ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΜΩΝ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕΣΩ ΟΜΑΔΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΔΑΚΗΣ ΜΑΝΟΥΣΟΣ
Επιβλέπων καθηγητής: ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2006

Περίληψη

Θα παρουσιασθεί η βασική θεωρία των «γνήσιων δράσεων» (proper actions), κυρίως σε ό,τι αφορά την τοπική τους δομή (slices), με επεξεργασμένες και εν μέρει, πιο σύντομες αποδείξεις. Τα σχετικά συμπεράσματα θα εφαρμοσθούν για τον χαρακτηρισμό, μέσω δράσεων, των τοπολογικών, διαφορικών, ρημάνειων και συμπλεκτικών - χαμιλτονιανών δομών σε πλήρως κανονικούς χώρους, τοπικά συμπαγείς (ενδεχομένως μετρικοποιήσιμους) χώρους και σε πολλαπλότητες που διασπώνται σε καρτεσιανά γινόμενα ως προς τις θεωρούμενες δομές.

Εισαγωγή

Οι ομάδες μετασχηματισμών εισήχθησαν από τον F. Klein το 1872 και έδωσαν τα πρώτα ώριμα αποτελέσματα στη θεμελίωση της Ευκλείδειας και της Υπερβολικής Γεωμετρίας του Επιπέδου από τον D. Hilbert το 1902 με όρους που αναφέρονταν στον τρόπο που δρα, καθαρά τοπολογικά, μία ομάδα ομοιομορφισμών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ στο εαυτό του.

Η εργασία αυτή του Hilbert μπορεί να θεωρηθεί ως το σημείο εκκίνησης της Θεωρίας των Γνήσιων Δράσεων (proper actions), που περιλαμβάνει τις δράσεις των ομάδων ισομετριών τοπικά συμπαγών και συνεκτικών μετρικών χώρων στους αντίστοιχους χώρους. Ο πρώτος καθαρός ορισμός μιας γνήσιας δράσης δόθηκε το 1937 από τους D. Montgomery και L. Zippin. Στοιχεία των σχετικών ιδεών των ερευνητών αυτών έπαιξαν ρόλο στην λύση του "5ου προβλήματος" του Hilbert, δηλαδή για το ότι μία ομάδα Lie μπορεί να χαρακτηρισθεί από την τοπολογική της δομή.

Οι δράσεις συμπαγών ομάδων είναι (κατά τετριμμένο τρόπο) γνήσιες. Επειδή όλοι οι τοπικά συμπαγείς, συνεκτικοί και μετρικοποιήσιμοι χώροι δέχονται μία (επιτρεπτή) μετρική με συμπαγή ομάδα ισομετριών, κατά την προσπάθεια της ανάλυσης δομών μέσω ομάδων μετασχηματισμών δόθηκε έμφαση στις γνήσιες δράσεις μη συμπαγών ομάδων, κυρίως σε τοπικά συμπαγείς και συνεκτικούς χώρους.

Ένα από τα ποιό σημαντικά σχετικά αποτελέσματα αποδείχθηκε από τον R. Palais το 1961 και αναφερόταν στην ύπαρξη δίσκων (slices) σε γνήσιες δράσεις ομάδων Lie, που θα μας απασχολήσει διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2. Η ύπαρξη δίσκων βοηθάει στην κατανόηση της τοπικής δομής ενός χώρου με όρους τοπολογικών ομάδων μετασχηματισμών.

Μια δεύτερη κατηγορία συμπερασμάτων για την τοπολογική δομή χώρων αναφέρεται στο πλήθος των περάτων (ends) ενός τοπικά συμπαγούς και συνεκτικού τοπολογικού χώρου που δέχεται μία γνήσια δράση μιας μη συμπαγούς ομάδας. Το πρώτο περιεκτικό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή δόθηκε το 1972. Μία επέκταση του έγινε πρόσφατα. Η κατεύθυνση αυτή δεν θα μας απασχολήσει.

Τα πρώτα αποτελέσματα ανάλυσης ενός τοπολογικού χώρου ή μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας σε καρτεσιανό γινόμενο (στην αντίστοιχη κατηγορία) με όρους γνήσιων δράσεων δημοσιεύτηκαν το 1974. Οι σχετικές αποδείξεις θα απλοποιηθούν και θα συντομευθούν στο Κεφάλαιο 2. Τα ανάλογα αποτελέσματα στις δομές Riemann δημοσιεύτηκαν το 1976 και σε πλήρη γενικότητα το 1981 και θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 3. Μόλις στα μέσα της δεκαετίας του 1990 εμφανίστηκαν τα αντίστοιχα συμπεράσματα για τις Χαμιλτονιανές - Συμπλεκτικές δομές, που αποδίδονται στο Κεφάλαιο 4.

Το αντικείμενο όσων ακολουθούν είναι να παρουσιασθούν, με προσπάθεια συνεκτικότητας και αυτοδυναμίας, όσα έχουν γίνει μέχρι τώρα σε ό,τι αφορά τη διάσπαση δομών σε καρτεσιανά γινόμενα μέσω ομάδων μετασχηματισμών (γνήσιων δράσεων) στην τοπολογική, διαφορική, Ρημάνεια και Χαμιλτονιανή - Συμπλεκτική κατηγορία. Στις αποδείξεις υπάρχουν στοιχεία πρωτοτυπίας, κυρίως στις κατευθύνσεις της απλούστευσης (με όσο γίνεται πιο θεμελιακούς όρους στην αντίστοιχη κατηγορία), της συντόμευσης και της συνεκτικότητας των αποδεικτικών διαδικασιών στις τέσσερις κατηγορίες δράσεων που προαναφέρθηκαν. Η πρόθεση είναι να αναλύονται (κατά το δυνατό μόνο) εκείνα τα αποδεικτικά βήματα που δεν έχουν ήδη γίνει στις προηγούμενες (κατά την παρουσίαση) κατηγορίες, όπου η τοπολογική δομή θεωρείται θεμελιακή.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Βασικοί όροι, γνωστά συμπεράσματα που θα χρησιμοποιηθούν και συμβολισμοί

Γενική βιβλιογραφία για τοπολογικές δράσεις: [4], [5] και [10].

0.0 Τοπολογικές ομάδες μετασχηματισμών

Ορισμός 0.0.1 *Μία ομάδα G λέγεται* **τοπολογική** *ομάδα αν η G είναι τοπολογικός χώρος και οι απεικονίσεις*

$$G \times G \to G : \quad (g,h) \mapsto gh \text{ και } G \to G : \quad g \mapsto g^{-1}$$

είναι συνεχείς. Η G λέγεται **ομάδα Lie**, *αν έχει δομή διαφορίσιμης*[1] *πολλαπλότητας, ώστε οι παραπάνω απεικονίσεις να είναι λείες.*

Ορισμός 0.0.2 *Μία* **τοπολογική ομάδα μετασχηματισμών** *είναι μία τριάδα (G, X, φ), όπου G είναι μία τοπολογική ομάδα, X ένας τοπολογικός χώρος και $\varphi : G \times X \to X$ μία συνεχής απεικόνιση που ικανοποιεί τις σχέσεις:*

1. $\varphi(e,x) = x$ και
2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x)$ *για κάθε g_1, $g_2 \in G$ και $x \in X$.*

[1] Στο εξής οι όροι διαφορίσιμη και διαφορική θα σημαίνουν λεία.

Η τριάδα (G, X, φ) ονομάζεται και **δράση** της G στον X μέσω της φ. Αν δέν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα γράφουμε gx αντί $\varphi(g,x)$ για $x \in X$ και $g \in G$ και θα συμβολίζουμε με (G, X) την δράση της G στον X.

Παρατήρηση 0.0.3 Από τη απεικόνιση δράσης φ επάγονται οι απεικονίσεις

$$\varphi_g : X \to X \text{ με } \varphi_g(y) = \varphi(g,y) \text{ και } \varphi_x : G \to X \text{ με } \varphi_x(h) = \varphi(h,x).$$

Παρατηρούμε πως για κάθε $g \in G$ ισχύει $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ και πως η φ ορίζει τον ομομορφισμό ομάδων $\phi : G \to H(X)$ με $\phi(g) = \varphi_g$, όπου $H(X)$ είναι η ομάδα των ομοιομορφισμών του X.

Ορισμός 0.0.4 *Μία* **ισομεταβλητή (equivariant)** *απεικόνιση από μία δράση (G_1, X_1, φ_1) σε μία δράση (G_2, X_2, φ_2) είναι ένα ζευγάρι απεικονίσεων (h, f) με $h : G_1 \to G_2$ συνεχή ομομορφισμό ομάδων και $f : X_1 \to X_2$ συνεχή απεικόνιση, ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} G_1 \times X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"'] \\ G_2 \times X_2 \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd}$$

Στήν ειδική περίπτωση που $G_1 = G_2 = G$ και $h = id_G$, η f θα λέγεται G - **απεικόνιση**.

Το ζευγάρι (h, f) θα λέγεται **ισομεταβλητός ισομορφισμός**, *αν καθεμιά από τις απεικονίσεις h και f είναι ισομορφισμός στην αντίστοιχη κατηγορία.*

Ορισμός 0.0.5 *Έστω η δράση (G, X). Ένα υποσύνολο U του X θα λέγεται G -* **αναλλοίωτο** *σύνολο ή G -* **σύνολο**, *αν για κάθε $u \in U$ έπεται $gu \in U$ για κάθε $g \in G$. Κατ' αναλογίαν, ο χώρος X θα λέγεται G -* **χώρος**. **Τροχιά** *ενός $x \in X$ είναι το σύνολο $Gx = \{gx : g \in G\}$.*

Οι τροχιές είναι ουσιαστικά τα μικρότερα G - σύνολα ενός G - χώρου. Δύο τροχιές είτε είναι ξένες μεταξύ τους, είτε ταυτίζονται. Με αυτόν τον τρόπο επάγεται μία σχέση ισοδυναμίας στον G - χώρο X με κλάσεις ισοδυναμίας τις τροχιές: και σύμφωνα με την οποία δύο στοιχεία x, $y \in X$ είναι ισοδύναμα αν $Gx = Gy$, ή αλλιώς αν $gx = y$ για κάποιο $g \in G$. Ορίζεται έτσι ο χώρος - πηλίκο X/G και η απεικόνιση - πηλίκο $p : X \to X/G$. Ο X/G με την τοπολογία - πηλίκο ονομάζεται **χώρος των τροχιών** της δράσης.

Ορισμός 0.0.6 *Ένας G - χώρος X λέγεται* **ομογενής** *και η αντίστοιχη δράση* **μεταβατική**, *αν ισχύει $X = Gx$ για κάποιο (κάθε) $x \in X$.*

Λήμμα 0.0.7 *Για έναν G - χώρο X η κανονική απεικόνιση $p : X \to X/G$ είναι συνεχής και ανοικτή. Αν $(h, f) : (G, X, \varphi) \to (H, Y, \psi)$ είναι ισομεταβλητή, η επαγόμενη από την δράση απεικόνιση $\widetilde{f} : X/G \to Y/H$ είναι συνεχής.*

Παράδειγμα 0.0.8 Έστω H μία κλειστή υποομάδα μίας τοπολογικής ομάδας G. Η αριστερή δράση $H \times G \to G : \quad (h, g) \mapsto gh^{-1}$ επάγει τον χώρο των αριστερών συμπλόκων G/H που είναι και ο χώρος τροχιών (τροχιά gH του $g \in G$) αυτής της δράσης. Ο G/H γίνεται ομογενής G - χώρος με δράση

$$G \times G/H \to G/H : \quad (g_1, [g_2]_H) \mapsto [g_1 g_2]_H.$$

Ορισμός 0.0.19 *Για ένα σημείο x ενός G - χώρου X ορίζεται η* **ομάδα ισοτροπίας** *του $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Λέμε ότι η G δρα* **ελεύθερα** *στον X, αν ισχύει $G_x = \{e\}$ για κάθε $x \in X$.*

Η ομάδα ισοτροπίας έχει τις εξής χρήσιμες ιδιότητες:

Πρόταση 0.0.10 *Έστω x σημείο ένος G - χώρου X. Τότε*

1. *Η G_x είναι κλειστή υποομάδα της G.*

2. *$G_{gx} = gG_x g^{-1}$ για κάθε $g \in G$.*

3. *Η G - απεικόνιση $\widetilde{\varphi}_x : G/G_x \to Gx$ με τύπο $\widetilde{\varphi}_x([g]_{G_x}) = gx$ είναι συνεχής, 1-1 και επί, αλλά όχι πάντα ομοιομορφισμός.*

Πρόταση 0.0.11 *Έστω $(h, f) : (G, X, \varphi) \to (G', Y', \varphi')$ μία ισομεταβλητή απεικόνιση και $x \in X$. Τότε:*

1. *$f(Gx) \subseteq Gf'(x)$.*

2. *$h(G_x) \subseteq G_{h'(x)}$.*

3. *Αν η (h, f) είναι, επιπλέον, ισομορφισμός, τότε οι προηγούμενοι εγκλεισμοί είναι ισότητες.*

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Η **απεικόνιση εκτίμησης (evaluation map)** $\omega : H(X) \times X \to X$ με $\omega(f, x) = f(x)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2) του Ορισμού 0.0.2. Αν ο X είναι G - χώρος με δράση την φ, τότε, συμβολίζοντας με $\phi : G \to H(X)$ τον επαγόμενο ομομορφισμό, η απεικόνιση (ϕ, id_X) ικανοποιεί τη σχέση

$$id_X \circ \varphi = \omega \circ (\phi, id_X).$$

Τίθεται, λοιπόν, φυσιολογικά το ερώτημα: Υπάρχει τοπολογία στον χώρο $H(X)$ ώστε η ω και η ϕ να είναι συνεχείς απεικονίσεις; Όταν ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος, στην $H(X)$ ορίζεται η **συμπαγής - ανοικτή** τοπολογία που έχει ως υποβάση την οικογένεια των συνόλων $\{(K, U) : K \subseteq X$ συμπαγές και $U \subseteq X$ ανοικτό$\}$, όπου $(K, U) = \{f \in H(X) : f(K) \subseteq U\}$. Στη συνέχεια, θα θεωρούμε την τοπολογία αυτή στον $H(X)$. Αν, επιπλέον, ο X είναι τοπικά συνεκτικός χώρος, τότε η $H(X)$ αποκτά δομή τοπολογικής ομάδας με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η συμπαγής ανοικτή τοπολογία είναι η μικρότερη τοπολογία ως πρός την οποία η ω είναι συνεχής. Εφοδιάζοντας, λοιπόν, τον $H(X)$ με την συμπαγή - ανοικτή τοπολογία, ισχύει το εξής:

Πρόταση 0.0.12 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και G μία τοπολογική ομάδα. Τότε, η πράξη της σύνθεσης είναι συνεχής στον $H(X)$ εφοδιασμένο με την συμπαγή ανοικτή τοπολογία. Επιπλέον, για κάθε απεικόνιση δράσης $\varphi : G \times X \to X$, ο αντίστοιχος ομομορφισμός $\phi : G \to H(X)$ είναι συνεχής και η απεικόνιση $(\phi, id_X) : (G, X, \varphi) \to (\varphi(G), X, \omega|_{\varphi(G) \times X})$ είναι ισομεταβλητή. Αντίστροφα, κάθε συνεχής ομομορφισμός $\phi : G \to H(X)$ επάγει τη δράση $\varphi : G \times X \to X$, με τύπο $\varphi(g, x) = \phi(g)(x)$.*

Το υποσύνολο $I = \bigcap_{x \in X} G_x$ της G που σταθεροποιεί κάθε σημείο του G - χώρου X λέγεται **αδρανής πυρήνας** της δράσης και είναι κανονική υποομάδα της G, ως πυρήνας του ομομορφισμού $\phi : G \to H(X)$. Όταν $I = \{e\}$, η δράση λέγεται **πιστή (effective)** στον χώρο X. Αν ορίσουμε τη δράση της ομάδας G/I με τον φυσιολογικό τρόπο, προκύπτει πιστή η δράση $(G/I, X)$ στον X.

0.1 Οριακά σύνολα μίας δράσης

Ορισμός 0.1.1 *Έστω X ένας G - χώρος. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε τα L και J* **οριακά σύνολα***:*

$$L(x) = \{y \in X : \exists \{g_i\}_{i \in I} \text{ με } g_i \to \infty, \text{ και } g_i x \to y\},$$

$$J(x) = \{y \in X : \exists \{g_i\}_{i \in I} \text{ και } \{x_i\}_{i \in I} \text{ με } g_i \to \infty,\ x_i \to x \text{ με } g_i x_i \to y\},$$

όπου το σύμβολο $g_i \to \infty$ *σημαίνει ότι το δύκτιο δεν έχει σημείο συσσώρευσης στην ομάδα* G.

Πρόταση 0.1.2 *Έστω* X *ένας* G *χώρος. Τότε, για* $x \in X$ *ισχύουν τα εξής:*

1. *Τα σύνολα* $L(x)$ *και* $J(x)$ *είναι* G *- αναλλοίωτα υποσύνολα του* X. *Επιπλέον,* $L(gx) = L(x)$ *και* $J(gx) = J(x)$, *για κάθε* $g \in G$.
2. $\overline{Gx} = Gx \cup L(x)$.
3. *Το* $D(x) = Gx \cup J(x)$ *είναι κλειστό, για κάθε* $x \in X$.
4. *Η τροχιά* Gx *είναι κλειστή, αν και μόνο αν* $L(x) \subseteq Gx$. *Ο χώρος τροχιών* X/G *είναι Hausdorff, αν και μόνο αν* $J(x) \subseteq Gx$, *για κάθε* $x \in X$.
5. *Αν, επιπλέον, ο* X *είναι τοπικά συμπαγής, τότε τα σύνολα* $L(x)$ *και* $J(x)$ *είναι κλειστά.*

0.2 Γνήσιες δράσεις

Ορισμός 0.2.1 *Η δράση μίας τοπολογικής ομάδας* G *σε έναν χώρο* X *θα λέγεται* **γνήσια (proper)**, *αν ισχύει* $J(x) = \emptyset$, *για κάθε* $x \in X$. *Ο χώρος* X *θα λέγεται τότε* **γνήσιος** G *- χώρος.*

Ένας ισοδύναμος ορισμός είδικά για δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων απορρέει από την Πρόταση 0.2.8.

Πρόταση 0.2.2 *Έστω* X, *ένας γνήσιος* G *- χώρος. Τότε:*

1. *Κάθε ομάδα ισοτροπίας είναι συμπαγής.*
2. *Η απεικόνιση* $G/G_x \to Gx$ *με* $[g]_{G_x} \mapsto gx$ *είναι* G *ομοιομορφισμός για κάθε* $x \in X$.
3. *Ο* X/G *είναι χώρος Hausdorff.*
4. *Κάθε τροχιά είναι κλειστό υπόσύνολο του* X.

Έστω X ένας G - χώρος με απεικόνιση δράσης $\varphi : G \times X \to X$, V ένα ανοικτό υποσύνολο του και $U \subseteq X$. Το σύνολο

$$G(U, V) = \{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in U} (\varphi_x^{-1}(V^c))^c$$

είναι ανοικτό υποσύνολο της G, όπου $V^c := X \backslash V$. Επειδή η απεικόνιση $G \to G: \quad g \mapsto g^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός και ισχύει

$$G(U,V) = (G(V,U))^{-1} := \{g^{-1} : g \in G(U,V)\},$$

το $G(V,U)$ είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο τις G.

Πρόταση 0.2.3 *Μία δράση της ομάδας G στον χώρο X είναι γνήσια, αν και μόνο αν για κάθε δύο συμπαγή υποσύνολα K_1 και K_2 του X το σύνολο $G(K_1, K_2)$ είναι συμπαγές στην G και για κάθε περιοχή V του $G(K_1, K_2)$ στην G, υπάρχουν περιοχές U_1 και U_2, των K_1 και K_2 στην G, αντίστοιχα, με $G(U_1, U_2) \subseteq V$.*

Λήμμα 0.2.4 *Έστω X ένας γνήσιος G - χώρος και H, Y κλειστά υποσύνολα των G και X, αντίστοιχα. Αν τουλάχιστον ένα από αυτά, είναι συμπαγές, τότε το σύνολο $HY = \{hy : h \in H \text{ και } y \in Y\}$ είναι κλειστό στον X.*

Μία απεικόνιση $F : A \to B$ θα λέγεται **γνήσια**, αν αντιστρέφει τα συμπαγή σε συμπαγή ή ισοδύναμα, αν είναι κλειστή απεικόνιση και αντιστρέφει τα μονοσύνολα σε συμπαγή.

Πρόταση 0.2.5 *Έστω $(h, f) : (G_1, X_1) \to (G_2, X_2)$ μία ισομεταβλητή απεικόνιση.*

1. *Αν η $h : G_1 \to G_2$ είναι γνήσιος ομομορφισμός και η G_2 δρα γνήσια στον X_2, τότε και η G_1 δρα γνήσια στον X_1.*

2. *Αν οι απεικονίσεις h και f είναι επί, η f είναι γνήσια απεικόνιση και η G_1 δρα γνήσια στον X_1, τότε και η G_2 δρά γνήσια στον X_2.*

Πόρισμα 0.2.6

1. *Ο περιορισμός μίας γνήσιας δράσης (G, X) σε μία υποομάδα H της G είναι γνήσια δράση, αν και μόνο αν η H είναι κλειστή υποομάδα της G.*

2. *Έστω πως η G δρα στον X και έχει αδρανή πυρήνα I ένα συμπαγές σύνολο. Τότε, η επαγόμενη δράση $G/I \times X \to X : \quad (gI, x) \mapsto gx$, είναι γνήσια αν και μόνο αν η δράση της G στον X είναι γνήσια.*

3. *Έστω πως η G δρα στους χώρους X και Y. Έστω, επίσης, $f : X \to Y$ μία G - απεικόνιση. Αν ο Y είναι γνήσιος G χώρος, τότε και ο X είναι γνήσιος G - χώρος.*

Πρόταση 0.2.7 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής G - χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η δράση είναι γνήσια.*
2. *Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X το σύνολο $G(K, K)$ είναι συμπαγές.*
3. *Για κάθε δύο σημεία x και y του X, υπάρχουν περιοχές U και V του x και του y, αντίστοιχα, ώστε το $G(U, V)$ να είναι σχετικά συμπαγές.*

Πρόταση 0.2.8 *Μία τοπικά συμπαγής ομάδα G δρα γνήσια σε έναν χώρο X, αν και μόνο αν για κάθε δύο σημεία x, y του χώρου υπαρχουν περιοχές των x και y, αντίστοιχα, ώστε το $G(U, V)$ να είναι σχετικά συμπαγές.*

Ορισμός 0.2.9 *Η δράση μίας τοπολογικής ομάδας G σε έναν χώρο G λέγεται Palais -* **γνήσια** *αν, κάθε σημείο x έχει* **μικρή (small)** *περιοχή U, δηλαδή κάθε $y \in X$ έχει μία περιοχή V που εξαρτάται από το x και την U, ώστε το $G(U, V)$ να είναι σχετικά συμπαγές.*

Οι Palais - γνήσιες δράσεις έχουν «καλές» ιδιότητες:

Πρόταση 0.2.10 *Έστω G - χωρος X, όπου G τοπικά συμπαγής ομάδα.*

1. *Αν ο X είναι κανονικός χώρος, τότε η δράση της G στον X είναι Palais - γνήσια, αν και μόνο αν ο X/G είναι κανονικός χώρος.*
2. *Αν ο X είναι πλήρως κανονικός, τότε η G δρα Palais - γνήσια στον X, αν και μόνο αν ο X/G είναι πλήρως κανονικός.*

Πόρισμα 0.2.11 *Αν ο γνήσιος G - χώρος X είναι τοπικά συμπαγής, τότε ο X είναι Palais - γνήσιος χώρος και ο X/G είναι τοπικά συμπαγής.*

Παραδείγματα 0.2.12

1ο: Ασυνεχώς γνήσιες δράσεις και αυτομορφισμοί επικάλυψης

Ορισμός 0.2.13 *Μία δράση (X, G) δρα* **ασυνεχώς γνήσια (properly discontinous)** *αν για κάθε x, $y \in X$, υπάρχουν περιοχές U και V των X και y, αντίστοιχα, ώστε το σύνολο $G(U, V)$ να είναι πεπερασμένο.*

Από το παραπάνω, μία ομάδα G που δρα ασυνεχώς γνήσια επί ενός χώρου X είναι εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία.

Ορισμός 0.2.14 *Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $p : X \to Y$ μία συνεχής, επί απεικόνιση. Ένα υποσύνολο $A \subseteq Y$ θα λέγεται* **evenly covered**, *αν υπάρχει ένας μη κενός διακριτός τοπολογικός χώρος D και ένας ομοιομορφισμός $h : D \times A \to p^{-1}(A)$ ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} D \times A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & p^{-1}(A) \\ A \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό, όπου $\mathrm{pr} : D \times A \to A$ είναι η προβολή.

Η απεικόνιση $p : X \to Y$ λέγεται **απεικόνιση κάλυψης**, *αν κάθε σημείο του Y έχει μία evenly covered περιοχή. Δεδομένης μίας απεικόνισης επικάλυψης, ένας ομοιομορφισμός γ του X λέγεται* **αυτομορφισμός επικάλυψης (deck - transformation)** *αν $p \circ \gamma = p$. Οι αυτομορφισμοί επικάλυψης σχηματίζουν μία ομάδα Γ, η οποία δρα στον X μέσω της απεικόνισης εκτίμησης.*

Λήμμα 0.2.15 *Έστω $p : X \to Y$ μία απεικόνιση επικάλυψης και $f_1, f_2 : X \to X$ δύο απεικονίσεις με $p \circ f_1 = p \circ f_2$. Τότε, το σύνολο $B = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$ είναι ανοικτό και κλειστό στον X.*

Πρόταση 0.2.16 *Έστω $p : X \to Y$ μία απεικόνιση επικάλυψης, όπου ο X είναι κατα τόξα συνεκτικός και και τοπικά συνεκτικός χώρος. Τότε, η ομάδα των αυτομορφισμών Γ δρα ασυνεχώς γνήσια και ελεύθερα στον X.*

Συνεπώς, αν εφοδιάσουμε την Γ με την διακριτή τοπολογία, τότε αυτή δρα γνήσια στον X ως τοπικά συμπαγής ομάδα. Ισχύει κάτι γενικότερο:

Πρόταση 0.2.17 *Έστω G μία ομάδα που δρα ασυνεχώς γνήσια στον τοπολογικό χώρο X.*

1. *Κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία G_x - περιοχή U με $G(U,U) = G_x$.*

2. *Για κάθε τέτοια περιοχή U, η κανονική απεικόνιση $p : X \to X/G$ επάγει ομοιομορφισμό $U/G_x \to p(U)$.*

3. *Αν, επιπροσθέτως, η δράση είναι ελεύθερη, τότε η p είναι απεικόνιση επικάλυψης και η G δρα στον X μέσω αυτομορφισμών κάλυψης.*

2ο: Ομάδες ισομετριών

Η ομάδα των ισομετριών ένος τοπικά συμπαγούς μετρικοποιήσιμου χώρου δρα γνήσια στον χώρο μέσω της απεικόνισης εκτίμησης, όπως θα αποδειχθεί στην Πρόταση 1.0.8. Ειδικότερα, μία πολλαπλότητα Riemann είναι γνήσιος G - χώρος, όπου G η ομάδα των ισομετριών της.

3ο: Ομογενείς χώροι

Έστω G τοπολογική ομάδα και K συμπαγής υποομάδα της. Θεωρώντας την αριστερή δράση $K \times G \to G: \quad (k,g) \mapsto gk^{-1}$, η K δρα γνήσια στην G, ως συμπαγής ομάδα. Στον χώρο G/K ορίζεται η δράση $G \times G/K \to G/K$ της G με $(g,[h]_K) \mapsto [gh]_K$. Τότε, η κανονική απεικόνιση $p: G \to G/K$ είναι γνήσια απεικόνιση και, ως εκ τούτου, η παραπάνω δράση είναι γνήσια.

4ο: Έστω ένας G - χώρος S και H μία συμπαγής υποομάδα της G. Η δράση

$$H \times (G \times S) \to G \times S: \quad (h,(g,s)) \mapsto (gh^{-1}, gs)$$

είναι γνήσια και ο χώρος $G \times_H S = (G \times S)/H$ των τροχιών της λέγεται **twisted product** των G και S.

5ο: Για G μία τοπικά συμπαγή ομάδα ορίζεται το αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar. Με πλήρωση του χώρου $C_0(G)$ των συνεχών συναρτήσεων της G με μιγαδικές τιμές και συμπαγή φορέα, παίρνουμε τον χώρο $L^2(G)$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων της G. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\lambda: G \times L^2(G) \to L^2(G): \quad \lambda(g,f) = f_g, \text{ όπου } f_g(x) = f(g^{-1}x).$$

Τότε, η λ είναι δράση unitary μετασχηματισμών στον $L^2(G)$ και είναι γνήσια δράση στον υπόχωρο $P = L^2(G) \backslash \{0\}$. Έστω $|| \cdot ||_2$ η νόρμα του $L^2(G)$ και $B(f,\epsilon)$ η μπάλα κέντρου f και ακτίνας ϵ στον $L^2(G)$.

Για $f \in P$ και d, $\epsilon > 0$, θεωρούμε το σύνολο

$$M_f(d) = \{g \in G : gB(f, d \cdot ||f||_2) \cap B(f, d \cdot ||f||_2) \neq \emptyset\}.$$

Λόγω της κανονικότητας του μέτρου Haar στην G, υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subseteq G$ με

$$\left(\int_{G \backslash K} |f|^2 dg \right)^{1/2} < \epsilon.$$

Για τυχόν $u \in B(f, d \cdot ||f||_2)$, έχουμε $||u||_2 > (1-d)||f||_2$, οπότε

$$\begin{aligned}\left(\int_{G\setminus K} |u|^2 dg\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{G\setminus K} |u-f|^2 dg\right)^{1/2} + \left(\int_{G\setminus K} |f|^2 dg\right)^{1/2} \\ &\leq d \cdot ||f||_2 + \epsilon.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_K |u|^2 dg = \int_G |u|^2 dg - \int_{G\setminus K} |u|^2 dg > (1-d)^2 \cdot ||f||_2^2 - (d \cdot ||f||_2 + \epsilon)^2.$$

Θα δείξουμε πως για $0 < d \leq 1/3$ και ϵ αρκετα μικρό, ισχύει $M_f(d) \subseteq K \cdot K^{-1}$, οπότε το $M_f(d)$ θα είναι σχετικά συμπαγές:

Έστω $g \notin K \cdot K^{-1}$ με $g \in M_f(d)$. Τότε $g^{-1}K \subseteq G\setminus K$ και θα υπάρχει $u \in B(f, d \cdot ||f||_2)$ με $gu \in B(f, d \cdot ||f||_2)$. Άρα

$$\begin{aligned}(1-d)^2 \cdot ||f||_2^2 - (d \cdot ||f||_2 + \epsilon)^2 &< \int_K |gu|^2 dg = \int_{g^{-1}K} |u|^2 dg \\ &\leq \int_{G\setminus K} |u|^2 dg \leq (d \cdot ||f||_2 + \epsilon)^2,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$d \in (-\infty, -\frac{||f||_2 + \sqrt{2}\epsilon}{(\sqrt{2}-1)||f||_2}) \cup (\frac{||f||_2 - \sqrt{2}\epsilon}{(1+\sqrt{2})||f||_2}, \infty),$$

που είναι άτοπο, όταν $0 < d \leq 1/3$ και το ϵ είναι αρκετά μικρό.

Για $f_1,\ f_2 \in L^2(G)$ ορίζουμε $V_{f_i} = B(f_i, \frac{1}{7}||f_i||_2)$, $i = 1, 2$. Θα δείξουμε πως το $T = G(V_{f_1}, V_{f_2})$ είναι σχετικά συμπαγές, ιδιότητα που είναι ισχυρότερη από την γνησιότητα κατά Palais για την δράση:

Για $T \neq \emptyset$ υπάρχει $g_1 \in T$ τέτοιο, ώστε

$$T = \{g \in G : g(V_{\lambda(g_1, f_1)}) \cap V_{f_2} \neq \emptyset\} \cdot g_1^{-1}.$$

Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε πως $V_{f_1} \cap V_{f_2} \neq \emptyset$ (αλλιώς θέτουμε $f_1' = \lambda(g_1, f_1)$). Υπάρχει, λοιπόν, $f \in V_{f_1} \cap V_{f_2}$. Τότε, όμως, $V_{f_1} \cup V_{f_2} \subseteq B(f, \frac{1}{3}||f||_2)$, οπότε

$$T \subseteq G(V_{f_1} \cup V_{f_2}, V_{f_1} \cup V_{f_2}) \subseteq M_f(\frac{1}{3})$$

και το T είναι σχετικά συμπαγές από το πρώτο μέρος της απόδειξης. $\square$

0.3 Θεμελιώδη σύνολα

Ορισμός 0.3.1 *Έστω G μία τοπολογική ομάδα που δρα σε έναν χώρο X. Ένα υποσύνολο F του X θα λέγεται* **θεμελιώδες σύνολο (fundamental set)** *του X, αν*

1. *$GF = X$*

2. *το F είναι μικρό σύνολο.*

Λήμμα 0.3.2 *Αν υπάρχει θεμελιώδες σύνολο σε έναν G - χώρο X, τότε η G είναι τοπικά συμπαγής και η δράση είναι Palais - γνήσια.*

Από την σχέση $G(U, F) = G(U, \overline{F})$ για U, $F \subseteq X$ προκύπτει πως, όταν το F είναι θεμελιώδες σύνολο, τότε και το $\overline{F}$ είναι θεμελιώδες σύνολο.

Λήμμα 0.3.3 *Έστω G μία τοπικά συμπαγής ομάδα που δρα γνήσια σε έναν χώρο X. Αν ο X/G έιναι παρασυμπαγής και A είναι μικρό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει ανοικτό θεμελιώδες σύνολο για την G στον X που περιέχει το A.*

Θεώρημα 0.3.4 *Έστω G μία τοπικά συμπαγής ομάδα που δρα γνήσια σε έναν χώρο X. Αν ο X/G είναι παρασυμπαγής, τότε ο X έχει θεμελιώδες σύνολο.*

Τα παραπάνω αναδεικνύουν σε σημαντική τη μελέτη της παρασυμπάγειας του χώρου των τροχιών.

Πρόταση 0.3.5 *Έστω G μία τοπικά συμπαγής ομάδα που δρα γνήσια σε έναν χώρο X. Αν κάποια από τις επόμενες συνθήκες ισχύει για τον X, τότε ο X/G είναι παρασυμπαγής.*

1. *Υπάρχει G - αναλλοίωτη μετρική στον X.*

2. *Ο X είναι τοπικά συμπαγής και σ - συμπαγής.*

3. *Ο X είναι παρασυμπαγής, τοπικά συμπαγής και η G είναι σ - συμπαγής.*

4. *Ο X είναι τοπικά συμπαγής και κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι ανοικτή και σ - συμπαγής. (Για παράδειγμα: ο X να είναι τοπικά συμπαγής, τοπικά συνεκτικός και παρασυμπαγής.)*

Παρατήρηση 0.3.6 Απο τα παραπάνω συμπεράσματα τίθεται φυσιολογικά το ερώτημα: αν ο X είναι ένας γνήσιος G - χώρος, τότε η παρασυμπάγεια του X συνεπάγεται την παρασυμπάγεια του χώρου των τροχιών X/G; Το παρακάτω παράδειγμα δίνει αρνητική απάντηση.

Παράδειγμα: Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^2$, ένα C^∞ πλήρες διανυσματικό πεδίο της μορφής $Y = f\frac{\partial}{\partial x}$, όπου $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^∞ φραγμένη, θετική συνάρτηση με σημεία μηδενισμού το σύνολο $\{(n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, όπου $L_n = \{(x, 1/n) : x \in (-\infty, n]\}$. Τότε η ομάδα $\mathbb{R}$ δρα γνήσια στον X μέσω του δυναμικού συστήματος από το διανυσματικό πεδίο Y. Ο χώρος των τροχιών $X/\mathbb{R}$ είναι ο $\mathbb{R}$ με τοπολογία που αποτελείται από τα ανοικτά σύνολα της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}$ με επιπλέον ανοικτό σύνολο το $\mathbb{R}\setminus\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Τα κλειστά σύνολα $\{0\}$ και $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν διαχωρίζονται σ' αυτή την τοπολογία, επομένως ο $X/\mathbb{R}$ δεν είναι πλήρως κανονικός χώρος και συνεπώς, από την Πρόταση 0.2.10, η δράση του $\mathbb{R}$ στον X δεν είναι Palais γνήσια. Άρα, από το Λήμμα 0.3.3, ο X δεν έχει θεμελιώδες σύνολο και από το Θεώρημα 0.3.4, ο $X/\mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι παρασυμπαγής χώρος. $\square$

Παραμένει, όμως, ανοικτό το ερώτημα, αν ο χώρος των τροχιών είναι παρασυμπαγής στην ειδική περίπτωση που η δράση είναι Palais - γνήσια.

Κεφάλαιο 1

Γνήσιες δράσεις και ισομετρίες στην Τοπολογία και τη Γεωμετρία Riemann

Γενική βιβλιογραφία για γνήσιες δράσεις: [4], [10], [12] και [13].

1.0 Γνήσιες και ισομετρικές δράσεις σε τοπικά συμπαγείς και συνεκτικούς μετρικούς χώρους

Θα θεωρούμε τοπικά συμπαγείς και συνεκτικούς χώρους. Ο χώρος των συνεχών απεικονίσεων του τοπικά συμπαγή και συνεκτικού χώρου X στον εαυτό του, $C(X,X)$, θα είναι εφοδιασμένος με την συμπαγή - ανοικτή τοπολογία και η ομάδα $I(X,d)$ θα είναι εφοδιασμένη με την τοπολογία της ως υποχώρου του $C(X,X)$. Θα συμβολίζουμε με $B(x,\epsilon)$ τη μπάλα ακτίνας $\epsilon > 0$ και κέντρου $x \in X$ και για κάθε σύνολο $A \subseteq X$ με $B(A,\epsilon)$ την ένωση όλων των ϵ - μπαλών με κέντρα τα σημεία του A.

Ορισμός 1.0.1 *Ένα υποσύνολο F του $C(X,X)$ θα λέγεται* **ισοσυνεχές (equicontinous)**, *αν για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(x,\epsilon) > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $y \in X$ με $d(x,y) < \delta$ και κάθε $f \in F$* να ισχύει *$d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Στα ισοσυνεχή υποσύνολα του $C(X,X)$ η συμπαγής ανοικτή τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Το σύνολο $I(X,d)$ είναι ισοσυνεχές, οπότε μπορούμε να το μελετήσουμε χρησιμοποιώντας την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Επειδή, ο X είναι μετρικός χώρος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες συναρτήσεων. Η συμπάγεια των ισοσυνεχών συνόλων χαρακτηρίζεται από το επόμενο

Θεώρημα 1.0.2 *(Ascoli-Arzela) Αν το σύνολο $F \subseteq C(X,X)$ είναι ισοσυνεχές και το σύνολο $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ είναι σχετικά συμπαγές για κάθε $x \in X$, τότε η κλειστότητα, $\overline{F}$, του F στον $C(X,X)$ είναι συμπαγές και ισοσυνεχές σύνολο.*

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα που θα δείξουμε, είναι η τοπική συμπάγεια της $I(X,d)$.

Πρόταση 1.0.3 *Η ομάδα $I(X,d)$ εφοδιασμένη με την συμπαγή - ανοικτή τοπολογία είναι τοπολογική ομάδα.*

Απόδειξη. Η σύνθεση είναι συνεχής διμελή πράξη στην $I(X,d)$ από το 0.0.12. Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $f_n \to f \in I(X,d)$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$d({f_n}^{-1}(x), f^{-1}(x)) = d(f(f^{-1})(x), f_n(f^{-1}(x))) \to 0,$$

οπότε ${f_n}^{-1} \to f^{-1}$ κατά σημείο. □

Λήμμα 1.0.4 *Έστω ένα σύνολο $F \subseteq I(X,d)$, και*

$$K(F) = \{x \in X : F(x) = \{f(x) : f \in F\} \text{ είναι σχετικά συμπαγές } \}.$$

Τότε, το $K(F)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X.

Παρατήρηση 1.0.5 Η βασική ιδέα της παρακάτω απόδειξης, είναι το γεγονός πως το κόμματι $F(x)$ της τροχιάς $I(X,d)(x)$ είναι συμπαγές οπότε, λόγω της τοπικής συμπάγειας του χώρου X, μπορούμε να το «φουσκώσουμε» σε μια σχετικά συμπαγή περιοχή του στον X.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι το $K(F)$ είναι ανοικτό χρησιμοποιώντας ένα απλό επιχείρημα συμπάγειας: Έστω $x \in X$ τέτοιο, ώστε το $\overline{F(x)}$ να είναι συμπαγές. Ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος, επομένως για κάθε $y \in \overline{F(x)}$ θα υπάρχει $\eta_y > 0$, ώστε το $B(y,\eta_y)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Τότε

$$\overline{F(x)} \subseteq \bigcup_{y \in \overline{F(x)}} B(y, \eta_y/2),$$

οπότε, λόγω συμπάγειας, θα υπάρχουν $\{y_i\}_{i=1}^k$ με $\overline{F(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \eta_{y_i}/2)$. Θέτοντας $\eta = \min\{\eta_{y_i}/2 : i = 1, \dots k\}$, έχουμε

$$B(F(x), \eta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \eta_{y_i}).$$

Άρα, το $B(F(x), \eta)$ θα είναι σχετικά συμπαγές.

Έστω, τώρα, $y \in B(x, \eta)$. Τότε $d(f(y), f(x)) = d(y, x) < \eta$ για κάθε $f \in F$, οπότε

$$F(y) \subseteq B(F(x), \eta),$$

επομένως και το $F(y)$ είναι σχετικά συμπαγές. Άρα $y \in K(F)$, απ' όπου έπεται $B(x, \eta) \subseteq K(F)$, δηλαδή ότι το $K(F)$ είναι ανοικτό.

Για να αποδείξουμε ότι είναι και κλειστό, θεωρούμε ένα σημείο συσσώρευσης $x \in K(F)$ και $\epsilon > 0$ με το $B(x, 3\epsilon)$ σχετικά συμπαγές. Για $y \in B(x, \epsilon) \cap K(F)$ έχουμε

$$\overline{F(y)} \subseteq \overline{F(B(x,\epsilon))} \subseteq B(F(B(x,\epsilon)), \epsilon) = F(B(x, 2\epsilon)) = \bigcup_{f \in F} B(f(x), 2\epsilon),$$

όπου οι δύο τελευταίες ισότητες ισχύουν διότι, αν $f \in F \subseteq I(X, d)$, τότε $f(B(x, \epsilon)) = B(f(x), \epsilon)$.

Λόγω της συμπάγειας του $\overline{F(y)}$, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $L \subseteq F$ με $\overline{F(y)} \subseteq L(B(x, 2\epsilon))$. Για τυχόν $f \in F$ υπάρχει $g \in L$ με $f(y) \in B(g(x), 2\epsilon)$, οπότε

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(x)) \\ &\leq d(x, y) + d(f(y), g(x)) < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Επομένως $F(x) \subseteq L(B(x, 3\epsilon))$, οπότε το $F(x)$ είναι σχετικά συμπαγές, δηλαδή $x \in K(F)$. □

Πρόταση 1.0.6 *Η ομάδα $I(X, d)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C(X, X)$.*

Απόδειξη. Έστω $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq I(X, d)$ μία ακολουθία, ώστε $f_n \to f$. Για κάθε x, $y \in X$ ισχύει

$$d(x, y) = d(f_n(x), f_n(y)) \to d(f(x), f(y)),$$

οπότε $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ και συνεπώς η f θα διατηρεί την μετρική d και θα είναι συνεχής. Μένει να δείξουμε πως η f είναι επί.

Έστω $F = \{{f_n}^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Από το προηγούμενο Λήμμα και λόγω της συνεκτικότητας του X, θα έχουμε $K(F) = X$, υπό την προϋπόθεση ότι $K(F) \neq \emptyset$, που αληθεύει: για τυχόν $x \in X$ ισχύει

$$d(x, {f_n}^{-1}(f(x))) = d(f_n(x), f(x)) \to 0.$$

Έστω V μία σχετικά συμπαγής περιοχή του x. Η ακολουθία $\{{f_n}^{-1}(f(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα περιέχεται τελικά στην V, οπότε το $F(f(x))$ θα είναι σχετικά συμπαγές, επομένως $f(x) \in K(F) \neq \emptyset$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$F(X) = K(F).$$

Έστω $y \in K(F)$. Εφόσον το $F(y)$ είναι σχετικά συμπαγές, μπορούμε να υποθέσουμε πως ${f_n}^{-1}(y) \to x$ (αλλιώς περνάμε σε υπακολουθία), για κάποιο $x \in X$. Επομένως

$$d(f_n(x), y) = d(x, {f_n}^{-1}(y)) \to 0,$$

οπότε $f_n(x) \to y$. Όμως $f_n(x) \to f(x)$, συνεπώς $f(x) = y$ και η f είναι επί. □

Θεώρημα 1.0.7 *Η ομάδα $I(X, d)$ είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πως υπάρχει σχετικά συμπαγής περιοχή της ταυτοτικής του X στην $I(X, d)$, οπότε θα έχουμε τελειώσει, λόγω της συνέχειας των μεταφορών στην $I(X, d)$.

Έστω $x \in X$ και V_x μία σχετικά συμπαγής περιοχή του x. Τότε, το σύνολο

$$I(X, d)(x, V_x) = \{g \in I(X, d) : g(x) \in V_x\}$$

είναι περιοχή της ταυτοτικής στην $I(X, d)$ (ισχύει γενικά σε κάθε συνεχή δράση), οπότε

$$I(X, d)(x, V_x)(x) \subseteq V_x,$$

επομένως $x \in K(I(X, d)(x, V_x)) \neq \emptyset$. Άρα, όπως προηγουμένως, έχουμε

$$K(I(X, d)(x, V_x)) = X.$$

Από αυτό και το Θεώρημα Ascoli-Arzela, το $I(X, d)(x, V_x))$ είναι σχετικά συμπαγές στον $C(X, X)$. Αφού η $I(X, d)$ είναι κλειστή στον $C(X, X)$, το $I(X, d)(x, V_x)$ θα είναι σχετικά συμπαγές και στην $I(X, d)$. □

Πρόταση 1.0.8 *Η $I(X,d)$ δρα γνήσια στον χώρο X.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Θεώρημα, η $I(X,d)$ είναι τοπικά συμπαγής, οπότε, σύμφωνα με τον ισοδύναμο ορισμό της γνησιότητας ειδικά για δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων, αρκεί για κάθε x, $y \in X$ να βρούμε αντίστοιχες περιοχές U_x, U_y ώστε το σύνολο

$$I(X,d)(U_x,U_y) = \{g \in I(X,d) : (gU_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$$

να είναι σχετικά συμπαγές στην $I(X,d)$.

Επιλέγουμε το ϵ έτσι ώστε το $B(y,2\epsilon)$ να είναι σχετικά συμπαγές και θέτουμε $U_x = B(x,\epsilon)$, $U_y = B(y,\epsilon)$. Για $g \in I(X,d)(U_x,U_y)$ και $z \in U_x$ με $g(z) \in U_y$ θα έχουμε

$$d(g(x),y) \leq d(g(x),g(z)) + d(g(z),y) = d(x,z) + d(g(z),y) < 2\epsilon,$$

οπότε

$$g \in F = \{h \in I(X,d) : h(x) \in B(y,2\epsilon)\},$$

συνεπώς

$$I(X,d)(U_x,U_y) \subseteq F.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι το F είναι σχετικά συμπαγές: Από τα αμέσως προηγούμενα, συνάγεται ότι $x \in K(F)$, αφού το $B(y,2\epsilon)$ είναι σχετικά συμπαγές, επομένως $K(F) = X$. Από το Λήμμα 1.0.4 και από το Θεώρημα Ascoli-Arzela, έπεται ότι το F θα είναι σχετικά συμπαγές στον $C(X,X)$. Άρα, λόγω της κλειστότητας της $I(X,d)$ στον $C(X,X)$, το $I(X,d)(U_x,U_y)$ θα είναι σχετικά συμπαγές στην $I(X,d)$. □

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει πως, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, μία ομάδα G που δρα σε έναν χώρο X μπορεί να είναι υποομάδα της ομάδας των ισομετριών του χώρου X εφοδιασμένου με μία μετρική συμβατή με την τοπολογία του, κάτι που αναδεικνύει τον ρόλο των ομάδων ισομετριών στην Θεωρία των Δράσεων.

Θέωρημα 1.0.9 *Έστω G μία τοπικά συμπαγής ομάδα η οποία δρα γνήσια σε έναν τοπικά συμπαγή, μετρικοποιήσιμο χώρο X με παρασυμπαγή χώρο τροχιών X/G. Τότε, υπάρχει, μετρική d συμβατή με την τοπολογία του χώρου, τέτοια, ώστε η G να είναι υποομάδα της $I(X,d)$, δηλαδή η d να είναι G -*

αναλλοίωτη.

Απόδειξη. Έστω ϕ η δράση της G στον χώρο X και $d^* : X \times X \to \mathbb{R}^+$ μία οποιαδήποτε μετρική συμβατή με την τοπολογία του χώρου. Από την 0.3.3, υπάρχει ανοικτό θεμελιώδες σύνολο F. Ορίζουμε την ψευδομετρική

$$d_1 : X \times X \to \mathbb{R}^+ : \quad d_1(x,y) = \inf\{d^*(x,y),\ d^*(x,F^c) + d^*(y,F^c)\},$$

για κάθε $x, y \in X$, η οποία είναι συνεχής στον $X \times X$ με την επαγόμενη τοπολογία - γινόμενο από την d^*, λόγω της σχέσης

$$|d_1(x,y) - d_1(x',y')| \leq d_1(x,x') + d_1(y,y') \leq d^*(x,x') + d^*(y,y').$$

Ο τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι φυσιολογικός και το F^c είναι κλειστό σύνολο στον X. Άρα

$$d(x,F^c) = 0 \Leftrightarrow x \in F^c \Rightarrow d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x, y \in F^c.$$

Έστω τώρα $x, y \in X$ με $x \neq y$. Η απεικόνιση

$$H_{(x,y)} : G \to \mathbb{R}^+ : \quad g \mapsto d_1(gx, gy),$$

είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι η $H_{(x,y)}$ έχει συμπαγή φορέα, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ολοκλήρωση (: μέτρο Haar) στην G.

Το F είναι θεμελιώδες σύνολο, οπότε υπάρχουν U_x, U_y περιοχές των x και y, αντίστοιχα, ώστε τα $K_x = G(U_x, \overline{F})$ και $K_y = G(U_y, \overline{F})$ να είναι σχετικά συμπαγή. Τότε

$$\operatorname{supp} H_{(u,v)} = \overline{\{g \in G : gu \in F \text{ ή } gv \in F\}} \subseteq \overline{G(U_x, F)} \cup \overline{G(U_y, F)},$$

για κάθε $(u,v) \in U_x \times U_y$. Συνεπώς η $H_{(x,y)}$ έχει συμπαγή φορέα.

Ορίζουμε τη ψευδομετρική

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ : \quad d(x,y) = \int_G d_1(gx, gy) dg,$$

για κάθε $x, y \in X$.

Η d είναι G - αναλλοίωτη, αφού το μέτρο Haar είναι αναλλοίωτο από τις μεταφορές στην G. Επίσης, η d είναι μετρική. Πράγματι, για $x,\ y \in X$ με $d(x,y) = 0$ το σύνολο

$$K = \{g \in G : H_{(x,y)}(g) \neq 0\} = G(x,F) \cup G(y,F) = {\phi_x}^{-1}(F) \cup {\phi_y}^{-1}(F)$$

έχει μηδενικό μέτρο και ταυτόχρονα θα είναι ανοικτό στην G. Άρα, θα πρέπει να ισχύει $K = \emptyset$. Όμως, αυτό αποκλείεται για $x \neq y$, αφού το F τέμνει κάθε τροχιά της G στον X ως θεμελιώδες σύνολο. Επομένως $x = y$, δηλαδή η d είναι μετρική. Μένει να δείξουμε πως η d είναι συμβατή με την προϋπάρχουσα τοπολογία του χώρου.

Έστω T_d, T_{d^*} οι τοπολογίες των d και d^*, αντίστοιχα και U_x, U_y περιοχές των x, y όπως προηγουμένως. Θεωρούμε στον $U_x \times U_y$ την τοπολογία γινόμενο που επάγεται από την $d^*|_{U_x \times U_y}$. Έστω

$$\{(u_i, v_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq U_x \times U_y \text{ με } (u_i, v_i) \to (u, v) \in U_x \times U_y.$$

Τότε, για κάθε $g \in G$ έχουμε

$$H_{(u_i,v_i)}(g) \to H_{(u,v)}(g), \text{ οπότε } H_{(u_i,v_i)} \to H_{(u,v)}$$

κατά σημείο στον $C(G, \mathbb{R})$. Επίσης, για κάθε $(w_1, w_2) \in U_x \times U_y$ ισχύει ότι $\operatorname{supp} H_{(w_1,w_2)} \subseteq K_x \cup K_y$, οπότε

$$|H_{(w_1,w_2)}(g)| \leq \max_{h \in K_x \cup K_y} |H_{(w_1,w_2)}(h)| < \infty,$$

δηλαδή $H_{(w_1,w_2)} \in L^1(G)$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγλισης για το μέτρο Haar της G προκύπτει

$$d(u_i, v_i) = \int_G d_1(gu_i, gv_i)dg \to \int_G d_1(gu, gv)dg = d(u, v).$$

Επομένως η $d|_{U_x \times U_y}$ είναι συνεχής στον $U_x \times U_y$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, η $d(x, \cdot) : U_x \to \mathbb{R}^+$ είναι συνεχής, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ με $B_{d^*}(x, \delta) \subseteq U_x$ και $d(x, y) < \epsilon$ για κάθε $z \in B_{d^*}(x, \delta)$. Άρα $B_{d^*}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$, δηλαδή $T_d \subseteq T_{d^*}$.

Μένει να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό: Έστω $\epsilon > 0$ και $x \in X$. Θέλουμε να υπάρχει $\delta > 0$ με $B_d(x, \delta) \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon)$. Το F είναι ανοικτό θεμελιώδες σύνολο, οπότε υπάρχει $g \in G$, ώστε $gx \in F$. Λόγω της συνέχειας της δράσης, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο, ώστε

$$B_{d^*}(gx, \delta_1) \subseteq F$$

και

$$g^{-1} B_{d^*}(gx, \delta_1) \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon).$$

Αν βρούμε $\delta > 0$ με $B_d(gx, \delta) \subseteq B_{d^*}(gx, \delta_1)$, τότε

$$B_d(x, \delta) = g^{-1} B_d(gx, \delta) \subseteq g^{-1} B_{d^*}(gx, \delta_1) \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon),$$

οπού η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή η d είναι G - αναλλοίωτη. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε εξ αρχής πως $x \in F$ και πως το $B_{d^*}(x, \epsilon)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F.

Μία περιοχή U του e θα λέγεται **συμμετρική** αν για κάθε $g \in U$ ισχύει $g^{-1} \in U$. Οι συμπαγείς και συμμετρικές περιοχές του e αποτελούν βάση περιοχών του. Λόγω της συνέχειας της δράσης, υπάρχει συμπαγής και συμμετρική περιοχή V_1 του e ώστε να ισχύει $V_1 x \subseteq B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon)$. Έστω $0 < r < \epsilon/3$. Πάλι λόγω της συνέχειας της δράσης, για κάθε $y \in B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon + r)$ υπάρχουν συμπαγής και συμμετρική περιοχή V_y του e και περιοχή W_y του $y \in X$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $V_y W_y \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon)$. Τότε

$$\overline{B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon)} \subseteq \bigcup_{y \in B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon + r)} W_y,$$

οπότε, λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $y_i \in B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon + r)$, $i = 1, \ldots, k$, με

$$\overline{B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} W_{y_i}.$$

Το $V_2 = \bigcap_{i=1}^{k} V_{y_i}$ είναι συμπαγής και συμμετρική περιοχή του e. Για $g \in V_2$ και $z \in B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon)$ υπάρχει $y_{i_\circ}$, $i_\circ \in \{1, \ldots, k\}$, τέτοιο, ώστε $z \in W_{y_{i_\circ}}$. Τότε

$$gz \in V_{y_{i_\circ}} W_{y_{i_\circ}} \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon),$$

οπότε

$$V_2 B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon) \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon).$$

Έστω, τώρα, $g \in V = V_1 \cap V_2$ και $y \notin B_{d^*}(x, \epsilon)$. Τότε, αν $d^*(gx, gy) < \epsilon/3$, θα έχουμε

$$d^*(x, gy) \leq d^*(x, gx) + d^*(gx, gy) \leq \frac{2}{3}\epsilon,$$

αφού $gx \in V_1$. Άρα

$$y = g^{-1}(gy) \in V_2 B_{d^*}(x, \frac{2}{3}\epsilon) \subseteq B_{d^*}(x, \epsilon),$$

που είναι άτοπο. Επομένως, για κάθε $g \in V$ και $y \notin B_{d^*}(x, \epsilon)$ θα ισχύει

$$d^*(gx, gy) > \epsilon/3.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως $\epsilon < d^*(x, F^c)$, αφου έχουμε υποθέσει ότι $B_{d^*}(x,\epsilon) \subseteq F$. Τότε, για κάθε $g \in V_1$ και $z \in F^c$ ισχύει

$$d^*(x,z) \leq d^*(x,gx) + d^*(gx,z),$$

δηλαδή

$$d^*(gx,z) \geq d^*(x,z) - d^*(x,gx) \geq d^*(x,F^c) - d^*(x,gx) \geq \frac{2}{3}\epsilon.$$

Άρα, για κάθε $g \in V_1$, $y \notin B_{d^*}(x,\epsilon)$ ισχύει $d^*(gx, F^c) \geq \frac{2}{3}\epsilon$, οπότε

$$d^*(gx,F^c) + d^*(gy,F^c) \geq \epsilon/3.$$

Από τις (1.1) και (1.2), προκύπτει ότι

$$d_1(gx,gy) \geq \epsilon/3,$$

για κάθε $g \in V$, $y \notin B_{d^*}(x,\epsilon)$. Επομένως

$$d(x,y) = \int_G d_1(gx,gy)dg \geq \int_V d_1(gx,gy)dg \geq \epsilon/3 \int_V dg$$

για κάθε $y \notin B_{d^*}(x,\epsilon)$. Έστω $\delta = \epsilon/3 \int_V dg$. Τότε, για κάθε $y \in B_d(x,\delta)$ έχουμε $y \in B_{d^*}(x,\epsilon)$, οπότε $B_d(x,\delta) \subseteq B_{d^*}(x,\epsilon)$, δηλαδή $T_{d^*} \subseteq T_d$, και η d είναι συμβατή με την τοπολογία του χώρου X. □

Παρατήρηση 1.0.10 Ο βασικός ρόλος του μέτρου Haar στη Θεωρία των Δράσεων είναι να δίνει G - αναλλοίωτες συναρτήσεις, ολοκληρώνοντας μη αναλλοίωτες. Έτσι, στην παραπάνω απόδειξη, ορίσαμε την G αναλλοίωτη μετρική με τύπο $d(u,v) = \int_G d_1(gu,gv)dg$.

Με βάση το παραπάνω σημαντικό Θεώρημα, θα αποδείξουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των ισομετρικών δράσεων.

Θεώρημα 1.0.11 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής και συνεκτικός μετρικός χώρος και d μία συμβατή μετρική στον X. Τότε, κάθε κλειστή υποομάδα G της ομάδας των ισομετριών $I(X,d)$, δρα γνήσια στον X. Αντίστροφα, έστω G μία ομάδα που δρα πιστά και γνήσια σε έναν τοπικά συμπαγή χώρο X. Τότε, υπάρχει μία, συμβατή με την τοπολογία του χώρου μετρική d και ένας μονομορφισμός $\Phi : G \to I(X,d)$, ώστε ο Φ να είναι ισομορφισμός επί της εικόνας του, το $\Phi(G)$ να είναι κλειστή υποομάδα της $I(X,d)$ και η δράση $(\Phi(G), G)$ να είναι* *ισοδύναμη με την αρχική.*

Απόδειξη. Το πρώτο κομμάτι του Θεωρήματος είναι προφανές από την Πρόταση 1.0.8 και το 0.2.6(1).

Αντίστροφα, έστω ϕ η δράση της G στον X. Για κάθε $g \in G$ η ϕ_g είναι ομοιομορφισμός του χώρου X, οπότε ορίζεται ο συνεχής, από την 0.0.12, μονομορφισμός

$$\Phi : G \to H(X) : \quad g \mapsto \phi_g,$$

όπου $H(X)$ είναι το σύνολο των ομοιομορφισμών του χώρου X εφοδιασμένο με την συμπαγή - ανοικτή τοπολογία. Όπως θα αποδείξουμε αμέσως η Φ είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της.

Πράγματι, έστω πως η Φ δεν είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της. Τότε, υπάρχει δίκτυο $\{g_i\}_{i\in I}$ με $\phi_{g_i} \to \phi_g$ για κάποιο $g \in G$ και $g_i \not\to g$. Αν κάθε υποδίκτυο του δικτύου είχε συγλίνον υποδίκτυο, τότε αν g_1 και g_2 είναι δύο διαφορετικά όρια δύο υποδικτύων του $\{g_i\}_{i\in I}$, θα είχαμε $\phi_{g_1} = \phi_{g_2}$, λόγω συνέχειας της Φ. Αφού η δράση είναι πιστή, αυτό σημαίνει $g_1 = g_2$, οπότε το $\{g_i\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πως κάθε υποδίκτυο του έχει υποδίκτυο που συγλίνει σε κοινό όριο. Άρα, αν $h \in G$ είναι το κοινό όριο, τότε ισχύει $g_i \to h$ και, λόγω της πιστότητας της δράσης, $h = g$, που είναι άτοπο από την αρχική μας υπόθεση. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει υποδίκτυο $\{g_{i_j}\}_{j\in J}$, με $g_{i_j} \to \infty$. Τότε όμως, για τυχόν $x \in X$ θα έχουμε $g_{i_j}x \to gx$ και $g_{i_j} \to \infty$, αφού η σύγλιση στην συμπαγή - ανοικτή τοπολογία συνεπάγεται την κατά σημείο σύγλιση. Άρα $gx \in L(x)$, που είναι άτοπο από την γνησιότητα της δράσης. Συνεπώς $g_i \to g_1$, για κάποιο $g_1 \in G$. Αφού η δράση είναι πιστή ισχύει $g_1 = g$, οπότε η Φ θα είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της.

Ο X θα έχει παρασυμπαγή χώρο τροχιών, από την 0.3.5(4). Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει G - αναλλοίωτη συμβατή μετρική d στον X. Επομένως $G \cong \Phi(G) \subseteq I(X,d)$. Όμως η $\Phi(G)$ δρα γνήσια στον X, οπότε, λόγω της 0.2.7, θα είναι τοπικά συμπαγής και συνεπώς κλειστή υποομάδα της $I(X,d)$. (Βλέπε [5], Ch. III, 2.1, Prop.4). □

1.1 Γνήσιες δράσεις σε πολλαπλότητες και ισομετρίες Riemann

Στη συνέχεια και μέχρι το τέλος του 1ου κεφαλαίου, η M θα είναι συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με μερτικό τανυστή g και η $I(M,d)$ θα είναι η ομάδα ισομετριών της M, οπου d θα είναι η επαγόμενη μετρική στην M, από το μετρικό τανυστή g.

Από το Θεώρημα 1.0.7 και την Πρόταση 1.0.8, η $I(M,d)$ είναι τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα που δρα γνήσια στην M. Θα δείξουμε πως η $I(M,d)$ εφοδιασμένη με την συμπαγή - ανοικτή τοπολογία είναι ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα στην M. Στην απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του 5ου προβλήματος του Hilbert και του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε, επειδή εντάσσεται στην εκτεταμένη αποδεικτική διαδικασία για την απάντηση στο 5ο πρόβλημα του Hilbert (Βλέπε [12], Ch. 4, 4.2, Th.2 και Cor.2).

Θεώρημα 1.1.1 *Μία τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα G χωρίς μικρές υποομάδες, (δηλαδή υπάρχει περιοχή του e που δεν περιέχει άλλες υποομάδες της G εκτός από την τετριμμένη) είναι ομάδα Lie.*

Πόρισμα 1.1.2 *Κάθε κλειστή υποομάδα μίας ομάδας Lie είναι ομάδα Lie.*

Το επόμενο Θεώρημα χαρακτηρίζει τις ισομετρίες μίας πολλαπλότητας Riemann:

Θεώρημα 1.1.3 (Myers-Steenrod) *Έστω M και M' δύο πολλαπλότητες Riemann με μετρικούς τανυστές g και g', μετρικές d, d' και διαστάσεις n και m, αντίστοιχα. Έστω επίσης $f : M \to M'$ μία απεικόνιση που διατηρεί τις μετρικές d, d'. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη και διατηρεί τους μετρικούς τανυστές.*

Παρατήρηση 1.1.4 Θα υπενθυμίσουμε κάποια βασικά, χρήσιμα για την συνέχεια, αποτελέσματα από τη Γεωμετρία Riemann. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο βιβλίο [11], Vol. I, Ch. 4. Θέτουμε

$$A_x(r) = \{u \in T_xM : g_x(u,u) < r\} \text{ και } B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}.$$

Ένα ανοικτό υποσύνολο W της M λέγεται **ομοιόμορφα κανονικό**, αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $y \in W$ να ισχύει $W \subset \exp_y(U_y(\delta))$.

Ένα υποσύνολο U της M λέγεται ομοιόμορφα κανονικό και **ισχυρά γεωδαισιακά κυρτό**, αν είναι ομοιόμορφα κανονικό και για κάθε δύο σημεία του x, $y \in U$, υπάρχει **μοναδικό** γεωδαισιακό τμήμα γ που τα συνδέει και αυτό το τμήμα περιέχεται στην U και ισχύει $d(x,y) =$ μήκος (γ). Από γνωστό θεώρημα, κάθε σημείο στην M έχει μια βάση ομοιόμορφα κανονικών και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτών περιοχών στην τοπολογία της M. Αυτός είναι μάλιστα ο λόγος για τον οποίο η d είναι συμβατή με την τοπολογία της M.

Έστω τώρα $x \in X$. Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $0 < \rho < \epsilon$ να ισχύουν τα εξής:

α) Ορίζεται η εκθετική απεικόνιση $\exp_x : A_x(\rho) \to B(x, \rho)$ και είναι αμφιδιαφόριση.

β) Το $B(x, \rho)$ είναι ομοιομόρφα κανονική και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτή περιοχή του x.

γ) Ταυτίζοντας το τυχόν $y \in M$ με το $(y, 0) \in TM$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει περιοχή B_y του μηδενός στην $(T_yM, || \cdot ||_y)$, ώστε η $\exp_y : B_y \to B(x, \rho)$ να είναι αμφιδιαφόριση. Θέτοντας $V = \bigcup_{y \in B(x,\rho)} B_y$ η απεικόνιση

$$\mathrm{Exp} : V \to B(x, \rho) \times B(x, \rho) : \quad (p, u_p) \mapsto (p, \exp_p u_p)$$

θα είναι αμφιδιαφόριση, όπου το V είναι ανοικτό υποσύνολο του TM.

Έστω, τώρα, $x \in M$ και $r > 0$, ώστε το $B(x, r)$ να είναι ομοιόμορφα κανονικό και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτό υποσύνολο του M. Ένα υποσύνολο $A \subseteq B(x, r)$ θα λέγεται **γεωδαισιακά κυρτό**, αν για κάθε δύο σημεία του A, η μοναδική ελάχιστη γεωδαισιακή που τα συνδέει περιέχεται στο A. Για παράδειγμα το $B(x, r)$ είναι γεωδαισιακά κυρτό. Επίσης, για $y \in B(x, r)$ υπάρχει $\epsilon > 0$, ώστε $B(y, \epsilon) \subseteq B(x, r)$, οπότε το $B(y, \epsilon)$ είναι και αυτό γεωδαισιακά κυρτό. Γενικά, ένα σύνολο $A \subseteq B(x, r)$, είναι γεωδαισιακά κυρτό αν και μόνο αν για κάθε $y \in A$ το σύνολο $\mathrm{Exp}^{-1}(A) \cap T_yM$ είναι **αστρόμορφο σύνολο**, δηλαδή για κάθε $v \in \mathrm{Exp}^{-1}(A) \cap T_yM$ το ευθύγραμμό τμήμα $\{tu,\ t \in [0, 1]\}$ περιέχεται και αυτό στο $\mathrm{Exp}^{-1}(A) \cap T_yM$. Συνεπώς, όταν $\overline{A} \subseteq B(x, r)$, το $\overline{A}$ θα είναι και αυτό γεωδαισιακά κυρτό. Για παράδειγμα, το $\overline{B(x, \rho)}$ είναι και αυτό γεωδαισιακά κυρτό, όπου $0 < \rho < \epsilon$. Έτσι, κάθε $y \in B(x, \epsilon)$ έχει μια βάση γεωδαισιακά κυρτών περιοχών, η κλειστότητα των οποίων περιεχεται στο $B(x, \epsilon)$ και άρα είναι γεωδαισιακά κυρτή. Συγεκριμένα, για $y \in B(x, \epsilon)$ και για κατάλληλο $b > 0$, η οικογένεια $\{B(y, \sigma)\}_{\sigma \in (0,b)}$ αποτελεί βάση από γεωδαισιακά κυρτές περιοχές του y.

Ορισμός 1.1.5 *Σε έναν μετρικό χώρο (M, d) ένα* **segment** *είναι η εικόνα μιας συνεχούς απεικόνισης $X : [a, b] \to M$ με την ιδιότητα: για κάθε $t_1, t_2, t_3 \in [a, b]$ με $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ ισχύει η σχέση*

$$d(X(t_1), X(t_2)) + d(X(t_2), X(t_3)) = d(X(t_1), X(t_3)).$$

Παρατήρηση 1.1.6 Η έννοια του segment γενικεύει την έννοια του ευθυγράμμου τμήματος. Όπως είναι αναμενόμενο, όταν ο μετρικός χώρος είναι πολλαπλότητα Riemann, τότε ένα segment είναι ένα γεωδαισιακό κομμάτι:

Λήμμα 1.1.7 *Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann με μετρικό τανυστή g και αντίστοιχη μετρική d. Τότε, κάθε segment $X : [a, b] \to M$ είναι γεωδαισιακή.*

Απόδειξη. Έστω $t \in [a, b]$ και U μία ομοιομορφα κανονική και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτή περιοχή του $X(t)$. Λόγω συνέχειας, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $X([t-\epsilon, t+\epsilon]) \subseteq U$. Τότε, από τα σημεία $X(t-\epsilon)$ και $X(t+\epsilon)$ διέρχεται μοναδική γεωδαισιακή $\tau : [t-\epsilon, t+\epsilon] \to U$ με

$$\tau(t-\epsilon) = X(t-\epsilon),\ \tau(t+\epsilon) = X(t-\epsilon)$$

και

$$d(X(t-\epsilon), X(t+\epsilon)) = L_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}(\tau) = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} ||\dot{\tau}(s)||_{\tau(s)} ds.$$

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει $c \in [a, b]$ με $X(c) \neq \tau(c)$ και έστω γ, γ' οι μοναδικές ελάχιστες γεωδαισιακές από τα $X(t-\epsilon)$ στο $X(c)$ και από το $X(c)$ στο $X(t+\epsilon)$, αντίστοιχα. Έστω

$$\gamma * \gamma' : [t-\epsilon, t+\epsilon] \to U : \quad (\gamma * \gamma')(s) = \begin{cases} \gamma(s), & t-\epsilon \leq s \leq c \\ \gamma'(s), & c \leq s \leq t+\epsilon \end{cases}.$$

Αφού το $X(c)$ δεν περιέχεται στην τ, λόγω μοναδικότητας, η $\gamma * \gamma'$ δεν μπορεί να είναι η ελάχιστη γεωδαισιακή που συνδέει τα $X(t-\epsilon)$, $X(t+\epsilon)$. Άρα

$$\begin{aligned} d(X(t-\epsilon), X(c)) + d(X(c), X(t+\epsilon)) &= L_{t-\epsilon}^{c}(\gamma) + L_{c}^{t+\epsilon}(\gamma') \\ &= L_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}(\gamma * \gamma') > L_{t-\epsilon}^{t+\epsilon}(\tau) \\ &= d(X(t-\epsilon), X(t+\epsilon)) \end{aligned}$$

που είναι άτοπο, αφού η X είναι segment. Άρα, η X θα ταυτίζεται με την τ στο $[t-\epsilon, t+\epsilon]$.

Συνεπώς για κάθε $t \in [a, b]$ υπάρχει $\epsilon_t > 0$, ώστε η $X|_{[t-\epsilon_t, t+\epsilon_t]}$ να είναι γεωδαισιακή. Επομένως, η X θα είναι γεωδαισιακή. $\square$

Παρατήρηση 1.1.8 Από τα παραπάνω, αν για μία καμπύλη $X : [a, b] \to M$ ισχύει ότι $d(X(t_1), X(t_2)) = |t_1 - t_2|$, για κάθε t_1, $t_2 \in [a, b]$, τότε η X είναι segment και συνεπώς γεωδαισιακή. Μάλιστα θα είναι παραμετρισμένη με το μήκος της.

Παρατήρηση 1.1.9 Το προηγούμενο Λήμμα δίνει έναν γεωμετρικό χαρακτηρισμό για της γεωδαισιακές, ο οποίος χρησιμοποιεί μόνο την συνέχεια μιας καμπύλης για να καταλήξει στην διαφορισιμότητα της, ως γεωδαισιακής.

Πόρισμα 1.1.10 *Έστω $\tau : [a,b] \to M$ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη που συνδέει τα x, $y \in M$. Έστω, επίσης, πως $L(\tau) = d(x,y)$. Τότε, η τ είναι γεωδαισιακή. Αν, επιπλέον, η $||\dot{\tau}(\cdot)||_{\tau(\cdot)} : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ είναι σταθερή ως πρός $s \in [a,b]$, τότε η τ θα είναι παραμετρισμένη με το μήκος της επί την σταθερά αυτή.*

Απόδειξη. Το δεύτερο μέρος του Πορίσματος είναι τετριμμένο. Για το πρώτο μέρος, αρκεί να δείξουμε πως η τ είναι segment.

Έστω λοιπόν $a \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq b$ και $\tau(a) = x$, $\tau(b) = y$. Θέτουμε $x_i = \tau(t_i)$ για $i = 1,2,3$. Έστω, επίσης, πως τα τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 είναι τα κομμάτια της τ που αντιστοιχούν στα $[\alpha, t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$, $[t_3,t_4]$.

Εξ ορισμού της μετρικής d έχουμε πως

$$d(x,x_1) \leq L(\tau_1),\ d(x_1,x_2) \leq L(\tau_2),\ d(x_2,x_3) \leq L(\tau_3) \text{ και } d(x_3,y) \leq L(\tau_4).$$

Έστω πως μία από αυτές της ανισότητες είναι γνήσια. Τότε

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_1) + d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + d(x_3,x_4) \\ &< L(\tau_1) + L(\tau_2) + L(\tau_3) + L(\tau_4) \\ &= L(\tau) = d(x,y) \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Όμοια προκύπτει ότι $d(x_1,x_3) = L(\tau_2 * \tau_3)$. Επομένως

$$d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) = L(\tau_2) + L(\tau_3) = L(\tau_2 * \tau_3) = d(x_1,x_3),$$

οπότε η τ είναι segment και συνεπώς γεωδαισιακή. □

Λήμμα 1.1.11 *Έστω M μία n - πολλαπλότητα Riemann με μετρικό τανυστή g και επαγόμενη μετρική d. Έστω, επίσης, $x \in M$ και v, $w \in T_xM$ δύο μοναδιαία διανύσματα. Για $s \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό, ορίζονται οι γεωδαισιακές με τύπους $\alpha(s) = \exp_x(sv)$ και $b(s) = \exp_x(sw)$. Έστω $\omega \in [0,\pi]$, ώστε $\cos\omega = g_x(v,w)$. Τότε ισχύει ότι*

$$\sin\frac{\omega}{2} = \lim_{s\to 0}\frac{d(\alpha(s),b(s))}{2s}.$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [11], Ch. IV, Sec. 3, Th. 3.10. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.3. Όλες οι γεωδαισιακές θα θεωρούνται παραμετρισμένες με το μήκος τους. Έστω $x_\circ \in M$ με $y_\circ = f(x_\circ) \in M'$. Λόγω της συνέχειας της f, υπάρχουν U και V ομοιόμορφα κανονικές και ισχύρα γεωδαισιακά κυρτές περιοχές των $x_\circ$ και $y_\circ$, αντίστοιχα, με $f(U) \subseteq V$. Έστω $v_{x_\circ} \in T_{x_\circ}M$ με $||v_{x_\circ}||_{x_\circ} = 1$ και $\tau : [-\epsilon, \epsilon] \to U$ η γεωδαισιακή στο U με αρχικές συνθήκες $(x_\circ, v_{x_\circ})$. Τότε, για κάθε t_1, $t_2 \in [-\epsilon, \epsilon]$ ισχύει

$$d'(f(\tau(t_1)), f(\tau(t_2))) = d(\tau(t_1), \tau(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

Από την Παρατήρηση 1.1.8, η $f \circ \tau$ είναι γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της, επομένως η f στέλνει γεωδαισιακές παραμετρισμένες με το μήκος τους σε γεωδαισιακές παραμετρισμένες με το μήκος τους. Συμβολίζουμε με $F(v_{x_\circ})$ το διάνυσμα του $T_{y_\circ}M'$ που είναι η δεύτερη από τις δύο αρχικές συνθήκες της $f \circ \tau$.

Το $F(v_{x_\circ})$ είναι μοναδιαίο στον $(T_{y_\circ}M', ||\cdot||'_{y_\circ})$, αφού η $f \circ \tau$ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της. Επίσης, ισχύει $F(-v_{x_\circ}) = -F(v_{x_\circ})$. Πράγματι, η γεωδαισιακή $\tau' : [-\epsilon, \epsilon] \to U$ με αρχικές συνθήκες $(x_\circ, -v_{x_\circ})$ έχει τύπο $\tau'(s) = \tau(-s)$, λόγω της μοναδικότητας της λύσης της διαφορικής εξίσωσης των γεωδαισιακών υπό τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Η τ' είναι παραμετρισμένη με το μήκος της. Άρα, η $f \circ \tau'$ είναι η γεωδαισιακή με αρχικές συνθήκες $(y_\circ, -F(v_{y_\circ}))$ και η σχέση προκύπτει από τον ορισμό του $F(-u_{x_\circ})$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η απεικόνιση F που απεικονίζει μοναδιαία διανύσματα του $T_{x_\circ}M$ σε μοναδιαία διανύσματα του $T_{y_\circ}M'$.

Έστω τώρα $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to U$ γεωδαισιακή σταθερής ταχύτητας, με αρχικές συνθήκες $(x_\circ, v) \in T_{x_\circ}M \backslash \{0\}$. Τότε, η γεωδαισιακή

$$\gamma' : [-\epsilon/||v||_{x_\circ}, \epsilon/||v||_{x_\circ}] \to U : \quad \gamma'(s) = \gamma(s/||v||_{x_\circ})$$

έχει αρχικές συνθήκες $(x_\circ, v/||v||_{x_\circ})$ και είναι παραμετρισμένη με το μήκος της. Επομένως, η γεωδαισιακή $f \circ \gamma'$ έχει αρχικές συνθήκες $(y_\circ, F(v/||v||_{x_\circ}))$. Άρα, για τα s στα οποία ορίζεται η γ, η γεωδαισιακή $f \circ \gamma$ θα ικανοποιεί την σχέση

$$(f \circ \gamma)(s) = (f \circ \gamma')(||v||_{x_\circ} s)$$

και θα έχει αρχικές συνθήκες $(y_\circ, ||v||_{x_\circ} F(v/||v||_{x_\circ}))$. Μπορούμε, λοιπόν, να επεκτείνουμε την F ως εξής:

$$F : T_{x_\circ}M \to T_{y_\circ}M' : \quad F(v) = \begin{cases} ||v||_{x_\circ} F(v/||v||_{x_\circ}), & v \in T_{x_\circ}M \backslash \{0\} \\ 0, & v = 0 \end{cases}.$$

Ορίσαμε $F(0) = 0$, διότι η γεωδαισιακή $\gamma : \mathbb{R} \to U$ με τύπο $\gamma(s) = x_\circ$ έχει σταθερή ταχύτητα και αρχική συνθήκη $(x_\circ, 0)$, οπότε η $f \circ \gamma$ θα έχει αρχική συνθήκη $(y_\circ, 0)$.

Εξ ορισμού, η F ικανοποιεί τις σχέσεις

$$F(\lambda v) = \lambda F(v) \text{ και } ||F(v)||'_{y_\circ} = ||v||_{x_\circ}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in T_{x_\circ}M$. Επιπλέον, η F είναι 1-1. Πράγματι, για $v_1, v_2 \in T_{x_\circ}M$ με $F(v_1) = F(v_2)$ θεωρούμε τις γεωδαισιακές σταθερής ταχύτητας γ_1 και γ_2 με αρχικές συνθήκες $(x_\circ, v_1)$ και $(x_\circ, v_2)$, αντίστοιχα. Τότε, οι γεωδεσιακές $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ θα έχουν, εξ υποθέσεως, τις ίδιες αρχικές συνθήκες, οπότε, θα ισχύει $f \circ \gamma_1 = f \circ \gamma_2$ στο κοινό πεδίο ορισμού τους. Όμως, η f είναι 1-1, οπότε $\gamma_1 = \gamma_2$, στο κοινό πεδίο ορισμού τους, συνεπώς $v_1 = v_2$.

Έστω $\exp_{x_\circ}$ και $\exp_{y_\circ}$ οι εκθετικές απεικονίσεις ορισμένες στα U και V, αντιστοίχως. Θεωρούμε τους κανονικούς χάρτες (U, φ) και (V, φ') με $\varphi = E^{-1} \circ \exp_{x_\circ}^{-1}$ και $\varphi' = E'^{-1} \circ \exp_{y_\circ}^{-1}$, όπου (όπως πριν)

$$E : \mathbb{R}^n \to T_{x_\circ}M : \quad E(e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_\circ} \quad \text{για } i = 1, \ldots, n$$

και

$$E' : \mathbb{R}^m \to T_{y_\circ}M' : \quad E'(e'_i) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{y_\circ} \text{ για } i = 1, \ldots, m.$$

Οι E, E' να είναι γραμμικές ισομετρίες στους αντίστοιχους χώρους. Εφόσον η f είναι 1-1, από την Παρατήρηση 1.1.8, για τυχούσα συνεχή καμπύλη τ η $f \circ \tau$ είναι γεωδαισιακή, αν και μόνο αν, και μόνο αν η τ είναι γεωδαισιακή. Άρα, θα ισχύει

$$(f \circ \exp_{x_\circ})(v) = (\exp_{y_\circ} \circ F)(v)$$

για v αρκετά μικρό στον $T_{x_\circ}M$, ώστε να ορίζονται και τα δύο μέλη της ισότητας.

Τοπικά ισχύει

$$f = \exp_{y_\circ} \circ F \circ (\exp_{x_\circ})^{-1}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε πως η F είναι γραμμική και πως διατηρεί τους μετρικούς τανυστές $g_{x_\circ}$ και $g'_{y_\circ}$, αφού τότε η f θα είναι διαφορίσιμη και, λόγω της τοπικής της παράστασης

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} = E'^{-1} \circ F \circ E,$$

ως προς του χάρτες (U, φ), (V, φ'), η f θα διατηρεί τους μετρικούς τανυστές g, g'.

Λόγω της ομογένειας της F, αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι γραμμική και πως ισχύει

$$g'_{y_\circ}(F(v), F(w)) = g_{x_\circ}(v, w)$$

για κάθε v, $w \in T_{x_\circ}M$ με $||v||_{x_\circ} = ||w||_{x_\circ} = 1$:

Έστω v, $w \in T_{x_\circ}M$ με $||v||_{x_\circ} = ||w||_{x_\circ} = 1$. Για $s \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό θα ορίζονται οι γεωδαισιακές $\alpha(s) = \exp_{x_\circ}(sv)$, $b(s) = \exp_{x_\circ}(sw)$, $\alpha'(s) = \exp_{y_\circ}(sF(v))$, $b'(s) = \exp_{y_\circ}(sF(w))$ και θα ισχύει

$$f \circ \alpha = \alpha', \quad f \circ b = b'.$$

Από την ανισότητα Cauchy - Schwartz συνάγενται $|g_{x_\circ}(v, w)| \leq 1$ και $|g'_{y_\circ}(F(v), F(w))| \leq 1$, οπότε υπάρχουν ω, $\omega' \in [0, \pi]$ με $\cos\omega = g_{x_\circ}(v, w)$ και $\cos\omega' = g'_{y_\circ}(F(v), F(w))$. Άρα, από το προηγούμενο Λήμμα και την προηγούμενη σχέση, βρίσκουμε

$$\sin\frac{\omega}{2} = \lim_{s\to 0}\frac{d(\alpha(s), b(s))}{2s} = \lim_{s\to 0}\frac{d'(\alpha'(s), b'(s))}{2s} = \sin\frac{\omega'}{2},$$

αφού η f διατηρεί τις μετρικές. Επομένως

$$g_{x_\circ}(v, w) = \cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\omega'}{2} = \cos\omega' = g'_{y_\circ}(F(v), F(w)).$$

Μένει να δείξουμε πως η F είναι γραμμική.

Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια ορθοκάνονική βάση του χώρου $(T_{x_\circ}M, ||\cdot||_{x_\circ})$ και έστω $v \in T_{x_\circ}M$ με $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, όπου $a_i = g(v, v_i)$ για $i = 1, \ldots, n$. Η F διατηρεί διατηρεί τους μετρικούς τανυστές $g_{x_\circ}$ και $g'_{y_\circ}$, οπότε το σύνολο $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στον χώρο $(T_{y_\circ}M', ||\cdot||_{y_\circ})$. Τότε

$$g'_{y_\circ}(F(v), F(v_i)) = g_{x_\circ}(v, v_i) = a_i$$

και $F(v) = \sum_{i=1}^n a_i F(v_i) + w$, όπου $w \in (\ \mathrm{span}\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\})^{\perp_{g'_{y_\circ}}}$. Όμως

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = g_{x_\circ}(v, v) = g'_{y_\circ}(F(v), F(v)) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + g'_{y_\circ}(w, w),$$

οπότε $w = 0$ και $F(v) = \sum_{i=1}^n a_i F(v_i)$, δηλαδή η F είναι γραμμική. $\square$

1.2 Η ομάδα των ισομετριών Riemann

Το παρακάτω Λήμμα είναι το βασικό για να δείξουμε πως η $I(M,d)$ είναι ομάδα Lie.

Λήμμα 1.2.1 *Έστω $B(x,r)$ μία ομοιόμορφα κανονική και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτή μπάλα μίας n - πολλαπλότητας Riemann M και C ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο της $B(x,r)$ με εσωτερικό σημείο y. Τότε, το C είναι ομοιομορφικό με μια κλειστή n - μπάλα.*

Απόδειξη. Το $B(x,r)$ είναι ομοιόμορφα κανονικό σύνολο, οπότε κάθε γεωδαισιακή γ που ξεκινάει από το y θα τέμνει το σύνορο, ∂C, του C. Ισχυριζόμαστε ότι η γ θα τέμνει το ∂C μόνο μια φορά πρίν τμήσει το $\partial B(x,r)$:

Έστω $z \in \partial C$ ένα σημείο της γ. Αφού το C είναι γεωδαισιακά κυρτό, για κάθε $w \in C^\circ$ στο εσωτερικό του C, ορίζεται η μοναδική γεωδαισιακή $\gamma_w : [0,a_w] \to C$ με $\gamma_w(0) = z$ και $\gamma_w(a_w) = w$. Το σύνολο $\bigcup_{w\in C^\circ} \gamma_w(0,a_w)$ είναι ανοικτή περιοχή του $\gamma_y(0,a_y) = \gamma(-a_y,0)$ (αφού και οι δύο είναι παραμετρισμένες με το μήκος τους και η γ_y έχει αντίθετη φορά απο την γ).

Πράγματι, το $B(x,r)$ είναι ομοιόμορφα κανονική και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτή μπάλα, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,r) \subseteq \exp_z(A_z(\delta))$ και η $\exp_z : A_z(\delta) \to \exp_z(A_z(\delta))$ να είναι αμφιδιαφόριση. Άρα το

$$\bigcup_{w\in C^\circ} \gamma_w(0,a_w) = (\exp_z)^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in(\exp_z)^{-1}(C^\circ)} \{t\lambda : t \in (0,1)\}\right),$$

είναι ανοικτό, οπότε

$$\gamma((-a_y,0)) \subseteq \bigcup_{w\in C^\circ} \gamma_w(0,a_w) \subseteq C^\circ$$

συνεπώς η γ τέμνει το ∂C στο z μία φορά.

Επειδή η απεικόνιση $\exp_y : A_y(\delta) \to \exp_y(A_y(\delta))$ είναι αμφιδιαφόριση, τα C και ∂C είναι ομοιομορφικά με τα $(\exp_y)^{-1}(C)$ και $(\exp_y)^{-1}(\partial C)$, αντίστοιχα.

Έστω $\mathbb{S}^{n-1}$ η μοναδιαία σφαίρα του T_yM. Ορίζουμε

$$\varphi : (\exp_y)^{-1}(\partial C) \to \mathbb{S}^{n-1} : \quad u \mapsto u/||u||_y.$$

Η φ είναι καλά ορισμένη και συνεχής, αφού το $0 \notin (\exp_y)^{-1}(\partial C)$.

Υπάρχει $\epsilon > 0$ με $\exp_y(A_y(\epsilon)) \subseteq C^\circ$. Τότε, για κάθε $v \in T_yM$ με $||v||_y = 1$, ισχύει $\exp_y(\epsilon v) \in \exp_y(A_y(\epsilon))$, οπότε, από τα παραπάνω, η γεωδαισιακή στο C που συνδέει το y με το $\exp_y(\epsilon v)$ θα τέμνει το ∂C σε μοναδικό σημείο $z \in C$. Άρα $\varphi(\exp_y^{-1}(z)) = v$, δηλαδή η φ είναι επί.

Έστω τώρα, u_1, $u_2 \in (\exp_y)^{-1}(\partial C)$ με $u_1/||u_1||_y = u_2/||u_2||_y$. Τότε $u_1 = \frac{||u_1||_y}{||u_2||_y} u_2 \in \partial C$, οπότε για $t \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό, ορίζεται η γεωδαισιακή $\exp_y(tu_1)$ η οποία τέμνει το ∂C στα σημεία $\exp_y u_1$ και $exp_y u_2$. Επομένως $\exp_y u_1 = \exp_y u_2$, οπότε $u_1 = u_2$ και η φ είναι 1-1. Η φ είναι, λοιπόν, συνεχής και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το συμπαγές $(\exp_y)^{-1}(\partial C)$ στο συμπαγές $\mathbb{S}^{n-1}$ και συνεπώς θα είναι ομοιομορφισμός.

Επεκτείνοντας την φ^{-1} στο $A_y(1)$ γραμμικά πάνω στις ακτίνες $\{tu : u \in \mathbb{S}^{n-1} : t \in [0,1]\}$, προκύπτει ο ζητούμενος ομοιομορφισμός μεταξύ των $A_y(1)$ και $C \cong (\exp_y)^{-1}(C)$. □

Θεώρημα 1.2.2 *Η ομάδα $I(M,d)$ είναι ομάδα Lie.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πως η $G = I(M,d)$ δεν έχει μικρές υποομάδες οπότε το ζητούμενο είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.1.

Έστω $x_0 \in M$ και $r > 0$ τέτοιο, ώστε το $B(x_0, r)$ να είναι ομοιόμορφα κανονική και γεωδαισιακά κυρτή περιοχή και να ικανοποιούνται τα (α),(β),(γ) της Παρατήρησης 1.1.4. Έστω, επίσης, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση του $T_{x_0}M$ που να περιέχεται στο $A_{x_0}(r)$. Θέτουμε $x_i = \exp(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$ και συμβολίζουμε με $[z_1, \ldots, z_n]_{z_0}$ τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα $z_1, \ldots, z_n \in T_{z_0}M$ ως προς την παραπάνω βάση. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης

$$\begin{aligned} H : B(x_\circ, r) \times \ldots \times B(x_0, r) &\rightarrow \mathbb{R} : \\ (y_0, y_1, \ldots, y_n) &\mapsto \det([\exp_{y_0}^{-1}(y_1), \ldots, \exp_{y_0}^{-1}(y_n)]_{y_0}), \end{aligned}$$

υπάρχουν U_0, U_1, …, U_n ομοιόμορφα κανονικές και γεωδαισιακά κυρτές περιοχές των x_0, x_1, …, x_n, αντίστοιχα, με ξένες μεταξύ τους κλειστότητες και με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το σύνολο $\overline{U_0} \cup \ldots \cup \overline{U_n}$ να είναι συμπαγές υποσύνολο του $B(x_0, r)$.
2. Τα σύνολα U_0, …, U_n να είναι γεωδαισιακά κυρτά.
3. Για κάθε $y \in \overline{U_0}$ και κάθε n - άδα $(y_1, \ldots, y_n) \in \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_n}$ η n - άδα των διανυσμάτων $(e'_1, \ldots, e'_n) \in (T_yM)^n$ με $e'_i = \exp_y^{-1}(y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, να είναι βάση του T_yM.

Θεωρούμε συμπαγείς περιοχές $W_0, \ldots, W_n$ των $x_0, \ldots, x_n$, αντίστοιχα, με $W_i \subseteq U_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$. Για σταθερό $i \in \{0, \ldots, n\}$, λόγω της συμπάγειας του $\overline{U_i}$, υπάρχει A'_i, περιοχή του $e \in G$, ώστε $A'_i\overline{U_i} \subseteq B(x_0, r)$.

Όμοια, λόγω της συμπάγειας του W_i, υπάρχει περιοχή B_i του e, με $B_iW_i \subseteq U_i$. Θέτοντας $A_i = A_i' \cap B_i$, το $A = \bigcap_{i=0}^{n} A_i$ θα είναι περιοχή του e, με $AW_i \subseteq U_i$ και $AU_i \subseteq B(x_0, r)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Ισχυριζόμαστε ότι το A περιέχει μόνο την τετριμμένη υποομάδα της G. Θα υποθέσουμε το αντίθετο και θα οδηγηθούμε σε άτοπο:

Έστω, λοιπόν, $h \neq e$ και $H \subseteq A$ η υποομάδα της G που παράγεται από το h. Επειδή τομές κλειστών και γεωδαισιακά κυρτών υποσυνόλων του $B(x_0, r)$ είναι κλειστά και γεωδαισιακά κυρτά σύνολα, έχει νόημα να μιλήσουμε για την **κλειστή γεωδαισιακά κυρτή θήκη** ένος υποσυνόλου B του $B(x_0, r)$ που θα ορίζεται ως η τομή όλων των κλειστών και γεωδαισιακά κυρτών υποσυνόλων του $B(x_0, r)$ που περιέχουν το B, υπό την προϋπόθεση ότι το B θα περιέχεται σε τουλάχιστον ένα κλειστό, γεωδαισιακά κυρτό υποσύνολο του $B(x_0, r)$.

Επειδή $HW_i \subseteq \overline{U_i}$, ορίζεται η κλειστή γεωδαισιακά κυρτή θήκη του $C_i \subseteq \overline{U_i}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το C_i θα είναι H - αναλλοίωτο. Πράγματι, για κάθε $b \in H$ το bC_i θα είναι κλειστό και γεωδαισιακά κυρτό σύνολο, αφού το b είναι ισομετρία, και $HW_i = bHW_i \subseteq bC_i$, οπότε $C_i \subseteq bC_i$, από τον ορισμό της κλειστής γεωδαισιακά κυρτής θήκης. Το ίδιο επιχείρημα δίνει $C_i \subseteq b^{-1}C_i$, οπότε $C_i = bC_i$. Επίσης, από το προηγούμενο Λήμμα, το C_i θα είναι ομοιομορφικό με μία κλειστή n - μπάλα. Άρα, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer , η ισομετρία h θα έχει σταθερό σημείο $y_i \in C_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$. Επομένως, λόγω της μοναδικότητας των γεωδαισιακών στο $B(x_0, r)$, αφού τα σημεία y_0 και y_i θα μένουν στάθερα από την ισομετρία h, το ίδιο θα συμβαίνει και με την γεωδαισιακή που τα συνδέει για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Από το Θεώρημα 1.1.3, η h είναι λεία απεικόνιση και για την εφαπτόμενη απεικόνιση $T_{y_0}h$ του h στο y_0, ισχύει $T_{y_0}h(e_i') = e_i'$, όπου $e_i' = \exp_{y_0}^{-1}(y_i)$. Άρα $T_{y_0}h = id_{T_{y_0}M}$, αφού τα $\{e_i'\}_{i=1}^{n}$ αποτελούν βάση του $T_{y_0}M$, λόγω της ιδιότητας (3) των συνόλων U_i.

Έχουμε, λοιπόν, την ισομετρία h που έχει σταθερό σημείο y_0 και $T_{y_0}h = id_{T_{y_0}M} = T_{y_0}id_M$. Θεωρούμε το σύνολο $C = \{z \in M : T_zh = T_z id_M\}$. Τότε $y_0 \in C \neq \emptyset$ και το C είναι κλειστό στην M. Έστω $z_0 \in C$ και U_{z_0} μία ομοιόμορφα κανονική και ισχυρά γεωδαισιακά κυρτή ανοικτή περιοχή του z_0. Τότε, για κάθε $w \in U_{z_0}$, θα υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\gamma_w : [0, l]$ με $\gamma_w(0) = z_0$ και $\gamma_w(l) = w$, για κάποιο $l \in \mathbb{R}_+$ αρκετά μικρό. Εφόσον $z_0 \in C$, έχουμε ότι $h(z_0) = z_0$, οπότε οι γεωδαισιακές $h \circ \gamma_w$ και γ_w θα έχουν κοινή αρχή το z_0. Επιπλέον $(h \circ \gamma_w)^{\cdot}(0) = T_z h(\dot{\gamma}_w(0)) = \dot{\gamma}_w(0)$, οπότε, λόγω της μοναδικότητας της λύσης της διαφορικής εξίσωσης των γεωδαισιακών υπό τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, θα ισχύει $(h \circ \gamma_w)(s) = \gamma_w(s)$, για κάθε $s \in [0, l]$. Επομένως, για $s = l$ έχουμε $h(w) = w$ και συνεπώς $A_z(\delta) \subseteq C$. Άρα, το C είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του συνεκτικού χώρου M, οπότε $C = M$ και $h = e$ που είναι άτοπο. Επομένως, η G δεν έχει μικρές υποομάδες και είναι ομάδα Lie. □

1.3 Η διαφορισιμότητα της δράσης των ισομετριών Riemann

Στη συνέχεια, θα δείξουμε πως η $I(M,d)$ δρα διαφορίσιμα στην M, ολοκληρώνοντας έτσι τις βασικές ιδιότητες της δράσης των ισομετριών σε μία πολλαπλότητα Riemann.

Λήμμα 1.3.1 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\psi_n : X \to \mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ κατά σημείο στον X. Τότε, το σύνολο των σημείων συνέχειας της ψ είναι πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τα σύνολα $E_n = \{x \in X :$ *για κάθε V περιοχή του x ισχύει* $\sup_{u,\, v\in V} |\psi(u) - \psi(v)| \geq \frac{1}{n}\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η οικογένεια $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από κλειστά σύνολα του X και το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της ψ. Θα δείξουμε πως το σύνολο $X\backslash E$ είναι πυκνό στον X. Από το Θεώρημα του Baire (Βλέπε [6], Ch. XI, Sec. 10, Th. 3), αρκεί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $X\backslash E_n$ να είναι πυκνό στον X. Θα υποθέσουμε το αντίθετο και θα καταλήξουμε σε άτοπο:

Έστω, λοιπόν, πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε το $X\backslash E_{n_0}$ να μην είναι πυκνό, οπότε θα υπάρχει $A \subseteq E_{n_0}$ το οποίο είναι ανοικτό στον X.

Ορίζουμε τα σύνολα $Z_{n_0 N} = \{x \in E_{n_0} : |\psi_k(x) - \phi_l(x)| \leq \frac{1}{3n_0},$ *για κάθε* $k,\, l \geq N\}$ που είναι κλειστά στον X. Για $x \in Z_{n_0 N}$, καθώς το l τείνει στο άπειρο, θα ισχύει

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| \leq \frac{1}{3n_0}$$

για κάθε $n \geq N$. Επίσης $\bigcup_{N=1}^{\infty} Z_{n_0 N} = X\backslash E_{n_0}$, αφού η ϕ_n συγκλίνει κατά σημείο στη ϕ.

Το $A = \bigcup_{N=1}^{\infty}(A \cap Z_{n_0 N})$ είναι τοπικά συμπαγές, ως ανοικτό σύνολο του X, όπου τα $A \cap Z_{n_0 N}$ είναι κλειστά στο A. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα του Baire, θα υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ και B ανοιχτό στο A, επομένως και στον X, ώστε $B \subseteq A \cap Z_{n_0 N_0}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Για κάθε περιοχή $W \subseteq B$ τυχόντος $w \in B$ θα υπάρχουν $x,\, y \in W \subseteq Z_{n_0 N_0} \subseteq E_{n_0}$ με

$$|\psi(x) - \psi(y)| \geq \frac{1}{3n_0}, \quad |\psi(x) - \psi_{N_0}(x)| \leq \frac{1}{3n_0}, \quad |\psi_{N_0}(y) - \psi(y)| \leq \frac{1}{3n_0}.$$

Επομένως

$$|\psi_{N_0}(x) - \psi_{N_0}(y)| \geq \frac{1}{n_0} - \epsilon,$$

δηλαδή

$$\sup_{u,\, v \in W} |\psi_{N_0}(u) - \psi_{N_0}(v)| \geq \frac{1}{n_0}$$

και αυτό συμβαίνει σε κάθε περιοχή W του w που περιέχεται στο B. Άρα, η ψ_{N_0} θα είναι ασυνεχής στο w που είναι άτοπο. $\square$

Λήμμα 1.3.2 *Έστω G ένας τοπικά συμπαγής χώρος και B^n η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω, επίσης, $F : G \times B^n \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους $F_j(g, x) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(g, x_1, \ldots, x_n)$ ως προς x, για κάθε $g \in G$ σταθερό. Αν $x_0 \in B^n$, τότε τα σημεία h_0, στα οποία η F_j είναι συνεχής στο (h_0, x_0), είναι πυκνά στο G.*

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [12], Ch. V, 5.1, Lemma 2. $\square$

Λήμμα 1.3.3 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα συνεχώς στην n - διάστατη πολλαπλότητα Riemann M μέσω της $\phi : G \times M \to M$. Αν για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση $\phi_g : M \to M$ είναι διαφορίσιμη, τότε η επαγόμενη εφαπτόμενη δράση*

$$T\phi : G \times TM \to TM : \quad (g, (p, v_p)) \mapsto T_p\phi_g(v_p)$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ οι συντεταγμένες της ϕ σε τυχόντα χάρτη της M. Αρκεί να δείξουμε πως οι μερικές παράγωγοι $\phi_{ij}(g, p) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(g, p)$ είναι συνεχείς. Εφόσον η ϕ είναι δράση, ισχύει

$$\phi_i(gh, x) = \phi_i(g, \phi_1(h, x), \ldots, \phi_n(h, x)), \tag{1.1}$$

απ' όπου, με παραγώγιση, παίρνουμε

$$\phi_{ij}(gh, x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}(g, \phi(h, x))\phi_{kj}(h, x) \tag{1.2}$$

για κάθε $g,\, h \in G$ και $x \in M$ και $i,\, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Αν δείξουμε πως η ϕ_{ij} είναι συνεχής στο (e,x) για κάθε $x \in M$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, τότε για $h \in G$ κοντά στο e το $\phi_{kj}(h,x)$ θα είναι κοντά στο $\phi_{kj}(e,x) = \delta_{kj}$ και, λόγω συνεχείας της $\phi_{ik}(g,\cdot)$, το $\phi_{ik}(g,\phi(h,x))$ θα είναι κοντά στο $\phi_{ik}(g,x)$, για κάθε $k \in \{1,\ldots,n\}$. Άρα, λόγω της (1.4), το $\phi_{ij}(gh,x)$ θα είναι κοντά στο $\phi_{ij}(g,x)$, δηλαδή η ϕ_{ij} θα είναι συνεχής στο (g,x), για κάθε $(g,x) \in G \times M$, για κάθε $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Έστω, λοιπόν, $(e,x_0) \in G \times M$ και χάρτης (U,ψ) του x_0 στην M με $\psi(U) \subseteq B^n$, όπου B^n είναι η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Από το προηγούμενο Λήμμα, το σύνολο E_{ij} των σημείων συνέχειας των μερικών παραγώγων $\phi_{ij}(\cdot,x_0)$, θα είναι πυκνό στο G, για κάθε $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Επομένως, από το Θεώρημα του Baire, το σύνολο $E = \bigcap_{i,j=1}^n E_{ij}$ θα είναι και αυτό πυκνό στο G. Άρα, υπάρχει $h_0 \in G$ με $(h_0,x_0) \in E$.

Τώρα, για (h,x) κοντά στο (e,x_0) το (h_0h,x) θα είναι κοντά στο (h_0,x_0), οπότε, λόγω της συνέχειας της ϕ_{ij} στο (h_0,x_0), το $\phi_{ij}(h_0h,x)$ θα είναι κοντά στο $\phi_{ij}(h_0,x_0)$. Επίσης, λόγω της συνέχειας της $\phi_{ik}(h_0,\cdot)$ στο x_0, το $\phi_{ik}(h_0,\phi(h,x))$ θα είναι κοντά στο $\phi_{ik}(h_0,x_0)$ για κάθε $k = 1,\ldots,n$, οπότε από την (1.2), προκύπτει

$$\phi_{ij}(h_0h,x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}(h_0,\phi(h,x))\phi_{kj}(h,x). \tag{1.3}$$

Για $h = e$ και $x = x_0$ παίρνουμε

$$\phi_{ij}(h_0,x_0) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}(h_0,x_0)\delta_{kj}. \tag{1.4}$$

Η ορίζουσα $\det[\phi_{ij}(\cdot,x_0)]$ είναι συνεχής στο h_0 και διάφορη από το μηδέν, αφού η ϕ_g είνα αμφιδιαφόριση, για κάθε $g \in G$. Αφού η ορίζουσα $\det[\phi_{ik}(h_0,\phi(h,x))]$ είναι κοντά στο $\det[\phi_{ik}(h_0,x_0)]$ και διάφορη του μηδενός, σταθεροποιώντας το j, λύνοντας το γραμμικό σύστημα (1.5) ως προς $\phi_{kj}(h,x)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.6), διαπιστώνουμε πως το $\phi_{kj}(h,x)$ θα είναι κοντά στο $\delta_{kj} = \phi_{kj}(e,x_0)$, δηλαδή πως οι ϕ_{kj} θα είναι συνεχείς στο (e,x_0), για κάθε $k,j \in \{1,\ldots,n\}$. $\square$

Λήμμα 1.3.4 *Έστω G μία k - διάστατη ομάδα Lie και m ένα μέτρο Haar σε αυτήν. Τότε, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : G \to \mathbb{R}$ με*

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f_n(g)h(g)dg = h(e)$$

για κάθε $h \in C(G,\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω ω ένα στοιχείο όγκου της G και (U, ψ) ένας χάρτης της G γύρω από το e με $\psi(e) = 0$, τέτοιος, ώστε

$$\psi_* \omega = \lambda dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k,$$

για κάποια λεία συνάρτηση $\lambda : \psi(U) \to \mathbb{R}^+_*$, όπου $\psi = (x_1, \ldots, x_k)$. Ορίζοντας την απεικόνιση

$$F : \psi(U) \to \mathbb{R}^k \text{ με τύπο } F(x_1, \ldots, x_k) = (\int_0^{x_1} \lambda(t, x_2, \ldots, x_k) dt, x_2, \ldots, x_k),$$

έχουμε $\det T_x F = \lambda(x)$. Άρα η F είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας της και μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ψ με την αναπαραμέτριση της $\varphi = F \circ \psi$ (Το αντίστοιχο της παραμέτρισης με το μήκος τόξου για καμπύλες σε ανώτερη διάσταση). Τότε για $\varphi = (y_1, \ldots, x_k)$ προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \varphi_* \omega &= \lambda \circ F^{-1}(F_*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)) \\ &= \frac{\lambda \circ F^{-1}}{\det T_{F^{-1}(x)} F} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k, \end{aligned}$$

δηλαδή η φ διατυρεί το κανονικό στοιχείο όγκου του $\mathbb{R}^k$. Ορίζουμε τη βάση περιοχών $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του e με $V_n = \varphi^{-1}(B(\phi(e), \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, ισχύουν $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{e\}$. Από τον ορισμό του, το V_n θα έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της k - διάσταστης μπάλας ακτίνας $1/n$, οπότε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m(V_n)}{m(V_{n+1})} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^k}{n^k} = 1.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Λήμμα του Uryshon (Βλέπε [6],Ch. VII, Sec. 4, Th. 1), υπάρχει $g_n : G \to [0, 1]$ με $\operatorname{supp} g_n \subseteq V_n$ και $g_n|_{V_{n+1}} = 1$. Ορίζουμε την

$$f_n : G \to \mathbb{R} : \quad f_n = \frac{1}{m(V_{n+1})} g_n.$$

Θα δείξουμε πως η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη ακολουθία συναρτήσεων.

Για τυχούσα συνάρτηση $h \in C(G, \mathbb{R})$, έχουμε την διάσπαση $h = h^+ - h^-$, όπου $h^+(w) = \max\{h(w), 0\}$ και $h^-(w) = \max\{0, -h(w)\}$ είναι θετικές συναρτήσεις. Αρκεί, λοιπόν, να εξετάσουμε την ειδική περίπτωση της $h \in C(G, \mathbb{R})$ με $h(g) \geq 0$ για κάθε $g \in G$. Έστω $\epsilon > 0$. Η h είναι συνεχής στο e και, αφού η οικογένεια $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βάση περιοχών του e, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $|h(w) - h(e)| < \epsilon$ για κάθε $w \in V_{n_0}$. Τότε

$$\frac{1}{m(V_n)} \int_{V_n} |h(w) - h(e)| dw \leq \epsilon,$$

για κάθε $n \geq n_0$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(V_n)} \int_{V_n} h(w)dw = h(e).$$

Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(V_{n+1})} \int_{V_n} h(w)dw = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m(V_n)}{m(V_{n+1})} \cdot \frac{1}{m(V_n)} \int_{V_n} h(w)dw \right) = h(e),$$

οπότε, λόγω της ανισότητας

$$\frac{1}{m(V_{n+1})} \int_{V_{n+1}} h(w)dw \leq \int_G f_n(w)h(w)dw \leq \frac{1}{m(V_{n+1})} \int_{V_n} h(w)dw,$$

προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f_n(w)h(w)dw = h(e).$$

□

Θεώρημα 1.3.5 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα συνεχώς στην M μέσω της $\phi : G \times M \to M$. Έστω, επίσης, πως για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση $\phi_g : M \to M$ είναι διαφορίσιμη. Τότε, η δράση ϕ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $h \in G$ η απεικόνιση $R_h : G \to G$ με $g \mapsto gh$ είναι λεία. Αν υπάρχουν ανοικτές περιοχές B_1 και B_2 των $e \in G$ και $x_0 \in M$, αντίστοιχα, ώστε η ϕ να είναι διαφορίσιμη στην περιοχή $B_1 \times B_2$ του $(e, x_0) \in G \times M$, τότε η $\phi \circ (R_h \times id_X)$ θα είναι διαφορίσιμη στην περιοχή $h^{-1}B_1 \times B_2$ του $(h^{-1}, x_0) \in G \times M$. Άρα, αρκεί να δείξουμε πως η ϕ είναι διαφορίσιμη σε μία ανοικτή περιοχή του (e, x_0).

Από την συνέχεια της ϕ υπάρχουν περιοχή V του $e \in G$ και $W \subseteq U$, όπου οι W και U είναι ομοιόμορφα κανονικές και γεωδαισιακά κυρτές περιοχές του x_0 με $VW \subseteq U$. Έστω $A = (\exp_{x_0})^{-1}(U)$ και $B = (\exp_{x_0})^{-1}(W)$. Εφόσον η $\exp_{x_0}$ είναι αμφιδιαφόριση στο A, αρκεί να δείξουμε πως η

$$\Phi = \exp_{x_0}^{-1} \circ \phi : V \times W \to A \subseteq T_{x_0}M$$

είναι διαφόρισιμη.

Η G είναι ομάδα Lie , οπότε υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Τότε, η απεικόνιση

$$V \times W \to T_{x_0}M : \quad (g, x) \mapsto f(g)\Phi(g, x)$$

είναι συνεχής και για σταθεροποίημενο $x \in M$ έχει φορέα ένα υποσύνολο του $\operatorname{supp} f$. Άρα, χρησιμοποιώντας το συμπαγές και αναλλοίωτο από τις δεξιές μεταφορές μέτρο Haar στην G, ορίζουμε την

$$F : W \to T_{x_0}M, \quad F(x) = \int_V f(g) \cdot \Phi(g, x) dg.$$

Για $g \in G$ σταθερό η Φ_g είναι διαφορίσιμη, αφού η ϕ_g είναι διαφορίσιμη εξ υποθέσεως, οπότε ορίζεται η παράγωγος $T_x\Phi_g : T_xM \to T_{x_0}M$. Από το Λήμμα 1.3.3, η απεικόνιση

$$T\Phi : V \times TW \to T_{x_0}M \text{ με } (g, (x, v)) \mapsto T_x\Phi_g(v)$$

είναι συνεχής και κάθε συντεταγμένη του πίνακα $T_x\Phi_g$ έχει συμπαγή φορέα που περιέχεται στο $\operatorname{supp} f$. Άρα, το ολοκλήρωμα $\int_V f(g) \cdot T_x\Phi_g dg$ ορίζεται και, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγλισης για το μέτρο Haar , υπάρχει η παράγωγος της F στο $x \in W$ και είναι ίση με

$$T_xF = \int_V f(g) \cdot T_x\Phi_g dg.$$

Από γνωστή ιδιότητα για το ολοκλήρωμα Haar, η οικογένεια απεικονίσεων $\{DF(x)\}_{x\in W}$ εξαρτάται συνεχώς από το $x \in W$. Από το προηγούμενο Λήμμα, μικραίνοντας ενδεχομένως το V, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : V \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_V f_n(g) \cdot h(g) dg = h(e)$$

για κάθε $h \in C(V, \mathbb{R})$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_V f_n(g) \cdot T_{x_0}\Phi_g dg = T_{x_0}\Phi_e = id_{T_{x_0}M}.$$

Η $id_{T_{x_0}M} \in GL(T_{x_0}M)$ είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός και το $GL(T_{x_0}M) \subseteq \operatorname{End}(T_{x_0}M)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\operatorname{End}(T_{x_0}M)$. Επομένως, υπάρ-χει $\epsilon > 0$, ώστε $B_{||\cdot||}(id_{T_{x_0}M}, \epsilon) \subseteq GL(T_{x_0}M)$, όπου $||\cdot||$ είναι μία νόρμα στον $\operatorname{End}(T_{x_0}M)$ (όλες οι νόρμες του χώρου $\operatorname{End}(T_{x_0}M)$ είναι ισοδύναμες).

Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$\left\| \int_V f_{n_0}(g) \cdot T_{x_0}\Phi_g dg - id_{T_{x_0}M} \right\| < \epsilon,$$

οπότε, θέτοντας $f = f_{n_0}$, έχουμε $T_{x_0}F \in GL(T_{x_0}M)$. Επομένως, η F είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο x_0. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε πως η $F \circ \exp_{x_0} \circ \Phi = F \circ \phi|_{V\times W}$ είναι διαφορίσιμη σε μία περιοχή του (e, x_0):

Υπάρχει συμμετρική περιοχή V_1 του e στην G, ώστε $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$. Υποθέτοντας πως $\operatorname{supp} f \subseteq V_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}(F\circ\phi)(h,x) &= \int_{V_1} f(g)\cdot\Phi(g,\phi(h,x))dg\\ &= \int_{V_1} f(g)\cdot(\exp_{x_0}^{-1}\circ\phi)(g,\phi(h,x))dg\\ &= \int_{V_1} f(g)\cdot(\exp_{x_0}^{-1}\circ\phi)(gh,x)dg\\ &= \int_{V_1h} f(wh^{-1})\cdot\Phi(w,x)dw,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει, διότι το μέτρο Haar επιλέχθηκε να είναι αναλλοίωτο από τις δεξιές μεταφορές.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H : G\times V_1\times W \to T_{x_0}M : \quad (w,h,x)\mapsto f(wh^{-1})\Phi(w,x)$$

και την απεικόνιση

$$\psi : G\times G\to G : \quad (w,h)\mapsto wh^{-1}.$$

Η $f\circ\psi$ έχει μερικές παραγώγους ως προς h που είναι συνεχείς ως προς τις μεταβλητές w και h. Επίσης, εξ υποθέσεως, η ϕ_w έχει μερικές παραγώγους ως προς x, οπότε το ίδιο ισχύει και για την Φ_w. Από το Λήμμα 1.3.3, οι μερικές παραγώγοι τις Φ ως προς x θα είναι συνεχείς ως πρός της μεταβλητές w και x. Άρα, η H θα έχει μερικές παραγώγους ως πρός h και x και αυτές θα είναι συνεχείς ως προς τις μεταβλητές w, h και x.

Σταθεροποιώντας τα h και x, ο φορέας της $H_{(h,x)}$ περιέχεται στο $\operatorname{supp} f\cdot h$ που είναι συμπαγές και ισχύει $m(\operatorname{supp} f\cdot h) = m(\operatorname{supp} f) < \infty$. Αφού η H_w έχει μερικές παραγώγους ως πρός h και x που είναι συνεχείς ως προς w, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγλισης, η $F\circ\phi$ θα είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως πρός τις μεταβλητές h, x και η διαφόριση θα περνάει μέσα στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση H. Συνεπώς, η $\phi|_{V_1\times W} \in C^1(V_1\times W, V_1W)$, οπότε, λόγω της αρχικής παρατήρησης στην απόδειξη, $\phi\in C^1(G\times M, M)$.

Ορίζεται, λοιπόν, η εφαπτόμενη δράση της ϕ στον TM

$$T\phi : G\times TM\to TM : \quad (g,(p,u_p))\mapsto T_p\phi_g(u_p),$$

η οποία ικανοποιεί την αρχική υπόθεση, οπότε, με την ίδια διαδικασία απόδειξης που εφαρμόστηκε ως εδώ, συνάγεται ότι $T\phi \in C^1(G \times TM, TM)$, δηλαδή $\phi \in C^2(G \times M, M)$. Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $\phi \in C^k(G \times M, M)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε η ϕ θα είναι λεία. □

Πόρισμα 1.3.6 *Έστω G, H δύο ομάδες Lie με αντίστοιχα μοναδιαία στοιχεία e_G και e_H. Έστω, επίσης, $f : G \to H$ συνεχής ομομορφισμός. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε στην H τη δράση

$$\Phi : G \times H \to H : \quad (g, h) \mapsto f(g)h,$$

η οποία ικανοποιεί της υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.5 και συνεπώς θα είναι διαφορίσιμη δράση. Άρα και η $\Phi_{e_H} = f$ θα είναι διαφορίσιμη. □

Θεώρημα 1.3.7 *Η $I(M, d)$ δρα διαφορίσιμα στην M.*

Απόδειξη. Η $I(M, d)$ δρα συνεχώς στην M και κάθε $f \in I(M, d)$ είναι λεία απεικόνιση από το Θεώρημα 1.2.2. Επομένως, η δράση $(f, x) \mapsto f(x)$ της $I(M, d)$ στην M ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.5 και συνεπώς δρα διαφορίσιμα στην M. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε έναν, αντίστοιχο με το Θεώρημα 1.0.11, χαρακτηρισμό των ισομετρικών δράσεων πολλαπλοτήτων Riemann, χρησιμοποιώντας ένα αντίστοιχο θεώρημα για μετρικούς τανυστές. Η M θα είναι μία συνεκτική και παρασυμπαγής διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Θεώρημα 1.3.8 *Αν η ομάδα Lie G δρα γνήσια και διαφορίσιμα στην M, τότε υπάρχει G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής Riemann στην M.*

Απόδειξη. Έστω ϕ η δράση της G στην M. Εφόσον η M είναι παρασυμπαγής, αξιοποιώντας μία διαμέριση της μονάδας, κατασκευάζουμε έναν μετρικό τανυστή τ στην M. Ο M/G είναι παρασυμπαγής χώρος, οπότε από το 0.3.5(4) και το 0.3.3, υπάρχουν θεμελιώδη σύνολα F_1 και F_2 για τη γνήσια δράση της G στην M με $F_1 \subseteq F_2$, όπου το F_1 είναι κλειστό και το F_2 να είναι ανοικτό στην M. Από το Λήμμα του Uryshon, υπάρχει λεία συνάρτηση $f : M \to [0, 1]$ με $\operatorname{supp} f \subseteq F_2$ και $f|_{F_1} = 1$.

Για κάθε $x \in M$ και u, $v \in T_xM$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\alpha_x(u, v) : G \to \mathbb{R} : \quad \alpha_x(u, v)(g) = f(gx)\tau(T_x\phi_g(u), T_x\phi_g(v)),$$

η οποία είναι λεία με συμπαγή φορέα. Πράγματι, υπάρχει U_x περιοχή του x, ώστε το $G(U_x, F_2)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Για $g \in G$ με $gx \notin F_2$ θα ισχύει $f(gx) = 0$, οπότε $\alpha_x(u,v)(g) = 0$. Επομένως

$$\mathrm{supp}(\alpha_x(u,v)) \subseteq \overline{G(x, F_2)} \subseteq \overline{G(U_x, F_2)}.$$

Χρησιμοποιώντας ένα αναλλοίωτο από τις αριστερές μεταφορές μέτρο Haar, ορίζουμε τη διγραμμική απεικόνιση

$$\widetilde{\tau}_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} : \quad \widetilde{\tau}_x(u,v) = \int_G \alpha_x(u,v)(g)dg.$$

Η $\widetilde{\tau}$ είναι λεία ως πρός το σημείο εφαρμογής $x \in M$ και είναι G - αναλλοίωτη διγραμμική μορφή. Επίσης, το σύνολο $\phi_x^{-1}(F_1)$ είναι μη κενό, αφού το F_1 τέμνει κάθε τροχιά ως θεμελιώδες σύνολο. Άρα, για $u \in T_xM \backslash \{0\}$ με $\widetilde{\tau}_x(u,u) = 0$ το σύνολο

$$\begin{aligned} C = \{g \in G : \alpha_x(u,u)(g) \neq 0\} &= \{g \in G : f(gx) \neq 0\} \\ &= \{g \in G : gx \in f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})\} \\ &= G(\{x\}, f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})) \\ &= \phi_x^{-1}(f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})) \end{aligned}$$

είναι ανοικτό και μη κενό, αφού περιέχει το σύνολο $\phi_x^{-1}(F_1)$. Συνεπώς, έχει μη μηδενικό μέτρο Haar, που είναι άτοπο. Άρα, αν για κάποιο $u \in T_xM$ ισχύει $\widetilde{\tau}_x(u,u) = 0$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει και $u = 0$, οπότε η διγραμμική απεικόνιση $\widetilde{\tau}_x$ ορίζει ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x \in M$, δηλαδή η $\widetilde{\tau}$ είναι ένας G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής. Επειδή η επαγόμενη από την $\widetilde{\tau}$ μετρική $\widetilde{d}$ ορίζει στην M την προϋπάρχουσα τοπολογία, η $\widetilde{\tau}$ θα είναι ο ζητούμενος G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής. $\square$

Παρατήρηση 1.3.9 Θεωρούμε μία συμπαγή και συνεκτική ομάδα Lie G. Έστω L_g, R_g η αριστερή και η δεξιά της μεταφορά, αντίστοιχα, και Ω ένα διαναλλοίωτο στοιχείο όγκου (δηλαδή $(L_g)^*\Omega = (R_g)^*\Omega = \Omega$) για κάθε $g \in G$) στην G με $\mathrm{vol}_\Omega(G) = 1$ τέτοιο, ώστε οι L_g, R_g να διατηρούν τον προσανατολισμό, για κάθε $g \in G$. Τότε, με την κατασκευή από το προηγούμενο Θεώρημα, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν διαναλλοίωτο μετρικό τανυστή στην G.

Πράγματι έστω $\widetilde{\Phi}_e$ μια συμμετρική, θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή στον T_eG. Έστω

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(T_eG) : \quad \underset{g}{\mathrm{Ad}} = T_e(L_g \circ R_{g^{-1}})$$

η adjoint αναπαράσταση της ομάδας G. Για κάθε $u,\ v \in T_eG$ ορίζουμε

$$f : G \to \mathbb{R}, \quad f(g) = ((\overset{*}{\underset{g}{\mathrm{Ad}}})\widetilde{\Phi}_e)(u,v) = \widetilde{\Phi}_e(\underset{g}{\mathrm{Ad}}(u), \underset{g}{\mathrm{Ad}}(v)).$$

Τέλος, ορίζουμε την διγραμμική μορφή Φ_e με

$$\Phi_e(u,v) = \int_G f(g)\Omega(g)$$

και τον μετρικό τανυστή Φ με

$$\Phi_g(u_g, v_g) = ((L^*_{g^{-1}})\Phi_e)(u_g, v_g) = \Phi_e(T_gL_{g^{-1}}(u_g), T_gL_{g^{-1}}(v_g))$$

για κάθε $u_g,\ v_g \in T_gG$.

Αν για κάθε $g \in G$ ισχύει η σχέση $(\mathrm{Ad}^*_g)\Phi_e = \Phi_e$, τότε

$$(L^*_{g^{-1}})\Phi_e = (L^*_{g^{-1}} \circ (L^*_g \circ R^*_{g^{-1}}))\Phi_e = (R^*_{g^{-1}})\Phi_e,$$

δηλαδή ο αριστερά αναλλοίωτος τανυστής Φ που ορίσαμε είναι ο ίδιος με τον δεξιά αναλλοίωτο τανυστή $(R^*_{g^{-1}})\Phi_e$, οπότε ο Φ θα είναι ο ζητούμενος διαναλλοίωτος τανυστής.

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε πως $(\mathrm{Ad}^*_g)\Phi_e = \Phi_e$, για κάθε $g \in G$: Για κάθε $g \in G$ και $u,\ v \in T_eG$ έχουμε

$$\begin{aligned}
((\overset{*}{\underset{g}{\mathrm{Ad}}})\Phi_e)(u,v) &= \int_G ((\overset{*}{\underset{w}{\mathrm{Ad}}})\widetilde{\Phi}_e)(\underset{g}{\mathrm{Ad}}(u), \underset{g}{\mathrm{Ad}}(v))\Omega(w) \\
&= \int_G ((\overset{*}{\underset{wg}{\mathrm{Ad}}})\widetilde{\Phi}_e)(u,v)\Omega(w) \\
&= \int_G f(R_g(w))\Omega(w).
\end{aligned}$$

Όμως, η R_g είναι αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό και $(R^*_g)\Omega = \Omega$. Επομένως

$$\int_G f(R_g(w))\Omega(w) = \int_G f(R_g(w))((R^*_g)\Omega)(w) = \int_G f(w)\Omega(w),$$

οπότε $(\mathrm{Ad}^*_g)\Phi_e = \Phi_e$. □

Θεώρημα 1.3.10 *Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann. Τότε, η ομάδα $I(M,d)$ δρα γνήσια, διαφορίσιμα και πιστά στην M. Αντίστροφα, έστω G μία ομάδα Lie που δρα πιστά, γνήσια και διαφορίσιμα σε μία λεία πολλαπλότητα*

M. Τότε, υπάρχει μετρικός τανυστής Riemann g με επαγόμενη μετρική d και ένας λείος μονομορφισμός $\Phi : G \to I(X, d)$, ωστε ο Φ να είναι αμφιδιαφόριση έπι της εικόνας του, το $\Phi(G)$ να είναι κλειστή υποομάδα της $I(X, d)$ και η φυσική δράση $(\Phi(G), M)$ να είναι ισοδύναμη με την αρχική (G, M).

Απόδειξη. Το πρώτο κομμάτι αποδεικνύεται με επίκληση των τελευταίων αποτελεσμάτων μας.

Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα, γνήσια και πιστά στην M με δράση ϕ. Από το Θεώρημα 1.3.8, υπάρχει G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής Riemann στην M με επαγώμενη μετρική d.

Ακολουθώντας την διαδικασία απόδειξης του Θεωρήματος 1.0.11, ορίζεται ο μονομορφισμός

$$\Phi : G \to H(M) : \quad g \mapsto \phi_g,$$

που είναι ομοιομορφισμός επί της είκόνας του $\Phi(G)$. Επειδή η $\Phi(G)$ είναι κλειστή υποομάδα της $I(M, d)$, είναι ομάδα Lie. Ο Φ είναι συνεχής ομομορφισμός μεταξύ των ομάδων Lie G και $I(M, d)$, οπότε, από το Πόρισμα 1.3.6, θα είναι λεία απεικόνιση. Το ίδιο θα ισχύει και για την $(\Phi|_G)^{-1} : \Phi(G) \to G$, οπότε ο Φ θα είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας του. Επομένως, η G θα είναι αμφιδιαφορίσιμη και ομομορφική με την $\Phi(G)$. Η ισοδυναμία των δράσεων (G, M) και $(\Phi(G), M)$ προκύπτει άμεσα. $\square$

Κεφάλαιο 2

Γνήσιες δράσεις και διασπάσεις τοπολογικών και διαφορικών δομών σε καρτεσιανά γινόμενα

Γενική βιβλιογραφία για διασπάσεις σε καρτεσιανά γινόμενα τοπολογικών και διαφορικών δομών: [1], [2], [3] και [4].

Η τοπική δομή των γνήσιων δράσεων

2.0 Δίσκοι στην τοπολογική περίπτωση

Ορισμός 2.0.1 *Έστω X ένας G - χώρος και $x \in X$. Ένα υποσύνολο S του X που περιέχει το x θα λέγεται* **δίσκος (slice)** *στο x, αν υπάρχει G - αναλλοίωτη περιοχή U του x και μία G - απεικόνιση $f : U \to G/G_x$ με $f^{-1}(\{G_x\}) = S$.*

Παρατήρηση 2.0.2 Από τον ορισμό προκύπτει ότι $U = GS$, ότι η f καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές της στο S, ότι είναι επί και ότι η $f|_{Gy} : Gy \to G/G_x$ είναι επί. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός $Gy \cong G/G_y$, ισχύει η σχέση $G_s \subseteq G_x$ για κάθε $s \in S$, ενώ η $f|_{Gs}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν $G_s = G_x$. Διαισθητικά ο δίσκος S τέμνει την τροχιά του x μόνο στο x, ενώ μπορεί να περιέχει τα «κομμάτια» τροχιών $G_x s$ από τα $s \in S$, δηλαδή $G_s \subseteq G_x$. Όταν $G_s = G_x$ τότε ο δίσκος τέμνει την τροχιά του s μόνο στο s.

Παρατήρηση 2.0.3 Η έννοια «δίσκος» είναι συγγενική με την έννοια τοπική τομή: Έστω (G, X) μία δράση επί του τοπικά συμπαγή χώρου X, $x \in X$ και $p :\to X/G$ η απεικόνιση στον χώρο των τροχιών. Το $T \subseteq X$ λέγεται **τοπική τομή (local section)** στο x για τη δράση, αν $x \in T$, το $p(T)$ είναι σχετικά συμπαγής περιοχή του $p(x)$ στον X/G και υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $\sigma : p(T) \to X$ με $p \circ \sigma = i$, όπου i είναι η ένθεση του $p(T)$ στον X/G. Η Πρόταση 2.0.7 συσχετίζει, υπό περιορισμούς, τις έννοιες «δίσκος» και «τοπική τομή». Εντούτοις, η ύπαρξη δίσκων δεν συνεπάγεται την ύπαρξη τοπικών τομών, όπως δείχνει το επόμενο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη δράση της $G = \{\pm id_{\mathbb{R}^2}\}$ στον χώρο $X = \mathbb{R}^2$. Τότε $G_0 = G$, οπότε ο X είναι ολικός δίσκος στο 0. Εντούτοις, δεν υπάρχει τοπική τομή στο 0. Πράγματι, αν $V = p(T)$ είναι μία περιοχή του 0 στον χώρο X/G και $\sigma : V \to X$ είναι μία συνεχής απεικόνιση, τότε θα υπάρχει κύκλος $\mathbb{S}^1_\epsilon$ ακτίνας $\epsilon > 0$ ώστε $p(\mathbb{S}^1_\epsilon) \subseteq V$. Προφανώς $p(\mathbb{S}^1_\epsilon) \cong \mathbb{RP}^1$ (: ο 1 - διάστατος προβολικός χώρος).

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : p(\mathbb{S}^1_\epsilon) \cong \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{S}^1 : \quad \phi = \frac{\sigma|_{p(\mathbb{S}^1_\epsilon)}}{||\sigma|_{p(\mathbb{S}^1_\epsilon)}||},$$

η οποία είναι ολική τομή της κανονικής απεικόνισης $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$. Θέτοντας

$$A = \{[x] \in \mathbb{RP}^1 : \phi([x]) = (x_1, x_2),\ x_1 > 0\}$$

και

$$B = \{[x] \in \mathbb{RP}^1 : \phi([x]) = (x_1, x_2),\ x_1 < 0\}$$

παρατηρούμε πως τα A και B είναι ανοικτά σύνολα με κενή τομή και με την ιδιότητα $\mathbb{RP}^1 \backslash \{[0, 1]\} = A \cup B$. Όμως $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$. Επομένως, το $\mathbb{RP}^1 \backslash [0, 1] = A \cup B$ είναι συνεκτικό. Άρα είτε $A = \emptyset$, είτε $B = \emptyset$. Έστω, $B = \emptyset$. Τότε, επειδή η ϕ είναι ολική τομή της $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$, η εικόνα της θα είναι το μισό ανοικτό ημικύκλιο του $\mathbb{S}^1$ μαζί με έναν από τους δύο πόλους του. Αλλά, η εικόνα της ϕ πρέπει να είναι συμπαγές σύνολο, αντίφαση. $\square$

Λήμμα 2.0.4 *Έστω X ένας G -χώρος και $x \in X$ με G_x συμπαγές. Αν υπάρχει δίσκος στο x, τότε υπάρχει G - περιοχή U του x, η οποία να είναι γνήσιος G - χώρος.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού, υπάρχει G - περιοχή U του x και μία G - απεικόνιση $f : U \to G/G_x$. Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} G\times U & \longrightarrow & U \\ {\scriptstyle id_G\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G\times G/G_x & \longrightarrow & G/G_x \end{array}$$

Η G_x είναι συμπαγής και συνεπώς κλειστή, οπότε η G δρα γνήσια στον χώρο G/G_x, από το 0.2.12 (3ο παράδειγμα). Επειδή η id_G είναι γνήσια, από το 0.2.5(1), η G δρα γνήσια στην U, οπότε η U είναι η ζητούμενη περιοχή. □

Μια μορφή αντιστρόφου του παραπάνω Λήμματος αποτελεί το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου. Όπως θα φανεί από την επόμενη Πρόταση, η ύπαρξη δίσκου σε κάποιο σημείο x του χώρου δίνει σημαντικές πληροφορίες για την τοπική δομή του χώρου κοντά στο x και για την συμπεριφορά της δράσης εκεί.

Πρόταση 2.0.5 *Έστω G μία τοπικά συμπαγής ομάδα και X ένας G - χώρος. Υποθέτουμε ότι η G_x είναι συμπαγής και ότι το $S \subseteq X$ με $x \in S$ είναι τέτοιο, ώστε το σύνολο $U = GS$ να είναι περιοχή του x. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το S είναι δίσκος στο x.*

2. *Το S είναι G_x - αναλλοίωτο, το U είναι περιοχή του x και η απεικόνιση $G \times S \to U : \quad (g,s) \mapsto gs$, επάγει ομοιομορφισμό $\psi : G \times_{G_x} S \to U$, όπου στο $G \times S$ θεωρούμε τη δράση*

$$G_x \times (G \times S) \to G \times S : \quad (h,(g,s)) \mapsto (gh^{-1}, hs).$$

3. *Το S έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

   (α′) *Είναι G_x - αναλλοίωτο.*

   (β′) *Αν $gS \cap S \neq \emptyset$, τότε $g \in G_x$.*

   (γ′) *Υπάρχει περιοχή V του S στο $U = GS$ τέτοια, ώστε το σύνολο $G(S,V)$ να είναι σχετικά συμπαγές.*

   (δ′) *Το $U = GS$ είναι περιοχή του x και το S είναι κλειστό στο U.*

Απόδειξη. (1) ⇒ (3): Τα *(α′)*, *(β′)* και *(δ′)* είναι προφανή.

Για το *(γ′)*, η G δρα γνήσια στο U, από το Λήμμα 2.0.4, και η $p : G \to G/G_x$ είναι ανοικτή και γνήσια απεικόνιση. Άρα, ο G/G_x είναι τοπικά συμπαγής χώρος και μπορούμε να επιλέξουμε σχετικά συμπαγή περιοχή K του G_x στον

G/G_x. Το $p^{-1}(\overline{K})$ είναι συμπαγές στην G, αφού η p είναι γνήσια και ισχύει $\overline{p^{-1}(K)} \subseteq p^{-1}(\overline{K})$, λόγω συνέχειας της p. Συνεπώς, το $p^{-1}(K)$ είναι σχετικά συμπαγές στην G.

Εξ ορισμού, υπάρχει G - αναλλοίωτη περιοχή U του x στον X και G - απεικόνιση $f : U \to G/G_x$ με $f^{-1}(G_x) = S$. Λόγω της συνέχειας της f, θα υπάρχει περιοχή V του x με $f(V) \subseteq K$. Τότε, για $g \in G(V, V)$ θα υπάρχει $s \in V$ με

$$gs \in V \Rightarrow f(gs) = gf(s) = gG_x \in K.$$

Άρα

$$p(g) \in K \Rightarrow g \in p^{-1}(K) \Rightarrow G(V, V) \subseteq p^{-1}(K),$$

δηλαδή το $G(V, V)$ θα είναι σχετικά συμπαγές και συνεπώς και το $G(S, V) \subseteq G(V, V)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Έστω ϕ η δράση της G στον X. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[r, "\phi|_{G\times S}"] \arrow[d, "q"'] & U \\
G \times_{G_x} S \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Η G_x δρα γνήσια στον χώρο $G \times S$, αφού είναι συμπαγής, και η $\psi : G \times_{G_x} S \to U$ είναι καλά ορισμένη, συνεχής και επί. Επίσης, από τα *(3)(α′)* και *(3)(β′)*, έχουμε $G(S, S) = G_x$, οπότε, αν $g_1 s_1 = g_2 s_2$, τότε

$${g_1}^{-1} g_2 s_2 = s_1 \Rightarrow {g_2}^{-1} g_1 \in G(S, S) = G_x.$$

Άρα $[g_1, s_1]_{G_x} = [g_1 {g_1}^{-1} g_2, {g_2}^{-1} g_1 s_1]_{G_x} = [g_2, s_2]_{G_x}$, δηλαδή η ψ είναι και 1-1. Από το μεταθετικό διάγραμμα βλέπουμε πως, αν η $\phi|_{G\times S}$ είναι γνήσια, τότε και η ψ θα είναι γνήσια, οπότε η ψ θα είναι κλειστή και συνεπώς ομοιομορφισμός. Θα αποδείξουμε ότι η $\phi|_{G\times S}$ είναι γνήσια απεικόνιση:

Έστω $\{u_i\}_{i\in I}$ ένα δίκτυο στο U ώστε $u_i \to u,\ u \in U$. Τότε $u_i = g_i s_i, g_i \in G, s_i \in S$, οπότε για $u = hs, h \in G$ και $s \in S$ θα έχουμε $h^{-1} g_i s_i \to s \in S$. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε εξ αρχής πως $u \in S$. Από το *(3)(γ′)*, υπάρχει περιοχή V του u τέτοια, ώστε το $G(S, V)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Επομένως, υπάρχει $i_\circ \in I$, ώστε για κάθε $i \geq i_\circ$ να ισχύει $g_i s_i = u_i \in V$, δηλαδή $g_i \in G(S, V)$ για κάθε $i \geq i_\circ$. Άρα, λόγω της σχετικής συμπάγειας του $G(S, V)$, υπάρχει $g_{i_j} \to g$ για κάποιο $g \in G$. Τότε $s_{i_j} \to g^{-1} u \in S$, αφού το S είναι κλειστό, από το *(3)(δ')*. Άρα, η $\phi|_{G\times S}$ είναι γνήσια.

(2) $\Rightarrow$ (1): Η προβολή $\varphi : G \times S \to G$ είναι G_x - απεικόνιση και επάγει την

$$\tilde{\varphi} : G \times_{G_x} S \to G/G_x,$$

που είναι επίσης G- απεικόνιση, θεωρώντας στον $G \times_{G_x} S$ τη δράση

$$G \times (G \times_{G_x} S) \to G \times_{G_x} S : \quad (g, [h, s]_{G_x}) \mapsto [gh, s]_{G_x}.$$

Από την (2), η ψ^{-1} είναι ομοιομορφισμός και G - απεικόνιση, οπότε ορίζεται η

$$f : U \to G/G_x : \quad f = \tilde{\varphi} \circ \psi.$$

Η f είναι συνεχής G - απεικόνιση με

$$f^{-1}(\{G_x\}) = \psi^{-1}(G_x \times S) = G_x S = S,$$

απ' όπου έπεται $x \in S$, αφού $f(x) = G_x$. Άρα, το S θα είναι δίσκος στο x. $\square$

Παρατήρηση 2.0.6 Η ψ γίνεται G - απεικόνιση θεωρώντας στον U τη φυσιολογική δράση και στον $G \times_{G_x} S$ τη δράση

$$G \times (G \times_{G_x} S) \to G \times_{G_x} S : \quad (g, [h, s]_{G_x}) \mapsto [gh, s]_{G_x}.$$

Πρόταση 2.0.7 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής γνήσιος G - χώρος, $p : X \to X/G$ η απεικόνιση - πηλίκο και $x \in X$. Έστω, επίσης, $T \subseteq X$ μία τοπική τομή (βλέπε 2.0.3). Αν $G_y \subseteq G_x$ για κάθε $y \in \sigma(V)$, το $S = G_x\sigma(V)$ είναι δίσκος στο x,* όπου *$V = p(T)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το S ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.0.5(3):

Έστω $W \subseteq V^\circ$ ανοικτή περιοχή του $p(x)$. Τότε, ισχύει $\sigma(W) \subseteq p^{-1}(W)$, δηλαδή $G\sigma(W) \subseteq p^{-1}(W)$, αφού το $p^{-1}(W)$ είναι G - αναλλοίωτο. Επίσης, για $h \in p^{-1}(W)$ θα ισχύει $\sigma([h]) \in \sigma(W)$ και $p(\sigma([h])) = [h]$. Άρα, $\sigma([h]) = gh$ για κάποιο $g \in G$, κατά συνέπεια $h \in G\sigma(W)$. Επομένως,

$$G\sigma(W) = p^{-1}(W),$$

οπότε το $p^{-1}(W) \subseteq U = GS$ είναι ανοικτή περιοχή του x στο U. Τα σύνολα G_x και $\sigma(V)$ είναι συμπαγή, οπότε το $S = G_x\sigma(V)$ είναι συμπαγές και συνεπώς κλειστό στο $U = GS$.

Αφού ο X είναι τοπικά συμπαγής και το S είναι συμπαγές, υπάρχει μία συμπαγής περιοχή D του S στον X, οπότε το $G(S,D)$ είναι συμπαγές, από το 0.2.3. Επομένως, η $F = U \cap D$ θα είναι περιοχή του S στο U με $G(S,F) \subseteq G(S,D)$. Άρα, το $G(S,F)$ είναι σχετικά συμπαγές. Τέλος, αν $gS \cap S \neq \emptyset$, τότε υπάρχουν $h_1, h_2 \in G_x$ και $[w_1], [w_2] \in V$ τέτοια, ώστε $gh_1\sigma([w_1]) = h_2\sigma([w_2]) \Rightarrow [w_1] = [w_2] \Rightarrow h_2^{-1}gh_1 \in G_{\sigma([w_1])} \subseteq G_x \Rightarrow g \in G_x$. Άρα, το S θα είναι δίσκος στο x. $\square$

Πόρισμα 2.0.8 *Με τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.0.5, αν το S είναι δίσκος στο $x \in X$, η ένθεση $i : S \hookrightarrow U$ επάγει ομοιομορφισμό $\tilde{i} : S/G_x \to U/G$ επί του υποσυνόλου U/G του X/G, με αντίστροφη την επαγώμενη απεικόνιση $\tilde{\rho} : U/G \to S/G_x$ από την $\rho : U \to S/G_x$ με τύπο $\rho(y) = G_x(g^{-1}y)$, όπου $g \in G$ τέτοιο, ώστε $g^{-1}y \in S$.*

Απόδειξη. Η $\tilde{i}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής όπως προκύπτει από το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & U = GS \arrow[d, "p"] \arrow[dl, "\rho"'] \\
S/G_x \arrow[r, shift left, "\widetilde{i}"] & U/G \arrow[l, shift left, "\widetilde{\rho}"]
\end{tikzcd}$$

όπου οι p και q είναι οι κανονικές απεικονίσεις στους αντίστοιχους χώρους του διαγράμματος.

Επειδή το S είναι κλειστό υποσύνολο του U, η i είναι κλειστή απεικόνιση. Επομένως, για $A \subseteq S/G_x$ κλειστό σύνολο, η μεταθετικότητα του διαγράμματος δείνει $\rho^{-1}(A) = i(q^{-1}(A)$ που είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Συνεπώς η ρ είναι συνεχής, οπότε, το ίδιο ισχύει και για την $\widetilde{\rho} = \widetilde{i}^{-1}$. $\square$

Υπάρχει και ένας άλλος χαρακτηρισμός για το πότε ένα σύνολο S είναι δίσκος σε ένα σημείο $x \in X$.

Ορισμός 2.0.9 *Έστω X ένας G - χώρος και A ένα G - υποσύνολο του. Μία απεικόνιση $r : X \to A$ θα λέγεται G -* **retraction***, αν είναι G - απεικόνιση και $r|_A = id_A$.*

Πρόταση 2.0.10 *Έστω X ένας G -χώρος με $x \in X$ και U περιοχή του x που είναι γνήσιος G - χώρος. Ένα υποσύνολο S του U που περιέχει το x θα είναι δίσκος στο x τότε και μόνον τότε, όταν υπάρχει G - retraction $r : V \to Gx$ επί* *του* Gx *με* $r^{-1}(\{x\}) = S$*, όπου το* $V = GS \subseteq U$ *είναι περιοχή του* x*.*

Απόδειξη. Έστω ϕ η δράση της G στον X. Αφού ο U είναι γνήσιος G - χώρος, η $\phi_x : G \to Gx$ επάγει τον ομοιομορφισμό $\tilde{\phi_x} : G/G_x \to Gx$. Έστω $f : V \to G/G_x$ η απεικόνιση που ορίζει το δίσκο S. Το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα δείχνει τη σχέση μεταξύ των f και r και αποδεικνύει την Πρόταση:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & Gx \\
G/G_x \arrow[ur, "\tilde{\phi}_x"'] &
\end{tikzcd}$$

□

2.1 Οι δίσκοι στις τοπολογικές δράσεις

Με βασικά εργαλεία όσα αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και τα δύο προηγούμενα Λήμματα, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την ύπαρξη δίσκων στίς κατηγορίες των τοπολογικών και διαφορίσιμων δράσεων. Η βασική ιδέα είναι να μεταφέρουμε το πρόβλημα σε G - χώρους που έχουν δομή εσωτερικού γινομένου συμβατή με την τοπολογία τους και να εμβαπτίσουμε τη δράση της G σε αυτούς. Στη διαφορίσιμη περίπτωση, η απόδειξη ακολουθεί την ίδια βασική ιδέα, μετά την εισαγωγή ένος G - αναλλοίωτου μετρικού τανυστή στην G - πολλαπλότητα, η ύπαρξη του οποίου διασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.3.8.

Παρατήρηση 2.1.1 Οι λόγοι για τους οποίους δουλεύουμε σε πλήρως κανονικούς χώρους είναι ότι αυτοί οι χώροι διαθέτουν πολλές συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι υπόχωροι τους εξακολουθούν να είναι πλήρως κανονικοί χώροι.

Λήμμα 2.1.2 *Έστω* X *ένας πλήρως κανονικός (completely regular) χώρος και* C *ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο του. Έστω, επίσης,* $f : C \to [0,1]$ *μία συνεχής συνάρτηση με* $\operatorname{supp} f \subseteq C$*. Τότε, υπάρχει συνεχής επέκταση* $F : X \to [0,1]$ *της* f *στον* X*.*

Απόδειξη. Ο X είναι πλήρως κανονικός, οπότε, από το [6], Ch. VII, Th. 7.3, υπάρχει $\rho : X \to P^X$ που είναι ομοιομορφισμός του X επί της εικόνας του, όπου το $P^X = \prod\{I_f : f \in I^X\}$ και $\{I_f : f \in I^X\}$ είναι μία οικογένεια μοναδιαίων διαστημάτων με δείκτες από το σύνολο I^X των συνεχών συναρτήσεων f :

$X \to I$. Το P^X είναι συμπαγές, από το Θεώρημα του Tychonoff. Άρα, από το [6], Ch. XI, Th. 8.2 ορίζεται ο $\widetilde{X} = \overline{\rho(X)}^{P^X}$ και είναι η Stone - Čech συμπαγοποίηση του X.

Έστω $A = \overline{\rho(C)}^{\widetilde{X}}$. Το C είναι τοπικά συμπαγές και πυκνό υποσύνολο του συμπαγούς $A \subseteq \widetilde{X}$ και η $\rho|_C : C \to \rho(C)$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα, το A θα είναι η Stone - Čech συμπαγοποίηση του C και το $\rho(C)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του A από το [6], Ch. XI, Th. 8.3. Θέτοντας $f(y) = 0$ για κάθε $y \in A \backslash C$, επεκτείνουμε την f συνεχώς στο A. Το $A \subseteq \widetilde{X}$ είναι κλειστό και ο $\widetilde{X}$ είναι συμπαγής, οπότε, από το Θεώρημα του Tietze, υπάρχει συνεχής επέκταση $F' : \widetilde{X} \to [0,1]$ της f στον $\widetilde{X}$. Ορίζοντας $F : X \to [0,1]$ με $F = F'|_X$, έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.1.3 *Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο ενός πλήρως κανονικού χώρου X και έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του X ξένο ως πρός το F. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $R : X \to [0,1]$ ώστε να ισχύουν $R|_F = 0$ και $R|_K = 1$.*

Απόδειξη. Ο X είναι πλήρως κανονικός, οπότε για κάθε $p \in K$ υπάρχει συνεχής $f_p : X \to [0,1]$ με $f_p(p) = 1$ και $f_p|_F = 0$. Για κάθε $p \in X$ θέτουμε $V(p) = \{q \in X : f_p(q) > 1/2\}$. Για κάθε $p \in X$ το $V(p)$ είναι ανοικτή περιοχή του p. Τότε $K \subseteq \bigcup_{p \in K} V(p)$, οπότε, λόγω της συμπάγειας του K, υπάρχουν $p_i \in K$ για $i = 1, \ldots, k$ με $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V(p_i)$. Ορίζουμε την $R : X \to [0,1]$ με τύπο

$$R(q) = \min\{1, 2\sum_{i=1}^{k} f_{p_i}(q)\},$$

οπότε έχουμε $R|_F = 0$ και $R|_K = 1$, αφού για κάθε $q \in K$ θα υπάρχει $i_\circ \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε

$$q \in V(p_{i_\circ}) \Rightarrow f_{p_{i_\circ}}(q) > 1/2 \Rightarrow R(q) = 1.$$

Η R είναι προφανώς συνεχής ως το ελάχιστο δύο συνεχών συναρτήσεων, οπότε είναι και η ζητούμενη. □

Λήμμα 2.1.4 *Έστω X, Y δύο γνήσιοι G - χώροι και έστω $f : X \to Y$ μία G - απεικόνιση, τοπικός ομοιομορφισμός στο $x \in X$ ώστε να ισχύει $G_x = G_{f(x)}$. Τότε, υπάρχει μία G - περιοχή U του x τέτοια, ώστε η $f|_U$ να είναι G - ομοιομορφισμός επί μίας ανοικτής G - περιοχής του $f(x)$.*

Απόδειξη. Αφού η δράση της G στον Y είναι γνήσια, από το 0.2.3, υπάρχει, $Q \subseteq Y$ περιοχή του $f(x)$ ώστε το $G(Q,Q)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Η f είναι τοπικά ομοιομορφισμός στο x, οπότε θα υπάρχει $A \subseteq X$, περιοχή του x, ώστε $f(A) \subseteq Q$ και η $f|_A : A \to f(A)$ να είναι ομοιομορφισμός. Έπεται ότι $G(f(A), f(A)) \subseteq G(Q,Q)$, δηλαδή το $G(f(A), f(A))$ θα είναι σχετικά συμπαγές.

Από τη συνέχεια της δράσης στον X, για κάθε $g \in G_x$ θα υπάρχουν περιοχές W_g και B_g των g και x, αντίστοιχα με $W_g B_g \subseteq A$. Τότε, θα ισχύει $G_x \subseteq \bigcup_{g \in G_x} W_g$, οπότε, λόγω της συμπάγειας του G_x, θα υπάρχουν g_i για $i = 1, \ldots, k$ με $G_x \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_{g_i}$. Ορίζουμε

$$W = \bigcup_{i=1}^{k} W_{g_i} \text{ και } B = \bigcap_{i=1}^{k} B_{g_i}.$$

Τότε, τα W, B θα είναι ανοικτές περιοχές των G_x και x, αντίστοιχα, και θα ισχύει $WB \subseteq A$. Το $G(f(x), f(x)) = G_{f(x)}$ είναι συμπαγές και το W είναι περιοχή του $G_x = G_{f(x)}$ οπότε, από το 0.2.3, θα υπάρχει περιοχή $B^* \subseteq f(A)$ του $f(x)$ με $G(B^*, B^*) \subseteq W$. Θεωρούμε την ανοικτή περιοχή

$$C = B \cap f^{-1}(B^*)$$

του x, οπότε και το $U = GC$ θα είναι περιοχή του x.

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα δείξουμε ότι η $f|_U : U \to f(U)$ είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι,

$$e \in G_x \subseteq W \Rightarrow B \subseteq WB \subseteq A \Rightarrow C \subseteq A,$$

οπότε η $f|_C : C \to f(C)$ είναι ομοιομορφισμός. Επίσης, επειδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f|_C"] \arrow[d] & f(C) \arrow[d] \\ gC \arrow[r, "f|_{gC}"'] & gf(C) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, η $f|_{gC} \to gf(C)$ είναι ομοιομορφισμός. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι η $f|U$ είναι 1-1 στο U, οπότε θα είναι και ομοιομορφισμός. Έστω $g_1, g_2 \in G$ και $x_1, x_2 \in C$ με $f(g_1 x_1) = f(g_2 x_2)$. Τότε ${g_2}^{-1} g_1 f(x_1) = f(x_2)$. Επειδή $f(x_1), f(x_2) \in f(C) \subseteq B^*$, θα έχουμε

$${g_2}^{-1} g_1 \in G(f(C), f(C)) \subseteq G(B^*, B^*) \subseteq W.$$

Συνεπώς

$$g_2{}^{-1}g_1x_1 \in WC \subseteq WB \subseteq A \text{ και } x_2 \in C \subseteq A.$$

Όμως, η $f|_A$ είναι ομοιομορφισμός. Επομένως $g_2{}^{-1}g_1x_1 = x_2$, οπότε $g_1x_1 = g_2x_2$, δηλαδή η $f|_U$ είναι 1-1, άρα ομοιομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 2.1.5 Ο τοπολογικός «τύπος» της G_x στην G δείχνει τον αντίστοιχο τοπολογικό «τύπο» της τροχιάς στον X και το παραπάνω Λήμμα εκφράζει πως, αν η f διατηρεί την ομάδα ισοτροπίας κάποιου $x \in X$ και είναι τοπικά ομοιομορφισμός, τότε μία μικρή G - περιοχή γύρω από το x στον X προβάλλεται μέσω της f σε τροχιές του Y γύρω απο το $f(x)$ έτσι, ώστε ο «τύπος» της τροχιάς - εικόνας στον Y να είναι ο ίδιος με τον «τύπο» της τροχιάς - πρότυπο στον X.

Λήμμα 2.1.6 *Έστω X, Y δύο γνήσιοι G - χώροι, ώστε ο Y να έχει παρασυμπαγή χώρο τροχιών. Έστω, επίσης, $M \subseteq X$, Y ένας κοινός G - υπόχωρος των X, Y και $f : X \to Y$ μία συνεχής G - απεικόνιση με $f|_M = id_M$, η οποία είναι τοπικά ομοιομορφισμός στα σημεία της M. Τότε, υπάρχουν G - ανοικτές περιοχές $U \subseteq X$ και $V \subseteq Y$ της M, ώστε η $f|_U : U \to V$ να είναι G - ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Εφόσον $G_m = G_{f(m)}$, για κάθε $m \in M$, από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχουν καλύψεις G - περιοχών $\{U'_m : m \in M\}$ της M στην Y και $\{Z_m : m \in M\}$ της M στην X, ώστε η $f|_{Z_m} : Z_m \to U'_m$ να είναι ομοιομορφισμός.

Έστω $\pi : Y \to Y/G$ η απεικόνιση - πηλίκο. Τα ανοικτά σύνολα

$$\{\pi(U'_m) : m \in M\},$$

αποτελούν κάλυψη της M/G και εφόσον ο Y/G είναι παρασυμπαγής, θα υπάρχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση ανοικτών $\{U_i : i \in I\}$ του καλύματος $\{\pi(U'_m) : m \in M\}$ και τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση ανοικτών $\{V_i : i \in I\}$ του καλύματος $\{U_i : i \in I\}$ με $\overline{V}_i \subseteq U_i$, $i \in I$. Θέτοντας $Z_i := f^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$, οι περιορισμοί

$$f_i = f|_{Z_i} : Z_i \to \pi^{-1}(U_i)$$

έχουν αντίστροφες συναρτήσεις

$$t_i : \pi^{-1}(U_i) \to Z_i.$$

Θα δείξουμε πως οι t_i παίρνουν ίδιες τιμές σε G - περιοχές σημείων της M, οπότε στην ένωση αυτών των περιοχών θα ορίζεται καλά η αντίστροφη της f.

Έστω $m \in M$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή W_m του $\pi(m)$ που τέμνει πεπερασμένο πλήθος συνόλων $\{\overline{V}_{i_r}\}_{r=1}^k$. Αν $\pi(m) \notin \overline{V}_{i_{r_0}}$, τότε το σύνολο $W_m \backslash \overline{V}_{i_{r_0}}$ είναι μία ανοικτή περιοχή του $\pi(m)$ που δεν τέμνει το $\overline{V}_{i_{r_0}}$. Μπορούμε επομένως να υποθέσουμε πως όλα τα σύνολα $\{\overline{V}_{i_r}\}_{r=1}^k$ που τέμνουν το W_m περιέχουν το $\pi(m)$.

Μικραίνοντας ενδεχομένος το W_m, μπορούμε να υποθέσουμε πως περιέχεται στη τομή των $\{U_{i_r}\}_{r=1}^k$, οπότε αυτά θα είναι και τα μόνα σύνολα από την οικογένεια $\{U_i : i \in I\}$ που θα το περιέχουν.

Τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα ισχύουν και για τα G - σύνολα

$$\pi^{-1}(W_m),\ \{\pi^{-1}(\overline{V}_{i_r}\}_{r=1}^k \text{ και } \{\pi^{-1}(U_{i_r})\}_{r=1}^k.$$

Τώρα, για κάθε $r = 1, \ldots, k$, έχουμε $t_{i_r}(m) = m$, οπότε υπάρχει ανοικτή G - περιοχή $C_m \subseteq \pi^{-1}(W_m)$ του $m \in Y$, ώστε $t_{i_r}(C_m) \subseteq \bigcap_{r=1}^k Z_{i_r}$ για κάθε $r = 1, \ldots, k$. Η C_m είναι η G - περιοχή του m που ζητάμε. Πράγματι, αν υπάρχει $y \in C_m$ με $t_{i_{r_1}}(y) \neq t_{i_{r_2}}(y)$, τότε $t_{i_{r_1}}(y),\ t_{i_{r_2}}(y) \in \bigcap_{r=1}^k Z_{i_r}$. Οι $\{f_{i_r}\}_{r=1}^k$ ορίζονται στο $\bigcap_{r=1}^k Z_{i_r}$ ως περιορισμοί της F και είναι 1 - 1. Άρα, για κάθε $r = 1, \ldots, k$ ισχύει

$$(f_{i_r} \circ t_{i_{r_1}})(y) = y = (f_{i_r} \circ t_{i_{r_2}})(y)$$

που είναι άτοπο για $k \geq 2$, ενώ για $k = 1$ δεν έχουμε πρόβλημα ορισμού της αντίστροφης της f στην C_m.

Ορίζουμε

$$t : C = \bigcup_{m \in M} C_m \to t(C) \text{ με } t|_{C_m \cap \pi^{-1}(V_i)} = t_i.$$

Τα σύνολα C και $t(C)$ είναι G - ανοικτές περιοχές της M και η t είναι καλά ορισμένη, συνεχής και αντίστροφη της $f|_{t(C)}$. $\square$

Θεώρημα 2.1.7 *Έστω X ένας πλήρως κανονικός χώρος και G ομάδα Lie που δρα Palais - γνήσια στον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχει δίσκος στο x.*

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα χρειαστούμε τα επόμενα τρία Λήμματα.

Λήμμα 2.1.8 *Έστω H ένας χώρος Hilbert και G μία ομάδα Lie που δρα συνεχώς στον H μέσω unitary τελεστών. Αν η G δρα γνήσια στον $H \backslash \{0\}$ και* *για το $x \in H$ η απεικόνιση $G \to H: \quad g \mapsto gx$ είναι διαφορίσιμη, τότε υπάρχει μία G - περιοχή U του x και μία διαφορίσιμη G - απεικόνιση $f: U \to G/G_x$ έτσι, ώστε $f(x) = G_x$.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $x = 0$ είναι τετριμμένη.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $x \neq 0$ και ότι η απεικόνιση $\phi_x : G \to H: \quad g \mapsto gx$ είναι διαφορίσιμη, όπου $\phi : G \times H \to H$ είναι η δράση της G. Τότε, η τροχιά Gx είναι κλειστό σύνολο και κανονική υποπολλαπλότητα του H και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι η επαγόμενη απεικόνιση $\tilde{\phi}_x : G/G_x \to Gx$ είναι λεία, immersion και γνήσια, οπότε η τοπολογία της διαφορικής δομής που επάγεται στην Gx είναι συμβατή με την τοπολογία του H.

Αφού ο H είναι γραμμικός χώρος, ισχύει $TH \simeq H \times H$, οπότε ορίζεται η ένθεση $i : TGx \hookrightarrow H \times H$ και το normal bundle

$$N = N(Gx) = \{(w, h) \in H \times H : h \in i(T_w Gx)^{\perp}\}.$$

Το N είναι κανονική υποπολλαπλότητα και κλειστό G - υποσύνολο του $H \times H$, αφού το $i(TGx)$ είναι G - υποσύνολο του $H \times H$ και η G δρα διαγώνια μέσω unitary τελεστών στον $H \times H$.

Η G - απεικόνιση

$$\psi : N \to H : \quad (w, h) \mapsto w + h$$

είναι διαφορίσιμη στον H. Παρατηρούμε ότι έχουμε την διάσπαση σε συμπληρωματικούς κλειστούς υποχώρους

$$T_{(x,0)}N = T_x Gx \oplus T_0 i(T_x Gx)^{\perp} \cong i(T_x Gx) \oplus i(T_x Gx)^{\perp} = T_x H$$

και ότι ο περιορισμός $\psi|_{Gx \times \{0\}}$ είναι αμφιδιαφόριση επί του Gx, ενώ ο περιορισμός

$$\psi|_{N \cap (\{x\} \times H)} : N \cap (\{x\} \times H) \to H : \quad (x, h) \mapsto x + h$$

είναι αμφιδιαφόριση επί της εικόνας του. Άρα, η $T\psi_{(x,0)}$ είναι ισομορφισμός χώρων Banach περιορισμένη σε κάθε συμπληρωματικό υπόχωρο χωριστά, συνεπώς θα είναι ισομορφισμός των χώρων Banach $T_{(x,0)}N$ και $T_x H$. Άρα, η ψ είναι τοπική αμφιδιαφόριση κοντά στο $(x, 0)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση $G_x = G_{(x,0)}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.1.4 και να βρούμε G - περιοχή V του $(x, 0)$ όπου η $\psi|_V$ θα είναι G - αμφιδιαφόριση. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f = \tilde{\phi}_x \circ \pi \circ (\psi|_V)^{-1} : U = \psi(V) \to G/G_x,$$

όπου $\pi : V \to Gx$ είναι η προβολή. $\square$

Λήμμα 2.1.9 *Έστω X ένας χώρος Banach, $U \subseteq X$ ένα ανοικτό σύνολο, $K \subseteq G$ ένα συμπαγές σύνολο και $\psi : G \times U \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση με $\psi(g,u) = 0$ για κάθε $(g,u) \in (G \backslash K) \times U$. Τότε, η απεικόνιση $\Psi : U \to L^2(G) : \quad \Psi(u)(g) = \psi(g,u)$ είναι διαφορίσιμη.*

Πόρισμα 2.1.10 *Αν $x \in L^2(G)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα, τότε υπάρχει G - περιοχή U του x και διαφορίσιμη G - απεικόνιση $f : U \to G/G_x$ με $f(x) = G_x$.*

Απόδειξη. Για κάθε $V \subseteq G$ ανοικτό και σχετικά συμπαγές πεδίο ορισμού κάποιου χάρτη της G η απεικόνιση

$$\psi : G \times V \to \mathbb{R} : \quad \psi(g_1, g_2) = x({g_2}^{-1} g_1) = (g_2 x)(g_1)$$

είναι διαφορίσιμη και ισχύει $\psi(g_1, g_2) = 0$ για κάθε $(g_1, g_2) \in (G \backslash (V supp(x))) \times V$. Άρα, από το προηγούμενο Λήμμα, αφού η V είναι τοπικά αμφιδιαφορίσιμη με έναν χώρο Banach πεπερασμένης διάστασης, η $\Psi : G \to L^2(G) : \quad g \mapsto gx$ είναι διαφορίσιμη. Επομένως, αφού το μέτρο Haar στην G είναι αναλλοίωτο για τις δεξιές μεταφορές, η G θα δρα μέσω unitary τελεστών στον $L^2(G)$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα. $\square$

Λήμμα 2.1.11 *Έστω X ένας πλήρως κανονικός χώρος Hausdorff και έστω G μία ομάδα Lie που δρα Palais - γνήσια στον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία G - απεικόνιση $\Phi : X \to L^2(G)$, ώστε η $\Phi(x)$ να είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στην G με συμπαγή φορέα και να ισχύει $G_x = G_{\Phi(x)}$.*

Απόδειξη. Έστω W μικρή περιοχή του x και $\phi : G \times X \to X$ η απεικόνιση της δράσης. Τότε, μέσω του φυσιολογικού ομοιομορφισμού $\tilde{\phi_x} : G/G_x \to Gx$, η τροχιά Gx αποκτά δομή κλειστού συνόλου και λείας πολλαπλότητας με τοπολογία συμβατή με την τοπολογία του Gx ως υποχώρου του X.

Η κανονική απεικόνιση $\pi : G \to G/G_x$ είναι ανοικτή, επομένως, λόγω της συνέχειας της $\tilde{\phi_x} \circ \pi$, θα υπάρχει σχετικά συμπαγής περιοχή V του $e \in G$ με $\overline{V}x \subseteq W$. Το Vx θα είναι σχετικά συμπαγής περιοχή του x στο Gx. Από το Λήμμα του Uryshon, υπάρχει λεία συνάρτηση $f : Gx \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} f \subseteq Vx$ και $f^{-1}(\{1\}) = x$. Ο X είναι πλήρως κανονικός και το Gx τοπικά συμπαγές υποσύνολο του, οπότε, από το Λήμμα 2.1.2, υπάρχει συνεχής επέκταση $F : X \to [0,1]$ της f. Επίσης, το $X \backslash W$ είναι κλειστό και το $\operatorname{supp} f$ συμπαγές, οπότε, από το Λήμμα 2.1.3, υπάρχει συνάρτηση $\nu : X \to [0,1]$ με

$\operatorname{supp}\nu \subseteq W$ και $\nu|_{\operatorname{supp} f} = 1$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f} = \nu \cdot F,$$

που είναι συνεχής με τις ιδιότητες $\widetilde{f}|_{Gx} = F|_{Gx} = f$ και $\operatorname{supp}\widetilde{f} \subseteq W$. Η απεικόνιση $\Phi : X \to L^2(G)$ με τύπο

$$\Phi(y)(g) = \widetilde{f}(g^{-1}y)$$

είναι η ζητούμενη:

Έστω $y \in X$. Το $\operatorname{supp}\widetilde{f} \subseteq W$ είναι μικρό σύνολο, ως υποσύνολο μικρού συνόλου, οπότε υπάρχει περιοχή U του y τέτοια, ώστε το $L = G(U, \operatorname{supp}\widetilde{f})$ να είναι σχετικά συμπαγές. Άρα, για $g \notin L^{-1}$ έχουμε $g^{-1}U \cap \operatorname{supp}\widetilde{f} = \emptyset$, επομένως $\Phi(z)|_{g^{-1}U} = 0$ για κάθε $z \in U$. Συνεπώς $\operatorname{supp}\Phi(z) \subseteq \overline{L^{-1}}$, οπότε η $\Phi(z)$ θα έχει συμπαγή φορέα και θα είναι καλά ορισμένη για κάθε $z \in U$. Θα δείξουμε ότι η Φ είναι συνεχής:

Αν m είναι το μέτρο Haar στην G, τότε η σταθερά $C = m(\overline{L^{-1}})$ είναι πεπερασμένη, λόγω της συμπάγειας του $\overline{L^{-1}}$ και της κανονικότητας του μέτρου. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $g \in \overline{L^{-1}}$, λόγω της συνέχειας της $\widetilde{f}$ στο $g^{-1}y$, θα υπάρχει περιοχή $U_{g^{-1}y}$ του $g^{-1}y$, ώστε

$$\left|\widetilde{f}|_{U_{g^{-1}y}} - \widetilde{f}(g^{-1}y)\right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Επίσης, λόγω της συνέχειας της δράσης στο (g^{-1}, y), θα υπάρχουν περιοχές U_g και $U_{(g,y)}$ του g^{-1} και του y, αντίστοιχα, ώστε $U_g U_{(g,y)} \subseteq U_{g^{-1}y}$. Τότε $\overline{L} \subseteq \bigcup_{g^{-1}\in\overline{L}} U_g$, οπότε υπάρχουν $g_i \in \overline{L^{-1}}$ για $i \in \{1, \ldots, k\}$ με $\overline{L} \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{g_i}$. Ορίζουμε την περιοχή του y

$$V_y = \bigcap_{i=1}^k U_{(g_i,y)}.$$

Έστω $z \in U_y$ και $g \in \overline{L^{-1}}$. Θα υπάρχει $i_\circ \in \{1, \ldots, k\}$ με $g^{-1} \in U_{g_{i_\circ}}$, οπότε $g^{-1}z \in U_{g_{i_\circ}} U_{(g_{i_\circ},y)} \subseteq U_{g_{i_\circ}^{-1}y}$, επομένως

$$\left|\widetilde{f}(g^{-1}z) - \widetilde{f}(g_{i_\circ}^{-1}y)\right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Επίσης $g^{-1}z \in U_{g_{i_\circ}} U_{(g_{i_\circ},y)} \subseteq U_{g_{i_\circ}^{-1}y}$, οπότε

$$\left|\widetilde{f}(g^{-1}y) - \widetilde{f}(g_{i_\circ}^{-1}y)\right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$\left|\widetilde{f}(g^{-1}z) - \widetilde{f}(g^{-1}y)\right| \leq \left|\widetilde{f}(g^{-1}y) - \widetilde{f}(g_{i_\circ}^{-1}y)\right| + \left|\widetilde{f}(g^{-1}z) - \widetilde{f}(g_{i_\circ}^{-1}y)\right| < \frac{2\varepsilon}{3C}$$

για κάθε $g \in \overline{L^{-1}}$. Συνεπώς

$$\sup_{g \in L^{-1}} |\Phi(z)(g) - \Phi(y)(g)| \leq \sup_{g \in \overline{L^{-1}}} |\Phi(z)(g) - \Phi(y)(g)| \leq \frac{2\varepsilon}{3C},$$

οπότε

$$\|\Phi(z) - \Phi(y)\|_{L^2(G)} \leq C \cdot \sup_{g \in L^{-1}} |\Phi(z)(g) - \Phi(y)(g)| \leq C \cdot \frac{2\varepsilon}{3C} < \varepsilon$$

για κάθε $z \in U_y$, απ' όπου έπεται ότι η Φ είναι συνεχής.

Εξ ορισμού τώρα, η Φ είναι G - απεικόνιση, οπότε $G_x \subseteq G_{\Phi(x)}$. Θα δείξουμε ότι τα σύνολα αυτά είναι ίσα: Για $g \in G_{\Phi(x)}$ έχουμε

$$\Phi(x)(g^{-1}h) = \Phi(x)(h) \Rightarrow \widetilde{f}(h^{-1}gx) = \widetilde{f}(h^{-1}x)$$

για κάθε $h \in G$. Άρα, για $h = e$

$$f(gx) = f(x) = 1 \Rightarrow gx = x \Rightarrow g \in G_x,$$

αφού $f^{-1}(\{1\}) = x$. Επομένως $G_x = G_{\Phi(x)}$.

Η $\Phi(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f|_{Gx}$ και $\phi_x : G \to Gx$ με $g \mapsto gx$, οπότε είναι και η ζητούμενη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.7. Έστω η Φ του προηγούμενου Λήμματος και U μία G - περιοχή U του $\Phi(x)$ στο $L^2(G)$. Θα υπάρχει G - απεικόνιση

$$F : U \to G/G_{\Phi(x)} : \quad F(\Phi(x)) = G_{\Phi(x)} = G_x$$

όπως στο Πόρισμα 2.1.10. Η απεικόνιση

$$f = F \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(U)} : \Phi^{-1}(U) \to G/G_{\Phi(x)} = G/G_x$$

ορίζει τον ζητούμενο δίσκο στο x. □

2.2 Οι δίσκοι στις διαφορικές δράσεις

Ορισμός 2.2.1 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια σε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα X. Ένα υποσύνολο S του X θα λέγεται* **διαφορίσιμος δίσκος** *στο $x \in X$, αν υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x και μία διαφορίσιμη G - retraction $r : U \to Gx$ με $r^{-1}(\{x\}) = S$.*

Παρατήρηση 2.2.2 Για κάθε $s \in S$ η $r|_{Gs} : Gs \to Gx$ είναι submersion, αφού, μέσω των κανονικών αμφιδιαφορίσεων $G/G_s \to Gs$ και $G/G_x \to Gx$, η $r|_{Gs}$ επάγει τη φυσιολογική απεικόνιση

$$\tilde{r} : G/G_s \to G/G_x : \quad gG_s \mapsto gG_x,$$

η οποία είναι λεία submersion, αφού $G_s \subseteq G_x$. Συνεπώς, η r είναι submersion και το κλειστό σύνολο $S = r^{-1}(\{x\})$ έχει δομή λείας $(\dim X - \dim G + \dim G_x)$ - διάστατης πολλαπλότητας.

Παρατήρηση 2.2.3 Αν οι X, Y είναι δύο λείες πολλαπλότητες και η λέξη «ομοιομορφισμός» αντικατασταθεί από την λέξη «αμφιδιαφόριση» για την f, τότε τα συμπεράσματα των Λημμάτων 2.1.4 και 2.1.6 εξακολουθούν να ισχύουν αφού οι συλλογισμοί της απόδειξης παραμένουν ακριβώς οι ίδιοι.

Λήμμα 2.2.4 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια σε μία διαφορίσιμη n - πολλαπλότητα X. Έστω, επίσης, M μία G - αναλλοίωτη, κανονική υποπολλαπλότητα της X. Τότε, υπάρχει μία περιοχή W της M στην X που είναι αμφιδιαφορίσιμη με μία περιοχή V της M σε ένα vector bundle πάνω από την M. Το vector bundle μπορεί να επιλεγθεί κατάλληλα, ώστε να είναι G - χώρος, ενώ οι περιοχές W και V να είναι G - αμφιδιαφορίσιμες G - περιοχές.*

Απόδειξη. Ο X είναι τοπικά συμπαγής, τοπικά συνεκτικός και παρασυμπαγής χώρος, οπότε, από το 0.3.5(4), ο X/G είναι παρασυμπαγής. Άρα, από το 0.3.3, ο X έχει θεμελιώδες σύνολο και, από το Θεώρημα 1.3.8, υπάρχει G - αναλλοίωτη μετρική Riemann που κάνει τον X πολλαπλότητα Riemann.

Το $E = \{(p, v_p) \in TX :$ υπάρχει γεωδαισιακή γ με $\gamma(0) = p$ και $\dot{\gamma}(0) = v_p$ που ορίζεται στο $[0,1]\}$ είναι ανοικτό στον TX. Η γνήσια δράση $\phi : G \times X \to X$ της G στον X επάγει την εφαπτόμενη δράση

$$T\phi : G \times TX \to TX : \quad (g, (p, v_p)) \mapsto (\phi_g(p), T_p\phi_g(v_p))$$

στον TX, η οποία είναι, επίσης, γνήσια και με την οποία η G γίνεται ισόμορφη με μία υποομάδα της ομάδας των ισομετριών $I(X)$ της X. Άρα, ο TX γίνεται γνήσιος G - χώρος και το E γίνεται G - υποσύνολο του TX, αφού για κάθε $g \in G$ η ϕ_g είναι ισομετρία και συνεπώς στέλνει γεωδαισιακές με αρχικές συνθήκες (p, v_p) σε γεωδαισιακές με αρχικές συνθήκες $(\phi_g(p), T_p\phi_g(v_p))$. Για τον ίδιο λόγο, για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\phi_g \circ \exp = \exp \circ T\phi_g.$$

Θεωρώντας στον $X \times X$ την διαγώνια δράση $G \times (X \times X) \to X \times X$ με $(g, (x_1, x_2)) \mapsto (gx_1, gx_2)$ για $g \in G$, $x_1, x_2 \in X$, η εκθετική γίνεται G - απεικόνιση.

Ορίζεται τώρα, το normal bundle N της M, δηλαδή το subbundle του $TX|M$ πάνω από την M, για το οποίο ισχύει ότι $N_y = T_yM^{\perp}$ για κάθε $y \in M$. Ο N είναι κανονική υποπολλαπλότητα του TX διάστασης $\dim X$ και είναι G - χώρος, αφού για κάθε $g \in G$ η $T\phi_g$ διατηρεί τα ορθογώνια συμπληρώματα, ως ισομετρία. Συνεπώς, ορίζεται ο γνήσιος G - χώρος $E \cap N$, ο οποίος είναι κανονική υποπολλαπλότητα του TX διάστασης $\dim X$, αφού το E είναι ανοικτό υποσύνολο του TX.

Έστω τώρα $i : E \cap N \hookrightarrow E$ η ένθεση και $\mathrm{pr}_2 : X \times X \to X$ η προβολή στην δεύτερη συντεταγμένη. Ορίζουμε την G - απεικόνιση

$$H' = \underset{2}{\mathrm{pr}} \circ \exp \circ i : E \cap N \to X.$$

Για το $(x, 0) \in E \cap N$ έχουμε

$$T_{(x,0)}H' = T_{(x,0)}(\mathrm{pr}_2 \circ \exp) \circ T_{(x,0)}i = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

δηλαδή $T_{(x,0)}H' = id_{T_xX}$, θεωρώντας τον ισομορφισμό $T_{(x,0)}N \cong T_xX$ ως γραμμικό ισομορφισμό. Άρα, η H' είναι τοπικά αμφιδιαφόριση γύρω από κάθε $(x, 0) \in E \cap N$ και ισχύει $G_{(x,0)} = G_x$. Από Λήμμα 2.1.6 και την Παρατήρηση 2.2.3, υπάρχει G - περιοχή $V \subseteq E \cap N$ του $M \times \{0\}$, ώστε η $H'|_V$ να είναι αμφιδιαφορίσιμη G - απεικόνιση για κάθε $(x, 0) \in E \cap N$. Θέτοντας $W = H'(V)$ και $H = H'|_V$, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.2.5 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια σε μία διαφορίσιμη n - πολλαπλότητα X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένας διαφορίσιμος δίσκος στο x.*

Απόδειξη. Η κλειστή τροχιά Gx είναι G - αναλλοίωτη, κανονική υποπολλαπλότητα της X, αφού η φυσιολογική απεικόνιση $\tilde{\phi_x} : G/G_x \to Gx$ είναι τοπικά αμφιδιαφόριση, 1-1 και κλειστή, ως γνήσια απεικόνιση επί του Gx. Ορίζεται, λοιπόν, το normal bundle N της Gx, το οποίο είναι κλειστό υποσύνολο και κανονική υποπολλαπλότητα του TX διάστασης $\dim X$.

Πραγματι, έστω $\{< \cdot, \cdot >_z\}_{z \in X}$ το G - αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στον X και έστω $\{(y_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq N$ με $(y_n, v_n) \to (y, v)$. Τότε $y \in Gx$, αφού η Gx είναι κλειστή. Αν $W : Gx \to TGx$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στην Gx, τότε η $< W, \cdot >: TGx \to \mathbb{R}$ είναι λεία, οπότε

$$< W(y_n), v_n >_{y_n} \to < W(y), v >_y .$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $< W(y_n), v_n >_{y_n} = 0$, αφού $(y_n, v_n) \in N$. Άρα $< W(y), v >_y = 0$, δηλαδή $(y, v) \in N$. Ο N είναι επίσης G - χώρος, αφού για κάθε $g \in G$ η $T\phi_g$ διατηρεί τα ορθογώνια συμπληρώματα ως ισομετρία.

Τώρα, από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει G - περιοχή $V \subseteq N$ του $Gx \times \{0\}$ και $H : V \to H(V) \subseteq X$ αμφιδιαφορίσιμη G - απεικόνιση. Η προβολή $\pi : N \to Gx$ του N στο Gx είναι G - απεικόνιση, οπότε ορίζεται η G - απεικόνιση

$$r = \pi|_V \circ H^{-1} : H(V) \to Gx,$$

η οποία είναι διαφορίσιμη G - retraction και ορίζει το $S = r^{-1}(\{x\})$, που είναι ο ζητούμενος δίσκος στο x. □

2.3 Η ισομεταβλητή τοπική δομή των δράσεων

Στην Παρατήρηση 2.0.3 επισημάναμε την συγγενικότητα της έννοιας της τοπικής τομής σε έναν τοπικά συμπαγή γνήσιο G - χώρο με την έννοια του δίσκου. Όταν η G είναι ομάδα Lie και δρα γνήσια σε έναν χώρο X, τότε για $x \in X$, η G_x είναι συμπαγής υποομάδα της G και συνεπώς ομάδα Lie. Μπορουμε να θεωρήσουμε την G ως G_x - χώρο με την G_x να δρα στην G μέσω της αριστερής δράσης. Τότε υπάρχει τοπική τομή γύρω από κάθε σημείο της κανονικής απεικόνισης $\pi : G \to G/G_x$ κατασκευαζόμενη ως εξής:

Έστω $\mathbf{g}$ και $\mathbf{g}_x$ οι άλγεβρες Lie των G και G_x αντίστοιχα. Θεωρούμε V το αλγεβρικό συμπλήρωμα της $\mathbf{g}_x$ στην $\mathbf{g}$ ως προς οποιαδήποτε επεκτάσιμη βάση της $\mathbf{g}_x$ στην $\mathbf{g}$. Τότε η $T_0 \exp : T_0 V \to T_e G$ είναι η ένθεση που ορίζεται μέσω της διάσπασης $T_e G \cong V \oplus T_e G_x$ και είναι προφανώς 1-1. Επίσης

$$T_0 \exp(T_0 V) \cap \ker T_e \pi = T_0 V \cap T_e G_x = \{0\},$$

επομένως η $T_0(\pi \circ \exp) : T_0 V \to T_{[e]_{G_x}}(G/G_x)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, λόγω ισότητας διαστάσεων και υπάρχουν W, U σχετικά συμπαγείς ανοικτές περιοχές των $0 \in V$ και $[e]_{G_x} \in G/G_x$, αντίστοιχα, ώστε η απεικόνιση $f = \pi \circ \exp|_W : W \to U$ να είναι αμφιδιαφόριση. Τότε, η $\sigma = \exp \circ f : U \to T = \exp(W)$ είναι η ζητούμενη (λεία) τοπική τομή γύρω από το e.

Για τυχών $g \in G$, ορίζεται η ανοικτή περιοχή $[g]_{G_x}U$ του $[g]_{G_x}$ και η απεικόνιση

$$\sigma_g : [g]_{G_x}U \to gT : \quad [h]_{G_x} \mapsto g\sigma([g^{-1}h]_{G_x})$$

είναι η ζητούμενη τοπική τομή γύρω από το g.

Η ύπαρξη της παραπάνω τοπικής τομής συνεισφέρει στην περιγραφή της τοπικής δομής ενός G - χώρου, όπως φαίνεται από τα επόμενα.

Πρόταση 2.3.1 *Έστω S ένας δίσκος στο $x \in X$, ένως γνήσιου G - χώρου X, με δράση ϕ, όπου G είναι ομάδα Lie. Τότε η retraction $r : U \to Gx$ είναι fibre bundle με fibre S και ομάδα δομής G_x.*

Απόδειξη. Έστω $U = GS$ η ανοικτή G - περιοχή του S και $f : U \to G/G_x$ η απεικόνιση που ορίζει το S. Έστω, επίσης, ο ομοιομορφισμός $\psi : G \times_{G_x} S \to U$ της Πρότασης 2.0.5, $\pi : G \to G/G_x$ η κανονική απεικόνιση και $p : G \times_{G_x} S \to G/G_x$ η επαγώμενη απεικόνιση από την προβολή $G \times S \to G$. Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G \times_{G_x} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & U \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "r"] \\
G/G_x \arrow[r, "\widetilde{\phi}_x"'] & Gx
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Αν δείξουμε πως η p είναι fibre bundle, τότε η f θα γίνεται fibre bundle μέσω της ψ η οποία θα γίνεται ισομορφισμός G_x - bundles. Τέλος, αφού η δράση είναι γνήσια, η $\widetilde{\psi}_x$ θα είναι ομοιομορφισμός, επομένως η r θα είναι fibre bundle με fibre το S και ομάδα δομής την G_x.

Έστω, λοιπόν, μία τοπική τομή $\sigma : V \to G$ της $\pi : G \to G/G_x$ γύρω από το $e \in G$, όπως στην εισαγωγή της παραγράφου. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση

$$\Psi : V \times S \to p^{-1}(V) : \quad ([g]_{G_x}, s) \mapsto [\sigma([g]_{G_x}), s]_{G_x}$$

που είναι καλά ορισμένη αφού για κάθε $[g]_{G_x} \in V$ και κάθε $s \in S$

$$p \circ \Psi([g]_{G_x}, s) = p([\sigma([g]_{G_x}), s]_{G_x}) = \pi(\sigma([g]_{G_x}) = [g]_{G_x} \in V.$$

Η Ψ έχει συνεχή αντίστροφη απεικόνιση την

$$\Psi^{-1} : p^{-1}(V) \to V \times S : \quad [g, s]_{G_x} \mapsto ([g]_{G_x}, ((\sigma([g]_{G_x})^{-1} g) \cdot s)$$

που είναι καλά ορισμένη: για $[g, s]_{G_x} \in p^{-1}(V)$ έχουμε $[g]_{G_x} = p([g, s]_{G_x}) \in V$ και ισχύει πως $\sigma([g]_{G_x})^{-1} g \in G_x$, αφού η σ είναι τοπική τομή, οπότε $\sigma([g]_{G_x})^{-1} g \cdot s \in S$.

Επομένως η Ψ θα είναι ομοιομορφισμός που κάνει την p τοπικά προβολή και το μόνο που απομένει να δείξουμε είναι ότι η διάσπαση $V \times S$ του $p^{-1}(V)$ είναι συμβατή με την επαγόμενη διάσπαση ως προς την p από μία άλλη τοπική τομή της $G \to G/G_x$ στο V: Έστω $\lambda : V \to G$ μία, διαφορετική από την σ, τοπική τομή του $e \in G$ και $\Theta : V \times S \to p^{-1}(V)$ ο αντίστοιχος ομοιομορφισμός. Τότε για $([g]_{G_x}, s) \in V \times S$ έχουμε

$$\Psi^{-1} \circ \Theta([g]_{G_x}, s) = ([g]_{G_x}, (\sigma([g]_{G_x}^{-1}) \cdot \lambda([g]_{G_x})) \cdot s),$$

δηλαδή η $\Psi^{-1} \circ \Theta$ είναι ισομορφισμός fiber bundles, οπότε διατυρεί την δομή της διάσπασης $V \times S$ ως προς την p. $\square$

Ειδικότερα, ο δίσκος S έχει μία ανοικτή περιοχή, την $\Psi \circ p^{-1}(V)$ που είναι ομοιομορφική με $\mathbb{R}^m \times S$, όπου $m = \dim G - \dim G_x$.

Πόρισμα 2.3.2 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα Palais - γνήσια και ελεύθερα σε έναν πλήρως κανονικό χώρο X. Τότε:*

1) Η $\pi : X \to X/G$ είναι locally trivial fiber bundle με fibre και ομάδα δομής την G.

2) Αν, επιπροσθέτως, ο X είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και η δράση της G διαφορίσιμη, τότε ο X/G αποκτά δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας κατά μοναδικό τρόπο, ώστε η π να είναι διαφορίσιμη bundle - απεικόνιση . Επιπλέον, για κάθε διαφορίσιμο δίσκο S η απεικόνιση $\pi|_S : S \to \pi(S)$ είναι αμφιδιαφόριση και ισχύει $\dim_x X = \dim G + \dim_{\pi(x)} X/G$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. 1) Έστω $x \in X$. Από το Θεώρημα 2.1.7, υπάρχει δίσκος S στο x ώστε το $U = GS$ να είναι ανοικτό. Από την Παρατήρηση 2.0.2 και το Πόρισμα 2.0.8 το S τέμνει κάθε τροχιά σε ένα σημείο και η $\pi|_S$ είναι καλά ορισμένος ομοιομορφισμός. Η Πρόταση 2.0.5 και το Πόρισμα 2.0.8, δίνουν τους G - ομοιομορφισμούς $U/G \cong \pi(S) \cong S$ και $U \cong G \times S \cong G \times \pi(S)$. Άρα, ο G

- χώρος U είναι trivial και συνεπώς η τετράδα $(X, \pi, X/G, G)$ είναι principal fiber bundle.

2) Έστω $\phi : G \times X \to X$ η δράση της G στον X και $f : U = GS \to G$ η απεικόνιση που ορίζει τον διαφορίσιμο δίσκο S στο $x \in X$. Η f είναι διαφορίσιμη, λόγω της Πρότασης 2.0.10. Επίσης, η $G \times S \to GS$ είναι αμφιδιαφόριση, θεωρώντας στο S την δομή που επάγεται από την Παρατήρηση 2.2.2, με αντίστροφη την λεία απεικόνιση $y \mapsto (f(y), f(y)^{-1}y)$.

Θα δείξουμε πως ο X/G δέχεται δομή λείας πολλαπλότητας, μέσω των δίσκων που καλύπτουν τον X και πως αυτή η δομή είναι ανεξάρτητη της διαφορίσιμης δομής του δίσκου που την επάγει.

Έστω S' διαφορίσιμος δίσκος στο x' με $U = GS = GS'$ και αντίστοιχη απεικόνιση $f' : U \to G$. Ορίζουμε τις διαφορίσιμες απεικονίσεις

$$h = f|_{S'} : S' \to G \text{ και } h' = f'|_S : S \to G.$$

Τότε, ισχύουν οι σχέσεις

$$((\pi|_{S'})^{-1} \circ (\pi|_S))(s) = \phi(h(s), s)$$

και

$$((\pi|_S)^{-1} \circ (\pi|_{S'}))(s') = \phi(h'(s'), s')$$

για κάθε $s \in S$, $s' \in S'$. Συνεπώς, η

$$(\pi|_{S'})^{-1} \circ \pi|_S : S \to S'$$

είναι αμφιδιαφόριση και μπορούμε να ορίσουμε στο U/G δομή λείας πολλαπλότητας, επαγόμενη απο τη δομή του δίσκου S μέσω του ομοιομορφισμού $\pi|_S$, η οποία θα είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του S. Συνθέτοντας τις λείες δομές σε κάθε ανοικτό υποσύνολο του X/G της παραπάνω μορφής, ορίζεται μια λεία δομή στον X/G. Αυτή η δομή θα είναι καλά ορισμένη σε κάθε ανοίχτο σύνολο U/G του X/G της μορφής $U = GS$ για κάποιο δίσκο S, αλλά και στις μεταξύ τους τομές, αφού δύο διαφορετικοί δίσκοι θα έχουν συμβατές δομές, όπως δείξαμε παραπάνω.

Η επαγόμενη δομή στον X/G μετατρέπει την $\pi : X \to X/G$ σε bundle map και submersion. Άρα $\pi^{-1}(\{x\}) = Gx \cong G$, επομένως $\ker T_x\pi \cong T_eG$. Συνεπώς $\dim_x X = \dim G + \dim_{\pi(x)} X/G$. $\square$

Παρατήρηση 2.3.3 Έστω (U, ψ) ένας S - straightening χάρτης του X (δηλαδή $\psi(U \cap S) = Q \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}$, για κάποιο $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου $n = \dim X$ και $k = \dim S$). Τότε, ο $(\pi(U \cap S), \psi|_{U\cap S} \circ (\pi|_S)^{-1})$ είναι χάρτης του X/G.

Επομένως, αν N είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $H : X/G \to N$ μία απεικόνιση, τότε η H θα είναι λεία στον X/G, αν και μόνο αν η $H \circ \pi$ είναι λεία στο X.

Πόρισμα 2.3.4 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια στη λεία πολλαπλότητα X. Έστω, επίσης, S διαφορίσιμος δίσκος στο $x \in X$. Τότε, ο $G \times_{G_x} S$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα (αφού από το Πόρισμα 2.3.2(2), η συμπαγής ομάδα Lie G_x δρα διαφορίσιμα, γνήσια και ελεύθερα στον $G \times S$) και η $\psi : G \times_{G_x} S \to GS : \quad [g, s]_{G_x} \mapsto gs$ είναι αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : G \times X \to X$ η δράση. Η βασική ιδέα είναι να δείξουμε πως η ψ είναι submersion δείχνοντας πως η $\phi|_{G \times S}$ είναι submersion.

Έστω $r : U = GS \to Gx$ η διαφορίσιμη G - retraction που ορίζει τον διαφορίσιμο δίσκο S που είναι submersion, από την Παρατήρηση 2.2.2, και έστω $s \in S$. Η G_x δρα διαφορίσιμα και γνήσια στο S ως συμπαγής ομάδα Lie. Ισχύει $G_x s = Gs \cap S$, αφού $G(S, S) = G_x$ και μάλιστα η διαφορίσιμη δόμη της τροχιάς $G_x s$ ως κανονικής υποπολλαπλότητας της S είναι η ίδια με την δομή της ως κανονικής υποπολλαπλότητας της Gs μέσω της submersion

$$r|_{Gs} : Gs \to Gx (r|_{Gs}{}^{-1}(\{x\}) = G_x s).$$

Θα δείξουμε πως

$$T_s G_x s = T_s Gs \cap T_s S :$$

Προφανώς $T_s G_x s \subseteq T_s Gs \cap T_s S$. Αν $\xi = \eta_X(s) \in T_s S \cap T_s Gs$ για κάποιο $\eta \in L(G)$, όπου $\eta_X : X \to TX$ είναι ο απειροστός γεννήτορας (βλέπε Ορισμό 3.1.1) του $\eta \in L(G)$, επειδή $\xi \in T_s S = \ker T_s r$, έχουμε

$$\eta_X(x) = \frac{d}{dt}(\phi_x(\exp t\eta))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(r(\phi_s(\exp t\eta)))|_{t=0} = T_s r(\xi) = 0,$$

δηλαδή το x είναι σταθερό σημείο του διανυσματικού πεδίου η_X, οπότε $\exp t\eta \in G_x$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $\xi \in T_s G_x s$.

Τώρα, από την Παρατήρηση 2.0.2, ισχύει $(G_x)_s = G_x \cap G_s = G_s$, οπότε

$$\begin{aligned}
\dim(T_s Gs + T_s S) &= \dim T_s Gs + \dim T_s S - \dim(T_s G_x s) \\
&= \dim Gs + \dim S - \dim G_x + \dim G_s \\
&= \dim G + \dim X - \dim G \\
&= \dim T_s X.
\end{aligned}$$

Άρα $T_s X = T_s Gs + T_s S$ και συνεπώς $T_{gs}X = T_{gs}Gs + T_{gs}gS$ μέσω της αμφιδιαφόρισης ϕ_g για κάθε $g \in G$. Άρα, η απεικόνιση $G \times S \to U : \quad (g,s) \mapsto gs$ είναι submersion, οπότε το ίδιο ισχύει και για την ψ. Για $s = x$ έχουμε

$$T_{gx}X = T_{gx}Gx \oplus T_{gx}gS$$

για κάθε $g \in G$, αφού $Gx \cap S = \{x\} \Rightarrow T_x Gx \cap T_x S = \{0\}$, οπότε

$$\dim X = \dim Gx + \dim S.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \dim(G \times_{G_x} S) &= \dim G + \dim S - \dim G_x \\ &= \dim Gx + \dim S \\ &= \dim X \\ &= \dim U, \end{aligned}$$

οπότε η ψ είναι τοπική αμφιδιαφόριση και συνεπώς αμφιδιαφόριση. □

Παρατήρηση 2.3.5 Ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα πως, αν X είναι μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα και G είναι μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια στον X με όλες τις ομάδες ισοτροπίας να είναι συζυγείς μεταξύ τους, τότε ο X/G αποκτά δομή λείας πολλαπλότητας κατά μοναδικό τρόπο, ώστε η $\pi : X \to X/G$ να γίνεται bundle - απεικόνιση.

Το γεγονός πως η τοπική τομή που κατασκευάσαμε στην εισαγωγή της παραγράφου είναι λεία, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η απόδειξη και τα συμπεράσματα της Πρότασης 2.3.1 ισχύουν αυτούσια στην διαφορίσιμη κατηγορία:

Πρόταση 2.3.6 *Έστω S ένας διαφορίσιμος δίσκος στο $x \in X$, μίας γνήσιας G - πολλαπλότητας X, με δράση ϕ, όπου G είναι ομάδα Lie. Τότε η retraction $r : U \to Gx$ είναι λεία fibre bundle με fibre S και ομάδα δομής G_x.*

Η ολική δομή των γνήσιων δράσεων

2.4 Η τοπολογική περίπτωση

Η Πρόταση 2.3.1 δείχνει πως, αν κάποιος G - χώρος X δέχεται γνήσια δράση κάποιας ομάδας Lie G, τότε είναι τοπικά ομοιομορφικός με ένα καρτεσιανό γινόμενο της μορφής $S \times \mathbb{R}^m$. Φυσιολογικά, λοιπόν, τίθεται το ερώτημα: υπό ποιές προϋποθέσεις και με ποιό τρόπο η διάσπαση αυτής της μορφής μπορεί να επεκταθεί ολικά; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί με εφαρμογή του επόμενου Θεωρήματος, η απόδειξη του οποίου υπερβαίνει τους σκοπούς του παρόντος και παραλείπεται. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [12], Ch. IV, 4.13.

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω G μία μη συμπαγής, συνεκτική και τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε, η G έχει μεγιστικές συμπαγείς υποομάδες, οι οποίες είναι συνεκτικές και συζυγείς μεταξύ τους. Έστω K μία από αυτές. Τότε, υπάρχουν υποομάδες $H_i, i = 1, \ldots, n$ της G, οι οποίες είναι αμφιδιαφορίσιμα ισομορφικές με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$. Επιπλέον, κάθε $g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό και διαφορίσιμο τρόπο με τη μορφή $g = t_1 t_2 \ldots t_n k$ για $k \in K$ και $t_i \in H_i$ για $i = 1, \ldots, n$. Επομένως, κάθε συμπαγής υποομάδα B της G περιέχεται σε κάποια K και ισχύουν οι αμφιδιαφορίσεις $G \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \times K \cong \mathbb{R}^n \times K$ και $G/K \cong \mathbb{R}^n$.*

Ορισμός 2.4.2 *Έστω G μία τοπολογική ομάδα, K μία συμπαγής μεγιστική υποομάδα της και X ένας G - χώρος. Ένα υποσύνολο S του X λέγεται K -* **δίσκος** *στο $x \in X$, αν υπάρχουν G - περιοχή U του S και G - απεικόνιση $f : U \to G/K$ με $f^{-1}(\{K\}) = S$ και $f(x) = K$. Το S θα λέγεται* **ολικός** *K* **- δίσκος** *στο $x \in X$, αν υπάρχει G απεικόνιση $F : X \to G/K$ με $S = F^{-1}(\{K\})$ και $F(x) = K$.*

Λήμμα 2.4.3 *Έστω G μία τοπολογική ομάδα με συμπαγείς υποομάδες K και B, εκ των οποίων η K είναι μεγιστική συμπαγής υποομάδα της. Για κάθε G - χώρο X και G - απεικόνιση $F : X \to G/B$ υπάρχει G - απεικόνιση $f : X \to G/K$.*

Απόδειξη. Η B είναι συμπαγής, επομένως υπάρχει μεγιστική υποομάδα K' της G με $B \leq K'$. Λόγω του Θεωρήματος 2.4.1, υπάρχει $g_\circ \in G$ ώστε $g_\circ K' {g_\circ}^{-1} = K$. Οι G - απεικονίσεις

$$L : G/B \to G/K', \quad gB \to gK',$$

και

$$R : G/K' \to G/K, \quad gK' \to g{g_\circ}^{-1}K,$$

είναι συνεχείς. Η σύνθεση

$$f = R \circ L \circ F : X \to G/K$$

είναι η ζητούμενη απεικόνιση. □

Λήμμα 2.4.4 *Έστω G μία τοπολογική ομάδα που δρα Palais - γνήσια στον πλήρως κανονικό χώρο X μέσω της $\phi : G \times X \to X$ και B συμπαγής κανονική υποομάδα της G. Τότε, στον χώρο X/B ορίζεται η δράση*

$$\tilde{\phi} : G/B \times X/B \to X/B : \quad ([g]_B, [x]_B) \mapsto [gx]_B$$

της ομάδας G/B που είναι Palais - γνήσια.

Απόδειξη. Η δράση είναι καλά ορισμένη. Πράγματι έστω $[g_1]_B = [g_2]_B$ και $[x_1]_B = [x_2]_B$. Τότε, υπάρχουν h, $w \in B$ με $x_1 = hx_2$, $g_1 = wg_2$, οπότε $g_1x_1 = wg_2hx_2$. Η B είναι κανονική υποομάδα της G, οπότε $wg_2 = g_2h_1$, για κάποιο $h_1 \in B$, επομένως $g_1x_1 = g_2h_1hx_2$, δηλαδή $[g_1x_1]_B = [g_2x_2]_B$, πάλι για λόγους κανονικότητας της B

Οι κανονικές απεικονίσεις $P : G \to G/B$ και $Q : X \to X/B$ είναι γνήσιες, αφού η B είναι συμπαγής, οπότε η

$$P \times Q : G \times X \to G/B \times X/B$$

είναι επίσης γνήσια. Από την σχέση

$$Q \circ \phi = \tilde{\phi} \circ (P \times Q)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός πως, αν σε κάποιον χώρο Hausdorff για κάποιο δίκτυο σε αυτόν ισχύει ότι κάθε υποδίκτυο του έχει υποδίκτυο που συγλίνει σε κοινό όριο, τότε το δίκτυο συγκλίνει σε αυτό το όριο, έπεται η συνέχεια της δράσης.

Έστω, τώρα, $[x]_B$, $[y]_B \in X/B$ και U_x μικρή περιοχή του x. Εξ ορισμού, θα υπάρχει περιοχή U_y του y, ώστε το σύνολο $G(U_x, U_y)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Τα σύνολα $Q(U_x)$, $Q(U_y)$ είναι περιοχές των $[x]_B$, $[y]_B$, αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι το $Q(U_x)$ είναι μικρή περιοχή του $[x]_B$ στον X/B:

Έστω $g \in G$ με

$$[g]_B Q(U_x) \cap Q(U_y) \neq \emptyset.$$

Τότε, υπάρχουν $b \in B$, $z \in U_x$ με $bgz \in U_y$. Όμως, πάλι λόγω της κανονικότητας της B στην G, υπάρχει $b_1 \in B$ με $bg = gb_1$, οπότε $gb_1z \in U_y$ και συνεπώς $[g]_B = [gb_1]_B \in P(G(U_x, U_y))$. Άρα

$$G/B(Q(U_x), Q(U_y)) \subseteq P(G(U_x, U_y)).$$

Συνεπώς το $G/B(Q(U_x), Q(U_y))$ είναι σχετικά συμπαγές. Άρα, η δράση της G/B στον χώρο X/B είναι Palais - γνήσια. $\square$

Λήμμα 2.4.5 *Έστω G μία μη συμπαγής, συνεκτική και τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα και K μία μεγιστική συμπαγής υποομάδα της. Έστω, επίσης, X ένας πλήρως κανονικός Palais - γνήσιος G - χώρος και $x \in X$. Τότε, υπάρχει G - περιοχή U του x και G - απεικόνιση $f : U \to G/K$ με $f(g_\circ x) = K$ για κάποιο $g_\circ \in G$.*

Απόδειξη. Από την λύση του πέμπτου προβλήματος του Hilbert, υπάρχει κανονική συμπαγής υποομάδα B της G, ώστε η G/B να είναι ομάδα Lie (βλέπε [12], Ch. IV, 4.13).

Αφού η B είναι συμπαγής θα δρα Palais - γνήσια στον πλήρως κανονικό χώρο X, οπότε ο X/B θα είναι πλήρως κανονικός, από το 0.2.10(2). Από το προηγούμενο Λήμμα, ο X/B είναι Palais - γνήσιος (G/B) - χώρος, οπότε, από το Θεώρημα 2.1.7, υπάρχει G/B - περιοχή $\widetilde{U}$ του $[x]_B$ και G/B - απεικόνιση

$$\widetilde{F} : \widetilde{U} \to (G/B) \Big/ (G/B)_{[x]_B}$$

που ορίζει δίσκο στο σημείο $[x]_B$ του X/B. Με το συμβολισμό του προηγούμενου Λήμματος, το

$$U = Q^{-1}(\widetilde{U})$$

είναι G - περιοχή του x και το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G \times U \arrow[r] \arrow[d, "P \times Q"'] & U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & G/(BG_x) \arrow[d, "R"'] \\
G/B \times \widetilde{U} \arrow[r] & \widetilde{U} \arrow[r, "\widetilde{F}"] & (G/B) \Big/ (G/B)_{[x]_B}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό:

Θεωρούμε τη δράση της συμπαγούς υποομάδας BG_x στην G και τη δράση της υποομάδας $(G/B)_{[x]_B}$ στην G/B. Τότε, η κανονική απεικόνιση $P : G \to G/B$ γίνεται $(BG_x, (G/B)_{[x]_B})$ - ισομεταβλητή. Πράγματι, αν $g \in BG_x$ τότε $g = wh$ για κάποια $w \in B$ και $h \in G_x$, οπότε $[g]_B[x]_B = [gx]_B = [wx]_B = [x]_B$, επομένως $[g]_B \in (G/B)_{[x]_B}$. Επάγεται λοιπόν η G - απεικόνιση

$$R : G/(BG_x) \to (G/B) \Big/ (G/B)_{[x]_B} : \quad [g]_{BG_x} \mapsto [g]_{(G/B)_{[x]_B}},$$

η οποία είναι συνεχής και επί. Θα δείξουμε πως είναι ανοικτή και 1-1, οπότε θα είναι ομοιομορφισμός.

Έστω $[g_1]_{(G/B)_{[x]_B}} = [g_2]_{(G/B)_{[x]_B}}$. Τότε $[({g_2}^{-1}g_1x)]_B = [x]_B$, οπότε $w{g_2}^{-1}g_1x = x$ για κάποιο $w \in B$. Άρα ${g_2}^{-1}g_1 \in BG_x \Rightarrow [g_1]_{BG_x} = [g_2]_{BG_x}$, οπότε η R είναι 1-1.

Έστω $p_1 : G \to G/(BG_x)$ και $p_2 : G/B \to (G/B) \Big/ (G/B)_{[x]_B}$ οι κανονικές απεικονίσεις. Τότε

$$p_2 \circ P = R \circ p_1.$$

Για $A \subseteq G/(BG_x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P^{-1}({p_2}^{-1}(R(A))) &= (p_2 \circ P)^{-1}(R(A)) \\ &= (R \circ p_1)^{-1}(R(A)) \\ &= {p_1}^{-1}(A) \end{aligned}$$

και το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό αν το A είναι. Άρα, η R είναι ομοιομορφισμός και μπορούμε να ορίσουμε την G - απεικόνιση

$$F = R^{-1} \circ \widetilde{F} \circ Q : U \to G/B,$$

η οποία είναι συνεχής και επί με $F(x) = B$. Η BG_x είναι συμπαγής, οπότε, αφού όλες οι μεγιστικές συμπαγής υποομάδες της G είναι συζυγείς, υπάρχει $g_\circ \in G$ με $g_\circ(BG_x){g_\circ}^{-1} \subseteq K$. Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4.3, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 2.4.6 Έστω G μια τοπολογική ομάδα και K μία μεγιστική, συμπαγής υποομάδα της. Έστω, επίσης, X ένας τοπικά συμπαγής G - χώρος και $x \in X$ στο οποίο υπάρχει K - δίσκος S. Τότε, μπορούμε να βρούμε συμπαγή K - δίσκο στο x: έστω V μία συμπαγής περιοχή τού x, τότε το $S \cap KV$ είναι συμπαγής K - δίσκος στο x. Όμοια, μπορούμε να βρούμε K - δίσκο S_x στο x τέτοιον, ώστε το GS_x να είναι ανοικτή περιοχή στο x. Προς τούτο, επιλέγουμε το $V \subseteq GS$ στην ανοικτή περιοχή GS του x και θέτουμε $S_x = S \cap KV$, οπότε $GS_x = GV \cap GS = GV$.

Καθοριστικής σημασίας στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.1, ήταν η ύπαρξη τοπικής τομής της $G \to G/G_x$ γύρω από το $e \in G$, για κάθε $x \in X$. Το ανάλογο ερώτημα στην ολική περίπτωση θα αφορούσε την ύπαρξη μίας ολικής τομής της απεικόνισης $G \to G/K$. Όμως, βασισμένοι στο Θεωρήμα 2.4.1 μπορούμε να δώσουμε την παρακάτω αμεσότερη απάντηση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη τοπική περίπτωση, για τοπικά συμπαγή χώρο X και τοπολογική ομάδα G, όπως στο Θεώρημα 2.4.1.

Θεώρημα 2.4.7 *Έστω K μία μεγιστική συμπαγής υποομάδα μιας τοπικά συμπαγούς, μη συμπαγούς και συνεκτικής ομάδας G. Έστω X ένας γνήσιος G - χώρος και S ένας συμπαγής K - δίσκος στο $x \in X$ με $G_x \leq K$. Τότε, το $U = GS$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n \times S$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $y \in U$. Τότε $y = gs$, για κάποια $g \in G$, $s \in S$. Από το Θεώρημα 2.4.1, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του, έχουμε $g = t_1 t_2 \ldots t_n k$ για $t_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $k \in K$ και η παράσταση αυτή είναι μοναδική. Θέτουμε

$$f : U \to \mathbb{R}^n \times S, \quad y \to ((t_1, t_2, \ldots, t_n), ks).$$

Η f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $y = g_1 s_1 = g_2 s_2$, για κάποια $g_1, g_2 \in G$ και $s_1, s_2 \in S$, τότε $({g_2}^{-1} g_1) s_1 = s_2$, οπότε ${g_2}^{-1} g_1 = m \in G(S, S) = K$, διότι το S είναι K - δίσκος. Από το Θεώρημα 2.4.1, έχουμε

$$g_1 = t_1 t_2 \ldots t_n k_1, \quad g_2 = h_1 h_2 \ldots h_n k_2$$

για $t_i, h_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $k_1, k_2 \in K$. Άρα

$$t_1 t_2 \ldots t_n k_1 = h_1 h_2 \ldots h_n k_2 m,$$

οπότε, λόγω μοναδικότητας της παράστασης, θα ισχύει $t_i = h_i$ για $i = 1, \ldots, n$ απ' όπου έπεται $k_1 s_1 = k_2 s_2$.

Η f είναι προφανώς 1-1 και επί. Θα δείξουμε πως είναι και συνεχής. Έστω $\{y_j\}_{j \in J}$ δίκτυο με $y_j \to y$ για κάποιο $y \in U$. Τότε

$$y_j = (t_{1j} t_{2j} \ldots t_{nj} k_j) s_j, \quad y = (t_1 t_2 \ldots t_n k) s$$

για κάποια $t_{ij}, t_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $k_1, k_2 \in K$, $s_j, s \in S$, $j \in J$. Λόγω της συμπάγειας του S, υπάρχει υποδίκτυο $\{s_{j_m}\}_{m \in M}$ με $s_{j_m} \to z$ για κάποιο $z \in S$ και, λόγω της γνησιότητας της δράσης, θέτοντας $g_j = t_{1j} t_{2j} \ldots t_{nj} k_j$, θα υπάρχει υποδίκτυο $\{g_{j_{m_l}}\}_{i \in I}$ με $g_{j_{m_l}} \to g$. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε εξ αρχής πως $s_j \to s$ και $g_j \to g$. Τότε $g_j s_j \to gz$, οπότε $gz = y$. Έστω $g = h_1 h_2 \ldots h_n l$ για $h_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $l \in K$. Τότε

$$(h_1 h_2 \ldots h_n l) z = (t_1 t_2 \ldots t_n k) s,$$

οπότε θα υπάρχει $m \in G(S, S) = K$, ώστε να ισχύει

$$t_1 t_2 \ldots t_n k = h_1 h_2 \ldots h_n l m,$$

απ' όπου προκύπτει πάλι $t_i = h_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $k = lm$. Άρα

$$t_{1j}t_{2j}\ldots t_{nj}k_j \to t_1 t_2 \ldots t_n lm,$$

οπότε θα έχουμε $t_{ij} \to t_i$ για $i = 1, \ldots, n$ και $k_j \to lm$. Συνεπώς

$$(t_{1j}t_{2j}\ldots t_{nj}k_j)s_j \to (t_1 t_2 \ldots t_n lm)z = (t_1 t_2 \ldots t_n k)s.$$

Άρα $lmz = ks$, δηλαδή $k_j s_j \to lmz = ks$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία συμπεραίνουμε πως κάθε υποδίκτυο του δικτύου $\{(t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{nj}), k_j s_j)\}_{j \in J}$ έχει υποδίκτυο που συγλίνει στο όριο $((t_1, t_2, \ldots, t_n), ks)$. Άρα

$$(t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{nj}), k_j s_j) \to ((t_1, t_2, \ldots, t_n), ks),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής.

Η αντίστροφη της f είναι κατά προφανή τρόπο συνεχής, οπότε η f είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. □

Η επόμενη πρόταση αποτελεί το βασικό «εργαλείο» για την επέκταση, επαγωγικά, (τοπικών) K - δίσκων σε ολικούς. (βλέπε Θεώρημα 2.4.9).

Πρόταση 2.4.8 *Έστω S_1 και S_2 δύο συμπαγείς K - δίσκοι. Τότε, υπάρχει συμπαγής K - δίσκος S τέτοιος, ώστε να ισχύουν $S_1 \subseteq S$ και $GS_1 \cup GS_2 = GS$.*

Απόδειξη. Όταν $GS_1 \cap GS_2 = \emptyset$, τότε ορίζουμε $S = S_1 \cup S_2$. Υποθέτουμε, τώρα, πως $GS_1 \cap GS_2 \neq \emptyset$. Έστω $F_1 : GS_1 \to G/K$ η G - απεικόνιση που ορίζει τον δίσκο S_1. Τα GS_1, GS_2 είναι κλειστά, από το Λήμμα 0.2.4, οπότε, από το Θεώρημα του Tietze, ο περιορισμός $F_1|_{S_2 \cap GS_1}$ μπορεί να επεκταθεί σε μία συνεχή απεικόνιση $R : S_2 \to G/K$.

Θεωρώντας κανονικοποιημένο μέτρο Haar στην K, ορίζουμε την

$$H : S_2 \to G/K \text{ με } H(x) = \int_K k^{-1}R(kx)dk,$$

για κάθε $x \in S_2$. Τότε, η H είναι συνεχής K - απεικόνιση, αφού το μέτρο Haar είναι αναλλοίωτο για τις αριστερές μεταφορές. Ισχύει

$$H(s) = \int_K F_1(s)dk = F_1(s)$$

για κάθε $s \in S_2 \cap GS_1$, οπότε η H είναι επέκταση της $F_1|_{S_2 \cap GS_1}$.

Ορίζουμε, τώρα, την

$$L : GS_2 \to G/K \text{ με } L(gs) = gH(s)$$

για κάθε $g \in G$ και $s \in S_2$. Η L είναι συνεχής, αφού $L = L_1 \circ L_2 \circ f$, όπου οι L_1, L_2 ορίζοται ως εξής

$$\begin{aligned} L_1 : H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times S_2 &\to H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times G/K : \\ ((t_1, t_2, \dots, t_n), s) &\mapsto ((t_1, t_2, \dots, t_n), H(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 : H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times G/K &\to G/K : \\ ((t_1, t_2, \dots, t_n), gK) &\mapsto (t_1 t_2 \dots t_n g)K, \end{aligned}$$

ενώ η

$$f : GS_2 \to H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times S_2$$

είναι αυτή που ορίσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.7. Αν $s \in GS_1 \cap S_2$, τότε $L(gs) = gH(s) = gF_1(s) = F_1(gs)$, οπότε ορίζεται η G - απεικόνιση

$$F : GS_1 \cup GS_2 \to G/K : \quad F|_{GS_1} = F_1, \quad F|_{GS_2} = L.$$

Η F είναι συνεχής : αν $A \subseteq G/K$ είναι κλειστό σύνολο στον G/K, τότε

$$F^{-1}(A) = (F^{-1}(A) \cap GS_1) \cup (F^{-1}(A) \cap GS_2) = {F_1}^{-1}(A) \cup L^{-1}(A),$$

επομένως το $F^{-1}(A)$ θα είναι κλειστό σύνολο στον $GS_1 \cup GS_2$, αφού τα σύνολα $GS_i \subseteq GS_1 \cup GS_2$ είναι κλειστά στο $GS_1 \cup GS_2$ για $i = 1, 2$. Άρα, το

$$S = F^{-1}(\{K\}) = {F_1}^{-1}(\{K\}) \cup L^{-1}(\{K\}) \subseteq S_1 \cup GS_2$$

θα είναι ο ζητούμενος συμπαγής K - δίσκος. $\square$

Θεώρημα 2.4.9 *Έστω (G, X) μία Palais - γνήσια δράση μίας μη συμπαγούς, συνεκτικής και τοπικά συμπαγούς ομάδας G σε έναν τοπικά συμπαγή και συνεκτικό χώρο X. Τότε, υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο S του X τέτοιο, ώστε ο X να είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n \times S$.*

Απόδειξη. Έστω K μεγιστική συμπαγής υποομάδα της G και ϕ η δράση της G στον X. Από το Λήμμα 2.4.5 και την Παρατήρηση 2.4.6, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $g_\circ \in G$ και συμπαγής K - δίσκος S_x ώστε $g_\circ x \in S_x \cap (GS_x)^\circ$. Τότε $x \in (GS_x)^\circ$, αφού η $\phi_{g_\circ}$ είναι ομοιομορφισμός, συνεπώς $X = \bigcup_{x \in X} (GS_x)^\circ$.

Όμως, ο X είναι τοπικά συμπαγής και συνεκτικός χώρος, οπότε είναι χώρος Lindelöf. Άρα, υπάρχουν $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ με $X = \bigcup_{i=1}^{\infty}(GS_{x_i})^{\circ}$. Επομένως, υπάρχουν συμπαγείς K - δίσκοι $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$, ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} GS_i$, όπου $S_i = S_{x_i}$, $i \in \mathbb{N}$.

Από το Θεώρημα 2.4.7, για το S_1 υπάρχει ομοιομορφισμός

$$f_1 : GS_1 \to \mathbb{R}^n \times S_1$$

και από την Πρόταση 2.4.8, υπάρχει συμπαγής K - δίσκος S_{12} με

$$S_1 \subseteq S_{12} \subseteq (S_1 \cup GS_2)$$

και $G(S_1 \cup S_2) = GS_{12}$. Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 2.4.7, παίρνουμε τον ομοιομορφισμό

$$f_2 : GS_{12} = (G(S_1 \cup S_2) \to \mathbb{R}^n \times S_{12},$$

για τον οποίο, από το Θεώρημα 2.4.7, ισχύει

$$f_2|_{GS_1} = f_1.$$

Επαγωγικά, κατασκευάζουμε μία αύξουσα οικογένεια συμπαγών K - δίσκων $\{S_{12\ldots k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ και μια οικογένεια απεικονίσεων $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, όπου

$$GS_{12\ldots k} = GS_{12\ldots k-1} \cup GS_k$$

και

$$f_k : GS_{12\ldots k} \to \mathbb{R}^n \times S_{12\ldots k}, \text{ με } f_k|_{GS_{12\ldots k-1}} = f_{k-1}.$$

Προφανώς $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} GS_{12\ldots k}$, οπότε, θέτοντας $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_{12\ldots k}$, ορίζουμε την

$$f : X \to \mathbb{R}^n \times S \text{ με } f|_{GS_{12\ldots k}} = f_k.$$

Η f είναι 1-1, επί και τοπικά συνεχής. Πράγματι για $x \in X$ υπάρχει $k_\circ \in \mathbb{N}$ με

$$x \in (GS_{k_\circ})^{\circ} \subseteq \Big(G\big(\bigcup_{i=1}^{k_\circ} S_i\big)\Big)^{\circ} = (GS_{12\ldots k_\circ})^{\circ},$$

οπότε η $f|_{(GS_{12\ldots k_\circ})^{\circ}} = f_{k_\circ}|_{(GS_{12\ldots k_\circ})^{\circ}}$ είναι συνεχής. Εφόσον το $(GS_{12\ldots k_\circ})^{\circ}$ είναι ανοικτό στον X, η f θα είναι συνεχής. Επειδή η αντίστροφη της f είναι συνεχής, η f είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. □

Παρατήρηση 2.4.10 Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε το S ως ολικό K - δίσκο: Ακολουθώντας την επαγωγική κατασκευή της προηγούμενης απόδειξης, κατασκευάζουμε την αύξουσα οικογένεια των K - δίσκων $\{S_{12\ldots k}\}_{k=1}^{\infty}$ και ορίζουμε την οικογένεια των G - απεικονίσεων $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ με $F_k : GS_{12\ldots k} \to G/K$ όπως ακριβώς στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.8. Αν ορίσουμε την $F : X \to G/K$ όπως στην τελευταία απόδειξη, παρατηρούμε πως

$$F^{-1}(\{K\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(F^{-1}(\{K\}) \cap GS_{12\ldots k}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k{}^{-1}(\{K\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{12\ldots k} = S,$$

απ' όπου έπεται ότι το S είναι κλειστός ολικός K - δίσκος στον X και μάλιστα τοπικά συμπαγής, αφού ο X είναι τοπικά συμπαγής.

2.5 Η διαφορική περίπτωση

Όταν η G είναι ομάδα Lie και δρα διαφορίσιμα σε μία λεία πολλαπλότητα X, τότε ο X μπορεί να διασπαστεί ανάλογα με λείο τρόπο σε γινόμενο δύο απλούστερων χώρων:

Ορισμοί 2.5.1 *Έστω A ένα υποσύνολο μίας λείας πολλαπλότητας X και $f : A \to Y$ απεικόνιση με τιμές σε μία λεία πολλαπλότητα Y. Τότε, η f θα λέγεται* **διαφορίσιμη** *στο A, αν υπάρχει U ανοικτή περιοχή του A και $F : U \to Y$ λεία απεικόνιση ώστε $F|_A = f$. Όταν το A είναι G - σύνολο, η f θα λέγεται* **διαφορίσιμη G - απεικόνιση** *αν είναι, επιπλέον, και G - απεικόνιση.*

Ένα συμπαγές υποσύνολο S του X θα λέγεται **διαφορίσιμος K - δίσκος**, *αν υπάρχει διαφορίσιμη G - απεικόνιση $F : GS \to G/K$ τέτοια, ώστε να ισχύει $S = F^{-1}(\{K\})$.*

Ορισμός 2.5.2 *Έστω G μία μη συμπαγής, συνεκτική και τοπικά συμπαγής ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα σε μία λεία πολλαπλότητα X. Έστω, επίσης, K μεγιστική συμπαγής υποομάδα της G. Ένα υποσύνολο S του X λέγεται* **διαφορίσιμος ολικός K - δίσκος**, *αν υπάρχει διαφορίσιμη G - απεικόνιση $f : X \to G/K$ με $S = f^{-1}(\{K\})$.*

Παρατήρηση 2.5.3 Η αντίστοιχη λεία περίπτωση του Λήμματος 2.4.5 έχει απλούστερη απόδειξη: Για $x \in X$, από το Θεώρημα 2.2.5, υπάρχει διαφορίσιμος G_x - δίσκος S_x στο x με το σύνολο GS_x ανοικτό στον X. Επίσης, από το

Θεώρημα 2.4.1 και το Λήμμα 2.4.3, υπάρχει $g_\circ \in G$ με $G_{g_\circ x} = g_\circ G_x {g_\circ}^{-1} < K$. Άρα, αν $F : GS_x \to G/G_x$ είναι η απεικόνιση που ορίζει το S_x, τότε, συνθέτοντας με την λεία G - απεικόνιση

$$H : G/G_x \to G/K : \quad gG_x \mapsto g{g_\circ}^{-1}K,$$

παίρνουμε την

$$f = H \circ F : GS_x \to G/K,$$

που θα ορίζει τον διαφορίσιμο K - δίσκο $S = Kg_\circ S_x$ στο $g_\circ x$ με την ιδιότητα $GS = GS_x$. □

Πρόταση 2.5.4 *Έστω G μία ομάδα Lie, K μία κλειστή υποομάδα της G, X μία λεία G - πολλαπλότητα και $F : X \to G/K$ μία διαφορίσιμη G - απεικόνιση. Τότε, το $S = F^{-1}(\{K\})$ είναι κλειστή κανονική K - υποπολλαπλότητα του X. Επίσης, (κατ' αναλογία πρός την Πρόταση 2.0.5(2) και το Πόρισμα 2.3.4) ο χώρος $G \times_K S$ είναι λεία πολλαπλότητα και η φυσιολογική απεικόνιση $\psi : G \times_K S \to X$ είναι G - αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Έστω ϕ η δράση της G στον X και $x \in X$ με $F(x) = g_\circ K$ για κάποιο $g_\circ \in G$. Η K είναι ομάδα Lie, ως κλειστή υποομάδα της G, ενώ η G/K είναι λεία πολλοπλότητα. Επίσης, η κανονική απεικόνιση $p : G \to G/K$ είναι λεία submersion.

Η απεικόνιση

$$\widetilde{R} : G/K \to G/K : \quad gK \mapsto gg_\circ K$$

είναι αμφιδιαφόριση, ως επαγόμενη από την δεξιά μεταφορά $R_{g_\circ} : G \to G$. Επειδή

$$F \circ \phi_x = \widetilde{R} \circ p,$$

η

$$T_e(F \circ \phi_x) = T_e(\widetilde{R} \circ p) : T_eG \to T_{g_\circ K}G/K$$

είναι επί, συνεπώς η

$$T_xF : T_xX \to T_{g_\circ K}G/K$$

είναι επί. Άρα, η F είναι submersion, οπότε το S θα είναι κλειστή κανονική K - υποπολλαπλότητα του X διάστασης $\dim S = \dim X - \dim G/K$.

Η υποομάδα Lie K δρα γνήσια, διαφορίσιμα και ελεύθερα στον χώρο $G\times S$ μέσω της απεικόνισης $(h,(g,s)) \mapsto (gh^{-1}, hs)$, οπότε, από το Πόρισμα 2.3.2 και την Παρατήρηση 2.3.3 , ο $G\times_K S$ είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης $\dim(G\times_K S) = \dim G\times S - dimK$, η δράση

$$G\times(G\times_K S)\to G\times_K S: \quad (g,[h,s])\mapsto [gh,s]$$

είναι διαφορίσιμη και η ψ είναι, επίσης, διαφορίσιμη. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\dim(G\times_K S) &= \dim G+\dim S-\dim K\\ &= \dim X,\end{aligned}$$

οπότε η ψ, ως 1-1 και επί απεικόνιση, θα είναι αμφιδιαφόριση, αν και μόνο αν είναι submersion.

Έστω $\pi : G\times S\to G\times_K S$ η απεικόνιση - πηλίκο. Αν δείξουμε πως η $\psi\circ\pi : G\times S\to X$ είναι submersion, τότε και η ψ θα είναι submersion. Για τυχόν $g\in G$ η απεικόνιση

$$L_g : G\times S\to G\times S: \quad (h,s)\mapsto (gh,s)$$

είναι αμφιδιαφόριση και ικανοποιεί την ισότητα

$$(\psi\circ\pi)\circ L_g = \phi_g\circ(\psi\circ\pi).$$

Παραγωγίζοντας στο $(e,x)\in G\times S$, έχουμε

$$T_{(g,x)}(\psi\circ\pi)\circ T_{(e,x)}L_g = T_x\phi_g\circ T_{(e,x)}(\psi\circ\pi).$$

Η $\psi\circ\pi$ θα είναι submersion, αν η $T_{(e,x)}(\psi\circ\pi)$ είναι επί για κάθε $x\in S$.

Για $(v_e,v_x)\in T_{(e,x)}(G\times S)\cong T_eG\times T_xS$ έχουμε

$$T_{(e,x)}(\psi\circ\pi)(v_e,v_x) = T_e\phi_x(v_e)+v_x,$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned}T_{(e,x)}(\psi\circ\pi)(T_{(e,x)}(G\times S)) &= T_e\phi_x(T_eG)+T_xS\\ &= T_xGx+\ker T_xF.\end{aligned}$$

Όπως είδαμε στην αρχή της απόδειξης, η $F\circ\phi_x$ είναι submersion, οπότε η $T_x(F|_{T_xGx}) : T_xGx\to T_KG/K$ είναι επί και ισχύει

$$\begin{aligned}\dim T_xGx &= \dim T_KG/K+\dim\ker T_x(F|_{T_xGx})\\ &= \dim T_KG/K+\dim(T_xGx\cap\ker T_xF).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\dim T_xX &= \dim T_K G/K + \ker T_xF \\ &= \dim T_xGx - \dim(T_xGx \cap \ker T_xF) + \dim\ker T_xF \\ &= \dim(T_xGx + \ker T_xF) \leq \dim T_xX,\end{aligned}$$

οπότε $T_xGx + T_xS = T_xX$, δηλαδή η $T_{(e,x)}(\psi \circ \pi)$ είναι επί. □

Πρόταση 2.5.5 *Έστω G μία ομάδα Lie, K μία κλειστή υποομάδα της G, X μία λεία G - πολλαπλότητα και $S \subseteq X$ ένας διαφορίσιμος K - δίσκος, ώστε το $U = GS$ να είναι ανοικτό στο X. Τότε, η $f : U \to \mathbb{R}^n \times S$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.7 είναι αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η

$$f \circ \psi : G \times_K S \to \mathbb{R}^n \times S$$

είναι αμφιδιαφόριση, όπου $\psi : G \times_K S \to U$ είναι η αμφιδιαφόριση της προηγούμενης Πρότασης. Από το Θεώρημα 2.4.1, έχουμε

$$n = \dim G - \dim K$$

και

$$\begin{aligned}\dim(G \times_K S) &= \dim G - \dim K + \dim S \\ &= \dim(\mathbb{R}^n \times S),\end{aligned}$$

οπότε αρκεί η $f \circ \psi$ να είναι λεία και submersion. Από την Παρατήρηση 2.3.3, αρκεί η

$$f \circ \psi \circ \pi : G \times S \to \mathbb{R}^n \times S$$

να είναι λεία και submersion, όπου $\pi : G \times S \to G \times_K S$ είναι η απεικόνιση - πηλίκο.

Έστω, λοιπόν, η αμφιδιαφόριση

$$R : G \to \mathbb{R}^n \times K$$

που διασπά την ομάδα Lie G στο Θεώρημα 2.4.1 και έστω η λεία απεικόνιση

$$\begin{aligned}L : \mathbb{R}^n \times K \times S &\to \mathbb{R}^n \times S : \\ (t_1, t_2, \ldots, t_n, k, s) &\mapsto (t_1, t_2, \ldots, t_n, ks).\end{aligned}$$

Η $R \times id_S : G \times S \to \mathbb{R}^n \times K \times S$ είναι προφανώς αμφιδιαφόριση και ισχύει η σχέση

$$f \circ \psi \circ \pi = L \circ (R \times id_S),$$

απ' όπου έπεται πως η f είναι λεία και πως για να είναι αμφιδιαφόριση, αρκεί η L να είναι submersion. Όμως, αυτό ισχύει, διότι η δράση $K \times S \to S$ είναι submersion. $\square$

Πρόταση 2.5.6 *Έστω G μία ομάδα Lie, K μία συμπαγής μεγιστική υποομάδα της G, X μία λεία G - πολλαπλότητα και $S_1, S_2 \subseteq X$ δύο συμπαγείς διαφορίσιμοι K - δίσκοι. Τότε, υπάρχει συμπαγής διαφορίσιμος K - δίσκος S με $S_1 \subseteq S$ και $GS_1 \cup GS_2 = GS$.*

Απόδειξη. Όταν $GS_1 \cap GS_2 = \emptyset$, τότε η πρόταση είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε, λοιπόν, πως $GS_1 \cap GS_2 \neq \emptyset$. Έστω $f_1 : GS_1 \to G/K$ η διαφορίσιμη G - απεικόνιση που ορίζει το S_1. Τότε, υπάρχει ανοικτή G - περιοχή U του GS_1 και διαφορίσιμη G - απεικόνιση $F_1 : U \to G/K$ με $F_1|_{GS_1} = f_1$. Έστω $p : X \to X/G$ η κανονική απεικόνιση. Το $p(GS_1) = p(S_1)$ είναι συμπαγές, συνεπώς κλειστό στον X/G, ενώ το $p(U)$ είναι ανοικτό στον X/G. Άρα, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \subseteq X/G$, ώστε

$$p(GS_1) \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq p(U),$$

οπότε

$$GS_1 \subseteq p^{-1}(A) \subseteq \overline{p^{-1}(A)} \subseteq p^{-1}(\overline{A}) \subseteq U.$$

Αν θέσουμε $V = \overline{p^{-1}(A)}$, τότε

$$GS_1 \subseteq V^\circ \subseteq V \subseteq U$$

και το V είναι κλειστό G - σύνολο.

Από το Λήμμα του Uryshon, υπάρχει λεία απεικόνιση $R : X \to [0,1]$ με $\operatorname{supp} R \subseteq U$ και $R|_V = 1$. Τότε, η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \to G/K : \quad \overline{F}(x) = \begin{cases} F_1(x)R(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

που επεκτείνει την $F_1|_V$. Χρησιμοποιώντας το κανονικοποιημένο μέτρο Haar της K, ορίζουμε

$$\overline{F}_1 : X \to G/K \text{ με } \overline{F}_1(x) = \int_K k^{-1}\overline{F}(kx)dk$$

για κάθε $x \in X$. Η $\overline{F}_1$ είναι διαφορίσιμη K - απεικόνιση όπως ακριβώς στην Πρόταση 2.4.8 και ισχύει $\overline{F}_1|_V = F_1|_V$.

Έστώ $f_2 : GS_2 \to G/K$ η G - απεικόνιση που ορίζει το S_2. Τότε, υπάρχει ανοικτή G - περιοχή W τού GS_2 και G - απεικόνιση $F_2 : W \to G/K$ με $F_2|_{GS_2} = f_2$. Έστω ο S_3 διαφορίσιμος K - δίσκος που ορίζει η F_2. Τότε, $S_2 \subseteq S_3$ και το S_3 είναι κανονική K - υποπολλαπλότητα του W, συνεπώς και του X, αφού το W είναι ανοικτό στον X.

Ορίζεται, λοιπόν, η διαφορίσιμη K - απεικόνιση $\overline{F}_1|_{S_3} : S_3 \to G/K$, την οποία επεκτείνουμε σε μία G - απεικόνιση $\overline{F}_2 : W \to G/K$, θέτοντας

$$\overline{F}_2(gx) = g\overline{F}_1|_{S_3}(x)$$

για κάθε $x \in S_3$ και $g \in G$. Η $\overline{F}_2$ είναι λεία, αφού

$$\overline{F}_2 = L_1 \circ L_2 \circ H,$$

όπου οι L_1 και L_2 ορίζονται ως εξής

$$\begin{array}{rcl} L_1 : H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times S_3 & \to & H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times G/K : \\ ((t_1, t_2, \dots, t_n), s) & \mapsto & ((t_1, t_2, \dots, t_n), \overline{F}_1|_{S_3}(s)), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L_2 : H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times G/K & \to & G/K : \\ ((t_1, t_2, \dots, t_n), gK) & \mapsto & (t_1 t_2 \dots t_n g)K, \end{array}$$

ενώ η

$$H : GS_3 \to H_1 \times H_2 \times \dots H_n \times S_3$$

είναι όπως στην Πρόταση 2.5.5.

Εφόσον

$$\overline{F}_2|_{S_3 \cap V^\circ} = F_1|_{V^\circ},$$

ορίζεται η G - απεικόνιση

$$F : W \cup V^\circ \to G/K \text{ με } F|_W = \overline{F}_2, \quad F|_{V^\circ} = F_1|_{V^\circ}$$

και είναι λεία. Άρα, ορίζεται η διαφορίσιμη G - απεικόνιση

$$F|_{GS_1 \cup GS_2} : GS_1 \cup GS_2 \to G/K,$$

από την οποία ορίζεται ο διαφορίσιμος K - δίσκος $S = (F|_{GS_1 \cup GS_2})^{-1}(\{K\})$ που είναι συμπαγής, αφού το GS_2 είναι κλειστό υποσύνολο του X, από το 0.2.4 και ισχύει

$$\begin{aligned} S &= {f_1}^{-1}(\{K\}) \cup \overline{F}_2|_{GS_2}{}^{-1}(\{K\} \\ &\subseteq S_1 \cup (GS_3 \cap GS_2) \\ &= S_1 \cup GS_2. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.5.7 *Έστω G μία μη συμπαγής, συνεκτική και τοπικά συμπαγής ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια σε μία λεία συνεκτική πολλαπλότητα X. Τότε, υπάρχει κλειστή, κανονική υποπολλαπλότητα S του X, ώστε ο X να είναι αμφιδιαφορίσιμος με τον $\mathbb{R}^n \times S$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω K μεγιστική συμπαγής υποομάδα της G, ϕ η δράση της G στην X και $x \in X$. Από τις Παρατηρήσεις 2.4.6 και 2.5.3, υπάρχει $g_\circ \in G$ και συμπαγής διαφορίσιμος K - δίσκος S'_x στο $g_\circ x$ με $g_\circ x \in (GS'_x)^\circ$, οπότε $x \in (GS'_x)^\circ$. Έστω $F : GS'_x \to G/K$ η απεικόνιση που ορίζει τον συμπαγή διαφορίσιμο K - δίσκο S'_x. Η G - απεικόνιση

$$F|_{(GS'_x)^\circ} : (GS'_x)^\circ \to G/K$$

ορίζει έναν σχετικά συμπαγή και διαφορίσιμο K - δίσκο, S_x, στο $g_\circ x$, ο οποίος είναι κανονική $(\dim X - \dim G + \dim K)$ - διάστατη υποπολλαπλότητα του X, ανεξάρτητη από το x. Το $\overline{S_x}$ είναι συμπαγές και συνεπώς το $G\overline{S_x}$ είναι κλειστό, από το Λήμμα 0.2.4, οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$G\overline{S_x} = \overline{GS_x} \text{ και } (\overline{GS_x})^\circ \subseteq (GS'_x)^\circ.$$

Επομένως, το $\overline{S_x}$ είναι συμπαγής διαφορίσιμος K - δίσκος. Αφού $x \in (GS'_x)^\circ = GS_x$, έχουμε $X = \bigcup_{x \in X} GS_x$. Όμως, ο X είναι χώρος Lindelöf, οπότε υπάρχουν $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq X$ τέτοια, ώστε $X = \bigcup_{i=1}^\infty GS_{x_i}$. Άρα, θέτοντας $\overline{S}_i = \overline{S_{x_i}}$ για $i \in \mathbb{N}$, παίρνουμε μία οικογένεια συμπαγών διαφορίσιμων K - δίσκων $\{\overline{S}_i\}_{i=1}^\infty$ τέτοιων, ώστε να ισχύει $X = \bigcup_{i=1}^\infty G\overline{S}_i$.

Έστω $F_1 : G\overline{S}_1 \to G/K$ η διαφορίσιμη G - απεικόνιση που ορίζει τον K - δίσκο $\overline{S}_1$. Από την Πρόταση 2.5.6, υπάρχει διαφορίσιμη G - απεικόνιση

$$F_2 : G(\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2) \to G/K,$$

η οποία ορίζει τον συμπαγή διαφορίσιμο K - δίσκο $\overline{S}_{12}$ έτσι, ώστε

$$\overline{S}_1 \subseteq \overline{S}_{12} \subseteq \overline{S}_1 \cup G\overline{S}_2 \text{ και } F_2|_{G\overline{S}_1} = F_1.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζεται, επαγωγικά, η διαφορίσιμη G - απεικόνιση

$$F_k : G(\overline{S}_{12\ldots k-1} \cup \overline{S}_k) \to G/K,$$

η οποία ορίζει, με την σειρά της, τον συμπαγή διαφορίσιμο K - δίσκο $\overline{S}_{12\ldots k}$ με

$$\overline{S}_{12\ldots k-1} \subseteq \overline{S}_{12\ldots k} \subseteq \overline{S}_{12\ldots k-1} \cup G\overline{S}_k \text{ και } F_k|_{G\overline{S}_{12\ldots k-1}} = F_{k-1},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπως πρίν. Η απεικόνιση

$$F_k|_{(G\overline{S}_{12\ldots k})^\circ} : (G\overline{S}_{12\ldots k})^\circ \to G/K$$

ορίζει τον διαφορίσιμο K - δίσκο $S_{12\ldots k}$ που είναι κανονική υποπολλαπλότητα του X.

Επειδή

$$S_{12\ldots k-1} = S_{12\ldots k} \cap GS_{12\ldots k-1} \subseteq S_{12\ldots k}$$

και

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} GS_{x_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (G\overline{S}_k)^\circ \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (G\overline{S}_{12\ldots k})^\circ = \bigcup_{k=1}^{\infty} GS_{12\ldots k},$$

προκύπτει (επαγωγικά) η αύξουσα οικογένεια των διαφορίσιμων K - δίσκων $\{S_{12\ldots k}\}_{k=1}^{\infty}$, που είναι ταυτόχρονα αύξουσα οικογένεια κανονικών υποπολλαπλοτήτων ίδιας διάστασης του X.

Ορίζεται, λοιπόν, η G - απεικόνιση

$$F : X = \bigcup_{k=1}^{\infty} GS_{12\ldots k} \to G/K \text{ με } F|_{GS_{12\ldots k}} = F_k|_{(G\overline{S}_{12\ldots k})^\circ} = F_k|_{GS_{12\ldots k}},$$

που είναι καλά ορισμένη και λεία, αφού είναι τοπικά λεία η οποία ορίζει τον διαφορίσιμο ολικό K - δίσκο

$$S = F^{-1}(\{K\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{12\ldots k}.$$

Ο δίσκος αυτός είναι κλειστή κανονική υποπολλαπλότητα του X, διάστασης ίδιας με την κοινή διάσταση κάθε στοιχείου της οικογένειας $\{S_{12\ldots k}\}_{k=1}^{\infty}$. Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζεται η γνωστή από την Πρόταση 2.5.5 αμφιδιαφόριση

$$f_k : GS_{12\ldots k} \to \mathbb{R}^n \times S_{12\ldots k}.$$

Η οικογένεια $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ έχει την ιδιότητα

$$f_k|_{GS_{12\ldots k-1}} = f_{k-1}.$$

Η ένθεση $i_k : S_{12\ldots k} \hookrightarrow S$ είναι λεία 1-1 και τοπική αμφιδιαφόριση για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αφού η διάσταση της S είναι ίδια με την διάσταση της $S_{12\ldots k}$. Άρα, η i_k είναι ανοικτή απεικόνιση, οπότε το $S_{12\ldots k} \subseteq S$ είναι ανοικτό υποσύνολο της S, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τελικά, η

$$f : X \to \mathbb{R}^n \times S \text{ με } f|_{GS_{12\ldots k}} = f_k$$

είναι καλά ορισμένη 1-1, επί και, εξ ορισμού, τοπική αμφιδιαφόριση, απ' όπου συνάγεται ότι η f είναι αμφιδιαφόριση και ο X αμφιδιαφορίσιμος με τον $\mathbb{R}^n \times S$. $\square$

Παρατήρηση 2.5.8 Ουσιαστικά επανακατασκευάσαμε την G - απεικόνιση $F : X \to G/K$ στην διαφορίσιμη εκδοχή της δείχνοντας, από την Πρόταση 2.5.4, πως ο X είναι αμφιδιαφορίσιμος με το twisted product $G \times_K S$.

Κεφάλαιο 3

Ισομετρικές διασπάσεις σε πολλαπλότητες Riemann

Γενική βιβλιογραφία για ισομετρικές δράσεις σε πολλαπλότητες Riemann: [4] και [11].

Στο κεφάλαιο αυτό η M θα είναι μία συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με μετρικό τανυστή Θ.

3.1 Οι ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες σε μία διαφορίσιμη δράση με τοπικά ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση

Ορισμός 3.0.1 *Μία* **ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση (equivariant isometrical splitting)** *της πολλαπλότητας Riemann M καθορίζεται από δύο πολλαπλότητες Riemann P και N, μία ομάδα G ισομετριών της M που δρα μεταβατικά στην P (δηλαδή $Gp = P$ για κάθε $p \in P$) και τετριμμένα στην N και από μία G - ισομετρία (G - απεικόνιση που είναι ταυτόχρονα και ισομετρία) $\psi : P \times N \to M$. Συμβολικά θα λέμε πως η M έχει ως ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση την τριάδα $(P, N, \psi)_G$.*

Ορισμός 3.0.2 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια στην M μέσω ισομετριών. Λέμε πως η M έχει* **τοπική ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση (equivariant local isometrical splitting)***, αν κάθε σημείο της M έχει μία G - ανοικτή περιοχή που επιδέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση.*

Παρατήρηση 3.0.3 Αν P, N είναι δύο πολλαπλότητες Riemann με μετρικούς τανυστές g_P και g_N, αντίστοιχα, τότε, η $P \times N$ είναι πολλαπλότητα Riemann με μετρικό τανυστή $g_{P\times N} = g_P \oplus g_N$, δηλαδή

$$g_{P\times N}((u_p, u_q), (v_p, v_q)) = g_P(u_p, v_p) + g_N(u_q, v_q))$$

για κάθε $u_p, v_p \in T_pP$, $u_q, v_q \in T_qN$ και για κάθε $p \in P$, $q \in N$.

Από τα προηγούμενα, αν $\mathrm{pr} : P \times N \to P$ είναι η απεικόνιση προβολής, τότε για $x \in M$, η απεικόνιση

$$F = \psi|_{P\times\{x\}} \circ \mathrm{pr} \circ \psi^{-1} : M \to Gx \cong G/G_x$$

αναδεικνύει την πολλαπλότητα $\psi(\{x\} \times N)$ ως ολικό G_x - δίσκος της M στο x για την περίπτωση του Ορισμού 3.0.1 και ως τοπικό δίσκο της M στο x για την περίπτωση του Ορισμού 3.0.2.

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι μία διαφορίσιμη διάσπαση ως πρός μία δράση μέσω ισομετριών δεν είναι αναγκαστικά και ισομετρική:

Παράδειγμα 3.0.4 Έστω $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο με τον υπερβολικό μετρικό τανυστή $g_z(v, w) = \frac{1}{(Im(z))^2} \cdot Re(v\overline{w})$.

Θεωρούμε την δράση μέσω ισομετριών της $G = \mathbb{R}$ στον $\mathbb{H}^2$ με τύπο

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 : \quad (t, y) \mapsto e^t y.$$

Για σταθερό $R > 0$ κάθε ευκλείδιο ημικύκλιο N της μορφής $N = \{Re^{i\theta} : \theta \in (0, \pi)\}$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $\mathbb{H}^2$. Ορίζουμε την $\mathbb{R}$ - αμφιδιαφόριση

$$\psi : \mathbb{R} \times N \to \mathbb{H}^2 : \quad (t, Re^{i\theta}) \mapsto Re^{t+i\theta},$$

που δείχνει ότι ο $\mathbb{H}^2$ έχει λεία ισομεταβλητή διάσπαση σε καρτεσιανό γινόμενο, όπως και στην τοπολογική περίπτωση. Όμως δεν υπάρχει ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση, αφού ο $\mathbb{R} \times N$ έχει καμπυλότητα μηδέν ως πρός την μετρική $g_{\mathbb{R}\times N}$, ενώ ο $\mathbb{H}^2$ έχει σταθερή αρνητική καμπυλότητα -1. $\square$

Ας υποθέσουμε πως μία πολλαπλότητα Riemann M επιδέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση $(P,\ N,\ \psi)_G$. Η G δρα μεταβατικά στην P και τετριμμένα στην N, οπότε μέσω της ψ κάθε τροχιά Gx θα είναι G - ισομετρική με τον χώρο P. Συνεπώς, οι ομάδες ισοτροπίας της M θα είναι συζυγείς μεταξύ τους. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτή θα είναι και η πρώτη ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ισομεταβλητής ισομετρικής διάσπασης.

Έστω, τώρα, G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια στην M μέσω ισομετριών και $x \in M$. Έστω, επίσης, $\Re(x)$ το normal bundle της Gx, δηλαδή το subbundle του $TM|_{Gx}$ με $\Re(x) = (T_x(Gx))^{\perp} \subseteq T_xM$. Συμβολίζουμε με $\Re$ την αντίστοιχη κατανομή πάνω από την M.

Λήμμα 3.0.5 *Υποθέτοντας πως όλες οι ομάδες ισοτροπίας της M είναι συζυγείς, η κατανομή $\Re$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $n = \dim M$ και $k = \dim G - \dim G_x = \dim Gx$. Από την Παρατήρηση 2.3.5, η M/G θα είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και η φυσιολογική απεικόνιση $\pi : M \to M/G$ θα είναι submersion. Άρα, για κάθε $x \in M$ θα ισχύει $T_x(Gx) = \ker T_x\pi$, οπότε η κατανομή $\bigcup_{x\in M} T_x(Gx)$ είναι διαφορίσιμη, δηλαδή η $\Re$ θα είναι διαφορίσιμη. □

Υποθέτοντας, επιπλέον, πως η M δέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση έχουμε το επόμενο

Λήμμα 3.0.6 *Η κατανομή $\Re$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πως μία κανονική υποπολλαπλότητα S της M λέγεται ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής $\Re$, αν ισχύει $T_xS = \Re(x)$ για κάθε $x \in S$. Η κατανομή $\Re$ θα λέγεται ολοκληρώσιμη, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της $\Re$ με $x \in S$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.0.3, για $(p_0, q_0) \in P \times N$ η κατανομή

$$\bigcup_{(p,q_0)\in P\times\{q_0\}} T_{(p,q_0)}N$$

στον G - χώρο $P \times N$ πάνω από την τροχιά $P \times \{q_0\}$ είναι εφαπτόμενη στο σημείο (p_0, q_0) με την υποπολλαπλότητα $\{p_0\} \times N$.

Η ψ είναι ισομετρία, οπότε η $T\psi(\bigcup_{(p,q_0)\in P\times\{q_0\}} T_{(p,q)}N) = \Re(\psi(p_0, q_0))$ θα είναι εφαπτόμενη στην κανονική υποπολλαπλοτήτα $\psi(\{p_0\} \times N)$ για κάθε $(p_0, q_0) \in P \times N$. Άρα, η $\psi(\{p_0\} \times N)$ είναι μία ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα που περιέχει το $x_0 = \psi(p_0, q_0) \in M$. Επομένως, η $\Re$ είναι ολοκληρώσιμη κατανομή. □

Το συμπέρασμα του προηγούμενου Λήμματος αποτελεί την δεύτερη συνθήκη για την ύπαρξη ισομεταβλητής ισομετρικής διάσπασης.

Υποθέτοντας τώρα, ότι ισχύουν οι προηγούμενες συνθήκες, θα συμβολίζουμε με N_x τη μέγιστη ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής $\Re$ που περιέχει το $x \in M$. Η N_x είναι συνεκτική immersed υποπολλαπλότητα της M, δηλαδή είναι τοπικά κανονική υποπολλαπλότητα της M. Όμως, η τοπολογία της ως ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας μπορεί να μην συμπίπτει με την σχετική τοπολογία της ως υποχώρου της M. Στην N_x θα θεωρούμε την τοπολογία της ως ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας και την δομή Riemann που επάγεται από την δομή Riemann της M.

Λήμμα 3.0.7 *Έστω ϕ η δράση της G στην M, ώστε όλες οι ομάδες ισοτροπίας να είναι συζυγείς μεταξύ τους και η κατανομή $\Re$ να είναι ολοκληρώσιμη. Τότε:*

1. *$gN_x = N_{gx}$ για κάθε $g \in G$ και $x \in M$, ενώ $G_x = G_y$ για κάθε $y \in N_x$.*

2. *Για $x \in M$ η απεικόνιση*

$$\phi|_{G\times N_x} : G \times N_x \to M : \quad (g, q) \mapsto gq$$

επάγει την

$$\Phi : G/G_x \times N_x \to M : \quad (gG_x, q) \mapsto gq,$$

που είναι διαφορίσιμη, επί και τοπική αμφιδιαφόριση.

3. *Για κάθε δύο ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες N_x και N_y υπάρχει $g \in G$ τέτοιο, ώστε $gN_x = N_y$, επομένως οι N_x και N_y είναι ισομετρικές.*

4. *Έστω $\pi_x : N_x \to M/G$ ο περιορισμός της φυσιολογικής απεικόνισης $M \to M/G$. Τότε, η π_x είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης (δηλαδή για κάθε $y, y' \in N_x$ με $\pi_x(y) = \pi_x(y')$ θα υπάρχει εσωτερικός αυτομορφισμός γ της π_x με $\gamma(y) = y'$). Αν $F_x = \{g \in G : gN_x = N_x\}$, τότε η F_x είναι υποομάδα της G, η G_x είναι κανονική υποομάδα της F_x και ισχύει $H_x = F_x/G_x$, όπου H_x είναι η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της π_x.*

5. *Υπάρχει μοναδική δομή Riemann στην M/G τέτοια, ώστε η π_x να είναι τοπική ισομετρία για κάθε $x \in M$.*

Απόδειξη. (1.) Για κάθε $g \in G$ η ϕ_g είναι ισομετρία, οπότε $T_x\phi_g((T_xGx)^\perp) = (T_{gx}Gx)^\perp$. Επομένως $\Re(gx) = T_x\phi_g(\Re(x))$, δηλαδή $N_{gx} = gN_x$, λόγω της μοναδικότητας των μεγιστικών ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων, δηλαδή η N_x είναι G_x - αναλλοίωτη.

Για το δεύτερο μέρος, αρκεί να δείξουμε πως η G_x δρα με τετριμένο τρόπο στην N_x. Επειδή

$$\dim N_x = \dim N = \dim M - \dim P = \dim M - \dim Gx = \dim M/G,$$

η π_x θα είναι τοπική αμφιδιαφόριση σε ανοικτά σύνολα της N_x που είναι κανονικές υποπολλαπλότητες της M, επομένως η $\pi_x|_V$ είναι λεία, για κάποια περιοχή V του x στην N_x που είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M. Η φυσιολογική απεικόνιση $\pi : M \to M/G$ είναι submersion και για κάθε $y \in N_x$ ισχύει $\ker T_y\pi = T_yGy$. Άρα

$$\begin{aligned} T_y\pi_x(T_yN_x) = T_y\pi(T_yN_x) &= T_y\pi(T_yGy \oplus T_yN_x) \\ &= T_y\pi(T_yGy \oplus (T_yGy)^{\perp}) = T_{[y]_G}M/G, \end{aligned}$$

δηλαδή η π_x θα είναι submersion, συνεπώς τοπική αμφιδιαφόριση, αφού $\dim V = \dim N_x = \dim M/G$. Άρα, θα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x στην V και συνεπώς στην N_x, ώστε η $\pi_x|_U$ να είναι αμφιδιαφόριση. Επομένως, η U θα τέμνει μία τροχιά της M το πολύ σε ένα σημείο.

Από τη συνέχεια της δράσης της G_x στο $N_x \cap U$, θα υπάρχει περιοχή W του x με $G_xW \subseteq U$. Τότε, για κάθε $y \in W$ έχουμε $G_xy \subseteq U \cap Gy = \{y\}$, δηλαδή $G_x \subseteq G_y$. Όμως, η G_y είναι συζυγής με την G_x, συνεπώς έχουν την ίδια διάσταση ως ομάδες Lie. Επομένως, η ένθεση $G_x \hookrightarrow G_y$ θα είναι τοπική αμφιδιαφόριση, κατά συνέπεια ανοικτή απεικόνιση. Άρα, η G_x θα είναι ανοικτό υποσύνολο της G_y. Όμως, η G_x είναι συμπαγής άρα κλειστή στην G_y. Επομένως, αφού οι G_y, G_x θα έχουν τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών, ως συζυγείς, ισχύει $G_y = G_x$.

Τέλος, θεωρούμε το σύνολο $C = \{y \in N_x : G_y = G_x\}$. Ο ίδιος συλλογισμός όπως πρίν με σταθεροποιημένο το $y \in C$ στην θέση του x, δείχνει πως το C είναι ανοικτό σύνολο στην N_x.

Έστω $y \in N_x$. Θεωρώντας τη σχετική τοπολογία της N_x ως υποχώρου της M, από το Θεώρημα 2.2.5 και την Παρατήρηση 2.0.2, υπάρχει ανοικτή περιοχή A του y στην N_x. Επειδή η τοπολογία της N_x ως ολοκληρωτικής πολλαπλότητας είναι λεπτότερη από την σχετική τοπολογία της N_x ως υπόχωρου της M, αν $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι ένα δίκτυο στην C που συγλίνει στο y ως προς την τοπολογία της N_x ως ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας, θα υπάρχει $i_\circ \in I$ με $y_{i_\circ} \in A$, οπότε $G_x = G_{y_{i_\circ}} \subseteq G_y$. Και πάλι λόγω συζυγίας των ομάδων ισοτροπίας, ισχύει $G_x = G_y$, οπότε το C θα είναι και κλειστό στην N_x η οποία είναι, συνεκτική. Επομένως $N_x = C$, όπως επιδιώκαμε.

(2.) Από την απόδειξη του *(1)*, η G_x δρα ελεύθερα στον χώρο $G \times N_x$ και τετριμμένα στον N_x, ενώ η απεικόνιση

$$\phi|_{G\times N_x} : G \times N_x \to M : \quad (g,q) \mapsto gq$$

είναι λεία ως η σύνθεση $\phi \circ i_{N_x}$, όπου $i_{N_x} : N_X \to M$ είναι η ένθεση. Άρα, από το Πόρισμα 2.3.2, ο χώρος $G \times_{G_x} N_x \cong G/G_x \times N_x$ θα είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και, από την Παρατήρηση 2.3.3, η λεία απεικόνιση $G \times N_x \to M : \quad (g,q) \mapsto gq$ θα επάγει τη λεία απεικόνιση Φ. Θα δείξουμε πως η Φ είναι submersion, δείχνοντας πως η $\phi|_{G\times N_x}$ είναι submesion:

Έστω $(g,q) \in G \times N_x$. Εφόσον η $\phi_g|_{N_x}$ είναι ισομετρία, έχουμε

$$T_q(\phi_g|_{N_x})(T_qN_x) = T_q(\phi_g|_{N_x})((T_qGq)^\perp = (T_{gq}Gq)^\perp,$$

οπότε

$$\begin{aligned} T_{(g,q)}(\phi|_{G\times N_x})(T_gG \times T_qN_x) &= T_g\phi_q(T_gG) + T_q(\phi_g|_{N_x})(T_qN_x) \\ &= T_{gq}Gq \oplus (T_{gq}Gq)^\perp \\ &= T_{gq}M, \end{aligned}$$

δηλαδή η $\phi|_{G\times N_x}$ είναι submersion. Επομένως, η Φ είναι submersion.

Στην απόδειξη του *(1)* είδαμε πως $\dim N_x = \dim M/G$, οπότε

$$\dim(G/G_x \times N_x) = \dim G/G_x + \dim M/G = \dim M,$$

συνεπώς η Φ θα είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Μένει, λοιπόν, να δείξουμε πως είναι και επί:

Από το παραπάνω επιχείρημα, η εικόνα της Φ είναι ανοικτή. Θα δείξουμε πως η εικόνα της Φ είναι και κλειστή, οπότε το συμπέρασμα θα έπεται από την συνεκτικότητα της M:

Έστω, λοιπόν, $y \in \overline{\Phi(G/G_x \times N_x)}^M$. Έστω, επίσης, $\Psi : G/G_y \times N_y \to M$ η αντίστοιχη απεικόνιση της Φ για το y. Η εικόνα της Ψ θα είναι ανοικτή όπως είναι και της Φ, οπότε οι εικόνες τω Φ και Ψ θα τέμνονται. Επομένως, υπάρχουν g_1, $g_2 \in G$, ώστε να υπάρχει $z \in g_1N_x \cap g_2N_y$. Τότε, λόγω της μοναδικότητας των μέγιστων ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων, θα ισχύει $N_z = g_1N_x = g_2N_y$. Άρα $y \in g_2^{-1}g_1N_x$, οπότε το y θα περιέχεται στην εικόνα της Φ, η οποία πρέπει να είναι κλειστή.

(3.) Προφανές από τα *(1)* και *(2)*.

(4.) Η F_x είναι τοπολογική ομάδα, ως υποομάδα της G. Για $g \in F_x$ ισχύει $gx \in N_x$, επομένως, από το *(1)*, έχουμε $g^{-1}G_x g = G_{gx} = G_x$, δηλαδή η G_x είναι κανονική υποομάδα της F_x.

Όπως στην απόδειξη του *(1)*, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x στην N_x, ώστε το U να τέμνει το πολύ μία φορά κάθε τροχιά και η $\pi_x|_U$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Αν $g \in G$ με $gU \subseteq N_x$, τότε $gN_x \cap N_x \neq \emptyset$, οπότε, λόγω της μοναδικότητας των μέγιστων ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων, προκύπτει $gN_x = N_x$, δηλαδή $g \in F_x$. Αν, επιπλέον, $gU \cap U \neq \emptyset$, τότε $gz = w$, για κάποια $z, w \in U$, οπότε, αφού $Gz \cap U = \{z\}$, θα έχουμε $g \in G_z = G_x$, από την *(1)*. Άρα

$$\pi_x^{-1}(\pi_x(U)) = \bigcup_{g \in F_x} gU = \dot{\bigcup_{[g]_{G_x} \in F_x/G_x}} gU. \tag{3.1}$$

Θα δείξουμε πως η ομάδα F_x/G_x έχει τη διακριτή τοπολογία ως τοπολογία - πηλίκο από την δράση της G_x στην F_x. Πράγματι, θεωρώντας στην N_x την τοπολογία της ως υποχώρου της M, η περιορισμένη δράση $\phi|_{F_x \times N_x}$ είναι συνεχής απεικόνιση, οπότε θα εξακολουθεί να είναι συνεχής όταν στην N_x θεωρήσουμε την πλουσιότερη τοπολογία της ως ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας. Για τυχόν $g \in G_x$, θα υπάρχει ανοικτή περιοχή V του g στην F_x, ώστε $Vx \subseteq U$. Τότε, για κάθε $h \in V$ θα έχουμε $hU \cap U \neq \emptyset$, οπότε $h \in G_x$, δηλαδή η θα G_x είναι ανοικτή υποομάδα της F_x.

Τώρα, για $[g]_{G_x} \in F_x/G_x$, το gG_x είναι ανοικτό υποσύνολο της F_x και η κανονική απεικόνιση $\rho : F_x \to F_x/G_x$ θα είναι ανοικτή. Επομένως, το σύνολο $\rho(gG_x) = \{[g]_{G_x}\}$ θα είναι ανοικτό στην F_x/G_x, οπότε η τοπολογία της F_x/G_x θα είναι διακριτή. Άρα, μπορούμε να δούμε την F_x/G_x ως μηδενοδιάστατη λεία πολλαπλότητα.

Θεωρώντας την αμφιδιαφόριση

$$H : F_x/G_x \times \pi_x(U) \to \pi_x^{-1}(\pi_x(U)) : \quad ([g]_{G_x}, [y]_g) \mapsto gy$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα (3.1), συμπεραίνουμε πως η $\pi_x(U)$ είναι evenly covered περιοχή του $[x]_G \in M/G$ (βλέπε 0.2.14). Άρα, εφόσον η π_x είναι επί, θα είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Έστω τώρα

$$\gamma \in H_x = \{\gamma' : N_x \to N_x, \gamma' \text{ ομοιομορφισμός με } \pi_x \circ \gamma' = \pi_x\}$$

και $y \in N_x$. Επειδή $\pi_x(\gamma(y)) = \pi_x(y)$, υπάρχει $g \in G$ με $\gamma(y) = gy$, επομένως $gN_x \cap N_x \neq \emptyset$, οπότε, λόγω της μοναδικότητας των μέγιστων ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων, θα έχουμε $gN_x = N_x$, δηλαδή $g \in F_x$. Επίσης, λόγω του

Λήμματος 0.2.15 και λαμβάνοντας υπ' όψιν πως η N_x είναι συνεκτική, συμπεραίνουμε ότι $\gamma = \phi_g|_{N_x}$, δηλαδή ότι η γ είναι ισομετρία, συνεπώς και λεία, από το Θεώρημα 1.1.3. Ο ίδιος συλλογισμός δίνει πως η π_x είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης.

Τέλος, ορίζουμε την

$$F : F_x \to H_x : \quad g \mapsto \phi_g|_{N_x},$$

η οποία είνα ομομορφισμός και επί, από τον προηγούμενο συλλογισμό. Εφόσον η G_x δρα τετριμμένα στην N_x, θα ισχύει $\ker F = G_x$, οπότε $H_x \cong F_x/G_x$.

(5.) Όπως αποδείξαμε στο *(1)*, η π_x είναι τοπική αμφιδιαφόριση, οπότε, μεταφέροντας τον μετρικό τανυστή της N_x μέσω της π_x στην M/G, η M/G αποκτά δομή λείας πολλαπλότητας Riemann και η π_x γίνεται τοπική ισομετρία. □

Πόρισμα 3.0.8 *Η απεικόνιση* $\Phi : G/G_x \times N_x \to M$ *είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης με ομάδα εσωτερικών αυτομορφισμών την* H_x.

Απόδειξη. Από την απόδειξη του *(2)* του προηγούμενου Λήμματος, η $\pi_x : N_x \to M/G$ είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης με ομάδα εσωτερικών αυτομορφισμών H_x και η N_x είναι τοπικά συνεκτική και συνεκτική. Άρα, από το 0.2.16, η H_x δρα διαφορίσιμα και γνήσια και ελεύθερα στην N_x.

Η ελεύθερη διαφορίσιμη δράση

$$H_x \times G/G_x \to G/G_x : \quad ([h]_{G_x}, [g]_{G_x}) \mapsto [gh^{-1}]_{G_x}$$

είναι καλά ορισμένη, αφού η G_x είναι κανονική υποομάδα της F_x. Ορίζεται, λοιπόν, η διαφορίσιμη ελεύθερη δράση

$$H_x \times (G/G_x \times N_x) \to G/G_x \times N_x : \quad ([h]_{G_x}, ([g]_{G_x}, q)) \mapsto ([gh^{-1}]_{G_x}, gq),$$

αφού η H_x δρα ασυνεχώς γνήσια στον N_x. Άρα, από το Πόρισμα 2.3.1, η $(G/G_x \times N_x)/H_x$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα ίδιας διάστασης με την $G/G_x \times N_x$ και, από την Παρατήρηση 2.3.3 και την απόδειξη του *(2)* του προηγούμενου Λήμμματος, η Φ επάγει την διαφορίσιμή, επί και submersion απεικόνιση $\widetilde{\Phi} : (G/G_x \times N_x)/H_x \to M$, η οποία θα είναι τοπική αμφιδιαφόριση.

Έστω $g_1q_1 = g_2q_2$ για κάποια $g_1, g_2 \in G$ και $q_1, q_2 \in N_x$. Τότε $g_2^{-1}g_1N_x \cap N_x \neq \emptyset$, οπότε $g_2^{-1}g_1 \in F_x$, δηλαδή $[g_2^{-1}g_1]_{G_x} \in H_x$. Άρα

$$[[g_1]_{G_x}, q_1]_{H_x} = [[g_1g_1^{-1}g_2]_{G_x}, g_2^{-1}g_1q_1]_{H_x} = [[g_2]_{G_x}, q_2]_{H_x},$$

οπότε η $\widetilde{\Phi}$ θα είναι 1-1 και συνεπώς αμφιδιαφόριση. Επομένως, η

$$\widetilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi : G/G_x \times N_x \to (G/G_x \times N_x)/H_x$$

θα είναι η φυσιολογική απεικόνιση, η οποία, από το 0.2.17 και τους αντίστοιχους συλλογισμούς πρός το τέλος της απόδειξης του *(4)* στο προηγούμενο Λήμμα, θα είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης, οπότε το ίδιο θα ισχύει και για την Φ. □

3.2 Το Θεώρημα ολικής διάσπασης των πολλαπλοτήτων Riemann

Υποθέτοντας πως όλες οι ομάδες ισοτροπίας είναι συζυγείς και πως η $\Re$ είναι ολοκληρώσιμη κατανομή της M, καταλήξαμε στο ότι η Φ είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Με την επιπλέον συνθήκη $H_x = \{e\}$, από το Πόρισμα 3.0.8, προκύπτει ότι η Φ θα είναι αμφιδιαφορίσιμη G - απεικόνιση, θεωρώντας την τετριμμένη δράση της G στην N_x.

Η G/G_x είναι G - αμφιδιαφορίσιμη με την Gx μέσω της φυσιολογικής αμφιδιαφόρισης $\widetilde{\phi_x} : G/G_x \to Gx$. Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε εξ αρχής πως η Φ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $Gx \times N_x$.

Έστω πως η απεικόνιση $\Phi_p : Gx \to Gp : \quad gx \mapsto gp$ είναι ισομετρία, για κάθε $p \in N_x$. Τότε, όλες οι τροχιές θα είναι G - ισομετρικές με την Gx, οπότε η Φ θα είναι ισομετρία, αφού για $g \in G, q \in N_x$ και $u_1, u_2 \in T_{gx}Gx$, $v_1, v_2 \in T_qN_x$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}((\Phi^*)\Theta)_{(gx,q)}((u_1,v_1),(u_2,v_2)) &= \Theta_{gq}(T_{(gx,q)}\Phi(u_1,v_1), T_{(gx,q)}\Phi(u_2,v_2)) \\ &= \Theta_{gq}(T_{gx}\Phi_q(u_1) + T_q\Phi_{gx}(v_1), T_{gx}\Phi_q(u_2) + T_q\Phi_{gx}(v_2)) \\ &= \Theta_{gq}(T_{gx}\Phi_q(u_1), T_{gx}\Phi_q(u_2)) + \Theta_{gq}(T_q\Phi_{gx}(v_1), T_q\Phi_{gx}(v_2)) \\ &= \Theta_{gx}(u_1,u_2) + \Theta_q(v_1,v_2),\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα ελήφθη υπ' όψιν ότι οι $\Phi_{gx} = \phi_g$ και Φ_q είναι ισομετρικές. Άρα, τα Gx, N_x, Φ ορίζουν μία ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση της M. Η υπόθεση της ισομετρικότητας της Φ_p για κάθε $p \in N_x$ είναι η τελευταία συνθήκη που χρειαζόμαστε για την ύπαρξη ισομεταβλητής ισομετρικής διάσπασης της M σε καρτεσιανό γινόμενο. Στον επόμενο ορισμό διατυπώνουμε την συνθήκη αυτή με άλλη ορολογία και στη συνέχεια, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα στο βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα στην M μέσω της ϕ. Για $\xi \in L(G)$, την άλγεβρα Lie της G, θεωρούμε τη μονοπαραμετρική υποομάδα της G*

$$\mathbb{R} \to G : \quad t \mapsto \exp t\xi$$

που αντιστοιχεί στο ξ. Τότε, γιά κάθε $x \in M$ το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από τη σχέση

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt}\phi(\exp t\xi, x)|_{t=0}$$

λέγεται **απειροστός γεννήτορας (infinitesimal generator)** *της ϕ στο ξ.*

Ο Ορισμός αυτός επιτρέπει να διατυπώσουμε την τελευταία συνθήκη και ως εξής: η $||\xi_M||^2|_{N_x} : N_x \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή για κάθε $\xi \in L(G)$ και $x \in M$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $T_x||\xi_M||^2(u_x) = 0$ για κάθε $u_x \in \Re(x)$ και $x \in M$.

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω G μία συνεκτική ομάδα Lie που δρα γνήσια και διαφορίσιμα μέσω ισομετριών Riemann στην M. Τότε, η M δέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση αν και μόνο αν όλες οι ομάδες ισοτροπίας της M είναι συζυγείς, η κατανομή $\Re$ είναι ολοκληρώσιμη, ισχύει $T_x||\xi_M||^2(u_x) = 0$ για κάθε $u_x \in \Re(x)$ και $H_x = \{e\}$* για κάθε $x \in M$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έχουμε ήδη δει πως ισχύουν οι δύο πρώτες συνθήκες, αν η M δέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση. Έστω ότι η M έχει ως μια ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση, την τριάδα $(P, N, \psi)_G$.

Έστω $x \in M$, $x = \psi(p, n)$ και $y \in N_x$, $y = \psi(q, m)$. Τότε $\psi(\{p\} \times N) \subseteq N_x$. Επειδή η G δρα μεταβατικά στην P, υπάρχει $g \in G$ με $gp = q$. Άρα

$$y = \psi(q, m) = g\psi(p, m) \in g\psi(\{p\} \times N) \subseteq gN_x,$$

οπότε, λόγω μοναδικότητας των μέγιστων ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων, έχουμε $gN_x = N_x$, δηλαδή $g \in F_x$. Έστω g_1, $g_2 \in G$. Τότε

$$[g_1]_{G_x} = [g_2]_{G_x} \Leftrightarrow g_1p = g_2p \Leftrightarrow \psi(\{g_1p\} \times N) = \psi(\{g_2p\} \times N),$$

συνεπώς $N_x = \dot{\bigcup}_{[g]_{G_x} \in H_x} \psi(\{gp\} \times N)$. Από τον ορισμό της τοπολογίας της N_x, τα σύνολα $\psi(\{gp\} \times N)$, $g \in F_x$ είναι ανοικτά στην N_x, επομένως, λόγω της συνεκτικότητας της N_x έχουμε $H_x = F_x/G_x = \{e\}$.

Τέλος, έστω $\xi \in L(G)$. Η G δρα τετριμμένα στην N, οπότε $\xi_{P \times N}(p, n) = (\xi_P(p), 0)$ για κάθε $(p, n) \in P \times N$. Αφού η ψ είναι G - ισομετρία, για κάθε $x \in M$ με $x = \psi(p, n)$ θα έχουμε

$$T_{(p,n)}\psi(\xi_{P \times N}(p, n)) = \xi_M(x),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$||\xi_M(x)||_x = ||\xi_{P\times N}(p,n)||_{(p,n)} = ||\xi_P(p)||_p.$$

Ξέρουμε όμως, πως $N_x = \psi(\{p\}\times N)$, οπότε

$$||\xi_M||^2|_{N_x} = ||\xi_{P\times N}||^2|_{\{p\}\times N} = ||\xi_P(p)||_p^2,$$

δηλαδή το $||\xi_M||^2|_{N_x}$ είναι σταθερό, επομένως ικανοποιείται και η τρίτη συνθήκη.

($\Leftarrow$) Από τα σχόλια που προηγήθηκαν για τις συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη ισομεταβλητής ισομετρικής διάσπασης της M, αρκεί να αποδείξουμε πως η απεικόνιση

$$\Phi_p : Gx \to Gp : \quad gx \mapsto gp$$

είναι ισομετρία για κάθε $p \in N_x$: Έστω $p \in N_x$. Επειδή η G δρα μέσω ισομετριών στους χώρους Gx, Gp και η Φ είναι G - απεικόνιση, για να δείξουμε πως η $T_{gx}\Phi_p : T_{gx}Gx \to T_{gp}Gp$ είναι ισομετρία για κάθε $g \in G$, αρκεί να δείξουμε πως η $T_x\Phi_p$ είναι ισομετρία.

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε πως η $\phi_y : G \to Gx$ είναι submersion, οπότε $T_yGy = \{T_e\phi_y(\xi) : \xi \in L(G)\}$ για κάθε $y \in M$. Επίσης $\xi_M(y) = T_e\phi_y(\xi)$ για κάθε $\xi \in L(G)$ και $y \in M$. Άρα

$$T_yGy = \{\xi_M(y) : \xi \in L(G)\} \tag{3.2}$$

για κάθε $y \in M$.

Η Φ_p είναι G απεικόνιση, οπότε

$$T_{gx}\Phi_p(\xi_{Gx}(x)) = \xi_{Gp}(gp)$$

για κάθε $g \in G$. Επομένως, για $g = e$ θα έχουμε $T_x\Phi_p(\xi_{Gx}(x)) = \xi_{Gp}(p)$, οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα (3.2), αρκεί να δείξουμε πως η $T_x\Phi_p$ διατηρεί τις νόρμες των απειροστών γεννητόρων.

Έστω, λοιπόν, $\xi \in L(G)$. Εξ υποθέσεως, η συνάρτηση $||\xi_M||$ θα είναι σταθερή στο N_x. Άρα

$$||\xi_{Gx}(x)||_x = ||\xi_M(x)||_x = ||\xi_M(p)||_p = ||\xi_{Gp}(p)||_p = ||T_x\Phi_p(\xi_{Gx}(x))||_p,$$

δηλαδή η $T_x\Phi_p$ είναι ισομετρία, για κάθε $p \in N_x$ και για κάθε $x \in M$, οπότε η M θα έχει ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση την τριάδα $(Gx, N_x, \Phi)_G$. $\square$

Παρατήρηση 3.1.3 Η απόδειξη απαιτεί ουσιαστικά να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in M$, ώστε η $||\xi_M(q)||_q$ να είναι σταθερή ως προς $p \in N_x$, $\xi \in L(G)$.

Πόρισμα 3.1.4 *Έστω G μία ομάδα Lie που δρα διαφορίσιμα και γνήσια στην M μέσω ισομετριών. Τότε, η M έχει τοπική ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση, αν οι ομάδες ισοτροπίας είναι συζυγείς, η κατανομή $\Re$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $T_x||\xi_M||^2(u_x) = 0$ για κάθε $u_x \in \Re(x)$ και $x \in M$.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Από το Λήμμα 3.0.7, για κάθε $x \in M$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq N_x$ του x στην N_x, ώστε η $\pi_x|_U : U \to \pi_x(U)$ να είναι αμφιδιαφόριση, οπότε στον G - χώρο GU ισχύει $H_x = \{e\}$. Τότε, η ανοικτή περιοχή GU του x στην M (ανοικτή διότι, από το Λήμμα 3.0.7, η Φ είναι τοπικός ομοιομορφισμός και συνεπώς ανοικτή απεικόνιση) θα ικανοποιεί τις συνθήκες του προηγούμενου Θεωρήματος, οπότε θα έχει ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση.

($\Rightarrow$) Για την πρώτη συνθήκη, η M είναι σ - συμπαγής χώρος, οπότε υπάρχουν συμπαγή σύνολα K_i για $i = 1, 2, \ldots$ με $K_i \subseteq K_{i+1}$ και $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Άρα, για $x, y \in M$ θα υπάρχει K_{i_0} με $x, y \in K_{i_0}$. Εξ υποθέσεως, κάθε $z \in K_{i_0}$ έχει G - ανοικτή περιοχή U_z που δέχεται ισομεταβλητή ισομετρική διάσπαση. Λόγω της συμπάγειας του K_{i_0}, θα υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες περιοχές που θα καλύπτουν το K_{i_0}. Κατά συνέπεια, θα υπάρχει οικογένεια $\{U_i\}_{i=1}^k$ τέτοιον συνόλων με $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$ και $x \in U_1$, $y \in U_k$. Άρα, κάθε δύο σημεία στην ένωση $\bigcup_{i=1}^k U_i$ θα έχουν συζυγείς ομάδες ισοτροπίας και συνεπώς οι ομάδες G_x, G_y θα είναι συζυγείς.

Η δεύτερη συνθήκη είναι προφανής, αφού μια τοπικά ολοκληρώσημη κατανομή είναι εξ ορισμού ολοκληρώσιμη.

Για την τρίτη συνθήκη θεωρούμε $x \in M$ και $\xi \in L(G)$. Τότε, λόγω της δεύτερης συνθήκης, υπάρχει η N_x. Εξ υποθέσεως και λόγω του προηγούμενου Θεωρήματος, το

$$C = \{p \in N_x : ||\xi_M(p)||_p = ||\xi_M(x)||_x\}.$$

θα είναι και ανοικτό, οπότε από τη συνεκτικότητα της N_x, προκύπτει $C = N_x$. Ικανοποιείται, έτσι, και η τρίτη συνθήκη. $\square$

Κεφάλαιο 4

Διασπάσεις συμπλεκτικών δομών

Γενική βιβλιογραφία για διασπάσεις στη Συμπλεκτική Γεωμετρία: [8], [9] και [14].

Στό παρόν κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε την ύπαρξη ολικού δίσκου στην κατηγορία των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη μίας βασικής πρότασης της θεωρίας των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων που δείχνει πως όλες οι G - συμπλεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διάστασης είναι τοπικά «ίδιες», μέσω G - συμπλεκτομορφισμών.

4.0 Βασικά συμπεράσματα της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας

Πρόταση 4.0.1 *Έστω X μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα και G μία ομάδα Lie που δρα γνήσια και διαφορίσιμα στην X. Έστω, επίσης, M μία G - αναλλοίωτη, κανονική υποπολλαπλότητα της X και ω_0, ω_1 δύο αναλλοίωτες συμπλεκτικές μορφές με $\omega_0|_{TX|M} = \omega_1|_{TX|M}$. Τότε, υπάρχουν δύο G - περιοχές U_0, U_1 της M στην X και μία G - αμφίδιαφόριση $f : U_0 \to U_1$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $f|_M = id_M$ και $(f^*\omega_1)|_{TX|U_0} = \omega_0|_{TX|U_0}$.*

Για την απόδειξη, θα βασιστούμε στη «μέθοδο των διαδρομών» του Moser, η οποία χρησιμοποιεί μία εκδοχή του Λήμματος του Poincaré για της κλειστές μορφές.

Έστω $\tau_X : TX \to X$ η προβολή. Ένα ανοικτό υποσύνολο $B \subseteq TX$ θα λέγεται **αστρόμορφο**, αν για κάθε $p \in \tau_X(B)$ το σύνολο $B \cap T_pX$ είναι αστρόμορφο (βλέπε Παρατήρηση 1.1.4). Προφανώς, τα αστρόμορφα σύνολα αποτελούν μία βάση για την τοπολογία του TX, δεδομένου ότι κάθε σύνολο της μορφής $\bigcup_{p\in W} V_p$ με $W \subseteq X$ ανοικτό και $V_p \subseteq T_pM$, $p \in W$ ανοικτά και αστρόμορφα σύνολα, είναι αστρόμορφο. Επιπλέον, αν ένα σύνολο $B \subseteq TX$ είναι αστρόμορφο, τότε το GB θα είναι αστρόμορφο G - σύνολο.

Λήμμα 4.0.2 *Με τον συμβολισμό από την προηγούμενη Πρόταση, έστω ω μία G - αναλλοίωτη και κλειστή k - μορφή στην X με $\omega|_{TX|M} = 0$. Τότε, υπάρχει G - περιοχή U της M στην X και μία G - αναλλοίωτη $(k-1)$ - μορφή ϑ στο U με $\vartheta|_{TX|M} = 0$ και $\mathbf{d}\vartheta = \omega|_{TX|U}$.*

Απόδειξη. Όπως στο Λήμμα 2.2.4, υπάρχει G - αναλλοίωτη μετρική Riemann που ορίζει το normal bundle N της M, το οποίο γίνεται γνήσιος G - χώρος με τον περιορισμό της εφαπτόμενης δράσης της G στην N. Επίσης, υπάρχει G - περιοχή V της $M \times \{0\}$ στην N και αμφιδιαφορίσιμη G - απεικόνιση $H : V \to H(V) \subseteq X$ με $H|_M = id_M$. Μπορούμε να υποθέσουμε πως η V είναι και αστρόμορφη διότι διαφορετικά θα υπήρχε $W \subseteq V$ ανοικτή αστρόμορφη περιοχή της $M \times \{0\}$ και η GW θα αντικαθιστούσε την V.

Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε την $\pi_t : V \to V$ με $\pi_t(p,u_p) = (p, tu_p)$. Επειδή το V είναι αστρόμορφο, για κάθε $t \in [0,1]$, η π_t είναι καλά ορισμένη και ορίζεται το χρονοεξαρτόμενο διανυσματικό πεδίο

$$X_t : V \to TV : \quad (p,u_p) \mapsto (p,u_p,0,u_p/t) \text{ για } t \neq 0,$$

το οποίο έχει ως ροή την π_t: $X_t \circ \pi_t = d\pi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=t}$.

Η k - μορφή $\omega_1 = (H^*)\omega|_{TX|H(V)}$ είναι κλειστή, G - αναλλοίωτη και ικανοποιεί τη σχέση $\omega_1|_{TN|M\times\{0\}} = 0$. Από την βασική ιδιότητα των παραγώγων Lie, έχουμε $(d/dt)(\pi_t^*\omega_1) = \pi_t^*\mathbf{L}_{X_t}\omega_1$. Επομένως, για κάθε $\epsilon \in (0,1)$ ισχύει

$$\omega_1 - \pi_\epsilon^*\omega_1 = \int_\epsilon^1 \pi_t^*\mathbf{L}_{X_t}\omega_1 dt = \mathbf{d}\int_\epsilon^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 dt,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\mathbf{L}_{X_t}\omega_1 = \mathbf{d}\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 + \mathbf{i}_{X_t}\mathbf{d}\omega_1,$$

την κλειστότητα της ω_1 και την εναλλαγή του τελεστή $\mathbf{d}$ με το ολοκλήρωμα, που επιτρέπεται, αφού η $\pi_t^* i_{X_t}\omega_1$ είναι λεία και φραγμένη συνάρτηση του $t \in (0,1]$.

Παρατηρούμε πως η μορφή $\pi_t^* i_{X_t}\omega_1$ ορίζεται καλά και είναι λεία στο $t = 0$, οπότε, περνώντας στο όριο για $\epsilon \to 0$, βρίσκουμε

$$\omega_1 - \pi_0^*\omega_1 = \mathbf{d}\int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 dt.$$

Όμως $\pi_0^*\omega_1 = 0$, αφού $\omega_1|_{TN|M\times\{0\}} = 0$. Στο V θεωρούμε την $(k-1)$ - μορφή $\vartheta_1 = \int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 dt$, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega_1 = \mathbf{d}\vartheta_1 \text{ και } \vartheta_1|_{TN|M\times\{0\}} = 0,$$

αφού $X_t|_{M\times\{0\}} = 0$ για κάθε $t \in (0,1]$. Έστω ϕ η δράση της G στην X. Επειδή το X_t είναι G - αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην V θα έχουμε

$$\begin{aligned}(T\phi_g)^*\vartheta_1 &= \int_0^1 (\pi_t \circ T\phi_g)^*\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 dt = \int_0^1 (T\phi_g \circ \pi_t)^*\mathbf{i}_{X_t}\omega_1 dt \\ &= \int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{(T\phi_g)^*X_t}(T\phi_g)^*\omega_1 dt = \vartheta_1\end{aligned}$$

για κάθε $g \in G$, δηλαδή η ϑ_1 είναι G - αναλλοίωτη.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι η $\vartheta = H_*\vartheta_1$ είναι η ζητούμενη $(k-1)$ - μορφή στην περιοχή $U = H(V)$ της M στην X. □

Λήμμα 4.0.3 *Έστω X_t ένα $C^1(U, TU)$ χρονοεξαρτόμενο διανυσματικό πεδίο με $X_t(0) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου U είναι μία ανοικτή περιοχή του μηδενός στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $x \in U$ υπάρχει περιοχή $V \subseteq U$ του x τέτοια, ώστε η ροή $F_{t,0}(x)$ του X_t να ορίζεται για $|t| \leq 1$.*

Απόδειξη. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων υπάρχει ανοικτό σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U$ και $\theta \in C^1(E, U)$, ώστε το σύνολο $E^{(0,0)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, 0, 0) \in E\}$ να είναι ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0 και η καμπύλη $\gamma \in C^1(E^{(0,0)}, U)$ με $\gamma(t) = \theta(t, 0, 0)$ να είναι η μοναδική μέγιστη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\gamma'(t) = X_t(\gamma(t)), \text{ με αρχική συνθήκη } \gamma(0) = 0.$$

Η καμπύλη $\gamma(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ είναι εξ υποθέσεως λύση της διαφορικής εξίσωσης, συνεπώς $\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\} \subseteq E$. Επομένως, για κάθε $t \in [-1, 1]$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές A_t, B_t του t και του $0 \in U$, αντίστοιχα, με $A_t \times \{0\} \times B_t \subseteq E$. Όμως $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{t\in[-1,1]} A_t$, οπότε, λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $t_i \in [-1, 1], i = 1, \ldots, k$ ώστε $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_{t_i}$. Η $B = \bigcap_{i=1}^k B_{t_i}$, θα είναι η ζητούμενη περιοχή του μηδενός, εφόσον για $x \in B$, έχουμε $[-1, 1] \times \{0\} \times \{x\} \subseteq E$, δηλαδή η ροή με τύπο $F_{t,0}(x) = \theta(t,0,x)$ θα ορίζεται στο διάστημα $[-1,1]$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 4.0.1. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.0.2 στην 2 - μορφή $\omega_1 - \omega_0$, βρίσκουμε μία ανοικτή G - περιοχή U της M στην X και μία G - αναλλοίωτη 1 - μορφή ϑ με $\vartheta|_{TX|M} = 0$, ώστε $\mathbf{d}\vartheta = \omega_1 - \omega_0|_{TX|U}$.

Θέτουμε $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$, $t \in [0,1]$ και παρατηρούμε πως η $\omega_t(x) = \omega_0(x) = \omega_1(x)$ είναι μη εκφυλισμένη για κάθε $x \in M$ και $t \in [0,1]$. Η απεικόνιση

$$\omega : [0,1] \times X \to T_2^0(X) \text{ με } \omega(t,x) = \omega_t(x)$$

είναι λεία και το σύνολο Ω των μη εκφυλισμένων αντισυμμετρικών $(0,2)$ - τανυστών της X είναι ανοικτό υποσύνολο του $T_2^0(X)$, οπότε για κάθε $x \in M$ και για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχουν $W_{(t,x)}$ και $U_{(t,x)}$, περιοχές τών x και t, αντίστοιχα, ώστε να ισχύει $\omega(U_{(t,x)} \times W_{(t,x)}) \subseteq \Omega$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν t_i, $i = 1, \dots, k(x)$ με $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{(t,x)}$. Θέτοντας $W_x = \bigcap_{i=1}^{k(x)}$, η $W = \bigcup_{x \in M} W_x$ είναι ανοικτή περιοχή της M στην X με την ιδιότητα $\omega([0,1 \times W) \subseteq \Omega$. Η ίδια σχέση θα ισχύει προφανώς και για την περιοχή GW, αφού η G δρα στην X μέσω αμφιδιαφορίσεων.

Η $V = GW \cap U$ είναι G - περιοχή της M στην X. Ορίζουμε στην V, το λείο, χρονοεξαρτημένο διανυσματικό πεδίο

$$X_t : V \to TV \text{ μέσω της σχέσης } \mathbf{i}_{X_t}\omega_t|_{TX|V} = -\vartheta_{TX|V},$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο, αφού η ω_t υποτίθεται μη εκφυλισμένη στο V για κάθε $t \in [0,1]$. Για τον ίδιο λόγο $X_t|_M = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Με εφαρμογή του προηγούμενου Λήμματος, βρίσκουμε για κάθε $x \in M$ ανοικτή περιοχή - χάρτη $V_x \subseteq V$ στην X τέτοια, ώστε η ροή $F_t(x)$ του X_t να ορίζεται στο x για $t = 1$.

Επειδή οι μορφές $\omega_t|_{TX|V}$ και $\vartheta|_{TX|V}$ είναι G - αναλλοίωτες και η $\omega_t|_{TX|V}$ είναι μη εκφυλισμένη, το X_t είναι G - αναλλοίωτο για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα, η F_t είναι G - απεικόνιση για κάθε $t \in [0,1]$ και, αν για κάποιο $y \in V$ η ροή $F_t(y)$ ορίζεται για $t = 1$, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για τα σημεία της τροχιάς Gy. Συνεπώς, για $x \in M$ η ροή $F_t(GV_x)$ ορίζεται στο σύνολο GV_x για $t = 1$.

Το $U_0 = \bigcup_{x \in M} GV_x \subseteq V$ είναι G - αναλλοίωτη ανοικτή περιοχή της M στην X στην οποία ορίζεται η ροή $F_t(U_0)$ για $t = 1$, απ' όπου έπεται:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F_t^*\omega_t)|_{TX|U_0} &= (F_t^*(\mathbf{L}_{X_t}\omega_t))|_{TX|U_0} + (F_t^*(\frac{d}{dt}\omega_t))|_{TX|U_0} \\
&= (F_t^*(\mathbf{d}\mathbf{i}_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0))|_{TX|U_0} \\
&= (F_t^*(-\mathbf{d}\vartheta + \omega_1 - \omega_0))|_{TX|U_0} = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(F_1^*\omega_1)|_{TX|U_0} = (F_0^*\omega_0)|_{TX|U_0} = \omega_0|_{TX|U_0}.$$

Επειδή $X_t|_M = 0$, τα σημεία της M είναι σταθερά σημεία της F_1, δηλαδή $F_1|_M = id_M$. Για $f = F_1$ και $U_1 = f(U_0)$ προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι ουσιαστικά η μοναδικότητα και η ύπαρξη μίας βασικής κατασκευής στη Συμπλεκτική Γεωμετρία. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η απόδειξη τους είναι βασισμένη στην κατασκευή ενός normal bundle για την συμπλεκτική περίπτωση, χρησιμοποιώντας το γεγονός πως κάθε συμπλεκτική μορφή είναι το φανταστικό μέρος ενός ερμιτιανού εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση 4.0.4 (Coisotropic embedding - μοναδικότητα) *Έστω G μία, μη συμπαγής, συνεκτική ομάδα Lie που δρα γνήσια μέσω αμφιδιαφορίσεων σε μία πολλαπλότητα M και μέσω συμπλεκτομορφισμών σε δύο συμπλεκτικές πολλαπλότητες (X_1, ω_1) και (X_2, ω_2). Έστω, επίσης, τ μία G - αναλλοίωτη 2 - μορφή στην M σταθερής τάξης (δηλαδή ο πίνακας $[\tau_m(e_i, e_j)]$ έχει σταθερή τάξη για κάθε βάση $\{e_i\}$ του T_mM και για κάθε $m \in M$). Αν η M είναι embendded G - ισομεταβλητά και coisotropically στις (X_k, ω_k) μέσω των απεικονίσεων $i_k : (M, \tau) \to (X_k, \omega_k)$* (δηλαδή $(T_x i_k(M))^{\perp_{\omega_k}} \subseteq T_x i_k(M)$ για κάθε $x \in i_k(M)$ και για κάθε $k = 1, 2$), *ώστε $i_k^*\omega_k = \tau$ για $k = 1, 2$, τότε υπάρχουν περιοχές $U_k \subseteq X_k$ των $i_k(M)$ και ένας G - ισομεταβλητός συμπλεκτομορφισμός $f : U_1 \to U_2$ με $f \circ i_1 = i_2$.*

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας την περίπτωση, όπου η M είναι G - αναλλοίωτη κανονική υποπολλαπλότητα μιας συμπλεκτικής πολλαπλότητας (X, ω), στην οποία η G δρα μέσω συμπλεκτομορφισμών, και $\tau = \omega_{TM|M}$.

Έστω $\widetilde{g}$ ένας G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής στην X την ύπαρξη του οποίου μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 1.3.8. Από το Θεώρημα του Riesz για χώρους με εσωτερικά γινόμενα, ορίζεται η G απεικόνιση $\widetilde{J} : TX \to TX$ μέσω της σχέσης

$$\omega_x(u_1, u_2) = \widetilde{g}_x(\widetilde{J}_x u_1, u_2) \text{ για } u_1,\ u_2 \in T_xX \text{ και } x \in X.$$

Επειδή η ω είναι μη εκφυλισμένη, η $\widetilde{J}_x : T_xX \to T_xX$ είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε $x \in X$. Αν $\widetilde{J}^*$ είναι ο συζυγής του $\widetilde{J}$, τότε $\widetilde{J}^* = -\widetilde{J}$. Από τη σχέση

$$\widetilde{g}_x(\widetilde{J}_x \widetilde{J}_x^* u_1, u_2) = \widetilde{g}_x(\widetilde{J}_x u_1, \widetilde{J}_x u_2), \quad u_1,\ u_2 \in T_xX,\ x \in X,$$

ο $\widetilde{J}\widetilde{J}^*$ είναι θετικά ορισμένος αυτοσυζυγής γραμμικός μετασχηματισμός, οπότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικά ορισμένες και ορίζεται μοναδικός, θετικά ορισμένος αυτοσυζυγής G - αναλλοίωτος γραμμικός ισομορφισμός B, ώστε $B^2 = \widetilde{J}\widetilde{J}^* = -\widetilde{J}^2$.

Εκ κατασκευής, ο B έχει ως ιδιοτιμές τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $\widetilde{J}\widetilde{J}^*$, οπότε οι $\widetilde{J}$ και B^{-1} μετατίθενται. Ορίζεται, λοιπόν, το G - αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο

$$g_x(u_1, u_2) = \widetilde{g}_x(B_x^{-1}u_1, u_2) \text{ για } u_1,\ u_2 \in T_xX \text{ και } x \in X$$

και ο G - αναλλοίωτος γραμμικός ισομορφισμός $J : TX \to TX$ με $J = \widetilde{J}B^{-1}$, για τον οποίο ισχύει $J^2 = -I$ (: για κάθε $x \in X$ ο J_x είναι το ορθομοναδιαίο κομμάτι του $\widetilde{J}_x$ στην πολική του αναπαράσταση).

Τώρα ισχύουν οι σχέσεις

$$g_x(J_xu_1, u_2) = -\widetilde{g}_x(\widetilde{J}_x^{-1}u_1, u_2) = \omega_x(u_1, u_2)$$

και

$$\omega_x(J_xu_1, ju_2) = g_x(J_x^2u_1, Ju_2) = -\omega_x(u_2, u_1) = \omega_x(u_1, u_2)$$

για κάθε $u_1,\ u_2 \in T_xX$ και $x \in X$, οπότε η J είναι συμπλεκτομορφισμός.

Η M είναι coisotropic κανονική υποπολλαπλότητα της X, οπότε μπορούμε να θεωρωρήσουμε το subbundle του TM

$$E = \bigcup_{m \in M} E_m \text{ όπου } E_m = (TM)^{\perp_{\omega_m}} \cap T_mM = (TM)^{\perp_{\tau_m}} \text{ και } m \in M.$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη από τις προηγούμενες σχέσεις, έχουμε

$$J_m(E_m) = (T_mM)^{\perp_g}$$

για κάθε $m \in M$. Αν, λοιπόν, N είναι το normal subbundle της M στην $TX|M$, τότε $J(E) = N$. Οι μορφές $\omega|_{TM|M} = \tau$, g είναι G - αναλλοίωτες, επομένως οι χώροι E, N είναι G - χώροι και η $J|_E : E \to N$ είναι G - αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση. Από το Λήμμα 2.2.4, υπάρχουν G - περιοχές V_1, V_2 της M στους χώρους N και X, αντίστοιχα, και G - αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση $H : V_1 \to V_2$, ώστε $H|_M = id_M$ και $TH|_{TN|M\times\{0\}} = I$, όπου $TN \cong TM \oplus N = TX$ και I είναι η απεικόνιση που δίνει την προηγούμενη γραμμική ισομορφία.

Έστω, τώρα, $E^* = \bigcup_{m\in M} E_m^*$, το δυϊκό subbundle του E στην T^*M. Η T^*M είναι G - χώρος στον οποίο δρα διαφορίσιμα και γνήσια η συνεφαπτόμενη δράση της G,

$$\phi^{T^*} : G \times T^*M \to T^*M : \quad (h, (p, \alpha_p)) \mapsto (\phi_g(p), (T_{\phi_g(p)}\phi_{g^{-1}})^*\alpha_p),$$

όπου ϕ είναι η δράση της G στην M. Επειδή ο E είναι G - αναλοίωτος υπόχωρος του TM, ο E^* είναι G - αναλλοίωτος υπόχωρος του T^*M.

Ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση

$$\Psi : V_1 \to E^* \text{ με } \Psi_m(u_m)(e_m) = \omega_m(u_m, e_m)$$

για κάθε $u_m \in N_m \cap V_1 = (T_mM)^{\perp_g} \cap V_1$ και $e_m \in E_m$ για $m \in M$, η οποία είναι G - απεικόνιση, διότι η ω είναι G - αναλλοίωτη. Αν για κάποιο $m \in M$ υπάρχει $u \in N_m$ με $\Psi_m(u) = 0$, τότε, αφού η M είναι coisotropic, ισχύει

$$u \in J(E_m) \cap (E_m)^{\perp_\omega} = J(E_m) \cap T_mM = T_mM \cap (T_mM)^{\perp_g} = \{0\},$$

δηλαδή η Ψ_m είναι 1-1 και συνεπώς γραμμικός ισομορφισμός. Αν $(p, u_p) \in V_1$ και $(v_p, w_{u_p}) \in T_{(p,u_p)}V_1$, τότε

$$T_{(p,u_p)}\Psi(v_p, w_{u_p}) = (v_p, T_m\omega \cdot v_p(u_p, \cdot) + \omega_p(w_{u_p}, \cdot)) = (v_p, \omega_p(w_{u_p}, \cdot)),$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή, από το Θεώρημα του Darboux, η ω είναι σταθερή σε έναν συμπλεκτικό χάρτη του p. Επομένως, η Ψ είναι G - αμφιδιαφόριση επί της εικόνας της. Τελικά, η $F = H^{-1} \circ \Psi : V_1 \to \Psi(V_1)$ είναι G - αμφιδιαφόριση μεταξύ G - περιοχών.

Καταφέραμε, λοιπόν, να κατασκευάσουμε μία G - αμφιδιαφόριση μεταξύ μίας G - περιοχής της M σην X και μίας G - περιοχής της E^*. Άρα, αν για $k = 1, 2$ το E_k^* είναι το αντίστοιχο vector bundle πάνω από την $i_k(M)$, τότε θα υπάρχουν G - περιοχές V_k της $i_k(M)$ στην X_k και W_k της $i_k(M)$ στην E_k^* και μία G - αμφιδιαφόριση $F_k : V_k \to W_k$. Αν E^* είναι το αντίστοιχο vector bundle πάνω από την M, τότε η $i_k^* : E_k^* \to E^*$ είναι G - αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση.

Έστω οι κλειστές 2 - μορφές $(i_k^* \circ F_k)_*\omega_k$, $k = 1, 2$ στην E^*. Λόγω του τύπου της F_k, για $k = 1, 2$ ισχύει

$$(i_1^* \circ F_1)_*\omega_1|_{TE^*|M \times \{0\}} = \tau = (i_2^* \circ F_2)_*\omega_2|_{TE^*|M \times \{0\}}.$$

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, την Πρόταση 4.0.1, βρίσκουμε G - περιοχές B_1, B_2 της M στην E^* και μία G - αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση $L : B_1 \to B_2$, ώστε

$$L^*(i_1^* \circ F_1)_*\omega_1|_{TE^*|M \times \{0\}} = (i_2^* \circ F_2)_*\omega_2|_{TE^*|M \times \{0\}}.$$

Για $U_k = (F_k \circ i_k^*)^{-1}(B_k)$ και $f : U_1 \to U_2$ με $f = (i_2^* \circ F_2)^{-1} \circ L \circ (i_1^* \circ F_1)$ προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 4.0.5 (Coisotropic embedding - ύπαρξη) *Έστω M μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα, G μία μη συμπαγής και συνεκτική ομάδα Lie που δρα γνήσια* *μέσω αμφιδιαφορίσεων στην M και τ μία G - αναλλοίωτη κλειστή 2 - μορφή στην M σταθερής τάξης. Τότε, υπάρχει συμπλεκτική πολλαπλότητα (X, ω), στην οποία η G δρα γνήσια μέσω συμπλεκτομορφισμών και μία ισομεταβλητή coisotropic embedding $i : (M, \tau) \to (M, \omega)$* (δηλαδή η $i(M)$ είναι coisotropic κανονική υποπολλαπλότητα της X), *με* $i^*\omega = \tau$.

Απόδειξη. Με τον συμβολισμό από την προηγούμενη απόδειξη, έστω g ένας G - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής στην M. Οριζουμε το subbundle W του TM με

$$W = \bigcup_{m \in M} E_m^{\perp_g}$$

και τον χώρο $X = E^*$. Τότε $TM = W \oplus E$, συνεπώς

$$TX|M \times \{0\} = TM \oplus E^* = W \oplus E \oplus E^*.$$

Αν $\tau_W = \tau|_W$, τότε η τ_W είναι συμπλεκτική 2 - μορφή στον W. Πράγματι, θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\tau_m^b : E_m^{\perp_g} \to (E_m^{\perp_g})^* : \quad u \mapsto \tau_m(u, \cdot).$$

Έστω $m \in M$ και $\alpha \in (E_m^{\perp_g})^*$. Αν $\alpha|_{E_m} = 0$, τότε $\alpha \in (T_m M)^*$. Από το Θεώρημα του Riesz, υπάρχει $u \in T_m M$ με $g_m(u, \cdot) = \alpha(\cdot)$. Τότε $g_m(u, w) = \alpha(w) = 0$ για κάθε $w \in E_m$, δηλαδή $u \in E_m^{\perp_g}$, η τ_m^b είναι επί και συνεπώς, λόγω ισότητας των διαστάσεων, 1-1. Επομένως, η τ_W είναι μη εκφυλισμένη στο W.

Ορίζουμε, τώρα στο $E \oplus E^*$ την G - αναλλοίωτη, κανονική συμπλεκτική μορφή

$$\omega_{0m}((u_1, \alpha_1), (u_2, \alpha_2)) = \alpha_2(u_1) - \alpha_1(u_2) \text{ για } (u_i, \alpha_i) \in E_m \oplus E_m^*, \ i = 1, 2.$$

Με την παραπάνω διάσπαση, ο χώρος $TX|M$ αποκτά συμπλεκτική δομή με G - αναλλοίωτη 2 - μορφή την $\Omega_M = \tau_W \oplus \omega_0$. Θα συμπληρώσουμε την απόδειξη, επεκτείνοντας αυτή τη μορφή σε μία G - αναλλοίωτη συμπλεκτική μορφή πάνω από το X :

Έστω K μεγιστική συμπαγής υποομάδα της G. Από το Θεώρημα 2.5.7 και την Παρατήρηση 2.5.8, υπάρχει στην M ολικός διαφορίσιμος K - δίσκος S της M, ώστε $M = G \times_K S$. Μέσω της απεικόνισης προβολής $\pi : X \to M$, το $E^*|S$ είναι ολικός διαφορίσιμος K - δίσκος της X.

Η $\Omega_M|_{TX|S\times\{0\}}$ είναι K - αναλλοίωτη 2 - μορφή και επεκτείνεται σε K - αναλλοίωτη 2 - μορφή $\Omega_{E^*|S}$ με τύπο

$$\Omega(s,\alpha_s)((u_s^1,u_{\alpha_s}^1),(u_s^2,u_{\alpha_s}^2)) = \tau_W(s)(w_s^1,w_s^2) + u_{\alpha_s}^2(e_s^1) - u_{\alpha_s}^1(e_s^2),$$

όπου για $(s,\alpha_s,u_s^i,u_{\alpha_s}^i) \in T(E^*|S)$ και $i=1,2$ θεωρούμε την διάσπαση

$$TS = (W\cap TS)\oplus(E\cap TS),$$

οπότε $u_s^i = w_s^i + e_s^i$, $w_s^i \in W\cap TS$, $e_s^i \in E\cap TS$, ενώ θεωρούμε τα $u_{\alpha_s}^i \in T_{\alpha_s}E_s^*$ ως στοιχεία του χώρου $(E_s)^*$.

Ο ολικός K - δίσκος $E^*|S$ τέμνει κάθε τροχιά της G στον E^*, οπότε η $\Omega_{E^*|S}$ επεκτείνεται, μέσω της συνεφαπτόμενης δράσης στην E^*, σε μία G - αναλλοίωτη 2 - μορφή Ω της E^* με $\Omega|_M = \Omega_M$.

Θα τροποποιήσουμε την Ω, σε μία κλειστή, G - αναλλοίωτη, 2 - μορφή ω στον E^* με $\omega|_M = \Omega_M$: Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 4.0.2, για $t\in(0,1]$ ορίζεται η ροή $\pi_t : E^*\to E^*$ με χρονοεξαρτόμενο διανυσματικό πεδίο X_t και αν β είναι μία διαφορική μορφή στον E^*, τότε

$$\beta - \pi_0^*\beta = \int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}(\mathbf{d}\beta)dt + \mathbf{d}\int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}\beta dt.$$

Αν $i_M : M\hookrightarrow E^*$ είναι η ένθεση, τότε $i_M\circ\pi_0 = \pi_0$ και $i_M^*\Omega = \tau$, οπότε

$$\pi_0^*(\mathbf{d}\Omega)) = \pi_0^*(\mathbf{d}\tau) = 0,$$

εφόσον η τ είναι κλειστή. Επομένως, για $\beta = \mathbf{d}\Omega$ ο παραπάνω τύπος δίνει

$$\mathbf{d}\Omega = \mathbf{d}\int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}(\mathbf{d}\Omega)dt.$$

Αν θέσουμε

$$\mu = \int_0^1 \pi_t^*\mathbf{i}_{X_t}(\mathbf{d}\Omega)dt,$$

έχουμε $\mu|_{M\times\{0\}} = 0$, αφού $X_t|_{M\times\{0\}} = 0$. Άρα, για $\omega = \Omega - \mu$ προκύπτει $\mathbf{d}\omega = 0$ και $\omega|_{M\times\{0\}} = \Omega_M$ που είναι μη εκφυλισμένη 2 - μορφή. Όπως και στο Λήμμα 4.0.2, υπάρχει G - περιοχή U της $M\times\{0\}$ στην E^* ώστε η ω να είναι G - αναλλοίωτη συμπλεκτική μορφή στο U με $i_M^*\omega = \tau$, δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

4.1 Το συμπλεκτικό Θεώρημα ολικών δίσκων

Έστω G μία ομάδα Lie με Lie άλγεβρα $\mathbf{g}$ και H μία κλειστή υποομάδα της με Lie άλγεβρα $\mathbf{h}$, που δρα στην G μέσω της αριστερής δράσης. Έστω, επίσης, (S, ω_S, H, J_S) ένας Χαμιλτόνιος χώρος. Οι χώροι T^*G και $G \times \mathbf{g}^*$ είναι αμφιδιαφορίσιμοι μέσω της αμφιδιαδφόρισης

$$I : T^*G \to G \times \mathbf{g}^* : \quad (g, \alpha_g) \mapsto (g, (T_e L_g)^* \alpha_g).$$

Η δράση που κάνει την απεικόνιση $(id_G, I) : H \times T^*G \to H \times (G \times \mathbf{g}^*)$ ισομεταβλητή είναι η

$$D : G \times (G \times \mathbf{g}^*) \to G \times \mathbf{g}^* : \quad (h, (g, \nu)) \mapsto (gh^{-1}, (Ad_{h^{-1}})^* \nu).$$

Αν, λοιπόν, ω_1 είναι η κανονική συμπλεκτική μορφή στην T^*G, τότε η $\omega_0 = I_* \omega_1$ είναι μία H - αναλλοίωτη συμπλεκτική μορφή στον $G \times \mathbf{g}^*$ με τύπο

$$\omega_0(g, \nu)((T_e L_g \eta_1, \sigma_1), (T_e L_g \eta_2, \sigma_2)) = \sigma_2(\eta_1) - \sigma_1(\eta_2) + \nu([\eta_1, \eta_2])$$

για $\eta_i \in \mathbf{g}$ και $\sigma_i \in T_\nu \mathbf{g}^* \cong \mathbf{g}^*$, $i = 1, 2$, όπου $[\cdot, \cdot]$ είναι το Lie bracket της $\mathbf{g}$. Έτσι, ο $G \times \mathbf{g}^*$ γίνεται Χαμιλτόνιος H - χώρος με Ad^* - ισομεταβλητή απεικόνιση ορμής[1] $J_{G \times \mathbf{g}^*}(g, \nu) = -\nu|_{\mathbf{h}}$ και ορίζεται ο Χαμιλτόνιος H - χώρος $G \times \mathbf{g}^* \times S$ με συμπλεκτική μορφή $\omega = \omega_0 \oplus \omega_S$ και Ad^* - ισομεταβλητή απεικόνιση ορμής $J = J_{G \times \mathbf{g}^*} \oplus J_S$. Η H δρα ελεύθερα στον $G \times \mathbf{g}^* \times S$ και το $0 \in \mathbf{h}^*$ είναι κανονική τιμή του J, οπότε, αν H_0 είναι η ομάδα ισοτροπίας του $0 \in \mathbf{h}^*$ με την Ad^* δράση της H στην $\mathbf{h}^*$, τότε αυτή δρα ελεύθερα στον $J^{-1}(\{0\})$ και ορίζεται έτσι ο Χαμιλτόνιος G - χώρος $(G \times \mathbf{g}^* \times S)/H := J^{-1}(\{0\})/H_0$ (Βλέπε [15], Ch. 4, 4.3, Th. 1).

Έστω πως η H είναι συμπαγής υποομάδα της G. Τότε, ο ίδιος τρόπος ορισμού της Φ_e στην Παρατήρηση 1.3.9, δίνει ένα H - αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στην $\mathbf{g}$. Προκύπτει, τότε, η διάσπαση $\mathbf{g}^* = \mathbf{h}^0 \oplus (\mathbf{h}^0)^\perp$, όπου $\mathbf{h}^0 = \{\alpha \in \mathbf{g} : \alpha|_{\mathbf{h}} = 0\}$. Από το Θεώρημα του Riesz, έχουμε $\mathbf{h}^* = (\mathbf{h}^0)^\perp$, συνεπώς $\mathbf{g}^* = \mathbf{h}^0 \oplus \mathbf{h}^*$. Άρα $G \times \mathbf{g}^* \times S = G \times \mathbf{h}^0 \times \mathbf{h}^* \times S$ και η απεικόνιση ορμής πέρνει την μορφή

$$J(g, \alpha, \beta, s) = -\beta + J_S(s).$$

Επομένως

$$J^{-1}(\{0\}) = \{(g, \alpha, J(s), s) : (g, \alpha, s) \in G \times \mathbf{h}^0 \times S\},$$

[1] Ορίζεται η coadjoint δράση $H \times \mathbf{g}^* \to \mathbf{g}^*$ με τύπο $\mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}(\alpha)(v) = \alpha(\mathrm{Ad}_{h^{-1}} v)$. Έστω (X, ω, G, J) ένας Χαμιλτόνιος G - χώρος. Η $J : X \to \mathbf{g}^*$ θα λέγεται Ad^* - ισομεταβλητή, αν $J(gx) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} J(x)$. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [15], Ch. 4, 4.2.

δηλαδή το $J^{-1}(\{0\})$ είναι το γράφημα της H - αμφιδιαφορίσης

$$l : G \times \mathbf{h}^0 \times S \to G \times \mathbf{h}^0 \times \mathbf{h}^* \times S, \quad (g, \alpha, s) \to (g, \alpha, J_S(s), s).$$

Άρα, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbf{h}^0 \times S & \xrightarrow{\quad l \quad} & G \times \mathbf{h}^0 \times \mathbf{h}^* \times S \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ G \times_H (\mathbf{h}^0 \times S) & \xrightarrow{\quad \widetilde{l} \quad} & G \times_H (\mathbf{h}^0 \times \mathbf{h}^* \times S) \end{array}$$

οπού η επαγώμενη απεικόνιση $\widetilde{l}$ είναι αμφιδιαφόριση και μεταφέρει τη συμπλεκτική δομή της $G \times_H (\mathbf{h}^0 \times \mathbf{h}^* \times S)$ στην $Y = G \times_H (\mathbf{h}^0 \times S)$ και η Y γίνεται Χαμιλτόνιος G - χώρος, με δράση την $(h, [g, \alpha, s]) \mapsto [hg, \alpha, s]$ και απεικόνιση ορμής την $J_Y : Y \to \mathbf{g}^*$ με $J_Y([g, \alpha, s]) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\alpha + J_S(s))$. Ο Y θα λέγεται G - **Χαμιλτόνια επέκταση** του S.

Με τα παραπάνω δεδομένα, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Συμπλεκτικό Θεώρημα για ολικούς δίσκους:

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω G μία συνεκτική ομάδα Lie και K μία μεγιστική συμπαγής υποομάδα της. Έστω επίσης (X, ω) ένας γνήσιος Χαμιλτόνιος G - χώρος με απεικόνιση δράσης φ και με απεικόνιση ορμής J, ώστε όλες οι ομάδες ισοτροπίας του να είναι συζυγεις. Τότε, υπάρχει μία K - συμπλεκτική υποπολλαπλότητα S του X ώστε η G - επέκταση της να είναι G -* **συμπλεκτομορφική** (δηλαδή να υπάρχει G - αμφιδιαφόριση που να είναι και συμπλεκτομορφίσμος) *με μία G - περιοχή του $Z = J^{-1}(\{0\})$ στον X.*

Απόδειξη. Για κάθε $z \in Z$ ισχύει:

$$T_z Gz = \{\xi_M(z) : \xi \in \mathbf{g}^*\} = \{T_e \varphi_z \xi : \xi \in \mathbf{g}\}.$$

Από τον ορισμό της απεικόνισης ορμής και θεωρώντας μία βάση $\{(\xi_i)_M(z)\}_{i=1}^n$ του χώρου $T_z Gz$, έχουμε

$$\begin{aligned} T_z Z &= \ker T_z J = \bigcap_{i=1}^n (< (\xi_i)_M(z) >)^{\perp_{\omega(z)}} \\ &= (\bigoplus_{i=1}^n < (\xi_i)_M(z) >)^{\perp_{\omega(z)}} = T_z G z^{\perp_{\omega(z)}}. \end{aligned}$$

Εφόσον όλες οι ομάδες ισοτροπίας έχουν την ίδια διάσταση, η απεικόνιση J έχει σταθερή τάξη, δηλαδή το Z είναι κανονική υποπολλαπλότητα του X και επειδή $Gz \subseteq Z$, προκύπτει ότι

$$T_z Z^{\perp_{\omega(z)}} = TzGz \subseteq T_z Z,$$

δηλαδή η Z είναι coisotropic υποπολλαπλότητα της X.

Έστω $i_Z : Z \hookrightarrow X$ η ένθεση. Από τα δύο προηγούμενα Θεωρήματα μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση όπου $X = E^*$ και η συμπλεκτική δομή στον X είναι αυτή που προκύπτει με επέκταση από την συμπλεκτική δομή του

$$TX|Z = W \oplus E \oplus E^*$$

όπως στο προηγούμενο θεώρημα, με τα E και E^* να είναι όπως στις προηγούμενες αποδείξεις, με την Z στην θέση της M, με $\tau := i_Z^* \omega$ και με το W να είναι ένα G - αναλλοίωτο vector bundle συμπλήρωμα του E στο TZ. Το W θα κατασκευαστεί στη συνέχεια.

Επειδή $E_z = T_z G z$, θεωρώντας την submersion $T_e \varphi_z : \mathbf{g}^* \to T_z G z$, έχουμε $E_z \cong \mathbf{g}/\mathbf{g}_z$, όπου

$$\mathbf{g}_z = \{\xi \in \mathbf{g} : \xi_m(z) = 0\} = \{\xi \in \mathbf{g} : \exp t\xi \in G_z, t \in \mathbb{R}\} = \ker T_e \varphi_z$$

είναι η άλγεβρα Lie της ομάδας ισοτροπίας του z. Μέσω της απεικόνισης προβολής $\nu_z : \mathbf{g} \to \mathbf{g}/\mathbf{g}_z$ προκύπτει η 1-1 απεικόνιση $\nu_z^* : (\mathbf{g}/\mathbf{g}_z)^* \to \mathbf{g}^*$ με

$$\nu_z^*((\mathbf{g}/\mathbf{g}_z)^*) = \{\alpha \in \mathbf{g}^* : \alpha|_{\mathbf{g}_z} = 0\} =: \mathbf{g}_z^0.$$

Το $\bigcup_{z \in A} \mathbf{g}_z^0$ είναι subbundle του $A \times \mathbf{g}^*$, και επειδή $E_z^* = (\mathbf{g}/\mathbf{g}_z)^*$, η απεικόνιση $\nu^* : E^*|A \to \bigcup_{z \in A} \mathbf{g}_z^0$ με $\nu^*(z) = \nu_z^*$ είναι vector bundle ισομορφισμός.

Τώρα, επειδή η Z είναι γνήσιος G - χώρος, από το Θεώρημα 2.5.7 και την Παρατήρηση 2.5.8, υπάρχει ολικός K - δίσκος A της Z με $Z = G \times_K A$. Τότε, για $z \in A$ σταθεροποιημένο, ισχύει $G_z \subseteq K$, οπότε αν $\mathbf{k}$ είναι η άλγεβρα Lie του K, προκύπτει ότι $\mathbf{g}_z \subseteq \mathbf{k}$, επομένως $\mathbf{k}^0 \subseteq \mathbf{g}_z^0$. Χρησιμοποιώντας, τώρα, ένα G - αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο R στην $\mathbf{g}$ και το γεγονός πως η ν^* είναι vector bundle ισομορφισμός, μπορούμε να κατασκευάσουμε το K - subbundle S του $E^*|A$, ώστε $S_z = (\nu_z^*)^{-1}(((\mathbf{g}_z^{\perp_R} \cap \mathbf{k})^{\perp_R})^0)$. (Απο το Θεώρημα του Riesz, μπορούμε ισοδύναμα να δουλέψουμε με το εσωτερικό γινόμενο R. Τότε $< x, \cdot > \in \mathbf{k}^0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{k}^{\perp_R}$.) Τότε

$$E_z^* = (\nu_z^*)^{-1}(\mathbf{g}_z^0) = (\nu^*)^{-1}(\mathbf{k}^0) \oplus S_z.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $((\mathbf{g}_z^{\perp_R} \cap \mathbf{k})^{\perp_R})^0 \to \mathbf{k}^* : \quad \alpha \mapsto \alpha|_{\mathbf{k}}$. Επειδή

$$((\mathbf{g}_z^{\perp_R} \cap \mathbf{k})^{\perp_R})^0 \subseteq \mathbf{g}_z^0,$$

επάγεται η φυσιολογική απεικόνιση

$$\lambda_z : ((\mathbf{g}_z^{\perp_R} \cap \mathbf{k})^{\perp_R})^0 \to (\mathbf{k}/\mathbf{g}_z)^*.$$

Αν $\lambda(\alpha) = 0$, τότε $\alpha \in \mathbf{k}^0 \cap ((\mathbf{g}_z^{\perp_R} \cap \mathbf{k})^{\perp_R})^0 = \{0\}$, οπότε η λ είναι 1-1 και λόγω ισότητας διαστάσεων, θα είναι και επί. Άρα $S_z \cong (\mathbf{k}/\mathbf{g}_z)^*$, για κάθε $z \in A$ και η

$$\lambda : S \to \bigcup_{z \in A} (\mathbf{k}/\mathbf{g}_z)^*, \quad \lambda(z) = \lambda_z$$

θα είναι ισομορφισμός vector bundle. Θα δείξουμε πως υπάρχει K - περιοχή του A στο S που να είναι ο ζητούμενος ολικός Χαμιλτόνιος K - δίσκος σε μία G - περιοχή του Z στον $X = E^*$.

Κατ' αρχάς, εφόσον $\mathbf{g}_z \subseteq \mathbf{k}$, έχουμε $T_zKz \cong \mathbf{k}/\mathbf{g}_z$. Επειδή $Kz = Gz \cap A$, ισχύει $T_zKz \subseteq T_zGz \cap T_zA$. Επίσης, εφόσον $G_z \subseteq K$, ισχύει

$$\dim Kz = \dim K - \dim G_z.$$

Επιπλέον, από τέλος της απόδειξης της Πρότασης 2.5.4, συνάγεται ότι $T_zGz + T_zA = T_zZ$, οπότε

$$\begin{aligned} \dim(T_zGz \cap T_zA) &= \dim Gz + \dim Z - \dim G + \dim K - \dim Z \\ &= \dim K - \dim Gz, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $T_zKz = T_zGz \cap T_zA$. Αν, λοιπόν, θέσουμε $\mathbf{m} = \mathbf{k}^{\perp_R}$, τότε $T_zZ = T_e\varphi_z(\mathbf{m}) \oplus T_zA$.

Θεωρώντας K - αναλλοίωτο μετρικό τανυστή θ στην A και θέτοντας $V_z = (T_zKz)^{\perp_{\theta(z)}}$, θα έχουμε την διάσπαση $T_zA = V_z \oplus T_zKz$. Έτσι, συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτουν οι διασπάσεις

$$T_zZ = V_z \oplus T_zKz \oplus T_e\varphi_z(\mathbf{m}), \tag{4.1}$$

και

$$T_{(z,0)}S|A = V_z \oplus T_zKz \oplus S_z \cong V_z \oplus \mathbf{k}/\mathbf{g}_z \oplus (\mathbf{k}/\mathbf{g}_z)^*. \tag{4.2}$$

Ο χώρος $T_zKz \oplus T_e\varphi_z(\mathbf{m}) = T_zGz = E_z$, είναι ο πυρήνας της

$$\omega^b(z) : T_zZ \to (T_zZ)^* : \quad u \mapsto \omega_m(u, \cdot),$$

οπότε η $\omega(z)|V_z$ είναι μία μη εκφυλισμένη 2 - μορφή. (Ουσιαστικά, με τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης, για $z \in A$ επιλέγουμε $W_z = V_z$.) Το συμπλεκτικό K - αναλλοίωτο vector bundle $V \to A$, επεκτείνεται, μέσω της K - δράσης στην Z, σε G αναλλοίωτο vector bundle $W \to Z$ και από την διάσπαση 4.1, έχουμε $TZ = W \oplus E$.

Για $z \in A$, η $\omega(z)$ είναι το άθροισμα της $\omega|V_z$, που είναι μη εκφυλισμένη, και της κανονικής στον $\mathbf{k}/\mathbf{g}_z \oplus (\mathbf{k}/\mathbf{g}_z)^*$. Άρα, υπάρχει K - περιοχή H του A στο S, ώστε να είναι συμπλεκτική K - υποπολλαπλότητα του X πάνω από το A. Από τον προηγούμενο συλλογισμό, ορίζεται η απεικόνιση ορμής για την H

$$J_H = i \circ J \circ i_H : H \to \mathbf{k}^*,$$

όπου $i_H : H \to X$ είναι η ένθεση και $i : \mathbf{g}^* \to \mathbf{k}^*$ η απεικόνιση με τύπο $i(\alpha) = \alpha|_{\mathbf{k}}$ που έχει πυρήνα $\ker i = \mathbf{k}^0$. Συνεπώς

$$A = H \cap J^{-1}(\{0\}) \subseteq H \cap J^{-1}(\mathbf{k}^0) = (J_H)^{-1}(\{0\}).$$

Θα δείξουμε πως $A = (J_H)^{-1}(\{0\})$:

Υπενθυμίζουμε πως για $z \in A$ ισχύουν οι διασπάσεις

$$T_{(z,0)}(X|A \times \{0\}) = W_z \oplus E_z \oplus E_z^* \cong V_z \oplus T_z Gz \oplus \mathbf{g}_z^0,$$

$$T_{(z,0)}(H|A \times \{0\}) = T_z A \oplus S_z.$$

Ο ορισμός της απεικόνισης ορμής, δείχνει ότι $T_{(z,0)}(J(\xi))(\eta) = \omega(z)(\xi_X(z), \eta)$ για κάθε $\eta \in T_z X$ και κάθε $\xi \in \mathbf{g}$. Για $\eta = \alpha_z \in E^* = \mathbf{g}_z^0 \subseteq T_z X$, έχουμε $\omega(z)(\xi_X(z), \alpha_z) = \alpha_z(\xi)$, δηλαδή

$$T_z J|_{\mathbf{g}_z^0} = id_{\mathbf{g}_z^0}.$$

Από τη σχέση $TJ_H = Ti \circ TJ \circ Ti_H$ και επειδή $\ker Ti \cap S_z = \mathbf{k}^0 \cap S_z = \{0\}$, έχουμε $T_{(z,0)} J_H|_{S_z} = id_{S_z}$, δηλαδή

$$\ker T_{(z,0)} J_H \subseteq T_z A.$$

Άρα $\ker T_{(z,0)} J_H = T_z A$ και συνεπώς $A = (J_H)^{-1}(\{0\})$.

Η απόδειξη θα τελειώσει, αν θεωρήσουμε την G - Χαμιλτόνια επέκταση $Y = G \times_K (\mathbf{k}^0 \times H)$ του H. Επειδή η απεικόνιση ορμής της Y είναι η $J_Y([g, \alpha, s]) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\alpha + J_H(s))$ θα έχουμε

$$(J_Y)^{-1}(\{0\}) = G \times_K (\{0\} \times (J_H)^{-1}(\{0\}) = G \times_K A = Z,$$

αφού $\alpha = -J_H(s) \in \mathbf{k}^0 \cap \mathbf{k}^* = \{0\}$, θεωρώντας το $\mathbf{k}^* = ((\mathbf{k})^{\perp_R}))^0$ στον χώρο $\mathbf{g}^*$. Με τους ίδιους ακριβώς χειρισμούς όπως και προηγουμένως, για $z \in Z$ και $g \in G$ σταθεροποιημένα, ισχύει, $T_{[g,z]}Z = \mathbf{g}/\mathbf{k} \oplus T_z A$. Εκ κατασκευής, ο περιορισμός της συμπλεκτικής μορφής του Y στο $T_{[g,z]}Z$ είναι εκφυλισμένος στον $\mathbf{g}/\mathbf{k}$ παράγοντα, ενώ στον $T_z A$ είναι ο περιορισμός από την συμπλεκτική μορφή του $T_{(z,0)}H$. Συνεπώς, αν Ω είναι η συμπλεκτική μορφή στον Y, τότε

$$(T_{[g,z]}Z)^{\perp_{\Omega([g,z])}} = (\mathbf{g}/\mathbf{k})^{\perp_{\Omega([g,z])}} \cap (T_z A)^{\perp_{\Omega([g,z])}} \subseteq \mathbf{g}/\mathbf{k} \oplus T_z A = T_{[g,z]}Z,$$

δηλαδή το Z είναι coisotropic κανονική υποπολλαπλότητα του Y. Επίσης, η επαγόμενη συμπλεκτική μορφή του Y περιορισμένη στο Z είναι η ίδια με αυτή του X περιορισμένη στο Z, αφού συμπίπτουν στο A και επεκτείνονται και οι δύο στο Z μέσω της δράσης της G με τον ίδιο τρόπο. Εφαρμόζοντας, λοιπόν, το Θεώρημα 4.0.4, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει G - συμπλεκτομορφισμός $f : M \to N$ με $f|_Z = id_Z$, όπου η M είναι G - περιοχή της Z στην Y και η N είναι G - περιοχή της Z στην X. Επειδή οι f^*J και J_Y διαφέρουν κατα μία σταθερά στον $\mathbf{g}^*$ ως απεικονίσεις ορμής της Y και ισχύει $f^*J|_Z = J_Y|_Z = 0$, οι f^*J και J_Y θα ταυτίζονται. Άρα, η f μεταφέρει τον K - ολικό Χαμιλτόνιο δίσκο H της Y στην X και το θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Abels, H. (1974): *Parallelizability of proper actions, global K - slices and maximal compact subgroups*, Math.Ann., 212, 1-19.

[2] Abels, H. (1977): *Slices for proper actions of non-compact Lie groups*, Bul. of Greek Math. Soc., 18, 149-156.

[3] Abels, H. - Strantzalos, P. (1981): *Homogeneous factors of Riemannian manifolds*, J.Diff. Geom., 16, 83-91.

[4] Abels, H. - Strantzalos, P. (to appear): *Proper Transformation Groups*, Book.

[5] Bourbaki, N. (1966): *General Topology*, Part 1, Herman, Paris.

[6] Dugunji, J. (1976): *Topology*, Allyn and Bacon, Boston. London. Syndney. Toronto.

[7] Gleason, A. M. (1950): *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 1, 35-43.

[8] Heinzer, P. - Loose, F. (1999): *A global slice theorem for proper Hamiltonian actions*, Manuscripta Math., 98, 295-305.

[9] Juan Pablo Ortega, - Tudor R. (2002): *A Symplectic Slice Theorem*, Letters in Math. Phys., 59, 81-93.

[10] Koszul, J. L. (1965): *Lectures on Groups of Transformations*, Tata Institute, Bombay.

[11] Kobayashi, S. - Nomizu, K. (1993): *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience.

[12] Montgomery, D. - Zippin, L. (1974): *Topological Transformation Groups*, Krieger Publishing Company Huntington, New York.

[13] Palais, R. (1961): *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math., 73, 295-323.

[14] Ramsay, A. (1991): *Local product structure for group actions*, Ergodic Th. Dyn. Sys., 11, 209-217.

[15] Ralph, A. - Jerold, M. (1978): *Foundations of Mechanics*, second edition, Benjamin/Cummings Publishing Company.