ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΠΥΡΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του **Πανεπιστημίου Κρήτης**, στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών " Μαθηματικά και Εφαρμογές τους " στην κατεύθυνση " **Επιχειρησιακά Μαθηματικά** ".

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Γ. ΚΟΣΙΩΡΗΣ.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

- Γ.Ζουράρης
- Γ.Κοσιώρης
- Μ.Λουλάκης.

Δυο λόγια...

Θεωρώ υποχρεωσή μου να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικού του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. **Γ.Κοσιώρη** για την επίβλεψη της εργασίας αυτής, το ενδιαφέρον του και την εν γένει βοήθειά του. Επίσης, ευχαριστώ τον καθηγητή του τμήματος Εφαρμοσμένου Μαθηματικού του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. **Μ. Λουλάκη** για την πολύτιμη προσφορά του στην διόρθωση της εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ τον καθηγητή του Πανεπιστημιού Κρήτης και πρόεδρου του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών κ. **Ν.Τζανάκη** για τις πολύτιμες συμβουλές του και για την ηθική υποστηριξή.

....και φυσικά

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ την οικογένειά μου, για την ουσιαστική στήριξη και βοήθειά τους, στην προσπάθειά μου αυτή και κυρίως τους γονείς μου, Αντώνη και Γεωργία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Abstract

In this paper, we show that the problem of pricing the American put is equivalent to solving an optimal stopping problem. The optimal stopping problem gives rise to a parabolic free − boundary problem. We show there is a unique solution to this problem which has a lower boundary. We identify an integral equation solved by the boundary and show that it is the unique solution to this equation satisfying certain, natural, additional conditions.

KEYWORDS : *AMERICAN OPTION, PUT, OPTIMAL STOPPING, FREE−BOUNDARY PROBLEM, MARTINGALE.*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Θεωρούμε το πρόβλημα τιμολόγησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης . Θα δείξουμε οτι είναι ισοδύναμο με την επίλυση ενός προβλήματος βελτίστου ελέγχου, το οποίο ανάγεται στην επίλυση του παραβολικού προβλήματος ελεύθερου συνόρου . Στην επίλυση του προβλήματος αυτού θα χρησιμοποιήσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση, η λύση της οποίας βρίσκεται στο σύνορο και είναι η μοναδική λύση που ικανοποιεί τις κατάλληλες συνθήκες

0.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρχικά θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς για τα χρηματοοικονομικά μεγέθη που θα χρησιμοποιηθούν στο άρθρο αυτό.

Παράγωγα χρεόγραφα (*derivative securities or contingent claims*) είναι χρηματοοικονομικά συμβόλαια , η αξία των οποίων εξαρτάται από την αξία του υποκείμενου αγαθού (π.χ. μετοχής) στο οποίο είναι εγγεγραμμένα. Τέτοια συμβόλαια είναι τα προθεσμιακά, τα συμβόλαια μελλοντικής εκλπήρωσης(*forwards* , *futures*) και τα δικαιώματα επι μετοχών (*options*).

Τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (*options*) θεωρούνται ως συμβάσεις και έχουν ευρεία χρήση από διάφορες επιχειρήσεις, τράπεζες και αλλού. Συγκεκριμένα, όταν μιλάμε για δικαίωμα (*option*) αναφερόμαστε σε σύμβαση μεταξύ δυο συμβαλλόμενων μερών που επιτρέπει στον ένα εκ των δυο, στον αγοραστή του να αγοράσει ή να πουλήσει ένα υποκείμενο προϊόν (χρεόγραφο) σε μια προκαθορισμένη τιμή σε συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον. Το άλλο μέρος είναι ο πωλητής ή συγγραφέας του δικαιώματος. Ο αγοραστής πληρώνει ένα ασφάλιστρο, δηλαδή ένα τίμημα για την αγορά χρηματοοικονομικού δικαιώματος και λαμβάνει το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει το χρεόγραφο για μια συγκεκριμένη περίοδο, που τελειώνει με την ωρίμανση του δικαιώματος. Όταν ένα δικαίωμα χρησιμοποιείται για την αγορά ή πώληση ενός χρεογράφου λέγεται ότι έχει ασκηθεί. Ένα δικαίωμα που χορηγεί το δικαίωμα της αγοράς ονομάζεται *call*, ενώ όταν χορηγεί το δικαίωμα της πωλήσεως ονομάζεται *put*. Ακόμη ένα δικαίωμα που μπορεί να ασκηθεί οποτεδήποτε πριν απο τη λήξη του, αναφέρεται ως αμερικανικό δικαίωμα, ενώ αν μπορεί να ασκηθεί μόνο στη λήξη του τότε ονομάζεται ευρωπαϊκό δικαίωμα.

Γενικά, τα παράγωγα χρεόγραφα χρησιμοποιούνται είτε για κερδοσκοπία, (*speculation*) είτε για αντιστάθμιση κινδύνου (*hedging*). Κερδοσκοπία είναι η αγοραπωλησία χρεογράφων, για τα οποία το κέρδος δεν είναι δεδομένο, οπότε ενέχει κίνδυνο τον οποίο ο κερδοσκόπος είναι διατεθιμένος, βάσει των αποκλειστικών πληροφοριών που πιστεύει πως έχει, να αναλάβει. Ενώ αντιστάθμιση κινδύνου ονομάζεται η διαδικασία που περιλαμβάνει ταυτόχρονη κατοχή δυο επενδυτικών θέσεων που παρέχουν την εγγύηση ότι οι πιθανές ζημιές από τη μια θέση θα αντισταθμιστούν από τα κέρδη της άλλης. Αποτελεί μια στρατηγική επενδύσεων σχεδιασμένη έτσι ώστε να αποφευχθεί ή ελαχιστοποιηθεί ο κίνδυνος απώλειας των επενδύσεων.

Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης (*American put option*) είναι μια συμφωνία (συμβόλαιο) που παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να πουλήσει μια μετοχή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι μια συγκεκριμένη ημερομηνία που καλείται ημερομήνια λήξης ή χρόνος ωρίμανσης και σε μια συγκεκριμένη τιμή που ονομάζεται τιμή άσκησης του συμβολαίου.

Ανάλογα με τις συνθήκες που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά ο κάτοχος του δικαιώματος μπόρει να προβεί σε χρήση αυτού του δικαιώματος ή όχι (δηλαδή να το αφήσει να εκπνεύσει). Επομένως αν η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή άσκησης τότε ενδεχομένως συμφέρει τον κατοχό του να το ασκήσει , αν όχι το αφήνει να εκπνεύσει χωρίς να πραγματοποιήσει κάποια συναλλαγή. Για τα Αμερικανικά δικαιώματα πρέπει να γνωρίζουμε όχι μόνο την τίμη τους αλλά και να καθορίσουμε πότε είναι η κατάλληλη χρονική στιγμή άσκησης του δικαιώματος (αγοράς ή πώλησης)

Η θέση των επενδυτών απέναντι στα Αμερικανικά παράγωγα έχει ως εξής. Στο χρόνο $t = 0$ δυο επενδυτές " μπαίνουν " σε μια συμφωνία. Ο ένας από αυτούς, που ονομάζεται πωλητής,πρέπει να παρέχει στον δεύτερο το ποσό $Y(\tau(.),.) = (q - S_\tau)^+ \geq 0$ στον χρόνο $t = \tau(.)$, όπου το Y είναι μια τυχαία μεταβλητή και ο τ ένας χρόνος στάσης στην διάθεση του αγοραστή. Αντιστρόφως, ο δεύτερος, που καλείται αγοραστής συμφώνει να πληρώσει στον πωλητή ένα συγκεκριμένο ποσό $x \geq 0$ στο χρόνο $t = 0$.

Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι, ποιο πρέπει να είναι το ποσό αυτό , δηλαδή η " δίκαια τιμή " στον αρχικό χρόνο $t = 0$, για να λάβουμε το ποσό $Y(.)$ στην λήξη T και ποια είναι η κατάλληλη χρονική στιγμή για να γίνει αυτό. Προφανώς ο πωλητής υποχρεούται να ξεκινήσει με ένα ποσό $x \geq 0$ που το λαμβάνει για $t = 0$, για να βρει ένα βέλτιστο συνδυασμό χαρτοφυλακίου και εσόδων (π, C) που θα του δώσει τη δυνατότητα να εκπληρώσει τη δέσμευση του δηλαδή να μην έχει κανένα πρόβλημα όταν αποφασίσει να ζητήσει την πληρωμή δηλαδή πρέπει να ισχύει $X(.) \geq Y$, όπου X είναι η ανέλιξη ευημερίας του. Άρα η τιμή του δικαιώματος ορίζεται να είναι

$$p = \inf\{x \geq 0, | \quad \exists(\pi, C) \quad \textit{τέτοιο} \quad \textit{ώστε} \quad X(\tau) \geq Y(\tau) \quad \sigma.\beta.\}$$

Από την άλλη, η υποχρέωση του αγοραστή είναι να ξεκινήσει με αρχικό ποσό $-x$ και να βρει ένα βέλτιστο συνδυασμό χαρτοφυλακίου και ασφάλιστρου (π, L) όπως επίσης και ένα χρόνο στάσης τ' τέτοιον ώστε η πλήρωμη που θα λάβει στο χρόνο αυτό να του επιτρέπει να καλύψει το χρέος που δημιούργησε αρχικά αγοράζοντας το Αμερικανικό χρεόγραφο .

Παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια χρηματαγορά αποτελούμενη από ένα κεφάλαιο άνευ κινδύνου και από μια μετοχή. Τα οικονομικά αυτά μεγέθη έχουν συνεχείς τιμές σε συνεχή χρόνο. Η τιμή του κεφαλαίου μεταβάλλεται συνεχώς και το μοντέλο που υποθέσαμε να μελετήσουμε προσεγγίζει την πραγματικότητα. Υποθέτουμε ότι η μετοχή δεν έχει "πηδήματα" κάτι που είναι ισοδύναμο με το ότι δεν υπάρχουν "εκπλήξεις" στην αγορά, δηλαδή η τιμή της μετοχής στο χρόνο t μπορεί να προβλεφθεί τέλεια από την γνώση της τιμής της σε χρόνους αυστηρά πριν το t.

Έχουμε, λοιπον, έναν πλήρη χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) στον οποίο δίνεται η κίνηση

$$Brown \quad \{W(t), 0 \leq t \leq T, \quad W(0) = 0 \quad \sigma.\beta.\}.$$

Όλη η οικονομική αυτή δραστηριότητα θεωρείται ότι συμβαίνει σε ένα πεπερασμένο χρόνο στο $[0, T]$, όπου $T > 0$ σταθερά και ορίζεται επίσης η

$$F^W(t) = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}, \quad \forall t \in [0, T]$$

παραγόμενη από το $W(.)$. Επιπλέον θεωρούμε ότι : $\sigma > 0, \delta > 0, r > 0$ σταθερές και το πρόβλημα ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης (*american put option*) σε μια μετοχή, με τιμή S, που ακολούθει την εκθετική κίνηση *Brown* με σταθερό επιτόκιο r. Η τιμή της μετοχής δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = S(0)H(t) \tag{0.1}$$

όπου

$$H(t) = \exp\{\sigma W_t + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t\}$$

$\forall T \in [0, \infty), x \in (0, \infty)$ όπου η $\{W_t; t \geq 0\}$ είναι η τυπική κίνηση *Brown*. Βασιζόμενοι στην αρχή της μη επιτηδειότητας, πρέπει αρχικά να βρούμε ένα ισοδύναμο *martingale* μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε να δουλεύουμε στο χώρο $(\Omega, F, \mathbb{Q})$, με την παραπάνω σ-άλγεβρα (Η διαδικάσια αυτή γίνεται αναλυτικά στο κεφ.1 στην παρατήρηση 1.2). Ισοδύναμα με τα παραπάνω έχουμε ότι η $S(t)$ που δίνεται από την (0.1) είναι η μοναδική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS(t) = \sigma S(t)dW_t + (r - \delta)S(t)dt \tag{0.2}$$

όπου
$S(0) =$ αρχική τιμή του $S(t)$,σταθερή
$r =$ σταθερό επιτόκιο μετοχής
$\sigma =$ αστασία . Παρουσιάζει την αστάθεια της τιμής του δικαιώματος. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος μέτρησης της είναι η τυπική απόκλιση . Όσο μεγαλύτερο είναι το σ τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία ενός δικαιώματος. Μεγάλη τυπική απόκλιση σημαίνει αύξηση της πιθανότητας η τίμη της μετοχής να κλείσει μακρυά από την τίμη άσκησης κατα την χρονική περίοδο ωρίμανσης του δικαιώματος.
$\delta =$ "μερισμάτικο επιτόκιο" , ο δείκτης που παρουσιάζει τη μερισματική απόδοση μιας μετοχής σταθμίζοντας το μέρισμα που έχει διανεμηθεί με την χρηματιστηριακή αξία της μετοχής.

Παρατήρηση 0.1

Για να ξέρουμε πόσα θα πληρώσουμε τώρα για να λάβουμε ένα ποσό K σε χρόνο T με σταθερό επιτόκιο ακολουθούμε τα εξής.Εαν κάποιος δανείζεται K ευρω για ένα χρονικό διάστημα t με επιτόκιο r τότε το ποσό που θα πληρώσει στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος θα είναι

$$K + rK = K(1 + r)$$

Για ένα ετήσιο επιτόκιο που οι τόκοι αποδίδονται σε n χρονικά διαστήματα το κεφάλαιο K θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} K(1 + \frac{r}{n})^n = K \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{r}{n})^n = K \exp\{r\}$$

Με τον ίδιο συλλογισμό φθάνει κανείς στο συμπέρασμα ότι αν έχει ένα κεφάλαιο K με συνεχή ανατοκισμό τότε μετά από χρόνο t θα γίνει

$$K \exp\{rt\}.$$

Οπότε έχοντας αρχικό κεφάλαιο $K(0)$ τότε

$$K(t) = K(0) \exp\{rt\}.$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται χρονική αξία του χρήματος και συνδέει τη σημερινή αξία του χρήματος $K(0)$ με την μελλοντική $K(t)$. Οπότε η συνάρτηση αποπληρώμης για το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης (american put option) θα είναι

$$K(t) = K(0) \exp\{rt\} \qquad \square$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η αξία του δικαιώματος πώλησης με αρχική τιμή, για τη μετοχή, $S(0) = x$ δίνεται από τον τύπο

$$p(T, x) = \sup_{\tau\in S_{0,T}} E_o\left[\exp(-r\tau)\Big(q - xH(\tau)\Big)^+\right] \tag{0.3}$$

$0 \le x \le \infty$,$0 \le T \le \infty$ όπου $S_{0,T} =$ είναι το σύνολο των χρόνων στάσης που λαμβάνει τιμές στο $[0, T]$. Επίσης ισχύει ότι

$$p(0, x) = (q - x)^+.$$

Αποδεικνύεται, επίσης, από το Θεώρημα 2.1 ότι ο βέλτιστος χρόνος άσκησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης (*put option*) με αρχική τιμή της μέτοχης $S(0) = x$ δίνεται από τον τύπο :

$$\tau_x = \inf\{t \in [0, T] : p(T - t, S(t)) = (q - S(t))^+\} \tag{0.4}$$

ο οποίος είναι χρόνος στάσης και παίρνει τιμές στο [0,T].

Το μειονέκτημα που παρουσιάζει ο παραπάνω τύπος για την αξία του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι ότι πρέπει να πάρουμε *suppremum* πάνω σε μια μη αριθμήσιμη οικογένεια χρόνων στάσης. Για το λόγο αύτο είναι δύσκολο να υπολογιστεί απ΄ ευθείας με τη χρήση της σχέσης (0.3). Όμως, στο άρθρο αυτό θα αποδείξουμε ότι η αξία $p(t, x)$ του συγκεκριμένου δικαιώματος μπορεί να χαρακτηρισθεί ως η λύση του προβλήματος ελευθέρου συνόρου για μια διαφορική εξίσωση όπως αυτή που ορίζεται από τη σχέση (0.2).

Η βέλτιστη αυτή συνάρτηση αξίας $p(T,x)$ είναι η μοναδική λύση στο σύνολο C του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών που περιγράφεται απο τις παρακάτω σχέσεις

$$Lf = 0 \qquad \sigma\tau o \qquad C = \{(t,x) \in ((0,\infty))^2, x > c(t)\}$$

$$f(t, c(t)) = q - c(t) \qquad 0 \leq t < +\infty$$

$$f(0,x) = (q-x)^+ \qquad c(0) \leq x < +\infty \tag{0.5}$$

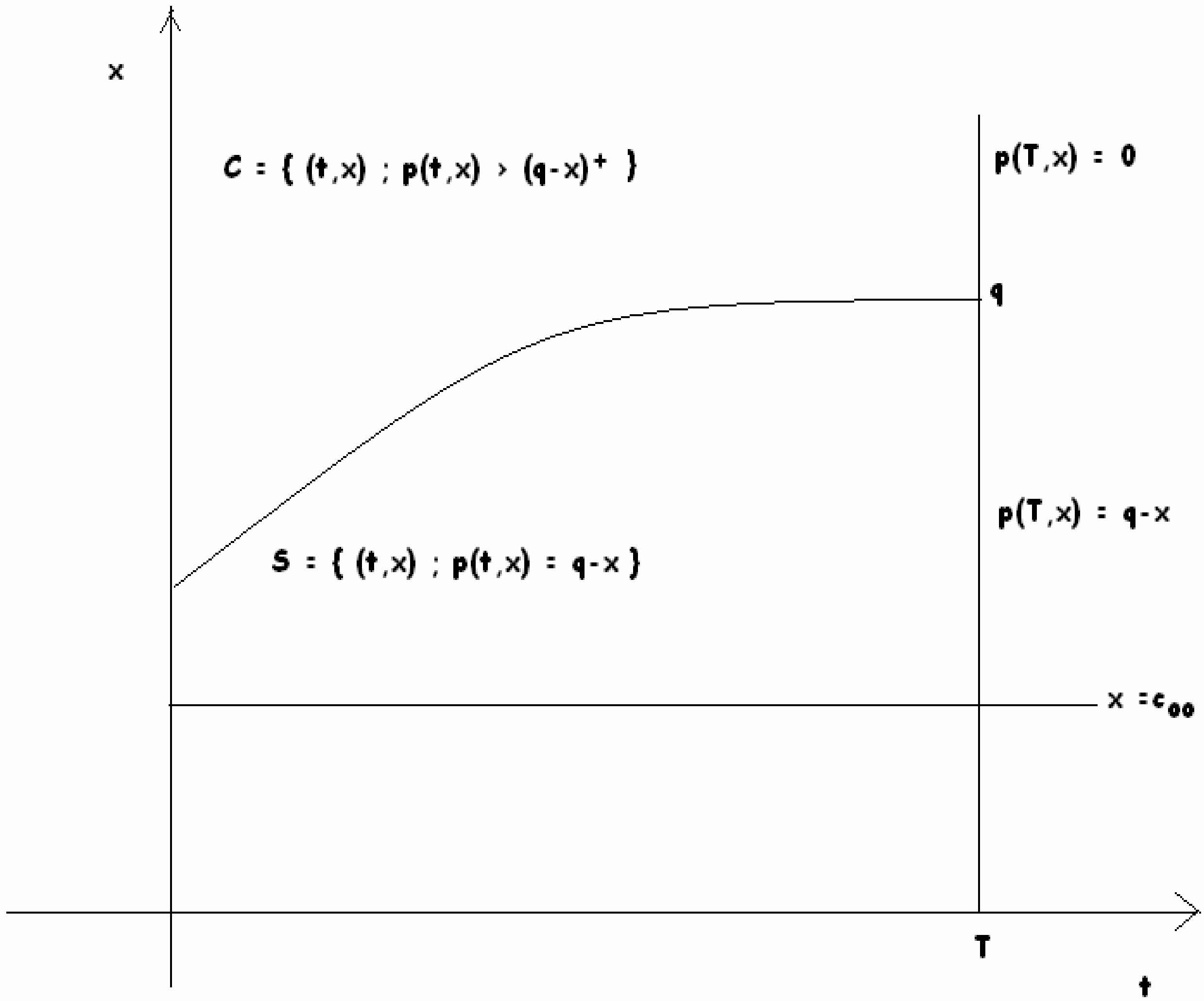
$$\lim_{x\to+\infty} \max_{0\leq t\leq T} \mid f(t,x) \mid = 0 \qquad \forall T \in (0,\infty)$$

όπου

$$Lf = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx} + (r-\delta)x f_x - rf - f_t$$

Ο κάτοχος του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης για ένα πεπερασμένο χρόνο λήξης πρέπει να περιμένει εως ότου η τιμή της μετοχής "πέσει" σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο μικρότερο ή ίσο του q πριν το ασκήσει αλλιώς το κρατάει. Αυτό το επίπεδο εξαρτάται από το χρόνο λήξης και δεν υπάρχει γνωστός τύπος για τη συνάρτηση του, αλλά μπορεί όμως να καθορισθεί αριθμητικά από τον αναλυτικό προσδιορισμό της τιμής του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης

Τυπικά σε κάθε χρόνο t υπάρχει μια τιμή του S που σημειώνει το σύνορο ανάμεσα σε δυο περιοχές, από την μια πρέπει κάποιος να κρατάει το δικαίωμα και από την άλλη πρέπει κάποιος να το ασκήσει. Ορίζουμε το σύνορο άσκησης $c(t) = S$, όπου το $c(t)$ είναι αυτό που εμφανίζεται στο πρόβλημα (0.5). Σύμφωνα με το σύνορο αυτό, το δικαίωμα πρέπει να ασκηθεί αν $S < c(t)$ και να κρατηθεί αν $S > c(t)$. Η δίκαια τιμή για το δικαίωμα είναι μια συνάρτηση της τωρινής τιμής της μετοχής και του χρόνου T.



x
C = { (t,x) ; p(t,x) > (q-x)+ }
p(T,x) = 0
q
p(T,x) = q-x
S = { (t,x) ; p(t,x) = q-x }
x =c00
T
t

Επιπλέον, το ζευγάρι των συναρτήσεων $(p(.), c(.))$ αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος ελεύθερου συνόρου. Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται απο τις σχέσεις:

$$L(t,x) = 0 \qquad \sigma\tau o \qquad C$$

$$f(t,x) \geq (q-x)^{+} \qquad \forall (t,x) \in [0,\infty)^2$$

$$f(t,x) = (q-x) \qquad \forall t \in [0,\infty), \qquad 0 \leq x \leq c(t) \tag{0.6}$$

$$f(0,x) = (q-x)^{+} \qquad \forall x \in [c(0),\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \max_{0\leq t\leq T} \mid f(t,x) \mid = 0 \qquad \forall T \in (0,\infty)$$

$$f_x(t, c(t)+) = -1 \qquad \forall t \in (0,\infty), \qquad t \to c(t)+$$

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα αποδείξουμε ότι η αξία του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης μπορεί να υπολογιστεί ως η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών με το Θεώρημα 2.2. Επίσης θα δείξουμε με το Θεώρημα 2.4 ότι το ζευγάρι $(p(.,.), c(.))$ είναι η μονάδικη λύση του προβλήματος του ελευθέρου συνόρου. Για την απόδειξη των βασικών αυτών θεωρημάτων θα χρειαστεί να αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες τόσο για την συνάρτηση $p(.)$ όσο και για τη συνάρτηση του συνόρου $c(.)$. Στην Πρόταση 2.3 καθώς και στο Θεώρημα 2.1 θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση του διηνεκούς αμερικανικού δικαιώματος καθώς, επίσης, και με τον λεγόμενο φάκελο του $Snell$ που για το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης δίνεται από την σχέση

$$\xi(t) = \sup_{\tau\in S_{0,T}} E(Y(\tau)/F(t)) = \exp^{-r\tau} p(T-t, S(t))).$$

και αποτελεί βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4, καθώς μπορεί να αναλυθεί σε μια $martingale$ και σε μια μη φθίνουσα ανέλιξη. Χρησιμοποιούμε την ανάλυση αυτή για να χαρακτηρίσουμε βέλτιστους χρόνους στάσης.

Στο κεφάλαιο 1 παραθέτουμε τους ορισμούς ορισμένων βασικών στοχαστικών εννοιών και θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή. Περιγράφουμε το αμερικάνικο παράγωγο χρεόγραφο και ειδικότερα τις βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε για το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης. Αποδεικνύουμε πως καταλήξαμε στον τύπο (0.3) και τον φάκελο του $Snell$. Επιπλέον δίνεται η απόδειξη του θεωρήματος, βάση του οποίου υπάρχει ο βέλτιστος χρόνος στάσης, όπου λαμβάνεται η μέγιστη τιμή για το δικαίωμα.

Στο παράρτημα, δίνουμε τις διατυπώσεις των θεωρημάτων $Girsanov$ και Βέλτιστου Δειγματικού Θεωρήματος. Επίσης αποδεικνύονται μερικές Προτάσεις, που αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για τις αποδείξεις των Θεωρημάτων, αυτού του άρθρου.

Κεφάλαιο 1

Ορισμός 1.1 *Διήθηση* $(filtration)$ *είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες* F_t *τέτοια ώστε*

$$s \leq t \Rightarrow F_s \subset F_t$$

Θεωρείται ως μια πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t

Ορισμός 1.2 *Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών* X_t *ονομάζεται προσαρμοσμένη στην σ-άλγεβρα* F_t *αν η* X_t *είναι* F_t *- μετρήσιμη για κάθε* t.

Ορισμός 1.3 *Έστω* (Ω, F, P) *ένας χώρος πιθανότητας ,*F_t *μια οικογένεια από σ-άλγεβρες στην* F $(F_t \subseteq F)$ *και* X_t *μια οικογένεια πραγματικών , ολοκληρώσιμων* $(E[|X_t|] < \infty)$ *τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην σ-άλγεβρα* F_t .
i) Η οικογένεια X_t *είναι μια martingale αν :*

$$E[X_t|F_s] = X_s \qquad \sigma.\beta. \qquad s \leq t$$

ii) Η οικογένεια X_t *είναι μια supermartingale αν :*

$$E[X_t|F_s] \leq X_s \qquad \sigma.\beta. \qquad s \leq t$$

iii) Η οικογένεια X_t *είναι μια submartingale αν :*

$$E[X_t|F_s] \geq X_s \qquad \sigma.\beta. \qquad s \leq t$$

Ορισμός 1.4 *Χρόνοι στάσης (Stopping Times). Έστω* $(F_t)_{t\in T}$ *μια οικογένεια σ-αλγεβρών σε ένα σύνολο* Ω*, όπου* I *είναι ένα σύνολο δεικτών . Ένας χρόνος στάσης (stopping time) σχετικά με την* F_t *αυτή είναι μια απεικόνιση* $T : \Omega \to I$ *τέτοια ώστε :*

$$\{T \leq t\} \in F_t, \qquad \forall \qquad t \in I$$

Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι η T είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αν ο χρόνος στάσης

$$\tau < \infty, \qquad \sigma.\beta.$$

τότε λέμε ότι ο τ είναι πεπερασμένος ς .β. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$t \leq T < \infty$$

τότε λέμε ότι ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος

Ορισμός 1.5 *Χαρτοφυλάκιο $\pi_n(t)$ ορίζεται το γινόμενο*

$$\eta_n(t)S_n(t)$$

Όπου το $\eta_n(t)$ είναι αριθμός των μετοχών που περιέχει το χαρτοφυλάκιο και το $S_n(t)$ είναι η τιμή της κάθε μετοχής.Το $\pi'(t)$ είναι το διάνυσμα $(\pi_1(),...,\pi_n())'$

Ορισμός 1.6 *Η ανέλιξη κερδών (gain process), που αποτελεί το ποσό που κερδίζει ο επενδυτής στον χρονικό διάστημα $[0,t_m]$, ορίζεται από την σχέση*

$$G(t) = \int_0^t [\pi_o(s) + \pi'(s)1]r(s)ds + \int_0^t \pi'(s)[\delta(s) - r(s)1]ds$$

$$+ \int_0^t \pi'(s)\sigma(s)dW(s), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.1}$$

Η ανέλιξη χαρτοφυλακίου $\pi_o(.), \pi(.))$ ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενο $(self-financed)$ αν

$$G(t) = \pi_o(t) + \pi'(t)1, \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.2}$$

Δηλαδή η αξία του χαρτοφυλακίου σε κάθε χρόνο είναι ίση με τα κέρδη από τις επενδύσεις σε αυτό τον χρόνο.

Ορισμός 1.7 *Μια $F(t)-$ προσαρμοσμένη ανέλιξη $\pi(.)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\int_0^T |\pi'(t)(\delta(t) - r(t)1)|dt < \infty$$

$$\int_0^T ||\sigma'(t)\pi(t)||^2 dt < \infty$$

ονομάζεται $martingale-generating$, αν υπό το μέτρο πιθανότητας P_o, η τοπική $martingale$ $M_o^\pi(.) = \frac{G(t)}{S_o(t)}$ είναι μια $martingale$. Αν $(\pi_o(.), \pi(.))$ είναι μια ανέλιξη χαρτοφυλακίου και $\pi(.)$ είναι $martingale - generating$, τότε το $(\pi_o(.), \pi(.))$ ονομάζεται $martingale - generating$ χαρτοφυλάκιο.

Ορισμός 1.8 *Αθροιστική ανέλιξη εσόδων* $\Gamma(t)$,$0 \leq t \leq T$ *είναι ημί-martingale δηλάδη το άθροισμα μιας φραγμένης κύμανσης ανέλιξη και μια τοπική martingale. Η* $\Gamma(t)$ *ερμηνεύεται ως το συνολικό κέρδος που λαμβάνεται από τον επενδυτή στο χρονικό διάστημα* $[0, t]$.

Ορισμός 1.9 *Έστω* $\Gamma(t)$ *αθροιστική ανέλιξη εσόδων και (* $\pi_o(.), \pi(.))$ *ανέλιξη χαρτοφυλακίου. Η ανέλιξη ευημερίας που σχετίζεται με* $(\Gamma(t), \pi_o(.), \pi(.))$ *είναι*

$$X(t) = \Gamma(t) + G(t)$$

όπου $G(.)$ *είναι η ανέλιξη κερδών. Το χαρτοφυλάκιο* $\pi_o(.), \pi(.))$ *λέγεται* $\Gamma(.)-$ *χρηματοδοτούμενο αν*

$$X(t) = \pi_o(t) + \pi'(t)1, \quad \forall t \in [0, T]$$

Ορισμός 1.10 *Έστω* M *μια χρηματαγορά και* B *μια* $F(T)-$ *μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε να ισχύει* $\frac{B}{S_o(T)}$ *να είναι κάτω φραγμένη σχεδόν βεβαίως. Θεωρούμε, επίσης , την*

$$x = E_o[\frac{B}{S_o(T)}] < \infty. \tag{1.3}$$

Τότε λέμε ότι
i) Το B *να είναι χρηματοδοτούμενο (financable) αν υπάρχει μια ομαλή ανέλιξη χαρτοφυλακίου* $(\pi_o(.), \pi(.))$ *του οποίου η σχετική ανέλιξη ευημερίας ικανοποιεί την σχέση* $X(T) = B$ *δηλαδή ισχύει*

$$\frac{B}{S_o(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_o(u)} \pi'(u)\sigma(u) \exp\{\delta t\} dW_o(u) \qquad \sigma.\beta. \tag{1.4}$$

ii) Η χρηματαγορά M *είναι πλήρης αν κάθε* $F(T)-$ *μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή* B *με* $\frac{B}{S_o(T)}$ *είναι κάτω φραγμένη, ικανοποιεί την σχέση (1.3) και είναι χρηματοδοτούμενη.*

Ορισμός 1.11 *Ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται ευκαιρία arbitrage αν η διαδικασία κερδών* $G(.)$ *ικανοποιεί την σχέση*

$$G(T) \geq 0 \quad \sigma.\beta.$$

και $G(T) > 0$ *με θετική πιθανότητα. Μια χρηματαγορά, στην οποία υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, λέγεται βιώσιμη.*

Παρατήρηση 1.1

Συγκεκριμένα , arbitrage ονομάζεται η ταυτόχρονη αγόρα και πώληση του ίδιου ή ισοδύναμου χρεογράφου, η οποία γίνεται για λόγους αντιστάθμισης του κινδύνου ή για καθαρά κερδοσκοπικούς λόγους.Με την διαδικασία αυτή επιδιώκεται μια προσπάθεια εκμετάλλευσης των διαφορών μεταξύ διαφορετικών τύπων χρεογράφων, των τιμών των ήδη γενόμενων αγορών και των συγκριτικων πλεονεκτημάτων που υπάρχουν στις διεθνής αγορές. Οι πράξεις arbitrage αποτελούν (θεμιτή) κερδοσκοπία.
Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ουσιαστικά παράγει κέρδος χωρίς κίνδυνο. Το arbitrage αντιστοιχεί σε μια μη σταθερή κατάσταση η οποία αντιβαίνει στην κατάσταση ισσοροπίας. Η έννοια του arbitrage έχει μεγάλη συνάφεια με την ιδιότητα martingale των προεξοφλημένων τιμών ή ακόμα καλύτερα με την ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας κάτω από το οποίο οι προεξοφλημένες τιμές των αβέβαιων τίτλων $S(t)$ είναι martingale. Επίσης η έννοια του arbitrage είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη κανονοικοποίηση των τιμών των τίτλων. Με άλλα λόγια ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα arbitrage για τις τιμές των τίτλων $S(.)$ αν και μόνο αν είνα arbitrage και για τις κανονικοποιημένες τιμές των τίτλων S.

Παρατήρηση 1.2

Το υπόδειγμα που υποθέτουμε για την δυναμική της μετοχής δίνεται από τη Σ.Δ.Ε.

$$dS_t = (\mu - \delta)S_t + \sigma S_t d\beta_t$$

όπου η β_t είναι μια ανέλιξη Wiener. Η παράμετρος μ ονομάζεται "τροπή" (drift) της τιμής της μετοχής και εκφράζει την αναμενώμενη απόδοση της μετοχής. Η παράμετρος δ είναι ο ρυθμός απόδοσης μερίσματος της μετοχής στους κατόχους της, ενώ η παράμετρος σ ονομάζεται μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής και εκφράζει το μέγεθος των διακυμάνσεων της τιμής της γύρω από την αναμενώμενη τιμή.

Ένα τέτοιο μοντέλο για οποιαδήποτε τιμή του μ μπορούμε να το κατασκευάσουμε σαν ένα μετασχηματισμό Girsanov του υποδείγματος όπου η "τροπή" της τιμής της μετοχής είναι ίση με το άνευ κινδύνου επιτόκιο r. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο $[0, T]$ εφοδιασμένο με ένα μέτρο πιθανότητας P και μια ανέλιξη Wiener W_t κάτω από το P, και έστω S_t η λύση της Σ.Δ.Ε.

$$dS_t = (r - \delta)S_t + \sigma S_t dW_t. \qquad (1.5)$$

Τότε με τον μετασχηματισμό Girsanov

$$\frac{dP_\mu}{dP} = M_T$$

όπου

$$M_t = \exp \frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 t$$

παίρνουμε ένα μέτρο πιθανότητας P_μ το οποίο είναι αμοιβαία απολύτως συνεχές ώς προς το οποίο η

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

είναι μια ανέλιξη $Wiener$. Η δυναμική εξίσωση γίνεται τώρα:

$$dS_t = (\mu - \delta)S_t + \sigma S_t[d\tilde{W}_t - \frac{(\mu - r)}{\sigma}dt] = \mu S_t - \delta S_t + \sigma S_t d\tilde{W}_t - S_t(\mu - r)$$

$$= \mu S_t - \delta S_t + \sigma S_t d\tilde{W}_t + rS_t - \mu S_t = (r - \delta)S_t + \sigma S_t d\tilde{W}_t$$

Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική γιατί όπως θα δούμε παρακάτω (ορισμός 1.14) η αξία του αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης προσδιορίζεται από μια σχέση που θέλουμε να ισχύει σχ.β. ως προς το μέτρο πιθανότητας του υποδείγματος που θεωρούμε.
Εφόσον τα P_μ (για οποιαδήποτε τιμή του μ) και P είναι αμοιβαία απολύτως συνεχή η σχέση αυτή ισχύει $P_\mu - \sigma.\beta.$ τότε και μόνο όταν ισχύει $P - \sigma.\beta.$ Για το λόγο αυτό η τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης είναι ανεξαρτήτως της "τροπής" μ και παρακάτω θα εργαστούμε υποθέτοντας ότι $\mu = r$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι στο υπόδειγμα αυτό η $e^{-(r-\delta)t}S_t$ είναι μια martingale.

Ορισμός 1.12 *Ένα Αμερικανικό χρεόγραφο (American contingent claim) αποτελείται από μια συνάρτηση αθροιστικών εσόδων $C(.)$, που ικανοποιεί την $C(0) = 0 \quad \sigma.\beta.$ και από μια $\{F(t)\}-$προσαρμοσμένη , δεξιά συνεχή με αριστερό όριο ανέλιξη εφάπαξ δικανονοσμού $L(.)$ (lump setlement). Θεωρούμε την ανέλιξη αποπληρωμής ως εξής*

$$Y(t) = \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \frac{L(t)}{S_o(t)}, \quad 0 \le t \le T \tag{1.6}$$

Η $Y(t)$ είναι κάτω φραγμένη, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0,T]$, συνεχής και ικανοποιεί την υπόθεση

$$E_o\Big[\sup_{0\le t\le T} Y(t)\Big] < \infty \tag{1.7}$$

Ορισμός 1.13 *Η $Y(t)$ είναι η συνάρτηση αποπληρωμής και ορίζεται από τον τύπο (1.3) είναι μη αρνητική, δεξιά συνεχής με $Y(T) \le \underline{\lim}_{t\uparrow T} Y(t) \quad \sigma.\beta.$ ορισμένη στον χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) και προσαρμοσμένη στην σ-άλγεβρα $\{F\}_{0\le t\le T}$, η οποία ικανοποιεί τη δεξιά συνέχεια και είναι προσαυξημένη από μηδενικά σύνολα του F . Υποθέτουμε ότι το $F(0)$ περιέχει μόνο σύνολα πιθανότητας 0 ή 1 και επίσης ότι ισχύει $Y(\infty) = \overline{\lim}_{t\to\infty} Y(t)$. Ορίζουμε, επιπλέον, το σύνολο $S_{[0,T]}$ που περιέχει τους $\{F(t)\}-$ χρόνους στάσης με τίμες στο [0,T].*

Παρατήρηση 1.3

Ο αγοραστής ενός αμερικανικού χρεογράφου θεωρεί μια long θέση (δηλαδη έχει θετική θέση στο συμβόλαιο) και πληρώνει κάποιο μη τυχαίο ποσό γ στον αρχικό χρόνο, η οποία αποτελεί την αρχική ανέλιξη εσόδων του.
Ο πωλητής υποθέτει μια short θέση (δηλαδή έχει αρνητική θέση στο συμβόλαιο), λαμβάνει γ στο χρόνο μηδέν και παρέχει $C(.)$ στον αγοραστή.
Ο αγοραστής επιλέγει, επίσης , έναν $F(t)-$ χρόνο στάσης $\tau : \Omega \to [0,T]$, ο οποίος ονομάζεται χρόνος άσκησης. Στο χρόνο τ, ο αγοραστής παραιτείταιαπό τα μελλοντικά έσοδα $C()$ και λαμβάνει αντί αυτού $L(\tau)$.Όταν το τ επιλέγεται η αθροιστική ανέλιξη εσόδων για τον πωλητή είναι

$$\Gamma(t) = \gamma - C(t \wedge \tau) - L(\tau)1_{\{t \geq \tau\}}, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{1.8}$$

Ειδικότερα, όταν $\{\tau = 0\}$, ο πωλητής λαμβάνει $\gamma(0) = \gamma - L(0)$ στον αρχικό χρόνο και έπειτα τίποτα. Ο αγοραστής έχει αθροιστική ανέλιξη εσόδων $-\Gamma(.)$. Για τα περισσότερα Αμερικανικά χρεόγραφα ισχύει $C(.) \equiv 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει ένα μέρος των μετοχών, σε οποιοδήποτε χρόνο πριν το T και σε μια συγκεκριμένη τιμή άσκησης $q > 0$.ητιμή του δικαιώματος τότε δίνεται από τον τύπο

$$L(t) = (q - S(t))^{+}$$

Ο πωλητής πρέπει , επίσης , να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο σχετικά με την θέση του . Η αντιστάθμιση αυτή περιπλέκεται από το κατα πόσο είναι σίγουρος για το χρόνο άσκησης τ της σχέσης (1.8). Η απλούστερη υπόθεση είναι όταν $\tau = T$, γιατί τότε η αντιστάθμιση και τιμολόγηση είναι όπως τα δικαιώματα ευρωπαικού τύπου. Σάυτήν την περίπτωση, η αθροιστική ανέλιξη εσόδων του πωλητή δίνεται από την

$$\gamma - C(t) - L(T)1_{\{t=T\}}, \quad 0 \leq t \leq T \leq \infty$$

και εάν το $\pi(.)$ είναι $martingale - generate$ χαρτοφυλάκιο , η ανέλιξη ευημερίας δίνεται από την σχέση

$$\frac{X(t)}{S_o(t)} = \gamma - \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} - \frac{L(T)}{S_o(T)}1_{\{t=T\}} + \int_0^t \frac{1}{S_o(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_o(u), \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.9}$$

Ο πωλητής θέλει $X(T) \geq 0$ ή ισοδύναμα

$$Y(T) = \int_{(0,T]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \frac{L(T)}{S_o(T)} \leq \gamma + \int_0^T \frac{1}{S_o(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_o(u), \quad \sigma.\beta. \tag{1.10}$$

Για να εξασφαλίσει ότι μπορεί να κατέχει το ποσό του εφάπαξ διακανονισμού , αν ο αγοραστής σταματήσει τη συμφωνία, θέλει επίσης $X(t) \geq L(t)\sigma.\beta.$ για $0 \leq t \leq T$. Η υπόθεση αυτή μαζί με την σχέση (1.10) οδηγούν στην

$$Y(t) = \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \frac{L(t)}{S_o(t)}$$

$$\leq \gamma + \int_0^t \frac{1}{S_o(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_o(u), \quad \sigma.\beta. \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\grave{\alpha}\theta\varepsilon \quad t \in [0,T] \quad (1.11)$$

Θεωρούμε την σχέση (1.11),επειδή και οι δυο πλευρές είναι συνεχείς ως προς t η πιθανότητα του μηδενικού ενδεχομένου κατά το οποίο δεν ισχύει η ανισότητα, μπορεί να επιλεγεί να μην εξαρτάται από το t.Επιπλέον, η ανισότητα ισχύει αν το t αντικατασταθεί από κάθε τυχαίο χρόνο τ, ο οποίος παίρνει τιμές στο $[0,T]$

$$Y(\tau) = \int_{(0,\tau]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \frac{L(\tau)}{S_o(\tau)} \leq \gamma + \int_0^\tau \frac{1}{S_o(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_o(u), \quad \sigma.\beta. \qquad (1.12)$$

Αυτή είναι απλά μια παρατήρηση ότι ο πωλητής , με ανέλιξη εσόδων που δίνεται από την (1.8) , έχει μη αρνητική ευημερία όταν ασκηθεί το δικαίωμα σε οποιονδήποτε χρόνο τ που επιλέξει ο αγοραστής

Ορισμός 1.14 *Θεωρούμε το $(C(.), L(.))$ αμερικανικό χρεόγραφο. Τότε ορίζεται η αξία του στο χρόνο $t = 0$ από την σχέση*

$$V^{ACC}(0) = \inf\{\gamma \in \mathbb{R}; \exists \quad \acute{\varepsilon}\nu\alpha \quad martingale \quad \chi\alpha\rho\tau o\varphi\upsilon\lambda\acute{\alpha}\kappa\iota o \quad \pi(.)\} \qquad (1.13)$$

που ικανοποιεί την (1.11).

Ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο για το $(C(.), L(.))$ είναι ένα $martingale-generate$ χαρτοφύλακιο $\hat{\pi}(.)$ όταν

$$\gamma = V^{ACC}(0)$$

Θεώρημα 1.1 *Έχουμε την*

$$V^{ACC}(0) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o Y(\tau), \qquad (1.14)$$

όπου $S_{0,T}$ = είναι το σύνολο των χρόνων στάσης που παίρνουν τιμές στο $[0,T]$. Ακόμη υπάρχει ένας χρόνος στάσης τ^* όπου λαμβάνεται αυτό το sup *και ένα αντισταθμίστικο χαρτοφυλάκιο $\overline{\pi}()$ τέτοιο ώστε :*

$$Y(\tau^*) = V^{ACC}(0) + \int_0^{\tau^*} \frac{1}{S_o(u)} \overline{\pi}(u)\sigma(u)dW_o(u) \quad \sigma.\beta. \qquad (1.15)$$

Απόδειξη: 1.Η $Y(.)$ είναι μη αρνητική, δεξιά συνεχής στην σ-άλγεβρα F ,η οποία είναι προσαυξημένη από μηδενικά σύνολα F . Το $F(0)$ περιέχει μόνο σύνολα μέτρου 0 ή 1 και επίσης οσχύει ότι

$$Y(\infty) = \overline{\lim}_{t\to\infty} Y(t)$$

.Η σχέση $\xi(0) = Z(0)$ είναι η μέγιστη αναμενώμενη " ανταμοίβη " και ισχύουν οι σχέσεις

$$Z(0) = \sup_{\tau \in S} EY(\tau)$$

και

$$0 < Z(0) < +\infty$$

Για να χαρακτηρίσουμε τους χρόνους στάσης μελετάμε την οικογένεια $\{Z(u)\}_{u \in S}$ των τυχαίων μεταβλητών

$$Z(u) = ess \sup_{\tau \in S_u} E[Y(\tau)/F(u)], \quad u \in S$$

που είναι η βέλτιστη αναμενώμενη ανταμοιβή για χρόνους στάσης μεγαλύτερους ή ίσους του u. Από την Προτάση 3.1 έχουμε την

$$E(Z(\tau)) = \sup_{\rho \in S_\tau} EY(\rho) \leq Z(0) < +\infty.$$

Επειδή για κάθε καθορισμένο χρόνο στάσης $t \in [0, T]$ η

$$Z(u) = ess \sup_{t \in S} E[Y(t)|F(u)]$$

είναι μη αρνητική και προσαρμοσμένη ανέλιξη $\{Z(t); F(t); 0 \leq t \leq T\}$ και ισχύει η

$$E[Z(t)|F(u)] \leq Z(u) \qquad \sigma.\beta.$$

η $Z(t)$ είναι *supermartingale* και επειδή $t \to EZ(t)$ είναι δεξιά συνέχης υπάρχει μια *supermartingale* $\{Z^o(t); F(t)0 \leq t \leq T\}$ με *RCLL* βήματα που ικανοποιεί την

$$P[Z(t) = Z^o(t)] = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Ακόμη επειδή έχουμε την $Y(\tau) = \overline{\lim}_{t \to \infty} Y(t)$ λαμβάνουμε την

$$Z^o(\infty) = Z(\infty) = \overline{\lim}_{t \to \infty} Y(t) \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον η μη αρνητική $Z^o()$ ονομάζεται *Snell* φάκελος του $Y(t)$ και είναι η μικρότερη *supermartingale* που κυριαρχεί στην $Y(t)$ δηλάδη

$$P[Z^o() \geq Y(t), \forall 0 \leq t \leq T] = 1$$

Από την Πρόταση 3.2 γνωρίζουμε ότι υπάρχει πράγματι μια τροποποίηση

$$\{Z^o(t), F(t)0 \leq t \leq T\}$$

της

$$\{Z(t), F(t)0 \leq t \leq T\}$$

δηλαδή

$$P[Z^o(t) = Z(t)] = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

τέτοιο ώστε

$$Z(u) = Z^o(u) \qquad P - \sigma.\beta.$$

Δηλαδή υπάρχει μια P_o *supermartingale* $\{\xi(t), F(t), 0 \leq t \leq T\}$ με $RCLL$ βήματα που καλείται φάκελος *Snell* του $Y()$ τέτοιο ώστε $\xi(t) \geq Y(t)$ για όλα τα $t \in [0,T]$ ς. β. και ισχύει η

$$\xi(u) = ess \sup_{\tau \in S_{0,\tau}} E[Y(\tau)/F(u)] \qquad \sigma.\beta.(1.16)$$

$\forall u \in S_{0,T}$ όπου

$$S_{0,\tau} = \{\tau \in S_{0,T}, u \leq \tau \leq T \quad \sigma.\beta.\}$$

και

$$\xi(0) = \sup_{\tau \in S_{0,\tau}} E_o[Y(\tau)]$$

2. Για να επαληθεύσουμε την ύπαρξη βέλτιστων χρόνων στάσης , κατασκευάζουμε μια οικογένεια από χρόνους στάσης που είναι περίπου βέλτιστη .
Για λ $\in (0,1)$ και $u \in S$ ορίζουμε τον χρόνο στάσης

$$D^{\lambda}(u) = \inf\{t \in (u,T); \lambda Z^o(t) \leq Y(t)\} \wedge T$$

στο S_u . Από την δεξιά συνέχεια του $Y(.)$ και του $Z^o(.)$ η

$$\{D^{\lambda}(u) : 0 \leq t \leq T\}$$

είναι δεξιά συνέχης . Ακόμη επειδή $u \in S$ έχουμε

$$\lambda Z^o(D^{\lambda}(u)) \leq Y(D^{\lambda}(u)) \qquad \sigma.\beta.$$

και αυτή η ανισότητα ισχύει και στο $\{D^{\lambda}(u) = T\}$ επειδη έχουμε ότι $Z^o(T) = Y(T)$ Από την Πρόταση 3.3 για $0 < \lambda < 1$

$$Z^o(u)E[Z^o(D^{\lambda}(u))|F(u)] \quad \sigma.\beta.$$

Για σταθερό $u \in S$ η D^{λ} είναι μη φθίνουσα και ορίζουμε τον οριακό χρόνο στάσης

$$D_*(u) = \lim_{\lambda \uparrow 1} D^{\lambda}(u) \quad \sigma.\beta.$$

Οπότε επειδή η Y είναι συνέχης και ισχύει η

$$E[\sup EY(t)] < +\infty$$

, έχουμε ότι το $D_*(0)$ είναι βέλτιστο. Από την Πρόταση 3.4 η Y είναι συνέχης και επειδή έχουμε $E[\sup Y(t)] < +\infty$, παίρνουμε ότι $\forall u \in S$, ο χρόνος στάσης

$$D_*(u) = \lim_{\lambda \uparrow 1} D^{\lambda}(u) \qquad \sigma.\beta.$$

και

$$E[Y(D_*(u)/F(u))] = Z^o(u) = ess \sup_{\tau \in S_u} E[Y(\tau)/F(u)] \qquad \sigma.\beta.$$

Στο $D_*(0)$ όμως έχουμε το sup δηλαδή

$$Z^o = \sup E(Y(\tau))$$

με

$$D_*(u) = \inf\{t \in (u, T), Z^o(t) = Y(t)\} \wedge T \quad \sigma.\beta.$$

Άρα τελικά ο χρόνος στάσης

$$\tau^* = \inf\{t \in [0, T]; \xi(t) = Y(t)\} \wedge T$$

ικανοποιεί την

$$\xi(0) = E_o[Y(\tau^*)]$$

3. Από την Πρόταση 3.7 και την υπόθεση $E(\sup Y(t)) < \infty$ επιτρέπεται η *Doob Mayer* ανάλυση του φακέλου *Snell*

$$Z(.) = M(.) - \Lambda(.)$$

όπου η διαδικασία $M()$ είναι μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη *RCLL martingale* και η $\Lambda()$είναι μια δεξία συνεχής και μη φθίνουσα $\{F(t)\}$ προσαρμοσμένη με $\Lambda(0) = 0$. Επίσης ισχύουν

$$E\Lambda(T) < +\infty$$

και

$$\int_0^T I_{\{Z^o(t) > Y(t)\}} d\Lambda(t) = 0 \qquad \sigma.\beta.$$

Δηλαδή τελικά

$$\xi(.) = M(.) - \Lambda(.).$$

Επιπλέον επειδή η αγορά είναι πλήρης, η $F(T)$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή B είναι χρηματοδοτούμενη που σημαίνει ότι υπάρχει ένα *martingale* παραγώμεο χαρτοφυλάκιο $\overline{\pi}$ του οποίου η σχετική ανέλιξη ευημερίας ικανοποιεί την σχέση $X(T) = B$ οπότε :

$$\frac{B}{S_o(T)} = \xi(0) + \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u) dW_o(u) \qquad \sigma.\beta.$$

Ορίζουμε την

$$M(T) = \frac{B}{S_o(T)} \Rightarrow B = S_o(T) M(T)$$

οπότε έχουμε την

$$M(T) = \xi(0) + \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u) dW_o(u) \quad (1.17)$$

ενώ παίρνοντας υπό συνθήκη μέσες τιμές στην παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι έχουμε

$$E[M(T)|F(t)] = E[\xi(0) + \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u) dW_o(u)|F(u)]$$

Επειδή η $M(t)$ είναι *martingale* δηλαδή ικανοποιεί την

$$E[M(T)|F(t)] = M(t)$$

έχουμε ότι

$$M(t) \leq \xi(0) + \int_0^t \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u)dW_o(u)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$Y(t) \leq \xi(t) = M(t) - \Lambda(t) = \xi(0) - \Lambda(t) + \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u)dW_o(u)$$

και ότι η Λ είναι αύξουσα ,$\Lambda(0) = 0$ και $\Lambda(t) > 0$ οπότε

$$Y(t) \leq \xi(t) \leq \xi(0) + \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi}(u)\sigma(u)dW_o(u)$$

και για $\tau = \tau^*$

$$Y(\tau^*) \leq \xi(0) + \int_0^{\tau^*} \frac{1}{S_o(0)} \pi'(u)\sigma(u)dW_o(u) \tag{1.18}$$

Από τον ορισμό του $V^{ACC}(0)$ που είναι το ελάχιστο γ έτσι ώστε να υπάρχει ένα *martingale* παραγόμενο χαρτοφυλάκιο $\overline{\pi'}$ και να ισχύει η

$$Y(t) \leq \gamma + \int_0^t \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi'}(u)\sigma(u)dW_o(u) \quad \sigma.\beta. \tag{1.19}$$

Από την σχέση (1.18) το $\gamma \leq \xi(0)$ και επομένως $V^{ACC}(0) \leq \xi(0)$ ενώ αν πάρουμε μέσες τιμές στην (1.16) έχουμε

$$EY(t) \leq \overline{\gamma} + E_o \int_0^T \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi'}(u)\sigma(u)dW_o(u)$$

όμως η ποσότητα

$$\frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi'}(u)\sigma(u)dW_o(u)$$

είναι *martingale* $\Rightarrow EY(t) \leq \gamma$, $\forall \tau \in S_{0,T}$ οπότε ισχύει $\xi(o) \leq \gamma$ όμως γνωρίζουμε ότι $\xi(o) \leq V^{ACC}(0)$ δηλαδή τελικά

$$V^{ACC}(0) = \xi(o)$$

οπότε το π′ είναι το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο και από την

$$Y(t) \leq \xi(0) + \int_0^t \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi'}(u)\sigma(u)dW_o(u) \quad \sigma.\beta.$$

για $\tau = \tau^*$ έχουμε

$$Y(t) = V^{ACC}(0) + \int_0^{t^*} \frac{1}{S_o(0)} \overline{\pi'}(u)\sigma(u)dW_o(u) \tag{1.20}$$

επειδή ο τ^* είναι ο βέλτιστος χρόνος όπου λαμβάνεται το $\sup \in Y(t)$ και $\gamma = V^{ACC}(0)$

Παρατήρηση 1.4

Η εξίσωση (1.19) σημαίνει ότι αν ο πωλητής χρησιμοποιήσει το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}(.)$ *και ο αγοραστής επιλέξει τον χρόνο στάσης* τ^* *, τότε μετά από συμφωνία ο πωλητής έχει ευημερία* $X(\tau^*) = 0$ *. Ο αγοραστής , του οποίου η αθροιστική ανέλιξη εσόδων είναι αρνητική σε σχέση με αυτή του πωλητή , μπορεί να αντισταθμίσει τη θέση του με* $-\hat{\pi}(.)$ *και μετά την συμφωνία να έχει ευημερία* $-X(\tau^*) = 0$. *Ο χρόνος στάσης* τ^* *είναι ένας βέλτιστος χρόνος άσκησης για τον αγοραστή του αμερικάνικου χρεογράφου.*

Παρατήρηση 1.5

ισχύει $\gamma = V^{ACC}(0)$ *και* $\pi(.) = \hat{\pi}(.)$ *είναι το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο του θεωρήματος 1.1 τότε η (1.11) ισχύει και συνεπάγεται την (1.12) γι κάθε τυχαίο χρόνο* τ *που παίρνει τιμές στο* $[0, T]$. *Όμως ακόμα και αν ο αγοραστής του παραγώγου επιτρέπεται να επιλέξει το* τ *με γνώση των μελλοντικών τιμών , ο πωλητής του παραγώγου με εκτίθεται σε κανένα κίνδυνο , αν χρησιμοποιήσει το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο του θεωρήματος 1.8*

Παρατήρηση 1.6

Επεκτείνουμε την έννοια της αξίας του αμερικάνικου δικαιώματος σε χρόνους πέρα από το μηδέν. Θεωρούμε ένα αμερικάνικο δικαίωμα και έναν χρόνο $s \in [0, T]$, *ο αγοραστής πληρώνει ένα ποσό* $\gamma(s)$ *(μια* $\Phi(\varsigma)$ *- μετρήσιμη τυχαία μταβλητή) για να λάβει την ανέλιξη εσόδων* $\{C(t) - C(s); t \in [s, \tau]\}$. *Ο* $\tau \in S_{s,T}$ *είναι χρόνος στάσης, στον οποίο λαμβάνει το ποσό του εφάπαξ διακανονισμού* $L(\tau)$. *Η διαδικασία που μας οδήγησε στην σχέση (1.11), τώρα οδηγεί στην συνθήκη για την επιθυμητή αντιστάθμιση του πωλητή*

$$Y(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} = \int_{(s,t]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \frac{L(t)}{S_o(t)}$$

$$\leq \frac{\gamma(s)}{S_o(s)} + \int_s^t \frac{1}{S_o(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_o(u) \quad \sigma.\beta. \quad \forall t \in [s, T]. \quad (1.21)$$

Ορισμός 1.15 *Έστω* $(C(.), L(.))$ *να είναι ένα αμερικάνικο δικαίωμα. Η αξία του στο χρόνο* $s \in [0, T]$, *που συμβολίζεται με* $V^{ACC}(s)$, *είναι η μικρότερη* $F(s)-$ *μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή* $\gamma(s)$ *τέτοια ώστε η (1.18) να ισχύει από κάποιο martingale χαρτοφυλάκιο*

Θεώρημα 1.2 *Για* $s \in [0, T]$, *έχουμε*

$$V^{ACC}(s) = S_o(s)\Big[\xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{1}{S_o(u)} dC(u)\Big] \quad (1.22)$$

όπου το $\xi(.)$ *είναι ο φάκελος Snell της ανέλιξης* $Y(.)$ *και ικανοποιεί (1.13). Επιπλέον ο χρόνος στάσης*

$$\tau_s^* = \inf\{t \in [s, T); \xi(t) = Y(t)\} \wedge T$$

ικανοποιεί την

$$\xi(s) = E[Y(\tau_s^*)|F(s)] \qquad \sigma.\beta.$$

και με το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}(.)$ του θεωρήματος 1.1, η ισότητα της σχέσης (1.21) ισχύει για τ_s^*

$$Y(\tau_s^*) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} = \frac{V^{ACC}(s)}{S_o(u)} + \int_s^{\tau_s^*} \frac{1}{S_o(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_o(u) \qquad \sigma.\beta. \qquad (1.23)$$

Απόδειξη: Αντικαθιστούμε στην (1.21) το t με το αυθαίρετο $\tau \in S_{s,T}$ και παίρνουμε υπό συνθήκη μέσες τιμές , οπότε έχουμε

$$E_o[Y(\tau)|F(s)] - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} \leq \frac{\gamma(s)}{S_o(u)} \qquad \sigma.\beta.$$

οπότε παίρνουμε

$$\xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} \leq \frac{V^{ACC}(s)}{S_o(u)} \qquad \sigma.\beta.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα , έστω $t \in [s,T]$ και παρατηρούμε από στην 1.20 ότι

$$\xi(t) - \xi(s) = \int_s^t \frac{1}{S_o(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_o(u) - [\Lambda(t) - \Lambda(s)].$$

Όμως επειδή ισχύει $Y(t) \leq \xi(t)$ και $\Lambda(t) - \Lambda(s) \geq 0$, έχουμε

$$Y(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} \leq \xi(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)}$$

$$\leq \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)} + \int_s^{\tau_s^*} \frac{1}{S_o(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_o(u) \qquad \sigma.\beta. \qquad (1.24)$$

Αυτό δείχνει ότι η (1.21) ικανοποιείται με

$$\frac{\gamma(s)}{S_o(s)} = \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)}$$

από την οποία

$$\frac{V^{ACC}(s)}{S_o(u)} \leq \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_o(u)}.$$

Αντικαθιστώντας το t με τ_s^* στην (1.24), λαμβάνουμε την ισότητα επειδή $Y(\tau_s^*) = \xi(\tau_s^*)$ και $\Lambda(\tau_s^*) - \Lambda(s) = 0$ (από την Πρόταση 3.6)

Παρατήρηση 1.7

Ο αγοραστής του αμερικάνικου δικαιώματος μπορεί να αντισταθμίσει την θέση του με το χαρτοφυλάκιο $-\hat{\pi}(.)$ αν ασκήσει την συμφωνία στο χρόνο τ_s^*. Η εξίσωση 1.23 είναι η διαπίστωση ότι μετά την συμφωνία, τόσο ο αγοραστής όσο και ο πωλητής θέλουν να έχουν μηδενική ευημερία. Ο χρόνος στάσης τ_s^* είναι ένας βέλτιστος χρόνος άσκησης στο $S_{s,T}$.

Παρατήρηση 1.8
Έστω $(C(.), L(.))$ *ένα αμερικάνικο δικαίωμα . Αν ο αγοραστής του αναγκαστεί να επιλέξει χρόνο άσκησης* $\tau = T$ *τότε η αξία του δικαιώματος στο χρόνο* s *για το Ευρωπαικό δικαίωμα δινεται από την σχέση*

$$V^{ECC}(s) = S_o(s) E_o\Big[\int_{(s,T]} \frac{d(C(u)}{S_o(u)} + \frac{L(T)}{S_o(T)} | F(s)\Big], \quad 0 \leq s \leq T$$

*Η διαφορά ανάμεσα στην αξία του αμερικάνικου που δίνεται από την (1.22) και της αξίας του Ευρωπαικού , ονομάζεται πριμ πρώιμης άσκησης (early exercise premium)*και είναι

$$e(s) = V^{ACC}(s) - V^{ECC}(s), \qquad 0 \leq s \leq T \quad (1.25)$$

Επειδή

$$\int_0^T \frac{d(C(u)}{S_o(u)} + \frac{L(T)}{S_o(T)} = U(T) = \xi(T) = M(T) - \Lambda(T)$$

έχουμε

$$\frac{e(s)}{S_o(s)} = \xi(s) - E_o[Y(T)|F(s)] = E_o[\Lambda(T)|F(s)] - \Lambda(s)$$

$$E_o\Big[\int_s^T \frac{S_o(u) d\Lambda(u)}{S_o(u)} | F(s)\Big]' \qquad 0 \leq s \leq T \quad (1.26)$$

Αν θέσουμε $s = 0$ *στην (1.23) έχουμε*

$$e(0) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o Y(\tau) - E_o Y(T)$$

Από το Βέλτιστο Δειγματικό θεώρημα έχουμε ότι αν η συνάρτηση απο πληρωμής είναι $P_o - martingale$ *τότε* $e(0) = 0$, *δηλαδή*

$$E_o Y(T) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o Y(\tau)$$

και τότε η τιμή άσκησης $\tau = T$ *είναι η βέλτιστη για τον κάτοχο του Αμερικάνικου δικαιώματος.*

Παρατήρηση 1.9
Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου περιλαμβάνει τα εξής
(ι)υπολογισμός του μεγίστου για την συνάρτηση αποπληρωμής δηλαδή

$$Z(0) := \sup_{\tau \in S} EY(\tau) \qquad (1.27)$$

(ιι) εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη ενός χρόνου στάσης τ_* που να είναι βέλτιστος

Θεωρούμε ότι $0 < Z(0) < \infty$ και κατασκευάζουμε τον λεγόμενο φάκελο του *Snell* της $Y(.)$, που αποτελεί την μικρότερη δεξιά συνεχή με αριστέρο όριο $(RCLL)$,*supermarti−ngale* που κυριαρχεί της $Y(.)$. Ένας χρόνος στάσης τ_* είναι βέλτιστος αν και μόνο αν η ανέλιξη

$$\{Z^o(t \wedge \tau_*), F(t); 0 \leq t \leq T\}$$

είναι *martingale* και

$$Z^o(\tau_*) = Y(\tau_*) \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον εισάγουμε μια ισχυρότερη συνθήκη για να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός βέλτιστου χρόνου στάσης

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} Y(t)] < \infty.$$

υπό της οποίας ο χρόνος στάσης

$$D_* = \inf\{t \in [0, T]; Z^o(t) = Y(t)\}$$

μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι βέλτιστος. Αναλύουμε τον φάκελο *Snell* σε διάφορα μιας *martingale* και μιας μη φθίνουσας ανέλιξης και χρησιμοποιούμε αυτήν την ανάλυση για να χαρακτηρίσουμε βέλτιστους χρόνους στάσης. Ορίζουμε ακόμη τις τυχαίες μεταβλητές

$$Z(u) = ess \sup_{\tau \in S_u} E[Y(\tau)|F(u)], \qquad u \in S. \qquad (1.28)$$

που εγγυόνται ότι $EZ(u) < \infty$ για όλα τα $u \in S$. Η τυχαία μεταβλητή $Z(u)$ είναι η βέλτιστη υπό συνθήκη μέση ευημερία για χρόνους στάσης στο u και αργότερα . Ακόμη αποδεικνύεται ότι μια τροποποίηση της ανέλιξης $\{Z(t); F(t), 0 \leq t \leq T\}$ είναι η

$$\{Z^o(t); F(t), 0 \leq t \leq T\}$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$P[Z^o(t) = Z(t)] = 1$$

για όλα τα $t \in [0, T]$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in S$ έχουμε

$$Z(u) = Z^o(u), \qquad P - \sigma.\beta. \qquad (1.29)$$

Η σχέση (1.29) αποτελεί το φάκελο *Snell* της $Y(.)$. Για το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης ο φάκελος του *Snell* της $Y(.)$ δίνεται από τη σχέση

$$\xi(t) = \sup_{\tau \in S_{t,T}} E(Y(\tau)/F(t)) = \exp^{-rt} p(T-t, S(t))). \tag{1.30}$$

Για να υπολογίσουμε την αξία ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης για μια μετοχή με τιμή άσκησης $q > 0$, θέτουμε, επίσης,

$$C(.) \equiv 0$$

και

$$L(t) = (q - S(t))^+$$

οπότε η συνάρτηση αποπληρωμής είναι

$$Y(t) = \frac{(q - S(t))^+}{S_o(t)} \tag{1.31}$$

Έστω ότι σημειώνουμε με $V^{AP}(t;T)$ την αξία του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης για πεπερασμένου ορίζοντα χρόνου λήξης στο χρόνο $t \in [0,T]$. Άρα έχουμε

$$\frac{V^{AP}(t;T)}{S_o(t)} = ess \sup_{\tau \in S_{t,T}} E_o[Y(\tau)|F(t)], \quad 0 \le t \le T \tag{1.32}$$

όπου $S_{t,T}$ είναι το σύνολο των $\{F(t)\}-$χρόνων στάσης με τιμές στο $[t,T]$. Επίσης η

$$S(t)\exp\{\delta - r)t\} = S(0)\exp\Big\{\int_0^t \sigma(u)dW_o(u) - \int_0^t \Big(\frac{1}{2}\sigma^2(u) + \delta(u)\Big)du\Big\}, \quad 0 \le t \le T$$

είναι μια μη μηδενική $P_o - martingale$ και το βέλτιστο δειγματικό θεώρημα δίνει ότι

$$V^{AP}(t;T) = S_o(t) ess \sup_{\tau \in S_{t,T}} E_o\Big[\Big(\frac{q}{S_o(\tau)} - \frac{S(\tau)}{S_o(\tau)}\Big)^+ |F(t)\Big] \le$$

$$\le S_o(t) ess \sup_{\tau \in S_{t,T}} E_o\Big[\frac{S(\tau)}{S_o(\tau)}|F(t)\Big] \le S(t), \qquad 0 \le t \le T$$

Θεωρούμε ότι έχουμε $\sigma > 0, \delta > 0, r > 0$ σταθερές και η τιμή της μετοχής δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = S(0)H(t)$$

όπου

$$H(t) = \exp\{\sigma W_t + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t\}$$

και

$$Y(t) = \exp\{-rt(q - S(t))^+\}, t \in (0,T]$$

οπότε η αξία του δικαιώματος για $S(0) = x$, σύμφωνα με το θεώρημα (1.1) είναι

$$p(T,x) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o\Big[\exp(-r\tau)\Big(q - xH(\tau)\Big)^+\Big]$$

Κεφάλαιο 2

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης της ποσότητας $e^{-rt}S(t)$ πριν το χρόνο T και ορίζουμε

$$p(T,x) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o\Big[\exp(-r\tau)\Big(q - xH(\tau)\Big)^+\Big]$$

Η αναμενώμενη τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο πιθανότητας P κάτω από το οποίο η τιμή αποπληρωμής $e^{(\delta-r)t}S(t)$ είναι $martingale$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα σύνορο $c(\tau)$ όπου εξασκούμε το δικαίωμα την πρώτη φορά που η τιμή της μετοχής "πέφτει" κάτω από το βέλτιστο σύνορο στο χρόνο $t = T - \tau$. Γνωρίζουμε ότι υπο το P η τιμή της μετοχής $S(t)$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + (r - \delta)S_t dt$$

όπου $\{W_t; t \geq 0\}$ είναι η τυπική κίνηση $Brown$ και οπότε

$$S(t) = S(0)\exp\{\sigma W_t + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t\}$$

Πρόταση 2.1 *Έχουμε ότι για την συνάρτηση $p(T,x)$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*
(i) Η απεικόνιση $T \mapsto p(T,x)$ είναι μη φθίνουσα
(ii)Η απεικόνιση $x \mapsto p(T,x)$ είναι μη αύξουσα και κυρτή
(iii) Η απεικόνιση $x \mapsto x + p(T,x)$ είναι μη φθίνουσα και κυρτή. Επιπλέον
(iv) $\forall (T,x) \in (0,\infty)^2$ έχουμε $0 < p(T,x) < q$

Απόδειξη: Για την απόδειξη των $i), ii)$,επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει $p(T,x) = \sup_{\tau \in S_(0,T)} E_o[\exp(-r\tau)(q - xH(\tau))+]$ παίρνουμε ότι η απεικόνιση $T \mapsto p(T,x)$ είναι μη φθίνουσα, και $x \mapsto p(T,x)$ είναι μη αύξουσα και κυρτή .

$iii)$ Επίσης ισχύει για $0 \le x < y < \infty$ ότι χρησιμοποιώντας τον χρόνο στάσης του θεωρήματος 1.1 έχουμε

$$
\begin{aligned}
p(T,y) - p(T,x) = & \\
& = p(T,y) - E_o\Big[\exp(-r\tau_x)(q - xH(\tau_x))^+\Big] \\
& \ge E_o\Big[\exp(-r\tau_x)\Big\{(q - yH(\tau_x))^+ - (q - xH(\tau_x))^+\Big\}\Big] \\
& \ge E_o\Big[\exp(-r\tau_x)\Big\{(q - yH(\tau_x) - q + xH(\tau_x))^+\Big\}\Big] \\
& \ge E_o\Big[\exp(-r\tau_x)\Big\{(xH(\tau_x) - yH(\tau_x))\Big\}\Big] \\
& \ge (x-y)E_o\Big[\exp(-r\tau_x)H(\tau_x)\Big] \\
& \ge (x-y).
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει δεδομένου ότι έχουμε την $\exp(-rt)H(t)$ είναι *supermarti–ngale* και $H(0) = 1$. Άρα βρήκαμε ότι

$$p(T,y) - p(T,x) \ge x - y$$

οπότε η $p(T,x)$ είναι μη φθίνουσα ως προς x, ενώ επειδή η $x \mapsto (q-x)^+$ κυρτή και το *sup* κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή τότε και η $p(T,x)$ θα είναι κυρτή .

$iv)$ Η σχέση $p(T,x) \le q$ είναι προφανής επειδή $\exp\{-r\tau\}(q - xH(\tau))^+ \le q$. Άρα $p(T,x) \le q$. Επίσης $p(T,0) = q$, επειδή $p(T,x) = q$ οπότε υπάρχει μια ακολουθία χρόνων στάσης τ_n τέτοια ώστε $E[\exp\{-r\tau_n\}(q - xH(\tau_n))^+] = q$, επειδή $(q - xH(\tau_n))^+ \le q$. Πρέπει $\tau_n \to 0 \quad \sigma.\beta.$ άρα $H(\tau_n) \to 0 \quad \sigma.\beta.$ Τότε $(q-x)^+ = q \Rightarrow x = 0$ Άρα $p(T,x) = q \Leftrightarrow x = 0$
Για να αποδείξουμε το $0 < p(T,x)$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία.
Όταν ισχύει

$$0 < x < q$$

παίρνουμε

$$p(T,x) \ge (q-x)^+ > 0$$

ενώ όταν

$$x \ge q$$

ορίζουμε τον χρόνο στάσης

$$\tau = T \wedge \inf\{t \ge 0; xH(t) \le \frac{q}{2}\}$$

και παρατηρούμε ότι :

$$p(T,x) \ge E_o[\exp(-r\tau)(q - xH(\tau))^+]$$

$$\geq \frac{q}{2} E_o[\exp(-r\tau) I_{\{\tau<T\}}]$$
$$\geq \frac{q}{2} \exp\{-rT\} P(\tau < T) > 0$$

Άρα τέλικα δείξαμε ότι $0 < p(T, x) < q$.

□

Πρόταση 2.2 *Η Βέλτιστη αναμενώμενη συνάρτηση αποπληρωμής* $p : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ *είναι συνεχής και κυριαρχεί της " εσωτερικής αξίας" του δικαιώματος που ορίζεται από την*

$$\varphi(x) = (q - x)^+, \qquad 0 \leq x < \infty.$$

Δηλαδή ισχύει ότι $p(t, x) \geq (q - x)^+$

Απόδειξη:

i) Για να αποδείξουμε οτι η $p(t, x)$ είναι συνεχής ως προς x, θεωρούμε το $(T, x) \in [0, \infty)^2$ και τον χρόνο στάσης

$$\tau_x = \inf\{t \in [0, T] : p(T - t, S(t)) = (q - S(t))^+\}$$

του Θεωρήματος 1.1

Επειδή ισχύει ότι $z_1^+ - z_2^+ \leq (z_1 - z_2)^+, \forall z_1, z_2 \in R$ έχουμε $\forall y \in [0, \infty)$ ότι:

$$p(T, x) - p(T, y) \leq E_o[\exp(-r\tau_x)(q - xH(\tau_x))^+] - E_o[\exp(-r\tau_x)(q - yH(\tau_x))^+] \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq E_o \exp(-r\tau_x)[(q - xH(\tau_x))^+ - (q - yH(\tau_x))^+] \\
&\leq E_o \exp(-r\tau_x)[(q - xH(\tau_x) - q + yH(\tau_x))^+] \\
&\leq E_o \exp(-r\tau_x)[((y - x)H(\tau_x))^+] \\
&\leq (y - x)^+ E_o[\exp(-r\tau_x)H(\tau_x))] \\
&\leq |x - y|
\end{aligned}$$

η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή γνωρίζουμε ότι η $\exp(-rt)H(t))$ είναι $P_o-supermartingale$ και $H(0) = 1$. Εάν τώρα εναλλάξουμε τα x και y, έχουμε $p(T, y) - p(T, x) \leq |x - y|$ οπότε,

$$|p(T, y) - p(T, x)| \leq |x - y|$$

άρα η $p(T, x)$ είναι *Lipschitz* συνεχής ως προς το x

ii) Για να αποδείξουμε οτι η $p(t, x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο T, ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Psi(t) = E_o[\max_{0 \leq s \leq t}(1 - \exp(-rs)H(s))^+]$$

για την οποία από το θεώρημα φράγμενης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \Psi(t) = 0.$$

Έστω $0 \leq T_1 \leq T_2$ και $x \in [0,\infty)$ δεδομένα. Ορίζουμε τους χρόνους στάσης

$$\tau_2 = \inf\{t \in [0,T_2); p(T_2 - t, xH(t)) = (q - xH(t))^+\} \wedge T_2$$

και

$$\tau_1 = \tau_2 \wedge T_1$$

τότε με $S(t) = xH(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq p(T_2,x) - p(\tau_1,x) &\leq E_o[\exp(-r\tau_2)(q - S(\tau_2))^+] - E_o[\exp(-r\tau_1)(q - S(\tau_1))^+] \\ &\leq E_o[\exp(-r\tau_2(q - S(\tau_2))^+ - \exp(-r\tau_1)(q - S(\tau_1))^+] \\ &\leq E_o[\exp(-r\tau_2)q - \exp(-r\tau_2)S(\tau_2)) - \exp(-r\tau_1)q + \exp(-r\tau_1)S(\tau_1))] \\ &\leq E_o[\exp(-r\tau_1)S(\tau_1)) - \exp(-r\tau_2)S(\tau_2))] \qquad (2.1). \end{aligned}$$

Όμως ισχύει

$$\exp(-r\tau_2)S(\tau_2) \geq \exp(-r\tau_2)\exp(-r(\tau_1 - \tau_2))S(\tau_2)\exp(r(\tau_1 - \tau_2)) =$$

$$= \exp(-r\tau_1)E_o[S(\tau_1) \setminus F(\tau_1)]$$

οπότε $-\exp(-r\tau_2)S(\tau_2) \leq -\exp(-r\tau_1)E_o[S(\tau_1) \setminus F(\tau_1)]$
ακόμη $\tau_1 = \tau_2 \wedge T_1$ και $\tau_2 = t \wedge T_1$
δηλαδή

$$-\exp(-r\tau_1)S(\tau_1) - \exp(-r\tau_1)E_o[S(\tau_1)|F(\tau_1)] =$$

$$= \exp(-r\tau_1)S(\tau_1) - \exp(-r\tau_1)E_o[S(\tau_1)I_{S(t)>H(T_1-t)}]|F(\tau_1)]$$

Άρα από την τελευταία σχέση η (2.1) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$0 \leq p(T_2,x) - p(\tau_1,x) \leq$$

$$\leq E_o[\exp(-r\tau_1)S(\tau_1)E_o[(1 - \min_{T_1 \leq t \leq T_2} \exp\{\sigma(W_o(t) - W(T_1)) - (\delta + \frac{s^2}{2})(t - T_1)\})^+|F(T_1)]]$$

$$= E_o\{\exp(-r\tau_1)S(\tau_1)\}E_o[\max_{T_1 \leq t \leq T_2} \exp\{\sigma(W_o(t) - W(T_1)) - (\delta + \frac{s^2}{2})(t - T_1)\})^+|F(T_1)]]$$

$$= E_o\{\exp(-r\tau_1)S(\tau_1)\Psi(T_1 - T_2) \leq S(0)\Psi(T_1 - T_2) =$$
$$= x\Psi(T_1 - T_2)$$

Άρα η συνάρτηση $p(t,x)$ είναι ομοιόμορφα συνέχης ως προς T. Επιπλέον επειδή μπορούμε πάντα να πάρουμε $\tau \equiv 0$ στην σχέση $p(T,x) = \sup_{\tau \in S(0,T)} E_o[\exp(-r\tau)(q - xH(\tau)) +]$,η συνάρτηση $p(T,x)$ κυριαρχεί της φ δηλαδή $p(T,x) \geq (q - x)^+ = \varphi(x)$. $\square$

Αν και αρχικά ενδιαφερόμαστε για την τιμή της $p(t,x)$ στον πεπερασμένο χρόνο T, θα ξεφύγουμε λίγο και θα θεωρήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στο $T=\infty$. Το δικαίωμα αυτό ονομάζεται **διηνεκές αμερικανικό δικαίωμα πώλησης** (*Perpetual American Put*) και αποτελεί το απλούστερο Αμερικανικό δικαίωμα χωρίς όμως να είναι αδιάφορο. Είναι ενδιαφέρον γιατί η βέλτιστη πολιτική άσκησης του δεν είναι προφανής και είναι απλό επειδή αυτή η πολιτική μπορεί να καθορισθεί με ακρίβεια. Το υποκείμενο αγαθό, η μετοχή, έχει τιμή $S(t)$ που δίνεται από την

$$dS(t) = \sigma S(t)dW_t + (r-\delta)S(t)dt$$

Ορίζουμε την αξία του Αμερικάνικου διηνεκούς δικαιώματος πώλησης σε μια μετοχή (συμβολίζεται με $V^{AP}(s,\infty)$), να είναι η ελάχιστη τυχαία μεταβλητή $\gamma(s)$, η οποία είναι $F^T(s)-$ μετρήσιμη για $T\in[s,\infty)$ και για την οποία υπάρχει το *martingale* χαρτοφυλάκιο $\pi(.)$ που ικανοποιεί την

$$\exp\{-rt\}(q-S(t))^+ \leq \exp\{-rs\}\gamma(s)+\int_s^t \exp\{-ru\}\pi'(u)\sigma(u)dW_o(u), \quad \sigma.\beta. \quad s\leq t<\infty$$

Το διηνεκές Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης πληρώνει $q-S(t)$ αν ασκηθεί στο χρόνο t,αυτο αποτελεί την εσωτερική του αξία. Ο κάτοχος του μπορεί να το ασκήσει σε οποιοδήποτε χρόνο. Συγκεκριμένα δεν υπάρχει ημερομηνία λήξης μετά την οποία δεν μπορεί πλέον να ασκηθεί. Αυτό κάνει όλους τους χρόνους ίδιους, οπότε είναι λογικό να περιμένουμε ότι η πολιτική άσκησης θα εξαρτάται μόνο από την τιμή $S(t)$ και όχι από την μεταβλητή t. Η τιμή του δικαιώματος δίνεται από τη σχέση

$$p(x) = \sup_{\tau} E_0[\exp\{-r\tau(q-S(\tau)^+\}]$$

όπου $x=S(0)$ είναι η αρχική τιμή της μετοχής. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό του είναι ότι ο κάτοχος του μπορεί τυπικά να επιλέξει τον χρόνο άσκησης αλλά δεν είναι υποχρεωμένος να καθορίσει πότε θα το ασκήσει. Η μαθηματική μοντελοποίηση αυτής της κατάστασης είναι ότι ο χρόνος τ πρέπει πλέον να είναι χρόνος στάσης.

Πρόταση 2.3 *Έστω η $W(t)$ η κίνηση Brown υπό το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\mu\in\mathbb{R}$ και $m>0$. Ορίζουμε την $S(t)=\mu t+W(t)$ και το σύνολο*

$$\tau_m = \min\{t\geq 0, S(t)=m\}$$

που είναι χρόνος στάσης. Αν η $S(t)$ δεν γίνει ποτέ ίση με m τότε ισχύει $\tau_m=\infty$ και

$$E\exp\{-\lambda\tau_m\} = \exp\{-m(-\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda})\}$$

για όλα τα $\lambda>0$.

Απόδειξη: Ορίζουμε το $\sigma = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}$ και τέτοιο ώστε $\sigma > 0$,ακόμη

$$\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = -\mu^2 + \mu\sqrt{\mu^2 + 2\lambda} + \frac{1}{2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})^2 =$$
$$= -\mu^2 + \mu\sqrt{\mu^2 + 2\lambda} + \frac{1}{2}\mu^2 - \mu\sqrt{\mu^2 + 2\lambda} + \frac{1}{2}\mu^2 + \lambda =$$
$$= \lambda$$

οπότε

$$\exp\{\sigma S(t) - \lambda t\} = \exp\{\sigma\mu t + \sigma W(t) - \sigma\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\} = \exp\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$$

που είναι *martingale*. Από το βέλτιστο δειγματικό θεώρημα ισχύει ότι η

$$M(t) = \exp\{\sigma W(t \wedge \tau_m) - \frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\}$$

είναι επίσης *martingale*.
Συνεπώς για κάθε $n > 0$ ακέραιο ισχύει ότι

$$1 = M(0) = EM(n) = E[\exp\{\sigma S(n \wedge \tau_m) - \lambda(n \wedge \tau_m)\}] =$$
$$= E[\exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq n\}}] + E[\exp\{\sigma S(n) - \lambda n\}I_{\{\tau_m > n\}}]. \tag{2.2}$$

Οι μη αρνητικές μεταβλητές $\exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq n\}}$ αυξάνουν ως προς n και το όριο τους είναι $\exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m < \infty\}}$
Δηλαδή

$$0 \leq \exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq 1\}} \leq \exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq 2\}} \leq ... \qquad \sigma.\beta.$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq n\}} = \exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m < \infty\}} \qquad \sigma.\beta.$$

Από Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} E\exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m \leq n\}} = \exp\{\sigma m - \lambda\tau_m\}I_{\{\tau_m < \infty\}} \qquad \sigma.\beta. \tag{2.3}$$

Ακόμη επειδή $S(n) \leq m$ για $n < \tau_m$ και $\sigma > 0$,η $\exp\{\sigma S(n) - \lambda n\}I_{\{\tau_m > n\}}$ ικανοποιεί την

$$0 \leq \exp\{\sigma S(n) - \lambda n\}I_{\{\tau_m > n\}} \leq \exp\{\sigma m - \lambda n\} \leq \exp\{\sigma m\} \qquad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον επειδή $\lambda > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{\sigma S(n) - \lambda n\}I_{\{\tau_m > n\}} \leq \lim_{n\to\infty} \exp\{\sigma m - \lambda n\} = 0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp\{\sigma S(n) - \mu n\}I_{\{\tau_m > n\}}] = 0 \tag{2.4}$$

Οπότε αν πάρουμε όριο στην (2.2) και χρησιμοποιώντας την (2.3) και την σχέση

$$1 = E[\exp\{\sigma m - \lambda \tau_m\} I_{\{\tau_m < \infty\}}]$$

έχουμε ότι

$$E[\exp\{-\lambda \tau_m\} I_{\{\tau_m < \infty\}}] = \exp\{-\sigma m\} = \exp\{-m(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})\} \tag{2.5}$$

Ενώ για όλα τα $\lambda > 0$ στο $\tau_m = \infty$ έχουμε $\exp\{-\lambda \tau_m\} = 0$. Άρα $E[\exp\{-\lambda \tau_m\}] = \exp\{-\sigma m\}$. $\square$

Χρησιμοποιήσαμε στην (2.5) ότι το $\lambda > 0$, όμως αν πάρουμε το $\lambda \downarrow 0$ τότε οι $\exp\{-\lambda \tau_m\} I_{\{\tau_m\}}$ είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές και αυξάνουν στο $I_{\{\tau_m < \infty\}}$ καθώς $\lambda \downarrow 0$ οπότε το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης μας επιτρέπει να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι

$$E[I_{\{\tau_m < \infty\}}] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp\{-m(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})\} = \exp\{m\mu - m|\mu|\}$$

Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του διηνεκούς Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης καθορίζει ένα θετικό επίπεδο $c < q$ και το πρόβλημα επιλύεται στον πρώτο χρόνο που η τιμή της μετοχής "πεφτεί" στην τιμή c. Αν η αρχική τιμή της μετοχής είναι μικρότερη ή ίση του c τότε το δικαίωμα ασκείται αμέσως.Τότε η τιμή του είναι

$$p(S(0)) = q - S(0)$$

Αν η αρχική τιμή της μετοχής είναι πάνω από το c ,τότε ασκείται στο χρόνο στάσης

$$\tau_c = \min\{t \geq 0, S(t) = c\}.$$

Στον χρόνο άσκησης , το δικαίωμα πληρώνει

$$q - S(\tau_c) = q - c.$$

Αποπληρώνοντας το δικαίωμα και παίρνοντας μέσες τιμές, υπολογίζουμε ότι η αξία του δικαιώματος πώλησης σύμφωνα με την παραπάνω στρατηγική άσκησης είναι

$$p_c(S(0) = (q - c)E[\exp\{-r\tau_c\}] \qquad \forall S(0) \geq c \tag{2.6}$$

Θεώρημα 2.1
Έχουμε ότι $\sigma() \equiv \sigma > 0, \delta() \equiv \delta \geq 0, r() \equiv r > 0$ *και την συνάρτηση του διηνεκούς Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης που δίνεται από την σχέση*

$$p_c(x) = \begin{cases} q - x, & 0 \leq x \leq c \\ \\ (q-c)(\frac{x}{c})^{\bar{\gamma}}, & x \geq c \end{cases} \tag{2.7}$$

Όπου

$$\bar{\gamma} = -\frac{1}{\sigma}[\nu + \sqrt{\nu^2 + 2r}],$$

$$\nu = \frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma \qquad \text{και} \qquad c = c_\infty = \frac{\bar{\gamma} q}{\bar{\gamma} - 1} < q.$$

Επιπλέον

$$p(S(0)) = \sup_\tau E_o[\exp\{-r\tau(q - S(\tau))^+\}] \tag{2.8}$$

όπου το supremum λαμβάνεται πάνω σε όλους τους χρόνους τ *που ικανοποιούν την* $\tau \leq t \in F^{(T)}(t)$ *και επιτυγχάνεται κατα τον τυχαίο χρόνο :*

$$\tau_c = \inf\{t \geq 0; S(t) \leq c\}$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τις Προτάσεις (2.4) και (2.5) υπολογίζουμε το

$$E_o \exp(-r\tau_c) = \exp[\nu y - |y|\sqrt{\nu^2 + 2r}] = (\frac{S(0)}{c})^{\bar{\gamma}}$$

όταν $S(0) > c$ όπου

$$y = \frac{1}{\sigma}\log(\frac{c}{S(0)}) < 0.$$

Το $\bar{\gamma}$ επίσης από την Πρόταση (2.3) ικανοποιεί την : $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 + \sigma\nu\gamma - r = 0$. Επιπλέον έχουμε ότι :

$$\bar{\gamma} < 0, \qquad \bar{\gamma} < \frac{r}{r-\delta}$$

και

$$\bar{\gamma} = -\frac{2r}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 2r} - \nu} = -\frac{2r}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{(\frac{r+\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})^2 - \frac{4r\delta}{\sigma}} - \nu} = -\frac{2r}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})^2 + 2\delta} - \nu}$$

που ισχύει επειδή η ποσότητα $r - \delta$ επιτρέπεται να είναι αρνητική.
Για την συνάρτηση p ισχύει ότι είναι κυρτή, ανήκει στο $C^1((0,\infty)) \cap C^2((0,\infty) \setminus \{c\})$ και ικανοποιεί τα εξής :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p''(x) + (r-\delta)xp'(x) - rp(x) = \delta x - rq < 0, \qquad 0 \leq x < c \tag{2.9.a}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p''(x) + (r-\delta)xp'(x) - rp(x) = 0, x > c \qquad (2.9.b)$$

$$p(x) = (q-x)^+, \qquad 0 \leq x < c \qquad (2.9.c)$$

$$p(x) > (q-x)^+, \qquad x > c \qquad (2.9.d)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της συνάρτησης p. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του *Ito* για κυρτές συναρτήσεις έχουμε

$$d[e^{-rt}p(S(t))] = -r\exp\{-rt\}p(S(t))dt + \exp\{-rt\}dp(S(t)) =$$

$$= e^{-rt}(\frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 p''(S(t)) + (r-\delta)S(t)p'(S(t)) - rp(S(t)))dt + e^{-rt}\sigma S(t)p'(S(t))dW_o(t)$$

$$= -e^{-rt}(\delta S(t) - rq)I_{\{S(t)<c\}}dt + e^{-rt}\sigma S(t)p'(S(t))dW_o t =$$

$$= e^{-rt}S(t)p'(S(t))\sigma dW_o(t) - e^{-rt}(\delta S(t) - rq)I_{\{S(t)>c\}}dt =$$

$$= dM(t) - d\Lambda(t)$$

όπου

$$M(t) = \int_0^t e^{-ru}S(u)p'(S(u))\sigma dW_o(u)$$

και

$$\Lambda(t) = \int_o^t e^{-rt}(qr - \delta S(u))I_{\{S(u)<c\}}dt.$$

Επειδή η p' είναι φραγμένη, η διαδικασία $M(t)$ είναι μια $P_o - martingale$,ενώ η Λ, από τον τύπο της, φαίνεται ότι είναι μη φθίνουσα αφού ισχύει $(qr - \delta S(u))1_{\{S(u)<c\}} \geq (qr - \delta c) > 0$ γιατί $\bar{\gamma}(r-\delta) < r$. Ακόμη, επειδή

$$p(x) = (q-x)^+, \quad 0 \leq x < c$$

και

$$p(x) > (q-x)^+, x > c,$$

για κάθε τυχαίο χρόνο που ικανοποιεί την

$$\{\tau \leq t\} \in F^{(T)}(t), \forall t \in (0,\infty)$$

έχουμε ότι

$$p(S(0)) = E_o[e^{-r(\tau\wedge t)}p(S(\tau\wedge t))] + E[\Lambda(\tau\wedge t)]$$

$$\geq E_o[e^{-r(\tau\wedge t)}(q - S(\tau\wedge t))^+] \qquad (2.10).$$

Επιπλέον

$$[\exp\{-r(\tau\wedge t)\}(q - S(\tau\wedge t))^+] \leq q.$$

Άρα από το Θεώρημα Φραγμένης σύγκλισης και τη συνέχεια της S

$$\lim E_o[\exp\{-r(\tau\wedge t)\}(q - S(\tau\wedge t))^+] = E_o[\exp\{-rt\}(q - S_\tau)^+; \tau < \infty]$$

οπότε έχουμε

$$p(S(0)) \geq E_o[I_{\{\tau<+\infty\}}e^{-rt}(q-S(\tau))^+] = E_oY(T). \tag{2.11}$$

$\forall$ τυχαίο χρόνο τ που ικανοποιεί την $\{T \leq t\} \in F^{(T)}(t)$.
Έστω, τώρα, ότι $\tau = \tau_c$ τότε $\Lambda(\tau_c) = 0$ και

$$p(S(\tau_c)) = p(c) = (q-c)^+ = (q - S(\tau_c))^+ \qquad \sigma.\beta.$$

στο $\tau_c < +\infty$ τότε

$$p(S(0)) = E_o[I_{\{\tau_c \leq t\}}e^{-r\tau_c}(q-S(\tau_c))^+] + E_o[I\{\tau_c > t\}e^{-rt}p(S(t))] \tag{2.12}$$

αλλά γνωρίζουμε ότι

$$E_o[I_{\{\tau_c>t\}}e^{-rt}p(x)] \leq E_oe^{-rt}q = S(0)e^{-\delta t} \to 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad t \to +\infty$$

Επομένως αν πάρουμε όριο στην (2.11), για $t \to +\infty$ έχουμε

$$p(S(0)) = E_o[I_{\{\tau_c<+\infty\}}e^{-r\tau_c}(q - S(\tau_c))^+] = E_o[Y(\tau_c)].$$

Όμως η (2.11), εξ ορισμού, δίνει ότι $p(S(0)) = \sup_\tau E_o[e^{-rt}(q-S(\tau))^+]$ οπότε αποδείξαμε ότι για $\tau = \tau_c$ λαμβάνουμε το *supremum* στην

$$p(S(0)) = \sup_\tau E_o[\exp -r\tau(q - S(\tau))^+]$$

ενώ για χρόνους στο απείρο

$$p(S(0)) = \lim_{T\to\infty} E_o[e^{-r(\tau_c\wedge T)}(q-S(\tau_c\wedge T))^+] \tag{2.13}$$ $\square$

Στην Πρόταση που ακολουθεί θα αποδείξουμε τη σχέση ανάμεσα στην αξία του Αμερικανικού δικαιώματος πεπερασμένου χρόνου και της αξίας του διηνεκούς πριν το άπειρο. Ακόμη θα δούμε ότι όταν $T \to \infty$, τότε οι δυο αυτές αξίες γίνονται ίσες.

Πρόταση 2.4 *Ισχύουν για τη συνάρτηση $p(T,x)$ που ορίζεται στην (0.3) και για την συνάρτηση $p(x)$ που ορίζεται από την (2.7) ότι*

$$p(T,x) \leq p(x) \quad \forall T \in [0,\infty), x \in [0,\infty)$$

και ακόμη ισχύει

$$\lim_{T\to\infty} p(T,x) = p(x)$$

Απόδειξη:Για $x = 0$ οι παραπάνω ορισμοί αποδεικνύουν ότι

$$p(T, 0) = q = p(0)$$

για όλα τα $T \in [0, \infty)$. Ενώ για $x \in (0, \infty)$ η σχέση (1.13) μας δίνει ότι

$$p(T, x) \leq p(x)$$

για όλα τα $T \in [0, \infty)$ αλλά η (1.8) δείχνει ότι

$$p(x) \leq \underline{\lim}_{T\to\infty} p(T, x).$$

Οπότε τελικά παίρνουμε

$$p(x) = \lim_{T\to\infty} p(T, x)$$

□

Ορίζουμε την περιοχή συνέχειας :

$$C = \{(T, x) \in (0, \infty)^2, p(T, x) > (q - x)^+\}$$

και

$$C_T = \{x \in (0, \infty), p(T, x) > (q - x)^+\} T \in (0, \infty)$$

Επειδή η p είναι συνεχής έχουμε ότι το σύνολο C είναι ανοιχτό στο $(0, \infty)^2$ και κάθε σύνολο C_T είναι ανοιχτό στο $(0, \infty)$.

Θα δείξουμε κάποιες ιδιότητες για την συνάρτηση του ελεύθερου συνόρου $c(t)$

Πρόταση 2.5 *Για κάθε $T \in (0, \infty)$ υπάρχει ένας αριθμός $c(T) \in (0, q)$ τέτοιο ώστε $C_T = (c(T), \infty)$. Η συνάρτηση $T \mapsto c(T)$ είναι μη αύξουσα, άνω ημισυνεχής και αριστερά συνέχης στο $(0, \infty)$. Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε ότι $c(0+) = \lim_{T\to 0} c(T), c(\infty) = \lim c(T)$ καθώς το $T \to \infty$, έχουμε ότι $c(0+) \leq q$ και $c(\infty) = c$ ενώ $c = \frac{\tilde{\gamma} q}{\tilde{\gamma} - 1} < q$*

Απόδειξη:

Όπως δείξαμε στην Πρόταση 1.1 (ιι) έχουμε

$$p(T, y) \geq p(T, x) + x - y$$

Επειδή, ακόμη, ισχύει η σχέση $p(T, x) > (q - x)^+, x \in C_T$ έχουμε

$$p(T, y) > (q - x)^+ + x - y \geq q - y$$

όμως το $p(T,y)>0$ άρα $p(T,y)>(q-y)^+$ οπότε $y\in C_T$, δηλαδή το C_T γράφεται

$$C_T=(c(T),\infty)$$

Για να αποδείξουμε ότι $c(t)$ φθίνουσα και άνω φραγμένη στο q ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Επειδή η απεικόνιση $T\mapsto p(T,x)$ είναι αύξουσα θα ισχύει ότι $\forall\varepsilon>0,\delta>0$,

$$p(T+\varepsilon,c(T)+\delta)\geq p(T,c(T)+\delta)>(q-c(T)-\delta)^+$$

οπότε έχουμε ότι

$$c(T+\varepsilon)<c(T)+\delta.$$

Όμως το δ που το έχουμε επιλέξει θετικό και αυθαίρετο, μας οδηγεί στην σχέση

$$c(T+\varepsilon)\leq c(T)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η $c(T)$ είναι φθίνουσα.
Επίσης ορίζουμε την ακολουθία $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. στο διάστημα $(0,\infty)$, η οποία έχει όριο $T_o\in(0,\infty)$ και για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}c(T_n)=c_o.$$

Επειδή το σύνολο C είναι ανοιχτό και το $(T_n,c(T_n))$ δεν ανήκει στο σ' αυτό για κάθε n, ισχύει ότι (T_o,c_o) δεν ανήκει στο C και επόμενως $c_o\leq c(T_o)$
Δηλαδή έχουμε το

$$\overline{\lim}_{T\to T_o}c(T)\leq c(T_o),\quad\forall T_o\in(0,\infty).$$

Άρα η $c(.)$ είναι άνω ημισυνεχής και επειδή είναι και φθίνουσα τέλικα θα έχουμε

$$c(T-)=c(T)0<p(T,x)<q$$

και

$$p(T,x)>0=(q-x)^+,\qquad \gamma\iota\alpha\quad x\geq q$$

Οπότε

$$c(T)<q$$

για όλα τα $T\in(0,\infty)$ άρα

$$c(0+)\leq q.$$

Από την Πρόταση 2.2, επίσης έξουμε ότι

$$p(T,x)\leq p(x),\qquad (q-c)^+\leq p(T,c)\leq p(c)=(q-c)^+$$

δηλαδή

$$c(T)\geq c$$

για όλα $T \in (0,\infty)$ και
$$c(\infty) \geq c.$$
Όμως για $x > c$, ισχύει
$$\lim{}_{T\to\infty} p(T,x) = p(x)$$
και παίρνουμε T κατάλληλα μεγάλο τέτοιο ώστε
$$p(T,x) > (q-x)^+$$
άρα $x > c(T)$ για κατάλλληλα μεγάλο T. Αφού το $x > c$ είναι τυχαίο έχουμε
$$c(\infty) \leq c$$
Τελικά έχουμε
$$c(T) \geq c(\infty) = c > 0$$
για όλα τα $T \in (0,\infty)$.

$\square$

Θεώρημα 2.2 *Η αξία του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης που δίνεται από την*
$$p(T,x) = \sup_{\tau\in S_{0,T}} E_o\left[\exp(-r\tau)\Big(q - xH(\tau)\Big)^+\right], \qquad 0 \leq x < \infty, \qquad 0 \leq T < \infty \qquad (0.3)$$
είναι η μοναδική λύση πάνω στο κλειστό σύνολο $\bar{C}$ του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.
$$Lf = 0 \qquad \sigma\tau o \qquad C = \{(t,x) \in ((0,\infty))^2, x > c(t)\} \qquad (2.14)$$
$$f(t,c(t)) = q - c(t) \qquad 0 \leq t < +\infty \qquad (2.15)$$
$$f(0,x) = (q-x)^+ \qquad c(0+) \leq x < +\infty \qquad (2.16)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \max_{0\leq t\leq T} \mid f(t,x) \mid = 0 \qquad \forall T \in (0,\infty) \qquad (2.17)$$
Όπου η $Lf = \frac{1}{2}\sigma^2x^2f_{xx} + (r-\delta)xf_x - rf - f_t$ και επιπλέον οι συναρτήσεις p_{xx}, p_x, p_t υπάρχουν και είναι συνεχείς στο C.

Απόδειξη: *i)* Έστω ότι παίρνουμε ένα σημείο $(t,x) \in C$. Επειδή το σύνολο C είναι ανοιχτό μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ανοιχτό ορθογώνιο
$$R = (x_1,x_2) \times (t_1,t_2) \quad \mu\varepsilon \quad (t,x) \in R \subset C$$
και τότε το
$$\partial_o R = \partial R \backslash [\{t_2\} \times (x_1,x_2)]$$

είναι το παραβολικό σύνορο του ορθογωνίου. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$Lf = 0, \qquad (t,x) \in R$$
$$f(t,x) = p(t,x), \qquad (t,x) \in \partial_o R$$

Επειδή ισχύει ότι $x_1 \geq c(t) > 0$, από την κλασσική θεωρία για τις παραβολικές εξισώσεις έχουμε ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης f με f_{xx} ,f_x και f_t να είναι συνεχείς.
Πρέπει να δείξουμε ότι f και p συμφωνούν στο R. ′ Εστω ότι (t_o,x_o) $\in R$ και θεωρούμε τον χρόνο στάσης στο S_{0,t_o-t_1} που δίνεται από

$$\tau = \inf\{\theta \in |[0, t_o - t_1]; (to - \theta, x_o H(\theta)) \in \partial_o R\} \wedge (t_o - t_1)$$

επίσης θεωρούμε την ανέλιξη

$$N(\theta) = \exp(-r\theta) f(t_o - \theta, x_o H(\theta)) \qquad \gamma\iota\alpha 0 \leq \theta \leq t_o - t_1$$

Από τον τύπο του Ito έχουμε ότι $N(. \wedge \tau)$ είναι μια φραγμένη Po - $martingale$ όποτε :

$$f(t_o, x_o) = N(0) = E_o N(\tau) = E_o[\exp(-r\tau) p(t_o - \tau, x_o H(\tau))] = p(t_o, x_o).$$

Επειδή (t_o-τ,$x_o H$ (τ)) $\in C$ προκύπτει ότι

$$\tau \leq \tau_x = \inf\{\{\theta \in [0, t_o), p(t_o - \theta, x_o H(\theta)) = (q - x_o H(\theta))^+\} \wedge t_o$$

δηλαδή το τ είναι άνω φραγμένο από τον πρώτο χρόνο εξόδου του (t_o-θ,$x_o H(\theta)$) στο C . Επιπλέον η f ικανοποιεί την $Lf = 0$ στο C οπότε από το βέλτιστο δειγματικό θεώρημα και την σχέση

$$\{\exp -r(t \wedge \tau_x) p(T - (t \wedge \tau_x), S(t \wedge \tau_x)), \quad F(t), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

που είναι $Po - martingale$ έχουμε ότι

$$E_o[\exp(-r\tau) p(t_o - \tau, x_o H(\tau))] = p(t_o, x_o)$$

Οπότε τα f ,p συμφωνούν στο R,επίσης οι συναρτήσεις p_{xx}, p_x, p_t είναι ορισμένες,συνέχης και ικανοποιούν την $Lf = 0$ στο C για το δεδομένο (t,x) $\in C$.

ii) Για την απόδειξη της (2.15) έχουμε ότι

$$f(t, c(t)) = q - c(t) = \exp\{-rt\}[q - c(t)H(t)]^+, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

iii) Στην απόδειξη της (2.16) έχουμε ότι

$$p(0, x) = (q - x)^+$$

για κάθε $x \geq 0$ άρα και για $x \geq c(0^+)$ το οποίο ισχύει επειδή

$$p(0,x) = E_o[\exp\{0\}(q - xH(0))^+] = (q-x)^+.$$

$iv)$Όσο αφορά την απόδειξη της σχέσης (2.17) ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Έστω $T \in (0,+\infty)$, για $(t,x) \in$[0,T] $\times$ (0,+∞) και ορίζουμε τον χρόνο στάσης

$$\tau_x = \inf\{\{\theta \in [0,t), p(t-\theta, xH(\theta)) = (q - xH(\theta))^+\} \wedge t$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει η

$$p(t,x) = E_o\Bigg[\exp(-r\tau_x)\Big(q - xH(\tau_x)\Big)^+\Bigg]$$

Επίσης ορίζουμε τον χρόνο στάσης

$$\varrho_x = \inf\{\theta \in (0,+\infty), xH(\theta) \leq q\}$$

έτσι ώστε

$$\tau_x \geq \varrho_x \qquad \sigma\tau o \qquad \{\varrho_x \leq t\}$$

και

$$\tau_x = t \qquad \sigma\tau o \qquad \{\varrho_x > t\}.$$

Τότε

$$0 \leq p(t,x) \leq qE_o\Bigg[1_{\{\varrho_x \leq t\}}\exp\{-r\varrho_x\}\Bigg] + E_o\Bigg[1_{\{\varrho_x > t\}}\exp\{-rt\}(q - xH(t))^+\Bigg] \leq$$

$$\leq qP_o\Bigg[\varrho_x \leq T\Bigg]$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} P_o\Bigg[\varrho_x \leq T\Bigg] = 0$$

οπότε

$$\sup_{t\in[0,T]} p(t,x)] = p(T,x) \to 0 \quad \forall T < \infty \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad x \to \infty$$

και f είναι αύξουσα ως προς το x και φθίνουσα ως προς το t.
Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα ορίζουμε την f στο σύνολο $\bar{C}$ να είναι η λύση του

προβλήματος που δίνεται από τις σχέσεις (2.14)-(2.17)
Σημειώνουμε ότι $\forall T \in (0, \infty)$, η f είναι φραγμένη στο

$$\{(t, x) \in [0, T] \times ([0, \infty); x \geq c(t))\}.$$

Για $x > c(T)$ ορίζουμε την διαδικασία

$$M(t) = \exp\{-rt\} f(T - t, xH(t)), \qquad 0 \leq t \leq T$$

και τον χρόνο στάσης

$$\tau_x = T \wedge \inf\{t \in [0, T] : xH(t) \leq c(T - t)\}$$

οπότε από τον τύπο του *Ito* έχουμε οτι η $\{M(t \wedge \tau_x) : 0 \leq t \leq T\}$ είναι μια φραγμένη $P_o - martingale$. Επειδή η συνάρτηση $p(T, x) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_o \Big[\exp(-r\tau)\Big(q - xH(\tau)\Big)^+\Big]$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο $\tau_x = \tau \wedge T$ που είναι ο βέλτιστος χρόνος, έχουμε από το βέλτιστο δειγματικό θεώρημα ότι

$$f(T, x) = M(0) = E_o(M(\tau_x)) = E_o[\exp\{-r\tau_x\} f(T - \tau_x, xH(\tau_x))] =$$

$$= E_o[\exp\{-r\tau_x\}(q - xH(\tau_x))^+] = p(T, x)$$

Άρα η συνάρτηση $p(T, x)$ που λύνει το πρόβλημα είναι μονάδικη.

Το θεώρημα αυτό υποστηρίζει οτι η p είναι αρκετά ομαλή για να επιτρέπει την εφαρμογή του κανόνα *Ito* στο φακελλο *Snell* $\xi(t) = \exp -rtp(T - t, S(t))$ υπό την προυπόθεση οτι $(T - t, S(t)) \in C$ δηλαδή ισχύει ότι $S(t) > c(T - t)$. Απ' την άλλη , στην περιοχή $\{(t, x) \in [0, \infty)^2, x < c(t)\}$ έχουμε $p(t, x) = q - x$ που είναι επίσης ομαλή .

Επιπλέον έχουμε ομαλότητα της p ακρίβως πάνω στο σύνορο $x = c(T)$ όπως θα αποδείξουμε στην η Πρόταση (2.7).Έχουμε επίσης αποδείξει ότι αυτό το δικαίωμα έχει σύνορο άσκησης το $c(t)$, όπου το δικαίωμα πρέπει να ασκηθεί αν $x < c(t)$ και να κρατηθεί αλλιώς. Υποθέτοντας ότι $c(t) < q$, η κλίση συνάρτησης αποπληρώμης $\max(q - x, 0)$ στο σημείο επαφής είναι -1. Υπάρχουν τρεις πιθανότητες για την κλίση του δικαιώματος, $p_x(T, c(T))$ στο $c(t)$

- $p_x(T, c(T)) < -1$
- $p_x(T, c(T)) > -1$
- $p_x(T, c(T)) = -1$

Θα δείξουμε ότι οι δυο πρώτες περιπτώσεις είναι λανθασμένες. Αρχικά έστω ότι $p_x(T, c(T)) < -1$. Τότε καθώς το x αυξάνει σε σχέση με το $c(t)$ τότε η τιμή $p(t, x)$ "πέφτει" κάτω από την τιμή αποπληρωμής επειδή η κλίση είναι περισσότερο αρνητική. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την σχέση μη επιτειδιότητας για το δικαίωμα μας

$$p(t, x) \geq \max(q - x, 0)$$

και συνεπώς είναι αδύνατο.

Έπειτα ας υποθέσουμε ότι $p_x(T, c(T)) > -1$, σ' αυτήν την περίπτωση η αξία του δικαιώματος με την κλίση αυτή δεν θα είναι βέλτιστη για τον κατοχό του , με την έννοια ότι δεν δίνει στο δικαίωμα την μέγιστη τιμή του. Σύμφωνα με την στρατηγική άσκησης ο κάτοχος πρέπει να αποφασίσει πόσο μακρυά από το x πρέπει να ασκήσει το δικαίωμα.Η βάση αυτής του της απόφασης είναι ότι η επιλογή της στρατηγικής πρέπει να μεγιστοποιήσει την κατάλληλη αξία του δικαιώματος για τον κάτοχο του. Επειδή το δικαίωμα ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση με την

$$f(t, c(t)) = q - c(t)$$

να είναι μια από τις συνοριακές συνθήκες, η επιλογή του $c(t)$ επηρεάζει την τιμή του δικαιώματος για όλες τις μεγαλύτερες τιμές από το $c(.)$. Συνεπώς αν $p_x(T, c(T)) > -1$ στο $c(t)$ η αξία του δικαιώματος κοντά στο $c(t)$ θα αυξάνεται.

Οπότε ξανά το δικαίωμα τιμολογείται λάθος. Δηλαδή η σωστή συνθήκη για το σύνορο είναι $p_x(T, c(T)) = -1$

□

Πρόταση 2.6 *Θεωρούμε ότι* $T \in (0, \infty)$. *Η κυρτή συνάρτηση* $x \to p(T, x)$ *είναι* C^1 *ακόμα και στο* $x = c(T)$. *Ειδικότερα* $p_x(T, c(T)) = -1$. (2.18)

Απόδειξη: Επειδή ισχύει η σχέση $p(T, x) = q - x$ για $0 \leq x < c(T)$ μπορούμε να πάρουμε ότι

$$\frac{p(T, c(T) + \varepsilon) - p(T, c(T))}{\varepsilon} = \frac{q - c(T) - \varepsilon - q + c(T)}{\varepsilon} = \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1$$

Δηλαδή

$$p_x(T, c(T)-) = -1.$$

Από την κυρτότητα της απεικόνισης $x \to p(T, x)$ (που αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.1) έχουμε οτι $p_x(T, c(T)+) \geq -1$ άρα αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα δηλαδή ότι

$$p_x(T, c(T)+) \leq -1.$$

Θέτουμε $x = c(T)$ και ορίζουμε τον χρόνο στάσης

$$\tau_{x+\varepsilon} = \inf\{t \in [0, T], (x + \varepsilon)H(t) \leq c(T - t)\} \wedge T, \qquad \textit{για} \qquad \varepsilon \geq 0$$

οπότε η $\tau_{x+\varepsilon}$ είναι μη φθίνουσα στο ε και $\tau_x \equiv 0$.
Επειδή $c(.)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση ισχύει

$$\tau_{x+\varepsilon} \leq \inf\{t \in [0, T]; H(t) \leq \frac{x}{x + \varepsilon}\} \wedge T.$$

Επιπλέον ο νόμος επαναλαμβανόμενων λογαρίθμων για την P_o- κίνηση $Brown$ $W_o(.)$ δίνει οτι :

$$P(\min_{0\leq t\leq \alpha} H(t)<1)=1 \qquad \gamma\iota\alpha \qquad \forall\alpha>0$$

και άρα το $\tau_{x+\varepsilon}\downarrow 0$ όταν $\varepsilon\downarrow 0 \quad \sigma.\beta.$
Επιπλέον

$$p(T,x+\varepsilon)=E_o[\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}(q-(x+\varepsilon)H(\tau_{x+\varepsilon}))^+]=$$

$$=E_o[\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}\ (q-xH(\tau_{x+\varepsilon}))^+]-$$

$$-E_o[\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}[(q-xH(\tau_{x+\varepsilon}))^+-(q-(x+\varepsilon)H(\tau_{x+\varepsilon}))^+]]$$

$$\leq p(T,x)-E_o[1_{\{\tau_{x+\varepsilon}<T\}}\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}[(q-xH(\tau_{x+\varepsilon}))-(q-(x+\varepsilon)H(\tau_{x+\varepsilon}))]-$$

$$-E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}[(q-xH(T))^+-(q-(x+\varepsilon)H(T))^+]$$

$$\leq p(T,x)-E_o[1_{\{\tau_{x+\varepsilon}<T\}}\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}(q-xH(\tau_{x+\varepsilon})-q+xH(\tau_{x+\varepsilon})+\varepsilon H(\tau_{x+\varepsilon}))]-$$

$$-E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}(q-xH(T)-q+xH(T)+\varepsilon)H(T)))]-$$

$$-\varepsilon E_o[1_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}H(T)]=$$

$$=p(T,x)-\varepsilon E_o[1_{\{\tau_{x+\varepsilon}<T\}}\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}H(\tau_{x+\varepsilon})]+\varepsilon E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}H(T)].$$

Δηλαδή

$$p(T,x+\varepsilon)-p(T,x)\leq$$

$$\leq -\varepsilon E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}<T\}}\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}H(\tau_{x+\varepsilon})]+\varepsilon E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}H(T)].$$

Διαιρώντας με $\varepsilon>0$ έχουμε

$$\frac{p(T,x+\varepsilon)-p(T,x)}{\varepsilon}\leq -E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}\leq T\}}\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}H(\tau_{x+\varepsilon})]+E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}}\exp\{-rT\}H(T)].$$

$$\Rightarrow p_x(T,x+) \le \lim_{\varepsilon\to 0} E_o[I_{\{\tau_{x+\varepsilon}=T\}} \exp\{-rT\}H(T)]-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} E_o[\exp\{-r\tau_{x+\varepsilon}\}H(\tau_{x+\varepsilon})]$$

Επειδή ισχύει η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα έχουμε για $\varepsilon \to 0$ ότι

$$p_x(T,x+) \le 0 - E_o(E_o[\exp\{-r\tau_x\}H(\tau_x) \to -1$$

δηλαδή παίρνουμε ότι

$$p_x(T,x-) \le -1$$

οπότε $p_x(T,c(T)) = -1$.

Θεώρημα 2.3 *Θεωρούμε ότι* $T \in (0,\infty)$ *και τη συνάρτηση* $\xi(t)$ *που ορίζεται από την σχέση*

$$\xi(t) = \exp\{-rt\}p(T-t,S(t))$$

Τότε η $\xi(t)$ *επιδέχεται το ανάπτυγμα Doob Mayer δηλαδή* $\xi(t) = M(t)-\ \Lambda\ (t)$ *όπου η διαδικασία*

$$M(t) = p(T,S(0)) + \sigma\int_0^t \exp\{-ru\}S(u)p_x(T-u,S(u))dW_o(u)$$

είναι μια $P_o - martingale$ *η και*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \exp\{-ru\}(qr - \delta S(u))I_{\{S(u)<c(T-u)\}}du$$

είναι μη φθίνουσα. Ειδικότερα έχουμε $\delta c(0+) \le rq$. *Η συνάρτηση* $\xi(t)$ *είναι ο φάκελος Snell.*

Απόδειξη: Ομαλοποιούμε την συνάρτηση $p(.,.)$ για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του *Ito*. Έστω ότι $\zeta : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ είναι μια C^∞ συνάρτηση,η οποία έχει φορέα στο $[0,1]^2$. Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε :

$$p^{(\varepsilon)}(t,x) = \int_0^\infty\int_0^\infty p(t+\varepsilon u, x+\varepsilon v)\zeta(u,v)dudv =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty\int_0^\infty p(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dsdy$$

Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιήσαμε τις αλλαγές μεταβλητών $s = t+\varepsilon u$ και $y = x+\varepsilon v$ και την Ιακωβιανή $J = \frac{1}{\varepsilon^2}$ που προκύπτει από αυτές. Άρα τότε η $p^{(\varepsilon)}(t,x)$ είναι της κλάσης C^∞ στο $(0,\infty)^2$. Επειδή, επιπλέον η $p_x(t,.)$ είναι συνεχής για $(t,x)\in(0,\infty)^2$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατα μέρη και να πάρουμε

$$p_x^{(\varepsilon)}(t,x) = -\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty\int_0^\infty p(s,y)\zeta_x(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dsdy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty\int_0^\infty p_x(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dsdy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty p_x(t+\varepsilon u, x+\varepsilon v)\zeta(u,v)dudv$$

Επίσης

$$p_{xx}^{(\varepsilon)}(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^4}\int_0^\infty\int_0^\infty p(s,y)\zeta_{xx}(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dsdy$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty[\int_0^{c(s)} p_x(s,y)\zeta_x(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dy+$$

$$+\int_{c(s)}^\infty p_x(s,y)\zeta_x(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dy]ds =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty\int_0^{c(s)} p_x(s,y)\zeta_x(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dyds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty\int_{c(s)}^0 p_x(s,y)\zeta_x(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-x}{\varepsilon})dyds,$$

(με ολοκλήρωση κατα μέρη ως προς y)

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty[p_x(s,c(s)-)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{c(s)-x}{\varepsilon})-$$

$$-\int_0^{c(s)} p_{xx}(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-\varepsilon}{\varepsilon})dy]ds$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty[-p_x(s,c(s)+)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{c(s)-x}{\varepsilon})-$$

$$-\int_{c(s)}^{\infty} p_{xx}(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-\varepsilon}{\varepsilon})dy]ds =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}[p_x(s,c(s)-)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{c(s)-x}{\varepsilon})-$$

$$-\int_0^{c(s)} p_{xx}(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-\varepsilon}{\varepsilon})dy+$$
$$+\int_0^{\infty} p_x(s,c(s))\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{c(s)-x}{\varepsilon})-$$

$$-\int_{c(s)}^{\infty} p_{xx}(s,y)\zeta(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-\varepsilon}{\varepsilon})dy]ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p_{xx}(s,y)(\frac{s-t}{\varepsilon},\frac{y-\varepsilon}{\varepsilon})dsdy =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p_{xx}(t+\varepsilon u, x+\varepsilon v)\zeta(u,v)dudv$$

και

$$p_t^{(\varepsilon)}(t,x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p_t(t+\varepsilon u, x+\varepsilon v)\zeta(u,v)dudv$$

όπου οι ζ_x είναι οι μερικές παράγωγοι του ζ σε σχέση με την x μεταβλητή. Επιπλέον ισχύει ότι οι $p_x^{(\varepsilon)}$ και $L_p^{(\varepsilon)}$ είναι φραγμένες σε συμπαγή υποσύνολα του $(0,\infty)^2$. Οπότε αν πάρουμε όρια έχουμε

$$p_x(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} p_x^{(\varepsilon)}(t,x)$$

και

$$Lp(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} Lp^{(\varepsilon)}(t,x), \quad \forall (t,x)\in(0,\infty)^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad x\neq c(t)$$

Οπότε κάνοντας Ito στην συνάρτηση $\xi(t)$ έχουμε ότι

$$\exp\{-rt\}p^{(\varepsilon)}(T-t,S(t)) = p^{(\epsilon)}(T,S(0)) + \int_0^t \exp\{-ru\}Lp^{(\varepsilon)}(T-u,S(u))du+$$

$$+\sigma\int_0^t \exp\{-ru\}S(u)p_x^{(\varepsilon)}(T-u,S(u))dW_o(u) \qquad (2.19)$$

Επίσης $\forall u \in (0,T)$ έχουμε $P_o[S(u)=c(T-u)]=0$, δηλαδή η πιθανότητα να είναι ίση η τιμή του δικαιώματος με την τιμή στο σύνορο είναι μηδενική οπότε :

$$\int_0^t \exp\{-ru\} Lp(T-u,S(u))du =$$

$$= \int_0^t \exp\{-ru\}(\delta S(u) - rq) I_{\{S(u)<c(T-u)\}} du \quad \sigma.\beta. \tag{2.20}$$

Άρα αν Θέσουμε $\varepsilon \to 0$ στην (2.19) έχουμε

$$\exp\{-rt\}p(T-t,S(t)) = p(T,S(0)) + \int_0^t \exp\{-ru\}Lp(T-u,S(u))du +$$

$$+\sigma \int_0^t \exp\{-ru\}S(u)p_x(T-u,S(u))dW_o(u)$$

και χρησιμοποιώντας την (2.20) έχουμε

$$\exp\{-rt\}p(T-t,S(t)) =$$

$$= p(T,S(0)) + +\sigma \int_0^t \exp\{-ru\}S(u)p_x(T-u,S(u))dW_o(u)$$

$$+ \int_0^t \exp\{-ru\}(\delta S(u) - rq) I_{\{S(u)<c(T-u)\}} du$$

$$= M(t) - \Lambda(t)$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$\xi(t) = M(t) - \Lambda(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Επίσης κάθως $t \uparrow T$, παίρνουμε τα όρια

$$\exp\{-rt\}p(0,S(T)) = p(T,S(0)) +$$

$$+ \int_0^T \exp\{-ru\}(\delta S(u) - rq) I_{\{S(u)<c(T-u)\}} du +$$

$$+\sigma \int_0^T \exp\{-ru\} S(u) p_x(T-u, S(u)) dW_o(u),$$

$$\Rightarrow \xi(T) = M(T) - \Lambda(T).$$

Η ανέλιξη $M(t) = p(T, S(0)) + \sigma \int_0^t \exp\{-ru\} S(u) p_x(T-u, S(u)) dW_o(u)$ είναι *martingale* επειδή ισχύει ότι $-1 \leq p_x \leq 0$ και $E_o \int_0^T S^2(u) du < +\infty$.

Επιπλέον για να αποδείξουμε ότι η $\Lambda(.)$ είναι μη φθίνουσα ακολουθούμε τα εξής. Η ανάλυση του $\xi(t) = M(.) - \Lambda(.)$ είναι μοναδική. Η σχέση αυτή διασπά το $\xi(t)$ σε μια συνεχή *martingale* $M(t)$ και σε μια συνεχή και με φραγμένη κύμανση ανέλιξη $\Lambda()$. Όμως ο φάκελος *Snell* επειδή είναι φραγμένος *supermartingale* έχει την ανάλυση $Doob - Mayer$ (Βλέπε Παραρτημα) δηλάδη αναλύεται σε (μια συνεχή *martingale*)-(μια συνεχή μη φθίνουσα ανέλιξη). Άρα η $\xi(t) = M(t) - \Lambda(t)$ είναι ανάλυση $Doob - Mayer$, οπότε η Λ θα είναι η μη φθίνουσα ανέλιξη.
Επιπλέον επειδή έχουμε ότι

$$P_o[S(u) < c(T-u)] > 0, \forall u \in [0, T],$$

αυτή η σχέση μπορεί να ισχύει μόνο αν $rq - \delta c(T-u) \geq 0$ για *Lebesque* $\sigma.\beta.$ $u \in [0, T]$. Συγκεκριμένα $\delta c(0+) \leq rq$.

□

Πόρισμα 2.1 *Θεωρούμε ότι* $T \in (0, \infty)$. *Η συνάρτηση* $\xi(t)$

$$\xi(t) = \exp^{-rt} p(T-t, S(t))$$

επιτρέπει την αναπαράσταση

$$\xi(t) = E_o[e^{-rT}(q - S(T))^+ / F(t)] + [E_o[\Lambda(T) - \Lambda(t) / F(t)] \qquad 0 \leq t \leq T$$

όπου $\Lambda(.)$ *είναι ορισμένη από τη σχέση* $\Lambda(t) = \int_0^t \exp\{-ru\}(qr - \delta S(u)) I_{\{S(u) < c(T-u)\}} du$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3 έχουμε
$E_o[e^{-rT}(q - S(T))^+ / F(t)] =$

$$= E_o[\xi(T) | F(t)] = \quad (DoobMayer)$$

$$= E_o[M(T) - \Lambda(T) | F(t)] =$$

$$= E_o[M(T) | F(t)] - E_o[\Lambda(T) | F(t)] =$$

$$= E_o[M(T)|F(t)] - E_o[\Lambda(T) + \Lambda(t) - \Lambda(t)|F(t)] =$$
$$= M(t) - \Lambda(t) - E_o[\Lambda(T) - \Lambda(t)|F(t)] =$$
$$= \xi(t) - E_o[\Lambda(T) - \Lambda(t)|F(t)] \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Οπότε αποδείξαμε ότι

$$\xi(t) = E_o[\exp\{-rT\}(q - S(T))^+|F(t)] + [E_o[\Lambda(T) - \Lambda(t)|F(t)] \qquad 0 \leq t \leq T$$

□

Παρατήρηση 2.1
Το πόρισμα 2.1 διευκολύνει τον ακριβή υπολογισμό της αξίας : $p(T, x)$ στο $t = 0$ του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης με ημερομήνια λήξης $T > 0$ και τίμη άσκησης $q > 0$ όταν $S(0) = x$.

Πρόταση 2.7 *Η συνάρτηση του ελεύθερου συνόρου $c : [0, \infty) \to (0, q]$ είναι συνεχής και ισχύει*

$$c(0+) = \begin{cases} q, & \alpha\nu \quad r \geq \delta \\ \\ \frac{rq}{\delta}, & \alpha\nu \quad r < \delta \end{cases}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $c(0) = q$ αν $r \geq \delta$ και $c(0) = \frac{rq}{\delta}$ αν $r < \delta$. Από Πρόταση 1.1 η $c(.)$ είναι αριστερά συνεχής και μη αύξουσα . Για να αποδείξουμε ότι η c είναι δεξιά συνεχής υποθέτουμε ότι $c(t_o) > c(t_o+)$ για κάποιο $t_o \in [0, \infty)$ και ορίζουμε το

$$x_1 = \frac{1}{2}[c(t_o) + c(t_o+)] < c(t_o) \leq c(0)$$

Έστω $t \in (t_o, \infty)$ και $x \in (c(t), x_1)$ δεδομένα . Από το Θεώρημα 2.1 και το γεγονός ότι $p(, x)$ είναι μη φθίνουσα έχουμε

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p_{xx}(t, x) \geq (r - \delta) x p_x(t, x) - rp(t, x)$$

Επίσης

$$p(t, x) \geq (q - x)^+ \geq q - x_1 > 0,$$

οπότε επειδή $r \geq \delta$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$-1 \leq p_x(t, x) \leq 0$$

για να γράφουμε :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p_{xx}(t, x) \geq r(q - x_1) > 0.$$

Απ' την άλλη, όταν το $r < \delta$ και επειδή ισχύει $\delta x_1 < \delta c(0+) = rq$ έχουμε ότι :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p_{xx}(t,x) \geq -(\delta - r)x_1 + r(q - x_1) = rq - x_1\delta > 0,$$

επειδή $\delta x_1 < \delta c(0+) = rq$.
Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$p_{xx}(t,x) \geq \eta = \frac{2[rq - (r \vee \delta)x_1]}{\sigma^2 x_1^2} > 0 \quad \forall t \in (t_o, \infty), x \in (c(t), x_1).$$

Αν πάρουμε $\phi(\xi) = (q - \xi)^+, t \in (t_o, \infty)$ και $x_o \in (c(t_o+), x_1)$ τότε υπολογίζουμε την ποσότητα

$$p(t, x_o) - \phi(x) = \int_{c(t)}^{x_o} \int_{c(t)}^{y} [p_{xx}(t,\xi) - \phi''(\xi)] d\xi dy \geq \frac{1}{2}\eta(x_o - c(t))^2$$

που ισχύει επειδή $\phi(c(t)) = p(t, c(t))$ και $p(t, c(t)) = \phi(c(t)), p_x(t, c(t)) = \phi'(c(t))$.
Έπειτα αφήνοντας το $t \downarrow t_o$ και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια του p, παίρνουμε ότι

$$p(t_o, x_o) \geq (q - x_o)^+ + \frac{1}{2}\eta(x_o - c(t_o+))^2 > q - x_o.$$

Άρα τελικά ισχύει $c(t_o) < x_o$ που είναι αντίθετο με τον ορισμό του x_1

Ορίζουμε το χωρίο

$$D = \{(t,x) \in (0,\infty)^2; x > d(t)\} \qquad (2.21)$$

• Θεωρούμε τη συνάρτηση d που είναι μη αύξουσα και αριστερά συνεχής στο $[0,\infty)$ (2.22) και
• τη συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\infty)^2$ με f_t, f_x και f_{xx} να είναι ορισμένες και συνεχείς στο ανοιχτό σύνολο D (2.23)
Επίσης ορίζουμε το σύνολο

$$G = [0,\infty) \times [0,q), \quad \alpha\nu \quad r \geq \delta,$$

και

$$G = [0,\infty) \times [0, \frac{rq}{\delta}) \quad \alpha\nu \quad \delta \geq r$$

Στο σύνολο G είναι ομαλή και ισχύει ότι

$$Lf(t,x) = \delta x - rq < 0, \qquad \forall (t,x) \in G$$

Θεώρημα 2.4 *Το ζευγάρι των συναρτήσεων* $(p(.,.), c(.))$ *είναι η μονάδικη λύση του προβλήματος του ελευθέρου συνόρου που γράφεται ως εξής*

$$d(0) = d(0+) \leq \frac{rq}{\delta} \qquad \alpha\nu \qquad \delta > r \tag{2.24}$$

$$Lf = 0 \quad \sigma\tau o \quad D, \acute{o}\pi o \upsilon : Lf = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 fxx + (r-\delta)xfx - rf - ft \tag{2.25}$$

$$f(t,x) \geq (q-x)^+, \qquad \forall \quad (t,x) \in [0,\infty)^2 \tag{2.26}$$

$$f(t,x) = (q-x), \quad \forall \quad t \in [0,\infty), \quad 0 \leq x \leq d(t), \tag{2.27}$$

$$f(0,x) = (q-x)^+, \quad \forall \quad x \in [d(0),\infty), \tag{2.28}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \max_{0\leq t\leq T} \mid f(t,x) \mid = 0 \qquad \forall T \in (0,\infty) \tag{2.29}$$

$$f_x(t, d(t)+) = -1, \quad \forall \quad t \in (0,\infty). \tag{2.30}$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι από τις προτάσεις (2.2),(2.3), τον ορισμό του συνόλου C από το θεώρημα (2.2), το λήμμα (2.3) και τη σχέση

$$\delta c(0+) \leq rq$$

ότι το ζευγάρι $(p(,), c(,))$ λύνει το πρόβλημα (2.21)-(2.30).

Σταθεροποιούμε το $(T,x) \in [0,\infty)^2$ και χρησιμοποιούμε την ομαλοποίηση του θεωρήματος (2.3) για να πάρουμε τον τύπο :

$$\exp\{-rt\}f(T-t, S(t)) = M^f(t) - \Lambda^f(t), \qquad 0 \leq t \leq T$$

όπου $x = S(0)$,και η διαδικάσια $M^f()$ είναι P_o- τοπική *martingale*

$$M^f(t) = f(T,x) + \sigma \int_0^t \exp\{-ru\}S(u)f_x(T-u, S(u))dW_o(u)$$

ακόμη επειδή ισχύει η σχέση

$$Lf(t,x) = \delta x - rq < 0, \qquad \forall (t,x) \in G$$

η ανέλιξη

$$\Lambda^f(t) = \int_0^t \exp\{-ru\} I_{\{S(u)<d(T-u)\}}(rq - \delta S(u))du$$

είναι μη φθίνουσα.
Έστω $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι η ακολούθια των χρόνων στάσης με

$$\tau_n \uparrow T \quad \sigma.\beta.$$

και τέτοια ώστε

$$\{M^f(t \wedge \tau_n); 0 \leq t \leq T\}$$

να είναι P_o- *martingale*. Δηλαδή

$$M^f(t \wedge \tau_n) = f(T,x) + \sigma \int_0^{t\wedge\tau_n} \exp\{-ru\} S(u) f_x(T-u, S(u)) dW_o(u)$$

$$M_o^f = f(T,x).$$

$$EM_{\tau\wedge\tau_n} = M_o = 0$$

$$S_t(x) \leq c(\tau - t)$$

Για κάθε χρόνο στάσης $\tau \in S_{0,T}$ έχουμε

$$E_o[\exp\{-r(\tau\wedge\tau_n)\} f(T-(\tau\wedge\tau_n), S(\tau\wedge\tau_n)) = f(T,x) - E_o\Lambda^f(\tau\wedge\tau_n) \qquad (2.31)$$

που ισχύει λόγω του Πορίσματος 2.1. Οπότε επειδή η f είναι φραγμένη στο $[0,T]\times[0,\infty]$ και επιπλέον πάρουμε όριο το στην (2.30) θα έχουμε για $\tau_n \uparrow T$ ότι

$$E_o[e^{-r\tau} f(T-\tau, S(\tau))] = f(T,x) - E_o\Lambda^f(\tau) \qquad \forall \tau \in S_{0,T} \qquad (2.32)$$

Ακόμη επειδή ισχύει η σχέση

$$f(t,x) \geq (q-x)^+$$

και η $\Lambda^f(\tau)$ είναι μη αρνητική έχουμε οτι

$$E_o[\exp\{-r\tau\}(q - S(\tau))^+] \leq f(T,x) \qquad \gamma\iota\alpha \qquad o\lambda\alpha \qquad \tau\alpha \qquad \tau \in S_{0,T}$$

οπότε λαμβάνουμε

$$p(T,x) \leq f(T,x).$$

Επιπλέον αν ορίσουμε τον χρόνο στάσης

$$\tau_x = T \wedge \inf\{t \geq 0; S(t) \leq d(T-t)\}$$

να είναι ο χρόνος χτυπήματος για το κλειστό συνόλο $[0,\infty)^2 \setminus D$ παίρνουμε

$$f(T-\tau_x, S(\tau_x)) = (q - S(\tau_x))^+$$

Από τις σχέσεις Η σχέση (2.32) για $\tau = \tau_x$ γίνεται

$$E_o[\exp\{-r\tau_x\} f(T-\tau_x, S(\tau_x))] = f(T,x) - E_o\Lambda^f(\tau_x)$$

Δηλαδή

$$E_o[\exp\{-r\tau_x\}(q - S(\tau_x))^+] = f(T,x).$$

Οπότε τελικά ισχύει

$$p(T,x) = f(T,x) \qquad \sigma\tau o \qquad [0,\infty)^2$$

Μένει να δείξουμε οτι οι συναρτήσεις $c(.)$ και $d(.)$ είναι ίσες, για το σκοπό αυτό θα δημιουργήσουμε ισότητα ανάμεσα στα (ανοιχτά) σύνολα

$$C = \{(t,x) \in (0,\infty)^2; p(t,x) > (q-x)^+\} =$$

$$= \{(t,x) \in (0,\infty)^2; x > c(t)\}$$

και

$$D = \{(t,x) \in (0,\infty)^2, x > d(t)\}.$$

Πράγματι για $(t,x) \in C$ έχουμε ότι

$$Lp(t,x) = 0$$

που σημαίνει ότι το (t,x) δεν ανήκει στο $(0,\infty)^2 \backslash \overline{D}$. Επίσης

$$C \subseteq \overline{D}$$

αλλά επειδή τα C και D είναι ανοιχτά πρέπει να έχουμε στην πραγματικότητα

$$C \subseteq D.$$

Όμως οι ρόλοι των C και D μπόρουν να εναλλαγχούν οπότε

$$D \subseteq C$$

δηλαδή πράγματι ισχύει ότι

$$C = D.$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θεώρημα 3.1 ***(Βελτιστό δειγματικό θεώρημα)***
Έστω X_n μια προσαρμοσμένη (adapted) ακολουθία και c ένας χρόνος στάσης (stopping time) . Τότε :
i) Η ακολουθία X^T είναι προσαρμοσμένη
ii) Αν X_n είναι μια martingale , η ακολουθία X^T είναι μια martingale ειδικά

$$E(X_n^T) = X_o \qquad \forall n$$

iii) Αν είτε $\tau(\omega) \leq c \leq +\infty \ \forall \ \omega$ ή αν η ακολουθία X_n είναι φραγμένη ,δηλαδή $|X_n(\omega)| \leq K \ \forall \ n, \omega$ και κάποιο $K > 0$ έχουμε :

$$E(X_\tau) = E(X_{\tau(\omega)}(\omega)) = E(X_o)$$

Θεώρημα 3.2 *(**Girsanov**) Ας θεωρήσουμε $u_t = (u_{1,t}, ..., u_{n,t})$ ένα διάνυσμα από τετραγωνικές ολοκληρώσιμες στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν την συνθήκη Novikov*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_s u_s ds\right)\right] < \infty$$

Έστω W_t μια τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P. Ας ορίσουμε την στοχάστικη διαδικασία

$$M_t^u = \exp\left[-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s u_s ds\right], \qquad t \in [0, T].$$

Η στοχαστική αυτή διαδικάσια είναι μια martingale κάτω από το μέτρο P. Θεωρούμε, έπισης, το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q^u που ορίζεται από το

$$\frac{dQ^u}{dP} = M_t^u$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία $\tilde{W}_t^u$ που ορίζεται από την σχέση

$$\tilde{W}_t^u = W_t + \int_0^t u_s ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

είναι μια τυπική κίνηση Brown και μια martingale κάτω από το μέτρο Q^u. Επιπλέον, η $\tilde{W}_t^u$ έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε τοπική Q^u − martingale L_t υπάρχει κάποια ϕ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε

$$L_t = L_o + \int_0^t \phi_s d\tilde{W}_s^u, \qquad t \leq T$$

Πρόταση 3.1 *Για κάθε $u \in S$ και $\tau \in S_u$, η οικογένεια $\{E[Y(\rho)|F(u)]\}_{\rho \in S_\tau}$ είναι κλειστή ως προς τη μεγιστοποίηση. Υπάρχει μια ακολουθία $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ από χρόνους στάσης στο S_τ, τέτοια ώστε η ακολουθία*

$$\{E[Y(\rho_n)|F(u)]\}_{n=1}^{\infty}|$$

να είναι μη φθίνουσα και να ισχύει η σχέση

$$ess \quad sup_{\rho \in S_\tau} E[Y(\rho)|F(u)] = \lim_{n \to \infty} E[Y(\rho_n)|F(u)] \qquad (3.1)$$

Απόδειξη: Έστω ρ_1 και ρ_2 στο S_τ και το σύνολο

$$A = \{E[Y(\rho_1)|F(u)] \geq E[Y(\rho_2)|F(u)]\}, \qquad \rho_3 = \rho_1 1_A + \rho_2 1_{A^c}.$$

Επειδή $A \in F_u$, ο τυχαίος χρόνος ρ_3 είναι χρόνος στάσης.
Ειδικότερα , $\rho_3 \in S_\tau$ και

$$\begin{aligned} E[U(\rho_3)|F(u)] &= 1_A E[Y(\rho_1)|F(u)] + 1_{A^c} E[Y(\rho_2)|F(u)] \\ &= E[Y(\rho_1)|F(u)] \vee E[Y(\rho_1)|F(u)] \qquad (3.2) \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2 *Για κάθε $u \in S, \sigma \in S \quad και \quad \tau \in S$ έχουμε*

$$Z(u) = Z(\sigma) \quad \sigma.\beta. \quad \sigma\tau \quad o\{\sigma = u\} \qquad (3.3)$$

$$E[Z(\tau)|F(u)] = ess \sup_{\rho \in S_\tau} E[Y(\rho)|F(u)] \quad \sigma.\beta. \qquad (3.4)$$

$$E[Z(\tau)|F(u)] \leq Z(u) \quad \sigma.\beta. \qquad (3.5)$$

$$E[Z(\tau)] = \sup_{\rho \in S_\tau} E(Y(\rho)) \leq Z(0) < \infty \qquad (3.6)$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη της (3.3) σημειώνουμε ότι το γεγονός $B = \{u = \sigma\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $F_u \cap F_\sigma = F_{u\wedge s}$. Για δεδομένο $\tau \in S_u$ ορίζουμε τον χρόνο $\tau_B = \tau 1_B + T1_B^c$, τέτοιον ώστε $\tau_B \in S_\sigma$.Από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής έχουμε ότι

$$1_B E[Y(\tau)|F(u)] = 1_B E[Y(\tau_B)|F(u)] = 1_B E[Y(\tau_B)|F(u \wedge \sigma)]$$

$$= 1_B E[Y(\tau_B)|F(\sigma)] \leq 1_B Z(\sigma) \quad \sigma.\beta.$$

για κάθε $\tau \in S_u$. Επιπλέον

$$Z(u) \leq Z(\sigma)$$

σχεδόν βεβαίως στο B. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των u και σ λαμβάνουμε την (3.3). Για την (3.4) χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.1 και επιλέγουμε μια ακολουθία $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο S_τ τέτοια ώστε $\{E[Y(\rho_n)|F(\tau)]\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μη φθίνουσα και

$$Z(\tau) = \lim_{n\to\infty} E[Y(\rho_n)|F(\tau)].$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για υπό συνθήκη μέσες τιμές, έχουμε

$$E[Z(\tau)|F(u)] = \lim_{n\to\infty} E[E\{Y(\rho_n)|F(\tau)\}|F(u)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} E[Y(\rho_n)|F(u)]$$

$$\leq ess \quad sup_{\rho\in S_\tau} E[Y(\rho)|F(u)].$$

Από την άλλη , $Z(\tau) \geq E[Y(\rho)|F(\tau)]$ ισχύει για κάθε $\rho \in S_\tau$ και παίρνοντας υπό συνθήκη μέσες τιμές και στις δυο πλευρές της ανισότητας έχουμε ότι

$$E[Z(\tau)|F(u)] \geq E[Y(\rho)|F(u)].$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι

$$E[Z(\tau)|F(u)] \geq esssup_{\rho\in S_\tau} E[Y(\rho)|F(u)]$$

που αποδεικνύει την (3.4).Επειδή ισχύει ότι

$$esssup_{\rho\in S_\tau} E[Y(\rho)|F(u)] \leq esssup_{\rho\in S_u} E[Y(\rho)|F(u)] = Z(u)$$

έχουμε την (3.5) άμεσα από την (1.3). Επιπλέον αν θέσουμε $u \equiv 0$ στις (3.4) και (3.5) λαμβάνουμε την (3.6).

□

Πρόταση 3.3 *Ο φάκελος Snell* $Z^0(.)$ *του* $Y(.)$ *ικανοποιεί την σχέση*

$$Z^0(u) = Z(u) \quad \sigma.\beta. \tag{3.7}$$

για κάθε $u \in S$. *Επιπλέον ο* $Z^0(.)$ *κυριαρχεί της* $Y(.)$ *και αν* $X(.)$ *είναι μια άλλη RCLL supermartingale που κυριαρχεί της* $Y(.)$, *τότε η* $X(.)$ *επίσης κυριαρχεί της* $Z^0(.)$

Πρόταση 3.4 *Για* $0 < \lambda < 1$ *και κάθε* $u \in S$, *έχουμε :*

$$Z^o(u) = E[Z^o(D^\lambda(u)\ F(u)] \qquad \sigma.\beta. \tag{3.8}$$

Πρόταση 3.5 *Έστω* $Y()$ *έχει μια συνεχή βήματα και η υπόθεση*

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} Y(t)] < +\infty$$

ισχύει . Τότε για κάθε $u \in S$ *ο ορίζεται από :*

$$D_*(u) = \lim_{\lambda\to 1} D^\lambda(u) \qquad \sigma.\beta.$$

και ικανοποιεί :

$$E[Y(D_*(u))\ F(u)] = Z^o(u) = ess \sup_{\tau\in S_u} E[Y(\tau)\ F(u)] \qquad \sigma\chi.\beta. \tag{3.9}$$

Στο $D_*(u)$ *λαμβάνεται το* sup *και*

$$D_*(u) = \inf\{t \in [u,T], Z^o(t) = Y(t)\} \qquad \sigma.\beta. \tag{3.10}$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4 και την ανισότητα

$$\lambda Z^o(D^\lambda(u)) \leq Y(D^\lambda(u))$$

έχουμε ότι

$$Z^o(u) = E[Z^o(D^\lambda(u))|F(u)] \leq \frac{1}{\lambda}E[Y(D^\lambda(u))|F(u)] \quad \sigma.\beta.$$

Επίσης για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε ότι $Y(D^\lambda(u)) \leq \bar{Y}$ όπου

$$\bar{Y} = \sup_{0\leq t\leq T} Y(t) \tag{3.11}$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για υπό συνθήκη μέσες τιμές , σε συνδυασμό με την αριστερή συνέχεια του $Y(t)$ και να υπολογίσουμε ότι

$$Z^o(u) \leq \lim_{\lambda \uparrow 1} E[Y(D^\lambda(u))]|F(u)] = E[Y(D_*(u))|F(u)] \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον επειδή η $Z^o(.)$ είναι *supermartingale* και κυριαρχεί της $Y(.)$ παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα

$$E[Y(D_*(u))|F(u)] \leq E[Z^o(D_*(u))|F(u))] \leq Z^o(u) \qquad \sigma.\beta.$$

και έτσι αποδείξαμε την (3.9). Επίσης από την (3.9) και την ιδιότητα της *supermartingale*, έχουμε ότι

$$EY(D_*(u)) = EZ^o(u) \geq EZ^o(D_*(u)).$$

Αλλά η $Z^o(.)$ κυριαρχεί της $Y(.)$, οπότε ισχύει ότι

$$Y(D_*(u)) = Z^o(D_*(u)) \qquad \sigma.\beta.$$

και

$$D_*(u) \geq \inf\{t \in [u, T]; Z^o(t) = Y(t)\} \qquad \sigma.\beta.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι ο ορισμός του

$$D^\lambda(u) = \inf\{t \in (u, T]; \lambda Z^o(t) \leq Y(t)\} \wedge T$$

δίνει ότι

$$Y(t) < \lambda Z^o(t) \leq Z^o(t)$$

για κάθε $t \in (u, D^\lambda(u))$ και $\lambda \in (0, 1)$. Ακόμη ισχύει ότι

$$D_*(u) = \lim_{\lambda \uparrow 1} D^\lambda(u) \leq \inf\{t \in (u, T]; Z^o(t) = Y(t)\} \qquad \sigma.\beta.$$

Επίσης για την παραπάνω σχέση ισχύει ότι

$$D_*(u) \leq \inf\{t \in [u, T]; Z^o(t) = Y(t)\} \qquad \sigma.\beta.$$

οπότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$D_*(u) = u \qquad \sigma.\beta. \quad \sigma\tau o \quad \{Z^o(u) = Y(u)\}.$$

Στο σύνολο $\{Z^o(u) = Y(u) > 0\}$, η δεξιά συνέχεια του $Z^o(u)$ και $Y(.)$ συνεπάγεται ότι

$$D^\lambda(u) = u \qquad \sigma.\beta.$$

για όλα τα $\lambda \in (0, 1)$ και επιπλέον

$$D_*(u) = u \qquad \sigma.\beta.$$

Επίσης σύμφωνα με το δειγματικό θεώρημα ισχύει ότι

$$E[1_{\{Z^o(u)=0\}}Z^o((u+\theta)\wedge T)] \leq E[1_{\{Z^o(u)=0\}}Z^o(u)] = 0 \qquad \sigma.\beta., \theta \geq 0$$

άρα υπολογίζουμε ότι ισχύει

$$\lambda Z^o(t) = 0 \leq Y(t), 0 \leq t \leq T \quad \sigma.\beta. \quad \sigma\tau o \quad \{Z^o(u) == Y(u) = 0\}$$

Όμως σε αυτό το σύνολο έχουμε, επίσης ότι

$$D_*(u) = u \qquad \sigma.\beta.$$

□

Πρόταση 3.6 *Υπό τη υπόθεση $E[\sup_{0\leq t\leq T} Y(t)] < \infty$ η RCLL supermartingale $Z^o()$ επιτρέπει την ανάλυση Doob− Meyer*

$$Z() = M() - \Lambda() \qquad (3.12)$$

Η $M()$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη RCLL martingale σε σχέση με την σ-άλγεβρα $\{F(t)\}_{0\leq t\leq T}$ και η $\Lambda()$ είναι μια δεξία - συνεχής μη αύξουσα $\{F(t)\}_{0\leq t\leq T}$-προσαρμοσμένη ανέλιξη με

$$\Lambda(0) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad E\Lambda(T) < \infty.$$

Ακόμη αν $Y()$ έχει συνεχή βήματα , τότε η $\Lambda()$ είναι συνεχής και "επίπεδη" μακρυά απο το σύνολο

$$H(\omega) = \{t \in [0,T]; Z^o(t,\omega) = Y(t,\omega)\}$$

δηλάδη

$$\int_0^T I_{\{Z^o(t)>Y(t)\}} d\Lambda(t) = 0 \qquad \sigma.\beta. \qquad (3.13)$$

Απόδειξη:Αποδεικνύουμε , αρχικά, ότι η οικογένεια $\{Z^o(u)\}_{u\in S}$ είναι ολοκληρώσιμη. Από την ισότητα (3.7) έχουμε ότι

$$Z^o(u) \leq E[\bar{Y}|F(u)]$$

με την εννοία της (3.10), οπότε ισχύει

$$EZ^0(u) \leq E\bar{Y} < \infty$$

για όλα τα $u \in S$. Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$A \in F(T), P(A) < \delta \Rightarrow \int_A \bar{Y} dP < \varepsilon$$

Έστω $\alpha > \frac{1}{\delta}E\bar{Y}$, τότε

$$P[Z^o(u) > \alpha] \leq \frac{1}{\alpha}E\bar{Y} < \delta,$$

$$\int_{\{Z^0(u)>\alpha\}} Z^o(u)dP \leq \int_{\{Z^0(u)>\alpha\}} E[\bar{Y}|F(u)]dP = \int_{\{Z^0(u)>\alpha\}} \bar{Y}dP < \varepsilon, \quad \forall u \in S$$

Θα δείξουμε ότι επειδή η $Y(.)$ είναι συνεχής και υπάρχει μια ακολουθία από χρόνους στάσης $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ μη φθίνουσα στο S , για την οποία ισχύει ότι $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, τότε έχουμε $EZ^o(u) = \lim_{n\to\infty} EZ^o(u_n)$. Πράγματι η ανισότητα

$$EZ^o(u) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} EZ^o(u_n)$$

ισχύει επειδή η $Z^o(.)$ είναι *supermartingale*. Για τηνν αντίστροφη ανισότητα , παρατηρούμε ότι η ακολουθία των χρόνων στάσης $\{D_*(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιεί την (3.9) και είναι μη φθίνουσα με

$$\lim_{n\to} D_*(u_n) \in S_u.$$

Από την σχέση (3.8) , το Θεώρημα Κυριαρχημένης Συγκλισης, την συνέχεια της $Y(.)$ και την *supermartingale* ιδιότητα της $Z^o(.)$, έχουμε

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} EZ^o(u_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} EY(D_*(u_n)) \leq EY(\lim_{n\to\infty} D_*(u_n))$$

$$\leq EZ^o(\lim_{n\to\infty} D_*(u_n)) \leq EZ^o(u)$$

Για την απόδειξη της (3.13) ορίζουμε την οικογένεια των χρόνων στάσης

$$\rho_t = \inf\{s \in [t,T); \Lambda(t) < \Lambda(s)\} \wedge T, \quad \gamma\iota\alpha \quad t \in [0,T) \quad (3.14)$$

Η εξίσωση (3.9), η σχέση $Y(.) \geq Z^o(.)$ και η *supermartingale* ιδιότητα της $Z^o(.)$ δίνουν

$$EZ^o(\rho_t) = EY(D_*(\rho_t)) \leq EZ^o(D_*(\rho_t\rho)) \leq EZ^o(\rho_t).$$

Σύμφωνα με το Δειγματικό Θεώρημα , η ομοιόμορφη ολοκληρώσιμη *martingale* διαδικασία $M(.)$ ικανοποιεί την σχέση

$$EM(\rho_t) = EM(D_*(\rho_t)).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$E\Lambda(\rho_t) = E\Lambda(D_*(\rho_t))$$

Αλλά η $\Lambda(.)$ είναι μη φθίνουσα , άρα $\Lambda(\rho_t) = \Lambda(D_*(\rho_t)), \quad \sigma.\beta.$
Ο ορισμός του ρ_t τότε μας δίνει ότι

$$\rho_t = D_*(\rho_t), \quad \sigma.\beta.$$

και η σχέση (3.9) δίνει ότι

$$\rho_t(\omega) \in H(\omega)$$

για όλα τα $\omega \in \Omega$. Ορίζουμε το σύνολο Q λογικών μεταβλητών και για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε

$$\{\rho_q(\omega); q \in [0,T] \cap Q\} \subseteq H(\omega) \qquad (3.15)$$

Σταθεροποιούμε ένα $\omega \in \Omega$ για το οποίο ισχύει η (3.15), οι απεικονήσεις $t \to \Lambda(t,\omega)$ και $t \to Y(t,\omega)$ είναι συνεχείς στο $[0,T]$ και επίσης η απεικόνιση $t \to Z^o(t,\omega)$ είναι $RCLL$. Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\Lambda(.,\omega)$ είναι επίπεδο , ορίζουμε το σύνολο

$$J(\omega) = \{t \in (0,T); \exists \varepsilon > 0 \quad \mu\varepsilon \quad \Lambda(t-\varepsilon,\omega) = \Lambda(t+\varepsilon,\omega)\}.$$

Το σύνολο $J(\omega)$ είναι ανοιχτό , οπότε μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοιχτών διαστημάτων

$$\bigcup_i (\alpha_i(\omega), \beta_i(\omega)).$$

Εργαζόμαστε με το σύνολο :

$$\hat{J}(\omega) = \bigcup_i [\alpha_i(\omega), \beta_i(\omega)) = \{t \in [0,T); \exists \varepsilon > 0 \quad \mu\varepsilon \quad \Lambda(t,\omega) = \Lambda(t+\varepsilon,\omega)\}$$

και το συμπληρωματικό του $\hat{J}^c(\omega)$ στο $[0,T) \times \Omega$. Η συνάρτηση $t \to \Lambda(t,\omega)$ είναι ¨επίπεδη' στο $\hat{J}^c(\omega)$ με την έννοια ότι

$$\int_0^T 1_{\hat{J}(\omega)}(t) d\Lambda(t,\omega) = \sum_i [\Lambda(\beta_i(\omega),\omega) - \Lambda(\alpha_i(\omega),\omega)] = 0$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$H^c(\omega) \subseteq \hat{J}(\omega)$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\hat{J}^c(\omega) \subseteq H(\omega).$$

Σημειώνουμε ότι

$$\hat{J}^c(\omega) = \{t \in [0,T); \forall s \in (s,T), \Lambda(t,\omega) < \Lambda(s,\omega)\}$$

Έστω $t \in \hat{J}^c(\omega)$, τότε υπάρχει αυστηρά αύξουσα ακολουθία $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε η $\{\Lambda(t_n,\omega)\}_{n=1}$ να είναι επίσης αυστηρά αύξουσα και

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n, \qquad \Lambda(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(t_n,\omega)$$

Για κάθε n , έστω q_n στο σύνολο (t, t_{n+1}). Τότε

$$t \le \rho_{q_n}(\omega) \le t_n$$

και

$$t = \lim_{n\to\infty} \rho_{q_n}(\omega).$$

Από την (1.47) έχουμε ότι

$$Z^o(\rho_{q_n}(\omega),\omega) = Y(\rho_{q_n}(\omega),\omega),$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$, χρησιμοποιώντας τη δεξιά συνέχεια της $Z^o(.)$ και της $Y(.)$, παίρνουμε ότι $t \in H(\omega)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Π.Χ.Γ Βασιλείου.** Στοχαστικά χρηματοοικονομικά. Εκδόσεις. Ζητη

[2] **Α.Ν.Γιαννόπουλος**. Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική. Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση.(2003)

[3] **Α.Ν.Γιαννακόπουλος**. Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική. Τόμος ΙΙ: Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική.(2003)

[4] **Ghada Alobaidi** *and* **R.Mallier**. *Onthe optimal exercise boundary foran american put option.* (2001)

[5] **A.Basso**, **M.Nardon** *and* **P.Pianca**. *Optimal exercise ofAmerican options. no.*106 (2002)

[6] **A.Blacnchet**. *Onthe regularity ofthe exercise boundary for American options.*

[7] **P.Carr R.Jarrow** *and* **R.Myneni** :*Alternative characterisations of American put options. Preprint : Cornell University* (1990)

[8] **Xinfu Chen** *and* **J.Chadam**. *AMathematical anaysis forthe optimal exercise boundary osAmerican put option.* (2000)

[9] **D.Duffie** *Dynamic Asset Pricing Theory. Pringeton* (1992)

[10] **E.Ekstrom**. *Perpetual American Put Options In A Level− Dependent Volatility Model. Applied Probability* 40,783-789 (2003)

[11] **R.J.Elliott**, **P.E.Kopp**. *Mathematics of Financial Markets. Springer* (1999)

[12] **J.C.Hull**. *Options, ftures and other derivatives.* 5*thEdition*, *Prentice−Hall*, *Inc*, 2003.

[13] **S.D.Jacka**. *Optimal Stopping and the American Put. Math. Finance*1. (1-14).

[14] **I.Karatzas**. *Lectures on the Mathematics of Finance. American Mathematical Society*. (1997)

[15] *I*. **Karatzas**, **St.E. Shreve** *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer* (1991)

[16] **I.Karatzas**. *On the pricing of American options. Appl. Math. Optim.*, 17(1), (37 − 60.)(1988).

[17] **I.Karatzas**, **St.E Shreve**. *Methods of Mathematical Finance. Springer* (1998)

[18] *Martingales in continuous time. Stochastic Calculus for Finance AME, MT* (1998).

[19] **B.Oksendall** *Stochastic differential equations ,Springer* (2000)

[20] **G.Peskir**. *Onthe American Option Problem. Mathematical Finance Vol.*15, *No.*1, 169 − 181, (2005).

[21] **Ph.Protter**. *Apartial introduction tofinancial asset pricing theory. Stochastic Processes and their Applications* 91 (2001) 169-203

[22] **D.M.Salopek**. *American Put Options. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* (1997)

[23] **St.E.Shreve**. *Stochastic Calculus for Finance II Continuous− Time Models. Springer.* (2004)

[24] **J.M.Steele**. *Stochastic Calculus and Financial Applications Springer* (2000)

[25] **P.Willmott**, **J.Dewynne**, **J.Howison**. *Option Pricing. Mathematical Models and Computation.* (1993)