_i) = w_i$.*

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 3.2 υπάρχουν $f, h \in \mathcal{M}$ με την ιδιότητα $f(z_1) = 0,\ f(z_2) = 1,\ f(z_4) = \infty$ και $h(w_2) = 1,\ h(w_3) = 0,\ h(w_4) = \infty$. Τότε

$$\begin{aligned}
f(z_1) &\overset{(3.5)}{=} [f(z_1), 1, 0, \infty] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \overset{(3.6)}{=} [z_1, z_2, z_3, z_4] \\
&= [w_1, w_2, w_3, w_4] \overset{(3.6)}{=} [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] \\
&= [h(w_1), 1, 0, \infty] \overset{(3.5)}{=} h(w_1).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $g = h^{-1} \circ f$, έχουμε ότι

$$g(z_1) = (h^{-1} \circ f)(z_1) = h^{-1}(h(w_1)) = w_1.$$

□

Τώρα θα μελετήσουμε πως μεταβάλλεται ο διπλός λόγος $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ καθώς μεταθέτουμε τα z_i. Έστω S_n η ομάδα μεταθέσεων των $\{1, ..., n\}$. Κάθε $\sigma \in S_4$ επάγει μια αλλαγή στο διπλό λόγο μέσω της

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] \longmapsto [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}].$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι ο $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}]$ εξαρτάται από τα σ και λ αλλά όχι από τις τιμές των z_i καθεαυτές. Αυτό συμβαίνει διότι αν

$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, τότε από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_i) = w_i$,

$$\text{άρα} \quad [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}] = [g(z_{\sigma(1)}), g(z_{\sigma(2)}), g(z_{\sigma(3)}), g(z_{\sigma(4)})] = [w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, w_{\sigma(3)}, w_{\sigma(4)}]$$

Εισάγουμε τώρα συναρτήσεις της μορφής

$$f_\sigma(\lambda) = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}], \quad \sigma \in S_4.$$

Ισχύει τότε ότι $f_\rho(f_\sigma(\lambda)) = [z_{\rho\sigma(1)}, z_{\rho\sigma(2)}, z_{\rho\sigma(3)}, z_{\rho\sigma(4)}] = f_{\rho\sigma}(\lambda)$, δηλαδή

$$f_\rho f_\sigma = f_{\rho\sigma} \tag{3.8}$$

Πρόταση 3.3. *α) Αν $\sigma = (1,2)$ ή $(3,4)$, τότε $f_\sigma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.*
β) Αν $\sigma = (1,3)$ ή $(2,4)$, τότε $f_\sigma(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.
γ) Αν $\sigma = (1,4)$ ή $(2,3)$, τότε $f_\sigma(\lambda) = 1 - \lambda$.

Απόδειξη. α) Έστω $\sigma = (1,2)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_2) = 1, g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε

$$\lambda \overset{(3.6)}{=} [z_1, z_2, z_3, z_4] = [1, g(z_1), 0, \infty] \overset{(3.4)}{=} g(z_1)$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_2, z_1, z_3, z_4] = [1, g(z_1), 0, \infty] = [1, \lambda, 0, \infty] \overset{(3.4)}{=} \frac{1}{\lambda}.$$

Όμοια, έστω $\sigma = (3,4)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_2) = 1,\ g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [g(z_1), 1, 0, \infty] = g(z_1)$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_1, z_2, z_4, z_3] = [g(z_1), 1, \infty, 0] = [\lambda, 1, \infty, 0] = \frac{1}{\lambda}.$$

β) Έστω $\sigma = (1,3)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_1) = 1,\ g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [1, g(z_2), 0, \infty] = \frac{1}{g(z_2)}$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_3, z_2, z_1, z_4] = [0, g(z_2), 1, \infty] = [0, \frac{1}{\lambda}, 1, \infty] = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Όμοια, έστω $\sigma = (2,4)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_1) = 1,\ g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [1, g(z_2), 0, \infty] = \frac{1}{g(z_2)}$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_1, z_4, z_3, z_2] = [1, \infty, 0, g(z_2)] = [1, \infty, 0, \frac{1}{\lambda}] = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

γ) Έστω $\sigma = (1,4)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_1) = 0,\ g(z_4) = 1$ και $g(z_2) = \infty$. Τότε

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [0, \infty, g(z_3), 1] = g(z_3)$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_4, z_2, z_3, z_1] = [1, \infty, g(z_3), 0] = [1, \infty, \lambda, 0] = 1 - \lambda.$$

Όμοια, έστω $\sigma = (2,3)$ και $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_2) = 1,\ g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [g(z_1), 1, 0, \infty] = g(z_1) - 1$$

και έτσι

$$f_\sigma(\lambda) = [z_1, z_3, z_2, z_4] = [g(z_1), 0, 1, \infty] = [\lambda, 0, 1, \infty] = 1 - \lambda.$$

□

5. Απόδειξη του Θεωρήματος του Πτολεμαίου με χρήση διπλών λόγων

Έστω $\mathcal{X}_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4] = \lambda$ και $\mathcal{X}_2 = [x_1, x_3, x_2, x_4] = 1 - \lambda$. Τότε

$$\mathcal{X}_2 = 1 - \mathcal{X}_1 \tag{3.9}$$

και εφαρμόζοντας τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|1 - |\mathcal{X}_2|| \leq |\mathcal{X}_1| \leq 1 + |\mathcal{X}_2|. \tag{3.10}$$

Η δεξιά ανισότητα μας δίνει $\frac{|z_4-z_2||z_3-z_1|}{|z_4-z_1||z_2-z_3|} \leq 1 + \frac{|z_4-z_3||z_2-z_1|}{|z_4-z_1||z_2-z_3|}$
Άρα

$$|z_4 - z_2||z_3 - z_1| \leq |z_4 - z_1||z_2 - z_3| + |z_4 - z_3||z_2 - z_1|$$

δηλαδή

$$d(z_2, z_4)d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_4)d(z_2, z_3) + d(z_3, z_4)d(z_1, z_2). \tag{3.11}$$

Η αριστερή ανισότητα $-|\mathcal{X}_1| \leq 1 - |\mathcal{X}_2| \leq |\mathcal{X}_1|$ δίνει

$$-\frac{|z_4 - z_2||z_3 - z_1|}{|z_4 - z_1||z_2 - z_3|} \leq 1 - \frac{|z_4 - z_3||z_2 - z_1|}{|z_4 - z_1||z_2 - z_3|} \leq \frac{|z_4 - z_2||z_3 - z_1|}{|z_4 - z_1||z_2 - z_3|}$$

ή

$$-|z_4 - z_2||z_3 - z_1| \leq |z_4 - z_1||z_2 - z_3| - |z_4 - z_3||z_2 - z_1| \leq |z_4 - z_2||z_3 - z_1|$$

ή

$$|z_4 - z_3||z_2 - z_1| \leq |z_4 - z_1||z_2 - z_3| + |z_4 - z_2||z_3 - z_1|$$

και

$$|z_4 - z_1||z_2 - z_3| \leq |z_4 - z_2||z_3 - z_1| + |z_4 - z_3||z_2 - z_1|$$

δηλαδή

$$d(z_3, z_4)d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_4)d(z_2, z_3) + d(z_2, z_4)d(z_1, z_3) \tag{3.12}$$

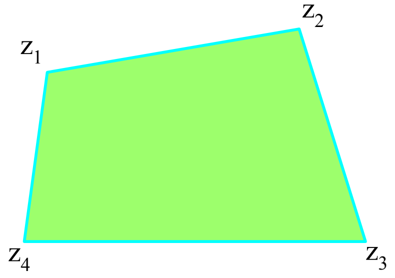
και

$$d(z_1,z_4)d(z_2,z_3) \leq d(z_2,z_4)d(z_1,z_3) + d(z_3,z_4)d(z_1,z_2) \tag{3.13}$$

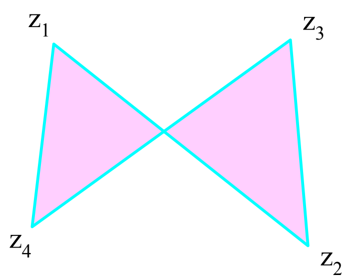
Αποδείξαμε λοιπόν, το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.2. *Για οποιοδήποτε κυρτό (ή μη κυρτό τετράπλευρο), το γινόμενο των διαγωνίων του είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του.*

Για παράδειγμα, αν το τετράπλευρο είναι κυρτό, όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε από την (3.11) έχουμε το ζητούμενο.



Επιπρόσθετα, εάν είναι μη κυρτό, όπως για παράδειγμα το παρακάτω, τότε από την (3.12) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.



Πρόταση 3.4. *$\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν στην (3.10) έχουμε ισότητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R} \iff \mathcal{X}_2 \in \mathbb{R}$. $\mathcal{X}_1 = \pm|\mathcal{X}_1|, \mathcal{X}_2 = \pm|\mathcal{X}_2|$ Από την (3.9) προκύπτει ότι $\pm|\mathcal{X}_2| = 1 \mp |\mathcal{X}_1|$ άρα $\pm|\mathcal{X}_1| = 1 \mp |\mathcal{X}_2|$ που δίνει τις περιπτώσεις

$$\begin{cases} \quad |\mathcal{X}_1| = 1 + |\mathcal{X}_2| \\ - \quad |\mathcal{X}_1| = 1 - |\mathcal{X}_2| \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \quad |\mathcal{X}_1| = 1 - |\mathcal{X}_2| \\ - \quad |\mathcal{X}_1| = 1 + |\mathcal{X}_2| \end{cases}$$

με τη τέταρτη όμως να απορρίπτεται. Έχουμε έτσι ότι

$$|1 - |\mathcal{X}_2|| = |\mathcal{X}_1| \quad ή \quad |\mathcal{X}_1| = 1 + |\mathcal{X}_2|$$

Έστω ότι $|1-|\mathcal{X}_2|| = |\mathcal{X}_1| = 1+|\mathcal{X}_2|$. Από τη δεξιά σχέση έχουμε ότι

$$|\lambda| = 1 + |1-\lambda|$$

ή

$$|\lambda| - 1 = |1-\lambda|$$

ή

$$|\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda| = 1 + |\lambda|^2 - 2\Re\lambda$$

δηλαδή

$$|\lambda| = \Re\lambda \text{ άρα } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Από την αριστερή σχέση έχουμε ότι

$$|1-|1-\lambda|| = |\lambda|$$

ή

$$1 + |1-\lambda|^2 - 2|1-\lambda| = |\lambda|^2$$

ή

$$1 + |\lambda|^2 - 2\Re\lambda + 1 - 2|1-\lambda| = |\lambda|^2$$

ή

$$1 - \Re\lambda = |1-\lambda|$$

ή

$$1 - \Re^2\lambda - 2\Re\lambda = 1 + |\lambda|^2 - 2\Re\lambda$$

άρα

$$\Re\lambda = \pm|\lambda| \text{ οπότε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Πρόταση 3.5. *Τέσσερα διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 του $\hat{\mathbb{C}}$, ανήκουν στον ίδιο κύκλο αν και μόνο αν ο $\mathcal{X}_1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ είναι πραγματικός αριθμός.*

Απόδειξη. Έστω $g \in \mathcal{M}$ με $g(z_2) = 1$, $g(z_3) = 0$ και $g(z_4) = \infty$. Τότε τα z_j είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα $g(z_j)$ είναι, που ισχύει αν και μόνο αν το $g(z_1)$ είναι πραγματικός αριθμός. Όμως,

$$g(z_1) = [g(z_1), 1, 0, \infty] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Άρα λοιπόν, τα z_1, z_2, z_3, z_4 του $\hat{\mathbb{C}}$, είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν ο $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ είναι πραγματικός αριθμός. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ανισότητα και το Θεώρημα του Πτολεμαίου στην ομάδα Heisenberg

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την γενίκευση της ανισότητας του Πτολεμαίου στην ομάδα Heisenberg $\mathcal{H}$, η οποία αποτελεί το πρότυπο της λεγόμενης υπο–Ριμάννειας γεωμετρίας. Η απόδειξη θα γίνει διαμέσου των Korányi–Reimann διπλών λόγων, που αποτελούν γενίκευση των διπλών λόγων πού είδαμε στο Κεφάλαιο 3.

1. Η ομάδα Heisenberg

Η ομάδα Heisenberg $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ με την εξής πράξη:

$$(z,t)*(w,s)=(z+w,t+s+2\Im(z\bar{w}))\,,\qquad (z,t),(w,s)\in\mathcal{H}.$$

Με αυτή την πράξη το $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ είναι μηδενοδύναμη (Lie) ομάδα δύο βημάτων. Το ουδέτερο στοιχείο της είναι το $o=(0,0)$ και το συμμετρικό στοιχείο του (z,t) το $(-z,-t)$.

Η *νόρμα Heisenberg* $\|\cdot\|$ στην $\mathcal{H}$ ορίζεται από τον *μετρητή Korányi (gauge)* ως εξής: για κάθε $(z,t)\in\mathcal{H}$ θέτουμε

$$\mathcal{A}(z,t)=|z|^2-it,\quad \text{και}\quad \|(z,t)\|=\big|\mathcal{A}(z,t)\big|^{\frac{1}{2}},$$

όπου $|\cdot|$ είναι η Ευκλίδεια νόρμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η $\|\cdot\|$ δεν είναι νόρμα με την συνήθη έννοια του όρου, αφού δεν ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα. Όμως, από αυτή τη νόρμα επάγεται μια μετρική, η *μετρική Korányi-Cygan* μέσω της σχέσης

$$d_{\mathcal{H}}\big((z_1,t_1),(z_2,t_2)\big)\;=\;\|(z_1,t_1)^{-1}*(z_2,t_2)\|$$

Ορίζουμε τους εξής μετασχηματισμούς της $\mathcal{H}$:

(T) *Αριστερές Μεταφορές* $T_{(\zeta,s)}$: για κάθε $(z,t)\in\mathcal{H}$ ορίζουμε

$$T_{(\zeta,s)}(z,t)=(\zeta,s)*(z,t).$$

Είναι προφανές ότι οι αριστερές μεταφορές προκύπτουν από την αριστερή δράση της $\mathcal{H}$ στον εαυτό της. Οι μεταφορές περιλαμβάνουν τις *μεταφορές Heisenberg*, δηλαδή τις μεταφορές της μορφής $T_{(0,s)}$.

(Π) *Περιστροφές γύρω από τον κάθετο άξονα* R_θ, $\theta \in \mathbb{R}$: για κάθε $(z,t) \in \mathcal{H}$ ορίζουμε

$$R_\theta(z,t) = (e^{i\theta}z, t).$$

Η μετρική $d_{\mathcal{H}}$ παραμένει αναλλοίωτη από τις αριστερές μεταφορές $T_{(\zeta,s)}$:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}\big((\zeta,s)*(z,t),(\zeta,s)*(z',t')\big) =& \Big\|\big[(j,s)*(z,t)\big]^{-1}*\big[(j,s)*(z',t')\big]\Big\| \\ =& \Big\|(z,t)^{-1}*(j,s)^{-1}*(j,s)*(z',t')\Big\| \\ =& \big\|(z,t)^{-1}*(z',t')\big\| \\ =& \, d_{\mathcal{H}}\big((z,t),(z',t')\big). \end{aligned}$$

Επίσης, παραμένει αναλλοίωτη από τις περιστροφές γύρω από τον κάθετο άξονα R_θ:

$$\begin{aligned} & d_{\mathcal{H}}\big((ze^{i\theta},t),(z'e^{i\theta},t')\big) \\ =& \big\|(ze^{i\theta},t)^{-1}*(z'e^{i\theta},t')\big\| \\ =& \big\|(-ze^{i\theta},-t)*(z'e^{i\theta},t')\big\| \\ =& \big\|(z'-z,t'-t+2i\Im(-z\overline{z'}))\big\| \\ =& \, d_{\mathcal{H}}\big((z,t),(z',t')\big). \end{aligned}$$

Οι αριστερές μεταφορές και οι περιστροφές γύρω από τον άξονα αποτελούν την ομάδα ισομετριών $Isom(\mathcal{H}, d_k)$. Θεωρούμε επίσης και άλλα δύο είδη μετασχηματισμών της $\mathcal{H}$:

(Δ) *Διαστολές* δ_r, $r>0$: για κάθε $(z,t)\in\mathcal{H}$ ορίζουμε

$$\delta_r(z,t) = (rz, r^2t).$$

(Α) *Αντιστροφή* I: για κάθε $(z,t)\in\mathcal{H}$ ορίζουμε

$$I(z,t) = \Big(\frac{z}{-|z|^2+it}, \frac{t}{|z|^4+t^2}\Big).$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η δράση των διαστολών δ_r κλιμακώνει την $d_{\mathcal{H}}$ κατά τον σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα $r^{1/2}$:

$$d_{\mathcal{H}}\big(\delta_r(z,t),\delta_r(z',t')\big) = r^{\frac{1}{2}} d_{\mathcal{H}}\big((z,t),(z',t')\big).$$

Όσον αφορά την αντιστροφή, προκύπτει ότι

$$\mathcal{A}(I(z,t)) = \frac{|z|^2-it}{|z|^4+t^2} = \frac{\mathcal{A}(z,t)}{\|\mathcal{A}(z,t)\|^2}.$$

Οι ισομετρίες μαζί με τις διαστολές (Δ) αποτελούν την ομάδα $Sim(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ των ομοιοθεσιών της $\mathcal{H}$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\mathrm{Sim}(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}}) = \mathbb{R}\times U(1)\times\mathcal{H}.$$

Θα θεωρήσουμε γνωστή την συμπαγοποίηση της $\mathcal{H}$ που προκύπτει από τη στερεογραφική προβολή της S^3 (που ταυτίζεται εδώ με το σύνορο $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ του μιγαδικού υπερβολικού επιπέδου $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$): η S^3 προκύπτει κατ΄ αυτόν τον τρόπο από την $\mathcal{H}$ προσθέτοντας ένα σημείο στο άπειρο. Αποδεικνύεται τότε ότι δράση της ομάδας ισομετριών $\mathrm{SU}(2,1)$ του $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ στο σύνορο, προκύπτει από μετασχηματισμούς που είναι συνθέσεις μετασχηματισμών της μορφής (Τ), (Π), (Δ) και (Α). Ας παρατηρήσουμε ότι όλοι οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί έχουν προφανή γενίκευση στην συμπαγοποίηση S^3 ως εξής:

(1) Για τις μεταφορές $T_{(\zeta,s)}$, τις περιστροφές R_θ και τις διαστολές δ_r θέτουμε

$$T_{(\zeta,s)}(\infty)=\infty,\quad R_\theta(\infty)=\infty,\quad \delta_r(\infty)=\infty.$$

(2) Για την αντιστροφή I θέτουμε

$$I(o)=\infty,\quad I(\infty)=o.$$

Σε ότι ακολουθεί, μέ $d_{\mathcal{H}}$ θα εννούμε την επέκταση της Korányi–Cygan μετρικής της $\mathcal{H}$ στην S^3 που προκύπτει με τον προφανή τρόπο:

$$d_{\mathcal{H}}((z,t),\infty)=d_{\mathcal{H}}(\infty,(z,t))=\infty,\quad (z,t)\in\mathcal{H},\quad d_{\mathcal{H}}(\infty,\infty)=0.$$

2. (Korányi–Reimann) Διπλοί λόγοι

Για κάθε τετράδα διακριτών σημείων $p=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ στην $\mathcal{H}$, ορίζεται ο *Korányi- Reimann* διπλός λόγος τους ως εξής:

$$\mathbb{X}(p_1,p_2,p_3,p_4)=\frac{\mathcal{A}(p_3^{-1}*p_1)\mathcal{A}(p_4^{-1}*p_2)}{\mathcal{A}(p_4^{-1}*p_1)\mathcal{A}(p_3^{-1}*p_2)},$$

που γενικεύεται με τον προφανή τρόπο σε τετράδες διακριτών μεταξύ τους σημείων του $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\mathbb{X}(p_1,p_2,p_3,p_4)\right|^{\frac{1}{2}}=\frac{d_{\mathcal{H}}(p_4,p_2)d_{\mathcal{H}}(p_3,p_1)}{d_{\mathcal{H}}(p_4,p_1)d_{\mathcal{H}}(p_3,p_2)}.$$

Ο διπλός λόγος μένει αναλλοίωτος από τη δράση της $\mathrm{SU}(2,1)$.

Αυτό μπορούμε να το δούμε ελέγχοντας πως δρουν οι βασικές πράξεις πάνω στην $\mathcal{A}$: Έστω $p=(z,t),\ q=(w,s)$. Τότε

•
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p*q)&=\mathcal{A}\big((z,t)*(w,s)\big)=\mathcal{A}\big(z+w,t+s+2\Im(\bar{w}z)\big)\\&=|z+w|^2-it-is-2i\Im(\bar{w}s)\\&=|z|^2-it+|w|^2-is+2\Re(\bar{w}z)-2\Im(\bar{w}z)\\&=\mathcal{A}(p)+\mathcal{A}(q)+2(w\bar{z}).\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{A}(p*q)=\mathcal{A}(p)+\mathcal{A}(q)+2(w\bar{z})\tag{4.1}$$

- $$\mathcal{A}(p^{-1}) = \mathcal{A}\big((z,t)^{-1}\big) = \mathcal{A}\big((-z,-t)\big) = |z|^2 + it = \overline{\mathcal{A}(p)}.$$

  Άρα
  $$\mathcal{A}(p^{-1}) = \overline{\mathcal{A}(p)} \tag{4.2}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{A}(p^{-1} * q) &\overset{(4.1)}{=} \mathcal{A}(p^{-1}) + \mathcal{A}(q) + 2w\overline{(-z)}\\ &\overset{(4.2)}{=} \overline{\mathcal{A}(p)} + \mathcal{A}(q) - 2w\bar{z}.\end{aligned}$$

  Άρα
  $$\mathcal{A}(p^{-1} * q) = \overline{\mathcal{A}(p)} + \mathcal{A}(q) - 2w\bar{z} \tag{4.3}$$

- $$\mathcal{A}\big(\delta_r(p)\big) = \mathcal{A}\big(\delta_r(z,t)\big) = \mathcal{A}(rz, r^2t) = |rz|^2 - ir^2t = r^2\mathcal{A}(p).$$

  Άρα
  $$\mathcal{A}\big(\delta_r(p)\big) = r^2\mathcal{A}(p) \tag{4.4}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{A}\big((R_\theta(p))\big) &= \mathcal{A}\big(R_\theta(z,t)\big) = \mathcal{A}\big((e^{i\theta}z, t)\big)\\ &= |e^{i\theta}z|^2 - it = |z|^2 - it = \mathcal{A}(p).\end{aligned}$$

  Άρα
  $$\mathcal{A}\big(R_\theta(p)\big) = \mathcal{A}(p) \tag{4.5}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{A}\big(I(p)\big) &= \mathcal{A}\Big(\frac{z}{-|z|^2 + it}, \frac{t}{|z|^4 + t^2}\Big)\\ &= \Big|\frac{z}{-|z|^2 + it}\Big|^2 - i\frac{t}{|z|^4 + t^2}\\ &= \frac{|z|^2}{|z|^4 + t^2} - i\frac{t}{|z|^4 + t^2} = \frac{|z|^2 - it}{|z|^4 + t^2} = \frac{1}{\overline{\mathcal{A}(p)}}\end{aligned}$$

  Άρα
  $$\mathcal{A}\big(I(p)\big) = \frac{1}{\overline{\mathcal{A}(p)}} \tag{4.6}$$

  και

  $$\overline{\mathcal{A}\big(I(p)\big)} = \frac{1}{\mathcal{A}(p)} \tag{4.7}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{A}\big(I(p)^{-1} * I(q)\big) &\overset{(4.3)}{=} \overline{\mathcal{A}(I(p))} + \mathcal{A}(I(q)) - 2\frac{z}{|z|^2 - it} \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2 + is} \\ &= \overline{\mathcal{A}(I(p))} + \mathcal{A}(I(q)) - 2\frac{z\bar{w}}{\mathcal{A}(p)\overline{\mathcal{A}(q)}} \\ &\underset{(4.7)}{\overset{(4.6)}{=}} \frac{\left[\overline{\mathcal{A}(q)} + \mathcal{A}(p) - 2z\bar{w}\right]}{\mathcal{A}(p)\overline{\mathcal{A}(q)}} \\ &\underset{(4.3)}{\overset{(4.2)}{=}} \frac{\mathcal{A}(q^-1 * p)}{\mathcal{A}(p)\mathcal{A}(q^{-1})}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{A}\big(I(p)^{-1} * I(q)\big) = \frac{1}{\mathcal{A}(p)\mathcal{A}(q^{-1})}\mathcal{A}(q^{-1} * p) \tag{4.8}$$

Αφού λοιπόν ο διπλός λόγος μένει αναλλοίωτος κάτω από αυτές τις πράξεις, έχουμε ότι μένει αναλλοώτος και από όλες τις υπόλοιπες που θα είναι συνδυασμός των παραπάνω.

Για κάθε τετράδα διακριτών σημείων του $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ υπάρχουν 24 διπλοί λόγοι. Έχουμε την παρακάτω πρόταση της οποίας η απόδειξη είναι προκύπτει λόγω συμμετρίας.

Πρόταση 4.1. *Για κάθε τετράδα διακριτών σημείων $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbb{X}(p_2, p_1, p_4, p_3) = \mathbb{X}(p_3, p_4, p_1, p_2) = \mathbb{X}(p_4, p_3, p_2, p_1).$$

Έτσι, αφού από τους 24 διπλούς λόγους έχουμε ότι ανά τέσσερις θα είναι ίσοι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για μια τετράδα διακριτών σημείων υπάρχουν τελικά μόνο έξι διαφορετικοί διπλοί λόγοι. Επιπρόσθετα ισχύει ότι και αυτοί οι έξι εξαρτώνται από τους συγκεκριμένους τρεις:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1(p) &= \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4), \\ \mathbb{X}_2(p) &= \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4), \\ \mathbb{X}_3(p) &= \mathbb{X}(p_2, p_3, p_1, p_4).\end{aligned}$$

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης μπορεί να βρεθεί στο [**30**].

Πρόταση 4.2. *Έστω $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ μια τετράδα διακριτών σημείων στο $\partial H^2_{\mathbb{C}}$.*

Τότε,

$$\big|\mathbb{X}_2\big| = \big|\mathbb{X}_1\big|\big|\mathbb{X}_3\big|, \tag{4.9}$$

$$2\big|\mathbb{X}_1\big|^2\Re(\mathbb{X}_3) = \big|\mathbb{X}_1\big|^2 + \big|\mathbb{X}_2\big|^2 + 1 - 2\Re(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2). \tag{4.10}$$

Ορισμος 4.1. *Η cross-ratio variety* $\mathfrak{X}$ *είναι το υποσύνολο του* $\mathbb{C}^3$ *στο οποίο ικανοποιούνται οι (4.9) και (4.10)* [1].

3. Η Πτολεμαϊκή ανισότητα και το Θεώρημα του Πτολεμαίου στο $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$

Ορισμος 4.2. *Ορίζουμε ως* $\mathbb{R}$*-κύκλο την τομή ενός πραγματικού επιπέδου με το σύνορο* $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. *Ο συνήθης* $\mathbb{R}$*-κύκλος (που περνά από το 0 και το* ∞*) ορίζεται ως εξής*

$$R_{\mathbb{R}} = \{(x, 0, ..., 0, 0) \in \mathcal{H}_C \,|x \in \mathbb{R}\}.$$

Ένας $\mathbb{R}$*-κύκλος είναι μία* $SU(2,1)$ *εικόνα του συνήθους* $\mathbb{R}$*-κύκλου.*

Η Πτολεμαϊκή ανισότητα για το σύνορο του μιγαδικού υπερβολικού επιπέδου αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεωρημα 4.1. *Έστω* $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *μια τετράδα διακριτών σημείων του* $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ *και* $\mathbb{X}_i = \mathbb{X}_i(p), i = 1, 2$ *οι αντίστοιχοι διπλοί λόγοι της. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:*

$$\left|\mathbb{X}_1\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\mathbb{X}_2\right|^{\frac{1}{2}} \geq 1 \quad \textit{και} \quad -1 \leq \left|\mathbb{X}_1\right|^{\frac{1}{2}} - \left|\mathbb{X}_2\right|^{\frac{1}{2}} \leq 1 \tag{4.11}$$

Κάθε μια από τις παραπάνω ανισότητες γίνεται ισότητα ακριβώς τότε όταν και τα τέσσερα σημεία του p *βρίσκονται πάνω στον ίδιο* $\mathbb{R}-$ *κύκλο. Τότε* $\mathbb{X}_i > 0,\ i = 1, 2$ *και*

(1) $\left|\mathbb{X}_1\right|^{\frac{1}{2}} - \left|\mathbb{X}_2\right|^{\frac{1}{2}} = 1$ *αν τα* p_1 *και* p_3 *διαχωρίζουν τα* p_2 *και* p_4,

(2) $\left|\mathbb{X}_2\right|^{\frac{1}{2}} - \left|\mathbb{X}_1\right|^{\frac{1}{2}} = 1$ *αν τα* p_1 *και* p_2 *διαχωρίζουν τα* p_3 *και* p_4,

(3) $\left|\mathbb{X}_1\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\mathbb{X}_2\right|^{\frac{1}{2}} = 1$ *αν τα* p_1 *και* p_4 *διαχωρίζουν τα* p_2 *και* p_3,

Απόδειξη: Από την (4.10) προκύπτει

[1] Ο $\mathfrak{X}$ είναι ισόμορφος με τον χώρο $\mathfrak{F}$, που είναι ο $PU(2,1)-$χώρος των διατάξεων τεσσάρων σημείων στην S^3. Ο χώρος αυτός αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας τετράδων $[\mathfrak{p}]$, όπου $\mathfrak{p}$ είναι μια τετράδα διακριτών σημείων στην $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Δυο τετράδες $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ και $\mathfrak{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αν υπάρχει στοιχείο $g \in PU(2,1)$ τέτοιο ώστε $g(p_j) = p'_j$ για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$.

$$
\begin{aligned}
0 =& |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 - 2\Re\mathbb{X}_1 - 2\Re\mathbb{X}_2 + 1 - 2|\mathbb{X}_1|^2\Re\mathbb{X}_3 \\
\geq& |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 - 2\Re\mathbb{X}_1 - 2\Re\mathbb{X}_2 + 1 - 2|\mathbb{X}_1|^2|\mathbb{X}_3| \\
\overset{(4.9)}{=}& |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 - 2\Re\mathbb{X}_1 - 2\Re\mathbb{X}_2 + 1 - 2|\mathbb{X}_1||\mathbb{X}_2| \\
\geq& |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 - 2|\mathbb{X}_1| - 2|\mathbb{X}_2| + 1 - 2|\mathbb{X}_1||\mathbb{X}_2| \\
=& \big(|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2| - 1\big)^2 - 4|\mathbb{X}_1||\mathbb{X}_2| \\
=& \big(|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2| - 1\big)^2 - \big(2|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}}|\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 \\
=& \big(|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2| - 1 - 2|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}}|\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)\big(|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2| - 1 + 2|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}}|\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big) \\
=& \Big(\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 - 1\Big)\Big(\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 - 1\Big)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big) \leq 0
$$

και αφού $\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big) \geq 0$, έχουμε ότι

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big) \leq 0.
$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 > 1,
$$

τότε από τριγωνική ανισότητα οδηγούμαστε σε αντίφαση αφού πρέπει συγχρόνως να ισχύει

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 \geq \big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 > 1,
$$

άρα

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}}\big)^2 \leq 1,
$$

και έτσι αποδεικνύεται η πτολεμαϊκή ανισότητα.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα του Πτολεμαίου, ας υποθέσουμε πρώτα ότι μια από τι ανισότητες ισχύει ως ισότητα. Τότε,

$$
\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} - |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} - 1\big)\big(|\mathbb{X}_1|^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{X}_2|^{\frac{1}{2}} + 1\big) = 0,
$$

που είναι ισοδύναμο με την

$$
\big(|\mathbb{X}_1| - |\mathbb{X}_2|\big)^2 = 2\big(|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2|\big) - 1.
$$

Αφού

$$
\big(|\mathbb{X}_1| - |\mathbb{X}_2|\big)^2 \leq 2\Re(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - 1,
$$

έχουμε ότι

$$
|\mathbb{X}_1| + |\mathbb{X}_2| \leq \Re(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2),
$$

άρα
$$0 \geq \Re(\mathbb{X}_2) - \left|\mathbb{X}_2\right| \geq \Re(\mathbb{X}_1) - \left|\mathbb{X}_1\right| \geq 0.$$
Άρα λοιπόν, τα $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ είναι θετικά. Από την (4.10) έχουμε τώρα ότι
$$\begin{aligned} 2\mathbb{X}_1 \Re \mathbb{X}_3^2 &= \mathbb{X}_1^2 + \mathbb{X}_2^2 - 2\mathbb{X}_1 - 2\mathbb{X}_2 + 1 \\ &= \mathbb{X}_1^2 + \mathbb{X}_2^2 - \left(\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\right)^2 = 2\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2 \\ &= 2\mathbb{X}_1^2 \left|\mathbb{X}_3\right|. \end{aligned}$$
Άρα λοιπόν, έχουμε ότι $\mathbb{X}_3 > 0$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι όλα τα σημεία βρίσκονται στον ίδιο $\mathbb{R}-$κύκλο, τότε αν για $\lambda > 1$ αν πάρουμε τα
$$p_1 = \infty, \quad p_2 = (\lambda, 0), \quad p_3 = (1, 0), \quad p_4 = (0, 0)$$
δηλαδή τα p_1, p_3 να διαχωρίζουν τα p_2, p_4. Τότε
$$\mathcal{A}(p_2^{-1} * p_1) = \mathcal{A}(p_3^{-1} * p_1) = \mathcal{A}(p_4^{-1} * p_1) = 1,$$
$$\mathcal{A}(p_3^{-1} * p_2) = -(\lambda - 1)^2, \quad \mathcal{A}(p_4^{-1} * p_3) = -1, \quad \mathcal{A}(p_4^{-1} * p_2) = -\lambda^2.$$
Έτσι,
$$\mathbb{X}_1 = \frac{\mathcal{A}(p_3^{-1} * p_1)\mathcal{A}(p_4^{-1} * p_2)}{\mathcal{A}(p_4^{-1} * p_1)\mathcal{A}(p_3^{-1} * p_2)} = \frac{-\lambda^2}{-(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda^2}{(\lambda - 1)^2}$$
$$\mathbb{X}_2 = \frac{\mathcal{A}(p_4^{-1} * p_3)\mathcal{A}(p_2^{-1} * p_1)}{\mathcal{A}(p_4^{-1} * p_1)\mathcal{A}(p_3^{-1} * p_2)} = \frac{-1}{-(\lambda - 1)^2} = \frac{1}{(\lambda - 1)^2}$$
Έτσι, $\mathbb{X}_1^{\frac{1}{2}} - \mathbb{X}_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1} = 1$. Ανακατατάσσοντας τα σημεία προκύπτουν οι υπόλοιπες σχέσεις.

Έστω τώρα $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ μια τετράδα από διακριτά σημεία στην $\mathcal{H}$. Τότε οι ανισότητες του προηγούμενου θεωρήματος μπορούν να γραφτούν στη μορφή
$$d_{\mathcal{H}}(p_2, p_3) d_{\mathcal{H}}(p_1, p_4) \leq d_{\mathcal{H}}(p_2, p_4) d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) + d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) d_{\mathcal{H}}(p_3, p_4)$$
$$d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) d_{\mathcal{H}}(p_2, p_4) \leq d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) d_{\mathcal{H}}(p_3, p_4) + d_{\mathcal{H}}(p_2, p_3) d_{\mathcal{H}}(p_1, p_4)$$
$$d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) d_{\mathcal{H}}(p_3, p_4) \leq d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) d_{\mathcal{H}}(p_2, p_4) + d_{\mathcal{H}}(p_2, p_3) d_{\mathcal{H}}(p_1, p_4)$$
Από τα παραπάνω, προκύπτει πορισματικά η Πτολεμαϊκή ανισότητα και το Θεώρημα του Πτολεμαίου στην $\mathcal{H}$:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. *Η μετρική Koranyi-Cygan $d_{\mathcal{H}}$ ικανοποιεί την πτολεμαϊκή ανισότητα αφού για κάθε τετράδα σημείων $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ οι παραπάνω τρεις ανισότητες ισχύουν. Επιπρόσθετα, κάθε μια από αυτές τις ανισότητες ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν όλα τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο $\mathbb{R}-$κύκλο. Δηλαδή*

(1)

$$d_{\mathcal{H}}(p_2,p_3)d_{\mathcal{H}}(p_1,p_4)=d_{\mathcal{H}}(p_2,p_4)d_{\mathcal{H}}(p_1,p_3)+d_{\mathcal{H}}(p_1,p_2)d_{\mathcal{H}}(p_3,p_4)$$

αν και μόνο αν όλα τα σημεία βρίσκονται στον ίδιο $\mathbb{R}-$ κύκλο και τα p_1,p_4 διαχωρίζουν τα p_2,p_3

(2)

$$d_{\mathcal{H}}(p_1,p_3)d_{\mathcal{H}}(p_2,p_4)=d_{\mathcal{H}}(p_1,p_2)d_{\mathcal{H}}(p_3,p_4)+d_{\mathcal{H}}(p_2,p_3)d_{\mathcal{H}}(p_1,p_4)$$

αν και μόνο αν όλα τα σημεία βρίσκονται στον ίδιο $\mathbb{R}-$ κύκλο και τα p_1,p_3 διαχωρίζουν τα p_2,p_4

(3)

$$d_{\mathcal{H}}(p_1,p_2)d_{\mathcal{H}}(p_3,p_4)=d_{\mathcal{H}}(p_1,p_3)d_{\mathcal{H}}(p_2,p_4)+d_{\mathcal{H}}(p_2,p_3)d_{\mathcal{H}}(p_1,p_4)$$

αν και μόνο αν όλα τα σημεία βρίσκονται στον ίδιο $\mathbb{R}-$ κύκλο και τα p_1,p_2 διαχωρίζουν τα p_3,p_4.

4. Το Θεώρημα του Πτολεμαίου σε άλλους χώρους

Τα τελευταία χρόνια η γενίκευση του Θεωρήματος του Πτολεμαίου σε άλλους χώρους έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από πολλούς ερευνητές. Αξίζει να αναφέρουμε τη δημοσίευση του Schoenberg [**37**] , όπου καταπιάνεται με χώρους ημι-νόρμας. Ένας χώρος με στοιχεία $a,b,...$ στο οποίο ορίζουμε μια μετρική ab χαρακτηρίζεται ως ημιμετρικός αν $ab=ba>0$ για κάθε $a\neq b$ και $aa=0$. Ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με στοιχεία $f,g,..$ λέγεται χώρος ημι-νόρμας αν μια συνάρτηση $\|f\|$ έχει τις συνήθεις ιδιότητες της νόρμας, με εξαίρεση την ιδιότητα $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$. Η $\|f-g\|$ είναι ημι-μετρική με την έννοια που ορίσαμε νωρίτερα. Ένας ημιμετρικός χώρος ονομάζεται πτολεμαϊκός αν για κάθε τετράδα σημείων a,b,c,d οι μεταξύ τους αποστάσεις ικανοποιούν πάντα την ανισότητα του Πτολεμαίου. Είναι γνωστό ότι ένας πραγματικός χώρος εσωτερικού γινομένου είναι πτολεμαϊκός. Το ερώτημα που τέθηκε από τον Blumenthal ήταν αν ισχύει και το αντίστροφο , δηλαδή αν υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πτολεμαϊκό πραγματικό χώρο νόρμας, αν μπορούμε τότε να πούμε ότι η νόρμα του προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο. Καταφατική απάντηση έχει δοθεί στο ακόλουθο πλαίσιο: Αν ο χώρος S είναι πραγματικός πτολεμαϊκός χώρος ημι-νόρμας, τότε η $\|f\|$ είναι νόρμα που προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ο S είναι πραγματικός χώρος εσωτερικού γινομένου.

Οι Buckley, Falk, Wraith [**8**] ασχολήθηκαν με χώρους $CAT(0)$, δηλαδή μετρικούς χώρους όπου η καμπυλότητα είναι φραγμένη από το 0. Τέτοιοι είναι οι παραγματικοί χώροι εσωτερικού γινομένου , ή ακόμη και ο Ευκλείδειος χώρος E^n με τη συνήθη μετρική. Οι πλήρεις χώροι $CAT(0)$ είναι γνωστοί και ως χώροι *Hadamard*. Αυτό που ήταν γνωστό ότι ισχύει ήταν ότι οι χώροι $CAT(0)$ ικανοποιούν την ανισότητα του Πτολεμαίου, συνεπώς είναι πτολεμαϊκοί χώροι. Το ερώτημα που προέκυπτε ήταν η αντίστροφη κατεύθυνση. Έδειξαν λοιπόν ότι αν ένας πτολεμαϊκός χώρος είναι *Riemann* τότε πρέπει να είναι $CAT(0)$. Το κύριο θεώρημα αυτής της δημοσίευσης λέει ότι μια πλήρης πολλαπλότητα *Riemann* είναι πτολεμαϊκή αν και μόνο αν είναι $CAT(0)$, δηλαδή πολλαπλότητα *Hadamard*.

Οι Buyalo και Schroeder [**9**] μελέτησαν τις δομές Möbius, δηλαδή Möbius ισοδύναμες μετρικές, σε πτολεμαϊκούς χώρουσ(για ορισμούς βλ.[[**9**]]). Αν μια δομή Möbius είναι σταθεροποιημένη τότε ο χώρος λέγεται χώρος Möbius. Οι πτολεμαϊκοί χώροι είναι χώροι Möbius με την παραπάνω ιδιότητα ότι η αντιστροφή διατηρεί τη δομή Möbius. Ένα παράδειγμα είναι ο $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R} \cup \infty = S^n$, $n \geq 0$, όπου η δομή Möbius παράγεται από μια ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$, και ο $\mathbb{R} \cup \infty$ ταυτίζεται με την S^n μέσω της στερεογραφικής προβολής. Διατύπωσαν την εικασία ότι κάθε συμπαγής πτολεμαϊκός χώρος με κύκλους και πολλές αντιστροφές χώρων, είναι ισοδύναμος με το σύνορο στο άπειρο ένος συμμετρικού χώρου $\mathbb{K}\mathbf{H}^n$ τάξης 1, μη συμπαγούς τύπου. Έδωσαν την απόδειξη στην περίπτωση των μιγαδικών υπερβολικών χώρων $\mathbb{C}\mathbf{H}^n$.

Τέλος, στη δημοσίευση του Ι.Πλατή [**35**] παρουσιάζονται αποδείξεις του Θεωρήματος και της Ανισότητας του Πτολεμαίου στο σύνορο συμμετρικών χώρων Riemann τάξεως 1 και αρνητικής καμπυλότητας. Τέτοιοι χώροι είναι οι $n-$διάστατοι υπερβολικοί χώροι $\mathbf{H}^n_{\mathbb{K}}$ όπου το $\mathbb{K}$ μπορεί να είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$, οι μιγαδικοί $\mathbb{C}$, τα κουατέρνια $\mathbb{H}$ ή τα οκτόνια $\mathbb{O}$. Οι αποδείξεις γίνονται καθ'ολοκληρία με την χρήση γενικευμένων διπλών λόγων.

Βιβλιογραφία

[1] J.L Ayme, *Sawayama and Thébault's theorem*
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf

[2] A. Βαρβεράκης, *A Maximal Property of Cyclic Quadrilaterals*
http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200510.pdf

[3] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*. Springer, New York, 1983.

[4] A. Bejancu; *Geometry of CR–submanifolds*. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1986.

[5] O. Bottema, *Topics in Elementary Geometry*. Springer, New York, 2008.

[6] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*. JOHN WILEY& SONS, INC, 1968.

[7] A. Brannan, M. Esplen & J. Gray,*Geometry*. Cambridge University press, New York, 2012.

[8] S.M. Buckley, K. Falk & D.J. Wraith; *Ptolemaic inequality and CAT(0)* Glasgow Math. J. **51** (2009) 301-314.

[9] S. Buyalo, V. Schroeder, *Möbius structures and Ptolemy spaces: boundary at infinity of complex hyperbolic spaces* , archiv.org, 2012.

[10] R. Calinger, *Classics of Mathematics*. Moore Publishing Company, INC, 1982.

[11] E.M. Chirka; *Introduction to the geometry of CR-manifolds*. Russ. Math. Surveys **46**:1 (1991), 95-197.

[12] H.S.M. Coxeter & S.L. Greitzer, *Geometry revisited*. The mathematical association of America, 1967.

[13] H. Cunha & N. Gusevskii; *On the moduli space of quadruples of points in the boundary of complex hyperbolic space*. Transform. Groups **15** (2010), no. 2, 261-283.

[14] S. Dragomir & G. Tomassini *Differential Geometry and Analysis on* $\mathbb{CR}$ *manifolds*. Birkhäuser, Boston, 2006.

[15] H. Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών ως το 1650*. Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1989.

[16] H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[17] E. Falbel; *Geometric structures associated to triangulations as fixed point sets of involutions*. Topol. and its Appl. **154** (2007), no. 6, 1041-1052. Corrected version in
www.math.jussieu.fr/∼falbel

[18] E. Falbel & I.D. Platis; *The* $\mathrm{PU}(2,1)-$ *configuration space of four points in* S^3 *and the cross ratio variety*. Math. Ann. **340** (2008), no. 4, 935-962.

[19] R. Fenn *Geometry*. Springer, New York, 2007.

[20] T. Foertsch & V. Schroeder, *Metric Möbius geometry and a characterization of spheres*, Springer, New York, 2012.

[21] W. Goldman; *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[22] S. Gueron *Two applications of the Generalized Ptolemy Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No4 (Apr. 2002), pp.362-370.
[23] T. Heath *The Thirteen books of Euclid's Elements*. Dover, New York, 1956.
[24] A. Jones, *Ptolemy in Perspective*, Springer, New York, 2010.
[25] A. Korányi & H.M. Reimann; *The complex cross ratio on the Heisenberg group*. Enseign. Math. (2) 33 (1987), no. 3-4, 291-300.
[26] B. Meserve *Fundamental concepts of geometry*. Dover, New York, 1983.
[27] R.I. Mizner; *CR structures of codimension 2*. J. Diff. Geom. 30 (1989), 167-190.
[28] B.L. van der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2007.
[29] A. Ostermann & G. Wanner, *Geometry by its history*. Springer, New York, 2012.
[30] J.R. Parker & I.D. Platis; *Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates*. Topology (47) (2008), 101-135.
[31] O. Pedersen, *A Survey of the Almagest*, Springer, New York, 1974.
[32] D. Pedoe, *Circles : A mathematical view*. The mathematical association of America, 1995.
[33] D. Pedoe *Geometry. A Comprehensive Course*. Dover, New York, 1988.
[34] I. Platis, Complex cross-ratios and the ptolemaen inequality
[35] I. Platis, Cross ratios and the Ptolemaean inequality in boundaries of symmetric spaces of rank 1
[36] C. Pritchard, *The changing shape of geometry*. Cambridge University press, New York, 2003.
[37] I.J. Schoenberg; *A remark on M.M. Day's characterization of inner–product spaces and a conjecture of L.M. Blumenthal*. Proc. Amer. Math. Soc. (3) (1952), 961-964.
[38] D.E. Smith, *History of Mathematics Volume I*. Ginn and Company, USA, 1951.
[39] D.J. Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, μετάφραση Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου. Εκδόσεις Ι.Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1982.
[40] L.W. Tu; *An introduction to manifolds*. Springer Science. Springer, New York 2008.