**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# ΤΟ 14ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ HILBERT ΚΑΙ Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ NAGATA

**ΜΑΓΔΑ ΛΑΔΑ**

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Κρήτης τον Φεβρουάριο τού 2005. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Α. Κουβιδάκης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης και Δ. Νταής.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Το 14-ο πρόβλημα τού Hilbert

Έστω $\mathcal{S} = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος ($k$-άλγεβρα) $n$ μεταβλητών πάνω από ένα σώμα $k$ και έστω $\mathcal{G}$ μια υποομάδα τής γενικής γραμμικής ομάδας $GL_n(k)$. Η ομάδα $\mathcal{G}$ δρα επί των στοιχείων τού δακτυλίου $\mathcal{S}$ με τον εξής τρόπο: σε κάθε στοιχείο $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{G}$ αντιστοιχεί ο $k$-γραμμικός μετασχηματισμός $\sigma_g$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$, όπου

$$\sigma_g(x_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j, \ 1 \leq i \leq n.$$

Ορίζουμε τη δράση τού $g$ επί τού τυχόντος στοιχείου $f$ τού $\mathcal{S}$ ως ακολούθως:

$$g(f) := f(\sigma_g(x_1), \sigma_g(x_2), \ldots, \sigma_g(x_n)).$$

Συμβολίζουμε ως $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ το σύνολο των στοιχείων τού $\mathcal{S}$ που μένουν αναλλοίωτα ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ αποτελεί μια $k$-υποάλγεβρα τού $\mathcal{S}$. Στη συνέχεια, διατυπώνουμε το 14ο πρόβλημα τού Hilbert:

*Έστω ότι το $k$ είναι ένα σώμα, η $\mathcal{G}$ μια υποομάδα τής $GL_n(k)$ η οποία δρα επί των στοιχείων τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathcal{S} = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ όπως παραπάνω, και $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ το σύνολο των στοιχείων τού $\mathcal{S}$ που μένουν αναλλοίωτα ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$. Είναι ο δακτύλιος $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ πεπερασμένα παραγόμενος ως $k$-άλγεβρα; Δηλ. υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία τού δακτυλίου $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ τέτοια ώστε κάθε στοιχείο τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ να γράφεται ως πολυωνυμικός συνδυασμός των παραπάνω στοιχείων με συντελεστές από το σώμα $k$;*

Το παραπάνω ερώτημα έχει θετική απάντηση στην περίπτωση κατά την οποία η ομάδα $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένη ή $\mathcal{G} = SL_n(k)$ ή $\mathcal{G} = GL_n(k)$, βλ. παράγραφο 1.2.

Όμως το 1958, ο Nagata βρήκε ένα αντιπαράδειγμα για το 14ο πρόβλημα τού Hilbert, βλ. [N1], [N2]. Το κεφάλαιο 3 αναφέρεται σε αυτό. Το αντιπαράδειγμα, το οποίο παρουσιάζουμε στην παράγραφο 3.1, βασίζεται σε μια αλγεβρο-γεωμετρική πρόταση σχετική με την ύπαρξη επίπεδων καμπυλών οι οποίες έχουν σε δοσμένα σημεία τού επιπέδου καθορισμένο βαθμό ιδιώματος. Παρουσιάζουμε αυτήν την πρόταση στην παράγραφο 3.2. Με αφορμή την τελευταία πρόταση, ο Nagata έθεσε το ερώτημα τού κατά πόσον αυτή ισχύει υπό κάποιες γενικότερες συνθήκες οδηγούμενος σε μια εικασία που έμεινε γνωστή ως *η εικασία τού Nagata* και η οποία παραμένει ακόμη και επί των ημερών μας άλυτη. Αναφερόμαστε σε αυτή την εικασία στο κεφάλαιο 4, όπου παρουσιάζουμε ένα πρόσφατο σχετικό αποτέλεσμα τού G. Xu, βλ. [X]. Επίσης, κάνουμε μια επισκόπηση άλλων αποτελεσμάτων σχετιζομένων με αυτήν. Τέλος, στο εισαγωγικό κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε ορισμένα προκαταρτικά στοιχεία τής θεωρίας των αλγεβρικών καμπυλών, με έμφαση στην Ιακωβιανή μιας ομαλής καμπύλης και στη μελέτη των επίπεδων καμπυλών, βασιζόμενοι στα βιβλία [M2] και [U].

## 1.2 Ομάδες για τις οποίες το 14-ο πρόβλημα τού Hilbert ισχύει

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ομάδας $\mathcal{G}$, για την οποία η απάντηση στο 14ο πρόβλημα τού Hilbert είναι θετική, δίδεται όταν η $\mathcal{G}$ είναι η ίδια η συμμετρική ομάδα $S_n$. Η $S_n$ μπορεί να ταυτιστεί με την υποομάδα τής $GL_n(k)$ (όπου $k$ είναι ένα οποιοδήποτε σώμα) που αποτελείται από τούς πίνακες που προκύπτουν από το μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα μεταθέτοντας με όλους τούς δυνατούς τρόπους τις γραμμές του. Αυτή η υποομάδα τής $GL_n(k)$ δρα επί του πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathcal{S} = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ προκαλώντας τη μετάθεση των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ κατά όλους τούς δυνατούς τρόπους. Είναι προφανές, ότι το σύνολο $\mathcal{S}^{S_n}$ αποτελείται από όλα τα συμμετρικά πολυώνυμα και είναι γνωστό ότι το σύνολο των συμμετρικών πολυωνύμων παράγεται, ως $k$-άλγεβρα, από τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ είναι όντως πεπερασμένα παραγόμενο.

Γενικότερα, το 14ο πρόβλημα τού Hilbert έχει θετική απάντηση στις περιπτώσεις όπου η $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένη ή $\mathcal{G} = SL_n(k)$ ή $\mathcal{G} = GL_n(k)$ και η χαρακτηριστική τού σώματος $k$ είναι μηδέν. Έχουμε δηλαδή το εξής:

**Θεώρημα 1.2.1.** *Έστω $k$ ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν και έστω $\mathcal{G}$ μια υποομάδα τής $GL_n(k)$ η οποία είναι είτε πεπερασμένη είτε η $SL_n(k)$ είτε ολόκληρη η $GL_n(k)$. Τότε το σύνολο των στοιχείων τού $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ που μένουν αναλλοίωτα ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $k$-άλγεβρα.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη τού παραπάνω θεωρήματος υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ ονομάζεται *δακτύλιος τής Noether* όταν κάθε ιδεώδες του είναι πεπερασμένα παραγόμενο και αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως *Θεώρημα Βάσης τού Hilbert*.

**Θεώρημα 1.2.2 (Θεώρημα Βάσης τού Hilbert).** *Αν ο $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος τής Noether, τότε και ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathcal{R}[x]$ είναι δακτύλιος τής Noether.*

Η απόδειξη τού θεωρήματος 1.2.1 βασίζεται κυρίως στο παρακάτω λήμμα:

**Λήμμα 1.2.1.** *Αν ισχύουν οι υποθέσεις τού θεωρήματος 1.2.1 και το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ είναι το σύνολο των στοιχείων τού πολυωνυμικού δακτύλιου $\mathcal{S} = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ που μένουν αναλλοίωτα ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$, τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός από $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$-modules $\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ που διατηρεί τούς βαθμούς και απεικονίζει τα στοιχεία τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ στον εαυτό τους.*

*Απόδειξη.* Στην περίπτωση κατά την οποία η ομάδα $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένη η απόδειξη είναι απλή. Έστω $\gamma$ το πλήθος των στοιχείων τής $\mathcal{G}$. Αφού η χαρακτηριστική τού σώματος $k$ είναι μηδέν, έχουμε $\gamma = \gamma \cdot 1_k$, όπου ως $1_k$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο στοιχείο τού σώματος $k$. Το $\gamma$ είναι μη μηδενικό στοιχείο τού $k$, οπότε έχει ως αντίστροφό του το $1_k/\gamma \in k$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ μέσω του τύπου

$$\phi(f) = (1_k/\gamma) \sum_{g \in G} g(f).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $\phi$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Στις περιπτώσεις όπου η $\mathcal{G}$ είναι η $SL_n(k)$ ή η $GL_n(k)$ η απεικόνιση $\phi$ κατασκευάζεται με ανάλογο τρόπο, αντικαθιστώντας το άθροισμα με το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο Haar. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα 1.2.1.

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο όλων των ομογενών πολυωνύμων τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ βαθμού γνήσια θετικού και $m$ το ιδεώδες τού $\mathcal{S}$ που παράγεται από τα στοιχεία τού $\mathcal{X}$. Σημειώνουμε εδώ ότι το $m$ είναι εξ ορισμού ομογενές ιδεώδες τού $\mathcal{S}$. Αφού ο $\mathcal{S}$ είναι δακτύλιος τής Noether, βλ. *Θεώρημα Βάσης τού Hilbert*, το ιδεώδες $m$ έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων οι οποίοι μπορούν να επιλεγούν από τα στοιχεία τού συνόλου $\mathcal{X}$. Πράγματι, έστω $H_1, H_2, \ldots, H_t \in \mathcal{S}$ γεννήτορες τού $m$. Κάθε ένα από τα πολυώνυμα $H_i$ γράφεται ως πεπερασμένο άθροισμα τής μορφής $\sum_j h_j F_j$, με $h_j \in S$ και $F_j \in \mathcal{X}$. Άν $F_1, F_2, \ldots, F_s$ είναι όλα τα πολυώνυμα τού $\mathcal{X}$ που εμφανίζονται στις εκφράσεις των $H_i$, $i = 1, \ldots, t$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι το $\{F_1, F_2, \ldots, F_s\}$ αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων τού ιδεώδους $m$.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα πολυώνυμα $F_i$, $i = 1, \ldots, s$, παράγουν το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ ως $k$-άλγεβρα. Έστω $\mathcal{R}$ η $k$-υποάλγεβρα τού $\mathcal{S}$ που παράγεται από τα $F_1, F_2, \ldots, F_s$.

Προφανώς, $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Έστω τώρα $F$ ένα ομογενές πολυώνυμο τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$, δηλ. $F \in \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι $F \in \mathcal{R}$ με επαγωγή ως προς το βαθμό τού $F$.

Αν $\deg F = 0$, τότε $F \in k \subset \mathcal{R}$, οπότε $F \in \mathcal{R}$. Έστω τώρα ότι $\deg F > 0$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για όλα τα ομογενή πολυώνυμα τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ βαθμού γνήσια μικρότερου από $\deg F$. Τότε $F \in \mathcal{X} \subset m$ και, επομένως, το ομογενές πολυώνυμο $F$ μπορεί να γραφεί ως

$$F = \sum_{i=1}^{s} Q_i F_i,$$

όπου τα $Q_i, i = 1, \ldots, s$, είναι *ομογενή* πολυώνυμα τού $\mathcal{S}$ βαθμού $\deg Q_i = \deg F - \deg F_i$. Πράγματι, αφού το $m$ παράγεται, ως ιδεώδες τού $\mathcal{S}$, από τα $F_1, F_2, \ldots, F_s$, υπάρχουν πολυώνυμα $P_1, P_2, \ldots, P_s \in S$, τέτοια ώστε το $F$ να γράφεται ως $F = \sum_{i=1}^{s} P_i F_i$. Τότε, αφού το $F$ είναι ομογενές πολυώνυμο, μπορούμε να επιλέξουμε το $Q_i$ να είναι η ομογενής συνιστώσα τού $P_i$ βαθμού $\deg F - \deg F_i$. Σημειώνουμε ότι όλοι οι άλλοι όροι τού αθροίσματος απαλείφονται.

Τα $F, F_i, i = 1, \ldots, s$, είναι πολυώνυμα τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Έτσι αν η $\phi$ είναι η απεικόνιση τού λήμματος 1.2.1, έχουμε

$$\phi(F) = \phi(\sum_{i=1}^{s} Q_i F_i) \Longrightarrow F = \sum_{i=1}^{s} \phi(Q_i) F_i$$

και αφού $\deg \phi(Q_i) = \deg Q_i < degF$, έχουμε από την επαγωγική υπόθεση ότι $\phi(Q_i) \in \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, s$ και επομένως $F \in \mathcal{R}$.

Έστω τώρα τυχόν $F \in \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Το $F$ γράφεται ως $F = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$ για κάποιο φυσικό αριθμό $n$, όπου το $f_j$, $j = 1, \ldots, n$, είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $j$. Τότε

$$\phi(F) = \phi(f_0 + f_1 + \ldots + f_n) \Longrightarrow F = \phi(f_0) + \phi(f_1) + \ldots + \phi(f_n),$$

όπου τα $\phi(f_j), j = 1, \ldots, n$, είναι ομογενή πολυώνυμα τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα $\phi(f_j) \in R$, γιά κάθε $j = 1, \ldots, n$, οπότε $F \in \mathcal{R}$. $\square$

# Κεφάλαιο 2

# Προκαταρτικά στοιχεία

## 2.1 Επίπεδες Καμπύλες

**Ορισμός 2.1.1.** Μια *επίπεδη καμπύλη* (ή μια *καμπύλη τού προβολικού επιπέδου* $\mathbb{P}^2$) $C$ είναι η ένωση τού συνόλου των θέσεων μηδενισμού των ανάγωγων παραγόντων ενός ομογενούς πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$ με μιγαδικούς συντελεστές, λαμβανομένης υπ' όψιν τής πολλαπλότητας με την οποία οι ανάγωγοι παράγοντες εμφανίζονται στην ανάλυση τού $F(X,Y,Z)$. Ονομάζουμε *βαθμό τής καμπύλης* $C$ (συμβολίζοντάς τον με $\deg C$) τον βαθμό τού πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$.

**Σημείωση 2.1.1.** Δύο ομογενή πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές ορίζουν την ίδια καμπύλη εάν και μόνο εάν το ένα ισούται με το γινόμενο μιάς μη μηδενικής σταθεράς επί το άλλο.

**Ορισμός 2.1.2.** Λέμε ότι μια επίπεδη καμπύλη είναι *ανάγωγη* όταν το πολυώνυμο, μέσω τού οποίου ορίζεται, είναι ανάγωγο.

Το πλήθος των ομογενών μονωνύμων βαθμού $d$ τριών μεταβλητών είναι $\binom{d+2}{2}$. Επομένως, το σύνολο των ομογενών πολυωνύμων τριών μεταβλητών βαθμού $d$, μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο, αποτελούν έναν διανυσματικό χώρο διάστασης $N+1$, όπου $N = \binom{d+2}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$. Από την παραπάνω σημείωση 2.1.1 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύνολο των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ είναι η προβολικοποίηση τού διανυσματικού χώρου των ομογενών πολυωνύμων βαθμού $d$, συνιστώντας έναν προβολικό χώρο διάστασης $N$.

Έστω τώρα $P$ ένα σημείο τού προβολικού επιπέδου και έστω $C$ μια επίπεδη καμπύλη που ορίζεται ως το σύνολο των θέσεων μηδενισμού ενός πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$. Λέμε ότι η $C$ *διέρχεται από το σημείο* $P$ όταν το $P$ είναι θέση μηδενισμού τού πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$. Λέμε ότι η καμπύλη $C$ *διέρχεται από το σημείο* $P$ *με πολλαπλότητα τουλάχιστον* $m$ (*ή μεγαλύτερης ή ίσης τού* $m$) όταν όλες οι μερικές παράγωγοι τού $F(X,Y,Z)$ τάξεως μέχρι $m-1$ μηδενίζονται στο σημείο

$P$. (Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε: $\operatorname{mult}_P C \geq m$). Λέμε ότι η $C$ *διέρχεται από το σημείο $P$ με πολλαπλότητα ακριβώς $m$* όταν όλες οι μερικές παράγωγοι τού $F(X,Y,Z)$ τάξεως μέχρι $m-1$ μηδενίζονται στο σημείο $P$ και, ταυτοχρόνως, υπάρχει τουλάχιστον μια μερική παράγωγος τού $F$ τάξεως $m$ που δεν μηδενίζεται στο $P$. (Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε: $\operatorname{mult}_P C = m$). Επομένως, η συνθήκη $\operatorname{mult}_P C \geq m$ επάγει $\binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$ (δηλαδή όσες το πλήθος των μερικών παραγώγων τού $F(X,Y,Z)$ μέχρι τάξεως $m$) ανεξάρτητες - όπως αποδεικνύεται - γραμμικές συνθήκες στους συντελεστές τού πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$. Ως εκ τούτου το σύνολο των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$, οι οποίες διέρχονται από δοθέν σημείο τού προβολικού επιπέδου με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$, αποτελεί έναν προβολικό υπόχωρο τού $\mathbb{P}^N$, όπου $N = \frac{d(d+3)}{2}$. Αυτός είναι είτε ο μηδενικός, στην περίπτωση κατά την οποία $d \leq m-1$, είτε έχει (προβολική) διάσταση

$$\frac{d(d+3)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{d^2+3d-m^2-m}{2} .$$

Όμως για περισσότερα τού ενός σημεία $P_1, \ldots, P_r$ τού προβολικού επιπέδου, οι συνθήκες $\operatorname{mult}_{P_i} C \geq m_i$, $i = 1, \ldots, r$, επάγουν $\binom{m_i+1}{2}$ γραμμικές συνθήκες στους συντελεστές τού $F(X,Y,Z)$ για καθένα σημείο $P_i$, αλλά ενδέχεται να είναι εξαρτημένες. Επομένως, το σύνολο τών επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ που διέρχονται από δοθέντα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, αποτελεί έναν προβολικό υπόχωρο τού $\mathbb{P}^N$, όπου $N = \frac{d(d+3)}{2}$, διάστασης

$$\geq \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2} .$$

Σημειώνουμε ότι το κενό σύνολο έχει διάσταση $-1$.

**Ορισμός 2.1.3.** Έστω $C$ μια επίπεδη καμπύλη. Ένα σημείο $P$ της $C$ ονομάζεται *ιδιάζον σημείο τής $C$* όταν $\operatorname{mult}_P C \geq 2$. Ένα σημείο της $C$ που δεν είναι ιδιάζον ονομάζεται *ομαλό σημείο τής $C$*. Μια καμπύλη που έχει ιδιάζοντα σημεία ονομάζεται καμπύλη με *ιδιώματα*. Μια καμπύλη που δεν έχει ιδιάζοντα σημεία ονομάζεται *λεία*.

Θεωρούμε μια ανάγωγη επίπεδη καμπύλη $C$ βαθμού $d$, οριζόμενη ως το σύνολο των θέσεων μηδενισμού ενός πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$. Θα δώσουμε μια τοπική περιγραφή τής $C$ γύρω από ένα σημείο της $P$. Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση κατά την οποία το $P$ είναι ομαλό σημείο τής $C$. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P$ είναι το σημείο $[1,0,0] \in \mathbb{P}^2$ (σε περίπτωση που δεν είναι, μπορούμε να μεταφέρουμε το $P$ στο $[0,0,1]$ με έναν προβολικό μετασχηματισμό). Θέτουμε $y = \frac{Y}{X}$, $z = \frac{Z}{X}$ και

$$f(y,z) = \frac{1}{X^d} F(X,Y,Z).$$

Μέσω τής παραπάνω αντικατάστασης, το σημείο $[1,0,0]$ αντιστοιχεί στο σημείο $(y,z)=(0,0)$ το οποίο είναι θέση μηδενισμού τού πολυωνύμου $f(y,z)$. Αφού το $[1,0,0]$ είναι ομαλό σημείο τής $C$, τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους τού $F(X,Y,Z)$ δεν μηδενίζεται στο $P$. Οι σχέσεις που συνδέουν τις μερικές παραγώγους τού πολυωνύμου $F(X,Y,Z)$ με τις μερικές παραγώγους τού $f(y,z)$ είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}\left(X^d f(y,z)\right)\\ &= dX^{d-1}f(y,z) - X^{d-2}\left(Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = X^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial F}{\partial Z} = X^{d-1}\frac{\partial f}{\partial z}\ .$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ δεν μηδενίζεται στο σημείο $(0,0)$. Αν, για παράδειγμα, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$, από το θεώρημα τής αντίστροφης συνάρτησης μπορούμε να βρούμε μια τοπικά συγκλίνουσα δειναμοσειρά

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

τέτοια ώστε το σημείο $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, z)$ να είναι λύση τής εξίσωσης $f(y,z)=0$. Επομένως, η καμπύλη γύρω από το $(0,0)$ παραμετράται από την

$$z \longmapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, z\right).$$

Ως εκ τούτου, μπορούμε να θεωρούμε το $z$ ως τοπική παράμετρο. Στην περίπτωση κατα την οποίαν $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, μπορούμε κατ' αναλογίαν να θεωρούμε το $y$ ως τοπική παράμετρο. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια λεία επίπεδη καμπύλη είναι τοπικά ισόμορφη με το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

**Σημείωση 2.1.2.** Απο τα παραπάνω συνάγεται ότι μια λεία επίπεδη καμπύλη είναι μια συμπαγής επιφάνεια Riemann, βλ. παράγραφο 2.2. Αν ο βαθμός τής καμπύλης είναι ίσος με $d$, τότε το γένος $g$ τής καμπύλης ισούται με $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Έστω τώρα ότι το $P=[1,0,0]$ είναι ιδιάζον σημείο τής καμπύλης $C$. Θεωρούμε και πάλι το αντίστοιχο αποομογενοποιημένο πολυώνυμο $f(y,z)$. Το πολυώνυμο $f(y,z)$ είναι ανάγωγο, αλλά μπορούμε χρησιμοποιώντας τυπικές δυναμοσειρές να το παραγοντοποιήσουμε γύρω από το σημείο $(0,0)$ ως εξής:

$$f(y,z) = \prod_{j=1}^{k} g_j(y,z).$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, k$, το σύνολο των $(y, z)$ για τα οποία $g_j(y, z) = 0$, λέγεται *κλάδος* τής καμπύλης $f(y, z) = 0$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Ο κάθε κλάδος δεν είναι πλέον καμπύλη, αλλά αναπαριστά τμήμα τής καμπύλης $f(y, z) = 0$ σε μια περιοχή τού $(0, 0)$. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να εισαγάγουμε μια τοπική παράμετρο $s$, έτσι ώστε γύρω από το σημείο $(0, 0)$ ο κλάδος $g_j(y, z) = 0$ να δίνεται από τις

$$\begin{cases} y = s^{m_j} \\ z = h_j(s), \end{cases}$$

όπου ο $m_j$ είναι φυσικός αριθμός και το $h_j(s)$ σειρά Laurent ως προς $s$, που έχει πεπερασμένο πλήθος όρων με αρνητικό εκθέτη.

### 2.1.1 Το Θεώρημα τού Bezout

Θεωρούμε δυο ανάγωγες καμπύλες $C, D$ που ορίζονται από τα πολυώνυμα $F(X, Y, Z)$ και $G(X, Y, Z)$, βαθμού $m$ και $n$ αντίστοιχα. Τα σημεία τομής των καμπυλών $C, D$ είναι οι λύσεις τού συστήματος

$$\begin{cases} F(X, Y, Z) = 0 \\ G(X, Y, Z) = 0\,. \end{cases}$$

Έστω $P$ ένα σημείο τομής των $C, D$. Για λόγους απλούστευσης και χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P$ είναι το $[1, 0, 0]$. Θέτουμε $y = \frac{Y}{X}, z = \frac{Z}{X}$ και

$$f(y, z) = \frac{1}{X^m} F(X, Y, Z),$$

$$g(y, z) = \frac{1}{X^n} G(X, Y, Z).$$

Έστω ότι η καμπύλη $f(y, z) = 0$ έχει $k$ κλάδους στο σημείο $(0, 0)$ και κάθε κλάδος παραμετράται από τις

$$\begin{cases} y = s^{m_j} \\ z = h_j(s) \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τά παραπάνω στο πολυώνυμο $g(y, z)$ έχουμε

$$g\big(s^{m_j}, h_j(s)\big) = cs^{l_j} + \text{ όροι βαθμού μεγαλύτερου από } l_j \text{ ως προς } s.$$

Ο φυσικός αριθμός $l_j$, ονομάζεται *πολλαπλότητα τομής* τού $j$-οστού κλάδου τής καμπύλης $f(y, z) = 0$ και τής $g(y, z) = 0$ στο σημείο $(0, 0)$. Έτσι, ορίζουμε την πολλαπλότητα τομής των $C, D$ στο σημείο $[1, 0, 0]$, ως το άθροισμα των πολλαπλοτήτων τομής τού κάθε κλάδου τής $f(y, z) = 0$ και τής $g(y, z) = 0$ στο σημείο $(0, 0)$.

Ένα βασικό θεώρημα που αφορά στο πλήθος των σημείων τομής δυο καμπυλών τού προβολικού επιπέδου είναι το *Θεώρημα τού Bezout* το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 2.1.1 (Θεώρημα τού Bezout).** *Έστω ότι οι $C, D$ είναι δυο καμπύλες τού προβολικού επιπέδου βαθμών $m$ και $n$ αντίστοιχα. Αν οι $C, D$ δεν έχουν κοινές συνιστώσες (δηλαδή τα πολυώνυμα, μέσω των οποίων ορίζονται, δεν έχουν κοινούς παράγοντες), τότε το πλήθος των σημείων τομής τους, αν μετρήσουμε το καθένα τόσες φορές όσες και πολλαπλότητα τομής των $C, D$ σε αυτό, ισούται με $mn$.*

## 2.2 Επιφάνειες Riemann

Μια επιφάνεια Riemann είναι ένα μονοδιάστατο συνεκτικό μιγαδικό πολύπτυγμα. Οι λείες επίπεδες μιγαδικές αλγεβρικές καμπύλες είναι επιφάνειες Riemann. Δίνουμε αρχικά τούς ορισμούς των εννοιών που μας χρειάζονται για να ορίσουμε τις επιφάνειες Riemann. Έστω $X$ ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος διάστασης 1.

**Ορισμός 2.2.1.** Ένας *μιγαδικός χάρτης*, ή απλώς *χάρτης*, στον $X$ είναι ένας ομοιομορφισμός $\phi : U \to V$, όπου το $U$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $X$ και το $V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο τού μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Δύο χάρτες $\phi_1 : U_1 \to V_1$ και $\phi_2 : U_2 \to V_2$ λέγονται *συμβατοί*, όταν είτε $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ είτε η απεικόνιση

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1 (U_1 \cap U_2) \to \phi_2 (U_1 \cap U_2)$$

είναι ολόμορφη.

**Ορισμός 2.2.2.** Ένας *μιγαδικός άτλας*, ή απλά *άτλας*, $\mathcal{A}$ στο $X$, είναι μια συλλογή $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ από ανά δύο συμβατούς χάρτες, τέτοιους ώστε $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Δύο άτλαντες $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ είναι *ισοδύναμοι*, αν κάθε χάρτης τού $\mathcal{A}_1$ είναι συμβατός με κάθε χάρτη τού $\mathcal{A}_2$.

Επομένως, δύο άτλαντες είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν η ένωσή τους είναι και πάλι ένας μιγαδικός άτλας. Κάθε άτλας περιέχεται σε έναν μοναδικό μεγιστοτικό (maximal) άτλα και συνεπώς δύο άτλαντες είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν περιέχονται στον ίδιο μεγιστοτικό άτλα.

**Ορισμός 2.2.3.** Μια *μιγαδική δομή* στο $X$ είναι ένας μεγιστοτικός άτλας στο $X$.

Ερχόμαστε τώρα στον ορισμό τής (συμπαγούς) επιφάνειας Riemann.

**Ορισμός 2.2.4.** Μια *(συμπαγής) επιφάνεια Riemann* $X$, είναι ένας συμπαγής συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff διάστασης 1, με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, εφοδιασμένος με μια μιγαδική δομή.

Η βασική τοπολογική αναλλοίωτος μιας (συμπαγούς) επιφάνειας Riemann είναι το γένος της.

### 2.2.1 Συναρτήσεις σε επιφάνειες Riemann

Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Υποθέτουμε ότι το $p$ ένα σημείο τής $X$ και το $W$ ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $X$ με $p \in W$.

**Ορισμός 2.2.5.** Έστω $f$ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $W$. Λέμε ότι η $f$ είναι *ολόμορφη στο σημείο* $p$ όταν υπάρχει χάρτης $\phi : U \to V$ με $p \in U$, τέτοιος ώστε η απεικόνιση $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ να είναι ολόμορφη στο $\phi(p)$. Ακόμη, λέμε ότι η $f$ είναι *ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο* $W$ *τού* $X$ όταν είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο τού $W$.

**Ορισμός 2.2.6.** Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη στο $W \setminus \{p\}$. Λέμε ότι η συνάρτηση $f$ έχει *επουσιώδες ιδίωμα* (αντ. *πόλο*, αντ. *ουσιώδες ιδίωμα*) στο σημείο $p$ όταν υπάρχει ένας χάρτης $\phi : U \to V$ με $p \in U$, τέτοιος ώστε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ να έχει επουσιώδες ιδίωμα (αντ. πόλο, αντ. ουσιώδες ιδίωμα) στο σημείο $\phi(p)$.

**Ορισμός 2.2.7.** Μια μιγαδική συνάρτηση $f$ ορισμένη σε μια επιφάνεια Riemann $X$ λέγεται *μερόμορφη στο σημείο* $p \in X$ αν είτε είναι ολόμορφη είτε έχει επουσιώδες ιδίωμα είτε πόλο στο $p$. Λέμε ότι η $f$ είναι *μερόμορφη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο* $W$ *τού* $X$ όταν είναι μερόμορφη σε κάθε σημείο τού $X$.

Το σύνολο όλων των μερόμορφων συναρτήσεων σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $W$ μιας επιφάνειας Riemann $X$ το συμβολίζουμε ως $\mathcal{M}(W)$.

**Ορισμός 2.2.8.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη και ολόμορφη στο $W \setminus \{p\}$. Έστω ακόμη ένας χάρτης $\phi : U \to V$ με $p \in U$. Ονομάζουμε *σειρά Laurent* τής $f$ γύρω από το $p$ ως προς τον χάρτη $\phi$, τη σειρά Laurent τής συνάρτησης $f \circ \phi^{-1}$ γύρω από το σημείο $\phi(p)$.

Στην περίπτωση των μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το είδος τού ιδιώματος που παρουσιάζει μια συνάρτηση σε κάποιο σημείο από τη μορφή τής σειράς Laurent ή, πιο συγκεκριμένα, από τον ελάχιστο ακέραιο (αν αυτός υπάρχει) για τον οποίο ο αντίστοιχος συντελεστής τής σειράς Laurent είναι μη μηδενικός. Στην περίπτωση των επιφανειών Riemann η σειρά Laurent μιας συνάρτησης γύρω από ένα σημείο εξαρτάται από την επιλογή τού χάρτη γύρω από το σημείο. Όμως, αποδεικνύεται ότι ο ελάχιστος ακέραιος (αν αυτός υπάρχει), για τον οποίο ο αντίστοιχος συντελεστής στη σειρά Laurent είναι μη μηδενικός, είναι ανεξάρτητος από την επιλογή τού χάρτη. Έχουμε το εξής:

**Λήμμα 2.2.1.** *Έστω μια συνάρτηση* $f$ *ορισμένη στο* $W \setminus \{p\}$ *και ολόμορφη επ' αυτού. Τότε, η* $f$ *έχει επουσιώδες (αντ. πόλο, αντ. ουσιώδες) ιδίωμα στο σημείο*

*$p$ αν και μόνο αν η σειρά Laurent τής $f$ γύρω από το $p$, ως προς οποιονδήποτε χάρτη, δεν έχει αρνητικούς συντελεστές (αντ. έχει πεπερασμένο - αλλά όχι μηδενικό - πλήθος αρνητικών συντελεστών, αντ. έχει άπειρο πλήθος αρνητικών συντελεστών).*

Έστω τώρα ότι μια συνάρτηση $f$ είναι μερόμορφη στο σημείο $p \in X$.

**Ορισμός 2.2.9.** Τον ελάχιστο ακέραιο, για τον οποίο ο αντίστοιχος συντελεστής τής σειράς Laurent τής συνάρτησης $f$ γύρω από το σημείο $p$, ως προς έναν χάρτη, είναι μη μηδενικός, ονομάζουμε *τάξη* τής $f$ στο $p$ και τον συμβολίζουμε ως $\operatorname{ord}_p f$.

Το ακόλουθο λήμμα προκύπτει άμεσα από τον τελευταίο ορισμό και το λήμμα 2.2.1.

**Λήμμα 2.2.2.** *Έστω ότι η συνάρτηση $f$ είναι μερόμορφη στο σημείο $p$. Τότε η $f$ είναι ολόμορφη στο σημείο $p$ αν και μόνο αν $\operatorname{ord}_p f \geq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το $p$ είναι θέση μηδενισμού τής $f$ αν και μόνο αν $\operatorname{ord}_p f > 0$. Επίσης, η $f$ έχει πόλο στο σημείο $p$ αν και μόνο αν $\operatorname{ord}_p f < 0$.*

Χρησιμοποιούμε επίσης την παρακάτω ορολογία.

**Ορισμός 2.2.10.** Λέμε ότι το σημείο $p$ είναι *θέση μηδενισμού* τής συνάρτησης $f$ τάξης $n$ όταν $\operatorname{ord}_p f = n \geq 1$. Λέμε ότι το σημείο $p$ είναι *πόλος* τής συνάρτησης $f$ τάξης $n$ όταν $\operatorname{ord}_p f = -n < 0$.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη κάποιες ιδιότητες τής συνάρτησης $\operatorname{ord}_p$.

**Λήμμα 2.2.3.** *Εάν οι $f, g$ είναι δύο μερόμορφες συναρτήσεις στο σημείο $p$, τότε,*

1. $\operatorname{ord}_p(fg) = \operatorname{ord}_p f + \operatorname{ord}_p g$,
2. $\operatorname{ord}_p \left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{ord}_p f - \operatorname{ord}_p g$.

Πολλά από τα θεωρήματα που ισχύουν για τις μιγαδικές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής μεταφέρονται, μέσω χαρτών, και σε συναρτήσεις ορισμένες σε επιφάνειες Riemann.

**Θεώρημα 2.2.1.** *Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο $W$ μιας επιφάνειας Riemann $X$, στο οποίο είναι μερόμορφη. Αν η $f$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο $W$, τότε το υποσύνολο τού $W$ που αποτελείται από τις θέσεις μηδενισμού και τούς πόλους τής $f$ είναι διακριτό.*

Λόγω τής συμπάγειας των επιφανειών Riemann, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 2.2.1.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Αν μια μη μηδενική συνάρτηση $f$ είναι μερόμορφη σε όλη τη $X$, τότε τόσο το πλήθος των θέσεων μηδενισμού όσο και το πλήθος των πόλων τής $f$ είναι πεπερασμένο.*

Το επόμενο θεώρημα είναι πόρισμα τής αρχής τού μεγίστου και τής συμπάγειας τής επιφάνειας Riemann.

**Θεώρημα 2.2.2.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Αν μια συνάρτηση $f$ είναι ολόμορφη σε όλη τη $X$, τότε η $f$ είναι σταθερή συνάρτηση.*

### 2.2.2 Απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών Riemann

**Ορισμός 2.2.11.** Μια απεικόνιση $F : X \to Y$ μεταξύ δυο επιφανειών Riemann $X$ και $Y$ είναι *ολόμορφη στο σημείο* $p \in X$ αν υπάρχουν χάρτες $\phi_1 : U_1 \to V_1$ στη $X$ με $p \in U_1$ και $\phi_2 : U_2 \to V_2$ στην $Y$ με $F(p) \in U_2$, τέτοιοι ώστε η απεικόνιση $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ να είναι ολόμορφη στο σημείο $\phi_1(p)$. Λέμε ότι η απεικόνιση $F$ είναι *ολόμορφη στο ανοιχτό* $W \subset X$ όταν η $F$ είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο τού συνόλου $W$.

Οι ολόμορφες απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών Riemann έχουν, τοπικά, μια πολύ ειδική μορφή. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 2.2.3.** *Ας υποθέσουμε ότι οι $X, Y$ είναι δυο επιφάνειες Riemann, η $F : X \to Y$ μια μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση και $p$ ένα σημείο της $X$. Τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος αριθμός $m \geq 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε χάρτη $\phi_2 : U_2 \to V_2$ στην $Y$, με $F(p) \in U_2$ και $\phi_2(F(p)) = 0$, υπάρχει χάρτης $\phi_1 : U_1 \to V_1$ στη $X$, με $p \in U_1$ και $\phi_1(p) = 0$, τέτοιος ώστε*

$$\left(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}\right)(z) = z^m \text{ για κάθε } z \in \phi_1(U_1).$$

**Ορισμός 2.2.12.** Τον μοναδικό ακέραιο αριθμό $m$ ο οποίος πληροί τις συνθήκες τού παραπάνω θεωρήματος, ονομάζουμε *πολλαπλότητα τής απεικόνισης $F$ στο σημείο $p$* και τον συμβολίζουμε ως $\mathrm{mult}_p F$.

Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τού συνόλου $\mathcal{M}(X)$, των μερόμορφων απεικονίσεων στη $X$ και τού συνόλου των ολόμορφων απεικονίσεων $F : X \to \mathbb{C}_\infty$, όπου ως $\mathbb{C}_\infty$ συμβολίζουμε το συμπαγές μιγαδικό επίπεδο, που δεν είναι ταυτοτικά ίσες με $\infty$. Αυτή κατασκευάζεται αντιστοιχώντας σε μία $f \in \mathcal{M}(X)$ την απεικόνιση

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C}, & \text{αν το } x \text{ δεν είναι πόλος τής } f \\ \infty, & \text{αν το } x \text{ είναι πόλος τής } f. \end{cases}$$

Θα έχουμε τότε το εξής:

**Λήμμα 2.2.4.** *Έστω $f$ μια μερόμορφη συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann $X$ και $F : X \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ η αντίστοιχη ολόμορφη απεικόνιση στο συμπαγες μιγαδικό επίπεδο.*

1. *Αν το σημείο* $p \in X$ *είναι θέση μηδενισμού τής* $f$*, τότε* $\operatorname{mult}_p F = \operatorname{ord}_p f$.

2. *Αν το σημείο* $p \in X$ *είναι πόλος τής* $f$*, τότε* $\operatorname{mult}_p F = -\operatorname{ord}_p f$.

3. *Αν το σημείο* $p \in X$ *δεν είναι ούτε θέση μηδενισμού ούτε πόλος τής* $f$*, τότε* $\operatorname{mult}_p F = \operatorname{ord}_p(f - f(p))$.

Η παρακάτω πρόταση μας παρέχει μια βασική ιδιότητα των ολόμορφων απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών Riemann.

**Πρόταση 2.2.1.** *Έστω* $F : X \to Y$ *μια μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ δυο επιφανειών Riemann* $X$ *και* $Y$*. Τότε, για κάθε σημείο* $y \in Y$*, το άθροισμα*

$$\sum_{p \in F^{-1}(y)} \operatorname{mult}_p F$$

*είναι σταθερό.*

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο. Το τελευταίο προκύπτει από το λήμμα 2.2.4 και το γεγονός ότι μια μερόμορφη συνάρτηση σε μια επιφάνεια Riemann έχει πεπερασμένου πλήθους πόλους και θέσεις μηδενισμού.

**Ορισμός 2.2.13.** Το άθροισμα τής παραπάνω πρότασης το ονομάζουμε *βαθμό τής συνάρτησης* $F$.

Τέλος, με χρήση των παραπάνω, μπορεί να αποδειχθεί η ακόλουθη βασική πρόταση:

**Πρόταση 2.2.2.** *Έστω* $f$ *μια μερόμορφη συνάρτηση σε μια επιφάνεια Riemann* $X$*. Τότε,*

$$\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p f = 0.$$

## 2.3 Ολοκλήρωση σε επιφάνειες Riemann

**Ορισμός 2.3.1.** Ένα *μονοπάτι* $\gamma$ σε μια επιφάνεια Riemann $X$ είναι μια συνεχής και κατά τμήματα ομαλή απεικόνιση $\gamma : [a, b] \to X$, όπου το $[a, b]$ είναι ένα κλειστό διάστημα τής πραγματικής ευθείας. Τα σημεία $\gamma(a), \gamma(b)$ ονομάζονται *άκρα (ή ληκτικά σημεία) τού μονοπατιού* $\gamma$. Συγκεκριμένα, το $\gamma(a)$ ονομάζεται *αρχικό* και το $\gamma(b)$ ονομάζεται *τελικό σημείο* τού $\gamma$. Ένα μονοπάτι $\gamma$ καλείται *κλειστό* όταν $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Έστω $\gamma$ ένα μονοπάτι σε μια επιφάνεια Riemann και έστω $f$ μια μερόμορφη συνάρτηση που είναι ολόμορφη κατά μήκος τού μονοπατιού. Ο ορισμός τού ολοκληρώματος $\int_\gamma f$ με χρήση χαρτών και αναγωγή στην ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων μιάς μεταβλητής προσκρούει στην συμβατότητα αλλαγής χαρτών. Επομένως, ολοκληρώματα όπως το παραπάνω δεν μπορούν να οριστούν. Τα αντικείμενα που μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μήκος μονοπατιών σε μια επιφάνεια Riemann είναι οι $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφές. Για την μελέτη μας θα περιοριστούμε σε μια ειδικότερη κατηγορία μορφών, τις ολόμορφες 1-μορφές.

**Ορισμός 2.3.2.** 1. Μια *ολόμορφη 1-μορφή σε ένα ανοιχτό σύνολο* $V \subseteq \mathbb{C}$ είναι μία έκφραση τής μορφής $\omega = f(z)dz$, όπου $f$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $V$.
2. Μια *ολόμορφη 1-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann* $X$ είναι μια αντιστοιχία σε κάθε χάρτη $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}$ τής $X$ μιας ολόμορφης 1-μορφής $\omega_i = f_i(z_i)dz_i$ στο $V_i \subseteq \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την εξής συνθήκη συμβατότητας: Αν οι $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i,\ i = 1, 2$ είναι δυο χάρτες με μη κενή τομή και $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ η αντίστοιχη αλλαγή χαρτών, τότε $T^*(\omega_1) = \omega_2$, δηλ.

$$f_1 \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(z_2)\,(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})'(z_2) = f_2(z_2).$$

Η παραπάνω συνθήκη συμβατότητας για τις ολόμορφες 1-μορφές αντιστοιχεί στον νόμο αλλαγής μεταβλητής στα ολοκληρώματα, πράγμα που συνεπάγεται την συμβατότητα τού ορισμού τού ολοκληρώματος τής 1-μορφής κατα μήκος ενός μονοπατιού με χρήση χαρτών. Έχουμε το παρακάτω βασικό και πολύ δύσκολο θεώρημα που αφορά στις ολόμορφες μορφές μιας επιφάνειας Riemann γένους $g$.

**Θεώρημα 2.3.1.** *Το σύνολο των ολόμορφων μορφών σε μια επιφάνεια Riemann $X$ γένους $g$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $g$, τον οποίο εφεξής θα συμβολίζουμε ως $\Omega^1(X)$.*

**Ορισμός 2.3.3.** Μια *αλυσίδα* σε μια επιφάνεια Riemann είναι ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα τής μορφής $\sum_i n_i\gamma_i$, όπου τα $\gamma_i$ είναι μονοπάτια στη $X$ και τα $n_i$ ακέραιοι αριθμοί.

Το σύνολο όλων των αλυσίδων σε μια επιφάνεια Riemann $X$, αποτελεί μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα, την οποία συμβολίζουμε με $Ch(X)$, με βάση το σύνολο των μονοπατιών στη $X$. Έστω τώρα $\omega$ μια ολόμορφη 1-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann $X$. Δοθείσας μιας αλυσίδας $\Gamma = \sum_i n_i\gamma_i$ στη $X$, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια τού ολοκληρώματος τής $\omega$ πάνω στη $\Gamma$ ως εξής:

$$\int_\Gamma \omega = n_i \sum_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

### 2.3.1 1η ομάδα ομολογίας μιας επιφάνειας Riemann

Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann και $\gamma : [a, b] \to X,\ \ \delta : [a, b] \to X$ δυο μονοπάτια στη $X$ με $\gamma(a) = \delta(a)$ και $\gamma(b) = \delta(b)$ (με τα $\gamma$ και $\delta$ να έχουν τα ίδια άκρα).

Διαισθητικά, λέμε ότι τα μονοπάτια $\gamma$ και $\delta$ είναι ομοτοπικά, όταν το ένα μπορεί να προκύψει από συνεχή παραμόρφωση τού άλλου. Πιο αυστηρά,

**Ορισμός 2.3.4.** Δυο μονοπάτια $\gamma : [a,b] \to X$ και $\delta : [a,b] \to X$ σε μια επιφάνεια Riemann $X$, με άκρα $\gamma(a) = \delta(a) = p$ και $\gamma(b) = \delta(b) = q$, καλούνται *ομοτοπικά*, όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to X$, τέτοια ώστε, για κάθε $s \in [0,1]$ η απεικόνιση $\gamma_s : [a,b] \to X$ που ορίζεται ως $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s),\ t \in [a,b]$, να είναι ένα μονοπάτι στη $X$, με αρχικό σημείο το $p$ και τελικό το $q$, και $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 = \delta$. Μια τέτοια απεικόνιση $\Gamma$ καλείται *ομοτοπία*.

Η έννοια τής ομοτοπίας ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των μονοπατιών με σταθεροποιημένα άκρα σε μια επιφάνεια Riemann. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται κλάσεις ομοτοπίας.

**Ορισμός 2.3.5.** Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann και έστω $p$ ένα σημείο τής $X$. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των μονοπατιών στη $X$ με αρχικό και τελικό σημείο το $p$, ονομάζεται *Θεμελιώδης Ομάδα τής* $X$ βασιζόμενη στο σημείο $p$ και συμβολιζόμενη ως $\pi_1(X,p)$.

Σημειώνουμε ότι η Θεμελιώδης Ομάδα μιας επιφάνειας Riemann $X$, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, είναι πράγματι ομάδα με πράξη την πρόσθεση των κλάσεων ομοτοπίας που επάγεται με τον προφανή τρόπο από την πρόσθεση των μονοπατιών. Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν $p,q$ είναι δυο σημεία τής $X$, οι ομάδες $\pi_1(X,p)$ και $\pi_1(X,q)$ είναι ισόμορφες! Άρα μπορούμε να μιλάμε για **τη** Θεμελιώδη Ομάδα μιας επιφάνειας Riemann χωρίς να αναφερόμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο τής $X$. Το παρακάτω θεώρημα είναι συνέπεια τού θεωρήματος τού Stokes.

**Πρόταση 2.3.1.** *Έστω ότι τα $\gamma$, $\delta$ είναι δυο ομοτοπικά μονοπάτια σε μια επιφάνεια Riemann $X$ και η $\omega$ μια κλειστή μερόμορφη 1-μορφή στη $X$. Τότε*

$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega.$$

Με βάση το παραπάνω, για κάθε ολόμορφη 1-μορφή $\omega$ επάγεται μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\phi_\omega = \int_{-} \omega : \pi_1(X,p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$\phi_\omega([\gamma]) = \int_\gamma \omega, \quad \text{για κάθε} \quad [\gamma] \in \pi_1(X,p).$$

Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι η $\phi_\omega$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Συμβολίζουμε τώρα ως $[\pi_1,\pi_1]$ τη μεταθέτρια υποομάδα τής $\pi_1(X,p)$. Αν $\ker \phi_\omega$ είναι ο πυρήνας τού ομομορφισμού $\phi_\omega$, η ομάδα πηλίκων $\pi_1(X,p)/\ker \phi_\omega$ είναι αβελιανή, διότι η $\mathbb{C}$ είναι αβελιανή. Επομένως, η μεταθέτρια υποομάδα τής $\pi_1(X,p)$ περιέχεται στον πυρήνα τού $\phi_\omega$, δηλαδή $[\pi_1,\pi_1] \subset \ker \phi_\omega$. Το τελευταίο σημαίνει ότι ο ομομορφισμός $\phi_\omega$ επάγει έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων, τον οποίο συμβολίζουμε και πάλι ως $\phi_\omega$,

$$\phi_\omega : \pi_1(X,p)/[\pi_1,\pi_1] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

**Ορισμός 2.3.6.** Η ομάδα πηλίκων $\pi_1(X,p)/[\pi_1,\pi_1]$ ονομάζεται *πρώτη ομάδα ομολογίας τής επιφάνειας Riemann $X$* και συμβολίζεται ως $H_1(X)$.

Στη συνέχεια δίνουμε έναν πιο γεωμετρικό ορισμό τής πρώτης ομάδας ομολογίας μιας επιφάνειας Riemann, ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμος με τον παραπάνω. Θεωρούμε την ομάδα $Ch(X)$, που αποτελείται από όλες τις αλυσίδες στην επιφάνεια Riemann $X$. Σε κάθε αλυσίδα $\Gamma = \sum_i n_i\gamma_i$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα σημείων τής $X$. Αυτό γίνεται, αρχικά, αντιστοιχώντας σε κάθε μονοπάτι $\gamma_i$ την τυπική διαφορά των άκρων του και, στη συνέχεια, επεκτείνοντας γραμμικά. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων από την ομάδα των αλυσίδων $Ch(X)$ στην ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τα στοιχεία τής $X$. Ο πυρήνας αυτού τού ομομορφισμού αποτελείται από τις αλυσίδες $\sum_i n_i\gamma_i$, στις οποίες το τελικό σημείο κάθε μονοπατιού $\gamma_i$, συμπίπτει με το αρχικό σημείο κάποιου μονοπατιού $\gamma_j$ (μη αποκλειομένου του ενδεχομένου να έχουμε $i = j$). Συμβολίζουμε αυτόν τον πυρήνα ως $ClCh(X)$ και τον ονομάζουμε σύνολο των κλειστών αλυσίδων στη $X$. Είναι προφανές ότι το σύνορο ενός κλειστού απλά συνεκτικού χωρίου $D$ στη $X$, είναι μια κλειστή αλυσίδα. Μια τέτοια κλειστή αλυσίδα ονομάζεται *συνοριακή αλυσίδα*. Συμβολίζουμε με $BoCh(X)$ την υποομάδα τής $ClCh(X)$ που παράγεται από όλες τις συνοριακές αλυσίδες στη $X$.

**Ορισμός 2.3.7.** Η ομάδα πηλίκων $ClCh(X)/BoCh(X)$ ονομάζεται *πρώτη ομάδα ομολογίας τής επιφάνειας Riemann $X$* και συμβολίζεται ως $H_1(X)$.

Αποδεικνύεται ότι οι ομάδες $ClCh(X)/BoCh(X)$ και $\pi_1(X,p)/[\pi_1,\pi_1]$ είναι ισόμορφες. Άρα οι ορισμοί 2.3.6 και 2.3.7 είναι ισοδύναμοι. Ο εν λόγω ισομορφισμός είναι ο εξής:

$$\Phi : \pi_1(X,p)/[\pi_1,\pi_1] \longrightarrow ClCh(X)/BoCh(X)$$

με $\Phi([\gamma] + [\pi_1,\pi_1]) = [\gamma] + BoCh(X)$, όπου ως $[\gamma]$ συμβολίζουμε την κλάση ομοτοπίας ενός μονοπατιού $\gamma$ με αρχικό και τελικό σημείο το $p$.

Έστω τώρα $\omega$ μια κλειστή μερόμορφη 1-μορφή στην επιφάνεια Riemann $X$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi_\omega : ClCh(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

με $\phi_\omega(\Gamma) = \int_\Gamma \omega$, για κάθε κλειστή αλυσίδα $\gamma$ στη $X$. Η απεικόνιση $\phi_\omega$ είναι ομομορφισμός ομάδων και αν $\partial D$ είναι μια συνοριακή αλυσίδα στη $X$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Stokes έχουμε

$$\phi_\omega(\partial D) = \int_{\partial D} \omega = 0.$$

Επομένως, το σύνολο των συνοριακών αλυσίδων $BoCh(X)$ περιέχεται στον πυρήνα τού $\phi_\omega$. Ο $\phi_\omega$ επάγει έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων, τον οποίο συμβολίζουμε και πάλι ως $\phi_\omega$,

$$\phi_\omega : H_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ο ομομορφισμός $\phi_\omega$ λεγεται περίοδος τού $\omega$ και μπορούμε να θεωρούμε ως πεδίο ορισμού του είτε την αβελιανοποίηση τής θεμελιώδους ομάδας τής $X$, είτε την ομάδα πηλίκων $ClCh(X)/BoCh(X)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω αν η $\omega$ είναι μια ολόμορφη 1-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann και η $\gamma$ μια κλειστή αλυσίδα στη $X$, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα τής $\omega$ πάνω στην κλάση ομολογίας τής αλυσίδας $\gamma$ ως ακολούθως:

$$\int_{[\gamma]} \omega = \phi_\omega(\gamma) = \int_\gamma \omega.$$

Ο τελευταίος ορισμός είναι καλός, με την έννοια τού ότι δεν εξαρτάται από την επιλογή τού αντιπροσώπου τής κλάσης ομολογίας τής αλυσίδας $\gamma$.

Στην περίπτωση όπου η επιφάνεια Riemann $X$ έχει γένος $g > 0$, η πρώτη ομάδα ομολογίας τής $X$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμίδας $2g$. Μπορούμε να περιγράψουμε τούς γεννήτορες τής $H_1(X)$ χρησιμοποιώντας μια αναπαράσταση τής $X$ ως πολύγωνο με $4g$ πλευρές ταυτισμένες με κατάλληλο τρόπο. Θεωρούμε ένα πολύγωνο $\mathcal{P}_g$ με $4g$ πλευρές $a_i, b_i, a_i', b_i',\ i = 1, \ldots, g$. Προσανατολίζουμε τις πλευρές $a_i', b_i',\ i = 1, \ldots, g$, κατά την ωρολογιακή φορά και τις πλευρές $a_i, b_i$ κατά την αντίθετη ωρολογιακή φορά όπως στο παρακάτω σχήμα. Η επιφάνεια Riemann $X$ προκύπτει αν ταυτίσουμε την πλευρά $a_i$ με την $a_i'$ και την πλευρα $b_i$ με τη $b_i'$, για κάθε $i = 1, \ldots, g$, σύμφωνα με τις δοθείσες διευθύνσεις. Επίσης, σύμφωνα με τις παραπάνω ταυτίσεις, όλες οι κορυφές τού πολυγώνου $\mathcal{P}_g$ θα ταυτίζονται με ένα σημείο στην επιφάνεια Riemann $X$. Επομένως οι $a_i, b_i$ θεωρούμενες ως καμπύλες στη $X$, είναι κλειστά μονοπάτια. Αυτά τα μονοπάτια, θεωρούμενα ως κλειστές αλυσίδες στη $X$, παράγουν την πρώτη ομάδα ομολογίας $H_1(X)$ τής $X$.

## 2.4 Διαιρέτες σε επιφάνειες Riemann

**Ορισμός 2.4.1.** Ένας *διαιρέτης* $D$ σε μια επιφάνεια Riemann $X$ είναι μια απεικόνιση $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών, για την οποία ισχύει $D(p) \neq 0$ μόνο για πεπερασμένου πλήθους σημεία $p \in X$.

Το σύνολο των διαιρετών στην $X$ αποτελεί μια ομάδα με πράξη της την πρόσθεση απεικονίσεων, την οποία συμβολίζουμε ως $\mathrm{Div}(X)$. Ένας διαιρέτης $D \in \mathrm{Div}(X)$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα τυπικό άθροισμα τής μορφής

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

**Ορισμός 2.4.2.** Ο *βαθμός ενός διαιρέτη* $D \in \mathrm{Div}(X)$, είναι το άθροισμα των τιμών τού $D$. Τον αριθμό αυτό συμβολίζουμε ως $\deg D$. Έχουμε δηλαδή

$$\deg D = \sum_{p \in X} D(p).$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο, εξ' ορισμού τού $D$. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$, που αντιστοιχεί σε κάθε διαιρέτη $D \in \mathrm{Div}(X)$ το βαθμό του, είναι ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα του το σύνολο των διαιρετών βαθμού μηδέν, το οποίο συμβολίζουμε ως $\mathrm{Div}^0(X)$.

Έστω $f$ μια μερόμορφη συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann $X$.

**Ορισμός 2.4.3.** *Ο διαιρέτης τής* $f$, τον οποίο συμβολίζουμε ως $(f)$, είναι ο

$$(f) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p f \cdot p\,.$$

Κάθε διαιρέτης τής παραπάνω μορφής λέγεται *κύριος* και το σύνολο όλων των κύριων διαιρετών στην επιφάνεια Riemann $X$, συμβολίζεται ως $\mathrm{PDiv}(X)$.

**Λήμμα 2.4.1.** *Έστω $f$ μια μερόμορφη συνάρτηση σε μια επιφάνεια Riemann $X$. Τότε* $\deg(f) = 0$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τον διαιρέτη μιας ολόμορφης 1-μορφής σε μια επιφάνεια Riemann $X$. Έστω τώρα $\omega$ μια ολόμορφη 1-μορφή στην επιφάνεια Riemann.

**Ορισμός 2.4.4.** *Ο διαιρέτης τής* $\omega$, τον οποίο συμβολίζουμε με $(\omega)$, είναι ο

$$(\omega) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p \omega \cdot p.$$

### 2.4.1 Διαιρέτες τομής

Έστω $C$ μια λεία προβολική καμπύλη. Οι λείες προβολικές καμπύλες είναι επιφάνειες Riemann ολόμορφα εμφυτευμένες σε κάποιον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n$. Συμβολίζουμε ως $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ τις ομογενείς συντεταγμένες στο $\mathbb{P}^n$. Έστω $G(x_0, x_2, \ldots, x_n)$ ένα ομογενές πολυώνυμο που δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στην $C$.

Θέλουμε να ορίσουμε ένα διαιρέτη $G$ στην $C$ που να σχετίζεται με τα σημεία τής τομής της με την καμπύλη που ορίζεται από το πολυώνυμο $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, δηλαδή τα σημεία τής $C$ στα οποία μηδενίζεται το $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Φυσικά θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και τις πολλαπλότητες τομής στα εν λόγω σημεία. Έστω $p$ σημείο τής καμπύλης $C$ στο οποίο το πολυώνυμο $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ μηδενίζεται. Επιλέγουμε ένα ομογενές πολυώνυμο $G'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, βαθμού ίδιου με το $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, που δεν μηδενίζεται στο σημείο $p$. Για παράδειγμα, αν $x_i$ είναι μη μηδενική συντεταγμένη τού $p$ και $d$ είναι ο βαθμός τού $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, επιλέγουμε το $G'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_i^d$. Θεωρούμε το πηλίκο $f = \frac{G}{G'}$ το οποίο ορίζει μια μερόμορφη συνάρτηση στην $C$ που μηδενίζεται στο σημείο $p$. Στη συνέχεια ορίζουμε την τιμή τού διαιρέτη $(G)$ στο σημείο $p$ να είναι η τάξη τής $f$ στο $p$. Στα σημεία τής καμπύλης $C$ όπου το πολυώνυμο $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ δε μηδενίζεται, ορίζουμε την τιμή τού $(G)$ να είναι μηδέν.

**Λήμμα 2.4.2.** *Ο $(G)$ είναι ένας καλά ορισμένος διαιρέτης στην καμπύλη $C$, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή τού πολυωνύμου $G'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.*

*Απόδειξη.* Ας επιλέξουμε ένα διαφορετικό πολυώνυμο $G''(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Τα πολυώνυμα $G'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ και $G''(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ έχουν τον ίδιο βαθμό, άρα το πηλίκο $\frac{G'}{G''}$ ορίζει μια μερόμορφη συνάρτηση στην καμπύλη $C$, την οποία συμβολίζουμε ως $h$. Ακόμη, συμβολίζουμε ως $g$ τη μερόμορφη συνάρτηση που ορίζεται από το πηλίκο $\frac{G}{G''}$. Τότε $g = f \cdot h$, οπότε

$$\mathrm{ord}_p g = \mathrm{ord}_p f + \mathrm{ord}_p h,$$

για κάθε σημείο $p \in C$. Όμως η τάξη τής $h$ είναι μηδέν σε κάθε σημείο τής $C$. Άρα $\mathrm{ord}_p\, g = \mathrm{ord}_p\, f$, για κάθε $p \in C$. □

**Ορισμός 2.4.5.** Ο διαιρέτης $(G)$, όπως παραπάνω, ονομάζεται *διαιρέτης τομής* τού $G$ στην $C$.

**Σημείωση 2.4.1.** Έστω ότι η $C$ είναι μια λεία επίπεδη καμπύλη και η $D$ μια επίπεδη καμπύλη που ορίζεται ως το σύνολο των θέσεων μηδενισμού τού ομογενούς πολυωνύμου $F(X, Y, Z)$. Υποθέτουμε ότι οι καμπύλες $C, D$ τέμνονται στα σημεία $P_1, \ldots, P_k$ με πολλαπλότητες τομής $m_1, \ldots, m_k$ αντίστοιχα, όπως αυτές ορίστηκαν στην παράγραφο 2.1.1. Ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στη $C$ από τα σημεία τής τομής της με την καμπύλη $D$, δηλαδή ο διαιρέτης $\sum_{j=1}^{k} m_j P_j$, είναι ο διαιρέτης τομής τού $F$ στην $C$.

**Ορισμός 2.4.6.** Αν το πολυώνυμο $G$ είναι πρώτου βαθμού, ο διαιρέτης τομής $(G)$ ονομάζεται *διαιρέτης υπερεπιπέδου.*

Οι διαιρέτες τομής σχετίζονται με τούς κύριους διαιρέτες ως εξής:

**Λήμμα 2.4.3.** *Αν $G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), G_2(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ είναι δυο ομογενή πολυώνυμα τού ίδιου βαθμού, τότε ο διαιρέτης τής μερόμορφης συνάρτησης $f$ που ορίζεται από το πηλίκο $\frac{G_1}{G_2}$ είναι η διαφορά των αντίστοιχων διαιρετών τομής των δυο πολυωνύμων, δηλαδή $(f) = (G_1) - (G_2)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $p$ τυχόν σημείο τής καμπύλης $C$. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $H(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, βαθμού ίσου με τον βαθμό των πολυωνύμων $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, που δε μηδενίζεται στο σημείο $p$. Στη συνέχεια γράφουμε τη συνάρτηση $f$ ως εξής:

$$f = \frac{G_1}{H}\frac{H}{G_2}.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$\mathrm{ord}_p f = \mathrm{ord}_p\left(\frac{G_1}{H}\right) - \mathrm{ord}_p\left(\frac{H}{G_2}\right) = (G_1)(p) - (G_2)(p).$$

□

## 2.4.2 Γραμμική ισοδυναμία διαιρετών

**Ορισμός 2.4.7.** Δυο διαιρέτες $D_1, D_2$ σε μια επιφάνεια Riemann $X$, λέγονται *γραμμικά ισοδύναμοι* αν η διαφορά τους είναι ο διαιρέτης μιας μερόμορφης συνάρτησης ορισμένης στη $X$. Συμβολικά γράφουμε $D_1 \sim D_2$.

Εύκολα βλέπουμε ότι η γραμμική ισοδυναμία διαιρετών αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathrm{Div}(X)$ όλων των διαιρετών σε μια επιφάνεια Riemann $X$.

**Σημείωση 2.4.2.** Γραμμικά ισοδύναμοι διαιρέτες έχουν τον ίδιο βαθμό. Αυτό συμβαίνει, διότι ο βαθμός ενός κύριου διαιρέτη είναι μηδέν. Αν $D_1 = (f) + D_2$, όπου $D_1, D_2 \in Div(X)$ και η $f$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση στη $X$, τότε

$$\deg D_1 = \deg(f) + \deg D_2$$

άρα $\deg D_1 = \deg D_2$.

Ορίζουμε τώρα τον βαθμό μιας λείας προβολικής καμπύλης, ο οποίος στην περίπτωση των λείων επίπεδων καμπυλών είναι ισοδύναμος με αυτόν που δώσαμε στην παράγραφο 2.1.

**Ορισμός 2.4.8.** Έστω $C$ μια λεία προβολική καμπύλη. *Ο βαθμός τής $C$*, τον οποίο συμβολίζουμε ως $\deg C$, είναι ο βαθμός ενός τυχόντος διαιρέτη υπερεπιπέδου στην $C$.

Ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, διότι όλοι οι διαιρέτες υπερεπιπέδων σε μια καμπύλη $C$ έχουν τον ίδιο βαθμό. Το τελευταίο προκύπτει από το λήμμα 2.4.3 και την σημείωση 2.4.2

Από το λήμμα 2.4.3 μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε το ακόλουθο: αν η $C$ είναι μια λεία επίπεδη καμπύλη και οι $D, D'$ δυο επίπεδες καμπύλες ίδιου βαθμού οριζόμενες από τα πολυώνυμα $G(X,Y,Z)$ και $G'(X,Y,Z)$, αντίστοιχα, τότε ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στην $C$ από τα σημεία τής τομής της με τη $D$ (που, όπως είδαμε στην παρατήρηση 2.4.1, είναι ο διαιρέτης τομής τού $G$ στην $C$) είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον διαιρέτη που ορίζεται στη $C$ από τα σημεία τής τομής της με την καμπύλη $D'$, δηλαδή τον διαιρέτη τομής τού $G'$ στην $C$.

### 2.4.3 Γραμμικά συστήματα διαιρετών

Στο σύνολο $\mathrm{Div}(X)$ των διαιρετών μιας επιφάνειας Riemann $X$, ορίζουμε σχέση μερικής διάταξης με τον παρακάτω τρόπο. Έστω $D \in \mathrm{Div}(X)$. Γράφουμε $D \geq 0$, όταν $D(p) \geq 0$, για κάθε $p \in X$. Γράφουμε $D > 0$, όταν $D \geq 0$ και $D \neq 0$. Επίσης, όταν $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$, γράφουμε $D_1 \geq D_2$ στην περίπτωση κατά την οποία $D_1 - D_2 \geq 0$ (και ανάλογα για το $>$). Παρόμοια ορίζουμε και τις σχέσεις $\leq$ και $<$ για διαιρέτες. Έστω τώρα $D$ ένας διαιρέτης σε μια επιφάνεια Riemann $X$. Θέτουμε

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \;/\; (f) \geq -D\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}(D)$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

Περιγράφουμε τώρα τη μορφή των συναρτήσεων που περιέχονται στον $\mathcal{L}(D)$. Έστω ένα σημείο $p$ τής $X$ και μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}(D)$. Αν $D(p) = n > 0$, από τον ορισμό τού χώρου $\mathcal{L}(D)$, έχουμε $\mathrm{ord}_p f \geq -n$, που σημαίνει ότι το σημείο $p$ μπορεί να είναι πόλος τής συνάρτησης $f$ τάξης το πολύ $n$. Αν $D(p) = -n < 0$, τότε $\mathrm{ord}_p f \geq n$, δηλαδή το σημείο $p$ είναι ρίζα τής $f$ τάξης τουλάχιστον $n$. Επίσης για τον μηδενικό διαιρέτη έχουμε $\mathcal{L}(0) = \{\text{σταθερές συναρτήσεις στη } X\} \cong \mathbb{C}$.

**Λήμμα 2.4.4.** *Έστω $D$ διαιρέτης σε μια επιφάνεια Riemann $X$, με $\deg D < 0$. Τότε $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μη μηδενική συνάρτηση $f \in \mathcal{L}(D)$. Θεωρούμε τον διαιρέτη $E = (f) + D$. Τότε, αφού $f \in \mathcal{L}(D)$, έχουμε $(f) \geq -D$, άρα $E \geq 0$. Επομένως, ο βαθμός τού διαιρέτη $E$ είναι μη αρνητικός. Όμως, αφού $\deg(f) = 0$, έχουμε $\deg E = \deg D < 0$, άτοπο. □

**Ορισμός 2.4.9.** Έστω $D$ ένας διαιρέτης σε μια επιφάνεια Riemann $X$. Το *πλήρες γραμμικό σύστημα* τού $D$, το οποίο συμβολίζουμε ως $|D|$, είναι το σύνολο όλων των μη αρνητικών διαιρετών, στη $X$, που είναι γραμμικά ισοδύναμοι με τον $D$:

$$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(X) \;/\; E \sim D \text{ και } E \geq 0\}.$$

Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι αν $V$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος, η *προβολικοποίηση* $\mathbb{P}(V)$ τού $V$ είναι το σύνολο των μονοδιάστατων υπόχωρων τού

$V$. Αν ο διανυσματικός χώρος $V$ έχει διάσταση $n+1$, η προβολικοποίησή τού $\mathbb{P}(V)$ έρχεται σε $1-1$ αντιστοιχία με το μιγαδικό προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n$, είναι δηλαδή ένας προβολικός χώρος (προβολικής) διάστασης $n$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι, αν $D$ είναι ένας διαιρέτης σε μια επιφάνεια Riemann $X$, το πλήρες γραμμικό σύστημα τού $D$ είναι η προβολικοποίηση τού διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(D)$.

Θεωρούμε την προβολικοποίηση $\mathbb{P}\big(\mathcal{L}(D)\big)$ τού $\mathcal{L}(D)$ και ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{P}\big(\mathcal{L}(D)\big) \longrightarrow |D|,$$

στέλνοντας τον μονοδιάστατο υπόχωρο τού $\mathcal{L}(D)$ ο οποίος παράγεται από τη συνάρτηση $f$, στον διαιρέτη $(f)+D \in |D|$. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση $\phi$ είναι καλά ορισμένη, διότι αν επιλέξουμε μια άλλη συνάρτηση $g$ που παράγει τον ίδιο υπόχωρο με την $f$, τότε $g = \lambda f$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$, άρα $(g) = (f)$.

**Λήμμα 2.4.5.** *Η απεικόνιση $\phi$ όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, είναι μια $1-1$ αντιστοιχία.*

*Απόδειξη.* Αρχικά δείχνουμε ότι η $\phi$ είναι επί τού $|D|$. Έστω λοιπόν ένας διαιρέτης $E \in |D|$. Τότε, αφού οι διαιρέτες $D$ και $E$ είναι γραμμικά ισοδύναμοι, υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση $f$ στη $X$, τέτοια ώστε $E = (f) + D$. Επιπλέον, αφού $E \geq 0$, έχουμε $(f) \geq -D$, δηλαδή $f \in \mathcal{L}(D)$. Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο $< f >$ τού $\mathcal{L}(D)$, δηλαδή τον υπόχωρο που παράγεται από τη συνάρτηση $f$. Είναι προφανές ότι η εικόνα αυτού τού $< f >$, μέσω τής απεικόνισης $\phi$, είναι ο διαιρέτης $E$. Άρα, πράγματι, η $\phi$ είναι επί.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $\phi$ είναι $1-1$. Έστω $< f >, < g >$ διανυσματικοί υπόχωροι τού $\mathcal{L}(D)$, τέτοιοι ώστε $\phi(< f >) = \phi(< g >)$. Τότε

$$(f) + D = (g) + D \Rightarrow (f) = (g) \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right) = 0.$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ δεν έχει ούτε πόλους ούτε μηδενικά στη $X$, επομένως $\frac{f}{g} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}$. Άρα οι συναρτήσεις $f, g$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο τού $\mathcal{L}(D)$, δηλαδή $< f >=< g >$. □

## 2.5 Η Ιακωβιανή μιας επιφάνειας Riemann

Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Στην παράγραφο 2.3.1 είδαμε ότι το ολοκλήρωμα μιας ολόμορφης 1-μορφής $\omega$ πάνω στην κλάση ομολογίας μιας κλειστής αλυσίδας $\gamma$ είναι καλά ορισμένο. Υπενθυμίζουμε ότι ως $\Omega^1(X)$ συμβολίζουμε τον διανυσματικό χώρο των ολόμορφων 1-μορφών στην επιφάνεια Riemann $X$. Έστω $[\gamma] \in H_1(X)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\int_{[\gamma]} \_ : \Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

που απεικονίζει κάθε $\omega \in \Omega^1(X)$ στο ολοκλήρωμά της πάνω στην κλάση ομολογίας τής $\gamma$. Η παραπάνω απεικόνιση είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές.

**Ορισμός 2.5.1.** Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\lambda : \Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *περίοδος*, αν είναι τής μορφής $\int_{[\gamma]} -$, για κάποιο $[\gamma] \in H_1(X)$. Το υποσύνολο τού $\Omega^1(X)^\star$ που αποτελείται από όλες τις περιόδους το συμβολίζουμε ως $\Lambda$.

Στην περίπτωση όπου η επιφάνεια Riemann $X$ έχει γένος $g > 0$, το $\Lambda$ αποτελεί μια ελεύθερη αβελιανή υποομάδα τού δυϊκού χώρου $\Omega^1(X)^\star$. Αν $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ είναι οι γεννήτορες τής $H_1(X)$, τότε οι γεννήτορες τής $\Lambda$ είναι οι $\int_{\gamma_1} -, \ldots, \int_{\gamma_{2g}} -$. Δίνουμε τώρα τον ορισμό τής Ιακωβιανής μιας επιφάνειας Riemann.

**Ορισμός 2.5.2.** Η ομάδα πηλίκων $\Omega^1(X)^\star/\Lambda$ ονομάζεται *Ιακωβιανή τής επιφάνειας Riemann $X$* και συμβολίζεται με $\mathcal{J}(X)$.

Ταυτίζοντας κατάλληλα τον διανυσματικό χώρο $\Omega^1(X)^\star$ με το $\mathbb{C}^g$, μπορούμε να δώσουμε μια πιο κατανοητή περιγραφή για την Ιακωβιανή μιας επιφάνειας Riemann $X$ γένους $g > 0$. Έστω $\omega_1, \ldots, \omega_g$ μια βάση τού $\Omega^1(X)$. Τότε τα συναρτησοειδή $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ με

$$\lambda_i(\omega) = \lambda_i(c_1\omega_1 + \cdots + c_i\omega_i + \cdots + c_g\omega_g) = c_i,\ \omega \in \Omega^1(X),$$

για κάθε $i = 1, \ldots, g$, αποτελούν μια βάση τού $\Omega^1(X)^\star$. Έτσι, αν το $\lambda$ είναι ένα στοιχείο τού $\Omega^1(X)^\star$, τότε γράφεται ως

$$\lambda = \lambda(\omega_1)\lambda_1 + \cdots + \lambda(\omega_g)\lambda_g.$$

Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε συναρτησοειδές $\lambda \in \Omega^1(X)^\star$ με το ανάστροφο τού διανύσματος $\big(\lambda(\omega_1), \ldots, \lambda(\omega_g)\big)$. Με αυτόν τον τρόπο ταυτίζουμε το $\Omega^1(X)$ με το $\mathbb{C}^g$.

Έστω τώρα $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ μια βάση τής $H_1(X)$. Τότε, τα αντίστοιχα συναρτησοειδή $\int_{\gamma_1} -, \ldots, \int_{\gamma_{2g}} -$, που αποτελούν βάση τής $\Lambda$, ταυτίζονται, σύμφωνα με τα παραπάνω, με τα διανύσματα

$$\pi_i = \left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_i} \omega_g\right)^T,\ i = 1, \ldots, 2g.$$

Αποδεικνύεται τώρα ότι τα διανύσματα $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ταυτίζοντας το $\Omega^1(X)^\star$ με το $\mathbb{C}$, το $\Lambda$ ταυτίζεται με το σύνολο $\left\{\sum_{j=1}^{2g} n_j\pi_j | n_j \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}^g$, το οποίο θα συμβολίζουμε και πάλι με $\Lambda$. Αφού τα διανύσματα $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{R}$, το σύνολο $\Lambda$ είναι ένα μεγιστικό πλέγμα. Επομένως, το πηλίκο $\mathbb{C}^g/\Lambda$ είναι ένας μιγαδικός τόρος διάστασης $g$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο παρακάτω ορισμός για την Ιακωβιανή μιας επιφάνειας Riemann είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 2.5.2.

**Ορισμός 2.5.3.** Υποθέτουμε ότι η $X$ είναι μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$ και το $\Lambda$ όπως παραπάνω. Ο $g$-διάστατος τόρος $\mathbb{C}^g/\Lambda$ ονομάζεται *Ιακωβιανή τής* $X$ και συμβολίζεται ως $\mathcal{J}(X)$.

**Σημείωση 2.5.1.** Στην περίπτωση κατά την οποία η επιφάνεια Riemann $X$ έχει γένος $g = 0$, η Ιακωβιανή τής $X$ είναι η τετριμμένη $\mathcal{J}(X) = \{0\}$, διότι εν προκειμένω ο χώρος $\Omega^1(X)$ είναι τετριμμένος.

### 2.5.1 Η απεικόνιση Abel-Jacobi

Η Ιακωβιανή $\mathcal{J}(X)$ μιας επιφάνειας Riemann $X$ συνδέεται με τη $X$ μέσω μιας απεικόνισης, γνωστής ως *απεικόνιση Abel-Jacobi*, τής οποίας την κατασκευή περιγράφουμε παρακάτω. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $p_0$ στη $X$. Τώρα, για κάθε σημείο $p \in X$, επιλέγουμε ένα μονοπάτι $\gamma_p$ στη $X$, με αρχικό σημείο το $p_0$ και τελικό το $p$. Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$A : X \longrightarrow \Omega^1(X)^\star$$

στέλνοντας κάθε σημείο $p \in X$ στο συναρτησοειδές

$$A(p) : \Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

με

$$A(p)(\omega) = \int_{\gamma_p} \omega, \text{ για κάθε } \omega \in \Omega^1(X).$$

Η απεικόνιση $A$ που κατασκευάσαμε με τον παραπάνω τρόπο δεν είναι καλά ορισμένη, διότι εξαρτάται από την επιλογή τού μονοπατιού $\gamma_p$. Πράγματι, αν $\gamma_p'$ είναι ένα άλλο μονοπάτι στη $X$, με αρχικό σημείο το $p_0$ και τελικό το $p$, η νέα τιμή τού $A(p)$ σε μια ολόμορφη 1-μορφή $\omega$ διαφέρει από την προηγούμενη κατά το συναρτησοειδές $\int_{\gamma_p - \gamma_p'} -$. Όμως, ένα τέτοιο συναρτησοειδές είναι στοιχείο τής υποομάδας τού $\Omega^1(X)^\star$ που αποτελείται από όλες τις περιόδους $\Lambda$. Επομένως η απεικόνιση

$$A : X \longrightarrow \frac{\Omega^1(X)^\star}{\Lambda} = \mathcal{J}(X)$$

είναι καλά ορισμένη. Ονομάζουμε την τελευταία απεικόνιση *απεικόνιση Abel-Jacobi* και σημειώνουμε ότι εξαρτάται από το αρχικό σημείο $p_0$ που σταθεροποιήσαμε.

Θεωρώντας την Ιακωβιανή τής επιφάνειας Riemann $X$ ως τον $g$-διάστατο τόρο $\mathbb{C}^g/\Lambda$, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, όπου $g$ είναι το γένος τής $X$, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση Abel-Jacobi ως μια απεικόνιση

$$A : X \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$$

με τύπο

$$A(p) = \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g\right)^T \mod \Lambda,$$

όπου τα $\omega_1, \ldots, \omega_g$ αποτελούν βάση τού $\Omega^1(X)$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την απεικόνιση Abel-Jacobi από τη $X$ στην ομάδα $\mathrm{Div}(X)$ των διαιρετών στη $X$. Αν $D = \sum_{p \in X} n_p p$ (όπου $n_p = D(p),\ p \in X$) είναι ένας διαιρέτης στη $X$ ορίζουμε

$$A(D) = A(\sum_{p \in X} n_p p) = \sum_{p \in X} n_p A(p).$$

Υπενθυμίζουμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο διότι μόνο πεπερασμένου πλήθους $n_p$ είναι μη μηδενικά. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε έναν ομομορφισμό ομάδων τον οποίο ονομάζουμε, επίσης, απεικόνιση Abel-Jacobi και συμβολίζουμε επίσης ως $A$:

$$A : \mathrm{Div}(X) \to \mathcal{J}(X).$$

Θεωρώντας την $J(X)$ ως την ομάδα πηλίκων $\mathbb{C}^g/\Lambda$, όπως προηγουμένως, ο τύπος τού ομομορφισμού $A$ είναι:

$$A(D) = \left(\sum_{i=1}^{k}\Big(n_{p_i} \int_{p_0}^{p_i} \omega_1\Big), \ldots, \sum_{i=1}^{k}\Big(n_{p_i} \int_{p_0}^{p_i} \omega_g\Big)\right)^T \mod \Lambda,$$

όπου $p_1, \ldots, p_k$ είναι τα σημεία τής $X$, για τα οποία $n_{p_i} \neq 0$. Είναι προφανές ότι ο ομομορφισμός $A$ εξαρτάται από το σημείο $p_o$.

Θεωρούμε τώρα τον περιορισμό τής απεικόνισης Abel-Jacobi στο υποσύνολο $\mathrm{Div}^d(X)$ τής $\mathrm{Div}(X)$ που αποτελείται από όλους τούς διαιρέτες στη $X$ βαθμού $d$:

$$A_d : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X).$$

Ονομάζουμε την απεικόνιση $A_d$ *πεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού* $d$. Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε $d = 0$, το σύνολο $Div^0(X)$ αποτελεί μια υποομάδα τής ομάδας όλων των διαιρετών $\mathrm{Div}(X)$ και η απεικόνιση

$$A_0 : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$$

έναν ομομορφισμό ομάδων. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε το παρακάτω βασικό λήμμα.

**Λήμμα 2.5.1.** *Η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού μηδέν είναι ανεξάρτητη από την επιλογή τού σημείου* $p_0$*, βάσει τού οποίου ορίστηκε.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι σταθεροποιούμε ένα διαφορετικό σημείο $p_0'$ τής $X$ και ότι ορίζουμε την απεικόνιση Abel-Jacobi βάσει τού $p_0'$. Έστω ακόμη $\gamma$, ένα μονοπάτι με αρχικό σημείο το $p_0'$ και τελικό σημείο το $p_0$. Θεωρούμε ένα διαιρέτη $D = \sum_{i=1}^k n_{p_i} p_i$ στη $X$, με $\deg(D) = 0$, δηλαδή $\sum_{i=1}^k n_{p_i} = 0$. Τότε, η τιμή τής απεικόνισης Abel-Jacobi που ορίζεται βάσει τού σημείου $p_0'$ διαφέρει από την τιμή τής απεικόνισης Abel-Jacobi που ορίζεται βάσει τού σημείου $p_0$ κατά το διάνυσμα

$$\left(\sum_{i=1}^k \Big(n_{p_i} \int_{p_0'}^{p_0} \omega_1\Big), \dots, \sum_{i=1}^k \Big(n_{p_i} \int_{p_0'}^{p_0} \omega_g\Big)\right) \mod \Lambda =$$

$$\left(\Big(\int_{p_0'}^{p_0} \omega_1\Big) \sum_{i=1}^k n_{p_i}, \dots, \Big(\int_{p_0'}^{p_0} \omega_g\Big) \sum_{i=1}^k n_{p_i}\right) \mod \Lambda =$$

$$(0, \dots, 0) \mod \Lambda,$$

όπου τα $\omega_1, \dots, \omega_g$ αποτελούν βάση τού $\Omega^1(X)$. □

Υπενθυμίζουμε ότι ο διαιρέτης $(f)$ μιας μερόμορφης συνάρτησης $f$ σε μια επιφάνεια Riemann $X$ έχει βαθμό μηδέν. Το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει. Το παρακάτω βασικό θεώρημα, η απόδειξη τού οποίου είναι δύσκολη, δίνει το ακριβές κριτήριο.

**Θεώρημα 2.5.1.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$ και*

$$A_0 : \mathrm{Div}^0(S) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$$

*η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού μηδέν. Έστω ακόμη $D$ ένας διαιρέτης στη $X$ βαθμού μηδέν. Τότε ο $D$ είναι ο διαιρέτης μιας μερόμορφης συνάρτησης αν και μόνο αν $A_0(D) = 0 \in \mathcal{J}(X)$.*

**Πόρισμα 2.5.1.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$ και έστω*

$$A_d : \mathrm{Div}^d(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$$

*η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού $d$. Έστω ακόμη $D \in \mathrm{Div}^d(X)$. Τότε το σύνολο $A_d^{-1}\big(A_d(D)\big)$ ισούται με το σύνολο των διαιρετών που είναι γραμμικά ισοδύναμοι με τον $D$.*

*Απόδειξη.* Έστω $E \in A_d^{-1}\big(A_d(D)\big)$. Τότε έχουμε

$$A_d(E) = A_d(D) \Longleftrightarrow A_0(E - D) = 0,$$

όπου $A_0$ είναι η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού μηδέν. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα τού Abel, έχουμε

$$E - D = (f) \Longleftrightarrow E \sim D,$$

όπου η $f$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση στη $X$. □

Το τελευταίο που χρειαζόμαστε για να χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία τής Ιακωβιανής μιας επιφάνειας Riemann $X$, σε σχέση με την ίδια τη $X$, είναι το παρακάτω θεώρημα το οποίο δίνουμε χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 2.5.2 (Θεώρημα Αντιστροφής τού Jacobi).** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$. Η απεικόνιση Abel-Jacobi $A_0 : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$ είναι επί.*

Συνδυάζοντας το τελευταίο θεώρημα με το λήμμα 2.5.1, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να θεωρούμε τα στοιχεία τής Ιακωβιανής μιας επιφάνειας Riemann $X$, ως κλάσεις γραμμικά ισοδύναμων διαιρετών βαθμού μηδέν στη $X$. Επιπλέον, αν $d$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε το σύνολο των διαιρετών βαθμού $d$ στη $X$, όπως έχουμε ήδη δει, έρχεται σε 1-1 αντιστοιχία με το $\mathrm{Div}^0(X)$ Άρα, τελικά, αν $d$ είναι ένας τυχαίος ακέραιος αριθμός, μπορούμε να θεωρούμε τα στοιχεία τής Ιακωβιανής μιας επιφάνειας Riemann $X$, ως κλάσεις γραμμικά ισοδύναμων διαιρετών βαθμού $d$ στη $X$.

### 2.5.2 Το συμμετρικό γινόμενο

Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann. Ορίζουμε το *$d$-οστό συμμετρικό γινόμενο τής $X$*, το οποίο συμβολίζουμε ως $X^{(d)}$, ως το σύνολο πηλίκων

$$X^{(d)} = X^{\times d}/S_d,$$

όπου $S_d$ είναι η συμμετρική ομάδα που δρα με φυσιολογικό τρόπο επί των στοιχείων τού $X^{(d)}$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, τα σημεία τού $X^{(d)}$, είναι μη διατεταγμένες $d$-άδες σημείων τής επιφάνειας Riemann $X$, τα οποία συμβολίζουμε ως *τυπικά* αθροίσματα τής μορφής $P_1 + \cdots + P_d$. Εύκολα βλέπουμε ότι το συμμετρικό γινόμενο τής $X$, έρχεται σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των θετικών διαιρετών βαθμού $d$ στη $X$. Αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό γινόμενο μιας επιφάνειας Riamann έχει τη δομή ενός (λείου) αλγεβρικού πολυπτύγματος.

Θεωρούμε τώρα τον περιορισμό τής απεικόνισης Abel-Jacobi βαθμού $d$ στο συμμετρικό γινόμενο τής $X$. Την απεικόνιση που επάγεται θα την ονομάζουμε και πάλι απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού $d$ και θα την συμβολίζουμε ως $u_d$,

$$u_d : X^{(d)} \to \mathcal{J}(X).$$

Διατηρώντας τούς παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 2.5.1.** *Αν $D$ είναι ένας θετικός διαιρέτης βαθμού $d$ στη $X$, τότε $A_d^{-1}\big(A_d(D)\big) = |D|$.*

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.1, το σύνολο $u_d^{-1}\big(u_d(D)\big)$ αποτελείται από όλους τούς διαιρέτες στη $X$ που είναι γραμμικά ισοδύναμοι με το $D$. Επομένως το $u_d^{-1}\big(u_d(D)\big)$ αποτελείται από όλους τούς θετικούς διαιρέτες στη $X$, οι οποίοι είναι γραμμικά ισοδύναμοι με τον $D$, δηλαδή είναι το πλήρες γραμμικό σύστημα $|D|$ τού διαιρέτη $D$. □

Τέλος, δίνουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως *Ισχυρό Θεώρημα Αντιστροφής τού Jacobi.*

**Θεώρημα 2.5.3.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$. Η απεικόνιση Abel-Jacobi $u_d : X^{(d)} \longrightarrow \mathcal{J}(X)$, βαθμού $d$, είναι επί όταν $d \geq g$ και εν γένει εμβύθιση όταν $d \leq g$. Επομένως, όταν $d = g$, η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού $g$ είναι επί και εν γένει εμβύθιση.*

**Σημείωση 2.5.2.** Με βάση το παραπάνω θεώρημα έχουμε το εξής: Έστω $d$ ένας θετικός ακέραιος με $d \geq g$. Τότε το σύνολο πηλίκων $X^{(d)}/\sim$, όπου ως $\sim$ συμβολίζουμε την γραμμική ισοδυναμία διαιρετών, είναι ένας $g$-διάστατος αλγεβρικός τόρος (η Ιακωβιανή της $X$), ανεξάρτητος - μέχρι ισομορφίας - από την επιλογή του $d$.

# Κεφάλαιο 3

# Το 14-ο πρόβλημα τού Hilbert

## 3.1 Το αντιπαράδειγμα τού Nagata - Αλγεβρικό μέρος

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή τού αντιπαραδείγματος τού Nagata, ορίζουμε και διευκρινίζουμε μια ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε κατ' επανάληψη στην συνέχεια. Εστω $P_1, P_2, \ldots, P_r$ (διαφορετικά) σημεία τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$. Συμβολίζουμε ως $P_1+\cdots+P_r$ την μη διατεταγμένη $r$-άδα των παραπάνω σημείων. Το σύνολο που παραμετρά αυτά τα στοιχεία είναι το $r$-οστό συμμετρικό γινόμενο τού $\mathbb{P}^2$, για το οποίο υπενθυμίζουμε ότι ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Sym}^r\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^2)^{\times r}/\mathcal{S}_r \ ,$$

όπου η $\mathcal{S}_r$ είναι η συμμετρική ομάδα των $r$ στοιχείων που δρα με τον φυσιολογικό τρόπο επί του γινομένου $(\mathbb{P}^2)^{\times r}$. Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το $\mathrm{Sym}^r\mathbb{P}^2$ είναι και αυτό μια αλγεβρική ποικιλότητα (με ιδιώματα κατά μήκος των διαγωνίων). Εστω $U_r$ το κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathrm{Sym}^r\mathbb{P}^2$ που ορίζεται ως το συμπλήρωμα των διαγωνίων. Έχοντας διαλέξει τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_r$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο σημείο $P_1+\cdots+P_r$ ανήκει στο $U_r$. Θα λέμε ότι τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_r$ είναι *γενικά σημεία τού επιπέδου* $\mathbb{P}^2$ *ή σημεία του επιπέδου ευρισκόμενα σε γενική θέση* (ως προς κάποια ιδιότητα) αν το αντίστοιχο σημείο $P_1+\cdots+P_r$ ανήκει σε ένα υποσύνολο $A_r$ τού $U_r$ τής μορφής $A_r=$ κατά Zariski ανοικτό εκτός από αριθμήσιμο πλήθος κλειστών, κάθε σημείο τού οποίου ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου τής παραπάνω μορφής είναι ένα 'λεπτό' υποσύνολο τού $U_r$. Σημειώνουμε, τέλος, ότι ακριβέστερο θα ήταν να λέγαμε ότι μια συγκεκριμμένη ιδιότητα ικανοποιείται από το γενικό σημείο τού επιπέδου αν υπάρχει κάποιο υποσύνολο τού $U_r$ τής παραπάνω μορφής $A_r$, κάθε σημείο τού οποίου ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Ωστόσο, η παραπάνω ορολογία έχει επικρατήσει.

Υποθέτουμε ότι οι $a_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, r$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητοι αριθμοί πάνω από το $\mathbb{Q}$ και ορίζουμε τα σημεία $P_i = [a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}] \in \mathbb{P}^2,\ i = 1, \ldots, r$ τού προβολικού επιπέδου. Θα δείξουμε ότι τα σημεία αυτά είναι γενικά σημεία τού επιπέδου. Ας το δείξουμε πρώτα για $r = 1$. Εάν οι $a_1, a_2, a_3$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητοι αριθμοί πάνω από το $\mathbb{Q}$ και $P = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^2$, τότε το συμπλήρωμα τού συνόλου αυτών των σημείων είναι τα σημεία τού προβολικού επιπέδου, όλες οι παραστάσεις των οποίων είναι αλγεβρικά εξηρτημένες τριάδες αριθμών. Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν σε ευθείες τού $\mathbb{C}^3$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και κάθε σημείο τους αντιστοιχεί σε μια τριάδα αριθμών αλγεβρικά εξηρτημένων. Μια τέτοια τριάδα αριθμών ανήκει σε μια από τις αριθμήσιμες (υπερ)επιφάνεις τού $\mathbb{C}^3$ που ορίζονται από τις εξισώσεις τριών μεταβλητών με ρητούς συντελεστές. Σημειώνουμε πρώτα ότι, αν μια ευθεία όπως παραπάνω δεν ανήκει -εξ' ολοκλήρουσε κάποια από αυτές τις επιφάνειες, τότε υπάρχει σημείο της που να μην ανήκει σε καμιά από τις παραπάνω επιφάνειες. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, κάθε επιφάνεια τέμνει την ευθεία σε πεπερασμένο πλήθος σημείων και, επειδή το πλήθος τους είναι αριθμήσιμο, και τα σημεία τομής τους με την ευθεία θα είναι αριθμήσιμα. Ας εξετάσουμε τώρα το πλήθος των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και που ανήκουν σε κάποια από τις παραπάνω επιφάνειες. Σημειώνουμε ότι μια τέτοια ευθεία θα ανήκει σε κάποια ανάγωγη συνιστώσα τής επιφάνειας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επειδή το πλήθος των επιφανειών είναι αριθμήσιμο, το πλήθος των ανάγωγων συνιστωσών τους είναι και αυτό αριθμήσιμο. Θεωρούμε το επίπεδο $z = 1$. Οι ευθείες οι διερχόμενες από την αρχή των αξόνων αντιστοιχούν στα σημεία αυτού τού επιπέδου, με εξαίρεση τις 'ευθείες στο άπειρο'. Από την άλλη πλευρά, οι παραπάνω ανάγωγες συνιστώσες τέμνουν το επίπεδο σε αριθμήσιμο πλήθος καμπυλών. Επομένως, κάθε ευθεία που περνάει από κάποιο σημείο τού επιπέδου που είναι στο συμπλήρωμα αυτών των καμπυλών δεν ανήκει σε κάποια επιφάνεια. Σημειώνουμε τώρα, ότι τα σημεία τού παραπάνω επιπέδου αντιστοιχούν στα σημεία τού προβολικού χώρου που απαρτίζουν ένα από τα τρία βασικά κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα τού $\mathbb{P}^2$. Επομένως, κάθε σημείο αυτού τού κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου, με εξαίρεση ενός αριθμήσιμου πλήθους κλειστών υποσυνόλων (που αντιστοιχούν στις παραπάνω καμπύλες) εκπροσωπεί κάποια τριάδα αριθμών αλγεβρικά ανεξάρτητων πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Σκιαγραφούμε τώρα την απόδειξη για την περίπτωση κατά την οποία θεωρούμε οποιουδήποτε πλήθους σημεία. Οι αριθμοί $a_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, r$ είναι αλγεβρικά εξηρτημένοι αν ανήκουν σε κάποια από τις αριθμήσιμες υπερεπιφάνειες τού $\mathbb{C}^{3r}$ που ορίζονται από εξισώσεις με ρητούς συντελεστές. Σε κάθε συνιστώσα $\mathbb{C}^3$ τού $\mathbb{C}^{3r}$ θεωρούμε το επίπεδο $z = 1$. Το γινόμενο $A$ αυτών των επιπέδων είναι ένα υποσύνολο διάστασης $2r$, τα σημεία τού οποίου αντιστοιχούν σε ένα από τα βασικά κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα τού γινομένου $(\mathbb{P}^2)^{\times r}$. Τα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ που δεν ικανοποιούν την ζητούμενη συνθήκη είναι αυτά τα οποία για κάθε παράστασή τους το αντίστοιχο σύνολο των συντεταγμένων τους είναι αλγεβρικά εξηρτημένοι αριθμοί. Κάθε μια από τις διαφορετικές παραστάσεις μιας $r$-άδας σημείων τού προβολικού χώρου αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό υπόχωρο τού $\mathbb{C}^{3r}$ διάστασης $r$. Επομένως, αυτός ο γραμμικός υπόχωρος θα πρέπει να μην ανήκει σε καμία από τις παραπάνω υπερεπιφάνειες. Όπως και στην περίπτωση κατά την οποία $r = 1$, βλέπουμε ότι για τα σημεία τού $A$, τα οποία δεν ανήκουν στην τομή τού $A$ με τις ανάγωγες συνιστώσες των παραπάνω υπερεπιφανειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, ικανοποιούν τη ζητούμενη συνθήκη. Επομένως, υπάρχει στο διατεταγμένο γινόμενο ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο, με εξαίρεση αριθμησίμου πλήθους κλειστά υποσύνολα, κάθε σημείο τού οποίου ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη. Η εικόνα αυτού τού συνόλου στο συμμετρικό γινόμενο είναι σύνολο τής ιδίας μορφής, διότι η αντίστοιχη απεικόνιση είναι ανοικτή και κλειστή ως πεπερασμένη απεικόνιση. Έτσι φτάνουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

Στην παράγραφο 3.2 θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση, βλ. θεώρημα 3.2.2.

($\star$) *Εστω $r$ ένας φυσικός αριθμός ο οποίος είναι τέλειο τετράγωνο (δηλ. $r = s^2$, όπου $s \in \mathbb{N}$) και, επίσης, $r > 9$. Έστω ότι τα $P_1, P_2, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου ευρισκόμενα σε γενική θέση. Αν μια καμπύλη τού επιπέδου βαθμού $d$ διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m > 0$, τότε $d > \sqrt{r}\, m$.*

Σε ότι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_r$, όπου $r = s^2$ και $r > 9$, είναι γενικά σημεία τού επιπέδου ως προς αμφότερες τις προαναφερθείσες ιδιότητες. Αυτό είναι δυνατό διότι η τομή δύο κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων (με εξαίρεση αριθμησίμου πλήθους κλειστά υποσύνολα) είναι πάλι τής ίδιας μορφής.

Έστω $p_j$ το ομογενές πρώτο ιδεώδες τού $P_j$, $j = 1, \ldots, r$, στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z]$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ (όπου με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων), θέτουμε $\mathcal{P}_m = \bigcap_{j=1}^{r} p_j^m$.

**Πρόταση 3.1.1.** *Για κάθε φυσικό αριθμό $m$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathcal{P}_m^n \neq \mathcal{P}_{mn}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το ιδεώδες $\mathcal{P}_m$ αποτελείται από τα πολυώνυμα τού

$\mathbb{C}[x,y,z]$ που μηδενίζονται σε κάθε σημείο $P_j,\ j=1,\ldots,r$, με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Συμβολίζουμε ως $\mathcal{L}_d$ το σύνολο των επίπεδων καμπυλών τού $\mathbb{P}^2$ βαθμού $d$ που διέρχονται από κάθε σημείο $P_j,\ j=1,\ldots,r$, με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Διατηρώντας τον παραπάνω συμβολισμό, αυτό το σύνολο αποτελεί έναν προβολικό υπόχωρο τού $\mathbb{P}^N$ διάστασης

$$\dim \mathcal{L}_d \geq \frac{d^2+3d-rm^2-rm}{2}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, θέτουμε $d_0(m)=\min\{\deg f, f\in \mathcal{P}_m\}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{d_0(m)-1}=\emptyset &\implies \dim \mathcal{L}_{d_0(m)-1}=-1\\
&\implies (d_0(m)-1)^2+3(d_0(m)-1)-rm^2-rm<0\\
&\implies (\frac{d_0(m)}{m})^2+\frac{d_0(m)}{m^2}-\frac{2}{m^2}-r-\frac{r}{m}<0\\
&\implies (\frac{d_0(m)}{m})^2<r+\frac{r}{m}+\frac{2}{m^2}\\
&\implies \frac{d_0(m)}{m}<\sqrt{r+\frac{r}{m}+\frac{2}{m^2}}\,.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ᾽ όψιν και την $(\star)$, έχουμε τελικά

$$\sqrt{r}<\frac{d_0(m)}{m}<\sqrt{r+\frac{r}{m}+\frac{2}{m^2}}\,,$$

άρα

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d_0(m)}{m}=\sqrt{r}\,.$$

Έστω τώρα τυχόν $m\in\mathbb{N}$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, έχουμε $\frac{d_0(m)}{m}>\sqrt{r}$ και $\lim_{n\to\infty}\frac{d_0(mn)}{mn}=\sqrt{r}$, άρα υπάρχει φυσικός αριθμός $n$, ο οποίος εξαρτάται από τον $m$, τέτοιος ώστε

$$\frac{d_0(mn)}{mn}<\frac{d_0(m)}{m}\Rightarrow d_0(mn)<nd_0(m).$$

Όμως

$$nd_0(m)=n\min\{\deg f, f\in\mathcal{P}_m\}=\min\{\deg f, f\in\mathcal{P}_m^n\},$$

οπότε,

$$\min\{\deg f, f\in\mathcal{P}_{mn}\}<\min\{\deg f, f\in\mathcal{P}_m^n\}\implies \mathcal{P}_{mn}\neq\mathcal{P}_m^n.$$

□

Προχωρούμε τώρα στην κατασκευή τού παραδείγματος. Έστω ότι τα $\alpha_{ij}, i=1,2,3,\ j=1,\ldots,r$, είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία πάνω από το $\mathbb{Q}$. Τότε τα σημεία $P_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\alpha_{3j})$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου ευρισκόμενα σε γενική θέση. Έστω $V^\star$ ο διανυσματικός χώρος διάστασης $r$ πάνω από το $\mathbb{C}$ και έστω $V$ ο διανυσματικός υπόχωρος τού $V^\star$ που είναι κάθετος στα διανύσματα $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir})$, $i = 1, 2, 3$. Η διάσταση τού $V$ είναι $r - 3$. Έστω $\mathcal{S} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος $2r$ μεταβλητών πάνω από το $\mathbb{C}$ και έστω $\mathcal{G}$ η υποομάδα τής $GL_{2r}(\mathbb{C})$ που αποτελείται από τούς πίνακες τής μορφής:

$$g = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & c_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_r & 0 & 0 & \cdots & c_r b_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_r \end{pmatrix}$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $c_1 c_2 \cdots c_r = 1$ και $(b_1, b_2, \ldots, b_r) \in V$. Ο αντίστοιχος $\mathbb{C}$-γραμμικός μετασχηματισμός των $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ είναι ο $\sigma_g$ με

$$\sigma_g(x_j) = c_j(x_j + b_j y_j),\ j = 1, \ldots, r$$

και

$$\sigma_g(y_j) = c_j y_j \qquad\qquad ,\ j = 1, \ldots, r.$$

**Θεώρημα 3.1.1.** *Το σύνολο $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ των στοιχείων τού $\mathcal{S}$ που μένουν αναλλοίωτα ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $\mathbb{C}$-άλγεβρα.*

Η απόδειξη τού παραπάνω θεωρήματος στηρίζεται σε μια σειρά από προτάσεις και λήμματα. Εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό (όπου $y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r = y_1 \cdots y_{k-1} y_{k+1} \cdots y_r$):

$$\begin{aligned} t &= y_1 y_2 \cdots y_r, \\ u_j &= t/y_j = y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r,\ j = 1, 2, \ldots, r \\ v_j &= x_j u_j = x_j y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r,\ j = 1, 2, \ldots, r \\ w_i &= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε συχνά την εξής γνωστή πρόταση: *Έστω $k \subset F$ επέκταση σωμάτων με $\mathrm{tr.deg}_k F = n$. Αν υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in F$ με $F = k(a_1, \ldots, a_n)$ τότε τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι μια υπερβατική βάση τού $F$ πάνω από το $k$ και κατά συνέπεια είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $k$.* Αρχίζουμε με το ακόλουθο λήμμα

**Λήμμα 3.1.1.** *Έστω ότι $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r-3} \leq r$. Τότε*

1. *$\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r) = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-3}}, y_1, \ldots, y_r)$ και επομένως τα $w_1, w_2, w_3$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$.*

2. *Τα $v_1, \ldots, v_r$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$.*

3. $\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{r-3}}) = \mathbb{C}(v_1, \ldots, v_r)$.

*Απόδειξη.* Για το 1). Έστω $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_1 = 4, \ldots, i_{r-3} = r$. Ο εγκλεισμός $\mathcal{F} \supseteq \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ είναι προφανής. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

τότε

$$A \begin{pmatrix} u_1 x_1 \\ u_2 x_2 \\ u_3 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \sum_{j=4}^r \alpha_{1j} v_j \\ w_2 - \sum_{j=4}^r \alpha_{2j} v_j \\ w_3 - \sum_{j=4}^r \alpha_{3j} v_j \end{pmatrix}.$$

Τα $\alpha_{ij}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$ και επομένως η ορίζουσα τού πίνακα $A$ είναι μη μηδενική. Άρα

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 x_1 \\ u_2 x_2 \\ u_3 x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} w_1 - \sum_{j=4}^r \alpha_{1j} v_j \\ w_2 - \sum_{j=4}^r \alpha_{2j} v_j \\ w_3 - \sum_{j=4}^r \alpha_{3j} v_j \end{pmatrix}.$$

Επομένως, $u_i x_i \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ και αφού

$$1/u_i = \frac{1}{y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r} \in \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$$

έχουμε και

$$x_i = (1/u_i) u_i x_i \in \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r), \text{ για } i = 1, 2, 3.$$

Συνεπώς έχουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r).$$

Σημειώνουμε εδώ ότι από την τελευταία ισότητα συνάγουμε ότι οι γενήτορες $w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ τού $\mathcal{F}$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία πάνω από το $\mathbb{C}$, διότι $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 2r$. Συνεπώς και τα $w_1, w_2, w_3$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$.
Γιά το 2). Έστω ότι $\sum_I b_I v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r} = 0$, όπου $v_j = x_j y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r$, $j = 1, \ldots, r$. Τότε $b_I = 0$, διότι ο $v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r}$ είναι ο μοναδικός όρος τού αθροίσματος που περιέχει το $x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}$.
Γιά το 3). Η απόδειξη εδώ είναι ανάλογη εκείνης τού 1). □

**Πρόταση 3.1.2.** $\mathcal{S}^{\mathcal{G}} = \mathcal{S} \cap \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$.

*Απόδειξη.* Επεκτείνουμε με φυσιολογικό τρόπο τη δράση τής ομάδας $\mathcal{G}$ επί των στοιχείων τού σώματος κλασμάτων $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ τού $S$ και συμβολίζουμε ως $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ το υπόσωμα τού $\mathcal{F}$ που μένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση τής $\mathcal{G}$. Τότε $\mathcal{S}^{\mathcal{G}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$. Αρκεί οιπόν να δείξουμε ότι $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$.

Έστω $\mathcal{H}$ η υποομάδα τής $\mathcal{G}$ που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία τής $\mathcal{G}$, για τα οποία έχουμε $c_i = 1,\ i = 1, \ldots, r$. Τότε, αν $h \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sigma_h(w_i) &= \sigma_h(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \frac{t}{y_j}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}(x_j + b_j y_j)\frac{t}{y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \frac{t}{y_j} \ + \ t\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \frac{t}{y_j} \\
&= w_i,\ (i = 1, 2, 3),
\end{aligned}$$

διότι το διάνυσμα $(b_1, b_2, \ldots, b_r) \in V^\star$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir})$, άρα $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} b_j = 0,\ i = 1, 2, 3$. Επίσης έχουμε $\sigma_h(x_j) = x_j + b_j y_j$ και $\sigma_h(y_j) = y_j,\ j = 1, \ldots, r$. Επομένως, αν $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ είναι το υπόσωμα τού $\mathcal{F} = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ (βλ. λήμμα 3.1.1) που μένει αναλλοίωτο ως προς τη δράση τής $\mathcal{H}$, έχουμε

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r),$$

και αφού η $\mathcal{H}$ είναι υποομάδα τής $\mathcal{G}$, το $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ είναι υπόσωμα τού $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, οπότε

$$\mathcal{F}^{\mathcal{G}} \subset \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r).$$

Εξάλλου, επειδή $t = y_1 y_2 \cdots y_r$ έχουμε

$$\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r) = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t, y_2, \ldots, y_r).$$

Άρα τελικά

$$\mathcal{F}^{\mathcal{G}} \subset \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t, y_2, \ldots, y_r) \subset \mathcal{F}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το υπόσωμα τού $\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t, y_2, \ldots, y_r)$ που μένει αναλλοίωτο ως προς τη δράση τής $\mathcal{G}$ είναι το $\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$. Έστω $g \in \mathcal{G}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sigma_g(t) &= \sigma_g(y_1 y_2 \cdots y_r) = c_1 c_2 \cdots c_r y_1 y_2 \cdots y_r = t, \\
\sigma_g(w_i) &= \sigma_g(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \frac{t}{y_j}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \Big(c_j(x_j + b_j y_j)\Big)\frac{t}{c_j y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \frac{t}{y_j} \ = \ w_i,\ i = 1, 2, 3, \\
\sigma_g(y_j) &= c_j y_j,\ j = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Άρα το υπόσωμα τού $\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t, y_2, \ldots, y_r)$ που μένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση τής $\mathcal{G}$ είναι το $\mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$, επομένως $\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$. $\square$

Από το λήμμα 3.1.1 συμπεραίνουμε ότι τα $w_1, w_2, w_3$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$ και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ ως τον δακτύλιο των ομογενών συντεταγμένων τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$. Έστω $p_j \subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ το ομογενές πρώτο ιδεώδες τού σημείου $P_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j})$, $j = 1, \ldots, r$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n$, θέτουμε $\mathcal{P}_n = \bigcap_{j=1}^r p_j^n$.

**Πρόταση 3.1.3.** *Το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ είναι το σύνολο των στοιχείων τής μορφής $\sum \alpha_n t^{-n}$ (πεπερασμένο άθροισμα) με $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ και αν $n > 0$, $\alpha_n \in \mathcal{P}_n$.*

Για την απόδειξη τής πρότασης θα χρειαστούν τα παρακάτω λήμματα.

**Λήμμα 3.1.2.** *Κάθε στοιχείο τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ γράφεται στη μορφή $\sum \alpha_n t^{-n}$ (πεπερασμένο άθροισμα), όπου $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$.*

*Απόδειξη.* Όπως είδαμε στην απόδειξη τού λήμματος 3.1.1,

$$u_i x_i \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r].$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} x_i &= u_i x_i \frac{1}{u_i} \\ &= u_i x_i \frac{1}{y_1} \cdots \frac{1}{y_{i-1}} \frac{1}{y_{i+1}} \cdots \frac{1}{y_r} \\ &\in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, \frac{1}{y_1}, \ldots, \frac{1}{y_r}],\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r] \subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, 1/y_1, \ldots, 1/y_r],$$

οπότε

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r] \cap \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t) \subset$$
$$\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, x_4, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, 1/y_1, \ldots, 1/y_r] \cap \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r) =$$
$$\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r, 1/y_1, \ldots, 1/y_r].$$

Κατά συνέπεια,

$$\mathcal{S}^{\mathcal{G}} \subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r, 1/y_1, \ldots, 1/y_r]$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mathcal{G}} \cap \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t) &\subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, y_1, \ldots, y_r, 1/y_1, \ldots, 1/y_r] \cap \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t) \\ &= \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3, t, 1/t] \end{aligned}$$

και, ως εκ τούτου,

$$\mathcal{S}^{\mathcal{G}} \subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3][t, 1/t].$$

□

Έστω τώρα $\mathcal{R}_j = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]_{\langle y_j \rangle}$ η τοπικοποίηση τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ ως προς το πρώτο ιδεώδες του που παράγεται από το $y_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Στο σώμα κλασμάτων $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ τού τοπικού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]_{\langle y_j \rangle}$ ορίζεται φυσιολογικά μια διακριτή εκτίμηση $V_j$ ως εξής: αν $\frac{f}{g} \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $\kappa, \lambda$, τέτοιοι ώστε $\frac{f}{g} = \frac{f_1 y_j^{\kappa}}{g_1 y_j^{\lambda}}$, όπου $f_1, g_1 \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ και $MK\Delta(f_1, y_j) = MK\Delta(g_1, y_j) = 1$. Η εκτίμηση $V_j$ ορίζεται ως εξής: $V_j(\frac{f}{g}) = \kappa - \lambda$, και ο δακτύλιος εκτίμησης τής $V_j$ είναι ο $\mathcal{R}_j$. Συμβολίζουμε ως $m_j$ το μέγιστο ιδεώδες τού $\mathcal{R}_j$, δηλ. το σύνολο των στοιχείων $\frac{f}{g} \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ με $V_j(\frac{f}{g}) \geq 1$.

**Λήμμα 3.1.3.** *Υποθέτοντας ότι $z_j = \alpha_{3j} w_1 - \alpha_{1j} w_3$, $\bar{z}_j = \alpha_{3j} w_2 - \alpha_{2j} w_3$ είναι οι γεννήτορες τού ιδεώδους $p_j$ που είναι το ιδεώδες τού σημείου $P_j = [\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}]$, έχουμε τα ακόλουθα*

1. $\mathbb{C}[z_j, \bar{z}_j, w_3] = \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$.
2. $V_j(z_j) = V_j(\bar{z}_j) = 1$, $V_j(v_k) = 1 - \delta_{jk}$, $V_j(w_i) = 0$.
3. *Αν* $f(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$, *τότε*
$$f(w_1, w_2, w_3) + m_j = R(w_3) + m_j \,,$$
*για κάποιο πολυώνυμο* $R(w_3) \in \mathbb{C}[w_3]$.

*Απόδειξη.* Για το 1). Η ισότητα αυτή είναι προφανής από τον ορισμό των $z_j$, $\bar{z}_j$, διότι $\alpha_{3j} \neq 0$ λόγω τής αλγεβρικής ανεξαρτησίας των $\alpha_{ij}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.
Για το 2). Υπολογίζουμε την εκτίμηση $V_j$ στα $z_j, \bar{z}_j$. Έχουμε

$$z_j = \alpha_{3j} w_1 - \alpha_{1j} w_3 = \alpha_{3j} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{1k} x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r - \alpha_{1j} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{3k} x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r,$$

όπου $y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r = y_1 \cdots y_{k-1} y_{k+1} \cdots y_r$. Άρα

$$\begin{aligned} z_j &= \alpha_{3j}\alpha_{1j} x_j y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r + \alpha_{3j} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r} \alpha_{1k} x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r \\ &\quad -\alpha_{1j}\alpha_{3j} x_j y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r + \alpha_{1j} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r} \alpha_{3k} x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r \\ &= y_j \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r} (\alpha_{3j}\alpha_{1k} - \alpha_{1j}\alpha_{3k}) x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r. \end{aligned}$$

Ομοίως έχουμε

$$\bar{z}_j = y_j \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r} (\alpha_{3j}\alpha_{2k} - \alpha_{2j}\alpha_{3k}) x_k y_1 \cdots \check{y}_j \cdots y_r,$$

και επομένως $V_j(z_j) = V_j(\bar{z}_j) = 1$. Επίσης, $V_j(v_k) = 1 - \delta_{jk}$ διότι $v_k = x_k y_1 \cdots \check{y}_k \cdots y_r$. Τέλος, $w_i = \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} v_k$ και, ως εκ τούτου, $w_i + m_j = \alpha_{ij} v_j + m_j \neq m_j$, διότι $\alpha_{ij} \neq 0$. Άρα $V_j(w_i) \leq 1$. Από την άλλη, είναι προφανές ότι $w_i \in \mathcal{R}_j$, οπότε $V_j(w_i) = 0$.
Για το 3). Λόγω τού 1) μπορούμε να γράψουμε το $F$ στην μορφή

$$f(w_1, w_2, w_3) = g(z_j, \bar{z}_j, w_3) = g_1(z_j, \bar{z}_j, w_3) z_j + g_2(\bar{z}_j, w_3) \bar{z}_j + R(w_3).$$

Από το 2) συμπεραίνουμε ότι $F(w_1, w_2, w_3) + m_j = R(w_3) + m_j$. □

**Λήμμα 3.1.4.** *Αν $f \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε $V_j(f) \geq n$ αν και μόνο αν $f \in p_j^n$.*

*Απόδειξη.* Έστω $n$ είναι ένας φυσικός αριθμός. Το ιδεώδες $p_j^n$ παράγεται από τα στοιχεία

$$z_j^n,\ z_j^{n-1}\bar{z}_j, \ldots, z_j \bar{z}_j^{n-1},\ \bar{z}_j^n.$$

Έτσι, αν $f \in p_j^n$, τότε υπάρχουν πολυώνυμα $f_i \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$, $i = 0, \ldots, n$, έτσι ώστε το $f$ να γράφεται ως $f = \sum_{i=0}^n f_i\, z_j^i\, \bar{z}_j^{n-i}$. Άρα

$$\begin{aligned}
V_j(f) &= V_j\Big(\sum_{i=0}^n f_i\, z_j^i\, \bar{z}_j^{n-i}\Big) \geq \min_i\{V_j(f_i\, z_j^i\, \bar{z}_j^{n-i})\} \\
&= \min_i\{V_j(f_i) + V_j(z_j^i) + V_j(\bar{z}_j^{n-i})\} \\
&= \min_i\{V_j(f_i) + iV_j(z_j) + (n-i)V_j(\bar{z}_j)\} = \min_i\{V_j(f_i) + i + n - i\} \\
&= \min_i\{V_j(f_i) + n\} \geq n.
\end{aligned}$$

Χάριν ευκολίας και χωρίς βλάβη τής γενικότητας αποδεικνύουμε το αντίστροφο στην περίπτωση κατά την οποία $j = 1$, εφαρμόζοντας επαγωγή ως προς $n$. Για $n = 1$, έστω $f \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ με $V_1(f) \geq 1$. Από το λήμμα 3.1.3 έχουμε ότι $\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3] = \mathbb{C}[z_1, z_2, w_3]$ και άρα

$$f = g_1 z_1 + g_2 \bar{z}_1 + R(w_3)\,,$$

με $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ και $R(w_3) \in \mathbb{C}[w_3]$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $R = 0$.

Το πολυώνυμο $R$ είναι τής μορφής $R(w_3) = \sum_l c_l w_3^l$, $c_l \in \mathbb{C}$. Αφού $V_1(f) \geq 1$, το $y_1$ διαιρεί το $f$ στον δακτύλιο $\mathcal{R}_1$. Επίσης, το $y_1$ διαιρεί τα $z_1, \bar{z}_1$, οπότε τελικά το $y_1$ διαιρεί το $R$ στον $\mathcal{R}_1$. Επομένως,

$$R(w_3) + m_1 = m_1\,,$$

όπου $m_1$ είναι το μέγιστο ιδεώδες τού $\mathcal{R}_1$. Όμως

$$\begin{aligned} w_3 + m_1 &= (\alpha_{31}x_1y_2\cdots y_r + y_1\sum_{k=2}^{r}\alpha_{3k}x_ky_2\cdots y_r) + m_1 \\ &= \alpha_{31}x_1y_2\cdots y_r + m_1 \Longrightarrow \\ R(w_3) + m_1 &= \sum_l c_l\alpha_{31}^l x_1^l y_2^l\cdots y_r^l + m_1 = \sum_l c_l\alpha_{31}^l v_1^l + m_1. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\sum_l c_l\alpha_{31}^l x_1^l y_2^l \cdots y_r^l + m_1 = m_1$$

και επομένως

$$\sum_l c_l\alpha_{31}^l x_1^l y_2^l \cdots y_r^l = y_1\frac{f(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r)}{g(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r)}, \quad \text{όπου } (g,y_1)=1.$$

Για να ισχύει το τελευταίο θα πρέπει $y_1 \mid \sum_l c_l\alpha_{31}^l x_1^l y_2^l \cdots y_r^l$ που συνεπάγεται ότι το $\sum_l c_l\alpha_{31}^l x_1^l y_2^l \cdots y_r^l$ πρέπει να είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Επομένως,

$$c_l\alpha_{31}^l = 0,\ \forall l \Longrightarrow c_l = 0, \forall l \Longrightarrow R = 0$$

(το $\alpha_{31}$ είναι μη μηδενικό λόγω τής αλγεβρικής ανεξαρτησίας των $\alpha_{ij}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$). Συνεπώς

$$f = z_1P + \bar{z}_1\bar{P}, \quad P,\bar{P} \in \mathbb{C}[w_1,w_2,w_3] \Rightarrow f \in p_1.$$

Άρα για $n=1$ το ζητούμενο ισχύει.

Υποθέτουμε τώρα ότι αυτό ισχύει για φυσικούς μικρότερους ή ίσους από $n-1$. Όπως είδαμε στα προηγούμενα,

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1\sum_{k=2}^{r}(\alpha_{31}\alpha_{1k} - \alpha_{11}\alpha_{3k})x_ky_2\cdots\check{y}_k\cdots y_r, \\ \bar{z}_1 &= y_1\sum_{k=2}^{r}(\alpha_{31}\alpha_{2k} - \alpha_{21}\alpha_{3k})x_ky_2\cdots\check{y}_k\cdots y_r. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{31}\alpha_{1k} - \alpha_{11}\alpha_{3k}, \quad k=2,\ldots,r, \\ \bar{\alpha}_k &= \alpha_{31}\alpha_{2k} - \alpha_{21}\alpha_{3k}, \quad k=2,\ldots,r. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1\sum_{k=2}^{r}\alpha_kx_ky_2\cdots\check{y}_k\cdots y_r = y_1\sum_{k=2}^{r}\alpha_kv_k, \\ \bar{z}_1 &= y_1\sum_{k=2}^{r}\bar{\alpha}_kx_ky_2\cdots\check{y}_k\cdots y_r = y_1\sum_{k=2}^{r}\bar{\alpha}_kv_k. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{z_1}{y_1} = \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \frac{v_k}{y_1}, \\ \bar{Z}_1 &= \frac{\bar{z}_1}{y_1} = \sum_{k=2}^{r} \bar{\alpha}_k \frac{v_k}{y_1}. \end{aligned}$$

Έστω $f \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ με $V_1(f) \geq n$. Τότε $V_1(f) \geq n-1$, οπότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $f \in p_1^{n-1}$. Επομένως, υπάρχουν πολυώνυμα $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$, τέτοια ώστε το $f$ να γράφεται ως

$$f = f_0 z_1^{n-1} + f_1 z_1^{n-2} \bar{z}_1 + \cdots + f_{n-1} \bar{z}_1^{n-1}.$$

Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχουν πολυώνυμα $P_i, \bar{P}_i \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ και $R_i \in \mathbb{C}[w_3]$, τέτοια ώστε το $f_i$ να γράφεται ως

$$f_i = z_1 P_i + \bar{z}_1 \bar{P}_i + R_i$$

(από το λήμμα 3.1.3 ). Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} f &= (z_1 P_0 + \bar{z}_1 \bar{P}_0 + R_0) z_1^{n-1} + (z_1 P_1 + \bar{z}_1 \bar{P}_1 + R_1) z_1^{n-2} \bar{z}_1 + \cdots \\ &+ (z_1 P_{n-1} + \bar{z}_1 \bar{P}_{n-1} + R_{n-1}) \bar{z}_1^{n-1} \end{aligned}$$

και

$$f = g + R_0(w_3) z_1^{n-1} + R_1(w_3) z_1^{n-2} \bar{z}_1 + \cdots + R_{n-1}(w_3) \bar{z}_1^{n-1}, \text{ όπου } g \in p_1^n.$$

Θα δείξουμε ότι $R_0 = R_1 = \cdots = R_{n-1} = 0$. Αφού $V_1(f) \geq n$, το $y_1^n$ διαιρεί το $f$ στον δακτύλιο $\mathcal{R}_1$ και επειδή $g \in p_1^n$, το $y_1^n$ διαιρεί και το $g$. Επομένως, το $y_1^n$ διαιρεί το $R_0 z_1^{n-1} + R_1 z_1^{n-2} \bar{z}_1 + \cdots + R_{n-1} \bar{z}_1^{n-1}$ στον $\mathcal{R}_1$. Όμως

$$\begin{aligned} R_0 z_1^{n-1} + R_1 z_1^{n-2} \bar{z}_1 + \cdots + R_{n-1} \bar{z}_1^{n-1} &= \\ R_0 y_1^{n-1} Z_1^{n-1} + R_1 y_1^{n-2} Z_1^{n-2} y_1 \bar{Z}_1 + \cdots + R_{n-1} y_1^{n-1} \bar{Z}_1^{n-1} &= \\ y_1^{n-1} (R_0 Z_1^{n-1} + R_1 Z_1^{n-2} \bar{Z}_1 + \cdots + R_{n-1} \bar{Z}_1^{n-1}) & \end{aligned}$$

άρα το $y_1$ διαιρεί το $R_0 Z_1^{n-1} + R_1 Z_1^{n-2} \bar{Z}_1 + \cdots + R_{n-1} \bar{Z}_1^{n-1}$ στον δακτύλιο $\mathcal{R}_1$. Επομένως,

$$R_0(w_3) Z_1^{n-1} + R_1(w_3) Z_1^{n-2} \bar{Z}_1 + \cdots + R_{n-1}(w_3) \bar{Z}_1^{n-1} + m_1 = m_1.$$

Γράφουμε τα πολυώνυμα $R_i(w_3)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ στην μορφή $R_i(w_3) = \sum_l c_{il} w_3^l$. Όπως είδαμε παραπάνω, έχουμε

$$R_i(w_3) + m_1 = \sum_l c_{il} \alpha_{31}^l v_1^l + m_1 = \sum_l C_{il} v_1^l + m_1,$$

όπου $C_{il} = c_{il}\alpha_{31}^l$. Συνεπώς,

$$R_0(w_3)Z_1^{n-1} + R_1(w_3)Z_1^{n-2}\bar{Z}_1 + \cdots + R_{n-1}(w_3)\bar{Z}_1^{n-1} + m_1 = m_1 \Longrightarrow$$

$$\sum_l C_{0l}v_1^l Z_1^{n-1} + \sum_l C_{1l}v_1^l Z_1^{n-2}\bar{Z}_1 + \cdots + \sum_l C_{n-1l}v_1^l \bar{Z}_1^{n-1} + m_1 = m_1$$

και άρα

$$\sum_l C_{0l}v_1^l Z_1^{n-1} + \sum_l C_{1l}v_1^l Z_1^{n-2}\bar{Z}_1 + \cdots + \sum_l C_{n-1l}v_1^l \bar{Z}_1^{n-1} = 0,$$

διότι το πολυώνυμο δεν περιέχει το $y_1$. Πολλαπλασιάζοντας με το $y_1^{n-1}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_l C_{0l}v_1^l z_1^{n-1} + \sum_l C_{1l}v_1^l z_1^{n-2}\bar{z}_1 + \cdots + \sum_l C_{n-1l}v_1^l \bar{z}_1^{n-1} = 0.$$

Από το λήμμα 3.1.1 έχουμε ότι τα $w_1, w_2, w_3, v_1$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Επίσης, από τον ορισμό των $z_1, z_2$ έχουμε ότι

$$\mathbb{C}(z_1, z_2, w_3, v_1) = \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, v_1).$$

Συνεπώς, τα $z_1, z_2, v_1$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ και άρα θα πρέπει $C_{il} = 0$, $\forall i = 0, \ldots, n-1$, $\forall l$. Αφού $C_{il} = c_{il}\alpha_{31}^l$ και $\alpha_{31} \neq 0$ παίρνουμε ότι $c_{il} = 0$, $\forall i = 0, \ldots, n-1$, $\forall l$ και επομένως, $R_i = 0$, $\forall i = 0, \ldots, n-1$. $\square$

**Λήμμα 3.1.5.** *Αν $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$, τότε $V_j(\sum \alpha_n t^{-n}) = \min_n\{V_j(\alpha_n t^{-n})\}$ (όπου το άθροισμα θεωρείται πεπερασμένο).*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι αν υπάρχουν $m_0, n_0$ με $m_0 \neq n_0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$V_j(\alpha_{m_0}t^{-m_0}) = V_j(\alpha_{n_0}t^{-n_0}) = \min_n\{V_j(\alpha_n t^{-n})\} = s_0$$

οπότε

$$V_j(\alpha_{m_0}t^{-m_0} + \alpha_{n_0}t^{-n_0}) = s_0.$$

Έστω λοιπόν $m_0, n_0$ όπως παραπάνω. Τότε

$$V_j(\alpha_{m_0}t^{-m_0}) = s_0 \Rightarrow V_j(\alpha_{m_0}) - m_0 = s_0 \Rightarrow V_j(\alpha_{m_0}) = m_0 + s_0$$

και ομοίως

$$V_j(\alpha_{n_0}) = n_0 + s_0.$$

Από το λήμμα 3.1.4 συνάγουμε ότι $\alpha_{m_0} \in p_j^{m_0+s_0} \setminus p_j^{m_0+s_0+1}$ και $\alpha_{n_0} \in p_j^{n_0+s_0} \setminus p_j^{n_0+s_0+1}$. Άρα

$$\alpha_{m_0} = \sum_{\kappa+\lambda=m_0+s_0} g_{\kappa\lambda} z_j^{\kappa}\bar{z}_j^{\lambda},\ g_{\kappa\lambda} \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$$

με $\min_{\kappa\lambda}\{V_j(g_{\kappa\lambda})\} = 0$ (διότι αν $\min_{\kappa\lambda}\{V_j(g_{\kappa\lambda})\} \geq 1$, τότε $V_j(g_{\kappa\lambda}) \geq 1$, $\forall \kappa, \lambda$, οπότε

$$V_j(g_{\kappa\lambda} z_j^{\kappa} \bar{z}_j^{\lambda}) \geq 1 + \kappa + \lambda = 1 + m_0 + s_0,\ \forall \kappa, \lambda$$

και

$$V_j(\alpha_{m_0}) \geq 1 + m_0 + s_0,$$

που είναι άτοπο διότι - σύμφωνα με το λήμμα 3.1.4 - $\alpha_{m_0} \in p_j^{m_0+s_0+1}$. Ομοίως

$$\alpha_{n_0} = \sum_{\mu+\nu=n_0+s_0} h_{\mu\nu} z_j^{\mu} \bar{z}_j^{\nu},\ h_{\mu\nu} \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$$

με $\min_{\mu,\nu}\{V_j(h_{\mu\nu})\} = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} \alpha_{m_0} t^{-m_0} + \alpha_{n_0} t^{-n_0} &= t^{s_0}(\alpha_{m_0} t^{-(m_0+s_0)} + \alpha_{n_0} t^{-(n_0+s_0)}) \\ &= t^{s_0}\left(\sum_{\kappa+\lambda=m_0+s_0} g_{\kappa\lambda} z_j^{\kappa} \bar{z}_j^{\lambda} t^{-(\kappa+\lambda)} + \sum_{\mu+\nu=n_0+s_0} h_{\mu\nu} z_j^{\mu} \bar{z}_j^{\nu} t^{-(\mu+\nu)}\right) \\ &= t^{s_0}\left(\sum_{\kappa+\lambda=m_0+s_0} g_{\kappa\lambda} (\frac{z_j}{t})^{\kappa} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\lambda} + \sum_{\mu+\nu=n_0+s_0} h_{\mu\nu} (\frac{z_j}{t})^{\mu} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\nu}\right). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$F(\frac{z_j}{t}, \frac{\bar{z}_j}{t}) = \sum_{\kappa+\lambda=m_0+s_0} g_{\kappa\lambda} (\frac{z_j}{t})^{\kappa} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\lambda} + \sum_{\mu+\nu=n_0+s_0} h_{\mu\nu} (\frac{z_j}{t})^{\mu} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\nu}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $V_j(F(\frac{z_j}{t}, \frac{\bar{z}_j}{t})) = 0$.

Υποθέτουμε ότι το τελευταίο δεν ισχύει, δηλαδή ότι $V_j(F(\frac{z_j}{t}, \frac{\bar{z}_j}{t})) \geq 1$ και θα φτάσουμε σε άτοπο. Θα έχουμε τότε ότι

$$F(\frac{z_j}{t}, \frac{\bar{z}_j}{t})\ +\ m_j = m_j\,,$$

δηλαδή

$$\sum_{\kappa+\lambda=m_0+s_0} g_{\kappa\lambda} (\frac{z_j}{t})^{\kappa} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\lambda} + \sum_{\mu+\nu=n_0+s_0} h_{\mu\nu} (\frac{z_j}{t})^{\mu} (\frac{\bar{z}_j}{t})^{\nu}\ +\ m_j = m_j. \tag{3.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $V_j(z_j) = V_j(\bar{z}_j) = V_j(t) = 1$ και άρα $V_j(\frac{z_j}{t}) = V_j(\frac{\bar{z}_j}{t}) = 0$. Επίσης, $V_j(g_{\kappa\lambda}) \geq 0$, $V_j(h_{\mu\nu}) \geq 0$ και

$$\min_{\kappa,\lambda}\{V_j(g_{\kappa\lambda})\} = 0,\ \min_{\mu,\nu}\{V_j(h_{\mu\nu})\} = 0.$$

Από το λήμμα 3.1.3 έχουμε $g_{\kappa\lambda} + m_j = R_{\kappa\lambda}(w_3) + m_j$. Αν $R_{\kappa\lambda}(w_3) = \sum_l c_{\kappa\lambda l} w_3^l$, τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη τού λήμματος 3.1.4, έχουμε

$$g_{\kappa\lambda} + m_j = R_{\kappa\lambda}(w_3) + m_j = \sum_l c_{\kappa\lambda l} \alpha_{3j}^l v_j^l + m_j = \sum_l C_{\kappa\lambda l} v_j^l + m_j,$$

όπου $C_{\kappa\lambda l} = c_{\kappa\lambda l}\alpha_{3j}^l$. Το $\min_{\kappa,\lambda}\{V_j(g_{\kappa\lambda})\} = 0$ ισοδυναμεί με το ότι για κάποια $\kappa_0, \lambda_0, l_0$ έχουμε $C_{\kappa_0\lambda_0 l_0} \neq 0$. Πράγματι, αν $C_{\kappa\lambda l} = 0$ για κάθε $\kappa, \lambda, l$ τότε $R_{\kappa\lambda}(w_3) + m_j = m_j$ για κάθε $\kappa, \lambda$ και επομένως $V_j(g_{\kappa\lambda}) \geq 1$ για κάθε $\kappa, \lambda$. Από την άλλη, αν για κάποια $\kappa_0, \lambda_0, l_0$ έχουμε $C_{\kappa_0\lambda_0 l_0} \neq 0$, τότε $R_{\kappa_0\lambda_0}(w_3) + m_j \neq m_j$ και επομένως $V_j(g_{\kappa_0\lambda_0}) = 0$. Πράγματι, διαφορετικα θα είχαμε $\sum_l C_{\kappa_0\lambda_0 l}v_j^l + m_j = m_j$ και άρα $y_j \mid \sum_l C_{\kappa_0\lambda_0 l}v_j^l$ που συνεπάγεται ότι $\sum_l C_{\kappa_0\lambda_0 l}v_j^l = 0$, διότι δεν περιέχει το $y_1$. Όμως τότε $C_{\kappa_0\lambda_0 l} = 0, \forall l$, διότι το $v_j$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο πάνω από το $\mathbb{C}$ (βλ. λήμμα 3.1.1), πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ομοίως έχουμε ότι $h_{\mu\nu} + m_j = S_{\mu\nu}(w_3) + m_j$ με

$$h_{\mu\nu} + m_j = S_{\mu\nu}(w_3) + m_j = \sum_m d_{\mu\nu m}\alpha_{3j}^m v_j^m + m_j = \sum_m D_{\mu\nu l}v_j^m + m_j,$$

όπου $D_{\mu\nu m} = d_{\mu\nu m}\alpha_{3j}^m$ και $D_{\mu_0\nu_0 m_0} \neq 0$ για κάποια

$\mu_0, \nu_0, m_0$. Από τα παραπάνω, η εξίσωση 3.1 γίνεται

$$\sum_{l,\ \kappa+\lambda=m_0+s_0} C_{\kappa\lambda l}v_j^l(\frac{z_j}{t})^\kappa(\frac{\bar{z}_j}{t})^\lambda + \sum_{m,\ \mu+\nu=n_0+s_0} D_{\mu\nu l}v_j^m(\frac{z_j}{t})^\mu(\frac{\bar{z}_j}{t})^\nu \ + \ m_j = m_j.$$

Το παραπάνω πολυώνυμο δεν περιέχει το $y_j$ και έτσι παίρνουμε ότι

$$\sum_{l,\ \kappa+\lambda=m_0+s_0} C_{\kappa\lambda l}v_j^l(\frac{z_j}{t})^\kappa(\frac{\bar{z}_j}{t})^\lambda + \sum_{m,\ \mu+\nu=n_0+s_0} D_{\mu\nu l}v_j^m(\frac{z_j}{t})^\mu(\frac{\bar{z}_j}{t})^\nu = 0 \quad (3.2)$$

Ισχυριζόμαστε τωρα ότι τα $z_j, \bar{z}_j, v_j, t$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Πράγματι, από το λήμμα 3.1.1 έχουμε ότι τα $w_1, w_2, w_3, x_j, y_1, \ldots, y_r$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Από τον ορισμό των $z_j, \bar{z}_j$ συμπεραίνουμε ότι τα $z_j, \bar{z}_j, w_3, x_j, y_1, \ldots, y_r$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη τής γενικότητας, ότι $j \neq r$. Επειδή $y_r = \frac{t}{y_1 \cdots y_{r-1}}$, τα $z_j, \bar{z}_j, w_3, x_j, t, y_1, \ldots, y_{r-1}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Επίσης, επειδή $x_j = \frac{y_j}{t}v_j$, και τα $z_j, \bar{z}_j, w_3, v_j, t, y_1, \ldots, y_{r-1}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$ και επομένως το ίδιο ισχύει και για τα $z_j, \bar{z}_j, v_j, t$. Συνεπώς, η τελευταία σχέση 3.2 δίδει $C_{\kappa\lambda l} = 0$, για κάθε $\kappa, \lambda, l$ και $D_{\mu\nu l} = 0$ για κάθε $\mu, \nu, l$ (υπενθυμίζουμε ότι $m_0 \neq n_0$). Έτσι φτάσαμε σε άτοπο και το λήμμα αποδείχθηκε. □

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη τής πρότασης 3.1.3.

*Απόδειξη.* Έστω ένα στοιχείο τής μορφής $\sum \alpha_n t^{-n}$ (πεπερασμένο άθροισμα), με $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ και αν $n > 0$, $\alpha_n \in \mathcal{P}_n$. Προφανώς, $\sum \alpha_n t^{-n} \in \mathbb{C}(w_1, w_2, w_3, t)$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\sum \alpha_n t^{-n} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$, διότι αν $n > 0$, τότε $\alpha_n \in \mathcal{P}_n$ και $\alpha_n \in p_j^n$, $\forall j = 1, \ldots, r$. Άρα για κάθε $j$ το $y_j^n$ διαιρεί το $\alpha_n$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$, και, ως εκ τούτου, το $t^n$ διαιρεί το $\alpha_n$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$. Επομένως

$$\alpha_n t^{-n} \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r], \forall n,$$

οπότε

$$\sum \alpha_n t^{-n} \in \mathbb{C}(w_1,w_2,w_3,t) \cap \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r] = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}.$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι το σύνολο των στοιχείων τής μορφής $\sum \alpha_n t^{-n}$ (πεπερασμένο άθροισμα), με $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1,w_2,w_3]$ και με $\alpha_n \in \mathcal{P}_n$ όταν $n > 0$, είναι υποσύνολο τού $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$.

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο $s \in \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Τότε από το λήμμα 3.1.2 έχουμε $s = \sum \alpha_n t^{-n}$ (πεπερασμένο άθροισμα) με $\alpha_n \in \mathbb{C}[w_1,w_2,w_3]$. Για κάθε $j = 1,\ldots,r$, έχουμε $V_j(s) \geq 0$, διότι $s \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r]$. Άρα

$$V_j(\sum \alpha_n t^{-n}) \geq 0,\ j = 1,\ldots,r.$$

Όμως, λόγω τού λήμματος 3.1.5,

$$V_j(\sum \alpha_n t^{-n}) = \min_n\{V_j(\alpha_n t^{-n})\}.$$

Άρα για κάθε $j = 1,\ldots,r$ έχουμε

$$\begin{aligned}\min_n\{V_j(\alpha_n t^{-n})\} \geq 0 &\implies V_j(\alpha_n t^{-n}) \geq 0, \forall n\\ &\implies V_j(\alpha_n) - n \geq 0, \forall n \implies V_j(\alpha_n) \geq n, \forall n.\end{aligned}$$

Επομένως, αν $n > 0$, σύμφωνα με τα παραπάνω και το λήμμα 3.1.4, έχουμε $\alpha_n \in p_j^n$, $\forall j = 1,\ldots,r$, άρα αν $n > 0$, $\alpha_n \in \mathcal{P}_n$. □

**Πρόταση 3.1.4.** *Έστω $\mathcal{D}$ μια ακέραια περιοχή και έστω $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots$ μια ακολουθία ιδεωδών τής $\mathcal{D}$, τέτοια ώστε $\mathcal{B}_{i+1} \subset \mathcal{B}_i$, $i = 1,2,\ldots$ και $\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{i+j}$, $i,j = 1,2,\ldots$. Έστω $t$ ένα υπερβατικό πάνω στοιχείο από την $\mathcal{D}$ και έστω $\mathcal{D}^\star$ το σύνολο των στοιχείων τής μορφής $\sum b_j t^{-j}$ (πεπερασμένο άθροισμα), με $b_j \in \mathcal{D}$ και αν $j > 0$, $b_j \in \mathcal{B}_j$. Τότε το $\mathcal{D}^\star$ αποτελεί ακέραια περιοχή. Ακόμη, αν η $\mathcal{D}^\star$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη πάνω από την $\mathcal{D}$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $m$, τέτοιος ώστε $\mathcal{B}_m^l = \mathcal{B}_{ml}$, για κάθε φυσικό αριθμό $l$.*

*Απόδειξη.* Έστω $d_1,d_2 \in \mathcal{D}^\star$. Τα $d_1,d_2$ γράφονται ως $d_1 = \sum_j b_j^1 t^{-j}$ και $d_2 = \sum_j b_j^2 t^{-j}$, με $b_j^1, b_j^2 \in \mathcal{D}$ (και αν $j > 0$, $b_j^1, b_j^2 \in \mathcal{B}_j$). Εξάλλου, $d_1 - d_2, d_1 d_2 \in \mathcal{D}^\star$. Πράγματι, είναι προφανές ότι

$$d_1 - d_2 = \sum_j (b_j^1 - b_j^2) t^{-j} \in \mathcal{D}^\star$$

και για το γινόμενο

$$d_1 d_2 = \sum_{i,j} b_i^1 b_j^2 t^{-(i+j)}$$

αρκεί να ελέγξουμε ότι αν $i+j>0$, τότε $b_i^1 b_j^2 \in \mathcal{B}_{i+j}$. Έστω λοιπόν $i,j$ με $i+j>0$. Τότε:

(i) αν $i,j>0$, τότε $b_i^1 \in \mathcal{B}_i$ και $b_j^2 \in \mathcal{B}_j$. Επομένως $b_i^1 b_j^2 \in \mathcal{B}_i\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{i+j}$, άρα $b_i^1 b_j^2 \in \mathcal{B}_{i+j}$ και

(ii) αν $i>0, j<0$, τότε $b_i^1 \in \mathcal{B}_i$, άρα $b_i^1 b_j^2 \in \mathcal{B}_i$ και αφού $i+j<i$, έχουμε $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{i+j}$, άρα $b_i^1 b_j^2 \in \mathcal{B}_{i+j}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{D}^\star$ είναι ένας δακτύλιος και μάλιστα υποδακτύλιος τού $\mathcal{D}[t,1/t]$. Ο $\mathcal{D}[t,1/t]$ είναι ακέραια περιοχή, διότι η $\mathcal{D}$ είναι ακέραια περιοχή, άρα και ο $\mathcal{D}^\star$ είναι ακέραια περιοχή. Σημειώνουμε ότι $t \in \mathcal{D}^\star$, ενώ $t^{-1} \in \mathcal{D}^\star \Leftrightarrow \mathcal{B}_i = \mathcal{D}, \forall i$. Εχουμε λοιπόν τούς εγκλεισμούς $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}[t] \subseteq \mathcal{D}^\star \subseteq \mathcal{D}[t,1/t]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ακέραια περιοχή $\mathcal{D}^\star$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη πάνω από την $\mathcal{D}$ και ότι οι $d_1, d_2, \ldots, d_\kappa$ είναι γεννήτορές της, δηλ. $\mathcal{D}^\star = \mathcal{D}[d_1,\ldots,d_\kappa]$. Κάθε ένα από τα $d_i$ γράφεται ως $d_i = \sum_j b_j^i t^{-j}$, οπότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $s$, τέτοιος ώστε η $\mathcal{D}^\star$ να παράγεται πάνω από την $\mathcal{D}$ από το $t$ και από στοιχεία τής μορφής $b_j t^{-j}$, με $b_j \in \mathcal{B}_j$, $0 \leq j \leq s$, δηλ. $\mathcal{D}^\star = \mathcal{D}[t, d_1 t^{-1}, \ldots, b_s t^{-s}]$ με $b_j \in \mathcal{B}_j$, $0 \leq j \leq s$. Έστω $n$ τυχαίος φυσικός αριθμός και $b_n$ στοιχείο τού $\mathcal{B}_n$. Τότε το $b_n t^{-n}$ είναι στοιχείο τής $\mathcal{D}^\star$, οπότε γράφεται ως άθροισμα στοιχείων τής μορφής $t^{n_0} c_1 (t^{-1})^{n_1} c_2 (t^{-2})^{n_2} \cdots c_s (t^{-s})^{n_s}$, με $n_i \geq 0$, $i=0,\ldots,s$ και $c_i \in \mathcal{B}_i^{n_i}$, $i=1,\ldots,s$. Επίσης, λόγω τής υπερβατικότητας τού $t$ πάνω από τον $\mathcal{D}$, θα πρέπει

$$1n_1 + 2n_2 + \ldots + sn_s = n + n_0 \geq n.$$

Αρα $b_n \in \sum \mathcal{B}_1^{n_1} \mathcal{B}_2^{n_2} \cdots \mathcal{B}_s^{n_s}$, όπου η άθροιση γίνεται πάνω από κάποια $n_1, n_2, \ldots, n_s$ με $1n_1 + 2n_2 + \cdots + sn_s \geq n$. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου $n \geq ss!$. Τότε,

$$1n_1 + 2n_2 + \ldots + sn_s \geq ss!$$

άρα, υπάρχει $t \in \{1,2,\ldots,s\}$, τέτοιο ώστε $tn_t \geq s!$. Συνεπώς,

$$\mathcal{B}_1^{n_1}\mathcal{B}_2^{n_2}\cdots\mathcal{B}_s^{n_s} = \mathcal{B}_t^{(s!/t)}\mathcal{B}_1^{n_1}\cdots\mathcal{B}_{t-1}^{n_{t-1}}\mathcal{B}_t^{n_t-(s!/t)}\mathcal{B}_{t+1}^{n_{t+1}}\cdots\mathcal{B}_s^{n_s} \subset \mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{n-s!}.$$

Πράγματι,

$$\mathcal{B}_t^{(s!/t)} = \underbrace{\mathcal{B}_t\mathcal{B}_t\cdots\mathcal{B}_t}_{s!/t} \subset \mathcal{B}_{\underbrace{t+t+\cdots+t}_{s!/t}} = \mathcal{B}_{s!}$$

και

$$\mathcal{B}_1^{n_1}\cdots\mathcal{B}_{t-1}^{n_{t-1}}\mathcal{B}_t^{n_t-(s!/t)}\mathcal{B}_{t+1}^{n_{t+1}}\cdots\mathcal{B}_s^{n_s} \subset$$

$$\mathcal{B}_{1n_1}\cdots\mathcal{B}_{(t-1)n_{t-1}}\mathcal{B}_{t[n_t-(s!/t)]}\mathcal{B}_{(t+1)n_{t+1}}\cdots\mathcal{B}_{sn_s} \subset \mathcal{B}_{1n_1+2n_2+\cdots+sn_s-s!} \subset \mathcal{B}_{n-s!}$$

διότι $1n_1+2n_2+\cdots+sn_s-s! \geq n-s!$ και η ακολουθία $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ είναι φθίνουσα. Άρα έχουμε δείξει ότι αν $n \geq ss!$ και $b_n \in \mathcal{B}_n$, τότε $b_n \in \mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{n-s!}$, δηλαδή αν

$n \geq ss!$, τότε $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{n-s!}$. Έστω ότι το $n$ είναι ένα τυχαίο πολλαπλάσιο τού $ss!$, δηλαδή $n = ss!l$, $l \in \mathbb{N}$. Τότε $n \geq ss!$ άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ss!l} &= \mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{ss!l-s!} = \mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{s!}\mathcal{B}_{ss!l-s!-s!} = \cdots \\ &= \mathcal{B}_{s!}^{s(l-1)}\mathcal{B}_{ss!l-[s(l-1)]s!} = \mathcal{B}_{s!}^{s(l-1)}\mathcal{B}_{ss!}. \end{aligned}$$

Όμως

$$\mathcal{B}_{s!}^{s(l-1)} = (\mathcal{B}_{s!}^{s})^{l-1} \subset \mathcal{B}_{ss!}^{l-1}$$

άρα,

$$\mathcal{B}_{s!}^{s(l-1)}\mathcal{B}_{ss!} \subset \mathcal{B}_{ss!}^{l-1}\mathcal{B}_{ss!} = \mathcal{B}_{ss!}^{l}.$$

Επομένως $\mathcal{B}_{ss!l} \subset \mathcal{B}_{ss!}^{l}$ και, ως εκ τούτου, $\mathcal{B}_{ss!l} = \mathcal{B}_{ss!}^{l}$ (ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει από την υπόθεσή μας), κάτι που αποδεικνύει το λήμμα θέτοντας $m = ss!$. □

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με την απόδειξη τού θεωρήματος 3.1.1.

*Απόδειξη.* Για την ακολουθία των ιδεωδών $\mathcal{P}_m$ τής ακέραιας περιοχής $\mathcal{D} = \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ που ορίσθηκε στην αρχή τής παραγράφου, ισχύουν τα εξής:
(i) $\mathcal{P}_{i+1} \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ και (ii) $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{i+j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$.
Από την πρόταση 3.1.3 συνπεραίνουμε ότι το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ ταυτίζεται με το $\mathcal{D}^\star$ τής πρότασης 3.1.4. Αν λοιπόν το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ ήταν πεπερασμένα παραγόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$, τότε θα ήταν πεπερασμένα παραγόμενο και πάνω από την ακέραια περιοχή $\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]$ ($\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3] \subset \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$), οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.1.4 θα υπήρχε φυσικός αριθμός $m$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathcal{P}_m^l = \mathcal{P}_{ml}$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Όμως αυτό δε μπορεί να ισχύει λόγω τής πρότασης 3.1.1. Άρα το $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $\mathbb{C}$-άλγεβρα. □

## 3.2 Το αντιπαράδειγμα τού Nagata - Γεωμετρικό μέρος

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ισχύ της πρότασης ($\star$) της παραγράφου 3.1. Χάριν απλότητος, θα αποδείξουμε πρώτα την ανάλογη πρόταση με το ασθενέστερο συμπέρασμα '$d \geq m\sqrt{r}$', βλ. Θεώρημα 3.2.1. Η πρόταση αυτή βρίσκεται στην εργασία [CK]. Η απόδειξη για την αυστηρή ανισότητα, που βρίσκεται στην εργασία [N2], είναι τεχνικά πολύ πιο δύσκολη και δίδεται στο θεώρημα 3.2.2. Αρχίζουμε με κάποια λήμματα.

**Λήμμα 3.2.1.** *Έστω $X$ μια επιφάνεια Riemann γένους $g > 0$ και έστω $L_0$ ένα στοιχείο τής Ιακωβιανής $\mathcal{J}(X)$ τής $X$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό $k$, υπάρχουν* *ακριβώς $k^{2g}$ σημεία τής $\mathcal{J}(X)$, ας πούμε τα $L_1, \ldots, L_{k^{2g}}$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $kL_i = L_0$, για κάθε $i = 1, \ldots, k^{2g}$.*

*Απόδειξη.* Όπως είδαμε, η Ιακωβιανή τής $X$ είναι η ομάδα πηλίκων $\mathcal{J}(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$, όπου $\Lambda = \left\{\sum_{j=1}^{2g} n_j\pi_j | j = 1, \ldots, 2g\right\}$ και τα $\pi_j$, $j = 1, \ldots, 2g$, είναι $2g$ $\mathbb{R}$-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Έστω $k$ ένας τυχών φυσικός αριθμός.

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $L_0 = 0 + \Lambda \in \mathcal{J}(X)$. Αναζητούμε το πλήθος των στοιχείων $L = x + \Lambda$, για τα οποία $k(x + \Lambda) = 0 + \Lambda$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} kx \in \Lambda \quad &\Leftrightarrow \quad kx = n_1\pi_1 + \cdots + n_{2g}\pi_{2g}, \quad n_1, \ldots, n_{2g} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{n_1}{k}\pi_1 + \cdots + \frac{n_{2g}}{k}\pi_{2g}, \quad n_1, \ldots, n_{2g} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

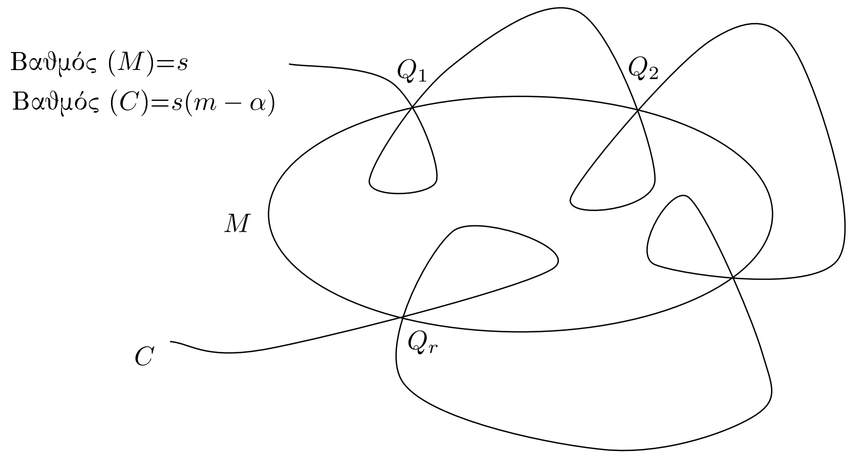
Επομένως, αν λάβουμε υπ' όψιν και τη γραμμική ανεξαρτησία των $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$, όλα τα διαφορετικά στοιχεία τής Ιακωβιανής τής $X$ που ικανοποιούν την εξίσωση $k(x + \Lambda) = 0 + \Lambda$ είναι τα στοιχεία τής μορφής $\left(\frac{n_1}{k}\pi_1 + \cdots + \frac{n_{2g}}{k}\right) + \Lambda$, όπου $n_j \in \{1, \ldots, k\}$ για κάθε $j = 1, \ldots, 2g$. Άρα το πλήθος των λύσεων τής εξίσωσης $kL = 0$ στην $\mathcal{J}(X)$ είναι ακριβώς $k^{2g}$.

Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $L_0 \in \mathcal{J}(X)$ και $L_1, \ldots, L_{k^{2g}}$ τα στοιχεία τής Ιακωβιανής τής $X$ για τα οποία $kL_i = 0$. Τότε τα $L_i' = L_i + \frac{1}{k}L_0$, $i = 1, \ldots, k_{2g}$ είναι όλες οι διαφορετικές λύσεις τής εξίσωσης $kL = L_0$ στην $\mathcal{J}(X)$. $\square$

**Λήμμα 3.2.2.** *Έστω $r = s^2$, όπου ο $s$ είναι φυσικός αριθμός με $s \geq 3$. Έστω $M$ μια λεία ανάγωγη καμπύλη βαθμού $s$ και $Q_1, \ldots, Q_r$ σημεία στην $M$ σε γενική θέση. Αν μια καμπύλη $N$ βαθμού $sm$ διέρχεται από τα σημεία $Q_1, \ldots, Q_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$ τότε η $N$ είναι ίση με τη $mM$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $N \neq mM$ και θα φτάσουμε σε άτοπο. Γράφουμε την καμπύλη $N$ ως $N = \alpha M + C$, όπου ο $\alpha$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός με $\alpha < m$ (από την υπόθεση) και η $C$ είναι καμπύλη βαθμού $s(m - \alpha) > 0$ που δεν περιέχει την $M$. Το πλήθος των σημείων τομής των καμπυλών $C$ και $M$ (μετρώντας το κάθε ένα από αυτά τόσες φορές όσες η αντίστοιχη πολλαπλότητα τομής) είναι $s^2(m - \alpha) = r(m - \alpha)$, βλ. το *Θεώρημα του Bezout* 2.1.1. Η καμπύλη $C$ τέμνει την $M$ στα σημεία $Q_1, \ldots, Q_r$ και διέρχεται από κάθε ένα από αυτά με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m - \alpha$. Άρα τα σημεία τομής των $C$ και $M$ είναι ακριβώς τα $Q_1, \ldots, Q_r$. Επομένως, αν θέσουμε $D = Q_1 + \cdots + Q_r$, ο διαιρέτης τομής που ορίζεται πάνω στην καμπύλη $M$ από την τομή της με τη καμπύλη $C$ είναι ο $(m - \alpha)D$.

Έστω $H$ ένα τυχόν υπερεπίπεδο τού προβολικού επιπέδου και έστω $D_0$ ο διαιρέτης τομής που ορίζεται πάνω στην καμπύλη $M$ από την τομή της με το $s(m - \alpha)$-πολλαπλάσιο τού $H$. Αυτός αντιστοιχεί, μέσω της απεικόνισης Abel-Jacobi βαθμού $s^2(m - \alpha)$ σε ένα (χαρακτηριστικό!!) στοιχείο $L_0$ της Ιακωβιανής.




Σχήμα 3.1:

Ο διαιρέτης $(m-\alpha)D$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $D_0$, οπότε μέσω τής παραπάνω απεικόνισης Abel-Jacobi ο διαιρέτης $(m-\alpha)D$ αντιστοιχεί στο ίδιο στοιχείο $L_0$ τής Ιακωβιανής τής $M$. Έστω $p=[(s-1)(s-2)]/2$ το γένος τής $M$. Αφού $s \geq 3$, το γένος τής $M$ είναι θετικό.

Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $L=L_i$, $i=1,2,\ldots,(m-\alpha)^{2p}$, τής Ιακωβιανής βαθμού $r$ με $(m-\alpha)L=L_0$, βλ. λήμμα 3.2.1. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού $r$, $u_r: M^{(r)} \longrightarrow \mathcal{J}(M)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο διαιρέτης $D$ ανήκει σε μια ίνα τής $u_r$ πάνω από κάποιο από τα στοιχεία $L_i$, $i=1,2,\ldots,(m-\alpha)^{2p}$, γεγονός που αντίκειται στη γενικότητα των $Q_1,\ldots,Q_r$. Έτσι φτάνουμε σε άτοπο. □

Έστω $\Delta$ το υποσύνολο τού $S^{(r)}$ που αποτελείται από τις διαγωνίους τού $S^{(r)}$, δηλαδή τα στοιχεία τής μορφής $P_1+\cdots+P_r$ για τα οποία $P_i=P_j$, για κάποια $i,j$ με $i \neq j$. Θέτουμε $U_r = S^{(r)} \setminus \Delta$.

Όπως ήδη έχουμε δει, οι επίπεδες καμπύλες βαθμού $d$, έρχονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα στοιχεία τού $\mathbb{P}^N$, $N=\binom{d+2}{d}-1$, μέσω τής $C \leftrightarrow [C]$, όπου το $[C] \in \mathbb{P}^N$ έχει ως συντεταγμένες τούς συντελεστές τού ομογενούς πολυωνύμου που ορίζει την καμπύλη $[C]$. Συμβολίζουμε ως $X_{d,m}$ το υποσύνολο τού $\mathbb{P}^N \times U_r$ που αποτελείται από τα ζεύγη $([C], P_1+\cdots+P_r)$, όπου η $C$ είναι μια επίπεδη καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $P_1,\ldots,P_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$, δηλαδή

$$X_{d,m}=\{([C],P_1+\cdots+P_r)/\deg C=d,\ \operatorname*{mult}_{P_i} C \geq m,\ i=1,\ldots,r\} \subset \mathbb{P}^N \times U_r.$$

Από τον τρόπο ορισμού του, αποδεικνύεται ότι το $X_{d,m}$ είναι ένα αλγεβρικό πολύπτυγμα. Θεωρούμε την προβολή

$$\pi : X_{d,m} \to U_r.$$

Τότε ισχύει η εξής πρόταση:

**Πρόταση 3.2.1.** *Η συνάρτηση $\delta$ που ορίζεται στο $U_r$ ως $\delta(P) = \dim_{\mathbb{P}} \pi^{-1}(P)$, για κάθε $P = P_1 + \cdots + P_r \in U_r$, είναι άνω ημισυνεχής ως προς την Z-τοπολογία.*

**Σημείωση 3.2.1.** Η παραπάνω πρόταση είναι ειδική περίπτωση τής εξής πρότασης: Έστω $X$ μια αλγεβρική ποικιλότητα και $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ μια απεικόνιση στον προβολικό χώρο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $Q \in X$ η ίνα $X_Q = \phi^{-1}(\phi(Q))$ είναι μια ανάγωγη ποικιλότητα. Τότε η συνάρτηση $\mu : X \longrightarrow \mathbb{N}$ με $\mu(Q) = \dim_{\mathbb{P}}(X_Q)$ είναι άνω ημισυνεχής στην $X$ ως προς την Z-τοπολογία.

**Θεώρημα 3.2.1.** *Έστω $r = s^2$, όπου ο $s$ είναι φυσικός αριθμός με $s \geq 3$. Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$ ευρισκόμενα σε γενική θέση. Αν μια καμπύλη $C$ βαθμού $d$ διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$, τότε $d \geq sm$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι για το γενικό σημείο $P = P_1 + \cdots + P_r$ τού $U_r$ υπάρχει καμπύλη $C$ βαθμού $d$ με $d < sm$ που διέρχεται από τα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα κατά Zariski ανοιχτό υποσύνολο $A$ τού $U_r$ και $B_1, B_2, \ldots$ κλειστά υποσύνολα τού $U_r$, έτσι ώστε για κάθε $P = P_1 + \cdots + P_r \in A \setminus (\bigcup_j B_j)$ να ισχύει $\delta(P) \geq 0$. Θα δείξουμε ότι $\delta(x) \geq 0, \ \forall x \in U_r$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in U_r$ τέτοιο ώστε $\delta(x_0) = -1$, δηλ. ότι η ίνα πάνω από το σημείο $x_0$ είναι το κενό σύνολο. Τότε αφού η συνάρτηση $\delta$ είναι άνω ημισυνεχής (βλ. πρόταση 3.2.1) θα υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V_{x_0}$ τού $x_0$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\delta(x) \leq \delta(x_0) \Rightarrow \delta(x) = -1, \ \forall x \in V_{x_0}.$$

Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το σύνολο $A \setminus (\bigcup_j B_j)$ είναι πυκνό στο $U_r$, πράγμα που σημαίνει ότι έχει μη κενή τομή με το $V_{x_0}$. Άρα πράγματι $\delta(x) \geq 0, \ \forall x \in U_r$.

Θεωρούμε τώρα σημεία $Q_1, \ldots, Q_r$ όπως στο λήμμα 3.2.2. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

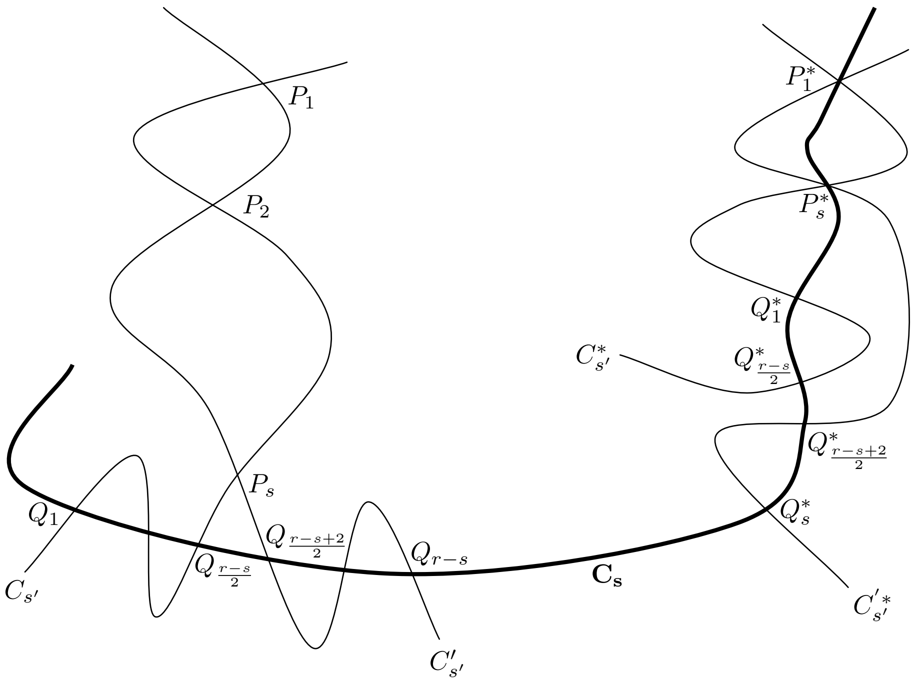
$$\delta(Q_1 + \ldots + Q_r) \geq 0\,,$$

οπότε υπάρχει καμπύλη $C$ βαθμού $d < sm$ που διέρχεται από τα σημεία $Q_1, \ldots, Q_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Γράφουμε το $d$ ως $d = sm - \alpha, \ \alpha \geq 1$ και θεωρούμε την καμπύλη $C^\star = C + \alpha L$, όπου ως $L$ συμβολίζουμε μια τυχαία ευθεία. Τότε η $C^\star$ είναι μια καμπύλη βαθμού $sm$ που διέρχεται από τα σημεία $Q_1, \ldots, Q_r$

με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.2, έχουμε $C^\star = mM$. Όμως το τελευταίο είναι άτοπο, διότι η καμπύλη $M$ είναι ανάγωγη, ενώ η $C^\star$ περιέχει την ευθεία $L$. $\square$

**Θεώρημα 3.2.2.** *Έστω $r = s^2$, όπου ο $s$ είναι φυσικός αριθμός με $s > 3$. Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$ ευρισκόμενα σε γενική θέση. Αν μια καμπύλη $C$ βαθμού $d$ διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$, τότε $d > sm$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει καμπύλη $C$ βαθμού $d = sm$ που διέρχεται από τα γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου $P_1, \ldots, P_r$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Τότε, λόγω τής πρότασης 3.2.1, για οποιαδήποτε $r$ σημεία τού προβολικού επιπέδου υπάρχει καμπύλη βαθμού $sm$ που διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο $s$ είναι περιττός. Θέτουμε $s' = (s+1)/2$. Στην περίπτωση όπου ο $s$ είναι άρτιος εργαζόμαστε ανάλογα.




Σχήμα 3.2:

Θεωρούμε μια λεία καμπύλη $C_{s'}$ βαθμού $s'$ και $P_1, \ldots, P_s$ σημεία στη $C_{s'}$ σε γενική θέση. Έστω $C'_{s'}$ μια λεία καμπύλη βαθμού $s'$ που διέρχεται από τα σημεία $P_1, \ldots, P_s$ και τέμνει τη $C_{s'}$ εγκάρσια. Σημειώνουμε ότι μια καμπύλη με τις ιδιότητες τής $C'_{s'}$ υπάρχει διότι η (προβολική) διάσταση τού γραμμικού χώρου των επίπεδων καμπυλών βαθμού $s'$ είναι ίση με

$$\binom{s'+2}{2} - 1 = \frac{s'(s'+3)}{2},$$

οπότε η (προβολική) διάσταση τού γραμμικού χώρου των επίπεδων καμπυλών βαθμού $s'$ που διέρχονται από τα σημεία $P_1, \ldots, P_s$ είναι τουλάχιστον

$$\frac{s'(s'+3)}{2} - s = \frac{(s'-2)(s'+1)}{2} > 0$$

($s \geq 5$, άρα $s' \geq 3$). Θεωρούμε επίσης μια λεία καμπύλη $C_s$ βαθμού $s$ η οποία τέμνει τις $C_{s'}$, $C'_{s'}$ εγκάρσια. Επιλέγουμε σημεία $Q_1, \ldots, Q_{r-s}$ πάνω στη $C_s$, έτσι ώστε τα $Q_1, \ldots, Q_{\frac{r-s}{2}}$ να είναι κάποια από τα σημεία τομής των $C_s$, $C_{s'}$ και τα $Q_{\frac{r-s}{2}+1}, \ldots, Q_{r-s}$ να είναι κάποια από τα σημεία τομής των $C_s, C'_{s'}$. Σύμφωνα με την αρχική μας υπόθεση, υπάρχει καμπύλη $E$ βαθμού $sm$ που διέρχεται από τα σημεία $P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_{r-s}$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Θα δείξουμε ότι η $E$ περιέχει τη $C_{s'}$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε οι $E, C_{s'}$ θα τέμνονται σε $sms' = s(s+1)m/2$ σημεία (*Θεώρημα τού Bezout* 2.1.1). Παρατηρούμε ότι τα σημεία $P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_{\frac{r-s}{2}}$ είναι σημεία τομής των $E, C_{s'}$ με πολλαπλότητα τομής $m$ στο κάθε ένα. Το πλήθος των παραπάνω σημείων, αν μετρήσουμε το κάθε ένα τόσες φορές όσες η πολλαπλότητα τομής σε αυτό, είναι ίσο με

$$ms + m(\frac{s-r}{2}) = s(s+1)m/2.$$

Άρα τα σημεία τομής των $E, C_{s'}$ είναι ακριβώς τα $P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_{\frac{r-s}{2}}$ με πολλαπλότητα τομής στο κάθε ένα από αυτά $m$ και ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στη $C_{s'}$ από αυτά είναι ο $\sum_{i=1}^{s} mP_i + \sum_{i=1}^{\frac{r-s}{2}} mQ_i = mD$, όπου $D = \sum_{i=1}^{s} P_i + \sum_{i=1}^{\frac{r-s}{2}} Q_i$. Θεωρούμε τυχόν υπερεπίπεδο $H$ τού προβολικού επιπέδου και υποθέτουμε ότι ο $D_0$ είναι ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στη $C_{s'}$ από τα σημεία τής τομής της με το $sm$ πολλαπλάσιο τού $H$. Τότε οι διαιρέτες $D_0, mD$ είναι γραμμικά ισοδύναμοι. Άρα αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο $L_0$ τής Ιακωβιανής τής $C_{s'}$. Έστω $p = (s'-1)(s'-2)/2$, δηλ. το γένος τής καμπύλης $C_{s'}$. Σημειώνουμε ότι αφού $s \geq 4$, το γένος τής $C_{s'}$ είναι γνήσια θετικό. Συμβολίζουμε ως $L_i,\ i = 1, 2, \ldots, m^{2p}$ τα στοιχεία τής $\mathcal{J}^{s(s+1)/2}(C_{s'})$, για τα οποία $mL_i = L_0$. Αν η

$$u_{s(s+1)/2} : C_{s'}^{s(s+1)/2} \longrightarrow \mathcal{J}^{s(s+1)/2}(C_{s'})$$

είναι η απεικόνιση Abel-Jacobi βαθμού $s(s+1)/2$, ο διαιρέτης $D$ ανήκει σε μια ίνα τής $u_{s(s+1)/2}$ πάνω από κάποιο από τα $L_i,\ i = 1, 2, \ldots, m^{2p}$. Δηλαδή έχουμε πεπερασμένο πλήθος επιλογών για την κλάση τού διαιρέτη $m(\sum_{i=1}^{s} P_i + \sum_{i=1}^{\frac{r-s}{2}} Q_i)$ και αφού έχουμε πεπερασμένο πλήθος επιλογών για τα σημεία $Q_i,\ i = 1, \ldots, (r-s)/2$ (καθότι τα $Q_1, \ldots, Q_{(r-s)/2}$ επιλέχθηκαν ανάμεσα στα σημεία τομής των

$C_s, C_{s'}$), έχουμε τελικά πεπερασμένο πλήθος επιλογών για την κλάση τού διαιρέτη $P_1+\cdots+P_s$. Το τελευταίο είναι άτοπο, διότι τα $P_1,\ldots,P_s$ είναι γενικά σημεία τής καμπύλης $C_{s'}$. Άρα η καμπύλη $E$ περιέχει τη $C_{s'}$. Θέτουμε τώρα $E'=E-C_{s'}$. Η καμπύλη $E'$ έχει βαθμό $sm-s'$ διερχόμενη από τα σημεία $P_i,\ i=1,\ldots,s$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-1$ και από τα σημεία $Q_{\frac{r-s}{2}+1},\ldots,Q_{r-s}$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Θα δείξουμε ότι η καμπύλη $E'$ περιέχει τη $C'_{s'}$. Έστω ότι η $E'$ δεν περιέχει τη $C'_{s'}$. Τότε το πλήθος των σημείων τομής των $E', C'_{s'}$ είναι $s'(sm-s')$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία $P_1,\ldots,P_s$ είναι σημεία τομής των $E', C'_{s'}$ με πολλαπλότητα τομής (τουλάχιστον) $m-1$ το κάθε ένα και ότι τα $Q_{\frac{r-s}{2}+1},\ldots,Q_{r-s}$ είναι επίσης σημεία τομής των $E', C'_{s'}$ με πολλαπλότητα τομής τουλάχιστον $m$ το κάθε ένα. Άρα,

$$\begin{aligned}
&s'(sm-s') \geq (m-1)s + m\frac{r-s}{2} \Longrightarrow\\
&ss'm - s'^2 \geq ss'm - s \Rightarrow s'^2 - s \leq 0 \Longrightarrow\\
&(\frac{s+1}{2})^2 - s \leq 0 \Rightarrow (s-1)^2 \leq 0 \Longrightarrow s=1,
\end{aligned}$$

που είναι άτοπο διότι $s\geq 4$ εξ' υποθέσεως. Άρα η καμπύλη $E'$ περιέχει τη $C'_{s'}$. Θέτουμε $\tilde{E}=E'-C'_{s'}$. Τότε η καμπύλη $\tilde{E}$ έχει βαθμό $sm-2s'$ διερχόμενη από τα σημεία $P_1,\ldots,P_s$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-2$ και από τα σημεία $Q_1,\ldots,Q_{r-s}$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-1$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια ακόμη πιο ειδική θέση $r$ σημείων τού προβολικού επιπέδου. Έστω ότι τα $P_1^\star,\ldots,P_s^\star$ είναι σημεία τής καμπύλης $C_s$ ευρισκόμενα σε γενική θέση. Θεωρούμε δύο καμπύλες $C_{s'}^\star$ και $C_{s'}^{\star\prime}$ βαθμού $s'$ που διέρχονται από τα $P_1^\star,\ldots,P_s^\star$. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι τα $Q_1^\star,\ldots,Q_{r-s}^\star$ είναι σημεία τής $C_s$, τέτοια ώστε τα σημεία τομής των $C_s, C_{s'}^\star$ να είναι τα $P_1^\star,\ldots,P_s^\star, Q_1^\star,\ldots,Q_{\frac{r-s}{2}}^\star$ (με πολλαπλότητα τομής 1 το κάθε ένα) και, επίσης, τα σημεία τομής των $C_s, C_{s'}^{'\star}$ να είναι τα $P_1^\star,\ldots,P_s^\star, Q_{\frac{r-s+2}{2}}^\star,\ldots,Q_s^\star$ (με πολλαπλότητα τομής 1 το κάθε ένα). Από την ύπαρξη τής καμπύλης $\tilde{E}$ που είδαμε στα παραπάνω συνάγεται η ύπαρξη μιας καμπύλης $E^\star$ βαθμού $sm-2s'$ διερχομένης από τα σημεία $P_1^\star,\ldots,P_s^\star$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-2$ και από τα σημεία $Q_1,\ldots,Q_{r-s}$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-1$.

Θα δείξουμε ότι η ύπαρξη τής καμπύλης $E^\star$ οδηγεί σε άτοπο, με επαγωγή στο $m$. Αν $m=1$, τότε προφανώς έχουμε καταλήξει σε άτοπο. Αν $m>1$, υποθέτουμε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό γνήσια μικρότερο από $m$, δεν υπάρχει καμπύλη με τις ιδιότητες τής $E^\star$. Έστω ότι υπάρχει καμπύλη $E^\star$ διερχόμενη από τα σημεία $P_1^\star,\ldots,P_s^\star$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-2$ και από τα σημεία $Q_1,\ldots,Q_{r-s}$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m-1$. Θα δείξουμε ότι τότε η $E^\star$ περιέχει την καμπύλη $C_s$. Έστω ότι η $E^\star$ δεν περιέχει τη $C_s$. Τότε το πλήθος των σημείων τομής των $C_s, E^\star$ είναι $s(sm-2s')=s^2m-s^2-s$ (βλ. *Θεώρημα τού Bezout*

2.1.1). Παρατηρούμε ότι τα σημεία $P_1^\star, \dots, P_s^\star$ είναι σημεία τομής των $C_s, E^\star$ με πολλαπλότητα τομής $m-2$ το κάθε ένα και ότι τα σημεία $Q_1^\star, \dots, Q_{r-s}^\star$ είναι επίσης σημεία τομής των $C_s, E^\star$ με πολλαπλότητα $m-1$. Άρα τα σημεία τομής των καμπυλών $C_s, E^\star$ είναι ακριβώς τα $P_1^\star, \dots, P_s^\star$ με πολλαπλότητα τομής $m-2$ και τα $Q_1^\star, \dots, Q_{r-s}^\star$ με πολλαπλότητα τομής $m-1$. Ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στην καμπύλη $C_s$ από τα παραπάνω σημεία είναι ο $D_1 = \sum_{i=1}^{s}(m-2)P_i^\star + \sum_{i=1}^{r-s}(m-1)Q_i^\star$. Θεωρούμε την καμπύλη $C_{s'}^\star + {C_{s'}^\star}'$. Ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στη $C_s$ από τα σημεία τής τομής της με την καμπύλη $C_{s'}^\star + {C_{s'}^\star}'$ είναι ο $D_2 = \sum_{i=1}^{s} 2P_i^\star + \sum_{i=1}^{r-s} Q_i^\star$. Στη συνέχεια θεωρούμε την καμπύλη $E^\star + C_{s'}^\star + {C_{s'}^\star}'$. Ο διαιρέτης που ορίζεται πάνω στην καμπύλη $C_s$ από τα σημεία τής τομής της με την $E^\star + C_{s'}^\star + {C_{s'}^\star}'$ είναι ο $D = D_1 + D_2 = m(\sum_{i=1}^{s} P_i^\star + \sum_{i=1}^{r-s} Q_i^\star)$. Με τη βοήθεια τής απεικόνισης Abel-Jacobi μπορούμε να δείξουμε ότι έχουμε πεπερασμένες επιλογές για την κλάση τού διαιρέτη $\sum_{i=1}^{s} P_i^\star$ (έχουμε χρησιμοποιήσει το ίδιο επιχείρημα για τον διαιρέτη $m(\sum_{i=1}^{s} P_i + \sum_{i=1}^{\frac{r-s}{2}}))$, πράγμα άτοπο, διότι τα $P_1^\star, \dots, P_s^\star$ είναι γενικά σημεία τής $C_s$. Άρα η $E^\star$ περιέχει την καμπύλη $C_s$. Οπότε υπάρχει μια καμπύλη βαθμού $sm - 2s' - s = s(m-1) - 2s'$, εν προκειμένω η $E^\star - C_s$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $P_1^\star, \dots, P_s^\star$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $(m-1)-2$ και από τα σημεία $Q_1^\star, \dots, Q_{r-s}^\star$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $(m-1)-1$. Όμως, λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης, το τελευταίο είναι άτοπο.

Άρα, τελικά, για ακεραίους $s \geq 4$, δεν υπάρχει καμπύλη βαθμού $sm$ διερχόμενη από $r = s^2$ γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$ στο κάθε ένα. Συνεπώς δεν υπάρχει καμία καμπύλη βαθμού γνήσια μικρότερου τού $sm$ διερχόμενη από $r$ γενικά σημεία τού $\mathbb{P}^2$, διότι αν η $C$ ήταν μια τέτοια καμπύλη με βαθμό $d$, τότε η καμπύλη $C' = C + (sm-d)L$, όπου $L$ τυχούσα ευθεία, θα ήταν καμπύλη βαθμού $sm$ διερχόμενη από τα $r$ γενικά σημεία τού $\mathbb{P}^2$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. $\square$

# Κεφάλαιο 4

# Η εικασία τού Nagata

## 4.1 Εισαγωγή

Με αφορμή το θεώρημα 3.2.2 ο Nagata διατύπωσε στην εργασία του [N2] την παρακάτω εικασία, που είναι γνωστή ως *η εικασία τού Nagata*.

**Εικασία 4.1.1 (Nagata).** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$ ευρισκόμενα σε γενική θέση, όπου $r \geq 10$. Αν μια καμπύλη $C$ βαθμού $d$ διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα $m$, τότε $d > \sqrt{r}\, m$.*

Η παραπάνω εικασία παραμένει άλυτη μέχρι των ημερών μας. Ένα από τα ισχυρότερα αποτελέσματα σχετικά με την εικασία τού Nagata είναι αυτό που απέδειξε ο Geng Xu στην εργασία του [X], το οποίο παρουσιάζουμε παρακάτω, βλ. παράγραφο 4.2. Πρώτα όμως δίδουμε, για κάθε μια από τις περιπτώσεις $r = 1, \ldots, 9$, ένα παράδειγμα στο οποίο ισχύει $d \leq \sqrt{r}\, m$.

1. $r = 1$: Επιλέγουμε μια ευθεία που περνά από το $P_1$. Τότε $d = 1,\ m = 1$ και $1 = \sqrt{1} \cdot 1$.

2. $r = 2$: Επιλέγουμε την ευθεία που περνά από τα $P_1, P_2$. Τότε $d = 1,\ m = 1$ και $1 < \sqrt{2} \cdot 1$.

3. $r = 3$: Επιλέγουμε τις τρείς ευθείες που περνάνε από τα τρία ζευγάρια των σημειών $P_1, P_2, P_3$. Τότε $d = 3,\ m = 2$ και $3 < \sqrt{3} \cdot 2$.

4. $r = 4$: Επιλέγουμε μία καμπύλη βαθμού 2 (κωνική καμπύλη) που περνά από τα 4 σημεία. Μια τέτοια καμπύλη υπάρχει, διότι $\frac{2(2+3)}{2} = 5 \geq 4$. Τότε $d = 2,\ m = 1$ και $2 = \sqrt{4} \cdot 1$.

5. $r = 5$: Επιλέγουμε μία καμπύλη βαθμού 2 (κωνική καμπύλη) που περνά από τα 5 σημεία. Μια τέτοια καμπύλη υπάρχει, διότι $\frac{2(2+3)}{2} = 5 \geq 5$. Τότε $d = 2,\ m = 1$ και $2 < \sqrt{5} \cdot 1$.

6. $r = 6$: Ανά 5 σημεία επιλέγουμε μια καμπύλη βαθμού 2 (κωνική καμπύλη) που περνά από αυτα (όπως στην περίπτωση $r = 5$). Έχουμε με αυτό τον τρόπο 6 επιλογές καμπυλών. Η ένωσή τους είναι μια καμπύλη βαθμού $12 = 2 \times 6$ που περνά από κάθε ένα από τα σημεία με πολλαπλότητα 5. Επομένως $d = 12,\ m = 5$ και $12 < \sqrt{6} \cdot 5$.

7. $r = 7$: Για κάθε σημείο επιλέγουμε μια καμπύλη βαθμού 3 (κυβική καμπύλη) που έχει σε αυτό το σημείο πολλαπλότητα 2 και επίσης περνά από τα υπόλοιπα 6 σημεία. Μια τέτοια καμπύλη υπάρχει διότι $\frac{3(3+3)}{2} = 9 \geq 3 + 6 = 9$. Βάσει αυτού διαθέτουμε 7 επιλογές καμπυλών. Η ένωσή τους είναι μια καμπύλη βαθμού $21 = 3 \times 7$ που περνά από κάθε ένα από τα σημεία με πολλαπλότητα 8. Επομένως, $d = 21,\ m = 8$ και $21 < \sqrt{7} \cdot 8$.

8. $r = 8$: Για κάθε σημείο επιλέγουμε μια καμπύλη βαθμού 6 που έχει σε αυτό το σημείο πολλαπλότητα 3 και επίσης έχει στα υπόλοιπα 7 σημεία πολλαπλότητα 2. Μια τέτοια καμπύλη υπάρχει διότι $\frac{6(6+3)}{2} = 27 \geq 6 + 7 \times 3 = 27$. Έχουμε με αυτό τον τρόπο 8 επιλογές καμπυλών. Η ένωσή τους είναι μια καμπύλη βαθμού $48 = 6 \times 8$ που περνά από κάθε ένα από τα σημεία με πολλαπλότητα 17. Επομένως $d = 48,\ m = 17$ και $48 < \sqrt{8} \cdot 17$.

9. $r = 9$: Επιλέγουμε μία καμπύλη βαθμού 3 (κυβική καμπύλη) που περνά από τα 9 σημεία. Τότε $d = 3,\ m = 1$ και $3 = \sqrt{9} \cdot 1$.

## 4.2 Τα αποτελέσματα τού G. Xu

Ερχόμαστε τώρα στα αποτελέσματα τού Geng Xu. Σε ό,τι ακολουθεί τα $m_1, \ldots, m_r$ είναι σταθεροποιημένοι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

**Λήμμα 4.2.1.** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$ ευρισκόμενα σε γενική θέση και η $C$ μια ανάγωγη καμπύλη βαθμού $d$ που διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητες (ακριβώς) $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα. Τότε*

$$d^2 \geq \sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_q$$

*για οποιοδήποτε $q \in \{1, \ldots, r\}$, για το οποίο ισχύει $m_q > 0$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ανάγωγη καμπύλη $C$ βαθμού $d$, με $d^2 < \sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_q$, για κάποιο $q \in \{1, \ldots, r\}$, για το οποίο $m_q > 0$, η οποία διέρχεται από τα γενικά σημεία $P_1, \ldots, P_r$ τού προβολικού επιπέδου με πολλαπλότητες ακριβώς $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα. Έστω $m_I = (m_1, \ldots, m_r)$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} X_{d,m_I} &= \{([C], Q_1 + \cdots + Q_r) \text{ με } \deg C = d,\ \mathrm{mult}_{Q_i} C \geq m_i,\ i = 1, \ldots, r\} \\ &\subset \mathbb{P}^N \times U_r, \end{aligned}$$

όπου $U_r = \mathrm{Sym}^r C \backslash$διαγώνιοι. Θεωρούμε την προβολή $\pi_2 : X_{d,m_I} \longrightarrow U_r$. Αυτή είναι μια αναλυτική απεικόνιση έχουσα προβολικούς υπόχωρους τού $\mathbb{P}^N$ ως ίνες της. Σημειώνουμε ότι στον ορισμό τού συνόλου $X_{d,m_I}$ έχουμε επιλέξει $\mathrm{mult}_{Q_i} C \geq m_i$ (και όχι $\mathrm{mult}_{Q_i} C = m_i$), διότι η πρώτη σχέση εκφράζεται ακριβώς ως το σύνολο μηδενισμού κάποιων πολυωνύμων, πράγμα που σημαίνει ότι οι ίνες είναι προβολικοί υπόχωροι τού $\mathbb{P}^N$ (διαφορετικά θα ήταν κάποια κατά Zariski-ανοικτά υποσύνολα εντός αυτών). Λόγω τής αρχικής μας υπόθεσης και τού λήμματος 3.2.1, η $\pi_2$ είναι "επί". Έστω $A$ μια ανοικτή γειτονιά τού $\mathbb{C}$ γύρω από το μηδέν. Έστω $\alpha$ μια αναλυτική απεικόνιση $\alpha : A \longrightarrow U_r$ με $\alpha(t) = P(t) = P_1(t) + \cdots + P_r(t) \in U_r$, τέτοια ώστε να ισχύει $\alpha(0) = P(0) = P_1 + \cdots + P_r$. Τότε υπάρχει μια αναλυτική απεικόνιση $\beta : A \longrightarrow X_{d,m_I}$ με $\pi_2 \circ \beta = \alpha$ τέτοια ώστε να ισχύει $\beta(0) = ([C], P_1 + \cdots + P_r)$. Στη συνέχεια θεωρούμε την προβολή $\pi_1 : X_{d,m_I} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ και θέτουμε $\gamma = \pi_1 \circ \beta$. Για κάθε $t \in A$ το $\gamma(t) = [C(t)] \in \mathbb{P}^N$ είναι μια καμπύλη (πιο σωστά, μια κλάση καμπυλών) βαθμού $d$ που διέρχεται από τα $P_1(t), \ldots, P_r(t)$ με πολλαπλότητες τουλάχιστον $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, και $\gamma(0) = [C]$. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^N & X_{d,m_i} \subset \mathbb{P}^N \times U_r \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{C} \supseteq A \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & U_r \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Στην παραπάνω οικογένεια $\gamma : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ απαρτιζόμενη από κλάσεις καμπυλών βαθμού $d$ αντιστοιχεί μια οικογένεια από (πραγματικές) καμπύλες, η οποία κατασκευάζεται ως ακολούθως: Συμβολίζουμε ως $a_{ijk}$, $i+j+k = d$ τις ομογενείς συντεταγμένες τού $\mathbb{P}^N$ και ως $X, Y, Z$ τις ομογενείς συντεταγμένες τού $\mathbb{P}^2$. Στο $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2$ θεωρούμε την αλγεβρική πολλαπλότητα $\mathcal{C}_d$ που αντιστοιχεί στα σημεία μηδενισμού τού πολυωνύμου

$$\mathcal{F}_d(a_{ijk}, X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j Z^k\,.$$

Έχουμε το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_d \subseteq \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{P}^N & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Με τον παραπάνω συμβολισμό, η απεικόνιση $\gamma : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ είναι τής μορφής $\gamma(t) = [a_{ijk}(t)]_{i+j+k=d}$. Τότε τα σημεία μηδενισμού τού πολυωνύμου $F_t(X, Y, Z) :=$

$\sum_{i+j+k=d} a_{ijk}(t)X^iY^jZ^k$ αντιστοιχούν σε μια αλγεβρική πολλαπλότητα $\mathcal{C}_d(t)$ η οποία είναι το fiber-γινόμενο των απεικονίσεων $\pi_1$ και $\gamma$, δηλ. ορίζεται ως το σύνολο

$$\mathcal{C}_d(t) = \{(t,p),\ t \in A,\, p \in \mathcal{C}_d \text{ με } \gamma(t) = \pi_1(t)\}.$$

Έχουμε, επομένως, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_d(t) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"'] & \mathcal{C}_d \arrow[d, "\pi_1"] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Η οικογένεια καμπυλών $\tilde{\pi}_1$ είναι ακριβώς αυτή που αντιστοιχεί στην οικογένεια $\gamma : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ την απαρτιζόμενη από κλάσεις καμπυλών βαθμού $d$. Πράγματι, η ίνα $C(t_0)$ τής απεικόνισης $\tilde{\pi}_1$ πάνω από το σημείο $t_0 \in A$ είναι η καμπύλη που ορίζεται από το πολυώνυμο $F_{t_0}(X,Y,Z) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk}(t_0)X^iY^jZ^k$, οπότε είναι η καμπύλη που αντιστοιχεί στο σημείο $\gamma(t_0) = [a_{ijk}(t_0))]_{i+j+k=d}$ τού $\mathbb{P}^N$.

Τα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ είναι γενικά, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $Z$-συντεταγμένη στο κάθε ένα από τα $P_i(t)$ είναι μη μηδενική. Έστω

$$P_i(t) = [c_i(t), d_i(t), 1] = (c_i(t), d_i(t)),\ i = 1, \ldots, r,$$

όπου μέσω της ( ) συμβολίζουμε την αφινική (συσχετική) παράσταση των σημείων. Σημειώνουμε ότι τότε γύρω από το σημείο $P_1(0) + \cdots + P_r(t)$ το $U_r$ έχει μια αφινική (συσχετική) γειτονιά $\cong \mathbb{C}^{2r}$ στην οποία η αφινική (συσχετική) μορφή τής απεικόνισης $\alpha : A \longrightarrow \mathbb{C}^{2r}$ είναι η

$$\alpha(t) = (c_1(t), d_1(t), \ldots, c_r(t), d_r(t)).$$

Θέτουμε $x = \frac{X}{Z}$ και $y = \frac{Y}{Z}$. Τότε το πολυώνυμο $F_t(X,Y,Z)$ τής καμπύλης $C(t)$, $t \in A$, αντιστοιχεί σε αφινικές (συσχετικές) συντεταγμένες στο πολυώνυμο $f_t(x,y) := F_t(x,y,1)$, το οποίο, κοντά στο σημείο $P_i$, εκφράζεται σε ανάπτυγμα Taylor ως εξής:

$$f_t(x,y) = \sum_{k+l \geq m_i} \alpha^i_{kl}(t)(x - c_i(t))^k(y - d_i(t))^l.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0}(x,y) &= \sum_{k+l\geq m_i} \left.\frac{d\alpha^i_{kl}(t)}{dt}\right|_{t=0}(x - c_i(0))^k(y - d_i(0))^l \\ &- \left.\frac{dc_i(t)}{dt}\right|_{t=0} \sum_{\substack{k+l\geq m_i \\ k\geq 1}} \alpha^i_{kl}(0)k(x - c_i(0))^{k-1}(y - d_i(0))^l \\ &- \left.\frac{dd_i(t)}{dt}\right|_{t=0} \sum_{\substack{k+l\geq m_i \\ l\geq 1}} \alpha^i_{kl}(0)(x - c_i(0))^k l(y - d_i(0))^{l-1}. \end{aligned}$$

Έστω $D$ η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{dF_t}{dt}\Big|_{t=0}(X,Y,Z)=0$ δηλ. από την εξίσωση $\sum_{i+j+k=d}\frac{da_{ijk}(t)}{dt}\Big|_{t=0}X^iY^jZ^k=0$. Με κατάλληλη επιλογή τής απεικόνισης $\alpha$ μπορούμε να πετύχουμε ο βαθμός τής $D$ να είναι $\deg(D)=d$ και, επιπρόσθετα, $\operatorname{mult}_{P_i} D \geq m_i$, για κάθε $i\neq q$, και $\operatorname{mult}_{P_q} D = m_q-1$, ως εξής: Αφού η καμπύλη $C(0)=C$ διέρχεται από το σημείο $P_q(0)=P_q$ με πολλαπλότητα $m_q\neq 0$, υπάρχουν $k_q, l_q$ με $k_q+l_q=m_q$, έτσι ώστε να έχουμε $\alpha^q_{k_ql_q}(0)\neq 0$.

Αν $k_q\neq 0$, επιλέγουμε την απεικόνιση $\alpha$ κατά τρόπο ώστε $\frac{dc_i(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$ για κάθε $i\neq q$, $\frac{dc_q(t)}{dt}\Big|_{t=0}=c\neq 0$ και $\frac{dd_i(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$, για κάθε $i=1,\ldots,r$. Μια επιλογή που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι η

$$\alpha(t)=(c_1(0)+t^2,d_1(0)+t^2,\ldots,c_q(0)+ct,d_q(0)+t^2,\ldots,c_r(0)+t^2,d_r(0)+t^2)\,.$$

Κοντά στο $P_q$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{df_t}{dt}\Big|_{t=0}(x,y) = & -\ c\alpha^q_{k_ql_q}(0)k_q(x-c_q(0))^{k_q-1}(y-d_q(0))^{l_q}\\ & -\ c\sum_{\substack{k+l\geq m_q\\ k\geq 1\\ (k,l)\neq(k_q,l_q)}}\alpha^q_{kl}(0)k(x-c_q(0))^{k-1}(y-d_q(0))^{l}\\ & +\sum_{k+l\geq m_q}\frac{d\alpha^q_{kl}(t)}{dt}\Big|_{t=0}(x-c_q(0))^k(y-d_q(0))^l\end{aligned}$$

και αφού $c\alpha^q_{k_ql_q}(0)k_q\neq 0$, έχουμε $\operatorname{mult}_{P_q} D=m_q-1$. Κατ' αναλογίαν, κοντά στο $P_i,\ i\neq q$ έχουμε

$$\frac{df_t}{dt}\Big|_{t=0}(x,y)=\sum_{k+l\geq m_i}\frac{d\alpha^i_{kl}(t)}{dt}\Big|_{t=0}(x-c_i(0))^k(y-d_i(0))^l$$

Άρα $\operatorname{mult}_{P_i} D\geq m_i$ για κάθε $i\neq q$.

Αν $k_q=0$, επιλέγουμε, με ανάλογο τρόπο όπως παραπάνω, την απεικόνιση $\alpha$ έτσι ώστε $\frac{dd_i(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$ για κάθε $i\neq q$, $\frac{dd_q(t)}{dt}\Big|_{t=0}=d\neq 0$ και $\frac{dc_i(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$ για κάθε $i=1,\ldots,r$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{df_t}{dt}\Big|_{t=0}(x,y) = & -\ d\alpha^q_{0m_q}m_q(y-d_q(0))^{m_q-1}\\ & -\ d\sum_{\substack{k+l\geq m_q\\ l\geq 1\\ (k,l)\neq(0,m_q)}}\alpha^q_{kl}(0)(x-c_q(0))^{k}(y-d_q(0))^{l-1}\\ & +\sum_{k+l\geq m_q}\frac{d\alpha^q_{kl}(t)}{dt}\Big|_{t=0}(x-c_q(0))^k(y-d_q(0))^l\end{aligned}$$

και αφού $d\alpha^q_{0m_q}(0)m_q\neq 0$, έχουμε ότι $\operatorname{mult}_{P_q} D=m_q-1$. Επίσης, κοντά στο $P_i,\ i\neq q$, έχουμε

$$\frac{df_t}{dt}\Big|_{t=0}(x,y)=\sum_{k+l\geq m_i}\frac{d\alpha^i_{kl}(t)}{dt}\Big|_{t=0}(x-c_i(0))^k(y-d_i(0))^l$$

Άρα $\mathrm{mult}_{P_i} D \geq m_i$ για κάθε $i \neq q$.

Έτσι λοιπόν, σε κάθε περίπτωση, η $D$ είναι μια καμπύλη βαθμού $d$, η οποία διέρχεται από το σημείο $P_q$ με πολλαπλότητα $\mathrm{mult}_{P_q} D = m_q - 1$ και από τα σημεία $P_i,\ i \neq q$ με πολλαπλότητα $\mathrm{mult}_{P_i} D \geq m_i$. Εάν η καμπύλη $D$ περιείχε τη $C$, θα είχαμε $\mathrm{mult}_{P_q} D \geq m_q$ που είναι άτοπο. Εξάλλου η $C$ είναι ανάγωγη, οπότε δεν μπορεί να περιέχει την $D$. Επομένως οι καμπύλες $C, D$ δεν έχουν κοινές συνιστώσες, και, σύμφωνα με το θεώρημα τού τεξτλατινΒεζουτ, το πλήθος των σημείων τομής αυτών (με καθένα εξαυτών μετρούμενο τόσες φορές όσες και η πολλαπλότητα τομής σε αυτό) είναι $\deg C \cdot \deg D = d^2$. Όμως τα $P_i,\ i \neq q$, είναι σημεία τομής των $C, D$ με πολλαπλότητα τομής τουλάχιστον $m_i^2$ και το $P_q$ είναι σημείο τομής των $C, D$ με πολλαπλότητα τομής τουλάχιστον $m_q(m_q-1)$. Άρα θα πρέπει να ισχύει $d^2 \geq \sum_{i\neq q} m_i^2 + m_q(m_q-1) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_q$, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. □

Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου. Μια ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη καμπύλης $C$ βαθμού $d$ διερχόμενη από αυτά με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, είναι η

$$\binom{d+2}{d} > \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2}\,. \qquad (\star)$$

Από την άλλη μεριά, αν τα $P_1, \ldots, P_5$ είναι τυχόντα γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου, υπάρχει κωνική $C$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\deg(2C) = d = 4,\ \operatorname*{mult}_{P_i}(2C) = m_i = 4,\ i = 1, \ldots, 5,$$

και

$$\binom{d+2}{2} = \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i(m_i+1)}{2} = 15.$$

Αν όμως περιοριστούμε σε ανάγωγες καμπυλες και το πλήθος των σημείων είναι το πολύ 7, τότε η συνθήκη $(\star)$ καθίσταται και αναγκαία. Έχουμε δηλαδή την εξής:

**Πρόταση 4.2.1.** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$, $r \leq 7$, είναι γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου και η $C$ μια ανάγωγη καμπύλη βαθμού $d$ που διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα. Τότε,*

$$\binom{d+2}{d} > \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2}\,.$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $m_1 > 0$.

(i) Έστω $d > 3$. Αφού $r \leq 7$, έχουμε $\binom{3+2}{3} > \frac{2(2+1)}{2} + \sum_{i=2}^{r} \frac{1(1+1)}{2}$. Άρα υπάρχει καμπύλη $C_1$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $\deg C_1 =$

3, $\mathrm{mult}_{P_1} C_1 = 2$ και $\mathrm{mult}_{P_i} C_1 = 1$, $i > 1$. Αφού η $C$ είναι ανάγωγη με βαθμό $d > 3$ δεν έχει κοινές συνιστώσες με την κυβική καμπύλη $C_1$ και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bezout, το πλήθος των σημείων τομής των $C$, $C_1$ είναι ίσο με $\deg(C) \cdot \deg(C_1) = 3d$. Τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_r$ είναι σημεία τομής των $C$, $C_1$ με πολλαπλότητα τομής τουλάχιστον $2m_1, m_2, \ldots, m_r$, αντίστοιχα. Άρα έχουμε $3d \geq 2m_1 + \sum_{i=2}^r m_i$. Εξάλλου, σύμφωνα με το λήμμα 4.2.1, $d^2 \geq \sum_{i=1}^r m_i^2 - m_1$, οπότε

$$d(d+3) = d^2 + 3d \geq \sum_{i=1}^r m_i^2 - m_1 + 2m_1 + \sum_{i=2}^r m_i = \sum_{i=1}^r m_i(m_i+1).$$

Επομένως,

$$\binom{d+2}{d} = \frac{d(d+3)}{2} + 1 > \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}.$$

(ii) Έστω $d = 3$. Τότε θα πρέπει να έχουμε αναγκαστικά $m_i \leq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Διαφορετικά, μια ευθεία διερχόμενη από το $P_i$ και από κάποιο άλλο σημείο τής καμπύλης θα έτεμνε την $C$ σε περισσότερα από τρία σημεία, πράγμα που αντιβαίνει προς το θεώρημα τού Bezout. Επίσης, $m_i = 2$ το πολύ για ένα σημείο, διότι αν $m_i = 2 = m_j$, $i \neq j$, τότε η ευθεία που περνάει από τα $P_i, P_j$ θα τέμνει πάλι την $C$ σε περισσότερα από τρία σημεία. Επομένως οι μεγαλύτερες τιμές που μπορούν να έχουν τα $m_i$, $i = 1, \ldots, r$ είναι $(m_1, \ldots, m_r) = (2, 1, 1, \ldots, 1)$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή τού $\sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$ είναι 9, δηλαδή μικρότερη τού $\binom{3+2}{3} = 10$.

(iii) Έστω $d = 2$. Τότε θα πρέπει να έχουμε αναγκαστικά $m_i \leq 1$. Λόγω τού λήμματος 4.2.1 οι μεγαλύτερες τιμές που μπορούν να λάβουν τα $m_i$, $i = 1, \ldots, r$ είναι $(m_1, \ldots, m_r) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, οπότε μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι το συμπέρασμα τού λήμματος ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.

□

**Θεώρημα 4.2.1 (Geng Xu).** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου και η $C$ μια ανάγωγη καμπύλη βαθμού $d$ διερχόμενη από αυτά με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

*(α)* $d \geq \frac{\sqrt{r-1}}{r} \sum_{i=1}^r m_i$,

*(β)* $d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$, *αν* $r \geq 2$.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $0 < m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_t$ και ότι $m_i = 0$, $i = t+1, \ldots, r$, με $t \leq r$. Η περίπτωση κατά την οπόια $t = 1$ είναι προφανής, διότι έχουμε πάντα ότι $d > m_1$. Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $t \geq 2$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε κατ' επανάληψη ότι

$$t \sum_{i=1}^{t} m_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{t} m_i)^2.$$

Πράγματι, αν $t = 2$, τότε προφανώς η παραπάνω ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει όταν $t = k$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(k+1)\sum_{i=1}^{k+1} m_i^2 &= k(m_1^2 + \cdots + m_k^2) + m_1^2 + \cdots + m_k^2 + (k+1)m_{k+1}^2 \\
&\geq (m_1 + \cdots + m_k)^2 + m_1^2 + \cdots + m_k^2 + (k+1)m_{k+1}^2 \\
&= (m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1})^2 + m_1^2 + \cdots + m_k^2 + km_{k+1}^2 \\
&\quad -2m_1m_{k+1} - \cdots - 2m_km_{k+1} \\
&= (m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1})^2 + (m_1 - m_{k+1})^2 + \cdots \\
&\quad +(m_k - m_{k+1})^2 \\
&\geq (m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1})^2.
\end{aligned}$$

(α) Από το λήμμα 4.2.1 έχουμε $d^2 \geq \sum_{i=1}^{t} m_i^2 - m_q$, για κάθε $q \leq t$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
td^2 &\geq t\sum_{i=1}^{t} m_i^2 - \sum_{i=1}^{t} m_i \geq (\sum_{i=1}^{t} m_i)^2 - \sum_{i=1}^{t} m_i \\
&= (\sum_{i=1}^{t} m_i)^2 \, (1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{t} m_i}) \\
&\geq (1 - \frac{1}{t})(\sum_{i=1}^{t} m_i)^2,
\end{aligned}$$

οπότε

$$d \geq \frac{\sqrt{t-1}}{t} \sum_{i=1}^{t} m_i \geq \frac{\sqrt{r-1}}{r} \sum_{i=1}^{r} m_i.$$

Σημειώνουμε ότι $\frac{\sqrt{t-1}}{t} \geq \frac{\sqrt{r-1}}{r}$, διότι $2 \leq t \leq r$. Πράγματι,

$$\begin{gathered}
\frac{\sqrt{t-1}}{t} \geq \frac{\sqrt{r-1}}{r} \Longleftrightarrow r^2(t-1) \geq t^2(r-1) \Longleftrightarrow \\
rt(r-t) \geq (r-t)(r+t) \Longleftrightarrow rt \geq r+t \Longleftrightarrow r(t-1) \geq t,
\end{gathered}$$

ήτοι κάτι το οποίο ισχύει.

(β) (i) Έστω ότι $r \geq 4$ και $2 \leq t \leq r-2$. Τότε,

$$\begin{gathered}
(t-2)(t-(r-2)) \leq 0 \Longrightarrow t^2 - tr + 2r - 4 \leq 0 \Longrightarrow \\
t(r-t) \geq 2r-4 \geq r \Longrightarrow t(r-t) \geq r.
\end{gathered}$$

Επομένως

$$(r-t)(\sum_{i=1}^{t} m_i^2) \geq (r-t)tm_1^2 \geq rm_1$$

και

$$r(\sum_{i=1}^{t} m_i^2 - m_1) \geq t\sum_{i=1}^{t} m_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{t} m_i)^2.$$

Επιπρόσθετα, από το λήμμα 4.2.1, έχουμε $d^2 \geq \sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_1$. Άρα

$$rd^2 \geq r(\sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_1) \geq (\sum_{i=1}^{r} m_i)^2 \Longrightarrow$$

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{r} m_i \Longrightarrow d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{r} m_i.$$

(ii) Θεωρούμε την περίπτωση όπου $t = r-1$. Τότε η ανισότητα $(r-t)\sum_{i=1}^{t} m_i^2 \geq rm_1$ ισχύει πάλι, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση κατά την οποία έχουμε $m_1 = \cdots = m_t = 1$. Πράγματι, αν $m_{i_0} \geq 2$ για κάποιο $i_0 \in \{1,\ldots,r-1\}$, τότε $m_{i_0}^2 \geq 2m_{i_0} \geq 2m_1$, οπότε

$$\begin{aligned}(r-(r-1))\sum_{i=1}^{r-1} m_i^2 &= m_1^2 + \cdots + m_{i_0}^2 + \cdots + m_{r-1}^2 \\ &\geq m_1 + \cdots + 2m_1 + \cdots + m_1 = rm_1.\end{aligned}$$

Η συνέχεια τής απόδειξης σε αυτή την περίπτωση είναι όπως στην (i). Αν $m_1 = \cdots = m_{r-1} = 1$, τότε από το λήμμα 4.2.1 έχουμε $d^2 \geq r-2$, οπότε

$$d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} \geq \sqrt{r-2} + \frac{1}{2\sqrt{r-1}}.$$

Για $r = 2$ είναι προφανές ότι $d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{r-1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{r} m_i$. Δείχνουμε ότι αν $r \geq 3$, τότε $\sqrt{r-2} + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{r-1}{\sqrt{r}}$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{r-2} + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{r-1}{\sqrt{r}} \Longleftrightarrow \\ &2\sqrt{r(r-1)(r-2)} + \sqrt{r} > 2(r-1)\sqrt{r-1} \Longleftrightarrow \\ &4r(r-1)(r-2) + r + 4r\sqrt{(r-1)(r-2)} > 4(r-1)^3 \Longleftrightarrow \\ &4r\sqrt{(r-1)(r-2)} > 3r-4 \Longleftrightarrow \\ &16r^2(r-1)(r-2) > 9r^2 + 16 - 24r \Longleftrightarrow \\ &16r^4 - 3\cdot 16r^3 + 23r^2 + 24r - 16 > 0.\end{aligned}$$

Άρα, πράγματι, αν $r \geq 3$, τότε $16r^4 - 3\cdot 16r^3 \geq 0$ και $23r^2 + 24r > 16$, οπότε $16r^4 - 3\cdot 16r^3 + 23r^2 + 24r - 16 > 0$. Άρα σε κάθε περίπτωση

$$d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{r-1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{r} m_i.$$

(iii) Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $t = r$. Από το λήμμα 4.2.1 έχουμε

$$d^2 \geq \sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m_1 \geq (r-1)m_1^2 \Longrightarrow d \geq \sqrt{r-1}\, m_1.$$

Άρα,

$$\frac{(\sum_{i=1}^{r} m_i)^2}{r} \leq \sum_{i=1}^{r} m_i^2 \leq d^2 + m_1 < (d + \frac{m_1}{2d})^2 \leq (d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}})^2 \Longrightarrow$$

$$d + \frac{1}{2\sqrt{r-1}} > \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^{r} m_i.$$

□

**Πόρισμα 4.2.1.** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου και η $C$ μια ανάγωγη καμπύλη βαθμού $d$ διερχόμενη από αυτά με πολλαπλότητα $m$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(α)* $d \geq \sqrt{r-1}\, m$,

*(β)* $d > \sqrt{r}\, m - \frac{1}{2\sqrt{r-1}}$, *αν* $r \geq 2$.

## 4.3 Επισκόπηση σχετικών αποτελεσμάτων

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια εικασία των Hirschowitz και Harbourne, την οποία ονομάζουμε *κύρια Εικασία*, η οποία είναι γενικότερη από αυτήν τού Nagata, υπό την έννοια τού ότι, αν η κύρια Εικασία αποδειχθεί αληθής, τότε και η εικασία τού Nagata θα είναι επίσης αληθής. Τα στοιχεία αυτής τής παραγράφου αντλήθηκαν από τα άρθρα [C] και [M1].

### 4.3.1 Αναμενόμενη διάσταση γραμμικών συστημάτων

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, το σύνολο των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ που διέρχονται από δοθέντα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2$ με πολλαπλότητες τουλάχιστον $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, αποτελεί έναν προβολικό χώρο, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως

$$\mathcal{L}_d\left(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i\right).$$

Ένα σύνολο όπως το παραπάνω είναι ένα *γραμμικό σύστημα* επίπεδων καμπυλών. Είδαμε, επίσης, ότι η διάσταση τού γραμμικού χώρου όλων των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ είναι $\frac{d(d+3)}{2}$ και ότι η συνθήκη τού να διέρχεται μια επίπεδη καμπύλη από ένα σημείο με πολλαπλότητα $m$ επάγει $\frac{m(m+1)}{2}$ γραμμικές εξισώσεις στους συντελεστές τού ομογενούς πολυωνύμου μεσω τού οποίου ορίζεται. Στη συνέχεια ορίζουμε την *φαινομενική (virtual)* διάσταση τού γραμμικού συστήματος $\mathcal{L}_d\left(-\sum_{i=1}^r m_i P_i\right)$ ως τον ακέραιο αριθμό

$$v_d\left(-\sum_{i=1}^r m_i P_i\right) := \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$$

και την *αναμενόμενη (expected)* διάσταση τού ίδιου γραμμικού συστήματος ως τον

$$e_d\left(-\sum_{i=1}^r m_i P_i\right) := \max\{-1, v_d\}.$$

Χρησιμοποιώνας αυτούς τούς συμβολισμούς παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ανισότητα:

$$\dim \mathcal{L}_d\Big(-\sum_{i=1}^r m_i P_i\Big) \geq e_d\left(-\sum_{i=1}^r m_i P_i\right)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι, κάτω από ποιές συνθήκες η διάσταση ενός γραμμικού συστήματος συμπίπτει με την αναμενόμενη διάστασή του. Η απάντηση εξαρτάται κατ' αρχάς από τη θέση των σημείων στο προβολικό επίπεδο, ακόμη και στην απλή περίπτωση όπου όλες οι πολλαπλότητες είναι ίσες με ένα.

**Παράδειγμα 4.3.1.** Έστω ότι οι $C, D$ είναι δυο επίπεδες καμπύλες τρίτου βαθμού που τέμνονται σε εννέα διαφορετικά σημεία $P_1, \ldots, P_9$. Σημειώνουμε ότι από το θεώρημα του Bezout δυο καμπύλες τρίτου βαθμού, που δεν έχουν κοινές συνιστώσες, τέμνονται αναγκαστικά σε εννέα σημεία, αν μετρήσουμε το καθένα τόσες φορές όσες και η πολλαπλότητα τομής σε αυτό, και γενικά, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τις δυο καμπύλες ώστε να τέμνονται στο κάθε σημείο με πολλαπλότητα ένα. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_3(-\sum_{i=1}^9 P_i)$ των επίπεδων καμπυλών βαθμού 3 που διέρχονται από τα $P_1, \ldots, P_9$ με πολλαπλότητα ένα. Αφού έχουμε ήδη δυο τέτοιες καμπύλες, ήτοι τις $C, D$, η διάσταση τού συστήματος είναι τουλάχιστον ένα. Όμως η φαινομενική διάσταση είναι

$$v_3(-\sum_{i=1}^9 P_i) = 9 - 9 = 0.$$

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, η πραγματική διάσταση τού συστήματος είναι γνήσια μεγαλύτερη από την αναμενόμενη.

Τα σημεία στο προηγούμενο παράδειγμα επιλέχθηκαν ως σημεία τομής δυο καμπυλών. Η θέση τους δηλαδή στο προβολικό επίπεδο είναι, κατά κάποιο τρόπο, ¨ειδική¨. Στην περίπτωση όμως που τα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση οι αντίστοιχες πολλαπλότητες είναι όλες ίσες με ένα και ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 4.3.1.** *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου σε γενική θέση. Τότε η διάσταση τού γραμμικού συστήματος $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r P_i)$ είναι ίση με την αναμενόμενη διάστασή του.*

Σε ό,τι ακολουθεί, θα λέμε ότι ένα σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_i P_i)$ είναι *ειδικό* αν δεν έχει την αναμενόμενη διάσταση. Διαφορετικά θα λέμε ότι το σύστημα είναι *μη ειδικό*. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, αν όλες οι πολλαπλότητες $m_i$ είναι ίσες με ένα και τα σημεία $P_i$ βρίσκονται σε γενική θέση, τότε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα είναι μη ειδικό. Από την άλλη μεριά, αν οι πολλαπλότητες είναι μεγαλύτερες από ένα, υπάρχουν γραμμικά συστήματα που είναι ειδικά ακόμα και όταν τα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση, όπως βλέπουμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.3.2.** Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_5$ είναι πέντε σημεία τού προβολικού επιπέδου ευρισκόμενα σε γενική θέση. Η φαινομενική διάσταση τού γραμμικού συστήματος των επίπεδων καμπυλών βαθμού δύο, οι οποίες διέρχονται από τα $P_1, \ldots, P_5$ με πολλαπλότητα ένα, είναι μηδέν, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 4.3.1, $\dim \mathcal{L}_2(-\sum_{i=1}^5 P_i) = 0$. Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική καμπύλη $C$ δευτέρου βαθμού διερχόμενη από τα $P_1, \ldots, P_5$. Έστω $F(X, Y, Z)$, το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο μέσω τού οποίου ορίζεται η εν λόγω καμπύλη $C$. Θέτουμε $G(X, Y, Z) = F^2(X, Y, Z)$. Τότε το πολυώνυμο $G(X, Y, Z)$ έχει βαθμό τέσσερα και η καμπύλη $2C$ που ορίζεται ως το σύνολο των θέσεων μηδενισμού τού $G(X, Y, Z)$ διέρχεται από τα σημεία $P_1, \ldots, P_5$ με πολλαπλότητα δύο στο καθένα. Επομένως το γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_4(-\sum_{i=1}^5 2P_i)$ είναι μη κενό. Όμως η αναμενόμενη διάστασή του είναι

$$e_4(-\sum_{i=1}^{5} 2P_i) = 14 - 15 = -1.$$

Άρα το σύστημα $\mathcal{L}_4(-\sum_{i=1}^5 2P_i)$ είναι ειδικό, παρότι που τα σημεία $P_1, \ldots, P_5$ βρίσκονται σε γενική θέση.

## 4.3.2 Ο αριθμός των επιπλέον τομών

Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι σημεία τού προβολικού επιπέδου. Θεωρούμε τα γραμμικά συστήματα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_i P_i)$, $\mathcal{L}_e(-\sum_{i=1}^r n_i P_i)$ και δυο επίπεδες καμπύλες $C, D$ τέτοιες ώστε $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_i P_i)$ και $D \in \mathcal{L}_e(-\sum_{i=1}^r n_i P_i)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, r$ η πολλαπλότητα τομής των $C, D$ στο σημείο $P_i$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από το γινόμενο $m_i n_i$, δηλαδή οι καμπύλες $C, D$ τέμνονται σε τουλάχιστον $\sum_{i=1}^r m_i n_i$ σημεία, μετρώντας το καθένα τόσες φορές όσες και η πολλαπλότητα τομής σε αυτό. Από το θεώρημα τού Bezout, στην περίπτωση που οι $C, D$ δεν έχουν κοινές συνιστώσες, ο αριθμός των τομών τους είναι $de$. Είναι φυσιολογικό λοιπόν, να ορίσουμε τον αριθμό των *επιπλέον τομών* των $C, D$, ως τον ακέραιο αριθμό

$$\langle C, D\rangle = de - \sum_{i=1}^{r} m_i n_i.$$

Η παραπάνω ποσότητα δεν εξαρτάται από την επιλογή των καμπυλών $C, D$, αλλά μόνο από τούς βαθμούς τους και την πολλαπλότητα με την οποία διέρχονται από καθένα από τα σημεία $P_1, \ldots, P_r$, δηλαδή μονο από τα γραμμικά συστήματα στα οποία αυτές ανήκουν.

**Σημείωση 4.3.1.** Η απεικόνιση

$$\langle -, -\rangle : \{(C, D) \mid C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i),\ D \in \mathcal{L}_e(-\sum_{i=1}^{r} n_i P_i)\} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

όπου $d, e, m_i, n_i \in \mathbb{N}$, είναι $\mathbb{Z}$-διγραμμική.

**Σημείωση 4.3.2.** Αν ο αριθμός των επιπλέον τομών δυο καμπυλών $C, D$ είναι αρνητικός, τότε, λόγω τού θεωρήματος τού Bezout, οι $C, D$ διαθέτουν κάποια κοινή συνιστώσα.

### 4.3.3 Το Αριθμητικό και το Γεωμετρικό Γένος

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε το γένος $g$ μιας λείας επίπεδης καμπύλης βαθμού $d$ ως

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Έστω τώρα μια ανάγωγη επίπεδη καμπύλη $C$ πού έχει ιδιάζοντα σημεία τα $P_1, \ldots, P_r$. Σημειώνουμε ότι το πλήθος των ιδιαζόντων σημείων μιας επίπεδης καμπύλης είναι πάντοτε πεπερασμένο. Ονομάζουμε *γεωμετρικό γένος* τής καμπύλης $C$, το γένος τής λείας καμπύλης (επιφάνειας Riemann) που προκύπτει ύστερα από τη διάλυση των ιδιωμάτων τής $C$. Αποδεικνύεται ότι αν η καμπύλη $C$ έχει βαθμό $d$, τότε το γεωμετρικό της γένος είναι ίσο με

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta,$$

όπου το $\delta$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός που εξαρτάται από το είδος των ιδιομάτων τής καμπύλης. Για ιδιάζοντα σημεία με σταθερή πολλαπλότητα, η ελάχιστη τιμή τού $\delta$ επιτυγχάνεται όταν το ιδίωμα είναι σύνηθες. Συγκεκριμένα, αν η $C$ έχει μόνο συνήθη ιδιώματα στα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, δηλαδή αν κοντά στο καθένα από τα $P_i$ η $C$ αποτελείται από $m_i$ κλάδους με διαφορετικές εφαπτομένες, τότε έχουμε

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

και, ως εκ τούτου, το γεωμετρικό γένος τής καμπύλης $C$ δίδεται από τον τύπο

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \ .$$

Από την άλλη μεριά, οποιαδήποτε ανάγωγη καμπύλη διερχόμενη από τα σημεία $P_1, \dots, P_r$ με πολλαπλότητες τουλάχιστον $m_1, \dots, m_r$ θα έχει γεωμετρικό γένος μικρότερο ή ίσο τού παραπάνω αριθμού. Παρατηρούμε ότι, εξ ορισμού, το γεωμετρικό γένος μιας ανάγωγης καμπύλης είναι μη αρνητικό. Έστω τώρα $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$. Ορίζουμε ως *(αριθμητικό) γένος τής* $C$ (θεωρουμένης ως στοιχείου τού γραμμικού συστήματος $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$) τον αριθμό

$$p(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \ .$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω ορολογία προέρχεται από το γεγονός ότι το γένος τής $C$ συμπίπτει με το αριθμητικό γένος (με τον συνήθη ορισμό) τού γνήσιου μετασχηματισμού τής $C$ στην ανατίναξη τού προβολικού επιπέδου στα σημεία $P_1, \dots, P_r$. Παρατηρούμε ότι, αν η $C$ είναι ανάγωγη τότε $p(C) \geq g(C) \geq 0$ και, επίσης, ότι αν $p(C) = 0$, τότε $g(C) = 0$. Κατά συνέπειαν, ύστερα από την διάλυση των ιδιωμάτων της, η $C$ είναι μια σφαίρα τού Riemann.

### 4.3.4 (-1)-καμπύλες και η κύρια Εικασία

Σε ό,τι ακολουθεί, όταν μιλάμε για γένος μιας καμπύλης $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$ θα ενοούμε το αριθμητικό της γένος. Θεωρούμε μια καμπύλη $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$. Ονομάζουμε αριθμό *αυτοτομής* τής $C$ τον αριθμό των επιπλέων τομών

$$\langle C^2 \rangle = \langle C, C \rangle = d^2 - \sum_{i=1}^{r} m_i^2.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός αυτοτομής μιας καμπύλης μπορεί να είναι αρνητικός. Δίνουμε στη συνέχεια δυο τέτοια παραδείγματα.

**Παράδειγμα 4.3.3.** Θεωρούμε δυο σημεία τού προβολικού επιπέδου $P_1, P_2$ και μια ευθεία $C$ που διέρχεται από αυτά (υπάρχει μοναδική). Τότε, $\langle C^2 \rangle = 1 - 2 = -1$.

**Παράδειγμα 4.3.4.** Θεωρούμε πέντε σημεία τού προβολικού επιπέδου $P_1, \dots, P_5$ και μια δευτεροβάθμια καμπύλη $C$ που διέρχεται από αυτά (υπάρχει μοναδική). Τότε, $\langle C^2 \rangle = 4 - 5 = -1$.

Οι καμπύλες των δύο τελευταίων παραδειγμάτων έχουν ακόμη ένα κοινό στοιχείο, πέρα από το ότι ο αριθμός αυτοτομής τους είναι $-1$. Το γένος τους είναι μηδέν. Ανάγωγες επίπεδες καμπύλες με αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται $(-1)$-καμπύλες. Στη συνέχεια μελετάμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι $(-1)$-καμπύλες με τα ειδικά συστήματα.

Στο παράδειγμα 4.3.2, είδαμε την περίπτωση μιας καμπύλης $C$, τέτοιας ώστε η διπλάσια αυτής, δηλαδή η καμπύλη $2C$, δεν αναμένεται να υπάρχει (διότι η αναμενόμενη διάσταση τού συστήματος είναι αρνητική). Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε, επίσης, ότι η καμπύλη $C$ είναι μια $(-1)$-καμπύλη. Αυτό είναι ένα γενικότερο φαινόμενο: αν πάρουμε μια ανάγωγη καμπύλη $E$ σε ένα σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$ το οποίο αναμένουμε να είναι μη κενό (δηλ. να έχει μη αρνητική αναμενόμενη διάσταση) αλλά η διπλάσιά της $2C$ δεν αναμένεται να υπάρχει, δηλαδή το σύστημα $\mathcal{L}_{2d}(-\sum_{i=1}^r 2m_iP_i)$ έχει αρνητική αναμενόμενη διάσταση, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η $E$ είναι μια $(-1)$-καμπύλη. Πράγματι, ένας εύκολος υπολογισμός μας δίνει τις ακόλουθες ισότητες:

$$v_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i) =< E^2 > -p(E)+1, \qquad p(2E) =< E^2 > -2p(E)-1.$$

Αφού το σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$ είναι μή κενό θα πρέπει να έχουμε

$$v_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i) \geq 0.$$

Εξάλλου, αφού το $\mathcal{L}_{2d}(-\sum_{i=1}^r 2m_iP_i)$ έχει αρνητική αναμενόμενη διάσταση θα πρέπει

$$v_{2d}(-\sum_{i=1}^r 2m_iP_i) \leq -1.$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} < E^2 > -p(E)+1 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad < E^2 > -p(E) \geq -1\,, \\ 4 < E^2 > -p(2E)+1 \leq -1 \quad &\Longrightarrow \quad < E^2 > -p(E) \leq -1 - \frac{p(E)}{3}\,. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $p(E) \geq 0$, θα πρέπει $p(E) = 0$ και επίσης $< E^2 >= -1$, δηλ. η $E$ να είναι μια $(-1)$-καμπύλη.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ειδικά γραμμικά συστήματα χρησιμοποιώντας $(-1)$-καμπύλες. Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1,\ldots,P_r$ είναι σημεία τού επιπέδου. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$, τέτοιο ώστε μια (και επομένως και κάθε) καμπύλη $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$ να έχει *αρνητικό* αριθμό επιπλέον τομών με μια ανάγωγη $(-1)$-καμπύλη $E \in \mathcal{L}_e(-\sum_{i=1}^r n_iP_i)$, για κάποια $e, n_1, \ldots, n_r$. Δηλαδή, $\langle C, E\rangle = -N$, $N \geq 1$, για κάθε καμπύλη $C \in \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$. Σύμφωνα με την παρατήρηση 4.3.2 και αφού η $E$ είναι ανάγωγη, η καμπύλη $C$ περιέχει την $E$ ως συνιστώσα. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την καμπύλη

$$C' = C - E \in \mathcal{L}_{d-e}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - n_i)P_i\big).$$

Τότε, αν $N \geq 2$, ο αριθμός επιπλέον τομών τής $C'$ (και κάθε καμπύλης τού συστήματος $\mathcal{L}_{d-e}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - n_i)P_i)\big)$ και τής $E$ είναι $\langle C', E\rangle = -N+1 < 0$. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία $N$-φορές, καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_{d-Ne}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - Nn_i)P_i\big)$, τέτοιο ώστε για κάθε καμπύλη $D \in \mathcal{L}_{d-Ne}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - Nn_i)P_i\big)$ έχουμε $\langle D, E\rangle = 0$. Επομένως, κάθε στοιχείο τού γραμμικού συστήματος $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$ περιέχει το $N$ πολλαπλάσιο τής καμπύλης $E$. Επομένως υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία τού συστήματος $\mathcal{L}_{d-Ne}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - Nn_i)P_i\big)$ με αυτά τού αρχικού συστήματος $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$ και η οποία δίδεται από την απεικόνιση $D \to D + NE$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i) &= \dim \mathcal{L}_{d-Ne}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - Nn_i)P_i\big) \\
&\geq v_{d-Ne}\big(-\sum_{i=1}^{r}(m_i - Nn_i)P_i\big) \\
&= v_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i) + \frac{N(N-1)}{2} > v_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)
\end{aligned}$$

όταν $N \geq 2$. Άρα το γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$ είναι ειδικό.

Τώρα αντιστρέφοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε ειδικά γραμμικά συστήματα: Θεωρούμε ένα μη κενό γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}$ και μια ανάγωγη $(-1)$-καμπύλη $E$, τέτοια ώστε να ισχύει $\langle C, E\rangle = 0$ για κάθε καμπύλη $C \in \mathcal{L}$. Το σύστημα $\mathcal{L} + NE$ είναι ειδικό για κάθε $N \geq 2$. Επιπλέον, όλα τα μέχρι τώρα γνωστά παραδείγματα ειδικών γραμμικών συστημάτων μπορούν να προκύψουν με την παραπάνω διαδικασία. Η κύρια εικασία είναι ότι οποιοδήποτε ειδικό γραμμικό σύστημα μπορεί πράγματι να προκύψει με αυτόν τρόπο.

**Η κύρια Εικασία.** [Hirschowitz-Harbourne] *Έστω ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ είναι $r$ σημεία τού προβολικού επιπέδου ευρισκόμενα σε γενική θέση. Το γραμμικό σύστημα $\mathcal{L} = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^{r} m_i P_i)$ είναι ειδικό αν και μόνον αν υπάρχει μια $(-1)$-καμπύλη $E$ τέτοια ώστε*

$$\langle C, E\rangle = -N,\ N \geq 2,$$

*για κάθε καμπύλη $C \in \mathcal{L}$.*

Η κύρια Εικασία παραμένει ακόμη ανοιχτή. Πρόσφατα, η έρευνα έχει επικεντρωθεί στις ειδικές περιπτώσεις όπου όλες οι πολλαπλότητες είναι ίσες, δηλαδή στα γραμμικά συστήματα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r mP_i)$ των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ που διέρχονται από $r$ γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου με πολλαπλότητα τουλάχιστον $m$. Η κύρια Εικασία έχει αποδειχθεί ότι αληθεύει όταν $r \leq 9$ ή όταν $m \leq 12$, από τούς Castelnuovo, Nagata, Gimigliano, Harbourne και Hirschowitz, Ciliberto, Miranda, αντίστοιχα. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία $m_1 = \cdots m_r = m$, τα γραμμικά συστήματα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r mP_i)$ περιέχουν $(-1)$-καμπύλες μόνον όταν $r = 2, 3, 5, 6, 7, 8$. Από το τελευταίο άγεται ότι αν η κύρια Εικασία είναι αληθής, τότε *κάθε* γραμμικό σύστημα $\mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$, με $r \geq 9$, θα είναι μη ειδικό. Με βάση αυτό αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση

**Πρόταση 4.3.1.** *Η κύρια εικασία συνεπάγεται την εικασία τού Nagata.*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_r$, $r \geq 10$, είναι γενικά σημεία τού επιπέδου και ότι η $C$ είναι μια καμπύλη βαθμού $d$ που διέρχεται από αυτά με πολλαπλότητα $m$. Από το θεώρημα 3.2.2 γνωρίζουμε ότι η εικασία τού Nagata ισχύει όταν το $r$ είναι τέλειο τετράγωνο. Την αποδεικνύουμε τώρα και στην περίπτωση που το $r$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Έστω $A$ μια ανάγωγη συνιστώσα τής $C$. Τότε η $A$ ανήκει σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο είναι μη ειδικό (από την κύρια εικασία). Συνεπώς η διάστασή του, η οποία είναι $\geq 0$ (διότι περιέχει την καμπύλη $A$), ισούται με την φαινομενική διάστασή του και η οποία επομένως θα είναι $\geq 0$. Συνεπώς,

$$< A^2 > -p(A) + 1 \geq 0$$

και

$$< A^2 > \geq p(A) - 1 \geq -1.$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $< A^2 > \neq -1$. Πράγματι, αν $< A^2 > = -1$, τότε από την παραπάνω ανισότητα συνάγουμε ότι $p(A) = 0$ και επομένως η $A$ θα ήταν μια $(-1)$-καμπύλη, πράγμα άτοπο, διότι $r \geq 10$. Συνεπώς, για κάθε ανάγωγη συνιστώσα $A_i$ τής $C$, έχουμε ότι $< A_i^2 > \geq 0$ και, ως εκ τούτου,

$$< C^2 > = d^2 - rm^2 \geq 0.$$

Επομένως, $d \geq \sqrt{r}\, m$ και αφού το $r$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο έχουμε ότι $d > \sqrt{r}\, m$. □

Η κύρια τεχνική που ακολουθούν οι ερευνητές για να ελέγξουν πότε ένα γραμμικό σύστημα έχει την αναμενόμενη διάσταση είναι η εξής: Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το γραμμικό σύστημα των επίπεδων καμπυλών βαθμού $d$ που διέρχονται από $r$ γενικά σημεία τού προβολικού επιπέδου $P_1, \ldots, P_r$ με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_r$, αντίστοιχα, δηλαδή το σύστημα $\mathcal{L} = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^r m_iP_i)$. Αν θεωρήσουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_r$ βρίσκονται σε μια πιο ειδική θέση, τότε η διάσταση τού αντίστοιχου γραμμικού συστήματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη διάσταση τού $\mathcal{L}$ στην περίπτωση που τα σημεία $P_1, \ldots, P_r$ είναι γενικά. Από την άλλη μεριά, η ειδική θέση των σημείων διευκολύνει τον υπολογισμό τής διάστασης. Επομένως, αν καταφέρουμε να βρούμε μια ειδική θέση των $P_1, \ldots, P_r$, έτσι ώστε η διάσταση τού $\mathcal{L}$ να ταυτίζεται με την αναμενόμενη διάστασή του, τότε και για τα γενικά σημεία, η πραγματική διάσταση τού αντίστοιχου συστήματος θα ταυτίζεται με την αναμενόμενη, οπότε θα είναι μη ειδικό.

# Βιβλιογραφία


[E] D. Eisenbud: *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1994

[C] C. Ciliberto: *Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and the Waring's problem*, European Congress in Mathematics vol.1 (2000) 289-316.

[CK] C. Ciliberto, A. Kouvidakis: *On the symmetric product of a curve with general moduli*, Geometriae Dedicata, 78 (1999), 327-343.

[M1] R. Miranda: *Linear systems of plane curves*, Notices of the A.M.S. 46 (1999), 192-202.

[M2] R. Miranda: *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, 5, A.M.S., Providence, R.I., 1995.

[N1] M. Nagata: *On the 14-th problem of Hilbert*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958.

[N2] M. Nagata: *On the 14-th problem of Hilbert*, Americal Journal of Mathematics 81 (1959), 766-772.

[U] K. Ueno: *An introduction to Algebraic Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, 166, A.M.S., Providence, RI, 1997.

[X] G. Xu: *Curves in* $\mathbb{P}^2$ *and symplectic packing*, Mathematische Annalen 299 (1994), 609-613.