Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

Τα Quaternions του Hamilton και τα Γινόμενα του Grassmann

Νικολή Δικαία

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Κουρουνιώτης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Φεβρουάριος 2008

Επιτροπή

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» τον Φεβρουάριο του 2008.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Χ. Κουρουνιώτης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.:

- Χ. Κουρουνιώτης
- Π. Πάμφιλος
- Κ. Τζανάκης.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τον καθηγητή του τμήματος μαθηματικού του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. **Χ. Κουρουνιώτη** για την επίβλεψη της εργασίας αυτής, για το ενδιαφέρον του και την εν γένει βοήθειά του. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής: τον κ. **Π. Πάμφιλο** και τον κ. **Κ. Τζανάκη** για τις παρατηρήσεις οι οποίες συνέβαλαν στην διαμόρφωση του τελικού κειμένου της εργασίας. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω του καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης για τις γνώσεις που μου παρείχαν στη διάρκεια των μέχρι τώρα σπουδών μου.

...και φυσικά

Ευχαριστώ πολύ για την ουσιαστική στήριξη και την βοήθειά τους, καθ'ολη την διάρκεια των σπουδών μου, τους γονείς μου, Γιώργο και Ευδοκία.

Εισαγωγή

Το θέμα αυτής της εργασίας είναι να μελετήσουμε τα δύο κυριότερα έργα στην θεωρία της διανυσματικής ανάλυσης την πρώτη περίοδο ανάπτυξης της τον 19ο αιώνα. Τα έργα αυτά είναι: η «Θεωρία της Έκτασης» του **Hermann Günther Grassmann** και η «Θεωρία των Quaternions» του **William Rowan Hamilton**.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα δούμε κάποια ιστορικά στοιχεία σχετικά με την ανάπτυξη της διανυσματικής ανάλυσης τον 19ο αιώνα και συγκεκριμένα θα δούμε ποια από τα έργα τα οποία δημοσιεύτηκαν έπαιξαν καθοριστικό ρόλο και ποια από αυτά κρίθηκαν με θετικά σχόλια από τους μαθηματικούς και τους επιστήμονες της εποχής εκείνης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το πώς ο Hamilton από την αναζήτηση ενός υψηλότερου συστήματος μιγαδικών αριθμών για τον χώρο διάστασης 3 κατέληξε στην ανακάλυψη των quaternions, τα οποία είναι στοιχεία του χώρου διάστασης 4. Κατόπιν, θα παραθέσουμε τις θεμελιώδεις πράξεις μεταξύ των quaternions καθώς επίσης και όλες τις ιδιότητες που απορρέουν από αυτές τις δύο πράξεις. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε την εφαρμογή της θεωρίας των quaternions στην σφαιρική τριγωνομετρία και εν γένει στην σφαιρική γεωμετρία, σύμφωνα με τον τρόπο παρουσίασης του Hamilton στο έργο του «Lectures on Quaternions».

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αυτής θα μελετήσουμε την θεωρία της έκτασης του Grassmann, σύμφωνα με την δεύτερη έκδοση του έργου του το οποίο δημοσιεύτηκε το 1862 με τίτλο «Die Ausdehnungslehre». Αρχικά, παρουσιάζει την ''Γενική Θεωρία των Μορφών'' προσπαθώντας να τυποποιήσει την έννοια της αλγεβρικής πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Θα εξετάσουμε την τυπική όψη της θεωρίας της έκτασης καθώς και τους κανόνες για την κατασκευή και την σύγκριση των νέων οντοτήτων με συνδέσεις με τις ήδη υπάρχουσες. Στην συνέχεια ορίζει τα διάφορα είδη γινομένου με βάσει τα οποία προκύπτουν μεγέθη υψηλότερων βαθμίδων. Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τις γεωμετρικές εφαρμογές που παρουσιάζει στο έργο του ο Grassmann, με σκοπό να γίνουν πιο κατανοητά τα διάφορα είδη γινομένου τα οποία όρισε προηγουμένως.

Κεφάλαιο 1

Ιστορικά Στοιχεία

Η ιστορία της διανυσματικής ανάλυσης αποδίδει την προέλευση της στην περίοδο μετά το 1831. Ωστόσο, η αξιωματική θεωρία του διανυσματικού χώρου αναπτύχθηκε πολύ αργότερα στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ο Giuseppe Peano έδωσε τον πρώτο αξιωματικό ορισμό ενός διανυσματικού χώρου το 1888, αλλά η θεωρία αναπτύχθηκε μετά το 1920. Από την δεκαετία του 1930, αυτή η θεωρία άρχισε να χρησιμοποιείται ως μια βάση για νέες ανακαλύψεις σε διάφορους τομείς και κυρίως στην επιστήμη της φυσικής [Do1].

Η σχέση μεταξύ της θεωρίας του διανυσματικού χώρου και της γεωμετρίας φαίνεται προφανής σε αρκετούς ανθρώπους. Ένας από τους μύθους, ο οποίος απορρέει από την παραδοσιακή διδασκαλία, σχετικά με την σχέση που συνδέει την γεωμετρία και την γραμμική άλγεβρα προέρχεται από την χρήση κοινού λεξιλογίου στους δύο τομείς. Τρεις είναι οι κύριες συνιστώσες που οδηγούν στην ανάπτυξη της διανυσματικής ανάλυσης, και οι οποίες είναι: (1) η έρευνα του Leibniz για μια γεωμετρία θέσης, (2) η ιδέα ενός παραλληλογράμμου δυνάμεων ή ταχυτήτων και (3) η ανακάλυψη και η γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών [Cr].

Η δημιουργία μιας γεωμετρίας θέσης προτείνεται για πρώτη φορά από τον σπουδαίο επιστήμονα Gottfried Wilhelm Leibniz σε ένα γράμμα του στον Christian Huygens το 1679, το οποίο δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1833. Η δημιουργία μιας τέτοιας γεωμετρίας, η οποία βασιζόταν σε σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ n-άδων και σημείων σύμφωνα με τα λεγόμενα του, στηρίζεται στην ιδέα της δημιουργίας ενός τομέα των μαθηματικών, ο οποίος θα εκφράζει θέση όπως η άλγεβρα εκφράζει μέγεθος.

Η δεύτερη συνιστώσα η οποία οδήγησε στην ανάπτυξη της διανυσματικής ανάλυσης είναι ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων, το οποίο αποτελεί μια γεωμετρική αναπαράσταση της πρόσθεσης διανυσμάτων, είναι γνωστό από την αρχαιότητα, καθώς φαίνεται να χρησιμοποιείται από τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) αλλά επίσης βρίσκεται και στα Μηχανικά του Ήρωνα του Αλεξανδρέως (1ος αιώνας μ.Χ.). Αυτό όμως δεν ήταν αρκετό για την δημιουργία της έννοιας ενός προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος. Το 1687, ο Νεύτωνας δημοσιεύει το έργο του με τίτλο «Principia Mathematica», στο οποίο σχεδιάζει την ιδέα του παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, δηλώνει [Ne]:

> «*Ένα σώμα, στο οποίο δρουν δύο δυνάμεις ταυτόχρονα, θα περιγράψει την διαγώνιο ενός παραλληλογράμμου στον ίδιο χρόνο όπως θα περιέγραφε τις πλευρές από εκείνες τις δυνάμεις ξεχωριστά.*»

Φαίνεται ότι ούτε ο Νεύτωνας κατείχε την έννοια του διανύσματος, όμως ήταν αρκετά κοντά στην ιδέα ότι οι δυνάμεις, εφόσον έχουν και μέγεθος και κατεύθυνση, μπορούν να προστεθούν ούτως ώστε να παράγουν μια νέα δύναμη.

Η τρίτη και σημαντικότερη συνιστώσα η οποία οδήγησε στην δημιουργία της διανυσματικής ανάλυσης είναι η ανακάλυψη και η γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Η πρώτη δημοσίευση της ιδέας ενός μιγαδικού αριθμού δόθηκε από τον Jerome Cardan το 1545 στο έργο του «Ars Magna». Ωστόσο, πήρε παραπάνω από δύο αιώνες για να γίνουν αποδεκτοί ως νόμιμες μαθηματικές οντότητες. Κατά την διάρκεια των δύο αυτών αιώνων, πολλοί συγγραφείς διαμαρτυρύθηκαν για την χρήση αυτών των ''παράξενων δημιουργιών'', όπως οι ίδιοι τις αποκαλούσαν.

Ο πρώτος άνθρωπος, χρονολογικά, ο οποίος επιχείρησε να αναπαραστήσει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς ήταν ο John Wallis, σε ένα έργο του το 1673. Η μέθοδος του όμως δεν ήταν αρκετά ικανοποιητική. Λίγα χρόνια αργότερα, άλλοι πέντε επιστήμονες ανέπτυξαν τους κανόνες της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών και οι οποίοι ήταν: ο Caspar Wessel (1799), ο Adrien Quentin Buée (1805), ο Jean Robert Argand (1806), ο C.V. Mourey (1828) και ο John Warren (1828). Ωστόσο, αυτοί οι κανόνες έγιναν γνωστοί μέσα από το έργο του Carl Friedrich Gauss, το οποίο δημοσιεύτηκε το 1831. Σύμφωνα με τον Crowe, φαίνεται αξιοσημείωτο το γεγονός ότι σε τρεις περιπτώσεις την περίοδο από το 1799 έως το 1828, δύο συγγραφείς δουλεύοντας ο καθένας μόνος του, μελετούν το ίδιο χρονικό διάστημα την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών [Cr].

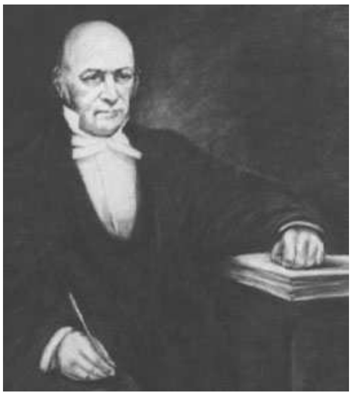
Ο August Ferdinand Möbius ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς ο οποίος εισήγαγε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δεν δήλωνε με τον όρο διανύσματα. Το 1827, δημοσιεύει το έργο του με τίτλο «ο Βαρυκεντρικός Λογισμός», ένα σύστημα το οποίο αναπτύχθηκε με την ιδέα να παρθεί το κέντρο βάρους ενός συστήματος βαρύκεντρων. Κατά την διάρκεια της έρευνας του για τα κέντρα βάρους, ανέπτυξε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αυτών των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Φαίνεται να είχε επηρεαστεί από τον Bellavitis, ο οποίος είχε ήδη ανακαλύψει το έργο του «ο Υπολογισμός των Ισοδυναμιών», και ο οποίος είχε γράψει για αυτό στον Möbius. Η πραγματεία του Bellavitis είχε κάποια κοινά χαρακτηριστικά με την σύγχρονη διανυσματική θεωρία, καθώς ο ορισμός του για την ισοδυναμία λέει:

> *«Δύο ευθείες καλούνται ισοδύναμες εάν είναι ίσες, παράλληλες και όμοια κατευθυνμένες.»*

Η θεωρία του Möbius παρείχε μια άλγεβρα σημείων, αλλά ο σκοπός του δεν ήταν να παρουσιάσει μια αλγεβρική κατασκευή. Ήθελε να παρουσιάσει ένα εργαλείο για την επίλυση γεωμετρικών και φυσικών προβλημάτων. Ο Möbius είχε την αναγνώριση πολλών διασήμων μαθηματικών, εκ των οποίων υπήρξαν οι Gauss, Cauchy, Jacobi και ο Dirichlet.

Την πρώτη περίοδο ανάπτυξης της θεωρίας της διανυσματικής ανάλυσης, η οποία εκτείνεται μέχρι το 1865, δύο άνθρωποι έπαιξαν καθοριστικό ρόλο και αυτοί ήταν ο William Rowan Hamilton και ο Hermann Günther Grassmann.

Ο Hamilton ερευνούσε για δεκατρία χρόνια για ένα σύστημα για την ανάλυση του τρισδιάστατου χώρου ώσπου τελικά το 1843 ανακάλυψε τα quaternions, ένα από τα κύρια συστήματα της διανυσματικής ανάλυσης.



Ο Hamilton γεννήθηκε στο Δουβλίνο της Ιρλανδίας το 1805 και πέθανε το 1865. Σε ηλικία δεκατριών ετών λαμβάνει προσοχή λόγω πολλών αξιόλογων επιτευγμάτων, συμπεριλαμβανομένων των πτυχίων που απέκτησε σε δεκατρείς γλώσσες, μερικές από τις οποίες είναι τα ελληνικά, τα λατινικά, τα αραβικά και τα γαλλικά.

Το 1823 εισάγεται στο Τριαδικό κολέγιο στο Δουβλίνο, λαμβάνοντας την πρώτη θέση στα αποτελέσματα των εισαγωγικών εξετάσεων. Κατά την διάρκεια της προπτυχιακής του καριέρας, κατά την οποία είχε λάβει αρκετά βραβεία, ο Hamilton καταλαμβάνει την θέση του καθηγητή της αστρονομίας στο πανεπιστήμιο του Δουβλίνου και αποκαλείται ως ο βασιλικός αστρονόμος της Ιρλανδίας [Cr].

Μια από τις διασημότερες επιστημονικές ανακαλύψεις του 19ου αιώνα ήταν η μαθηματική πρόβλεψη της εσωτερικής και της εξωτερικής κωνικής διάθλασης του Hamilton. Αυτή η ανακάλυψη, η οποία πηγάζει από τα έγγραφα του επάνω στην «θεωρία των συστημάτων των ακτίνων», τον έκανε ακόμα πιο διάσημο. Επανέρχεται στο προσκήνιο το 1837 με την δημοσίευση ενός άρθρου του σχετικά με την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως διατεταγμένα ζεύγη αριθμών, μια εναλλακτική δικαιολόγηση τέτοιων αριθμών, η οποία στις μέρες μας προτιμάται. Σε αυτό το άρθρο εκφράζει την ελπίδα του να δημοσιεύσει μια «Θεωρία Τριάδων», δηλαδή ένα σύστημα το οποίο θα ήταν κατάλληλο για την ανάλυση του τρισδιάστατου χώρου, όπως είναι οι μιγαδικοί αριθμοί για τον διδιάστατο, ώσπου τελικά καταλήγει στην ανακάλυψη των quaternions. Πίστευε ότι για τα μέσα του 19ου αιώνα είχε κάνει μια σπουδαία ανακάλυψη και έτσι τα υπόλοιπα είκοσι-ένα χρόνια της ζωής του τα αφιερώνει στην συγγραφή άρθρων και βιβλίων για τα quaternions [Cr].

Ήταν γύρω σε αυτήν την εποχή όπου οι ιδέες των ιδρυτών της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας, Nicolas Lobachevski και Janos Bolyai, έγιναν γνωστές. Ίσως το σημαντικότερο μήνυμα που πηγάζει από τη δημιουργία του Hamilton είναι ότι είναι νόμιμο για τους μαθηματικούς να δημιουργήσουν νέα αλγεβρικά συστήματα που παραβαίνουν τους παραδοσιακούς κανόνες. Αν και μερικοί μαθηματικοί αντιστάθηκαν σε αυτήν την αξίωση, άλλοι την εκμεταλλεύθηκαν άμεσα με τη δημιουργία νέων αλγεβρικών συστημάτων. Μέχρι το 1847, ο Hamilton λαμβάνει βραβεία για την ανακάλυψη του από την Βασιλική Ιρλανδική Ακαδημία και την Βασιλική Κοινωνία του Εδιμβούργου, και δημοσιεύει το λιγότερο τριάντα τέσσερα άρθρα για τα quaternions, τα οποία έχουν επικυρωθεί από μερικούς σπουδαίους μαθηματικούς και επιστήμονες, όπως ο John Herschel [Cr].

Ωστόσο, ο Hamilton δεν ήταν ο μοναδικός δημιουργός ενός διανυσματικού συστήματος την περίοδο γύρω στο 1843. Συγκεκριμένα, έξι άλλοι συγγραφείς αναπτύσσουν συστήματα, τα οποία ήταν περισσότερο ή λιγότερο διανυσματικά σε χαρακτήρα, και οι οποίοι ήταν: August Ferdinand Möbius, Giusto Bellavitis, Comte de Saint-Venant, Augustin Cauchy, Matthew O'Brien και Hermann Günther Grassmann, με πιο καθοριστικό την περίοδο εκείνη το έργο του Grassmann.

O Hermann Grassmann γεννήθηκε το 1809 στο Stettin, μια μικρή πόλη της Πομερανίας κοντά στην Βαλτική, όπου πέρασε το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα της ζωής του και πέθανε το 1877. Ήταν ένας από τους δώδεκα γιους του Justus Günther Grassmann, ενός καθηγήτη μαθηματικών σε ένα γυμνάσιο του Stettin. Σύμφωνα με τον πατέρα του, ο Grassmann δεν ήταν κανένα παιδί θαύμα και δηλώνει ότι θα ήταν ευτυχής εάν ο γιος του γινόταν βιοτέχνης ή κηπουρός [Br].

O Grassmann εισήχθει στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου το 1827, όπου σπούδασε θεολογία και φιλοσοφία. Επιστρέφοντας ωστόσο στο Stettin μελέτησε διάφορα μαθήματα, συμπεριλαμβανομένου του μαθήματος των μαθηματικών με σκοπό να προετοιμαστεί για να λάβει μέρος στις εξετάσεις για την απόκτηση της διδακτικής επάρκειας. Έτσι, το 1836 γίνεται καθηγητής σε ένα γυμνάσιο του Stettin, στο οποίο δίδασκε για το υπόλοιπο της ζωής του.

Δύο ήταν τα σπουδαιότερα μαθηματικά του έργα εκ των οποίων το πρώτο ήταν μια «Θεωρία των Παλιρροιών», ένα είδος διατριβής το οποίο έγραψε το 1840 για να βελτιώσει την θέση του ως καθηγητή. Ωστόσο, το έργο αυτό παρέμεινε αδημοσίευτο μέχρι το 1894. Το δεύτερο σπουδαιότερο έργο του ήταν η «Θεωρία της Γραμμικής Έκτασης» (Die Lineale Ausdehnungslehre), το οποίο δημοσιεύτηκε το 1844 και το οποίο δεν έλαβε προσοχή, αν και πολλοί γνώριζαν για αυτό μεταξύ άλλων και ο Möbius, ο Gauss, ο Kummer και ο Cauchy. Συγκεκριμένα, ο Kummer, σε μια πραγματογνωμοσύνη που του ζητήθηκε να δώσει όσον αφορά το έργο του Grassmann, έγραψε [Do1]:

> «*Παρατηρώντας πρώτα ότι αφορά την μορφή της πραγματείας, κανείς πρέπει να αναγνωρίσει γενικά ότι είναι μια αποτυχία, γιατί, ακόμα και αν το ύφος είναι καλό και πλήρους έμπνευσης, στερείται παντού από μια κατάλληλη οργάνωση του περιεχομένου του στο οποίο τα ουσιώδη σημεία θα μπορούσαν να είναι ευδιάκριτα από τα λιγότερο σημαντικά πράγματα.*»

Σύμφωνα με τον Grassmann, με το έργο αυτό ήθελε να δημιουργήσει έναν τομέα των μαθηματικών, ο οποίος δεν θα εκτείνεται μέχρι τον τομέα της γεωμετρίας, αλλά του οποίου η γεωμετρία να είναι ένα μέρος. Κατά μια έννοια, περιείχε αρκετά από το σύγχρονο σύστημα της διανυσματικής ανάλυσης. Αυτό, ωστόσο, εμπεδόθηκε εντός ενός μεγάλου σε περιεχόμενο συστήματος, το οποίο περιελάμβανε n-διάστατους χώρους και δεκαέξι διαφορετικά γινόμενα των βασικών οντοτήτων του (περιλαμβάνοντας το εσωτερικό και το εξωτερικό του γινόμενο, τα οποία είναι αντίστοιχα παραπλήσια στο σύγχρονο εσωτερικό και εξωτερικό μας γινόμενο).

Υπήρξαν λίγοι εκείνοι οι οποίοι έκριναν με θετικά σχόλια το έργο αυτό και ένας λόγος για τον οποίο κρίθηκε ήταν η ασάφεια που επικρατούσε στον τρόπο παρουσίασης του. Επιπρόσθετα, ο Grassmann εξηγούσε τις ιδέες του με μια γενική οπτική σκοπιά, και προσπαθούσε να δικαιολογήσει κάθε νέα ιδέα του μέσω μιας φιλοσοφικής βάσης. Επίσης, λόγω του ότι μόνο στο τέλος κάθε κεφαλαίου παραθέτει πρακτικά προβλήματα στην γεωμετρία και στην μηχανική, οι αναγνώστες του δυσκολεύτηκαν να το παρακολουθήσουν. Για παράδειγμα, ο Möbius το ονόμασε ακατάλληλο για ανάγνωση και ο Hamilton έγραψε στον De Morgan ότι για να το διαβάσει θα έπρεπε να αρχίσει το κάπνισμα [Br]. Άλλωστε, ο Grassmann ήταν ένας απλός δάσκαλος, και δεν είχε κανένα ακαδημαϊκό χάρισμα που άλλοι σύγχρονοι, όπως ο Hamilton για παράδειγμα, είχαν και η ιστορία φαίνεται να προτείνει ότι η αποδοχή ριζικών ανακαλύψεων εξαρτάται συχνά περισσότερο από το πρόσωπο της ανακάλυψης παρά από την ίδια την ανακάλυψη [Br].

Ο Grassmann το 1845, προσπάθησε ανεπιτυχώς να πείσει τον Möbius να γράψει μια κριτική για το βιβλίο του. Την ίδια χρονιά, ο Comte de Saint-Venant δημοσίευσε ένα μικρό άρθρο, το οποίο είχε τίτλο «Memoire sur les sommes et les differences geometriques, et sur leur usage pour simplifier la mecanique», στο οποίο σχεδιάζει ένα πλήθος θεμελιωδών ιδεών της διανυσματικής ανάλυσης, συμπεριλαμβανομένου του εξωτερικού γινομένου. Ο Grassmann αλληλογραφούσε με τον Saint-Venant για κάποιο διάστημα, αλλά οι ιδέες του Saint-Venant δεν είχαν λάβει αρκετή προσοχή. Δύο χρόνια αργότερα, ο Möbius παρότρυνε τον Grassmann να λάβει μέρος σε έναν διαγωνισμό σχετικά με τις εφευρέσεις οι οποίες εκπληρώνουν την ιδέα του Leibniz για μια γεωμετρία θέσης. Τελικά, ο Grassmann παραδίδει ένα τεύχος και κερδίζει στον διαγωνισμό, αλλά έπειτα πάλι παραμελήθηκε.

Το 1853, ο Γάλλος μαθηματικός Augustin Cauchy δημοσιεύει το βιβλίο του «Sur les clefs algebriques», στο οποίο παρουσιάζει μεθόδους επίλυσης ποικίλων αλγεβρικών προβλημάτων, για παράδειγμα, την εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Browne [Br], ο Grassmann όχι μόνο είχε δημοσιεύσει τις ίδιες μεθόδους στο βιβλίο του Die Lineale Ausdehnungslehre, αλλά είχε επίσης στείλει και δύο αντίτυπα αυτού του βιβλίου στον Cauchy το 1846, σε μια ανεπιτυχή προσπάθεια να φτάσει το ένα αντίτυπο στον Saint-Venant. Διάφοροι φίλοι προειδοποιούν τον Grassmann ότι υπάρχει ένα ζήτημα προτεραιότητας σχετικά με τις μεθόδους του Cauchy, οδηγώντας τον να απευθυνθεί στην Γαλλική Ακαδημία για να διαιτητεύσει το ζήτημα προτεραιότητας. Παράλληλα, οδηγήθηκε στην δημοσίευση του μοναδικού του άρθρου στα γαλλικά, προφανώς απευθυνμένος στον Cauchy: «Sur les différents genres de multiplication» (το οποίο αναφέρεται στα διάφορα είδη πολλαπλασιασμού). Τελικά το ζήτημα δεν λύθηκε, και ένας πιθανός λόγος είναι ο θάνατος του Cauchy μετά από λίγα χρόνια.

Αφήνοντας κατά μέρος τα κείμενα τα οποία έγραψε ο ίδιος ο Grassmann, υπήρξαν μόνο δύο δημοσιευμένα σχόλια όσον αφορά το έργο του πριν από την δεκαετία του 1860. Το ένα από τα δύο υπάρχει στα σχόλια του Möbius που περιλαμβάνονται με τη δημοσίευση του βραβείου δοκιμίου του Grassmann και το άλλο σχόλιο εμφανίζεται στην εισαγωγή του Hamilton σχετικά με τα Quaternions, που δημοσιεύονται σε αυτό το έτος. Ο Hamilton στον πρόλογο του περιγράφει το βιβλίο του Grassmann ως «πρωτότυπο και αξιοσημείωτο», αλλά ωστόσο τονίζει ότι τα συστήματα τους είναι ευδιάκριτα και ανεξάρτητα μεταξύ τους, παρόλο που συμμερίζονται κάποια χαρακτηριστικά.

Ο Grassmann, ήταν πεπεισμένος για την αξία των ιδεών του αλλά απογοητευμένος λόγω του ότι οι δημοσιεύσεις του δεν προσέλκυσαν ιδιαίτερη προσοχή, το 1862 δημοσιεύει το σύστημα του με μια καινούργια μορφή, με τον τίτλο «Die Ausdehnungslehre». Τριακόσια αντίγραφα είναι τυπωμένα στο κατάστημα του αδελφού του και όλα με έξοδα δικά του. Σε αυτό το τεύχος, ο Grassmann αποφασίζει σοφά να αφαιρέσει τις φιλοσοφικές συζητήσεις που περιλαμβάνονταν στην πρώτη έκδοση του έργου του και να παρουσιάσει το σύστημα του σε Ευκλείδεια μορφή. Ωστόσο, ο συντάκτης των εργασιών του Grassmann, Friedrich Engel, θεώρησε την δεύτερη έκδοση του έργου αυτού ως ένα ''καταστροφικό λάθος''. Ο ίδιος ο Grassmann δήλωσε ένα χρόνο πριν το θάνατο του [Do2]:

> «*Αυτή η νέα έκδοση συναντιέται με ακόμα λιγότερη προσοχή από την πρώτη.*»

Επιπρόσθετα, στον πρόλογο του έργου του Die Ausdehnungslehre του 1862 δηλώνει [Aus]:

> «*Είμαι ενήμερος ότι η μορφή που έχω δώσει στην επιστήμη είναι ατελής. Θα έρθει όμως ο καιρός όπου αυτές οι ιδέες, ίσως με μια καινούργια μορφή, θα προκύψουν εκ νέου και θα εισαχθούν σε μια υπαρκτή επικοινωνία με τις σύγχρονες ιδέες που θα αναπτυχθούν.*»

Δύο υποστηρικτές εκείνης της περιόδου του έργου του Grassmann, ο Hermann Hankel και ο Rudolf Clebsch τον επαινούν στα έργα τους, αλλά σύντομα απεβίωσαν. Επίσης, ο Victor Schlegel, ο οποίος δίδασκε και αυτός στο Stettin δημοσιεύει μια παρουσίαση των ιδεών του Grassmann με μια πιο στοιχειώδη μορφή η οποία ήταν χωρίς επιτυχία. Παρ'όλα αυτά, αργότερα έγραψε την βιογραφία του Grassmann, η οποία από ότι φαίνεται επηρέασε περισσότερο στο να δωθεί προσοχή στο έργο του Grassmann. Η μεγαλοφυία του Grassmann άργησε να αναγνωριστεί και ακόμα και τότε μόνο εν μέρει. Αρκετό καιρό μετά τον θάνατο του, οι μαθηματικοί και οι φυσικοί άρχισαν να καταλαβαίνουν το βάθος της θεωρίας του.

Η διανυσματική ανάλυση, όπως αναφέραμε και παραπάνω, είναι ένας τομέας των μαθηματικών ο οποίος εξήχθη κυρίως από τις δύο παραπάνω θεωρίες το Ausdehnungslehre του Grassmann (1840-1844) και την ανάλυση της θεωρίας των Quaternions του Hamilton (1843-1844). Με την έναρξη της δεύτερης περιόδου, η οποία εκτείνεται από το 1865 μέχρι περίπου το 1880, οι θεωρίες των Hamilton και Grassmann άρχισαν σταδιακά να παύουν να χρησιμοποιούνται [Cr]. Άλλων μαθηματικών τα έργα άρχισαν να χρησιμοποιούνται και συγκεκριμένα οι θεωρίες των: Peter Guthrie Tait, Benjamin Peirce, James Clerke Maxwell και του William Kingdon Clifford.

Εάν κανείς αναρωτηθεί ποιο από τα δύο συστήματα του Hamilton ή του Grassmann επηρέασε περισσότερο τα συστήματα της περιόδου μεταξύ της δεκαετίας του 1840 μέχρι το 1900, η απάντηση θα ήταν βέβαια υπέρ του Hamilton. Από την δεκαετία του 1840 μέχρι την δεκαετία του 1870 το σύστημα του Hamilton ήταν περισσότερο γνωστό από το σύστημα του Grassmann, αν και από την δεκαετία του 1870 μέχρι την δεκαετία του 1890, οι δημοσιεύσεις σχετικά με το σύστημα του Grassmann αυξήθηκαν. Εκείνη την περίοδο υπήρξαν 594 δημοσιεύσεις για τα quaternions, ενώ σχετικά με την θεωρία του Grassmann έγιναν 217 δημοσιεύσεις.

Λίγα χρόνια πριν τον θάνατο του ο Hamilton άρχισε να επικοινωνεί με τον μαθηματικό Peter Guthrie Tait. Ο Tait άρχισε να ενδιαφέρεται για τα quaternions, ειδικά για την χρησιμότητα τους στην επιστήμη της φυσικής. Το 1859 λοιπόν, ο Tait δημοσίευσε το πρώτο από τα περίπου εβδομήντα άρθρα του στα quaternions, ώσπου τελικά το 1867 δημοσίευσε το έργο του «Στοιχειώδης Πραγματεία των Quaternions». Ένα αξιοπρόσεκτο χαρακτηριστικό της έκθεσης του ήταν η εκτενής προσοχή που έδωσε (ενώ δεν έκανε το ίδιο και ο Hamilton) όσον αφορά τις εφαρμογές στη φυσική. Εν μέρει για αυτό τον λόγο, τα βιβλία του έτειναν να γεμίσουν με περιπτώσεις όπου το βαθμωτό μέρος ή το διανυσματικό μέρος του πλήρους quaternion γινομένου διαχωρίζονται, στο σημείο όπου εκείνα τα βιβλία μοιάζουν με τα σύγχρονα βιβλία διανυσματικής ανάλυσης, με την διαφορά ότι το βαθμωτό μέρος του γινομένου δύο quaternions ήταν το αρνητικό του εσωτερικού γινομένου στην σύγχρονη διανυσματική ανάλυση.

Αργότερα, το 1870, ο Benjamin Peirce δημοσίευσε την «Γραμμική Συνδετική Άλγεβρα» του, η οποία είχε περιγραφεί από τον Dirk Struik ως

> *«...η πρώτη τεράστια αυθεντική συνεισφορά στα μαθηματικά που παρήχθηκε στις Ηνωμένες Πολιτείες...».*

Ένας πρόωρος ενθουσιασμός για τα quaternions, οδηγεί τον Peirce στην δημοσίευση του, δουλεύοντας, από την ανακάλυψη του Hamilton της πιθανότητας νέων αλγεβρών, στον σχεδιασμό και στην ταξινόμηση 162 διαφορετικών αλγεβρών.

Ένας ακόμη σπουδαίος επιστήμονας της εποχής εκείνης ήταν ο James Clerke Maxwell, ο οποίος, το 1873, δημοσιεύει την πραγματεία του για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό, την πιο σημαντική μελέτη στην κύρια φυσική επιστήμη του δέκατου ένατου αιώνα. Παρόλο που ο Maxwell δεν χρησιμοποίησε καθόλου τις μεθόδους των quaternions στα τέσσερα διάσημα άρθρα του στον ηλεκτρισμό και στον μαγνητισμό, το 1870, υπό την επιρροή του Tait, άρχισε να διαβάζει διάφορα έργα για τα quaternions. Μετέπειτα, ο Maxwell εκφράζει πολλά από τα αποτελέσματα της πραγματείας του όχι μόνο σε καρτεσιανή μορφή, αλλά και στα ισοδύναμα της τα quaternions. Αυτο συνέβαινε αρκετά συχνά οπότε οι αναγνώστες μπορούσαν εύκολα να υποθέσουν ότι ο Maxwell προτιμούσε αυτές τις μεθόδους. Στην πραγματικότητα όμως, δεν ήταν υπερασπιστής των μεθόδων των quaternions. Συγκεκριμένα, σε ένα από τα διασημότερα άρθρα του δηλώνει [Cr]:

> *«Η εφεύρεση του λογισμού των quaternions είναι ένα βήμα προς τη γνώση των μεγεθών που σχετίζονται με τον χώρο τα οποία μπορούν μόνο να συγκριθούν για τη σπουδαιότητα τους, με την εφεύρεση των τριάδων από τον Καρτέσιο. Οι ιδέες αυτού του λογισμού, ενώ διακρίνονται από τις διαδικασίες και τα σύμβολα τους, εγκαθίστανται για να είναι μέγιστης χρήσης σε όλους τους τομείς της επιστήμης.»*

Σε επόμενους συγγραφείς θα δούμε, στηριζόμενοι ακριβώς σε τέτοιους ισχυρισμούς, όπως αυτόν του Maxwell, και από την εμπειρία τους στην επιστήμη της φυσικής, ότι συνεχίζουν για να ρυθμίσουν εκ νέου και να διαμορφώσουν το σύστημα των quaternions σε ένα σύγχρονο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης.

Τέλος, την ίδια περίοδο, και συγκεκριμένα το 1877, ο William Kingdon Clifford δημοσιεύει το έργο του «Στοιχεία της Δυναμικής», το οποίο ήταν μια στοιχειώδης πραγματεία στην μηχανική. Ήταν ένας από τους λίγους μαθηματικούς σε αυτή την περίοδο ο οποίος ήξερε και τα δύο συστήματα της προηγούμενης περιόδου. Αυτό που είναι σημαντικό να τονίσουμε από το έργο του «Στοιχεία της Δυναμικής» είναι ότι στα μέσα του βιβλίου του, σε μια ενότητα ''Γινόμενο δύο διανυσμάτων'', εισάγει ουσιαστικά δύο είδη γινομένου, εκ των οποίων το ένα το καλεί ''διανυσματικό γινόμενο'', το οποίο είναι το διανυσματικό γινόμενο όπως κατέχεται από τον Grassmann και τον Hamilton καθώς επίσης και στην σύγχρονη διανυσματική θεωρία. Το άλλο του γινόμενο, το οποίο το καλεί ''βαθμωτό γινόμενο'', το περιγράφει ποιοτικά, αλλά δεν διευκρινίζει το πρόσημο του. Όπως έχουμε δει για τον Grassmann αυτό το γινόμενο μεταξύ ενός μη μηδενικού μεγέθους με τον εαυτό του είναι θετικό, ενώ για τον Hamilton είναι αρνητικό. Αυτό που παρατηρούμε στον Clifford είναι αυτό που ήδη άρχισε να εμφανίζεται με κάπως διαφορετικές μορφές στον Tait και στον Maxwell: ένας διαχωρισμός του γινομένου δύο πλήρων quaternions σε δύο μέρη, κατά μήκος της έκθεσης αυτών των μερών ως ξεχωριστά γινόμενα.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η θεωρία του Hamilton την περίοδο από την δεκαετία του 70 μέχρι την δεκαετία του 90 προτιμάται σε σχέση με την θεωρία του Grassmann.

Στην τρίτη περίοδο, από το 1880 και μετά, άρχισε να διαμορφώνεται το σύγχρονο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης μέσω των έργων δύο προσώπων τα οποία ήταν ο Josiah Willard Gibbs και ο Oliver Heaviside. Το 1910 λοιπόν κατάφεραν να ιδρυθεί το σύστημα τους ως το επικρατέστερο, με έναν αγώνα ενάντια στα συστήματα των Hamilton και Grassmann.

Ο Josiah Willard Gibbs (1839-1903) γεννήθηκε στο New Haven και δίδασκε στο Yale, όπως και ο πατέρας του. Το πρώτο μέρος του έργου του «Στοιχεία της Διανυσματικής Ανάλυσης», το οποίο παρουσιάζει την σύγχρονη θεωρία της διανυσματικής ανάλυσης, γράφτηκε με σκοπό να δωθεί ως σημειώσεις σε ένα μάθημα που παρέδιδε στο Yale. Η έμπνευση του έργου του, όπως ο ίδιος εξηγεί σε ένα γράμμα του στον Schlegel, πηγάζει από την ανάγνωση της πραγματείας του Maxwell επάνω στον ηλεκτρισμό και στον μαγνητισμό. Αναφέρει ότι με σκοπό να διαβάσει το έργο του Maxwell, όπου χρησιμοποιείται κυρίως η θεωρία των quaternions, πείστηκε ότι για να μάθει αυτά τα αντικείμενα ήταν απαραίτητο να αρχίσει να μελετά αυτές τις μεθόδους.

Παρατήρησε λοιπόν ότι υπήρχαν δύο σημαντικά είδη γινομένου, το «διανυσματικό μέρος» και το «βαθμωτό μέρος» του γινομένου, αλλά η ένωση των δύο για να σχηματίσουν ολόκληρο το γινόμενο δεν προάγει την θεωρία ως μια γεωμετρική έρευνα. Έτσι ο Gibbs άρχισε να δουλεύει από την αρχή μια νέα μορφή διανυσματικής ανάλυσης η οποία περιελάμβανε δύο ευδιάκριτα γινόμενα. Είπε λοιπόν στον Schlegel ότι μετά από αυτό άρχισε να μαθαίνει σχετικά με το έργο του Grassmann και συμπέρανε ότι οι ιδέες του ήταν σχεδόν ίδιες με αυτές του Grassmann. Διαβάζοντας όμως κάποια τεύχη του Die Ausdehnungslehre, πέρα από την εισαγωγή, αναφέρει τελικά ότι δεν είναι πεπεισμένος ότι το έργο του Grassmann επηρέασε την δική του διανυσματική ανάλυση.

Συνοψίζοντας λοιπόν ο Gibbs προσθέτει ότι ελπίζει ο Schlegel να ενδιαφερθεί να μάθει πως αρχίζοντας με κάποιες γνώσεις όσον αφορά τις μεθόδους του Hamilton και απλά και μόνο επηρεασμένος από την επιθυμία να αποκτήσει την απλούστερη άλγεβρα, οδηγήθηκε στην θεωρία διανυσμάτων του Grassmann, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε επιρροή από αυτόν. Το 1886 λοιπόν, ο Gibbs δημοσιεύει ένα από τα πιο σημαντικά και δημιουργικά άρθρα στα μαθηματικά, με τίτλο «Πολλαπλή Άλγεβρα». Το έργο αυτό δίνει επιχειρήματα για αυξημένη προσοχή στην πολλαπλή άλγεβρα και επαινεί τις μεθόδους του Grassmann.

Μετά από τις αποδοκιμασίες μερικών επιστημόνων την περίοδο αυτή, έρχεται ο Oliver Heaviside (1850-1925), ένας ταλαντούχος άνθρωπος από την Αγγλία, ο οποίος είχε θεωρηθεί ως ο κύριος διάδοχος της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell. Στα διάφορα άρθρα που έγραφε επάνω στον ηλεκτρισμό άρχισε να εισάγει τις διανυσματικές μεθόδους. Σε ένα από αυτά τα άρθρα δίνει την παρουσίαση του συστήματος του στην διανυσματική ανάλυση, το οποίο είναι σχέδον ταυτόσημο με αυτό του Gibbs και με το σύγχρονο σύστημα. Εξηγεί το πως έφτασε στην ανάπτυξη του συστήματος του, ξεκινώντας περιγράφοντας τις εμπειρίες ενός αγοριού, ο οποίος γοητευμένος από την λέξη "quaternion", προσπάθησε να μάθει την ερμηνεία της διαβάζοντας τα βιβλία του Hamilton. Έπειτα από πολλές προσπάθειες το παιδί κατανόησε κάποια πράγματα αλλά μετά από μια βαθύτατη έρευνα τα παράτησε και έπειτα πέθανε. Ο Heaviside διάβασε την πραγματεία του Tait για να ενημερωθεί και να μάθει να δουλεύει με τα quaternions. Προσπαθώντας ωστόσο να εφαρμόσει τα quaternions στην ανάπτυξη της θεωρίας του ηλεκτρισμού, τα χαρακτήρησε ως άβολα. Έτσι, με μια σχεδόν ταυτόσημη πορεία με αυτήν που ακολούθησε ο Gibbs και ανεξάρτητα από αυτόν, ο Heaviside κατέληξε στο ίδιο σύστημα. Εμφανίζεται ότι ο Heaviside έμαθε για πρώτη φορά για το σύστημα του Grassmann το 1888 σε ένα κείμενο του Gibbs. Επομένως, δεν υπάρχουν αφορμές για να σκεφτεί κανείς ότι ο Heaviside διάβασε ποτέ τα έργα του Grassmann.

Την δεκαετία του 1890, υπήρξε μια διαμάχη για την επικράτηση ενός από τα παραπάνω συστήματα διανυσματικής ανάλυσης. Ο Gibbs είχε προβλέψει αυτή την διαμάχη για επικράτηση, η οποία κυρίως κυμαινόταν μεταξύ των συστημάτων του Hamilton και του Grassmann. Ωστόσο, φαίνεται ότι ο Gibbs δεν ήταν υποστηρικτής της θεωρίας των quaternions, προσπαθώντας να προωθήσει το έργο του στην «Διανυσματική Ανάλυση». Αντιθέτως, ο Heaviside θεωρούσε την εφεύρεση των quaternions ως το πιο αξιοπρόσεκτο κατόρθωμα της ανθρώπινης ευφυΐας. Συγκεκριμένα, δηλώνει:

> «*...η διανυσματική ανάλυση, χωρίς τα quaternions, θα μπορούσε να έχει βρεθεί από οποιονδήποτε μαθηματικό..., ενώ για να ανακαλύψει κανείς τα quaternions απαιτούσε μια μεγαλοφυΐα...*»

Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι ενώ τα περισσότερα από τα βιβλία τα οποία χρησιμοποιούν την προσέγγιση των Gibbs-Heaviside εμβάθυναν σε διάφορες πιο πρόσφατες εκδόσεις, εκείνοι οι οποίοι χρησιμοποιούσαν την προσέγγιση του Grassmann δεν πέτυχαν καμία πιο πρόσφατη έκδοση. Αυτό προτείνει ότι όχι μόνο στην δημιουργία, αλλά και στην αποδοχή της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης, η παράδοση του Grassmann δεν διαδραμάτισε κανέναν σημαντικό ρόλο. Επιπλέον, τα στοιχεία που δώσαμε ανωτέρω δείχνουν ότι αν και και οι παραδόσεις των Gibbs και Heaviside επηρέασαν αρκετά, η παράδοση του Heaviside, με την ένωση της με την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, ήταν σημαντικότερη [Cr].

Κεφάλαιο 2

Τα Quaternions του William Hamilton

2.1 Εισαγωγή

Οι συνηθισμένοι μιγαδικοί αριθμοί $a + ib$ (ή αλλιώς $a + b\sqrt{-1}$), όπου τα a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Ο κανόνας για τον πολλαπλασιασμό είναι ο ακόλουθος:

- πρώτα, πολλαπλασιάζουμε όρο με όρο, σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες πολλαπλασιασμού

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd,$$

- και έπειτα αντικαθιστούμε το $i^2 = -1$ και τελικά θα έχουμε

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί γράφονται επίσης και ως ζεύγη: (a, b). Το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών οι οποίοι δίνονται σε μορφή ζευγών, έστω $(a, b), (c, d)$, είναι ίσο με το ζεύγος

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Το ζεύγος $(1, 0)$ καλείται 1 και το ζεύγος $(0, 1)$ καλείται i. Τότε έχουμε

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το i είναι ίσο με $\sqrt{-1}$.

Ο William Rowan Hamilton αναφέρει ότι αναζητούσε ένα σύστημα το οποίο θα ήταν κατάλληλο για την ανάλυση του τρισδιάστατου χώρου, όπως είναι οι μιγαδικοί αριθμοί για τον διδιάστατο χώρο. Δηλαδή, ένα σύστημα τριάδων, ανάλογο με το σύστημα των ζευγών το οποίο του ήταν οικείο. Έκανε αρκετές προσπάθειες, όπως αναφέρει ο ίδιος, για να ανακαλύψει τις τριάδες από το 1830. Ωστόσο, ο Hamilton δεν ήταν ο μόνος ο οποίος ερευνούσε αυτό το ζήτημα, διότι όπως αναφέρει και ο ίδιος, ο John T. Graves είχε προσπαθήσει να σχηματίσει ένα υψηλότερο σύστημα μιγαδικών αριθμών για τον χώρο διάστασης 3, μπορεί και νωρίτερα από τον ίδιο [Cr].

Οι Hamilton και Graves αλληλογραφούσαν για το θέμα αυτό από το 1836, όπου τότε ο Graves έστειλε ένα σύστημα που κατασκεύασε ο ίδιος το 1835 στον Hamilton όμοιο με του Hamilton. Αργότερα, το 1841 ο Hamilton έλαβε ένα γράμμα από τον Augustus De Morgan, στο οποίο ο τελευταίος του ζητούσε να μάθει για τις τριάδες του [Cr].

Το 1843, ο Hamilton ξεκίνησε μια άλλη εντατική έρευνα για τις τριάδες, και ήταν σαφές για αυτόν το πλαίσιο εργασίας μέσα στο οποίο η έρευνα έπρεπε να διεξαχθεί. Ήλπιζε λοιπόν οι καινούργιοι αριθμοί να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες [Cr]:

1. την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού,

2. την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού,

3. την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού υπό την πρόσθεση,

4. η διαίρεση να είναι σαφής, δηλαδή, εάν $A, A^{'}$ είναι δύο οποιεσδήποτε τριάδες, και $A \neq 0$, τότε να είναι πάντα δυνατό να βρεθεί μια τριάδα X της ίδιας μορφής τέτοια ώστε $A^{'} = AX$,

5. τον κανόνα του modulus, δηλαδή, για οποιεσδήποτε τρεις τριάδες, οι οποίες συνδέονται ως εξής
$$(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = a_3 + ib_3 + jc_3$$
να ισχύει
$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2,$$

6. οι νέοι αριθμοί να μπορούν να αναπαραστηθούν με όρους του τρισδιάστατου χώρου.

Ήταν προφανές στον Hamilton ότι οι συνηθισμένοι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, με εξαίρεση την τελευταία η οποία αντιστοιχεί στον χώρο διάστασης 2.

Ο Hamilton απαιτούσε οι καινούργοι αριθμοί να ικανοποιούν κανόνες αντίστοιχους με τους κανόνες των μιγαδικών αριθμών. Τις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα πολλοί άνθρωποι προσπαθούσαν να γενικεύσουν την έννοια του πραγματικού αριθμού, με σεβασμό στους συνηθισμένους κανόνες των αλγεβρικών πράξεων, και προσπαθούσαν να τους αναπαραστήσουν γεωμετρικά. Αυτή η απαίτηση είναι γνωστή ως η ''Αρχή της Σταθερότητας των Ισοδύναμων Μορφών'' του George Peacock. Ο Peacock στο διάστημα που κατείχε την θέση του αρχιμανδρίτη του Ely, η οποία είναι η επισκοπή του Cambridge, έγραψε ένα εγχειρίδιο στην άλγεβρα σε δύο τόμους, ο ένας με τίτλο «Η Αριθμητική Άλγεβρα» και ο άλλος με τίτλο «Η Συμβολική Άλγεβρα». Η αρχή αυτή διατυπώνεται ως εξής [Pe]:

> «*Οποιεσδήποτε αλγεβρικές μορφές οι οποίες είναι ισοδύναμες όταν τα σύμβολα είναι γενικά σε μορφή, αλλά συγκεκριμένα σε αξία, θα είναι ισοδύναμες όμοια όταν τα σύμβολα είναι γενικά σε αξία καθώς επίσης και σε μορφή.*»

Τα quaternions $a+ib+jc+kd$, όπου τα a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί, τα οποία ανακάλυψε ο Hamilton στις 16 Οκτωβρίου του 1843, πολλαπλασιάζονται σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, οι οποίοι είναι ανάλογοι με τους κανόνες πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών και οι οποίοι είναι:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki &= j, \\ j\,i = -k, \quad kj = -i, \quad ik &= -j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Μπορούν επίσης να γραφούν και ως τετράδες (a, b, c, d). Τα quaternions μπορούν, εκτός από το να προστεθούν, να αφαιρεθούν και να πολλαπλασιαστούν, και να διαιρεθούν (εκτός από την διαίρεση με το μηδέν). Όσον αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση πραγματοποιούνται και οι δύο όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση μεταξύ μιγαδικών αριθμών και γίνεται κατά όρους. Επίσης, όλοι οι κανόνες υπολογισμού ισχύουν εκτός από την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού, δηλαδή, εάν $Q, Q^{'}$ είναι δύο quaternions δεν ισχύει μια σχέση της μορφής

$$QQ^{'} = Q^{'}Q,$$

διότι, για παράδειγμα, $ij = -ji$.

Στην συνέχεια θα δώσουμε τα βασικά βήματα της πορείας που ακολούθησε ο Hamilton για τον υπολογισμό τριάδων μέχρι την ανακάλυψη των quaternions, τα οποία είναι στοιχεία του χώρου διάστασης 4.

2.2 Συνοπτική παρουσίαση της ιστορίας των μιγαδικών αριθμών

Οι εκφράσεις της μορφής $a+\sqrt{-b}$ έχουν ήδη αντιμετωπιστεί κατά τον μεσαίωνα στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι εκφράσεις αυτές καλούνταν ''αδύνατες λύσεις'' ή αλλιώς ''παράλογοι αριθμοί''. Οι αρνητικοί αριθμοί επίσης καλούνταν ''αδύνατοι''. Ο Cardan χρησιμοποιούσε τους αριθμούς $a+\sqrt{-b}$ στην επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού, όπου και οι τρεις ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί [VDW].

Ο Bombelli έδειξε ότι ήταν δυνατό να κάνει υπολογισμούς με εκφράσεις της μορφής $a+\sqrt{-b}$ χωρίς αντιφάσεις αλλά δεν του άρεσαν και τις αποκαλούσε ''σοφιστικές'' και χωρίς καθόλου αξία. Η έκφραση ''complexe nombre'', του οποίου η μετάφραση είναι σύνθετος αριθμός εννοώντας έναν μιγαδικό αριθμό, προέρχεται από τον Descartes. Ο Euler δεν είχε καθόλου δισταγμούς στο να κάνει πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς. Πρότεινε μάλιστα και τύπους όπως τον ακόλουθο

$$\cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia}).$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως διανύσματα ή ως σημεία στο επίπεδο προέρχεται από τους Argand(1813), Warren(1828) και Gauss(1832). Ο Argand όρισε τους μιγαδικούς αριθμούς ως κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο. Πήρε τα διανύσματα 1 και i (ως βάση) να είναι ορθογώνια μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα. Η πρόσθεση είναι η συνηθισμένη διανυσματική πρόσθεση που όρισε ο Newton [VDW]. Συγκεκριμένα, ο Newton απέδειξε σε ένα από τα πρώτα του έργα την επίλυση του κανόνα των ταχυτήτων, του οποίου είναι πόρισμα ο κανόνας του παραλληλογράμμου [Ne]. Το μέτρο ενός διανύσματος δηλωνόταν την εποχή εκείνη με τον όρο ''modulus'' και η γωνία που σχηματίζει ένα διάνυσμα με τον θετικό x-άξονα ως το ''όρισμα'' του μιγαδικού αριθμού.

Ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, σύμφωνα με τον Argand, πραγματοποιείται έτσι ώστε τα μέτρα τους να πολλαπλασιάζονται και τα ορίσματα τους να προσθέτονται.

Ο Hamilton γνώριζε και χρησιμοποίησε την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Ήξερε ότι

«*... η ευθεία $\sqrt{-1}$ είναι μια ευθεία κάθετη στην ευθεία 1...*»

και του φαινόταν φυσικό ότι θα πρέπει να υπάρχει και κάποιος άλλος φανταστικός αριθμός που να εκφράζει ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο προηγούμενο.[1] Και ο καινούργιος φανταστικός αριθμός οφείλει να είναι μια τετραγωνική ρίζα του -1, αλλά ταυτόχρονα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητη από την προηγούμενη [Ham1]. Στα έγγραφα του ωστόσο, ο Hamilton έδωσε έμφαση στον ορισμό των μιγαδικών αριθμών ως το ζεύγος (a, b) και ακολούθησε ορισμένους κανόνες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έθεσε λοιπόν στον εαυτό του το παρακάτω ερώτημα:

«*Πως πολλαπλασιάζονται οι τριάδες (a, b, c) μεταξύ τους, ανάλογα με τον πολλαπλασιασμό των ζευγών (a, b);*»

2.3 Η πορεία συλλογισμού μέχρι την ανακάλυψη των "quaternions"

Το παραπάνω ερώτημα απασχολούσε τον Hamilton για αρκετό καιρό, όπως ο ίδιος αναφέρει. Το 1843 λοιπόν, σε ένα γράμμα στον γιο του, δηλώνει ότι η ελπίδα και η θέληση του δυναμώθηκαν. Με ανάλογο τρόπο με τους μιγαδικούς αριθμούς $a + ib$, ο Hamilton έγραψε τις τριάδες του ως εξής

$$a + ib + jc,$$

όπου τα a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αναπαράστησε τα μοναδιαία διανύσματα 1, i, j ως ορθογώνια μεταξύ τους κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα μοναδιαίου μέτρου στον χώρο.

Αργότερα, σε μετέπειτα έγγραφά του χρησιμοποίησε και ο ίδιος τον όρο "διάνυσμα". Έτσι, έπρεπε να αναπαραστήσει τα γινόμενα, όπως το ακόλουθο

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz),$$

ως διανύσματα στον χώρο. Απαιτούσε πρώτον, να μπορεί να πολλαπλασιάσει όρο με όρο και δεύτερον, το μέτρο του γινομένου δύο διανυσμάτων να είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους. Ο τελευταίος κανόνας καλείται από τον Hamilton ως *ο κανόνας του modulus* [VDW].

[1] Όταν λέει η ευθεία $\sqrt{-1}$ ($i = \sqrt{-1}$) εννοεί το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο εκφράζει το διάνυσμα i. Στο πρώτο του έργο ο Hamilton δεν χρησιμοποιούσε τον όρο "διάνυσμα", αλλά χρησιμοποιούσε αντ'αυτού τον όρο "ευθεία".

Σήμερα, γνωρίζουμε ότι οι δύο παραπάνω απαιτήσεις του Hamilton εκπληρώνονται μόνο στους χώρους διάστασης 1, 2, 4 και 8 (δες [CD]). Όπως ισχυρίζεται ο Arkadii Slinko, ο Hamilton το 1843 παρατήρησε ότι η ύπαρξη μιας ταυτότητας της μορφής

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = (z_1^2 + \ldots + z_n^2), \tag{2.2}$$

όπου τα z_i είναι διγραμμικές συναρτήσεις των x_i και των y_i, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας άλγεβρας με διαίρεση διάστασης n πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών [CD].[2] Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε στον $\mathbb{R}^n$ τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό:

εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$, τότε θέτουμε $x \cdot y = z$, όπου $z = (z_1, \ldots, z_n)$ και τα z_i είναι συναρτήσεις των x_i και των y_i τα οποία προσδιορίζονται από την ταυτότητα (2.2). Δεδομένου ότι μια τέτοια άλγεβρα (2.2) μπορεί να γραφεί ως

$$|x||y| = |x \cdot y| \tag{2.3}$$

τότε είναι προφανές ότι η ισότητα $x \cdot y = 0$ συνεπάγεται είτε $x = 0$ είτε $y = 0$. Γενικά, αυτή η άλγεβρα μπορεί να μην είναι προσεταιριστική. Οι ταυτότητες για τα αθροίσματα ενός, δύο και τεσσάρων τετραγώνων έπονται άμεσα από την ταυτότητα (2.3) για τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$ και για τα quaternions $\mathbb{H}$.

Το 1845, ο Cayley κατασκεύασε μια οκταδιάστατη άλγεβρα των οκτανίων $\mathbb{O}$ (octonions) με διαίρεση, πάνω από το $\mathbb{R}$, δίνοντας την ταυτότητα για το άθροισμα οκτώ τετραγώνων. Όπως εμφανίστηκε αργότερα, ο Graves κατασκεύασε την ίδια άλγεβρα ένα χρόνο περίπου νωρίτερα, τον Δεκέμβριο του 1843, και ο οποίος ονόμασε τα οκτάνια ως οκτάδες (oktaves). Αυτή η άλγεβρα δεν είναι προσεταιριστική αλλά κάθε δύο στοιχεία στο $\mathbb{O}$ δημιουργούν μια προσεταιριστική υποάλγεβρα.

Σε προσπάθειες του να αποκτήσει ο Dickson άλγεβρες με διαίρεση υψηλότερων διαστάσεων δημιούργησε την διαδικασία που μας οδηγεί από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{H}$ και από το $\mathbb{H}$ στο $\mathbb{O}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

έστω A μια άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο, διάστασης n πάνω από το $\mathbb{R}$. Θεωρεί την απεικόνιση $^- : A \mapsto A$, η οποία απεικονίζει το a στο συζυγές στοιχείο $\overline{a}$ και καλείται συζυγία, τέτοια ώστε για κάθε στοιχείο $a \in A$ και το $a + \overline{a}$ και το $a\overline{a}$ να είναι βαθμωτά μεγέθη και συγκεκριμένα

[2]Μια άλγεβρα V πάνω από ένα σώμα F λέγεται άλγεβρα με διαίρεση πάνω από το F αν η V έχει μοναδιαίο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό και περιέχει ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο για κάθε μη μηδενικό της στοιχείο [AW].

$$a + \overline{a} = T(a) \text{ (το ίχνος του } a), \qquad a\overline{a} = N(a) \text{ (η νόρμα του } a),$$

όπου $T(a), N(a) \in \mathbb{R}$. Τότε κανείς κατασκευάζει μια άλγεβρα B με μοναδιαίο στοιχείο και με απεικόνιση $^{-}$, διάστασης $2n$ (όπου $B = A \times A$) πάνω από το $\mathbb{R}$, ορίζοντας την ως το συνόλο όλων των διατεταγμένων ζευγών $b = (a_1, a_2)$ με άθροιση κατά συνιστώσες και με τον πολλαπλασιασμό να ορίζεται ως εξής

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1 - y_2 \overline{x}_2, \overline{x}_1 y_2 + y_1 x_2),$$

και την απεικόνιση

$$\overline{(x_1, x_2)} = (\overline{x}_1, -x_2).$$

Αυτή η διπλή διαδικασία, η οποία είναι γνωστή ως η διαδικασία των Cayley-Dickson, αναπαράγει την ακολουθία αλγεβρών με διαίρεση

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to \mathbb{O}$$

αλλά δεν οδηγεί πουθενά πιο πέρα. Η επόμενη άλγεβρα δεν έχει μια διαίρεση.

Χάριν της κατασκευής μιας άλγεβρας με διαίρεση μεγαλύτερης διάστασης απαρνιόμαστε την μια καλή ιδιότητα μετά την άλλη. Για τους μιγαδικούς αριθμούς ο πολλαπλασιασμός είναι και αντιμεταθετικός και προσεταιριστικός, για τα quaternions είναι προσεταιριστικός αλλά παύει να είναι αντιμεταθετικός, ενώ για την άλγεβρα του Cayley δεν είναι ούτε αντιμεταθετικός ούτε προσεταιριστικός. Τελικά, στις 8 διαστάσεις δεν έχουμε τίποτα πολύτιμο να απαρνιθούμε. Συνεπώς, δεν μπορούμε να πάρουμε περισσότερες τέτοιες ταυτότητες για αθροίσματα τετραγώνων με τον τρόπο που εξηγήσαμε, και δεν μπορούμε και με κανέναν άλλο τρόπο διότι ο Hurwitz το 1898 απέδειξε ότι οι άλγεβρες των πραγματικών αριθμών, των μιγαδικών αριθμών, των quaternions και των οκτανίων (γνωστοί και ως οι αριθμοί του Cayley) είναι οι μόνοι αριθμοί, όπου στον πολλαπλασιασμό με μοναδιαία διανύσματα ικανοποιείται ο κανόνας του modulus. Αργότερα, το 1956 ο F. Adams απέδειξε ότι τα n-διάστατα διανύσματα σχηματίζουν μια άλγεβρα στην οποία η διαίρεση (εκτός από το 0) είναι πάντα δυνατή μόνο στις περιπτώσεις για $n = 1, 2, 4$ και 8 [CRC].

Λόγω λοιπόν της μη ικανοποίησης του κανόνα του modulus, η προσπάθεια του Hamilton στις τρεις διαστάσεις απέτυχε. Όπως, ισχυρίζεται ο Van Der Waerden, ο Hamilton οδηγήθηκε από την διαίσθηση του στο να συνεχίσει με τις 4 διαστάσεις, εφόσον όλες οι προσπάθειες του στις τρεις διαστάσεις απέτυχαν. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε αναλυτικά τις προσπάθειες που έκανε μέχρι την μετάβαση στην 4η διάσταση.

Αρχικά, για να εκπληρώσει τον κανόνα του modulus τουλάχιστον για τους μιγαδικούς αριθμούς $a + ib$ έθεσε $ii = -1$, καθώς και για τους αριθμούς $c + jd$ έθεσε $jj = -1$. Αλλά αναρωτιόταν τι συμβαίνει με τα ij και ji.

Στην συνέχεια θεώρησε ότι $ij = ji$ (όπως στην συνηθισμένη άλγεβρα) και υπολόγισε το γινόμενο το οποίο δίνει:

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz) = (ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+xc)+ij(bz+cy).$$

Έπειτα, αναρωτιόταν τι να είναι άραγε το ij και συγκεκριμένα εάν έχει την μορφή

$$\alpha + i\beta + j\gamma,$$

για κάποια πραγματικά μεγέθη α, β, γ.

1η προσπάθεια

Λόγω λοιπόν του ότι υπέθεσε ότι $i^2 = -1$ και $j^2 = -1$, είπε ότι το τετράγωνο του ij θα έπρεπε να είναι ίσο με 1. Και έτσι σκέφτηκε να θέσει $ij = 1$ ή $ij = -1$.

Απέδειξε όμως με υπολογισμούς ότι καμία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις για το γινόμενο ij δεν ικανοποιεί τον κανόνα του modulus.

2η προσπάθεια

Συνέχισε την προσπάθεια του θεωρώντας την απλούστερη περίπτωση, όπου τα δύο quaternions ταυτίζονται, δηλαδή,

$$(a+ib+jc)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc.$$

Κατόπιν, υπολόγισε το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών των μοναδιαίων διανυσμάτων $1, i, j$ και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των τετραγώνων του διανύσματος $a+ib+jc$. Δηλαδή,

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2).$$

Και συμπεραίνει ότι ο κανόνας του modulus ικανοποιείται όταν θέσουμε $ij = 0$.

Επιπλέον, αναφέρει ότι εάν περάσουμε ένα επίπεδο διαμέσου των σημείων 0, 1 και $ib+jc$, τότε η κατασκευή του γινομένου σύμφωνα με τους Argand και Warren θα ισχύει σε αυτό το επίπεδο. Το διάνυσμα $(a+ib+jc)^2$ βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο και η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με το διάνυσμα 1 είναι διπλάσια της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $a+ib+jc$ και 1. Ο Hamilton το επιβεβαίωσε αυτό υπολογίζοντας τις εφαπτόμενες των δύο γωνιών.

3η προσπάθεια

Αργότερα, ο Hamilton αναφέρει ότι η υπόθεση $ij = 0$, που έκανε προηγουμένως, διαδοχικά δεν του φαίνεται να είναι αρκετά σωστή. Στο γράμμα που έστειλε στον Graves, τον Οκτώβριο του 1843, λέει ότι μπήκε στον πειρασμό για μια στιγμή να φανταστεί ότι $ij = 0$, αλλά του φαίνεται περίεργο και άβολο.

Αναφέρει ότι του φαίνεται ορθότερο να θέσει $ij = -ji$. Οπότε θέτει $ij = k, ji = -k$, έτσι ώστε να μπορεί να ερμηνεύσει εάν το k είναι ίσο ή διαφορετικό του μηδενός [Ham1].

Είχε δίκιο λοιπόν να αφήσει την υπόθεση $ij = 0$ και να υποθέσει ότι $ij = -ji$. Για παράδειγμα, εάν $ij = 0$ τότε σύμφωνα με τον κανόνα του modulus για τον πολλαπλασιασμό των i, j θα είχαμε ότι

$$1^2 1^2 = 0,$$

το οποίο είναι ανέφικτο.

4η προσπάθεια

Κάπως πιο γενικά, ο Hamilton πολλαπλασίασε το διάνυσμα $a + ib + jc$ με το διάνυσμα $x + ib + jc$. Σε αυτή την περίπτωση τα δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία πολλαπλασιάζονται βρίσκονται σε ένα κοινό επίπεδο με το μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή, στο επίπεδο που περνάει από τα σημεία 0, 1 και $ib + jc$. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι

$$ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + k(bc - bc).$$

Ο Hamilton είπε ότι ο συντελεστής του k μηδενίζεται και τα $ax - b^2 - c^2$, $(a + x)b$, $(a + x)c$ είναι οι συντεταγμένες του γινομένου με την έννοια ότι η στροφή από την μοναδιαία ευθεία μέχρι το ακτινικό διάνυσμα των a, b, c προστείθεται στο δικό του επίπεδο με την στροφή από την ίδια μοναδιαία ευθεία μέχρι το άλλο ακτινικό διάνυσμα των x, b, c. Επίσης, το ακτινικό διάνυσμα του γινομένου έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο δοσμένων διανυσμάτων [Ham1].

Η μετάβαση στην τέταρτη διάσταση

Μετά από το προηγούμενο ενθαρρυντικό αποτέλεσμα του, ο Hamilton προσπάθησε να εξετάσει την πιο γενική περίπτωση. Υπολόγισε το γινόμενο των δύο διανυσμάτων $a + ib + jc$, $x + iy + jz$, το οποίο δίνει

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz) = (ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+k(bz-cy). \tag{2.4}$$

Σε εξερευνητική του προσπάθεια έθεσε $k = 0$ και αναρωτήθηκε αν ισχύει σε αυτήν την περίπτωση ο κανόνας του modulus. Δηλαδή, εάν ισχύει η ταυτότητα

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2.$$

Παρατηρεί ωστόσο ότι το πρώτο μέλος υπερέχει του δευτέρου κατά τον πραγματικό αριθμό $(bz - cy)^2$. Όμως αυτό είναι το τετράγωνο του συντελεστή του k στην σχέση (2.4) εάν υποθέσουμε ότι

$$ij = k, \quad ji = -k.$$

Και έτσι ο Hamilton αναρωτήθηκε εάν θα έπρεπε να παραδεχτούμε υπό μια έννοια μια τέταρτη διάσταση του χώρου για τον υπολογισμό του γινομένου τριάδων [Ham1].

Η τέταρτη διάσταση του φάνηκε ως ''παράδοξο'' και προσπάθησε να μεταφέρει το παράδοξο στην άλγεβρα. Και σκέφτηκε ότι θα πρέπει να αποδεχτούμε ένα τρίτο ευδιάκριτο φανταστικό σύμβολο k το οποίο να είναι ανεξάρτητο από τα i, j αλλά να είναι ίσο με το γινόμενο τους.

Και κατά αυτόν τον τρόπο εισήγαγε τα **quaternions** ως

$$Q = a + ib + jc + kd, \qquad \acute{\eta} \quad Q = (a, b, c, d),$$

όπου τα a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί.

Συνεπώς, ορίζει το γινόμενο δύο quaternions

$$Q = a + ib + jc + kd, \quad Q' = a' + ib' + jc' + kd',$$

του πολλαπλασιασμού του Q με το Q', το οποίο δίνει την ακόλουθη έκφραση [Ham1]:

$$\begin{aligned} QQ' &= (aa' - bb' - cc' - dd') \\ &+ i(ab' + ba' + cd' - dc') \\ &+ j(ac' + ca' + db' - bd') \\ &+ k(ad' + da' + bc' - cb'). \end{aligned}$$

Ο Hamilton δεν ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε για μια πολυδιάστατη γεωμετρία. Ο Cayley είχε δημοσιεύσει ένα άρθρο σχετικά με την Αναλυτική Γεωμετρία των n διαστάσεων, αλλά ο Hamilton εμφανίζεται να έφτασε στην έννοια ενός χώρου διάστασης 4 ανεξάρτητα από αυτόν [Ham1].

Αφού ο Hamilton εισήγαγε την σχέση $ij = -ji = k$, ως ένα τέταρτο ανεξάρτητο διάνυσμα βάσης, συνέχισε τον υπολογισμό, και έδειξε ότι πιθανόν να ισχύει και η σχέση $ik = -j$, επειδή $ik = iij = i^2j = -j$ καθώς και η σχέση $kj = ijj = -i$. Και εφόσον η σειρά πολλαπλασιασμού αυτών των φανταστικών δεν είναι αδιάφορη τότε δεν μπορούσε να συμπεράνει ότι:

$$k^2 = ijij = +1,$$

επειδή $i^2j^2 = (-1)(-1) = +1$. Του φαινόταν λοιπόν πιο σωστό να υποθέσει ότι

$$k^2 = ijij = -iijj = -(-1)(-1) = -1.$$

Έλεγε πιθανόν διότι χρησιμοποιεί την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού $i(ij) = (ii)j$, χωρίς να γνωρίζει ακόμα τότε εάν ισχύει για τα quaternions. Έκανε λοιπόν διάφορες υποθέσεις και συγκεκριμένα από τώρα και στο εξής θεωρούσε ότι ισχύουν οι σχέσεις (2.1).

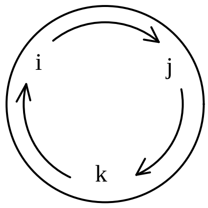
Μέχρι εκείνη την στιγμή είχε οδηγηθεί, όπως αναφέρει ο ίδιος, στο να αποδείξει τα εξής [Ham5]:

- την θεμελιώδη μορφή του quaternion

$$Q = a + ib + jc + kd,$$

με την γεωμετρική αναπαράσταση του τριωνυμικού μέρους, $ib + jc + kd$, να προσδιορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με κατεύθυνση στον χώρο,

- τα τετράγωνα και τα γινόμενα των i, j, k, επεξηγούνται, καθώς παρατηρούμε τον κυκλικό χαρακτήρα των γινομένων από το ακόλουθο διάγραμμα, ως εξής:



κάθε σύμβολο, i, j, k, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα το οποίο ακολουθεί αυτό κυκλικά, δίνει ένα γινόμενο το οποίο ακολουθεί τον πολλαπλασιαστέο, στην ίδια κυκλική διαδοχή, αλλά το πρόσημο του γινομένου αλλάζει, όταν η σειρά των παραγόντων αντιστραφεί,

- την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των quaternions, η οποία δίνει επίσης την προσεταιριστική ιδιότητα και

- απορρίπτει την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, εκτός μόνο μεταξύ των πραγματικών αριθμών, όπως είναι οι τέσσερις συνιστώσες w, x, y, z του quaternion ή μεταξύ ενός τέτοιου πραγματικού αριθμού και ενός από τους φανταστικούς i, j, k.

Με τους παραπάνω κανόνες, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο δύο quaternions $Q, Q^{'}$, είναι ίσο με ένα τρίτο quaternion $Q^{''}$, έτσι ώστε εάν

$$\begin{aligned} Q &= a + ib + jc + kd, \\ Q^{'} &= a^{'} + ib^{'} + jc^{'} + kd^{'}, \\ Q^{''} &= a^{''} + ib^{''} + jc^{''} + kd^{''}, \end{aligned}$$

τότε προκύπτουν οι ακόλουθες τέσσερις σχέσεις μεταξύ των δώδεκα συνιστωσών:

$$
\begin{aligned}
a^{''} &= aa^{'} - bb^{'} - cc^{'} - dd^{'}, \\
b^{''} &= ab^{'} + ba^{'} + cd^{'} - dc^{'}, \\
c^{''} &= ac^{'} + ca^{'} + db^{'} - bd^{'}, \\
d^{''} &= ad^{'} + da^{'} + bc^{'} - cb^{'}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Στην συνέχεια σχημάτισε το άθροισμα των τετραγώνων του νέου quaternion

$$(a^{''})^2 + (b^{''})^2 + (c^{''})^2 + (d^{''})^2$$

και βρήκε ότι το άθροισμα αυτό ήταν ίσο με το γινόμενο

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^{'2} + b^{'2} + c^{'2} + d^{'2}).$$

Δηλαδή, απέδειξε ότι ο κανόνας του modulus ισχύει και για τα quaternions [Ham5].

Η πρόσθεση και η αφαίρεση δεν απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Συγκεκριμένα, εάν $Q = a + ib + jc + kd$ και $Q^{'} = a^{'} + ib^{'} + jc^{'} + kd^{'}$ είναι δύο quaternions, τότε

$$Q \pm Q^{'} = (a \pm a^{'}) + i(b \pm b^{'}) + j(c \pm c^{'}) + k(d \pm d^{'}).$$

Συνεπώς, η πρόσθεση και η αφαίρεση επηρεάζονται από τον κανόνα ο οποίος λέει ότι τα αθροίσματα ή οι διαφορές των συντελεστών οποιωνδήποτε δύο quaternions είναι οι συντελεστές του αθροίσματος ή της διαφοράς εκείνων των δύο quaternions [Ham3].

Η διαίρεση δύο quaternions είναι μονοσήμαντα ορισμένη (εκτός από το μηδέν) έτσι ώστε τα quaternions να σχηματίζουν μια άλγεβρα με διαίρεση. Οι εξισώσεις πολλαπλασιασμού (2.5) δίνουν τις παρακάτω σχέσεις [Ham1]:

$$
\begin{aligned}
a^{'} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(aa^{''} + bb^{''} + cc^{''} + dd^{''}), \\
b^{'} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-ba^{''} + ab^{''} + dc^{''} - cd^{''}), \\
c^{'} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-ca^{''} + ac^{''} + bd^{''} - db^{''}), \\
d^{'} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-da^{''} + ad^{''} + cb^{''} - bc^{''}).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Απέδειξε ότι το μέτρο του πηλίκου δύο quaternions είναι ίσο με το πηλίκο των μέτρων τους και επίσης, ότι ένα quaternion διαιρεμένο με τον εαυτό του δίνει $(1, 0, 0, 0) = 1$.

Ο αντίστροφος ενός quaternion δίνεται από την σχέση

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q} = \frac{\overline{Q}}{Q\overline{Q}},$$

όπου $\overline{Q}$ είναι ο συζυγής ενός quaternion.

Επιπρόσθετα (δες [Ham3]), έστω $Q = a + ib + jc + kd$ και $Q^{'} = a^{'} + ib^{'} + jc^{'} + kd^{'}$ δύο quaternions, όπου τα $a, a^{'}, b, b^{'}, c, c^{'}, d, d^{'}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε τα δύο quaternions $Q, Q^{'}$ είναι ίσα αν και μόνο αν

$$a = a^{'}, \quad b = b^{'}, \quad c = c^{'}, \quad d = d^{'}.$$

Στην εισαγωγή του βιβλίου του Lectures on Quaternions, ο Hamilton αναφέρει ότι παρατήρησε πως αντί να αναπαραστήσουμε ένα διάνυσμα με μια τριάδα της μορφής $x + iy + jz$, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε με αυτή την άλλη τριωνυμική μορφή,

$$ix + jy + kz,$$

και έτσι έπειτα θα είμαστε σε θέση να εκφράσουμε το ζητούμενο γινόμενο δύο διανυσμάτων στο χώρο με ένα quaternion, του οποίου οι συνιστώσες έχουν πολύ απλό γεωμετρικό νόημα. Δηλαδή, παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$(ix + jy + kz)(ix^{'} + jy^{'} + kz^{'}) = w^{''} + ix^{''} + jy^{''} + kz^{''},$$

όπου

$$\begin{aligned} w^{''} &= -xx^{'} - yy^{'} - zz^{'}, \\ x^{''} &= yz^{'} - zy^{'},\ y^{''} = zx^{'} - xz^{'},\ z^{''} = xy^{'} - yx^{'}, \end{aligned}$$

έτσι ώστε το μέρος $w^{''}$, το οποίο είναι ανεξάρτητο από τα i, j, k, σε αυτή την έκφραση για το γινόμενο, να αναπαριστά το γινόμενο των μέτρων των δύο παραγόντων-διανυσμάτων, πολλαπλασιασμένο με το συνημίτονο του συμπληρώματος της γωνίας κλίσης τους. Και το υπολειπόμενο μέρος $ix^{''} + jy^{''} + kz^{''}$ του ίδιου γινομένου των δύο τριωνύμων αναπαριστά ένα διάνυσμα, το οποίο είναι σε μέτρο ίσο με το γινομένο των δύο ίδιων μέτρων, πολλαπλασιασμένο με το ημίτονο της ίδιας γωνίας κλίσης, ενώ η κατεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο των δύο παραγόντων-διανυσμάτων, και είναι τέτοια ώστε η στροφή γύρω από το πρώτο διάνυσμα του γινομένου των δύο διανυσμάτων, από το δεύτερο διάνυσμα προς το διάνυσμα του γινομένου, να έχει τον ίδιο δεξιόστροφο (ή αριστερόστροφο) χαρακτήρα, όπως η στροφή γύρω από το θετικό ημιάξονα του k, από τον θετικό ημιάξονα του i, προς αυτόν του j [Ham5].

Λίγα χρόνια αργότερα δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο εισάγει τους όρους ''βαθμωτός'' και ''διανυσματικός'', αναφερόμενος αντίστοιχα στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος ενός quaternion [Ham5]. Δηλαδή, εάν $Q = a+ib+jc+kd$ είναι ένα quaternion τότε το

$$Q_S = a$$

είναι το *βαθμωτό* (scalar) του μέρος ενώ το

$$Q_V = ib + jc + kd$$

είναι το *διανυσματικό* (vector) του μέρος.

Παρατήρηση. Έστω ότι

$$Q_1 = ib_1 + jc_1 + kd_1, \quad Q_2 = ib_2 + jc_2 + kd_2$$

είναι δύο quaternions των οποίων τα πραγματικά μέρη είναι μηδενικά. Τότε το γινόμενο τους δίνει

$$Q_1Q_2 = -(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+i(c_1d_2-d_1c_2)+j(d_1b_2-b_1d_2)+k(b_1c_2-c_1b_2).$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος του νέου quaternion μπορεί να φανεί μαθηματικά ίσο με το αντίθετο του σύγχρονου εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων και το διανυσματικό μέρος του ως το σύγχρονο εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Όταν λοιπόν κατανόησε αρκετά καλά την παραπάνω διαδικασία, ένιωσε ότι το νέο εργαλείο για την εφαρμογή του υπολογισμού στην γεωμετρία, την οποία αναζητούσε για αρκετό χρονικό διάστημα, είχε εν μέρει επιτευχθεί. Αν και η προσέγγιση του Hamilton ήταν αλγεβρική, μπορούμε να συμπεράνουμε (για περισσότερες αιτιολογήσεις δες [Tz]) πως είχε στο νού του ότι η γενίκευση των μιγαδικών αριθμών σχετίζεται με τις στροφές στον χώρο. Άλλωστε, στην βασική θεμελίωση των μιγαδικών αριθμών ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, ο Hamilton αναπαράστησε το γινόμενο δύο ζευγών με όρους επίπεδων στροφών και έψαχνε και για μια αντίστοιχη αναπαράσταση για την γενίκευση των μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα, στον πρόλογο του έργου του «Lectures On Quaternions» [Ham5, pp.49] δηλώνει:

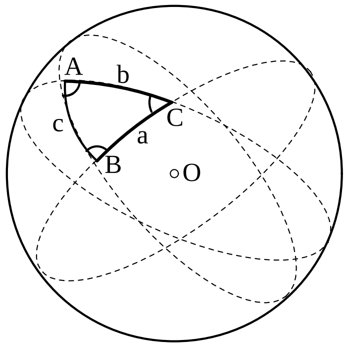
> *«Όταν η σύλληψη, που περιγράφτηκε προηγουμένως, ήταν ξεδιπλωμένη και καθορισμένη στο μυαλό μου, θεώρησα ότι το νέο εργαλείο για την εφαρμογή του υπολογισμού στη γεωμετρία, για την οποία από τόσο καιρό είχα επιδιώξει, τώρα, τουλάχιστον εν μέρει, επιτεύχθηκε.»*

Στην συνέχεια λοιπόν, εισήγαγε μια θεωρία της σύνδεσης των quaternions με την σφαιρική τριγωνομετρία, και εν γένει με την σφαιρική γεωμετρία.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα όσα θα επακολουθήσουν σε σχέση με την θεωρία του Hamilton, θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή όσον αφορά τα βασικά χαρακτηριστικά της σφαιρικής γεωμετρίας.

Σφαιρική Γεωμετρία

Το τμήμα ABC μιας σφαιρικής επιφάνειας το οποίο προσδιορίζεται από τρία τόξα μέγιστων κύκλων τα οποία τέμνονται ανά δύο σε τρεις κορυφές καλείται ένα σφαιρικό τρίγωνο. Τα σημεία A, B, C καλούνται οι κορυφές του, τα τρία τόξα a, b, c καλούνται οι πλευρές του και οι τρεις γωνίες που σχηματίζονται από ευθείες εφαπτόμενες στις πλευρές του σφαιρικού τριγώνου και οι οποίες τέμνονται στις κορυφές καλούνται οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου [CRC].

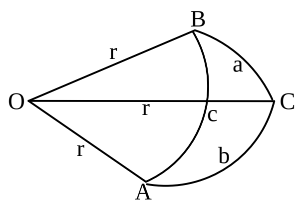


Εάν συμβολίσουμε τις γωνίες αυτές με A, B, C, έχουμε την σχέση

$$A + B + C - \pi = E > 0,$$

και το E καλείται η σφαιρική υπερβολή. Επίσης, έχει αποδειχθεί στην γεωμετρία, ότι ένα σφαιρικό τρίγωνο μπορεί εν γένει να κατασκευαστεί από οποιαδήποτε τρία από τα έξι μέρη του (ακόμα και στην περίπτωση που δίδονται οι τρεις γωνίες του).

Τα πραγματικά αντικείμενα ανακάλυψης στην σφαιρική τριγωνομετρία είναι οι κοινές σχέσεις των γωνιών κλίσης των εδρών (δίεδρες γωνίες) και των ακμών μιας στερεάς γωνίας (επίπεδες γωνίες). Στερέα καλείται η γωνία η οποία σχηματίζεται στο κέντρο μιας σφαίρας από τρία επίπεδα. Οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου, οι οποίες είναι ανάλογες με τις γωνίες κλίσης των ακμών μιας στερεάς γωνίας, παίρνονται για να αναπαραστήσουν εκείνες τις γωνίες. Και οι γωνίες τις οποίες εκείνες οι πλευρές σχηματίζουν μεταξύ τους παρατηρούνται ως ταυτόσημες με τις γωνίες κλίσης των εδρών της στερεάς γωνίας [Tr].



Τα σφαιρικά τρίγωνα έχουν αντίστοιχες ιδιότητες με εκείνες των επίπεδων τριγώνων. Δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα για τα σφαιρικά τρίγωνα είναι τα ακόλουθα [Tr]:

Νόμος ημιτόνων

Σε ένα σφαιρικό τρίγωνο, τα ημίτονα των πλευρών είναι ανάλογα με τα ημίτονα των απέναντι γωνιών, δηλαδή, εάν ABC είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο τότε

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Νόμος συνημιτόνων

Σε ένα σφαιρικό τρίγωνο, το συνημίτονο οποιασδήποτε πλευράς ισούται με το συνημίτονο των άλλων δύο πλευρών, συν το γινόμενο των ημιτόνων εκείνων των πλευρών με το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους, δηλαδή, ισχύουν οι ακόλουθες τρεις ισότητες:

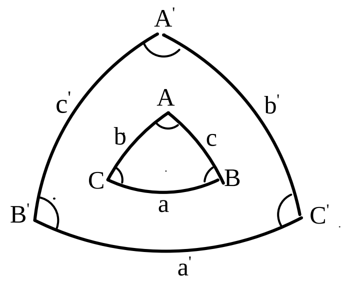
$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.
\end{aligned}$$

Όσον αφορά τον νόμο των συνημιτόνων υπάρχει και μια δεύτερη ισοδύναμη μορφή η οποία διατυπώνεται για τις γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου και έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\
\cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.
\end{aligned}$$

Οι ισοδύναμες σχέσεις προκύπτουν ως εξής:

έστω $A^{'}B^{'}C^{'}$ το πολικό τρίγωνο του τριγώνου ABC και ας ονομάσουμε τις γωνίες του και τις πλευρές του με $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$, $a^{'}$, $b^{'}$, $c^{'}$.



Τότε

$$\begin{aligned} A^{'} &= 180^o - a, \;\; a^{'} = 180^o - A \\ B^{'} &= 180^o - b, \;\; b^{'} = 180^o - B \\ C^{'} &= 180^o - c, \;\; c^{'} = 180^o - C. \end{aligned}$$

Επίσης από τον νόμο των συνημιτόνων για το σφαιρικό τρίγωνο $A^{'}B^{'}C^{'}$ έχουμε

$$\cos a^{'} = \cos b^{'} \cos c^{'} + \sin b^{'} \sin c^{'} \cos A^{'}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τελικά την ισοδύναμη μορφή του νόμου των συνημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα.

Σημείωση. Το πολικό τρίγωνο ενός σφαιρικού τριγώνου (το οποίο καλείται αλλιώς και ως παραπληρωματικό τρίγωνο) κατασκευάζεται ως εξής:

έστω $OABC$ μια τρίεδρος στερεά γωνία. Τότε κατασκευάζεται άλλη τρίεδρος στερεά γωνία $OA^{'}B^{'}C^{'}$ που λέγεται η *παραπληρωματική* γωνία της γωνίας $OABC$ και της οποίας οι ευθείες $OA^{'}, OB^{'}, OC^{'}$ είναι προς το ίδιο μέρος με τις ευθείες OA, OB, OC αντιστοίχως και είναι κάθετες στα επίπεδα OBC, OAC, OAB αντίστοιχα. Τα σημεία $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ είναι οι πόλοι των ημισφαιρίων που περιέχουν το σφαιρικό τρίγωνο ABC και ορίζονται από τους μέγιστους κύκλους των πλευρών του. Το σφαιρικό τρίγωνο $A^{'}B^{'}C^{'}$ καλείται το πολικό τρίγωνο του σφαιρικού τριγώνου ABC [Ge].

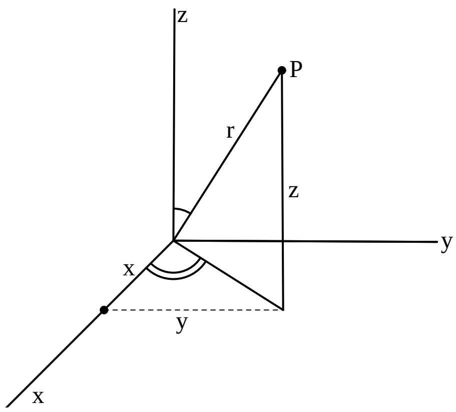
Επιπρόσθετα, οι επίπεδες γωνίες μιας τριέδρου γωνίας είναι παραπληρωματικές των δίεδρων γωνιών της παραπληρωματικής της και αντιστρόφως.

Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι συνηθισμένες σφαιρικές συντεταγμένες (φ, ψ) στην σφαίρα S^2 ακτίνας 1 (δες το παρακάτω σχήμα) στον $\mathbb{R}^3$ ορίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\psi\sin\varphi \\
y &= r\sin\psi\sin\varphi \\
z &= r\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

όπου η γωνία που σχηματίζει ο θετικός z-άξονας με την ακτίνα r είναι η πολική συντεταγμένη ψ και η άλλη γωνία είναι η πολική συντεταγμένη φ.



Πιο γενικά, εάν ορίσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες $(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}, \psi)$ στην σφαίρα S^n στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τότε οι σφαιρικές συντεταγμένες σχετίζονται με τις ορθογώνιες συντεταγμένες $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}\cos\psi, \\
x_2 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}\sin\psi, \\
x_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\
x_n &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
x_{n+1} &= \cos\varphi_1,
\end{aligned}
$$

με $0 \leq \phi_i \leq \pi,\ i = 1, \ldots, n-1$ και $0 \leq \psi < 2\pi$ [EDM].

Ο Hamilton λοιπόν, ανακεφαλαιώνοντας την έρευνά του, δηλώνει ότι οδηγήθηκε, από την ταυτότητα των αθροισμάτων των τετραγώνων, στο να εκφράσει τους συντελεστές ενός quaternion με ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων στην σφαίρα S^3 ως εξής [Ham5]:

$$\begin{aligned} a &= \mu\cos\theta, \\ b &= \mu\sin\theta\cos\varphi, \\ c &= \mu\sin\theta\sin\varphi\cos\psi, \\ d &= \mu\sin\theta\sin\varphi\sin\psi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

όπου καλεί το $\mu = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ το μέτρο του quaternion, το θ το όρισμα του, το φ το συμπλήρωμα του γεωγραφικού πλάτους, και το ψ το γεωγραφικό μήκος του quaternion $Q = a + ib + jc + kd$.

Αναφέρει ότι οι λέξεις ‘‘μέτρο’’ και ‘‘όρισμα’’ προτείνονται στην φρασεολογία του Cauchy, σχετικά με τους συνηθισμένους φανταστικούς της άλγεβρας. Από τότε λοιπόν άρχισε συνήθως να χρησιμοποιεί αντίστοιχα τους όρους ‘‘τανυστής’’ και ‘‘γωνία’’ [Ham5].

Θεωρεί λοιπόν τα b, c, d ως τις ορθογώνιες συντεταγμένες ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο (με άξονες τα i, j, k), του οποίου το μέτρο του $\mu\sin\theta$ είναι το μέτρο του ακτινικού διανύσματος ή αλλιώς μπορεί να καλείται η ‘‘ακτίνα’’ του. Επίσης, έστω R το σημείο όπου το ακτινικό διάνυσμα των b, c, d (επιμηκυνόμενο αν χρειαστεί) τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Καλεί το σημείο R το αντιπροσωπευτικό σημείο του quaternion Q και έστω ότι οι πολικές συντεταγμένες ϕ και ψ, προσδιορίζουν την θέση του σημείου R επάνω στην σφαίρα, και είναι αντίστοιχα το *συμπλήρωμα του γεωγραφικού του πλάτους* (colatitude) και το *γεωγραφικό του μήκος* (longitude) [Ham5]. Συνεπώς, η γωνία ψ είναι η αζιμουθιακή γωνία στο επίπεδο ij από τον i-άξονα με $0 \le \psi < 2\pi$ και η γωνία ϕ είναι η πολική γωνία από τον k-άξονα με $0 \le \phi \le \pi$, όπου $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \delta$ και δ είναι το γεωγραφικό πλάτος του σημείου R.

Τότε το quaternion είναι απόλυτα προσδιορισμένο από το μέτρο του, το όρισμα, το συμπλήρωμα του γεωγραφικού του πλάτους και το γεωγραφικό του μήκος.

Λόγω των σχέσεων (2.6) θα έχουμε (δες [Ham5]):

$$\begin{aligned} \cos\theta'' &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\cos(\psi-\psi')), \\ \cos\theta' &= \cos\theta''\cos\theta + \sin\theta''\sin\theta(\cos\phi''\cos\phi + \sin\phi''\sin\phi\cos(\psi''-\psi)), \\ \cos\theta &= \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''(\cos\phi'\cos\phi'' + \sin\phi'\sin\phi''\cos(\psi'-\psi'')). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Μπορούμε επίσης να μιλήσουμε και για την περιεχόμενη γωνία ενός quaternion με ένα άλλο [Ham1], και το συνημίτονο της γωνίας αυτής είναι ίσο με

$$\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\cos(\psi' - \psi) = \frac{bb' + cc' + dd'}{\mu\mu'\sin\theta\sin\theta'}.$$

Στην συνέχεια κατασκευάζει με αντίστοιχο τρόπο με τον τρόπο που προσδιόρισε το αντιπροσωπευτικό σημείο R, τα αντιπροσωπευτικά σημεία R' και R'' του άλλου παράγοντα Q' και του γινομένου Q'', δηλαδή, θεωρεί τα φ', ψ' να είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του δεύτερου σημείου R' και τα φ'', ψ'' να είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου του γινομένου R''. Τότε οι εξισώσεις (2.8) εκφράζουν ότι στο σφαιρικό τρίγωνο $RR'R''$, το οποίο έχει ως πλευρές τα τόξα $RR', R'R'', R''R$ και το οποίο σχηματίζεται από τα αντιπροσωπευτικά σημεία των δύο παραγόντων και του γινομένου τους, οι γωνίες είναι αντίστοιχα ίσες με τα ορίσματα εκείνων των δύο παραγόντων και του συμπληρώματος του ορίσματος του γινομένου (δύο ορθών γωνιών) [Ham5]. Οπότε οι εξισώσεις (2.8) γίνονται

$$\begin{aligned}
\cos\theta'' &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos RR', \\
\cos\theta &= \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos R''R, \\
\cos\theta' &= \cos\theta''\cos\theta + \sin\theta''\sin\theta\cos R'R'',
\end{aligned} \tag{2.9}$$

και συνεπώς:

$$R = \theta, \quad R' = \theta', \quad R'' = \pi - \theta''.$$

Το παραπάνω θεώρημα του σφαιρικού τριγώνου, σε συνδυασμό με τον κανόνα του modulus, απαιτεί εκτός από τον ακόλουθο κανόνα της περιστροφής, να αποφασίσουμε σε ποια πλευρά του επιπέδου των δύο ευθειών των παραγόντων βρίσκεται η ευθεία του γινομένου, έτσι ώστε να ολοκληρωθεί το σύστημα των συνθηκών που συνδέει το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο quaternions με τους παράγοντες και με την διάταξή τους. Θα αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι το σημείο R'' του γινομένου θα παίρνεται πάντα είτε από τα δεξιά είτε από τα αριστερά του σημείου R', σε σχέση με το σημείο R, σύμφωνα με το αν ο θετικός ημιάξονας του d είναι από τα δεξιά ή από τα αριστερά του θετικού ημιάξονα του c, σε σχέση με τον θετικό ημιάξονα του b. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με το αν η θετική κατευθύνση της περιστροφής σε γεωγραφικό μήκος είναι από τα δεξιά ή από τα αριστερά [Ham3].

Μια αλλαγή στην διάταξη των δύο quaternions-παραγόντων θα έριχνε το σημείο του γινομένου R'' από τα δεξιά στα αριστερά ή από τα αριστερά προς τα δεξιά του τόξου RR'.

Προκύπτει άμεσα από τους παραπάνω κανόνες, ότι εάν $RR^{'}R^{''}$ είναι οποιοδήποτε σφαιρικό τρίγωνο και εάν x, y, z είναι οι ορθογώνιες συντεταγμένες του R, $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ εκείνες του $R^{'}$ και $x^{''}, y^{''}, z^{''}$ εκείνες του $R^{''}$, το κέντρο της σφαίρας είναι η αρχή και ότι η ακτίνα είναι ίση με 1, τότε, εάν ο θετικός ημιάξονας του d επιλεχθεί έτσι ώστε να βρίσκεται από τα δεξιά ή από τα αριστερά του θετικού ημιάξονα του c, σε σχέση με τον θετικό ημιάξονα του b, ανάλογα με τον αν η ακτίνα $OR^{''}$ βρίσκεται από τα δεξιά ή από τα αριστερά της ακτίνας $OR^{'}$ σε σχέση με την ακτίνα OR, τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος πολλαπλασιασμού δύο quaternions [Ham2]:

$$\begin{aligned}&[\cos R + (ix + jy + kz)\sin R][\cos R^{'} + (ix^{'} + jy^{'} + kz^{'})\sin R^{'})]\\ &\qquad = -\cos R^{''} + (ix^{''} + jy^{''} + kz^{''})\sin R^{''}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Αναπτύσσοντας τον παραπάνω τύπο, σύμφωνα με τους κανόνες (2.1), προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις μεταξύ πραγματικών αριθμών [Ham2]:

$$\begin{aligned}-\cos R^{''} &= \cos R\cos R^{'} - (xx^{'} + yy^{'} + zz^{'})\sin R\sin R^{'},\\ x^{''}\sin R^{''} &= x\sin R\cos R^{'} + x^{'}\sin R^{'}\cos R + (yz^{'} - zy^{'})\sin R\sin R^{'},\\ y^{''}\sin R^{''} &= y\sin R\cos R^{'} + y^{'}\sin R^{'}\cos R + (zx^{'} - xz^{'})\sin R\sin R^{'},\\ z^{''}\sin R^{''} &= z\sin R\cos R^{'} + z^{'}\sin R^{'}\cos R + (xy^{'} - yx^{'})\sin R\sin R^{'}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Από τις εξισώσεις (2.11) ο Hamilton βγάζει τα παρακάτω συμπεράσματα [Ham3]:

- η πρώτη εξίσωση είναι μια έκφραση ενός γνωστού θεωρήματος, που αποδίδει την σύνδεση μιας πλευράς οποιουδήποτε σφαιρικού τριγώνου με τις τρεις γωνίες του, και συγκεκριμένα είναι ο νόμος των συνημιτόνων για το συνημίτονο μιας από τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.

- οι άλλες τρεις εξισώσεις είναι μια έκφραση ενός άλλου θεωρήματος, το γνωστό θεώρημα το οποίο λέει ότι μια δύναμη η οποία είναι ίση με $\sin R^{''}$, κατευθυνμένη από το κέντρο της σφαίρας προς το σημείο $R^{''}$, είναι στατικά ίση με το σύστημα τριών άλλων δυνάμεων, εκ των οποίων η μια είναι κατευθυνμένη από το κέντρο της σφαίρας προς το R και είναι ίση με $\sin R\cos R^{'}$, η άλλη είναι κατευθυνμένη από το κέντρο της σφαίρας προς το $R^{'}$ και ίση με $\sin R^{'}\cos R$, και η τρίτη είναι ίση με $\sin R\sin R^{'}\sin RR^{'}$ και είναι κατευθυνμένη από το κέντρο της σφαίρας δια μέσου του πόλου του τόξου $RR^{'}$ που βρίσκεται από την ίδια μεριά του τόξου αυτού με το $RR^{''}$.

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί αυτό το θεώρημα. Αλλά έχει επίσης ενδιαφέρον να δούμε ότι οι τέσσερις εξισώσεις (2.11) περιέχονται τόσο απλά σε μια, την (2.10) του πολλαπλασιασμού quaternions και αποκτιούνται τόσο εύκολα αναπτύσσοντας και αντικαθιστώντας τις βασικές εξισώσεις (2.1).

Ένα καινούργιο είδος αλγορίθμου ή υπολογισμού, για την σφαιρική τριγωνομετρία, εμφανίζεται λοιπόν να δίνεται.

Στην συνέχεια εάν υποθέσουμε ότι το σφαιρικό τρίγωνο $RR^{'}R^{''}$ γίνεται αρκετά μικρό, καθώς οι τρεις κορυφές του τείνουν αόριστα όλες προς ένα σημείο, εκείνο το οποίο είναι η τομή της σφαιρικής επιφάνειας με τον θετικό ημιάξονα του b, τότε κάθε συντεταγμένη x θα τείνει να γίνει ίση με 1, και κάθε μια από τις y, z να μηδενιστεί, ενώ το άθροισμα των τριών γωνιών θα τείνει να γίνει ίσο με π. Τότε η ακόλουθη γνωστή εξίσωση στον υπολογισμό των φανταστικών, συνδεδεμένη με την επίπεδη τριγωνομετρία

$$(\cos R + i\sin R)(\cos R^{'} + i\sin R^{'}) = \cos(R + R^{'}) + i\sin(R + R^{'})$$

προκύπτει (όπου $i^2 = -1$), ως μια συγκεκριμένη περίπτωση της πιο γενικής σχέσης (2.10) [Ham3].

Στην θεωρία αυτήν υπάρχουν μόνο δύο διαφορετικές τετραγωνικές ρίζες της αρνητικής μονάδας (i και $-i$) και διαφέρουν μόνο στο πρόσημο. Στην θεωρία των quaternions, με σκοπό ένα quaternion $Q = a + ib + jc + kd$ να έχει το τετράγωνο του ίσο με -1, είναι απαραίτητο και επαρκές το ότι θα πρέπει να έχουμε [Ham3]:

$$a = 0, \quad b^2 + c^2 + d^2 = +1.$$

Γενικά, ωστόσο η τετραγωνική ρίζα ενος quaternion έχει μόνο δύο τιμές, που διαφέρουν μόνο σε πρόσημο [Ham1]. Διότι, εάν

$$(a^{''}, b^{''}, c^{''}, d^{''}) = (a, b, c, d)^2$$

τότε

$$a^{''} = a^2 - b^2 - c^2 - d^2, \quad b^{''} = 2ab, \quad c^{''} = 2ac, \quad d^{''} = 2ad.$$

Καθοδηγούμαστε λοιπόν στην ακόλουθη έκφραση μιας φανταστικής μονάδας, οι οποίες είναι άπειρες σε πλήθος και έχουν όλες μέτρο ίσο με 1 και όρισμα $\dfrac{\pi}{2}$ [Ham3]:

$$\sqrt{-1} = i\cos\phi + j\sin\phi\cos\psi + k\sin\phi\sin\psi,$$

Για να διακρίνουμε μια τέτοια μονάδα από μια άλλη, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$i_R = ix + jy + kz, \quad \text{με} \quad i_R^2 = -1,$$

όπου R είναι ακόμη εκείνο το σημείο στην σφαιρική επιφάνεια που έχει τα x, y, z (ή $\cos\phi, \sin\phi\cos\psi, \sin\phi\sin\psi$) για ορθογώνιες συντεταγμένες του, έχοντας ως αρχή το κέντρο της σφαίρας, και ψ είναι το γεωγραφικό μήκος του και ϕ το συμπλήρωμα του γεωγραφικού πλάτους του. Και τότε ο τύπος (2.10) γίνεται για οποιοδήποτε σφαιρικό τρίγωνο, στο οποίο η στροφή γύρω από το R, από το $R^{'}$ στο $R^{''}$, είναι θετική:

$$(\cos R + i_R \sin R)(\cos R^{'} + i_{R^{'}} \sin R^{'}) = -\cos R^{''} + i_{R^{''}} \sin R^{''}.$$

Για να διαχωρίσουμε το πραγματικό με το φανταστικό μέρος της παραπάνω σχέσης, είναι απαραίτητο να κάνουμε τον ίδιο διαχωρισμό για το γινόμενο των δύο φανταστικών μονάδων οι οποίες εμφανίζονται στο πρώτο μέλος. Θέτοντας τις γωνίες R, $R^{'}$ ίσες με ορθές γωνίες, χωρίς να μετακινήσουμε τα σημεία $R, R^{'}$ επάνω στην σφαίρα, οι φανταστικές μονάδες i_R και $i_{R^{'}}$ δεν αλλάζουν, αλλά η γωνία $R^{''}$ γίνεται ίση με το τόξο $RR^{'}$, και το σημείο $R^{''}$ ταυτίζεται με τον θετικό πόλο εκείνου του τόξου, δηλαδή, με τον πόλο $P^{''}$ στον οποίο η ελάχιστη στροφή από το $R^{'}$ γύρω από το R είναι θετική. Τότε το γινόμενο των δύο φανταστικών μονάδων στο πρώτο μέλος αυτής της σχέσης (για οποιεσδήποτε δύο τέτοιες μονάδες) είναι ίσο με [Ham3]:

$$i_R i_{R^{'}} = -\cos RR^{'} + i_{P^{''}} \sin RR^{'}.$$

Ενώ λοιπόν, η σύγκριση των δύο πραγματικών μερών παράγει την γνωστή εξίσωση

$$\cos R \cos R^{'} - \sin R \sin R^{'} \cos RR^{'} = -\cos R^{''},$$

η σύγκριση των φανταστικών μερών δίνει την ακόλουθη έκφραση

$$i_R \sin R \cos R^{'} + i_{R^{'}} \sin R^{'} \cos R + i_{P^{''}} \sin R \sin R^{'} \sin RR^{'} = i_{R^{''}} \sin R^{''}.$$

Σημείωση. Σαν επαλήθευση μπορούμε να αποδείξουμε ότι, εάν το σφαιρικό τρίγωνο τείνει να μηδενιστεί, οι δύο τελευταίες εξισώσεις τείνουν να συμπίπτουν στο να δώσουν την ιδιότητα του επίπεδου τριγώνου

$$R + R^{'} + R^{''} = \pi.$$

Εάν αλλάξουμε την σειρά των παραπάνω μονάδων τότε παίρνουμε τον τύπο (δες [Ham3])

$$i_R i_{R^{'}} = -\cos RR^{'} - i_{P^{''}} \sin RR^{'}$$

Και εφόσον το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε quaternions, τα οποία διαφέρουν μόνο στο πρόσημο των φανταστικών μερών τους, είναι πραγματικό και ίσο με το τετράγωνο των μέτρων, δηλαδή,

$$(a + ib + jc + kd)(a - ib - jc - kd) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

τότε το γινόμενο των δύο γινομένων φανταστικών μονάδων τα οποία διαφέρουν στην σειρά των παραγόντων τους δίνει

$$i_R i_{R'} \cdot i_{R'} i_R = 1. \tag{2.12}$$

Τα γινόμενα

$$i_R i_{R'}, i_{R'} i_R$$

καλούνται ***αντίστροφα*** μεταξύ τους [Ham2].

Γενικά, με βάσει τις σχέσεις (2.1), αν και ισχύει και η επιμεριστική ιδιότητα για τα quaternions [Ham2], δηλαδή, ισχύει η σχέση

$$Q(Q^{'} + Q^{''}) = QQ^{'} + QQ^{''},$$

η αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού δεν ισχύει, δηλαδή, εάν $Q, Q^{'}$ είναι είτε φανταστικά μεγέθη είτε quaternions δεν ισχύει η σχέση

$$QQ^{'} = Q^{'}Q,$$

διότι, για παράδειγμα $ij = -ji$.

Ωστόσο, λόγω πάλι των ίδιων σχέσεων ισχύει και για τα quaternions η προσεταιριστικότητα του γινομένου [Ham2], δηλαδή,

$$\begin{gathered} Q \cdot Q^{'}Q^{''} = QQ^{'} \cdot Q^{''}, \\ Q \cdot Q^{'}Q^{''}Q^{'''} = QQ^{'} \cdot Q^{''}Q^{'''} = QQ^{'}Q^{''} \cdot Q^{'''}, \end{gathered} \tag{2.13}$$

και έτσι συνεχίζεται για οποιοδήποτε αριθμό παραγόντων. Επίσης, η σχέση (2.12) μπορεί εύκολα να αποδειχτεί με βάση τον παραπάνω κανόνα διότι

$$i_R i_{R'} \cdot i_{R'} i_R = i_R i_{R'}^2 i_R = -i_R^2 = 1.$$

Όμοια φαίνεται να ισχύει η σχέση

$$i_R i_{R'} \cdot i_{R'} i_{R''} \cdot \ldots \cdot i_{R^{(n-1)}} i_R = (-1)^n,$$

για οποιαδήποτε n σημεία $R, R^{'}, \ldots, R^{(n-1)}$ επάνω στην σφαιρική επιφάνεια [Ham2]. Και όμοια προκύπτει ότι

$$(\cos R + i_R \sin R)(\cos R^{'} + i_{R'} \sin R^{'}) \cdot \ldots \cdot (\cos R^{(n-1)} + i_{R^{(n-1)}} \sin R^{(n-1)}) = (-1)^n.$$

Κεφάλαιο 3

Το Die Ausdehnungslehre του Hermann Grassmann

3.1 Θεμελιώδεις έννοιες

Ο Grassmann με το βιβλίο του Ausdehnungslehre, όπως αναφέρει ο Dorier, παρείχε τα θεμέλια για μια ενοποιημένη θεωρία γραμμικότητας, καθώς εισήγαγε, με μεγάλη ακρίβεια και με πολύ γενικό περιεχόμενο, στοιχειώδεις έννοιες οι οποίες είναι αντίστοιχες με τις σύγχρονες έννοιες της γραμμικής εξάρτησης, της βάσης και της διάστασης [Do1]. Ωστόσο αυτό το έργο, το οποίο δεν ήταν κατανοητό για την εποχή του, είχε μόνο έμμεσες και περιορισμένες επιδράσεις στην ανάπτυξη της γεωμετρίας και της θεωρίας των διανυσματικών χώρων [Do2].

Το 1^o κεφάλαιο του βιβλίου Ausdehnungslehre είναι ένα εισαγωγικό κεφάλαιο σχετικά με την "Γενική Θεωρία των Μορφών" που προσπαθεί να τυποποιήσει την έννοια της αλγεβρικής πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο ο Grassmann δίνει τον κανόνα για την εξέταση της τυπικής όψης της θεωρίας της έκτασης (extension) καθώς και τους κανόνες για την κατασκευή και την σύγκριση των νέων οντοτήτων με συνδέσεις με τις ήδη υπάρχουσες. Οι νέες οντότητες κατασκευάζονται μέσω των συνδέσεων άλλων οντοτήτων [Do2].

Ο Grassmann μεταχειρίστηκε τις γεωμετρικές και φυσικές οντότητες τις οποίες αποκαλεί "εκτεταμένα μεγέθη" (extensive Grössen, extensive magnitude) που μπορούν να είναι σημεία, γραμμές, τετράεδρα, κλπ, και καθορίζει τους κανόνες πολλαπλασιασμού για αυτές τις οντότητες που οδηγούν σε μια οντότητα υψηλότερης βαθμίδας. Τα εκτεταμένα μεγέθη διαχωρίζονται σε βαθμίδες και μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν. Εντούτοις, η πρόσθεση μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο μεταξύ μεγεθών της ίδιας βαθμίδας, ενώ ο πολλαπλασιασμός οδηγεί σε μια πιο υψηλή βαθμίδα [Sh]. Χρησιμοποιεί λοιπόν ως στοιχειώδη την έννοια ''μέγεθος'', όπως θα θεωρούσαμε σήμερα αντίστοιχα την έννοια ''στοιχείο'' ενός διανυσματικού χώρου, βάσει της οποίας θεμελιώνει όλες τις βασικές έννοιες που ορίζει κατόπιν [Gr, σχ.].[1] Ο ορισμός ενός γραμμικού χώρου (ή διανυσματικού χώρου) άρχισε να γίνεται γνωστός στα μαθηματικά περίπου το 1920, όταν ο Hermann Weyl και άλλοι δημοσίευσαν τυπικούς ορισμούς της έννοιας αυτής. Στην πραγματικότητα, ένας τέτοιος ορισμός δόθηκε τριάντα έτη πιο πριν από τον Peano, ο οποίος ηταν εξοικειωμένος με το μαθηματικό έργο του Grassmann, στο οποίο δεν είχε δοθεί ο τυπικός ορισμός του διανυσματικού χώρου όμως από την θεωρία του συμπεραίνουμε ότι ήταν πολύ κοντά στην έννοια αυτή [FS1].

Η πρώτη έννοια που ορίζει είναι η έννοια του γραμμικού συνδυασμού λέγοντας ότι ένα μέγεθος a προκύπτει από κάποια άλλα μεγέθη $b, c, \dots$ με κάποιους πραγματικούς αριθμούς, έστω $\beta, \gamma, \dots$, εάν ισχύει μια σχέση της μορφής

$$a = \beta b + \gamma c + \dots .$$

Επιπρόσθετα, ορίζει κάποια μεγέθη να στέκονται σε μια *αριθμητική σχέση* μεταξύ τους, εάν οποιοδήποτε από αυτά τα μεγέθη μπορεί να προκύψει από τα υπόλοιπα με μια σχέση της παραπάνω μορφής. Αυτή η έννοια θα λέγαμε ότι αντιστοιχεί στην σύγχρονη έννοια της γραμμικής εξάρτησης διαφόρων μεγεθών [Gr, §1,2].[2]

Παρακάτω είναι λίγο ασαφής ως προς τον ορισμό της έννοιας της *μονάδας* (Einheit, unit) αφού βάσει της θεωρίας του μονάδα είναι οποιοδήποτε μέγεθος από το οποίο μπορεί να προκύψει μια συλλογή άλλων μεγεθών. Οπότε θεωρεί και το π ως μια μονάδα στους πραγματικούς αριθμούς, όπως και το 1, αφού κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να προκύψει από αυτόν τον αριθμό [Gr, σχ.]. Συγκεκριμένα, μια μονάδα θα καλείται *πρωτογενής* (ursprüngliche, original), εάν δεν προκύπτει από οποιαδήποτε άλλη μονάδα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι με τον όρο ''πρωτογενή'' εννοεί μια μονάδα η οποία βρίσκεται στην πρώτη βαθμίδα της παραπάνω διαδικασίας έκτασης που ορίσαμε.

[1] Όταν δίνουμε την παραπάνω αναφορά εννοούμε τα συμπληρωματικά σχόλια του μεταφραστή.

[2] Όταν χρησιμοποιούμε την αναφορά ''§'' εννοούμε την εκάστοτε παράγραφο του βιβλίου στην οποία αναφέρεται.

Όπως αναφέρει ο Dorier η έννοια του εκτεταμένου μεγέθους εισάγεται στην πρώτη έκδοση του Ausdehnungslehre ως εξής [Do1]:

> *«Ένα δοσμένο μέγεθος (μονάδα) δίνεται για να παράγει ένα σύστημα διάστασης 1 με την συνεχή δράση της ίδιας θεμελιώδους "εξέλιξης" (ή της αντίθετης της). Μετά μια άλλη "εξέλιξη" εφαρμόζεται σε κάθε μέγεθος του πρώτου συστήματος για να παράγει ένα σύστημα διάστασης 2, κτλ. Η έννοια "εξέλιξη" αντιστοιχεί στην κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής ...»*

Ξεκινώντας λοιπόν με μια συλλογή μονάδων $e_1, e_2, \ldots$, οι οποίες δεν βρίσκονται σε κάποια αριθμητική σχέση μεταξύ τους, το οποίο αποκαλεί ως ένα *σύστημα μονάδων* (ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο μεγεθών και συγκεκριμένα μια βάση όπως θα λέγαμε σήμερα), όρισε ένα αυθαίρετο χωρίο το οποίο καθορίζουν και θεώρησε τυπικούς γραμμικούς συνδυασμούς

$$\sum \alpha_i e_i = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots,$$

όπου τα α_i είναι πραγματικοί αριθμοί, και το μέγεθος που προκύπτει το ονομάζει **εκτεταμένο μέγεθος**. Αν το εκτεταμένο μέγεθος μπορεί να προκύψει από τις πρωτογενείς μονάδες τότε το μέγεθος αυτό θα καλείται εκτεταμένο μέγεθος *πρώτης βαθμίδας* (Stufe, order) [Gr, §5].

Στην συνέχεια του βιβλίου του τα στοιχεία με τα οποία δουλεύει είναι τα εκτεταμένα μεγέθη και είναι της παραπάνω μορφής. Με τον τρόπο που ορίζει την έννοια της μονάδας συνεπάγεται ότι κάθε μέγεθος είναι εκτεταμένο μέγεθος και αντίστροφα. Κατόπιν όρισε την πρόσθεση μεταξύ εκτεταμένων μεγεθών και τον πολλαπλασιασμό ενός εκτεταμένου μεγέθους με πραγματικούς αριθμούς ως εξής:

$$a + b = \Sigma\alpha_i e_i + \Sigma\beta_i e_i = \Sigma(\alpha_i + \beta_i)e_i,$$

$$a \cdot \beta = (\Sigma\alpha_i e_i) \cdot \beta = \beta \cdot (\Sigma\alpha_i e_i) = \Sigma(\alpha_i \beta)e_i,$$

όπου τα a, b είναι εκτεταμένα μεγέθη και τα α_i, β είναι βαθμωτά μεγέθη και τυπικά αποδεικνύει τις θεμελιώδεις ιδιότητες για αυτές τις δύο πράξεις, όπως οι κανόνες της αντιμεταθετικότητας και της προσεταιριστικότητας της πρόσθεσης και η διανεμητικότητα (αριστερά και δεξιά) του πολλαπλασιασμού υπό την πρόσθεση [Gr, §8,12].

Ορίζει την γενική έννοια του *χωρίου* (Gebiet, domain) που ορίζουν μια συλλογή μεγεθών a_1, a_2,..., a_n ως το σύνολο όλων των μεγεθών που προκύπτουν από αυτή την συλλογή μεγεθών και είναι ένα χωρίο *n-διάστασης* (Stufe, order) εάν εκείνα τα μεγέθη είναι μεγέθη της πρώτης βαθμίδας και εάν το χωρίο δεν προκύπτει από λιγότερα από n τέτοια μεγέθη [Gr, §14].[3] Σύμφωνα λοιπόν με την μέθοδο που προκύπτουν τα διάφορα μεγέθη στην θεωρία του Grassmann, ένα χωρίο n-διάστασης προκύπτει από την συλλογή n πρωτογενών μονάδων, οι οποίες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Οπότε η διάσταση του χωρίου σχετίζεται με την μέθοδο που προκύπτουν τα μεγέθη και με την έννοια της γραμμικής εξάρτησης. Στην ουσία αντιπροσωπεύει το μέτρο της έκτασης.

Σχόλιο. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο Grassmann χρησιμοποιεί κοινή ορολογία για να χαρακτηρίσει την κατάσταση κάποιων εννοιών που έχει ήδη ορίσει, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση. Η λέξη "Stufe", της οποίας ο αγγλικός όρος είναι η λέξη "order", χρησιμοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους, ο ένας είναι για να χαρακτηρίσει την βαθμίδα ενός μεγέθους κατά την διάρκεια της έκτασης και ο άλλος για να χαρακτηρίσει την διάσταση ενός χωρίου. Εμείς για να διαχωρίσουμε τους δύο χαρακτηρισμούς θα χρησιμοποιούμε τους δύο όρους που χρησιμοποιήσαμε για την ερμηνεία του όρου αυτού, σύμφωνα με το που αναφερόμαστε κάθε φορά.

Μετέπειτα ορίζει δύο χωρία να είναι *ταυτόσημα* (identisch, identical) εάν κάθε μέγεθος του ενός είναι συγχρόνως και μέγεθος του άλλου, ενώ ένα χωρίο (A) *εμπεριέχεται* (incident) μέσα σε ένα άλλο χωρίο (B) εάν κάθε μέγεθος του πρώτου χωρίου είναι συγχρόνως και μέγεθος του δεύτερου αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Τέλος, όρισε το ***επικαλυπτικό*** χωρίο (gemeinschaftlich, common) δύο χωρίων (δηλαδή, όπως θα λέγαμε σήμερα το άθροισμα τους) καθώς και το ***κοινό*** (verbindend, covering) τους χωρίο (δηλαδή, την τομή τους). Αναφέρει ως παράδειγμα μια πιο ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού λέγοντας ότι εάν το χωρίο A προκύπτει από τις μονάδες e_1, e_2, e_3 και το χωρίο B από τις μονάδες e_2, e_3, e_4 τότε το κοινό χωρίο των χωρίων A και B (δηλαδή, το $A \cap B$) είναι αυτό που προκύπτει από τις μονάδες e_2, e_3 ενώ το επικαλυπτικό τους χωρίο (δηλαδή, το $A+B$) είναι αυτό που προκύπτει από τις μονάδες e_1, e_2, e_3, e_4 [Gr, §15].

Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας είναι μια ακόμα κεντρική έννοια στη θεωρία του Grassmann, όπως και στην σύγχρονη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας. Ο τρόπος παρουσίασης είναι όμοιος με τον σύγχρονο τρόπο παρουσίασης που κανείς βρίσκει στα σύγχρονα εγχειρίδια γραμμικής άλγεβρας.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύει ότι κάποια μεγέθη $a_1, \ldots, a_n$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα (με δικούς του όρους "υπάρχει μια αριθμητική σχέση μεταξύ τους") αν και μόνο αν μπορεί να βρεθεί μια εξίσωση της μορφής

[3] Όταν αναφέρεται στο χωρίο που ορίζουν μια συλλογή μεγεθών εννοεί το χωρίο που προσδιορίζεται από αυτά τα μεγέθη.

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0,$$

με όλους τους αριθμούς $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ να μην είναι συγχρόνως μηδενικοί [Gr, §16].

Αποδεικνύει την αμεταβλητότητα της διάστασης υπό την αλλαγή βάσης και το Steinitz Exchange Theorem [FS1] (το οποίο αποδείχθηκε από τον Steinitz το 1913 ορίζοντας έναν διανυσματικό χώρο σε όρους ''μονάδων'', όπως έκανε και ο Grassmann πιο πριν) το οποίο διατύπωσε ως εξής:

> *«Εάν m μεγέθη $a_1, \ldots, a_m$, που δεν βρίσκονται σε κάποια αριθμητική σχέση μεταξύ τους, προκύπτουν αριθμητικά από n μεγέθη $b_1, \ldots, b_n$, τότε κανείς μπορεί πάντα να προσθέσει στα m μεγέθη $a_1, \ldots, a_m$, $n - m$ επιπλέον μεγέθη $a_{m+1}, \ldots, a_n$ τέτοια ώστε τα μεγέθη $b_1, \ldots, b_n$ να προκύπτουν και αυτά αριθμητικά από τα $a_1, \ldots, a_n$ και έτσι το χωρίο των μεγεθών $a_1, \ldots, a_n$ να είναι ταυτόσημο με το χωρίο των μεγεθών $b_1, \ldots, b_n$. Επιπρόσθετα, κανείς μπορεί να πάρει αυτά τα $n - m$ μεγέθη από τα μεγέθη $b_1, \ldots, b_n$ αυτά κάθε αυτά.»*

Με παρόμοιο τρόπο με τον σύγχρονο αποδεικνύει ότι το άθροισμα των διαστάσεων δύο χωρίων είναι τόσο όσο το άθροισμα της διάστασης του κοινού τους χωρίου και της διάστασης του επικαλυπτικού τους χωρίου [Gr, §25]. Δηλαδή, αποδεικνύει την σημαντική ταυτότητα που περιέχεται στην σύγχρονη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας η οποία είναι (με αντίστοιχους σύγχρονους όρους)

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Τέλος, σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παραθέτει την γενική λύση του προβλήματος αλλαγής συντεταγμένων προσπαθώντας να δώσει τις εξισώσεις που συνδέουν τους παράγωγους αριθμούς των δύο συστημάτων μονάδων από τα οποία παράγεται ένα δοσμένο μέγεθος x.[4]

Έστω λοιπόν $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ και $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ τα δύο συστήματα μονάδων. Τότε το μέγεθος x γράφεται ως εξής

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

[4]Όταν μιλάμε για παράγωγους αριθμούς εννοούμε τα βαθμωτά μεγέθη που αντιστοιχούν στους συντελεστές των μονάδων από τις οποίες προκύπτουν τα διάφορα μεγέθη. Για παράδειγμα, οι *παράγωγοι* αριθμοί του μεγέθους $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ είναι τα βαθμωτά μεγέθη α, β.

όπου x_i είναι οι παράγωγοι αριθμοί του x. Επιπλέον θα πρέπει το σύστημα μονάδων $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ να προκύπτει αριθμητικά από το άλλο σύστημα μονάδων. Οπότε

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum \alpha_{1,r} e_r = \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{1,n} e_n, \\ a_2 &= \sum \alpha_{2,r} e_r = \alpha_{2,1} e_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \ldots + \alpha_{2,n} e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= \sum \alpha_{n,r} e_r = \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \ldots + \alpha_{n,n} e_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ακόμη, ισχύει

$$x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n, \tag{3.2}$$

όπου y_i είναι οι άλλοι παράγωγοι αριθμοί του x. Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3.2) την συλλογή εξισώσεων (3.1) τότε παίρνουμε τελικά την συλλογή εξισώσεων η οποία συνδέει τους παράγωγους αριθμούς που αντιστοιχούν στο ένα σύστημα μονάδων με τους παράγωγους αριθμούς του άλλου συστήματος μονάδων, οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum \alpha_{r,1} y_r = \alpha_{1,1} y_1 + \alpha_{2,1} y_2 + \ldots + \alpha_{n,1} y_n, \\ x_2 &= \sum \alpha_{r,2} y_r = \alpha_{1,2} y_1 + \alpha_{2,2} y_2 + \ldots + \alpha_{n,2} y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \sum \alpha_{r,n} y_r = \alpha_{1,n} y_1 + \alpha_{2,n} y_2 + \ldots + \alpha_{n,n} y_n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Η Γενική Δομή του Γινομένου

Οι δύο κύριοι κανόνες πολλαπλασιασμού που προτείνονται από τον Grassmann είναι το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο που είναι μια πιο γενική μορφή του γνωστού μας εσωτερικού γινομένου και το εξωτερικό γινόμενο που είναι και αυτό μια πιο γενική δομή γινομένου από το γνωστό σε εμάς διανυσματικό γινόμενο (επίσης πρότεινε άλλους κανόνες πολλαπλασιασμού). Παρακάτω θα μελετήσουμε την έννοια του γινομένου δύο ή περισσοτέρων εκτεταμένων μεγεθών, αρχικά στην γενική του μορφή και στην συνέχεια συγκεκριμένα είδη του.

Ορίζει το γενικό γινόμενο δύο εκτεταμένων μεγεθών ενός χωρίου $a = \Sigma \alpha_r e_r$, $b = \Sigma \beta_s e_s$ ως εξής:

$$[ab] = \left[\ \sum \alpha_r e_r \cdot \sum \beta_s e_s \ \right] = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_s],$$

όπου e_r, e_s είναι οι μονάδες από τις οποίες προκύπτουν αριθμητικά τα μεγέθη και α_r, β_s είναι βαθμωτά μεγέθη που δηλώνουν τους παράγωγους αριθμούς που ανήκουν σε αυτές τις μονάδες και το άθροισμα αναφέρεται στις διαφορετικές τιμές των δεικτών r και s [Gr, §37]. Δηλαδή, κάθε όρος του πολλαπλασιαστή πολλαπλασιάζεται με κάθε όρο του πολλαπλασιαστέου, και τα μερικά γινόμενα προσθέτονται.

Στον ορισμό που δίνει για το γινόμενο δύο εκτεταμένων μεγεθών δεν αναφέρει πουθενά τι εκφράζουν γενικά τα γινόμενα της μορφής $[e_r e_s]$. Οπότε αρχικά τα γινόμενα αυτά τα χρησιμοποιεί ως έναν συμβολισμό. Εφόσον με τον τρόπο που ορίζει το γινόμενο αυτό είναι είτε ένα εκτεταμένο μέγεθος είτε ένα βαθμωτό μέγεθος, θα πρέπει το γινόμενο να είναι γραμμικός συνδυασμός ενός συστήματος μονάδων και σύμφωνα με το τι είναι αυτό το σύστημα μονάδων και πως παράγονται τα γινόμενα $[e_r e_s]$ θα καθορίσει πιο συγκεκριμένα τα διάφορα είδη γινομένων στα επόμενα κεφάλαια. Προς το παρόν ασχολείται με κανόνες που απορρέουν από τον γενικό ορισμό του γινομένου και οι οποίοι ισχύουν για κάθε είδος γινομένου που θα αναπτυχθεί στην συνέχεια.

Το γινόμενο στην γενική του μορφή είναι διγραμμικό, δηλαδή,

$$[(\alpha a + \beta b + \ldots)p] = \alpha[ap] + \beta[bp] + \ldots,$$

$$[p(\alpha a + \beta b + \ldots)] = \alpha[pa] + \beta[pb] + \ldots.$$

Επίσης για να υπολογίσει το γινόμενο δύο μεγεθών που παράγονται αριθμητικά από αυθαίρετα μεγέθη ισχύει ο παρακάτω κανόνας:

$$\left[\ \sum \alpha_r a_r \cdot \sum \beta_s b_s\ \right] = \sum \alpha_r \beta_s [a_r b_s],$$

όπου τα a_r, b_s είναι αυθαίρετα εκτεταμένα μεγέθη και τα α_r, β_s είναι αυθαίρετα βαθμωτά μεγέθη [Gr, §42].

Κατόπιν ορίζει μεγαλύτερης βαθμίδας γινόμενα χρησιμοποιώντας παραπάνω από δύο εκτεταμένα μεγέθη (τα οποία θα μελετήσουμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο), δηλαδή, για να υπολογίσει το γινόμενο ποικίλων παραγόντων που παράγονται από αυθαίρετα μεγέθη θέτει (βλέπε [Gr, §45])

$$\left[\ \sum \alpha_r a_r \cdot \sum \beta_s b_s \ldots\ \right] = \sum \alpha_r \beta_s \ldots [a_r b_s \ldots].$$ [5]

Εάν σε μια δομή γινομένου κάποια από τα γινόμενα μονάδων από τα οποία προκύπτει το μέγεθος είναι γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους τότε τις εξισώσεις που προκύπτουν από όλες τις σχέσεις που συνδέουν τα διάφορα γινόμενα μονάδων τις ονομάζει *εξισώσεις που καθορίζουν την δομή του γινομένου* (Bestimmungsgleichung, defining equations) [Gr, §48].

Για παράδειγμα, στην γενική δομή γινομένου δύο εκτεταμένων μεγεθών που ορίσαμε προηγουμένως εάν ισχύει μια σχέση της μορφής

$$\sum x_{r,s}[e_r e_s] = 0,$$

τότε οι διάφορες εξισώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω σχέση αν επιλέξουμε όλες τις δυνατές επιλογές μεταξύ των δεικτών r και s από $1, \ldots, n$ είναι οι εξισώσεις που καθορίζουν αυτή τη δομή γινομένου.

Όπως αναφέρει ο Fearnley-Sander (βλέπε [FS2]), σε ένα διανυσματικό χώρο με βάση το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$, η πολλαπλασιαστική δομή προσδιορίζεται με την απαρίθμηση όλων των γινομένων ζευγαριών των στοιχείων της βάσης του διανυσματικού χώρου, δηλαδή,

$$e_1, \ldots, e_n, [e_1 e_1], [e_1 e_2], \ldots, [e_n e_n], [e_1(e_1 e_1)], [e_1(e_1 e_2)], \ldots.$$

Το νόημα μιας εξίσωσης που καθορίζει την δομή του γινομένου

$$\sum \alpha_j E_j = 0,$$

όπου τα E_j είναι στοιχεία της παραπάνω λίστας, είναι να μας επιτρέψει να απαλείψουμε ένα στοιχείο, έστω το E_1, από την λίστα, και βέβαια ακόμα να

[5]Όταν λέμε γινόμενο ποικίλων μεγεθών $u_1, u_2, \ldots, u_m$ εννοούμε την ακόλουθη διαδοχική διαδικασία $[\ldots[[[u_1 u_2] u_3] u_4] \ldots u_n]$.

απαλείψουμε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο το οποίο έχει το E_1 ως παράγοντα του.

Για παράδειγμα, εάν $[e_1e_2] = -[e_2e_1]$ είναι μια εξίσωση, η οποία καθορίζει την δομή του γινομένου, τότε αφού διαγράψουμε το στοιχείο $[(e_3(e_2e_1))(e_4e_5)]$ από την λίστα μας (εφόσον είναι ίσο με το $-[(e_3(e_1e_2))(e_4e_5)]$) θα έχουμε ακόμα μια λίστα η οποία σχηματίζει την άλγεβρα μας.

Φαίνεται λοιπόν, ότι ο Grassmann περιγράφει λεπτομερώς, μολονότι άκομψα, την ιδέα της παρουσίασης ενός διανυσματικού χώρου με όρους μονάδων $\{e_1, \ldots, e_n\}$ και σχέσεων της μορφής $\sum \alpha_j E_j = 0$.

Ωστόσο, ο Grassmann παρατηρεί ως μειονέκτημα της παραπάνω έννοιας το ότι στερείται της αμεταβλητότητας υπό την αλλαγή βάσης. Συνεχίζει λοιπόν για να χαρακτηρίσει εκείνα τα γινόμενα των οποίων οι εξισώσεις που τα καθορίζουν παραμένουν αμετάβλητες στις διάφορες αντικαταστάσεις.

Στην συνέχεια λοιπόν, ξεχωρίζει αυτά τα είδη γινομένου των οποίων οι εξισώσεις που τα καθορίζουν παραμένουν αμετάβλητες στις διάφορες αλλαγές βάσεων και τις δομές αυτές τις καλεί *γραμμικές δομές γινομένου.*

Σημείωση. Για παράδειγμα, αυτό που εννοεί για την εξίσωση

$$[e_1e_2] = [e_2e_1]$$

να είναι γραμμική είναι το να ισχύει η εξίσωση

$$[ab] = [ba],$$

για οποιαδήποτε μεγέθη $a = \sum \alpha_r e_r$ και $b = \sum \beta_s e_s$, με e_r, e_s να ανήκουν στο σύστημα μονάδων του χωρίου αυτού.

Είμαστε κοντά λοιπόν σε έναν γενικό κανόνα. Δηλαδή, η αντιμεταθετική ιδιότητα $x_2x_1 = x_1x_2$ θα ικανοποιείται από αυθαίρετα μεγέθη αν και μόνο αν η γραμμική εξίσωση που καθορίζει την δομή του γινομένου ισχύει σε κάθε χωρίο.

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα δείχνει ότι στα γινόμενα δύο μονάδων, εκτός από τις τετριμμένες περιπτώσεις, υπάρχουν μόνο δύο δυνατά είδη γραμμικού γινομένου. Αποδεικνύει λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. *Για δομές γινομένου δύο παραγόντων υπάρχουν, εκτός από εκείνη την δομή γινομένου που δεν υπάρχουν καθόλου εξισώσεις που να την καθορίζουν και εκείνη στην οποία όλα τα γινόμενα είναι μηδενικά, μόνο δύο είδη γραμμικής δομής γινομένου, και το σύστημα των εξισώσεων που την καθορίζουν για το ένα είδος είναι*

$$[e_r e_s] + [e_s e_r] = 0, \tag{3.4}$$

ενώ για το άλλο είδος είναι

$$[e_r e_s] = [e_s e_r], \tag{3.5}$$

όπου, εάν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι μονάδες, τα r και s παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές από $1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Κάθε εξίσωση που καθορίζει μια δομή γινομένου έχει την παρακάτω μορφή

$$\sum_{r,s} \alpha_{r,s}[e_r e_s] = 0, \tag{3.6}$$

όπου τα $\alpha_{r,s}$ είναι αυθαίρετα βαθμωτά μεγέθη και τα r, s παίρνουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ζευγαριών από $1, \ldots, n$. Εφόσον η δομή του γινομένου είναι γραμμική τότε μπορούμε να θέσουμε στην εξίσωση (3.6) $e_r = \sum x_{r,u} e_u$ και $e_s = \sum x_{s,v} e_v$ και θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{r,s} \alpha_{r,s}[e_r e_s] &= \sum_{r,s} \alpha_{r,s} \left[\sum_{r,u} x_{r,u} e_u \sum_{s,v} x_{s,v} e_v \right] \\ &= \sum_{r,s} \alpha_{r,s} \sum_{u,v} x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v] \\ &= \sum_{r,s,u,v} \alpha_{r,s} x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Αντιστρέφοντας στην τελευταία εξίσωση τον ρόλο των r και s και των u και v (κάτι το οποίο μπορούμε να κάνουμε εφόσον οι δείκτες παίρνουν αυθαίρετες τιμές από $1, \ldots, n$) τότε

$$\sum_{r,s,u,v} \alpha_{s,r} x_{s,v} x_{r,u} [e_v e_u] = 0. \tag{3.8}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (3.7) και (3.8) έχουμε

$$\sum_{r,s,u,v} x_{s,v} x_{r,u} (\alpha_{r,s}[e_u e_v] + \alpha_{s,r}[e_v e_u]) = 0. \tag{3.9}$$

Εφόσον η παραπάνω εξίσωση ισχύει για οποιαδήποτε τιμή πάρουν τα $x_{s,v}, x_{r,u}$ τότε θέτοντας στην εξίσωση (3.9) ένα από τα μεγέθη $x_{r,u}$, έστω το $x_{a,c}$, ίσο με $+1$ και μετά με -1 και αφαιρέσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν την μια από την άλλη και διαιρέσουμε δια του 2 παίρνουμε

$$\sum_{\substack{s,\,\mu\varepsilon\; s\neq a\\ v,\,\mu\varepsilon\; s\neq c}} x_{s,v}(\alpha_{a,s}[e_c e_v] + \alpha_{s,a}[e_v e_c]) = 0. \tag{3.10}$$

Αν κάνω την ίδια διαδικασία όμοια στην εξίσωση (3.10) και για ένα από τα μεγέθη $x_{s,v}$, έστω για το $x_{b,d}$, τότε

$$\alpha_{a,b}[e_c e_d] + \alpha_{b,a}[e_d e_c] = 0, \tag{3.11}$$

όπου τα a, b, c, d είναι οποιαδήποτε εκτός από την περίπτωση $a = b$, $c = d$. Συνεπώς η εξίσωση (3.7) γίνεται

$$\sum_{r,u} x_{r,u} x_{r,u} \alpha_{r,r}[e_u e_u] = 0. \tag{3.12}$$

Αν τώρα θέσουμε κατάλληλες τιμές σε ένα από τα μεγέθη $x_{r,u}$ τότε θα πάρουμε την εξίσωση

$$\alpha_{a,a}[e_c e_c] = 0, \tag{3.13}$$

η οποία είναι μια περίπτωση της εξίσωσης (3.11) όταν $a = b, c = d$. Οπότε από την εξίσωση (3.6) προκύπτει το σύνολο των εξισώσεων (3.11).

Θέτοντας $c = d$ τότε

$$(\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a})[e_c e_c] = 0, \tag{3.14}$$

ενώ όταν $a = b$

$$\alpha_{a,a}([e_c e_d] + [e_d e_c]) = 0. \tag{3.15}$$

Στην πρώτη περίπτωση είτε $\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a} = 0$ είτε $[e_c e_c] = 0$. Εάν $\alpha_{a,b} = -\alpha_{b,a}$, τότε η εξίσωση (3.11) γίνεται $\alpha_{a,b}([e_c e_d] - [e_d e_c]) = 0$. Το $\alpha_{a,b}$ λόγω υποθέσεων θα πρέπει να είναι διαφορετικό του μηδενός, συνεπώς ισχύει

$$[e_c e_d] = [e_d e_c].$$

Στην δεύτερη περίπτωση, εάν $[e_c e_c] = 0$, τότε είναι ισοδύναμο να βάλουμε στην εξίσωση (3.6) το $\alpha_{a,a} = 1$ και όλους τους άλλους συντελεστές ίσους με το μηδέν. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.15), παίρνουμε

$$[e_c e_d] + [e_d e_c] = 0.$$

Με βάση λοιπόν τις υποθέσεις του θεωρήματος συνεπάγονται τα δύο είδη συστημάτων εξισώσεων που αναφέρονται στο θεώρημα οι οποίες καθορίζουν γραμμικές δομές γινομένου [Gr, §51]. □

Αυτό που εννοεί με το παραπάνω θεώρημα (δες [FS2]) είναι ότι εάν μια εξίσωση της μορφής

$$\sum \alpha_{r,s}[x_r x_s] = 0$$

ικανοποιείται, όταν κανείς αντικαταστήσει τα x_r, x_s με αυθαίρετα μεγέθη της μορφής $a = \sum \alpha_r e_r$ που παράγονται από το χωρίο που προσδιορίζουν οι μονάδες $e_1, e_2, \ldots, e_n$, τότε θα πρέπει για οποιαδήποτε τέτοια μεγέθη

$$a = \sum \alpha_r e_r, \quad b = \sum \beta_s e_s$$

να ισχύει

$$ab = 0 \quad \text{είτε} \quad ba = ab \quad \text{είτε} \quad ba = -ab.$$

3.3 Γενικευμένο Εξωτερικό Γινόμενο

Το γενικευμένο εξωτερικό γινόμενο (äusserlich, outer) που ορίζει ο Grassmann είναι μια πιο γενική αλγεβρική κατασκευή του γνωστού (στις μέρες μας) εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, το οποίο ορίζεται στον $\mathbb{R}^3$, σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Όπως το γνωστό εξωτερικό γινόμενο και το μεικτό γινόμενο, το γενικευμένο εξωτερικό γινόμενο διαφόρων μεγεθών ενός χωρίου χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία για την μελέτη εμβαδών, όγκων και τα μεγαλύτερης τάξης ανάλογα τους.[6]

Παρόλο που δεν είναι μια κλειστή πράξη (διότι το εξωτερικό γινόμενο δύο μεγεθών δεν είναι το ίδιο ένα μέγεθος του ίδιου χωρίου), τα γινόμενα που γενικεύει σχηματίζουν μια σειρά από καινούργια χωρία των οποίων το ευθύ άθροισμα ορίζει μια πλήρη άλγεβρα που είναι κλειστή.

Το εξωτερικό γινόμενο είναι θεμελιωδώς συνδεδεμένο με την έννοια της γραμμικής εξάρτησης, διότι δύο μεγέθη τα οποία δεν βρίσκονται στο ίδιο χωρίο θα έχουν ένα μη μηδενικό εξωτερικό γινόμενο (και το αντίστροφο).

3.3.1 Το συνδυαστικό γινόμενο

Ο Grassmann για να ορίσει το εξωτερικό γινόμενο αρχικά ορίζει ένα άλλο είδος γινομένου, το λεγόμενο συνδυαστικό γινόμενο (kombinatorischen, combinatorial). Το συνδυαστικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

«Ένα γινόμενο το οποίο περιέχει μόνο μονάδες του ίδιου συστήματος μονάδων ως παράγοντες και όταν εναλλάξουμε τους δύο τελευταίους παράγοντες του, οι οποίοι καλούνται *στοιχειώδεις* παράγοντες, το πρόσημο του γινομένου αλλάξει καλείται ένα *συνδυαστικό* γινόμενο. Οπότε, εάν E είναι ένα γινόμενο μονάδων, το οποίο είναι μη μηδενικό, και e_1, e_2 είναι μονάδες και ισχύει η σχέση

$$[Ee_1e_2] + [Ee_2e_1] = 0,$$

[6]Από τώρα και στο εξής το γενικευμένο εξωτερικό γινόμενο θα το αποκαλούμε απλώς εξωτερικό γινόμενο για συντομία.

το γινόμενο $[Ee_1e_2]$ είναι ένα συνδυαστικό γινόμενο.»[7]

Συνεπάγεται από τον παράπανω ορισμό το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. *Στο συνδυαστικό γινόμενο $[Abc]$ στο οποίο το A είναι οποιοδήποτε γινόμενο μιας σειράς παραγόντων και b και c είναι στοιχειώδεις παράγοντες εάν εναλλάξουμε τους παράγοντες b και c, το πρόσημο του γινομένου αλλάζει.*

Απόδειξη. 1. Αρχικά υποθέτουμε ότι τα b και c είναι μονάδες. Εφόσον το A είναι μια σειρά παραγόντων και αυτοί οι παράγοντες προκύπτουν αριθμητικά από τις μονάδες, μπορούμε να γράψουμε το A στην μορφή $A = \sum \alpha_r E_r$, όπου τα E_r είναι γινόμενα των μονάδων. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= \Big[\sum \alpha_r E_r \cdot bc\Big] + \Big[\sum \alpha_r E_r \cdot cb\Big] \\ &= \sum \alpha_r [E_r bc] + \sum \alpha_r [E_r cb] \\ &= \sum \alpha_r ([E_r bc] + [E_r cb]) = 0.\end{aligned}$$

2. Ας υποθέσουμε ότι τα b και c είναι μεγέθη τα οποία δεν είναι μονάδες αλλά προκύπτουν αριθμητικά από αυτές. Έστω $b = \sum \beta_r e_e$, $c = \sum \gamma_r e_r$. Τότε

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= \Big[A \cdot \sum \beta_r e_r \cdot \sum \gamma_r e_r\Big] + \Big[A \cdot \sum \gamma_r e_r \cdot \sum \beta_r e_r\Big] \\ &= \sum \beta_r \gamma_s [A e_r e_s] + \sum \gamma_s \beta_r [A e_s e_r] \\ &= \sum \beta_r \gamma_s ([A e_r e_s] + [A e_s e_r]) = 0.\end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια αποδεικνύει διάφορες ιδιότητες του συνδυαστικού γινομένου, κάποιες από τις οποίες είναι οι εξής [Gr, §54,60]:

• Εαν a, b είναι στοιχειώδεις παράγοντες ενός συνδυαστικού γινομένου P (το οποίο θα συμβολίζουμε ως $P_{a,b}$ από δω και στο εξής), όχι απαραίτητα γειτονικοί, τότε ισχύει

[7] Με τον όρο στοιχειώδεις παραγόντες εννοεί εκτεταμένα μεγέθη πρώτης βαθμίδας, μεγέθη δηλαδή τα οποία προκύπτουν από ένα πρωτογενές σύστημα μονάδων.

$$P_{a,b} = -P_{b,a}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n το πλήθος παράγοντες μεταξύ των a και b. Τότε n εναλλαγές γειτονικών παραγόντων θα φέρουν το b στην διπλανή από το a θέση. Έπειτα $n+1$ εναλλαγές του a με γειτονικούς παράγοντες θα φέρουν το a στη θέση του b και το b στην θέση του a. Έτσι θα υπάρχουν $2n+1$, δηλαδή ένας περιττός αριθμός, αλλαγές προσήμων. Συνεπώς, ισχύει η παραπάνω σχέση. □

• Το συνδυαστικό γινόμενο δεν είναι εν γένει αντιμεταθετικό, δηλαδή, αν το A παριστάνει ένα μέγεθος m-το πλήθος στοιχειωδών παραγόντων και το B παριστάνει ένα γινόμενο k-το πλήθος στοιχειωδών παραγόντων, όπου τα μεγέθη A, B είναι διαδοχικά γειτονικά, τότε ισχύει

$$[AB] = (-1)^{mk}[BA].$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει εν γένει και όταν έχουμε ένα γινόμενο τριών ή περισσοτέρων μεγεθών και τα μεγέθη A, B είναι διαδοχικά γειτονικά μεγέθη, δηλαδή,

$$[CABD] = (-1)^{mk}[CBAD].$$

• Εάν ένα συνδυαστικό γινόμενο περιέχει δύο ίδιους στοιχειώδεις παράγοντες τότε ισχύει

$$P_{a,a} = 0.$$

Απόδειξη. Εάν στην σχέση

$$P_{a,b} = -P_{b,a}$$

θέσουμε $a = b$ τότε

$$P_{a,a} = -P_{a,a},$$

και συνεπώς

$$P_{a,a} = 0.$$

Παρατήρηση. Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν ο επαναλαμβανόμενος παράγοντας είναι στοιχειώδης. Διότι, έστω $A = ab + cd$, όπου a, b, c, d στοιχειώδη μεγέθη (οπωσδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους). Τότε το εξωτερικό γινόμενο του μεγέθους A με τον εαυτό του δίνει

$$[AA] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abab] + [abcd] + [cdab] + [cdcd] = 2[abcd] \neq 0.$$

- Το συνδυαστικό γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν εάν υπάρχει μια αριθμητική σχέση μεταξύ των στοιχειωδών παραγόντων του.

Απόδειξη. Έστω $a_1 = x_2a_2 + x_3a_3 + \ldots + x_na_n$. Τότε

$$\begin{aligned}[a_1a_2\ldots a_n] &= [(x_2a_2 + x_3a_3 + \ldots + x_na_n)a_2\ldots a_n] \\ &= x_2[a_2a_2\ldots a_n] + x_3[a_3a_2\ldots a_n] + \ldots + x_n[a_na_2\ldots a_n] \\ &= 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.\end{aligned}$$

Στην συνέχεια ορίζει ως πολλαπλασιαστικούς συνδυασμούς δοσμένης βαθμίδας μιας συλλογής μεγεθών όλα τα διαφορετικά συνδυαστικά γινόμενα που έχουν ως παράγοντες τόσα το πλήθος από αυτά τα μεγέθη όσο η βαθμίδα των πολλαπλασιαστικών συνδυασμών. Για παράδειγμα

$$[ab], [ac], [bc]$$

είναι όλοι οι πολλαπλασιαστικοί συνδυασμοί δεύτερης βαθμίδας των μεγεθών a, b, c.

3.3.2 Ορίζουσες

Στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο του Grassmann παρατηρούμε ότι το συνδυαστικό γινόμενο έχει εφαρμογή στην θεωρία των οριζουσών (Determinante, determinant). Στην πραγματικότητα θα δούμε ότι όλες οι ιδιότητες των οριζουσών προκύπτουν ως συνέπεια των ιδιοτήτων του συνδυαστικού γινομένου.

Αρχικά δίνει τον ορισμό μιας $n\times n$ ορίζουσας (βαθμωτών μεγεθών), συμβολίζοντας με $a_r^{(s)}$ το r-οστό στοιχείο της s-οστής γραμμής, ως το πολυώνυμο που κανείς αποκτάει από όλα τα διαφορετικά γινόμενα της μορφής $\alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)}\ldots\alpha_w^{(n)}$ εναλλάσσοντας την σειρά των κάτω δεικτών από $1,\ldots,n$ και βάζοντας το πρόσημο $+$ ή $-$ σύμφωνα με το πλήθος των ζευγαριών των δεικτών (έστω u) που είναι αντίθετα διατεταγμένα σε σχέση με την σειρά $1,\ldots,n$ [Gr, §62]. Δηλαδή, εάν με D συμβολίσουμε την ορίζουσα τότε

$$D=\sum(-1)^u\alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)}\ldots\alpha_w^{(n)}.$$

Έπειτα αποδεικνύει ότι το συνδυαστικό γινόμενο n-στοιχειωδών μεγεθών πρώτης βαθμίδας τα οποία προκύπτουν από n-μονάδες παράγει ένα μέγεθος το οποίο προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό συνδυαστικών γινομένων n-μονάδων με συντελεστές τις ορίζουσες που σχηματίζονται από τους αντίστοιχους συντελεστές αυτών των μονάδων [Gr, §63]. Δηλαδή, εάν $a_1,\ldots,a_n$ είναι στοιχειώδη μεγέθη τα οποία προκύπτουν από το σύστημα μονάδων $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ως εξής:

$$a_i=a_{i1}e_1+\ldots+a_{in}e_n,$$

όπου τα a_{ij} είναι βαθμωτά μεγέθη τότε

$$[a_1\ldots a_n]=D[e_1\ldots e_n], \tag{3.16}$$

ή ισοδύναμα

$$[(a_{11}e_1+\ldots+a_{1n}e_n)\ldots(a_{n1}e_1+\ldots+a_{nn}e_n)]=D[e_1\ldots e_n], \tag{3.17}$$

με

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Στην συνέχεια για να αποδείξει κάποιες βασικές ιδιότητες των οριζουσών χρησιμοποιεί ως μοναδικά του εργαλεία τους κανόνες του συνδυαστικού γινομένου και την έννοια του ''στοιχειώδους γραμμικού μετασχηματισμού''.

Ορίζει ως *στοιχειώδη γραμμικό μετασχηματισμό* (einfache lineale Aenderung, elementary linear evolution) κάθε διαδικασία κατά την οποία από μια συλλογή μεγεθών προκύπτει μια άλλη συλλογή μεγεθών προσθέτοντας σε κάποιο από τα μεγέθη της πρώτης συλλογής ένα πολλαπλάσιασιο ενός γειτονικού του μεγέθους.

Για παράδειγμα, εάν p, q είναι δύο γειτονικά μεγέθη της συλλογής, τότε με έναν στοιχειώδη γραμμικό μετασχηματισμό η συλλογή

$$\ldots, p, q, \ldots$$

μετασχηματίζεται στην συλλογή

$$\ldots, p + \alpha q, q, \ldots$$

ή στην συλλογή

$$\ldots, p, q + \alpha q, \ldots,$$

όπου α είναι ένα αυθαίρετο βαθμωτό μέγεθος [Gr, §71].

Ιδιότητες οριζουσών

Αρχικά αποδεικνύει ότι το συνδυαστικό γινόμενο μιας συλλογής μεγεθών παραμένει αμετάβλητο κάτω από έναν στοιχειώδη γραμμικό μετασχηματισμό, κάτι το οποίο αποδεικνύει χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συνδυαστικού γινομένου που αναφέραμε παραπάνω ως εξής:

$$P_{p,q+\alpha p} = P_{p,q} + \alpha P_{p,p} = P_{p,q}.$$

Παρακάτω θα δώσουμε κάποιες από τις ιδιότητες των οριζουσών που αναφέρει [Gr, δες §73-76] και θα δώσουμε την πορεία που ακολούθησε για να τις αποδείξει.

- Η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο εάν εναλλάξουμε οποιεσδήποτε δύο γραμμές της.

Απόδειξη. Ξεκινώντας με μια συλλογή μεγεθών μέσω διαφόρων στοιχειωδών γραμμικών μετασχηματισμών, βήμα-βήμα, καταλήγει σε μια άλλη συλλογή μεγεθών η οποία διαφέρει από την αρχική στο ότι εναλλάσσονται δύο μεγέθη της και ένα από αυτά τα δύο μεγέθη αλλάζει πρόσημο. Τότε το συνδυαστικό γινόμενο μετά από κάθε στοιχειώδη γραμμικό μετασχηματισμό παραμένει αμετάβλητο οπότε ισχύει τελικά η παρακάτω σχέση

$$P_{p,q} = P_{q,-p} = -P_{q,p}.$$

Συνεπώς από την εξίσωση (3.16) και η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. □

- Η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα k εάν οποιαδήποτε από τις γραμμές της πολλαπλασιάζεται με k. Για την ακρίβεια αποδεικνύει ότι εάν πολλαπλασιάσουμε την ορίζουσα με ένα βαθμωτό μέγεθος α και ταυτοχρόνως διαιρέσουμε όλα τα βαθμωτά μεγέθη οποιασδήποτε γραμμής της με το α τότε η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη, δηλαδή, από την συλλογή μεγεθών

$$\ldots, p, \ldots, q, \ldots$$

παίρνουμε την συλλογή μεγεθών

$$\ldots, \alpha p, \ldots, \frac{q}{\alpha}, \ldots.$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύει ότι η πρώτη συλλογή μεγεθών μετά από πολλαπλούς στοιχειώδεις γραμμικούς μετασχηματισμούς δίνει την άλλη συλλογή μεγεθών όταν τα μεγέθη p, q είναι διαδοχικά γειτονικά μεγέθη. Δηλαδή, μετά από ποικίλους στοιχειώδεις γραμμικούς μετασχηματισμούς η συλλογή μεγεθών

$$\ldots, p, q, \ldots$$

μετασχηματίζεται στην συλλογή μεγεθών

$$\ldots, \alpha p, \frac{q}{\alpha}, \ldots.$$

Στην συνέχεια υποθέτει ότι μεταξύ των μεγεθών p, q παρεμβάλονται n μεγέθη και προσπαθεί να αποδείξει τον παραπάνω ισχυρισμό. Εφαρμόζοντας τον παράπανω μετασχηματισμό σε κάθε δύο διαδοχικά μεγέθη ξεκινώντας από το μέγεθος p μέχρι να καταλήξει στο μεγεθος q καταλήγει στην ζητούμενη συλλογή μεγεθών. □

3.3.3 Συστήματα μονάδων

Ξεκινώντας με μια συλλογή πρωτογενών μονάδων κατασκευάζει μονάδες υψηλότερης βαθμίδας, με σκοπό να ορίσει εκτεταμένα μεγέθη μεγαλύτερης βαθμίδας. Αρχικά ορίζει το σύστημα μονάδων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το οποίο περιέχει μόνο ένα στοιχείο την απόλυτη μονάδα (το 1). Όλα λοιπόν τα μεγέθη που προκύπτουν από αυτό το σύστημα μονάδων είναι πολλαπλάσια αυτής της μονάδας, και θα καλούνται *βαθμωτά μεγέθη 0-βαθμίδας* [Gr, §3].

Υποθέτει το πρωτογενές σύστημα μονάδων $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Τότε τα μεγέθη που προκύπτουν από αυτό το σύστημα μονάδων θα είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων αυτών και θα καλούνται μεγέθη *πρώτης βαθμίδας* (1-βαθμίδα). Όλοι οι πολλαπλασιαστικοί συνδυασμοί m-το πλήθος μονάδων του πρωτογενούς συστήματος μονάδων που υποθέσαμε παραπάνω θα καλούνται μονάδες *m-βαθμίδας*. Ένα μέγεθος λοιπόν το οποίο προκύπτει αριθμητικά από αυτές τις μονάδες θα καλείται ένα μέγεθος *m-βαθμίδας*.

Εάν ένα μέγεθος οποιασδήποτε δοσμένης βαθμίδας, έστω r, μπορεί να παρασταθεί ως το συνδυαστικό γινόμενο r-το πλήθος μεγεθών πρώτης βαθμίδας θα καλείται ένα *στοιχειώδες* μέγεθος r-βαθμίδας, αλλιώς ένα σύνθετο μέγεθος [Gr, §77]. Συνεπώς, το συνδυαστικό γινόμενο r το πλήθος μεγεθών πρώτης βαθμίδας είναι ένα *στοιχειώδες* μέγεθος r-βαθμίδας και προκύπτει αριθμητικά από μονάδες r-βαθμίδας.

Σχόλιο. Έστω $A = ab + cd$ ένα σύνθετο μέγεθος, όπου a, b, c, d στοιχειώδη μεγέθη (οπωσδήποτε ανεξάρτητα μεταξύ τους). Εάν αυτό το μέγεθος ήταν ίσο με ένα στοιχειώδες μέγεθος, έστω $[pq]$, τότε το γινόμενο του μεγέθους A με τον εαυτό του δίνει

$$0 = [AA] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [pqpq]$$

αλλά

$$[(ab + cd)(ab + cd)] = [abab] + [abcd] + [cdab] + [cdcd] = 2[abcd].$$

Συνεπώς, $[abcd]$=0, άτοπο λόγω υπόθεσης [Gr, §77Β].

Ως συνέπεια του παραπάνω ορισμού αποδεικνύει ότι εάν έχουμε ένα χωρίο n-διάστασης που προκύπτει από μια συλλογή n μεγεθών και θεωρήσουμε τους πολλαπλασιαστικούς συνδυασμούς δοσμένου πλήθους αυτών των μεγεθών, έστω r, τότε προκύπτει ένα χωρίο $\binom{n}{r}$-διάστασης.

3.3.4 Το εξωτερικό γινόμενο

Ορίζει ως το *εξωτερικό γινόμενο* δύο μονάδων μεγαλύτερης βαθμίδας το συνδυαστικό γινόμενο των στοιχειωδών παραγόντων τους χωρίς να αλλάξουμε την σειριακή τους διάταξη [Gr, §78], δηλαδή,

$$[(e_1e_2...e_m)(e_{m+1}...e_n)] = [e_1e_2...e_n].$$

Και στην συνέχεια υποθέτει στοιχειώδη μεγέθη και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του συνδυαστικού γινομένου καταλήγει στον γενικότερο κανόνα του εξωτερικού γινομένου δύο στοιχειωδών μεγεθών A και B, ο οποίος είναι [Gr, §79]:

$$[AB] = [(a_1a_2...)(b_1b_2...)] = [a_1a_2...b_1b_2...].$$

Παρακάτω θα δώσουμε ένα σύνολο ιδιοτήτων, τις οποίες αποδεικνύει ο Grassmann που αφορούν το εξωτερικό γινόμενο (για λεπτομέρειες δες [Gr,

§80-81]). Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπενθυμήσουμε ότι όλες οι ιδιότητες που αναφέραμε για την γενικότερη δομή γινομένου στο κεφάλαιο 2 ισχύουν και για το εξωτερικό γινόμενο καθώς και όλες οι ιδιότητες του συνδυαστικού γινομένου, κάτι που προκύπτει άμεσα από τον τρόπο που όρισε το εξωτερικό γινόμενο ο Grassmann.

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

• Το εξωτερικό γινόμενο ενός μεγέθους m-βαθμίδας και ενός μεγέθους k-βαθμίδας είναι ένα μέγεθος $(m+k)$-βαθμίδας, δηλαδή, αν A, B είναι δύο μεγέθη m, k-βαθμίδας αντίστοιχα τότε το μέγεθος $[AB]$ είναι $(m+k)$-βαθμίδας.

• Το εξωτερικό γινόμενο είναι προσεταιριστικό, δηλαδή, αν A, B, C είναι τρία μεγέθη m, k, r-βαθμίδας αντίστοιχα τότε

$$[(AB)C] = [A(BC)] = [ABC].$$

• Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι εν γένει αντιμεταθετικό, κάτι το οποίο προκύπτει άμεσα από τον τρόπο που ορίστηκε.

• Εάν $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ είναι μεγέθη πρώτης βαθμίδας τα οποία δεν βρίσκονται σε αριθμητική σχέση μεταξύ τους, και το μέγεθος A προκύπτει από τα $a_1, \ldots, a_m$ και το μέγεθος B προκύπτει από τα $b_1, \ldots, b_n$, με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, και ισχύει

$$[AB] = 0,$$

τότε είτε $A = 0$ είτε $B = 0$.

Απόδειξη. Εάν το A είναι α-βαθμίδας, το B είναι β-βαθμίδας και εάν τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι οι πολλαπλασιαστικοί συνδυασμοί α-το πλήθος από τα μεγέθη $a_1, \ldots, a_m$, και τα $B_1, B_2, \ldots$ είναι οι πολλαπλασιαστικοί συνδυασμοί β-το πλήθος από τα μεγέθη $b_1, \ldots, b_n$, τότε τα A και B θα έχουν την μορφή

$$A = \sum \alpha_q A_q, \quad B = \sum \beta_t B_t,$$

και έτσι

$$[AB] = \sum \alpha_q \beta_t [A_q B_t].$$

Τα $[A_qB_t]$ είναι πολλαπλασιαστικοί συνδυασμοί των $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$. Συνεπώς, δεν βρίσκονται σε κάποια αριθμητική σχέση μεταξύ τους. Οπότε

$$\alpha_r\beta_s = 0,$$

για κάθε r και s. Αλλά εάν το $B \neq 0$, δηλαδή εάν οποιοδήποτε από τα μεγέθη β_s είναι διαφορετικό του μηδενός, τότε $\alpha_r = 0$ για όλα τα r, δηλαδή το $A = 0$. □

Σχόλιο. Αυτό το οποίο καταλαβαίνουμε από την ιδιότητα αυτή εκφραζόμενοι με σύγχρονους όρους είναι ότι εάν έχουμε δύο χωρία τα οποία δεν τέμνονται και πάρουμε ένα μέγεθος σε κάθε χωρίο τότε αν ισχύει μια σχέση της παραπάνω μορφής είτε το ένα μέγεθος θα είναι μηδενικό είτε το άλλο.

3.3.5 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων Εξισώσεων

Λόγω της σύνοψης των ιδιοτήτων της γραμμικής ανεξαρτησίας, ο Grassmann ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσει το εξωτερικό γινόμενο για να παρουσιάσει μια θεωρία και μια τυποποιημένη διαδικασία επίλυσης γραμμικών εξισώσεων. Στην συνέχεια θα αναπτύξουμε την διαδικασία που ακολουθεί για να επιλύσει ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους [Gr, §134].

Διαδικασία επίλυσης

Αρχικά θεωρεί m ανεξάρτητες εξισώσεις με n αγνώστους $(m \leq n)$ x_i, οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_m. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζει αυτές τις εξισώσεις με τις ανεξάρτητες μεταξύ τους μονάδες $e_1,\ldots,e_m$ αντίστοιχα και ορίζει

$$\begin{aligned} c_i &= a_{1i}e_1 + \ldots + a_{mi}e_m, \\ c_0 &= a_1e_1 + \ldots + a_me_m, \end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τα c_i, c_0 είναι μεγέθη 1-βαθμίδας σε ένα χωρίο διάστασης m. Κατόπιν προσθέτει τις προκύπτουσες εξισώσεις και δίνει το σύστημα

$$x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n = c_0.$$

Εάν $m = n$ και υπάρχει μια λύση x_i τότε απαλείφοντας τα $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots,$ x_n, δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας το γραμμικό σύστημα με το εξωτερικό γινόμενο

$$[c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n],$$

εφόσον $[c_1 \ldots c_n] \neq 0$, δηλαδή, εφόσον τα c_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, παίρνει

$$x_i [c_i (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)] = [c_0 (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)].$$

Οπότε το x_i δίνει

$$x_i = \frac{[c_0 (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)]}{[c_i (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)]}.$$

Συνεπώς αρκεί να υπολογίσουμε το μέγεθος $(n-1)$-βαθμίδας

$$[c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n].$$

Μια άλλη μορφή πιο όμοια με τον κανόνα του $Cramer$ είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} x_i =& \frac{[c_0 (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)]}{[c_i (c_1 \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_n)]} \\ =& \frac{(-1)^{i-1} [c_1 \ldots c_{i-1} c_0 c_{i+1} \ldots c_n]}{(-1)^{i-1} [c_1 \ldots c_{i-1} c_i c_{i+1} \ldots c_n]} \\ =& \frac{[c_1 \ldots c_{i-1} c_0 c_{i+1} \ldots c_n]}{[c_1 \ldots c_n]}. \end{aligned}$$

3.3.6 Παραγοντοποίηση μεγεθών

Στο κεφάλαιο των γεωμετρικών αναπαραστάσεων παρακάτω θα δούμε ότι ένας τρόπος για να ορίσει ο Grassmann κάποιες γεωμετρικές οντότητες είναι η παραγοντοποίηση τους σε δύο ήδη ερμηνευμένα μεγέθη. Μια τέτοια παραγοντοποίηση δεν παράγει όμως ένα μοναδικό μέγεθος.

Παραπάνω έχουμε σχολιάσει τι εννοεί ο Grassmann όταν λέει ότι δύο χωρία είναι ταυτόσημα ή εμπεριέχεται το ένα στο άλλο. Το χωρίο το οποίο προκύπτει από τους στοιχειώδεις παράγοντες ενός στοιχειώδους μεγέθους το καλεί το χωρίο που ανήκει σε αυτό το μέγεθος, ή εν συντομία το χωρίο αυτού του μεγέθους. Κατά συνέπεια ορίζει ένα στοιχειώδες μέγεθος να ταυτίζεται με ένα μέγεθος ή να εμπεριέχεται σε ένα άλλο μέγεθος, σύμφωνα με το πως σχετίζονται τα χωρία αυτών των μεγεθών [Gr, §77].

Εάν σε ένα στοιχειώδες μέγεθος $(m+k)$-βαθμίδας A εμπεριέχεται ένα άλλο στοιχειώδες μέγεθος B, m-βαθμίδας, τότε το στοιχειώδες μέγεθος A μπορεί να παραγοντοποιηθεί και να γραφεί ως το εξωτερικό γινόμενο του στοιχειώδους μεγέθους B και ενός άλλου στοιχειώδους μεγέθους C, k-βαθμίδας [Gr, παρ.79 β], δηλαδή,

$$A = [BC].$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την διαδικασία της παραγοντοποίησης παραθέτει τις ακόλουθες προτάσεις [Gr, §83,84]:

• Εάν ένα άθροισμα στοιχειωδών μεγεθών S δίνει μηδέν όταν πολλαπλασιαστεί εξωτερικά με καθένα από τα m το πλήθος μεγέθη πρώτης βαθμίδας a_1, a_2, …, a_m τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε το S μπορεί να εκφραστεί ως ένα εξωτερικό γινόμενο στο οποίο τα μεγέθη a_1, a_2, …, a_m να είναι παράγοντες, δηλαδή,

$$S = [a_1 a_2 \ldots a_m S_m],$$

εάν

$$0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \ldots = [a_m S].$$

Δηλαδή, τα μεγέθη a_1, a_2, …, a_m περιέχονται στο χωρίο του μεγέθους S.

• Εάν ένα άθροισμα μεγεθών m-βαθμίδας S δίνει μηδέν όταν πολλαπλασιαστεί εξωτερικά με καθένα από τα m το πλήθος μεγέθη πρώτης βαθμίδας a_1, a_2, ..., a_m τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε το S είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο (έστω α) του εξωτερικού γινομένου στο οποίο τα μεγέθη $a_1, a_2, \ldots, a_m$ είναι παράγοντες, δηλαδή,

$$S = \alpha[a_1 a_2 \ldots a_m],$$

εάν

$$0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \ldots = [a_m S].$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μέγεθος $[a_1 a_2 \ldots a_m]$ περιέχεται στο χωρίο του μεγέθους S.

3.4 Το Συμπλήρωμα

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε την έννοια του συμπληρώματος για να προετοιμάσουμε την ανάπτυξη του παλινδρομικού γινομένου, του γενικευμένου εσωτερικού γινομένου και την έννοια της ορθογωνιότητας.

Μέχρι τώρα καμία αναφορά δεν έχει γίνει στο χωρίο στο οποίο περιέχονταν οι παράγοντες που πολλαπλασιάζονταν. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε έναν αυθαίρετο αριθμό, έστω n, για την διάσταση του χωρίου στο οποίο θα πραγματοποιούνται όλοι οι πολλαπλασιασμοί των μεγεθών. Οπότε ορίζει την έννοια του *πρωτογενούς χωρίου* (Hauptgebiet, principal domain) ως το χωρίο των πρωτογενών μονάδων από τις οποίες όλα τα μεγέθη κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις προκύπτουν [Gr, §86].

Στην συνέχεια ξαναναφέρει την έννοια των στοιχειωδών μεγεθών παραθέτοντας κάποιες ιδιότητες τους όταν βρισκόμαστε σε ένα πρωτογενές χωρίο δοσμένης διάστασης.

Είπαμε προηγουμένως ότι ένα μέγεθος είναι στοιχειώδες εάν είναι εξωτερικό γινόμενο μεγεθών 1-βαθμίδας. Άρα ο Grassmann θεωρεί προφανές ότι όταν είμαστε σε ένα πρωτογενές χωρίο διάστασης n όλα τα βαθμωτά μεγέθη, όλα τα μεγέθη 1-βαθμίδας καθώς και οποιοδήποτε μέγεθος n-βαθμίδας είναι στοιχειώδη μεγέθη [Gr, §87]. Επιπρόσθετα όμως, αποδεικνύει ότι και όλα τα μεγέθη $(n-1)$-βαθμίδας είναι στοιχειώδη. Διότι, έστω ότι έχουμε δύο στοιχειώδη μεγέθη $(n-1)$-βαθμίδας x, y. Τότε αυτά θα διαφέρουν το πολύ σε έναν παράγοντα 1-βαθμίδας. Οπότε τα μεγέθη x, y τα γράφουμε ως εξής

$$x = [ab_1] \text{ και } y = [ab_2],$$

όπου τα a, b_1, b_2 είναι αντίστοιχα μεγέθη βαθμίδων $(n-1), 1, 1$. Προσθέτοντας αυτά τα δύο μεγέθη έχουμε

$$x + y = [ab_1] + [ab_2] = [a(b_1 + b_2)].$$

Όμως το μέγεθος $b_1 + b_2$, είναι ένα μέγεθος 1-βαθμίδας. Συνεπώς και το άθροισμα δύο στοιχειωδών μεγεθών $(n-1)$-βαθμίδας είναι ένα στοιχειώδες μέγεθος $(n-1)$-βαθμίδας [Gr, §88].

O Grassmann εισήγαγε την έννοια του *συμπληρώματος* (Ergünzung, complement) στο βιβλίο του Ausdehnsglehre του 1962. Συμβολισε το συμπλήρωμα ενός μεγέθους x με $|x$. Για να εισάγει την έννοια του συμπληρώματος όρισε το εξωτερικό γινόμενο των n στοιχείων του πρωτογενούς συστήματος μονάδων να είναι ίσο με την απόλυτη μονάδα, δηλαδή,

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1.$$

Θα μελετήσουμε λοιπόν την έννοια του συμπληρώματος μεγεθών σε ένα πρωτογενές χωρίο δοσμένης διάστασης, έστω n, με σύστημα μονάδων το e_1, e_2, ..., e_n.

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, το σύνολο όλων των διαφορετικών μεγεθών m-το πλήθος στοιχείων του πρωτογενούς συστήματος μονάδων σχηματίζει το σύστημα μονάδων ενός άλλου χωρίου με διάσταση $\binom{n}{m}$. Για παράδειγμα, αν το $n = 3$, το χωρίο όλων των μεγεθών 2-βαθμίδας έχει τρία στοιχεία στο σύστημα μονάδων του τα εξής:

$$[e_1 e_2], \quad [e_1 e_3], \quad [e_2 e_3].$$

Η αντισυμμετρική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου δηλώνει ότι το χωρίο όλων των μεγεθών $(n-m)$-βαθμίδας περιέχει τόσα στοιχεία στο σύστημα μονάδων του όσα υπάρχουν στο χωρίο όλων των μεγεθών m-βαθμίδας, διότι $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

O Grassmann μιλάει μόνο για το ευκλείδειο συμπλήρωμα στο έργο του το οποίο ορίζει ως εξής [Gr, §89]:

«Σε ένα πρωτογενές χωρίο n-διάστασης, το συνδυαστικό γινόμενο των πρωτογενών μονάδων $e_1, e_2, \ldots, e_n$, το θέτουμε ίσο με την απόλυτη μονάδα, και το E είναι μια μονάδα οποιασδήποτε βαθμίδας, δηλαδή είτε μια από τις πρωτογενείς μονάδες είτε ένα συνδυαστικό γινόμενο δύο ή περισσοτέρων από αυτές, τότε το συμπλήρωμα του E είναι ίσο με $+E^{'}$ ή με $-E^{'}$, όπου $E^{'}$ είναι το συνδυαστικό γινόμενο όλων των μονάδων που δεν εμφανίζονται στο E. Το *συμπλήρωμα* του E είναι ίσο με $+E^{'}$ όταν $[EE^{'}] = +1$ και ίσο με $-E^{'}$ όταν $[EE^{'}] = -1$. Συνεπώς:

$$|E = [EE^{'}]E^{'}.\text{»}$$

Σημείωση. Για παράδειγμα, εάν έχουμε το πρωτογενές χωρίο διάστασης 3 με σύστημα μονάδων $\{e_1, e_2, e_3\}$ τότε

$$|e_1 = [e_2e_3], |e_2 = [e_3e_1], |e_3 = [e_1e_2],$$
$$|[e_1e_2] = e_3,\ |[e_2e_3] = e_1,\ |[e_1e_3] = -e_2.$$

Βασικές ιδιότητες του συμπληρώματος

• Εάν a είναι ένα μέγεθος m-βαθμίδας, τότε $|a$ είναι ένα μέγεθος $(n-m)$-βαθμίδας.

• Εάν a είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, τότε $|a = a$.

• Εάν A είναι ένα μέγεθος οποιασδήποτε βαθμίδας που προκύπτει αριθμητικά από τις μονάδες $E_1, E_2, \ldots$, δηλαδή,

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots,$$

τότε

$$|A = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \ldots.$$

• Εάν A, B είναι μεγέθη δοσμένης βαθμίδας και α, β είναι βαθμωτά μεγέθη, τότε

$$|(\alpha A + \beta B) = \alpha |A + \beta |B.$$

• Εάν A είναι ένα μέγεθος q-βαθμίδας, τότε το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του μεγέθους A είναι ίσο με A ή με $-A$, σύμφωνα με το αν το $(-1)^{qr}$ είναι $+1$ ή -1, όπου r είναι η βαθμίδα του συμπληρώματος του μεγέθους A, δηλαδή,

$$||A = (-1)^{qr} A.$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό όταν το μέγεθος A είναι ένα συνδυαστικό γινόμενο πρωτογενών μονάδων, δηλαδή,

$$||A = (-1)^{qr} A,$$

εάν το A είναι μονάδα αυθαίρετης βαθμίδας. Έστω τώρα

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots,$$

όπου $E_1, E_2, \ldots$ μονάδες q-βαθμίδας και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ αυθαίρετα βαθμωτά μεγέθη. Τότε το μέγεθος

$$|A = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \ldots$$

είναι r-βαθμίδας. Εφόσον τα $|E_1, |E_2, \ldots$ είναι ξανά μονάδες τότε

$$||A = \alpha_1 ||E_1 + \alpha_2 ||E_2 + \ldots.$$

Με βάση το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι

$$||E_1 = (-1)^{qr} E_1, \quad ||E_2 = (-1)^{qr} E_2, \ \ldots,$$

και συνεπώς

$$||A = (-1)^{qr} (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots) = (-1)^{qr} A.$$

□

Σχόλιο. Εάν η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου n είναι περιττός αριθμός τότε $||A = A$, ενώ εάν ο n είναι άρτιος αριθμός τότε $||A = (-1)^q A$.

3.5 Το Παλινδρομικό Γινόμενο

Το παλινδρομικό γινόμενο (regressiven, eingewandten Produkte) δεν χρησιμοποιείται στην σύγχρονη βιβλιογραφία. Ο Grassmann στην αρχική ανάπτυξη της θεωρίας του δεν διέκρινε συμβολικά τις πράξεις του εξωτερικού και του παλινδρομικού γινομένου. Αντιθέτως, χρησιμοποίησε έναν συμβολισμό που να μπορεί να ερμηνευτεί από την μια ή την άλλη πράξη, ανάλογα με την βαθμίδα των παραγόντων του γινομένου. Χρειαζόταν λοιπόν οξύνεια σκέψης και αυτός μπορεί να είναι και ένας από τους λόγους που δεν χρησιμοποιείται στις μέρες μας, παρόλο που ήταν μια πολύ κομψή ιδέα.

Παραθέτει λοιπόν τον παρακάτω ορισμό [Gr, §94]:

«Εάν το άθροισμα των βαθμίδων δύο μονάδων αυθαίρετων βαθμίδων είναι μικρότερο ή ίσο με την διάσταση n του πρωτογενούς χωρίου, τότε με το γινόμενο τους θα εννοούμε το *εξωτερικό* γινόμενο των δύο αυτών μονάδων, με την συνθήκη ότι το εξωτερικό γινόμενο των n πρωτογενών μονάδων θα είναι ίσο με την απόλυτη μονάδα. Από την άλλη, εάν το άθροισμα των βαθμίδων των δύο μονάδων είναι μεγαλύτερο του n, τότε με το γινόμενο τους θα εννοούμε το *παλινδρομικό* τους γινόμενο, το οποίο θα δίνει ένα μέγεθος του οποίου το συμπλήρωμα θα είναι το εξωτερικό γινόμενο των συμπληρωμάτων εκείνων των μονάδων».

Οπότε εάν E και F είναι δύο μονάδες αυθαίρετων βαθμίδων και το άθροισμα των βαθμίδων τους είναι μεγαλύτερο της διάστασης του πρωτογενούς χωρίου n θα έχουμε

$$|[EF] = [|E|F],$$

και

$$[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1,$$

όπου $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι η συλλογή των πρωτογενών μονάδων.

Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια του παλινδρομικού γινομένου θα δώσουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε $E_1 = [e_1 e_2 e_3 e_4]$ και $E_2 = [e_1 e_2 e_5]$ δύο μονάδες και ότι η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου είναι ίση με 5 και επίσης ισχύει $[e_1 e_2 \ldots e_5] = 1$. Εξ ορισμού το παλινδρομικό γινόμενο των δύο μονάδων δίνει ένα μέγεθος του οποίου το συμπλήρωμα είναι ίσο με το εξωτερικό γινόμενο των συμπληρωμάτων των μονάδων αυτών. Οπότε

$$G = [|E_1|E_2] = [|(e_1e_2e_3e_4)|(e_1e_2e_5)] = [e_5e_3e_4] = [e_3e_4e_5].$$

Συνεπώς, το παλινδρομικό γινόμενο των μονάδων E_1, E_2 θα είναι ίσο με το συμπλήρωμα του μεγέθους G,[8] δηλαδή, θα είναι ίσο με το μέγεθος

$$F = |G = |[e_3e_4e_5] = [e_1e_2].$$

Στην συνέχεια θεωρώντας δύο μεγέθη αυθαίρετων βαθμίδων διακρίνει την βαθμίδα του μεγέθους που προκύπτει από τα δύο είδη γινομένου που όρισε ανάλογα με το άθροισμα των βαθμίδων των δύο μεγεθών (βλέπε [Gr, §95]) λέγοντας

«Εάν A και B είναι δύο μεγέθη q-βαθμίδας και r-βαθμίδας αντίστοιχα, και n η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου, τότε το γινόμενο $[AB]$ είναι είτε ένα μέγεθος $(q+r)$-βαθμίδας, εάν το $(q+r)$ είναι μικρότερο του n είτε ένα μέγεθος $(q+r-n)$-βαθμίδας, εάν το $(q+r)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n».

Αν ερμηνεύσουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με σύγχρονη ορολογία θα έχουμε

$$p \equiv q + r (\mathrm{mod} n),$$

όπου p είναι η βαθμίδα του μεγέθους που προκύπτει από το γινόμενο των δύο μεγεθών.

Όμοια, για μεγαλύτερο πλήθος παραγόντων θέτει

$$p \equiv q + r + t + \ldots (\mathrm{mod} n).$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι μερικά από τα αποτελέσματα που έχουν αποδειχθεί στην σύγχρονη θεωρία για το εσωτερικό γινόμενο μπορούν επίσης να αποδειχθούν χρησιμοποιώντας το εξωτερικό και το παλινδρομικό γινόμενο, όπως και έκανε ο Grassmann.

Με βάσει τα παραπάνω ο Grassmann παραθέτει μια σειρά ιδιοτήτων που αφορούν το συμπλήρωμα διαφόρων μεγεθών σε σχέση με το γινόμενο (εξωτερικό ή παλινδρομικό) [Gr, §97-100].

[8] Διότι, όταν η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου n είναι περιττός αριθμός τότε το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός μεγέθους είναι ίσο με το μέγεθος αυτό.

Ιδιότητες

• Εάν το γινόμενο δύο μεγεθών οποιωνδήποτε βαθμίδων είναι εξωτερικό τότε το γινόμενο των συμπληρωμάτων τους είναι παλινδρομικό, με την προϋπόθεση ότι κανείς μπορεί να θεωρήσει το γινόμενο διαφόρων μεγεθών που δίνει ένα μέγεθος 0-βαθμίδας και ως εξωτερικό και ως παλινδρομικό.

Απόδειξη. Εάν $[AB]$ είναι ένα εξωτερικό γινόμενο, όπου A, B είναι μεγέθη α, β-βαθμίδας αντίστοιχα, τότε η βαθμίδα του γινομένου $[AB]$ θα είναι ίση με το άθροισμα των βαθμίδων των μεγεθών A, B και θα είναι μικρότερη της διάστασης του πρωτογενούς διανυσματικού χωρίου n, δηλαδή,

$$\alpha + \beta \leq n.$$

Οι βαθμίδες των συμπληρωμάτων των μεγεθών A, B είναι αντίστοιχα $n - \alpha, n - \beta$, αλλά εφόσον $n - \alpha + n - \beta \geq n$, συνεπάγεται ότι το γινόμενο των συμπληρωμάτων είναι παλινδρομικό. □

• Το γινόμενο των συμπληρωμάτων ποικίλων μεγεθών οποιωνδήποτε βαθμίδων είναι ίσο με το συμπλήρωμα του γινομένου αυτών των μεγεθών, δηλαδή,

$$[|A|B|C\ldots] = |[ABC\ldots].$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύει την παραπάνω σχέση για το γινόμενο δύο μεγεθών A, B βαθμίδων α, β αντίστοιχα, διακρίνοντας τις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$i.\ \alpha + \beta > n, \quad ii.\ \alpha + \beta = n, \quad iii.\ \alpha + \beta < n.$$

Συγκεκριμένα,

i. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των βαθμίδων α και β των A, B είναι μεγαλύτερο του n. Έστω $A = \sum \alpha_r E_r$, $B = \sum \beta_s F_s$, όπου E_r και F_s είναι μονάδες. Τότε $|A = \sum \alpha_r |E_r$ και $|B = \sum \beta_s |F_s$. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}[|A|B] = \Big[\sum \alpha_r |E_r \cdot \sum \beta_s |F_s\Big] &= \sum \alpha_r \beta_s [|E_r|F_s] \\ &= \sum \alpha_r \beta_s |[E_r F_s] \\ &= \Big|\sum \alpha_r \beta_s [E_r F_s] \\ &= \Big|\Big[\sum \alpha_r E_r \cdot \sum \beta_s F_s\Big] \\ &= |[AB].\end{aligned}$$

ii. Υποθέτουμε ότι $\alpha + \beta = n$. Έστω E και F δύο γινόμενα πρωτογενών μονάδων. Πρώτον, όταν τα E και F περιέχουν έναν κοινό παράγοντα τον e_1. Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση τα $[EF]$ και $[|E|F]$ περιέχουν και τα δύο κοινούς παράγοντες, έτσι ώστε και τα δύο είναι ίσα με το μηδέν. Δεύτερον, όταν $[EF] = 1$ τότε εφόσον $|E = [EF]F$ και $|F = [EF]E$ και λόγω της σχέσης $[FE][FE] = +1$, έχουμε την σχέση $[|E|F] = [EF]$. Αλλά ισχύει $[EF] = 1$ και $|[EF] = 1$. Συνεπώς, ο κανόνας ισχύει για μονάδες. Οπότε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ισχύει επίσης και για οποιαδήποτε μεγέθη.

iii. Έστω $\alpha + \beta < n$. Με βάση την απόδειξη της πρώτης περίπτωσης και θέτοντας $A = |A^{'}$ και $B = |B^{'}$ θα έχουμε

$$|[A^{'}B^{'}] = [|A^{'}|B^{'}] = [AB].$$

Στην συνέχεια υποθέτει ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για m-το πλήθος μεγέθη και επαγωγικά αποδεικνύει ότι ισχύει και για $(m+1)$-το πλήθος μεγέθη. □

• Κανείς αποκτά το συμπλήρωμα ενός πολυωνύμου παίρνοντας το συμπλήρωμα καθενός από τους όρους του χωρίς να αλλάξουμε τα πρόσημα τους, δηλαδή,

$$|(A \pm B \pm \ldots) = |A \pm |B \pm \ldots.$$

Απόδειξη. Εάν

$$A = \sum \alpha_r E_r, \;\; B = \sum \beta_r E_r, \;\; \ldots,$$

τότε

$$
\begin{aligned}
|(A \pm B \pm \ldots) =& \Big|\ \Big(\sum \alpha_r E_r \pm \sum \beta_r E_r \pm \ldots\Big) \\
=& \Big| \sum (\alpha_r \pm \beta_r \pm \ldots) E_r \\
=& \sum (\alpha_r \pm \beta_r \pm \ldots) |E_r \\
=& \sum \alpha_r |E_r \pm \sum \beta_r |E_r \pm \ldots \\
=& \Big| \sum \alpha_r E_r \pm \Big| \sum \beta_r E_r \pm \ldots \\
=& |A \pm |B \pm \ldots .
\end{aligned}
$$

□

Επιπρόσθετα, ο Grassmann αποδεικνύει ότι οποιαδήποτε εξίσωση, που αναφέραμε στα κεφάλαια 1 και 3, παραμένει έγκυρη εάν κανείς αντικαταστήσει τα μεγέθη που εμφανίζονται μέσα σε αυτήν την εξίσωση με τα συμπληρώματα τους [Gr, §101], δηλαδή,

«Εάν
$$f(A, B, \ldots) = \phi(A', B', \ldots),$$
όπου f και ϕ συμβολίζουν συνδέσεις που υπάρχουν στα κεφάλαια 1 και 3, τότε
$$f(|A, |B, \ldots) = \phi(|A', |B', \ldots)$$
και αντίστροφα».

Σχόλιο. Εφόσον εάν
$$f(A, B, \ldots) = \phi(A', B', \ldots)$$
τότε
$$|f(A, B, \ldots) = |\phi(A', B', \ldots),$$
δεν υπάρχουν άλλες συνδέσεις μεταξύ διαφόρων μεγεθών εκτός από τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Έχουμε όμως δει παραπάνω ότι σε όλες αυτές τις πράξεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα συμπληρώματα όλων των συνδέσεων με τις συνδέσεις των συμπληρωμάτων των όρων των συνδέσεων. Ακόμη, αντίστροφα από την σχέση
$$||A = (-1)^{q(n-q)} A \tag{3.18}$$

ακολουθεί η σχέση

$$||||A = (-1)^{(n-q)}(-1)^{(n-q)}A = A. \tag{3.19}$$

Οπότε η σχέση (3.18) ισχύει για κάθε μέγεθος A, q-βαθμίδας, σε ένα πρωτογενές χωρίο διάστασης n. Συνεπώς εάν ισχύει μια σχέση της μορφής

$$f(|A, |B, \ldots) = \phi(|A^{'}, |B^{'}, \ldots)$$

εφαρμόζοντας το πρώτο μέρος του θεωρήματος τρείς φορές σε αυτή την εξίσωση παρατηρούμε ότι ισχύει επίσης η σχέση

$$f(A, B, \ldots) = \phi(A^{'}, B^{'}, \ldots).$$

3.5.1 Σύνδεση εξωτερικού και παλινδρομικού γινομένου

Πέρα απο τις ιδιότητες που αναπτύξαμε προηγουμένως για το εξωτερικό και το παλινδρομικό γινόμενο υπάρχει μια σχέση σαφώς συσχετισμένη και με τα δύο είδη γινομένου (εξωτερικό και παλινδρομικό). Η σχέση αυτή θα έχει πολλές εφαρμογές στην θεωρία που ανέπτυξε ο Grassmann και την οποία θα μελετήσουμε αργότερα. Θα χρησιμοποιηθεί σε σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα στο γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο που ορίζει ο Grassmann καθώς και στον υπολογισμό γεωμετρικών τομών. Αυτή η σχέση προικίζει τις δύο δομές γινομένου με τις ιδιότητες της ένωσης και της τομής μεγεθών και χωρίων και στηρίζεται στους κοινούς παράγοντες κάποιων μεγεθών [Br]. Η ανάμειξη των δύο ειδών γινομένου μπορεί και να απαίτηχε διότι ο Grassmann στην θεωρία του απέδειξε ότι σε ένα μεικτό γινόμενο δεν ισχύει εν γένει η προσεταιριστικότητα των παραγόντων του.[9]

Η ιδιότητα αυτή λοιπόν λέει [Gr, §102]:

«Εάν E, F, G είναι μονάδες των οποίων το άθροισμα των βαθμίδων είναι ίσο με την διάσταση του πρωτογενούς χωρίου, τότε

$$[EF \cdot EG] = [EFG]E.\text{»}$$ [10]

[9] Όταν μιλάμε για μεικτό γινόμενο εννοούμε ότι μεταξύ των παραγόντων του εμφανίζονται και εξωτερικά και παλινδρομικά γινόμενα.

[10] Ο συμβολισμός της έντονης τελείας μεταξύ δύο παραγόντων του γινομένου σημαίνει ότι το γινόμενο μεταξύ όλων των παραγόντων δεν είναι προσεταιριστικό, δηλαδή, στην συγκεκριμένη σχέση πρώτα υπολογίζουμε τα γινόμενα EF, EG και έπειτα το γινόμενο αυτών των δύο.

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω ιδιότητα θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρωτογενές χωρίο διάστασης 4 με σύστημα μονάδων $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ και ας θεωρήσουμε τα μεγέθη $[e_1e_2e_3]$, $[e_2e_3e_4]$ του χωρίου αυτού. Σύμφωνα με τις βαθμίδες των δύο μεγεθών το γινόμενο τους $[(e_1e_2e_3)(e_2e_3e_4)]$ είναι παλινδρομικό και δίνει ένα μέγεθος βαθμίδας 2. Θα δείξουμε ότι αυτό το μέγεθος που προκύπτει είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του κοινού παράγοντα $[e_2e_3]$.
Ένα σύστημα μονάδων όλων των στοιχείων βαθμίδας 2 είναι

$$[e_1e_2],\ [e_1e_3],\ [e_1e_4],\ [e_2e_3],\ [e_2e_4],\ [e_3e_4].$$

Οπότε κάθε στοιχείο βαθμίδας 2 θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων αυτού του συστήματος μονάδων. Παρατηρούμε όμως ότι όλοι οι όροι του αθροίσματος εκτός από έναν είναι μηδενικοί εφόφον έχουν επαναλαμβανόμενους παράγοντες 1-βαθμίδας. Συνεπώς

$$[(e_1e_2e_3)(e_2e_3e_4)] = \alpha[(e_1e_2e_3e_4)(e_2e_3)].$$

Άρα το παλινδρομικό γινόμενο δύο μεγεθών που έχουν μη μηδενική τομή είναι ίσο με το παλινδρομικό γινόμενο της ένωσης τους και της τομής τους.

Όμως $[e_1e_2e_3e_4] = 1$, οπότε $[(e_1e_2e_3)(e_2e_3e_4)] = \alpha[e_2e_3]$.

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για οποιαδήποτε στοιχειώδη μεγέθη, δηλαδή, εάν A ένα μέγεθος m-βαθμίδας, B ένα μέγεθος k-βαθμίδας και C ένα μέγεθος t-βαθμίδας και τα τρία στοιχειώδη μεγέθη, με $m + k + t = n$, όπου n είναι η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου τότε

$$[(AC) \cdot (BC)] = [ABC]C. \tag{3.20}$$

Αν θέλουμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση τότε μπορούμε να πούμε οτι το παλινδρομικό γινόμενο δύο στοιχειωδών μεγεθών $[AC]$, $(m+t)$-βαθμίδας, και $[BC]$, $(k+t)$-βαθμίδας, με κοινό παράγοντα το μέγεθος C, t-βαθμίδας, είναι ίσο με το παλινδρομικό γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των τριών στοιχειωδών μεγεθών $[ABC]$ (η ''ένωση'' τους) με τον κοινό παράγοντα τους C (η ''τομή'' τους).

Εάν μεταξύ των τριών μεγεθών A, B, C υπάρχουν κοινοί στοιχειώδεις παράγοντες τότε το εξωτερικό γινόμενο $[ABC]$ είναι ίσο με το μηδέν, οπότε και το πρώτο μέλος της εξίσωσης (3.20) είναι ίσο με το μηδέν. Οπότε από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο $[ABC]$ είναι διαφορετικό του μηδενός.

Εφόσον το γινόμενο $[ABC]$ είναι ένα μέγεθος $(m+k+t)$-βαθμίδας, τότε εάν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι ένα σύστημα μονάδων του πρωτογενούς χωρίου θα έχουμε

$$[ABC] = k[e_1 e_2 \ldots e_n] = k,$$

όπου k ένα βαθμωτό μέγεθος. Συνεπώς,

$$[(AC)\cdot(BC)] = k\,C, \quad m+k+t=n.$$

Σχόλιο. Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για γενικότερα μεγέθη με την προυπόθεση ότι ο κοινός παράγοντας C είναι στοιχειώδης. Διότι, έστω δύο στοιχειώδη μεγέθη A_1, A_2, m-βαθμίδας και τα δύο και B, C δύο σύνθετα μεγέθη. Τότε,

$$[(A_1C)\cdot(BC)] = [ABC]C, \quad m+k+t=n$$

$$[(A_2C)\cdot(BC)] = [ABC]C, \quad m+k+t=n.$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εξωτερικού και παλινδρομικού γινομένου θα έχουμε

$$[((A_1+A_2)C)\cdot(BC)] = [(A_1+A_2)BC]C, \quad m+k+t=n.$$

Συνεπώς, η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και όταν ο κοινός παράγοντας είναι στοιχειώδης ενώ τα άλλα δύο μεγέθη σύνθετα. Αντιθέτως, εάν ο κοινός παράγοντας A δεν είναι στοιχειώδης και τα μεγέθη B, C είναι στοιχειώδη τότε η παραπάνω σχέση παύει να ισχύει.

Επιπρόσθετα, απέδειξε και κάποιες εναλλακτικές μορφές της παραπάνω ιδιότητας λέγοντας:

«Εάν A, B, C είναι τρία στοιχειώδη μεγέθη και το γινόμενο τους είναι 0-βαθμίδας (δηλαδή, αν p, q, r είναι οι βαθμίδες των τριών μεγεθών αντίστοιχα τότε είτε $p+q+r=n$ είτε $p+q+r=2n$), τότε

- $[(AB)\cdot(AC)] = [ABC]A$,
- $[(AB)\cdot(BC)] = [ABC]B$,
- $[(AC)\cdot(BC)] = [ABC]C$.»

Τέλος, απέδειξε ότι εάν A, B, C είναι τρία στοιχειώδη μεγέθη των οποίων το άθροισμα των βαθμίδων είναι ίσο με την διάσταση του πρωτογενούς χωρίου και το μέγεθος B εμπεριέχεται στο μέγεθος A τότε

$$[A\cdot BC] = [AC]B,$$

$$[CB\cdot A] = [CA]B.$$

3.5.2 Αμιγές και Μεικτό γινόμενο

Όταν ο Grassmann μιλάει για *αμιγές* γινόμενο (rein Produkte, pure product) είτε εξωτερικό είτε παλινδρομικό εννοεί ότι οι παράγοντες είναι συνδεδεμένοι μέσα στο γινόμενο έτσι ώστε να υπόκεινται μόνο σε εξωτερικό πολλαπλασιασμό ή σε παλινδρομικό πολλαπλασιασμό αντίστοιχα. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα έχουμε ένα μεικτό γινόμενο. Συγκεκριμένα, εάν στο γινόμενο $[ABC\ldots JK]$ το γινόμενο $[AB]$ είναι εξωτερικό, το γινόμενο των δύο μεγεθών $[AB]$ και C είναι ξανά εξωτερικό, το γινόμενο των μεγεθών $[ABC]$ και D είναι ξανά εξωτερικό, κτλ, και τελικά και το γινόμενο των δύο μεγεθών $[ABC\ldots J]$ και K είναι εξωτερικό, τότε το $[ABC\ldots JK]$ είναι ένα *αμιγές εξωτερικό* γινόμενο των μεγεθών $A, B, C, D, \ldots, J, K$. Όμοια, εάν όλα εκείνα τα γινόμενα είναι παλινδρομικά, ή το πολύ το τελευταίο γινόμενο, δηλαδή το γινόμενο των μεγεθών $[ABC\ldots J]$ και K είναι εξωτερικό και 0-βαθμίδας, τότε το $[ABC\ldots JK]$ είναι ένα *αμιγές παλινδρομικό* γινόμενο των μεγεθών $A, B, C, D, \ldots, J, K$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν κάποιες ιδιότητες που ισχύουν για τα αμιγή γινόμενα [Gr, §115-122].

Ιδιότητες

• Εάν ένα γινόμενο ποικίλων μεγεθών $[ABC\ldots]$ είναι αμιγώς εξωτερικό, τότε το γινόμενο των συμπληρωμάτων των μεγεθών $[|A|B|C\ldots]$ είναι αμιγώς παλινδρομικό και το αντίστροφο.

• Το γινόμενο m μεγεθών $A, B, C, \ldots, J, K$ είναι αμιγώς εξωτερικό, εάν το άθροισμα των βαθμίδων αυτών των μεγεθών είναι μικρότερο ή ίσο της διάστασης n του πρωτογενούς χωρίου, και αμιγώς παλινδρομικό, εάν εκείνο το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n(m-1)$, και ένα μεικτό γινόμενο εάν εκείνο το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του n και μικρότερο του $n(m-1)$.

• Το χωρίο ενός αμιγώς εξωτερικού γινομένου είναι ίσο με το επικαλυπτικό χωρίο όλων των παραγόντων του και το χωρίο ενός αμιγώς παλινδρομικού γινομένου είναι ίσο με το κοινό χωρίο των παραγόντων του, με την προυπόθεση ότι το γινόμενο είναι μη μηδενικό.

• Σε ένα αμιγές γινόμενο ισχύει η προσεταιριστικότητα, δηλαδή, εάν $[ABC]$ είναι ένα αμιγές γινόμενο, τότε

$$[A(BC)] = [ABC].$$

• Εάν σε ένα αμιγές γινόμενο υπάρχουν δύο παράγοντες A, B, κανένας από τους οποίους δεν είναι 0-βαθμίδας, που εμπεριέχεται ο ένας από τους δύο στον άλλο, τότε

$$P_{A,B} = 0.$$

• Ένα μεικτό γινόμενο $[ABC]$ τριών στοιχειωδών μεγεθών (όπου το μέγεθος C είναι μη μηδενικό), είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνο αν είτε $[AB] = 0$, είτε και τα τρία μεγέθη A, B, C περιέχονται σε ένα χωρίο διάστασης μικρότερης του n, είτε έχουν ένα κοινό χωρίο μεγαλύτερης από 0 διάστασης.

3.5.3 Ίχνος

Με τον όρο *ίχνος*[11] (Zurückleitung, shadow) ο Grassmann εννοεί την προβολή ενός μεγέθους σε ένα πρωτογενές χωρίο. Συγκεκριμένα, αν n είναι η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου, το οποίο έχει βάση την $e_1, \ldots, e_n$ και C είναι ένα μέγεθος m-βαθμίδας του χωρίου αυτού και $C^{'}$ είναι ένα άλλο μέγεθος m-βαθμίδας ενός χωρίου που περιέχεται στο αρχικό χωρίο και έχει βάση την $e_1, \ldots, e_m$ τότε το μέγεθος $C^{'}$ είναι το ίχνος του μεγέθους C στο χωρίο $[e_1 \ldots e_m]$ εξαιρώντας το χωρίο $[e_{m+1} \ldots e_n]$. Σύμφωνα με το αν τα στοιχεία της βάσης είναι πρώτης βαθμίδας ή $(n-1)$-βαθμίδας, το ίχνος είναι *εξωτερικό* ή *παλινδρομικό* αντίστοιχα. Τα ίχνη ποικίλων μεγεθών είναι παρμένα με το ίδιο νόημα όταν σκιάζονται στο ίδιο χωρίο και εξαιρούν το ίδιο χωρίο [Gr, §127].[12]

Σημείωση. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε το πρωτογενές χωρίο διάστασης 4 που προκύπτει από τα τέσσερα ανεξάρτητα μεταξύ τους μεγέθη πρώτης βαθμίδας a, b, c, d. Τότε το

$$C^{'} = [bc] + [ca] + [ab]$$

είναι το εξωτερικό ίχνος του μεγέθους

$$C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$$

στο χωρίο $[abc]$ εξαιρώντας το χωρίο d.
Αν τώρα έχουμε τα ανεξάρτητα μεταξύ τους μεγέθη $(n-1)$-βαθμίδας

$$a^{'} = [bcd], b^{'} = [cad], c^{'} = [abd], d^{'} = [acb]$$

και επιπρόσθετα έχουμε $[abcd] = 1$, τότε

$$[b^{'}c^{'}] = [ad],\ [c^{'}a^{'}] = [bd],\ [a^{'}b^{'}] = [cd],\ [a^{'}d^{'}] = [bc],\ [b^{'}d^{'}] = [ca],\ [c^{'}d^{'}] = [ab],$$

και

$$C = [a^{'}d^{'}] + [b^{'}d^{'}] + [c^{'}d^{'}] + [b^{'}c^{'}] + [c^{'}a^{'}] + [a^{'}b^{'}]$$

οπότε το μέγεθος

$$C^{''} = [a^{'}d^{'}] + [b^{'}d^{'}] + [a^{'}b^{'}]$$

[11] στην σύγχρονη βιβλιογραφία χρησιμοποιούμε τον όρο προβολή

[12] Σύμφωνα με ένα θεώρημα που αποδεικνύει ο Grassmann το χωρίο που προκύπτει από όλα τα μεγέθη οποιασδήποτε βαθμίδας των μεγεθών $e_1, \ldots, e_n$ είναι ισοδύναμο με το χωρίο $[e_1 \ldots e_n]$.

είναι το παλινδρομικό ίχνος του C στο χωρίο $[a^{'}b^{'}d^{'}]$ εξαιρώντας το χωρίο $d^{'}$.

Μια έκφραση που έδωσε στην συνέχεια ο Grassmann (βλέπε [Gr, §129]) για το ίχνος ενός μεγέθους A σε ένα χωρίο B, αποκλείοντας ένα χωρίο C, είναι

$$A^{'} = \frac{[B \cdot (AC)]}{BC},$$

από όπου

$$A^{'} = [B \cdot (AC)],$$

εάν $[BC] = 1$.

Ιδιότητες

• Κάθε εξίσωση της οποίας οι όροι είναι πολλαπλάσια οποιωνδήποτε δοσμένων μεγεθών m-βαθμίδας ισχύει και όταν κανείς αντικαταστήσει όλα αυτά τα μεγέθη με τα ίχνη τους με το ίδιο νόημα, δηλαδή, αν

$$P = \alpha A + \beta B + \ldots,$$

και $P^{'}, A^{'}, B^{'}, \ldots$ είναι τα ίχνη με το ίδιο νόημα των μεγεθών $P, A, B, \ldots$, τότε

$$P^{'} = \alpha A^{'} + \beta B^{'} + \ldots.$$

• Το εξωτερικό ίχνος ενός αμιγώς εξωτερικού γινομένου και το παλινδρομικό ίχνος ενός αμιγώς παλινδρομικού γινομένου είναι ίσα με τα γινόμενα των ιχνών, με το ίδιο νόημα, των παραγόντων αυτών των γινομένων, δηλαδή, εάν

$$P = [AB \ldots E]$$

είναι το αμιγές γινόμενο P και $P^{'}, A^{'}, B^{'}, \ldots, E^{'}$ είναι τα ίχνη, παρμένα με το ίδιο νόημα, των $P, A, B, \ldots, E$ τότε

$$P^{'} = [A^{'}B^{'} \ldots E^{'}].$$

3.6 Γενικευμένο Εσωτερικό Γινόμενο

3.6.1 Θεμελιώδεις κανόνες του Εσωτερικού Γινομένου

Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο (inneren, interior) είναι μια ακόμη θεμελιώδης πράξη την οποία εισάγει ο Grassmann. Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο δύο μονάδων αυθαίρετης βαθμίδας ορίζεται ως το εξωτερικό ή το παλινδρομικό γινόμενο της μιας μονάδας με το συμπλήρωμα της άλλης σύμφωνα με το αν το άθροισμα των βαθμίδων των μονάδων είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο της διάστασης του πρωτογενούς χωρίου. Αν το άθροισμα των βαθμίδων είναι ίσο με την διάσταση του πρωτογενούς χωρίου τότε το γινόμενο των δύο μεγεθών μπορεί να ερμηνευτεί είτε με τον έναν είτε με τον άλλο τρόπο [Gr, §137,138].

Στην σύγχρονη βιβλιογραφία η έννοια του εσωτερικού γινομένου δύο μεγεθών σε ένα πρωτογενές χωρίο εισάγεται με έναν αυθαίρετο ορισμό, ανεξάρτητο από την έννοια του συμπληρώματος. Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο δεν είναι το ίδιο με το γνωστό στις μέρες μας εσωτερικό γινόμενο. Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο είναι μια γενικότερη πράξη εφόσον μπορεί να υπολογιστεί και μεταξύ δύο μεγεθών οποιωνδήποτε, ίσως και διαφορετικών μεταξύ τους βαθμίδων. Ωστόσο, ο Grassmann αναφέρει ότι το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο δυο μεγεθών της ίδιας βαθμίδας είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.[13]

Ορίζει λοιπόν το *εσωτερικό* γινόμενο δύο αυθαίρετων μεγεθών να είναι ίσο με το σχετικό γινόμενο του πρώτου μεγέθους με το συμπλήρωμα του δευτέρου.[14]

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό το εσωτερικό γινόμενο δύο μεγεθών A και B, βαθμίδων m και k αντίστοιχα και το οποίο συμβολίζουμε $[A|B]$, σε ένα πρωτογενές χωρίο διάστασης n δίνει ένα μέγεθος είτε $(n+m-k)$-βαθμίδας είτε ένα μέγεθος $(m-k)$-βαθμίδας, ανάλογα με το αν το k είναι μεγαλύτερο του m ή όχι [Gr, §139].

Απόδειξη. Εάν τα A, B είναι οι δύο παράγοντες, με βαθμίδες α, β αντίστοιχα,

[13] Από τώρα και στο εξής θα το αποκαλούμε εν συντομία εωτερικό γινόμενο.

[14] Εν γένει ο Grassmann χρησιμοποιεί τον όρο ''σχετικό γινόμενο'' για να αναφερθεί είτε σε ένα εξωτερικό είτε σε ένα παλινδρομικό γινόμενο σε ένα πρωτογενές χωρίο.

τότε η βαθμίδα του $|B$ είναι ίση με $n-\beta$. Πρώτον, εάν το β είναι μεγαλύτερο του α, τότε και το n είναι μεγαλύτερο του $\alpha+n-\beta$. Οπότε, η βαθμίδα του γινομένου είναι ίση με $\alpha+n-\beta$. Όμως, εάν το β είναι μικρότερο ή ίσο του α, τότε το n είναι μικρότερο ή ίσο του $\alpha+n-\beta$. Εφόσον το άθροισμα των βαθμίδων των $A, |B$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n, η βαθμίδα του γινομένου $[A|B]$ είναι μικροτερη κατά n από το άθροισμα $\alpha+n-\beta$ και συνεπώς είναι ίση με $\alpha-\beta$. □

Έπειτα αποδεικνύει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο ίσων μονάδων είναι ίσο με την απόλυτη μονάδα, ενώ δύο διαφορετικών μονάδων της ίδιας βαθμίδας είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή,

$$[E_r|E_r]=1, \quad [E_r|E_s]=0,$$

και στην συνέχεια αποδεικνύει την παρακάτω σχέση

$$[(\alpha_1 E_1+\ldots\alpha_m E_m)|(\beta_1 E_1+\ldots\beta_m E_m)]=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_m\beta_m,$$

όπου $E_1,\ldots,E_m$ είναι μονάδες αυθαίρετου αλλά της ίδιας βαθμίδας και τα α_i, β_j είναι αυθαίρετα βαθμωτά μεγέθη [Gr, §141,142].

Συμπεραίνει ως επακόλουθο των παραπάνω σχέσεων ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο μεγεθών A, B της ίδιας βαθμίδας είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, διότι η βαθμίδα του εσωτερικού γινομένου δύο βαθμίδων θα ειναι ίση με την διαφορά των βαθμίδων των δύο παραγόντων, η οποία θα είναι ίση με το μηδέν, και ως εκ τούτου το γινόμενο θα είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Επίσης, αποδεικνύει και την σχέση

$$[A|B]=[B|A].$$

Αργότερα αποδεικνύει μια πιο γενική σχέση που ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο δύο μονάδων, η οποία είναι η εξής [Gr, §147]:

> «*Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο δύο μονάδων που εμπεριέχεται η μια στην άλλη είναι διαφορετικό του μηδενός ενώ όταν δεν εμπεριέχεται η μια στην άλλη τότε είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή,*
>
> $$[E|F]=0$$

εάν μια από τις μονάδες E, F δεν εμπεριέχεται στην άλλη, ενώ

$$[E|F] \neq 0$$

εάν μια από τις μονάδες E, F εμπεριέχεται στην άλλη»

Το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο ενός μεγέθους με τον εαυτό του το καλεί το *εσωτερικό τετράγωνο* του μεγέθους A και το συμβολίζει ως εξής

$$[A|A] = A^{\underline{2}}.$$

Τέλος, αποδεικνύει την σχέση που συνδέει το εσωτερικό γινόμενο $[A|B]$ δύο μεγεθών A, B, q, r-βαθμίδων αντίστοιχα, με το συμπλήρωμα του εσωτερικού γινομένου $[B|A]$ και η οποία είναι

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}|[B|A].$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
|[B|A] &= [|B\|A] \\
&= (-1)^{q(n-q)}[|B \cdot A] \\
&= (-1)^{q(n-q)}(-1)^{q(n-r)}[A|B] \\
&= (-1)^{q(2n-q-r)}[A|B].
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει διότι, το γινόμενο $[|B \cdot A]$ είναι εξωτερικό εφόσον το άθροισμα των βαθμίδων $n - r + q = n - (r - q) < n$.

Η σχέση $q(2n - q - r)$ σε $\mod 2$ είναι ισοδύναμη με το $q(r - q)$ ή με το $q(r - 1)$, εφόσον το q^2 είναι άρτιο ή περιττό σύμφωνα με το τι είναι το q, οπότε

$$|[B|A] = (-1)^{q(r-1)}[A|B],$$

ή ισοδύναμα

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}|[B|A].$$

□

3.6.2 Η έννοια της ορθογωνιότητας σε σχέση με το εσωτερικό γινόμενο

Στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού μιλάει για την έννοια της ορθογωνιότητας μεταξύ διαφόρων μεγεθών. Αρχικά ορίζει το μέτρο ενός μεγέθους, το οποίο καλεί ως την *αριθμητική τιμή* (numerischer Werth, numerical value) του μεγέθους αυτού και η οποία είναι ίση με την θετική τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού τετραγώνου αυτού του μεγέθους. Επίσης αναφέρει ότι δύο μεγέθη είναι αριθμητικά ίσα όταν έχουν την ίδια αριθμητική τιμή.

Στην συνέχεια παραθέτει τους παρακάτω ορισμούς [Gr, §152]:

> «*Δύο μη μηδενικά μεγέθη καλούνται* ορθογώνια *(normal) μεταξύ τους όταν το γενικευμένο εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν. Ενώ, δύο χωρία είναι ορθογώνια μεταξύ τους εάν τα στοιχεία τους είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, δύο χωρία είναι* συνολικά ορθογώνια *μεταξύ τους εάν κάθε μέγεθος πρώτης βαθμίδας που ανήκει στο ένα χωρίο είναι ορθογώνιο σε κάθε μέγεθος πρώτης βαθμίδας του άλλου χωρίου*»

Όπως αναφέρεται και στα σχόλια του εκδότη [Gr, §351,352], ο Grassmann στον ορισμό που δίνει για το πότε δύο χωρία είναι ορθογώνια μεταξύ τους δεν χρησιμοποιεί την έκφραση ''στοιχεία ενός χωρίου'' με τον ακριβή όρο που έχει προσδιοριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο για το τι εννοεί με τα μεγέθη ενός χωρίου. Τα στοιχεία στα οποία αναφέρεται είναι τα στοιχειώδη μεγέθη, δηλαδή, τα μεγέθη δοσμένης βαθμίδας, έστω q, τα οποία μπορούν να γραφούν ως το συνδυαστικό γινόμενο q το πλήθος μεγεθών πρώτης βαθμίδας. Συνεπώς καταλληλότερος ορισμός θα ήταν:

«Ένα χωρίο q διάστασης και ένα χωρίο r διάστασης είναι ορθογώνια μεταξύ τους εάν κάθε στοιχειώδες μέγεθος q-βαθμίδας του πρώτου χωρίου είναι ορθογώνιο σε κάθε στοιχειώδες μέγεθος r-βαθμίδας του δεύτερου χωρίου».

Αν θέλουμε ωστόσο να εξετάσουμε πότε δύο χωρία q, r-βαθμίδας αντίστοιχα είναι συνολικά ορθογώνια μεταξύ τους τότε αρκεί οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος πρώτης βαθμίδας του πρώτου χωρίου να είναι ορθογώνιο σε οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος r-βαθμίδας του δεύτερου.

Συνεπώς, παρατηρούμε από τον ορισμό δύο συνολικά ορθογώνιων μεταξύ τους χωρίων ότι αυτός ο ορισμός είναι ισχυρότερος από τον προηγούμενο ορισμό. Για να γίνουν κατανοητές οι έννοιες αυτές θα δώσουμε ένα γενικό παράδειγμα.

Εάν a είναι ένα στοιχειώδες μέγεθος q-βαθμίδας και b ένα στοιχειώδες μέγεθος, m-βαθμίδας, τότε τα μεγέθη a, b είναι ορθογώνια μεταξύ τους εάν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή, εάν $[b|a] = 0$. Δηλαδή, το μέγεθος a εμπεριέχεται στο χωρίο του συμπληρώματος του μεγέθους b. Εάν αυτό ισχύει για οποιαδήποτε μεγέθη a, b των χωρίων A, B τότε λέμε ότι τα χωρία είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Τώρα, εάν a είναι οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος q-βαθμίδας (δηλαδή $a = [a_1 \ldots a_q]$, όπου $a_1, \ldots, a_q$ είναι μεγέθη πρώτης βαθμίδας)και b είναι οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος m-βαθμίδας τότε τα μεγέθη a, b είναι συνολικά ορθογώνια μεταξύ τους εάν και μόνο αν $[b|a_i] = 0$, για όλα τα μεγέθη a_i που περιέχονται στο μέγεθος a. Συμπεραίνουμε ότι, εάν οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος a πρώτης βαθμίδας ενός χωρίου A q-διάστασης είναι ορθογώνιο με οποιοδήποτε στοιχειώδες μέγεθος b, m-βαθμίδας ενός χωρίου B, και ισχύει για κάθε μέγεθος b του χωρίου B η σχέση $[b|a_i] = 0$, τότε τα δύο χωρία είναι συνολικά ορθογώνια μεταξύ τους.

Ωστόσο, εν γένει για να ισχύει η σχέση $[b|a] = [b|(a_1 \ldots a_q)] = 0$, δεν είναι απαραίτητο κάθε ένα από τα a_i να είναι ορθογώνιο με το μέγεθος b, διότι

$$[b|a] = [b|(a_1 \ldots a_q)] = [b|a_1]|[a_2 \ldots a_q].$$

Αρκεί ένα από τα a_i να είναι ορθογώνιο με το μέγεθος b. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ορισμός δύο συνολικά ορθογώνιων μεταξύ τους μεγεθών είναι ισχυρότερος από τον ορισμό δύο απλώς ορθογώνιων μεταξύ τους μεγεθών.

Ο Grassmann αναφέρει ότι ο λόγος που αποκαλεί την έννοια της ορθογωνιότητας με τον όρο "normal" είναι ότι ο όρος αυτός είναι πιο αφηρημένος και επιτρέπει εφαρμογές σε μη χωρικές σχέσεις.

Καλεί *ορθογώνιο σύστημα n-διάστασης* κάθε συλλογή n-το πλήθος μη μηδενικών αριθμητικά ίσων μεγεθών πρώτης βαθμίδας, καθένα από τα οποία είναι κάθετα ως προς τα άλλα. Εάν συγχρόνως, η διάσταση του πρωτογενούς χωρίου είναι ίση με n τότε το σύστημα θα καλείται ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα. Επίσης, η αριθμητική τιμή εκείνων των n-το πλήθος μεγεθών είναι και η αριθμητική τιμή του ορθογώνιου συστήματος. Κάθε ορθογώνιο σύστημα του οποίου η αριθμητική τιμή είναι ίση με την απόλυτη μονάδα είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα [Gr, §153].

Στην συνέχεια ορίζει ως *κυκλικό μετασχηματισμό* (circuläre Aenderung, circular evolution), εννοώντας κάθε μετασχηματισμό μιας συλλογής μεγεθών στον οποίο δύο μεγέθη της συλλογής, έστω a και b, μετασχηματίζονται αντίστοιχα στα μεγέθη $xa + yb$ και $\pm(xb - ya)$, δεδομένου ότι $x^2 + y^2 = 1$. Εάν τα a, b μετασχηματίζονται στα $xa+yb$ και $xb-ya$ αντίστοιχα τότε η κυκλική μετατροπή θα καλείται *θετική* ενώ στην άλλη περίπτωση *αρνητική*. Παρατηρείται ότι στο διδιάστατο χωρίο η θετική κυκλική μετατροπή αντιστοιχεί γεωμετρικά (με σύγχρονους όρους) στην *επίπεδη περιστροφή* ενώ η αρνητική αντιστοιχεί στην *ανάκλαση*. Αναφέρει ότι εάν $x = \cos\alpha$ και $y = \sin\alpha$, και τα μεγέθη a, b είναι αριθμητικά ίσα και ορθογώνια μεταξύ τους τότε λέμε ότι η συλλογή έχει εξελιχθεί από το a μέχρι το b κατά την γωνία α [Gr, §154].

Αποδεικνύει λοιπόν τα εξής:

- Υπό μια κυκλική μετατροπή κάθε ορθογώνιο σύστημα μετασχηματίζεται σε ένα αριθμητικά ίσο ορθογώνιο σύστημα.

- Υπό μια θετική μετατροπή το συνδυαστικό γινόμενο των μεγεθών ενός ορθογώνιου συστήματος παραμένει αμετάβλητο, και υπό μια αρνητική μετατροπή μετασχηματίζεται στο αντίθετο του.

- Τα μεγέθη ενός ορθογώνιου συστήματος είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους και κάθε μέγεθος πρώτης βαθμίδας μπορεί να προκύψει αριθμητικά από ένα αυθαίρετο πλήρες ορθογώνιο σύστημα.

- Εάν δύο ορθογώνια συστήματα έχουν την ίδια αριθμητική τιμή, και τα χωρία τους εμπεριέχονται το ένα από τα δύο στο άλλο, τότε με επαναλαμβανόμενες κυκλικές μετατροπές το καθένα μπορεί να προκύψει από το άλλο εάν έχουν την ίδια διάσταση. Αλλιώς, εάν έχουν διαφορετικές διαστάσεις τότε αυτό που έχει την μεγαλύτερη διάσταση μετασχηματίζεται έτσι ώστε να περιέχει τα μεγέθη του άλλου.

- Το σύστημα των πρωτογενών μονάδων είναι ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα, του οποίου η αριθμητική τιμή είναι ίση με την απόλυτη μονάδα.

Ορίζοντας την έννοια ενός πλήρους ορθογώνιου συστήματος του οποίου τα μεγέθη είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, καταλήγει στο ότι ότι κάθε ένας από τους ισχυρισμούς που αναφέραμε προηγουμένως ισχύει ακόμα και όταν αντικαταστήσουμε το σύστημα των πρωτογενών μονάδων με ένα αυθαίρετο πλήρες ορθογώνιο σύστημα του οποίου η αριθμητική τιμή είναι ίση με 1 [Gr, §168]. Βγάζει λοιπόν το πολύ σημαντικό συμπέρασμα της ανεξαρτησίας επιλογής συστήματος μονάδων (με σύγχρονους όρους βάσης).

Σε προηγούμενο κεφάλαιο παραθέσαμε τον ορισμό της έννοιας του ίχνους σύμφωνα με τον Grassmann. Στο κεφάλαιο του εσωτερικού γινομένου ορίζει και μια ειδική περίπτωση της έννοιας αυτής την οποία καλεί *ορθογώνιο ίχνος*. Με το ορθογώνιο ίχνος A' ενός μεγέθους A σε ένα χωρίο B εννοεί το ίχνος του μεγέθους A στο χωρίο B, αποκλείοντας το χωρίο που είναι το συμπλήρωμα του χωρίου B. Αντίστοιχα με την σχέση που δίνεται το ίχνος, για το ορθογώνιο ίχνος ισχύει η σχέση

$$A^{'} = \frac{[B \cdot (A|B)]}{B^{\underline{2}}},$$

από όπου

$$A^{'} = [B \cdot (A|B)],$$

εάν η αριθμητική τιμή του B είναι ίση με 1.

Στην συνέχεια αποδεικνύει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο στοιχειωδών μεγεθών m-βαθμίδας A, B, είναι ίσο με

$$[A|B] = [abc\ldots|a^{'}b^{'}c^{'}\ldots] = \begin{vmatrix} [a|a^{'}] & [a|b^{'}] & [a|c^{'}] & \ldots \\ [b|a^{'}] & [b|b^{'}] & [b|c^{'}] & \ldots \\ [c|a^{'}] & [c|b^{'}] & [c|c^{'}] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Επακόλουθα της παραπάνω σχέσης είναι μια συλλογή σχέσεων μεταξύ στοιχειωδών μεγεθών κάποιες από τις οποίες είναι:

- $[ab|a^{'}b^{'}] = [a|a^{'}][b|b^{'}] - [a|b^{'}][b|a^{'}]$,

- $[abc]^{\underline{2}} = a^{\underline{2}}b^{\underline{2}}c^{\underline{2}} - a^{\underline{2}}[b|c]^2 - b^{\underline{2}}[c|a]^2 - c^{\underline{2}}[a|b]^2 + 2[a|b][b|c][c|a]$.

Κατόπιν αποδεικνύει ότι υπάρχουν δύο είδη εξισώσεων που καθορίζουν την δομή του εσωτερικού γινομένου μεταξύ δύο μεγεθών πρώτης βαθμίδας (όχι απαραίτητα πρωτογενείς μονάδες) και οι οποίες είναι

$$[e_r|e_s] = 0 \tag{3.21}$$

εάν $r \neq s$,

$$[e_r|e_r] = [e_s|e_s] = \ldots. \tag{3.22}$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι για οποιεσδήποτε μονάδες ισχύει το σύνολο των παραπάνω εξισώσεων. Σύμφωνα με την ανεξαρτησία επιλογής συστήματος μονάδων οι παραπάνω σχέσεις είναι διαθέσιμες και για κάθε πλήρες πρωτογενές ορθογώνιο σύστημα. Θα δώσουμε όμως και μια ενδεικτική απόδειξη για το ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι διαθέσιμες και για οποιοδήποτε αυθαίρετο πλήρες ορθογώνιο σύστημα. Έστω a, b δύο μεγέθη αυτού του συστήματος και λ η αριθμητική τιμή του ορθογώνιου συστήματος. Μπορούμε να θέσουμε τα μεγέθη a, b

$$a = \lambda a', \quad b = \lambda b^{'},$$

όπου $a^{'}, b^{'}$ έχουν αριθμητική τιμή ίση με 1. Τότε, $[a^{'}|b^{'}] = 0$ και $[\lambda a^{'}|\lambda b^{'}] = 0$. Οπότε, $[a|b] = 0$ και $[a|a] = [\lambda a|\lambda a] = \lambda^2$. Όμοια, $[b|b] = \lambda^2$ και $[a|a] = [b|b]$. Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο αυτές οι δύο σχέσεις και καμία άλλη. Έστω λοιπόν ότι έχουμε την παρακάτω εξίσωση που καθορίζει την δομή του εσωτερικού γινομένου

$$\sum \alpha_{r,s}[e_r|e_s] = 0,$$

η οποία γίνεται

$$\sum \alpha_{r,r}[e_r|e_r] = 0.$$

Θέτοντας $[e_r|e_r] = 1$ έχουμε

$$\sum \alpha_{r,r} = 0.$$

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου του γενικευμένου εσωτερικού γινομένου που περιέχεται στο βιβλίο Ausdehnungslehre αναφέρει την έννοια της γωνίας δύο μεγεθών και παραθέτει μια σειρά σχέσεων μεταξύ γωνιών και του εσωτερικού γινομένου οι οποίες, όπως θα δούμε παρακάτω, αντιστοιχούν σε σύγχρονες σχέσεις που είναι γνωστές από την θεωρία της σύγχρονης γραμμικής άλγεβρας.

Με τον συμβολισμό $\angle AB$ (η γωνία AB), όπου τα A, B είναι μεγέθη ίδιας μη μηδενικής βαθμίδας, και α, β οι αντίστοιχες αριθμητικές τους τιμές, εννοούμε την *γωνία* μεταξύ 0 και π της οποίας το συνημίτονο είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο εκείνων των μεγεθών διαιρεμένο με το γινόμενο των αριθμητικών τους τιμών, δηλαδή θέτει

$$\cos \angle AB = \frac{[A|B]}{\alpha\beta}, \quad \angle AB = 0, \ldots, \pi.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει η (γνωστή και σε εμάς για διανύσματα) σχέση του εσωτερικού γινομένου δύο μεγεθών ίδιας βαθμίδας

$$[A|B] = \alpha\beta \cos \angle AB.$$

Κατόπιν, ορίζει το ημίτονο ποικίλων μεγεθών πρώτης βαθμίδας $a, b, \ldots$, τα οποία έχουν τις αντίστοιχες αριθμητικές τιμές $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ και το οποίο συμβολίζει ως $\sin(abc\ldots)$, ως το μέγεθος το οποίο είναι αριθμητικά ίσο με $\dfrac{[abc\ldots]}{\alpha\beta\gamma\ldots}$ και είναι μη αρνητικό, δηλαδή,

$$\sin^2(abc\ldots) = \frac{[abc\ldots]^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\ldots}.$$

Παρατήρηση. Ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού είναι ότι αν a, b είναι δύο μεγέθη πρώτης βαθμίδας τότε

$$\sin(ab) = \sin \angle ab,$$

κάτι το οποίο προκύπτει πρώτον από το ότι $\sin^2(ab) = 1 - \cos^2 \angle ab$ διότι,

$$\begin{aligned}\sin^2(ab) = \frac{[ab]^{\underline{2}}}{\alpha^2\beta^2} &= \frac{a^{\underline{2}}b^{\underline{2}} - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \\ &= \frac{\alpha^2\beta^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \\ &= 1 - \frac{[a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \\ &= 1 - \cos^2 \angle ab,\end{aligned}$$

και δεύτερον από το γεγονός ότι το $\sin(ab) \geq 0$ και η γωνία $\angle ab$ είναι μεταξύ 0 και π.

Αποδεικνύει λοιπόν μια συλλογή σχέσεων κάποιες από τις οποίες είναι και οι ακόλουθες:

- Εάν a, b είναι μεγέθη πρώτης βαθμίδας τότε

$$[ab]^{\underline{2}} = \alpha^2\beta^2 \sin^2 \angle ab.$$

- Εάν a, b, c, d είναι μεγέθη πρώτης βαθμίδας τότε

$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \sin \angle ab \sin \angle cd \cos \angle(ab \cdot cd).$$

- Εάν $a, b, c, \ldots$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους και το k είναι ένα οποιοδήποτε μέγεθος, το οποίο προκύπτει αριθμητικά από αυτά τα μεγέθη, ισχύει η σχέση

$$\frac{k}{\kappa} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \ldots.$$

Απόδειξη. Έστω $k = xa + yb + \ldots$. Τότε, για να υπολογίσουμε το x αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε μέλος με το $|a$. Εφόσον, $[b|a] = 0$, κτλ, παίρνουμε την σχέση $[k|a] = x[a|a]$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και το y και τους υπόλοιπους συντελεστές. Αντικαθιστώντας στην ισότητα του k παίρνουμε την επιθυμητή σχέση. □

• Εάν $a, b, \ldots$ είναι μεγέθη ορθογώνια μεταξύ τους και τα μεγέθη k, l παράγονται αριθμητικά από τα μεγέθη αυτά τότε

$$\cos\angle kl = \cos\angle ak \cdot \cos\angle al + \cos\angle bk \cdot \cos\angle bl + \ldots.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της γωνίας ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned}\cos\angle kl = \frac{[k|l]}{\kappa\lambda} = \Big[\frac{k}{\kappa}\frac{l}{\lambda}\Big]\\ = \Big[\Big(\frac{a}{\alpha}\cos\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos\angle bk + \ldots\Big)\Big|\Big(\frac{a}{\alpha}\cos\angle al + \frac{b}{\beta}\cos\angle bl + \ldots\Big)\Big]\\ = \frac{a^{\underline{2}}}{\alpha^2}\cos\angle ak\cos\angle al + \frac{b^{\underline{2}}}{\beta^2}\cos\angle bk\cos\angle bl + \ldots.\end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε. □

Σχόλιο. Εάν $k = l$ τότε ισχύει

$$1 = \cos^2\angle ak + \cos^2\angle bk + \ldots.$$

Τέλος, αποδεικνύει την σχέση

$$\begin{aligned}(a+b)^{\underline{2}} &= a^{\underline{2}} + 2[a|b] + b^{\underline{2}}\\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\angle ab + \beta^2,\end{aligned}$$

η οποία είναι η επέκταση της Πυθαγόρειας πρότασης, καθώς και την αντίστοιχη σχέση για τον χώρο, η οποία είναι

$$\begin{aligned}(a+b+c)^{\underline{2}} &= a^{\underline{2}} + b^{\underline{2}} + c^{\underline{2}} + 2[a|b] + 2[c|a] + 2[b|c]\\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\angle ab + 2\beta\gamma\cos\angle bc + 2\alpha\gamma\cos\angle ca.\end{aligned}$$

3.7 Γεωμετρικές Εφαρμογές

Η Γεωμετρία, σύμφωνα με την αντίληψη του Grassmann, δεν είναι ένας κλάδος καθαρών μαθηματικών εφόσον προϋποθέτει την αντίληψη του χώρου η οποία δεν γεννιέται από το μυαλό αλλά είναι κάτι από την φύση μας ανεξάρτητη από την σκέψη. Όπως αναφέρει ο Ziwet [Zi1], ο Grassmann ήταν ένας από τους πρώτους που ανακάλυψε την έννοια του n-διάστατου χώρου. Στην εφαρμογή των γενικών εννοιών της θεωρίας της έκτασης στις χωρικές σχέσεις, πρέπει να αντικαταστήσουμε για τη γενική ιδέα της μετατροπής την ιδέα της **κίνησης**, και αυτό είναι το είδος μετατροπής στο οποίο όλες οι χωρικές αλλαγές μπορούν να αναχθούν και από τις οποίες μπορούν να αντιπροσωπευθούν.

Η πιο απλή χωρική σχέση είναι η θέση και η οποία αντιπροσωπεύεται από το γεωμετρικό σημείο. Έπειτα, αυτό είναι το πιο αρχικό σε βαθμίδα στοιχείο, το οποίο υπόκειται σε κίνηση και παράγει γεωμετρικά αντικείμενα ενός πιο περίπλοκου είδους. Η κίνηση μπορεί να είναι περιορισμένη ή απεριόριστη αναλόγα με τα αντικείμενα που παράγονται μέσω αυτής. Τα περιορισμένα αντικείμενα λέγονται να έχουν ''μέγεθος''. Τα όρια της παραγωγικής κίνησης καθορίζουν αυτό το μέγεθος. Η κίνηση οποιουδήποτε γεωμετρικού αντικειμένου χαρακτηρίζεται από την κατεύθυνση της και ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο αυτή η κατεύθυνση αλλάζει από μια κατάσταση της κίνησης του αντικειμένου σε μια άλλη καθορίζει το σχήμα του αντικειμένου που παράγεται. Εάν η κατεύθυνση της κίνησης παραμένει η ίδια, η κίνηση καλείται ''στοιχειώδης''. Το σύνολο όλων των αντικειμένων που μπορούν να παραχθούν από μια στοιχειώδη κίνηση σε μια δεδομένη κατεύθυνση (και την αντίθετη της) αποτελεί αυτό που ο Grassmann καλεί ''σύστημα'' [Zi1].

Συνεπώς, μια ευθεία αντιπροσωπεύει ένα σύστημα διάστασης 1, εφόσον περιέχει όλα τα σημεία και τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία μπορούν να παραχθούν από ένα σημείο το οποίο κινείται σε μια δοσμένη κατεύθυνση. Εάν όλα τα στοιχεία (σημεία) αυτού του συστήματος διάστασης 1 υπόκεινται σε μια στοιχειώδη κίνηση σε μια κατεύθυνση που δεν περιέχεται σε αυτό, παράγεται ένα σύστημα διάστασης 2. [Zi1].

Σε αυτό λοιπόν το κεφάλαιο ο Grassmann εφαρμόζει την θεωρία που έχει αναπτύξει προηγουμένως για ποικίλες γεωμετρικές οντότητες στον διδιάστατο και στον τρισδιάστατο χώρο. Ξεκινάει με δύο διαφορετικά είδη γεωμετρικά ερμηνευμένων μεγεθών τα οποία είναι τα σημεία και τα διανύσματα, και τα οποία είναι μεγέθη πρώτης βαθμίδας. Κατόπιν, συνεχίζει με την ερμηνεία ποικίλων μεγεθών υψηλότερης βαθμίδας τα οποία προκύπτουν από τα δύο παραπάνω είδη μεγεθών μέσω του εξωτερικού γινομένου. Επίσης θα δούμε τον ρόλο του παλινδρομικού γινομένου για τον υπολογισμό τομών μεταξύ μεγεθών υψηλότερης βαθμίδας.

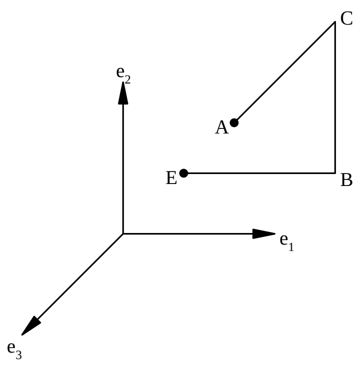
3.7.1 Θεμελιώδεις έννοιες

Θεωρώντας λοιπόν ένα σημείο E και τρεις μεταξύ τους κάθετες και ίδιου μήκους ευθείες ως πρωτογενείς μονάδες και τέσσερα αυθαίρετα βαθμωτά μεγέθη $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ορίζει τα εξής:

- με

$$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

εννοεί το σημείο, έστω A, όταν κανείς κινηθεί από το E κατα ένα ευθύγραμμο τμήμα EB ίσο με το $\alpha_1 e_1$, δηλαδή κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση με το e_1 σύμφωνα με το αν το α_1 είναι θετικό ή αρνητικό βαθμωτό μέγεθος και του οποίου το μήκος σε σχέση με το μήκος του e_1 είναι όσο η αναλογία του α_1 με το 1. Έπειτα κινηθεί από το σημείο B κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα BC το οποίο είναι ίσο με το $\alpha_2 e_2$ και τέλος κινηθεί από το C κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα BC, το οποίο είναι ίσο με το $\alpha_3 e_3$. Δηλαδή, αν κινηθεί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



- με

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

εννοεί ένα *διάνυσμα* (Strecke, displacement), το οποίο είναι μια ευθεία γραμμή συγκεκριμένου μήκους και κατεύθυνσης, και συγκεκριμένα εκείνο το διάνυσμα το οποίο έχει ίδιο μήκος και κατεύθυνση με την ευθεία που σχηματίζεται από το σημείο E μέχρι το σημείο $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ και

- με

$$\alpha(E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$$

εννοεί το *α-πολλαπλάσιο* (α-fache, α-fold) του σημείου A (*πολλαπλό σημείο*). Ο συντελεστής α του σημείου A καλείται το *βάρος* του σημείου A [Gr, §216]. Όλα τα απλά σημεία θα θεωρούμε ότι έχουν βάρος ίσο με την απόλυτη μονάδα.

Απαιτεί ότι για οποιαδήποτε από αυτά τα μεγέθη ισχύουν οι θεμελιώδεις πράξεις, οι ιδιότητες και τα θεωρήματα του κεφαλαίου 1.

Κάθε μέγεθος λοιπόν πρώτης βαθμίδας είναι είτε ένα απλό σημείο, είτε ένα πολλαπλό σημείο είτε ένα διάνυσμα συγκεκριμένου μήκους και κατεύθυνσης. Όταν μιλάει για ευθείες συγκεκριμένου μήκους και κατεύθυνσης εννοεί ευθύγραμμα τμήματα. Το ευθύγραμμο τμήμα AB διαφέρει από το διάνυσμα το οποίο προσδιορίζεται από τα σημεία A, B στο γεγονός ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει συγκεριμένη θέση επί της ευθείας που προσδιορίζεται από τα σημεία A, B, δηλαδή, έχει αρχή το A και πέρας το B (τα λεγόμενα με σύγχρονους όρους ''εφαρμοστά διανύσματα''), ενώ το διάνυσμα που προσδιορίζεται από αυτά τα δύο σημεία κινείται σε οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία ως προς την ευθεία που προσδιορίζεται από τα σημεία A, B (τα λεγόμενα με σύγχρονους όρους ''ελεύθερα διανύσματα'').

Στην συνέχεια σύμφωνα με τις δύο θεμελιώδεις πράξεις που ορίσαμε στο 1^o κεφάλαιο απαντά σε δυο βασικά ερωτήματα:

- Τι μέγεθος προκύπτει από το άθροισμα ποικίλων διανυσμάτων ;

- Τι μέγεθος προκύπτει από το γινόμενο ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό μέγεθος ;

Αποδεικνύει λοιπόν ότι το άθροισμα ποικίλων διανυσμάτων δίνει ένα διάνυσμα το οποίο έχει το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το αρχικό σημείο του πρώτου διανύσματος με το τελικό σημείο του τελευταίου διανύσματος, εφαρμόζοντας τα διανύσματα το ένα μετά το άλλο έτσι ώστε εκεί που σταματάει το ένα να αρχίζει το άλλο χωρίς να αλλάξουμε το μήκος και την κατεύθυνση τους. Όσον αφορά το γινόμενο ενός αριθμού α με ένα διάνυσμα x προκύπτει ένα διάνυσμα y το οποίο έχει την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση με το διάνυσμα x, σύμφωνα με το αν ο αριθμός α είναι θετικός ή αρνητικός, και του οποίου το μήκος σε σχέση με το μήκος του x είναι όσο η αναλογία του α με το 1 [Gr, §220,221].

Στην συνέχεια ορίζει την έννοια του "βαρύκεντρου" (Summenpunkt, summation point) λέγοντας ότι το άθροισμα $\alpha A+\beta B+\ldots$, όπου τα $A, B, \ldots$ είναι σημεία και τα $\alpha, \beta, \ldots$ είναι βαθμωτά μεγέθη, είναι είτε ένα διάνυσμα εάν $\alpha+\beta+\ldots=0$ είτε ένα πολλαπλό σημείο εάν $\alpha+\beta+\ldots\neq 0$, και συγκεκριμένα στην περίπτωση του διανύσματος ισχύει

$$\alpha A+\beta B+\ldots=\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots,$$

και στην περίπτωση του πολλαπλού σημείου ισχύει

$$\alpha A+\beta B+\ldots=(\alpha+\beta+\ldots)S,$$

όπου

$$S-R=\frac{\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots}{\alpha+\beta+\ldots},$$

και R είναι ένα αυθαίρετο σημείο.

Στην δεύτερη περίπτωση το πολλαπλό σημείο που προκύπτει καλείται το *βαρύκεντρο*, έστω S, και του οποίου ο συντελεστής $\alpha A+\beta B+\ldots$ αντιπροσωπεύει το βάρος του και είναι το μοναδικό σημείο το οποίο έχει την ιδιότητα

$$\alpha(A-S)+\beta(B-S)+\ldots=0.$$

Σημείωση. Για παράδειγμα, έστω αA, βB δύο πολλαπλά σημεία με βάρη α, β αντίστοιχα, τα οποία είναι βαθμωτά μεγέθη θετικά ή αρνητικά. Τότε το άθροισμα τους

$$\alpha A+\beta B$$

είναι ένα πολλαπλό σημείο του οποίου ο συντελεστής (το βάρος) είναι ίσος με το άθροισμα των συντελεστών (των βαρών) των δοσμένων σημείων. Οπότε,

$$\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)C$$

ή

$$\frac{A - C}{C - B} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Συνεπώς, το σημείο C θα βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A, B και η θέση του ως προς τα σημεία A, B εξαρτάται από τα βαθμωτά μεγέθη α, β [Hyde].

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμα ενός απλού σημείου A και ενός διανύσματος p (το οποίο μπορώ να γράψω ως $p = B - A$) είναι ίσο με το τελικό σημείο του διανύσματος B [Gr, §226], διότι

$$A + p = A + (B - A) = B.$$

Αντίθετα, έστω αA ένα πολλαπλό σημείο και p ένα διάνυσμα. Τότε

$$\alpha A + p = \alpha\Big(A + \frac{p}{\alpha}\Big),$$

οπότε, εάν το α-πολλαπλάσιο του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει την ίδια κατεύθυνση και το ίδιο μήκος με το διάνυσμα p (συνεπώς και το AB με το $\frac{p}{\alpha}$),

$$B - A = \frac{p}{\alpha}.$$

Συνεπώς

$$\alpha A + p = \alpha(A + B - A) = \alpha B,$$

δηλαδή, το άθροισμα ενός πολλαπλού σημείου, έστω αA, και ενός διανύσματος p είναι ίσο με το πολλαπλό τελικό σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB του οποίου το α-πολλαπλάσιο έχει το ίδιο μήκος και κατεύθυνση με το διάνυσμα p [Gr, §227].

Παρατήρηση. Σε αυτό το σημείο ο Grassmann κάνει ένα εκτενές σχόλιο. Αναφέρει ότι η πρόσθεση σημείων δόθηκε πρώτα από τον Möbius το 1827, ενώ η πρόσθεση διανυσμάτων φαίνεται να έχει δοθεί από τον Bellavitis γύρω στο 1835. Ανεξάρτητα από τα έργα των άλλων δύο, στο Ausdehnungslehre του 1844, ορίστηκε η πρόσθεση μεταξύ σημείων και διανυσμάτων. Ωστόσο, στα έργα και των τριών έλειπε η απόδειξη ότι δεν υπάρχει καμία άλλη πρόσθεση σημείων και διανυσμάτων εκτός από αυτές που δόθηκαν παραπάνω. Έτσι λοιπόν, ο Grassmann αποδεικνύει ότι η γενική έννοια της πρόσθεσης, εφαρμοσμένη σε σημεία και διανύσματα, δίνει μόνο την παραπάνω πρόσθεση.

Αποδεικνύει λοιπόν ότι τα μεγέθη τα οποία προκύπτουν από διάφορες συνδέσεις (δηλαδή, μέσω των πράξεων της άθροισης και της αφαίρεσης), είναι του ίδιου είδους με τα μεγέθη τα οποία συνδέονται.

Σύμφωνα με τις τέσσερις θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ εκτεταμένων μεγεθών [Gr, §8]:

$$\begin{aligned} &1)\ a+b=b+a,\\ &2)\ a+(b+c)=(a+b)+c,\\ &3)\ a+b-b=a,\\ &4)\ a-b+b=a, \end{aligned}$$

εφόσον εάν τα A, B είναι απλά σημεία, τότε η τρίτη σχέση δίνει

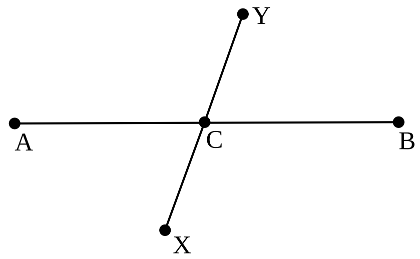
$$A+B-B=A,$$

δηλαδή, παίρνουμε ένα απλό σημείο, κάθως και η σχέση

$$A-B+B=A,$$

δίνει ένα απλό σημείο, κάνουμε την υπόθεση ότι η σχέση $A+B-C$ δίνει ένα απλό σημείο. Αυτή η υπόθεση ικανοποιείται μόνο όταν το C είναι το μέσο μεταξύ των A, B. Για αποδείξει λοιπόν αυτή την υπόθεση υποθέτει ότι η σχέση $A+B-C$ ισούται με ένα σημείο X, και θα αποδείξει ότι το $X=C$.

Έστω ότι το X είναι διαφορετικό του C τότε προεκτείνοντας το XC κατά ένα ίσο με τον εαυτό του ευθύγραμμο τμήμα CY, δηλαδή, $XC=CY$.



Περιστρέφοντας το σχήμα το οποίο περιλαμβάνει τα σημεία A, B, C, X στο επίπεδο του γύρω από το σημείο C κατά 180^o, τότε το A πέφτει στην θέση του B, το B στην θέση του A και το X ταυτίζεται με το Y, δηλαδή η συλλογή A, B, C, X είναι ισοδύναμη με την συλλογή B, A, C, Y. Εφόσον υποθέσαμε ότι

$$A + B - C = X,$$

προκύπτει η σχέση

$$B + A - C = Y.$$

Έχουμε λοιπόν

$$Y = B + A - C = A + B - C = X.$$

Όμως για να συμπίπτουν τα σημεία X, Y θα πρέπει $Y = X = C$.

Συνεπώς, απέδειξε ότι το άθροισμα δύο απλών σημείων είναι ίσο με δύο φορές το απλό σημείο το οποίο βρίσκεται μεταξύ των δύο σημείων. Με παρόμοιο τρόπο σκέψης αποδεικνύει τα αντίστοιχα για διανύσματα [Gr, pp.129-131].

3.7.2 Τρισδιάστατα χωρία

Σύμφωνα με τον Grassmann όταν ένα σημείο υποχωρεί στο άπειρο δεν έχει νόημα να παρατηρεί κανείς την θέση του, αλλά ακόμα υποδηλώνει μια κατεύθυνση εφόσον όλες οι ευθείες που περνούν από πεπερασμένα σημεία και από αυτό το σημείο στο άπειρο είναι μεταξύ τους παράλληλες. Όμοια, μια ευθεία η οποία βρίσκεται σε άπειρη απόσταση καθορίζει μια κατεύθυνση επιπέδου και όλα τα επίπεδα που περνούν από πεπερασμένα σημεία και από αυτήν την ευθεία στο άπειρο είναι μεταξύ τους παράλληλα. Οπότε με ένα απείρως μακρινό σημείο εννοεί την διεύθυνση μιας ευθείας, με μια απείρως μακρινή ευθεία εννοεί όλες τις διευθύνσεις ενός επιπέδου και με ένα απείρως μακρινό επίπεδο όλες τις διευθύνσεις του χώρου [Gr, §228].

Στην συνέχεια διακρίνει στο επίπεδο και στον χώρο τα συστήματα μονάδων από τα οποία προκύπτουν αριθμητικά όλα τα μεγέθη πρώτης βαθμίδας. Συγκεκριμένα:

• Όλα τα σημεία μιας ευθείας προκύπτουν αριθμητικά από οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία αυτής της ευθείας [Gr, §234].

• Όλα τα σημεία ενός επιπέδου προκύπτουν αριθμητικά από οποιαδήποτε τρία σημεία τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία [Gr, §233], δηλαδή, εάν A, B, C είναι τρία σημεία τότε κάθε άλλο σημείο D του επιπέδου που περνάει από αυτά τα τρία σημεία μπορεί να εκφραστεί στην μορφή

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

• Όλα τα σημεία του χώρου προκύπτουν αριθμητικά από οποιαδήποτε τέσσερα σημεία τα οποία δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο [Gr, §232].

• Όλα τα διανύσματα μιας ευθείας προκύπτουν αριθμητικά από ένα αυθαίρετο διάνυσμα αυτής της ευθείας [Gr, §230α].

Απόδειξη. Έστω a, b δύο διανύσματα της ίδιας ευθείας. Αν σχεδιάσουμε από ένα αυθαίρετο σημείο C της ευθείας τα ευθύγραμμα τμήματα CA, CB τα οποία έχουν ίδια μήκη και κατευθύνσεις με τα a, b αντίστοιχα, τότε

$$a = A - C, \quad b = B - C.$$

Εάν $CB : CA = \alpha : 1$ τότε

$$b = B - C = \alpha(A - C) = \alpha a.$$

• Όλα τα διανύσματα ενός επιπέδου προκύπτουν αριθμητικά από δύο αυθαίρετα μη παράλληλα διανύσματα του επιπέδου αυτού [Gr, §230].

Απόδειξη. Έστω a, b δύο διανύσματα ενός επιπέδου μη παράλληλα μεταξύ τους, και d ένα αυθαίρετο διάνυσμα. Αν σχεδιάσουμε από ένα αυθαίρετο σημείο C τα ευθύγραμμα τμήματα CA, CB, CD τα οποία έχουν ίδια μήκη και κατευθύνσεις με τα a, b, d αντίστοιχα, και σχεδιάσουμε από το D μια ευθεία παράλληλη στο CB, η οποία κόβει το CA στο E, τότε $CE//CA, ED//CB$. Θέτοντας

$$CE : CA = \alpha : 1, \quad ED : CB = \beta : 1,$$

τότε

$$\begin{aligned} E - C &= \alpha(A - C) = \alpha a, \\ D - E &= \beta(B - C) = \beta b. \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε τις δύο παραπάνω ισότητες τότε

$$d = D - C = \alpha a + \beta b.$$

• Όλα τα διανύσματα του χώρου προκύπτουν αριθμητικά από τρία αυθαίρετα διανύσματα μη παράλληλα στο ίδιο επίπεδο [Gr, §229].

Απόδειξη. Έστω a, b, c τρία διανύσματα μη παράλληλα στο ίδιο επίπεδο, και e ένα αυθαίρετο διάνυσμα. Αν σχεδιάσουμε από ένα αυθαίρετο σημείο D τα ευθύγραμμα τμήματα DA, DB, DC, DE τα οποία έχουν ίδια μήκη και κατευθύνσεις με τα a, b, c, e αντίστοιχα, τότε

$$A - D = a, \quad B - D = b, \quad C - D = c, \quad E - D = e.$$

Εάν, σχεδιάσουμε από το E παράλληλη στο DC, η οποία κόβει το επίπεδο ABD στο F, και από το F παράλληλη στο DB, η οποία κόβει το DA στο σημείο G, τότε $DG//DA, GF//DB, FE//DC$. Θέτοντας

$$DG : DA = \alpha : 1, \quad GF : DB = \beta : 1, \quad FE : DC = \gamma : 1,$$

τότε

$$\begin{aligned} G - D &= \alpha(A - D) = \alpha a, \\ F - G &= \beta(B - D) = \beta b, \\ E - F &= \gamma(C - D) = \gamma c. \end{aligned}$$

Αν τις προσθέσουμε τότε

$$e = E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Έπειτα αναφέρει διάφορα παραδείγματα γραμμικώς εξαρτημένων μεγεθών, όπως για παράδειγμα, εάν τρία διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε είναι συνεπίπεδα και ότι εάν τρία σημεία είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Τέλος, μιλάει για χωρία ποικίλων διαστάσεων των οποίων τα συστήματα μονάδων ταυτίζει με τα χωρικά μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται από τα στοιχεία του εκάστοτε συστήματος μονάδων και αναφέρει συγκεκριμένα ότι:

- ένα χωρίο διάστασης 1 είναι ένα σημείο το οποίο έχει θέση,
- ένα χωρίο διάστασης 2 είναι μια απέραντη ευθεία,
- ένα χωρίο διάστασης 3 είναι ένα απέραντο επίπεδο και
- ένα χωρίο διάστασης 4 είναι ένας απέραντος χώρος.

3.7.3 Το συνδυαστικό γινόμενο

Το συνδυαστικό γινόμενο δύο σημείων $A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $B = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}[AB] =&[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)]\\ =&\alpha_1\beta_1[e_1e_1] + \alpha_1\beta_2[e_1e_2] + \alpha_2\beta_1[e_2e_1] + \alpha_2\beta_2[e_2e_2].\end{aligned}$$

Το μέγεθος που προκύπτει εξαρτάται από τα γινόμενα $[e_1e_1], [e_1e_2], [e_2e_1]$ και $[e_2e_2]$.

Εν γένει, το συνδυαστικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μεγεθών είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνο αν τα μεγέθη αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους. Συνεπώς,

- το συνδυαστικό γινόμενο δύο σημείων είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνο αν τα δύο σημεία συμπίπτουν,

- το συνδυαστικό γινόμενο τριών σημείων είναι μηδέν αν και μόνο αν τα τρία σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία,

- το συνδυαστικό γινόμενο τεσσάρων σημείων είναι μηδέν αν και μόνο αν τα σημεία αυτά βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο,

- το συνδυαστικό γινόμενο πέντε σημείων είναι πάντα μηδέν, εφόσον όλα τα σημεία του χώρου προκύπτουν αριθμητικά από οποιαδήποτε τέσσερα σημεία του τα οποία δεν είναι συνεπίπεδα, και συνεπώς κάθε πέντε σημεία στο χώρο είναι γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους.

Το συνδυαστικό γινόμενο δύο απλών σημείων $[AB]$ είναι ίσο με το συνδυαστικό γινόμενο δύο άλλων απλών σημείων $[CD]$ αν και μόνο αν οι δύο ευθείες που προσδιορίζονται από τα σημεία A, B και C, D αντίστοιχα, συμπίπτουν και τα δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και CD έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση [Gr, §247].

Ορίζει το γινόμενο $[AB]$ δύο σημείων να είναι ένα *ευθύγραμμο στοιχείο* (Linientheil, line element) και είναι ένα στοιχείο της ευθείας AB, και έχει το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση με το ευθύγραμμο τμήμα AB. Το ευθύγραμμο στοιχείο $[AB]$ διαφέρει από το ευθύγραμμο τμήμα AB στο γεγονός ότι το ευθύγραμμο στοιχείο είναι ένα διάνυσμα που κινείται κατά μήκος της ευθείας που προσδιορίζεται από τα σημεία A, B, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα έχει συγκεκριμένη θέση που προσδιορίζεται από αυτά τα δύο σημεία (Με σύγχρονους όρους το ευθύγραμμο στοιχείο αντιστοιχεί στο ''ολισθαίνον διάνυσμα'').

Οπότε, δύο ευθύγραμμα στοιχεία είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση και βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας.

Όσον αφορά το συνδυαστικό γινόμενο ενός απλού σημείου A και ενός διανύσματος p προκύπτει ένα ευθύγραμμο στοιχείο το οποίο βρίσκεται επί της ευθείας που είναι παράλληλη στο διάνυσμα p και περνάει από το σημείο A και έχει το ίδιο μήκος και κατεύθυνση με το διάνυσμα p, διότι σχεδιάζοντας κανείς δια μέσου του A ένα ευθύγραμμο τμήμα AB ίδιου μήκους και κατεύθυνσης με το p τότε

$$[Ap] = [A(B - A)] = [AB].$$

Τέλος το γινόμενο ενός ευθύγραμμου στοιχείου με ένα βαθμωτό μέγεθος είναι ίσο με ένα ευθύγραμμο στοιχείο το οποίο βρίσκεται στην ίδια ευθεία και σχετίζεται με το πρώτο ευθύγραμμο στοιχείο όπως το α με το 1, διότι

$$\alpha[AB] = \alpha[A(B-A)] = [A \cdot \alpha(B-A)].$$

Στην συνέχεια εξετάζει μεγαλύτερης βαθμίδας γινόμενα ξεκινώντας με τον προσδιορισμό κάποιων γεωμετρικών οντοτήτων. Το παραλληλόγραμμο στο οποίο AB και BC είναι δύο πλευρές του καλείται το *παραλληλόγραμμο* ABC. Δύο παραλληλόγραμμα ABC και DEF, τα οποία βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα, θα λέγεται ότι έχουν το ίδιο *πρόσημο* αν και μόνο αν μπορεί κανείς με παράλληλες μεταφορές να τα φέρει σε τέτοια θέση έτσι ώστε όταν οι πλευρές AB και DE βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έχουν την ίδια κατεύθυνση τότε τα σημεία C και F να βρίσκονται από την ίδια μεριά αυτής της ευθείας [Gr, §239].

Με βάση τα παραπάνω δύο παραλληλόγραμμα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν το ίδιο εμβαδόν και πρόσημο και βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα. Το συνδυαστικό γινόμενο τριών σημείων $[ABC]$ καλείται ένα *επίπεδο στοιχείο* (Flächentheil, surface element). Είναι ένα μέγεθος βαθμίδας 3 και αντιπροσωπεύει ένα τμήμα του επιπέδου ABC του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το διπλάσιο του τριγώνου που έχει τις κορυφές A, B, C.

Δύο μη μηδενικά συνδυαστικά γινόμενα $[ABC]$ και $[DEF]$ είναι ίσα αν και μόνο αν τα παραλληλόγραμμα ABC και DEF είναι ίσα και έχουν το ίδιο πρόσημο και βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Το συνδυαστικό γινόμενο δύο σημείων A, B και ενός διανύσματος c είναι ίσο με το επίπεδο στοιχείο του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με εκείνο του παραλληλογράμμου ABC, όπου το BC έχει το ίδιο μήκος και κατεύθυνση με το διάνυσμα c, διότι

$$[ABc] = [AB(C-B)] = [ABC],$$

εάν $c = C - B$.

Επίσης το συνδυαστικό γινόμενο ενός σημείου A και δύο διανυσμάτων b, c είναι πάλι ένα επίπεδο στοιχείο, διότι

$$[Abc] = [A(B-A)(C-B)] = [AB(C-B)] = [ABC].$$

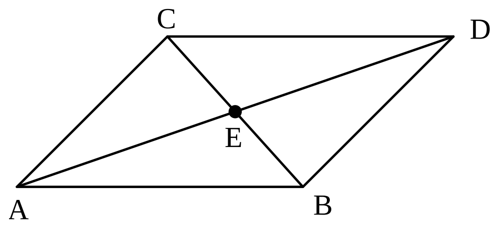
Ανάλογα ορίζει συνδυαστικά γινόμενα βαθμίδας 4 και τα ονομάζει στοιχεία όγκου [Gr, §262,263].

Κάθε τέσσερα μη-συνεπίπεδα απλά σημεία A, B, C, D προσδιορίζουν ένα *τετράεδρο*, έστω $[ABCD]$ και έξι φορές ο όγκος αυτού του παραλληλεπίπεδου θα θεωρείται ως η τιμή (ο όγκος) του γινομένου αυτού. Εάν το γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν, τότε ο όγκος του τετράεδρου μηδενίζεται και συνεπώς τα τέσσερα σημεία θα είναι συνεπίπεδα.

3.7.4 Αθροισμα ευθύγραμμων και επίπεδων στοιχείων

Σε προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την έννοια του στοιχειώδους μεγέθους και επίσης αποδείξαμε ότι σε ένα πρωτογενές χωρίο διάστασης n όλα τα μεγέθη βαθμίδας 1 και όλα τα μεγέθη βαθμίδας $(n-1)$ είναι στοιχειώδη. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι το άθροισμα δύο στοιχειωδών μεγεθών, βαθμίδας $(n-1)$ και τα δύο, είναι ένα στοιχειώδες μέγεθος της ίδιας βαθμίδας. Συνεπώς, υπό την πρόσθεση, δύο ευθύγραμμα στοιχεία στο ίδιο επίπεδο δίνουν ένα ευθύγραμμο στοιχείο στο ίδιο επίπεδο, και δύο επίπεδα στοιχεία στον χώρο δίνουν ένα επίπεδο στοιχείο. Το ίδιο ισχύει και εάν προσθέσουμε πεπερασμένο πλήθος ευθυγράμμων στοιχείων ή πεπερασμένο πλήθος επίπεδων στοιχείων. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την άθροιση συγκεκριμένων ειδών ευθύγραμμων στοιχείων.

Έστω A, B, C τρία απλά σημεία και $[AB]$ και $[AC]$ δύο ευθύγραμμα στοιχεία πεπερασμένου μήκους των οποίων οι ευθείες έχουν σημείο τομής το σημείο A.



Τότε

$$[AB] + [AC] = [A(B + C)] = 2[AE],$$

όπου E είναι το μέσο σημείο μεταξύ των σημείων B, C. Αλλά το AE είναι η μισή διαγώνιος του παραλληλογράμμου CAB, οπότε $2AE$ είναι ολόκληρη η διαγώνιος. Συνεπώς το άθροισμα δύο ευθύγραμμων στοιχείων είναι ίσο με το ευθύγραμμο στοιχείο ίδιου μήκους και κατεύθυνσης με την διαγώνιο του παραλληλογράμμου.

Έστω τώρα δύο πεπερασμένου μήκους παράλληλα ευθύγραμμα στοιχεία $[Ap]$ και $[Bq]$ τα οποία έχουν την ίδια κατεύθυνση, όπου A, B είναι απλά σημεία και p, q είναι παράλληλα διανύσματα για τα οποία ισχύει $q = \alpha p$, με α θετικό βαθμωτό μέγεθος. Τότε

$$\begin{aligned}
[Ap] + [Bq] =& [Ap] + [B \cdot \alpha p] \\
=& [Ap] + [\alpha B \cdot p] \\
=& [(A + \alpha B)p] \\
=& [(1 + \alpha)S \cdot p] \\
=& [S \cdot (1 + \alpha)p] \\
=& [S(p + \alpha p)] = [S(p + q)],
\end{aligned}$$

όπου S είναι το βαρύκεντρο των σημείων A και αB. Συνεπώς, το άθροισμα δίνει ένα παράλληλο ως προς τα άλλα δύο ευθύγραμμα στοιχεία στοιχείο στο ίδιο επίπεδο, του οποίου το μήκος είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των δύο ευθύγραμμων στοιχείων και του οποίου η ευθεία βρίσκεται μεταξύ των ευθειών των δύο ευθύγραμμων στοιχείων και σε απόσταση από αυτές τις γραμμές όσο η αντίστροφη αναλογία των μηκών των δύο ευθύγραμμων στοιχείων.

Εάν τώρα αθροίσουμε δύο πεπερασμένου μήκους ευθύγραμμα στοιχεία, τα οποία έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και δεν έχουν το ίδιο μήκος, τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την αμέσως προηγούμενη περίπτωση και αντικαθιστώντας το α με το $-\alpha$, βρίσκουμε ότι το άθροισμα είναι ίσο με το ευθύγραμμο στοιχείο το οποίο έχει παράλληλη διεύθυνση με τα δύο διανύσματα και φορά όμοια με την φορά του μεγαλύτερου και του οποίου η ευθεία βρίσκεται έξω από τις ευθείες των δύο ευθύγραμμων στοιχείων, σε απόσταση από τα δύο ευθύγραμμα στοιχεία όσο ο αντίστροφος λόγος των μηκών τους.

Σχόλιο. Εάν τα δύο ευθύγραμμα στοιχεία έχουν το ίδιο μήκος και αντίθετες κατευθύνσεις τότε συνεπάγεται ότι

$$B - A = C - D$$

και θα έχουμε

$$[AB] + [CD] = [(B - A)(D - A)].$$

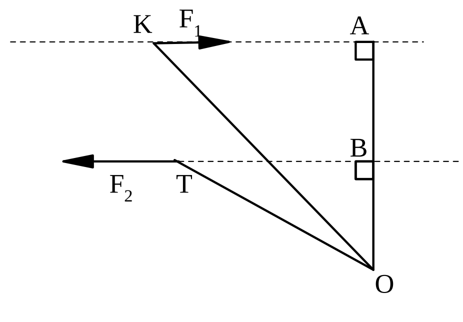
Συνεπώς, το άθροισμα θα είναι ίσο με το το γινόμενο δύο διανυσμάτων το οποίο θα έχει ίσο εμβαδόν και το ίδιο πρόσημο με το παραλληλόγραμμο ABC. Σε σύγχρονη ορολογία λέμε ότι δεν ορίζεται το άθροισμα των δύο διανυσμάτων σε αυτήν την περίπτωση και απλά λέμε ότι έχουμε ένα ζεύγος διανυσμάτων. Για να ερμηνεύσουμε την περίπτωση του ζεύγους, μέσω της Φυσικής, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται δύο συγγραμικές αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις. Τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Οι δυνάμεις αυτές να βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας, οπότε το σώμα θα παραμείνει ακίνητο.

- Οι δυνάμεις αυτές να βρίσκονται σε διαφορετικές παράλληλες ευθείες, οπότε το σώμα θα περιστραφεί αλλά δεν θα μεταφερθεί. Θα έχουμε λοιπόν την ύπαρξη ροπής.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τις δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ και O το κέντρο των ροπών, τότε η ροπή του ζεύγους θα έχει το ίδιο μέτρο με το μέτρο μιας εκ των δυνάμεων, πολλαπλασιασμένο με την απόσταση μεταξύ των φορέων τους, διότι

$$OA|\vec{F_1}| - OB|\vec{F_2}| = (OA - OB)|\vec{F_1}| = AB|\vec{F_1}|.$$



Συνεπώς δεν εξαρτάται από το κέντρο των ροπών και επομένως η ροπή είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα του ζεύγους.

Επίσης, εάν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $P = [(B - A)(D - A)]$ τότε

$$\begin{aligned}[DC] =& [AB] - P \\ =& [AB] + [(A - B)(D - A)],\end{aligned}$$

δηλαδή, το άθροισμα ενός πεπερασμένου μήκους ευθύγραμμου στοιχείου και ενός συνδυαστικού γινομένου δύο διανυσμάτων δίνει ένα ευθύγραμμο στοιχείο.

Με ανάλογο τρόπο προσδιορίζει τα διάφορα μεγέθη τα οποία προκύπτουν από την άθροιση συγκεκριμένων περιπτώσεων επίπεδων στοιχείων.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο πεπερασμένου μέτρου επίπεδα στοιχεία τα οποία τέμνονται σε μια ευθεία και έστω A και B δύο σημεία αυτής της ευθείας. Επιπρόσθετα, c και d είναι δύο διανύσματα τέτοια ώστε τα επίπεδα στοιχεία τα οποία θα προστεθούν να είναι ίσα με $[ABc]$ και $[ABd]$. Τότε

$$[ABc] + [ABd] = [AB(c + d)].$$

Συνεπώς, το άθροισμα αναπαρίσταται από ένα παραλληλόγραμμο στο οποίο το AB είναι η βάση του και $c + d$ είναι η άλλη του πλευρά.

Όσον αφορά το άθροισμα δύο παράλληλων και με ίδιο πρόσημο επίπεδων στοιχείων (των οποίων τα εμβαδά είναι πεπερασμένου μέτρου αλλά δεν είναι ίσα) προκύπτει ένα παράλληλο και με το ίδιο πρόσημο επίπεδο στοιχείο του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο επίπεδων στοιχείων και του οποίου το επίπεδο βρίσκεται μεταξύ εκείνων των επίπεδων στοιχείων και σε απόσταση από αυτά όσο η αντίστροφη αναλογία των εμβαδών τους.

3.7.5 Εμβαδομετρικός και στερεομετρικός πολλαπλασιασμός

Με τον όρο εμβαδομετρικό και στερεομετρικό πολλαπλασιασμό ο Grassmann εννοεί τον σχετικό πολλαπλασιασμό στο επίπεδο (ως ένα χωρίο διάστασης 3) και στον χώρο (ως ένα χωρίο διάστασης 4) αντίστοιχα. Δηλαδή, αναφέρεται σε γινόμενα τα οποία είναι είτε εξωτερικά, εάν το άθροισμα των βαθμίδων των παραγόντων του γινομένου δεν υπερέχει της διάστασης του χωρίου, είτε παλινδρομικό εάν το άθροισμα αυτό υπερέχει της διάστασης του διανυσματικού χωρίου. Τις έννοιες του εξωτερικού και του παλινδρομικού γινομένου μπορούμε να τις ταυτίσουμε γεωμετρικά με τις έννοιες της ''ένωσης'' και της ''τομής'' των μεγεθών τα οποία πολλαπλασιάζονται. Η ''ένωση'' μεγεθών είναι ένα μέγεθος το οποίο προσδιορίζεται γεωμετρικά από το μέγεθος το οποίο σχηματίζουν μαζί, ενώ η ''τομή'' είναι το κοινό τους μέγεθος [Br].

Εμβαδομετρικά γινόμενα

Το εμβαδομετρικό γινόμενο δύο ευθύγραμμων στοιχείων $[AB]$ και $[AC]$, των οποίων οι ευθείες τέμνονται σε μια πεπερασμένη απόσταση, είναι το σημείο του οποίου η θέση είναι το σημείο τομής A εκείνων των ευθειών, και του οποίου ο συντελεστής εάν A, B, C είναι τρία απλά σημεία, είναι ίσος με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ABC, δηλαδή,

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Σημείωση. Εφόσον το επίπεδο έχει διάσταση 3 και το συνδυαστικό γινόμενο ABC είναι ένα μέγεθος βαθμίδας 3 τότε το $[ABC]$ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Δηλαδή, το γινόμενο των δύο ευθυγράμμων στοιχείων είναι είτε ένα απλό είτε ένα πολλαπλό σημείο.

Εάν τα δύο ευθύγραμμα στοιχεία, έστω $[AB], [CD]$ είναι μεταξύ τους παράλληλα, τότε τα διανύσματα $A - B, C - D$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς, εάν $C - D = \alpha(A - B)$, τότε

$$\begin{aligned}
[AB \cdot CD] =& [(A-B)B \cdot (C-D)D] \\
=& \alpha[(A-B)B \cdot (A-B)D] \\
=& \alpha[(A-B)BD](A-B) \\
=& [(C-D)BD](A-B) \\
=& [CBD](A-B) \\
=& [BCD](B-A).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, το γινόμενο δύο παράλληλων ευθύγραμμων στοιχείων είναι ίσο με ένα διάνυσμα παράλληλο στο ευθύγραμμο τμήμα AB και σχετίζεται με το AB όπως το $[BCD]$ με το 1.

Το εμβαδομετρικό γινόμενο τριών ευθύγραμμων στοιχείων, τα οποία σχηματίζουν ένα τρίγωνο του οποίου είναι πλευρές, είναι ίσο με τέσσερις φορές το τετράγωνο του εμβαδού του τριγώνου αυτού.

Τέλος, το εμβαδομετρικό γινόμενο δύο μεγεθών είτε πρώτης είτε δεύτερης βαθμίδας είναι ίσο με το μηδέν εάν το ένα μέγεθος εμπεριέχεται στο άλλο, και συγκεκριμένα:

- για δύο σημεία συνεπάγεται ότι συμπίπτουν,

- για δύο ευθύγραμμα στοιχεία συνεπάγεται ότι οι ευθείες τους συμπίπτουν και

- για ένα σημείο και ένα ευθύγραμμο στοιχείο συνεπάγεται ότι το σημείο εμπεριέχεται στην ευθεία του ευθύγραμμου στοιχείου.

Στερεομετρικά γινόμενα

Το στερεομετρικό γινόμενο δύο επίπεδων στοιχείων $[ABC]$ και $[ABD]$, των οποίων τα επίπεδα τέμνονται σε μια πεπερασμένη απόσταση, είναι ίσο με ένα ευθύγραμμο στοιχείο επί της ευθείας που τέμνονται τα δύο επίπεδα στοιχεία, δηλαδή,

$$[ABC \cdot ABD] = [ABCD][AB] = \alpha[AB],$$

όπου α ένα είναι βαθμωτό μέγεθος.

Εάν τα επίπεδα των επίπεδων στοιχείων $[ABC]$ και $[DEF]$ είναι μεταξύ τους παράλληλα, τότε το γινόμενο τους είναι ένα γινόμενο δύο διανυσμάτων τα οποία είναι παράλληλα σε αυτό το επίπεδο και εάν τα A, B, C, D, E, F είναι απλά σημεία, τότε το εμβαδόν του επίπεδου στοιχείου σχετίζεται με το επίπεδο στοιχείο $[ABC]$ όπως το παραλληλεπίπεδο $[ADEF]$ με το 1.

Το στερεομετρικό γινόμενο δύο ευθύγραμμων στοιχείων $[AB]$ και $[CD]$, εάν τα σημεία A, B, C, D είναι απλά σημεία, είναι ίσο με το παραλληλεπίπεδο $ABCD$.

Τέλος, το στερεομετρικό γινόμενο τριών επίπεδων στοιχείων $[ABC]$, $[ABD]$, $[ACD]$, τα οποία τέμνονται σε ένα σημείο A το οποίο βρίσκεται σε πεπερασμένη απόσταση, είναι ένα πολλαπλό σημείο του οποίου η θέση είναι η θέση του σημείου A, και εάν τα A, B, C, D είναι απλά σημεία τα οποία είναι κορυφές ενός τετράεδρου, τότε ο συντελεστής που ανήκει σε αυτό το σημείο είναι ίσος με το τετράγωνο του όγκου του παραλληλεπιπέδου $ABCD$. Διότι, έστω $[ABCD] = \alpha$ και $B_1 = B : \alpha$. Τότε $[AB_1CD] = 1$, οπότε

$$[AB_1C \cdot AB_1D \cdot ACD] = A,$$

συνεπώς

$$[ABC \cdot ABD \cdot ACD] = \alpha^2 A = [ABCD]^2 A.$$

Ο Grassmann επιχείρησε να εκφράσει εξισώσεις ποικίλων γεωμετρικών τόπων με όρους της θεωρίας που ήδη ανέπτυξε. Όπως όμως αναφέρει και ο Kannenberg [Gr, σχ.], ο Grassmann δεν έβγαλε αξιόλογα γεωμετρικά αποτελέσματα. Ωστόσο, θα δώσουμε ένα μικρό δείγμα του έργου του που στηρίζεται σε αυτήν την προσπάθεια.

Καταρχήν, συνοψίζει τις γραμμικές εξαρτήσεις ποικίλων μεγεθών διαφόρων βαθμίδων σε μορφή εξισώσεων εμβαδομετρικών και στερεομετρικών γινομένων τα οποία είναι ίσα με το μηδέν. Για παράδειγμα, αναφέρει μεταξύ άλλων και τα ακόλουθα:

- η εξίσωση ενός σημείου x το οποίο βρίσκεται επί της ευθείας που περνάει από τα σημεία a, b είναι η εξής

$$[xab] = 0,$$

- η εξίσωση μιας ευθείας X, η οποία περνάει από το σημείο τομής δύο ευθειών A, B και βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτές είναι η εξής

$$[XAB] = 0,$$

όπου το $[XAB]=0$ είναι ένα εμβαδομετρικό γινόμενο.

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε ένα συγκεκριμένο θεωρήμα ενός εμβαδομετρικού γινομένου και παρόμοιο τρόπο σκέψης ακολουθεί για τα στερεομετρικά γινόμενα. Παραθέτει και αποδεικνύει λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα [Gr, §309]:

Θεώρημα 3.1. *Εάν $P_{n,x}$ είναι ένα εμβαδομετρικό γινόμενο 0-βαθμίδας το οποίο περιέχει το μεταβλητό σημείο x, n φορές, και εκτός από αυτό το σημείο υπάρχουν μόνο σταθερά σημεία και ευθείες ως παράγοντες του γινομένου, τότε*

$$P_{n,x}=0$$

είναι μια εξίσωση μιας αλγεβρικής καμπύλης n-τάξης με μεταβλητή το σημείο x, δηλαδή, το σημείο x κινείται κατά μήκος μιας αλγεβρικής καμπύλης n-τάξης.

Απόδειξη. Έστω a, b, c τρία αυθαίρετα σημεία του επιπέδου τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε, όλα τα σημεία του επιπέδου μπορούν να παραχθούν ως εξής:

$$x=x_1a+x_2b+x_3c,$$

όπου το x μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο. Αντικαθιστώντας την τιμή του x στην εξίσωση $P_{n,x}=0$ προκύπτει μια ομογενής εξίσωση n-τάξης των σημείων x_1, x_2, x_3, όλοι οι όροι της οποίας είναι της μορφής

$$Ax_1^q x_2^r x_3^s, \quad q+r+s=n.$$

Το γινόμενο A είναι ένα γινόμενο συγκεκριμένων δοσμένων ευθείων και σημείων και είναι ένα γινόμενο 0-βαθμίδας, λόγω υπόθεσης και λόγω του ότι δεν αλλάζουν οι βαθμίδες των παραγόντων. Παρατηρώντας τα x_1, x_2, x_3 ως συντεταγμένες, παρατηρούμε ότι η εξίσωση

$$P_{n,x}=0$$

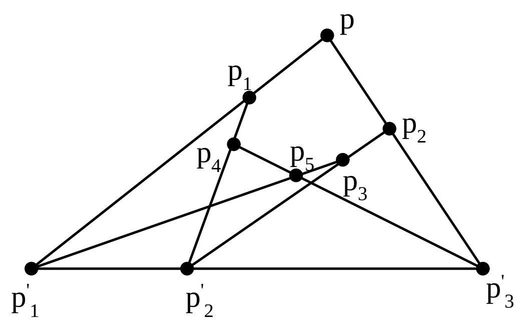
είναι μια εξίσωση μιας καμπύλης n-τάξης.

Για να γίνει πιο κατανοητό το παραπάνω θεώρημα θα δώσουμε ένα παράδειγμα, ως μια απόδειξη του θεωρήματος της εικόνας τριγώνων σε εξάγωνα του Pascal [Co3].

Έστω p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 πέντε δοσμένα σημεία και p ένα μεταβλήτο σημείο το οποίο κινείται έτσι ώστε να αφήσει το σημείο p_2' στο ευθύγραμμο στοιχείο

$[p_1^{'}p_3^{'}]$, όπου τα $p_1^{'}, p_2^{'}, p_3^{'}$ προσδιορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$p_1^{'} = [pp_1 \cdot p_3p_5]$$
$$p_2^{'} = [p_2p_3 \cdot p_1p_4]$$
$$p_3^{'} = [pp_2 \cdot p_4p_5].$$



Συνεπώς,

$$[(pp_1 \cdot p_3p_5)(p_2p_3 \cdot p_1p_4)(pp_2 \cdot p_4p_5)] = 0,$$

είναι η κωνική εξίσωση που περνάει από τα πέντε δοσμένα σημεία. Είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς το p και εάν αντικαταστήσουμε το p με οποιοδήποτε από τα δοσμένα σημεία p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ικανοποιείται η σχέση αυτή.

3.7.6 Το εσωτερικό γινόμενο

Αρχικά υποθέτει ότι για το επίπεδο το πρωτογενές σύστημα μονάδων για το εσωτερικό γινόμενο ποικίλων μεγεθών θα είναι δύο ορθογώνια και ίδιου μήκους διανύσματα $\{e_1, e_2\}$ ενώ για τον χώρο θα θεωρεί τρία ορθογώνια και ίδιου μήκους μεταξύ τους διανύσματα $\{e_1, e_2, e_3\}$. Επιπρόσθετα, το μήκος αυτών των διανυσμάτων θα θεωρείται η μονάδα μήκους, και τα γινόμενα $[e_1e_2]$ και $[e_1e_2e_3]$ θα θεωρούνται οι μονάδες εμβαδού και όγκου αντίστοιχα γεωμετρικών οντοτήτων.

Στην συνέχεια ο Grassmann αντιστοιχεί τις θεμελιώδεις έννοιες που όρισε στο γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο με γεωμετρικές έννοιες.

Πρώτα, δείχνει ότι έαν $a = x_1e_1 + x_2e_2$ είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα στο επίπεδο τότε, το συμπλήρωμα του μεγέθους a, το $|a$, είναι ορθογώνιο στο a, έχει το ίδιο μήκος με αυτό και βρίσκεται από την ίδια μεριά σε σχέση με το a όπως το e_1 με το e_2.

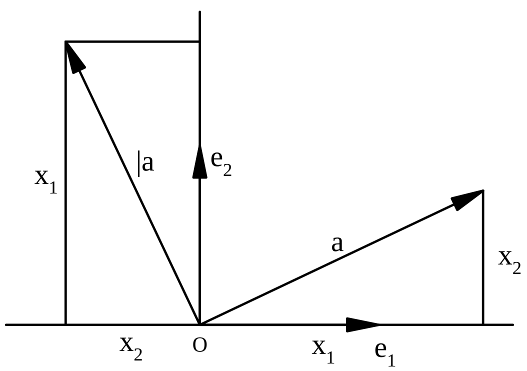
Σύμφωνα με τον ορισμό του συμπληρώματος ισχύει

$$|e_1 = e_2, \quad |e_2 = -e_1,$$

δηλαδή, το συμπλήρωμα του e_2 περιστρέφει το e_2 κατά την θετική κατεύθυνση (η οποία είναι αντίθετη από την φορά του ρολογιού) στο $-e_1$. Όμως ισχύει $[e_1|e_2] = [e_1(-e_1)] = 0$, οπότε τα διανύσματα e_1, e_2 είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Συνεπώς, το διάνυσμα

$$|a = x_1|e_1 + x_2|e_2 = x_1e_2 - x_2e_1,$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα a.



Έτσι, το συμπλήρωμα ενός διανύσματος περιστρέφει το διάνυσμα κατά 90^o σε θετική κατεύθυνση.

Επίσης, αποδεικνύει ότι η έννοια του μήκους αντιστοιχεί με την έννοια της αριθμητικής τιμής. Διότι, η αριθμητική τιμή του μεγέθους a είναι ίση με την θετική τετραγωνική ρίζα του γινομένου $[a|a]$. Το γινόμενο $[a|a]$ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο του οποίου η πρώτη πλευρά είναι του ίδιου μήκους και κατεύθυνσης με το a, και του οποίου η δεύτερη πλευρά είναι ίση με το a. Αυτό το παραλληλόγραμμο σύμφωνα με τα παραπάνω είναι ένα τετράγωνο το οποίο έχει το ίδιο πρόσημο με το $[e_1e_2]$. Τώρα εάν το μήκος του a είναι ίσο με α (θεωρώντας το μήκος του e_1 ως μονάδα), τότε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το a είναι ίσο με α^2 και του οποίου η θετική τετραγωνική ρίζα είναι το α, δηλαδή, $\sqrt{[a|a]} = \alpha$, και συνεπώς είναι η αριθμητική τιμή του μήκους.

Προφανώς, η έννοια της ορθογωνιότητας που όρισε ο Grassmann συμπίπτει με την έννοια της ορθογωνιότητας δύο γεωμετρικών μεγεθών διότι δύο διανύσματα είναι ορθογώνια εάν $[a|b] = 0$, δηλαδή εάν το a είναι παράλληλο στο $|b$ και εφόσον το b είναι ορθογώνιο στο $|b$ τότε και το a είναι γεωμετρικά ορθογώνιο στο b.

Τέλος, συγκρίνοντας τα όσα αναφέραμε στο κεφάλαιο του εσωτερικού γινομένου για τους κυκλικούς μετασχηματισμούς, το σύστημα το οποίο έχει μονάδες τις e_1, e_2 μετασχηματίζεται με κυκλικούς μετασχηματισμούς στο σύστημα που έχει ως μονάδες τα μεγέθη $a, |a$, με την προυπόθεση ότι $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Συνεπώς, ένας κυκλικός μετασχηματισμός στρέφει κάθε μια από τις μονάδες υπό την ίδια γωνία και υπό την ίδια κατεύθυνση.

Καταλήγει λοιπόν στο συμπέρασμα ότι εάν a, b είναι δύο οποιαδήποτε διανύσματα, η σχέση

$$[a|b] = 0$$

είναι η συνθήκη για να είναι αυτά τα δύο διανύσματα ορθογώνια το ένα στο άλλο.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τι συμβαίνει στον χώρο.

Έστω e_1, e_2, e_3 τρία διανύσματα τα οποία αποτελούν ένα πρωτογενές ορθογώνιο σύστημα διάστασης 3. Από τον ορισμό του ορθογώνιου συστήματος έχουμε

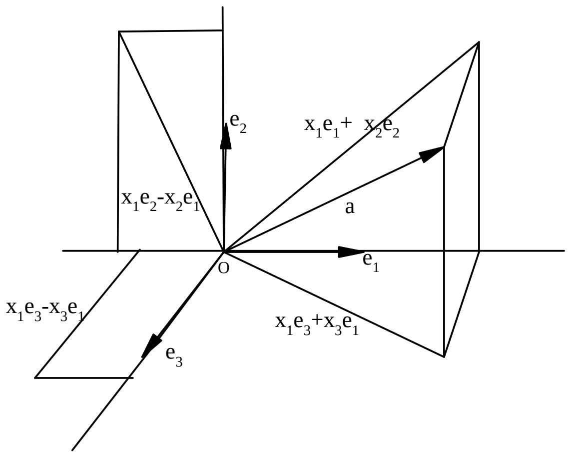
$$[e_1|e_2] = 0, \quad [e_1|e_3] = 0, \quad [e_2|e_3] = 0.$$

Επίσης, από τον ορισμό του συμπληρώματος έχουμε

$$|e_1 = [e_2e_3], \quad |e_2 = [e_3e_1], \quad |e_3 = [e_3e_3]$$

και

$$\|e_1 = e_1, \quad \|e_2 = e_2, \quad \|e_3 = e_3.$$



Συμπεραίνει λοιπόν ότι το συμπλήρωμα ενός διανύσματος $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ στον χώρο είναι ίσο με ένα επίπεδο στοιχείο του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο σε αυτό το διάνυσμα, διότι

$$\begin{aligned}|a &= x_1|e_1 + x_2|e_2 + x_3|e_3 \\ &= x_1[e_2e_3] + x_2[e_3e_1] + x_3[e_1e_2] \\ &= \frac{1}{x_1}[(x_1e_2 - x_2e_1)(x_1e_3 - x_3e_1)].\end{aligned}$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ίσο με το επίπεδο τμήμα του οποίου οι δύο πλευρές είναι οι $x_1e_2 - x_2e_1,\ x_1e_3 - x_3e_1$. Εφόσον

$$[e_1|e_2] = 0, \quad [e_1|e_3] = 0, \quad [e_2|e_3] = 0$$

ισχύει

$$[(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)|(x_1e_2 - x_2e_1)] = 0$$

και

$$[(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)|(x_1e_3 - x_3e_1)] = 0$$

συνεπάγεται ότι το διάνυσμα a είναι ορθογώνιο σε κάθε ένα από αυτά τα διανύσματα και έτσι είναι ορθογώνιο και στο επίπεδο τους. Συνεπώς, το συμπλήρωμα ενός διανύσματος είναι ένα επίπεδο τμήμα ορθογώνιο σε αυτό.

Βιβλιογραφία

[AW] Steven C. Althoen and John F. Weidner: *Real Division Algebras and Dickson's Construction*, The American Mathematical Monthly, vol. 85, No. 5. (May, 1978), pp. 368-371.

[Aus] Hermann Grassmann: *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form*, Berlin: Enslin, 1862, or [53, 2:1-383].

[Br] John Browne: *Grassmann Algebra*, Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia January 2001.

[CD] Arkadii Slinko: *1, 2, 4, 8, ... What comes next*;, Extracta Mathematicae, 19 (2004), 155-161.

[Co1] Jos.V.Collins: *An Elementary Exposition of Grassmann's "Ausdehnungslehre" or Theory of Extension*, The American Mathematical Monthly, Vol. 7, No. 2. (Feb., 1900), pp. 31-35.

[Co2] Jos.V.Collins: *An Elementary Exposition of Grassmann's "Ausdehnungslehre" or Theory of Extension*, The American Mathematical Monthly, Vol. 7, No. 10. (Oct., 1900), pp. 207-214.

[Co3] Jos.V.Collins: *An Elementary Exposition of Grassmann's "Ausdehnungslehre" or Theory of Extension*, The American Mathematical Monthly, Vol. 7, No. 8/9. (Aug.-Sep., 1900), pp. 181-187.

[Cr] Homer V. Craig: *Vector Analysis*, Mathematics Magazine, Vol. 25, No. 2. (Nov.-Dec., 1951), pp. 67-86.

[CRC] Eric W. Weisstein: *CRC Coincise Encyclopedia of Mathematics.*

[Cr] Michael J.Crowe: *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame University Press, 1967.

[Do1] Jean-Luc Dorier: *A General Outline of the Genesis of the Vector Space Theory*, Historia Mathematica 22(1995), 227-261.

[Do2] Jean-Luc Dorier: *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers 2000.

[EDM] Kiyosi Itô: *Encyclopedic Dictionary of Mathemetics*, by the Mathematical Society of Japan.

[FS1] Desmond Fearnley-Sander: *Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra*, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10. (Dec., 1979), pp. 809-817.

[FS2] Desmond Fearnley-Sander: *Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra*, The American Mathematical Monthly, Vol.89, No.3.(Mar., 1982), pp. 161-166.

[Ge] Πάρις Πάμφιλος: *Γεωμετρία*, Σημειώσεις Πάρι Πάμφιλου, Επίκουρου Καθ. Παν. Κρήτης.

[Gr] Hermann Grassmann: *Extension Theory*, American Mathematial Society, 2000.

[Ham1] William Rowan Hamilton: *Copy of a Letter from Sir William R. Hamilton to John T. Graves*, Edited for Philosophical Magazine, 3rd series, 25 (1844), pp. 489-95, by David R. Wilkins 1999.

[Ham2] William Rowan Hamilton: *On a New Species of Imaginary Theory Connected with a Theory of Quaternions*, Edited for the Royal Irish Academy, 2 (1844), pp. 424-434, by David R. Wilkins 1999.

[Ham3] William Rowan Hamilton: *On Quaternions, or On a New System of Imagineries in Algebra*, Edited for Philosophical Magazine, (1844-1850) by David R. Wilkins 2000.

[Ham4] William Rowan Hamilton: *On Quaternions*, Edited for Proceedings of the Royal Irish Academy, vol.3 (1847), pp. 1-16, by David R. Wilkins 1999.

[Ham5] William Rowan Hamilton: *Lectures On Quaternions*, Edited for the Royal Irish Academy (1848), by Hodges and Smith, Dublin 1853.

[He] David Hestenes: *Grassmann's Vision*, In: Hermann Gunther Grasmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, 1996 (Gert Schubring, Ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston 191-201.

[Hyde] Edward W. Hyde: *Grassmann's Space Analysis*, Mathematical Monographs, edited by Mansfield Merriman and Robert S.Woodward (Jan., 1906 fourth edition).

[Lewis] Albert C. Lewis: *H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik*, Annals of Science, 34 (1977), 103-162.

[Moore] Gregory H. Moore: *The Axiomatization of LInear Algebra: 1875-1940*, Historia Mathematica, 22 (1995), 262-303.

[Ne] Herman Erlichson's: *Passage to the Limit in Proposition 1, Book 1, of Newton's Principia*, University of Western Ontario 1999.

[Pe] George Peacock: *A Treatise on Algebra, 1830.*

[Sh] Moshe Shoham: *On Grassmann's Products and Clifford's Dual Unit.*

[Tr] William Chauvenet, A.M.: *Plane and Spherical Trigonometry*, Philadelphia: Lippincott, Grambo & Co, 1855.

[Tz] Constantinos Tzanakis, A.M.: *Rotations, complex numbers and quaternions*, Int. J. Math. Educ. Scl. Technol., 1995, vol. 26, No.1.

[VDW] B. L. Van Der Waerden: *Hamilton's Discovery of Quaternions*, Mathematics Magazine, vol. 49, No. 5, November 1976.

[Zi1] Alexander Ziwet: *A Brief Account of H. Grassmann's Geometrical Theories*, The Annals of Mathematics, Vol. 2, No. 1. (Sep., 1885), pp. 1-11.

[Zi2] Alexander Ziwet: *A Brief Account of H. Grassmann's Geometrical Theories*, The Annals of Mathematics, Vol. 2, No. 2. (Feb., 1886), pp. 25-34.