ΕΚΡΗΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΨΑΡΑΔΑΚΗΣ

Επιβλέπων καθηγητης: ΣΤΑΘΗΣ ΦΙΛΙΠΠΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης το Σεπτέμβριο του 2005. Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Ι.Αθανασόπουλος, Α.Τερτίκας και Σ.Φίλιππας.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία θεωρούμε τη μη γραμμική εξίσωση θερμότητας $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$ είτε στον $\mathbb{R}^N$ είτε στην ανοικτή μπάλα κέντρου 0 και ακτίνας $R > 0$. Δείχνουμε ότι αν ο υπεργραμμικός εκθέτης p είναι κρίσιμος ή υπερκρίσιμος (δηλ. $p_s \leq p < p^*$, όπου $p_s := \frac{2N}{N-2} - 1$ και p^* είναι κάποιος γνωστός θετικός αριθμός που εξαρτάται επίσης απο την διάσταση N), τότε οι ακτινικά συμμετρικές λύσεις που απειρίζονται σε πεπερασμένο χρόνο (έκρηξη) ακολουθούν πάντα τον ρυθμό της αντίστοιχης ΣΔΕ $dg/dt = |g|^{p-1}g$. Στην περίπτωση αυτή, ο απειρισμός καλείται τύπου I. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει με μιά επιπλέον υπόθεση στην περίπτωση του $\mathbb{R}^N$ με $p_s < p$, ενώ όταν $p = p_s$ υποθέτουμε μόνο μη αρνητικές λύσεις.

Θεωρούμε ακόμη την υποκρίσιμη περίπτωση $(1 < p < p_s)$. Αποδεικνύουμε ότι αν η u είναι μη αρνητική λύση που απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο, τότε ο απειρισμός είναι επίσης τύπου I.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά : απειρισμός (έκρηξη), ακτινικά συμμετρικές λύσεις, κρίσιμος και υπερκρίσιμος εκθέτης, μεταβλητές αυτοομοιότητας, ιδιότητες *zero number*.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή. **5**

2 Μεταβλητές αυτοομοιότητας, γενικές εκτιμήσεις. **9**
2.1 Μεταβλητές αυτοομοιότητας σε λύσεις που απειρίζονται σε πεπερασμένο χρόνο. 9
2.2 Ενεργειακές εκτιμήσεις για αυθαίρετο $p>1$. 10
2.3 Βασικές εκτιμήσεις. 13

3 Στάσιμες λύσεις και *zero number* ιδιότητες αυτών. **18**
3.1 Οι ακτινικά συμμετρικές, στάσιμες λύσεις του προβλήματος. . . 18
3.2 Ιδιότητες *zero number*. 20

4 Σύγκλιση κλιμακωμένων (*rescaled*) λύσεων. **23**
4.1 Η περίπτωση όπου η $m(t)$ είναι αύξουσα. 24
4.2 Η γενική περίπτωση για την $m(t)$. 34
4.3 Η κρίσιμη περίπτωση. 39

5 Αποδείξεις των κυρίων αποτελεσμάτων. **42**
5.1 Η κρίσιμη και η υπερκρίσιμη περίπτωση. 42
5.2 Η υποκρίσιμη περίπτωση. 45

6 Παράρτημα. **49**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή.

Στην εργασία αυτή θεωρούμε τη μη γραμμική εξίσωση θερμότητας

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

όπου $p > 1$ και είτε $\Omega = \mathbb{R}^N$ είτε $\Omega = B_R := B^0(0,R)$ για κάποιο $R > 0$. Στη δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε τη συνοριακή συνθήκη *Dirichlet*, δηλαδή

$$u(x,t) = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t > 0.$$

Έστω ακόμη $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Είναι γνωστό ότι για κάθε u_0 ως άνω, η εξίσωση (1.1) έχει μοναδική κλασική λύση u (δηλαδή $u \in C^1$ ως προς το χρόνο t και $u \in C^2$ ως προς τη χωρική μεταβλητή $x \in \overline{\Omega}$) και

$$u \in C([0,T), L^\infty(\Omega)), \quad \nabla u \in C((0,T), L^\infty(\Omega)),$$

όπου

$$\text{είτε } \ T = \infty, \quad \text{είτε } \ T < \infty \text{ και } ||u(\cdot,t)||_{L^\infty} \to \infty \text{ καθώς } t \uparrow T.$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η λύση ορίζεται για κάθε $t \in [0,\infty)$ ενώ στη δεύτερη ότι απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο και ο T καλείται χρόνος απειρισμού.

Έχει αποδειχτεί ότι θετικές λύσεις που ορίζονται για όλους τους χρόνους δεν υπάρχουν όταν

$$\Omega = \mathbb{R}^N \ \text{ και } \ 1 < p \le p_F, \ \text{ όπου } p_F := \frac{N+2}{N}$$

(βλ. $[F]$ και $[L]$), ενώ αντίθετα για $p > p_F$ υπάρχουν. Για παράδειγμα μπορούμε να κατασκευάσουμε θετικές λύσεις αυτοομοιότητας οι οποίες να συγκλίνουν στο μηδέν καθώς $t \to \infty$ (βλ. $[HW]$).

Διατυπώνουμε στη συνέχεια το λεγόμενο κριτήριο αρνητικής ενέργειας, ένα κριτήριο απειρισμού της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο :

Λήμμα 1.0.1 *Αν $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ με $\Omega = B_R$ και*

$$E[u_0](t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_0(x)|^{p+1} dx < 0 \qquad (1.2)$$

τότε έχουμε απειρισμό της λύσης του (1.1) σε πεπερασμένο χρόνο.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα (βλ. Κεφ.6).

Ορίζουμε

$$m(t) := \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)| = ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \quad (0 \le t < T), \qquad (1.3)$$

όπου $u(x,t)$ είναι η λύση του (1.1). Από τα παραπάνω έχουμε $m(t) \in C([0,T))$.

Όταν η u είναι ακτινικά συμμετρική, δηλαδή $u(x,t) = U(|x|,t)$, τότε η συνάρτηση $U(r,t)$, όπου $r := |x|$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$U_t = U_{rr} + \frac{N-1}{r}U_r + |U|^{p-1}U. \qquad (1.4)$$

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ακτινικά συμμετρικών λύσεων της εξίσωσης (1.1) οι οποίες απειρίζονται σε πεπερασμένο χρόνο. Με άλλα λόγια μας ενδιαφέρει ο ρυθμός με τον οποίο η $||U(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)}$ απειρίζεται καθώς $t \uparrow T < \infty$.

Θεωρούμε τη Σ.Δ.Ε.

$$\frac{dg}{dt} = |g|^{p-1}g$$

η οποία έχει λύση

$$g(t) = \pm\kappa(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}, \text{ όπου } \kappa := (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}. \qquad (1.5)$$

Ορισμός : Λέμε οτι ο απειρισμός σε πεπερασμένο χρόνο είναι τύπου I όταν η ποσότητα $m(t)/g(t)$ παραμένει φραγμένη καθώς $t \uparrow T$. Στην αντίθετη περίπτωση θα αναφερόμαστε σε απειρισμό τύπου II.

Με τη βοήθεια του παρακάτω λήμματος (βλ. $[FMcL]$), δίνουμε έναν πληρέστερο ορισμό (για την απόδειξη βλ. Κεφ.6).

Λήμμα 1.0.2 *Ανεξαρτήτως του τύπου απειρισμού έχουμε :*

(i) *η συνάρτηση* $m(t)$ *είναι Lipschitz συνεχής,*

(ii) $m'(t) \leq m^p(t)$ *σ.π.* $t \in [0, T)$,

(iii) $m(t) \geq g(t)$ *για κάθε* $t \in [0, T)$.

Έχουμε λοιπόν τύπου I απειρισμό της λύσης του προβλήματος (1.1), αν και μόνο αν υπάρχει σταθερή $C_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$g(t) \leq m(t) \leq C_0 g(t) \text{ για κάθε } t \in [0, T), \tag{1.6}$$

και τύπου II, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $t_n \uparrow T$ τέτοια ώστε

$$\frac{m(t_n)}{g(t_n)} \to +\infty. \tag{1.7}$$

Υποθέτουμε εδώ ότι εκθέτης p πληροί τον εξής περιορισμό

$$p^* > p \geq p_s, \quad \text{όπου } p_s := \frac{N+2}{N-2} \tag{1.8}$$

και

$$p^* = \begin{cases} \infty & \text{αν } 3 \leq N \leq 10 \\ 1 + \frac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}} & \text{αν } N \geq 11. \end{cases} \tag{1.9}$$

Στην περίπτωση υποκρίσιμου εκθέτη, δηλαδή $1 < p < p_s$, γνωρίζουμε ότι ο απειρισμός της λύσης του προβλήματος (1.1) είναι πάντοτε τύπου I. Αυτό ισχύει ακόμη και στην περίπτωση όπου η u δεν είναι ακτινικά συμμετρική και το Ω είναι κυρτό, ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ ή $\Omega = \mathbb{R}^N$ (βλ. [GMS]).

Στην περίπτωση όπου έχουμε ακτινικά συμμετρική λύση και ο εκθέτης είναι κρίσιμος ($p = p_s$), έχουν κατασκευαστεί με μεθόδους ασυμπτωτικής ανάλυσης παραδείγματα όπου ο απειρισμός είναι τύπου II για λύσεις που το πρόσημο τους εναλλάσσεται, ενώ όταν $u(x,t) = U(r,t) \geq 0$ και $U_r < 0$ ο απειρισμός είναι πάντα τύπου I (βλ. [FHV]).

Όταν $N \geq 11$ και $p > p^*$, έχει αποδειχτεί η ύπαρξη ακτινικά συμμετρικής λύσης με απειρισμό τύπου II (βλ. [HV]).

Στην παρούσα εργασία θα δείξουμε ότι έχουμε πάντοτε τύπου I απειρισμό της λύσης u του προβλήματος (1.1) στις ακόλουθες περιπτώσεις :

(i) $p_s < p < p^*$ και u είναι ακτινικά συμμετρική λύση (Θεώρημα 5.0.1 και Θεώρημα 5.0.2). Η απόδειξη στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$ θα γίνει υπό την προϋπόθεση ότι

$$\text{υπάρχει κάποιο } t_0 \in [0,T) \text{ τέτοιο ώστε η συνάρτηση } r \mapsto U_t(r,t_0) \\ \text{να αλλάζει πρόσημο το πολύ πεπερασμένες φορές.} \tag{1.10}$$

(ii) $p = p_s$ και $u \geq 0$ είναι ακτινικά συμμετρική λύση (Θεώρημα 5.0.3). Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώνει το αντίστοιχο των $[FHV]$ εφόσον δεν απαιτείται η συνθήκη $U_r < 0$.

(iii) $1 < p < p_s$ και $u \geq 0$ (Θεώρημα 5.2.1). Το αποτέλεσμα αυτό είναι σαφώς ασθενέστερο των $[GMS]$, όπου εκεί δεν γίνεται κανένας περιορισμός για το πρόσημο της u. Ο λόγος που θα δώσουμε την απόδειξη είναι επειδή αυτή εκθέτει παρόμοια επιχειρήματα με την απόδειξη της περίπτωσης (ii), $p = p_s$.

Γενικά, χωρίς την υπόθεση της ακτινικής συμμετρίας, όταν $p \geq p_s$, ο τύπος απειρισμού αποτελεί ανοικτό πρόβλημα.

Κεφάλαιο 2

Μεταβλητές αυτοομοιότητας, γενικές εκτιμήσεις.

2.1 Μεταβλητές αυτοομοιότητας σε λύσεις που απειρίζονται σε πεπερασμένο χρόνο.

Υποθέτουμε ότι η λύση του προβλήματος (1.1) απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο και έστω T είναι ο χρόνος απειρισμού. Για κάθε $\alpha \in \Omega$, $T_1 \in (0, T]$ θέτουμε

$$y = \frac{x - \alpha}{\sqrt{T_1 - t}}\,, \qquad s = -log(T_1 - t) \tag{2.1}$$

και

$$w_{\alpha,T_1}(y,s) = (T_1 - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t). \tag{2.2}$$

Η $w(y,s) := w_{\alpha,T_1}(y,s)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$w_s = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + |w|^{p-1} w, \tag{2.3}$$

όπου

$$s \geq -logT_1, \quad \begin{cases} y \in \mathbb{R}^N & \text{αν } \Omega = \mathbb{R}^N, \\ y \in \Omega_{\alpha,s} := \{y \in \mathbb{R}^N : |y + e^{s/2}\alpha| < Re^{s/2}\} & \text{αν } \Omega = B_R. \end{cases}$$

Τις μεταβλητές (2.1) υπέδειξαν πρώτοι οι *Giga Y.* και *Kohn R.V.* και λέγονται μεταβλητές αυτοομοιότητας. Η εισαγωγή τέτοιων μεταβλητών οφείλεται στα εξής:

(i) αν $u(x,t)$ είναι μιά λύση, τότε η $\lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ είναι και αυτή λύση για κάθε $\lambda > 0$,

(ii) ο χρόνος απειρισμού $t = T$, αντιστοιχεί στις νέες μεταβλητές στο $s = +\infty$. Επομένως η μελέτη του απειρισμού των λύσεων του (1.1) είναι τώρα ισοδύναμη με τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του (2.3), καθώς $s \to +\infty$,

(iii) αν $w_{\alpha,T}(y,s) \equiv \psi(y)$, δηλαδή η $w_{\alpha,T}(y,s)$ είναι ανεξάρτητη του s, τότε

$$u(x,t) = (T-t)^{-\frac{1}{p-1}}\psi(\frac{x-\alpha}{\sqrt{T-t}}). \tag{2.4}$$

Θα λέμε τη u λύση αυτοομοιότητας ως προς το α αν είναι της μορφής (2.4). Σε αυτήν την περίπτωση η $\psi(y)$ ικανοποιεί την ελλειπτική εξίσωση

$$\Delta\psi - \frac{1}{2}y\cdot\nabla\psi - \frac{1}{p-1}\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0. \tag{2.5}$$

Παρατηρούμε οτι για μια λύση της μορφής αυτής ο απειρισμός είναι τύπου I.

(iv) Όταν $p < p_s$, οι φραγμένες λύσεις της (2.3) προσεγγίζουν λύσεις της εξίσωσης (2.5) καθώς $s \to \infty$.

2.2 Ενεργειακές εκτιμήσεις για αυθαίρετο $p>1$.

Ορίζουμε την ενέργεια της w από την εξίσωση (2.3) ως εξής

$$E[w](s) := \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2(p-1)}w^2 - \frac{1}{p+1}|w|^{p+1}\Big)\rho(y)dy, \tag{2.6}$$

όπου $\rho(y) = (4\pi)^{-N/2}e^{-|y|^2/4}$, $s \in (-logT_1, \infty)$. Αν λοιπόν w είναι λύση της (2.3), παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{d}{ds}E[w](s) = \begin{cases} -\int_{\mathbb{R}^N}(w_s)^2\rho(y)dy, \ \text{αν } \ \Omega = \mathbb{R}^N, \\ -\int_{\Omega_{\alpha,s}}(w_s)^2\rho(y)dy - \frac{1}{4}\int_{\partial\Omega_{\alpha,s}}|y||\nabla w|^2\rho(y)dS_y, \ \text{αν } \ \Omega = B_R. \end{cases} \tag{2.7}$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{d}{ds}E[w](s) \leq -\int_\Omega (w_s)^2\rho dy \leq 0 \ \text{ για κάθε } s > -logT_1, \tag{2.8}$$

οπότε η ενέργεια είναι μη αύξουσα συνάρτηση του s.

Λήμμα 2.2.1 *Αν*

$$-2E[w](s^*) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_\Omega w^2(y,s^*)\rho(y)dy\Big)^{\frac{p+1}{2}} > 0 \tag{2.9}$$

για κάποιο $s^* > -logT_1$, τότε η $w(y,s)$ απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο.

Απόδειξη :

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.3) με $w\rho$ και ολοκληρώνοντας στο Ω παίρνουμε

$$\int_\Omega ww_s\rho dy = \int_\Omega\Big(w\triangle w - \frac{1}{2}(y\cdot\nabla w)w\Big)\rho dy - \int_\Omega(\frac{1}{p-1}w^2 - |w|^{p+1})\rho dy.$$

Με ολοκλήρωση κατα μέρη στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους και εφόσον $w=0$ στο $\partial\Omega$ όταν $\Omega=\Omega_{\alpha,s}$, προκύπτει

$$\int_\Omega ww_s\rho dy = \int_\Omega(-|\nabla w|^2 - \frac{1}{p-1}w^2 + |w|^{p+1})\rho dy$$

και από την (2.6)

$$\int_\Omega ww_s\rho dy = -2E[w](s) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |w|^{p+1}\rho dy \tag{2.10}$$

ή, εφόσον η ενέργεια φθίνει ως προς s,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_\Omega(w(y,s))^2\rho dy \geq -2E[w](s^*) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |w(y,s)|^{p+1}\rho dy,$$

για κάθε $s\geq s^*$. Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα $H\ddot{o}lder$ έχουμε

$$\int_\Omega w^2\rho dy = \int_\Omega(w^2\rho^{\frac{2}{p+1}})\rho^{\frac{p-1}{p+1}}dy \leq \Big(\int_\Omega(|w|^{p+1}\rho dy\Big)^{\frac{2}{p+1}}\Big(\int_\Omega \rho dy\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}.$$

Επειδή όμως $\Omega_{\alpha,s}\subseteq\mathbb{R}^N$, είναι

$$\int_\Omega \rho dy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\rho dy = 1,$$

αρα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_\Omega(w(y,s))^2\rho dy \geq -2E[w](s^*) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_\Omega(w(y,s))^2\rho dy\Big)^{\frac{p+1}{2}},$$

για κάθε $s\geq s^*$. Αν λοιπόν ισχύει η υπόθεση του λήμματος τότε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_\Omega w(y,s)^2\rho dy > \frac{p-1}{p+1}\Bigg(\Big(\int_\Omega w^2(y,s)\rho dy\Big)^{\frac{p+1}{2}} - \Big(\int_\Omega w^2(y,s^*)\rho dy\Big)^{\frac{p+1}{2}}\Bigg),$$

για κάθε $s\geq s^*$. Από την τελευταία σχέση, όπως στην απόδειξη του λήμματος 1.0.2, βλέπουμε ότι είτε το $\int_\Omega w^2\rho dy$ απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο ή ότι η λύση παύει να υπάρχει πριν το ολοκλήρωμα απειριστεί. Σε κάθε περίπτωση η w απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο. $\square$

Πρόταση 2.2.2 *Υποθέτουμε οτι $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, όπου $\Omega = \mathbb{R}^N$ ή $\Omega = B_R$ και ότι η λύση u του προβλήματος (1.1) ορίζεται για $t \in [0,T)$. Έστω η $w(y,s) := w_{\alpha,T_1}(y,s)$ όπως δίνεται από την (2.2) και έστω $s_0 = -logT_1 + \varepsilon$, όπου ε θετική σταθερή. Υπάρχει σταθερή C_0 εξαρτώμενη μόνο από τα $||u_0||_{L^\infty(\Omega)}$, ε, T_1, p τέτοια ώστε*

$$\int_{s_0}^{\infty}\int_\Omega (w_s(y,s))^2\rho(y)dyds \leq C_0, \tag{2.11}$$

$$\int_\Omega (w(y,s))^2\rho(y)dy \leq C_0 \;\; \text{για κάθε } s \geq s_0 \tag{2.12}$$

και

$$\int_{s_1}^{s_1+1}\Big(\int_\Omega |w(y,s)|^{p+1}\rho(y)dy\Big)^2 ds \leq C_0 \;\; \text{για κάθε } s_1 \geq s_0. \tag{2.13}$$

Απόδειξη :

Θέτουμε $t_0 = (1-e^{-\varepsilon})T_1$ την τιμή του s_0 στις αρχικές μεταβλητές. Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, όταν $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ έχουμε

$$||\nabla u(\cdot,t_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\; ||u(\cdot,t_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0$$

ή

$$T_1^{-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}}||\nabla w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\; T_1^{-\frac{1}{p-1}}||w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0. \tag{2.14}$$

Επομένως από την (2.6) έχουμε $E[w](s_0) \leq C_0$ άρα

$$E[w](s) \leq C_0 \;\; \text{για κάθε } s \geq s_0, \tag{2.15}$$

εφόσον η ενέργεια είναι μη αύξουσα συνάρτηση του s. Ολοκληρώνοντας την (2.8) και λόγω της (2.15) προκύπτει η (2.11). Τώρα, επειδή η w ορίζεται για κάθε $s \geq s_0$, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$-2E[w](s) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_\Omega (w(y,s))^2\rho(y)dy\Big)^{\frac{p+1}{2}} \leq 0,$$

για κάθε $s \geq s_0$. Από την ανισότητα αυτή και την (2.15) προκύπτει η (2.12). Παρατηρούμε επίσης από την τελευταία σχέση ότι

$$E[w](s) \geq 0 \;\; \text{για κάθε } s \geq s_0. \tag{2.16}$$

Από την (2.10) έχουμε

$$\int_\Omega |w|^{p+1}\rho dy = \frac{p+1}{p-1}\Big(\int_\Omega w w_s \rho dy + 2E[w](s)\Big),$$

και λόγω της (2.15)

$$\int_{\Omega} |w|^{p+1} \rho dy \leq \frac{p+1}{p-1} \int_{\Omega} w w_s \rho dy + C_0.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Schwarz$ και την (2.12) προκύπτει

$$\int_{\Omega} |w|^{p+1} \rho dy \leq C_0 \Big(\int_{\Omega} (w_s)^2 \rho dy \Big)^{\frac{1}{2}} + C_0.$$

Επομένως

$$\int_{s_1}^{s_1+1} \Big(\int_{\Omega} |w|^{p+1} \rho dy \Big)^2 ds \leq C_0 \int_{s_1}^{s_1+1} \int_{\Omega} (w_s)^2 \rho dy ds + C_0 \tag{2.17}$$

για κάθε $s_1 \geq s_0$. Τώρα με ολοκλήρωση της σχέσης (2.8) και από τις (2.15), (2.16) παίρνουμε

$$\int_{s_1}^{s_1+1} \int_{\Omega} (w_s)^2 \rho dy ds \leq E[w](s_1) - E[w](s_1+1) \leq C_0$$

για κάθε $s_1 \geq s_0$, η οποία σε συνδυασμό με την (2.17) δίνουν την (2.13). $\square$

2.3 Βασικές εκτιμήσεις.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε ένα ομοιόμορφο φράγμα για ακτινικά συμμετρικές λύσεις του προβλήματος (1.1) οι οποίες απειρίζονται σε πεπερασμένο χρόνο. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω $p \in (1, \infty)$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ ή $\Omega = B_R$ και $u_0(x)$ είναι ακτινική και φραγμένη. Υποθέτουμε ότι η λύση u του προβλήματος (1.1) ορίζεται για $t \in [0, T)$ και έστω η $w_{0,T}$ όπως δίνεται από την (2.2) για $\alpha = 0$ και $T_1 = T$. Τότε υπάρχει θετική σταθερή C_0, εξαρτώμενη μόνο από τα $||u_0||_{L^\infty(\Omega)}$, T, p τέτοια ώστε*

$$|w_{0,T}(y,s)| \leq C_0 (1 + |y|^{-\frac{2}{p-1}}), \;\; \text{για κάθε } |y| > 0, \; s \geq -logT. \tag{2.18}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω εκτίμηση στις αρχικές μεταβλητές είναι :

$$|u(x,t)| \leq C_0 ((T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + |x|^{-\frac{2}{p-1}}), \;\; \text{για κάθε } x \in \Omega \backslash \{0\}, \; t \in [0,T). \tag{2.19}$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι ο συνδυασμός δύο εκτιμήσεων για την $w_{0,T}$. Για περισσότερη απλότητα στο συμβολισμό, οι αποδείξεις των παρακάτω αποτελεσμάτων δίνονται στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Λήμμα 2.3.2 *Αν $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, τότε υπάρχει σταθερή $C_0 > 0$ τέτοια ώστε*

$$|w_{0,T}(y,s)| \leq C_0 \ \ \textit{για κάθε}\ |y| \geq 1,\ s \geq -logT.$$

Απόδειξη :

Η u είναι φραγμένη στην περιοχή $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,(1-e^2)T]$ ή ισοδύναμα, η $w_{0,T}$ είναι φραγμένη στην $(y,s) \in \mathbb{R}^N \times [-logT, -logT+2]$, άρα θα αποδείξουμε το λήμμα μόνο για $s \geq -logT+2$.
Από την Πρόταση 2.2.2 για $\varepsilon = 1$ και $T_1 = T$ παίρνουμε $s_0 = -logT+1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (w_{\alpha,T}(y,s))^2 \rho(y) dy \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s \geq s_0, \tag{2.20}$$

και

$$\int_{s_1}^{s_1+1} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |w_{\alpha,T}(y,s)|^{p+1} \rho(y) dy \Big)^2 ds \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s_1 \geq s_0. \tag{2.21}$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις ισχύουν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^N$, επομένως αντικαθιστώντας τη σχέση

$$w_{\alpha,T}(y,s) = w_{0,T}(y + e^{\frac{s}{2}}\alpha, s)$$

στις (2.20), (2.21) και θέτοντας $\alpha = 0$, παίρνουμε για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{|y-y_0|\leq 1} (w_{0,T}(y,s))^2 dy \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s \geq s_0, \tag{2.22}$$

$$\int_{s_1}^{s_1+1} \Big(\int_{|y-e^{(s-s_1)/2}y_0|\leq 1} |w_0(y,s)|^{p+1} dy \Big)^2 ds \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s_1 \geq s_0. \tag{2.23}$$

Η $w_{0,T}$ είναι ακτινικά συμμετρική, εφόσον η u είναι. Επομένως θέτουμε $W(r,s) = w_{0,T}(y,s)$, όπου $r = |y|$. Η W ορίζεται για $r \geq 0$, $s \geq s_0$ και ικανοποιεί τώρα την εξίσωση

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{r}{2}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{p-1}W + |W|^{p-1}W.$$

Οι (2.22), (2.23) γίνονται

$$\int_{|r-r_0|\leq \frac{3}{4}} (W(r,s))^2 dr \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s \geq s_0, \tag{2.24}$$

$$\int_{s_1}^{s_1+1} \Big(\int_{|r-e^{(s-s_1)/2}r_0|\leq \frac{3}{4}} |W(r,s)|^{p+1} dr \Big)^2 ds \leq C_0 \ \ \text{για κάθε } s_1 \geq s_0. \tag{2.25}$$

Στη συνέχεια, θέλοντας να περιορίσουμε τη χρονική μεταβλητή σε ένα σταθερό και συμπαγές διάστημα, μετασχηματίζουμε την παραπάνω εξίσωση για τη W θέτοντας $\overline{W}(\rho,\tau) = W(r,s)$, όπου $\rho = re^{(-s+s_1+1)/2}$, $\tau = 1 - e^{-s+s_1+1}$ και $s_1 \in [s_0+1,\infty)$ είναι αυθαίρετη σταθερή. Η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \rho^2} + \frac{N-1}{\rho}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \rho} + \theta \overline{W} \tag{2.26}$$

με

$$\theta(\rho,\tau) = \frac{1}{1-\tau}\Big(-\frac{1}{p-1} + |\overline{W}|^{p-1}\Big).$$

Στις νέες μεταβλητές, από τις (2.24) και (2.25) προκύπτουν οι εκτιμήσεις:

$$\int_{|\rho-\rho_0|\le\frac{1}{2}} (\overline{W}(\rho,\tau))^2 d\rho \le C_0 \ \text{ για κάθε } \tau \in [1-e,0], \rho_0 \ge 1, \tag{2.27}$$

$$\int_{1-e}^{0}\Big(\int_{|\rho-\rho_0|\le\frac{1}{2}} |\theta(\rho,\tau)|^{\frac{p+1}{p-1}} d\rho\Big)^2 d\tau \le C_0 \ \text{ για κάθε } \rho_0 \ge 1. \tag{2.28}$$

Από την (2.26) βλέπουμε ότι η $\overline{W}$ λύνει μια παραβολική εξίσωση με συνεχείς συντελεστές. Λόγω των (2.27) και (2.28), από γνωστό θεώρημα για ομαλότητα λύσεων (βλ. επόμενο θεώρημα), έχουμε

$$|\overline{W}(\rho_0,0)| \le C_0, \ \text{ για κάθε } \rho_0 \ge 1$$

ή

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C_0 \ \text{ για κάθε } |y| \ge 1, \ s \ge -logT + 2.$$

$\square$

Θα δώσουμε τώρα χώρις απόδειξη (βλ. $[LSU]$, Κεφάλαιο III, §7. Θεώρημα 7.1, §8. Θεώρημα 8.1) το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Η εφαρμογή του έγινε στην ειδική περίπτωση όπου $n=1$, $A=1$, $\Gamma = (N-1)/\rho$, $g = \theta$ και $q = (p+1)/(p-1)$, $r = 2(p+1)/(p-1)$.

Θεώρημα 2.3.3 *Έστω $v(x,t)$ είναι λύση της εξίσωσης με συνεχείς συντελεστές*

$$v_t - \nabla\cdot(A\nabla v) + \Gamma\cdot\nabla v + gv = 0$$

στον παραβολικό κύλινδρο $B_R \times (-l^2,0] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, με

$$\lambda_0|\xi|^2 \le (A(x,t)\xi,\xi) \le \lambda_0^{-1}|\xi|^2 \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \qquad |\Gamma(x,t)| \le \lambda_1,$$

$$\int_{-l^2}^{0}\int_{B_R}|v|^2dxdt\leq \lambda_2,$$

$$\int_{-l^2}^{0}\Big(\int_{B_R}|g|^q dx\Big)^{r/q}dt\leq \lambda_3,\qquad\quad \frac{1}{r}+\frac{n}{2q}<1,\ q\geq 1.$$

Τότε για κάθε $0<\epsilon<R$ έχουμε $|v|\leq C$ στον $B_{R-\epsilon}\times(-l^2+\epsilon,0]$, όπου η C εξαρτάται από τα $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ r,\ n,\ q$ και $R,\ l,\ \epsilon$.

Λήμμα 2.3.4 *Υπάρχει σταθερή $C_0>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $T_1\in[T/2,T]$ να ισχύει*

$$|w_{0,T_1}(y,s)|\leq C_0\quad \textit{για κάθε } |y|\geq 1,\ s\geq -logT_1.$$

Απόδειξη :

Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του προηγούμενου λήμματος. Η σταθερή C_0 είναι ανεξάρτητη της επιλογής του $T_1\in[T/2,T]$ εφόσον στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.2 αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις στο πρώτο μέλος της (2.14) από τις σχέσεις

$$T^{-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}}||\nabla w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq T_1^{-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}}||\nabla w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

και

$$T^{-\frac{1}{p-1}}||w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq T_1^{-\frac{1}{p-1}}||w(\cdot,s_0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Λήμμα 2.3.5 *Υπάρχει σταθερή $C_0>0$ τέτοια ώστε*

$$|w_{0,T}(y,s)|\leq C_0|y|^{-\frac{2}{p-1}}\quad \textit{για κάθε } 0<|y|\leq 1,\ s\geq -logT+log2.$$

Απόδειξη :

Από τον ορισμό της w_{α,T_1}, έχουμε

$$u(x,t)=(T_1-t)^{-\frac{1}{p-1}}w_{0,T_1}\Big(\frac{x}{\sqrt{T_1-t}},log\frac{1}{T_1-t}\Big)$$

$$=(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}w_{0,T}\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}},log\frac{1}{T-t}\Big).$$

Θέτοντας

$$y=\frac{x}{\sqrt{T-t}},\quad s=log\frac{1}{T-t},\quad s_1=log\frac{1}{T_1-t},$$

παίρνουμε

$$w_{0,T}(y,s) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}\, w_{0,T_1}(\sqrt{\lambda}\, y, s_1),$$

όπου $\lambda = (T-t)/(T_1-t)$. Όμως $s_1 = s + log\lambda$, αρα

$$w_{0,T}(y,s) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}\, w_{0,T_1}(\sqrt{\lambda}\, y, s + log\lambda). \tag{2.29}$$

Αν τώρα $t \in [T/2, T)$ και $T_1 \in (t, T]$, τότε η (2.29) ισχύει για κάθε $s \geq -logT + log2$ και για κάθε $\lambda \in [1, \infty)$. Οπότε επιλέγοντας y με $|y| \in (0, 1]$, θέτουμε $\lambda = 1/|y|^2$ και έχουμε

$$w_{0,T}(y,s) = |y|^{-\frac{2}{p-1}}\, w_{0,T_1}(y/|y|, s - 2log|y|). \tag{2.30}$$

Τώρα από το Λήμμα 2.3.4 και την (2.30) προκύπτει η επιθυμητή εκτίμηση. Η επιλογή $\lambda = 1/|y|^2$ είναι η βέλτιστη ανάμεσα στις $\lambda = 1/|y|^\gamma$, με $\gamma \geq 2$ ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.3.4. □

Τώρα το Θεώρημα 2.3.1 προκύπτει αμέσως συνδυάζοντας το Λήμμα 2.3.2 και το Λήμμα 2.3.5.

Κεφάλαιο 3

Στάσιμες λύσεις και *zero number* ιδιότητες αυτών.

3.1 Οι ακτινικά συμμετρικές, στάσιμες λύσεις του προβλήματος.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τις στάσιμες λύσεις της εξίσωσης (1.1) οι οποίες είναι ακτινικά συμμετρικές, δηλαδή τις λύσεις της

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r} U_r + |U|^{p-1}U = 0, \tag{3.1}$$

όπου $p \geq p_s$.

Επίσης θα δώσουμε χωρίς αποδείξεις κάποια αποτελέσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών.

Υπάρχουν δύο ειδών μη μηδενικές λύσεις με ακτινική συμμετρία της εξίσωσης (3.1): μία ιδιόμορφη και οι ομαλές. Η ιδιόμορφη δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\Phi^*(r) = Ar^{-\frac{2}{p-1}}, \text{ όπου } A^{p-1} = \frac{2}{p-1}(N-2-\frac{2}{p-1}). \tag{3.2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(1/\beta)\Phi^*(\beta^{-\frac{p-1}{2}}r) = \Phi^*(r), \text{ για κάθε } \beta \neq 0. \tag{3.3}$$

Οι ομαλές ορίζονται ως οι λύσεις του προβλήματος

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r} U_r + |U|^{p-1}U = 0, \text{ όπου } U(0) = a,\ U_r(0) = 0, \tag{3.4}$$

όπου $a \neq 0$ και τις συμβολίζουμε με $\Phi_a(r)$. Στην περίπτωση που $p = p_s$ η $\Phi_a(r)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi_a(r) = \frac{a}{(1 + \mu a^{\frac{4}{N-2}} r^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \text{όπου} \;\; \mu = \frac{1}{N(N-2)}. \tag{3.5}$$

Όταν $p > p_s$ δεν υπάρχει τύπος αλλά εξαιτίας της αυτοόμοιας δομής της εξίσωσης (3.1) - αν $U(r)$ είναι μιά λύση τότε η $U_\lambda(r) := \lambda U(\lambda^{\frac{p-1}{2}} r)$ είναι επίσης λύση για κάθε $\lambda \neq 0$ - έχουμε την εξής αντιστοιχία με την $\Phi_1(r)$:

$$\Phi_a(r) = a\Phi_1(a^{\frac{p-1}{2}} r). \tag{3.6}$$

Ορισμός : Έστω μιά συνεχής συνάρτηση $v(r)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $J \subset \mathbb{R}$, όπου τυπικά $J = [0, R_0]$ ή $J = [0, \infty)$. Όταν η $v(r)$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 ορίζουμε ως *zero number* της συνάρτησης v στο J, την ποσότητα

$$\mathcal{Z}_J[v] := Card\{r \in J \; ; \; v(r) = 0\},$$

δηλαδή $\mathcal{Z}_J[v]$ είναι ο πληθικός αριθμός των ριζών της v στο J. Ο ορισμός αυτός είναι προφανώς ανεξάρτητος της πολλαπλότητας κάθε ρίζας.

Τα επόμενα δύο λήμματα (για τις αποδείξεις βλ. [JL]) καθορίζουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των $\Phi_a(r)$ στις περιπτώσεις $p = p_s$ και $p_s < p < p^*$, όπου p^* δίνεται από την (1.9).

Λήμμα 3.1.1 *Έστω $p = p_s$ και $a > 0$. Τότε η Φ_a ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $\Phi_a(r) > 0$ *και* $\Phi_a'(r) < 0$ *για κάθε* $r > 0$,

(ii) $\Phi_a(0) \to \infty$ *και* $\Phi_a(r) \to 0$ *(αν* $r \neq 0$*) καθώς* $a \to \infty$,

(iii) $\mathcal{Z}_{[0,\infty)}(\Phi_a - \Phi^*) = 2$ *και* $\mathcal{Z}_{[0,\infty)}(\Phi_a - \Phi_b) = 1$ *(αν* $a \neq b$*).*

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο εκθέτης p είναι κρίσιμος, οποιαδήποτε ομαλή λύση τέμνει την ιδιόμορφη ακριβώς δύο φορές.

Λήμμα 3.1.2 *Έστω $p^* > p > p_s$ και $a > 0$. Τότε η Φ_a ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $\Phi_a(r) > 0$ *και* $\Phi_a'(r) < 0$ *για κάθε* $r > 0$,

(ii) $\Phi_a(r)/\Phi^*(r) \to 1$ *καθώς είτε* $r \to \infty$, *είτε* $a \to \infty$,

(iii) $\mathcal{Z}_{[0,\infty)}(\Phi_a - \Phi^*) = \infty$.

Όταν λοιπόν ο εκθέτης p είναι υπερκρίσιμος οποιαδήποτε ομαλή λύση τέμνει την ιδιόμορφη άπειρες φορές. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των Φ_a είναι ουσιωδώς διαφορετική ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις για τον εκθέτη p.

3.2 Ιδιότητες *zero number*.

Το επόμενο λήμμα (για την απόδειξη βλ. $[CP]$) μάς δίνει κάποιες ιδιότητες του *zero number* για συναρτήσεις που είναι ακτινικά συμμετρικές λύσεις γραμμικών παραβολικών εξισώσεων.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω $v(x,t) := V(r,t)$ είναι μιά ομαλή, ακτινικά συμμετρική λύση της γραμμικής εξίσωσης*

$$v_t = \Delta v + a(|x|,t)v, \quad |x| < R_0, \ t \in (t_1,t_2), \tag{3.7}$$

όπου $0 < R_0 < +\infty$, $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, και $a(r,t)$ είναι συνεχής στο $[0,R_0] \times (t_1,t_2)$. Υποθέτουμε ότι η $V(r,t)$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 και ότι ικανοποιεί κάποια εκ των συνοριακών συνθηκών:

$$(\alpha) \ \ V(R_0,t) \equiv 0 \ \ (t \in (t_1,t_2)), \qquad (\beta) \ \ V(R_0,t) \neq 0 \ \ (t \in (t_1,t_2)). \tag{3.8}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\mathcal{Z}_J[V(\cdot,t)]$ *είναι πεπερασμένο για κάθε* $t \in (t_1,t_2)$,

(ii) $t \to \mathcal{Z}_J[V(\cdot,t)]$ *είναι μη αύξουσα,*

(iii) αν $V_r(r^*,t^*) = V(r^*,t^*) = 0$ *για κάποιο* $r^* \in [0,R_0]$, $t^* \in (t_1,t_2)$, *τότε*

$$\mathcal{Z}_J[V(\cdot,t)] > \mathcal{Z}_J[V(\cdot,s)] \ \ (t_1 < t < t^* < s < t_2).$$

Πόρισμα 3.2.2 *Έστω $v(x,t) = V(|x|,t)$ είναι μιά φραγμένη, ομαλή λύση της εξίσωσης (3.7) είτε στην περιοχή $\{|x| < R_0\} \times (t_1,t_2)$ ή στον $\mathbb{R}^N \times (t_1,t_2)$. Στην πρώτη περίπτωση, υποθέτουμε ότι ισχύει κάποια εκ των συνοριακών συνθηκών (3.8). Έστω ότι για κάποιο $r^* \in [0,R_0]$ (ή $r^* \in [0,\infty]$ στην δεύτερη περίπτωση) και για κάποια $t_1 < t_* < t^* < t_2$, έχουμε*

$$V_r(r^*,t) = V(r^*,t) = 0 \ \ (t \in [t_*,t^*]).$$

Τότε $V(r,t) \equiv 0$.

Απόδειξη :

Όταν $r \in [0,R_0)$, αν η $V(r,t)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν τότε από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $\mathcal{Z}_{[0,R_0]}[V(\cdot,t)] < \infty$ και

$$\mathcal{Z}_{[0,R_0]}[V(\cdot,t)] > \mathcal{Z}_{[0,R_0]}[V(\cdot,s)] \text{ για κάθε } t_* \leq t < s \leq t^*,$$

δηλαδή η συνάρτηση $t \to \mathcal{Z}_{[0,R_0]}[V(\cdot,t)]$ είναι πεπερασμένη και αυστηρώς φθίνουσα στο $[t_*, t^*]$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει γιατί $\mathcal{Z}_{[0,R_0]}[V(\cdot,t)] \geq 0$. Αν $r \in \mathbb{R}^N$, ας υποθέσουμε όπως πριν ότι η $V(r,t)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Έφόσον η V είναι συνεχής θα υπάρχει κάποιο $r_0 \in (r^*, \infty)$ και ένα μη εκφυλισμένο διάστημα $I \subset [t_*, t^*]$ τέτοια ώστε $V(r_0,t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη περίπτωση με $r \in [0, r_0]$ έχουμε $V(r,t) \equiv 0$. □

Καθεμιά από τις συναρτήσεις $U(r,t),\ U_t(r,t),\ U(r,t) \pm \Phi^*(r)$ ικανοποιεί κάποια εξίσωση της μορφής (3.7). Για παράδειγμα η $V(r,t) = U(r,t) - \Phi^*(r)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$V_t = \Delta V + a(r,t)V,$$

όπου

$$a(r,t) = \frac{|U|^{p-1}U - (\Phi^*)^p}{U - \Phi^*}$$

η οποία είναι προφανώς συνεχής εφόσον $p > 1$. Εφαρμόζοντας επομένως το Λήμμα 3.2.1 στις $U(r,t),\ U_t(r,t),\ U(r,t) \pm \Phi^*(r)$ προκύπτει το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 3.2.3 *Έστω $\Omega = B_R$ και έστω $U(r,t)$ είναι μιά λύση της (3.1) για $0 \leq t < T$ υπό συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Τότε οι ποσότητες*

$$\mathcal{Z}_{[0,R]}[U(\cdot,t)], \quad \mathcal{Z}_{[0,R]}[U_t(\cdot,t)], \quad \mathcal{Z}_{[0,R]}[U(\cdot,t) \pm \Phi^*]$$

είναι όλες πεπερασμένες για κάθε $0 < t < T$ και μη αύξουσες. Συνεπώς, υπάρχει $t_0 \in [0,T)$ τέτοιο ώστε οι παραπάνω ποσότητες να παραμένουν σταθερές στο διάστημα $[t_0, T)$.

Πόρισμα 3.2.4 *Έστω $\Omega = B_R$ και έστω $U(r,t)$ είναι μιά λύση της (3.1) για $0 \leq t < T$ υπό συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Τότε υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε*

$$U(0,t),\ U_t(0,t) \neq 0 \text{ για κάθε } t \in (t_0, T).$$

Απόδειξη :

Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $t_0 \in [0,T)$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{Z}_{[0,R]}[U(\cdot,t)]$ να παραμένει σταθερή στο $[t_0,T)$. Έστω $t_1 \in (t_0,T)$ με $U(0,t_1) = 0$. Λόγω ακτινικής συμμετρίας έχουμε επίσης $U_r(0,t_1) = 0$. Επομένως από το Λήμμα 3.2.1 παίρνουμε $\mathcal{Z}_{[0,R]}[U(\cdot,t_0)] > \mathcal{Z}_{[0,R]}[U(\cdot,t_1)]$. Άτοπο. Όμοια για την $U_t(0,t)$. □

Όταν $\Omega = \mathbb{R}^N$ είναι γνωστές οι ακόλουθες ασθενέστερες εκδοχές των προηγούμενων αποτελεσμάτων:

Λήμμα 3.2.5 *Έστω $\Omega = \mathbb{R}^N$ και έστω $U(r,t)$ είναι μιά λύση της (3.1). Θέτουμε $V(r,t)$ να είναι μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:*

$$U(r,t), \qquad U_t(r,t), \qquad U(r,t) + \Phi^*(r), \qquad U(r,t) - \Phi^*(r).$$

Υποθέτουμε οτι υπάρχει $t^* \in [0,T)$ και μιά θετική ομαλή συνάρτηση $R_0(t)$ στο $[t^*,T)$ τέτοια ώστε η $V(R_0(t),t)$ να μην αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[t^*,T)$. Τότε η ποσότητα $\mathcal{Z}_{[0,R_0(t)]}[V(\cdot,t)]$ είναι πεπερασμένη στο (t^*,T) και είναι μη αύξουσα. Συνεπώς υπάρχει $t_0 \in [t^*,T)$ τέτοιο ώστε το $\mathcal{Z}_{[0,R_0(t)]}[V(\cdot,t)]$ να παραμένει σταθερό στο διάστημα $[t_0,T)$.

Πόρισμα 3.2.6 *Έστω $\Omega = \mathbb{R}^N$ και έστω $U(r,t)$ είναι μιά λύση της (3.1). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $t^* \in [0,T)$ και μιά θετική ομαλή συνάρτηση $R_0(t)$ στο $[t^*,T)$ τέτοια ώστε η $U(R_0(t),t)$ (αντιστοίχως, $U_t(R_0(t),t)$) να μην αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[t^*,T)$. Τότε υπάρχει κάποιο $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε $U(0,t) \neq 0$ (αντιστοίχως, $U_t(0,t)$) στο (t_0,T).*

Λήμμα 3.2.7 *Έστω $\Omega = \mathbb{R}^N$ και έστω $U(r,t)$ είναι μιά λύση της (3.1) για $t \in [0,T)$. Τότε υπάρχει κάποιο $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε $U(0,t) \neq 0$ στο (t_0,T).*

Κεφάλαιο 4

Σύγκλιση κλιμακωμένων (*rescaled*) λύσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι κάθε τύπου II ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης (1.1), συγκλίνει σε μιά στάσιμη λύση της ίδιας εξίσωσης μέτα από κατάλληλη αλλαγή κλίμακας και την προϋπόθεση (1.10) όταν $p > p_s$ και $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Υπενθυμίζουμε ότι από το Λήμμα 1.0.2 έχουμε

$$m'(t) \leq m^p(t) \; \sigma.\pi. \; t \in [0, T) \quad \text{και} \quad g(t) \leq m(t) \; \text{ για κάθε } t \in [0, T),$$

ενώ επίσης όταν $\Omega = B_R$ επεκτείνουμε την u στο $\mathbb{R}^N$ έτσι ώστε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^N \setminus B_R$.

Πρόταση 4.0.8 *Έστω $p \geq p_s$ και έστω $U(r, t)$ είναι ακτινικά συμμετρική λύση της (1.1) με απειρισμό τύπου II σε χρόνο $T < \infty$. Στην περίπτωση που $p > p_s$ και $\Omega = \mathbb{R}^N$, υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει κάποιο $t_0 \in [0, T)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $r \mapsto U_t(r, t_0)$ να αλλάζει πρόσημο το πολύ πεπερασμένες φορές. Τότε υπάρχει μιά ακολουθία $t_n \uparrow T$, τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n) r, t_n) \to \pm \Phi(r), \; \textit{καθώς } n \to \infty, \; \textit{ομοιόμορφα } C^2[0, \infty),$$

όπου $\Phi(r) := \Phi_1(r)$ είναι η λύση του προβλήματος (3.4) για $a = 1$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο θα ερμηνεύσουμε την υπόθεση που κάνουμε στην ειδική περίπτωση όπου $p > p_s$ και $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Όταν $\Omega = B_R$, από το Πόρισμα 3.2.4, οι $U(0, t)$ και $U_t(0, t)$ διατηρούν σταθερό πρόσημο για t επαρκώς κοντά στο T. Στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$, από το Λήμμα 3.2.7 και την εν λόγω υπόθεση, ισχύει το ίδιο επίσης για τις $U(0, t)$

και $U_t(0,t)$. Επομένως καθορίζοντας εκ νέου την τιμή $t=0$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι οι $U(0,t)$ και $U_t(0,t)$ δεν αλλάζουν πρόσημο. Εφόσον η περίπτωση $u>0$ και η περίπτωση $u<0$ αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, υποθέτουμε ότι

$$u(0,t)>0 \ \text{ για κάθε } t\in[0,T), \tag{4.1}$$

και

$$\text{είτε } \ (a)\, U_t(0,t)>0 \ \ (0<t<T), \ \text{είτε } \ (b)\, U_t(0,t)<0 \ \ (0<t<T). \tag{4.2}$$

Στην περίπτωση $p=p_s$, η πρόταση αποδεικνύεται χωρίς υποθέσεις για το πρόσημο της U_t, καθώς όπως θα δούμε η (4.1) είναι αρκετή.

4.1 Η περίπτωση όπου η $m(t)$ είναι αύξουσα.

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε την πρόταση 4.0.8 υποθέτοντας ότι $m'(t)\geq 0$ $\sigma.\pi.$ $t\in[0,T)$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$0\leq m'(t)\leq m^p(t) \quad \sigma.\pi.\ t\in[0,T). \tag{4.3}$$

Ορίζουμε

$$\lambda(t):=m^{-(p-1)}(t), \tag{4.4}$$

από την οποία παραγωγίζοντας και λόγω της (4.3) λαμβάνουμε

$$0\geq\lambda'(t)\geq-(p-1). \tag{4.5}$$

Από την υπόθεση ότι η u απειρίζεται σε χρόνο T, έχουμε $m(t)\to\infty$ καθώς $t\to T$. Άρα από τις (4.4) και (4.5) προκύπτει

$$\lambda(t)>0 \text{ και } \lambda(t)\to 0 \text{ καθώς } t\to T.$$

Επίσης από την (4.5), έχουμε

$$\lambda(t)=-\int_t^T\lambda'(s)ds\leq(p-1)(T-t). \tag{4.6}$$

Στη συνέχεια εισάγουμε μιά νέα χρονική μεταβλητή:

$$\tau:=\int_0^t\frac{ds}{\lambda(s)}. \tag{4.7}$$

Επομένως λόγω της (4.6)

$$\tau = \int_0^t \frac{ds}{\lambda(s)} \geq \frac{1}{p-1} log \frac{T}{T-t} \to \infty \text{ καθώς } t \to T,$$

δηλαδή ο χρόνος απειρισμού $t = T$ αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή στο $\tau = \infty$. Ορίζουμε $\eta(\tau) := \lambda(t)$, οπότε από την (4.7) παίρνουμε με παραγώγιση

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda(t)}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \eta(\tau). \tag{4.8}$$

Άρα,

$$T - t = \int_\tau^\infty \eta(\sigma) d\sigma.$$

Τώρα ορίζουμε την κλιμακωμένη λύση ως εξής

$$v(z,\tau) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}(t) u(\sqrt{\lambda(t)} z, t) \ \ (z \in D_\tau, \ 0 \leq \tau < \infty), \tag{4.9}$$

όπου

$$D_\tau = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \text{αν } \Omega = \mathbb{R}^N \\ B_{R/\sqrt{\eta(\tau)}} & \text{αν } \Omega = B_R. \end{cases}$$

Η v ικανοποιεί την εξίσωση

$$v_\tau = \Delta_z v + |v|^{p-1} v - a(\tau) \left(\frac{1}{2} z \cdot \nabla_z v + \frac{1}{p-1} v \right), \tag{4.10}$$

όπου

$$a(\tau) := -\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = -\lambda'(t) = (p-1) \frac{m'(t)}{m^p(t)}. \tag{4.11}$$

Αν τώρα η λύση u είναι ακτινικά συμμετρική, δηλαδή $u(x,t) = U(r,t)$ με $r = |x|$, τότε θέτουμε $v(z,\tau) := V(\rho,\tau)$ με $\rho = |z|$, την αντίστοιχη κλιμακωμένη λύση. Επομένως

$$V(\rho,\tau) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}(t) U(\sqrt{\lambda(t)} \rho, t) \ \ (\rho \geq 0, \ 0 \leq \tau < \infty), \tag{4.12}$$

και ικανοποιεί την εξίσωση

$$V_\tau = V_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho} V_\rho + |V|^{p-1} V - a(\tau) \left(\frac{1}{2} \rho V_\rho + \frac{1}{p-1} V \right). \tag{4.13}$$

Από τις (4.5) και (4.11) έχουμε

$$0 \leq a(\tau) \leq p - 1, \tag{4.14}$$

και

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} a(\tau)d\tau = log\Big(\frac{\eta(\tau_*)}{\eta(\tau^*)}\Big) \qquad \text{για κάθε } 0 \le \tau_* < \tau^* < \infty. \tag{4.15}$$

Επίσης από τους ορισμούς των v, V έχουμε

$$||v(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = ||V(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} = 1 \ \text{ για κάθε } \tau \ge 0. \tag{4.16}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ακόλουθη ποσότητα:

$$h(\tau) := \frac{\eta(\tau)}{\int_\tau^\infty \eta(\sigma)d\sigma} = \frac{\lambda(t)}{T-t} = (p-1)\Big(\frac{m(t)}{g(t)}\Big)^{-(p-1)}. \tag{4.17}$$

Εφόσον $p > 1$, από την (1.7) και (4.17), η υπόθεση ότι ο απειρισμός είναι τύπου ΙΙ είναι τώρα ισοδύναμη με την εξής υπόθεση :

$$\text{υπάρχει ακολουθία } \tau_n \to \infty \text{ τέτοια ώστε } h(\tau_n) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{4.18}$$

Στο εξής θα θεωρούμε πάντα την (4.18). Παραγωγίζοντας την (4.17) και χρησιμοποιώντας την (4.11) προκύπτει

$$a(\tau) = -\frac{h_\tau}{h} + h, \tag{4.19}$$

και από την (4.14)

$$-(p-1)h \le h_\tau \le h^2. \tag{4.20}$$

Λήμμα 4.1.1 *Για κάθε $\ell > 0$ υπάρχει μιά ακολουθία $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε*

$$\max_{\tau\in[\alpha_n,\alpha_n+\ell]} h(\tau) \to 0, \ \textit{καθώς } n \to \infty, \tag{4.21}$$

$$||a||_{L^1(\alpha_n,\alpha_n+\ell)} \to 0, \ \textit{καθώς } n \to \infty. \tag{4.22}$$

Απόδειξη :

Με ολοκλήρωση της σχέσης (4.19) έχουμε

$$\int_\alpha^{\alpha+\ell} a(\tau)d\tau = log\frac{h(\alpha)}{h(\alpha+\ell)} + \int_\alpha^{\alpha+\ell} h(\tau)d\tau, \tag{4.23}$$

για κάθε ℓ, $\alpha > 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Η συνάρτηση $h(\tau)$ συγκλίνει στο 0 καθώς $\tau \to \infty$.

Η (4.21) είναι προφανής σ′ αυτή την περίπτωση. Επίσης έχουμε για κάθε $\ell > 0$, ότι

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\ell} h(\tau)d\tau \leq \ell \max_{[\alpha,\alpha+\ell]} h(\tau) \to 0 \text{ καθώς } \alpha \to \infty. \tag{4.24}$$

Ας υποθέσουμε ότι η (4.22) δεν ισχύει, δηλαδή ότι

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} a(\tau)d\tau \geq \delta_0, \tag{4.25}$$

για κάποια ℓ_0, $\delta_0 > 0$ και για κάθε α μεγάλο. Από την (4.24) έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} h(\tau)d\tau \leq \frac{\delta_0}{2},$$

επίσης για κάθε α μεγάλο. Επομένως από την (4.23) προκύπτει

$$\delta_0 \leq \int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} a(\tau)d\tau \leq log\frac{h(\alpha)}{h(\alpha+\ell_0)} + \frac{\delta_0}{2},$$

για κάθε $\alpha \geq \alpha^*$, όπου α^* επαρκώς μεγάλο. Όμως $logx \leq x-1$ για κάθε $x > 0$, άρα

$$h(\alpha+\ell_0) \leq \Big(\frac{\delta_0}{2}+1\Big)^{-1} h(\alpha),$$

για κάθε $\alpha \geq \alpha^*$. Με ολοκλήρωση από την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\int_{\alpha+\ell_0}^{\alpha+2\ell_0} h(\tau)d\tau \leq \Big(\frac{\delta_0}{2}+1\Big)^{-1} \int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} h(\tau)d\tau$$

για κάθε $\alpha \geq \alpha^*$. Τώρα μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι για κάθε $\alpha \geq \alpha^*$ ισχύει

$$\int_{\alpha+k\ell_0}^{\alpha+(k+1)\ell_0} h(\tau)d\tau \leq \Big(\frac{\delta_0}{2}+1\Big)^{-k} \int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} h(\tau)d\tau \ \ (k \in \mathbb{N}). \tag{4.26}$$

Όμως από τις (4.6), (4.17) έχουμε

$$h(\tau) = \lambda(t)/(T-t) \leq p-1,$$

άρα

$$\int_{0}^{\alpha^*+\ell_0} h(\tau) \leq (p-1)(\alpha^*+\ell_0) \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\ell_0} h(\tau)d\tau \leq (p-1)\ell_0, \tag{4.27}$$

για κάθε $\alpha \geq \alpha^*$. Οπότε αθροίζοντας την (4.26) στο k για $\alpha = \alpha^*$, και από την (4.27), λαμβάνουμε

$$\int_0^\infty h(\tau)d\tau \leq (p-1)(\alpha^* + \ell_0(c+1)), \;\; \text{όπου} \;\; c = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\delta_0}{2}+1\Big)^{-k} < \infty.$$

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει εφόσον από τις (4.8), (4.17) έχουμε

$$\int_0^\infty h(\tau)d\tau = \int_0^T \frac{\lambda(t)}{T-t}\frac{dt}{\lambda(t)} = -\Big[log(T-t)\Big]_0^T = \infty.$$

Β) Αν η $h(\tau)$ δε συγκλίνει στο 0 καθώς $\tau \to \infty$.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μιά ακολουθία (σ_n) τέτοια ώστε :

(i) $\sigma_n \to \infty$, καθώς $n \to \infty$,

(ii) $\sigma_n < \tau_n < \sigma_{n+1}$ και $0 < \delta_0 \leq h(\sigma_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου η τ_n δίνεται από την (4.18).

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$h(\tau_n) = \min_{\tau\in[\sigma_n,\sigma_{n+1}]} h(\tau).$$

Από την (4.20) βλέπουμε ότι η $h(\tau)$ μεταβάλλεται πολύ αργά κοντά σε κάθε $\tau = \tau_n$, για μεγάλα n. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθίες (α_n) και (β_n) τέτοιες ώστε :

(i) $h(\alpha_n) = h(\beta_n) = \max_{\tau\in[\alpha_n,\beta_n]} h(\tau) \to 0$, καθώς $n \to \infty$,

(ii) $\alpha_n \in (\sigma_n,\ \tau_n)$, $\beta_n \in (\tau_n,\ \sigma_{n+1})$ και $\beta_n - \alpha_n = \ell$, για κάθε $\ell > 0$ και για κάθε n μεγάλο.

Η σχέση (4.21) είναι τώρα προφανής από τις (i) και (ii). Σημειώνουμε ότι η αυθαίρετη επιλογή του $\ell > 0$ οφείλεται στη σχέση (4.20). Για παράδειγμα έστω $h(\beta_n) = 2h(\tau_n)$, τότε

$$h(\tau_n) = h(\beta_n) - h(\tau_n) = \int_{\tau_n}^{\beta_n} h_\tau(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{\beta_n} h^2(\tau)d\tau,$$

από την εν λόγω σχέση. Επομένως

$$h(\tau_n) \leq (\beta_n - \tau_n)\max_{\tau\in[\tau_n,\beta_n]} h^2(\tau) = (\beta_n - \tau_n)4h^2(\tau_n),$$

ή

$$\beta_n - \tau_n \geq \frac{1}{4h(\tau_n)} \to \infty, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως η διαφορά $\beta_n - \tau_n$ γίνεται όσο μεγάλη επιθυμούμε, εφόσον επιλέξουμε ανάλογα μεγάλες τιμές για το n. Άρα και $\ell = \beta_n - \alpha_n > \beta_n - \tau_n$ είναι επίσης αυθαίρετα μεγάλο. Στη συνέχεια, από την (4.23) για $\alpha = \alpha_n$, παίρνουμε για κάθε $\ell > 0$

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\ell} a(\tau)d\tau = log\frac{h(\alpha_n)}{h(\beta_n)} + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} h(\tau)d\tau = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} h(\tau)d\tau,$$

εφόσον $h(\alpha_n) = h(\beta_n)$. Συνεπώς, για κάθε $\ell > 0$

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\ell} a(\tau)d\tau \leq \ell \max_{\tau\in[\alpha_n,\beta_n]} h(\tau) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

□

Λήμμα 4.1.2 *Υπάρχουν ακολουθίες $\alpha_n \to \infty$ και $\ell_n \to \infty$ τέτοιες ώστε*

$$\max_{\tau\in[\alpha_n,\alpha_n+\ell_n]} h(\tau) \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty, \tag{4.28}$$

$$||a||_{L^1(\alpha_n,\alpha_n+\ell_n)} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty, \tag{4.29}$$

και

$$a(\tau + \alpha_n + \ell_n) \to 0 \;\; (n \to \infty) \;\; \sigma.\pi.\ \tau \in (-\infty, 0]. \tag{4.30}$$

Απόδειξη :

Θέτουμε

$$F_1(\ell, \alpha_n) := \max_{\tau\in[\alpha_n,\alpha_n+\ell]} h(\tau) \quad \text{και} \quad F_2(\ell, \alpha_n) := ||a||_{L^1(\alpha_n,\alpha_n+\ell)}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι για κάθε $\ell > 0$ υπάρχει ακολουθία $\alpha_n \to \infty$ τέτοια ώστε

$$F_1(\ell, \alpha_n) \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty \quad \text{και} \quad F_2(\ell, \alpha_n) \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{4.31}$$

Εκλέγουμε οποιαδήποτε ακολουθία $\ell_n \to \infty$ και εφαρμόζουμε την (4.31) σε κάθε όρο αυτής. Παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μιά ακολουθία $\alpha_n^{(\ell_k)} \to \infty$ καθώς $n \to \infty$, τέτοια ώστε

$$F_1(\ell_k, \alpha_n^{(\ell_k)}) \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty \quad \text{και} \quad F_2(\ell_k, \alpha_n^{(\ell_k)}) \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Στη συνέχεια για $k=1$, επιλέγουμε n_1 επαρκώς μεγάλο, ώστε

$$\max\{F_1(\ell_1, \alpha_{n_1}^{(\ell_1)}),\ F_2(\ell_1, \alpha_{n_1}^{(\ell_1)})\} \le \varepsilon < 1.$$

Για $k=2$, επιλέγουμε n_2, ώστε $\alpha_{n_2}^{(\ell_2)} > \alpha_{n_1}^{(\ell_1)} + 1$ και

$$\max\{F_1(\ell_2, \alpha_{n_2}^{(\ell_2)}),\ F_2(\ell_2, \alpha_{n_2}^{(\ell_2)})\} \le \varepsilon^2.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, εξάγουμε μιά ακολουθία $\tilde{\alpha}_k := \alpha_{n_k}^{(\ell_k)} \to \infty$, τέτοια ώστε

$$F_1(\ell_k, \tilde{\alpha}_k) \to 0,\ \text{καθώς}\ k \to \infty \quad \text{και} \quad F_2(\ell_k, \tilde{\alpha}_k) \to 0,\ \text{καθώς}\ k \to \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει τις (4.28) και (4.29). Από την (4.29) έχουμε

$$\int_{\tilde{\alpha}_n}^{\tilde{\alpha}_n+\ell_n} a(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} a(\tau+\tilde{\alpha}_n+\ell_n)\chi_{_{(-\ell_n,0)}}(\tau)d\tau \to 0,\ \text{καθώς}\ n \to \infty,$$

άρα περνώντας σε κατάλληλη υπακολουθία, παίρνουμε

$$a(\tau+\tilde{\alpha}_{n_k}+\ell_{n_k}) \to 0,\ \sigma.\pi.\ \tau \in (-\infty, 0]\ \text{καθώς}\ k \to \infty.$$

□

Θα χρειαστούμε επιπλέον στην απόδειξη της Πρότασης 4.0.8 το ομοιόμορφο φράγμα που αποδείξαμε στο Θεώρημα 2.3.1 εκφρασμένο στις νέες μεταβλητές που ορίσαμε στα προηγούμενα. Από τον ορισμό της V και την (2.19) έχουμε διαδοχικά

$$|V(\rho,\tau)| = \lambda^{\frac{1}{p-1}}(t)|U(\sqrt{\lambda(t)}\rho, t)| \le C_0\lambda^{\frac{1}{p-1}}(t)\Big((T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + (\sqrt{\lambda(t)}\rho)^{-\frac{2}{p-1}}\Big),$$

ή

$$|V(\rho,\tau)| \le C_0\bigg(\Big(\frac{\lambda(t)}{T-t}\Big)^{\frac{1}{p-1}} + \rho^{-\frac{2}{p-1}}\bigg).$$

Επομένως από την (4.17)

$$|V(\rho,\tau)| \le C_0\Big(h^{\frac{1}{p-1}}(\tau) + \rho^{-\frac{2}{p-1}}\Big)\ \text{για κάθε}\ \rho \ge 0,\ \tau \ge 0. \tag{4.32}$$

Απόδειξη της πρότασης 4.0.8 με την υπόθεση της μονοτονίας :

1ο Βήμα. Έστω α_n και ℓ_n είναι οι ακολουθίες του Λήμματος 4.1.2. Θέτουμε $\tau_n = \alpha_n + \ell_n$ και ορίζουμε

$$V_n(\rho,\tau) := V(\rho,\tau+\tau_n) \quad \text{για } \rho \geq 0,\ \tau \in [-\ell_n,\ell_n], \tag{4.33}$$

όπου η V δίνεται από την (4.12). Σημειώνουμε ότι

$$\tau \in [-\ell_n, 0] \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \tau+\tau_n \in [\alpha_n, \alpha_n+\ell_n]. \tag{4.34}$$

Οι $V_n,\ n \in \mathbb{N}$ ικανοποιούν την εξίσωση (4.13) και την εκτίμηση (4.16), δηλαδή

$$(V_n)_\tau = (V_n)_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho}(V_n)_\rho + |V_n|^{p-1}V_n - a(\tau+\tau_n)\bigg(\frac{1}{2}\rho(V_n)_\rho + \frac{1}{p-1}V_n\bigg), \tag{4.35}$$

και

$$||V_n(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} = 1 \quad (\tau \in [-\ell_n,\ell_n]). \tag{4.36}$$

Ακόμη, από την (4.14), η ποσότητα $a(\tau+\tau_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, από συνήθεις παραβολικές εκτιμήσεις έχουμε ότι οι ακολουθίες συναρτήσεων $V_n,\ (V_n)_\tau,\ (V_n)_\rho$ και $(V_n)_{\rho\rho}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες και ισοσυνεχείς για $\rho \geq 0$ και $\tau \in [-\ell_n,\ell_n],\ n \in \mathbb{N}$. Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο συμπάγειας για ομοιόμορφη σύγκλιση των $Arzela-Ascoli$, υπάρχει μια υπακολουθία που θα συμβολίζουμε επίσης με $V_n(\rho,\tau)$ η οποία συγκλίνει σε μιά συνεχή συνάρτηση V_∞, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, και οι παράγωγοι της $V_n(\rho,\tau)$ στις αντίστοιχες, επίσης συνεχείς παραγώγους της V_∞. Άρα, για $n\to\infty$, από το Λήμμα 4.1.2 και τις (4.34), (4.35) παίρνουμε

$$(V_\infty)_\tau = (V_\infty)_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho}(V_\infty)_\rho + |V_\infty|^{p-1}V_\infty \quad (\rho>0,\ \tau\leq 0). \tag{4.37}$$

2ο Βήμα. Από την (4.32) έχουμε την εκτίμηση

$$|V_n(\rho,\tau)| \leq C_0\Big(h^{\frac{1}{p-1}}(\tau+\tau_n) + \rho^{-\frac{2}{p-1}}\Big) \ \text{ για κάθε } \rho\geq 0,\ \tau+\tau_n \geq 0,$$

και από το Λήμμα 4.1.2

$$\max_{\tau\in[-\ell_n,0]} h(\tau+\tau_n) \to 0, \ \text{καθώς } n\to\infty.$$

Άρα για κάποιο $\varepsilon>0$, υπάρχουν $n_0\in\mathbb{N}$ και $M_0>0$ τέτοια ώστε

$$|V_n(\rho,\tau)| \leq C_0\Big(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} + \rho^{-\frac{2}{p-1}}\Big) \leq 1 \ \text{ για κάθε } \rho\in[0,M_0],\ \tau\in[-\ell_n,0],\ n\geq n_0.$$

Με άλλα λόγια, για επαρκώς μεγάλα n υπάρχει μιά σταθερή $M_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\tau \in [-\ell_n, 0]$, η συνάρτηση $\rho \mapsto |V_n(\rho, \tau)|$ να επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή το 1, στο διάστημα $[0, M_0]$. Οπότε αν για κάθε $\tau \in [-\ell_n, 0]$ συμβολίσουμε με $\rho_n(\tau)$ το σημείο για το οποίο $|V_n(\rho_n(\tau), \tau)| = 1$, τότε

$$0 \leq \rho_n(\tau) \leq M_0 \ \ (n \geq n_0, \ \ \tau \in [-\ell_n, 0]).$$

Επομένως από αυτήν την εκτίμηση και την (4.36), για $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\max_{\rho \in [0, M_0]} |V_\infty(\rho, \tau)| = \max_{\rho \in [0, \infty)} |V_\infty(\rho, \tau)| = 1 \ \text{ για κάθε } \tau \leq 0. \tag{4.38}$$

3ο Βήμα. Θα δείξουμε τώρα ότι η $V_\infty(0, \tau)$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) υπό την υπόθεση (a) (αντίστοιχα, (b)) της (4.2). Θα αποδείξουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό εφόσον η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη και για τον δεύτερο. Έστω λοιπόν ότι ισχύει η (4.2)(α) και έστω $-\infty < \tau_* < \tau^* < \infty$, τότε

$$V(0, \tau_* + \tau_n) \to V_\infty(0, \tau_*) \quad \text{και} \quad V(0, \tau^* + \tau_n) \to V_\infty(0, \tau^*) \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Από την (4.12) και την (4.1) παίρνουμε

$$V(0, t) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}(t) U(0, t) > 0 \quad \text{ ή } \quad U(0, t) = \frac{V(0, \tau)}{\eta^{1/(p-1)}(\tau)} > 0.$$

Επομένως έχουμε ότι η $V(0, \tau)/\eta^{1/(p-1)}(\tau)$ είναι θετική και αύξουσα για $\tau \in \mathbb{R}$. Άρα

$$0 < \frac{V(0, \tau_* + \tau_n)}{\eta^{1/(p-1)}(\tau_* + \tau_n)} < \frac{V(0, \tau^* + \tau_n)}{\eta^{1/(p-1)}(\tau^* + \tau_n)}.$$

Οπότε από αυτήν και την (4.15), για επαρκώς μεγάλα n ώστε $\tau_* + \tau_n \geq 0$, προκύπτει έπειτα από την αλλαγή μεταβλητών $\sigma = \tau + \tau_n$

$$\frac{V(0, \tau^* + \tau_n)}{V(0, \tau_* + \tau_n)} > \left(\frac{\eta(\tau^* + \tau_n)}{\eta(\tau_* + \tau_n)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \exp\left(-\frac{1}{p-1} \int_{\tau_*}^{\tau^*} a(\tau + \tau_n) d\tau \right).$$

Για $n \to \infty$, από την (4.14) και το Λήμμα 4.1.2 έχουμε

$$\frac{V_\infty(0, \tau^*)}{V_\infty(0, \tau_*)} \geq 1.$$

4ο Βήμα. Από την εξίσωση (4.37) και εφόσον από την (4.38) η συνεχής συνάρτηση V_∞ είναι φραγμένη, έχουμε από συνήθεις παραβολικές εκτιμήσεις ότι οι επίσης συνεχείς συναρτήσεις $(V_\infty)_\rho$, $(V_\infty)_{\rho\rho}$ και $(V_\infty)_\tau$ είναι όλες φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0,\infty)\times(-\infty,0]$. Έστω $\sigma_n \to \infty$, ορίζουμε

$$V_{\infty,n} := V_\infty(\rho, \tau - \sigma_n) \quad (\rho \geq 0,\ \tau \leq \sigma_n).$$

Οι ακολουθίες $V_{\infty,n}$, $(V_{\infty,n})_\rho$, $(V_{\infty,n})_{\rho\rho}$ και $(V_{\infty,n})_\tau$ είναι τώρα ομοιόμορφα φραγμένες και ισοσυνεχείς στο $[0,\infty)\times(-\infty,\sigma_n]$. Επομένως από το κριτήριο των $Arzela-Ascoli$ υπάρχει μιά υπακολουθία (την οποία θα συμβολίζουμε επίσης με $V_{\infty,n}(\rho,\tau)$) τέτοια ώστε να συγκλίνει σε μια συνεχή συνάρτηση $f(\rho,\tau)$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, και οι παράγωγοι της $V_{\infty,n}$ στις αντίστοιχες, επίσης συνεχείς παραγώγους της f. Η f ικανοποιεί την εξίσωση

$$f_\tau = f_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho} f_\rho + |f|^{p-1} f \quad (\rho > 0,\ \tau \in \mathbb{R}).$$

5^{o} Βήμα. Επειδή η $V_\infty(0,\tau)$ είναι μονότονη συμπεραίνουμε ότι η $f(0,\tau)$ είναι ανεξάρτητη από το τ. Πράγματι, έστω $-\infty < \tau_* < \tau^* < +\infty$ κι ας υποθέσουμε ότι η $V_\infty(0,\tau)$ είναι αύξουσα. Τότε

$$V_\infty(0,\tau_* - \sigma_n) \to f(0,\tau_*),\ \ V_\infty(0,\tau^* - \sigma_n) \to f(0,\tau^*)\ \ (n \to \infty)$$

και

$$V_\infty(0,\tau_* - \sigma_n) \leq V_\infty(0,\tau^* - \sigma_n),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $f(0,\tau_*) \leq f(0,\tau^*)$. Υποθέτουμε ότι για επαρκώς μεγάλα n ισχύει $\sigma_{n+1} - \sigma_n > \tau^* - \tau_*$ (αν όχι τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_{n+k} - \sigma_n > \tau^* - \tau_*$ για κατάλληλο $k \in \mathbb{N}$). Από την υπόθεση αυτή παίρνουμε

$$V_\infty(0,\tau^* - \sigma_{n+1}) \leq V_\infty(0,\tau_* - \sigma_n),$$

για μεγάλα n. Όμως

$$V_\infty(0,\tau^* - \sigma_{n+1}) \to f(0,\tau^*),\ \ V_\infty(0,\tau_* - \sigma_n) \to f(0,\tau_*)\ \ (n \to \infty),$$

άρα $f(0,\tau^*) \leq f(0,\tau_*)$, οπότε $f(0,\tau_*) = f(0,\tau^*)$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$G(\rho,\tau) = f(\rho,\tau) - f(\rho,\tau-\tau_0) \quad (\rho \geq 0,\ \tau \in \mathbb{R}),$$

για οποιοδήποτε $\tau_0 \in \mathbb{R}$, σταθερό. Έχουμε προφανώς $G(0,\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, και λόγω ακτινικής συμμετρίας $G_\rho(0,\tau) = 0$, επίσης για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Επομένως, από το Πόρισμα 3.2.2 έχουμε $G(\rho,\tau) \equiv 0$, δηλαδή η $f(\rho,\tau)$ είναι μιά στάσιμη λύση της (1.1), άρα

$$f(\rho,\tau) = \Phi_a(\rho)\ \text{ για κάποιο } a \in \mathbb{R}.$$

6ο Βήμα. Από τη σύγκλιση $V_n(0,\tau) = V(0,\tau+\tau_n) \to V_\infty(0,\tau)$ και εφόσον $V(0,\tau) > 0$ για κάθε $\tau \geq 0$, έχουμε $V_\infty(0,\tau) \geq 0$ για κάθε $\tau \geq 0$. Από αυτήν τη σχέση και από τη σύγκλιση $V_{\infty,n}(0,\tau) = V_\infty(0,\tau-\sigma_n) \to f(0)$, λαμβάνουμε $f(0) = \Phi_a(0) = a \geq 0$. Επίσης από την (4.38) παίρνουμε

$$||V_\infty(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} = ||f||_{L^\infty[0,\infty)} = ||\Phi_a||_{L^\infty[0,\infty)} = 1.$$

Επειδή από το Λήμμα 3.1.2 η Φ_a είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$, βλέπουμε ότι $a = 1$. Συνοψίζοντας, για κάθε $\tau \leq \sigma_n$ ($n \in \mathbb{N}$) έχουμε

$$V_\infty(\rho,\tau-\sigma_n) \to \Phi_1(\rho) \quad (n \to \infty),$$

ομοιόμορφα $C^2_{loc}[0,\infty)$, κι εφόσον αυτό ισχύει για οποιαδήποτε ακολουθία $\sigma_n \to \infty$,

$$V_\infty(\rho,\tau) \to \Phi_1(\rho) \quad (\tau \to -\infty),$$

ομοιόμορφα $C^2_{loc}[0,\infty)$. Η $\Phi_1(\rho)$ ικανοποιεί την εξίσωση (3.1), από την οποία λαμβάνουμε $\Phi_1''(0) = -1/N < 0$, δηλαδή η Φ_1 είναι κοίλη σε μιά περιοχή του 0. Από αυτό και από την (4.38), υπάρχει κάποιο $\tau_1 \leq 0$ τέτοιο ώστε

$$V_\infty(0,\tau) = \max_{\rho\in[0,M_0]} |V_\infty(\rho,\tau)| = 1 \ \text{ για κάθε } \tau \in (-\infty,\tau_1].$$

Οπότε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(\rho,\tau) := V_\infty(\rho,\tau) - \Phi_1(\rho)$, έχουμε εξ ορισμού της H και λόγω της ακτινικής συμμετρίας της V_∞ ότι $H(0,\tau) = H_\rho(0,\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in (-\infty,\tau_1]$. Επομένως από το Πόρισμα 3.2.2 παίρνουμε

$$V_\infty(\rho,\tau) \equiv \Phi_1(\rho).$$

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε ότι για την ύπαρξη μιάς ακολουθίας $\tau_n \to \infty$, τέτοιας ώστε

$$V(\rho,\tau_n) = V_n(\rho,0) \to V_\infty(\rho,0) = \Phi_1(\rho),$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $[0,\infty)$. Η σύγκλιση είναι εν τέλει ομοιόμορφη αφού έχουμε την (4.32) και $h(\tau_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Η ομοιόμορφη $C^2[0,\infty)$ σύγκλιση προκύπτει τώρα από τις συνήθεις παραβολικές εκτιμήσεις. □

4.2 Η γενική περίπτωση για την $m(t)$.

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε την πρόταση 4.0.8 χωρίς την υπόθεση μονοτονίας για την $m(t)$. Στόχος μας είναι η αναγωγή στην περίπτωση όπου αυτή είναι αύξουσα.

Λήμμα 4.2.1 *Υπάρχει μιά σταθερή* $K \in (0,1]$ *τέτοια ώστε*

$$m(t') \geq Km(t) \ \text{για κάθε} \ 0 \leq t \leq t' < T.$$

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } K \in (0,1] \text{ υπάρχουν } 0 \leq t < t' < T \\ &\text{τέτοια ώστε } \ m(t) \neq 0 \text{ και } \ m(t') < Km(t). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Θέτοντας $K = 1/n, \ n \in \mathbb{N}$, εξάγουμε ακολουθίες (t_n) και (t'_n) με $0 \leq t_n < t'_n < T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε

$$\frac{m(t'_n)}{m(t_n)} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{4.40}$$

Η t_n (κατα συνέπεια και η t'_n) θα συγκλίνει κατ΄ ανάγκη στο T, διότι αν υποθέσουμε ότι $t_n \to t_0 < T$ τότε εφόσον η $m(t)$ είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[0, t_0]$, για κάθε $0 \leq t < s \leq t_0$ έχουμε

$$m(s) \geq \mu = \frac{\mu}{M} M \geq Km(t) \ \ (0 < K \leq 1),$$

όπου $\mu, \ M$ είναι αντιστοίχως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της $m(t)$ στο $[0, t_0]$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (4.39).
Εφόσον η $g(t)$ είναι αύξουσα στο $[0, T)$, έχουμε

$$g(t_n) \leq g(t'_n) \leq m(t'_n),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα από την (4.40) προκύπτει

$$\frac{g(t_n)}{m(t_n)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ή, ισοδύναμα, λόγω των ορισμών των συναρτήσεων g και m, έχουμε

$$\frac{T - t_n}{\lambda_n} \to \infty, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{4.41}$$

Αντικαθιστώντας όποτε χρειάζεται την τιμή του t_n με κατάλληλη τιμή στο $[0, t'_n)$, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι

$$m(t_n) = \max_{t \in [0, \, t'_n]} m(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.42}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την εξής κλιμακωμένη λύση

$$V_n(\rho,\tau) = \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{\lambda_n}\rho, \lambda_n\tau + t_n),\ \text{με}\ \rho \geq 0,\ \tau \in I_n,$$

όπου

$$\lambda_n := \lambda(t_n) = m^{-(p-1)}(t_n)\ \ \text{και}\ \ I_n := \Big[-\frac{t_n}{\lambda_n}, \frac{T-t_n}{\lambda_n}\Big).$$

Παρατηρούμε ότι $\tau \in I_n$ είναι ισοδύναμο με $\lambda_n\tau + t_n \in [0,T)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η V_n ικανοποιεί την εξίσωση

$$(V_n)_\tau = (V_n)_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho}\,(V_n)_\rho + |V_n|^{p-1}V_n. \tag{4.43}$$

Εξ ορισμού της V_n και από την (4.42), παίρνουμε

$$||V_n(\cdot,0)||_{L^\infty[0,\infty)} = 1, \quad ||V_n(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} \leq 1 \quad (\tau \in I_n). \tag{4.44}$$

Τώρα, όπως στο 1^o βήμα της απόδειξης της πρότασης 4.0.8 στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $V_\infty(\rho,\tau)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, και οι παράγωγοι της V_n στις αντίστοιχες παραγώγους της V_∞. Για $n \to \infty$, από την (4.43) παίρνουμε

$$(V_\infty)_\tau = (V_\infty)_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho}\,(V_\infty)_\rho + |V_\infty|^{p-1}V_\infty \quad (\rho > 0,\ \tau \in \mathbb{R}).$$

Στη συνέχεια από το Θεώρημα 2.3.1 έχουμε

$$|V_n(\rho,\tau)| \leq C_0\lambda_n^{\frac{1}{p-1}}\bigg((T-\lambda_n\tau - t_n)^{-\frac{1}{p-1}} + (\sqrt{\lambda_n}\rho)^{-\frac{2}{p-1}}\bigg)$$

$$= C_0\bigg(\Big(\frac{T-t_n}{\lambda_n} - \tau\Big)^{-\frac{1}{p-1}} + \rho^{-\frac{2}{p-1}}\bigg).$$

Από την (4.41) και την τελευταία εκτίμηση μπορούμε (όμοια με το 2^o βήμα στην απόδειξη της προηγούμενης παραγράφου) να βρούμε μιά ακολουθία $\rho_n \geq 0$ και μιά σταθερή $M_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$|V_n(\rho_n,0)| = 1,\ \ 0 \leq \rho_n \leq M_0\ \ \text{για επαρκώς μεγάλα}\ n. \tag{4.45}$$

Επομένως, από τις (4.44) και (4.45) έχουμε

$$||V_\infty(\cdot,0)||_{L^\infty([0,M_0])} = ||V_\infty(\cdot,0)||_{L^\infty([0,\infty))} = 1.$$

Οπότε η V_∞ δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν, άρα από τις (4.1), (4.2) παίρνουμε

$$V_\infty(0,\tau) \geq 0 \ \text{ για κάθε } \tau \in \mathbb{R},$$

και

$$\text{είτε } (a)\ (V_\infty)_\tau(0,\tau) \geq 0 \ \ (\tau \in \mathbb{R}), \quad \text{ είτε } (b)\ (V_\infty)_\tau(0,\tau) \leq 0 \ \ (\tau \in \mathbb{R}).$$

Από αυτές τις ανισότητες και με το Πόρισμα 3.2.2 βλέπουμε εύκολα ότι $V_\infty(0,\tau) > 0$ για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν υπάρχει $\tau_* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $V_\infty(0,\tau_*) = 0$ και υποθέσουμε την (a), τότε προφανώς $V_\infty(0,\tau) = 0 = (V_\infty)_\tau(0,\tau)$ για κάθε $\tau \leq \tau_*$, άρα από το πόρισμα έχουμε $V_\infty \equiv 0$ το οποίο, όπως είδαμε, δεν μπορεί να ισχύει. Στη συνέχεια, εφόσον $V_n(0,0) \to V_\infty(0,0)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε

$$V_n(0,0) \geq \frac{1}{2}V_\infty(0,0) = \frac{1}{2}\delta > 0,$$

συνεπώς

$$u(0,t_n) = \lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} V_n(0,0) \to \infty \ \ (n \to \infty),$$

δηλαδή η (4.2)(b) δεν μπορεί να ισχύει. Άρα $u_t(0,t) \geq 0$. Επομένως

$$m(t_n') \geq u(0,t_n') \geq u(0,t_n) = \lambda_n^{-\frac{1}{p-1}} V_n(0,0) = V_n(0,0)m(t_n) \geq \frac{\delta}{2}m(t_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (4.40). $\square$

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\tilde{m}(t) := \max_{s\in[0,t]} m(s) \ \ (t \in [0,T)).$$

Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 1.0.1 ισχύει για το $\tilde{m}(t)$ ενώ από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε

$$K\tilde{m}(t) = \max_{s\in[0,t]}(Km(s)) \leq \max_{s\in[0,t]} m(t) = m(t)$$

άρα

$$K\tilde{m}(t) \leq m(t) \leq \tilde{m}(t). \tag{4.46}$$

Προφανώς η $\tilde{m}(t)$ είναι μη φθίνουσα στο $[0,T)$. Ορίζουμε τώρα την ποσότητα

$$\lambda(t) := \tilde{m}^{-(p-1)}(t)$$

και μέσω αυτής επαναορίζουμε τις ποσότητες τ, $\eta(\tau)$, $v(z,\tau)$, $V(\rho,\tau)$, $a(\tau)$, και $h(\tau)$ σε πλήρη αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο. Από την (4.46) προκύπτει

$$\limsup_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}m(t) = \infty \Longleftrightarrow \limsup_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\tilde{m}(t) = \infty,$$

δηλαδή υποθέτοντας τύπου II απειρισμό για τη λύση του (1.1) έχουμε ισοδύναμα ότι υπάρχει ακολουθία $t_n \to \infty$ τέτοια ώστε

$$\frac{\tilde{m}(t_n)}{g(t_n)} \to \infty \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως όλες οι ιδιότητες του λ και των άλλων ποσοτήτων καθώς επίσης και τα Λήμματα 4.1.1, 4.1.2 ισχύουν και τώρα, εκτός από την (4.16) η οποία αντιστοιχεί στην

$$K \leq ||v(\cdot,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = ||V(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} \leq 1 \text{ για κάθε } \tau \geq 0. \tag{4.47}$$

Απόδειξη της πρότασης 4.0.8 χωρίς την υπόθεση της μονοτονίας :

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης της προηγούμενης παραγράφου, όπου η $m(t)$ ήταν αύξουσα. Μολονότι οι (4.36), (4.38) αντικαθίστανται αντίστοιχα από τις

$$K \leq ||V_n(\cdot,\tau)||_{L^\infty[0,\infty)} \leq 1 \quad (\tau \in [-\ell_n, \ell_n]),$$

$$K \leq \max_{\rho\in[0,M_0]} |V_\infty(\rho,\tau)| = \max_{\rho\in[0,\infty)} |V_\infty(\rho,\tau)| \leq 1 \text{ για κάθε } \tau \leq 0, \tag{4.48}$$

τα επιχειρήματα στα πέντε πρώτα βήματα παραμένουν ίδια. Όμοια με το 6^o Βήμα, εφόσον $V(0,\tau) \geq 0$ και λόγω της σχέσης (4.48), καταλήγουμε ότι

$$V_\infty(\rho,\tau) \to \Phi_a(\rho) \quad (\tau \to -\infty)$$

ομοιόμορφα $C^2_{loc}[0,\infty)$, για κάποιο $a \in [K,1]$. Άρα για κατάλληλη ακολουθία $\sigma_n \in [-\ell_n, 0]$, έχουμε

$$V(\rho,\tau_n+\sigma_n) = V_n(\rho,\sigma_n) \to \Phi_a(\rho) \quad (n \to \infty).$$

Στις αρχικές μεταβλητές αυτό σημαίνει την ύπαρξη μιας ακολουθίας $t_n \to T$ με

$$\frac{1}{\tilde{m}(t_n)} U(\tilde{m}^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) \to \Phi_a(\rho) \quad (n \to \infty),$$

απ'οπου παίρνουμε

$$\frac{1}{\tilde{m}(t_n)} ||U(\cdot,t_n)||_{L^\infty} = \frac{m(t_n)}{\tilde{m}(t_n)} \to a = ||\Phi_a||_{L^\infty} \quad (n \to \infty).$$

Επομένως για επαρκώς μεγάλα n, με χρήση της (3.6) παίρνουμε

$$\frac{a}{m(t_n)}U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)r,t_n) \sim \frac{1}{\tilde{m}(t_n)}U(\tilde{m}^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho,t_n) \to \Phi_a(\rho) = a\Phi_1(r),$$

όπου $r = a^{\frac{p-1}{2}}\rho$. Οπότε

$$\frac{1}{m(t_n)}U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)r,t_n) \to \Phi_1(r) \quad (n \to \infty).$$

□

4.3 Η κρίσιμη περίπτωση.

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε την πρόταση 4.0.8 όταν $p = p_s := \frac{N+2}{N-2}$.

Ορίζουμε

$$M(s) := ||w_{0,T}(\cdot,s)||_{L^\infty(\Omega)}, \text{ για } s \in [-logT,\infty).$$

Από την υπόθεση ότι ο απειρισμός είναι τύπου II έχουμε ότι υπάρχει μιά ακολουθία $s_n \to \infty$ τέτοια ώστε $M(s_n) \to \infty$ καθώς $n \to \infty$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $-logT < s_0 < s_1 < s_2 < \cdots \to \infty$ και

$$M(s_n) = \max_{s\in[-logT,s_n]} M(s).$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\lambda_n = (M(s_n))^{-(p-1)}$ και ορίζουμε την εξής κλιμακωμένη λύση

$$w_n(y,s) := \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} w_{0,T}(\sqrt{\lambda_n}y, \lambda_n s + s_n).$$

Η w_n ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial w_n}{\partial s} = \Delta w_n + |w_n|^{p-1}w_n - \lambda_n\left(\frac{1}{2}y\cdot\nabla w_n + \frac{1}{p-1}w_n\right),$$

όπου

$$y \in \Omega_{0,\lambda_n s+s_n-log\lambda_n}\ , \quad s \geq \sigma_n := -\frac{s_n - s_0}{\lambda_n}\ .$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_n s + s_n - log\lambda_n \to \infty$ και $\sigma_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$. Επίσης, εξ ορισμού της w_n προκύπτει

$$||w_n(\cdot,0)||_{L^\infty(\Omega)} = 1 \quad \text{και} \quad ||w_n(\cdot,s)||_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \text{ για } s \in [\sigma_n, 0].$$

Επομένως, όπως στο 1^o βήμα της απόδειξης της ίδιας πρότασης με την υπόθεση της μονοτονίας, από συνήθεις παραβολικές εκτιμήσεις λαμβάνουμε μιά υπακολουθία την οποία συμβολίζουμε επίσης με w_n, η οποία συγκλίνει σε μιά συνάρτηση w_∞ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^N \times (-\infty, 0]$. Εφόσον $\lambda_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, η w_∞ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial w_\infty}{\partial s} = \Delta w_\infty + |w_\infty|^{p-1} w_\infty$$

και την εκτίμηση

$$||w_\infty(\cdot, s)||_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \ \text{ για } s \in (-\infty, 0].$$

Από το Θεώρημα 2.3.1 έχουμε

$$|w_n(y, 0)| \leq C_0 \Big(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}} + |y|^{-\frac{2}{p-1}} \Big) \ \text{ για κάθε } |y| > 0.$$

Από αυτήν την εκτίμηση και εφόσον $w_n(y, 0) \to w_\infty(y, 0)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ έχουμε επίσης και την εκτίμηση

$$||w_\infty(\cdot, 0)||_{L^\infty(\Omega)} = 1.$$

Εξ ορισμού της w_n και με την αλλαγή μεταβλητής $\sqrt{\lambda_n} y = z$ έχουμε διαδοχικά

$$\int_{\frac{\sigma_n}{2}}^0 \int \left(\frac{\partial w_n}{\partial s}(y, s) \right)^2 \rho(\sqrt{\lambda_n} y) dy ds$$

$$= \lambda_n^{\frac{2}{p-1}} \int_{\frac{\sigma_n}{2}}^0 \int \left(\frac{\partial w_{0,T}}{\partial s}(\sqrt{\lambda_n} y, \lambda_n s + s_n) \right)^2 \rho(\sqrt{\lambda_n} y) dy ds$$

$$= \lambda_n^{\frac{2}{p-1} - \frac{N}{2}} \int_{\frac{\sigma_n}{2}}^0 \int \left(\frac{\partial w_{0,T}}{\partial s}(y, \lambda_n s + s_n) \right)^2 \rho(y) dy ds.$$

Επίσης με την αλλαγή μεταβλητής $\lambda_n s + s_n = \tau$ προκύπτει

$$\int_{\frac{\sigma_n}{2}}^0 \int \left(\frac{\partial w_n}{\partial s}(y, s) \right)^2 \rho(\sqrt{\lambda_n} y) dy ds$$

$$= \lambda_n^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{N}{2}} \int_{\frac{s_n + s_0}{2}}^{s_n} \int \left(\frac{\partial w_{0,T}}{\partial s}(y, s) \right)^2 \rho(y) dy ds. \tag{4.49}$$

Όμως $p = p_s := (N+2)/(N-2)$, άρα $(p+1)/(p-1) = N/2$, ή

$$\lambda_n^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{N}{2}} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.50}$$

Επίσης από την (2.11), έχουμε

$$\int_{s_0}^{\infty}\int\left(\frac{\partial w_{0,T}}{\partial s}(y,s)\right)^2\rho(y)dyds \le C_0.$$

Για $n\to\infty$ στην (4.49), από την τελευταία εκτίμηση, το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και την (4.50), παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{0}\int\left(\frac{\partial w_{\infty}}{\partial s}(y,s)\right)^2 dyds = 0.$$

Επομένως $(w_\infty)_s \equiv 0$, άρα η w_∞ είναι στάσιμη λύση της εξίσωσης (1.1). Οπότε λόγω της $||w_\infty(\cdot,0)||_{L^\infty}=1$ και της υπόθεσης (4.1) έχουμε ότι η $w_n(y,0) := \lambda_n^{1/(p-1)} w_{0,T}(\sqrt{\lambda_n}y, s_n)$ συγκλίνει καθώς $n\to\infty$ στην ακτινικά συμμετρική στάσιμη λύση της εξίσωσης (1.1) $\Phi_1(r)$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Αποδείξεις των κυρίων αποτελεσμάτων.

5.1 Η κρίσιμη και η υπερκρίσιμη περίπτωση.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε για υπερκρίσιμο εκθέτη, και υπό προϋποθέσεις όταν $\Omega = \mathbb{R}^N$, ότι μπορούμε να έχουμε μόνο τύπου I απειρισμό σε ακτινικά συμμετρικές λύσεις του προβλήματος (1.1). Όταν ο εκθέτης είναι κρίσιμος έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν περιοριστούμε μόνο στις θετικές λύσεις. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω $p_s < p < p^*$ και $\Omega = B_R$. Υποθέτουμε ότι u είναι μιά λύση της εξίσωσης (1.1) με $u(x,0) = u_0(|x|) \in L^\infty(\Omega)$. Αν η u απειρίζεται σε χρόνο $t = T < \infty$ τότε ο απειρισμός είναι τύπου I, δηλαδή ισχύει η (1.6) για κάποια σταθερή $C_0 > 0$.*

Θεώρημα 5.1.2 *Έστω $p_s < p < p^*$ και $\Omega = \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι u είναι μιά λύση της εξίσωσης (1.1) με $u(x,0) = u_0(|x|) \in L^\infty(\Omega)$ η οποία απειρίζεται σε χρόνο $t = T < \infty$. Τότε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.0.1 ισχύει αν επιπρόσθετα ικανοποιείται η εξής συνθήκη:*

$$\begin{aligned} &\exists\, t_0 \in [0,T) \text{ ώστε οι συναρτήσεις } |U(r,t_0)| - \Phi^*(r) \text{ και } U_t(r,t_0) \\ &\text{να αλλάζουν πρόσημο το πολύ πεπερασμένες φορές στο } [0,\infty). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Θεώρημα 5.1.3 *Έστω $p = p_s$ και είτε $\Omega = B_R$ είτε $\Omega = \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι u είναι μιά λύση της εξίσωσης (1.1) με $0 \le u(x,0) = u_0(|x|) \in L^\infty(\Omega)$ η οποία απειρίζεται σε χρόνο $t = T < \infty$. Τότε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.0.1 ισχύει.*

Στις αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων βασικό εργαλείο είναι η Πρόταση 4.0.8 την οποία αναδιατυπώνουμε ως εξής :

Πρόταση 4.0.8 :
Αν μιά λύση της εξίσωσης (1.4) απειρίζεται σε χρόνο $T < \infty$ υπό τις προϋποθέσεις των Θεωρημάτων 5.0.1, 5.0.2 και 5.0.3, και αν ο απειρισμός είναι τύπου II, τότε υπάρχει μιά ακολουθία $0 < t_1 < t_2 < \cdots \to T$ τέτοια ώστε είτε

$$\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) \to \Phi_1(\rho) \quad (n \to \infty) \tag{5.2}$$

είτε

$$\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) \to -\Phi_1(\rho) \quad (n \to \infty)$$

ομοιόμορφα $C^2[0, \infty)$.

Απόδειξη Θεωρημάτων 5.1.1 και 5.1.2 :

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ισχύει η (5.2). Από το Λήμμα 3.2.3 (ή το Λήμμα 3.2.5 στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$), έχουμε ότι η ποσότητα $\mathcal{Z}(U(\cdot, t) - \Phi^*)$ είναι πεπερασμένη και μη αύξουσα ως προς t, όπου $t \in (0, \infty)$. Αν λοιπόν έχουμε τύπου II απειρισμό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{Z}(U(\cdot, t_n) - \Phi^*) \leq K \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.3}$$

όπου $K < \infty$, θετική σταθερή. Προφανώς η ποσότητα στο πρώτο μέλος της (5.3) είναι αναλλοίωτη ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αλλαγή κλίμακας για τη χωρική μεταβλητή, άρα

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(U(\cdot, t_n) - \Phi^*) &= \mathcal{Z}\Big(\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) - \frac{1}{m(t_n)} \Phi^*(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho)\Big) \\ &= \mathcal{Z}\Big(\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) - \Phi^*(\rho)\Big),\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της (3.3). Για $n \to \infty$, και ανακαλώντας το Λήμμα 3.1.2 (iii), παίρνουμε

$$K \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{Z}\Big(\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) - \Phi^*(\rho)\Big) \geq \mathcal{Z}(\Phi_1 - \Phi^*) = \infty,$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο. $\square$

Απόδειξη Θεωρήματος 5.1.3 :

Εφόσον $U_0 \geq 0$ και η U_0 δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, από την ισχυρή αρχή του μεγίστου βλέπουμε ότι υπάρχει σταθερή $\delta_0 > 0$ και $t_0 \in [0, T)$ τέτοια ώστε

$$U\Big(\frac{1}{2}, t\Big) \geq \delta_0 \ \text{ για κάθε } t \in [t_0, T).$$

Λήμμα 5.1.4 *Υπάρχει μιά σταθερή α_0 τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha \geq \alpha_0$,*

$$\mathcal{Z}_{[0,1/2]}(U(\cdot, t) - \Phi_a) \leq 1 \ \text{ για κάθε } t \geq t_0.$$

Απόδειξη :

Από το Λήμμα 3.1.1(i) και (ii), για επαρκώς μεγάλα a, βλέπουμε ότι

$$\mathcal{Z}_{[0,1/2]}(U(\cdot, t_0) - \Phi_a) = 1.$$

Από τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις $U(r, t)$ και $\Phi_a(r)$ έχουμε ότι η $V(r, t) := U(r, t) - \Phi_a(r)$ είναι ακτινικά συμμετρική λύση της εξίσωσης

$$v_t = \Delta v + a(|x|, t)v, \ \text{ για κάθε } |x| < \frac{1}{2}, \ t \in (t_0, T),$$

όπου

$$a(r, t) = \frac{U^p - (\Phi_a)^p}{U - \Phi_a},$$

είναι συνεχής στο $[0, 1/2] \times (t_0, T)$ και $V(1/2, t) \neq 0$ στο (t_0, T). Επομένως, από το Λήμμα 3.2.1 παίρνουμε ότι η ποσότητα $\mathcal{Z}_{[0,1/2]}(U(\cdot, t) - \Phi_a)$ φθίνει ως προς t, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. $\square$

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τύπου II απειρισμό κι έστω $a_0 > 0$ ώστε να ισχύει στο παραπάνω λήμμα και $a_0 > U_0(0)$. Από την σύγκλιση (5.2) και το Λήμμα 3.2.7 (ή το Λήμμα 3.2.4 στην περίπτωση $\Omega = B_R$), έχουμε

$$U(0, t) \to \infty, \ \text{ καθώς } t \to T.$$

Άρα, για κάθε $a \geq a_0$ υπάρχει κάποιο $t(a) > 0$ τέτοιο ώστε $U(0, t(a)) = a$. Λόγω της συμμετρίας της U, για τη συνάρτηση $V_a(r) = U(r, t(a)) - \Phi_a(r)$ έχουμε $V_a(0) = 0$ και $V_a'(0) = 0$, επομένως από το Λήμμα 3.2.1(iii) έχουμε

$$\mathcal{Z}_{[0,1/2]}(V(\cdot, t)) > \mathcal{Z}_{[0,1/2]}(V(\cdot, s)) \ \ (t_0 < t < t(a) < s < T).$$

Από το Λήμμα 5.1 προκύπτει τώρα ότι

$$\mathcal{Z}_{[0,1/2]}(U(\cdot, t) - \Phi_a) = 0, \ \text{ για κάθε } t > t(a).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $a \geq a_0$

$$U(r,t) > \Phi_a(r), \ \ \text{για κάθε } r \in [0,1/2],\ t \in [t(a),T).$$

Θέτουμε $a = m(t_n)/2$. Από την (5.3) έχουμε

$$\frac{1}{m(t_n)} U(0,t_n) \to 1 \quad (n \to \infty),$$

δηλαδή, $t_n > t(a) = t(m(t_n)/2)$ για επαρκώς μεγάλα n. Επομένως

$$U(r,t_n) > \Phi_{m(t_n)/2}(r) \ \text{ για κάθε } r \in [0,1/2].$$

Σε αυτή την σχέση και στην (3.3), αντικαθιστώντας

$$a = \frac{m(t_n)}{2} \quad \text{και} \quad r = m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho,$$

παίρνουμε :

$$U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) > \Phi_{m(t_n)/2}(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho) \ \text{ για κάθε } \rho \in \Big[0, \frac{m^{\frac{p-1}{2}}(t_n)}{2}\Big]$$

και

$$\Phi_{m(t_n)/2}(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho) = m(t_n)\Phi_{1/2}(\rho).$$

Άρα

$$\frac{1}{m(t_n)} U(m^{-\frac{p-1}{2}}(t_n)\rho, t_n) > \Phi_{1/2}(\rho) \ \text{ για κάθε } \rho \in \Big[0, \frac{m^{\frac{2}{p-1}}(t_n)}{2}\Big].$$

Για $n \to \infty$, από την (5.2) λαμβάνουμε

$$\Phi_1(\rho) \geq \Phi_{1/2}(\rho) \ \text{ για κάθε } \rho \in [0,\infty).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1(iii). □

5.2 Η υποκρίσιμη περίπτωση.

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι στην περίπτωση $p < p_s$, ο απειρισμός θετικών λύσεων του προβλήματος (1.1) είναι πάντοτε τύπου I. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$ για λόγους απλότητας, όμως το αποτέλεσμα ισχύει και όταν το Ω είναι τυχαίο ανοικτό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής :

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω Ω είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ ή $\Omega = \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι $u \geq 0$ είναι λύση του προβλήματος (1.1) με $p < p_s$ ή $N \leq 2$. Τότε ο απειρισμός είναι τύπου I. Με άλλα λόγια*

$$\sup_{\Omega\times[0,T)} \frac{u(x,t)}{g(t)} = \sup_{[0,T)} \frac{m(t)}{g(t)} < \infty. \tag{5.4}$$

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι ο απειρισμός είναι τύπου II. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας έχουμε ότι υπάρχει μιά ακολουθία $t_n \to T$, τέτοια ώστε

$$\sup_{\Omega\times[0,t_n]} \frac{u(x,t)}{g(t)} = \frac{m(t_n)}{g(t_n)} := M_n \to \infty \ \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{5.5}$$

Επιλέγουμε $x_n \in \Omega$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}M_n \leq \frac{u(x_n,t_n)}{g(t_n)} \leq M_n. \tag{5.6}$$

Εισάγουμε τώρα μεταβλητές αυτοομοιότητας γύρω από κάθε x_n, δηλαδή ορίζουμε την κλιμακωμένη λύση

$$w_n(y,s) := w_{x_n,T}(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t),$$

όπου

$$y = \frac{x-x_n}{\sqrt{T-t}}\,, \qquad s = -log(T-t)\,, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Θέτοντας $s_n = -log(T-t_n)$, οι (5.5) και (5.6) γράφονται αντίστοιχα

$$0 \leq w_n(y,s) \leq M_n \ \text{ όταν } s \leq s_n, \qquad \frac{1}{2}M_n \leq w_n(0,s_n) \leq M_n. \tag{5.7}$$

Εφόσον $\Omega = \mathbb{R}^N$, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε το πεδίο ορισμού της w_n να περιέχει τον παραβολικό κύλινδρο

$$Q_{\delta,s_n} = \{(y,s); |y| < \delta,\ -\delta^2 < s - s_n \leq 0\}.$$

Στη συνέχεια αλλάζουμε κλίμακα στην $\{w_n\}$ θέτοντας :

$$v_n(z,\tau) = \mu_n^{\frac{2}{p-1}} w_n(\mu_n z, \mu_n^2 \tau + s_n),$$

όπου $\mu_n = M_n^{-(p-1)/2}$. Παρατηρούμε ότι $\mu_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Για κάθε n, η v_n είναι τώρα ορισμένη στον κύλινδρο $\tilde{Q}(\delta/\mu_n)$, όπου

$$\tilde{Q}(r) = \{(z,\tau); |z| < r,\ -r^2 < \tau \leq 0\}$$

και ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial v_n}{\partial \tau} - \Delta v_n - v_n^p = -\frac{1}{2}\mu_n^2(z \cdot \nabla v_n + \frac{1}{p-1}v_n). \tag{5.8}$$

Οι σχέσεις (5.7) γράφονται

$$0 \leq v_n \leq 1 \ \text{ στον } \tilde{Q}\Big(\frac{\delta}{\mu_n}\Big), \qquad \text{και} \quad \frac{1}{2} \leq v_n(0,0) \leq 1. \tag{5.9}$$

Από τις συνήθεις παραβολικές εκτιμήσεις και το κριτήριο $Arzela - Ascoli$, λαμβάνουμε μιά υπακολουθία την οποία συμβολίζουμε επίσης με v_n, η οποία συγκλίνει σε μιά συνάρτηση v_∞ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^N \times (-\infty, 0)$. Εφόσον $\mu_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, η v_∞ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial v_\infty}{\partial \tau} = \Delta v_\infty + v_\infty^p$$

και τις εκτιμήσεις

$$0 \leq v_\infty \leq 1 \qquad \text{και} \quad v_\infty(0,0) \geq \frac{1}{2}.$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η v_∞ είναι ανεξάρτητη από το τ. Με αλλαγή μεταβλητών έχουμε

$$\int\int_{\tilde{Q}(\delta/\mu_n)} \Big|\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\Big|^2 dz d\tau = \mu_n^\sigma \int\int_{Q(\delta,s_n)} \Big|\frac{\partial w_n}{\partial s}\Big|^2 dy ds,$$

όπου $\sigma = -N + 2 + 4/(p-1)$. Παρατηρούμε ότι $\sigma > 0$ όταν $p < p_s$, αλλά και όταν $N \leq 2$. Επίσης

$$\int\int_{Q(\delta,s_n)} \Big|\frac{\partial w_n}{\partial s}\Big|^2 dy ds \leq C(\delta) \int_{s_0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\frac{\partial w_n}{\partial s}\Big|^2 \rho(y) dy ds,$$

όπου $C(\delta) = \exp(\delta^2/4)$. Από αυτές τις δύο σχέσεις και την (2.11) λαμβάνουμε

$$\int\int_{\tilde{Q}(\delta/\mu_n)} \Big|\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\Big|^2 dz d\tau \leq C_0 \mu_n^\sigma.$$

Καθώς $n \to \infty$, έχουμε

$$\int\int_{\tilde{Q}(r)} \Big|\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\Big|^2 dz d\tau \to 0 \quad \text{για κάθε } r > 0,$$

συνεπώς $\frac{\partial}{\partial \tau} v_\infty \equiv 0$. Επομένως έχουμε μιά μη αρνητική λύση v_∞, της εξίσωσης

$$\Delta v(x) + v^p(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^N) \tag{5.10}$$

με $v_\infty(0) \geq 1/2$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα το οποίο βεβαιώνει ότι η μόνη μη αρνητική λύση της (5.10) στην περίπτωση $p < p_s$, είναι η $v \equiv 0$ (βλ. $[GS1]$ και $[GS2]$). $\square$

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα.

Λήμμα 1.0.1 - Απόδειξη :

(i) Έστω $t_1, t_2 \in [0,T)$ με $t_2 \neq t_1$ και έστω $x_1, x_2 \in \Omega$, τέτοια ώστε $m(t_1) = u(x_1, t_1),\ m(t_2) = u(x_2, t_2)$.
Τότε έχουμε $m(t_1) \geq u(x_2, t_1)$ και $m(t_2) \geq u(x_1, t_2)$. Οπότε

$$m(t_2) - m(t_1) \geq u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1) = (t_2 - t_1)u_t(x_1, t_1) + \mathbf{o}(t_2 - t_1)$$

και

$$m(t_2) - m(t_1) \leq u(x_2, t_2) - u(x_2, t_1) = (t_2 - t_1)u_t(x_2, t_2) + \mathbf{o}(t_2 - t_1).$$

Επομένως

$$|m(t_2) - m(t_1)| \leq K|t_2 - t_1|,$$

όπου $K > 0$ σταθερή. Άρα η $m(t)$ είναι *Lipschitz* συνεχής στο $[0,T)$ και συνεπώς παραγωγίσιμη σ.π. $t \in [0,T)$.

(ii) Έστω τώρα $t_2 > t_1$, έχουμε

$$\frac{m(t_2) - m(t_1)}{t_2 - t_1} \leq u_t(x_2, t_2) + \mathbf{o}(1) = \Delta u(x_2, t_2) + |u(x_2, t_2)|^{p-1}u(x_2, t_2) + \mathbf{o}(1).$$

Όμως στο (x_2, t_2) έχουμε μέγιστο για την u, άρα $\Delta u(x_2, t_2) \leq 0$. Επομένως

$$\frac{m(t_2) - m(t_1)}{t_2 - t_1} \leq |u(x_2, t_2)|^{p-1}u(x_2, t_2) = m^p(t_2).$$

Για $t_2 \to t_1$, σε κάθε σημείο διαφορισιμότητας της m θα έχουμε

$$m'(t) \leq m^p(t).$$

(iii) Ολοκληρώνουμε την τελευταία ανισότητα στο (t,T), έχουμε

$$\frac{m'(t)}{m^p(t)} \leq 1 \Rightarrow \int_t^T \frac{d(m(s))}{m^p(s)} \leq T-t \Rightarrow -\frac{m^{-p+1}(t)}{-p+1} \leq T-t,$$

εφόσον $m(T)=\infty$ και $p>1$. Επομένως $m(t) \geq g(t)$ $(t \in [0,T))$. $\square$

Λήμμα 1.0.2 - Απόδειξη :

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.1) με u_t και ολοκληρώνοντας στο Ω προκύπτει

$$\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int |u(x,t)|^{p+1} dx.$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}(E[u](t)) = -\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx.$$

Επομένως η ενέργεια είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Όμως για $t=0$ έχουμε $E[u](0)=E[u_0]<0$ απο υπόθεση. Συνεπώς

$$E[u](t)<0, \quad (t \geq 0).$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (1.1) με u και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx = -2E[u](t) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |u(x,t)|^{p+1} dx.$$

Από αυτή τη σχέση, με χρήση της ανισότητας $Jensen$, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t) \geq -2E[u](t) + Cy(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

όπου

$$y(t) := \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \;\text{ και }\; C>0, \text{ σταθερή}.$$

Άρα

$$y'(t) > Cy(t)^{\frac{p+1}{2}}, \; \forall t \geq 0.$$

Θεωρούμε τώρα την ΣΔΕ :

$$\chi'(t) = C\chi(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

η λύση της οποίας, όπως έχουμε δει, απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο. Επειδή $y \geq \chi$, παίρνουμε ότι είτε το $\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο ή ότι η λύση παύει να υπάρχει πριν το ολοκλήρωμα απειριστεί. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι η u απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο. $\square$

Βιβλιογραφία

[CP] X.-Y.Chen, P.Poláčik, Asymptotic periodicity of positive solutions of reaction diffusion equations on a ball, J. Reine Angew. math., 472 (1996), 17-51.

[FHV] S.Filippas, M.A.Herrero, J.J.L.Velázquez, Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity, Proc. R. Soc. Lond. A, 456 (2000), 2957-2982.

[$FMcL$] A.Friedman, J.B.McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, Indiana Univ. Math. J., 34 (1985), 425-447.

[F] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem of $u_t = \Delta u + u^{1+a}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I, 13 (1966), 109-124.

[$GS1$] B.Gidas, J.Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), 525-598.

[$GS2$] B.Gidas, J.Spruck, A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations, 6 (1981), 883-901.

[$GK1$] Y.Giga, R.V.Kohn, Asymptotically selfsimilar blow-up of semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), no.3, 297-319.

[$GK2$] Y.Giga, R.V.Kohn, Characterizing blow-up using similarity variables, Indiana Univ. Math. J., 36 (1987), no.1, 1-40.

[GMS] Y.Giga, S.Matsui, S.Sasayama, Blow-up rate for semilinear heat equations with subcritical nonlinearity, Indiana Univ. Math. J., 53 (2004), no.2, 483-514.

[HW] A.Haraux, F.B.Weissler, Nonuniqueness for a semilinear initial value problem, Indiana Univ. Math. J., 31 (1982), 167-189.

[HV] M.A.Herrero, J.J.L.Velázquez, A blow-up result for semilinear heat equations in the supercritical case (preprint).

[JL] D.D.Joseph, T.S.Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rational Mech. Anal., 49 (1972/73), 241-269.

[LSU] O.A.Ladyženskaya, V.A.Solonnikov, N.N.Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, Volume 23, Providence, R.I., A.M.S 1968.

[L] H.A.Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems, SIAM Rev., 32 (1990), 262-288.

[MM] H.Matano, F.Merle, On nonexistence of type II blow-up for a supercritical nonlinear heat equation, Comm. Pure Appl. Math., 57 (2004), 1494-1541.