Τμήμα Μαθηματικό
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΑΥΤΟΜΑΤΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Μεταπτυχιακή εργασία

Κατερίνα Λαγουδάκη

Δεκέμβριος 2007
Ηράκλειο, Κρήτη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εργασία αυτή αναφέρεται στην αυτόματη παραγωγή αποδείξεων γεωμετρικών θεωρημάτων με έναν ειδικό τρόπο που στηρίζεται σε μια βελτιωμένη μέθοδο και την εφαρμογή της σε ένα πρόγραμμα, το οποίο παράγει σε πολλές περιπτώσεις μικρές, ευανάγνωστες και κομψές αποδείξεις εκατοντάδων γεωμετρικών θεωρημάτων.

Από τις αρχές του 1930, ο $A.Tarski$ εισήγαγε την μέθοδο απαλοιφής σημείων μέσω γεωμετρικών ποσοτήτων. Η μέθοδος αυτή βασίστηκε στην αλγεβρική προσέγγιση της απόδειξης θεωρημάτων της στοιχειώδης γεωμετρίας. Έπειτα ο $Wen - Tsun\ Wu$ εισήγαγε την αλγεβρική μέθοδο, η οποία για πρώτη τότε φορά χρησιμοποιήθηκε στην αυτόματη απόδειξη εκατοντάδων γεωμετρικών θεωρημάτων. Μέχρι την εργασία του Wu, πολλές επιτυχημένες αλγεβρικοί μέθοδοι είχαν βελτιωθεί με σκοπό την αυτόματη απόδειξη γεωμετρικών θεωρημάτων. Πολλά υπολογιστικά προγράμματα βασίστηκαν στην μέθοδο αυτή και η μεγαλύτερη βελτίωση της μεθόδου προήλθε από το Πανεπιστήμιο του Τέξας, όπου το πρόγραμμα χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη προβλημάτων της Ευκλείδειας και μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Έτσι λοιπόν πολλά δύσκολα προβλήματα των οποίων οι παραδοσιακές αποδείξεις απαιτούσαν μεγάλη ευφυία για την λύση τους, μπορούν πλέον να αποδειχθούν σε δευτερόλεπτα με την χρήση των υπολογιστικών προγραμμάτων.

Η αλγεβρική μέθοδος, η οποία είναι πολύ διαφορετική από τις παραδοσιακές μεθόδους αποδείξεων, χρησιμοποιήθηκε από πολλούς γεωμέτρες προκειμένου να εξετάσουν αν μια πρόταση είναι αληθής ή όχι. Οι αποδείξεις που παράγονται από τον υπολογιστή χρησιμοποιούν υπολογισμούς πολυωνύμων. Τα πολυώνυμα αυτά μπορεί να περιλαμβάνουν εκατοντάδες όρους και δεκάδες μεταβλητές. Για τον λόγο αυτό, οι αποδείξεις που παράγονται από τον υπολογιστή είναι ευανάγνωστες και μικρές.

Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται σε αυτή τη μέθοδο για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων είναι το εμβαδόν τριγώνων ή τετραπλεύρων. Η μέθοδος των εμβαδών προκειμένου να παράγει μικρές αποδείξεις επιλέγει τις σωστές γεωμετρικές ποσότητες και τα κατάλληλα λήμματα που αναφέρονται σε αυτές.

Τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι τα ακόλουθα.

1. Οι αποδείξεις των προβλημάτων που παράγονται σύμφωνα με τη μέθοδο είναι γενικά μικρές σε έκταση. Από τα λήμματα που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια των αποδείξεων, ο υπολογιστής μπορεί να παράγει γρήγορα έναν μεγάλο αριθμό αποδείξεων και να επιλέξει την πιο σύντομη απόδειξη. Το γεγονός αυτό αποτελεί την βάση παραγωγής ποικίλων τρόπων απόδειξης μιας γεωμετρικής πρότασης.

2. Η μέθοδος είναι τόσο αποδοτική ώστε να παράγει αποδείξεις δύσκολων θεωρημάτων δίχως να προσθέτει βοηθητικά σημεία και ευθείες.

3. Δεδομένου ότι η σχηματική αναπαράσταση μιας γεωμετρικής πρότασης μπορεί να έχει πάνω από μια πιθανές εκδοχές, οι αποδείξεις που προσφέρει η μέθοδος είναι ανεξάρτητες απο τις σχηματικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών προτάσεων.

4. Οι αποδείξεις που παράγονται έχουν καθαρό γεωμετρικό νόημα και είναι ευανάγνωστες.

Η μέθοδος των εμβαδών εφαρμόζεται σε κατασκευαστικά γεωμετρικά θεωρήματα, όπου το σχήμα των γεωμετρικών αυτών προτάσεων μπορεί να σχεδιαστεί με χρήση του κανόνα και του διαβήτη. Οι βασικές γεωμετρικές ποσότητες που χρησιμοποιούνται είναι το εμβαδόν, οι Πυθαγόρειες διαφορές και οι πλήρεις γωνίες. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται για την απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων που περιλαμβάνουν έννοιες, όπως η παραλληλία ευθύγραμμων τμημάτων, η σύμπτωση και η συγγραμμικότητα σημείων. Η έννοια της Πυθαγόρειας διαφοράς τριγώνων, χρησιμοποιείται για την απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων που περιλαμβάνουν κύκλους, καθετότητα και αναλογίες ευθυγράμμων τμημάτων, ενώ οι πλήρεις γωνίες χρησιμοποιούνται σε προτάσεις που περιέχουν κύκλους και γωνίες.

Η μέθοδος των εμβαδών έχει γενικά θεωρηθεί ως ένα σύνολο ειδικών τεχνασμάτων που επιλύουν πολλά γεωμετρικά προβλήματα. Ο *J.Z.Zhang* μελετούσε την μέθοδο των εμβαδών από το 1975. Αναγνώρισε την γενικότητα της μεθόδου και την βελτίωσε σε μια συστηματική μέθοδο επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, ποικίλων επιπέδων δυσκολίας, που αναφέρονται σε βασικές γεωμετρικές προτάσεις που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία αλλά και σε προτάσεις που έχουν τεθεί σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Η παραγωγή αυτοματοποιημένων αποδείξεων γεωμετρικών θεωρημάτων συσχετίζεται με την δυσκολία μάθησης και διδασκαλίας της γεωμετρίας. Βασιζόμενοι στον άθλο που έχει καταφέρει το πρόγραμμα που περιλαμβάνει την μέθοδο των εμβαδών, πιστεύουμε ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να συνεισφέρει πολλά στην εκπαίδευση της γεωμετρίας. Το γεγονός ότι οι αποδείξεις που παράγονται από τον υπολογιστή είναι μικρές σε έκταση και έχουν σχήμα που οι μαθητές μπορούν να το σχεδιάσουν με χαρτί και μολύβι, μπορεί να συντελέσει δραστικά στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές στο μάθημα της γεωμετρίας. Ακόμη δεν είναι λίγες οι φορές που οι καθηγητές ζητάνε από τους μαθητές εναλλακτικούς ή καλύτερους τρόπους απόδειξης γεωμετρικών θεωρημάτων. Ετσι λοιπόν, η μέθοδος αυτή μπορεί να δυναμώσει την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και να προσφέρει την δυνατότητα στους μαθητές να διαμορφώνουν δικές τους εικασίες και να ρωτάνε τον υπολογιστή για την ορθότητά τους.

Πιο συγκεκριμένα, ως απάντηση στη δυσκολία αυτή, ο *J.Z.Zhang* δούλεψε με παιδιά γυμνασίου και δημιούργησε ένα νέο σύστημα αξιωμάτων στην γεωμετρία βασισμένο στην έννοια του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας το νέο του σύστημα, ο *Zhang* κατέβαλε μεγάλη προσπάθεια για να προωθήσει μια νέα μεταρρύθμιση στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Κίνας, με σκοπό την αποδοτικότερη εκπαίδευση της γεωμετρίας. Η επιτυχημένη εφαρμογή της μεθόδου του οδήγησε στην χρήση της και σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Επιπροσθέτως, η μέθοδος του εμβαδού χρησιμοποιείται και στην εκπαίδευση των Κινέζων μαθητών για την συμμετοχή τους στις Εθνικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Κεφάλαιο 2

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο της αυτόματης παραγωγής των παραδοσιακών αποδείξεων των ευκλείδειων γεωμετρικών θεωρημάτων, που ανήκουν στην κατηγορία των θεωρημάτων των σημείων τομής του *Hilbert*. Οι γεωμετρικές προτάσεις που επιλύονται σύμφωνα με τη μέθοδο των εμβαδών είναι κατασκευαστικές γεωμετρικές προτάσεις που ανήκουν στην σχετική γεωμετρία. Η σχετική γεωμετρία μελετά προβλήματα παραλληλίας, σύμπτωσης και συγγραμμικότητας. Η ιδέα κλειδί της μεθόδου είναι η απαλοιφή των σημείων που κατασκευάζονται στην πρόταση χρησιμοποιώντας έξι βασικές γεωμετρικές προτάσεις, λήμματα, που αφορούν το εμβαδόν τριγώνων και τετραπλεύρων. Τα σημεία τα απαλοίφουμε με σειρά αντίθετη από εκείνη που κατασκευάστηκαν. Ένα γεωμετρικό θεώρημα είναι αληθές μόνο κάτω από συγκεκριμένες ικανές και αναγκαίες συνθήκες, οι οποίες δεν δίνονται με σαφήνεια στην περιγραφή του προβλήματος. Αν το θεώρημα μπορεί να περιγραφεί κατασκευαστικά, το πρόγραμμα μπορεί να παράγει με έναν συστηματικό τρόπο τις συνθήκες αυτές. Στην παρακάτω ενότητα θα παρουσιάσουμε τις έξι βασικές προτάσεις και έπειτα θα δώσουμε τρία παραδείγματα με σκοπό να επεξηγήσουμε τη μέθοδο.

2.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ (ΜΕΡΟΣ Ι)

Στην εργασία αυτή όλες οι διαδικασίες πραγματοποιούνται στο επίπεδο. Τα βασικά γεωμετρικά αντικείμενα στο επίπεδο είναι τα σημεία και οι ευθείες. Για να δηλώσουμε τα σημεία πάνω στο επίπεδο χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα, όπως $A, B, C, ...$

Είναι γνωστό ότι από δυο διαφορετικά σημεία A, B περνά μία και μόνο μία ευθεία. Για να δηλώσουμε την ευθεία αυτή χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό AB ή BA. Αυτό έχει ως σκοπό να δώσουμε στην ευθεία μια από τις δυο κατευθύνσεις, έτσι ώστε να αναφερόμαστε πλέον σε **προσανατολισμένες ευθείες**. Έτσι λοιπόν, η προσανατολισμένη ευθεία AB έχει κατεύθυνση από το σημείο A στο σημείο B, ενώ η προσανατολισμένη ευθεία BA έχει την αντίθετη κατεύθυνση, από το σημείο B στο σημείο A.

Δύο σημεία A και B πάνω σε μια προσανατολισμένη ευθεία ορίζουν **τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα**, των οποίων το μήκος $\overline{AB}$ είναι θετικό εάν η κατεύθυνση από το A πρός το B είναι ίδια με την κατευθυνση της ευθείας και είναι αρνητικό εάν η κατεύθυνση από το A προς το B είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της ευθείας. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε οτι $\overline{AB} = -\overline{BA}$ και $\overline{AB} = 0$ αν και μόνο αν $A = B$.

Έστω ότι έχω τέσσερα σημεία A, B, C και D πάνω σε μια ευθεία τέτοια ώστε $A \neq B$. Αν ο λόγος των μηκών των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$ είναι t, τότε θα έχουμε

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = t$ ή $\overline{AB} = t\overline{CD}$.

Αν τα δυο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα AB και CD έχουν την ίδια κατεύθυνση τότε ο λόγος τους είναι θετικός, $t \geq 0$. Αν έχουν αντίθετη κατεύθυνση τότε ο λόγος τους είναι αρνητικός, $t \leq 0$.

Απαραίτητη προυπόθεση για να ισχύουν τα παραπάνω είναι οτι τα σημεία C και D πρέπει να ανήκουν πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία A και B.

Αν πάρω τώρα σημείο C πάνω στην ευθεία AB τότε

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ ή

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}=1.$

Ονομάζουμε τους λόγους $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ και $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$, **λόγοι θέσεως ή συντεταγμένες θέσεως του σημείου C σε σχέση με το AB.**

Είναι φανερό ότι για οποιουσδήποτε δυο πραγματικούς αριθμούς s και t που ικανοποιούν την σχέση $s + t = 1$, υπάρχει μοναδικό σημείο C πάνω στην AB τέτοιο ώστε $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = s$ και $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = t$.

Ειδική περίπτωση είναι η επιλογή σημείου M πάνω στο AB τέτοιο ώστε να είναι το μέσο του τμήματος AB, οπότε θα έχουμε

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$

Δύο διαφορετικά σημεία πάντα ορίζουν μια ευθεία. Τρία σημεία δεν βρίσκονται πάντα πάνω σε μια ευθεία, αν όμως συμβαίνει αυτό τότε τα σημεία αυτά ονομάζονται **συγγραμμικά**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1 *Ευθεία είναι ένα σύνολο συγγραμμικών σημείων. Αν l είναι μια ευθεία και σημείο A τέτοιο ώστε $A \in l$, τότε λέμε ότι το A βρίσκεται πάνω στην ευθεία l.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.2 *Τρία σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $S_{ABC} = 0$.*

Απόδειξη

Αν $S_{ABC} = 0$ τότε από το αξίωμα A_3 (σελίδα 215) τα σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά.

Για το αντίστροφο τώρα υποθέτουμε ότι τα σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά.

Αν $A = C$ τότε $\overline{BC} = t\overline{CC} = 0$ από αξίωμα A_6 (σελίδα 217): $S_{ABC} = tS_{ACC} = 0$

Αν $A \neq C$ τότε $t = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ από αξίωμα A_6: $S_{ABC} = tS_{ACC} = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1.3 *Δυο διαφορετικά σημεία A και B ορίζουν μοναδική ευθεία AB η οποία αποτελεί το σύνολο όλων των σημείων C για τα οποία ισχύει $S_{ABC} = 0$.*

Απόδειξη

Έστω P, Q, R τρία διαφορετικά σημεία πάνω στην ευθεία AB. Θέλουμε να δείξουμε ότι: $S_{PQR} = 0$.

Από την πρόταση 2.1.2 παίρνουμε: $S_{AQR} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} S_{ABR} = 0$.

Άρα τα σημεία A, Q, R συγγραμμικά.

Ακόμη από την πρόταση 2.1.2 παίρνουμε: $S_{PQA} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AR}} S_{AQR} = 0$.

Άρα τα σημεία A, Q, P συγγραμμικά.

Από την πρόταση 2.1.2 πάλι παίρνουμε: $S_{PQR} = \frac{\overline{QR}}{\overline{QA}} S_{PQA} = 0$.

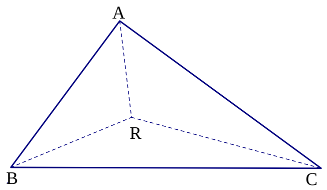
Το επόμενο γεωμετρικό αντικείμενο που θα μελετήσουμε είναι το τρίγωνο. Όπως γνωρίζουμε τρία μη-συγγραμμικά σημεία A, B και C σχηματίζουν **τρίγωνο**, το οποίο συμβολίζεται ως εξής $\triangle ABC$.

Το **εμβαδόν** του $\triangle ABC$ συμβολίζεται ως εξής ∇ABC. Γνωρίζουμε ότι $\nabla ABC = \frac{1}{2}hBC$, όπου h το ύψος του τριγώνου πάνω στην πλευρά BC. Στην μέθοδο των εμβαδών ο παραπάνω τύπος δεν θα θεωρείται ως βασικό στοιχείο, αντίθετα θα χρησιμοποιήσουμε ως βασικές προτάσεις άλλα απλά στοιχεία των εμβαδών. Αν τα σημεία είναι συγγραμμικά τότε το $\triangle ABC$ ονομάζεται **εκφυλισμένο** και ισχύει ότι ∇ABC=0.

Έστω ότι έχω τέσσερα οποιαδήποτε σημεία A, B, C και R πάνω στο επίπεδο, τότε παρατηρούμε ότι σχηματίζονται τέσσερα τρίγωνα $\triangle ABC$, $\triangle RBC$, $\triangle RAB$ και $\triangle RAC$ και το εμβαδόν των τεσσάρων τριγώνων ικανοποιούν εφτά διαφορετικές σχέσεις , οι οποίες εξαρτώνται από την θέση που έχουν μεταξύ τους τα σημεία A, B, C και R.

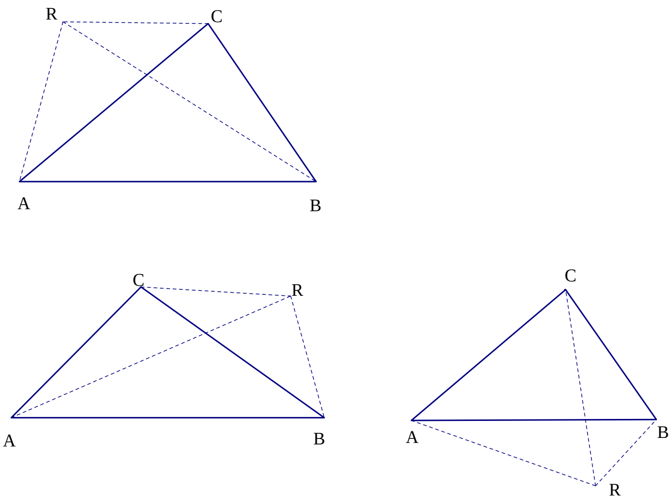
Αν το σημείο R βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ABC, όπως στο παρακάτω σχήμα, θα έχουμε:

∇ABC=∇RAB+∇RBC+∇RCA.



Σχήμα 2.1:

Για τις τρείς παρακάτω περιπτώσεις ομοίως θα έχουμε



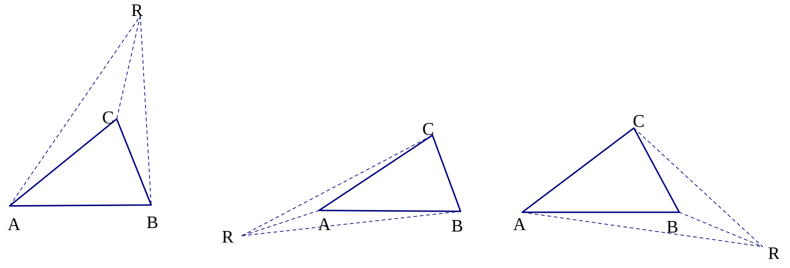
Σχήμα 2.2:

∇ABC=∇RAB+∇RBC-∇RCA, αν $ABCR$ κυρτό τετράπλευρο

∇ABC=∇RBC+∇RCA-∇RAB, αν $ABCR$ κυρτό τετράπλευρο

∇ABC=∇RAB+∇RCA-∇RBC, αν $ABCR$ κυρτό τετράπλευρο

Τώρα για τις τρείς παρακάτω περιπτώσεις θα έχουμε



Σχήμα 2.3:

∇ABC=∇RAB-∇RBC-∇RCA, αν το C εσωτερικό σημείο του $\triangle RAB$

∇ABC=∇RBC-∇RAB-∇RCA, αν το A εσωτερικό σημείο του $\triangle RBC$

∇ABC=∇RCA-∇RBC-∇RAB, αν το B εσωτερικό σημείο του $\triangle RCA$

Η εισαγωγή τώρα της έννοιας του **προσημασμένου εμβαδού** προσανατολισμένου τριγώνου θα μας βοηθήσει να συμπεριλάβουμε και τις εφτά παραπάνω σχέσεις σε μία μόνο σχέση.

Ένα τρίγωνο ABC έχει δυο **προσανατολισμούς**. Αν $A-B-C$ έχει την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού τότε το τρίγωνο ABC έχει θετικό προσανατολισμό, αλλιώς το τρίγωνο ABC έχει αρνητικό προσανατολισμό.

Έτσι λοιπόν, τα τρίγωνα ABC, BCA, CAB έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, ενώ τα τρίγωνα ACB, CBA, BAC έχουν αντίθετο προσανατολισμό.

Το **προσημασμένο εμβαδόν προσανατολισμένου τριγώνου** ABC, συμβολίζεται S_{ABC} και έχει την ίδια απόλυτη τιμή με το ∇ABC και είναι θετικό αν ο προσανατολισμός του τριγώνου είναι θετικός, αλλιώς το S_{ABC} είναι αρνητικό.

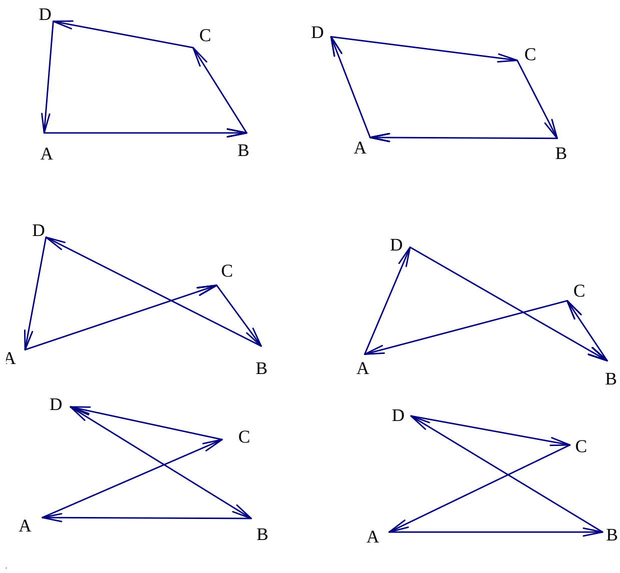
Επομένως θα έχουμε ότι

$$S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB} = -S_{ACB} = -S_{BAC} = -S_{CBA}$$

Τώρα οι εφτά παραπάνω σχέσεις των εμβαδών ABC, RAB, RBC, RCA συνοψίζονται μόνο σε μία

$S_{ABC} = S_{RBC} + S_{RCA} + S_{RAB}$. (I)

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τα **προσανατολισμένα τετραπλευρα.** Δοθέντων τεσσάρων A, B, C, Dσημείων καθορίζουμε το προσανατολισμένο τετράπλευρο $ABCD$,σύμφωνα με την ακόλουθη κατεύθυνση των σημείων $A-B-C-D$. Τα τετράπλευρα $BCDA, CDAB, DABC$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με το τετράπλευρο $ABCD$, επειδή τα σημεία τους ακολουθούν κυκλικές μεταθέσεις.



Σχήμα 2.4:

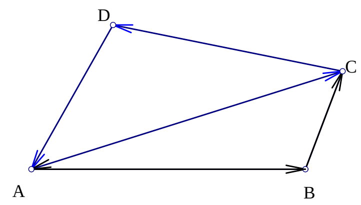
Τέσσερα σημεία μπορούν να ακολουθήσουν έξι, $6 = \frac{4!}{4}$, διαφορετικές διαδρομές, $ABCD, ADCB, ACBD, ADBC, ACDB, ABDC$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το **εμβαδόν προσανατολισμένου τετραπλεύρου** $ABCD$ ως εξής

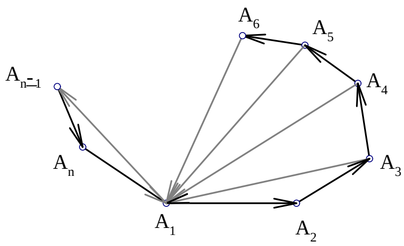
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$.

Γενικά μπορούμε να ορίσουμε το **προσημασμένο εμβαδόν προσανατολισμένου** $n-$**πολυγώνου** $A_1A_2...A_n$ με $n \geq 3$ να είναι:

$S_{A_1A_2...A_n} = \sum_{i=3}^{n} S_{A_1A_{i-1}A_i}$



Σχήμα 2.5:



Σχήμα 2.6:

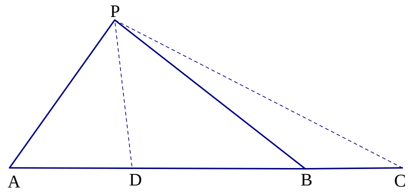
2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Ι

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις έξι προτάσεις που αποτελούν την βάση της μεθόδου των εμβαδών. Την μέθοδο των εμβαδών θα την χρησιμοποιήσουμε και για να αποδείξουμε μερικές από αυτές.

ΠΡΟΤΑΣΗ Β.1

Αν τα σημεία C και D είναι πάνω στην ίδια ευθεία AB με $A \neq B$ και P να είναι οποιοδήποτε σημείο που δεν ανήκει πάνω στην ευθεία AB, τότε:

$\frac{S_{PCD}}{S_{PAB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$



Σχήμα 2.7:

Η απόδειξη της πρότασης είναι προφανής.

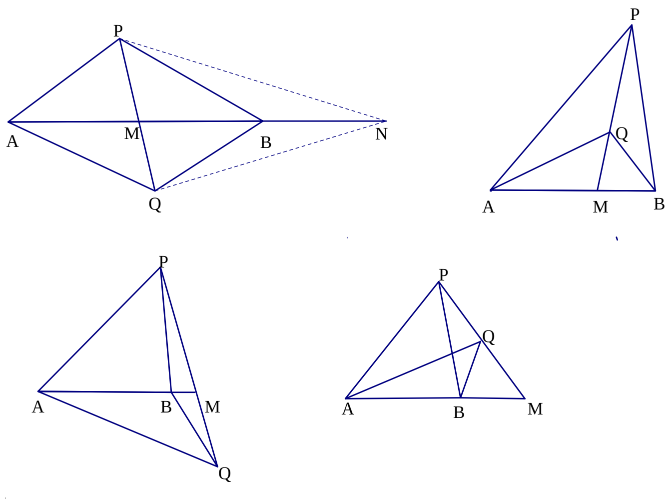
ΠΡΟΤΑΣΗ Β.2 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΠΙΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Έστω M είναι η τομή των ευθειών AB και PQ και $Q \neq M$.

Τότε έχουμε:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}, \ \frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAQB}}, \ \frac{\overline{QM}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{QAB}}{S_{PAQB}}$$

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τέσσερις πιθανές περιπτώσεις εφαρμογής του θεωρήματος των επίπλευρων τριγώνων.



Σχήμα 2.8:

Απόδειξη

Πρώτος τρόπος

Έστω N είναι σημείο πάνω στην ευθεία AB τέτοιο ώστε $\overline{MN} = \overline{AB}$. Τότε με χρήση της πρότασης B.1 (σελίδα 13), θα πάρουμε:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}} = \frac{S_{PMN}}{S_{QMN}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$$

Δεύτερος τρόπος

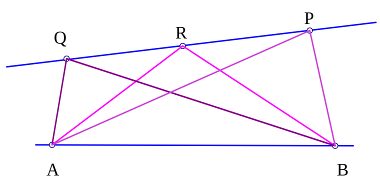
Με χρήση πάλι της πρότασης B.1 (σελίδα 13), θα πάρουμε:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAM}}\frac{S_{PAM}}{S_{QAM}}\frac{S_{QAM}}{S_{QAB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ B.3

Ας είναι $\triangle PAB$ και $\triangle QAB$ δυο τρίγωνα και R σημείο της PQ τέτοιο ώστε $\overline{PR} = t\overline{PQ}$, τότε ισχύει ότι:

$$S_{RAB} = tS_{QAB} + (1-t)S_{PAB}.$$



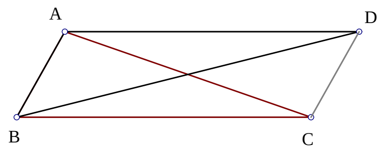
Σχήμα 2.9:

Απόδειξη

Έστω $m = S_{ABPQ}$ τότε $S_{RAB} = m - S_{ARQ} - S_{BPR} = m - (1-t)S_{APQ} - tS_{BPQ} = m - (1-t)(m - S_{PAB}) - t(m - S_{QAB}) = tS_{QAB} + (1-t)S_{PAB}$

ΠΡΟΤΑΣΗ B.4

Ας είναι A, B, C και D τέσσερα σημεία. Τότε $AB \parallel CD$ αν και μόνο αν $S_{ADBC} = 0$ ή $S_{ABC} = S_{ABD}$.



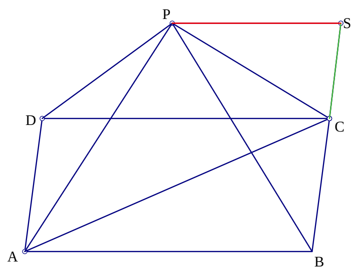
Σχήμα 2.10:

Η απόδειξη της πρότασης είναι προφανής.

ΠΡΟΤΑΣΗ Β.5

Έστω το παραλληλόγραμμο $ABCD$ και P αυθαίρετο σημείο, (Σχήμα 2.8). Τότε $S_{ABC} = S_{PAB} + S_{PCD}$ και $S_{PAB} = S_{PDAC} = S_{PDBC}$

Απόδειξη



Σχήμα 2.11:

Προεκτείνουμε την BC και παίρνουμε σημείο S τέτοιο ώστε η PS να είναι παράλληλη στη CD. Από την πρόταση Β.4 (σελίδα 15), $S_{ABC} = S_{DBC}, S_{PDC} = S_{SDC}$ και $S_{PAB} = S_{SAB} = S_{DBS}$. Οπότε $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{DBS} - S_{DCS} = S_{DBC} = S_{ABC}$. Ο δεύτερος τύπος είναι συνέπεια του πρώτου.

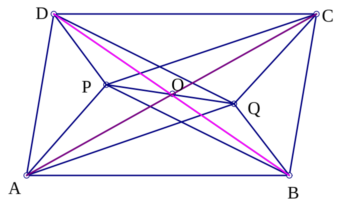
ΠΡΟΤΑΣΗ Β.6

Έστω το παραληλόγραμμο $ABCD$ και P, Q δυο σημεία. Τότε $S_{APQ} +$

$S_{CPQ} = S_{BPQ} + S_{DPQ}$ και $S_{PAQB} = S_{PDQC}$.

Απόδειξη

Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων AC και BD, (Σχήμα 2.10).



Σχήμα 2.12:

Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου γνώριζουμε ότι διχοτομούνται, άρα το O είναι το μέσο του AC και από την πρόταση Β.3 (σελίδα 15) θα πάρουμε:

$S_{OPQ} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} S_{APQ} + \frac{\overline{AO}}{\overline{CA}} S_{CPQ}$

$= \frac{1}{2} S_{APQ} + \frac{1}{2} S_{CPQ}$

Άρα $2S_{OPQ} = S_{APQ} + S_{CPQ}$.

Το O είναι μέσο του BD.

Οπότε ομοίως θα πάρουμε: $2S_{OPQ} = S_{BPQ} + S_{DPQ}$

Καταλήγουμε: $S_{APQ} + S_{CPQ} = S_{BPQ} + S_{DPQ}$

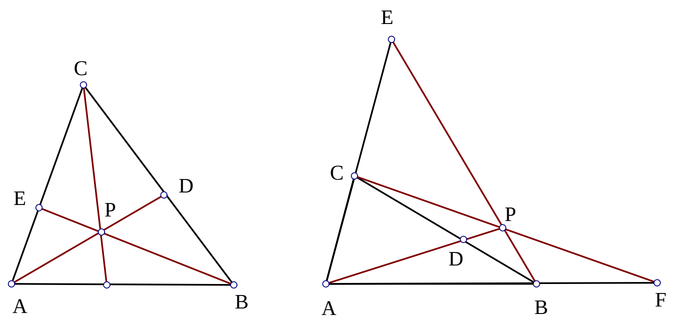
2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CEVA

Έστω τρίγωνο ABC και P τυχόν σημείο του επιπέδου (εντός ή εκτός του τριγώνου). Έστω επίσης D το σημείο τομής των ευθειών AP και CB καθώς και E το σημείο τομής των ευθειών BP και AC και τέλος F το σημείο τομής των ευθειών CP και AB. Τότε ισχύει:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

Απόδειξη



Σχήμα 2.13:

Τα παραπάνω σχήματα δείχνουν μόνο τρείς από τις πιθανές θέσεις του σημείου P. Η χρησιμότητα των προσανατολισμένων εμβαδών στην μέθοδο είναι ότι κάνει την απόδειξη των γεωμετρικών προτάσεων συνοπτική και πιο ακριβής.

Σκοπός μας είναι να απαλείψουμε τα σημεία D, E και F από τους λόγους $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}, \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}, \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$.

Αυτό θα το επιτύχουμε με την εφαρμογή του θεωρήματος των επίπλευρων τριγώνων σε καθένα από τους τρείς λόγους.

Έτσι λοιπόν θα πάρουμε:

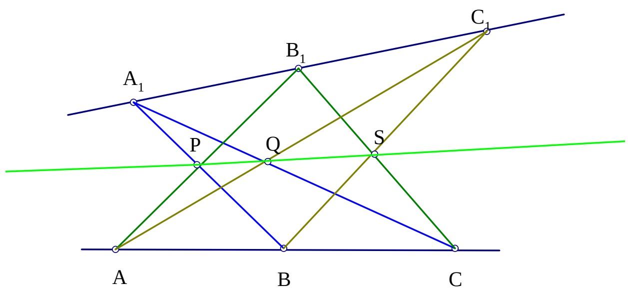
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{S_{APC}}{S_{BCP}}\frac{S_{BPA}}{S_{CAP}}\frac{S_{CPB}}{S_{ABP}} = 1$$

Β.ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ

Έστω τρία σημεία A, B και C πάνω σε μια ευθεία και τρία σημεία A_1, B_1

και C_1 πάνω σε μια άλλη ευθεία. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB_1, A_1B, Q το σημείο τομής των ευθειών AC_1, A_1C και S το σημείο τομής των ευθειών BC_1, B_1C. Τα σημεία P, Q και S είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη



Σχήμα 2.14:

Γενικά ένα πρόβλημα συγγραμμικότητας το μετατρέπουμε σε πρόβλημα λόγων ως εξής:

Έστω X_1 το σημείο τομής των ευθειών PQκαι BC_1 και X_2 το σημείο τομής των ευθειών PQ και B_1C.

Αρκεί να δείξουμε ότι $X_1 = X_2$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την ακόλουθη ισότητα:

$\frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}}\frac{\overline{QX_2}}{\overline{PX_2}} = 1$ (1)

Σκοπός μας είναι να απαλοίψουμε από την σχέση (1) τα σημεία X_1 και X_2 χρησιμοποιώντας το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων. Οπότε θα πάρουμε:

$\frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}}\frac{\overline{QX_2}}{\overline{PX_2}} = \frac{S_{PBC_1}}{S_{QBC_1}}\frac{S_{QCB_1}}{S_{PCB_1}}$ (2)

Τώρα πρέπει να απαλοίψουμε από την σχέση (2) τα σημεία P και Q. Σκοπός μας είναι η τελική μας σχέση να μην περιλαμβάνει σημεία τα οποία κατασκευάστηκαν από τομές ευθειών, αλλά να αποτελείται μόνο από τα αρχικά σημεία επί των ευθειών A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Έτσι λοιπόν με χρήση της πρότασης Β.2 (σελίδα 14), του θεωρήματος δηλαδή των επιπλεύρων τριγώνων, θα πάρουμε:

$$S_{QBC_1} = \frac{\overline{QC_1}}{\overline{AC_1}} S_{ABC_1} = \frac{S_{A_1CC_1} S_{ABC_1}}{S_{ACC_1A_1}}$$

$$S_{PCB_1} = \frac{\overline{PB_1}}{\overline{AB_1}} S_{ACB_1} = \frac{S_{A_1BB_1} S_{ACB_1}}{S_{ABB_1A_1}}$$

$$S_{PBC_1} = \frac{\overline{PB}}{\overline{A_1B}} S_{A_1BC_1} = \frac{S_{ACC_1} S_{A_1CB_1}}{S_{ACC_1A_1}}$$

$$S_{QCB_1} = \frac{\overline{QC}}{\overline{A_1C}} S_{A_1CB_1} = \frac{S_{ABB_1} S_{A_1BC}}{S_{ABB_1A_1}}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη σχέση (2) και εφαρμόζοντας την πρόταση Β.1 (σελίδα 13), θα πάρουμε:

$$\frac{S_{PBC_1}}{S_{QBC_1}} \frac{S_{QCB_1}}{S_{PCB_1}} = \frac{S_{ABB_1}}{S_{ACB_1}} \frac{S_{A_1BC_1}}{S_{A_1BB_1}} \frac{S_{ACC_1}}{S_{ABC_1}} \frac{S_{A_1CB_1}}{S_{A_1CB_1}}$$

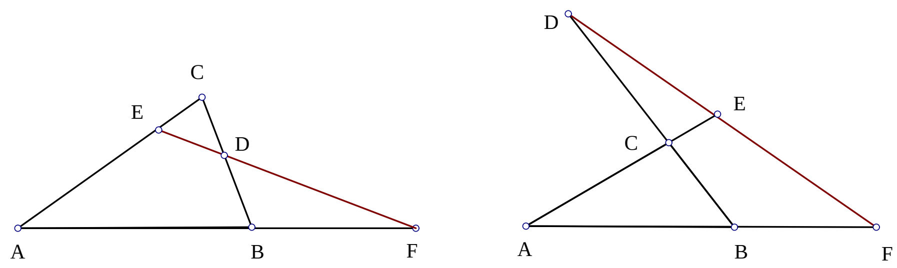
$$= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = 1$$

Γ.ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ

Έστω τρίγωνο ABC. Έστω F, D και E σημεία πάνω στις πλευρές AB, BC και CA αντίστοιχα. Τα σημεία E, F και D είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{S_{APC}}{S_{BCP}} \frac{S_{BPA}}{S_{CAP}} \frac{S_{CPB}}{S_{ABP}} = -1$

Απόδειξη

Η διατέμνουσα μπορεί να περνά από τις δυο πλευρές ενός τριγώνου και από την προέκταση της τρίτης ή να περνά και από τις τρείς προεκτάσεις των πλευρών ενός τριγώνου. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν εξαρτάται από την θέση των σημείων στην σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Το γεγονός αυτό οφειλεται στο ότι η μέθοδος είναι αποκλειστικά αλγεβρική. Έτσι λοιπόν δεν χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την θέση των σημείων και να δώσουμε διαφορετικές αποδείξεις



Σχήμα 2.15:

ανά περίπτωση. Επομένως η ακόλουθη απόδειξη περιλαμβάνει και τις δυο περιπτώσεις.

Αν τα E, F και D είναι συγγραμμικά τότε με χρήση της πρότασης B.1 (σελίδα 13) και B.2 (σελίδα 14), για τους τρείς λόγους θα έχουμε:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}},\ \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{S_{BEF}}{S_{CEF}},\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -\frac{S_{CEF}}{S_{AEF}}$$

Οπότε:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{S_{APC}}{S_{BCP}}\frac{S_{BPA}}{S_{CAP}}\frac{S_{CPB}}{S_{ABP}} = -1$$

Υπάρχουν όμως και άλλες επιλογές τριγώνων που θα μας οδηγούσαν με τη βοήθεια του θεωρήματος των επίπλευρων τριγώνων στην επίλυση του προβλήματος, όπως

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}},\ \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{S_{EBD}}{S_{ECD}},\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -\frac{S_{DEC}}{S_{DEA}}$$

Όπου και πάλι μας δίνει:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$$

Σε ενδεχόμενη αλγοριθμική υλοποίηση της μεθόδου θα πρέπει να προτιμηθεί ο πρώτος τρόπος που στηρίζεται στα αρχικά δεδομένα και δεν χρησιμοποιεί πρόσθετες κατασκευές (σημεία, ευθείες κ.λ.π).

Για την απόδειξη τώρα του αντιστρόφου, έχουμε ότι για τα σημεία E, F, D που βρίσκονται πάνω στις πλευρές AC, AB, BC ισχύει ότι:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι τα E, F και D είναι συγγραμμικά.

Εργαζόμαστε ως εξής:

Υποθέτουμε ότι η EF συναντά την BC στο H, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $D \equiv H$.Ισχύει όμως και για τα σημεία E, F και H ότι:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

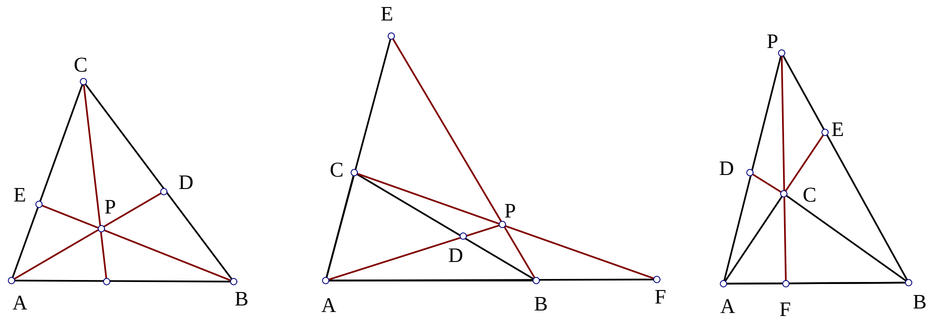
Άρα $D \equiv H$

2.4 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε τις αποδείξεις τριών γεωμετρικών θεωρημάτων, οι οποίες ακολουθούν μια γενική μεθοδολογία. Καθένα από τα θεωρήματα αυτά μπορούν να περιγραφούν σαν μια ακολουθία κατασκευής σημείων και διατύπωσης μιας αριθμητικής σχέσης μεταξύ αυτών των σημείων.

⋆Πριν προχωρίσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου πρέπει να αναφέρουμε ότι πουθενά στην μέθοδο δεν αναφέρονται ευθύγραμμα τμήμματα. Θα δούμε στην συνέχεια και στα παραδείγματα που θα παραθέσουμε ότι στην κατασκευαστική περιγραφή των προτάσεων τα ευθύγραμμα τμήματα ($SEGMENT$) δηλώνονται ως ευθείες ($LINE$). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό οφείλεται αποκλειστικά στη δημιουργία της μεθόδου. Η μέθοδος έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μεταχειρίζεται μόνο ισότητες μεταξύ γεωμετρικών ποσοτήτων και κατά συνέπεια αδυνατεί να επεξεργαστεί ανισωτικές σχέσεις. Έτσι λοιπόν επειδή μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων κυριαρχούν ανισωτικές σχέσεις για τον λόγο αυτό αποφεύγουμε να γράφουμε στην κατασκευαστική περιγραφή της πρότασης: $(SEGMENT\ AB)$.

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ Ceva



Σχήμα 2.16:

P_1. Έστω τέσσερα αυθαίρετα σημεία A, B, C, D

P_2. Έστω D το σημείο τομής των ευθειών AP και CB.

P_3. Έστω E το σημείο τομής των ευθειών BP και AC.

P_4. Έστω F το σημείο τομής των ευθειών CP και AB.

Συμπέρασμα:

$\zeta = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$

Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Εφαρμόζουμε στην προς απόδειξη σχέση και σε κάθε λόγο που συμμετέχει σε αυτήν μια από τις προτάσεις B.1-B.6 (σελίδα 13-16). Έτσι απαλοίφουμε σταδιακά τα σημεία που εισάγουν οι κατασκευές P_2, P_3, P_4 και τα αντικαθιστούμε με τα κατάλληλα εμβαδά τριγώνων.

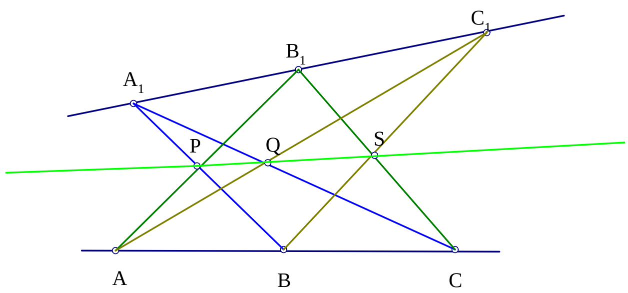
Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας και στις τρείς περιπτώσεις απαλοιφής των σημείων F, E, D, την πρόταση B.2 (σελίδα 14), έχουμε:

Απαλοιφή σημείου F (κατασκευή P_4). $\zeta = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\frac{S_{APC}}{S_{BCP}}$

Απαλοιφή σημείου E (κατασκευή P_3). $\zeta = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\frac{S_{APC}}{S_{BCP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{S_{CPB}}{S_{ABP}}\frac{S_{APC}}{S_{BCP}}$

Απαλοιφή σημείου D (κατασκευή P_2). $\zeta = \frac{S_{BPA}}{S_{CAP}}\frac{S_{CPB}}{S_{ABP}}\frac{S_{APC}}{S_{BCP}} = 1$

B. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ



Σχήμα 2.17:

Το θεώρημα αυτό μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με τις ακόλουθες κατασκευές.

P_1. Έστω τέσσερα αυθαίρετα σημεία A, B, A_1, B_1

P_2. Έστω C σημείο πάνω στην AB.

P_3. Έστω C_1 σημείο πάνω στην A_1B_1.

P_4. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB_1 και A_1B.

P_5. Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών AC_1 και A_1C.

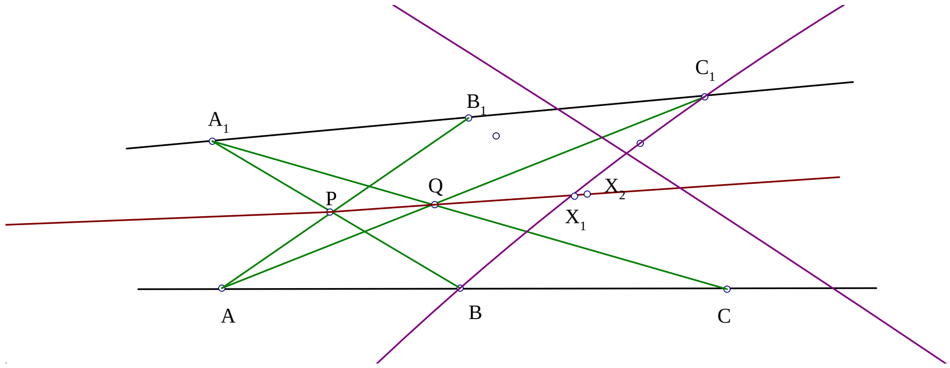
P_6. Έστω S το σημείο τομής των ευθειών BC_1 και B_1C.

P_7. Έστω X_1 το σημείο τομής των ευθειών PQ και BC_1.

P_8. Έστω X_2 το σημείο τομής των ευθειών PQ και B_1C.

Συμπέρασμα:

ζ$= \frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}} \cdot \frac{\overline{QX_2}}{\overline{PX_2}} = 1$



Σχήμα 2.18:

Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Απαλοιφή σημείου X_2 (κατασκευή P_8) Χρήση πρότασης B.2 (σελίδα 14).

ζ$= \frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}} \cdot \frac{\overline{QX_2}}{\overline{PX_2}} = \frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}} \cdot \frac{S_{QCB_1}}{S_{PCB_1}}$

Απαλοιφή σημείου X_1 (κατασκευή P_7) Χρήση πρότασης B.2.

ζ$= \frac{\overline{PX_1}}{\overline{QX_1}} \cdot \frac{S_{QCB_1}}{S_{PCB_1}} = \frac{S_{PBC_1}}{S_{QBC_1}} \cdot \frac{S_{QCB_1}}{S_{PCB_1}}$

Απαλοιφή σημείου S (κατασκευή P_6).

Δεν υπάρχει πουθενά στην τελευταία σχέση γεωμετρική ποσότητα που να περιλαμβάνει το σημείο S. Επομένως η μέθοδος προχωράει στην αμέσως επόμενη απαλοιφή σημείου.

Απαλοιφή σημείου Q (κατασκευή P_5) Χρήση πρότασης B.1 και B.2, (σελίδα 13).

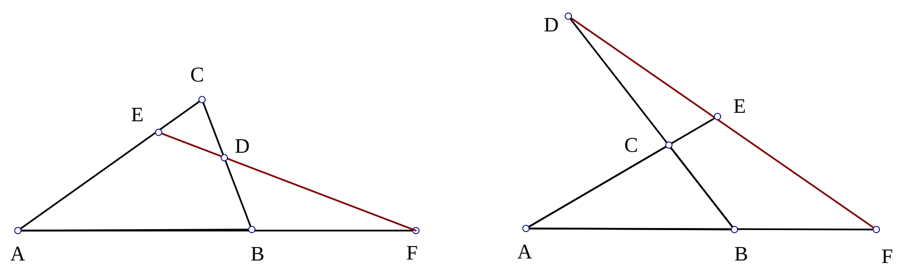
$\zeta = \frac{S_{PBC_1}}{S_{PCB_1}} \cdot \frac{S_{ACC_1}}{S_{A_1CC_1}} \cdot \frac{S_{ACB_1}}{S_{ABC_1}}$

Απαλοιφή σημείου P (κατασκευή P_4) Χρήση πρότασης Β.1 και Β.2.

$\zeta = \frac{S_{ABB_1}}{S_{ACB_1}} \cdot \frac{S_{A_1BC_1}}{S_{A_1BB_1}} \cdot \frac{S_{ACC_1}}{S_{ABC_1}} \cdot \frac{S_{A_1CB_1}}{S_{A_1CC_1}} =$

$= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = 1$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ



Σχήμα 2.19:

Το θεώρημα αυτό μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με τις ακόλουθες κατασκευαστικές προτάσεις.

P_1. Έστω πέντε αυθαίρετα σημεία A, B, C, K, L

P_2. Έστω D το σημείο τομής των BC και KL.

P_3. Έστω E το σημείο τομής των AC και KL

P_4. Έστω F το σημείο τομής των AB και KL.

Συμπέρασμα:

$\zeta = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$

Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας και στις τρείς περιπτώσεις απαλοιφής των σημείων F, E, D, την πρόταση B.2 (σελίδα 14), έχουμε:

Απαλοιφή σημείου F (κατασκευή P_4).

$\zeta = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{S_{AKL}}{S_{BKL}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$

Απαλοιφή σημείου E (κατασκευή P_3).

$\zeta = \frac{S_{AKL}}{S_{BKL}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{S_{AKL}}{S_{BKL}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{S_{CKL}}{S_{AKL}}$

Απαλοιφή σημείου D (κατασκευή P_2).

$\zeta = \frac{S_{AKL}}{S_{BKL}} \cdot \frac{S_{CKL}}{S_{AKL}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{S_{AKL}}{S_{BKL}} \cdot \frac{S_{CKL}}{S_{AKL}} \cdot \frac{S_{BKL}}{S_{CKL}} = 1$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Οι προτάσεις των σημείων τομής του *Hilbert*: C_H.

Προς το παρόν η μέθοδος είναι περιορισμένη στην επίλυση προτάσεων που ανήκουν στην κατηγορία C_H. Οι γεωμετρικές προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία αυτή θα οριστούν παρακάτω, 29.

Για να περιγράψουμε με σαφήνεια τις προτάσεις των σημείων τομής του *Hilbert* χρειαζόμαστε τις έννοιες: γεωμετρικές ποσότητες και κατασκευές.

Οι γεωμετρικές ποσότητες που ανήκουν στην κατηγορία αυτή είναι δυο ειδών: λόγος δυο προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων πάνω σε μια ευθεία ή πάνω σε δυο παράλληλες ευθείες και εμβαδόν προσανατολισμένων τριγώνων ή τετραπλεύρων.

Μια κατασκευή χρησιμοποιείται για να εισάγει ένα νέο σημείο από κάποια ήδη γνωστά σημεία.

Οι κατασκευές έχουν την παρακάτω μορφή:

$\mathbb{K}_1(POINT\ A)$. Έστω ένα αυθαίρετο σημείο A πάνω στο επίπεδο. Το σημείο A είναι ελεύθερο σημείο.

$\mathbb{K}_2(ON-LINE\ A\,X\,Y)$.

Έστω ότι το σημείο A ανήκει πάνω στην ευθεία XY. Το σημείο A είναι ημι-ελεύθερο σημείο.

$\mathbb{K}_3(ON-PLINE\ A\,B\,X\,Y)$.

Έστω ότι το A είναι σημείο πάνω στην ευθεία που περνά από το σημείο B και είναι παράλληλη στην ευθεία XY. Το σημείο A είναι ημι-ελεύθερο σημείο.

$\mathbb{K}_4(LRATIO\ A\,X\,Y\,r)$. Έστω ότι το A είναι σημείο πάνω στην ευθεία XY τέτοιο ώστε $\overline{XA} = r\overline{XY}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο A είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη είναι ημι-ελεύθερο σημείο.

$\mathbb{K}_5(PRATIO\ A\,B\,X\,Y\,r)$. Έστω ότι το σημείο A ανήκει πάνω στην ευθεία που περνάει από το σημείο B και είναι παράλληλη στην ευθεία XY τέτοια ώστε $\overline{BA} = r\overline{XY}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο A είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη είναι ημι-ελεύθερο σημείο.

$\mathbb{K}_6(INTER\ A\,(LINE\ X\,Y)(LINE\ P\,Q))$. Έστω ότι το A είναι το σημείο τομής της ευθείας XY και της ευθείας PQ. Το σημείο A είναι σταθερό σημείο.

$\mathbb{K}_7(INTER\ A\,(LINE\ X\,Y)(PLINE\ W\,P\,Q)))$.

Έστω ότι το A είναι το σημείο τομής των ευθειών XY και της ευθείας που περνά από το σημείο W και είναι παράλληλη στην ευθεία PQ. Το σημείο A είναι σταθερό σημείο.

$\mathbb{K}_8(INTER\ A\,(PLINE\ Z\,X\,Y)(PLINE\ W\,P\,Q)))$. Έστω ότι το A είναι το σημείο τομής της ευθείας που περνά από το σημείο Z και είναι παράλληλη στην ευθεία XY και της ευθείας που περνά από το σημείο W και είναι παράλληλη στην ευθεία PQ. Το σημείο A είναι σταθερό σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1 *Οι προτάσεις των σημείων τομής Hilbert έχουν την παρακάτω μορφή:*

Πρόταση=($K_1, K_2, ..., K_n$, Σ)

Κάθε πρόταση αυτής της κατηγορίας περιγράφεται από ένα πεπερασμένο πλήθος κατασκευών, οι οποίες έχουν την μορφή των κατασκευών $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, ..., \mathbb{K}_8$ (σελίδα 28-28). Οι κατασκευές εντάσσονται κατά διατεταγμένο τρόπο ως εξής: αρχικά εισάγονται οι κατασκευές τύπου K_1, οι οποίες έχουν την μορφή της $\mathbb{K}_1$ και εισάγουν αυθαίρετα σημεία στο επίπεδο. Συνεχίζουμε με την προσθήκη άλλων κατασκευών $K_2, ..., K_n$, οι οποίες έχουν την μορφή των κατασκευών $\mathbb{K}_2, ..., \mathbb{K}_8$.

Καθεμιά από τις παραπάνω κατασκευές εισάγει νέα σημεία που προέρχονται από τομές ευθειών και από λόγους παράλληλων ευθύγραμμων τμημάτων.

Οι ευθείες έχουν κατασκευαστεί από τα σημεία που έχουν εισάγει οι κατασκευές τύπου K_1 και από τα σημεία που έχουν ήδη κατασκευαστεί μέσω των κατασκευών $K_2, ..., K_n$.

Τέλος η πρόταση καταλήγει στο συμπέρασμα (Σ), το οποίο αποτελείται από την ισότητα δυο πολυωνυμικών εκφράσεων γεωμετρικών ποσοτήτων. Το ζητούμενο κάθε φορά είναι η απόδειξη της ισότητας των δυο αυτών πολυωνυμικών εκφράσεων. Οι γεωμετρικές αυτές ποσότητες περιλαμβάνουν σημεία που έχουν εισαχθεί από τις κατασκευές $K_i, i = 1, ..., n$.

Οι γεωμετρικές ιδιότητες που καλούμαστε να δείξουμε πως έχουν οι παραπάνω γεωμετρικές ποσότητες είναι η συγγραμμικότητα, η παραλληλία καθώς και σχέσεις μεταξύ λόγων ευθυγράμμων τμημάτων.

Όλα τα παραδείγματα που δόθηκαν προηγουμένως ανήκουν στην κατηγορία C_H. Παρατηρούμε ότι οι αποδείξεις των παραδειγμάτων πρέπει να εξασφαλίζουν ότι πουθενά μέσα στην πρόταση δεν παρουσιάζονται μηδενικοί παρονομαστές, επειδή αλλιώς η επίλυση της πρότασης θα αποτύγχανε. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μέχρι τώρα απουσία περιοριστικών συνθηκών στην περιγραφή της πρότασης. Γενικά ένα γεωμετρικό θεώρημα είναι αληθές μόνο κάτω από κάποιες περιοριστικές συνθήκες. Τώρα για τις προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C_H οι περιοριστικές συνθήκες παράγονται με συστηματικό τρόπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.2 *Έστω πρόταση Π=($K_1, K_2, ..., K_n$, Σ), τότε οι περιοριστικές συνθήκες για να είναι η Π πρόταση της κατηγορίας C_H είναι οι ακόλουθες.*

1. Αν K_i είναι η κατασκευή $\mathbb{K}_1$ (σελίδα 28), τότε δεν χρειάζονται περιοριστικές συνθήκες.

2. Αν K_i είναι μια από τις κατασκευές $\mathbb{K}_2, ..., \mathbb{K}_5$ (σελίδα 28-28), τότε οι περιοριστικές συνθήκες για την K_i είναι $X \neq Y$.

3. Αν K_i είναι μια από τις κατασκευές $\mathbb{K}_6, ..., \mathbb{K}_8$ (σελίδα 28), τότε οι περιοριστικές συνθήκες για την K_i είναι $XY \nparallel PQ$.

4. Για το συμπέρασμα (Σ) απαιτούμε οι παρονομαστές των γεωμετρικών ποσοτήτων να μην είναι μηδέν.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.Για το θεώρημα του $CEVA$ (σελίδα 23): $F \neq B, D \neq C, E \neq A, C \neq B, C \neq A, A \neq B$.

2.Για το θεώρημα του ΠΑΠΠΟΥ (σελίδα 24): $A \neq B, C \neq D, AB_1 \nparallel A_1B, AC_1 \nparallel A_1C, PQ \nparallel BC_1, PQ \nparallel B_1C, Q \neq X_1, P \neq X_2$.

3.Για το θεώρημα του ΜΕΝΕΛΑΟΥ (σελίδα 26): $F \neq B, D \neq C, E \neq A, A \neq C, B \neq C, DE \nparallel AB$.

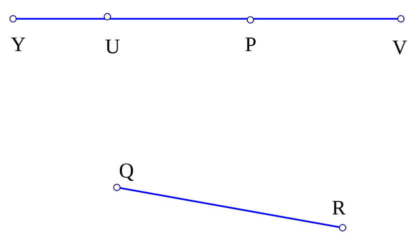
Το μοναδικό που απομένει για να περιγράψουμε τη μέθοδο είναι να δώσουμε κάποιες τεχνικές απαλοιφής σημείων από τα εμβαδά και από τους λόγους μηκών καθώς και την τεχνική απαλοιφής σημείων που βρίσκονται πάνω σε δυο ευθείες.

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΜΗΚΩΝ

Οι τεχνικές απαλοιφής σημείων μέσω του λόγου μηκών καθώς και μέσω των εμβαδών, όπως θα δούμε παρακάτω, περιλαμβάνουν μια γεωμετρική ποσότητα Γ και μια κατασκευή Κ.

ΛΗΜΜΑ 2.4.3 *Αν* $\Gamma=\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K=(LRATIO\ Y\ U\ V\ t)$ *με περιοριστική συνθήκη* $U \neq V$.

Αν το σημείο P βρίσκεται πάνω στην ευθεία UV τότε:



Σχήμα 2.20:

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{PU}+\overline{UY}}{\overline{QR}} = \frac{\frac{\overline{PU}}{\overline{UV}}+\frac{\overline{UY}}{\overline{UV}}}{\frac{\overline{QR}}{\overline{UV}}} =$$

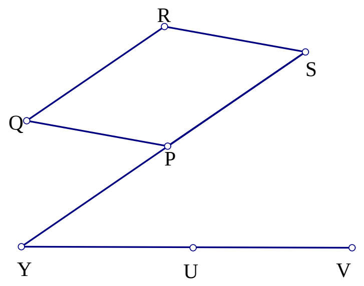
$$=\frac{\frac{\overline{PU}}{\overline{UV}}+t}{\frac{\overline{QR}}{\overline{UV}}}.$$

Αν το σημείο P δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία UV τότε:

παίρνουμε σημείο S τέτοιο ώστε $\overline{PS} = \overline{QR}$, οπότε το Y θα είναι το σημείο τομής των PS και UV και $PS \parallel QR$.

Από την πρόταση Β.2 (σελίδα 14) και Β.6 (σελίδα 16) παίρνουμε:

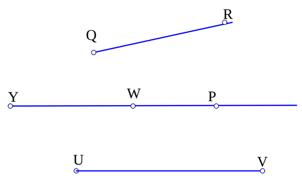
$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PS}} = \frac{S_{PUV}}{S_{PUSV}} = \frac{S_{PUV}}{S_{QURV}}$$



Σχήμα 2.21:

ΛΗΜΜΑ 2.4.4 *Αν* $\Gamma = \frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K = (ON - LINE\ Y\ U\ V)$ *με περιοριστική συνθήκη* $U \neq V$. *Αν θέσουμε* $t = \frac{\overline{UY}}{\overline{UV}}$ *τότε έχουμε το παραπάνω λήμμα.*

ΛΗΜΜΑ 2.4.5 *Αν* $\Gamma = \frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K = (PRATIO\ Y\ W\ U\ V\ t)$ *με περιοριστική συνθήκη* $U \neq V$.



Σχήμα 2.22:

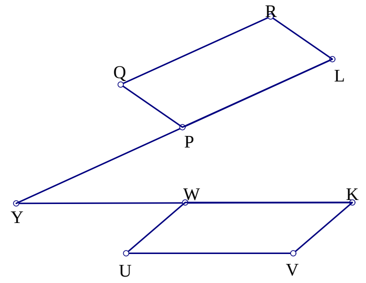
Αν το σημείο P βρίσκεται πάνω στη WY τότε προκύπτει πολύ εύκολα ότι:

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \frac{\frac{\overline{PW}}{\overline{UV}} + t}{\frac{\overline{QR}}{\overline{UV}}}.$$

Αν το σημείο P δεν βρίσκεται πάνω στη WY τότε:

παίρνουμε σημεία K και L τέτοια ώστε $\frac{\overline{WK}}{\overline{UV}} = 1$ και $\frac{\overline{PL}}{\overline{QR}} = 1$. Από την πρόταση B.2 (σελίδα 14) έχουμε

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PL}} = \frac{S_{PWK}}{S_{PWKL}} = \frac{S_{PUWV}}{S_{QURV}}$$



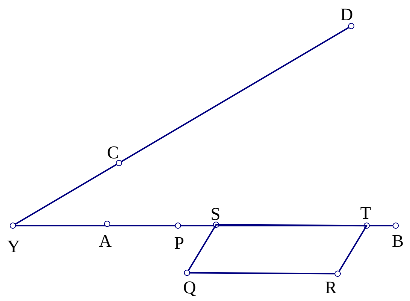
Σχήμα 2.23:

ΛΗΜΜΑ 2.4.6 *Αν* $\Gamma=\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K=(ON-PLINE\ Y\ U\ V)$ *με περιοριστική συνθήκη* $U \neq V$.

Αν θέσουμε $t=\frac{\overline{WY}}{\overline{UV}}$ τότε έχουμε το παραπάνω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.4.7 *Αν* $\Gamma=\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K=(INTER\ Y\ (LINE\ A\ B)(LINE\ C\ D))$ *με περιοριστική συνθήκη* $AB \nparallel CD$.

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}=\begin{cases}\frac{S_{PCD}}{S_{QCRD}}, & \text{αν } P\notin CD\cdot\\ \frac{S_{PAB}}{S_{QARB}}, & \text{αν } P\notin AB\cdot\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$



Σχήμα 2.24:

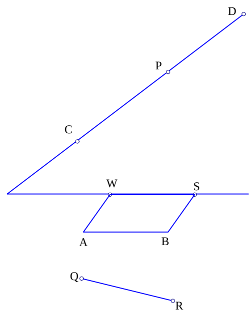
Αν το P δεν είναι πάνω στην ευθεία CD, πάρε δυο σημεία S και T πάνω στο PY τέτοια ώστε $\overline{ST} = \overline{QR}$, τότε το Y είναι η τομή των ST και CD. Από την πρόταση B.2 (σελίδα 14), έχουμε: $\frac{\overline{PY}}{\overline{ST}} = \frac{S_{PCD}}{S_{SCTD}}$.

Επειδή $PY \parallel QR$ από την πρόταση B.6 (σελίδα 16), έχουμε: $S_{SCTD} = S_{QCRD}$. Ακόμα επειδή το P δεν ανήκει στην ευθεία CD και $ST \parallel QR$, έχουμε: $QR \nparallel CD$. Από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) παίρνουμε: $S_{QCRD} \neq 0$. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται όμοια.

ΛΗΜΜΑ 2.4.8 *Αν Γ=*$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K{=}(INTER\ Y\ (LINE\ C\ D)(PLINE\ W\ A\ B))$ *με περιοριστική συνθήκη* $AB \nparallel CD$.

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \begin{cases} \frac{S_{PCD}}{S_{QCRD}}, & \text{αν } P \notin CD\cdot \\ \frac{S_{PAWB}}{S_{QARB}}, & \text{αν } P \in CD \text{ και } P \neq Y\ \cdot \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν το P δεν ανήκει στην ευθεία CD, τότε η απόδειξη είναι ίδια με το λήμμα 2.4.7 (σελίδα 33).

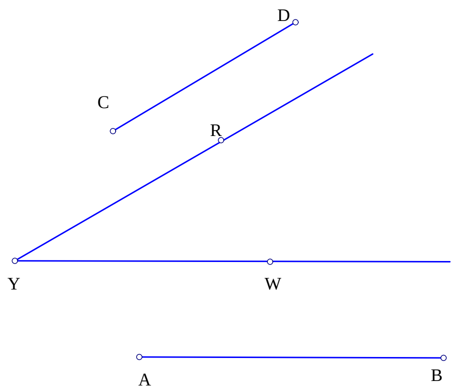


Σχήμα 2.25:

Αν το P ανήκει πάνω στην ευθεία CD, τότε διαλέγουμε σημείο S πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο W τέτοιο ώστε $\overline{WS} = \overline{AB}$. Από το λήμμα 2.4.7 (σελίδα 33), έχουμε $\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \frac{S_{PWS}}{S_{QWRS}}$. Από την πρόταση B.5 (σελίδα 16), παίρνουμε $S_{PWS} = S_{PAB} - S_{WAB} = S_{PAWB}$. Αφού $\overline{WS} = \overline{AB}$, από την πρόταση B.6 (σελίδα 16), παίρνουμε $S_{QWRS} = S_{QARB}$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. Επειδή $AB \nparallel CD$, έχουμε $S_{QARB} \neq 0$.

ΛΗΜΜΑ 2.4.9 *Αν Γ=*$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}}$ *και* $K{=}(INTER\ Y(PLINE\ R\ C\ D)(PLINE\ W\ A\ B))$ *με περιοριστική συνθήκη* $AB \nparallel CD$.

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{QR}} = \begin{cases} \frac{S_{PWAB}}{S_{QCRD}}, & \text{αν } QR \nparallel AB\cdot \\ \frac{S_{PCRD}}{S_{QCRD}}, & \text{αλλιώς}\cdot \end{cases}$$



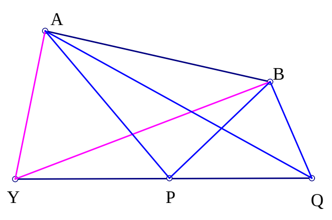
Σχήμα 2.26:

Αυτό το λήμμα αποδεικνύεται όμοια με το λήμμα 2.4.8 (σελίδα 34).

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

ΛΗΜΜΑ 2.4.10 *Αν Γ=S_{ABY} και Κ=(LRATIO Y P Q t) με περιοριστική συνθήκη $P \neq Q$.*

$$S_{ABY} = tS_{ABQ} + (1-t)S_{ABP}$$



Σχήμα 2.27:

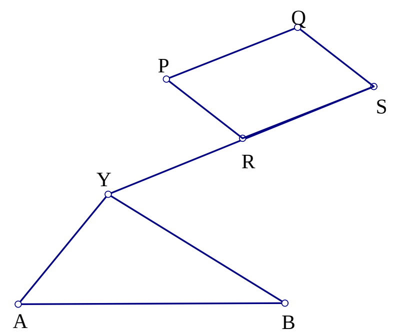
Η απόδειξη της πρότασης είναι πολύ εύκολη. Εφαρμόζουμε την πρόταση Β.3 (σελίδα 15).

ΛΗΜΜΑ 2.4.11 *Αν Γ=S_{ABY} και Κ=$(ON-LINE\ Y\ P\ Q)$ με περιοριστική συνθήκη $P \neq Q$.*

Αν επιλέξουμε $t = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}$ τότε έχουμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με την παραπάνω περίπτωση.

ΛΗΜΜΑ 2.4.12 *Αν Γ=S_{ABY} και Κ=$(PRATIO\ Y\ R\ P\ Q\ t)$ με περιοριστική συνθήκη $P \neq Q$.*

$S_{ABY} = S_{ABR} + tS_{APBQ}$



Σχήμα 2.28:

Για να αποδείξουμε την περίπτωση αυτή κάνουμε την παρακάτω διαδικασία. Παίρνουμε ένα σημείο S τέτοιο ώστε $\overline{RS} = \overline{PQ}$. Από το λήμμα 2.4.10 (σελίδα 35), παίρνουμε $S_{ABY} = tS_{ABS} + (1-t)S_{ABR}$.

Από την πρόταση B.6 (σελίδα 16), παίρνουμε $S_{ABS} = S_{ABR} + S_{ABQ} - S_{ABP} = S_{ABR} + S_{APBQ}$.

Με μια απλή αντικατάσταση παίρνουμε το ζητούμενο.

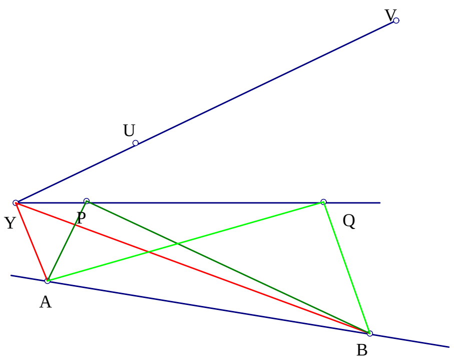
ΛΗΜΜΑ 2.4.13 *Αν Γ=S_{ABY} και Κ=$(ON-PLINE\ Y\ R\ P\ Q)$ με περιοριστική συνθήκη $P \neq Q$.*

Αν επιλέξουμε $t = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}$ τότε έχουμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με το παραπάνω λήμμα.

Αποδεικνύεται όμοια με το παραπάνω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.4.14 *Αν* Γ=S_{ABY} *και* K=$(INTER\ Y\ (LINE\ P\ Q)(LINE\ U\ V))$ *με περιοριστική συνθήκη* $PQ \nparallel UV$.

$S_{ABY} = \frac{1}{S_{PUQV}}(S_{PUV}S_{ABQ} + S_{QVU}S_{ABP})$



Σχήμα 2.29:

Για την απόδειξη της πρότασης αυτής παίρνουμε:

$t = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}$ τότε $1 - t = \frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}$

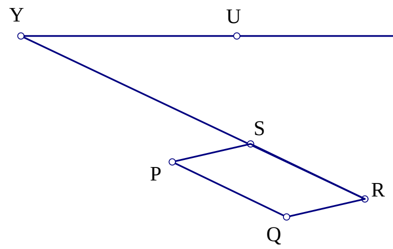
Από την πρόταση Β.3 (σελίδα 15), έχουμε: $S_{ABY} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}S_{ABQ} + \frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}S_{ABP}$

Από την πρόταση Β.2 (σελίδα 14), έχουμε: $\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{PUV}}{S_{PUQV}}, \frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{QVU}}{S_{PUQV}}$
Επειδή $PQ \nparallel UV$ έχουμε ότι $S_{PUQV} \neq 0$

Με μια απλή αντικατάσταση παίρνουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2.4.15 *Αν* Γ=S_{ABY} *και* K=$(INTER\ Y(LINE\ U\ V)(PLINE\ R\ P\ Q))$ *με περιοριστική συνθήκη* $PQ \nparallel UV$.

$S_{ABY} = \frac{1}{S_{PUQV}}(S_{PUQR}S_{ABV} + S_{PRQV}S_{ABU})$



Σχήμα 2.30:

Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή παίρνουμε σημείο S τέτοιο ώστε $\overline{RS} = \overline{PQ}$. Τότε από το λήμμα 2.4.14 (σελίδα 37) έχουμε $\frac{1}{S_{RUSV}}(S_{USR}S_{ABV}+ S_{VRS}S_{ABU})$.

Έχουμε επίσης τα ακόλουθα:

από την πρόταση B.6 (σελίδα 16): $S_{RUSV} = S_{PUQV}$

από την πρόταση B.5 (σελίδα 16): $S_{USR} = S_{UQP} - S_{RQP} = S_{PUQR}$

από την πρόταση B.5: $S_{VSR} = S_{VQP} - S_{RPQ} = S_{PRQV}$

Με μια απλή αντικατάσταση παίρνουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2.4.16 *Αν* Γ=S_{ABY} *και* K=$(INTER\ Y(PLINE\ W\ U\ V)(PLINE\ R\ P\ Q))$ *με περιοριστική συνθήκη* $PQ \not\parallel UV$.

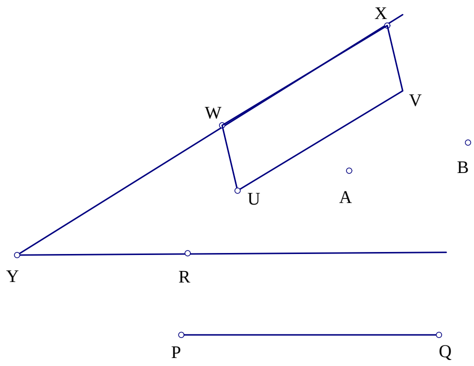
$S_{ABY} = \frac{S_{PWQR}}{S_{PUQV}}S_{AUBV} + S_{ABW}$

Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή παίρνουμε σημείο X τέτοιο ώστε $\overline{WX} = \overline{UV}$. Τότε από το λήμμα 2.4.15 (σελίδα 37) έχουμε $\frac{1}{S_{PWQX}}(S_{PWQR}S_{ABX}+ S_{PRQX}S_{ABW})$.

Έχουμε από την πρόταση B.6 (σελίδα 16):

$S_{PWQX} = S_{PUQV}$

$S_{ABX} = S_{ABW} + S_{ABV} - S_{ABU} = S_{ABW} + S_{AUBV}$



Σχήμα 2.31:

$S_{PRQX} = S_{PRQ} + S_{PQX} = S_{PRQ} + S_{PQW} + S_{PQV} - S_{PQU} = -S_{PWQR} + S_{PUQV}$

Με μια απλή αντικατάσταση παίρνουμε το ζητούμενο.

Μένει τώρα να εξετάσουμε την περίπτωση:

Αν Γ=S_{ABY} και Κ=$(POINT\ Y)$.

Αυτή η περίπτωση θα αναλυθεί με την βοήθεια της παρακάτω ενότητας (βλ. λήμμα 2.5.3 σελίδα 41).

2.5 ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

Σκοπός μας για τις γεωμετρικές προτάσεις Π=$(K_1, K_2, ..., K_n,\ \Sigma)$ που ανήκουν στην κατηγορία C_H, είναι να απαλοίψουμε όλα τα βοηθητικά σημεία έτσι ώστε οι νέες γεωμετρικές ποσότητες που θα προκύψουν να περιέχουν μόνο ελεύθερα σημεία. Οι γεωμετρικές αυτές ποσότητες δεν είναι γενικά ανεξάρτητες, αφου για παράδειγμα αν για οποιαδήποτε τέσσερα σημεία A, B, C, D πάρουμε το S_{ABC}, τότε αυτό, σύμφωνα με όσα ήδη έχουμε αναφέρει στην αρχή, θα ισούται με

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} + S_{DBC}.$$

Είναι ανάγκη επομένως οι τελικές γεωμετρικές ποσότητες να εκφραστούν συναρτήσει κάποιων ανεξάρτητων μεταβλητών. Για να το επιτύχουμε χρειαζόμαστε την έννοια των εμβαδικών συντεταγμένων.

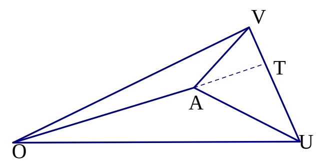
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.1 *Έστω ότι A, O, U, V είναι τέσσερα σημεία τέτοια ώστε τα O, U, V να μην είναι συγγραμμικά. Οι εμβαδικές συντεταγμένες για το σημείο A ως προς το OUV θα είναι:*

$x_A = \frac{S_{OUA}}{S_{OUV}}$

$y_A = \frac{S_{OAV}}{S_{OUV}}$

$z_A = \frac{S_{AUV}}{S_{OUV}}$

Είναι φανερό ότι $x_A + y_A + z_A = 1$.



Σχήμα 2.32:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5.2 *Τα σημεία του επιπέδου είναι σε ένα προς ένα αντιστοχία με τα σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν την σχέση $x + y + z = 1$.*

Απόδειξη

Έστω O, U, V είναι τρία μη-συγγραμμικά σημεία. Τότε για κάθε σημείο A, οι εμβαδικές συντεταγμένες θα ικανοποιούν την σχέση $x_A + y_A + z_A = 1$.

Αντίστροφα, για οποιαδήποτε x, y και z τέτοια ώστε: $x + y + z = 1$ μπορούμε να βρούμε σημείο A του οποίου οι εμβαδικές συντεταγμένες θα είναι οι x, y και z.

Αν $z = 1$, πάρε σημείο A τέτοιο ώστε $x = \frac{\overline{OA}}{\overline{UV}}$.

Τότε από το λήμμα 2.4.12 (σελίδα 36), παίρνουμε:

$x_A = \frac{S_{OUA}}{S_{OUV}}, y_A = -x = y$ και $z_A = 1$.

Αν $z \neq 1$, πάρε σημείο B πάνω στην UV τέτοιο ώστε $\frac{x}{1-z} = \frac{\overline{UB}}{\overline{UV}}$.

Παίρνουμε σημείο B πάνω στην OB τέτοιο ώστε $z = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$.

Από το θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων έχουμε:

$z_A = \frac{S_{AUV}}{S_{OUV}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = z$

$x_A = \frac{S_{OUA}}{S_{OUV}} = (1-z)\frac{S_{OUB}}{S_{OUV}} = x\frac{S_{OUV}}{S_{OUV}} = x$

όμοια $y_A = y$.

Το λήμμα που ακολουθεί εκφράζει το εμβαδόν ελεύθερων σημείων συναρτήσει των εμβαδικών συντεταγμένων και των τριών ελεύθερων σημείων ως προς τα τρία σημεία αναφοράς που επιλέξαμε.

ΛΗΜΜΑ 2.5.3 *Αν Γ(Y)=*S_{ABY} *και K=(POINT Y).*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε υποθέσει ότι όλα τα ελεύθερα σημεία της πρότασης Π έχουν εισαχθεί στην αρχή της πρότασης. Για να χρησιμοποιούμε το λήμμα αυτό, υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα ελεύθερα σημεία O, U, V και Y στην πρόταση Π. Τα σημεία O, U, V θα είναι τα σημεία αναφοράς.

Το λήμμα αυτό εκφράζει το εμβαδόν ελεύθερων σημείων σε μια σχέση που περιλαμβάνει τις εμβαδικές συντεταγμένες και των τριών ελεύθερων σημείων ως προς τα σημεία αναφοράς.

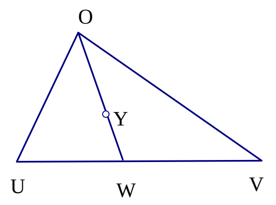
$$S_{ABY} = \frac{1}{S_{OUV}} \begin{vmatrix} S_{OUA} & S_{OVA} & 1 \\ S_{OUB} & S_{OVB} & 1 \\ S_{OUY} & S_{OVY} & 1 \end{vmatrix}$$

Ισοδύναμα γράφεται:

$S_{ABY} = \frac{1}{S_{OUV}}(S_{OAUB}S_{OVY} + S_{OBVA}S_{OUY}) + S_{OAB}$.

Η περιοριστική συνθήκη της περίπτωσης αυτής είναι ότι τα σημεία O, U, V δεν είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη



Σχήμα 2.33:

Όπως είχαμε αποδείξει στην αρχή της ενότητας 2.1, για τέσσερα ελεύθερα σημεία A, B, Y, O ισχύει $S_{ABY} = S_{ABO} + S_{AOY} + S_{OBY}$ δηλαδή $S_{ABY} = S_{OAB} + S_{OBY} - S_{OAY}$.

Τώρα χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο τα S_{OBY} και S_{OAY}.

Παίρνουμε W να είναι το σημείο τομής των UV και OY.

Τότε από το λήμμα 2.4.14 (σελίδα 37) έχουμε:

$S_{OBW} = \frac{1}{S_{OUYV}}(S_{OBV}S_{OUY} + S_{OBU}S_{OYV})$.

Από την βασική πρόταση B.2 (σελίδα 14) παίρνουμε: $\frac{S_{OBY}}{S_{OBW}} = \frac{S_{OUYV}}{S_{OUV}}$.

Επομένως έχουμε: $S_{OBY} = \frac{1}{S_{OUV}}(S_{OBV}S_{OUY} + S_{OBU}S_{OYV})$ (1)

Αν τώρα $OY \parallel UV$, η παραπάνω απόδειξη αποτυγχάνει. Παρόλο αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε την (1) ως εξής:

Επειδή $OY \parallel UV$, $S_{OUY} = S_{OVY} = -S_{OYV}$.

Η (1) γίνεται: $S_{OBY} = \frac{1}{S_{OUV}} S_{OUY}(S_{OBV} - S_{OBU}) = \frac{S_{OUY}}{S_{OUV}} S_{OUBV}$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\frac{S_{OBY}}{S_{OUY}} = \frac{S_{OUBV}}{S_{OUV}}$.

Αν $OY \parallel BU$, τότε και οι δυο μεριές του παραπάνω τύπου ισούνται με την μονάδα.

Αν OY και BU τέμνονται στο σημείο M, τότε από τις προτάσεις B.1, B.2 (σελίδα 14), B.3 (σελίδα 15) παίρνουμε:

$\frac{S_{OBY}}{S_{OUY}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{UM}} = \frac{S_{VBM}}{S_{VUM}} = \frac{S_{VBU} - S_{VMU}}{S_{VUO}} = \frac{S_{VBU} - S_{VOU}}{-S_{OUV}} = \frac{S_{OUBV}}{S_{OUV}}$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι η (1) είναι αληθής κάτω από την συνθήκη ότι τα O, U, V δεν είναι συγγραμμικά.

Όμοια έχουμε: $S_{OAY} = \frac{1}{S_{OUV}}(S_{OAV} S_{OUY} + S_{OAU} S_{OYV})$ (2)

Αντικαθιστώντας την (1) και (2) στην $S_{ABY} = S_{OAB} + S_{OBY} - S_{OAY}$ και σημειώνοντας ότι $S_{OAU} - S_{OBU} = S_{OAUB}$ και $S_{OBV} - S_{OAV} = S_{OBVA}$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω τραπέζιο $ABCD$. Η παράλληλη προς τη βάση του τραπεζίου τέμνει τις δυο πλευρές του και τις διαγωνίους του στα σημεία H, G, F και E. Ισχύει ότι:

$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{HG}}{\overline{AB}}$.

Μπορούμε να περιγράψουμε την πρόταση ως εξής:

$K_1 : (POINT\, A)$ Έστω αυθαίρετο σημείο A.

$K_2 : (POINT\, B)$ Έστω αυθαίρετο σημείο B.

$K_3 : (POINT\, C)$ Έστω αυθαίρετο σημείο C.

$K_4 : (ON - PLINE\ D\, C\, A\, B)$ Έστω D σημείο πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το C και είναι παράλληλη στην ευθεία AB.

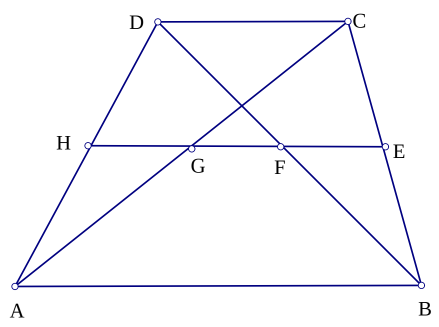
$K_5 : (ON - LINE\ E\, B\, C)$ Έστω E σημείο πάνω στην ευθεία BC.

$K_6 : (INTER\ H\, (LINE\ A\, D)(PLINE\ E\, A\, B))$ Έστω H το σημείο τομής των ευθειών AD και της ευθείας που περνά από το σημείο E και είναι παράλληλη στην AB.

$K_7 : (INTER\ F\, (LINE\ B\, D)(LINE\ E\, H))$ Έστω F το σημείο τομής των ευθειών BD και EH.

$K_8 : (INTER\ G\, (LINE\ A\, C)(LINE\ E\, F))$ Έστω G το σημείο τομής των ευθειών AC και EF.

Συμπέρασμα: $\frac{\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}}{\frac{-\overline{HG}}{\overline{AB}}} = 1$



Σχήμα 2.34:

Η απόδειξη πραγματοποιείται ως εξής:

Απαλοιφή σημείου G (Κατασκευή K_8)(Χρήση λήμματος 2.4.7 (σελίδα 33): $\frac{\overline{HG}}{\overline{AB}} = \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}$)

$$\frac{\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}}{\frac{-\overline{HG}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} \frac{S_{ABC}}{-S_{ACH}}$$

Απαλοιφή σημείου F (Κατασκευή K_7)(Χρήση λήμματος 2.4.7: $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{S_{BDE}}{S_{ABD}}$)

$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} \frac{S_{ABC}}{-S_{ACH}} = \frac{S_{BDE}S_{ABC}}{-S_{ACH}S_{ABD}}$

Απαλοιφή σημείου H (Κατασκευή K_6)(Χρήση λήμματος 2.4.15 (σελίδα 37): $S_{ACH} = \frac{S_{ACD}S_{ABE}}{S_{ABD}}$)

$\frac{S_{BDE}S_{ABC}}{-S_{ACH}S_{ABD}} = \frac{-S_{BDE}S_{ABC}(-S_{ABD})}{-S_{ACD}S_{ABE}S_{ABD}} = \frac{-S_{BDE}S_{ABC}}{S_{ACD}S_{ABE}}$

Απαλοιφή σημείου E (Κατασκευή K_5)(Χρήση πρότασης B.2 (σελίδα 14): $S_{ABE} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} S_{ABC}, S_{BDE} = -(S_{BCD}\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}})$)

$\frac{-S_{BDE}S_{ABC}}{S_{ACD}S_{ABE}} = \frac{-(-S_{BCD}\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}})S_{ABC}}{S_{ACD}S_{ABC}\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}} = \frac{S_{BCD}}{S_{ACD}}$

Απαλοιφή σημείου D (Κατασκευή K_4)(Χρήση πρότασης B.2: $S_{ACD} = -(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} S_{ABC}), S_{BCD} = -(S_{ABC}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}})$)

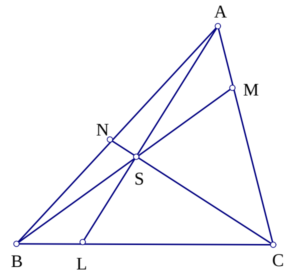
$\frac{S_{BCD}}{S_{ACD}} = \frac{-S_{ABC}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}}{-S_{ABC}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}} = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αν το τρίγωνο LMN είναι το τρίγωνο του *Ceva* ως προς το σημείο S του τριγώνου ABC, τότε ισχύει ότι: $\frac{S_{AML}S_{BNM}S_{CLN}}{S_{ANL}S_{BLM}S_{CNM}} = 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Έστω ABC τρίγωνο και S το σημείο τομής των ευθειών που ενώνουν τις κορυφές του τριγώνου με τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι των κορυφών. Έστω M το σημείο τομής των ευθειών BS και AC, L το σημείο τομής των ευθειών AS και BC και N το σημείο τομής των ευθειών CS και AB, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ML ονομάζεται **ευθύγραμμο τμήμα του Ceva** και το τρίγωνο MLN ονομάζεται **τρίγωνο του Ceva** ως προς το σημείο S για το τρίγωνο ABC.

Μπορούμε να περιγράψουμε την πρόταση ως εξής:



Σχήμα 2.35:

$K_1 : (POINT\, A)$ Έστω αυθαίρετο σημείο A.

$K_2 : (POINT\, B)$ Έστω αυθαίρετο σημείο B.

$K_3 : (POINT\, C)$ Έστω αυθαίρετο σημείο C.

$K_4 : (POINT\, S)$ Έστω αυθαίρετο σημείο S.

$K_5 : (INTER\ L\,(LINE\ B\,C)(LINE\ S\,A))$ Έστω L το σημείο τομής των ευθειών BC και SA.

$K_6 : (INTER\ M\,(LINE\ A\,C)(LINE\ S\,B))$ Έστω M το σημείο τομής των ευθειών AC και SB.

$K_7 : (INTER\ N\,(LINE\ A\,B)(LINE\ S\,C))$ Έστω N το σημείο τομής των ευθειών AB και SC.

Συμπέρασμα: $\frac{S_{AML}S_{BNM}S_{CLN}}{S_{ANL}S_{BLM}S_{CNM}} = 1$

Η απόδειξη πραγματοποιείται με εφαρμογή του λήμματος 2.4.14 (σελίδα 37) και στις τρείς περιπτώσεις απαλοιφής βοηθητικών σημείων ως εξής:

Απαλοιφή σημείου N (Κατασκευή K_7): $(S_{ALN} = \frac{-S_{ACS}S_{ABL}}{S_{ACBS}}, S_{CMN} = \frac{S_{CSM}S_{ABC}}{S_{ACBS}}, S_{BMN} = \frac{-S_{BCS}S_{ABM}}{S_{ACBS}}, S_{CLN} = \frac{S_{CSL}S_{ABC}}{S_{ACBS}})$

$$\frac{S_{AML}S_{BNM}S_{CLN}}{S_{ANL}S_{BLM}S_{CNM}} = \frac{(-S_{CSL}S_{ABC})(-S_{BCS}S_{ABM})S_{ALM}S_{ACBS}(-S_{ACBS})}{(-S_{CSM}S_{ABC})S_{BLM}(-S_{ACS}S_{ABL})S_{ACBS}(-S_{ACBS})} = \frac{S_{CSL}S_{BCS}S_{ABM}S_{ALM}}{S_{CSM}S_{BLM}S_{ACS}S_{ABL}}$$

Απαλοιφή σημείου M (Κατασκευή K_6): $(S_{BLM} = \frac{S_{BSL}S_{ABC}}{-S_{ABCS}}, S_{CSM} = \frac{S_{BCS}S_{ACS}}{S_{ABCS}}, S_{ALM} = \frac{-S_{ACL}S_{ABS}}{S_{ABCS}}, S_{ABM} = \frac{S_{ABS}S_{ABC}}{S_{ABCS}})$

$$\frac{S_{CSL}S_{BCS}S_{ABM}S_{ALM}}{S_{CSM}S_{BLM}S_{ACS}S_{ABL}} = \frac{S_{CSL}S_{BCS}S_{ABS}S_{ABC}(-S_{ACL}S_{ABS})(-S_{ABCS})S_{ABCS}}{S_{BCS}S_{ACS}S_{BSL}S_{ABC}S_{ACS}S_{ABL}(S_{ABCS})^2} = \frac{S_{CSL}(S_{ABS})^2S_{ACL}}{S_{BSL}(S_{ACS})^2S_{ABL}}$$

Απαλοιφή σημείου L (Κατασκευή K_5): $(S_{ABL} = \frac{S_{ABS}S_{ABC}}{S_{ABSC}}, S_{BSL} = \frac{S_{BCS}S_{ABS}}{-S_{ABSC}}, S_{ACL} = \frac{S_{ACS}S_{ABC}}{S_{ABSC}}, S_{CSL} = \frac{S_{BCS}S_{ACS}}{-S_{ABSC}})$

$$\frac{S_{CSL}(S_{ABS})^2S_{ACL}}{S_{BSL}(S_{ACS})^2S_{ABL}} = \frac{S_{BCS}S_{ACS}(S_{ABS})^2(-S_{ACS}S_{ABC})(-S_{ABSC})^2}{(S_{ACS})^2S_{BCS}S_{ABS}(-S_{ABS}S_{ABC})(-S_{ABSC})^2} = 1$$

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΠΑΝΩ ΣΕ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ

Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται μόνο όταν υπάρχουν τουλάχιστον πέντε ελεύθερα ή ημι-ελεύθερα σημεία πάνω σε δυο ευθείες L_1 και L_2.

Όταν έχουμε μια γεωμετρική ποσότητα Γ και L_1, L_2 δυο ευθείες, δυο σύνολα δηλαδή που περιέχουν συγγραμμικά σημεία, τότε χρησιμοποιούμε τα παρακάτω λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 2.5.4 *Αν Γ=S_{ABC}*

$$S_{ABC} = \begin{cases} 0, & \text{αν } A, B, C \text{ συγγραμμικά·} \\ \frac{1}{2}h_A\overline{BC}, & \text{αν } A \in L_1(L_2) \text{ και } B, C \in L_2(L_1) \cdot \\ \frac{1}{2}h_B\overline{CA}, & \text{αν } B \in L_1(L_2) \text{ και } A, C \in L_2(L_1) \cdot \\ \frac{1}{2}h_C\overline{AB}, & \text{αν } C \in L_1(L_2) \text{ και } B, A \in L_2(L_1). \end{cases}$$

Όπου h_A είναι η προσανατολισμένη απόσταση από το A στο BC και ανάλογα τα h_B, h_C

Περιοριστικές συνθήκες:

Για την πρώτη περίπτωση δεν υπάρχουν.

Για την δεύτερη περίπτωση $B \neq C$.

Για την τρίτη περίπτωση $A \neq C$.

Για την τέταρτη περίπτωση $A \neq B$.

ΛΗΜΜΑ 2.5.5 *Αν* $\Gamma=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

$\Gamma=[\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}] = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

Σπάζουμε μια γεωμετρική ποσότητα στον λόγο δυο ποσοτήτων.

Περιοριστικές συνθήκες: $C \neq D$.

ΛΗΜΜΑ 2.5.6 *Αν* $\Gamma=\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \begin{cases} \overline{OB} - \overline{OA}, & \text{αν } L_1, L_2 \text{ τέμνονται στο } O\cdot \\ \overline{O_1B} - \overline{O_1A}, & \text{αν } L_1 \parallel L_2 \text{ και } A \in L_1 \text{ και } B \in L_1\cdot \\ \overline{O_2B} - \overline{O_2A}, & \text{αν } L_1 \parallel L_2 \text{ και } A \in\in L_2 \text{ και } B \in L_2. \end{cases}$$

Όπου O_1 και O_2 είναι σταθερά σημεία πάνω στις L_1 και L_2 αντίστοιχα.

Περιοριστικές συνθήκες:

Για την πρώτη περίπτωση $L_1 \nparallel L_2, O \neq B, O \neq A, A \neq B$.

Για την δεύτερη περίπτωση $O_1 \neq B, O_1 \neq A, A \neq B$.

Για την τρίτη περίπτωση $O_2 \neq B, O_2 \neq A, A \neq B$.

ΛΗΜΜΑ 2.5.7 *Αν* $\Gamma=h_A$

$$h_A = \begin{cases} a, & \text{αν } L_1 \parallel L_2\cdot \\ b\overline{OA}, & \text{αν } L_1 \nparallel L_2. \end{cases}$$

Όπου a είναι η απόσταση μεταξύ των L_1 και L_2 και b=sin($\angle(L_1, L_2)$). Τα a και b είναι ελεύθεροι παράμετροι.

Περιοριστικές συνθήκες:

Για την πρώτη περίπτωση δεν υπάρχουν.

Για την δεύτερη περίπτωση $O \neq A$.

2.6 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Εισάγουμε την γεωμετρική πρόταση Π, η οποία ανήκει στην κατηγορία C_H και είναι διατυπωμένη ως εξής:

Π=$(K_1, K_2, ..., K_n,$ Σ).

Ο αλγόριθμος εξετάζει αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής και αν είναι αληθής παράγει την απόδειξη ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, αλλιώς τερματίζει.

ΒΗΜΑ 1. Για $i = n, ..., 1$, ξεκινώντας δηλαδή από το σημείο που έχει κατασκευαστεί τελευταία καταλήγωντας στα σημεία που έχουν εισαχθεί αυθαίρετα μέσω της K_1 εφαρμόζουμε το επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των K_i. Αν ο αλγόριθμος επιβεβαιώνει την πρόταση Π, τότε η Π είναι αληθής κάτω από τις περιοριστικές συνθήκες που αυτόματα παράγονται από τον ορισμό 2.4.2 (σελίδα 30), αλλιώς η Π είναι ψευδής.

ΒΗΜΑ 3. Από το (Σ) συμπέρασμα της πρότασης παίρνουμε τις γεωμετρικές ποσότητες, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_l και τις φέρνουμε στο πρώτο μέλος με σκοπό το δεύτερο μέλος να είναι μονάδα. Για καθεμιά από αυτές τις γεωμετρικές ποσότητες εφαρμόζουμε το επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 4. Για καθένα από τα Γ_j,$j = 1, ..., l$, απαλοίφουμε τα βοηθητικά σημεία που κατασκευάστηκαν από τις K_i.

Για την απαλοιφή των σημείων αυτών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω εργαλεία: τις προτάσεις Β.1 (σελίδα 13) έως Β.6 (σελίδα 16), τις τεχνικές απαλοιφής σημείων μέσω λόγων μηκών (σελίδα 31), τις τεχνικές απαλοιφής σημείων μέσω των εμβαδών (σελίδα 34) και την τεχνική απαλοιφής σημείων που βρίσκονται πάνω σε δυο ευθείες (σελίδα 47).

Κάνουμε τις απαιτούμενες απλοποιήσεις και αν το αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι μια γεωμετρική ποσότητα Γ'_j αποτελούμενη μόνο από ελεύθερα σημεία, τότε εφαρμόζουμε το λήμμα 2.5.3 (σελίδα 41), με σκοπό να προκύψει μια ρητή έκφραση ανεξάρτητων μεταβλητών, αλλιώς εφαρμόζουμε από την αρχή το βήμα 4.

ΒΗΜΑ 5. Καταλήξαμε στο να εξισώσουμε τον αρχικό λόγο γεωμετρικών ποσοτήτων με μια ρητή έκφραση ανεξάρτητων μεταβλητών. Γίνονται οι απαιτούμενες απλοποιήσεις και αν καταλήξουμε στην ισότητα της εκφρασης αυτής με τη μονάδα τότε η πρόταση Π είναι αληθής αλλιώς η Π είναι ψευδής.

Απόδειξη ορθότητας αλγορίθμου.

Το συμπέρασμα της πρότασης περιλαμβάνει την ισότητα γεωμετρικών ποσοτήτων. Τα δυο μέλη της ισότητας τα συμβολίζουμε: A και B.

Οπότε η πρόταση Π μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα:

Π=$(K_1, K_2, ..., K_n,\ (A, B))$.

Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο στην πρόταση Π, καταλήγουμε στην τροποποιήση του συμπεράσματος της πρότασης σε μια ρητή εκφραση γεωμετρικών ποσοτήτων $r = \frac{A}{B}$. Παραπάνω εξήγηση χρειάζεται το τελευταίο βήμα του αλγορίθμου. Έτσι λοιπόν αν δείξουμε ότι: $r = 1$ τότε η πρόταση Π είναι αληθής κάτω από τις περιοριστικές συνθήκες που παράγονται μέσω του ορισμού 2.4.2 (σελίδα 30), και αυτό επειδή το βήμα 4 του αλγορίθμου, της απαλοιφής δηλαδή των βοηθητικών σημείων από τις γεωμετρικές ποσότητες, είναι ορθό μόνο κάτω από αυτές τις περιοριστικές συνθήκες. Να αναφέρουμε ότι οι γεωμετρικές ποσότητες που περιλαμβάνονται στο r περιέχουν ελεύθερες παραμέτρους, μπορούν επομένως να πάρουν αυθαίρετες τιμές. Αν βρούμε τιμές για τις γεωμετρικές ποσότητες τέτοιες ώστε όταν θα τις αντικαταστήσουμε στο r να δώσουν αποτέλεσμα $r \neq 1$, τότε βρίσκουμε ένα αντιπαράδειγμα σύμφωνα με το οποίο δεν ισχύει η πρόταση.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν η πρόταση Π είναι ψευδής τότε το συμπέρασμα της πρότασης είναι ψευδές, εκτός από ένα υποσύνολο της που έχει μικρότερη διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, η Π μπορεί να γίνει αληθής προσθέτωντας μια επιπλέον συνθήκη $r = 1$ στις ελεύθερες γεωμετρικές παραμέτρους της Π. Για παράδειγμα, η πρόταση $<<$ οι δυο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες $>>$, είναι ψευδής. Αν όμως προσθέσουμε μια επιπλέον συνθήκη στις ελεύθερες παραμέτρους η πρόταση μετατρέπεται σε αληθής:$<<$ οι δυο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες αν οι δυο απέναντι πλευρές του τριγώνου είναι ίσες $>>$. Με αυτόν τον τρόπο προβάλονται τεχνικές εύρεσης νέων θεωρημάτων.

2.7 ΕΙΔΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ-ΣΥΣΤΗΜΑ (GIB)

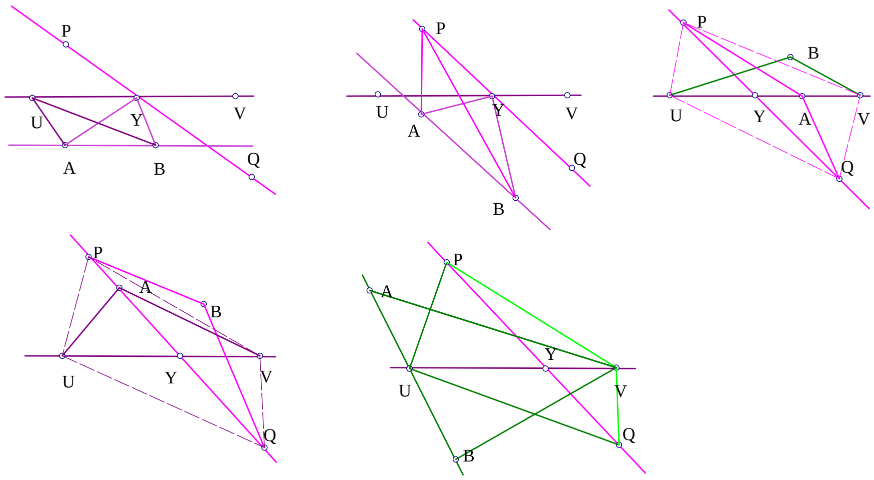
Τα λήμματα 2.4.3-2.5.3 (σελίδες 31-41) των τεχνικών απαλοιφής που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, αποτελούν τις γενικές περιπτώσεις απαλοιφών. Αν βασιζόμασταν μόνο σε αυτά τα λήμματα, τότε οι αποδείξεις των γεωμετρικών θεωρημάτων θα ήταν πολύ μεγάλες σε έκταση. Με σκοπό να μειώσουμε την έκταση των αποδείξεων θα εισάγουμε τις τεχνικές απαλοιφής σημείων σε ειδικές περιπτώσεις.

Πριν παρουσιάσουμε μερικές από τις τεχνικές αυτές είναι ανάγκη να σημειώσουμε ότι πριν προβούμε στην εφαρμογή των ειδικών τεχνικών απαλοιφής πρέπει πρώτα να συλλεχθούν από τις κατασκευές όλα τα συγγραμμικά σημεία και οι παράλληλες ευθείες, έτσι ώστε να μπορεί ο αλγόριθμος να εφαρμόσει τις τεχνικές αυτόματα. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε ένα ειδικό σύστημα, την γεωμετρική βάση πληροφοριών (GIB), η οποία βασίζεται στην κατασκευαστική περιγραφή της πρότασης και σαφώς εμπλουτίζεται με όλα τα συγγραμμικά σημεία και τις παράλληλες ευθείες που περιέχει η πρόταση. Το (GIB) είναι ένα πολύ ισχυρό σύστημα στην αυτόματη παραγωγή γεωμετρικών προτάσεων.

$*$ Ειδικές περιπτώσεις του λήμματος 2.4.14 (σελίδα 37).

Αν $\Gamma = S_{ABY}$ και Κ=$(INTER\ Y\ (LINE\ PQ)(LINE\ UV))$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Αν $AB \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = S_{ABU}$.



Σχήμα 2.36:

Απόδειξη: Αφού το Y βρίσκεται πάνω στην UV τότε $AB \parallel UY$ άρα από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) ισχύει $S_{ABY} = S_{ABU}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Αν $AB \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = S_{ABP}$.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση 1.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3. Αν U, V, A συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{UBV}S_{APQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}}$. Αφού τα U, V, A είναι συγγραμμικά από την πρόταση B.1 (σελίδα 13)θα έχουμε $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{UV}}$ και τέλος από το λήμμα 2.4.7 (σελίδα 33) έχουμε ότι $\frac{\overline{AY}}{\overline{UV}} = \frac{S_{APQ}}{S_{UVPQ}}$. Η ζητούμενη σχέση πλέον είναι εμφανής.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4. Αν U, V, B συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{AUV}S_{BPQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5. Αν P, Q, A συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{PBQ}S_{AUV}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{PBQ}}$. Αφού τα P, Q, A είναι συγγραμμικά από την πρόταση B.1 (σελίδα 13)θα έχουμε $\frac{S_{ABY}}{S_{PBQ}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{PQ}}$ και τέλος από το λήμμα 2.4.7 (σελίδα 33) έχουμε ότι $\frac{\overline{YA}}{\overline{UV}} = \frac{S_{AUV}}{S_{PUQV}}$. Η ζητούμενη σχέση πλέον είναι εμφανής.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6. Αν P, Q, B συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{APQ}S_{BUV}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την περίπτωση 5.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7. Αν το U ή το V βρίσκονται πάνω στην AB τότε $S_{ABY} = \frac{S_{UPQ}S_{ABV} - S_{VPQ}S_{ABU}}{S_{UPVQ}}$.

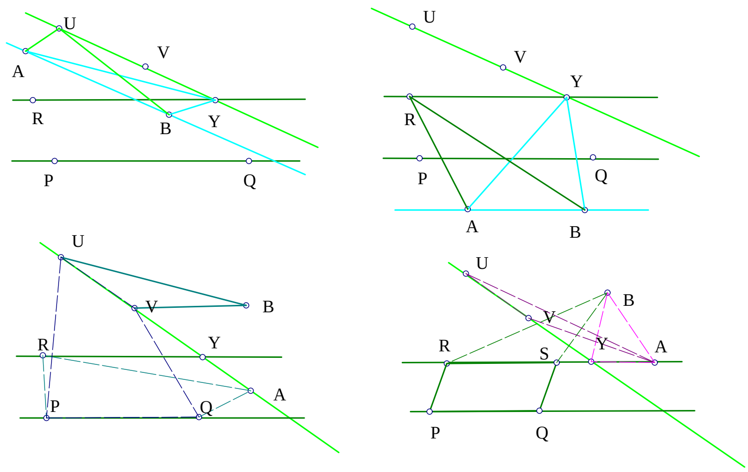
Απόδειξη: Αν U βρίσκεται πάνω στην AB τότε από την πρόταση B.3 (σελίδα 15) παίρνουμε: $S_{ABY} = \frac{\overline{VY}}{\overline{UV}}S_{ABU} + \frac{\overline{YU}}{\overline{UV}}S_{ABV}$. Όμως από πρόταση B.2 (σελίδα 14) έχουμε: $\frac{\overline{UY}}{\overline{UV}} = \frac{S_{UPQ}}{S_{UPVQ}}$ $\frac{\overline{VY}}{\overline{UV}} = \frac{S_{VPQ}}{S_{UPVQ}}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 8. Σε κάθε άλλη περίπτωση $S_{ABY} = \frac{S_{PUV}S_{ABQ} + S_{QVU}S_{ABP}}{S_{UPVQ}}$

Γενική περίπτωση (βλ. απόδειξη λήμματος 2.4.14).

$*$ Ειδικές περιπτώσεις του λήμματος 2.4.15 (σελίδα 37).

Αν $\Gamma = S_{ABY}$ και K=$(INTER\ Y\ (LINE\ U\ V)(PLINE\ R\ P\ Q))$



Σχήμα 2.37:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Αν $AB \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = S_{ABU}$.

Απόδειξη: Αφού το Y βρίσκεται πάνω στην UV τότε $AB \parallel UY$ άρα από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) ισχύει $S_{ABY} = S_{ABU}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Αν $AB \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = S_{ABR}$.

Απόδειξη: Αφού το Y βρίσκεται πάνω στην ευθεία R και $AB \parallel PQ$ τότε $RY \parallel AB$. Οπότε από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) ισχύει $S_{ABY} = S_{ABU}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3. Αν U, V, A συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{UBV}S_{APRQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}}$. Αφού τα U, V, A είναι συγγραμμικά από την πρόταση B.1 (σελίδα 13) έχουμε $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{UV}}$ και τέλος από το λήμμα 2.4.8 (σελίδα 34) έχουμε ότι $\frac{\overline{AY}}{\overline{UV}} = \frac{S_{APRQ}}{S_{UPVQ}}$. Η ζητούμενη σχέση πλέον είναι εμφανής.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4. Αν U, V, B συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{AUV}S_{BPRQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5. Αν $AY \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{BQRP}S_{AUV}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε $\overline{RS} = \overline{PQ}$ συνεπώς το $SRPQ$ είναι παραλληλόγραμμο. Από την πρόταση B.5 (σελίδα 16 έχουμε $S_{BQRP} = S_{BQP} - S_{RQP} = S_{BRS}$. Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{BRS}}$, σύμφωνα με την πρόταση B.1 (σελίδα 13) έχουμε $\frac{S_{ABY}}{S_{BRS}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{RS}}$. Τέλος από το λήμμα 2.4.8 (σελίδα 34) έχουμε ότι $\frac{\overline{YA}}{\overline{RS}} = \frac{S_{AUV}}{S_{RUSV}} = \frac{S_{AUV}}{S_{PUQV}}$.

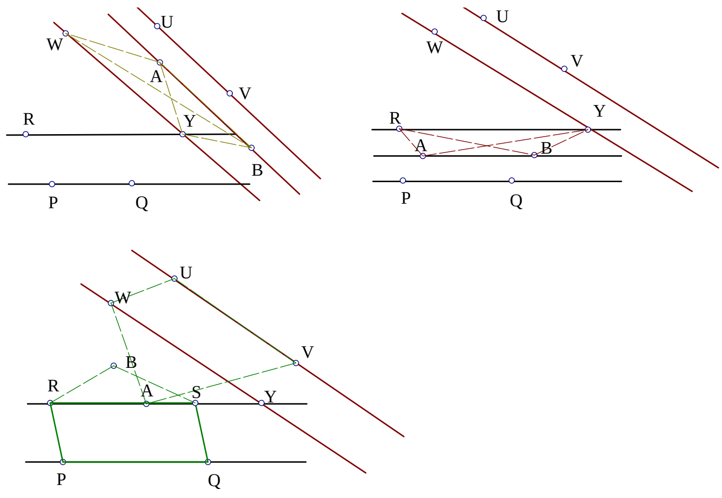
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6. Αν $BY \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{APRQ}S_{BUV}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την περίπτωση 5.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7. Σε κάθε άλλη περίπτωση $S_{ABY} = \frac{S_{PUQR}S_{ABV} + S_{PRQV}S_{ABU}}{S_{PUQV}}$

Γενική περίπτωση (βλ. απόδειξη λήμματος 2.4.15).

∗ Ειδικές περιπτώσεις του λήμματος 2.4.16 (σελίδα 38).



Σχήμα 2.38:

Αν $\Gamma = S_{ABY}$ και Κ=$(INTER\ Y\ (LINE\ R\ P\ Q)(PLINE\ W\ U\ V))$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Αν $AB \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = S_{ABW}$.

Απόδειξη: Αφού το Y βρίσκεται πάνω στην UV και $AB \parallel UV$ τότε $WY \parallel AB$. Άρα από την πρόταση Β.4 (σελίδα 15) ισχύει $S_{ABY} = S_{ABW}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Αν $AB \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = S_{ABR}$.

Απόδειξη: Αφού το Y βρίσκεται πάνω στην ευθεία R και $AB \parallel PQ$ τότε $RY \parallel AB$. Οπότε από την πρόταση Β.4 (σελίδα 15) ισχύει $S_{ABY} = S_{ABU}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3. Αν $AY \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{AUWV} S_{BQRP}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε $\overline{RS} = \overline{PQ}$ συνεπώς το $SRPQ$ είναι παραλληλόγραμμο. Από την πρόταση Β.5 (σελίδα 16) έχουμε $S_{BQRP} = S_{BQP} - S_{RQP} = S_{BRS}$. Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{BRS}}$, σύμφωνα με την πρόταση Β.1 (σελίδα 13) έχουμε $\frac{S_{ABY}}{S_{BRS}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{RS}}$. Τέλος από το λήμμα 2.4.9 (σελίδα 34) έχουμε ότι $\frac{\overline{YA}}{\overline{RS}} = \frac{S_{AUWV}}{S_{RUSV}} = \frac{S_{AUV}}{S_{PUQV}}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4. Αν $BY \parallel PQ$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{BUWV} S_{APRQ}}{S_{PUQV}}$.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5. Αν $AY \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{BVWU}S_{APRQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Όμοια με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6. Αν $BY \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = \frac{S_{AUWV}S_{BPRQ}}{S_{UPVQ}}$.

Απόδειξη: Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7. Σε κάθε άλλη περίπτωση $S_{ABY} = \frac{S_{PWQR}S_{AUBV}}{S_{PUQV}} + S_{ABW}$

Γενική περίπτωση (βλ. απόδειξη λήμματος 2.4.16).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ GIB.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω δυο παράλληλες ευθείες AB και CD. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AC και BD. Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών AD και BC. Έστω M το σημείο τομής των ευθειών PQ και AB. Ισχύει ότι το σημείο M είναι μέσον της AB.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\, B\, P)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, P

$K_2 : (ON - LINE\ C\, A\, P)$: Έστω C σημείο πάνω στην ευθεία AP.

$K_3 : (INTER\ D\,(LINE\ B\, P)(PLINE\ C\, A\, B))$: Έστω D το σημείο τομής της ευθείας BP και της ευθείας που περνά από το σημείο C και είναι παράλληλη στην AB.

$K_4 : (INTER\ Q\,(LINE\ A\, D)(LINE\ B\, C))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών AD και BC.

$K_5 : (INTER\ M\,(LINE\ AB)(LINE\ PQ))$: Έστω M το σημείο τομής των ευθειών AB και PQ.

Σ: Ισχύει: $\overline{AM} = \overline{BM}$.

Συλλογή όλων των συγγραμμικών σημείων και των παράλληλων ευθειών:

$(M,\, P,\, Q)(Q,\, A,\, D)(Q,\, B,\, C)(M,\, A,\, B)(D,\, P,\, B)(C,\, A,\, P)$

και $DC \parallel MAB$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $M,\, Q,\, D,\, C,\, P,\, B,\, A$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών:
$AD \nparallel BC,\ AB \nparallel PQ$ και $A \neq P,\, B \neq M.$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = -\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε την πρόταση Β.2 (σελίδα 14))

$(\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{S_{APQ}}{S_{BPQ}})$

$-\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{S_{APQ}}{S_{BPQ}}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε την τρίτη και την έκτη ειδική περίπτωση τεχν. απαλοιφής του λήμματος 2.4.14 (σελίδα 37))

$(S_{BPQ} = \frac{S_{BPC}S_{ABD}}{S_{ABCD}},\ S_{APQ} = \frac{S_{APD}S_{ABC}}{S_{ABDC}})$

$= \frac{-S_{APD}S_{ABC}(-S_{ABDC})}{(-S_{BPC}S_{ABD})S_{ABDC}} = \frac{-S_{APD}S_{ABC}}{S_{BPC}S_{ABD}}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε την πρώτη και την τέταρτη ειδική περίπτωση τεχν. απαλοιφής του λήμματος 2.4.15 (σελίδα 37))

($S_{ABD} = S_{ABC}$, $S_{APD} = \frac{S_{ABP}S_{PACB}}{S_{BAPB}} = -S_{PACB}$, $S_{PACB} = S_{PAC} + S_{PCB} = S_{BPC}$, επειδή ($C$, A, P) συγγραμμικά)

$= \frac{-S_{BPC}S_{ABC}}{-S_{BPC}S_{ABC}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

2.8 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω A_1, B_1, C_1 και D_1 σημεία πάνω στις πλευρές CD, DA, AB και BC αντίστοιχα ενός παραλληλογράμμου $ABCD$ τέτοια ώστε $\frac{CA_1}{CD} = \frac{DB_1}{DA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BD_1}{BC} = \frac{1}{3}$. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ABA_2 είναι τα τρία δεκατοτρίτα του εμβαδού του παραλληλογράμμου $ABCD$.

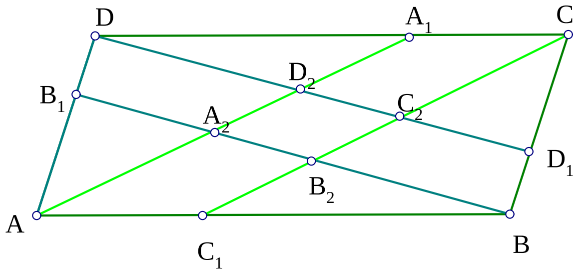
ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

K_1 ($POINT\ A$): Έστω A αυθαίρετο σημείο.

K_2 ($POINT\ B$): Έστω B αυθαίρετο σημείο.

K_3 ($POINT\ C$): Έστω C αυθαίρετο σημείο.

K_4 ($PRATIO\ D\,C\,A\,B\,1$): Έστω σημείο D πάνω στην ευθεία που περνά από το C και είναι παράλληλη στην ευθεία AB τέτοια ώστε $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1$.



Σχήμα 2.39:

K_5 $(LRATIO\ A_1\ C\ D\ \frac{1}{3})$: Έστω σημείο A_1 πάνω στην CD τέτοιο ώστε $\frac{1}{3} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{CD}}$.

K_6 $(LRATIO\ B_1\ D\ A\ \frac{1}{3})$: Έστω σημείο B_1 πάνω στην DA τέτοιο ώστε $\frac{1}{3} = \frac{\overline{DB_1}}{\overline{DA}}$.

K_7 $(INTER\ A_2\ (LINE\ A\ A_1)(LINE\ B\ B_1))$: Έστω A_2 το σημείο τομής των ευθειών AA_1 και BB_1.

Σ: $\frac{S_{ABA_2}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{13}$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $A_2, B_1, A_1, D, C, B, A$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών:$C \neq D, D \neq A, A \neq A_1, B \neq B_1, AA_1 \nparallel BB_1, A \neq B$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{3S_{ABCD}}{13S_{ABA_2}}$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από τις γεωμετρικές ποσότητ-ες.

(Απαλοιφή σημείου A_2, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2 (σελίδα 14))

$(S_{ABA_2} = \frac{S_{ABB_1}S_{ABA_1}}{S_{ABA_1B_1}})$

$\frac{S_{ABA_2}}{S_{ABCD}} = \frac{3S_{ABCD}S_{ABA_1B_1}}{13S_{ABA_1}S_{ABB_1}}$

(Απαλοιφή σημείου B_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.3 (σελίδα 15))

$(S_{ABB_1} = \frac{2}{3}S_{ABD},\ S_{ABA_1B_1} = \frac{2S_{ADA_1}-3S_{ABA_1}}{-3})$

$\frac{3S_{ABCD}S_{ABA_1B_1}}{13S_{ABA_1}S_{ABB_1}} = \frac{\frac{3}{13}S_{ABCD}(S_{ABA_1}-\frac{2}{3}S_{ADA_1})}{\frac{2}{3}S_{ABD}S_{ABA_1}}$

(Απαλοιφή σημείου A_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.3)

$(S_{ABA_1} = \frac{1}{3}(S_{ABD} + 2S_{ABC}),\ S_{ADA_1} = -\frac{2}{3}S_{ACD})$

$\frac{\frac{3}{13}S_{ABCD}(S_{ABA_1}-\frac{2}{3}S_{ADA_1})}{\frac{2}{3}S_{ABD}S_{ABA_1}} = \frac{(\frac{2}{3}S_{ABC}+\frac{1}{3}S_{ABD}+\frac{4}{9}S_{ACD})(\frac{9}{26}S_{ABCD})}{S_{ABD}(\frac{2}{3}S_{ABC}+\frac{1}{3}S_{ABD})}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.4 (σελίδα 15))

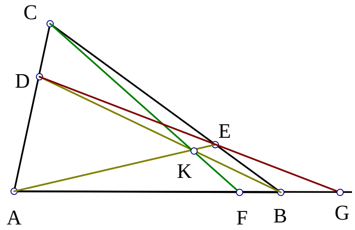
$(S_{ABD} = S_{ABC},\ S_{ACD} = S_{ABC},\ S_{ABCD} = 2S_{ABC})$

$\frac{(\frac{2}{3}S_{ABC}+\frac{1}{3}S_{ABD}+\frac{4}{9}S_{ACD})(\frac{9}{26}S_{ABCD})}{S_{ABD}(\frac{2}{3}S_{ABC}+\frac{1}{3}S_{ABD})} = \frac{(\frac{9}{13}S_{ABC})(\frac{13}{6}S_{ABC})}{S_{ABC}(\frac{3}{2}S_{ABC})}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

$\frac{(\frac{9}{13}S_{ABC})(\frac{13}{6}S_{ABC})}{S_{ABC}(\frac{3}{2}S_{ABC})}=1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2



Σχήμα 2.40:

Έστω τρία σημεία A, B, C στο επίπεδο και E, D σημεία πάνω στις ευθείες BC και AC αντίστοιχα.Έστω K, F και G τα σημεία τομής των ευθειών AE με BD, CK με AB και DE με AB αντίστοιχα. Τότε

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINT\ A)$: Έστω A αυθαίρετο σημείο.

K_2 $(POINT\ B)$: Έστω B αυθαίρετο σημείο.

K_3 $(POINT\ C)$: Έστω C αυθαίρετο σημείο.

K_4 $(ON-LINE\ E\,B\,C)$: Έστω E σημείο πάνω στην BC

K_5 $(ON-LINE\ D\,A\,C)$: Έστω D σημείο πάνω στην AC

K_6 $(INTER\ K\,(LINE\ A\,E)(LINE\ B\,D)$: Έστω K το σημείο τομής των ευθειών AE και BD.

K_7 $(INTER\ F\,(LINE\ C\,K)(LINE\ A\,B))$: Έστω F το σημείο τομής των ευθειών CK και AB.

K_8 $(INTER\ G\,(LINE\ D\,E)(LINE\ A\,B))$: Έστω G το σημείο τομής των ευθειών DE και AB.

Σ:$-\frac{\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}} = 1.$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, G, F, K, D, E, C, B, A εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $DE \nparallel AB, CK \nparallel AB, AE \nparallel BD, A \neq C, B \neq C, A \neq G, B \neq F.$

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = -\frac{\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2 (σελίδα 14))

$(\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{S_{AED}}{S_{BED}})$

$-\frac{\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}} = -\frac{\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}{\frac{S_{AED}}{S_{BED}}}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2)

$(\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{S_{ACK}}{S_{BCK}})$

$-\frac{\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}{\frac{S_{AED}}{S_{BED}}} = -\frac{S_{BED}}{S_{AED}}\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = -\frac{S_{BED}S_{ACK}}{S_{AED}S_{BCK}}$

(Απαλοιφή σημείου K, χρησιμοποιούμε τις προτάσεις Β.2 και Β.3 (σελίδα 15))

$(S_{BCK} = \frac{S_{BCD}S_{ABE}}{S_{ABED}},\ S_{ACK} = \frac{S_{ACE}S_{ABD}}{S_{ABED}})$

$-\frac{S_{BED}S_{ACK}}{S_{AED}S_{BCK}} = -\frac{S_{BED}\frac{S_{ACE}S_{ABD}}{S_{ABED}}}{S_{AED}\frac{S_{BCD}S_{ABE}}{S_{ABED}}}$

(Απλοποιήσεις)

$-\frac{S_{BED}\frac{S_{ACE}S_{ABD}}{S_{ABED}}}{S_{AED}\frac{S_{BCD}S_{ABE}}{S_{ABED}}} = -\frac{S_{BED}S_{ACE}S_{ABD}}{S_{AED}S_{BCD}S_{ABE}}$

(Εφαρμογή της τεχνικής απαλοιφής σημείων πάνω σε δυο ευθείες (σελίδα 48))

$(S_{ABE} = \frac{1}{2}(\overline{BEAC}b),\ S_{BCD} = -\frac{1}{2}(\overline{CDBC}b)$

$S_{AED} = -\frac{1}{2}(\overline{CEAD}b),\ S_{BED} = -\frac{1}{2}(\overline{CDBE}b)$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}(\overline{BCAD}b),\ S_{ACE} = \frac{1}{2}(\overline{CEAC}b))$

$-\frac{S_{BED}S_{ACE}S_{ABD}}{S_{AED}S_{BCD}S_{ABE}} = -\frac{(\frac{-1}{2}CDBEb)(\frac{1}{2}BCADb)(\frac{1}{2}CEACb)}{(\frac{1}{2}BEACb)(\frac{-1}{2}CDBCb)(\frac{-1}{2}CEADb)}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

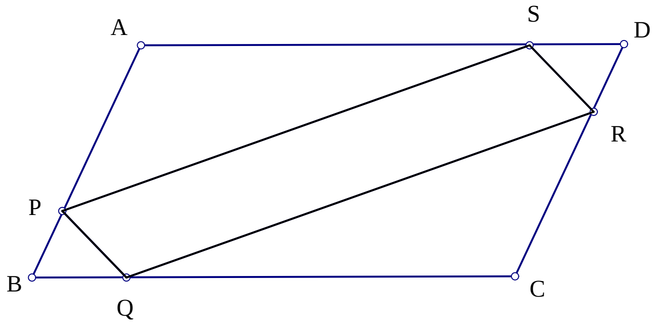
Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο και έστω P, Q, R, S σημεία πάνω στις πλευρές AB, BC, CD, DA τέτοια ώστε: $AP = CR$ και $BQ = DS$. Ισχύει ότι το $PQRS$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 ($POINT\ A$): Έστω A αυθαίρετο σημείο.

K_2 ($POINT\ B$): Έστω B αυθαίρετο σημείο.

K_3 ($POINT\ C$): Έστω C αυθαίρετο σημείο.



Σχήμα 2.41:

K_4 $(PRATIO\ D\,A\,B,\ C,\ 1)$: Έστω ότι το σημείο D ανήκει πάνω στην ευθεία που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη την ευθεία BC τέτοιο ώστε $\overline{AD} = \overline{BC}$.

K_5 $(LRATIO\ S\,D\,A\,r_2)$: Έστω S σημείο πάνω στην ευθεία DA τέτοιο ώστε $\overline{SD} = r_2\overline{DA}$.

K_6 $(LRATIO\ P\,A\,B\,r_1)$: Έστω P σημείο πάνω στην ευθεία AB τέτοιο ώστε $\overline{PA} = r_1\overline{AB}$.

K_7 $(LRATIO\ R\,C\,D\,r_1)$: Έστω R σημείο πάνω στην ευθεία CD τέτοιο ώστε $\overline{RC} = r_1\overline{CD}$.

K_8 $(LRATIO\ Q\,B\,C\,r_2)$: Έστω Q σημείο πάνω στην ευθεία BC τέτοιο ώστε $\overline{QB} = r_2\overline{BC}$.

Σ:$\overset{\overline{RQ}}{=}\overline{SP}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, P, Q, R, S, D, C, B, A εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών:

$C \neq D$, $B \neq C$, $D \neq A$, $A \neq B$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.3 (σελίδα 31))

$(\frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}} = \frac{S_{BCR}}{-S_{BSCP}})$

$\frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}} = \frac{S_{BCR}}{-S_{BSCP}}$

(Απαλοιφή σημείου R, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.10 (σελίδα 35))

$(S_{BCR} = r_1 S_{BCD})$

$= \frac{-r_1 S_{BCD}}{S_{BSCP}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.10 (σελίδα 35))

$(S_{BSCP} = -(S_{BCS} + r_1 S_{ABC} - S_{ABC}))$

$= \frac{-r_1 S_{BCD}}{-S_{BCS} - r_1 S_{ABC} + S_{ABC}}$

(Απαλοιφή σημείου S, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.10 (σελίδα 35))

$(S_{BCS} = -(r_2 S_{BCD} - S_{BCD} - r_2 S_{ABC}))$

$= \frac{r_1 S_{BCD}}{-r_2 S_{BCD} + S_{BCD} + r_2 S_{ABC} + r_1 S_{ABC} - S_{ABC}}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.4 (σελίδα 15))

$(S_{BCD} = S_{ABC})$

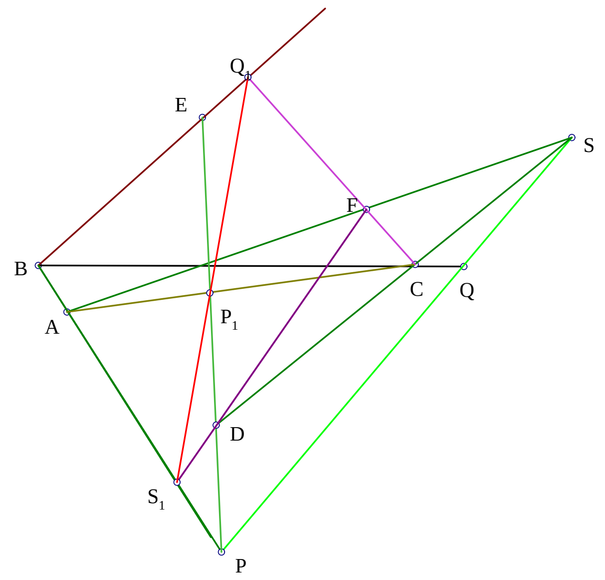
$= \frac{-r_1 S_{ABC}}{-r_1 S_{ABC}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PASCAL)

Έστω A, B, C, D, F, E έξι σημεία του επιπέδου. Έστω P, Q, S τρία συγγραμμικά σημεία. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB, DE, Q το σημείο τομής των ευθειών BC, EF και S το σημείο τομής των ευθειών CD, FA. Έστω P_1 το σημείο τομής των ευθειών AC και DE, Q_1 το σημείο τομής των ευθειών BE, CF και S_1 το σημείο τομής των ευθειών AB, FD. Τα σημεία P_1, Q_1, S_1 είναι συγγραμμικά.



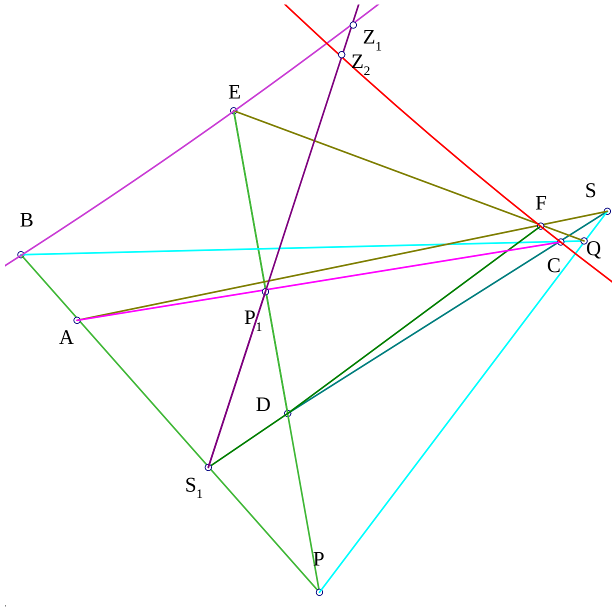
Σχήμα 2.42:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

K_1 $(POINT\ A)$: Έστω A αυθαίρετο σημείο.

K_2 $(POINT\ B)$: Έστω B αυθαίρετο σημείο.

K_3 $(POINT\ D)$: Έστω D αυθαίρετο σημείο.



Σχήμα 2.43:

K_4 $(POINT\ E)$: Έστω E αυθαίρετο σημείο.

K_5 $(POINT\ S)$: Έστω S αυθαίρετο σημείο.

K_6 $(ON-LINE\ C\,D\,S)$: Έστω C σημείο πάνω στην DS

K_7 $(INTER\ P\,(LINE\ A\,B)(LINE\ D\,E)$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB και DE.

K_8 $(INTER\ Q\,(LINE\ B\,C)(LINE\ S\,P))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών BC και SP.

K_9 $(INTER\ F\,(LINE\ E\,Q)(LINE\ A\,S))$: Έστω F το σημείο τομής των ευθειών EQ και AS.

K_{10} $(INTER\ S_1\,(LINE\ D\,F)(LINE\ A\,B))$: Έστω S_1 το σημείο τομής των ευθειών DF και AB.

K_{11} $(INTER\ P_1\,(LINE\ A\,C)(LINE\ D\,E))$: Έστω P_1 το σημείο τομής των ευθειών AC και DE.

K_{12} $(INTER\ Z_2\,(LINE\ B\,E)(LINE\ S_1P_1))$: Έστω Z_2 το σημείο τομής των ευθειών BE και S_1P_1.

K_{13} $(INTER\ Z_1\,(LINE\ C\,F)(LINE\ S_1P_1))$: Έστω Z_1 το σημείο τομής των ευθειών CF και S_1P_1.

Σ:$\frac{\overline{S_1Z_1}}{\overline{P_1Z_1}} = \frac{\overline{S_1Z_2}}{\overline{P_1Z_2}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $Z_1, Z_2, P_1, S_1, F, Q, P, C, S, D, E, A, B$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $DE \nparallel AB, BC \nparallel SP, EQ \nparallel AS, DF \nparallel BA, AC \nparallel DE, CF \nparallel BE, BE \nparallel S_1P_1, CF \nparallel S_1P_1, D \neq S, P_1 \neq Z_1, S_1 \neq Z_2$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\overline{S_1Z_1}}{\overline{P_1Z_1}}\frac{\overline{P_1Z_2}}{\overline{S_1Z_2}} = 1.$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου Z_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2 (σελίδα 14))

$(\frac{\overline{S_1Z_1}}{\overline{P_1Z_1}} = \frac{S_{CFS_1}}{S_{CFP_1}})$

$\frac{\overline{S_1Z_1}}{\overline{P_1Z_1}}\frac{\overline{P_1Z_2}}{\overline{S_1Z_2}} = \frac{S_{CFS_1}}{S_{CFP_1}}\frac{\overline{P_1Z_2}}{\overline{S_1Z_2}}$

(Απαλοιφή σημείου Z_2, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2, Β.3 (σελίδα 15))

$(\frac{\overline{P_1Z_2}}{\overline{S_1Z_2}} = \frac{S_{BEP_1}}{S_{BES_1}})$

$\frac{S_{CFS_1}}{S_{CFP_1}}\frac{\overline{P_1Z_2}}{\overline{S_1Z_2}} = \frac{S_{CFS_1} \cdot S_{BEP_1}}{S_{BES_1} \cdot S_{CFP_1}}$

(Απαλοιφή σημείου P_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2, B.3)

$(S_{CFP_1} = \frac{-S_{DEC}S_{ACF}}{S_{ADCE}},\ S_{BEP_1} = \frac{S_{AEC}S_{BDE}}{S_{ADCE}})$

$= \frac{(S_{CFS_1} \cdot S_{BDE} \cdot S_{AEC}) \cdot S_{ADCE}}{S_{ADCE} \cdot S_{BES_1} \cdot S_{ACF} \cdot S_{DEC}}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{-S_{BDE} \cdot S_{CFS_1} \cdot S_{AEC}}{S_{BES_1} \cdot S_{ACF} \cdot S_{DEC}}$

(Απαλοιφή σημείου S_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2, B.3)

$(S_{BES_1} = \frac{-S_{BDF}S_{BAE}}{S_{BDAF}},\ S_{CFS_1} = \frac{S_{DCF}S_{BAF}}{S_{BDAF}})$

$= \frac{(-S_{BDE} \cdot S_{AEC} \cdot S_{BAF} \cdot S_{DCF} \cdot)S_{BDAF}}{S_{BDAF} \cdot (-S_{ACF} \cdot S_{DEC} \cdot S_{BAE}S_{BDF})}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{S_{BDE} \cdot S_{AEC} \cdot S_{BAF} \cdot S_{DCF}}{S_{ACF} \cdot S_{DEC} \cdot S_{BAE}S_{BDF}}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2, B.3)

$(S_{BDF} = \frac{S_{ACQ}S_{BDE}+S_{AES}S_{BDQ}}{S_{AESQ}},\ S_{ACF} = \frac{-S_{ASC}S_{AEQ}}{S_{AESQ}}$

$S_{BAF} = \frac{S_{AEQ}S_{BAS}}{S_{AESQ}},\ S_{DCF} = \frac{S_{ESQ}S_{ADC}}{S_{AESQ}})$

$= \frac{S_{BDE} \cdot S_{AEC} \cdot S_{BAS} \cdot S_{AEQ} \cdot S_{ADC} \cdot S_{ESQ} \cdot S_{AESQ} \cdot S_{AESQ}}{S_{AESQ} \cdot S_{AESQ}(-S_{BAE} \cdot S_{DEC} \cdot S_{AEQ} \cdot S_{ASC}) \cdot (S_{BDE} \cdot S_{S_{ASQ}+S_{BDQ} \cdot S_{AES}})}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{-S_{BDE} \cdot S_{AEC} \cdot S_{BAS} \cdot S_{ADC} \cdot S_{ESQ}}{S_{BAE} \cdot S_{DEC} \cdot S_{ASC}(S_{BDE} \cdot S_{ASQ}+S_{BDQ} \cdot S_{AES})}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2, B.3)

$(S_{BDQ} = \frac{S_{BSP}S_{BDC}}{S_{BSCP}},\ S_{ASQ} = \frac{S_{ASP}S_{BSC}}{S_{BSCP}},\ S_{ESQ} = \frac{S_{ESP}S_{BSC}}{S_{BSCP}})$

$= \frac{(-S_{BDE}\cdot S_{AEC}\cdot S_{BAS}\cdot S_{ADC}\cdot S_{ESP}\cdot S_{BSC})S_{BSCP}}{S_{BSCP}\cdot S_{BAE}\cdot S_{DEC}\cdot S_{ASC}(S_{BDE}\cdot S_{BSC}\cdot S_{ASP}+S_{BDC}\cdot S_{BSP}\cdot S_{AES})}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{-S_{BDE}\cdot S_{AEC}\cdot S_{BAS}\cdot S_{ADC}\cdot S_{ESP}\cdot S_{BSC}}{S_{BAE}\cdot S_{DEC}\cdot S_{ASC}(S_{BDE}\cdot S_{BSC}\cdot S_{ASP}+S_{BDC}\cdot S_{BSP}\cdot S_{AES})}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2, B.3)

$(S_{BSP} = \frac{-S_{BDE}S_{BAS}}{S_{BDAE}},\ S_{ASP} = \frac{-S_{ADE}S_{BAS}}{S_{BDAE}},\ S_{ESP} = \frac{S_{DES}S_{BAE}}{S_{BDAE}})$

$= \frac{(-S_{BDE}\cdot S_{AEC}\cdot S_{BAS}\cdot S_{ADC}\cdot S_{BAE}\cdot S_{DES}\cdot S_{BSC})S_{BDAE}}{S_{BDAE}\cdot S_{BAS}\cdot S_{BDE}S_{BAE}\cdot S_{DEC}\cdot S_{ASC}(-S_{BDC}\cdot S_{AES}-S_{BSC}\cdot S_{ADE})}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{S_{BSC}\cdot S_{ADC}\cdot S_{AEC}\cdot S_{DES}}{S_{ASC}\cdot S_{DEC}\cdot (S_{BDC}\cdot S_{AES}+S_{BSC}\cdot S_{ADE})}$

(Απαλοιφή σημείου C, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.3)

$(S_{BDC} = S_{BDS}\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}},\ S_{ASC} = (\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} - 1)S_{ADS}$

$S_{DEC} = S_{DES}\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}},\ S_{AEC} = S_{AES}\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} + S_{ADE}\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} - S_{ADE}$

$S_{ADC} = S_{ADS}\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}},\ S_{BSC} = (\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}} - 1)S_{BDS})$

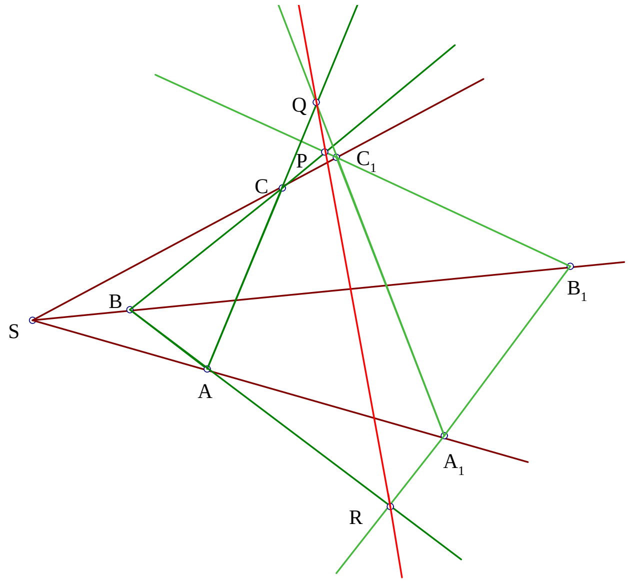
$= \frac{S_{DEC}S_{BDS}(-1+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}})\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{ADS}(-S_{ADE}+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{ADE}+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{AES})}{S_{ADS}(-1+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}})\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{DES}S_{BDS}(-S_{ADE}+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{ADE}+\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}S_{AES})}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (ΘΕΩΡΗΜΑ DESARGUES)

Έστω δυο τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$. Έστω ότι οι ευθείες AA_1, BB_1, CC_1 τέμνονται στο σημείο S. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών BC, B_1C_1, Q το σημείο τομής των ευθειών CA και C_1A_1 και R το σημείο τομής των ευθειών AB και A_1B_1. Τα σημεία P, Q, R είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 2.44:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINT\ A)$: Έστω A αυθαίρετο σημείο.

K_2 $(PONT\ B)$: Έστω B αυθαίρετο σημείο.

K_3 $(POINT\ C)$: Έστω C αυθαίρετο σημείο.

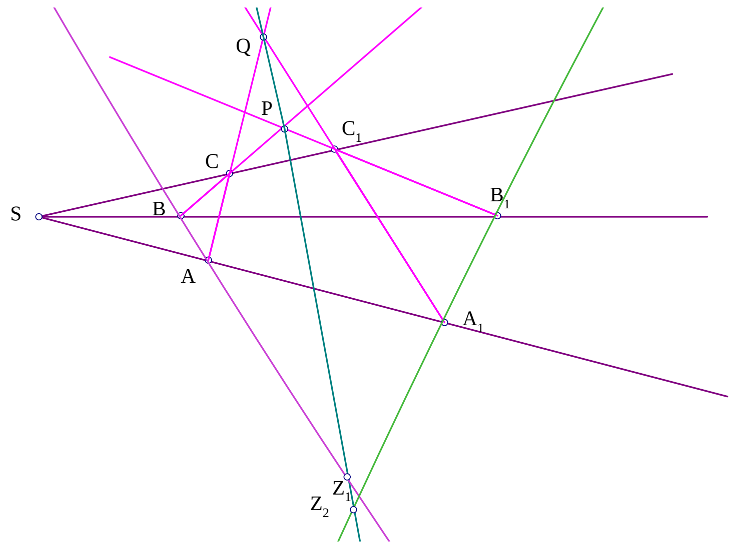
K_4 $(POINT\ S)$: Έστω S αυθαίρετο σημείο.

K_5 $(ON-LINE\ A_1\,S\,A)$: Έστω A_1 σημείο πάνω στην SA

$K_6(ON-LINE\ B_1\,S\,B)$: Έστω B_1 σημείο πάνω στην SB

$K_7(ON-LINE\ C_1\,S\,C)$: Έστω C_1 σημείο πάνω στην SC

K_8 $(INTER\ P\,(LINE\ B_1\,C_1)(LINE\ B\,C))$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών B_1C_1 και BC.



Σχήμα 2.45:

$K_9(INTER\ Q\,(LINE\ A_1\,C_1)(LINE\ A\,C))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών A_1C_1 και AC.

$K_{10}(INTER\ R\,(LINE\ A_1\,B_1)(LINE\ A\,B))$: Έστω R το σημείο τομή-ς των ευθειών A_1B_1 και AB.

$K_{11}(INTER\ Z_2\,(LINE\ A_1\,B_1)(LINE\ P\,Q))$: Έστω Z_2 το σημείο τομή-ς των ευθειών A_1B_1 και PQ.

$K_{12}(INTER\ Z_1\,(LINE\ A\,B)(LINE\ P\,Q))$: Έστω Z_1 το σημείο τομής των ευθειών AB και PQ.

Σ:$\frac{\overline{PZ_1}}{\overline{QZ_1}} = \frac{\overline{PZ_2}}{\overline{QZ_2}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $Z_1, Z_2, Q, P, C_1, B_1, A_1, S, C, B, A$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος ικανών και αναγκαίων συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $BC \nparallel B_1C_1, AC \nparallel A_1C_1, AB \nparallel A_1B_1, AB \nparallel PQ, A_1B_1 \nparallel PQ, Q \neq Z_1, P \neq Z_2, S \neq A, S \neq B, S \neq C$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\overline{PZ_1}}{\overline{QZ_1}}\frac{\overline{QZ_2}}{\overline{PZ_2}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου Z_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2 (σελίδα 14))

$(\frac{\overline{PZ_1}}{\overline{QZ_1}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABQ}})$

$\frac{\overline{PZ_1}}{\overline{QZ_1}}\frac{\overline{QZ_2}}{\overline{PZ_2}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABQ}}\frac{\overline{QZ_2}}{\overline{PZ_2}}$

(Απαλοιφή σημείου Z_2, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2)

$(\frac{\overline{QZ_2}}{\overline{PZ_2}} = \frac{S_{A_1B_1Q}}{S_{A_1B_1P}})$

$\frac{S_{ABP}}{S_{ABQ}}\frac{\overline{QZ_2}}{\overline{PZ_2}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABQ}}\frac{S_{A_1B_1Q}}{S_{A_1B_1P}}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2, Β.6 (σελίδα 16))

$(S_{ABQ} = \frac{S_{AA_1C_1}S_{ABC}}{S_{AA_1CC_1}},\ S_{A_1B_1Q} = \frac{S_{A_1B_1C_1}S_{ACA_1}}{-S_{AA_1BB_1}})$

$= \frac{S_{ABP}\frac{S_{A_1B_1C_1}S_{ACA_1}}{-S_{AA_1CC_1}}}{S_{A_1B_1P}\frac{S_{AA_1C_1}S_{ABC}}{S_{AA_1CC_1}}}$

(Απλοποιήσεις)

$= \frac{S_{ABP}S_{A_1B_1C_1}S_{ACA_1}}{S_{A_1B_1P}S_{AA_1C_1}S_{ABC}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε τη πρόταση Β.2)

$(S_{ABP} = \frac{S_{BB_1C_1}S_{ABC}}{S_{BB_1CC_1}},\ S_{A_1B_1P} = \frac{S_{A_1B_1C_1}S_{BCB_1}}{-S_{BB_1CC_1}})$

$$= \frac{S_{A_1B_1C_1} S_{ACA_1} \frac{S_{BB_1C_1} S_{ABC}}{S_{BB_1CC_1}}}{S_{AA_1C_1} S_{ABC} \frac{S_{A_1B_1C_1} S_{BCB_1}}{-S_{BB_1CC_1}}}$$

(Απλοποιήσεις)

$$= \frac{S_{ACA_1} S_{BB_1C_1}}{S_{AA_1C_1} S_{BCB_1}}$$

(Απαλοιφή σημείου C_1, χρησιμοποιούμε τη πρόταση B.2)

$$(S_{AA_1C_1} = -(S_{ACA_1} \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}}),\ S_{BB_1C_1} = -(S_{BCB_1} \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}}))$$

$$= \frac{S_{ACA_1}(-\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}} S_{BCB_1})}{S_{BCB_1}(-\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}} S_{ACA_1})}$$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

Κεφάλαιο 3

ΑΥΤΟΜΑΤΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την αυτόματη απόδειξη κατασκευαστικών προτάσεων που περιέχουν κάθετες ευθείες και κύκλους. Το εργαλείο με το οποίο αντιμετωπίζουμε προβλήματα καθετότητας είναι η **Πυθαγόρεια διαφορά**. Η μέθοδος που αναφέρεται σε αυτό το κεφάλαιο αφορά κατασκευαστικές προτάσεις στην μετρική γεωμετρία. Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο της αυτόματης παραγωγής των αποδείξεων των ευκλείδειων γεωμετρικών θεωρημάτων, που ανήκουν στην κλάση των γραμμικών κατασκευαστικών γεωμετρικών προτάσεων. Μια γεωμετρική πρόταση είναι γραμμική κατασκευαστική όταν η πρόταση αυτή μπορεί να περιγραφθεί σαν μια ακολουθία σημείων, έτσι ώστε κάθε σημείο της ακολουθίας να μπορεί κατά μοναδικό τρόπο να κατασκευαστεί από τα προηγούμενα σημεία της ακολουθίας. Πιο συγκεκριμένα, μια γεωμετρική πρόταση λέγεται γραμμική κατασκευαστική αν τα σημεία της πρότασης μπορούν να περιγραφούν σύμφωνα με τις ακόλουθες κατασκευές:

- έστω ένα ελεύθερο σημείο.

- έστω αυθαίρετο σημείο πάνω σε μια ευθεία.

- έστω η τομή δυο ευθειών.

- έστω η τομή μιας ευθείας και ενός κύκλου ή η τομή δυο κύκλων όταν το το άλλο σημείο τομής τους έχει ήδη κατασκευαστεί.

Αξίζει να σημειώσουμε επίσης ότι η κατηγορία C_H (σελίδα 29),των κατασκευαστικών προτάσεων σημείων τομής του *Hilbert* είναι υποκατηγορία της κατηγορίας C_L (σελίδα 103), των γραμμικών κατασκευαστικών προτάσεων. Η απαλοιφή των σημείων που κατασκευάζονται στις προτάσεις αυτές πραγματοποιείται με την χρήση έξι βασικών γεωμετρικών προτάσεων, που αφορούν τις Πυθαγόρειες διαφορές τριγώνων και τετραπλεύρων. Στην παρακάτω ενότητα θα παρουσιάσουμε τις έξι βασικές προτάσεις και έπειτα θα δώσουμε τρία παραδείγματα με σκοπό να επεξηγήσουμε τη μέθοδο.

3.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ (ΜΕΡΟΣ **II**)

Η εισαγωγή μιας νέας γεωμετρικής ποσότητας, της Πυθαγόρειας διαφοράς, θα μας βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν ζητήματα, όπως την καθετότητα και την αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων.

Αρχικά θα εισάγουμε το **θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων** που θα μας βοηθήσει στις αποδείξεις θεωρημάτων που αφορούν Πυθαγόρειες διαφορές καθώς και στην μετατροπή σχέσεων που περιλαμβάνουν ισότητα γωνιών σε σχέση που περιλαμβάνει ισότητα λόγων μεταξύ Πυθαγόρειων διαφορών και εμβαδών προσανατολισμένων τριγώνων.

Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι το θεώρημα αυτό δεν έχει συμπεριληφθεί στο πρόγραμμα του υπολογιστή.

Έστω Ox και Oy δυο ημιευθείες που δεν έχουν κοινό φορέα. Θεωρούμε το ημιεπίπεδο p με ακμή τον φορέα της Ox που περιέχει την Oy και το ημιεπίπεδο q με ακμή τον φορέα της Oy που περιέχει την Ox. Το σύνολο των κοινών σημείων των ημιεπιπέδων p και q ονομάζεται **γωνία** με κορυφή το O και πλευρές τις ημιευθείες Ox, Oy. Το σύμβολο της γωνίας είναι: $\angle$.

Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο, που είναι ένας αριθμός μ, με $0^\circ \leq$μ$\leq 180^\circ$.

Ο παρακάτω τύπος υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου χρησημοποιώντας το μέτρο των γωνιών του:

$\nabla ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\angle B)$

$=\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle C)$

$=\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$

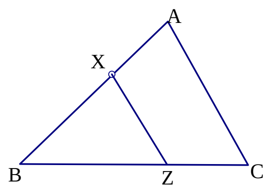
Αν $\angle ABC = \angle XYZ$ ή $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$ τότε ονομάζουμε τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle XYZ$ ως **επιγώνια.**

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.1 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΠΙΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Αν $\angle ABC = \angle XYZ$ *ή* $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$ *τότε έχουμε:*

$\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.1:

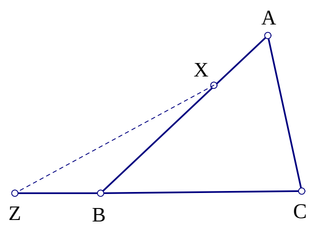
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το σημείο B ταυτίζεται με το σημείο Y και ότι το σημείο Z είναι πάνω στην ευθεία BC.

Επομένως αφού $\angle ABC = \angle XYZ$, τότε το σημείο X θα είναι πάνω στην AB.

Οπότε έχουμε το αποδεικτέο:

$\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} = \frac{\nabla ABC}{\nabla ABZ}\frac{\nabla ABZ}{\nabla XYZ} = \frac{BC}{BZ}\frac{AB}{XY}$.

Αν τώρα έχουμε την περίπτωση: $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$ τότε το σημείο Z θα βρίσκεται αριστερά του σημείου B πάνω στην ευθεία BC .



Σχήμα 3.2:

Οπότε έχουμε το αποδεικτέο:

$\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} = \frac{\nabla ABC}{\nabla XYC}\frac{\nabla XYC}{\nabla XYZ} = \frac{AB}{XY}\frac{BC}{BZ}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 1

Α. Πάρε τέσσερις ημιευθείες που περνάνε από το O και δυο ευθείες που κόβουν τις ημιευθείες αυτές στα σημεία A, B, C, D και P, Q, R, S.

Δείξτε ότι:

$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{PQ \cdot RS}{PS \cdot QR}$

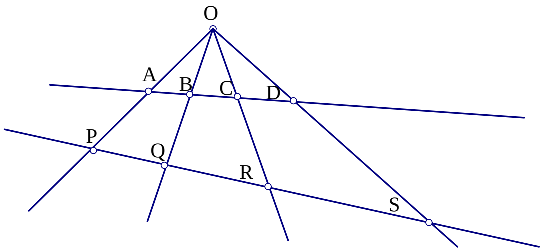
Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$\frac{AB \cdot CD \cdot PS \cdot QR}{AD \cdot BC \cdot PQ \cdot RS} = 1$

Οπότε παίρνω:

$\frac{AB \cdot CD \cdot PS \cdot QR}{AD \cdot BC \cdot PQ \cdot RS} = \frac{AB}{AD}\frac{CD}{BC}\frac{PS}{PQ}\frac{QR}{RS}$



Σχήμα 3.3:

Με χρήση τώρα του θεωρήματος των επίπλευρων τριγώνων, οι λόγοι μηκών ισούνται με λόγους εμβαδών.

Άρα $\frac{AB}{AD}\frac{CD}{BC}\frac{PS}{PQ}\frac{QR}{RS} = \frac{\nabla OAB}{\nabla OAD}\frac{\nabla OCD}{\nabla OBC}\frac{\nabla OPS}{\nabla OPQ}\frac{\nabla OQR}{\nabla ORS}$

Τώρα μέσω του θεωρήματος των επιγώνιων τριγώνων, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{\nabla OAB}{\nabla OPQ}\frac{\nabla OCD}{\nabla ORS}\frac{\nabla OPS}{\nabla OAD}\frac{\nabla OQR}{\nabla OBS} = \frac{OA{\cdot}OB{\cdot}OC{\cdot}OD{\cdot}OP{\cdot}OS{\cdot}OQ{\cdot}OR}{OP{\cdot}OQ{\cdot}OR{\cdot}OS{\cdot}OA{\cdot}OD{\cdot}OB{\cdot}OS} = 1$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2 (Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΠΙΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Αν $\angle ABC > \angle XYZ$ *και* $\angle ABC + \angle XYZ < 180^\circ$ *τότε:*

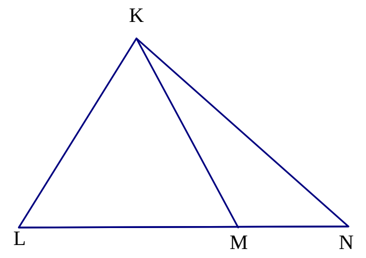
$$\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} > \frac{AB{\cdot}BC}{XY{\cdot}YZ}$$

Απόδειξη

Φτιάχνουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο KLM με $KL = KM$

και $\angle LKM = \angle ABC - \angle XYZ$.

Προεκτείνουμε την LM μέχρι το N έτσι ώστε: $\angle MKN = \angle XYZ$.



Σχήμα 3.4:

Οπότε θα έχουμε:$\angle LKN = \angle ABC$.

Από το θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων θα πάρουμε:

$\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} = \frac{\nabla ABC}{\nabla LKN} \frac{\nabla LKN}{\nabla MKN} \frac{\nabla MKN}{\nabla XYZ}$

$= \frac{AB \cdot BC}{LK \cdot KN} \frac{\nabla LKN}{\nabla MKN} \frac{MK \cdot KN}{XY \cdot YZ}$

$= \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ} \frac{\nabla LKN}{\nabla MKN}$

$> \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1.3 *α. Αν* $\angle ABC > \angle XYZ$ *και* $\angle ABC + \angle XYZ > 180°$

τότε $\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} < \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$

β. **(Αντίστροφο του θεωρήματος των επιγώνιων τριγώνων)**

Αν $\frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$ *τότε* $\angle ABC = \angle XYZ$ *ή* $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$.

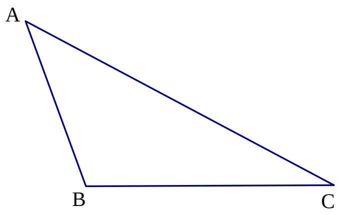
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Δεδομένου τριγώνου ABC, αν $\angle B > \angle C$

τότε $AC > AB$

Απόδειξη



Σχήμα 3.5:

Με βάση την πρόταση 3.1.2 (σελίδα 79), επειδή $\angle B > \angle C$ και $\angle B + \angle C < 180°$

τότε $1 = \frac{\nabla ABC}{\nabla ACB} > \frac{AB \cdot BC}{AC \cdot CB} = \frac{AB}{AC}$

Άρα $AC > AB$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το άθροισμα δυο οποιονδήποτε πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από την τρίτη.

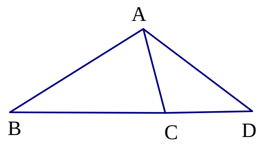
Απόδειξη

Προεκτείνω την BC μέχρι το D, έτσι ώστε $CD = AC$.

Επομένως:$\angle CAD = \angle CDA$.

Ακόμη $\angle BDA = \angle CAD = \angle BAD - \angle BAC < \angle BAD$

Από την πρόταση 3.1.2, θα πάρουμε: $1 = \frac{\nabla BDA}{\nabla BAD} > \frac{BD \cdot DA}{BA \cdot AD} = \frac{BD}{AB}$



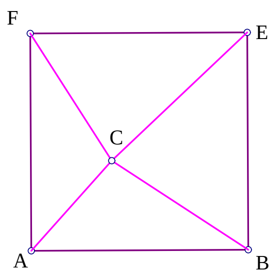
Σχήμα 3.6:

Άρα $BD < AB$, δηλαδή $BC + CD < AB$ το ζητούμενο.

Η έννοια της Πυθαγόρειας διαφοράς θα εισαχθεί μέσω της έννοιας των **επιεμβαδικών τριγώνων.**

Την έννοια του επιεμβαδικού τριγώνου την συμβολίζουμε C_{BAC} και την ορίζουμε ως εξής:

Στην πλευρά AB ενός τριγώνου ABC σχεδιάζουμε τετράγωνο $ABEF$ τέτοιο ώστε τα προσανατολισμένα εμβαδά S_{ABC} και S_{ABEF} να έχουν το ίδιο πρόσημο.



Σχήμα 3.7:

Το C_{BAC} είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε: $C_{BAC} = \begin{cases} \nabla ACF, & \angle A \leq 90^\circ \cdot \\ -\nabla ACF, & \angle A \geq 90^\circ. \end{cases}$

Όμοια:

$$C_{ABC} = \begin{cases} \nabla BEC, & \angle B \leq 90^\circ \cdot \\ -\nabla BEC, & \angle B \geq 90^\circ. \end{cases}$$

και

$$C_{ACB} = \begin{cases} \nabla CFE, & \angle C \leq 90^\circ \cdot \\ -\nabla CFE, & \angle C \geq 90^\circ. \end{cases}$$

Γενικά τα C_{BAC}, C_{ABC} και C_{ACB} είναι διαφορετικά.

Ισχύει όμως ότι: $C_{BAC} = C_{CAB}, C_{ABC} = C_{CBA}$ και $C_{ACB} = C_{BCA}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.4 *Για ένα τρίγωνο ABC έχουμε ότι:* $C_{ABC} + C_{BAC} = \frac{AB^2}{2}$

Απόδειξη

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα, αν η $\angle A$ και η $\angle B$ είναι οξείες τότε:

$$C_{ABC} + C_{BAC} = \nabla BEC + \nabla ACF = \frac{\nabla ABEF}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

Αν η $\angle A$ είναι αμβλεία και η $\angle B$ είναι οξεία τότε:

$$C_{ABC} + C_{BAC} = \nabla BEC - \nabla ACF = \frac{\nabla ABEF}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

Αν η $\angle A$ είναι οξεία και η $\angle B$ είναι αμβλεία τότε:

$$C_{ABC} + C_{BAC} = -\nabla BEC + \nabla ACF = \frac{\nabla ABEF}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

Επομένως για όλες τις περιπτώσεις ισχύει ότι:

$$C_{ABC} + C_{BAC} = \frac{AB^2}{2}$$

Αν εργαστούμε ανάλογα θα πάρουμε:

$C_{BCA} + C_{ABC} = \frac{BC^2}{2}$

και $C_{BAC} + C_{BCA} = \frac{CA^2}{2}$

Συμπεραίνουμε από τις παραπάνω εξισώσεις ότι:

$C_{ABC} = \frac{(AB^2+BC^2-AC^2)}{4}$

$C_{BAC} = \frac{(AB^2+AC^2-BC^2)}{4}$

$C_{ACB} = \frac{(AC^2+BC^2-AB^2)}{4}$

Με σκοπό τώρα να συνδέσουμε τις δυο αυτές έννοιες δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.5 Πυθαγόρεια διαφορά τριγώνου ABC *ως προς το* B, *ονομάζουμε την ποσότητα* $AB^2+BC^2-AC^2$, *την οποία συμβολίζουμε ως εξής:* P_{ABC} *και ισούται με:* $P_{ABC} = 4C_{ABC} = AB^2 + BC^2 - AC^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.6 (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)

Α. $P_{ABC} = 0$ *αν και μόνο αν* $\angle ABC = 90°$

Β. $P_{ABC} > 0$ *αν και μόνο αν* $\angle ABC < 90°$

Γ. $P_{ABC} < 0$ *αν και μόνο αν* $\angle ABC > 90°$

Απόδειξη

Για το (Α): αν κοιτάξουμε το σχήμα θα δούμε ότι $\nabla BEC = 0$ αν και μόνο αν η $\angle ABC = 90°$. Επομένως $P_{ABC} = 4C_{ABC} = 0$

Για το (Β): αν $\angle ABC < 90°$ τότε $C_{ABC} = \nabla BEC$ άρα $P_{ABC} > 0$.

Και αντίστροφα για να ισχύει $P_{ABC} > 0$ θα πρέπει το C_{ABC} να είναι θετικό, άρα η γωνία $\angle ABC$ να είναι οξεία.

Για το (Γ): αν $\angle ABC > 90°$ τότε $C_{ABC} = -\nabla BEC$ άρα $P_{ABC} < 0$.

Και αντίστροφα για να ισχύει $P_{ABC} < 0$ θα πρέπει το C_{ABC} να είναι αρνητικό, άρα η γωνία $\angle ABC$ να είναι αμβλεία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.7 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ)

Αν $\angle ABC \neq 90°$ έχουμε:

1. $\angle ABC = \angle XYZ$ αν και μόνο αν $\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$

2. $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$ αν και μόνο αν $\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = -\frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$

Απόδειξη

1. Αν ισχύει $\angle ABC = \angle XYZ$, οπότε και οι δυο γωνίες οξείες ή και οι δυο γωνίες αμβλείες, άρα θα έχουμε:

$\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = \frac{4C_{ABC}}{4C_{XYZ}} = \frac{\nabla BEC}{\nabla YEZ} = \frac{BE \cdot BC}{YE \cdot YZ} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$.

Αν τώρα πάρουμε το αντίστροφο του θεωρήματος των επιγώνιων τριγώνων:

η παρακάτω σχέση θα ισχύει όταν και οι δυο γωνίες είναι ίσες και είναι και οι δυο οξείες ή και οι δυο αμβλείες.

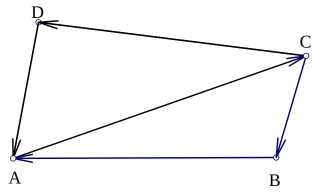
$\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = \frac{4C_{ABC}}{4C_{XYZ}} = \frac{\nabla BEC}{\nabla YEZ} = \frac{BE \cdot BC}{YE \cdot YZ} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ} = \frac{\nabla ABC}{\nabla XYZ}$.

2. Ανάλογα εργαζόμαστε και για την περίπτωση που ισχύει ότι:

$\angle ABC + \angle XYZ = 180°$ άρα η μια γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Ορίζουμε τώρα την **Πυθαγόρεια διαφορά ενός προσανατολισμένου τετραπλεύρου** ως εξής:

$$P_{ABCD} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2.$$



Σχήμα 3.8:

Ιδιότητες των Πυθαγόρειων διαφορών για τα τετράπλευρα

1. $P_{ABCD} = P_{CDAB} = P_{BADC} = P_{DCBA}$.

2. $P_{ABCD} = -P_{BCDA} = -P_{DABC} = -P_{ADCB} = -P_{CBAD}$.

3. $P_{ABCD} = P_{BAC} - P_{DAC} = P_{ABD} - P_{CBD} = P_{DCA} - P_{BCA} = P_{CDB} - P_{ADB}$.

4. $P_{ABBC} = P_{ABC}, P_{AABC} = -P_{BAC}, P_{ABCC} = -P_{ACB}, P_{ABCA} = P_{BAC}$.

5. $P_{ABAC} = 0, P_{ABCB} = 0$.

6. $P_{APBQ} + P_{BPCQ} = P_{APCQ}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.8 *Αν τα σημεία A, B και C είναι* **συγγραμμικά** *τότε ισχύει:*

$$P_{ABC} = 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC}.$$

Απόδειξη

Σχήμα 3.9:

Ισχύει: $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{CB}$ οπότε:

$$P_{ABC} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2} - \overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{CB^2} - (\overline{AB} - \overline{CB})^2 = 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.9 *Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $AB \perp CD$ για να δηλώσουμε ότι τα σημεία A, B, C και D ικανοποιούν μια από τις παρακάτω συνθήκες:*

1. *η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία CD*
2. *$A = B$*
3. *$C = D$*

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΙΙ

ΠΡΟΤΑΣΗ Β.7

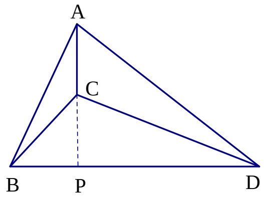
$AC \perp BD$ αν και μόνο αν $P_{ABCD} = P_{ABD} - P_{CBD} = 0$.

Απόδειξη

Έστω P και Q είναι τα σημεία τομής των ευθειών που περνάνε από τα A και C αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ευθεία BD.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$P_{ABD} = \overline{AB^2} + \overline{BD^2} - \overline{AD^2} = \overline{AP^2} + \overline{BP^2} + \overline{BD^2} - \overline{AP^2} - \overline{PD^2}$$



Σχήμα 3.10:

$=\overline{BP}^2 + \overline{BD}^2 - (\overline{BD} - \overline{BP})^2$

$=2 \cdot \overline{BP} \cdot \overline{BD}$

Ομοίως εργαζόμαστε και για το P_{CBD} και βρίσκουμε:

$P_{CBD} = 2 \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BD}.$

Άρα $P_{ABD} = P_{CBD}$ αν και μόνο αν $\overline{BP} = \overline{BQ}$, δηλαδή $P = Q$ που είναι ισοδύναμο με το $AC \perp BD$.

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι η πρόταση που ακολουθεί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.1 *Έστω P και Q είναι τα σημεία τομής των ευθειών που περνάνε από τα σημεία A και C αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ευθεία BD.*

Τότε ισχύει: $P_{ABCD} = 2 \cdot \overline{QP} \cdot \overline{BD}$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τις προτάσεις B.7 (σελίδα 87) και 3.1.8 (σελίδα 86)θα πάρουμε:

$P_{ABCD} = P_{ABD} - P_{CBD} = P_{PBD} - P_{QBD} = 2 \cdot \overline{BP} \cdot \overline{BD} - 2 \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BD} =$

$2 \cdot \overline{QP} \cdot \overline{BD}$.

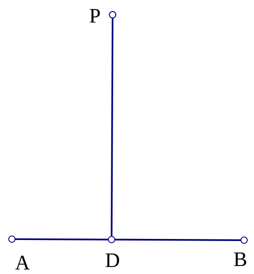
ΠΡΟΤΑΣΗ Β.8

Έστω D είναι το σημείο τομής της ευθείας που περνά από το P και είναι κάθετη στην AB με $(A \neq B)$. Τότε έχουμε:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{P_{PAB}}{P_{PBA}}$,

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{P_{PAB}}{2 \cdot \overline{AB}^2}$,

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{P_{PBA}}{2 \cdot \overline{AB}^2}$.



Σχήμα 3.11:

Απόδειξη

Από την πρόταση Β.7 (σελίδα 87) παίρνουμε:

$P_{PAB} = P_{DAB} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}$,

$P_{PBA} = P_{DBA} = 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BD}$,

Άρα

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{P_{PAB}}{P_{PBA}}$,

Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις θα έχουμε:

$P_{ABA} = 2 \cdot \overline{AB^2}$

όπου είναι πλέον ξεκάθαρες οι παρακάτω σχέσεις

$\frac{P_{PAB}}{2 \cdot \overline{AB^2}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$,

$\frac{P_{PBA}}{2 \cdot \overline{AB^2}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ B.9

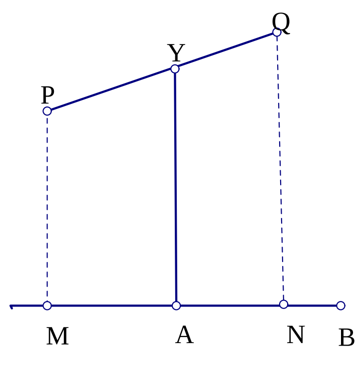
Έστω AB και PQ να είναι δυο ευθείες που δεν τέμνονται κάθετα και Y είναι το σημείο τομής της ευθείας PQ και της ευθείας που διέρχεται από το A και η οποία είναι κάθετη στην AB. Τότε

$\frac{\overline{PY}}{\overline{QY}} = \frac{P_{PAB}}{P_{QAB}}$,

$\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} = \frac{P_{PAB}}{P_{PAQB}}$,

$\frac{\overline{QY}}{\overline{PQ}} = \frac{P_{QAB}}{P_{PAQB}}$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.12:

Για την πρώτη σχέση.

Παίρνουμε M και N να είναι οι ορθογώνιες προβολές των σημείων P και Q αντίστοιχα πάνω στην AB.

Από την πρόταση B.7 (σελίδα 87), θα πάρουμε:

$\frac{P_{PAB}}{P_{QAB}} = \frac{P_{MAB}}{P_{NAB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{QY}}$.

Για την δεύτερη σχέση.

$\frac{P_{PAB}}{P_{PAQB}} = \frac{P_{MAB}}{P_{PAQB}} = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{\overline{MN}\cdot\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}$.

Όμοια και για την τρίτη σχέση.

ΠΡΟΤΑΣΗ B.10

Πάρε R να είναι σημείο πάνω στην ευθεία PQ με λόγους θέσεως $r_1 = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ και $r_2 = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}}$ με αναφορά το PQ. Τότε για οποιαδήποτε σημεία A και B έχουμε: $P_{RAB} = r_1 P_{QAB} + r_2 P_{PAB}$ και $P_{ARB} = r_1 P_{AQB} + r_2 P_{APB} - r_1 r_2 P_{PQP}$.

Η απόδειξη της πρότασης θα γίνει με την βοήθεια της παρακάτω πρότασης.

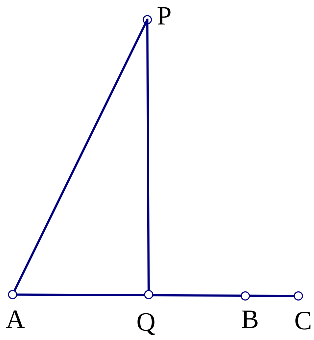
ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.2 *Έστω A, B και C τρία συγγραμμικά σημεία. Τότε για οποιοδήποτε σημείο P αν $P_{PAC} \neq 0$ έχουμε:*$\frac{P_{PAB}}{P_{PAC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Απόδειξη

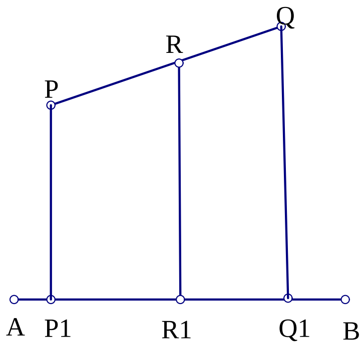
Έστω Q είναι η ορθογώνια προβολή του σημείου P πάνω στην ευθεία AB. Από την πρόταση B.7 (σελίδα 87), $P_{PAB} = P_{QAB} = 2\overline{AQ} \cdot \overline{AB}$ $P_{PAC} = P_{QAC} = 2\overline{AQ} \cdot \overline{AC}$ Άρα είναι φανερό πλέον ότι:

$\frac{P_{PAB}}{P_{PAC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Απόδειξη πρότασης B.10



Σχήμα 3.13:



Σχήμα 3.14:

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$\overline{RA}^2 = r_1\overline{QA}^2 + r_2\overline{PA}^2 - r_1r_2\overline{PQ}^2$ (1)

$\overline{RB}^2 = r_1\overline{QB}^2 + r_2\overline{PB}^2 - r_1r_2\overline{PQ}^2$ (2)

Οπότε $P_{RAB} = \overline{RA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{RB}^2 = r_1(\overline{QA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{QB}^2) + r_2(\overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2) = r_1P_{QAB} + r_2P_{PAB}$

Για να δείξουμε την (1), χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση και παίρνουμε: $\frac{P_{APR}}{P_{APQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = r_1$ Τότε: $r_1\overline{QA}^2 + r_2\overline{PA}^2 - r_1r_2\overline{PQ}^2 = r_1\overline{QA}^2 + (1-r_1)\overline{PA}^2 - r_1(1-r_1)\overline{PQ}^2$

$=\overline{PA}^2 + r_1(\overline{QA}^2 - \overline{PA}^2 - \overline{PQ}^2) + r_1^2\overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PR}^2 - r_1 P_{APQ} = \overline{PA}^2 + \overline{PR}^2 - P_{APR} = \overline{AR}^2$.

Όμοια εργαζόμαστε και για την απόδειξη της (2).

ΠΡΟΤΑΣΗ Β.11

Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο. Για οποιαδήποτε σημεία P και Q έχουμε: $P_{APBQ} = P_{DPCQ}$ ή $P_{APQ} + P_{CPQ} = P_{BPQ} + P_{DPQ}$

$P_{PAQ} + P_{PCQ} = P_{PBQ} + P_{PDQ} + 2P_{BAD}$

Απόδειξη

Για την απόδειξη της πρότασης Β.11 θα χρειαστούμε την προηγούμενη πρόταση:

Παίρνουμε σημείο O να είναι η τομή των AC και BD.

Από την πρώτη εξίσωση της πρότασης Β.10 (σελίδα 91), παίρνουμε:

$2P_{OPQ} = P_{APQ} + P_{CPQ} = P_{BPQ} + P_{DPQ}$.

Από την δεύτερη εξίσωση της πρότασης Β.10 παίρνουμε:

$2P_{OPQ} = P_{PAQ} + P_{PCQ} - \frac{1}{2}P_{ACA} = P_{BPQ} + P_{DPQ} - \frac{1}{2}P_{BDB}$.

Μένει να δείξουμε ότι $2P_{BAD} = \frac{1}{2}(P_{ACA} - P_{BDB})$ (1). Για να το δείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.3 *Για ένα παραλληλόγραμμο* $ABCD$ *έχουμε:* $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2$ *ή αλλιώς* $P_{ABC} = -P_{BAD}$.

Απόδειξη

Παίρνουμε σημείο O να είναι η τομή των AC και BD. Από την πρόταση

B.10 (σελίδα 91) παίρνουμε: $\overline{AC}^2 = 4\overline{AO}^2 = 4(\frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AD}^2 - \frac{1}{4}\overline{BD}^2) = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$

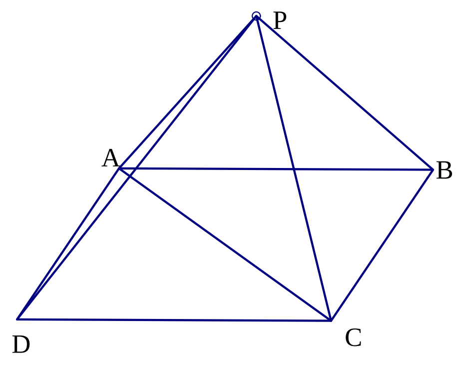
Απόδειξη της πρότασης B.11(Συνέχεια)

Με την χρήση της προηγούμενης πρότασης είναι πλέον φανερή η ισότητα (1).

ΠΡΟΤΑΣΗ B.12

Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο και P οποιοδήποτε σημείο. Τότε: $P_{PAB} = P_{PDC} - P_{ADC} = P_{PDAC}$ και $P_{APB} = P_{APA} - P_{PDAC}$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.15:

Από την πρόταση B.11 (σελίδα 93), παίρνουμε: $P_{PAB} = P_{PAC} - P_{PAD} = P_{CADP} = P_{PDAC} = P_{PDC} - P_{ADC}$

Τώρα για την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$P_{APB} = P_{APA} + P_{APC} + P_{APD} = P_{APA} + P_{CPDA} = P_{APA} - P_{PDAC}$$

Ο λόγος παράλληλων ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να εκφραστεί από τον λόγο Πυθαγόρειων διαφορών, σύμφωνα με τις παρακάτω προτάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.4 *Αν* $AB \parallel CD$ *και* $EF \parallel KL$ *τότε* $\frac{P_{AEBF}}{P_{CKDL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\frac{\overline{EF}}{\overline{KL}}$.

Απόδειξη

Έστω ότι τα M και N είναι σημεία τέτοια ώστε $\overline{AB} = \overline{CM}$ και $\overline{EF} = \overline{KN}$. Από τις προτάσεις B.11 (σελίδα 93) και 3.2.2 (σελίδα 91), έχουμε:

$$P_{AEBF} = P_{AKBN} = P_{AKN} - P_{BKN} = \frac{\overline{EF}}{\overline{KL}}(P_{AKL} - P_{BKL}) = \frac{\overline{EF}}{\overline{KL}}P_{AKBL}.$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι: $P_{AKBL} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}P_{CKDL}$.

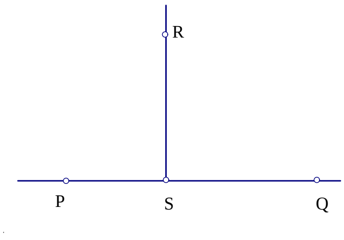
ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.5 *Αν* $AB \parallel CD$ *τότε:* $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{P_{ADBC}}{2\overline{CD}^2}$.

Απόδειξη

Από την πρόταση 3.2.4 (σελίδα 94) παίρνουμε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\frac{\overline{CD}}{\overline{CD}} = \frac{P_{ACBD}}{P_{CCDD}} = \frac{P_{ADBC}}{2\overline{CD}^2}.$$

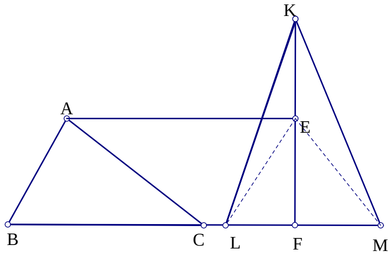
ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.6 *Παίρνουμε* S *να είναι η ορθογώνια προβολή του σημείου* R *πάνω στην ευθεία* PQ. *Η* **προσανατολισμένη απόσταση** *του* R *από τη* PQ *συμβολίζεται με* $h_{R,PQ}$ *και είναι ένας πραγματικός αριθμός ο οποίος έχει το ίδιο πρόσημο με το* S_{RPQ} *και ισχύει* $| h_{R,PQ} |=| RS |$.



Σχήμα 3.16:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.7 *Για οποιαδήποτε δύο τρίγωνα* ABC *και* KLM, *με* $h_A = h_{A,BC}$ *και* $h_{K,LM}$ *ισχύει ότι:* $\frac{S_{ABC}}{|BC|h_A} = \frac{S_{KLM}}{|PQ|h_K}$

Απόδειξη



Σχήμα 3.17:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα σημεία B, C, L και M είναι πάνω στην ίδια ευθεία. Φέρνουμε το ύψος KF του τριγώνου KLM και E να είναι σημείο πάνω στην KF τέτοιο ώστε $AE \parallel BC$.

Τότε $S_{ABC} = S_{EBC}$.

Από τις προτάσεις B.1 και B.2 (σελίδα 13) παίρνουμε:

$\frac{S_{ABC}}{S_{ALM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{LM}}$

$\frac{S_{ELM}}{S_{KLM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{KF}}$

Πολλαπλασιάζοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$\frac{S_{ABC}}{|BC|h_A} = \frac{S_{KLM}}{|PQ|h_K}$.

Να σημειώσουμε ότι: τα h_A, h_K έχουν το ίδιο πρόσημο με τα S_{ABC}, S_{KLM}.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2.8 *Για ένα τρίγωνο ABC έχουμε:*

$h_{A,BC} \mid BC \mid = h_{B,CA} \mid AC \mid = h_{C,AB} \mid AB \mid$.

Απόδειξη

Αν στην πρόταση 3.2 (σελίδα 95) βάλουμε όπου $\triangle KLM$ το $\triangle BCA$ και $\triangle CAB$ θα πάρουμε το ζητούμενο.

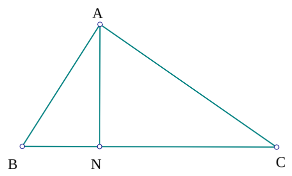
ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.9 *Σε ένα τρίγωνο ABC, έχουμε:*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_A \mid BC \mid = \frac{1}{2}h_B \mid AC \mid = \frac{1}{2}h_C \mid AB \mid .$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.10 *Σε ένα τρίγωνο ABC, έχουμε:*

$$16S_{ABC}^2 = 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - P_{BAC}^2.$$

Απόδειξη



Σχήμα 3.18:

Έστω N η ορθογώνια προβολή του σημείου A πάνω στην BC. Από την πρόταση 3.2.2 (σελίδα 91) παίρνουμε:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{ABN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}$$

Τότε:

$$P_{ABC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}P_{ABN} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}P_{NBN} = 2\overline{BCBN}$$

Άρα:

$$16S_{ABC}^2 = 4\overline{AN}^2\overline{BC}^2 = 4(\overline{AB}^2 - \overline{BN}^2)\overline{BC}^2 = 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - P_{BAC}^2.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.11 *Άλλοι $Herron - Qin$ τύποι για τρίγωνα είναι οι ακόλουθοι.*

$16S_{ABC}^2 = P_{ACB}P_{ABC} + P_{BCB}P_{BAC}$

$16S_{ABC}^2 = P_{BAC}P_{ACB} + P_{ACA}P_{ABC}$

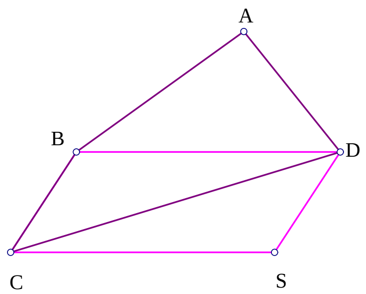
$16S_{ABC}^2 = P_{CAB}P_{CBA} + P_{ABA}P_{ACB}$

Η απόδειξη τους είναι εύκολη και για αυτό την παραλείπουμε.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.12 *Σε ένα τετράπλευρο $ABCD$, έχουμε:*

$16S_{ABCD}^2 = 4\overline{AC}^2\overline{BD}^2 - P_{ABCD}^2.$

Απόδειξη



Σχήμα 3.19:

Έστω σημείο S τέτοιο ώστε το $CSDB$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Τότε: $\overline{CS} = \overline{BD}$.

Από τις προτάσεις B.6 (σελίδα 16), B.11 (σελίδα 93) και 3.2.10 (σελίδα 97) παίρνουμε: $S_{ABCD}^2 = S_{AACS}^2 = S_{XAC}^2 = \frac{1}{16}(4\overline{AS}^2\overline{AC}^2 - P_{SAC}^2) = \frac{1}{16}(4\overline{BD}^2\overline{AC}^2 - P_{SAAC}^2) = \frac{1}{16}(4\overline{BD}^2\overline{AC}^2 - P_{BADC}^2)$.

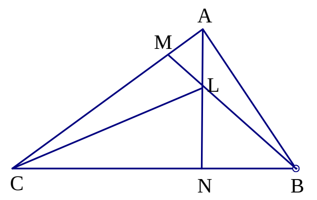
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΣΕ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΥ)

Τα τρία ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη



Σχήμα 3.20:

Φέρνουμε τα δυο ύψη AN και BM του τριγώνου ABC, τα οποία τέμνονται στο σημείο L.

Αρκεί να δείξουμε ότι $CL \perp AB$, δηλαδή $P_{ACL} = P_{BCL}$.

Από την πρόταση B.7 (σελίδα 87), έχουμε:

επειδή $BL \perp AC$ τότε $P_{ACL} = P_{ACB}$

και $AL \perp BC$ τότε $P_{BCL} = P_{BCA}$

Άρα

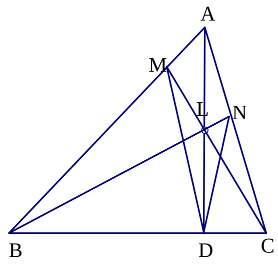
$P_{ACL} = P_{ACB} = P_{BCA} = P_{BCL}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Έστω L σημείο πάνω στο ύψος AD, τριγώνου ABC. Οι ευθείες BL και CL τέμνουν τις ευθείες AB και AC στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Ισχύει ότι $\angle MDA = \angle ADN$

Απόδειξη



Σχήμα 3.21:

Για να αποδείξουμε την ισότητα γωνιών, από το θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων και την πρόταση ;;, αρκεί να δείξουμε ότι:

$\frac{P_{MDA}}{S_{MDA}} = \frac{P_{ADN}}{S_{ADN}}.$

Από την πρόταση B.2 (σελίδα 14), το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων, έχουμε:

$$S_{MDA} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} S_{BDA} = \frac{S_{ALC}}{S_{ALBC}} S_{BDA}$$

$$S_{ADN} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} S_{ADC} = \frac{S_{ABL}}{S_{ABCL}} S_{ADC}$$

Τώρα με χρήση της πρότασης B.10 (σελίδα 91), θα πάρουμε:

$$P_{ADN} = \frac{\overline{NC}}{\overline{AC}} P_{ADA} = \frac{S_{BCL}}{S_{ABCL}} P_{ADA}$$

$$P_{MDA} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} P_{ADA} = \frac{S_{BCL}}{S_{ALBC}} P_{ADA}$$

Οπότε

$$\frac{P_{ADN}}{S_{ADN}} \cdot \frac{S_{MDA}}{P_{MDA}} = \frac{S_{BDA}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ALC}}{S_{ABL}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = 1.$$

3.3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σε αυτήν την κατηγορία υπάρχουν τρείς γεωμετρικές ποσότητες:

1. το εμβαδόν τριγώνων ή τετραπλεύρων
2. η Πυθαγόρεια διαφορά τριγώνων ή τετραπλεύρων
3. ο λόγος παράλληλων ευθυγράμμων τμημάτων.

Τα σημεία είναι τα βασικά γεωμετρικά αντικείμενα από τα οποία μπορούμε να εισάγουμε δυο άλλα γεωμετρικά αντικείμενα, τις ευθείες και τους κύκλους.

Μια ευθεία μπορεί να ανήκει σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$(LINE\ U\,V)$: είναι η ευθεία που περνά από τα σημεία U και V.

$(PLINE\ W\,U\,V)$: είναι η ευθεία που περνά από το σημείο W και είναι παραλληλη στην $(LINE\ U\,V)$.

$(TLINE\ W\,U\,V)$: είναι η ευθεία που περνά από το σημείο W και είναι κάθετη στην $(LINE\ U\,V)$.

$(BLINE\ U\,V)$: είναι η ευθεία που είναι μεσοκάθετος της UV.

Ο κύκλος που περνά από το σημείο U και έχει κέντρο το O συμβολίζεται: $(CIR\ O\,U)$.

Για τις προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C_L, μπορούμε να περιγράψουμε τις κατασκευές τους με κάποιον από τους ακόλουθους τρόπους:

$\mathbb{K}_1(POINT(S)\ Y_1,...,Y_n):$ Έστω αυθαίρετα σημεία $Y_1,...,Y_n$ στο επίπεδο. Καθένα από τα Y_i έχει δυο βαθμούς ελευθερίας.

$\mathbb{K}_2(ON\ Y\ B\ C)$: Έστω σημείο Y πάνω στην ευθεία BC. Το σημείο Y έχει έναν βαθμό ελευθερίας.

$\mathbb{K}_3(ON\ Y\ (CIR\ O\ U))$: Έστω σημείο Y πάνω στον κύκλο $(CIR\ O\ U)$. Το σημείο Y έχει έναν βαθμό ελευθερίας.

$\mathbb{K}_4(INTER\ Y\ ln_1\ ln_2)$: Έστω σημείο Y το σημείο τομής των δυο ευθειών. Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο. Πιο συγκεκριμένα:

1. Αν ln_1 είναι της μορφής $(LINE\ U\ V)$ ή $(PLINE\ W\ U\ V)$ και ln_2 είναι της μορφής $(LINE\ A\ B)$ ή $(PLINE\ R\ A\ B)$.

2. Αν ln_1 είναι της μορφής $(LINE\ U\ V)$ ή $(PLINE\ W\ U\ V)$ και ln_2 είναι της μορφής $(BLINE\ A\ B)$ ή $(TLINE\ R\ A\ B)$.

3. Αν ln_1 είναι της μορφής $(BLINE\ U\ V)$ ή $(TLINE\ W\ U\ V)$ και ln_2 είναι της μορφής $(BLINE\ A\ B)$ ή $(TLINE\ R\ A\ B)$.

$\mathbb{K}_5(INTER\ Y\ ln\ (CIR\ O\ A))$: Έστω σημείο Y να είναι το σημείο τομής της ευθείας και του κύκλου, διαφορετικό του σημείου A. Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο. Η ευθεία ln μπορεί να έχει μια από τις παρακάτω μορφές: $(LINE\ A\ V), (PLINE\ A\ U\ V), (TLINE\ A\ U\ V)$.

$\mathbb{K}_6(INTER\ Y\ (CIR\ O_1\ A)(CIR\ O_2\ A))$: Έστω σημείο Y να είναι το σημείο τομής των δυο κύκλων, διαφορετικό του σημείου A. Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο.

$\mathbb{K}_7(PRATIO\ Y\ A\ B\ C\ r)$: Έστω σημείο Y πάνω στην ευθεία που περνάει από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία BC, $(PLINE\ A\ B\ C)$, τέτοια ώστε $\overline{AY} = r\overline{BC}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο Y είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη το σημείο Y έχει ένα βαθμό ελευθερίας.

$\mathbb{K}_8(TRATIO\ Y\ B\ C\ r)$: Έστω σημείο Y πάνω στην ευθεία $(TLINE\ B\ B\ C)$ τέτοια ώστε $r = \frac{4S_{BCY}}{P_{BCB}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BC}}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο Y είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη το σημείο Y έχει ένα βαθμό ελευθερίας.

Στο σύνολο οι παραπάνω κατασκευές είναι 22, επειδή λαμβάνουμε υπόψην και τα τέσσερα είδη ευθειών. Έτσι λοιπόν η κατασκευή $\mathbb{K}_2$ αναφέρεται στην τυχαία επιλογή σημείων πάνω σε ευθείες που ανήκουν σε ένα από τα τέσσερα είδη ευθειών, η κατασκευή $\mathbb{K}_4$ αναφέρεται στην δημιουργία σημείου που προκύπτει από την τομή ευθειών, ο συνδιασμός των οποίων γίνεται με 10 διαφορετικούς τρόπους. Τέλος η κατασκευή $\mathbb{K}_5$ αναφέρεται στην δημιουργία σημείου που προκύπτει από την τομή κύκλου και ευθείας, η οποία έχει τρεις πιθανές μορφές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1 *Οι προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C_L έχουν την παρακάτω μορφή:*

Πρόταση=$(K_1, K_2, ..., K_n,\ \Sigma)$

Κάθε πρόταση αυτής της κατηγορίας περιγράφεται από ένα πεπερασμένο πλήθος κατασκευών, οι οποίες έχουν την μορφή των κατασκευών $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, ..., \mathbb{K}_8$ (σελίδα 102). Οι κατασκευές εντάσσονται κατά διατεταγμένο τρόπο ως εξής: αρχικά εισάγεται η κατασκευή K_1, η οποία έχει την μορφή της $\mathbb{K}_1$ και εισάγει αυθαίρετα σημεία στο επίπεδο. Συνεχίζουμε με την προσθήκη άλλων κατασκευών $K_2, ..., K_n$, οι οποίες έχουν την μορφή των κατασκευών $\mathbb{K}_2, ..., \mathbb{K}_8$.

Καθεμιά από τις παραπάνω κατασκευές εισάγει νέα σημεία που προέρχονται από τομές ευθειών και κύκλων και από λόγους παράλληλων ευθύγραμμων τμημάτων.

Οι ευθείες και οι κύκλοι έχουν κατασκευαστεί από τα σημεία που έχει εισάγει η K_1 και από τα σημεία που έχουν ήδη κατασκευαστεί μέσω των κατασκευών $K_2, ..., K_n$.

Τέλος η πρόταση καταλήγει στο συμπέρασμα (Σ), το οποίο αποτελείται από την ισότητα δυο πολυωνυμικών εκφράσεων γεωμετρικών ποσοτήτων. Το ζητούμενο κάθε φορά είναι η απόδειξη της ισότητας των δυο αυτών πολυωνυμικών εκφράσεων. Οι γεωμετρικές αυτές ποσότητες περιλαμβάνουν σημεία που έχουν εισαχθεί από τις κατασκευές $K_i, i = 1, ..., n$.

Οι γεωμετρικές ιδιότητες που καλούμαστε να δείξουμε πως έχουν οι παραπάνω γεωμετρικές ποσότητες είναι η συγγραμμικότητα, η παραλληλία, η καθετότητα, η αρμονικότητα, ισότητα γωνιών, ισότητα των μηκών δυο ευθυγράμμων τμημάτων, την ισότητα γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων. Ακόμη στην κλάση αυτή χρησιμοποιούντε έννοιες όπως ορθόκεντρο, βαρύκεντρο, περιγεγραμμένοσ-εγεγραμμένος κύκλος.

Όλα τα παραδείγματα που δόθηκαν προηγουμένως ανήκουν στην κατηγορία C_L. Επίσης και για τις προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C_L οι περιοριστικές συνθήκες παράγονται με συστηματικό τρόπο.

Οι εντολές των γραμμικών ιδιοτήτων είναι οι παρακάτω:

$(COLLINEAR\ A\,B\,C)$: Τα σημεία A, B και C είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $S_{ABC} = 0$.

$(PARALLEL\ A\,B\,C\,D)$: AB είναι παράλληλη στην CD αν και μόνο αν $S_{ACD} = S_{BCD}$.

$(PERPENDICULAR\ A\,B\,C\,D)$: AB είναι κάθετη στην CD αν και μόνο αν $P_{ACD} = P_{BCD}$.

$(MIDPOINT\ M\,A\,B)$: Το M είναι το μέσον της AB αν και μόνο αν $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$.

$(EQDISTANCE\ A\,B\,C\,D)$: Το AB έχει ίσο μήκος με το CD αν και μόνο αν $P_{ABA} = P_{CDC}$.

$(HARMONIC\ A\,B\,C\,D)$: Τα A, B και C, D είναι αρμονικά σημεία αν και μόνο αν $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

$(EQ-PRODUCT\ A\,B\,C\,D\,P\,Q\,R\,S)$: Το γινόμενο των AB και CD είναι ίσο με το γινόμενο των PQ και RS, το οποίο είναι ισοδύναμο με

1.$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \pm\frac{\overline{RS}}{\overline{CD}}$ αν $AB \parallel PQ$ και $RS \parallel CD$, 2.$P_{ACBD} = \pm P_{PRQS}$ αν $AB \parallel CD$ και $RS \parallel PQ$

3.$P_{ABA}P_{CDC} = P_{PQP}P_{RSR}$ αλλιώς

$(TANGENT\ O_1\,A\,O_2\,B)$: Ο κύκλος $(CIRCLE\ O_1\,A)$ είναι εφαπτομενικός στον κύκλο $(CIRCLE\ O_2\,B)$ αν και μόνο αν $d^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2dr_1 - 2dr_2 - 2r_1r_2 = 0$ όπου $d = \overline{O_1O_2}^2$, $r_1 = \overline{O_1A}^2$, $r_2 = \overline{O_2B}^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.2 *Έστω πρόταση Π=($K_1, K_2, ..., K_n$,Σ), τότε οι περιορισμοί για να είναι η Π πρόταση της κατηγορίας C_L είναι οι ακόλουθες.*

1.Αν K_i είναι η κατασκευή $\mathbb{K}_1$ τότε δεν χρειάζονται περιοριστικές συνθήκες.

2. Αν K_i είναι μια από τις κατασκευές $\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_7, \mathbb{K}_8$, σελίδα 102, τότε η περιοριστική συνθήκη για την K_i είναι $B \neq C$.

3. Αν K_i είναι μια από τις τρείς περιπτώσεις της κατασκευής $\mathbb{K}_4$, σελίδα 102, τότε η περιοριστική συνθήκη για την K_i

για την πρώτη και τρίτη περίπτωση είναι: $UV \nparallel AB$ και

για την δεύτερη περίπτωση είναι: $UV \not\perp AB$.

4. Αν K_i είναι η κατασκευή $\mathbb{K}_3$, σελίδα 102, τότε η περιοριστική συνθήκη για την K_i είναι $O \neq P$.

5. Αν K_i είναι η κατασκευή $\mathbb{K}_5$, σελίδα 102, τότε η περιοριστική συνθήκη για την K_i είναι $O \neq P$, $Y \neq P$.

6.Αν K_i είναι η κατασκευή $\mathbb{K}_6$, σελίδα 102, τότε η περιοριστική συνθήκη *για την K_i είναι O_1, O_2, A μη συγγραμμικά.*

3.4 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Όπως είδαμε παραπάνω για τις προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C_L, το πλήθος των κατασκευών και των γεωμετρικών ποσοτήτων είναι παραπάνω συγκριτικά με τις κατασκευές και τις γεωμετρικές ποσότητες που υπάρχουν στην κατηγορία C_H. Έτσι λοιπόν για το επόμενο βήμα, την δημιουργία δηλαδή τεχνικών απαλοιφής σημείων, θα πρέπει να σκεφτούμε 66 περιπτώσεις απαλοιφής για κάθε κατασκευή και κάθε γεωμετρική ποσότητα. Το γεγονός αυτό μπορεί να απλουστευτεί με την δημιουργία ενός ελάχιστου συνόλου κατασκευών. Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι παραπάνω κατασκευές μπορούν να αντικατασταθούν από 5 μόνο βασικές κατασκευές. Οι κατασκευές αυτές είναι:

$\mathbb{K}_1(POINT(S)\ Y_1, ..., Y_n)$: Έστω αυθαίρετα σημεία $Y_1, ..., Y_n$ στο επίπεδο. Καθένα από τα Y_i έχει δυο βαθμούς ελευθερίας.

$\mathbb{K}_7(PRATIO\ Y\ A\ B\ C\ r)$. Έστω σημείο Y πάνω στην ευθεία που περνάει από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία BC, $(PLINE\ A\ B\ C)$, τέτοια ώστε $\overline{AY} = r\overline{BC}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο Y είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη το σημείο Y έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Ο περιορισμός είναι $B \neq C$.

$\mathbb{K}_8(TRATIO\ Y\ A\ B\ r)$. Έστω σημείο Y πάνω στην ευθεία $(TLINE\ A\ A\ B)$ τέτοια ώστε $r = \frac{4S_{ABY}}{P_{ABA}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AB}}$, όπου r είναι ένας ρητός αριθμός, ρητή έκφραση κάποιων γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις το σημείο Y είναι σταθερό σημείο, ενώ στην τρίτη το σημείο Y έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Ο περιορισμός είναι $B \neq A$.

$\mathbb{K}_{41}(INTER\ Y\ (LINE\ U\ V)(LINE\ P\ Q))$. Έστω σημείο Y το σημείο τομής των δυο ευθειών. Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο. Ο περιορισμός της κατασκευής αυτής είναι $UV \nparallel PQ$.

$\mathbb{K}_{42}(FOOT\ Y\ P\ U\ V)$ η οποία είναι ισοδύναμη με την κατασκευή $(INTER\ Y\ (LINE\ U\ V)(TLINE\ P$

Έστω σημείο Y το σημείο τομής της ευθείας UV και της κάθετής της διερχόμενης από το σημείο P. Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο. Ο περιορισμός της κατασκευής αυτής είναι $U \neq V$.

Σε αυτό το ελάχιστο σύνολο κατασκευών μπορούμε να αντικαταστήσουμε και τα τέσσερα είδη ευθειών από ένα μόνο είδος: $(LINE\ U\,V)$.

1. Η ευθεία $(PLINE\ W\,U\,V)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ευθεία $(LINE\ W\,N)$. Το σημείο N εισάγεται από την κατασκευή $(PRATIO\ N\,W\,U\,V\,1)$.

2. Η ευθεία $(TLINE\ W\,U\,V)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ευθεία $(LINE\ N\,W)$. Αν τα W, U, V είναι συγγραμμικά το σημείο N εισάγεται από την κατασκευή $(TRATIO\ N\,W\,U\,1)$, αλλοιώς εισάγεται από την κατασκευή $(FOOT\ N\,W\,U\,V)$.

3. Η ευθεία $(BLINE\ U\,V)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ευθεία $(LINE\ N\,M)$. Τα σημεία M και N εισάγονται από τις κατασκευές $(TRATIO\ N\,M\,U\,1)$ και $(PRATIO\ M\,U\,U\,V\,\frac{1}{2}) \equiv (MIDPOINT\ M\,U\,V)$ αντίστοιχα.

Τώρα θα συνεχίσουμε με την αντικατάσταση των 22 κατασκευών από τις 5 βασικές κατασκευές, αντικαθιστώντας ταυτόχρονα και τα τέσσερα είδη των ευθειών από την $(LINE\ UV)$.

1. Η κατασκευή $\mathbb{K}_2(ON\ Y\,(LINE\ U\,V))$ είναι ισοδύναμη με την κατασκευή $\mathbb{K}_7(PRATIO\ Y\,U\,U\,V\,r))$, το r είναι αόριστο.

2. Η κατασκευή $\mathbb{K}_5(INTER\ Y\,(LINE\ U\,V)(CIR\ O\,U))$ είναι ισοδύναμη με τις κατασκευές $(FOOT\ N\,O\,U\,V)$ και $(PRATIO\ Y\,N\,N\,U\ -1)$

3. Η κατασκευή $\mathbb{K}_3(ON\ Y\,(CIR\ O\,P))$ είναι ισοδύναμη με την κατασκευή $(INTER\ Y\,(LINE\ P\,Q)(CIR\ O\,P)$, για τυχαία επιλογή σημείου Q.

4. Η κατασκευή $\mathbb{K}_6(INTER\ Y\,(CIR\ O_1\,P)(CIR\ O_2\ P))$ είναι ισοδύναμη με τις κατασκευές $(FOOT\ N\,P\,O_1\,O_2)$ και $(PRATIO\ Y\,N\,N\,P\,-1)$

Ακόμη στη διατύπωση των προτάσεων που ανήκουν στην κλάση C_L θα χρησιμοποιηθούν περισσότερες κατασκευές λόγων μηκών, τις οποίες θα εντάξουμε στις δυο βασικές κατασκευές λόγων που έχουμε συναντήσει,

$PRATIO$ και $TRATIO$.

$\mathbb{K}_9(MIDPOINT\ Y\ U\ V)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω σημείο Y το μέσον της ευθείας UV.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με την $(PRATIO\ Y\ U\ U\ V\ \frac{1}{2})$.

$\mathbb{K}_{10}(SYMMETRY\ Y\ U\ V)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω σημείο Y το συμμετρικό του σημείου V ως προς το σημείο U.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με την $(PRATIO\ Y\ U\ U\ V\ -1)$.

$\mathbb{K}_{11}(LRATIO\ Y\ U\ V\ r)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω σημείο Y πάνω στην UV τέτοιο ώστε: $\frac{\overline{UY}}{\overline{UV}} = r$

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με την $(PRATIO\ Y\ U\ U\ V\ r)$.

$\mathbb{K}_{12}(MRATIO\ Y\ U\ V\ r)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω σημείο Y πάνω στην UV τέτοιο ώστε: $\frac{\overline{UY}}{\overline{YV}} = r$

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με την $(PRATIO\ Y\ U\ U\ V\ \frac{r}{1+r})$.

$\mathbb{K}_{13}(HARMONIC\ Y\ A\ B\ C)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω σημείο Y συγγραμμικό με τα τρία συγγραμμικά σημεία A, B, C, έτσι ώστε: $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}$.

$\mathbb{K}_{14}(INVERSION\ Y\ U\ O\ R)$

Διατύπωση κατασκευής: έστω ότι το σημείο Y είναι η αντιστροφή του σημείου U ως προς τον κύκλο $(CIR\ O\ R)$.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με:

$(LRATIO\ Y\ O\ R\ \frac{\overline{OR}}{\overline{OU}})$ αν $U \in OR$

$(LRATIO\ Y\ O\ U\ \frac{P_{ORO}}{P_{OUO}})$ αλλιώς

(Σημείωση: η αντιστροφή είναι ένας μετασχηματισμός του επιπέδου στον εαυτό του, που ορίζεται με την βοήθεια ενός κύκλου. Αν O το κέντρο του κύκλου και ρ η ακτίνα του τότε σε κάθε σημείο A διαφορετικό του O, αντιστοιχούμε το σημείο B πάνω στην ημιευθεία OA, έτσι ώστε:

$\overline{OB} \cdot \overline{OA} = \rho^2$.

O κύκλος (O, ρ) λέγεται κύκλος της αντιστροφής, το σημείο O λέγεται κέντρο αντιστροφής και η ακτίνα ρ λέγεται δύναμη της αντιστροφής.)

$\mathbb{K}_{15}(CONSTANT\ p(r))$ Η κατασκευή αυτή εισάγει έναν αλγεβρικό αριθμό r ο οποίος είναι ρίζα του ανάγωγου πολυωνύμου $p(r)$, δηλαδή $p(r) = 0$.

Εδώ να σημειώσουμε ότι η κατασκευή $(CONSTANT)$,μέσα σε μια γεωμετρική πρόταση, μας βοηθά στην κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων και η κατασκευή $(TRATIO)$ στην κατασκευή τετραγώνων.

3.5 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έτσι λοιπόν με την δημιουργία του ελάχιστου συνόλου κατασκευών αρκούμαστε να δείξουμε τεχνικές απαλοιφής βοηθητικών σημείων μόνο για τις πέντε κατασκευές: $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_7, \mathbb{K}_8, \mathbb{K}_{41}, \mathbb{K}_{42}$.

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Ονομάζουμε $\Gamma(Y)$ μια γραμμική γεωμετρική ποσότητα με μεταβλητή Y και είναι μια από τις ακόλουθες γεωμετρικές ποσότητες: $S_{ABY}, S_{ABCY}, P_{ABY}, P_{ABCY}$, για A, B, C, Y διαφορετικά σημεία.

Για τρία συγγραμμικά σημεία Y, P, Q, από τις προτάσεις B.3, σελίδα 15 και B.10, σελίδα 91, παίρνουμε:

$\Gamma(Y)=\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}\Gamma(Q)+\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}\Gamma(P)$ (A)

Επίσης αν $\Gamma(Y)=P_{AYB}$ τότε από την πρόταση B.10 για τρία συγγραμμικά σημεία Y, P, Q παίρνουμε:

$\Gamma(Y)=\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}\Gamma(Q)+\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}\Gamma(P)$-$\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}P_{PQP}$ (B)

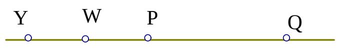
Ονομάζουμε P_{AYB} μια τετραγωνική γεωμετρική ποσότητα με μεταβλητή Y.

ΛΗΜΜΑ 3.5.1 *Έστω Γ(Y) είναι μια γραμμική γεωμετρική ποσότητα και σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή (PRATIO Y W P Q r) τότε έχουμε:*

$$\Gamma(Y)=\begin{cases} (\frac{\overline{PW}}{\overline{PQ}}+r)\Gamma(Q)+(\frac{\overline{WQ}}{\overline{PQ}}-r)\Gamma(P), & \text{αν } W \text{ ανήκει πάνω στην ευθεία } PQ\cdot \\ \Gamma(W)+r(\Gamma(Q)-\Gamma(P)), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Απόδειξη

Αν τα W, P, Q είναι συνευθειακά έχουμε:

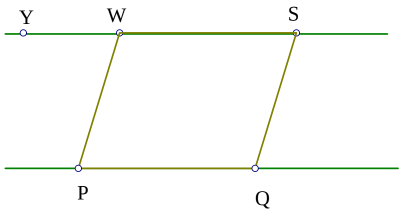


Σχήμα 3.22:

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{PW}}{\overline{PQ}}+r$$

$$\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{WQ}}{\overline{PQ}}-r$$

Αν τις αντικαταστήσουμε στην (A), (σελίδα 110) θα πάρουμε την ζητούμενη σχέση.



Σχήμα 3.23:

Για την δεύτερη τώρα σχέση, αν πάρουμε σημείο S τέτοιο ώστε $\overline{WS} = \overline{PQ}$.

Από την (A) (σελίδα 110) παίρνουμε: $\Gamma(Y){=}\frac{\overline{WY}}{\overline{WS}}\Gamma(S){+}\frac{\overline{YS}}{\overline{WS}}\Gamma(W){=}r\Gamma(S){+}(1-r)\Gamma(W)(1)$

Από τις προτάσεις B.6, σελίδα 16 και B.11, σελίδα 93, παίρνουμε: $\Gamma(S){=}\Gamma(W){+}\Gamma(Q)$-$\Gamma(P)(2)$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

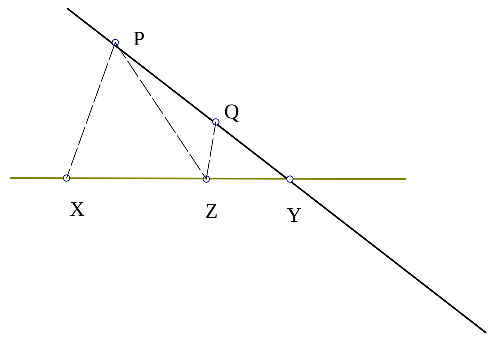
ΛΗΜΜΑ 3.5.2 *Έστω Γ(Y) είναι μια γραμμική γεωμετρική ποσότητα και σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή* $(INTER\ Y\ (LINE\ P\ Q)(LINE\ X\ Z))$ *τότε έχουμε:*

$$\Gamma(Y){=}\frac{S_{PXZ}\Gamma(Q)-S_{QXZ}\Gamma(P)}{S_{PXQZ}}$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων, $\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{PXZ}}{S_{PXQZ}}$

$$\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}} = \frac{S_{QXZ}}{S_{PXQZ}}$$



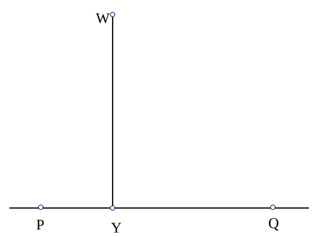
Σχήμα 3.24:

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (A) (σελίδα 110) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΛΗΜΜΑ 3.5.3 *Έστω $\Gamma(Y)$ είναι μια γραμμική γεωμετρική ποσότητα και σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(FOOT\ Y\ W\ P\ Q)$ τότε έχουμε:*

$\Gamma(Y) = \frac{P_{WPQ}\Gamma(Q) + P_{WQP}\Gamma(P)}{2\overline{PQ}^2}$

Απόδειξη



Σχήμα 3.25:

Από την πρόταση B.8 (σελίδα 89), παίρνουμε: $\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} = \frac{P_{WPQ}}{P_{PQP}}$

$\frac{\overline{YQ}}{\overline{PQ}} = \frac{P_{WQP}}{P_{PQP}}$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω σχέσεις στην (A) (σελίδα 110) παίρνουμε την ζητούμενη.

ΛΗΜΜΑ 3.5.4 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(PRATIO\ Y\ W\ P\ Q\ r)$ τότε έχουμε:*

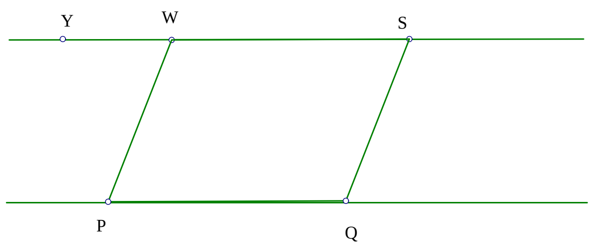
$$P_{AYB} = P_{AWB} + r(P_{AQB} - P_{APB} + P_{WPQ}) - r(1-r)P_{PQP}$$

Απόδειξη

Αν πάρουμε σημείο S τέτοιο ώστε: $\overline{WS} = \overline{PQ}$.

Τότε από την (B)(σελίδα 110) παίρνουμε:

$$\Gamma(Y)=\frac{\overline{WY}}{\overline{WS}}\Gamma(S)+\frac{\overline{YS}}{\overline{WS}}\Gamma(W)\text{-}\frac{\overline{WY}}{\overline{WS}}\frac{\overline{YS}}{\overline{WS}}P_{PQP}=r\Gamma(S)+(1-r)\Gamma(W)\text{-}r(1-r)P_{PQP}(1)$$



Σχήμα 3.26:

Από την πρόταση B.11, σελίδα 93, την δεύτερη σχέση παίρνουμε:

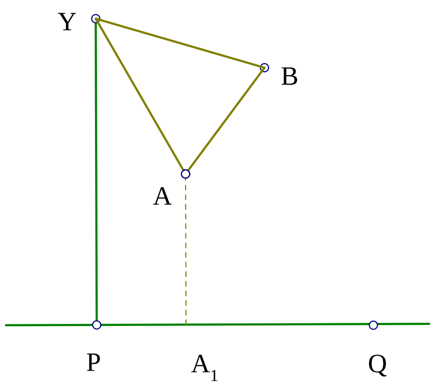
$$\Gamma(S)=\Gamma(W)+\Gamma(Q)\text{-}\Gamma(P)+P_{WPQ}(2)$$

Αν τώρα στην (1) αντικαθιστήσουμε την σχέση (2) θα πάρουμε την ζητούμενη σχέση.

ΛΗΜΜΑ 3.5.5 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(TRATIO\ Y\ P\ Q\ r)$ τότε έχουμε:*

$S_{ABY} = S_{ABP} - \frac{r}{4}P_{PAQB}$

Απόδειξη



Σχήμα 3.27:

Παίρνουμε σημείο A_1 να είναι η ορθογώνια προβολή του σημείου A πάνω στην PQ. Τότε από τις προτάσεις B.4 (σελίδα 15) και B.8 (σελίδα 89), θα πάρουμε:

$$\frac{S_{PAY}}{S_{PQY}} = \frac{S_{PA_1Y}}{S_{PQY}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PQ}} = \frac{P_{A_1PQ}}{P_{QPQ}} = \frac{P_{APQ}}{P_{QPQ}}$$

Άρα $S_{PAY} = \frac{P_{APQ}}{P_{QPQ}}S_{PQY} = \frac{r}{4}P_{APQ}$.

Αν εργαστούμε όμοια για το σημείο B, θα πάρουμε:

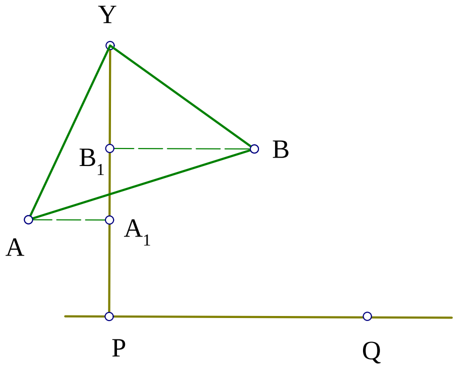
$$S_{PBY} = \frac{P_{BPQ}}{P_{QPQ}}S_{PQY} = \frac{r}{4}P_{BPQ}.$$

Τώρα $S_{ABY} = S_{ABP} + S_{PBY} - S_{PAY} = S_{ABP} - \frac{r}{4}P_{PAQB}$.

ΛΗΜΜΑ 3.5.6 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(TRATIO\ Y\ P\ Q\ r)$ τότε έχουμε:*

$P_{ABY} = P_{ABP} - 4rS_{PAQB}$

Απόδειξη



Σχήμα 3.28:

Παίρνουμε σημεία A_1, B_1 να είναι η ορθογώνιες προβολές των σημείων A, B αντίστοιχα πάνω στην PY.

Τότε $\frac{P_{BPAY}}{P_{YPY}} = \frac{P_{B_1PA_1Y}}{P_{YPY}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{PY}} = \frac{S_{PA_1QB_1}}{S_{PQY}} = \frac{S_{PAQB}}{S_{PQY}}$.

Επειδή $PY \perp PQ$, $S_{PQY}^2 = \frac{1}{4}\overline{PQ}^2\overline{PY}^2$.

Ακόμη $P_{YPY} = 2\overline{PY}^2 = 4rS_{PQY}$.

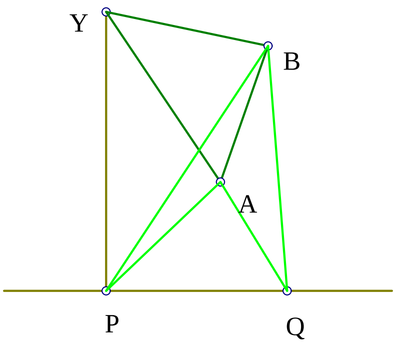
Έτσι λοιπόν $P_{ABY} = P_{ABP} - P_{BPAY} = P_{ABP} - 4rS_{PAQB}$.

ΛΗΜΜΑ 3.5.7 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(TRATIO\ Y\ P\ Q\ r)$ τότε έχουμε:*

$P_{AYB} = P_{APB} + r^2P_{PQP} - 4r(S_{APQ} + S_{BPQ})$

Απόδειξη

Από το προηγούμενο λήμμα θα πάρουμε:



Σχήμα 3.29:

$P_{APY} = 4rS_{APQ}$ και $P_{BPY} = 4rS_{BPQ}$

Ακόμη $P_{YPY} = 2\overline{PY}^2 = 4rS_{PQY} = r^2 P_{PQP}$

Τότε $P_{AYB} = P_{APB} - P_{APY} - P_{BPY} + P_{YPY} = P_{APB} + r^2 P_{PQP} - 4r(S_{APQ} + S_{BPQ})$.

ΑΠΑΛΟΙΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΛΟΓΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

ΛΗΜΜΑ 3.5.8 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(FOOT\ Y\ W\ P\ Q)$, υποθέτουμε $A \neq P$ τότε έχουμε:*

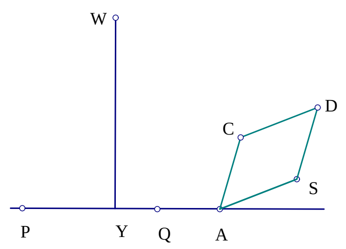
$$\frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \begin{cases} \frac{P_{WCAD}}{P_{CDC}}, & \text{αν } A \in PQ \cdot \\ \frac{S_{APQ}}{S_{CPDQ}}, & \text{αν } A \notin PQ. \end{cases}$$

Απόδειξη

Αν $A \in PQ$, παίρνουμε σημείο S τέτοιο ώστε: $\overline{AS} = \overline{CD}$.

Από τις προτάσεις B.8 (σελίδα 89) και B.12 (σελίδα 94), τότε:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AS}} = \frac{P_{WAS}}{P_{ASA}} = \frac{P_{WCAD}}{P_{CDC}}.$$



Σχήμα 3.30:

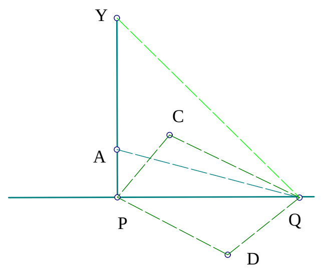
Αν $A \notin PQ$ τότε η δεύτερη σχέση προκύπτει άμεσα από το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων.

ΛΗΜΜΑ 3.5.9 *Έστω σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(TRATIO\ Y\ P\ Q\ r)$ τότε έχουμε:*

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \begin{cases} \frac{P_{APQ}}{P_{CPDQ}}, & \text{αν } A \notin PY \cdot \\ \frac{S_{APQ} - \frac{r}{4} P_{PQP}}{S_{CPDQ}}, & \text{αν } A \in PY. \end{cases}$$

Απόδειξη

Αν $A \notin PY$ τότε η πρώτη σχέση προκύπτει από την πρόταση Β.9 (σελίδα 90).



Σχήμα 3.31:

Αν $A \in PY$ τότε

$\frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{YP}}{\overline{CD}}.(1)$

Από το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων έχουμε:

$\frac{\overline{AP}}{\overline{CD}} = \frac{S_{APQ}}{S_{CPDQ}}(2)$

$\frac{\overline{YP}}{\overline{CD}} = \frac{S_{YPQ}}{S_{CPDQ}} = \frac{r}{4}\frac{P_{PQP}}{S_{CPDQ}}(3)$

Από τις (2) και (3) με αντικατασταση στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

Με την εφαρμογή των παραπάνω λημμάτων επιτυγχάνουμε την απαλοιφή των βοηθητικών σημείων από τις γεωμετρικές ποσότητες της πρόταση-ς. Σκοπός μας είναι οι γεωμετρικές ποσότητες που θα προκύψουν να απότελούνται μόνο από ελεύθερα σημεία. Να σημειώσουμε εδώ ότι οι γεωμετρικές ποσότητες του εμβαδού και της Πυθαγόρειας διαφοράς δεν εί-ναι ανεξάρτητες, το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται μέσω του τύπου $Herron-Qin$: $16S_{ABC}^2 = 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - P_{BAC}^2$. Για τον λόγο αυτό επιθυμούμε να εκ-φράσουμε τις γεωμετρικές αυτές ποσότητες σε μια σχέση που περιλαμβάνει ανεξάρτητες μεταβλητές. Έτσι εισάγουμε τρία νέα σημεία O, U, V τέτοια ώστε $UO \perp OV$. Καταλήγουμε επομένως να εκφράσουμε τις γεωμετρικές αυτές ποσότητες συναρτήση των εμβαδικών συντεταγμένων των ελεύθερων σημείων της πρότασης ως προς το OUV.

Συνέπεια των παραπάνω είναι το λήμμα που ακολουθεί.

ΛΗΜΜΑ 3.5.10 *Για οποιαδήποτε ελεύθερα σημεία A, B, C έχουμε:*

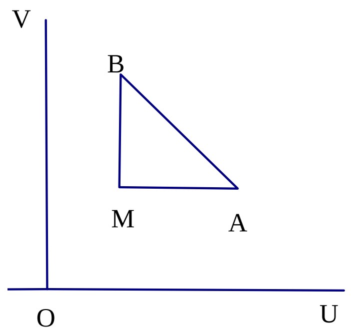
1. $S_{ABC} = \frac{(S_{OVB}-S_{OVC})S_{OUA}+(S_{OVC}-S_{OVA})S_{OUB}+(S_{OVA}-S_{OVB})S_{OUC}}{S_{OUV}}$

2. $P_{ABC} = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2$

3. $\overline{AB}^2 = \frac{\overline{OU}^2(S_{OVA}-S_{OVB})}{S_{OUV}^2} + \frac{\overline{OV}^2(S_{OUA}-S_{OUB})}{S_{OUV}^2}$

4. $S_{OUV}^2 = \frac{\overline{OU}^2 \overline{OV}^2}{4}$

Απόδειξη



Σχήμα 3.32:

1. Ανατρέξτε στην απόδειξη του λήμματος 2.5.3 (σελίδα 41), των τεχνικών απαλοιφής σημείων από τα εμβαδά.

2. Είναι ο ορισμός της Πυθαγόρειας διαφοράς.

3. Εισάγουμε σημείο M από την κατασκευή $(INTER\ M\ (PLINE\ A\,O\,U)(PLINE\ B\,O\,V)$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα: $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

Από το λήμμα 2.4.5 (σελίδα 32) των τεχνικών απαλοιφής σημείων από λόγους ευθυγράμμων τμημάτων, για $A \notin MB$ και $B \notin MA$, παίρνουμε:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{OU}} = \frac{S_{AOBV}}{S_{OOUV}} = \frac{S_{AOV} - S_{BOV}}{S_{OUV}}$

$\frac{\overline{BM}}{\overline{OV}} = \frac{S_{BOAU}}{S_{OOUV}} = \frac{S_{BOU} - S_{AOU}}{S_{OUV}}$

Από τα παραπάνω προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

4. Είναι συνέπεια γνωστής πρότασης.

3.6 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Εισάγουμε την γεωμετρική πρόταση Π, η οποία ανήκει στην κατηγορία C_L και είναι διατυπωμένη ως εξής:

Π=$(K_1, K_2, ..., K_n,\ \Sigma)$.

Ο αλγόριθμος εξετάζει αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής και αν είναι αληθής παράγει την απόδειξη ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, αλλιώς τερματίζει.

ΒΗΜΑ 1. Για $i = n, ..., 1$, ξεκινώντας δηλαδή από το σημείο που έχει κατασκευαστεί τελευταία καταλήγωντας στα σημεία που έχουν εισαχθεί αυθαίρετα μέσω της K_1 εφαρμόζουμε το επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των K_i. Αν η περιοριστική συνθήκη είναι: αν $A \neq B$ έλεγξε αν συμβαίνει $P_{ABA} = 0$, αν $AB \nparallel PQ$ έλεγξε αν συμβαίνει $S_{APQ} = S_{BPQ}$ και τέλος αν $AB \not\perp PQ$ έλεγξε αν $P_{APQ} = P_{BPQ}$. Αν ο αλγόριθμος επιβεβαιώνει την πρόταση Π, τότε η Π είναι αληθής κάτω από τις περιοριστικές συνθήκες που αυτόματα παράγονται από τον ορισμό 3.3.2 (σελίδα 105), αλλιώς η Π είναι ψευδής.

ΒΗΜΑ 3. Από το (Σ) συμπέρασμα της πρότασης παίρνουμε τις γεωμετρικές ποσότητες, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_l και τις φέρνουμε στο πρώτο μέρος με σκοπό το δεύτερο μέλος να είναι μονάδα. Για καθεμιά από τις γεωμετρικές ποσότητες εφαρμόζουμε το επόμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 4. Για καθένα από τα Γ_j,$j = 1, ..., l$, απαλοίφουμε τα βοηθητικά σημεία που κατασκευάστηκαν από τις K_i.

Για την απαλοιφή των σημείων αυτών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω εργαλεία: τις προτάσεις Β.1 έως Β.6 (σελίδες 13)- 16), τις προτάσεις Β.7 έως Β.12 (σελίδες 87- 94), τις τεχνικές απαλοιφής σημείων μέσω λόγων μηκών (σελίδα 116), τις τεχνικές απαλοιφής σημείων μέσω των εμβαδών και των Πυθαγόρειων διαφορών (σελίδα 110).

Αν το αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι μια γεωμετρική ποσότητα Γ'_j αποτελούμενη μόνο από σημεία που επιλέχθηκαν αυθαίρετα, τότε εφαρμόζουμε το λήμμα 3.5.10 (σελίδα 118), με σκοπό να προκύψει μια ρητή έκφραση ανεξάρτητων μεταβλητων, αλλιώς εφαρμόζουμε από την αρχή το βήμα 4.

ΒΗΜΑ 5. Καταλήξαμε στο να εξισώσουμε τους αρχικούς λόγους γεωμετρικών ποσοτήτων με λόγους γεωμετρικών ποσοτήτων που περιλαμβάνουν μόνο ανεξάρτητες μετάβλητές. Γίνονται οι απαιτούμενες απλοποιήσεις και αν καταλήξουμε στην ισότητα με τη μονάδα τότε η πρόταση Π είναι αληθής αλλιώς η Π είναι ψευδής.

Απόδειξη ορθότητας αλγορίθμου.

Παραπάνω εξήγηση χρειάζεται το τελευταίο βήμα. Έτσι λοιπόν αν καταλήξουμε στην εξίσωση του λόγου γεωμετρικών ποσοτήτων με την μονάδα, δηλαδή $r = 1$ τότε η πρόταση είναι αληθής. Αλλιώς αφού οι γεωμετρικές ποσότητες αποτελούνται από ελεύθερες παραμέτρους, μπορούμε να βρούμε τιμές για τις γεωμετρικές ποσότητες τέτοιες ώστε $r \neq 1$. Συνεπώς βρίσκουμε ένα αντιπαράδειγμα για το οποίο η πρόταση δεν ισχύει.

3.7 ΕΜΒΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Είχαμε εισάγει στο λήμμα 3.5.10 (σελίδα 118) το ορθογώνιο σύστημα εμβαδικών συντεταγμένων. Είδαμε πως για να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα αυτό έπρεπε να εισάγουμε τρία αυθαίρετα σημεία O, U και V, τέτοια ώστε $OU \not\perp OV$. Τώρα θα βελτιώσουμε το λήμμα 3.5.10 και κατά συνέπεια και τον αλγόριθμο με την εισαγωγή του **λοξού συστήματος εμβαδικών συντεταγμένων**, κατά το οποίο οποιαδήποτε τρία σημεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημεία αναφοράς.

Γνωρίζουμε ήδη ότι αν O, U και V είναι τρία μη συνευθειακά σημεία και A είναι ένα οποιοδήποτε σημείο τότε οι εμβαδικές συντεταγμένες του σημείου A ως προς το OUV είναι οι ακόλουθες:

$x_A = \frac{S_{OUA}}{S_{OUV}}$, $y_A = \frac{S_{VOA}}{S_{OUV}}$ και $z_A = \frac{S_{UVA}}{S_{OUV}}$.

Είναι φανερό ότι ισχύει: $x_A + y_A + z_A = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7.1 *Τα σημεία του επιπέδου είναι σε ένα προς ένα αντι-*

στοιχία με τα σημεία (x, y, z) *έτσι ώστε* $x_A + y_A + z_A = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7.2 *Για οποιαδήποτε σημεία* A, B *και* C *έχουμε:*

$$S_{ABC} = -S_{OUV} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = -S_{OUV} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι για αν ένα σημείο R *ανήκει πάνω στην ευθεία* AB, *τότε οι εμβαδικές συντεταγμένες του σημείου* R *πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω σχέση, η οποία είναι η εξίσωση της ευθείας* AB :

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7.3 *Έστω* R *σημείο πάνω στην ευθεία* PQ *και* $r_1 = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$, $r_2 = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}}$.

Τότε: $x_R = r_1 x_Q + r_2 x_P,\ y_R = r_1 y_Q + r_2 y_P,\ z_R = r_1 z_Q + r_2 z_P$

Απόδειξη

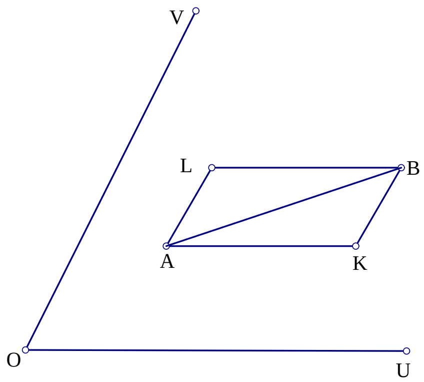
Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια της B.3 (σελίδα 15).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7.4 *Για δυο σημεία* A *και* B *έχουμε:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{OV}^2 (x_B - x_A)^2 + \overline{OU}^2 (y_B - y_A)^2 + P_{UOV}(x_B - x_A)(y_B - y_A).$$

Απόδειξη

Έστω K και L να είναι σημεία τέτοια ώστε $KA \parallel OU$, $KB \parallel OV$, $LA \parallel OV$ και $LB \parallel OU$.



Σχήμα 3.33:

Τότε από πρόταση 3.2.3 (σελίδα 93) παίρνουμε:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 - P_{AKB} = \overline{OU}^2(\frac{\overline{AK}}{\overline{OU}})^2 + \overline{OV}^2(\frac{\overline{BK}}{\overline{OV}})^2 + P_{LAK} \ (1)$$

Από το λήμμα 2.4.9 (σελίδα 34), παίρνουμε:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{OU}} = \frac{S_{BOAV}}{S_{UOV}} = y_B - y_A \ \ \frac{\overline{BK}}{\overline{OV}} = \frac{S_{BOAU}}{S_{OVU}} = x_A - x_B \ (2).$$

Όμως από την πρόταση 3.2.4 (σελίδα 94) επειδή $AL \parallel OV$ και $AK \parallel OU$ παίρνουμε:

$$P_{LAK} = \frac{\overline{AL}}{\overline{OV}}\frac{\overline{AK}}{\overline{OU}}P_{UOV} = (y_B - y_A)(x_B - x_A)P_{UOV}. \ (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.7.5 *Ισχύει ότι:* $2\overline{AB}^2 = P_{OVU}(x_B - x_A)^2 + P_{OUV}(y_B - y_A)^2 + P_{UOV}(z_B - z_A)^2$

Απόδειξη

Από την πρόταση 3.7.1 (σελίδα 121):

$z_A - z_B = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)$

και από την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ένας εναλλακτικός τρόπος μετατροπής των γεωμετρικών ποσοτήτων σε μια έκφραση που περιλαμβάνει μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ο ακόλουθος. Αν συμβολίσουμε με A την έκφραση που περιλαμβάνει εμβαδά και Πυθαγόρειες διαφορές ελεύθερων σημείων, τότε αν οι ποσότητες αυτές περιέχουν λιγότερα από τρία σημεία δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτα. Όμως αν οι ποσότητες αυτές περιέχουν πάνω από δυο σημεία τότε επιλέγουμε τρία ελεύθερα σημεία O, U, V από τα σημεία που περιλαμβάνει η A, και εφαρμόζουμε τις προτάσεις 3.7.2 και 3.7.4 (σελίδα 122), με σκοπό να μετατρέψουμε τα εμβαδά και τις Πυθαγόρειες διαφορές σε εμβαδικές συντεταγμένες ως προς το OUV. Τώρα η A περιέχει εμβαδικές συντεταγμένες ελεύθερων σημείων, $\overline{OU}^2$, $\overline{OV}^2$, $\overline{UV}^2$ και S_{OUV}. Η μόνη αλγεβρική έκφραση που ενώνει τις παραπάνω ποσότητες είναι ο τύπος $Herron - Qin$ $16S_{OUV}^2 = 4\overline{OU}^2\overline{OV}^2 - P_{UOV}^2$.(1) Αντικαθιστώντας την (1) στην A παίρνουμε μια έκφραση που περιλαμβάνει μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές.

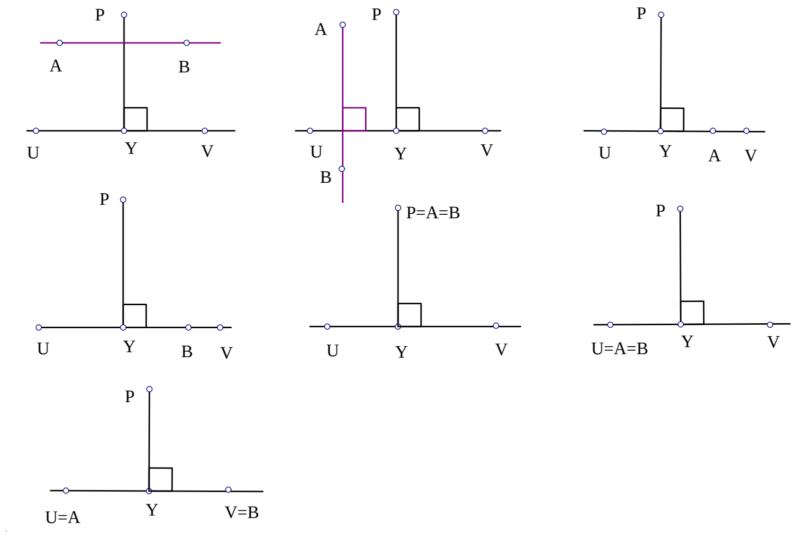
3.8 ΕΙΔΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ- ΣΥΣΤΗΜΑ (GIB)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε το σύστημα (GIB) των αυτόματων αποδείξεων γεωμετρικών προτάσεων που ακήκουν στην κατηγορία C_H. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την διαδικασία του συστήματος (GIB) στις αυτόματες αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που ακήκουν στην κατηγορία C_L.

Η μέθοδος που παρουσιάσαμε στο παρόν κεφάλαιο, αναφέρεται στην επίλυση γεωμετρικών προτάσεων που ανήκουν στην κατηγορία C_L. Η μέθοδος στηρίζεται σε ένα ελάχιστο σύνολο κατασκευών (συνολικά 5 κατασκευές), γεγονός που επιρρεάζει την έκταση των αποδείξεων των γεωμετρικών προτάσεων. Το ελάχιστο σύνολο κατασκευών από τη μια πλευρά βοηθάει στην αποφυγή δημιουργίας επιπλέον τεχνικών απαλοιφής σημείων, αλλά από την άλλη συμβάλει στην εισαγωγή μεγάλου πλήθους βοηθητικών σημείων. Ενδεικτικά αναφέρουμε το εξής παράδειγμα, η κατασκευή $(PLINE\ W\ U\ V)$ έχει αντικατασταθεί από την κατασκευή $(LINE\ W\ S)$, όπου S είναι ένα βοηθητικό σημείο που εισάγεται μέσω της κατασκευής $(PRATIO\ S\ W\ U\ V\ 1)$.

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε ειδικές περιπτώσεις τεχνικών απαλοιφής για μια από τις κατασκευές που εισάγαμε στο παρόν κεφάλαιο με σκοπό την μείωση της έκτασης των αποδείξεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα για να εξηγήσουμε την λειτουργία του (GIB) στην αυτόματη παραγωγή αποδείξεων γεωμετρικών προτάσεων που ακήκουν στην κατηγορία C_L.

$*$Ειδικές περιπτώσεις τεχνικών απαλοιφής της κατασκευής $(FOOT\ Y\ P\ U\ V)$.



Σχήμα 3.34:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Αν $AB \parallel UV$ τότε $S_{ABY} = S_{ABU}$.

Απόδειξη: Αφού $AB \parallel UV$ άρα $AB \parallel UY$ επομένως από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Αν $AB \perp UV$ τότε $S_{ABY} = S_{ABP}$.

Απόδειξη: Αφού $AB \perp UV$ άρα $AB \parallel PY$ επομένως από την πρόταση B.4 (σελίδα 15) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3. Αν A, U, V συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{UBV} P_{PUAV}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τον λόγο $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}}$. Εφαρμόζουμε την πρόταση Β.1 (σελίδα 13) και παίρνουμε: $\frac{S_{ABY}}{S_{UBV}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{UV}}$. Τώρα από το λήμμα 3.5.8 (σελίδα 116) έχουμε: $\frac{\overline{AY}}{\overline{UV}} = \frac{P_{PUAV}}{P_{UVU}}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4. Αν B, U, V συγγραμμικά τότε $S_{ABY} = \frac{S_{AUV}P_{PUBV}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται όμοια με την περίπτωση 3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5. Αν $AB \parallel UV$ τότε $P_{ABY} = P_{ABP}$.

Απόδειξη: Αφού $AB \parallel UV$ τότε $AB \perp YP$ άρα από την πρόταση Β.7 (σελίδα 87) παίρνουμε $P_{ABY} = P_{ABP}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6. Αν $AB \perp UV$ τότε $P_{ABY} = P_{ABU}$.

Απόδειξη: Άμεση απόρροια της πρότασης Β.7.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7. Αν B, U, V συγγραμμικά τότε $P_{ABY} = \frac{P_{ABU}P_{PBU}}{P_{UBU}}$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τον λόγο $\frac{P_{ABY}}{P_{ABU}}$. Εφαρμόζουμε την πρόταση 3.2.2 (σελίδα 91) και παίρνουμε: $\frac{P_{ABY}}{P_{ABU}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BU}}$. Τώρα από το λήμμα 3.5.8 (σελίδα 116) έχουμε: $\frac{\overline{BY}}{\overline{BU}} = \frac{P_{PBU}}{P_{UBU}}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 8. Αν $A = B = P$ τότε $P_{AYB} = \frac{16S^2_{PUV}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Από τον τύπο (Β)(σελίδα 110) των τεχνικών απαλοιφής και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A = B = P$ παίρνουμε τον τύπο

$P_{PYP} = \frac{P_{PUV}P_{PVP}+P_{PVU}P_{PUP}-P_{PUV}P_{PVU}}{P_{UVU}}$. Με χρήση τώρα του τύπου $Herron - Qin$ (σελίδα 97) παίρνουμε:

$$P_{PYP} = \frac{P_{PUV}P_{PVP}+P_{PVU}P_{PUP}-P_{PUV}P_{PVU}}{P_{UVU}}$$

$$= \frac{16S^2_{PUV}-P_{UPV}P_{PVU}+16S^2_{PUV}-P_{VPU}P_{VUP}-16S^2_{PUV}+P_{UVU}P_{UPV}}{P_{UVU}}$$

$= \frac{16S^2_{PUV}+P_{UPV}(P_{UVU}-P_{PVU}-P_{VUP})}{P_{UVU}}$

$= \frac{16S^2_{PUV}+P_{UPV}(P_{VUP}-P_{VUP})}{P_{UVU}}$

$= \frac{16S^2_{PUV}}{P_{UVU}}.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 9. Αν $A = B = U$ τότε $P_{AYB} = \frac{P^2_{PUV}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Από τον τύπο (B)(σελίδα 110) των τεχνικών απαλοιφής και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A = B = U$ παίρνουμε:

$P_{UYU} = \frac{P_{PUV}P_{UVU}-P_{PUV}P_{PVU}}{P_{UVU}} = \frac{P_{PUV}(P_{UVU}-P_{PVU})}{P_{UVU}}$

$= \frac{P_{PUV}P_{UVPU}}{P_{UVU}} = \frac{P_{PUV}P_{VUP}}{P_{UVU}} = \frac{P^2_{PUV}}{P_{UVU}}.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 10. Αν $A = B = V$ τότε $P_{AYB} = \frac{P^2_{PVU}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται όμοια με την περίπτωση 9.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 11. Αν $A = U$, $B = V$ τότε $P_{AYB} = \frac{-P_{PVU}P_{PUV}}{P_{UVU}}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τον τύπο (B)(σελίδα 110) των τεχνικών απαλοιφής για $A = B = U$ παίρνουμε απευθείας την ζητούμενη σχέση.

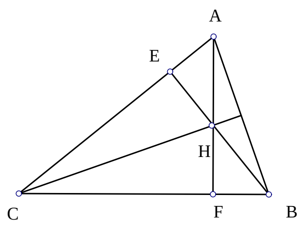
Εφαρμογή του συστήματος (GIB) σε γεωμετρικές προτάσεις της κατηγορίας C_L.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΥ

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

$K_2 : (FOOT\ E\,B\,A\,C)$: Έστω σημείο E το σημείο τομής της ευθείας AC και της ευθείας που περνά από το σημείο B και είναι κάθετη στην AC.



Σχήμα 3.35:

K_3 : $(FOOT\ F\ A\ B\ C)$: Έστω σημείο F το σημείο τομής της ευθείας BC και της ευθείας που περνά από το σημείο A και είναι κάθετη στην BC.

K_4 : $(INTER\ H\ (LINE\ A\ F)(LINE\ B\ E)$: Έστω H το σημείο τομής των ευθειών AF και BE.

Σ: Ισχύει: $P_{ACH} = P_{BCH}$.

Συλλογή συγγραμμικών σημείων και κάθετων ευθειών:

$(H,\ A,\ F)(F,\ C,\ B)(H,\ E,\ B)(E,\ A,\ C)$

ακόμη $HAF \perp BCF$, $HEB \perp EAC$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, H, F, E εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $AF \nparallel BE$ και $A \neq C$, $B \neq C$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{P_{ACH}}{P_{BCH}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου H, χρησιμοποιούμε την έκτη ειδική περίπτωση των τεχνικών απαλοιφής της κατασκευής ($FOOT$) (σελίδα 125))

($P_{BCH} = P_{ACB},\ P_{ACH} = P_{ACB}$, αφού $BH \perp AC$ και $CH \perp AB$.)

$\frac{P_{ACH}}{P_{BCH}} = \frac{P_{ACB}}{P_{ACB}}$

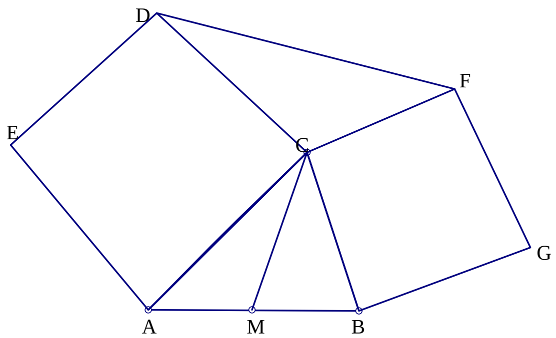
ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

3.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Ι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Στις δυο πλευρές AC και BC ενός τριγώνου ABC, σχεδιάζουμε δυο τετράγωνα $ACDE$ και $BCFG$. Το M είναι το μέσον της AB. Ισχύει ότι η CM είναι κάθετη στην DF.



Σχήμα 3.36:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 ($POINTS\ A\ B\ C$): Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

K_2 ($TRATIO\ D\ C\ A\ 1$): Έστω D σημείο πάνω στην ευθεία ($TLINE\ C\ C\ A$)

τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = 1$.

K_3 $(TRATIO\ F\ C\ B\ -1)$: Έστω F σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ C\ C\ B)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = -1$.

K_4 $(MIDPOINT\ M\ A\ B)$: Έστω σημείο M το μέσον της ευθείας AB.

Σ: $P_{DCM} = P_{FCM}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, M, F, D εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $A \neq B, C \neq B, C \neq A$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{P_{DCM}}{P_{FCM}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(P_{FCM} = \frac{1}{2}P_{ACF},\ P_{DCM} = \frac{1}{2}P_{BCD})$

$\frac{P_{DCM}}{P_{FCM}} = \frac{\frac{1}{2}P_{BCD}}{\frac{1}{2}P_{ACF}}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6 (σελίδα 114))

$(P_{ACF} = 4S_{ABC})$

$\frac{\frac{1}{2}P_{BCD}}{\frac{1}{2}P_{ACF}} = \frac{P_{BCD}}{4S_{ABC}}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6)

$(P_{BCD} = 4S_{ABC})$

$\frac{P_{BCD}}{4S_{ABC}} = \frac{4S_{ABC}}{4S_{ABC}}$

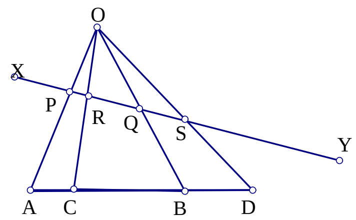
ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

$\frac{4S_{ABC}}{4S_{ABC}} = 1.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Έστω A, B, C, D τέσσερα σημεία, που αποτελούν αρμονική ακολουθία και O τυχαίο σημείο εκτός της ευθείας AB. Τότε κάθε διατέμνουσα τέμνει τις ευθείες OA, OB, OC, OD σε τέσσερα αρμονικά σημεία.

Απόδειξη



Σχήμα 3.37:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ A\,B\,X\,Y\,O)$: Έστω πέντε αυθαίρετα σημεία A, B, X, Y, O

K_2 $(MRATIO\ C\,A\,B\,r)$: Έστω C σημείο πάνω στην AB τέτοιο ώστε:

$-r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

K_3 $(MRATIO\ D\,A\,B\ -r)$: Έστω D σημείο πάνω στην AB τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$

K_4 $(INTER\ P\,(LINE\ O\,A)(LINE\ X\,Y))$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών OA με XY.

K_5 $(INTER\ Q\,(LINE\ O\,B)(LINE\ X\,Y))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών OB με XY.

K_6 $(INTER\ R\,(LINE\ O\,C)(LINE\ X\,Y))$: Έστω R το σημείο τομής των ευθειών OC με XY.

K_7 $(INTER\ S\,(LINE\ O\,D)(LINE\ X\,Y))$: Έστω S το σημείο τομής των ευθειών OD με XY.

Σ: Ισχύει $-\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, S, R, Q, P, D, C εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $OA \nparallel XY, OB \nparallel XY, OC \nparallel XY, OD \nparallel XY, A \neq B$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{-\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}}{\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}} = 1$.

και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου S, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2 (σελίδα 14), το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων)

$(\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}} = \frac{S_{ODP}}{S_{OCQ}})$

$\frac{-\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}}{\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}} = \frac{-S_{ODP}}{\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}S_{ODQ}}$

(Απαλοιφή σημείου R, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2)

$(\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{S_{OCP}}{S_{OCQ}})$

$\frac{-S_{ODP}}{\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}S_{ODQ}} = \frac{-S_{ODP}S_{OCQ}}{S_{OCP}S_{ODQ}}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.2 (σελίδα 111))

$(S_{ODQ} = \frac{-S_{OXY}S_{OBD}}{S_{OXBY}},\ S_{OCQ} = \frac{-S_{OXY}S_{OBC}}{S_{OXBY}})$

$\frac{-S_{ODP}S_{OCQ}}{S_{OCP}S_{ODQ}} = \frac{-S_{ODP}(\frac{-S_{OXY}S_{OBC}}{S_{OXBY}})}{S_{OCP}(\frac{-S_{OXY}S_{OBD}}{S_{OXBY}})}$

(Απλοποιήσεις)

$\frac{-S_{ODP}(\frac{-S_{OXY}S_{OBC}}{S_{OXBY}})}{S_{OCP}(\frac{-S_{OXY}S_{OBD}}{S_{OXBY}})} = \frac{-S_{ODP}S_{OBC}}{S_{OCP}S_{OBD}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.2)

$(S_{OCP} = \frac{-S_{OXY}S_{OAC}}{S_{OXAY}},\ S_{ODP} = \frac{-S_{OXY}S_{OAD}}{S_{OXAY}})$

$\frac{-S_{ODP}S_{OBC}}{S_{OCP}S_{OBD}} = \frac{-(\frac{-S_{OXY}S_{OAD}}{S_{OXAY}})S_{OBC}}{\frac{-S_{OXY}S_{OAC}}{S_{OXAY}}S_{OBD}}$

(Απλοποιήσεις)

$\frac{-(\frac{-S_{OXY}S_{OAD}}{S_{OXAY}})S_{OBC}}{\frac{-S_{OXY}S_{OAC}}{S_{OXAY}}S_{OBD}} = \frac{-S_{OAD}S_{OBC}}{S_{OAC}S_{OBD}}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2)

$(S_{OBD} = \frac{S_{OAB}}{r-1},\ S_{OAD} = \frac{rS_{OAB}}{r-1})$

$\frac{-S_{OAD}S_{OBC}}{S_{OAC}S_{OBD}} = \frac{S_{OBC}(\frac{-rS_{OAB}}{r-1})}{S_{OAC}(\frac{S_{OAB}}{r-1})}$

(Απλοποιήσεις)

$\frac{S_{OBC}(\frac{-rS_{OAB}}{r-1})}{S_{OAC}(\frac{S_{OAB}}{r-1})} = \frac{-rS_{OBC}}{S_{OAC}}$

(Απαλοιφή σημείου C, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2)

$(S_{OAC} = \frac{rS_{OAB}}{r+1},\ S_{OBC} = \frac{-S_{OAB}}{r+1})$

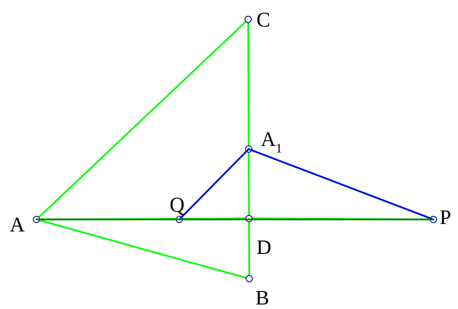
$\frac{-rS_{OBC}}{S_{OAC}} = \frac{-r(\frac{-S_{OAB}}{r+1})}{\frac{rS_{OAB}}{r+1}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

$= 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.

Έστω AD και AA_1 είναι το ύψος και το μέσον του τριγώνου ABC. Φέρνουμε από το σημείο A_1 τις παράλληλες στις ευθείες AB και AC, οι οποίες τέμνουν την AD στα σημεία P και Q. Τότε ισχύει ότι τα σημεία A, D, P, Q είναι αρμονικά.



Σχήμα 3.38:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C)$ Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

$K_2 : (FOOT\ D\,A\,B\,C) \equiv (INTER\ D\,(LINE\ B\,C)(TLINE\ A\,B\,C))$ Έστω D το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην BC.

$K_3 : (MIDPOINT\ A_1\,B\,C) \equiv (PRATIO\ A_1\,B\,B\,C\,\frac{1}{2})$ Έστω σημείο A_1 το μέσον της BC.

$K_4 : (INTER\ P\,(LINE\ A\,D)(PLINE\ A_1\,A\,B))$ Έστω P το σημείο τομής της ευθείας AD και της παράλληλης από το σημείο A_1 στην AC.

$K_5 : (INTER\ Q\,(LINE\ A\,D)(PLINE\ A_1\,A\,C))$ Έστω Q το σημείο τομής της ευθείας AD και της παράλληλης από το σημείο A_1 στην AC.

Σ: Ισχύει $-\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, Q, P, A_1, D εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $B \neq C$ και $AD \nparallel AC$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{-\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}}{\frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.15 (σελίδα 37))

$(\frac{\overline{AQ}}{DQ} = \frac{S_{ACA_1}}{S_{ADA_1}})$

$\frac{-\frac{\overline{AP}}{DP}}{\frac{\overline{AQ}}{DQ}} = (-\frac{\overline{AP}}{DP})(\frac{-S_{ADA_1}}{-S_{ACA_1}})$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.15)

$(\frac{\overline{AP}}{DP} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{ADA_1}})$

$(-\frac{S_{ABA_1}}{S_{ADA_1}})(\frac{-S_{ADA_1}}{-S_{ACA_1}}) = \frac{-S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}$

(Απαλοιφή σημείου A_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(S_{ACA_1} = -\frac{1}{2}S_{ABC},\ S_{ABA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC})$

$\frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{-\frac{1}{2}S_{ABC}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.

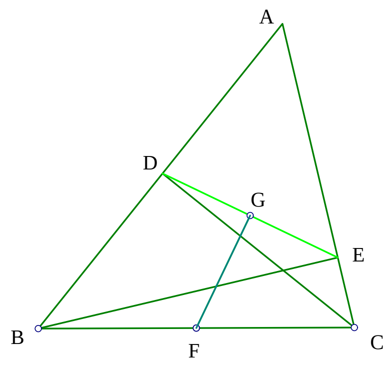
Έστω F το μέσον της πλευράς BC του τριγώνου ABC. Έστω D και E οι ορθογώνιες προβολές των σημείων C και B πάνω στις πλευρές AB και AC αντίστοιχα. Το σημείο G είναι το μέσον της DE. Ισχύει ότι η ευθεία FG τέμνει κάθετα την DE στο σημείο G.

Απόδειξη

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C)$ Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

$K_2 : (FOOT\ D\,C\,A\,B) \equiv (INTER\ D\,(LINE\ A\,B)(TLINE\ C\,A\,B))$



Σχήμα 3.39:

Έστω D το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από το C και είναι κάθετη στην AB.

$K_3 : (FOOT\ E\ B\ A\ C) \equiv (INTER\ E\ (LINE\ A\ C)(TLINE\ B\ A\ C))$
Έστω E το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην AC.

$K_4 : (MIDPOINT\ F\ B\ C) \equiv (PRATIO\ F\ B\ B\ C\ \frac{1}{2})$ Έστω σημείο F το μέσον της BC.

$K_5 : (MIDPOINT\ G\ D\ E) \equiv (PRATIO\ G\ D\ D\ E\ \frac{1}{2})$ Έστω σημείο G το μέσον της DE.

Σ: Ισχύει $P_{EDG} = P_{EDF}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, G, F, E, D εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $A \neq B,\ A \neq C,\ B \neq C,\ D \neq E$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{P_{EDG}}{P_{EDF}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(P_{EDG} = \frac{1}{2}P_{DED})$

$\frac{P_{EDG}}{P_{EDF}} = \frac{\frac{1}{2}P_{DED}}{P_{EDF}}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1)

$(P_{EDF} = \frac{1}{2}(P_{CDE} + P_{BDE}))$

$\frac{P_{DED}}{2(\frac{1}{2}P_{CDE}+\frac{1}{2}P_{BDE})}$

(Απαλοιφή σημείου E, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.3 (σελίδα 112))

$(P_{BDE} = \frac{P_{ADB}P_{ACB}}{P_{ACA}},\ P_{CDE} = \frac{P_{CDC}P_{BAC}}{P_{ACA}},\ P_{DED} = \frac{P_{CDC}P_{BAC}-P_{BAC}P_{ACB}+P_{ADA}P_{ACB}}{P_{ACA}})$

$\frac{\frac{P_{CDC}P_{BAC}-P_{BAC}P_{ACB}+P_{ADA}P_{ACB}}{P_{ACA}}}{2(\frac{1}{2}\frac{P_{CDC}P_{BAC}}{P_{ACA}}+\frac{1}{2}\frac{P_{ADB}P_{ACB}}{P_{ACA}})} = \frac{P_{CDC}P_{BAC}-P_{BAC}P_{ACB}+P_{ADA}P_{ACB}}{P_{CDC}P_{BAC}+P_{ADB}P_{ACB}}$

(Απαλοιφή σημείου D, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.3 (σελίδα 112))

$(P_{ADB} = \frac{-P_{BAC}P_{ABC}}{P_{ABA}},\ P_{ADA} = \frac{P_{BAC}^2}{P_{ABA}},\ P_{CDC} = \frac{16S_{ABC}^2}{P_{ABA}})$

$\frac{\frac{16S_{ABC}^2}{P_{ABA}}P_{BAC}-P_{BAC}P_{ACB}+P_{ACB}\frac{P_{BAC}^2}{P_{ABA}}}{\frac{16S_{ABC}^2}{P_{ABA}}P_{BAC}+P_{ACB}\frac{-P_{BAC}P_{ABC}}{P_{ABA}}} = \frac{P_{BAC}P_{ACB}-P_{ACB}P_{ABA}+16S_{ABC}^2}{-(P_{ACB}P_{ABC}-16S_{ABC}^2)}$

$(Herron - Qin : 16S_{ABC}^2 = P_{BAC}P_{ACB} + P_{ACA}P_{ABC}$ και $P_{ABC} = \frac{1}{2}(P_{BCB} - P_{ACA} + P_{ABA})$, $P_{ACB} = \frac{1}{2}(P_{BCB} + P_{ACA} - P_{ABA})$, $P_{BAC} = -\frac{1}{2}(P_{BCB} - P_{ACA} - P_{ABA}))$

$$\frac{16(32P_{BAC}P_{ACB}-16P_{ACB}P_{ABA}+16P_{ACA}P_{ABC})}{16(16P_{BAC}P_{ACB}-16P_{ACB}P_{ABC}+16P_{ACA}P_{ABC})} = \frac{2^4(-2P_{BCB}^2+2P_{BCB}P_{ACA}+2P_{BCB}P_{ABA})}{2^3(-4P_{BCB}^2+4P_{BCB}P_{ACA}+4P_{BCB}P_{ABA})}$$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

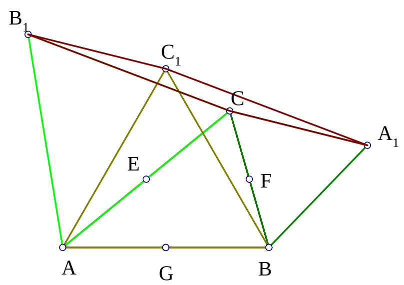
=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.

Στις πλευρές ενός τριγώνου ABC σχεδιάζουμε τρία ισόπλευρα τρίγωνα A_1BC, AB_1C και ABC_1. Τότε το $CA_1C_1B_1$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Σημείωση: στην διατύπωση της πρότασης απαιτούμε: $r = \sqrt{3}$ και αυτό επειδή γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου ισούται: $\nabla AB_1C = \frac{\overline{AC}^2\sqrt{3}}{4}$, δηλαδή $\frac{1}{2}\overline{ACB_1E} = \frac{\sqrt{3}\overline{AC}^2}{4}$, όμως το ύψος ισόπλευρου τριγώνου είναι και διάμεσος, έτσι λοιπόν προκύπτει ότι: $\frac{\overline{B_1E}}{\overline{AE}} = \sqrt{3}$. Για αυτόν τον λόγο ακολουθούμε την παρακάτω περιγραφή της πρότασης.)

Απόδειξη



Σχήμα 3.40:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ A\ B\ C)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

K_2 $(CONSTANT\ r^2 - 3)$.

K_3 $(MIDPOINT\ E\,A\,C) \equiv (PRATIO\ E\,A\,A\,C\,\frac{1}{2})$: Έστω E το μέσον της ευθείας AC.

K_4 $(TRATIO\ B_1\,E\,A\,r)$: Έστω B_1 σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ E\,E\,A)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{B_1E}}{\overline{EA}}$.

K_5 $(MIDPOINT\ F\,B\,C) \equiv (PRATIO\ F\,B\,B\,C\,\frac{1}{2})$: Έστω F το μέσον της ευθείας BC.

K_6 $(TRATIO\ A_1\,F\,C\,r)$: Έστω A_1 σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ F\,F\,C)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{A_1F}}{\overline{FC}}$.

K_7 $(MIDPOINT\ G\,A\,B) \equiv (PRATIO\ G\,A\,A\,B\,\frac{1}{2})$: Έστω G το μέσον της ευθείας AB.

K_8 $(TRATIO\ C_1\,G\,B\,-r)$: Έστω C_1 σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ G\,G\,B)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{C_1G}}{\overline{GB}}$.

Σ: $S_{DB_1A_1} = S_{CB_1C_1}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, C_1, G, A_1, F, B_1, E εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $B \neq C$, $A \neq E$, $G \neq A$, $F \neq C$, $A \neq B$, $G \neq B$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{S_{CB_1A_1}}{S_{CB_1C_1}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου G_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6 (σελίδα 114))

$(S_{CB_1C_1} = \frac{1}{4}(rP_{B_1B}CG + 4S_{CB_1G}))$

$\frac{S_{CB_1A_1}}{S_{CB_1C_1}} = \frac{S_{CB_1A_1}}{\frac{1}{4}rP_{B_1BCG+S_{CB_1G}}}$

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(S_{CB_1G} = \frac{1}{2}(S_{BCB_1+S_{ACB_1}}),\ P_{B_1BCG} = -\frac{1}{2}(P_{BCB_1} - P_{ACB_1}))$

$\frac{4S_{CB_1A_1}}{-\frac{1}{2}rP_{BCB_1}+\frac{1}{2}rP_{ACB_1}+2S_{BCB_1+2S_{ACB_1}}}$

(Απαλοιφή σημείου A_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6 και 3.5.7 (σελίδα 114))

$(S_{CB_1A_1} = -\frac{1}{4}(rP_{B_1CF} - 4S_{CB_1F}))$

$\frac{2rP_{B_1CF}-8S_{CB_1F}}{rP_{BCB_1}-rP_{ACB_1}-4S_{BCB_1}-4S_{ACB_1}}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1)

$(S_{CB_1F} = \frac{1}{2}S_{BCB_1},\ P_{B_1CF} = \frac{1}{2}P_{BCB_1})$

$\frac{rP_{BCB_1}-4S_{BCB_1}}{rP_{BCB_1}-rP_{ACB_1}-4S_{BCB_1}-4S_{ACB_1}}$

(Απαλοιφή σημείου B_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6 και 3.5.7)

$(S_{ACB_1} = -\frac{1}{4}rP_{CAE},\ P_{ACB_1} = P_{ACE}$

$S_{BCB_1} = -\frac{1}{4}(rP_{CABE} - 4S_{BCE},\ P_{BCB_1} = P_{BCE} + 4rS_{ABE}))$

$\frac{rP_{CABE}+rP_{BCE}-4S_{BCE}+4r^2S_{ABE}}{rP_{CABE}-rP_{CAE}+rP_{BCE}-rP_{ACE}-4S_{BCE}+4r^2S_{ABE}}$

(Απαλοιφή σημείου E, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1)

$(P_{ACE} = \frac{1}{2}P_{ACA},\ P_{CAE} = \frac{1}{2}P_{ACA}$

$S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABC},\ S_{BCE} = \frac{1}{2}S_{ABC}$

$P_{BCE} = \frac{1}{2}P_{ACB},\ P_{CABE} = \frac{1}{2}(P_{BCB} - P_{ABC}))$

$\frac{\frac{1}{2}rP_{BCB}+\frac{1}{2}rP_{ACB}-\frac{1}{2}rP_{ABC}+2r^2S_{ABC}-2S_{ABC}}{\frac{1}{2}rP_{BCB}+\frac{1}{2}rP_{ACB}-\frac{1}{2}rP_{ABC}+2r^2S_{ABC}-2S_{ABC}}$

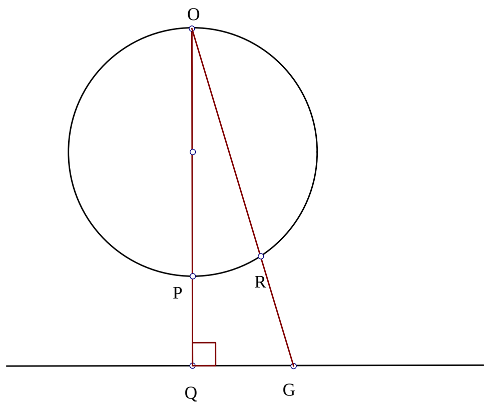
ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

$= 1.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.

Το αντίστροφο ενός κύκλου που περνά από κέντρο αντιστροφής είναι ευθεία.

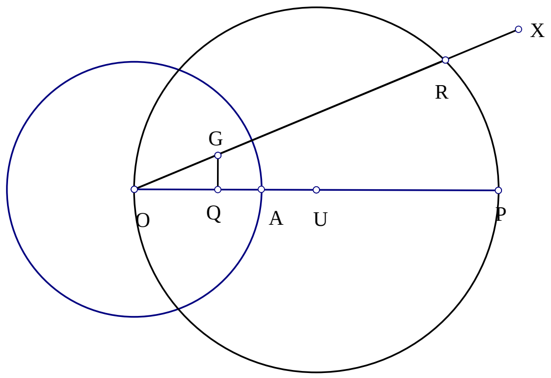
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η διατύπωση που θα ακολουθήσει συμβολίζει την ευθεία (ε) ως: QG. Η πρόταση καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η ευθεία αυτή είναι κάθετη στην OA και αυτό γιατί αν Q η προβολή του O πάνω στην ευθεία (ε) και P το αντίστροφο του Q και πάρουμε ακόμη σημείο G πάνω στην (ε), οπότε θα ισχύει ότι: $GQ \perp QP$.



Σχήμα 3.41:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ O\ A\ X)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία O, A, X



Σχήμα 3.42:

K_2 $(LRATIO\ P\ O\ A\ r_1)$: Έστω P σημείο πάνω στην OA τέτοιο ώστε $r_1 = \frac{\overline{PO}}{\overline{OA}}$.

K_3 $(INVERSION\ Q\ P\ O\ A) \equiv (LRATIO\ Q\ O\ A\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}})$: Έστω Q το αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο $(CIR\ O\ A)$.

K_4 $(MIDPOINT\ U\ P\ O\ r) \equiv (PRATIO\ U\ P\ P\ O\ \frac{1}{2})$: Έστω U το μέσον της ευθείας OP.

K_5 $(INTER\ R\ (LINE\ O\ X)(CIR\ U\ O)$: Έστω R το σημείο τομής της ευθείας OX και του κύκλου $(CIR\ U\ O)$.

K_6 $(INVERSION\ G\ R\ O\ A) \equiv (LRATIO\ G\ O\ R\ \frac{P_{OAO}}{P_{ORO}})$: Έστω G το αντίστροφο του R ως προς τον κύκλο $(CIR\ O\ A)$.

Σ: $P_{AOG} = P_{AOQ}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, G, R, U, Q, P, X, A, O εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $O \neq A$, $O \neq P$, $O \neq U$, $O \neq R$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{P_{AOG}}{P_{AOQ}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(P_{AOG} = \frac{P_{AOR}P_{OAO}}{P_{ORO}})$

$\frac{P_{AOG}}{P_{AOQ}} = \frac{P_{AOR}P_{OAO}}{P_{AOQ}P_{ORO}}$

(Απαλοιφή σημείου R, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.4 (σελίδα 113), την περίπτωση 9 των ειδικών τεχν. απαλ. κατασκευής $(FOOT)$(σελίδα 127) το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 113) και το λήμμα 3.5.3 (σελίδα 112).

$(P_{ORO} = \frac{4P_{XOU}^2}{P_{OXO}},\ P_{AOR} = \frac{2P_{XOU}P_{AOX}}{P_{OXO}})$

$= \frac{2P_{XOU}P_{AOX}P_{OAO}P_{OXO}}{P_{AOQ}P_{OXO}(4P_{XOU}^2)} = \frac{P_{AOX}P_{OAO}}{2P_{AOQ}P_{XOU}}$

(Απαλοιφή σημείου U, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(P_{AOQ} = \frac{1}{2}P_{XOP})$

$= \frac{P_{AOX}P_{OAO}}{2P_{AOQ}(\frac{1}{2}P_{XOP})}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1)

$(P_{AOQ} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}P_{OAO})$

$= \frac{P_{AOX}P_{OAO}}{\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}P_{OAO}P_{XOP}} = \frac{P_{AOX}}{\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}P_{XOP}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1)

$(P_{XOP} = r_1 P_{AOX},\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{1}{r_1})$

$= \frac{P_{AOX} r_1}{P_{AOX} r_1}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

$= 1.$

3.10 ΕΜΒΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Εισάγουμε μια νέα κατασκευή:

$(ARATIO\ A\,O\,U\,V\,r_O\,r_U\,r_V)$:

Έστω σημείο A τέτοιο ώστε:

$r_O = \frac{S_{AUV}}{S_{OUV}}$, $r_U = \frac{S_{OAV}}{S_{OUV}}$, $r_V = \frac{S_{OUA}}{S_{OUV}}$,

οι οποίες είναι οι εμβαδικές συντεταγμένες του A ως προς το OUV.

Τα $r_O\,r_U\,r_V$ μπορεί να είναι ρητές εκφράσεις γεωμετρικών ποσοτήτων, ρητοί ή αλγεβρικοί αριθμοί.

Η περιοριστική συνθήκη είναι: τα σημεία O, U, V μη συνευθειακά.

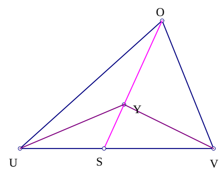
Ο βαθμός ελευθερίας του A εξαρτάται από τον αριθμό των απροσδιοριστιών στα $r_O\,r_U\,r_V$.

ΛΗΜΜΑ 3.10.1 *Έστω $\Gamma(Y)$ μια γραμμική γεωμετρική ποσότητα και το σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή:*

$(ARATIO\ Y\ O\ U\ V\ r_O\ r_U\ r_V)$

Τότε: $\Gamma(Y) = r_O\Gamma(O) + r_U\Gamma(U) + r_V\Gamma(V)$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.43:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών OY και UV είναι το S.

Αν η OY είναι παράλληλη στην YV τότε πρέπει είτε η UY να τέμνεται με την OV είτε η VY να τέμνεται με την OU.

Από την πρόταση B.4 (σελίδα 15), έχουμε:

$$\Gamma(Y) = \frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\Gamma(S) + \frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}\Gamma(O) = \frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\left(\frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\Gamma(V) + \frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}\Gamma(U)\right) + \frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}\Gamma(O)\ (1).$$

Από το θεώρημα των επίπλευρων τριγώνων έχουμε:

$$r_O = \frac{\overline{YS}}{\overline{OS}},\ \frac{\overline{OY}}{\overline{OS}} = \frac{S_{OUYV}}{S_{OUV}},\ \frac{\overline{US}}{\overline{UV}} = \frac{S_{OUY}}{S_{OUYV}},\ \frac{\overline{SV}}{\overline{UV}} = \frac{S_{OYV}}{S_{OUYV}}$$

Με μια απλή αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην σχέση (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

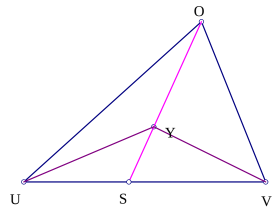
ΛΗΜΜΑ 3.10.2 *Έστω* $\Gamma(Y)=P_{AYB}$ *και το σημείο* Y *εισάγεται από την κατασκευή:*

$(ARATIO\ Y\ O\ U\ V\ r_O\ r_U\ r_V)$.

Τότε:

$$\Gamma(Y) = r_O\Gamma(O)+r_U\Gamma(U)+r_V\Gamma(V)-2(r_Or_U\overline{OU}^2+r_Or_V\overline{OV}^2+r_Ur_V\overline{UV}^2).$$

Απόδειξη



Σχήμα 3.44:

Συνεχίζουμε από την απόδειξη του παραπάνω λήμματος.

Χρησιμοποιούμε την σχέση (B)(σελίδα 110) των τεχνικών απαλοιφής:

$$\Gamma(Y) = \frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\Gamma(S) + \frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}\Gamma(O) - \frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}P_{OSO}$$

$$\Gamma(S) = \frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\Gamma(V) + \frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}\Gamma(U) - \frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU}$$

Με μια απλή αντικατάσταση του $\Gamma(S)$ στο $\Gamma(Y)$ παίρνουμε:

$$\Gamma(Y)-r = -\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU}-\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}\frac{\overline{YS}}{\overline{OS}}P_{OSO} = -r_V\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU}-r_O\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}P_{OSO}.$$

όπου $r = r_O\Gamma(O) + r_U\Gamma(U) + r_V\Gamma(V)$.

Από την σχέση (B)(σελίδα 110) παίρνουμε:

$$P_{OSO} = \frac{\overline{US}}{\overline{UV}}P_{OVO} + \frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{OUO} - \frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU}.$$

Τότε: $\Gamma(Y) - r =$

$$= -r_V\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU} - r_O\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{US}}{\overline{UV}}P_{OVO} - r_O\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{OUO} + r_O\frac{\overline{OY}}{\overline{OS}}\frac{\overline{US}}{\overline{UV}}\frac{\overline{SV}}{\overline{UV}}P_{UVU}$$

$$= -r_Or_VP_{OVO} - r_Or_UP_{OUO} - r_Ur_V(-\frac{S_{YUV}}{S_{OUYV}} + \frac{S_{OUV}}{S_{OUYV}})P_{UVU}$$

$= -r_O r_V P_{OVO} - r_O r_U P_{OUO} - r_U r_V P_{UVU}.$

Τέλος για τις περιπτώσεις όπου το σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(ARATIO\ Y\ O\ U\ V\ r_O\ r_U\ r_V)$ και θέλουμε να απαλοίψουμε το Y από την γεωμετρική ποσότητα $\Gamma = \frac{\overline{AY}}{\overline{CD}}$ θα ακολουθήσουμε την παρακάτω λογική.

Ένα από τα σημεία O, U, V, έστω το O, ικανοποιηεί την συνθήκη ότι τα A, Y, O δεν είναι συνευθειακά, συνεπώς θα έχουμε: $\Gamma = \frac{S_{OAY}}{S_{OCAD}}$.

Τώρα λοιπόν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.10.1 (σελίδα 145) για να απαλοίψουμε το Y.

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή $ARATIO$ μπορούμε να χρησιμοποιούμε με ευκολία τις παρακάτω κατασκευές ειδικών σημείων των τριγώνων:

1.$(CENTROID\ G\ A\ B\ C)$: Το σημείο G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη της κατασκευής

$(ARATIO\ G\ A\ B\ C\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3})$

Ο περιορισμός είναι ότι τα σημεία A, B, C δεν είναι συγγραμμικά.

2.$(ORTHOCENTER\ H\ A\ B\ C)$: Το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη της κατασκευής

$(ARATIO\ H\ A\ B\ C\ \frac{P_{ABC}P_{ACB}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{BAC}P_{BCA}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{CAB}P_{CBA}}{16S_{ABC}^2})$

Ο περιορισμός είναι ότι τα σημεία A, B, C δεν είναι συγγραμμικά.

3.$(CIRCUMCENTER\ O\ A\ B\ C)$: Το σημείο O είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABC.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη της κατασκευής

$(ARATIO\ O\ A\ B\ C\ \frac{P_{BCB}P_{BAC}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{ACA}P_{ABC}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{ABA}P_{ACB}}{16S_{ABC}^2})$

Ο περιορισμός είναι ότι τα σημεία A, B, C δεν είναι συγγραμμικά.

4.$(INCENTER\ C\ I\ A\ B)$: Το σημείο I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABC.

Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη της κατασκευής

$(ARATIO\ I\ A\ B\ C\ -\frac{2P_{IAB}P_{IBA}}{P_{AIB}P_{ABA}}\ \frac{P_{IAB}P_{IBI}}{P_{AIB}P_{ABA}}\ \frac{P_{IBA}P_{IAI}}{P_{AIB}P_{ABA}})$

Οι περιορισμοί είναι $A \neq B$ και $IA \not\perp IB$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρατηρούμε ότι στην τελευταία κατασκευή του εγεγραμμάνου κύκλου το σημείο που κατασκευάσαμε είναι η μια κορυφή του τριγώνου ABC. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εμβαδικές συντεταγμένες του έγκεντρου είναι τετάρτου βαθμού, όσες δηλαδή και οι απροσδιοριστίες στις εμβαδικές συντεταγμένες. Οι απροσδιριστίες αυτές οφείλονται στον λόγο ότι το πρόγραμμα δεν μπορεί να διαχωρίσει τις εμβαδικές συντεταγμένες του έγκεντρου I από εκείνες των τριών παρακέντρων I_a, I_b, I_c του τριγώνου ABC δίχως να χρησιμοποιηθούν ανισώτητες μεταξύ των εμβαδικών συντεταγμένων. Έτσι λοιπόν, αυτό που κάνουμε είναι να αντιστρέψουμε το πρόβλημα.

Οι αποδείξεις των παραπάνω ισοδυναμιών βρίσκονται στο παράρτημα Γ$'$, σελίδα 224.

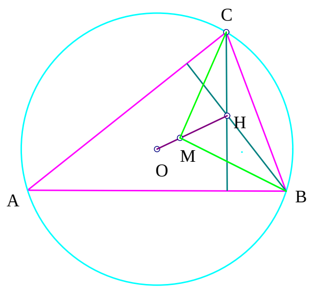
3.11 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ II

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.(ΘΕΩΡΗΜΑ EULER)

Έστω O το κέντρο περιγεγγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC. Έστω

M το κέντρο βάρους και H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Τότε το σημείο M βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα OH και χωρίζει το τμήμα αυτό σε λόγο $\frac{1}{2}$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.45:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

$K_2 : (CIRCUMCENTER\ O\,A\,B\,C) \equiv$

$(ARATIO\ O\,A\,B\,C\ \frac{P_{BCB}P_{BAC}}{16S^2_{ABC}}\ \frac{P_{ACA}P_{ABC}}{16S^2_{ABC}}\ \frac{P_{ABA}P_{ACB}}{16S^2_{ABC}}))$: Έστω σημείο O το περίκεντρο του τριγώνου ABC.

$K_3 : (CENTROID\ M\,A\,B\,C) \equiv (ARATIO\ M\,A\,B\,C\ \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3})$: Έστω σημείο M το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.

$K_4 : (LRATIO\ H\,M\,O\ -2) \equiv (PRATIO\ H\,M\,M\,O\ -2)$: Έστω H σημείο πάνω στην ευθεία MO τέτοιο ώστε: $\overline{HM} = 2\overline{MO}$.

Σ: Ισχύει: $P_{ABC} = P_{CBH}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, H, M, O εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: A, B, C μη συγγραμμικά, $O \neq M$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{P_{ABC}}{P_{CBH}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου H, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.1 (σελίδα 110))

$(P_{CBH} = 3P_{CBM} - 2P_{CBO})$

$\frac{P_{ABC}}{P_{CBH}} = \frac{P_{ABC}}{3P_{CBM}-2P_{CBO}}$

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1 (σελίδα 145))

$(P_{CBM} = \frac{1}{3}(P_{BCB} + P_{ABC}))$

$\frac{P_{ABC}}{3(\frac{1}{3}P_{BCB}+P_{ABC})-2P_{CBO}} = \frac{3P_{ABC}}{-6P_{CBO}+3P_{BCB}+3P_{ABC}}$

(Απαλοιφή σημείου O, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1)

$(P_{CBO} = \frac{1}{2}P_{BCB})$

$\frac{3P_{ABC}}{-6(\frac{1}{2}P_{BCB})+3P_{BCB}+3P_{ABC}} = \frac{4S_{ABC}}{4S_{ABC}} = \frac{-2P_{ABC}}{-2P_{ABC}}$

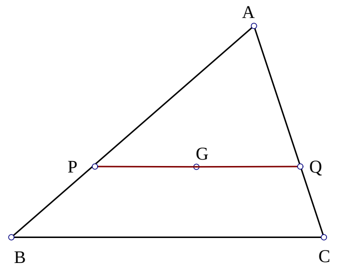
ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Έστω τρίγωνο ABC. Φέρνουμε παράλληλη προς την μια πλευρά του τριγώνου η οποία περνά από το κέντρο βάρους του τριγώνου G. Τότε η παράλληλη αυτή χωρίζει το τρίγωνο σε δυο μέρη, σε λόγο $4:5$.

Απόδειξη



Σχήμα 3.46:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

$K_2\ :\ (CENTROID\ G\,A\,B\,C)\ \equiv\ (ARATIO\ G\,A\,B\,C\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3})$: Έστω σημείο G το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.

$K_3 : (INTER\ P\,(LINE\,A\,B)(PLINE\,G\,B\,C) \equiv$

$(INTER\ P\,(LINE\,A\,B)(LINE\,G\,N),\ (PRATIO\ N\,G\,B\,C\,1)$: Έστω P το σημείο τομής της ευθείας AB και της ευθείας που περνά από το σημείο G και είναι παράλληλη στην BC.

$K_4 : (INTER\ Q\,(LINE\,A\,C)(PLINE\,G\,B\,C) \equiv$

$(INTER\ Q\,(LINE\,A\,C)(LINE\,G\,N),\ (PRATIO\ N\,G\,B\,C\,1)$: Έστω Q το σημείο τομής της ευθείας AC και της ευθείας που περνά από το σημείο G και είναι παράλληλη στην BC.

Σ: Ισχύει: $4S_{BCQP} = 5S_{APQ}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, Q, P, G

εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $AB \nparallel GN, \ AC \nparallel GN, \ B \neq C$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{4S_{BCQP}}{5S_{APQ}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε τα λήμματα 3.5.1 και 3.5.2 (σελίδα 110))

$(S_{APQ} = \frac{S_{AGN}S_{APC}}{S_{AGCN}}, \ S_{AGN} = S_{AGC} - S_{AGB} = S_{AGC} + S_{ABG} = S_{ABGC}, \ S_{AGCN} = S_{AGC} + S_{ACN}, \ S_{ACN} = S_{ACG} - S_{ACB}, \ S_{AGCN} = S_{ABC}$

$S_{BCQP} = S_{PBCQ} = \frac{S_{AGN}S_{PBC} - S_{CGN}S_{PBCA}}{S_{AGCN}}, \ S_{AGN} = S_{ABGC} = S_{BGC} - S_{BAC}, \ S_{CGN} = -S_{CGB}$

άρα $S_{APQ} = \frac{-S_{ABGC}S_{ACP}}{S_{ABC}}$ και $S_{BCQP} = \frac{S_{BCP}S_{ABC} - S_{BCG}S_{ACP}}{S_{ABC}})$

$\frac{4S_{BCQP}}{5S_{APQ}} = \frac{4(S_{BCP}S_{ABC} - S_{BCG}S_{ACP})S_{ABC}}{5(-S_{ABGC}S_{ACP})S_{ABC}} = \frac{-4(S_{BCP}S_{ABC} - S_{BCG}S_{ACP})}{5S_{ABGC}S_{ACP}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε τα λήμματα 3.5.1 και 3.5.2)

$(S_{ACP} = \frac{S_{AGN}S_{ACB}}{S_{AGBN}}, \ S_{AGN} = S_{AGC} - S_{AGB}, \ S_{AGBN} = S_{AGB} + S_{ABN} = S_{AGB} + S_{ABG} + S_{ABC} = S_{ABC}$

$S_{BCP} = \frac{-S_{BGN}S_{BCA}}{S_{AGBN}}, \ S_{AGBN} = S_{ABC}, \ S_{BGN} = S_{BGC}$

άρα $S_{ACP} = -S_{ABGC}, \ S_{BCP} = S_{BCG})$

$= \frac{-4(S_{ABGC}S_{BCG}S_{ABC} + S_{BGC}S_{ABC}^2)S_{ABC}}{5S_{ABGC}(-S_{ABGC}S_{ABC})S_{ABC}} = \frac{4(S_{ABGC} + S_{ABC})S_{BCG}}{5(S_{ABGC})^2}$

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1 (σελίδα 145))

$(S_{BCG} = \frac{1}{3}S_{ABC},\ S_{ABGC} = \frac{2}{3}S_{ABC})$

$= \frac{4(5S_{ABC})3^2 S_{ABC}}{5(2S_{ABC})^2 3^2}$

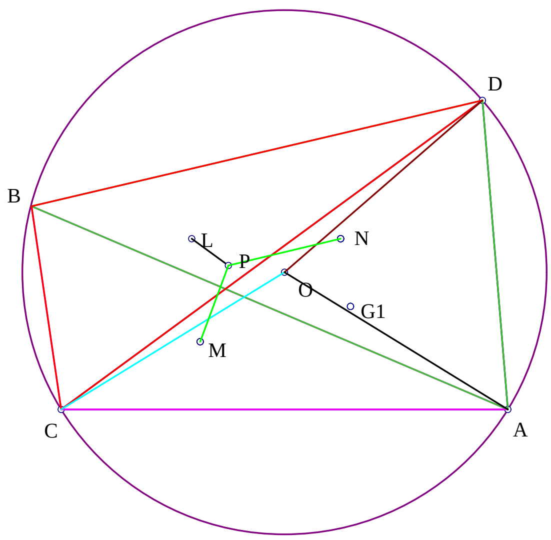
ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητέσ- απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.

Έστω A, B, C, D τέσσερα σημεία πάνω στον κύκλο κέντρου O. Τότε οι κάθετες από τα βαρύκεντρα των τεσσάρων τριγώνων ABC, ABD, ACD και BCD στις εφαπτομένες του κύκλου O στα σημεία D, C, B, A τέμνονται.

Απόδειξη



Σχήμα 3.47:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\ B\ C,\ D)$: Έστω τέσσερα αυθαίρετα σημεία A, B, C, D

$K_2 : (CIRCUMCENTER\ O\ A\ B\ C)$: Έστω σημείο O το περίκεντρο του τριγώνου ABC.

$K_3 : (CENTROID\ M\ A\ B\ C)$: Έστω σημείο D το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.

$K_4 : (CENTROID\ N\ A\ B\ D)$: Έστω σημείο E το βαρύκεντρο του τριγώνου ABD.

$K_5 : (CENTROID\ L\ B\ C\ D)$: Έστω σημείο F το βαρύκεντρο του τριγώνου BCD.

$K_6 : (INTER\ P\ (PLINE\ M\ O\ D)(PLINE\ N\ O\ C))$: Έστω P το σημείο τομής της παράλληλης από το σημείο M στην OD και της παράλληλης από το σημείο N στην OC.

Σ: Ισχύει: $S_{AOP} = S_{AOL}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, P, L, N, M εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: A, B, C μη συγγραμμικά, A, B, D μη συγγραμμικά, B, C, D μη συγγραμμικά, A, B, C μη συγγραμμικά και $OD \nparallel OC$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{-S_{AOP}}{-S_{AOL}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.16 (σελίδα 38))

$(S_{AOP} = \frac{S_{CMON}S_{ADO}+S_{CDO}S_{AOM}}{S_{CDO}})$

$\frac{S_{CMCN}S_{ADO}+S_{CDO}S_{AOM}}{-S_{AOL}(-S_{CDO})}$

(Απαλοιφή σημείου L, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1 (σελίδα 145))

$(S_{AOL} = -\frac{1}{3}(S_{ADO} + S_{ACO} + S_{ABO})$

$\frac{3(S_{CMNO}S_{ADO}+S_{CDO}S_{AOM})}{(S_{ADO}-S_{ACO}-S_{ABO})S_{CDO}}$

(Απαλοιφή σημείου N, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1)

$(S_{CMON} = -(S_{COM} + \frac{1}{3}S_{CDO} - \frac{1}{3}S_{BCO} - \frac{1}{3}S_{ACO}))$

$\frac{(-3)(-3S_{COM}S_{ADO}+3S_{CDO}S_{AOM}-S_{CDO}S_{ADO}+S_{BCO}S_{ADO}+S_{ADO}S_{ACO})}{3S_{CDO}(S_{ADO}+S_{ACO}+S_{ABO})}$

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.10.1)

$(S_{AOM} = -\frac{1}{3}(S_{ACO} + S_{ABO}),\ S_{COM} = \frac{1}{3}(S_{BCO} + S_{ACO}))$

$\frac{3(3S_{CDO}S_{ADO}+3S_{CDO}S_{ACO}+3S_{CDO}S_{ABO})}{3^2(S_{ADO}+S_{ACO}+S_{ABO})S_{CDO}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

Κεφάλαιο 4

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ

4.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια των **τριγωνομετρικών συναρτήσεων**, με σκοπό οι τύποι του εμβαδού τριγώνου και της Πυθαγόρειας διαφοράς τριγώνου να εκφραστούν συναρτήσει των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης χρησιμοποιούμε την έννοια του **εμβαδού τριγώνου** για να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και συνημιτόνου ορίζονται με τον συνήθη τρόπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1 *Το ημίτονο μιας γωνίας $\angle A$ είναι δυο φορές το προσανατολισμένο εμβαδόν του τριγώνου ABC όταν: $AB = AC = 1$.*

Ιδιότητες ημιτόνου.

1. $\sin(0°) = \sin(180°) = 0, \sin(90°) = 1$

2. $\sin(\angle Q) = \sin(180^\circ - \angle Q)$.

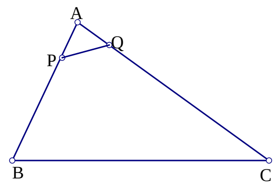
3. $\sin(\angle A) = \sin(\angle B)$αν και μόνο αν $\angle A = \angle B$ ή $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

4. $\angle A + \angle B \leq 180^\circ$ και $\angle A < \angle B$ συνεπάγεται $\sin(\angle A) < \sin(\angle B)$ (Συνέπεια της ανισώτητας επιγώνιων τριγώνων)

Οι παραπάνω ιδιότητες απορρέουν απευθείας από τον ορισμό του ημιτόνου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.2 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$.

Απόδειξη



Σχήμα 4.1:

Έστω δυο σημεία P και Q πάνω στις πλευρές AB και AC αντίστοιχα έτσι ώστε $AP = AQ = 1$.

Από το θεώρημα των επιγώνιων τριγώνων θα πάρουμε

$$\nabla ABC = \nabla APQ \frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} = \nabla APQ \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A).$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση και για τις τρείς γωνίες του τριγώνου ABC θα πάρουμε:

$$\nabla ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)$$

Ως συνέπεια των παραπάνω έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.3 (Νόμος ημιτόνων)

Σε ένα τρίγωνο ABC, αν $BC = a, CA = b$ και $AB = c$ τότε θα ισχύει ότι:

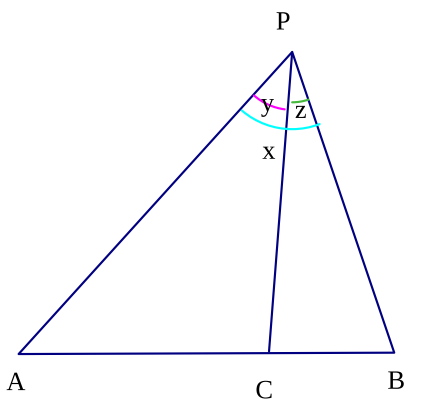
$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.4 *Έστω P σημείο του επιπέδου και PA, PB, PC τρείς ημιευθείες τέτοιες ώστε:*

$\angle APC = y, \angle CPB = z$ και $\angle APB = x = y + z < 180°$. Τότε τα σημεία A, B και C είναι **συγγραμμικά** *αν και μόνο αν*

$$\frac{\sin(\angle x)}{PC} = \frac{\sin(\angle y)}{PB} = \frac{\sin(\angle z)}{PA}.$$

Απόδειξη



Σχήμα 4.2:

Αν τα σημεία A, B και C είναι συγγραμμικά τότε έχουμε:

$\nabla PAB = \nabla PAC + \nabla PCB$ δηλαδή

$$PA \cdot PB \cdot \sin(x) = PA \cdot PC \cdot \sin(y) + PB \cdot PC \cdot \sin(z)$$

Διαιρώντας τώρα και τις δυο πλευρές της ισότητας με το $PA \cdot PB \cdot PC$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, από την σχέση:

$\frac{\sin(\angle x)}{PC} = \frac{\sin(\angle y)}{PB} = \frac{\sin(\angle z)}{PA}$ προκύπτει ότι $\nabla PAB = \nabla PAC + \nabla PCB$ ισχύει όμως ότι

$\nabla ABC = \mid \nabla PAB - \nabla PAC - \nabla PCB \mid = 0$

Επομένως τα σημεία A, B και C είναι συγγραμμικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.5 *Ορίζουμε το* **συνημίτονο της γωνίας A** *ως εξή-ς:*

$$\cos(\angle A) = \begin{cases} \sin(90^\circ - \angle A), & \textit{αν } \angle A \leq 90^\circ \cdot \\ -\sin(\angle A - 90^\circ), & \textit{αν } \angle A > 90^\circ. \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.6 (Νόμος συνημιτόνων)

Σε ένα τρίγωνο ABC έχουμε:

$P_{ABC} = 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos(\angle B)$

Απόδειξη

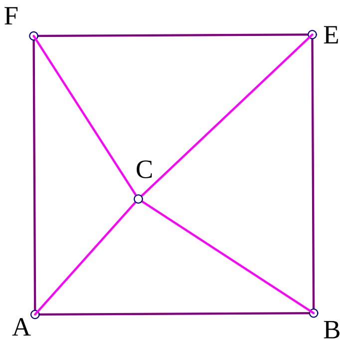
Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι:

αν η $\angle B \leq 90$ τότε $C_{ABC} = \nabla BEC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(90^\circ - \angle B) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$.

Έτσι λοιπόν: $P_{ABC} = 4C_{ABC} = 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$

Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση:$\angle B > 90^\circ$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.7 *Η* **προσανατολισμένη γωνία** $\measuredangle ABC$ *είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε:*



Σχήμα 4.3:

1. η απόλυτη τιμή της γωνίας $\measuredangle ABC$ είναι ίση με την τιμή της κανονικής γωνίας $\angle ABC$ και

2. η $\measuredangle ABC$ έχει ίδιο πρόσημο με το S_{ABC}.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.8 *Επεκτείνουμε τον ορισμό του συνημιτόνου και του ημιτόνου στις* **προσανατολισμένες γωνίες** *ως εξής:*

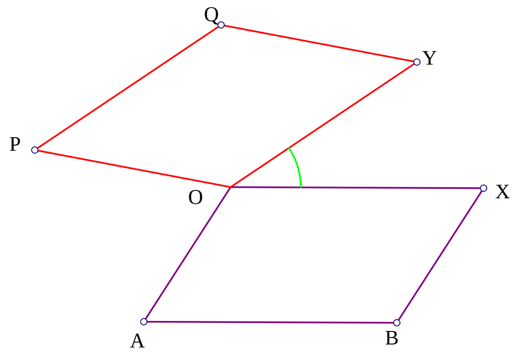
Έστω $\measuredangle A$ είναι μια αρνητική γωνία τότε:

$\sin(\measuredangle A) = -\sin(-\measuredangle A)$, $\cos(\measuredangle A) = \cos(-\measuredangle A)$

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε το **προσανατολισμένο εμβαδόν και τη Πυθαγόρεια διαφορά τριγώνου** χρησιμοποιώντας την έννοια της **προσανατολισμένης γωνίας.**

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.9 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\measuredangle ABC)$, $P_{ABC} = 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\measuredangle ABC)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.10 *Η* **προσανατολισμένη γωνία ανάμεσα σε δυο κατευθυνόμενες ευθείες** *PQ και AB, συμβολίζεται ως εξής: $\measuredangle(PQ, AB)$ και ορίζεται όπως παρακάτω.*



Σχήμα 4.4:

Έστω σημεία O, X και Y τέτοια ώστε τα $OYPQ$ και $OXBA$ να είναι παραλληλόγραμμα. Τότε ορίζουμε: $\measuredangle(PQ, AB) = \measuredangle(XOY)$

Ιδιότητες προσανατολισμένων γωνιών

1. $\measuredangle(PQ, AB) = -\measuredangle(AB, PQ)$

2. $\measuredangle(PQ, AB) = 180^{\circ} + \measuredangle(QP, AB) = 180° + \measuredangle(PQ, BA)$

3. $\measuredangle(PQ, AB) = \measuredangle(QP, BA)$

4. $\measuredangle(PQ, AB) + \measuredangle(AB, CD) = \measuredangle(PQ, CD)$

Οι παραπάνω ιδιότητες απορρέουν απευθείας από τον ορισμό των προσανατολισμένων γωνιών.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε **το προσανατολισμένο εμβαδόν και την Πυθαγόρεια διαφορά τετρπλεύρων** χρησιμοποιώντας τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις**.

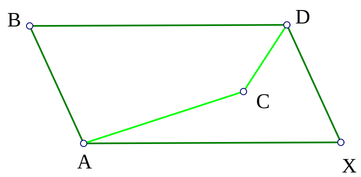
ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.11 *α.* $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin(\measuredangle(AC, BD))$

β. $P_{ABCD} = 2 \cdot AC \cdot BD \cdot \cos(\measuredangle(AC, DB))$

Απόδειξη

α. Έστω σημείο X τέτοιο ώστε το $AXDB$ να είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα έχουμε: $\overline{AX} = \overline{BD}$. Από την πρόταση Β.6 (σελίδα 16), παίρνουμε:

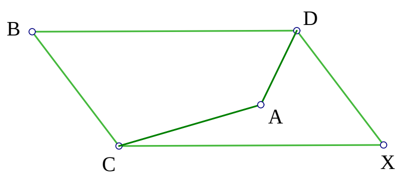
$$S_{ABCD} = S_{AACX} = S_{XAC} = \frac{1}{2}XAAC\sin(\measuredangle XAC) = \frac{1}{2}ACBD\sin(\measuredangle(AC,BD)).$$



Σχήμα 4.5:

β. Έστω σημείο X τέτοιο ώστε το $CXDB$ να είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα έχουμε: $\overline{CX} = \overline{BD}$. Από την πρόταση Β.11 (σελίδα 93), παίρνουμε:

$$P_{ABCD} = -P_{CBAD} = -P_{CCAX} = P_{XCA} = 2\cdot XA\cdot AC\cdot\cos(\measuredangle XCA)$$
$$= 2\cdot AC\cdot BD\cdot\cos(\measuredangle(AC,DB))$$



Σχήμα 4.6:

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Α. (Ο τύπος $Herron - Qin$)

Σε ένα τρίγωνο ABC ισχύει: $16S_{ABC}^2 = 4\cdot\overline{AB}^2\cdot\overline{CB}^2 - P_{ABC}^2$.

Απόδειξη

Από την πρόταση 4.1.9 παίρνουμε:

$\sin(\measuredangle ABC) = \frac{2S_{ABC}}{AB \cdot BC}$

$\cos(\measuredangle ABC) = \frac{P_{ABC}}{2AB \cdot BC}$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\sin(\measuredangle ABC)^2 + \cos(\measuredangle ABC)^2 = 1$

έχουμε: $\frac{4S_{ABC}^2}{AB^2 \cdot BC^2} + \frac{P_{ABC}^2}{4AB^2 \cdot BC^2} = 1$

Το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

B. (Ο τύπος $Herron - Qin$ για τετράπλευρα)

Για ένα τετράπλευρο $ABCD$ ισχύει: $16S_{ABCD} = 4\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 - P_{ABCD}^2$.

Απόδειξη

Από τη πρόταση 4.1.11 παίρνουμε: $\sin(\measuredangle(AC, BD)) = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}$

$\cos(\measuredangle(AC, DB)) = \frac{P_{ABCD}}{2AC \cdot BD}$

και χρησιμοποιώντας πάλι την ταυτότητα: $\sin(\measuredangle(AC, BD))^2 + \cos(\measuredangle(AC, DB))^2 = 1$

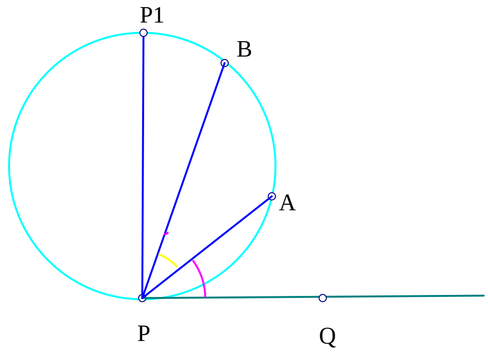
έχουμε: $\frac{4S_{ABCD}^2}{AC^2 \cdot BD^2} + \frac{P_{ABCD}^2}{4AC^2 \cdot BD^2} = 1$

Το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

4.2 ΚΥΚΛΟΙ

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε εκτενέστερα ένα γεωμετρικό αντικείμενο που συναντήσαμε και στο κεφάλαιο 3, τους κύκλους.

Σημεία που βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο ονομάζονται **ομοκυκλικά.**



Σχήμα 4.7:

Έστω P σημείο πάνω στον κύκλο και σημείο P_1 το αντιδιαμετρικό του. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο P και παίρνουμε σημείο Q πάνω στην εφαπτομένη τέτοιο ώστε $S_{PP_1Q} > 0$.

Για οποιοδήποτε σημείο A πάνω στον κύκλο, ορίζουμε την $\measuredangle A$ να είναι η **προσανατολισμένη γωνία** $\measuredangle APQ$.

Το τόξο PA που περιέχεται στην $\measuredangle APQ$ ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο της**.

Ακόμη για δυο σημεία A και B πάνω στον κύκλο ισχύει ότι: $\measuredangle B - \measuredangle A = \measuredangle BPA$.

Τώρα θα ορίσουμε την **προσανατολισμένη χορδή**.

Η προσανατολισμένη χορδή $\widetilde{AB}$ έχει απόλυτη τιμή την τιμή του ευθύγραμμου τμήματος AB και πρόσημο ίδιο με το πρόσημο της προσανατολισμένης γωνίας $\measuredangle BPA$ ή ισοδύναμα το ίδιο πρόσημο με το S_{BPA}.

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα, όταν $S_{BPA} > 0$ τότε $\widetilde{AB} > 0$. Η προσανατολισμένη χορδή $\widetilde{PA}$ είναι πάντα θετική.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.1 *Σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε:*

$$\widetilde{AB} = d\sin(\measuredangle BPA) = d\sin(\measuredangle B - \measuredangle A)$$

$$\widetilde{PA} = d\sin(\measuredangle APQ)$$

όπου d είναι η διάμετρος του κύκλου.

Απόδειξη

Τα πρόσημα και στις δυο πλευρές των εξισώσεων είναι τα ίδια.

Μένει να ελέγξουμε την απόλυτη τιμή των εξισώσεων.

Έτσι λοιπόν, από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο BAP έχουμε:

$\frac{AB}{\sin(\angle BPA)} = \frac{BP}{\sin(\angle BAP)}$

Όμως ανάλογα από τη θέση του σημείου A πάνω στον κύκλο διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: αν οι γωνίες $\angle BAP, \angle BP_1P$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο τότε: $\angle BAP = \angle BP_1P$ ή αν οι γωνίες $\angle BAP, \angle BP_1P$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε τόξο που δέχεται η μια την άλλη τότε: $\angle BAP + \angle BP_1P = 180°$.

Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε: $\frac{BP}{\sin(\angle BAP)} = \frac{BP}{\sin(\angle BP_1P)}$

Ακόμη $\sin(\angle BP_1P) = \frac{BP}{PP_1}$.

Άρα $\frac{BP}{\sin(\angle BP_1P)} = PP_1$.

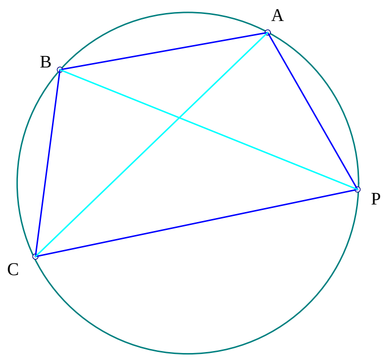
Καταλήγουμε συνεπώς: $AB = \sin(\angle BPA) \cdot PP_1$, όπου $d = PP_1$

Τώρα $\sin(\angle APQ) = \sin(\frac{\pi}{2} - \angle P_1PA) = \cos(\angle P_1PA) = \frac{PA}{PP_1}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.2 *Έστω d να είναι η διάμετρος κύκλου, στον οποίο είναι* **εγγεγραμμένο τρίγωνο** *ABC.*

Τότε: $S_{ABC} = \frac{\widetilde{AB}\cdot\widetilde{BC}\cdot\widetilde{AC}}{2d}$

Απόδειξη



Σχήμα 4.8:

Όπως φαίνεται από το σχήμα, θα έχουμε:

$\angle ABC = \angle CPA$ ή $\angle ABC + \angle CPA = 180°$.

Σύμφωνα με την πρόταση 4.2.1 (σελίδα 166) και την πρόταση 4.1.2 (σελίδα 158) έχουμε:

$\nabla ABC = \frac{1}{2}AB \cdot BC \mid \sin(\angle ABC) \mid = \frac{1}{2}AB \cdot BC \mid \sin(\angle CPA) \mid = \frac{1}{2d}AB \cdot BC \cdot CA$

Για τα πρόσημα τώρα της εξίσωσης, διαπιστώνουμε πολύ εύκολα πως αν εναλλάξουμε τη θέση δυο κορυφών του τριγώνου, τα πρόσημα και στις δυο πλευρές της εξίσωσης θα αλλάξουν. Για αυτό τον λόγο αρκεί να ελέγξουμε μόνο την περίπτωση που δείχνει το σχήμα. Έτσι λοιπόν θα πάρουμε:

$S_{ABC} \geq 0, S_{CPB} \geq 0, S_{BPA} \geq 0, S_{CPA} \geq 0$

τότε:

$\widetilde{AB} \geq 0, \widetilde{BC} \geq 0, \widetilde{AC} \geq 0.$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.3 (ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)

Αν οι κύκλοι που περιέχουν τα εγγεγραμμένα τρίγωνα ABC, XYZ είναι ίσοι τότε:

$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \frac{\widetilde{AB} \cdot \widetilde{BC} \cdot \widetilde{CA}}{\widetilde{XY} \cdot \widetilde{YZ} \cdot \widetilde{ZX}}.$

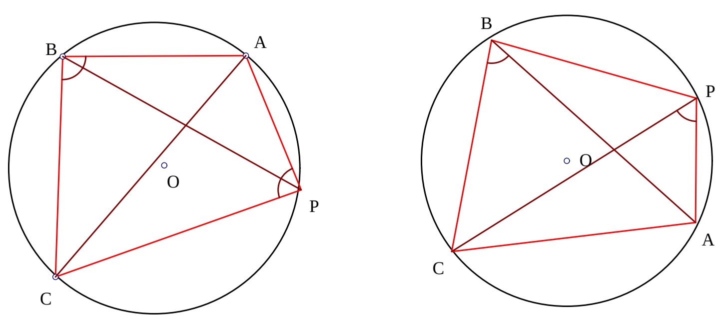
Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια της προηγούμενης πρότασης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.4 *Έστω d να είναι η διάμετρος του εγγεγραμμένου τριγώνου ABC. Τότε:*

$P_{ABC} = 2\widetilde{AB} \cdot \widetilde{CB} \cdot \cos(\measuredangle CPA).$

Απόδειξη



Σχήμα 4.9:

Από την πρόταση 4.1.6(σελίδα 160) παίρνουμε:

$\mid P_{ABC} \mid= 2AB \cdot BC \cdot \mid \cos(\angle ABC) \mid$

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

$\angle ABC = \angle CPA$ ή

$\angle ABC + \angle CPA = 180°$ τότε:

$\mid P_{ABC} \mid= 2AB \cdot BC \cdot \mid \cos(\angle CPA) \mid$.

Μένει να ελέγξουμε πότε τα πρόσημα και στις δυο πλευρές της εξίσωσης είναι ίδια.

Καταρχήν αν εναλλάξουμε τη θέση των σημείων A και C τα πρόσημα και στις δυο πλευρές της εξίσωσης δεν αλλάζουν.

Μένουν λοιπόν οι παρακάτω περιπτώσεις:

αν το P βρίσκεται πάνω στο τόξο AC ή

αν το P βρίσκεται πάνω στο τόξο AB

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\widetilde{AB} \geq 0, \widetilde{CB} \leq 0$

Επειδή $\measuredangle ABC + \measuredangle CPA = 180°$ τα P_{ABC} και $\cos(\measuredangle CPA)$ έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα.

Η πρόταση είναι αληθής σε αυτή την περίπτωση.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $\widetilde{AB} \leq 0, \widetilde{CB} \leq 0$

Επειδή $\measuredangle ABC = \measuredangle CPA$ τα P_{ABC} και $\cos(\measuredangle CPA)$ έχουν πάντα ίδια πρόσημα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.5 (ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ)

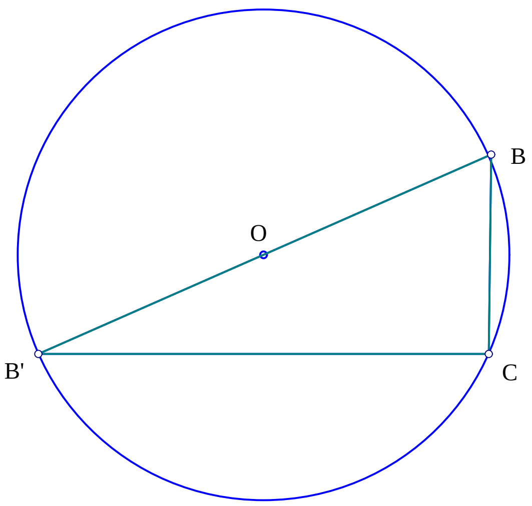
Αν οι κύκλοι στους οποίους είναι εγγεγραμμένα τα τρίγωνα ABC, XYZ είναι ίδιοι και $P_{ABC} =\neq 0$ τότε:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = \frac{\widetilde{AB}\widetilde{BC}\cos(\measuredangle APC)}{\widetilde{XY}\widetilde{YZ}\cos(\measuredangle XPZ)}.$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια της προηγούμενης πρότασης.

Έστω $\widetilde{BC}$ η προσανατολισμένη χορδή του κύκλου με κέντρο το σημείο O και διάμετρο BB'. Ορίζουμε την **επιχορδή της προσανατολισμένης χορδής** $\widetilde{BC}$ να είναι η $\widehat{BC}$ της οποίας η απόλυτη τιμή είναι ίση με $\mid CB' \mid$ και έχει το ίδιο πρόσημο με το πρόσημο της πυθαγόρειας διαφοράς P_{BPC}.



Σχήμα 4.10:

Είναι φανερή πλέον η σχέση: $\widetilde{BC}^2 + \widehat{BC}^2 = d^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.6 *Έστω A, B, C τρία ομοκυκλικά σημεία. Τότε ισχύει:* $P_{ABC} = \frac{2\widetilde{AB}\widetilde{CB}\widehat{CA}}{d}$.

Απόδειξη

Από τον τύπο $Herron - Qin$:

$16S_{ABC}^2 = 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - P_{BAC}^2$

και την πρόταση 4.2.2 (σελίδα 167), παίρνουμε:

$P_{ABC} = 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - 16S_{ABC}^2 = \frac{4\overline{AB}^2\overline{CB}^2(d^2-\overline{AC}^2)}{d^2} = \frac{2\widetilde{ABC}\widetilde{BCA}}{d}$.

$\mid P_{ABC} \mid = \frac{2|\widetilde{AB}||\widetilde{CB}||\widetilde{CA}|}{d}$

Από την πρόταση 4.2.4 (σελίδα 168), μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι τα πρόσημα και στα δυο μέλη της εξίσωσης είναι ίδια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.7 *Έστω A, B, C, D τέσσερα ομοκυκλικά σημεία. Έστω E το σημείο τομής του κύκλου και της ευθείας που περνά από το σημείο D και είναι παράλληλη στην AC. Τότε ισχύει: $S_{ABCD} = \frac{\widetilde{AC}\cdot\widetilde{BD}\cdot\widetilde{EB}}{2d}$, όπου d η διάμετρος του κύκλου.*

Απόδειξη

Αν $AC \parallel BD$ έχουμε $E = B$ και $S_{ABCD} = 0$.

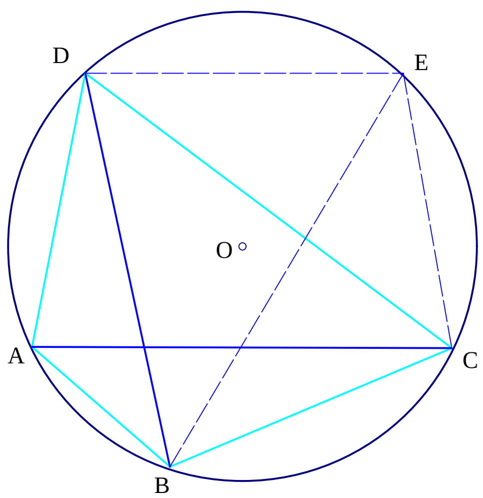
Έτσι λοιπόν, επειδή $DE \parallel AC$ έχουμε:

$S_{ABCD} = \frac{\widetilde{AC}}{\widetilde{ED}} S_{EBD} = \frac{\widetilde{AC}\widetilde{BD}\widetilde{EB}}{2d}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.8 (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ)

Έστω τέσσερα σημεία A, B, C, D ομοκυκλικά. Τότε ισχύει: $\widetilde{AB}\cdot\widetilde{CD} + \widetilde{AD}\cdot\widetilde{BC} = \widetilde{AC}\cdot\widetilde{BD}$.

Απόδειξη



Σχήμα 4.11:

Φέρνουμε από το σημείο D παράλληλη στην AC που τέμνει τον κύκλο στο σημείο E.

Από την πρόταση 4.2.7 (σελίδα 171), παίρνουμε:

$\frac{\widetilde{AC}\widetilde{BD}\widetilde{EB}}{2d} = S_{ABCD} = S_{BCE} + S_{EAB}(1)$

Η σχέση (1) με εφαρμογή της πρότασης 4.2.2 (σελίδα 167), γίνεται:

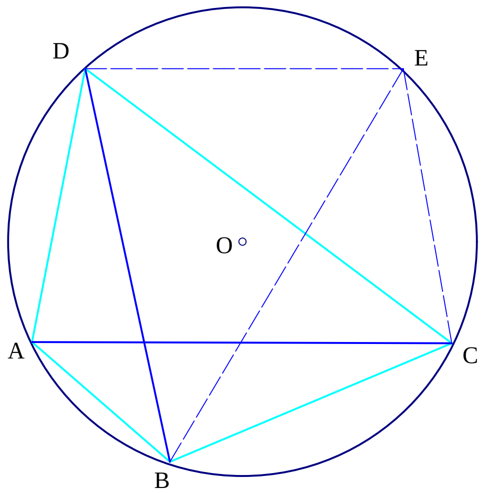
$S_{BCE} + S_{EAB} = \frac{\widetilde{BC}\widetilde{EC}\widetilde{EB}+\widetilde{EA}\widetilde{BA}\widetilde{BE}}{2d}(2)$

Αν πάρουμε το B ως σημείο αναφοράς θα έχουμε:

$\widetilde{EB} = -\widetilde{BE}, \widetilde{AE} = -\widetilde{CD}, \widetilde{CE} = -\widetilde{AD}.$

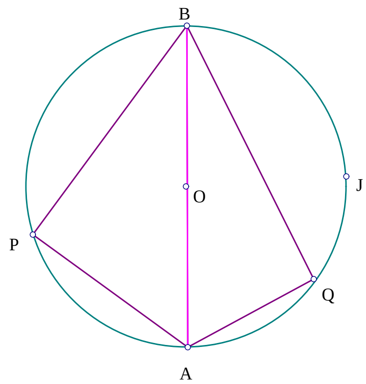
Με μια απλή αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (2) θα πάρουμε την ζητούμενη σχέση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.9 *Έστω $AB = d$ η διάμετρος ενός κύκλου και P, Q δυο σημεία πάνω στον κύκλο. Τότε ισχύει: $d\widetilde{PQ} = \widetilde{AQ}\widetilde{AP} - \widetilde{AP}\widetilde{AQ}$.*



Σχήμα 4.12:

Απόδειξη



Σχήμα 4.13:

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου για τα σημεία A, B, P, Q:

$\widetilde{AB} \cdot \widetilde{PQ} + \widetilde{AQ} \cdot \widetilde{BP} = \widetilde{AP} \cdot \widetilde{BQ}$

Επιλέγουμε J ως σημείο αναφοράς.

Αν $S_{JAB} < 0$ έχουμε:

$\widetilde{AB} = -d, \widehat{AQ} = \widetilde{BQ}, \widehat{AP} = \widetilde{BP}$.

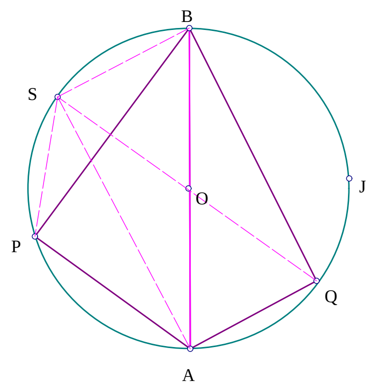
Αν $S_{JAB} > 0$ ή $J = A$ έχουμε:

$\widetilde{AB} = d, \widehat{AQ} = \widetilde{QB}, \widehat{AP} = \widetilde{PB}$.

Η ζητούμενη σχέση είναι πλέον φανερή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.10 *Έστω $AB = d$ η διάμετρος ενός κύκλου και P, Q δυο σημεία πάνω στον κύκλο. Τότε ισχύει: $d\widehat{PQ} = \widetilde{AQ}\widetilde{AP} + \widehat{AP}\widehat{AQ}$.*

Απόδειξη



Σχήμα 4.14:

Φέρνουμε το αντιδιαμετρικό του σημείου Q.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου για τα σημεία A, B, P, S:

$\widetilde{AB} \cdot \widetilde{PB} + \widetilde{AS} \cdot \widetilde{PB} = \widetilde{AB} \cdot \widetilde{PS}$

Επιλέγουμε J ως σημείο αναφοράς.

Αν $\widetilde{AB}$ και $\widetilde{QS}$ έχουν το ίδιο πρόσημο τότε έχουμε:

$\widetilde{AB}\widetilde{PS} = d\widehat{PQ}$

$\widetilde{BS} = \widetilde{AQ}$

$\widetilde{AS}\widetilde{PB} = \widehat{AQ}\widehat{AP}$

Αν τώρα $\widetilde{AB}$ και $\widetilde{QS}$ έχουν διαφορετικό πρόσημο τότε έχουμε:

$\widetilde{AB}\widetilde{PS} = -d\widehat{PQ}$

$\widetilde{BS} = -\widetilde{AQ}$

$\widetilde{AS}\widetilde{PB} = -\widehat{AQ}\widehat{AP}$

Η ζητούμενη σχέση είναι αληθής και για τις δυο περιπτώσεις.

4.3 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Εισάγουμε την κατασκευή των ομοκυκλικών σημείων.

$\mathbf{K}_{17}(CIRCLE\ Y_1, ..., Y_m), (m \geq 3)$**.**

Τα σημεία $Y_1, ..., Y_m$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο. Ο βαθμός ελευθερίας της κατασκευής είναι: $m + 3$. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες δεν υπάρχουν.

Το παρακάτω λήμμα είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων: 4.2.2, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 (σελίδες 167-174).

ΛΗΜΜΑ 4.3.1 *Έστω A, B, C, D τέσσερα σημεία πάνω σε κύκλο κέντρου O και διαμέτρου d. Έστω A το σημείο αναφοράς. Συμβολίζουμε: $\angle B$*

την γωνία $\frac{\angle AOB}{2}$.

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$S_{BCD} = \frac{\widetilde{BC}\widetilde{DC}\widetilde{DB}}{2d}$

$P_{BCD} = 2\widetilde{BC}\widetilde{DC}\widehat{DB}$

$\widetilde{BD} = d\sin(BD)$

$\widehat{BD} = d\cos(BD)$

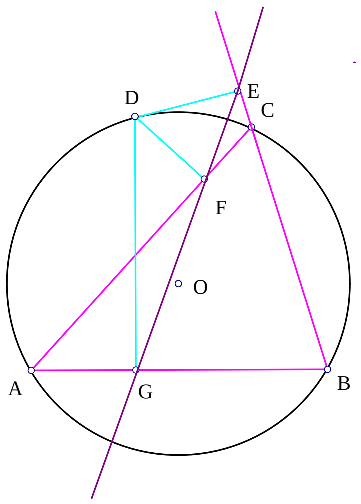
Το λήμμα 4.3.1 (σελίδα 175) μας βοηθάει να εκφράσουμε τις Πυθαγόρειες διαφορές ομοκυκλικών σημείων σε σχέσεις που αποτελούνται μόνο από την διάμετρο του κύκλου και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ανεξάρτητων γωνιών.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.(ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ SIMSON)

Έστω D σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο ABC. Από το σημείο D φέρνουμε κάθετες στις πλευρές του τριγώνου ABC. Έστω E το σημείο τομής της καθέτου από το σημείο D στην πλευρά BC, F το σημείο τομής της καθέτου από το σημείο D στην πλευρά AC, G το σημείο τομής της καθέτου από το σημείο D στην πλευρά AB. Τα σημεία E, F, G είναι συγγραμμικά.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ



Σχήμα 4.15:

K_1 $(CIRCLE\ A,\ B,\ C,\ D)$: Έστω τέσσερα αυθαίρετα ομοκυκλικά σημεία A, B, C, D.

K_2 $(FOOT\ E\,D\,B\,C)$: Έστω E το σημείο τομής της ευθείας B, C και της ευθείας $(TLINE\ D\,B\,C)$.

K_3 $(FOOT\ F\,D\,A\,C)$: Έστω F το σημείο τομής της ευθείας AC και της ευθείας $(TLINE\ D\,B\,C)$.

K_4 $(FOOT\ G\,D\,A\,B)$: Έστω G το σημείο τομής της ευθείας AB και της ευθείας $(TLINE\ D\,A\,B)$. .

K_5 $(INTER\ H\,(LINE\ E\,F)(LINE\ A\,B))$: Έστω H το σημείο τομής των ευθειών EF και AB.

Σ: Ισχύει: $\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, H, G, F, E, D, C, B, A εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών:
$C \neq B, A \neq C, A \neq B, EF \nparallel AB, G \neq B, B \neq H$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}}{\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου H, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2 (σελίδα 14),(θεώρημα επίπλευρων τριγώνων))

$(\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}})$

$$\frac{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}}{\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}} = \frac{\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}}{\frac{S_{AEF}}{S_{BEF}}}$$

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.8 (σελίδα 89))

$(\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{P_{BAD}}{-P_{ABD}})$

$$\frac{P_{BAD}S_{BEF}}{S_{AEF}(-P_{ABD})}$$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.3 (σελίδα 112))

$(S_{AEF} = \frac{-P_{CAD}S_{ACE}}{P_{ACA}},\ S_{BEF} = \frac{P_{ACD}S_{ABE}}{P_{ACA}})$

$\frac{P_{BAD}P_{ACD}P_{ACA}S_{ABE}}{P_{ABD}(-P_{CAD}S_{ACE})P_{ACA}} = \frac{P_{BAD}P_{ACD}S_{ABE}}{P_{ABD}P_{CAD}S_{ACE}}$

(Απαλοιφή σημείου E, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.3)

$(S_{ACE} = \frac{-P_{BCD}S_{ABC}}{P_{BCB}},\ S_{ABE} = \frac{P_{CBD}S_{ABC}}{P_{BCB}})$

$\frac{P_{BAD}P_{ACD}P_{CBD}P_{BCB}S_{ABC}}{P_{CAD}(-P_{BCD}S_{ABC})P_{ABD}P_{BCB}} = \frac{P_{BAD}P_{ACD}P_{CBD}}{-P_{CAD}P_{BCD}P_{ABD}}$

(Απαλοιφή σημείου A, B, C, D, χρησιμοποιούμε το λήμμα 4.3.1 (σελίδα 175))

$(P_{ABD} = -2(\widetilde{BD}\widetilde{AB}\cos(AD)),\ P_{BCD} = -2(\widetilde{CD}\widetilde{BC}\cos(BD))$

$P_{CAD} = 2(\widetilde{AD}\widetilde{AC}\cos(CD)),\ P_{CBD} = 2(\widetilde{BD}\widetilde{BC}\cos(CD))$

$P_{ACD} = -2(\widetilde{CD}\widetilde{AC}\cos(AD)),\ P_{BAD} = 2(\widetilde{AD}\widetilde{AB}\cos(BD)))$

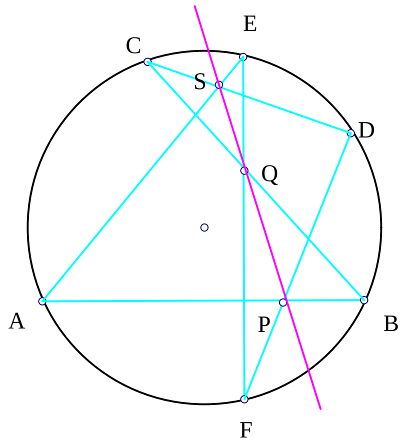
$\frac{(2\widetilde{AD}\widetilde{AB}\cos(BD))(-2\widetilde{CD}\widetilde{AC}\cos(AD))(2\widetilde{BD}\widetilde{BC}\cos(CD))}{-(2\widetilde{AD}\widetilde{AC}\cos(CD))(-2\widetilde{CD}\widetilde{BC}\cos(BD))(-2\widetilde{BD}\widetilde{AB}\cos(AD))}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PASCAL ΠΑΝΩ ΣΕ ΚΥΚΛΟ)

Έστω A, B, C, D, E, F έξι σημεία πάνω στον κύκλο. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB και DF, Q το σημείο τομής των ευθειών AB και DF, S το σημείο τομής των ευθειών AB και DF. Τα σημεία P, Q, S είναι συγραμμικά.



Σχήμα 4.16:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(CIRCLE\ A\,B\,C\,D\,F\,E)$: Έστω έξι αυθαίρετα ομοκυκλικά σημεία A, B, C, D, F, E.

K_2 $(INTER\ P\,(LINE\ D\,F)(LINE\ A\,B))$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών DF και AB.

K_3 $(INTER\ Q\,(LINE\ F\,E)(LINE\ B\,C))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών FE και BC.

K_4 $(INTER\ S\,(LINE\ E\,A)(LINE\ C\,D))$: Έστω S το σημείο τομής των ευθειών EA και CD.

K_5 $(INTER\ H\,(LINE\ P\,Q)(LINE\ C\,D))$: Έστω H το σημείο τομής των ευθειών PQ και CD.

Σ: Ισχύει: $\frac{\overline{CS}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $H, S, Q, P, E, F, D, C, B, A$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών:
$DF \nparallel AB, EF \nparallel BC, AE \nparallel CD, PQ \nparallel CD, D \neq S, D \neq H$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}}{\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου H, χρησιμοποιούμε την πρόταση Β.2 (σελίδα 14),(θεώρημα επίπλευρων τριγώνων))

$(\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}} = \frac{S_{CPQ}}{S_{DPQ}})$

$$\frac{\frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}}{\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}} = \frac{\frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}}{\frac{S_{CPQ}}{S_{DPQ}}}$$

(Απαλοιφή σημείου S, χρησιμοποιούμε την πρόταση Β.2)

$(\frac{\overline{CS}}{\overline{DS}} = \frac{S_{ACE}}{S_{ADE}})$

$\frac{S_{DPQ}S_{ACE}}{S_{CPQ}S_{ADE}}$

(Απαλοιφή σημείου Q, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.14 (σελίδα 37))

$(S_{CPQ} = \frac{-S_{CFE}S_{BCP}}{S_{BFCE}},\ S_{DPQ} = \frac{S_{DEP}S_{BCF}}{S_{BFCE}})$

$\frac{S_{ACE}(-S_{DEP}S_{BCF})S_{BFCE}}{(-S_{CFE}S_{BCP})S_{ADE}(-S_{BFCE})} = \frac{-S_{ACE}S_{DEP}S_{BCF}}{S_{CFE}S_{BCP})S_{ADE}}$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.14)

$(S_{BCP} = \frac{-S_{BDF}S_{ABC}}{S_{ADBF}},\ S_{DEP} = \frac{S_{DFE}S_{ABD}}{S_{ADBF}})$

$\frac{-S_{ACE}(-S_{DFE}S_{ABD})S_{BCF}S_{ADBF}}{S_{CFE}(-S_{BDF}S_{ABC})S_{ADE}(-S_{ADBF})} = \frac{S_{ACE}S_{DFE}S_{ABD}S_{BCF}}{S_{CFE}S_{BDF}S_{ABC}S_{ADE}}$

(Απαλοιφή σημείου A, B, C, D, E, F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 4.3.1 (σελίδα 175))

$(S_{ADE} = \frac{\widetilde{DE}\widetilde{AE}\widetilde{AD}}{-2d},\ S_{ABC} = \frac{\widetilde{BC}\widetilde{AC}\widetilde{AB}}{-2d}$

$S_{BDF} = \frac{\widetilde{DF}\widetilde{BF}\widetilde{BD}}{-2d},\ S_{CFE} = \frac{\widetilde{FE}\widetilde{CE}\widetilde{CF}}{-2d}$

$S_{BCF} = \frac{\widetilde{CF}\widetilde{BF}\widetilde{BC}}{-2d},\ S_{ABD} = \frac{\widetilde{BD}\widetilde{AD}\widetilde{AB}}{-2d}$

$S_{DFE} = \frac{\widetilde{FE}\widetilde{DE}\widetilde{DF}}{-2d},\ S_{ACE} = \frac{\widetilde{CE}\widetilde{AE}\widetilde{AC}}{-2d})$

$$\frac{(-\widetilde{CE}\widetilde{AE}\widetilde{AC})(-\widetilde{FE}\widetilde{DE}\widetilde{DF})(-\widetilde{BD}\widetilde{AD}\widetilde{AB})(-\widetilde{CF}\widetilde{BF}\widetilde{BC})(2d)^4}{(-\widetilde{FE}\widetilde{CE}\widetilde{CF})(-\widetilde{DF}\widetilde{BF}\widetilde{BD})(-\widetilde{BC}\widetilde{AC}\widetilde{AB})(-\widetilde{DE}\widetilde{AE}\widetilde{AD})(2d)^4}$$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

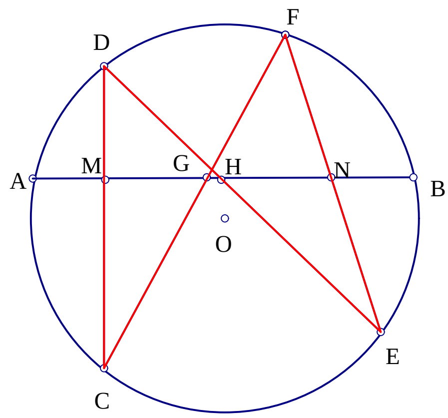
=1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.(ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΠΕΤΑΛΟΥΔΑΣ)

Έστω έξι ομοκυκλικά σημεία, A, B, C, D, E, F. Οι ευθείες CD και EF τέμνουν την AB στα σημεία M και N αντίστοιχα. Οι ευθείες CF και DE τέμνουν την AB στα σημεία G και H αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{NH}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AN}}$$

Απόδειξη



Σχήμα 4.17:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(CIRCLE\ A\ B\ C\ D\ E\ F)$: Έστω έξι αυθαίρετα ομοκυκλικά σημεία A, B, C, D, E, F.

K_2 $(INTER\ M\ (LINE\ D\ C)(LINE\ A\ B))$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών DF και AB.

K_3 $(INTER\ N\ (LINE\ E\ F)(LINE\ A\ B))$: Έστω Q το σημείο τομής των ευθειών FE και BC.

K_4 $(INTER\ G\ (LINE\ A\ B)(LINE\ C\ F))$: Έστω S το σημείο τομής των ευθειών EA και CD.

K_5 $(INTER\ H\ (LINE\ D\ E)(LINE\ A\ B))$: Έστω H το σημείο τομής των ευθειών PQ και CD.

Σ: Ισχύει: $\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}}\frac{\overline{BH}}{\overline{NH}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}\frac{\overline{BA}}{\overline{AN}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, $H, S, Q, P, E, F, D, C, B, A$ εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $DE \nparallel AB, AB \nparallel CF, EF \nparallel AB, AB \nparallel CD, A \neq B, N \neq H, N \neq A, A \neq G$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}}\frac{\overline{BH}}{\overline{NH}}}{-\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}\frac{\overline{AB}}{\overline{AN}}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου H, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2 (σελίδα 14),(θεώρημα επίπλευρων τριγώνων»

$(\frac{\overline{BH}}{\overline{NH}} = \frac{S_{BDE}}{S_{DEN}})$

$\frac{S_{BDE}}{-\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}\frac{\overline{AB}}{\overline{AN}}S_{DEN}}\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}}$

(Απαλοιφή σημείου G, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2)

$(\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} = \frac{S_{CFM}}{S_{ACF}})$

$\frac{-S_{CFM}S_{BDE}}{S_{DEN}S_{ACF}\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}\frac{\overline{AB}}{\overline{AN}}}$

(Απαλοιφή σημείου N, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.14 (σελίδα 37))

$(\frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \frac{S_{AEBF}}{S_{AEF}},\ S_{DEN} = \frac{S_{DEF}S_{ABE}}{-S_{AEBF}})$

$\frac{-S_{CFM}S_{BDE}S_{AEF}(-S_{AEBF})}{\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}S_{AEBF}S_{DEF}S_{ABE}S_{ACF}} = \frac{S_{CFM}S_{BDE}S_{AEF}}{S_{DEF}S_{ABE}S_{ACF}\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}}$

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.14)

$(\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{S_{BCD}}{S_{ACBD}},\ S_{CFM} = \frac{S_{CDF}S_{ABC}}{S_{ACBD}})$

$\frac{(-S_{CDF}S_{ABC})S_{BDE}S_{AEF}(-S_{ACBD})}{(-S_{BCD})S_{DEF}S_{ABE}S_{ACF}(-S_{ACBD})} = \frac{S_{CDF}S_{ABC}S_{BDE}S_{AEF}}{S_{BCD}S_{DEF}S_{ABE}S_{ACF}}$

(Απαλοιφή σημείου A, B, C, D, E, F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 4.3.1 (σελίδα 175»

$(S_{ACF} = \frac{\widetilde{AC}\widetilde{CF}\widetilde{FA}}{-2d},\ S_{ABE} = \frac{\widetilde{AB}\widetilde{BE}\widetilde{AE}}{-2d}$

$S_{DEF} = \frac{\widetilde{EF}\widetilde{DF}\widetilde{DE}}{-2d},\ S_{BCD} = \frac{\widetilde{CD}\widetilde{BD}\widetilde{BC}}{-2d}$

$S_{AEF} = \frac{\widetilde{EF}\widetilde{AF}\widetilde{AE}}{-2d},\ S_{BDE} = \frac{\widetilde{DE}\widetilde{BE}\widetilde{BD}}{-2d}$

$S_{ABC} = \frac{\widetilde{BC}\widetilde{AC}\widetilde{AB}}{-2d},\ S_{CDF} = \frac{\widetilde{DF}\widetilde{CF}\widetilde{CD}}{-2d})$

$\frac{(-\widetilde{DF}\widetilde{CF}\widetilde{CD})(-\widetilde{BC}\widetilde{AC}\widetilde{AB})(-\widetilde{DE}\widetilde{BE}\widetilde{BD})(-\widetilde{EF}\widetilde{AF}\widetilde{AE})(2d^4)}{(-\widetilde{CD}\widetilde{BD}\widetilde{BC})(-\widetilde{EF}\widetilde{DF}\widetilde{DE})(-\widetilde{BE}\widetilde{AE}\widetilde{AB})(-\widetilde{CF}\widetilde{AF}\widetilde{AC})(2d)^4}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

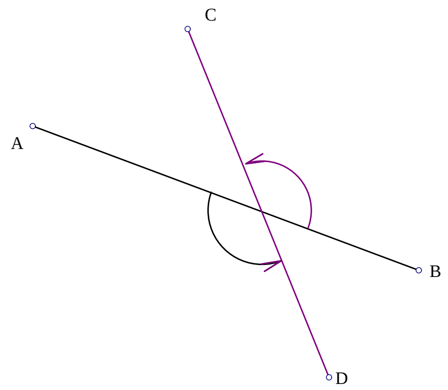
=1

4.4 ΠΛΗΡΕΙΣ ΓΩΝΙΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε ένα νέο είδος γωνίας, την **πλήρη γωνία**, της οποίας η περιγραφή δεν εξαρτάται από την σειρά των σημείων πάνω στις ευθείες. Γωνίες αυτού του είδους χρησιμοποιούνται για να απλοποιήσουν πολλές αποδείξεις γεωμετρικών θεωρημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.1 *Μια* **πλήρη γωνία** *αποτελείται από ένα διατεταγμένο ζεύγος ευθειών l και m και συμβολίζεται ως εξής: $\angle[l, m]$. Μια* *πλήρη γωνία $\angle[l, m]$ περιστέφεται αντίθετα από τη φορά του ρολογιού με σκοπό να φέρει την l παράλληλα προς την m.*

Για παράδειγμα, αν έχω να μετρήσω την $\angle[AB, CD]$:



Σχήμα 4.18:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.2 *Δύο πλήρης γωνίες $\angle[l, m]$ και $\angle[u, v]$ είναι ίσες αν υπάρχει περιστροφή R τέτοια ώστε: $R(l) \parallel u$ και $R(m) \parallel v$.*

Να σημειώσουμε επίσης ότι για τέσσερα διακεκριμένα σημεία A, B και C, D πάνω στις ευθείες l και m αντίστοιχα, η $\angle[l, m]$ συμβολίζεται επίσης ως εξής:

$$\angle[AB, CD], \angle[BA, CD], \angle[AB, DC], \angle[l, DC], \angle[AB, m].$$

Για τρεία σημεία A, B και C ισχύει $\angle[ABC] = \angle[AB, BC]$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.3 *Αν $l \perp m$, τότε η $\angle[l, m]$ ονομάζεται* **ορθή πλήρη γωνία** *και συμβολίζεται ως εξής:$\angle[1]$. Αν $l \parallel m$ τότε η $\angle[l, m]$ ονομάζεται* **επίπεδη πλήρη γωνία** *και συμβολίζεται ως εξής: $\angle[0]$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.4 *Έστω a, b, c και d να είναι τέσσερις ευθείες. Έστω R να είναι μια περιστροφή τέτοια ώστε $R(a) \parallel d$.*

Ορίζουμε $\angle[c, d] + \angle[a, b] = \angle[c, R(b)]$.

Βασικές ιδιότητες των πλήρων γωνιών.

1. $\angle[c, d] = \angle[0]$ αν και μόνο αν $c \parallel d$

2. $\angle[c, d] = \angle[1]$ αν και μόνο αν $c \perp d$

3. $\angle[u, v] = -\angle[v, u]$

4. $\angle[1] + \angle[1] = \angle[0]$

5. $\angle[c, d] + \angle[0] = \angle[c, d]$

6. $\angle[c, d] + \angle[a, b] = \angle[a, b] + \angle[c, d]$

7. $\angle[c, d] + (\angle[a, b] + \angle[e, f]) = (\angle[c, d] + \angle[a, b]) + \angle[e, f]$

8. $\angle[c, e] + \angle[e, d] = \angle[c, d]$

9. $\angle[AB, CD] = \angle[BA, CD] = \angle[AB, DC] = \angle[BA, DC]$

10. Αν $\angle[c, d] = \angle[0]$ τότε για οποιοδήποτε ευθεία p έχουμε $\angle[c, p] = \angle[d, p]$. Αντιστρόφως αν για μια ευθεία p έχουμε $\angle[c, p] = \angle[d, p]$ τότε $\angle[c, d] = \angle[0]$

11. Αν $AB = AC$ έχουμε $\angle[AB, BC] = \angle[BC, AC]$. Αντιστρόφως αν $\angle[AB, BC] = \angle[BC, AC]$ τότε $AB = AC$ ή τα A, B, C είναι συγγραμμικά.

12. Τα σημεία A, B, C και D είναι ομοκυκλικά ή συγγραμμικά αν και μόνο αν $\angle[AB, BC] = \angle[AD, DC]$

13. Αν AB είναι η διάμετρος του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το τρίγωνο ABC τότε $\angle[AC, BC] = \angle[1]$

14. Αν O είναι το κέντρο του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το τρίγωνο ABC τότε $\angle[BO, OC] = 2\angle[AB, AC]$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων 1 μέχρι 9 είναι προφανής, μένει λοιπόν να αποδείξουμε τις υπόλοιπες ιδιότητες.

Η ιδιότητα 10 αποδεικνύεται άμεσα χρησημοποιώντας τις ιδιότητες 1, 4, 5 και 7.

Η ιδιότητα 11 αποδεικνύεται ως εξής:

Αν ισχύει: $AB = AC$ τότε

$\tan(\angle[ABC]) = \tan(\angle[AB, BC]) = \frac{4S_{ABC}}{-P_{ABC}} = \frac{4S_{BCA}}{-BC^2} = \frac{4S_{BCA}}{-P_{BCA}} = \tan(\angle[BC, CA]) = \tan(\angle[BCA])$.

Οπότε: $\angle[ABC] = \angle[BCA]$.

Αντίστροφα αν $\angle[ABC] = \angle[BCA]$ και $S_{ABC} \neq 0$, από τον ορισμό της εφαπτομένης θα έχουμε: $P_{ABC} = P_{BCA}$

δηλαδή $AB^2 = AC^2$.

Για τις ιδιότητες 12, 13, 14 ανατρέξτε στο παράρτημα Δ'.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δυο τρόπους επίλυσης γεωμετρικών θεωρημάτων με την χρήση πλήρων γωνιών.

Ο ένας τρόπος είναι να εισάγουμε στην μέθοδο μια νέα γεωμετρική έννοια, την εφαπτομενική συνάρτηση.

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, η νέα αυτή γεωμετρική ποσότητα θα συνοδευτεί από ένα πλήθος ορισμών και προτάσεων που αφορούν ισότητες μεταξύ πλήρων γωνιών. Το θετικό στην επιλογή της διαδικασίας αυτής είναι ότι δεν χρειάζεται να εισάγουμε νέες τεχνικές απαλοιφής σημείων από τις γεωμετρικές ποσότητες αφού όπως θα δούμε η εφαπτομενική συνάρτηση μιας πλήρης γωνίας εκφράζεται συναρτήσει του εμβαδού και της Πυθαγόρειας διαφοράς τριγώνων ή τετραπλεύρων.

Όμως με την επιλογή αυτής της διασικασίας χάνουμε την μοναδικότητα που μας προσφέρουν οι παραδοσιακές αποδείξεις που χρησιμοποιούν στην αποδεικτική τους διαδικασία μόνο εκφράσεις μεταξύ πλήρων γωνιών.

Για τον σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε και έναν δεύτερο τρόπο επίλυσης των γεωμετρικών προτάσεων. Ο τρόπος αυτός στηρίζεται στο γνώριμο πλέον σύστημα (GIB) που συναντήσαμε ξανά στις ενότητες 2.7 και 3.8. Για να υπενθυμίσουμε, το σύστημα αυτό βασίζεται εξ ολοκλήρου στη κατασκευαστική περιγραφή της πρότασης. Συλλέγει σε ομάδες, πριν την αποδεικτική διαδικασία, όλες τις ιδιότητες που μπορεί να συνδέουν τα σημεία και τις ευθείες μεταξύ τους (συγγραμμικότητα, παραλληλία, καθετότητα, κλπ.). Σκοπός του είναι η αυτόματη απαλοιφή των βοηθητικών σημείων που περιέχονται στις πλήρεις γωνίες. Μειονέκτημα της επιλογής αυτής της διαδικασίας είναι η δημιουργία νέων τεχνικών απαλοιφής σημείων που περιέχονται στις πλήρεις γωνίες.

4.5 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5.1 *Η* **εφαπτομενική συνάρτηση για την πλήρη γωνία** $\angle[PQ, AB]$ *ορίζεται ως εξής:*

$\tan([PQ, AB]) = \frac{\sin(\measuredangle(PQ,AB))}{\cos(\measuredangle(PQ,AB))}$.

Για να ελέγξουμε αν ο ορισμός είναι καλά ορισμένος αρκεί να εξετάσουμε αν με την εναλλαγή των σημείων P, Q και A, B η ισότητα ισχύει.

Παρατηρούμε ότι

$$\sin(\measuredangle(PQ, AB)) = -\sin(\measuredangle(PQ, BA)) = -\sin(\measuredangle(QP, AB))$$

$$\cos(\measuredangle(PQ, AB)) = -\cos(\measuredangle(PQ, BA)) = -\cos(\measuredangle(QP, AB))$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.2 $\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$ *αν και μόνο αν* $\measuredangle(AB, PQ) = \measuredangle(XY, UV)$ *ή* $\measuredangle(AB, PQ) - \measuredangle(XY, UV) = 180°$.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $AB \parallel XY$. Τότε $\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$ αν και μόνο αν $PQ \parallel UV$, το οποίο, όπως ήδη γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των προσανατολισμένων γωνιών, ισχύει αν και μόνο αν: $\measuredangle(AB, PQ) = \measuredangle(XY, UV)$ ή $\measuredangle(AB, PQ) - \measuredangle(XY, UV) = 180°$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.3 $\tan(\angle[AB, PQ]) = \frac{4S_{APBQ}}{P_{AQBP}}$

Απόδειξη

Είναι άμεση απόρροια της πρότασης 4.1.11 (σελίδα 162).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.4 $\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$ *αν και μόνο αν* $\tan(\angle[AB, PQ]) = \tan(\angle[XY, UV])$

Απόδειξη

Αν $\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$ από την πρόταση 4.5.2 (σελίδα 191) παίρνουμε:

$\measuredangle(AB, PQ) = \measuredangle(XY, UV)$ ή $\measuredangle(AB, PQ) - \measuredangle(XY, UV) = 180°$.

Είναι προφανής η ισότητα και για τις δυο περιπτώσεις: $\tan(\angle[AB, PQ]) = \tan(\angle[XY, UV])$.

Αντίστροφα, αν $\tan(\angle[AB, PQ]) = \tan(\angle[XY, UV])$ τότε έχουμε:

$\frac{\sin(\measuredangle(AB,PQ))}{\cos(\measuredangle(AB,PQ))} = \frac{\sin(\measuredangle(XY,UV))}{\cos(\measuredangle(XY,UV))}$.

η παραπάνω σχέση ισχύει αν και μόνο αν

$\measuredangle(AB, PQ) = \measuredangle(XY, UV)$ ή

$\measuredangle(AB, PQ) - \measuredangle(XY, UV) = 180°$

όπου σύμφωνα από την πρόταση 4.5.2 (σελίδα 191) παίρνουμε:

$\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.5 $\angle[AB, PQ] = \angle[XY, UV]$ *αν και μόνο αν*

$S_{APBQ}P_{XVYU} = S_{XUYV}P_{AQBP}$

Απόδειξη

Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων 4.5.3 και 4.5.4 (σελίδα 191).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.6 (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΠΙΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Έστω δυο τρίγωνα ABC και XYZ. Αν $\angle[ABC] = \angle[XYZ]$, $\angle[ABC]/ne\angle[1]$ και $\angle[ABC]/ne\angle[0]$ τότε:

$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = t$, *όπου* $t^2 = \frac{\overline{AB}^2\overline{BC}^2}{\overline{XY}^2\overline{ZY}^2}$.

Απόδειξη

Από την πρόταση 4.5.5 (σελίδα 192): αν $\angle[ABC] = \angle[XYZ]$ τότε:

$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \frac{P_{ABC}}{P_{XYZ}} = t$.

Από τον τύπο $Herron - Qin$ για το τρίγωνο ABC:

$16S_{ABC}^2 + P_{ABC}^2 = 4\overline{AB}^2\overline{CB}^2(1)$

Από τον τύπο $Herron - Qin$ για το τρίγωνο XYZ:

$16S_{XYZ}^2 + P_{XYZ}^2 = 4\overline{XY}^2\overline{ZY}^2$

Επίσης $S_{ABC} = tS_{XYZ}$ και $P_{ABC} = tP_{XYZ}(2)$

Με μια απλή αντικατάσταση της (2) στην (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

Παρατηρούμε ότι η συμβολή της εισαγωγής της εφαπτομενικής συνάρτησης στην μέθοδο επίλυσης γεωμετρικών θεωρημάτων είναι πως πλέον μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρισμούς όπως

$\angle[AB, CD] = \angle[EF, GH]$ και $\angle[AB, CD] = \angle[EF, GH] + \angle[XY, WZ]$.

Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι τώρα είχαμε τέσσερις τρόπους αναπαράστασης ευθειών: $(LINE\ U\ V), (PLINE\ P\ U\ V), (TLINE\ P\ U\ V), (BLINE\ U\ V)$, τους οποίους αντικαταστήσαμε κατά την δημιουργία του ελάχιστου συνόλου κατασκευών με ένα μόνο είδος ευθείας,$(LINE\ U\ V)$. Τώρα με την έννοια των πλήρων γωνιών προστίθεται ακόμη ένας τρόπος αναπαράστασης ευθειών, τον οποίο και θα αντικαταστήσουμε με τον $(LINE\ U\ V)$, έτσι ώστε να μην χρειαστεί να εισάγουμε νέες τεχνικές απαλοιφής βοηθητικών σημείων.

Η νέα αναπαράσταση ευθειών είναι η παρακάτω:

$(ALINE\ P\ Q\ U\ W\ V)$:είναι η ευθεία l που περνά από το σημείο P τέτοια ώστε $\angle[PQ, l] = \angle[UW, WV]$.

Με την εισαγωγή της νέας αναπαράστασης ευθειών παράγονται και επτά νέες κατασκευές.

1.$(ON\ Y\ (ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω αυθαίρετο σημείο Y πάνω στην $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστικές συνθήκες: $P \neq Q, L \neq M, N \neq M$.

2.$(INTER\ Y\ (LINE\ U\ V)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(LINE\ U\ V)$ και της $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστική συνθήκη: $\angle[PQ, UV] \neq \angle[LM, MN]$

3.$(INTER\ Y\ (PLINE\ W\ U\ V)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(PLINE\ W\ U\ V)$ και της $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστική συνθήκη: $\angle[PQ, UV] \neq \angle[LM, MN]$

4.$(INTER\ Y\ (TLINE\ W\ U\ V)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(TLINE\ W\ U\ V)$ και της $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστική συνθήκη: $\angle[UV, PQ] + \angle[LM, MN] \neq \angle[1]$

5.$(INTER\ Y\ (BLINE\ U\ V)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(BLINE\ U\ V)$ και της $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστική συνθήκη: $\angle[UV, PQ] + \angle[LM, MN] \neq \angle[1]$

6.$(INTER\ Y\ (ALINE\ U\ V\ X\ Y\ Z)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(ALINE\ U\ V\ X\ Y\ Z)$ και της $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Περιοριστική συνθήκη: $\angle[UV, PQ] \neq \angle[NM, ML] + \angle[XY, YZ]$

7.$(INTER\ Y\ (CIR\ O\ P)(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$.

Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας $(ALINE\ P\ Q\ L\ M\ N))$ και του κύκλου $(CIR\ O\ P)$.

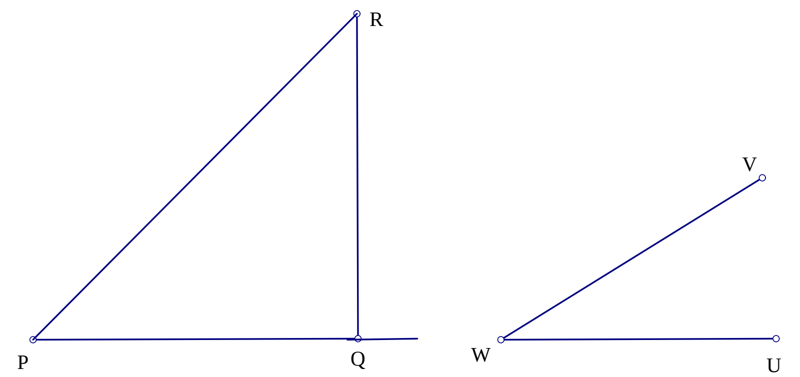
Περιοριστικές συνθήκες: $Y \neq P, P \neq O, P \neq Q, L \neq M, N \neq M$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι η περιγραφή ευθείας $ALINE$ μπορεί να αντικατασταθεί από την περιγραφή $LINE$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5.7 *Αν $UW \not\perp WV$ τότε η περιγραφή $l = (ALINE\ P\ Q\ U\ W\ V)$ είναι ίδια με την περιγραφή $(LINE\ P\ R)$, όπου R το σημείο που εισάγεται μέσω της κατασκευής $(TRATIO\ R\ Q\ P\ \frac{4S_{UWV}}{P_{UWV}})$.*

(Σημείωση: είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι $UW \not\perp WV$ επειδή αν ίσχυε η μεταξύ τους καθετότητα η ευθεία l θα περιγραφόταν ως εξής: $(TLINE\ P\ P\ Q)$).

Απόδειξη



Σχήμα 4.19:

Έστω ότι η κάθετη που περνά από το Q και είναι κάθετη στην PQ τέμνει την ευθεία l στο σημείο R.

Δηλαδή το σημείο R εισάγεται από την κατασκευή

$(TRATIO\ R\,Q\,P\,r)$, όπου $r = \frac{4S_{RPQ}}{P_{QPQ}}$.

Επειδή από την πρόταση Β.7 (σελίδα 87): $RQ \perp QP$ τότε $P_{RQP} = P_{QPQ}$

Οπότε:

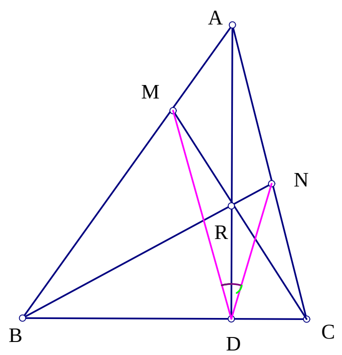
$r = \frac{4S_{RPQ}}{P_{QPQ}} = \frac{4S_{QPR}}{P_{QPR}} = \tan(\angle[RPQ]) = \tan(\angle[VWU]) = \frac{4S_{UWV}}{P_{UWV}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Έστω N, M σημεία πάνω στις πλευρές AC, AB τριγώνου ABC και R το σημείο τομής των ευθειών BN, CM. Το σημείο R βρίσκεται πάνω στο ύψος AD του τριγώνου ABC. Ισχύει ότι η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας MDN.

Απόδειξη



Σχήμα 4.20:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ A\,B\,C)$: Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, C

K_2 $(FOOT\ D\,A\,B\,C)$: Έστω D η ορθογώνια προβολή του σημείου A πάνω στην BC.

K_3 $(ON\ R(LINE\ A\ D))$: Έστω R σημείο πάνω στην AD.

K_4 $(INTER\ M\ (LINE\ A\ B)(LINE\ C\ R))$: Έστω M το σημείο τομής των ευθειών AB και CR.

K_5 $(INTER\ N\ (LINE\ A\ C)(LINE\ B\ R))$: Έστω N το σημείο τομής των ευθειών AC και BR.

Σ: Ισχύει $S_{ADM}P_{ADN} = S_{ADN}P_{ADM}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, N, M, R εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $A \neq D, C \neq B, AB \nparallel CR, AC \nparallel BR$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{(-S_{ADM}P_{ADN})}{S_{ADN}P_{ADM}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου N, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.2 (σελίδα 111))

$(S_{ADN} = \frac{-S_{ACD}S_{ABR}}{S_{ABCR}},\ P_{ADN} = \frac{P_{ADR}S_{ABC}}{S_{ABCR}})$

$$\frac{(-S_{ADM})\frac{-P_{ADR}S_{ABC}}{S_{ABCR}}}{P_{ADM}\frac{(-S_{ACD}S_{ABR})}{S_{ABCR}}} = \frac{S_{ADM}P_{ADR}S_{ABC}}{S_{ACD}S_{ABR}P_{ADM}}$$

(Απαλοιφή σημείου M, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.2)

$(P_{ADM} = \frac{P_{ADR}S_{ABC}}{-S_{ACBR}},\ S_{ADM} = \frac{-S_{ACR}S_{ABD}}{S_{ACBR}})$

$\frac{P_{ADR}S_{ABC}\frac{(-S_{ACR})S_{ABD}}{S_{ACBR}}}{S_{ABR}S_{ACD}\frac{P_{ADR}S_{ABC}}{-S_{ACBR}}} = \frac{S_{ACR}S_{ABD}}{S_{ACD}S_{ABR}}$

(Απαλοιφή σημείου R, χρησιμοποιούμε την πρόταση B.2 (σελίδα 14))

$(S_{ABR} = S_{ABD}\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}},\ S_{ACR} = S_{ACD}\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}})$

$\frac{S_{ABD}(S_{ACD}\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}})}{S_{ACD}(S_{ABD}\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}})}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Στην υποτείνουσα AB ενός ορθογωνίου τριγώνου ABC σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο $ABFE$. Έστω P το σημείο τομής των διαγωνίων AF και BE του τετραγώνου $ABFE$. Ισχύει ότι: $\angle[ACP] = \angle[PCB]$.

Απόδειξη

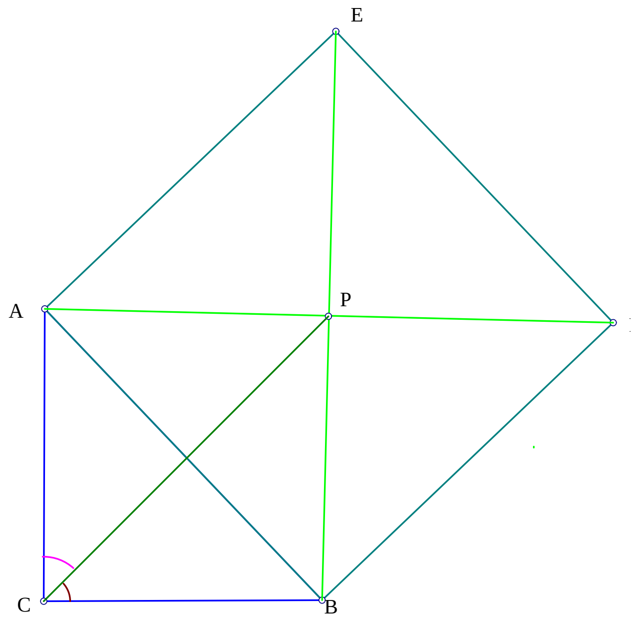
ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ B\ C)$: Έστω δυο αυθαίρετα σημεία B, C

K_2 $(TRATIO\ A\ C\ B\ r)$: Έστω A σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ C\ C\ B)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = r$.

K_3 $(TRATIO\ F\ B\ A\ {-1})$: Έστω F σημείο πάνω στην ευθεία $(TLINE\ B\ B\ A)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = -1$.

K_4 $(TRATIO\ E\ A\ B\ 1)$: Έστω σημείο E πάνω στην ευθεία $(TLINE\ A\ A\ B)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = 1$



Σχήμα 4.21:

K_5 $(INTER\ P\,(LINE\ B\,E)(LINE\ A\,F)$: Έστω P το σημείο τομής των ευθειών BE και AF.

Σ: Ισχύει $\angle[ACP] = \angle[PCB]\ {-S_{CAP}}P_{BCP} = -S_{BCP})P_{ACP}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, P, E, F, A εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $A \neq B, C \neq B, BE \nparallel AF$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{(-S_{CAP}P_{BCP})}{(-S_{BCP})P_{ACP}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.2 (σελίδα 111))

$(P_{ACP} = \frac{P_{ACE}S_{BAF}}{S_{BAEF}},\ S_{BCP} = \frac{S_{BAF}S_{BCE}}{S_{BAEF}},\ P_{BCP} = \frac{P_{BCF}S_{BAE}}{S_{BAEF}},\ S_{CAP} = \frac{S_{CAF}S_{BAE}}{S_{BAEF}})$

$\frac{(-S_{CAP}P_{BCP})}{(-S_{BCP})P_{ACP}} = \frac{(-\frac{S_{CAF}S_{BAE}}{S_{BAEF}})(\frac{P_{BCF}S_{BAE}}{S_{BAEF}})}{(-\frac{S_{BAF}S_{BCE}}{S_{BAEF}})(\frac{P_{ACE}S_{BAF}}{S_{BAEF}})} = \frac{S_{CAF}(S_{BAE})^2P_{BCF}}{(S_{BAF})^2S_{BCE}P_{ACE}}$

(Απαλοιφή σημείου E, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6, 3.5.5 (σελίδα 113))

$(P_{ACE} = P_{CAC}-4S_{BCA},\ S_{BCE} = -\frac{1}{4}(P_{CBA}-4S_{BCA}),\ S_{BAE} = -\frac{1}{4}P_{BAB})$

$\frac{S_{CAF}P_{BCF}(-\frac{1}{4}P_{BAB})}{(S_{BAF})^2(-\frac{1}{4}(P_{CBA}-4S_{BCA}))(P_{CAC}-4S_{BCA})}$

(Απαλοιφή σημείου F, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.6, 3.5.5)

$(S_{BAF} = -\frac{1}{4}P_{BAB},\ P_{BCF} = P_{BCB} - 4S_{BCA},\ S_{CAF} = -\frac{1}{4}(P_{BAC} - 4S_{BCA}))$

$\frac{(-\frac{1}{4}P_{BAB})^2(-\frac{1}{4}(P_{BAC}-4S_{BCA}))(P_{BCF}-4S_{BCA})}{(-\frac{1}{4}P_{CBA}+S_{BCA})(P_{CAC}-4S_{BCA})(-\frac{1}{4}P_{BAB})^2} = \frac{(P_{BAC}-4S_{BCA})(P_{BCB}-4S_{BCA})}{(P_{CBA}-4S_{BCA})(P_{CAC}-4S_{BCA})}$

(Απαλοιφή σημείου A, χρησιμοποιούμε το λήμμα 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7)

$(P_{CAC} = r^2P_{BCB},\ P_{CBA} = P_{BCB},\ S_{BCA} = -\frac{1}{4}rP_{BCB},\ P_{BAC} = r^2P_{BCB})$

$\frac{(P_{BCB}\cdot r^2+P_{BCB}\cdot r)(P_{BCB}\cdot r+P_{BCB})}{(P_{BCB}\cdot r+P_{BCB})(P_{BCB}\cdot r^2+P_{BCB}\cdot r)}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες από ανεξάρτητες μεταβλητές - απλοποιήσεις.

=1.

4.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΛΗΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ-ΣΥΣΤΗΜΑ (GIB)

Η μέθοδος των πλήρων γωνιών δημιουργήθηκε με σκοπό την αυτόματη απόδειξη εκατοντάδων γεωμετρικών θεωρημάτων που περιλαμβάνουν σχέσεις μεταξύ γωνιών. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι σημαντικά. Προσφέρει μικρές σε έκταση και ευανάγνωστες αποδείξεις. Να σημειωθεί πως ένα γεωμετρικό θεώρημα όταν αποδεικνύεται με την χρήση της μεθόδου των πλήρων γωνιών έχει την ιδιότητα να είναι ανεξάρτητο από το διάγραμμα του θεωρήματος. Το γεγονός αυτό είναι εξαιρετικό αν συλλογιστούμε την αντίστοιχη διαδικασία επίλυσης του θεωρήματος με την χρήση όμως απλών γωνιών. Σε αυτήν την περίπτωση θα απαιτούνταν διαχωρισμός περιπτώσεων ανάλογα με την θέση των σημείων πάνω στο διάγραμμα και οι αποδείξεις θα διέφεραν ανά περίπτωση.

Αντίθετα η μέθοδος των πλήρων γωνιών βασίζεται στο πλεονέκτημα που της προσφέρει η κατασκευαστική σειρά των σημείων. Η υπόθεση του γεωμετρικού θεωρήματος εισάγει με την σειρά τα σημεία με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε σημείο που εισάγεται να μπορεί να κατασκευαστεί από τα ήδη υπάρχοντα σημεία. Για παράδειγμα, αν δώσουμε την πληροφορία ότι το σημείο M είναι το μέσον της AB, όπου A, B ελεύθερα σημεία, τότε η κατασκευαστική σειρά θα είναι: κατασκευάζουμε πρώτα το σημείο A έπειτα το σημείο B και τέλος το σημείο M.

Έτσι λοιπόν κατά την αποδεικτική διαδικασία η μέθοδος των πλήρων γωνιών αντικαθιστά πλήρεις γωνίες με γωνίες που περιλαμβάνουν χαμηλότερης σειράς σημεία. Αυτό οφείλεται στην κατασκευαστική σειρά των σημείων, όπου η θέση των σημείων αυτών (χαμηλότερης σειράς) στο διάγραμμα δεν εξαρτάται από την θέση των σημείων (υψηλότερης σειράς).

ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΛΗΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

Η μέθοδος των πλήρων γωνιών ακολουθεί τα παρακάτω βήματα για την απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων.

ΒΗΜΑ 1. Η υπόθεση της πρότασης εισάγεται στο σύστημα (GIB). Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει όλα τα γεωμετρικά στοιχεία που απορρέουν από τις κατασκευές που χρησιμοποιεί η πρόταση.

ΒΗΜΑ 2. Το συμπέρασμα της πρότασης μετατρέπεται σε ισότητα μεταξύ πλήρων γωνιών της μορφής $\angle[0] = \sum f_i \cdot n_i$, όπου f_i είναι μια πλήρη γωνία και n_i ένας ακέραιος συντελεστής.

ΒΗΜΑ 3. Η μέθοδος έχει εφοδιαστεί με ένα επιπλέον σύστημα, το σύστημα (GKB) των γενικών γνώσεων, το οποίο αποτελεί την βάση του συστήματος (GIB). Η αποδεικτική διαδικασία χρησιμοποιεί τους κανόνες του συστήματος (GKB) σε συνδιασμό με τα στοιχεία που περιλαμβάνει το σύστημα (GIB). Σκοπός του είναι η αντικατάσταση των πλήρων γωνιών, που υπάρχουν στο συμπέρασμα της πρότασης, από ισοδύναμες εκφράσεις πλήρων γωνιών. Για παράδειγμα, η $\angle[u, v]$ μπορεί να γραφτεί ως $\angle[1]$ αν το (GIB) περιλαμβάνει στοιχείο όπως $u \perp v$. Επίσης εφαρμόζονται οι ιδιότητες των πλήρων γωνιών, με σκοπό την απλοποίηση των εκφράσεων που προέρχονται έπειτα από κάθε αντικατάσταση. Για παράδειγμα, $\angle[u, v] + \angle[v, u] = \angle[u, v] - \angle[u, v] = \angle[0]$ και $\angle[1] + \angle[1] = \angle[0]$.

ΒΗΜΑ 4. Η αποδεικτική διαδικασία τελειώνει όταν βρέθει μια σειρά από κατάλληλους κανόνες, οι οποίοι όταν εφαρμοστούν στην εξίσωση του συμπεράσματος θα την φέρουν στην μορφή $\angle[0] = \angle[0]$.

Το σύστημα (GKB) έχει εφοδιαστεί με τους παρακάτω κανόνες:

$\mathbb{R}_1$. Δυο σημεία A, B ορίζουν μια ευθεία. Περιοριστική συνθήκη $A \neq B$.

$\mathbb{R}_2$. Τρία σημεία A, B, C ορίζουν έναν κύκλο. Περιοριστική συνθήκη $S_{ABC} \neq 0$.

$\mathbb{R}_3$. $\angle[AB, CD] = \angle[EF, CD]$ αν και μόνο αν $\angle[AB, EF] = \angle[0]$. Περιοριστική συνθήκη $C \neq D$.

$\mathbb{R}_4$. $\angle[AB, CD] = \angle[AB, EF] + \angle[1]$ αν και μόνο αν $\angle[CD, EF] = \angle[1]$. Περιοριστική συνθήκη C, D, E, F μη συγγραμμικά.

$\mathbb{R}_5$. Τέσσερα σημεία A, B, C, D είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν $\angle[AC, BC] = \angle[AD, BD]$. Περιοριστική συνθήκη A, B, C, D μη συγγραμμικά.

$\mathbb{R}_6$. $AB = AC$ αν και μόνο αν $\angle[AB, BC] = \angle[BC, AC]$. Περιοριστική συνθήκη $S_{ABC} \neq 0$

$\mathbb{R}_7$. Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC τότε $\angle[OA, AB] = \angle[1] + \angle[AC, BC]$. Περιοριστική συνθήκη $S_{ABC} \neq 0$

$\mathbb{R}_8$. Αν $AB \perp BC$ αν και μόνο αν AC είναι η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC. Περιοριστική συνθήκη $S_{ABC} \neq 0$

Αυτό που μένει τώρα να κάνουμε είναι να δημιουργήσουμε ένα νέο σύστημα τεχνικών απαλοιφής σημείων, βασισμένο όχι στις κατασκευές σημείων, όπως γνωρίζαμε μέχρι τώρα, αλλά στα στοιχεία που περιλαμβάνει το (GIB).

Τεχνικές απαλοιφής σημείων από τις πλήρεις γωνίες.

Έστω $\angle[AB, CY]$ μια πλήρη γωνία και Y το σημείο που θέλουμε να απαλοίψουμε. Σύμφωνα με όσα ήδη έχουμε αναφέρει για να απαλοίψουμε από τις σχέσεις που ακολουθούν το σημείο Y πρέπει να υποθέσουμε ότι όλα τα υπόλοιπα σημεία έχουν κατασκευαστεί πιο πρίν από το Y (σημεία χαμηλότερης σειράς).

$\mathbf{T}_1$. Αν το σημείο Y βρίσκεται πάνω στη CD τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, CD]$.

$\mathbf{T}_2$. Αν $CY \parallel EF$ τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF]$.

$\mathbf{T}_3$. Αν $CY \perp EF$ τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF] + \angle[1]$.

$\mathbf{T}_4$. Αν το σημείο Y βρίσκεται πάνω στη EF και E, Y, C, D ομοκυκλικά τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF] + \angle[ED, CD]$.

$\mathbf{T}_5$. Αν το σημείο Y βρίσκεται πάνω στη EF και ισχύει $CY = CE$ τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF] + \angle[CE, EF]$.

$\mathbf{T}_6$. Αν το σημείο Y είναι το κέντρο του περιγεγραμμάνου κύκλου στο τρίγωνο CDE τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, CD] + \angle[ED, EC] + \angle[1]$.

$\mathbf{T}_7$. Αν $\angle[EF, CY] = \angle[u]$ και $\angle[u]$ γνωστή γωνία τότε $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF] + \angle[u]$.

Αποδείξεις

Οι τρείς πρώτες τεχνικές και η τελευταία είναι προφανείς.

$\mathbf{T}_4$. $\angle[AB, CY] = \angle[AB, EF] + \angle[EF, CY]$, από $\mathbf{T}_1$: $\angle[EF, CY] = \angle[EY, CY]$ και από $\mathbb{R}_5$: $\angle[EY, CY] = \angle[EF, CF]$. Άρα $\angle[EF, CY] = \angle[EF, CF]$

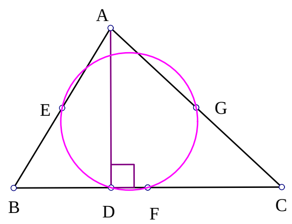
$\mathbf{T}_5$. Από $\mathbf{T}_1$: $\angle[CE, EF] = \angle[CE, EY] = \angle[EY, CY] = \angle[EF, CY]$. Οπότε με μια απλή αντικατάσταση παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η ιδιότητα 8.

$\mathbf{T}_6$. Από την $\mathbb{R}_7$: $\angle[CD, CY] = \angle[ED, EC] + \angle[1]$. Οπότε με μια απλή αντικατάσταση παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η ιδιότητα 8.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω A, B, C τρίγωνο. Έστω AD το ύψος του τριγώνου πάνω στην BC και έστω E, F, G τα μέσα των πλευρών AB, BC, AC αντίστοιχα. Ισχύει ότι τα σημεία D, E, F, G είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 4.22:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$(POINTS\ A\ B\ C)$ $(FOOT\ D\ A\ B\ C)$ $(MIDPOINT\ E\ A\ B)$ $(MIDPOINT\ F\ B\ C)$ $(MIDPOINT\ G\ A\ C)$ Σ: $-\angle[GE, GD] + \angle[FE, FD] = \angle[0]$

Το σύστημα (GIB) περιλαμβάνει σε ομάδες όλες τις σχέσεις που συνδέουν τα σημεία και τις ευθείες μεταξύ τους (συγγραμμικότητα, παραλληλία, καθετότητα κλπ.).

O$_1$: Περιέχει όλα τα σημεία της πρότασης με την σειρά που κατασκευάστηκαν, $(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G)$

O$_2$: Περιέχει όλα τα ελεύθερα σημεία της πρότασης, $(A,\ B,\ C)$

O$_3$: Περιέχει όλες τις ευθείες και τα συγγραμμικά σημεία της πρότασης, $((E,\ A,\ B)(G,\ A,\ C)(D,\ F,\ B,\ C))$ π.χ:$(G,\ A,\ C)$ σημαίνει ότι τα $G,\ A,\ C$ είναι συγγραμμικά.

O$_4$: Περιέχει όλες τις παράλληλες ευθείες της πρότασης, $((EG)(BDFC),(FG)(AEB),(EF)(AGC))$ π.χ: $(EG)(BDFC)$ σημαίνει ότι οι ευθείες EG και $BDFC$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

O$_5$: Περιέχει όλες τις κάθετες ευθείες της πρότασης, $((AD)(BDFC))$ π.χ:$(AD)(BDFC)$ σημαίνει ότι οι ευθείες AD και $BDFC$ είναι μεταξύ τους κάθετες.

O$_6$: Περιέχει όλους τους κύκλους της πρότασης, $((BA)(DBA(E)),(CA)(DCA(G)),(BC)(BC(F)))$ π.χ:$(BA)(DBA(E))$ σημαίνει ότι οι BA είναι η διάμετρος και E είναι το κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο DBA.

Χρησιμοποιώντας μερικές από τις παραπάνω πληροφορίες παράγεται η απόδειξη.

Απόδειξη

$-\angle[GE,GD]+\angle[FE,FD]$

(από $\mathbb{R}_3$ επειδή $GE \parallel DC$, παίρνουμε $\angle[GE,GD]=-\angle[GD,DC]$)

$=\angle[GD,DC]+\angle[FE,FD]$

(από $\mathbb{R}_7$ επειδή G κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο DCA, παίρνουμε $\angle[GD,DC]=\angle[DA,CA]+\angle[1]$)

$=\angle[FE,FD]+\angle[DA,CA]+\angle[1]$

(από $\mathbb{R}_3$ επειδή $FE \parallel CA$, παίρνουμε $\angle[FE,FD]=-\angle[FD,CA]$)

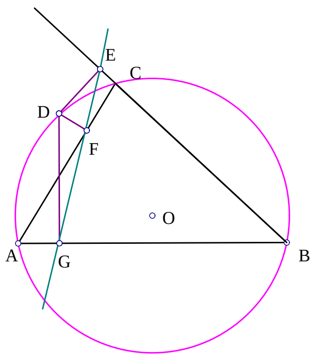
$= -\angle[FD, CA] + \angle[DA, CA] + \angle[1]$

(από $\mathbb{R}_4$ επειδή $FD \perp DA$, παίρνουμε $\angle[FD, CA] = \angle[DA, CA] + \angle[1]$)

$= \angle[0]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΘΕΩΡΗΜΑ SIMSON)

Έστω D σημείο πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC. Φέρνουμε από το D τις τρείς καθέτους στις πλευρές BC, AC, AB. Έστω E, F, G τα πόδια των καθέτων πάνω στις πλευρές BC, AC, AB αντίστοιχα. Ισχύει ότι τα E, F, G είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 4.23:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$(CIRCLE\ A\,B\,C\,D)$ $(FOOT\ E\,D\,B\,C)$ $(FOOT\ F\,D\,A\,C)$ $(FOOT\ G\,D\,A\,B)$
Σ: $\angle[EF, FG] = \angle[0]$

Το σύστημα (GIB) περιλαμβάνει σε ομάδες όλες τις σχέσεις που συνδέουν τα σημεία και τις ευθείες μεταξύ τους (συγγραμμικότητα, παραλληλία, καθετότητα κλπ.).

$\mathbf{O}_1$: Περιέχει όλα τα σημεία της πρότασης με την σειρά που κατασκευάστηκαν, (A, B, C, D, E, F, G)

$\mathbf{O}_2$: Περιέχει όλα τα ελεύθερα σημεία της πρότασης, (A, B, C, D)

O$_3$: Περιέχει όλες τις ευθείες και τα συγγραμμικά σημεία της πρότασης, $((G,\ A,\ B),(E,\ C,\ B),(A,\ F,\ C),(D,\ F),(D,\ G),(D,\ E))$

O$_4$: Περιέχει όλες τις παράλληλες ευθείες της πρότασης, $(\emptyset)$

O$_5$: Περιέχει όλες τις κάθετες ευθείες της πρότασης, $((DF)(AFC),(DE)(ECB),(DG)(AGB))$

O$_6$: Περιέχει όλους τους κύκλους της πρότασης, $((AD)(AGFD),(DB)(BEGD),(CD)(DEFC))$

Χρησιμοποιώντας μερικές από τις παραπάνω πληροφορίες παράγεται η απόδειξη.

Απόδειξη

$\angle[EF,GF]$

(από ιδιότητα 8 παίρνουμε $\angle[FE,GF]=\angle[EF,DF]+\angle[DF,GF]$)

$=\angle[EF,DF]+\angle[DF,GF]$

(από ιδιότητα 12($A,\ D\,G\,F$ και $D,\ C,\ E,\ F$ ομοκυκλικά) παίρνουμε $\angle[EF,DF]=\angle[EC,DC]$, $\angle[DF,GF]=\angle[DA,GA]$)

$=\angle[EC,DC]+\angle[DA,GA]$

(από $\mathbb{T}_1$ επειδή $E\in BC$ και $G\in AB$ παίρνουμε $\angle[EC,DC]=\angle[BC,DC]$, $\angle[DA,GA]=\angle[DA,BA]$)

$=\angle[BC,DC]+\angle[DA,BA]$

(από ιδιότητα 12($A,\ D\,B\,C$ ομοκυκλικά) παίρνουμε $\angle[BC,DC]=\angle[BA,DA]$)

$=\angle[BA,DA]+\angle[DA,BA]$

(από ιδιότητα 8 παίρνουμε $\angle[BA,DA]+\angle[DA,BA]=\angle[BA,BA]$)

$=\angle[BA,BA]=\angle[0]$.

4.7 ΑΥΤΟΜΑΤΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ C

Το σύνολο όλων των κατασκευαστικών προτάσεων το συμβολίζουμε με C. Να σημειώσουμε ότι κατασκευαστικές ονομάζουμε τις προτάσεις οι οποίες μπορούν να αποδειχθούν με την χρήση κανόνα και διαβήτη.

Για να περιγράψουμε τις προτάσεις που ανήκουν στην κατηγορία C, πρέπει να εισάγουμε δυο νέες κατασκευές.

Θα ξεκινήσουμε με την εισαγωγή ενός νέου είδους κύκλου:$(CIRCLE\ O\, r)$, ο οποίος περιγράφεται με βάση το κέντρο του O και την ακτίνα του $\sqrt{r}$. Το r μπορεί να είναι ένας αλγεβρικός αριθμός, μια ρητή έκφραση γεωμετρικών ποσοτήτων ή μεταβλητή.

Οι νέες κατασκευές που εισάγουμε είναι οι εξής:

$\mathbb{K}_{22}$ $(INTER\ Y\ (LINE\ A\, B)(CIRCLE\ O\, r))$

Διατύπωση κατασκευής: το Y είναι το σημείο τομής της ευθείας $(LINE\ A\, B)$ και του κύκλου $(CIRCLE\ O\, r))$.

Οι περιορισμοί της κατασκευής αυτής είναι: $r \neq 0$, $A \neq B$.

Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο και έχει δυο δυνατότητες.

$\mathbb{K}_{23}$ $(INTER\ Y\ (CIRCLE\ O_1\, r_1)(CIRCLE\ O_2\, r_2))$

Διατύπωση κατασκευής: το Y είναι το σημείο τομής του κύκλου $(CIRCLE\ O_1\, r_1)$ και του κύκλου $(CIRCLE\ O_2\, r_2))$.

Οι περιορισμοί της κατασκευής αυτής είναι: $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $O_1 \neq O_2$.

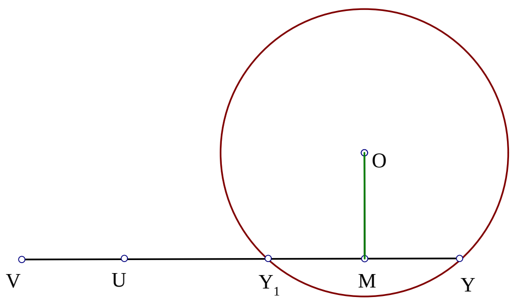
Το σημείο Y είναι σταθερό σημείο και έχει δυο δυνατότητες.

4.8 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8.1 *Έστω Y το σημείο τομής της ευθείας UV και του κύκλου $(CIRCLE\ O\,r)$. Τότε έχουμε την παρακάτω σχέση:*

$$(\frac{\overline{UY}}{\overline{UV}})^2 - \frac{P_{OUV}}{\overline{UV}^2}\frac{\overline{UY}}{\overline{UV}} + \frac{\overline{OU}^2 - r}{\overline{UV}^2} = 0\ (C)$$

Απόδειξη



Σχήμα 4.24:

Έστω Y_1 ένα ακόμη σημείο τομής της ευθείας UV και του κύκλου $(CIRCLE\ O\,r)$ και έστω M το μέσον της Y_1Y.

Από την πρόταση B.8 (σελίδα 89), παίρνουμε:

$$\frac{P_{OUV}}{\overline{UV}^2} = \frac{P_{MUV}}{\overline{UV}^2} = 2\frac{\overline{UM}}{\overline{UV}} = \frac{\overline{UY}}{\overline{UV}} + \frac{\overline{UY_1}}{\overline{UV}}\ (1).$$

Από την πρόταση B.10 (σελίδα 91), παίρνουμε:

$$\overline{OU}^2 = \frac{\overline{Y_1U}}{\overline{Y_1Y}}\overline{OY}^2 + \frac{\overline{UY}}{\overline{Y_1Y}}\overline{OX}^2 - \frac{\overline{Y_1U}}{\overline{Y_1Y}}\frac{\overline{UY}}{\overline{Y_1Y}}\overline{Y_1Y}^2 = \overline{OY_1}^2 + \overline{UYUY_1}$$

$$= r + \overline{UYUY_1}\ (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε την σχέση (C) (σελίδα 209).

Έτσι λοιπόν με την βοήθεια της σχέσης (C) έχουμε τις παρακάτω τεχνικές απαλοιφής.

ΛΗΜΜΑ 4.8.2 *Έστω $\Gamma(Y)$ μια από τις παρακάτω γεωμετρικές ποσότητες και το σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(INTER\ Y\ (LINE\ P\,Q)(CIRCLE\ O\,r))$.*

Τότε: $S_{ABY} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} S_{QAPB} + S_{ABP}$

$P_{ABY} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAPB} + P_{ABP}$

$P_{AYB} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAPB} + P_{ABP} - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}(1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) P_{PQP}$

Ο λόγος $\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}$ *ικανοποιεί την σχέση (C) (σελίδα 209)*

(Σχήμα 4.27)

Απόδειξη

Από την πρόταση B.3 (σελίδα 15), παίρνουμε:

$S_{ABY} = (\frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) S_{ABQ} + (1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) S_{ABP} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} S_{QAPB} + S_{ABP}$

Από την πρόταση B.10 (σελίδα 91), την πρώτη σχέση, παίρνουμε:

$P_{ABY} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAB} + (1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) P_{PAB} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAPB} + P_{PAB}$

Από την πρόταση B.10 (σελίδα 91), την δεύτερη σχέση, παίρνουμε:

$P_{AYB} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAB} + (1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) P_{PAB} - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}(1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) P_{PQP}$

$= \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}} P_{QAPB} + P_{PAB} - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}(1 - \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}) P_{PQP}$

ΛΗΜΜΑ 4.8.3 *Έστω* $\Gamma(Y) = \frac{\overline{AY}}{\overline{CD}}$ *και το σημείο* Y *εισάγεται από την κατασκευή* $(INTER\ Y\ (LINE\ P\ Q)(CIRCLE\ O\ r))$.

$$Τότε\ \frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \begin{cases} \frac{\overline{AP}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{PY}}{\overline{PQ}}\frac{\overline{PQ}}{\overline{CD}}, & αν\ A \in PQ\cdot \\ \frac{S_{APQ}}{S_{CPDQ}}, & αλλιώς. \end{cases} \quad (Σχήμα\ 4.27)$$

Απόδειξη

Η πρώτη περίπτωση είναι τετριμμένη.

Για την δεύτερη περίπτωση παίρνουμε σημείο S τέτοιο ώστε $\overline{AS} = \overline{CD}$.

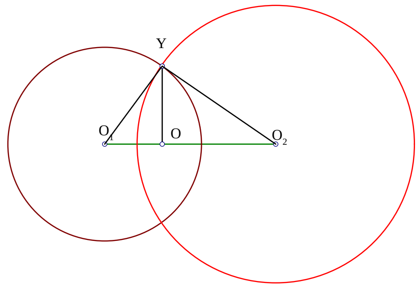
Από την πρόταση B.2 (σελίδα 14) παίρνουμε: $\frac{\overline{AY}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AS}} = \frac{S_{APQ}}{S_{APSQ}} = \frac{S_{APQ}}{S_{CPDQ}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8.4 *Η κατασκευή,* $(INTER\ Y\ (CIRCLE\ O_1\, r_1)(CIRCLE\ O_2\, r_2))$ *είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες δυο κατασκευές:*

$(LRATIO\ O\ O_1\ O_2\ r)\ (TRATIO\ Y\ O\ O_1\ s)$

όπου $r = \frac{\overline{O_1O_2}^2 + r_1 - r_2}{2\overline{O_1O_2}^2}$, $s^2 = \frac{r_1}{r^2\overline{O_1O_2}^2} - 1$

Απόδειξη



Σχήμα 4.25:

Έστω O η ορθογώνια προβολή του σημείου Y πάνω στην O_1O_2.

Από την πρόταση B.8 (σελίδα 89), έχουμε:

$r = \frac{\overline{O_1O}}{\overline{O_1O_2}} = \frac{P_{YO_1O_2}}{P_{O_1O_2O_1}} = \frac{\overline{O_1O_2}^2+r_1-r_2}{2O_1O_2}$

και

$s^2 = \frac{\overline{OY}^2}{\overline{OO_1}^2} = \frac{r_1}{\overline{OO_1}^2} - 1 = \frac{r_1}{r^2\overline{O_1O_2}^2} - 1$

ΛΗΜΜΑ 4.8.5 *Έστω $\Gamma(Y) = S_{ABY}$ και το σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(INTER\, Y\, (CIRCLE\ O_1\, r_1)(CIRCLE\ O_2\, r_2))$.*

$S_{ABY} = S_{ABO_1} + rS_{O_2AO_1B} - \frac{rs}{4}P_{O_2AO_1B}$.

(Σχήμα 4.28)

Απόδειξη

Έστω O η ορθογώνια προβολή του σημείου Y πάνω στην O_1O_2.

Από το λήμμα 3.5.5 (σελίδα 113) και την πρόταση B.3 (σελίδα 15), έχουμε:

$S_{ABY} = S_{ABO} - \frac{s}{4}P_{OAO_1B}$

$= rS_{ABO_2} + (1-r)S_{ABO_1} - \frac{s}{4}(rP_{O_2AB} + (1-r)P_{O_1AB} - P_{O_1AB})$

$= S_{ABO_1} + rS_{O_2AO_1B} - \frac{rs}{4}P_{O_2AO_1B}$.

ΛΗΜΜΑ 4.8.6 *Έστω $\Gamma(Y) = P_{ABY}$ και το σημείο Y εισάγεται από την κατασκευή $(INTER\, Y\, (CIRCLE\ O_1\, r_1)(CIRCLE\ O_2\, r_2))$.*

$P_{ABY} = P_{ABO_1} + rP_{O_2AO_1B} - 4rsS_{O_2AO_1B}$.

(Σχήμα 4.28)

Απόδειξη

Έστω O η ορθογώνια προβολή του σημείου Y πάνω στην O_1O_2.

Από το λήμμμα 3.5.6 (σελίδα 114), την πρόταση B.10, (σελίδα 91) και την πρόταση B.3 (σελίδα 15), έχουμε:

$P_{ABY} = P_{ABO} - 4sS_{OAO_1B}$

$= rP_{ABO_2} + (1-r)P_{ABO_1} - 4s(rS_{O_2AB} + (1-r)S_{O_1AB} - S_{O_1AB})$

$= P_{ABO_1} + rP_{O_2AO_1B} - 4rsS_{O_2AO_1B}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Η σχετική γεωμετρία μελετά προβλήματα που περιλαμβάνουν ζητήματα συγγραμμικότητας, παραλληλίας, σύμπτωσης. Στο παράρτημα αυτό θα μελετήσουμε ειδικά την έννοια της συγγραμμμικότητας. Ο ακριβής ορισμός της έννοιας αυτής απορρέει από τα ακόλουθα έξι αξιώματα.

Αξίωμα $\mathbf{A}_1$: Για τρία συγγραμμικά σημεία A, B και C τέτοια ώστε $A \neq B$, ο λόγος των ευθύγραμμων τμημάτων AC και AB: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση.

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}.$

Επίσης ισχύει: $\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = 0$ αν και μόνο αν $C = A$.

Αξίωμα $\mathbf{A}_2$: Έστω A και B δυο διαφορετικά σημεία. Για έναν πραγματικό αριθμό s, υπάρχει μοναδικό σημείο C το οποίο είναι συγγραμμικό με τα σημεία A και B και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις.

1. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = s$ και

2. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = 1.$

Τώρα για το προσανατολισμένο εμβαδόν τριγώνου ABC: S_{ABC} ισχύουν οι παρακάτω βασικές ιδιότητες.

Αξίωμα $\mathbf{A}_3$: $S_{ABC} = S_{CAB} = S_{BCA} = -S_{BAC} = -S_{CBA} = -S_{ACB}.$

Αν A, B, C τρία μη συγγραμμικά σημεία τότε ισχύει $S_{ABC} \neq 0$.

Αξίωμα A$_4$: Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία A, B, C για τα οποία ισχύει: $S_{ABC} \neq 0$.

(Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει ότι όλα τα σημεία δεν είναι συγγραμμικά.)

Αξίωμα A$_5$: Για οποιαδήποτε τέσσερα σημεία A, B, C, D ισχύει ότι: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} + S_{DBC}$.

(Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει ότι όλα τα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.)

Συνέπεια του αξιώματος 5 είναι ο ορισμός που δώσαμε για το εμβαδόν προσανατολισμένου τετραπλεύρου.

Πιο συγκεκριμένα, ορίσαμε το εμβαδόν προσανατολισμένου τετραπλεύρου $ABCD$ ως εξής: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$.

Με σκοπό να δικαιολογήσουμε ότι το S_{ABCD} είναι καλά ορισμένο, χρειάζεται να αποδείξουμε ότι από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει

$S_{ABCD} = S_{BCDA} = S_{CDAB} = S_{DABC}$

Έτσι λοιπόν, με χρήση της σχέσης

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$

παρατηρούμε ότι $S_{ABCD} = S_{CDAB} = S_{ABC} + S_{ACD}$

και $S_{BCDA} = S_{DABC} = S_{BCD} + S_{BDA}$.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $S_{ABCD} = S_{BCDA}$.

Με χρήση τώρα της σχέσης (I), σελίδα 12 (βλέπε σχήματα σελίδας 10-11).

$S_{ABC} = S_{RBC} + S_{RCA} + S_{RAB}$

έχουμε: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$

$=S_{RBC} + S_{RCA} + S_{RAB} + S_{RCD} + S_{RDA} + S_{RAC}$

$=S_{RBC} + S_{RAB} + S_{RCD} + S_{RDA}$.

$S_{BCDA} = S_{BCD} + S_{BDA}$

$=S_{RCD} + S_{RDB} + S_{RBC} + S_{RDA} + S_{RBD} + S_{RAB}$

$=S_{RCD} + S_{RBC} + S_{RDA} + S_{RAB}$.

Είναι φανερή πλέον η ισότητα.

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για οποιαδήποτε θέση του R στο επίπεδο.

Αξίωμα $\mathbf{A}_6$: Έστω A, B και C τρία συγγραμμικά σημεία τέτοια ώστε $\overline{AB} = t\overline{AC}$. Τότε για οποιοδήποτε σημείο P ισχύει: $S_{PAB} = tS_{PAC}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το αξίωμα 6 δηλώνει μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των εμβαδών. Από αυτό προκύπτουν όλες οι βασικές προτάσεις της μεθόδου των εμβαδών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β′

Η σχετική γεωμετρία, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο παράρτημα, ασχολείται με την μελέτη προβλημάτων παραλληλίας, σύμπτωσης και συγγραμμικότητας. Τα ακόλουθα αποτελούν μια ομάδα αξιωμάτων της σχετικής γεωμετρίας, τα οποία όπως θα δείξουμε απορρέουν από τα αξιώματα A_1,...,A_6, σελίδα 215-217.

Αξίωμα 1.

Έστω δυο διαφορετικά σημεία A και B. Τότε υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Αξίωμα 2.

Έστω ευθεία ε. Από σημείο εκτός της ευθείας ε υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία $ε_1$ η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Αξίωμα 3.

Υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία, A, B, C, τέτοια ώστε το σημείο C να μην ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία A, B.

Αξίωμα 4.Αξίωμα του Desargues:

Έστω l_1, l_2, l_3 τρείς διαφορετικές ευθείες οι οποίες είτε είναι παράλληλες είτε τέμνονται στο σημείο S. Έστω A, A_1 σημεία πάνω στην ευθεία l_1, B, B_1 σημεία πάνω στην ευθεία l_2 και C, C_1 σημεία πάνω στην ευθεία l_3, τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά από το σημείο S αν οι τρείς ευθείες τέμνονται. Αν $AB \parallel A_1B_1$ και $BC \parallel B_1C_1$ τότε $AC \parallel A_1C_1$.

Αξίωμα 5.Αξίωμα του Pascal:

Έστω δυο διαφορετικές ευθείες l_1, l_2 και A, B, C και A_1, B_1, C_1 είναι σημεία πάνω στις ευθείες l_1 και l_2 αντίστοιχα. Αν $BC_1 \parallel B_1C$ και $AB_1 \parallel A_1B$ τότε $AC_1 \parallel A_1C$.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα αξιώματα που μόλις αναφέραμε είναι συνέπεια των αξιωμάτων A_1,...,A_6.

Αρχικά το αξίωμα 1 απορρέει από το πόρισμα 2.1.3. Το αξίωμα 3 απορρέει από τα αξιώματα A_3,A_4.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι και τα αξιώματα 2,4 και 5 απορρέουν από τα αξιώματα A_1,...,A_6.

Απόδειξη αξιώματος 2.

Έστω ευθεία AB και C σημείο εκτός ευθείας. Από το αξίωμα A_2,μπορούμε να επιλέξουμε σημεία D και E τέτοια ώστε το D να είναι το μέσον του τμήματος CA και το E συμμετρικό του B ως προς το D, οπότε: $\overline{ED} = \overline{DB}$.

Από την πρόταση B.2 παίρνουμε: $S_{EAB} = 2S_{DAB} = S_{CAB}$

Από την πρόταση B.4 παίρνουμε: $CE \parallel AB$

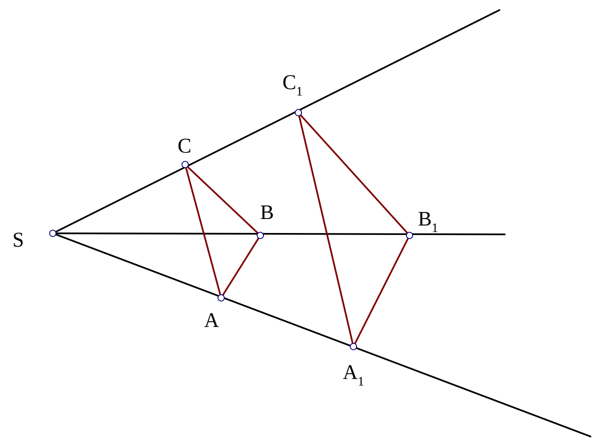
Για την μοναδικότητα τώρα παίρνουμε σημείο F τέτοιο ώστε $FC \parallel AB$.

Από την πρόταση B.5 έχουμε: $S_{FCE} = S_{FAB} - S_{CAB} = 0$

Άρα το σημείο F βρίσκεται πάνω στην ευθεία CE.

Οι αποδείξεις των αξιωμάτων 4 και 5 δίνονται μέσω της αλγοριθμικής μεθόδου.

Αξίωμα του Desargues.



Σχήμα 4.26:

Απόδειξη

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\,B\,C,\ S)$ Έστω τέσσερα αυθαίρετα σημεία A, B, C, S

$K_2 : (ON - LINE\ A_1\,S\,A)$ Έστω A_1 σημείο πάνω στην ευθεία SA.

$K_3 : (INTER\ B_1\,(LINE\ S\,B)(PLINE\ A_1\,A\,B))$ Έστω B_1 το σημείο τομής των ευθειών SB και της παράλληλης από το σημείο A_1 στην ευθεία AB.

$K_4 : (INTER\ C_1\,(LINE\ S\,C)(PLINE\ A_1\,A\,C))$ Έστω C_1 το σημείο τομής των ευθειών SC και της παράλληλης από το σημείο A_1 στην ευθεία AC.

Σ: Ισχύει ότι $S_{B_1BC} = S_{C_1BC}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, C_1, B_1, A_1 εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $S \neq A$, $AB \nparallel SB$ και $AC \nparallel SC$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{S_{BCB_1}}{S_{BCC_1}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου C_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.15, σελίδα 37)

$(S_{BCC_1} = \frac{S_{ACA_1}S_{SBC}}{S_{SAC}})$

$\frac{S_{BCB_1}}{S_{BCC_1}} = \frac{S_{BCB_1}S_{SAC}}{S_{ACA_1}S_{SBC}}$

(Απαλοιφή σημείου B_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.15)

$(S_{BCB_1} = \frac{S_{ABA_1}S_{SBC}}{S_{SAB}})$

$\frac{S_{ABA_1}S_{SBC}S_{SAC}}{S_{ACA_1}S_{SBC}S_{SAB}} = \frac{S_{ABA_1}S_{SAC}}{S_{ACA_1}S_{SAB}}$

(Απαλοιφή σημείου A_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.11, σελίδα 36)

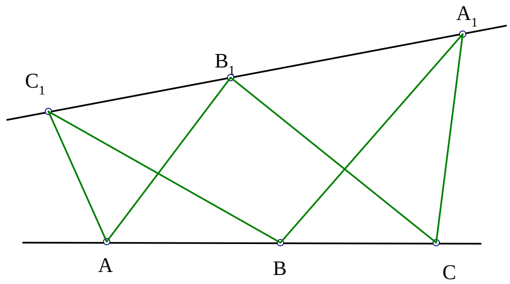
$(S_{ACA_1} = -((\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}})S_{SAC}),\ S_{ABA_1} = -((\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}})S_{SAB}))$

$\frac{(-S_{SAB}\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}+S_{SAB})S_{SAC}}{(-S_{SAC}\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}+S_{SAC})S_{SAB}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες μόνο από ανεξάρτητες μεταβλητές.

$= 1.$

Αξίωμα του Pascal.



Σχήμα 4.27:

Απόδειξη

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

$K_1 : (POINTS\ A\ B\ A_1)$ Έστω τρία αυθαίρετα σημεία A, B, A_1

$K_2 : (ON-LINE\ C\ A\ B)$ Έστω C σημείο πάνω στην ευθεία AB.

$K_3 : (ON-PLINE\ B_1\ A\ B\ A_1)$ Έστω σημείο B_1 πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην BA_1.

$K_4 : (INTER\ C_1\ (LINE\ A_1\ B_1)(PLINE\ A\ C\ A_1))$ Έστω C_1 το σημείο τομής των ευθειών SC και της παράλληλης από το σημείο A_1 στην ευθεία AC.

Σ: Ισχύει ότι $S_{BCB_1} = S_{C_1CB_1}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, C_1, B_1 εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος περιοριστικών συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $B \neq A$, $B \neq A_1$, $A_1B_1 \nparallel CA_1$.

ΒΗΜΑ 3. Μεταφορά όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων στο πρώτο μέλος.

Έτσι έχουμε: $\Gamma_1 = \frac{S_{BCB_1}}{S_{CB_1C_1}} = 1$ και εκτελώ τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου C_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.15, σελίδα 37)

$(S_{CB_1C_1} = -S_{AA_1B_1C})$

$\frac{S_{BCB_1}}{S_{CB_1C_1}} = \frac{S_{BCB_1}S_{A_1CB_1}}{-S_{AA_1B_1C}S_{A_1CB_1}} = \frac{S_{BCB_1}}{-S_{AA_1B_1C}}$

(Απαλοιφή σημείου B_1, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.4.13, σελίδα 36)

$(S_{AA_1B_1C} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}}S_{BA_1C},\ S_{BCB_1} = -(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}}S_{BA_1C}))$

$\frac{-S_{BA_1C}\frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}}}{-S_{BA_1C}\frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}}}$

ΒΗΜΑ 5. Νέες γεωμετρικές ποσότητες αποτελούμενες μόνο από ανεξάρτητες μεταβλητές.

$= 1.$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ$'$

Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάσαμε τις κατασκευές των ειδικών σημείων των τριγώνων, όπως το κέντρο βάρους, το ορθόκεντρο, το έγκεντρο και το περίκεντρο καθώς και την ισοδυναμία των κατασκευών αυτών με την κατασκευή $(ARATIO\ Y\ A\ B\ C\ r_O\ r_U\ r_V)$.

Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε τις ισοδυναμίες αυτές.

1.Βαρύκεντρο G τριγώνου ABC.

$CENTROID\ G\ A\ B\ C \equiv (ARATIO\ G\ A\ B\ C\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3})$

Απόδειξη

Έστω G το κέντρο βάρους τριγώνου ABC και M το μέσον της πλευράς BC.

Επειδή το σημείο M είναι το μέσον της BC έχουμε από πρόταση B.2: $S_{ABM} = S_{AMC}$ και $S_{GBM} = S_{GMC}$.

Τότε $S_{GAB} = S_{ABM} - S_{GBM} = S_{AMC} - S_{GMC} = S_{GCA}$.

Όμοια $S_{GBC} = S_{GAB} = S_{GCA} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.

Άρα $r_A = \frac{S_{GBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$

$r_B = \frac{S_{AGC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3},\ r_C = \frac{S_{ACG}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$

2.Ορθόκεντρο H τριγώνου ABC.

$$ORTHOCENTER\ H\ A\ B\ C \equiv (ARATIO\ H\ A\ B\ C\ \frac{P_{ABC}P_{ACB}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{BAC}P_{BCA}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{CAB}P_{CBA}}{16S_{ABC}^2})$$

Απόδειξη

Έστω H το ορθόκεντρο τριγώνου ABC. Έτσι λοιπόν η τομή των υψών CD και AE είναι το σημείο H.

Οπότε με χρήση των προτάσεων B.2, σελίδα 14 και B.8, σελίδα 89, θα έχουμε:

$$\frac{r_B}{r_A} = \frac{\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}} = \frac{S_{AHC}}{S_{HBC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{P_{CAB}}{P_{ABC}}$$

$$\frac{r_B}{r_C} = \frac{\frac{S_{AHC}}{S_{ABH}}}{\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABH}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{P_{BCA}}{P_{ABC}}$$

Ακόμη

$$r_A : r_B : r_C = P_{ABC}P_{BCA} : P_{CAB}P_{BCA} : P_{ABC}P_{CAB}$$

Από τον τύπο $Herron - Qin$.

$$P_{ABC}P_{BCA} + P_{CAB}P_{BCA} + P_{ABC}P_{CAB} = 2\overline{AB}^2 P_{BCA} + P_{ABC}P_{CAB} = 16S_{ABC}^2$$

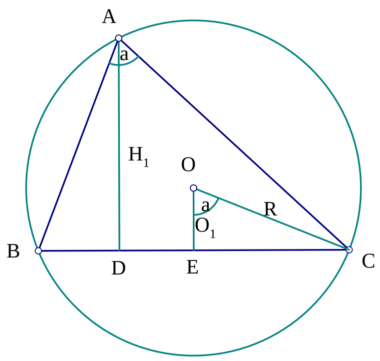
Είναι φανερή πλέον η σχέση.

3.Περίκεντρο O τριγώνου ABC.

$$CIRCUMCENTER\ O\ A\ B\ C \equiv (ARATIO\ H\ A\ B\ C\ \frac{P_{BCB}P_{BAC}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{ACA}P_{ABC}}{16S_{ABC}^2}\ \frac{P_{ABA}P_{ACB}}{16S_{ABC}^2})$$

Απόδειξη

Θέλουμε να υπολογίσουμε τους λόγους: $r_A = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}},\ r_B = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}},\ r_C = \frac{S_{ABO}}{S_{ABC}}$



Σχήμα 4.28:

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω λόγοι αφορούν εμβαδά τριγώνων που έχουν κοινή βάση. Συνεπώς αντί να υπολογίσουμε τους λόγους των εμβαδών αυτών, θα υπολογίσουμε τους λόγους των υψών τους.

Συμβολίζουμε με O_1 το τμήμα OE και H_1 το τμήμα AD.

Θα αποδείξουμε τον πρώτο λόγο $r_A = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$. Οι υπόλοιποι λόγοι προκύπτουν όμοια.

Θέτουμε: $a = BC,\ b = AC,\ c = AB$

Οπότε: $r_A = \frac{O_1}{H_1}$

Ακόμη: $O_1 = R\cos(\angle(A))$

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$

Από τον νόμο των ημιτόνων: $2R = \frac{a}{\sin(\angle(A))} = \frac{b}{\sin(\angle(B))} = \frac{c}{\sin(\angle(C))}$

Επίσης $8R^3 = \frac{abc}{\sin(\angle A)\sin(\angle B)\sin(\angle C)}$

Από τον νόμο των συνημιτόνων:

$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

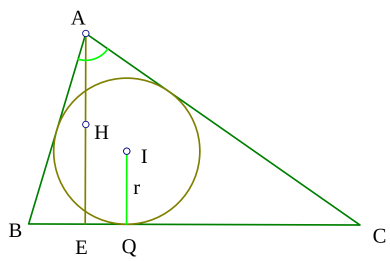
Τέλος $H_1 = c\sin(\angle(B)) = b\sin(\angle(C)) = \frac{2S_{ABC}}{a}$

Άρα $\frac{\overline{O_1}}{\overline{H_1}} = \frac{(b^2+c^2-a^2)a^2}{16S_{ABC}^2}$

4.Έγκεντρο I τριγώνου ABC.

$INCENTER\ C\ I\ B\ C \equiv (ARATIO\ I\ A\ B\ C - \frac{2P_{IAB}P_{IBA}}{P_{AIB}P_{ABA}}\ \frac{P_{IAB}P_{IBI}}{P_{AIB}P_{ABA}}\ \frac{P_{IBA}P_{IAI}}{P_{AIB}P_{ABA}})$

Απόδειξη



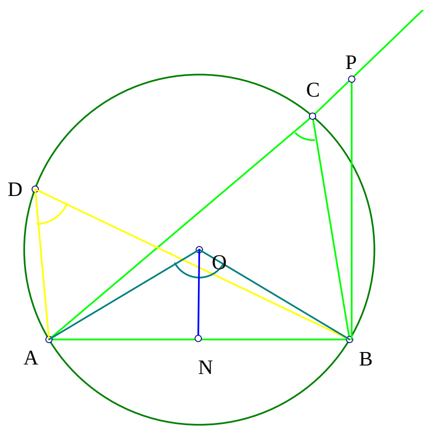
Σχήμα 4.29:

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των πλήρων γωνιών 10, 11, 12, σελίδα 189, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο.

Έστω ότι τα A, B, C και D είναι τέσσερα σημεία πάνω σε κύκλο κέντρου O. Τότε $\angle[ACB] = \angle[ADB]$ και $\angle[AOB] = 2\angle[ACB]$.

Απόδειξη



Σχήμα 4.30:

Πρώτα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για να υπολογίσουμε την γωνία $\angle[ACB]$.

Έτσι λοιπόν ζητάμε από τον υπολογιστή να υπολογίσει το $\tan(\angle[ACB])$.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

K_1 $(POINTS\ A\,B)$: Έστω δυο αυθαίρετα σημεία A, B

K_2 $(ON\ O\,(BLINE\ A\,B))$: Έστω O σημείο ευθείας που είναι κάθετη στην AB.

K_3 $(TRATIO\ P\,B\,A\,r)$: Έστω σημείο P πάνω στην ευθεία $(TLINE\ B\,B\,A)$ τέτοιο ώστε: $r = \frac{\overline{BP}}{\overline{BA}}$.

K_4 $(INTER\ C\,(LINE\ A\,P)(CIR\ O\,A) \equiv (FOOT\ N\,O\,A\,P),\ (PRATIO\ C\,N\,N\,A)$: Έστω C το σημείο τομής της ευθείας AP και του κύκλου κέντρου O και ακτίνας OA.

Σ: Υπολόγισε: $\frac{(-4)S_{ABC}}{P_{ACB}}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1. Για καθένα από τα σημεία, με την ακόλουθη σειρά, C, P, O εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

ΒΗΜΑ 2. Έλεγχος ικανών και αναγκαίων συνθηκών των παραπάνω κατασκευών: $A \neq C, A \neq O, A \neq B$.

ΒΗΜΑ 3. -

ΒΗΜΑ 4. Απαλοιφή βοηθητικών σημείων από την Γ_1.

(Απαλοιφή σημείου C, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2, ΚΕΦ.3)

$$\frac{(-4)S_{ABC}}{P_{ACB}} = \frac{(-4)(\frac{2P_{OAP}S_{ABP}}{P_{APA}})}{\frac{-2(P_{OPO}-P_{APB}-P_{AOA})P_{OAP}}{P_{APA}}} = \frac{4S_{ABP}}{P_{OPO}-P_{APB}-P_{AOA}}$$

(Απαλοιφή σημείου P, χρησιμοποιούμε το λήμμα 2, ΚΕΦ.3)

$$\frac{4(-\frac{1}{4}P_{ABA}r)}{P_{BOB}+P_{ABA}r^2+8S_{ABO}r-P_{APB}r^2-P_{AOA}} = \frac{4(-\frac{1}{4}P_{ABA}r)}{P_{BOB}-P_{AOA}+8S_{ABO}r}$$

(Απαλοιφή σημείου O, από τον ορισμό της Πυθαγόρειας διαφοράς και της ιδιότητας των σημείων πάνω στον κύκλο, $OA = OB$.)

$\frac{-P_{ABA}r}{8S_{ABO}r}$

(Απλοποιήσεις)

$\frac{-P_{ABA}}{8S_{ABO}}$.

Από τον υπολογισμό της εφαπτομένης της γωνίας $\angle[ACB]$, διαπιστώνουμε ότι η $\tan(\angle[ACB])$ δεν εξαρτάται από τα σημεία P, C, επομένως θα ισχύει: $\angle[ACB] = \angle[ADB]$.

Μένει να αποδείξουμε ότι: $\angle[AOB] = 2\angle[ACB]$, δηλαδή $\tan(\angle[AOB]) = \tan(2\angle[ACB])$.

Με βάση τον ακόλουθο τριγωνομετρικό τύπο, την τιμή της $\tan(\angle[ACB])$ που μόλις υπολογίσαμε και τον τύπο του $Herron{-}Qin$ $(16S_{AOB}^2 = 4\overline{AO}^2\overline{AB}^2 - P_{AOB}^2)$ θα πάρουμε:

$\tan(2\angle[ACB]) = \frac{2\tan(\angle[ACB])}{1-\tan(\angle[ACB])^2} = \frac{8\overline{AB}^2 S_{AOB}}{16S_{AOB}^2 - \overline{AB}^4} = \frac{8\overline{AB}^2 S_{AOB}}{4\overline{OA}^2\overline{OB}^2 - P_{AOB}^2 - \overline{AB}^4} = \frac{4S_{AOB}}{2\overline{AO}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{4S_{AOB}}{P_{AOB}} = \tan(\angle[AOB])$

Επομένως $\angle[AOB] = 2\angle[ACB]$.