Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή εργασία

Ο χώρος των ολομόρφων διανυσματικών δεσμών σε μια επιφάνεια Riemann

Γεώργιος Αθανασίου Κυδωνάκης

Επιβλέποντες Καθηγητές
Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος, Αλέξανδρος Κουβιδάκης

Ηράκλειο 2011

University of Crete

School of Sciences
Department of Mathematics

Master thesis

The space of holomorphic vector bundles on a Riemann surface

Georgios Athanasiou Kydonakis

Thesis advisers
Konstantin Athanassopoulos, Alexandros Kouvidakis

Iraklion 2011

Επιτροπή Αξιολόγησης

- Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
- Αλέξανδρος Κουβιδάκης
- Ιωάννης Πλατής

Ευχαριστίες

Θα ήθελα και από τη θέση αυτή να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τους επιβλέποντες καθηγητές μου, κυρίους Κ. Αθανασόπουλο και Α. Κουβιδάκη. Η υπομονή και η βοήθειά τους προς την εκπλήρωση της εργασίας αυτής ήταν πολύ παραπάνω από σημαντικές, και η συνέπειά τους στις συναντήσεις μας κάθε φορά υπήρξε αξιοσημείωτη. Είμαι επίσης ευγνώμων για το ενδιαφέρον τους καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ως προς την προσφορά των εκάστοτε μαθημάτων μελέτης που τους ζητούσα. Δεν θα ήθελα ακόμη να παραλείψω την πολύ μεγάλη βοήθεια του κυρίου Ι. Πλατή στο τελευταίο κομμάτι της εργασίας, το οποίο αφορούσε την παραμετρικοποίηση των σύμμορφων δομών μιας επιφάνειας Riemann. Η βοήθεια και η συμβολή του στην κατανόηση αυτού του μέρους της εργασίας ήταν πολύ σπουδαίες και για τούτο επίσης τον ευχαριστώ θερμά.

Γ. Κυδωνάκης

Περίληψη-Summary

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι ολόμορφες διανυσματικές δέσμες πάνω από επιφάνειες Riemann. Συγκεκριμένα, αναλύεται η δουλειά του N. J. Hitchin στο άρθρο του, ¨*Gauge theory on Riemann Surfaces*¨. Στο άρθρο αυτό προσεγγίζεται η έννοια της stability από τη σκοπιά της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας και γίνεται η συσχέτιση των stable δεσμών Higgs, δια μέσου της θεωρίας gauge, με τις αυτοσυζυγείς εξισώσεις Yang-Mills στον $\mathbb{R}^4$. Η μελέτη αυτή συνεισέφερε στην απόδειξη του non abelian Hodge theorem από τους K. Corlette και C. Simpson λίγα χρόνια αργότερα και έδωσε νέα αποτελέσματα στη γεωμετρία των 4-πολλαπλοτήτων αλλά και των επιφανειών Riemann.

Λέξεις κλειδιά: Riemann surface, συνοχή, ολόμορφη δομή, gauge transformation, stability, symplectic, moment map, Higgs bundle, self-duality equations.

In the present work are studied holomorphic vector bundles over Riemann surfaces. Particularly, we analyze the work of N. J. Hitchin in his article, ¨*Gauge theory on Riemann Surfaces*¨. In this article, stability is approached by means of Symplectic Geometry and stable Higgs bundles are connected using gauge theory with the self-dual Yang-Mills equations over $\mathbb{R}^4$. These studies have contributed to the proof of the non abelian Hodge theorem by K. Corlette and C. Simpson a few years later and have led to some new developments in the geometry of 4-manifolds and Riemann surfaces.

Key words: Riemann surface, connection, holomorphic structure, gauge transformation, stability, symplectic, moment map, Higgs bundle, self-duality equations.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το πρόβλημα που μελετάμε σε αυτήν την εργασία σχετίζεται με τις αναπαραστάσεις της θεμελιώδους ομάδας μιας επιφάνειας Riemann. Συγκεκριμένα, έστω M μια επιφάνεια Riemann γένους g. Επιφάνειες Riemann του ιδίου γένους είναι τοπολογικά ισόμορφες. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(M)$ έχει $2g$ γεννήτορες $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ οι οποίοι ικανοποιούν τη συνθήκη $\prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = 1$. Θεωρούμε τώρα μια αναπαράσταση $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Για $n = 1$, η $\rho : \pi_1(M) \to \mathbb{C}^*$ καθορίζεται πλήρως από την εικόνα των γεννητόρων γ_i, δηλ. από ένα στοιχείο του χώρου $(\mathbb{C}^*)^{\times 2g}$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση οι αναπαραστάσεις της $\pi_1(M)$ στη $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ παραμετρίζονται από το χώρο $[\mathbb{C}^*]^{\times 2g}$. Σημειώνουμε ότι λόγω της αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στην ομάδα $\mathbb{C}^*$, η συνθήκη που ικανοποιούν οι γεννήτορες της $\pi_1(M)$ ικανοποιείται αυτομάτως. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση όλες οι αναπαραστάσεις είναι ανάγωγες και η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται από τη συζυγία των αναπαραστάσεων είναι τετριμμένη. Όταν $n \geq 2$ η απάντηση είναι ανάλογη, με τη διαφορά ότι οι εικόνες θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη που επάγεται από αυτή που ικανοποιούν οι γεννήτορες. Επομένως ο χώρος των αναπαραστάσεων είναι ένα υποσύνολο του $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]^{\times 2g}$. Αν μάλιστα θέλουμε να μελετήσουμε το χώρο των αναπαραστάσεων μέχρι ισοδυναμίας, θα πρέπει να πάρουμε το πηλίκο του παραπάνω χώρου κάτω από τη διαγώνια δράση της συζυγίας πινάκων και η εικόνα γίνεται ακόμα πιο σύνθετη.

Στην παραπάνω προσέγγιση έπαιξε ρόλο μόνον η τοπολογική δομή της επιφάνειας Riemann M και όχι η μιγαδική (ολόμορφη) δομή της. Το επόμενο (και πολύ πιο δύσκολο) ερώτημα είναι το εξής: αντιστοιχούν οι αναπαραστάσεις της επιφάνειας Riemann M σε αντικείμενα που σχετίζονται με την ολόμορφη δομή της M; Και ως συνέπεια αυτού, εφοδιάζεται ο χώρος των αναπαραστάσεων της $\pi_1(M)$ στην $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ με μια ολόμορφη δομή που επάγεται από την ολόμορφη δομή της M; Ειδικότερα, λαμβανομένου υπ' όψιν ότι μια επιφάνεια Riemann είναι μια αλγεβρογεωμετρική πολλαπλότητα, επάγεται με τον παραπάνω τρόπο μια αλγεβρογεωμετρική δομή στον παραπάνω χώρο;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Η απαρχή της σύνδεσης των αναπαραστάσεων της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(M)$ στην $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ με τη μιγαδική δομή στην M είναι το θεώρημα που αποδεικνύει την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και τις επίπεδες δομές με τις οποίες εφοδιάζεται η τετριμμένη C^∞-δέσμη $V = M \times \mathbb{C}^n$. Το θεμελιώδες θεώρημα, το λεγόμενο non-abelian Hodge Theorem, που βασίστηκε κυρίως σε δουλειά των Hitchin-Corlette-Simpson και επέκτεινε προγενέστερα αποτελέσματα των Narasimhan-Seshadri, δείχνει την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας ανάμεσα στις ανάγωγες αναπαραστάσεις (μέχρι συζυγίας) της $\pi_1\left(M\right)$ στην $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}\right)$ και στις stable δέσμες Higgs (μέχρι ισομορφίας). Μια δέσμη Higgs είναι ένα ζεύγος $\left(E,\theta\right)$, όπου E είναι μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη τάξης n και βαθμού 0 στην M και θ είναι μια ολόμορφη απεικόνιση $\theta : E \to E \otimes \Omega^1$. Η έννοια της stability είναι μια αριθμητική συνθήκη που παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη γεωμετρική θεωρία των αναλλοιώτων (GIT). Η τελευταία εισήχθη από τον Mumford και αφορά το πρόβλημα της κατασκευής καλών αλγεβρογεωμετρικών πηλίκων μιας πολλαπλότητας ως προς τη δράση μιας ομάδας. Βασικό πεδίο εφαρμογής αυτής της θεωρίας είναι η κατασκευή χώρων παραμέτρων αλγεβρογεωμετρικών αντικειμένων. Η παραπάνω αντιστοιχία επάγεται, με μη τετριμμένο τρόπο, από την ανάλυση της επίπεδης δομής που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση στα (1,0) και (0,1) μέρη της. Το προγενέστερο αποτέλεσμα των Narasimhan-Seshadri, αποδείκνυε την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας ανάμεσα στις ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις (μέχρι συζυγίας) της $\pi_1\left(M\right)$ στην $\mathrm{U}_n\left(\mathbb{C}\right)$ και στις stable διανυσματικές δέσμες τάξης n και βαθμού 0 (και αντιστοιχεί στην περίπτωση $\theta = 0$ του γενικού θεωρήματος).

Για $n = 1$ η παραπάνω αντιστοιχία εξάγεται από τη διάσπαση του Hodge στην πρώτη ομάδα συνομολογίας της M. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την τοπολογική διάσπαση (πολικές συντεταγμένες)

$$\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}^+$$

και επομένως

$$\left[\mathbb{C}^*\right]^{\times 2g} = \left[S^1\right]^{\times 2g} \times \left[\mathbb{R}^+\right]^{\times 2g} \qquad \left(*\right)$$

Τη διάσπαση $\left(*\right)$ μπορούμε να την ανυψώσουμε σε διάσπαση ολομόρφων δομών ως εξής. Θεωρούμε τη διάσπαση του Hodge:

$$H^1\left(M,\mathbb{C}\right) = H^1\left(M,\mathcal{O}\right) \oplus H^0\left(M,\Omega^1\right)$$

Η ομάδα $H^1\left(M,\mathbb{C}\right)$ είναι η αβελιανοποίηση της ομάδας $\pi_1\left(M\right)$ και είναι ισόμορφη με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{\times 2g}$. Μια εκλέπτυνση του παραπάνω θεωρήματος επάγει μια διάσπαση της ομάδας ομολογίας $H^1\left(M,\mathbb{C}^*\right)$ η οποία είναι ισόμορφη με την ομάδα $\left[\mathbb{C}^*\right]^{\times 2g}$ και μπορεί, εξ' ορισμού, να θεωρηθεί ως η ομάδα των αναπαραστάσεων της $\pi_1\left(M\right)$ στη $\mathbb{C}^*$.
Συγκεκριμένα έχουμε

$$H^1\left(M,\mathbb{C}^*\right) = H^1\left(M,\mathcal{O}^*\right)_{c_1=0} \oplus H^0\left(M,\Omega^1\right).$$

Η υποκείμενη τοπολογική διάσπαση που επάγει η παραπάνω σχέση είναι ακριβώς η διάσπαση $\left(*\right)$. Πράγματι, η ομάδα $H^1\left(M,\mathcal{O}^*\right)_{c_1=0}$ παραμετρά ολόμορφες line bundles βαθμού 0 και είναι η ομάδα Picard $\mathrm{Pic}^0\left(M\right)$ της M (που τοπολογικά είναι ισόμορφη με τον τόρο $\left[S^1\right]^{\times 2g}$). Ο χώρος $H^0\left(M,\Omega^1\right)$ των ολόμορφων διαφορικών είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης g που καθίσταται τοπολογικά ισόμορφος με τον $\left[\mathbb{R}^+\right]^{\times 2g}$ δια μέσου της απεικόνισης $\omega \mapsto \left(\exp\left(-\int_{\alpha_i} \omega + \bar{\omega}\right), \exp\left(-\int_{\beta_i} \omega + \bar{\omega}\right)\right)$, $i = 1, \ldots, g$.

Επομένως, σε μια αναπαράσταση της $\pi_1(M)$ στην $\mathbb{C}^*$, δηλαδή ένα στοιχείο της $\left[\mathbb{C}^*\right]^{\times 2g} \cong H^1(M, \mathbb{C}^*)$, αντιστοιχεί μια ολόμορφη line bundle L βαθμού 0 και ένα ολόμορφο διαφορικό ω. Το ω μπορούμε, με τετριμμένο τρόπο, να θεωρήσουμε ότι αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $\theta : L \to L \otimes \Omega^1$ (και αντίστροφα!) Επομένως σε μια αναπαράσταση της $\pi_1(M)$ στην $\mathbb{C}^*$ αντιστοιχεί μια δέσμη Higgs (L, θ). Σημειώνουμε, ότι για την περίπτωση $n = 1$, η συνθήκη της stability ικανοποιείται αυτομάτως και έτσι δεν υπεισέρχεται στην ανάλυση. Επιπλέον, λόγω της παραπάνω διάσπασης, τα ζεύγη $(L, 0)$ αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις με εικόνα στο $\left[S^1\right]^{\times 2g}$, δηλ. στις unitary αναπαραστάσεις (θ. Narasimhan-Seshadri).

Για να συνοψίσουμε επομένως την περίπτωση $n = 1$: Οι unitary αναπαραστάσεις της $\pi_1(M)$ στην ομάδα $U(1)$ αντιστοιχούν στις ολόμορφες line bundles L βαθμού 0. Αυτές παραμετρίζονται –μέχρι ισομορφίας– από την ομάδα $\mathrm{Pic}^0(M)$, ο οποίος είναι ένας αλγεβρογεωμετρικός τόρος (αβελιανή πολλαπλότητα). Οι αναπαραστάσεις της $\pi_1(M)$ στην ομάδα $\mathbb{C}^*$ παραμετρίζονται από την αλγεβρογεωμετρική πολλαπλότητα $\mathrm{Pic}^0(M) \times H^0(M, \Omega^1)$ που μπορεί να θεωρηθεί ως ο συνεφαπτόμενος χώρος της $\mathrm{Pic}^0(M)$.

Για να μελετήσουμε την περίπτωση $n \geq 2$, θα πρέπει πρώτα να βρούμε το ανάλογο της $\mathrm{Pic}^0(M)$ δηλ. του χώρου που παραμετρά –μέχρι ισομορφίας– διανυσματικές δέσμες τάξης $n \geq 2$ και βαθμού 0. Για να βρούμε όμως έναν καλό αλγεβρογεωμετρικό χώρο $\mathrm{Ur}(n, 0)$ που να τις παραμετρά θα πρέπει, σύμφωνα με τη GIT, να περιοριστούμε στις stable διανυσματικές δέσμες. Σύμφωνα με το θεώρημα των Narasimhan-Seshadri ο $\mathrm{Ur}(n, 0)$ είναι ακριβώς ο χώρος που παραμετρά (μέχρι συζυγίας) τις ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις της $\pi_1(M)$ στην $U_n(\mathbb{C})$.

Στη γενική περίπτωση, οι stable δέσμες Higgs παραμετρώνται, σύμφωνα με τη GIT, από έναν καλό αλγεβρογεωμετρικό χώρο $\mathrm{H}(n, 0)$ ο οποίος, σε αναλογία με την περίπτωση $n = 1$, μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μεγάλος ανοιχτός υπόχωρος του συνεφαπτόμενου χώρου του $\mathrm{Ur}(n, 0)$. Σύμφωνα με το non–abelian Hodge theorem, ο παραπάνω χώρος είναι ακριβώς ο χώρος που παραμετρά –μέχρι ισομορφίας– τις ανάγωγες αναπαραστάσεις (μέχρι συζυγίας) της $\pi_1(M)$ στη $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Σε αυτή την εργασία επικεντρωνόμαστε κυρίως στη δουλειά του Hitchin σχετικά με το παραπάνω θεώρημα. Η συνεισφορά του στηρίζεται στην ερμηνεία που έδωσε για τη stability μιας δέσμης Higgs με όρους συμπλεκτικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα τη συσχέτισή τους δια μέσου της θεωρίας *gauge* με τις αυτοσυζυγείς εξισώσεις Yang-Mills.

Η εργασία αυτή βασίστηκε στο άρθρο του N. J. Hitchin, "Gauge theory on Riemann Surfaces", έτσι και η δομή των κεφαλαίων εδώ ακολουθεί τη δομή του εν λόγω άρθρου. Στο κεφάλαιο 0 παραθέτουμε τους βασικούς ορισμούς γύρω από τις C^∞ και τις ολόμορφες διανυσματικές δέσμες, ώστε η παρουσίαση να είναι κατά το δυνατόν αυτοδύναμη. Στο κεφάλαιο 1 αναλύονται οι έννοιες της συνοχής και της ολόμορφης δομής πάνω από μια διανυσματική δέσμη, καθώς και η σχέση μεταξύ των δύο δομών αυτών. Αποδεικνύεται επίσης εδώ το πολύ βασικό αποτέλεσμα, ότι οι αναπαραστάσεις της θεμελιώδους ομάδας μιας επιφάνειας Riemann M στη γενική γραμμική ομάδα παραμετρίζονται από τις επίπεδες συνοχές στην τετριμμένη διανυσματική δέσμη πάνω από την M. Για τη συνέχεια είναι απαραίτητο το σχετικό υπόβαθρο περί διαιρετών από την αλγεβρική γεωμετρία, το οποίο αποτελεί και το περιεχόμενο του κεφαλαίου 2. Το πολύ σπουδαίο θεώρημα Riemann-Roch συμπεριλαμβάνεται εδώ χωρίς απόδειξη, είναι όμως ένα αποτέλεσμα στο οποίο θα αναφερόμαστε συχνά στη συνέχεια. Ένα επίσης κεντρικό αποτέλεσμα που παρουσιάζεται, είναι το γεγονός ότι οι C^∞ μιγαδικές line bundles καθορίζονται έως C^∞ ισομορφισμού από την πρώτη Chern class τους. Από το κεφάλαιο 3 και μετά ασχολούμαστε με το κυρίως θέμα της εργασίας. Αποδεικνύεται αρχικά ότι οι unitary κλάσεις ισοδυναμίας επίπεδων συνοχών παραμετρίζονται από ολόμορφες line bundles βαθμού 0, ενώ η επέκταση αυτού, το θεώρημα Narasimhan-Seshadri, αποτελεί ένα από τα βασικότερα αποτελέσματα της εργασίας. Από αυτό το σημείο αρχίζει να φαίνεται και η σχέση που έχει η έννοια της stability με τις επίπεδες συνοχές. Η δουλειά του Hitchin αφορά την προσέγγιση της έννοιας αυτής με τη χρήση συμπλεκτικής γεωμετρίας, στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4. Καταλήγουμε εδώ ότι η αριθμητική έννοια της stability με την απειροδιάστατη έννοια μέσω της moment map για το χώρο των συνοχών ταυτίζονται. Στο κεφάλαιο 5 που είναι και το τελευταίο, ασχολούμαστε με την περαιτέρω μελέτη αλλά και τις εφαρμογές που προκύπτουν από την προσέγγιση αυτή, το κομμάτι δηλαδή που αποτελεί τη βασική δουλειά του Hitchin στο άρθρο του. Αρχικά γίνεται η σύνδεση της έννοιας της stability με τις αυτοσυζυγείς εξισώσεις Yang-Mills στον $\mathbb{R}^4$, ενώ στη συνέχεια ορίζεται stability αυτή τη φορά για ζεύγη ολομόρφων διανυσματικών δεσμών και ολομόρφων ομομορφισμών. Κλείνουμε την εργασία αυτή με μια εφαρμογή η οποία καταδεικνύει επιπλέον την ευρύτητα της δουλειάς του Hitchin, βρίσκοντας έναν διαφορετικό τρόπο, από ότι γίνεται στο θεώρημα του Teichmüller, να παραμετρίσουμε τις ολόμορφες δομές μιας επιφάνειας Riemann από το χώρο των holomorphic quadratic differentials.

Ηράκλειο, Ιούνιος 2011

0

C^∞ και ολόμορφες διανυσματικές δέσμες

Το κεφάλαιο αυτό είναι προπαρασκευαστικό. Παραθέτουμε αρχικά τους βασικούς ορισμούς και τις κυριότερες εκφάνσεις γύρω από τις C^∞ διανυσματικές δέσμες πάνω από μια επιφάνεια Riemann που θα αναφερόμαστε στη συνέχεια. Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή της ισομορφίας δύο διανυσματικών δεσμών πάνω από την ίδια βάση σε σχέση με τους αντίστοιχους σύγκυκλους των δεσμών (Πρόταση 0.12). Κατόπιν, με τρόπο ανάλογο προς τις C^∞, εισάγονται οι ολόμορφες διανυσματικές δέσμες, με τις οποίες θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 0.1. Έστω E, M δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες και $p : E \to M$ λεία απεικόνιση. Ορίζουμε ως **χάρτη διανυσματικής δέσμης (vector bundle chart)** πάνω στην τριάδα $\left(E, p, M\right)$ ένα ζεύγος $\left(U, \varphi\right)$, όπου U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο της M και φ μία αμφιδιαφόριση τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} p^{-1}\left(U\right) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ορισμός 0.2. Δύο χάρτες διανυσματικής δέσμης $\left(U, \varphi\right)$ και $\left(V, \psi\right)$ ονομάζονται **συμβατοί**, αν η απεικόνιση $\varphi \circ \psi^{-1}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, δηλαδή $\varphi \circ \psi^{-1}\left(x, \lambda\right) = \left(x, g_{UV}\left(x\right) \cdot \lambda\right)$ για κάποια απεικόνιση $g_{UV} : U \cap V \to GL\left(\mathbb{C}^k\right)$ και για $\left(x, \lambda\right) \in V \times \mathbb{C}^k$. Η απεικόνιση αυτή g_{UV} είναι τότε μοναδική και λεία, και καλείται **απεικόνιση μετάβασης (transition function)** μεταξύ των δύο χαρτών διανυσματικής δέσμης.

Ορισμός 0.3. Ένας **άτλας διανυσματικής δέσμης (vector bundle atlas)** $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ για την τριάδα $\left(E, p, M\right)$ ορίζεται να είναι ένα σύνολο από συμβατούς ανά δύο χάρτες διανυσματικής δέσμης έτσι ώστε $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ να είναι ανοιχτό κάλυμμα της M. Επιπλέον, δύο άτλαντες διανυσματικής δέσμης λέγονται **συμβατοί** αν η ένωσή τους αποτελεί ξανά άτλαντα.

Ορισμός 0.4. Μια **C^∞ διανυσματική δέσμη (vector bundle) τάξης k** είναι μια τριάδα $\left(E,p,M\right)$ η οποία αποτελείται από δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες E και M, και μια λεία απεικόνιση $p:E\to M$ μαζί με μια κλάση ισοδυναμίας από άτλαντες. Η πολλαπλότητα E καλείται ολικός χώρος (total space), η M βάση (base space) και η p προβολή (projection mapping).

- Οι μιγαδικοί διανυσματικοί χώροι $\left\{E_x\right\}_{x\in M}$ όπου $E=\bigcup_{x\in M}E_x$ λέγονται **ίνες (fibers)** της δέσμης.
- Η αμφιδιαφόριση $\varphi_U:p^{-1}\left(U\right)\to U\times\mathbb{C}^k$ η οποία απεικονίζει το διανυσματικό χώρο E_x ισομορφικά επί του $\left\{x\right\}\times\mathbb{C}^k$ για κάθε $x\in U$ καλείται **τετριμμενοποίηση (local trivialization)** της δέσμης E πάνω από το U.
- Η ομάδα G στην οποία παίρνουν τιμές οι απεικονίσεις μετάβασης για μια διανυσματική δέσμη καλείται **ομάδα δομής (structure group)** της δέσμης.
- Μια διανυσματική δέσμη τάξης 1 καλείται ειδικότερα **line bundle**.

Αν $\left(U,\varphi\right)$ και $\left(V,\psi\right)$ χάρτες της διανυσματικής δέσμης τότε για τις απεικονίσεις μετάβασης $g_{UV}:U\cap V\to GL\left(\mathbb{C}^k\right)$ με $g_{UV}\left(x\right)=\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)\Big|_{\left\{x\right\}\times\mathbb{C}^k}$ ικανοποιούνται οι ταυτότητες

$$\left(1\right)\quad\begin{cases} g_{UV}\left(x\right)\cdot g_{VU}\left(x\right)=I, & \forall x\in U\cap V\\ g_{UV}\left(x\right)\cdot g_{VW}\left(x\right)\cdot g_{WU}\left(x\right)=I, & \forall x\in U\cap V\cap W\end{cases}$$

Η παραπάνω συνθήκη $\left(1\right)$ λέγεται **συνθήκη συγκύκλου (cocycle condition),** ενώ επιπλέον ονομάζουμε την οικογένεια $\left\{g_{UV}\right\}$ **σύγκυκλο των απεικονίσεων μετάβασης** ως προς τον άτλαντα $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$.

Αντίστροφα, δεδομένων ανοιχτού καλύμματος $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ της M και C^∞ απεικονίσεων $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL\left(\mathbb{C}^k\right)$ που ικανοποιούν τις παραπάνω ταυτότητες υπάρχει μια μοναδική C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη $\left(E,p,M\right)$ με απεικονίσεις μετάβασης τις $\left\{g_{\alpha\beta}\right\}$. Θεωρούμε ως σύνολο $E=\coprod_{\alpha\in A}\left(U_\alpha\times\mathbb{C}^k\right)\Big/\sim$ και

$g_{\alpha\beta}\left(x,\lambda\right)=\left(x,g_{\alpha\beta}\left(x\right)\cdot\lambda\right)\in U_\alpha\times\mathbb{C}^k$, όπου η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής: Για $\left(x,\lambda\right)\in U_\alpha\times\mathbb{C}^k$ και $\left(y,\mu\right)\in U_\beta\times\mathbb{C}^k$, ορίζουμε $\left(x,\lambda\right)\sim\left(y,\mu\right)$ αν και μόνο αν

$x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ και $g_{\alpha\beta}\left(\lambda\right) = \mu$. Το σύνολο E εφοδιάζεται με δομή C^∞ πολλαπλότητας, η οποία επάγεται από τις ενθέσεις $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to E$.

Η παρατήρηση αυτή βοηθάει στο να "κατασκευάσει" κανείς καινούργιες διανυσματικές δέσμες από δεδομένες. Για παράδειγμα έστω $\left(E, p, M\right)$ και $\left(F, q, M\right)$ είναι δύο C^∞ διανυσματικές δέσμες με απεικονίσεις μετάβασης $\left\{g_{\alpha\beta}\right\}$ και $\left\{h_{\alpha\beta}\right\}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τις εξής C^∞ διανυσματικές δέσμες

- $E^\vee$, εναλλακτικά E^*, η **δυϊκή δέσμη (dual bundle)** με απεικονίσεις μετάβασης τις $j_{\alpha\beta}\left(x\right) = {}^t g_{\alpha\beta}\left(x\right)^{-1}$
- $E \oplus F$, με απεικονίσεις μετάβασης $j_{\alpha\beta}\left(x\right) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}\left(x\right) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}\left(x\right) \end{pmatrix} \in GL\left(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l\right)$
- $E \otimes F$, με απεικονίσεις μετάβασης $j_{\alpha\beta}\left(x\right) = g_{\alpha\beta} \cdot h_{\alpha\beta} \in GL\left(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l\right)$
- $\wedge^r E$, με απεικονίσεις μετάβασης $j_{\alpha\beta}\left(x\right) = \wedge^r g_{\alpha\beta}\left(x\right) \in GL\left(\wedge^r \mathbb{C}^k\right)$
- Ειδικότερα, $\wedge^k E$ είναι μια line bundle με απεικονίσεις μετάβασης τις $j_{\alpha\beta}\left(x\right) = \det g_{\alpha\beta}\left(x\right) \in GL\left(1, \mathbb{C}\right) = \mathbb{C}^*$ και καλείται η **determinant bundle** της E.

Ορισμός 0.5. Μια **υποδέσμη (subbundle)** $F \subset E$ μιας δέσμης E είναι μια συλλογή $\left\{F_x \subset E_x\right\}_{x \in M}$ από υποχώρους των ινών E_x της E έτσι ώστε $F = \cup F_x$ να είναι υποπολλαπλότητα της E.

Ορισμός 0.6. Ένας **ομομορφισμός διανυσματικών δεσμών (vector bundle homomorphism)** μεταξύ των C^∞ διανυσματικών δεσμών E και F είναι μια C^∞ απεικόνιση $f : E \to F$ τέτοια ώστε $f\left(E_x\right) \subset F_x$ και $f_x = f\big|_{E_x} : E_x \to F_x$ να είναι γραμμική απεικόνιση μιγαδικών διανυσματικών χώρων. Επιπλέον, δύο C^∞ διανυσματικές δέσμες E, F θα λέγονται **ισόμορφες (isomorphic)** εάν υπάρχει ένας ομομορφισμός διανυσματικών δεσμών $f : E \to F$ με $f_x : E_x \to F_x$ ισομορφισμός μιγαδικών διανυσματικών χώρων $\forall x \in M$.

Ορισμός 0.7. Μια C^∞ διανυσματική δέσμη τάξης k καλείται **τετριμμένη (trivial)** αν είναι ισόμορφη με την $M \times \mathbb{C}^k$.

Ορισμός 0.8. Θα ονομάζουμε **section** μιας C^∞ διανυσματικής δέσμης (E, p, M) τάξης k πάνω από ένα υποσύνολο $U \subset M$ μια C^∞ απεικόνιση $\sigma : U \to E$ τέτοια ώστε $\sigma(x) \in E_x$ για κάθε $x \in U$. Ένα **(λείο τοπικό) πλαίσιο (smooth local frame)** για τη δέσμη E πάνω από το $U \subset M$ είναι μια συλλογή $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ από sections έτσι ώστε $\{\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)\}$ είναι μια βάση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου E_x για κάθε $x \in U$.

Παρατήρηση 0.9. Ένα πλαίσιο μιας C^∞ διανυσματικής δέσμης E τάξεως k πάνω από ένα σύνολο U είναι ουσιαστικά μια τετριμμενοποίηση της E πάνω στο U.
Πράγματι, δεδομένης τετριμμενοποίησης $\varphi_U : E_U = p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$, τα sections $\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i)$ αποτελούν τότε ένα λείο πλαίσιο. Αντίστροφα, αν $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ λείο πλαίσιο τότε μπορούμε να ορίσουμε μια τετριμμενοποίηση φ_U με

$$\varphi_U(\lambda) = \left(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\right)$$

όπου $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x) \in E_x$.

Παρατήρηση 0.10. Έστω $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα της M και (E, p, M) μια C^∞ διανυσματική δέσμη, εφοδιασμένη με τη δομή από έναν άτλαντα $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$. Υποθέτουμε τώρα ότι η C^∞ διανυσματική δέσμη αυτή περιγράφεται και από έναν ισοδύναμο άτλαντα $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ θεωρώντας το ίδιο ανοιχτό κάλυμμα της M. Τότε έχουμε εξ' ορισμού ότι οι χάρτες $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ και (U_α, ψ_α) είναι συμβατοί για κάθε $\alpha \in A$ οπότε έχουμε ότι $\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}(x, \lambda) = (x, \tau_\alpha(x) \cdot \lambda)$ για μια λεία απεικόνιση $\tau_\alpha : U_\alpha \to GL(\mathbb{C}^k)$. Καθώς όμως είναι $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(\mathbb{C}^k)$, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(x, \tau_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) \cdot \lambda\right) &= \left(\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}\right)\left(x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \lambda\right) \\
&= \left(\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}\right)(x, \lambda) = \left(\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}\right)(x, \lambda) \\
&= \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \psi_\beta^{-1}\right)(x, \lambda) = \left(x, g'_{\alpha\beta}(x) \cdot \tau_\beta(x) \cdot \lambda\right)
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν $\{g_{\alpha\beta}\}$ και $\{g'_{\alpha\beta}\}$ είναι οι απεικονίσεις μετάβασης για μια C^∞ διανυσματική δέσμη ως προς άτλαντες $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ και $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ αντίστοιχα, τότε υπάρχουν λείες απεικονίσεις $\tau_\alpha : U_\alpha \to GL(\mathbb{C}^k)$ έτσι ώστε

$$(2) \quad g_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \cdot g'_{\alpha\beta} \cdot \tau_\beta^{-1} \text{ στο } U_\alpha \cap U_\beta$$

Ορισμός 0.11. Υπό τις παραπάνω συνθήκες, δύο σύγκυκλοι $\{g_{\alpha\beta}\}$ και $\{g'_{\alpha\beta}\}$ θα λέγονται **ισοδύναμοι (equivalent)** αν ικανοποιείται η συνθήκη (2).
Φτάνουμε λοιπόν αμέσως στην επόμενη

Πρόταση 0.12. Δύο C^∞ διανυσματικές δέσμες E και E' πάνω από την ίδια βάση M είναι ισόμορφες αν και μόνο αν υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα της M ως προς το οποίο οι αντίστοιχοι σύγκυκλοι των δεσμών είναι ισοδύναμοι.

Θα δούμε αναλυτικά την απόδειξη για την ειδική περίπτωση των line bundles.
Λήμμα 0.13. Δύο ολόμορφες line bundles L και L' πάνω από μια επιφάνεια Riemann M με αντίστοιχες απεικονίσεις μετάβασης $g_{a\beta}$ και $g'_{a\beta}$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $f_a \in \mathcal{O}^*(U_a)$ για κάθε στοιχείο U_a του καλύμματος $\{U_a\}$ της M τέτοιες ώστε

$$g'_{a\beta} = \frac{f_a}{f_\beta} g_{a\beta} \quad \text{στο } U_a \cap U_\beta$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $L \simeq L'$. Τότε αν $\varphi_a : L_{U_a} \to U_a \times \mathbb{C}$ και $\varphi'_a : L'_{U_a} \to U_a \times \mathbb{C}$ είναι τετριμενοποιήσεις για τις L, L' αντίστοιχα ως προς ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_a\}$ της M, τότε η ισομορφία των line bundles είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι υπάρχουν $f_a \in \mathcal{O}^*(U_a)$ ώστε $\varphi'_a = \varphi_a \cdot f_a$ όπου οι f_a επάγονται από τους ισομορφισμούς στις ίνες.

$$\begin{tikzcd} L'_{U_a} \arrow[rr, "f_a"] \arrow[dr, "\varphi_a"'] & \circlearrowright & L_{U_a} \arrow[dl, "\varphi_a"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Επιπλέον στην περίπτωση των ολομόρφων line bundles αν $g_{a\beta} : U_a \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ είναι απεικονίσεις μετάβασης της L ως προς τετριμενοποιήσεις $\{\varphi_a\}$ με $g_{a\beta}(z) = \left(\varphi_a \circ \varphi_\beta^{-1}\right)\big|_{L_z} \in \mathbb{C}^*$, τότε έχουμε ότι οι $g_{a\beta}$ είναι ολόμορφες, πουθενά μηδενιζόμενες και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$g_{a\beta} \cdot g_{\beta a} = 1$$
$$g_{a\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma a} = 1$$

Αν λοιπόν $\{g'_{a\beta}\}$ είναι απεικονίσεις μετάβασης ως προς $\{\varphi'_a\}$ της L' τότε

$$g'_{a\beta} = \varphi'_a \circ \varphi'^{-1}_\beta = \left(\varphi_a \cdot f_a\right) \circ \left(\frac{\varphi_\beta^{-1}}{f_\beta}\right) = \frac{f_a}{f_\beta}\left(\varphi_a \circ \varphi_\beta^{-1}\right) = \frac{f_a}{f_\beta} \cdot g_{a\beta}$$

Αντίστροφα τώρα αν $\left\{g_{a\beta}\right\}, \left\{g'_{a\beta}\right\}$ είναι οικογένειες από απεικονίσεις μετάβασης για τις δέσμες L, L' αντίστοιχα, για τις οποίες συμβαίνει $g'_{a\beta} = \dfrac{f_a}{f_\beta} g_{a\beta}$ σε κάθε $U_a \cap U_\beta$ τότε αν φ_a είναι τετριμμενοποίηση της L έχουμε ότι οι $\varphi'_a := \varphi_a \cdot f_a$ είναι τετριμμενοποίηση της L' και οι οικογένειες αυτών των τετριμμενοποιήσεων καθορίζουν τον ισομορφισμό $L \simeq L'$. $\square$

Ορισμός 0.14. Έστω $C = \left\{g_{ij}\right\}$ ο σύγκυκλος των απεικονίσεων μετάβασης ως προς τον άτλαντα $\left(U_i, \varphi_i\right)_{i\in I}$ για ένα ανοιχτό κάλυμμα $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ της M και $f : M' \to M$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ των διαφορισίμων πολλαπλοτήτων M και M'. Τότε ο σύγκυκλος $f^*C := \left\{g^*_{U^*V^*}\right\}$ που ορίζεται για το ανοιχτό κάλυμμα $U_i^* = f^{-1}\left(U_i\right)$ της M' με $g^*_{ij} = g_{ij} \circ f\big|_{U_i^* \cap U_j^*}$ καλείται ο **σύγκυκλος που επάγεται (cocycle induced) από τον C μέσω της απεικόνισης f.**

Παρατήρηση 0.15. Αν C_1 και C_2 είναι δύο ισοδύναμοι σύγκυκλοι πάνω από την ίδια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M και $f : M' \to M$ είναι μια λεία απεικόνιση, τότε οι επαγόμενοι σύγκυκλοι f^*C_1 και f^*C_2 είναι επίσης ισοδύναμοι σύγκυκλοι πάνω από την M'.

Ορισμός 0.16. Έστω τώρα $\xi = \left(E, p, M\right)$ η C^{∞} μιγαδική διανυσματική δέσμη που κατασκευάζεται από το σύγκυκλο C και $f : M' \to M$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων. Η διανυσματική δέσμη $f^*\xi = \left(E', p', M'\right)$ η οποία κατάσκευάζεται από το σύγκυκλο f^*C καλείται η **διανυσματική δέσμη που επάγεται από τη δέσμη ξ μέσω της απεικόνισης f.**
Συγκεκριμένα είναι

$$E' = \left\{\left(m', x\right) \in M' \times E, \text{ με } f\left(m'\right) = p\left(x\right)\right\}$$

και $p' : E' \to M'$ με $\left(m', x\right) \mapsto m'$.

Έστω τώρα $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα της M το οποίο εκλεπτύνει το κάλυμμα $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$. Υπάρχει δηλαδή μια απεικόνιση $\varepsilon : I \to A$ ώστε $W_i \subset U_{\varepsilon(i)}$ για κάθε $i \in I$. Τότε για κάθε σύγκυκλο $\left\{g_{\alpha\beta}\right\}$ ως προς το κάλυμμα $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ θεωρούμε το σύγκυκλο $\{\varphi_{ij}\}$ με $\varphi_{ij} := g_{\varepsilon(i)\varepsilon(j)}\Big|_{W_{ij}}$. Η απεικόνιση ε^* τότε με $\varepsilon^*\{g_{\alpha\beta}\} = \{\varphi_{ij}\}$ διατηρεί τις κλάσεις συνομολογίας και έτσι επάγει έναν ομομορφισμό

$$\varepsilon^{\#} : H^1\left(\{U_\alpha\}, GL(\mathbb{C}^k)\right) \to H^1\left(\{W_i\}, GL(\mathbb{C}^k)\right)$$

ο οποίος τελικά δεν εξαρτάται από την επιλογή της απεικόνισης ε.
Ορίζεται λοιπόν έτσι η **p-τάξης ομάδα συνομολογίας Čech** πάνω στην M, ως το **direct limit** των ομάδων $H^p\left(\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}, GL(\mathbb{C}^k)\right)$, καθώς το κάλυμμα $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ λεπταίνει ολοένα και περισσότερο:

$$H^p\left(M, GL(\mathbb{C}^k)\right) = \underset{\{U_\alpha\}}{dir\lim} H^p\left(\{U_\alpha\}, GL(\mathbb{C}^k)\right)$$

Πρόταση 0.17. Η συλλογή όλων των (κλάσεων ισομορφίας) C^∞ μιγαδικών line bundles πάνω από μια πολλαπλότητα M ταυτίζεται με φυσικό τρόπο προς την ομάδα συνομολογίας $H^1\left(M, \mathscr{A}^*\right)$, όπου $\mathscr{A}^*$ οι μη μηδενικές C^∞ συναρτήσεις στην M.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο βιβλίο του K. Yang, Compact Riemann Surfaces and Algebraic Curves, p.72.

Παρακάτω ορίζουμε τις ολόμορφες μιγαδικές διανυσματικές δέσμες με τρόπο ανάλογο προς τις C^∞. Ξεκινάμε κατ' αρχήν με τον επόμενο

Ορισμός 0.18. Μια **μιγαδική πολλαπλότητα (complex manifold)** M είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα, η οποία επιδέχεται ανοιχτό κάλυμμα $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ και απεικονίσεις συντεταγμένων $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, τέτοιες ώστε $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ ολόμορφη πάνω στο $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$ για όλα τα α και β.
Μια μιγαδική πολλαπλότητα διάστασης 1 καλείται **επιφάνεια Riemann**.

Ορισμός 0.19. Έστω M μια μιγαδική πολλαπλότητα. Μια **ολόμορφη μιγαδική διανυσματική δέσμη τάξεως k (holomorphic complex vector bundle)** (E, p, M) είναι μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη με την επιπλέον ιδιότητα, ότι η E εφοδιάζεται με τη δομή μιγαδικής πολλαπλότητας, έτσι ώστε $\forall x \in M$ υπάρχει ανοιχτό $U \subset M$ με $x \in U$ και τετριμμενοποίηση $\varphi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^k$, η οποία είναι αμφιολόμορφη απεικόνιση μιγαδικών πολλαπλοτήτων.
Μια τέτοια τετριμμενοποίηση καλείται **ολόμορφη τετριμμενοποίηση (holomorphic trivialization)**. Επίσης, ανάλογα προς την περίπτωση των C^∞ μιγαδικών διανυσματικών δεσμών, δεδομένης μιας οικογένειας $\{\varphi_\alpha : E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$

από τετριμμενοποιήσεις της ολόμορφης μιγαδικής διανυσματικής δέσμης, οι απεικονίσεις μετάβασης ως προς την οικογένεια αυτή είναι τότε ολόμορφες.
Αντίστροφα, δεδομένων ολομόρφων απεικονίσεων $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \to GL\left(\mathbb{C}^{k}\right)$ οι οποίες ικανοποιούν τις ταυτότητες $\left(1\right)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη με απεικονίσεις μετάβασης τις $g_{\alpha\beta}$.

Όλες οι πτυχές των C^{∞} μιγαδικών διανυσματικών δεσμών που μελετήσαμε προηγουμένως μεταφέρονται στην κατηγορία των ολομόρφων μιγαδικών διανυσματικών δεσμών με τη διαφορά ότι εδώ οι απεικονίσεις των ορισμών από C^{∞} είναι επιπλέον ολόμορφες.

Η Πρόταση 0.17 ισχύει και στην περίπτωση των ολομόρφων line bundles:

Πρόταση 0.20. Η συλλογή όλων των (κλάσεων ισομορφίας) ολομόρφων μιγαδικών line bundles πάνω από μια μιγαδική πολλαπλότητα M ταυτίζεται με φυσικό τρόπο προς την ομάδα συνομολογίας $H^{1}\left(M, \mathcal{O}^{*}\right)$, όπου $\mathcal{O}^{*}$ οι ολόμορφες συναρτήσεις στην M.

1

Συνοχές και ολόμορφες δομές

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τις δομές εκείνες πάνω σε διανυσματικές δέσμες που θα μελετήσουμε στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας. Ξεκινάμε στην παράγραφο 1.1 περιγράφοντας τις συνοχές πάνω από τις C^∞ διανυσματικές δέσμες ως έναν τρόπο παραγώγισης των sections της δέσμης. Η θεμελιώδης αναλλοίωτος μιας συνοχής είναι η καμπυλότητα ως προς τη συνοχή αυτή. Συνδέοντας την ύπαρξη μιας επίπεδης συνοχής d_A για τη δέσμη, με την τοπική ύπαρξη n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της εξίσωσης $d_A s = 0$, καταλήγουμε στην πολύ βασική πρόταση 1.16. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή, οι αναπαραστάσεις της θεμελιώδους ομάδας μιας επιφάνειας Riemann M πάνω στη γενική γραμμική ομάδα παραμετρίζονται από τις επίπεδες συνοχές με τις οποίες μπορεί να εφοδιαστεί η τετριμμένη διανυσματική δέσμη πάνω από την M. Αυτό είναι το πρώτο βήμα προς την εύρεση ενός τρόπου να εφοδιαστεί ο χώρος των αναπαραστάσεων αυτών με μια ολόμορφη δομή, η οποία επάγεται φυσιολογικά από την ολόμορφη δομή της M. Προς την κατεύθυνση αυτή είναι επίσης αναγκαία η σύνδεση των συνοχών με ολόμορφα αντικείμενα πάνω από τις διανυσματικές δέσμες, τις ολόμορφες δομές. Αφού εισάγουμε τις ολόμορφες δομές στην παράγραφο 1.2 και ορίσουμε μια κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των ολομόρφων δομών, κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με την απόδειξη ότι κάθε unitary συνοχή αντιστοιχίζεται σε μια ολόμορφη δομή και αντίστροφα, ένα αποτέλεσμα το οποίο θα μας φανεί αρκετά χρήσιμο στη συνέχεια.

1.1 Συνοχές σε διανυσματικές δέσμες

Ορισμός 1.1. Έστω V μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη τάξεως n πάνω σε μια επιφάνεια Riemann M. Ορίζουμε ως **συνοχή (connection)** μια $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση

$$d_A : \mathscr{A}^0\left(M;V\right) \to \mathscr{A}^1\left(M;V\right) \simeq \mathscr{A}^1\left(M\right) \otimes_{C^\infty\left(M\right)} \mathscr{A}^0\left(M,V\right)$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz

$$d_A\left(fs\right) = df \otimes s + f d_A s$$

για κάθε C^∞ συνάρτηση f και section $s \in \mathscr{A}^0\left(M;V\right)$, όπου $C^\infty\left(M\right)$ και $\mathscr{A}^1\left(M\right)$ οι C^∞ συναρτήσεις και οι C^∞ διαφορικές 1-μορφές στην M αντίστοιχα.

Έστω τώρα ένα τοπικό πλαίσιο (local frame) $e = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ για τη δέσμη V. Γράφουμε τότε το $d_A e_i$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του πλαισίου

$$d_A e_i = \sum A_{ij} e_j$$

Ο πίνακας $A = \left(A_{ij}\right)$ από 1-μορφές καλείται ο **πίνακας της συνοχής** d_A **(connection matrix)** ως προς το πλαίσιο e. Μπορούμε να δούμε τώρα ότι το πλαίσιο και ο πίνακας της συνοχής καθορίζουν τη συνοχή:
Γράφοντας ένα τυχόν section $s \in \mathscr{A}^0\left(M; V\right)$ στη μορφή $s = \sum s_i e_i$ με $s_i \in C^\infty\left(M\right)$ είναι

$$\begin{aligned} d_A s &= \sum ds_i \otimes e_i + \sum s_i \cdot d_A e_i \\ &= \sum_j \left(ds_j + \sum_i s_i A_{ij}\right) e_j \end{aligned}$$

Καταλήγουμε έτσι στην εξής
Παρατήρηση 1.2. Θεωρώντας ένα τοπικό πλαίσιο (local frame) $e = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ για την δέσμη V, τοπικά η συνοχή γράφεται στη μορφή

$$d_A = d + A = d + B d\overline{z} + C dz$$

όπου ο A είναι ένας πίνακας από 1-μορφές, ενώ οι B, C είναι πίνακες οι οποίοι έχουν ως στοιχεία C^∞ συναρτήσεις.

Ωστόσο, ο πίνακας A της συνοχής σε ένα σημείο $z \in M$ εξαρτάται από την επιλογή του πλαισίου γύρω από το σημείο z:
Αν $e' = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ είναι ένα άλλο πλαίσιο σε μια γειτονιά του z με $e'_i\left(z\right) = \sum_j e_j\left(z\right) g_{ji}\left(z\right)$, τότε

$$\begin{aligned} d_A e'_i &= \sum_j e_j \otimes dg_{ji} + \sum_j d_A\left(e_j\right) g_{ji} \\ &= \sum_j e_j \otimes dg_{ji} + \sum_{k,j} e_k A_{kj} g_{ji} \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο πίνακας της συνοχής d_A περνώντας σε ένα άλλο πλαίσιο e' με απεικονίσεις μετάβασης $g = \left(g_{ij}\right)$ έχει τη μορφή

$$A_{e'} = g^{-1} \cdot \left(dg\right) + g^{-1} \cdot A_e \cdot g$$

Ορισμός 1.3. Θα ονομάζουμε **gauge transformation (μετασχηματισμός βαθμίδας)** έναν C^∞ αυτομορφισμό της δέσμης V.

Συνεπώς, τοπικά, έχοντας επιλέξει ένα πλαίσιο της δέσμης V, gauge transformation είναι μια C^{∞} συνάρτηση με τιμές στην $GL(n,\mathbb{C})$.

Λήμμα 1.4. Οι gauge transformations δρουν δια της συζυγίας στο χώρο των συνοχών.

Απόδειξη. Αν g είναι gauge transformation τότε

$$g^{-1}d_A g(fs) = g^{-1}d_A[fg(s)] = g^{-1}[df \otimes g(s) + fd_A[g(s)]] =$$
$$= df \otimes s + fg^{-1}d_A g(s)$$

καθώς g είναι C^{∞}-γραμμική στα sections. □

Παρατήρηση 1.5. Θεωρώντας συνοχή $d_A = d + A$, τοπικά η συνοχή $g^{-1}d_A g$ έχει τότε τη μορφή

$$g^{-1}d_A g = g^{-1}(d + A)g = d + g^{-1}(dg) + g^{-1}Ag$$

καθώς τοπικά ο πίνακας της συνοχής $g^{-1}d_A g$ θα έχει τη μορφή $g^{-1}(dg) + g^{-1}Ag$ περνώντας σε ένα άλλο πλαίσιο όπως είδαμε.

Έστω τώρα M μια C^{∞} πολλαπλότητα και (V,p,M) μια C^{∞} μιγαδική διανυσματική δέσμη εφοδιασμένη με μια συνοχή

$$\nabla : \mathscr{A}^0(V) \to \mathscr{A}^1(V)$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz.

Για κάθε C^{∞} διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(M)$ στην M, η συνάρτηση εκτίμησης στο X, $ev_X : \Omega^1(M) \to C^{\infty}(M)$ είναι $C^{\infty}(M)$-γραμμική και έτσι ορίζεται η $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση $\nabla_X : \mathscr{A}^0(M,V) \to \mathscr{A}^1(M,V)$ με την ιδιότητα

$$\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$$

για κάθε $f \in C^{\infty}(M), s \in \Omega^0(V)$ καθώς είναι $Xf = df(X)$.

Θέλουμε να επεκτείνουμε τον τελεστή ∇ σε έναν τελεστή

$$d^{\nabla} : \mathscr{A}^i(V) \to \mathscr{A}^{i+1}(M)$$

απαιτώντας αυτός να ικανοποιεί έναν κατάλληλο κανόνα Leibniz όπως ο ∇.

Πράγματι, ορίζεται μοναδικά ένας τέτοιος $\mathbb{C}$-γραμμικός τελεστής, ο οποίος μάλιστα επεκτείνει τον τελεστή ∇, υπό την έννοια ότι είναι $d^{\nabla} = \nabla$ για $i = 0$ (βλ. Ib Madsen and J. Tornehave, From Calculus to Cohomology, p.170).

Έχουμε λοιπόν μια ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}^0(V) \xrightarrow{\nabla} \mathscr{A}^1(V) \xrightarrow{d^{\nabla}} \mathscr{A}^2(V) \xrightarrow{d^{\nabla}} \ldots$$

η οποία όμως δεν αποτελεί ένα αλυσωτό σύμπλεγμα, δηλαδή δεν ισχύει γενικά ότι $d^{\nabla} \circ \nabla = 0$ και $d^{\nabla} \circ d^{\nabla} = 0$.
Έχουμε ωστόσο ότι η απεικόνιση

$$F^{\nabla} = d^{\nabla} \circ \nabla : \mathscr{A}^0(V) \to \mathscr{A}^2(V)$$

είναι $C^{\infty}(M)$-γραμμική ενώ παράλληλα έχουμε και ότι

$$Hom_{\mathscr{A}^0(M)}\left(\mathscr{A}^0(V), \mathscr{A}^2(V)\right) \simeq \mathscr{A}^2\left(Hom(V,V)\right)$$

(βλ. Ib Madsen and J. Tornehave, From Calculus to Cohomology, p.171).

Ορισμός 1.6. Η 2-μορφή $F^{\nabla} \in \mathscr{A}^2\left(Hom(V,V)\right)$ λέγεται **μορφή καμπυλότητας (curvature form)** της δέσμης (V,∇).

Τώρα για κάθε $X,Y \in \mathfrak{X}(M) = \mathscr{A}^0(TM)$, η απεικόνιση εκτίμησης

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2(M) &\to C^{\infty}(M) \\ \omega &\mapsto \omega(X,Y) \end{aligned}$$

είναι $C^{\infty}(M)$-γραμμική και συνεπώς επάγει μια $C^{\infty}(M)$-γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2\left(Hom(V,V)\right) &\to \mathscr{A}^0\left(Hom(V,V)\right) \\ F^{\nabla} &\to F^{\nabla}_{X,Y} \end{aligned}$$

Η $d^{\nabla} : \mathscr{A}^1(V) \to \mathscr{A}^2(V)$ ειδικότερα για $\omega \in \mathscr{A}^1(M)$ και $s \in \mathscr{A}^0(V)$ ικανοποιεί

$$d^{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge (\nabla s)$$

Κατά συνέπεια για κάθε $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ είναι

$$\begin{aligned} d^{\nabla}(\omega \otimes s)(X,Y) &= \left[X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\right]s - \left[\omega(X)\nabla_Y s - \omega(Y)\nabla_X s\right] \\ &= X\omega(Y)s + \omega(Y)\nabla_X s - Y\omega(X)s - \omega(X)\nabla_Y s - \omega([X,Y])s \\ &= \nabla_X(\omega(Y)s) - \nabla_Y(\omega(X)s) - \omega([X,Y])s \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$ και
$\nabla_X(\omega(Y)s) = X\omega(Y)s + \omega(Y)\nabla_X s$.
Προκύπτει λοιπόν

$$F_{X,Y}(s) = d^{\nabla}(\nabla s)(X,Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]}s$$

για κάθε $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ και $s \in \mathscr{A}^0(V)$.

Ορισμός 1.7. Ορίζουμε ως **καμπυλότητα (curvature)** της συνοχής d_A τον τελεστή

$$F_A = d_A^2 : \mathscr{A}^0\left(M;V\right) \to \mathscr{A}^2\left(M;V\right)$$

ο οποίος είναι C^∞-γραμμική απεικόνιση και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του $\mathscr{A}^2\left(M;EndV\right) = \mathscr{A}^2\left(Hom(V,V)\right)$, ή τοπικά μια 2-μορφή με τιμές πίνακες.

Ανάλογα τώρα προς τις συνοχές, μπορούμε να παραστήσουμε τον τελεστή καμπυλότητας τοπικά ως προς ένα πλαίσιο για τη δέσμη.
Έστω λοιπόν ένα τοπικό πλαίσιο (local frame) $e = \left(e_1,\ldots,e_n\right)$ για τη δέσμη V.
Γράφουμε τότε το $F_A e_i$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του πλαισίου

$$F_A\left(e_i\right) = \sum \Theta_{ij} e_j$$

Ο πίνακας αυτός των 2-μορφών $\Theta_e = \left(\Theta_{ij}\right)$ καλείται **πίνακας καμπυλότητας (curvature matrix)** της συνοχής.
Αν επιλέξουμε πάλι ένα άλλο πλαίσιο $e' = \left(e_1',\ldots,e_n'\right)$ με $e_i'\left(z\right) = \sum_j e_j\left(z\right) g_{ji}\left(z\right)$

τότε είναι

$$F_A\left(e_i'\right) = F_A\left(\sum_j e_j g_{ji}\right) = \sum_{k,j} e_k \Theta_{kj} g_{ji} = \sum_{k,j,l} e_l' g_{lk}^{-1} \Theta_{kj} g_{ji}$$

Με άλλα λόγια

$$\Theta_{e'} = g^{-1} \cdot \Theta_e \cdot g$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον πίνακα της καμπυλότητας ως προς τον πίνακα της συνοχής.
Για ένα τυχόν section $s = \sum s_i e_i \in \mathscr{A}^0\left(M;V\right)$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_A s &= \left(d + A\right)\left(d + A\right)s = d^2 s + d\left(As\right) + Ads + A^2 s \\ &= d^2 s + dAs + \left(-1\right)^1 Ads + Ads + A^2 s = \left(dA + A^2\right)s \end{aligned}$$

Δηλαδή με όρους πινάκων είναι

$$\Theta_e = dA_e + A_e \wedge A_e \quad \textbf{(Cartan structure equation)}$$

Ορισμός 1.8. Αν η καμπυλότητα F_A μηδενίζεται παντού, θα λέμε ότι η συνοχή είναι **επίπεδη (flat)**.

Ορισμός 1.9. Ένα local section s θα λέγεται **παράλληλο (parallel)** ως προς μια συνοχή d_A αν $d_A s = 0$.

Πρόταση 1.10. Αν d_A είναι μια επίπεδη συνοχή, τότε υπάρχουν τοπικά n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $d_A s = 0$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τοπικό πλαίσιο $s = \left(s_1, \ldots, s_n\right)$ από παράλληλα sections. Ο πίνακας A της συνοχής d_A ως προς ένα τέτοιο τοπικό πλαίσιο είναι μηδενικός.
Έστω $s' = \left(s_1', \ldots, s_n'\right)$ ένα τυχόν τοπικό πλαίσιο και A' ο πίνακας της συνοχής d_A ως προς το s'. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η μετάβαση από το πλαίσιο s στο s' καθορίζεται από τη σχέση $A = g^{-1}\left(dg\right) + g^{-1}A'g$ μεταξύ των αντιστοίχων πινάκων για τα πλαίσια.
Τότε η συνθήκη $A = 0$, ισοδυναμεί με το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$g^{-1}\left(dg\right) + g^{-1}A'g = 0 \quad \left(*\right)$$

Έχουμε δηλαδή ότι η εύρεση μιας λύσης g για αυτό το σύστημα ισοδυναμεί με την απόδειξη της ύπαρξης ενός πλαισίου από παράλληλα sections.
Παίρνοντας την εικόνα της $\left(*\right)$ μέσω της g έχουμε

$$A'g + dg = 0$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας

$$0 = \left(dA'\right)g - A' \wedge dg = \left(dA'\right)g + \left(A' \wedge A'\right)g = \Theta' g$$

χρησιμοποιώντας ότι $dg = -A'g$ και την εξίσωση του Cartan παραπάνω.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνθήκη της ολοκληρωσιμότητας για αυτό το σύστημα είναι ακριβώς ο μηδενισμός του πίνακα Θ', ιδιότητα ανεξάρτητη της επιλογής τοπικού πλαισίου. Αν επομένως η συνοχή είναι επίπεδη τότε προφανώς ο πίνακας της καμπυλότητας είναι ο μηδενικός, άρα από το θεώρημα ύπαρξης λύσης για ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων υπάρχει η ζητούμενη λύση g. □

Παρατήρηση 1.11. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο τέτοιες βάσεις λύσεων $\left(s_1, \ldots, s_n\right)$ και $\left(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n\right)$ με $\tilde{s}_i = \sum a_{ij} s_j$, έχουμε

$$0 = d_A \tilde{s}_i = d_A\left(\sum a_{ij} s_j\right) = \sum da_{ij} \otimes s_j + \cancel{\sum a_{ij} d_A s_j}$$

οπότε $da_{ij} = 0$ και άρα a_{ij} είναι σταθερές συναρτήσεις.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι *μια επίπεδη συνοχή επάγει μια οικογένεια τοπικά σταθερών απεικονίσεων μετάβασης για τη δέσμη* V. Ισχύει όμως και το αντίστροφο: *Αν η* V *έχει τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης τότε επιδέχεται επίπεδης συνοχής.*

Πράγματι, αν $\{U, e_U\}$ είναι μια οικογένεια από τοπικά πλαίσια της δέσμης που συνδέονται με σταθερές απεικονίσεις μετάβασης, ορίζουμε συνοχή d_A με $d_A e_U = 0$. Τότε, καθώς οι απεικονίσεις μετάβασης είναι σταθερές, έπεται ότι η συνθήκη $d_A e_U = 0$ είναι συμβατή με την $d_A e_W = 0$ στο $U \cap W \subset V$ και έτσι η συνοχή είναι καλά ορισμένη. Τώρα είναι προφανές ότι αυτή η συνοχή είναι επίπεδη.

Θα δούμε τώρα ότι από μια αναπαράσταση $\rho : \pi_1(M) \to GL(n, \mathbb{C})$ της θεμελιώδους ομάδας μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, ορίζεται μια επίπεδη C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη E τάξεως n πάνω από την M.
Η εικόνα της ρ, $H = \operatorname{Im} \rho$ καλείται **ομάδα ολονομίας (holonomy group)**.

Έστω λοιπόν $\rho : \pi_1(M) \to GL(n, \mathbb{C})$ μια αναπαράσταση. Θεωρούμε την $\pi_1(M)$ ως την ομάδα των μετασχηματισμών επικάλυψης που δρα πάνω στον καθολικό χώρο επικάλυψης $\tilde{M}$ της M, $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M} \times \mathbb{C}^n$, με τη δράση να δίδεται από την

$$\delta : \pi_1(M) \to Homeo\left(\tilde{M} \times \mathbb{C}^n\right)$$

$$\text{με } \delta(\gamma)(x, v) = (\gamma(x), \rho(\gamma) \cdot v)$$

Η δράση αυτή επάγει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{pr} & \tilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ E = \tilde{M} \times \mathbb{C}^n / \delta & \xrightarrow{p} & M \end{array} \qquad (*)$$

όπου pr είναι η κανονική προβολή που είναι προφανώς equivariant, π είναι η απεικόνιση πηλίκο, q η απεικόνιση επικάλυψης και η p επάγεται με μοναδικό τρόπο από την pr.

Πρόταση 1.12. Για το παραπάνω διάγραμμα $(*)$

$i)$ Η απεικόνιση $\pi : \tilde{M} \times \mathbb{C}^n \to E$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

$ii)$ Αν η ομάδα ολονομίας $H = \operatorname{Im} \rho$ εφοδιάζεται με την επαγόμενη τοπολογία από την $GL(n, \mathbb{C})$ τότε η $\xi_H = (E, p, M)$ είναι μια επίπεδη C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη με διακριτή ομάδα δομής την H.

Απόδειξη. $i)$ Καθώς η δράση δ είναι μια ελεύθερη και γνήσια ασυνεχής δράση, συνεπάγεται ότι η απεικόνιση π είναι απεικόνιση επικάλυψης.
$ii)$ Διαλέγουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}$ της M από συσταλτά σύνολα.

Επιπλέον για κάθε i, διαλέγουμε ένα σημείο $b_i \in U_i$ και ένα μονοπάτι c_i από το b_o στο b_i, όπου $b_0 \in M$ είναι ένα βασικό σημείο, δηλαδή $\pi_1(M) = \pi_1(M, b_0)$.

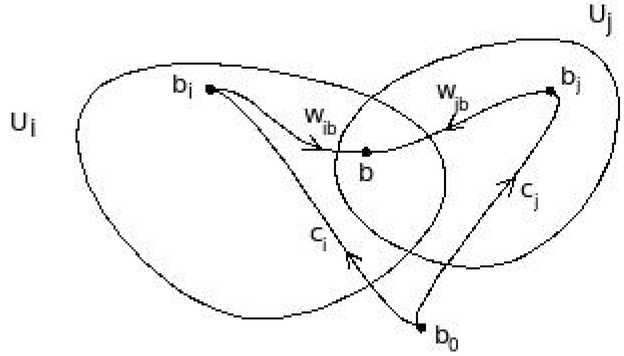
Για κάθε U_i ζητάμε να βρούμε τετριμμενοποίηση $\varphi_i : p^{-1}\left(U_i\right) \to U_i \times \mathbb{C}^n$. Έστω $\tilde{c}_i$ η ανύψωση του μονοπατιού c_i από το βασικό σημείο $\tilde{b}_0 \in q^{-1}\left(b_0\right) \subset \tilde{M}$ και έστω $\tilde{U}_i$ η συνιστώσα εκείνη του $q^{-1}\left(U_i\right)$ η οποία περιέχει το τελικό σημείο του μονοπατιού $\tilde{c}_i$. Καθώς κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της $\pi_1\left(M, b_0\right)$ μεταθέτει τις συνιστώσες του $pr^{-1}\left(q^{-1}\left(U_i\right)\right)$, προκύπτει ότι

$$\pi_i := \pi\big|_{\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n} : \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n \to p^{-1}\left(U_i\right)$$

είναι ομοιομορφισμός.
Τότε

$$\varphi_i = q\big|_{\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n} \circ \pi_i^{-1} : p^{-1}\left(U_i\right) \to U_i \times \mathbb{C}^n$$

είναι τοπική τετριμμενοποίηση της δέσμης ξ_H πάνω από το U_i, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος.
Έστω τώρα U_i, U_j στοιχεία του καλύμματος της M με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Σε κάθε $b \in U_i \cap U_j$ θεωρούμε μονοπάτια w_{ib} στο U_i από το b_i στο b και w_{jb} από το b_j στο b.



Τότε το στοιχείο $\gamma_{ij} = \left[c_i * w_{ib} * w_{jb}^{-1} * c_j^{-1}\right] \in \pi_1\left(M, b_0\right)$, όπου $*$ εδώ συμβολίζουμε την αλληλουχία (concatenation) των μονοπατιών, δεν εξαρτάται από την επιλογή των w_{ib} και w_{jb}. Έτσι λοιπόν η απεικόνιση

$$\begin{aligned} g_{ij} : U_i \cap U_j &\to \operatorname{Im}\rho \\ b &\mapsto \rho\left(\gamma_{ij}\right) \end{aligned}$$

είναι τοπικά σταθερή. Κατασκευάσαμε λοιπόν μια διανυσματική δέσμη με τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης, και άρα από την παρατήρηση 1.11 η δέσμη αυτή είναι επίπεδη. □

Είδαμε ότι μια αναπαράσταση $\rho : \pi_1\left(M\right) \to GL\left(n, \mathbb{C}\right)$ καθορίζει μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη E τάξεως n πάνω από την M με απεικονίσεις μετάβασης τοπικά σταθερές. Θα δούμε παρακάτω ότι όλες οι C^∞ διανυσματικές δέσμες με τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο.

Ορισμός 1.13. Έστω $\left(E,p,M\right)$ μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη με τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης, οι οποίες παίρνουν τιμές σε μια ομάδα δομής $G \leq GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ και F_0, F_1 τα fibers πάνω από τα σημεία $b_0, b_1 \in M$ αντίστοιχα. Αν $c:\left[0,1\right] \to M$ είναι ένα μονοπάτι από το b_0 στο b_1, τότε για κάθε $y \in F_0$, υπάρχει μια μοναδική ανύψωση $\tilde{c}_y$ του μονοπατιού c από το y (βλ. G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part A, p. 137-138). Ορίζεται έτσι ένας ομοιομορφισμός

$$T_c : F_0 \to F_1$$

ο οποίος καλείται η **μεταφορά του** F_0 **στο** F_1 **κατά μήκος του μονοπατιού** c **(translation along** c**)** και εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας του (με σταθερά άκρα).
Αν τώρα πάρουμε $b_0 = b_1$ και σταθεροποιήσουμε τετριμμενοποίηση $\left(U_0, \varphi_0\right)$ με $b_0 \in U_0$, τότε αντιστοιχίζεται σε κάθε $\gamma \in \pi_1\left(M\right)$ ένας ομοιομορφισμός $T_\gamma \in G$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $T_{\gamma\gamma'} = T_{\gamma'} \circ T_\gamma$. Αν ορίσουμε λοιπόν $H_\xi\left(\gamma\right) = T_\gamma^{-1}$, τότε η απεικόνιση

$$H_\xi : \pi_1\left(M\right) \to G$$

είναι ομομορφισμός και λέγεται **αναπαράσταση ολονομίας (holonomy representation)** της δέσμης ξ.

Λήμμα 1.14. Μια C^∞ διανυσματική δέσμη $\xi = \left(E,p,M\right)$ με fiber $\mathbb{C}^n$ και τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης μέσα σε μια ομάδα δομής $G \leq GL\left(n,\mathbb{C}\right)$, είναι τετριμμένη αν και μόνο αν η αναπαράσταση ολονομίας της είναι τετριμμένη.

Απόδειξη. Η ευθεία κατεύθυνση είναι προφανής.
Για την αντίστροφη, ας υποθέσουμε ότι $H_\xi : \pi_1\left(M\right) \to G$ είναι τετριμμένη. Τότε για κάθε μονοπάτι c στην M με αρχικό σημείο b και τελικό σημείο b_0 η μεταφορά $T_c : F_b \to F_{b_0}$ είναι ανεξάρτητη του μονοπατιού c και θα τη συμβολίζουμε στο εξής ως T_b. Μπορούμε να ταυτίσουμε το fiber F_{b_0} με το $\mathbb{C}^n$ μέσω του αντίστοιχου χάρτη, και τότε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} h : E &\to M \times \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto \left(p\left(x\right), T_{p(x)}\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός. □

Θεώρημα 1.15. Κάθε διανυσματική δέσμη $\xi = \left(E, p, M\right)$ με τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης στην ομάδα $G \leq GL\left(n, \mathbb{C}\right)$ είναι ισόμορφη με τη διανυσματική δέσμη που επάγεται από μια αναπαράσταση $H_\xi : \pi_1\left(M\right) \to G$.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\xi} = \left(\tilde{E}, \tilde{p}, \tilde{M}\right)$ η επαγόμενη διανυσματική δέσμη από την καθολική επικάλυψη $q : \tilde{M} \to M$. Έχουμε δηλαδή το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{M} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow q \\ E & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Καθώς ο καθολικός χώρος επικάλυψης $\tilde{M}$ είναι απλά συνεκτικός, έχουμε ότι $H_{\tilde{\xi}} \equiv id$ και άρα από το προηγούμενο λήμμα η δέσμη $\tilde{\xi}$ είναι ισόμορφη με την τετριμμένη δέσμη $\left(\tilde{M} \times \mathbb{C}^n, pr, \tilde{M}\right)$. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό αυτό το παραπάνω διάγραμμα γίνεται

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{pr} & \tilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ E & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Τότε η π είναι κανονική επικάλυψη με την ομάδα των deck transformations να δίδεται από την $\pi_1\left(M\right)$ με τη δράση της πάνω στην $\tilde{M} \times \mathbb{C}^n$ να δίδεται από την

$$\begin{aligned} \delta : \pi_1\left(M\right) \times \left(\tilde{M} \times \mathbb{C}^n\right) &\to \tilde{M} \times \mathbb{C}^n \\ \left(\gamma, \left(\tilde{m}, y\right)\right) &\mapsto \left(\gamma\left(\tilde{m}\right), H_\xi\left(\gamma\right)\left(y\right)\right) \end{aligned}$$

□

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε

Πρόταση 1.16. Αν E είναι μια διανυσματική δέσμη τάξεως n πάνω από μια C^∞ πολλαπλότητα M τότε τα εξής είναι ισοδύναμα.

$i)$ Υπάρχει οικογένεια από τοπικά σταθερές απεικονίσεις μετάβασης που ορίζουν την E.
$ii)$ Η E είναι επίπεδη, δηλαδή δέχεται επίπεδη συνοχή.
$iii)$ Η E ορίζεται από μια αναπαράσταση $\rho : \pi_1\left(M\right) \to GL\left(n, \mathbb{C}\right)$. □

Η ολονομία μιας επίπεδης διανυσματικής δέσμης μπορεί να περιγραφεί γεωμετρικά κατ' ευθείαν από τη συνοχή.

Έστω $c = c(t), 0 \leq t \leq a$ μια καμπύλη στην M. Ένα section s που ορίζεται κατά μήκος της c θα λέγεται **παράλληλο κατά μήκος** της c αν $(d_A)_{c'(t)} s = 0$.

Ως προς ένα τοπικό πλαίσιο, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{ds_i}{dt} + \sum_j a_{ij}(c'(t)) s_j = 0$$

Αν λοιπόν s_0 είναι ένα στοιχείο του αρχικού νήματος (fiber) $V_{c(0)}$ (αρχική συνθήκη για το σύστημα δ.ε.), τότε αυτό επεκτείνεται μοναδικά σε ένα παράλληλο section s κατά μήκος της c (μοναδικότητα της λύσης του συστήματος δ.ε.), το οποίο ορίζουμε ως την **παράλληλη μετατόπιση (parallel displacement)** του s_0 κατά μήκος της c.
Αν τώρα το αρχικό με το τελικό σημείο της καμπύλης ταυτίζονται, δηλαδή είναι $x_0 = c(0) = c(a)$, τότε η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της καμπύλης c επάγει ένα γραμμικό μετασχηματισμό πάνω στο νήμα $V_{c(0)}$ (από τη γραμμικότητα των λύσεων του συστήματος δ.ε.). Το σύνολο των ενδομορφισμών του $V_{c(0)}$ που επάγονται με αυτόν τον τρόπο από όλες τις κλειστές καμπύλες από το x_0 αποτελεί ομάδα, η οποία καλείται **ομάδα ολονομίας (holonomy group)** της d_A με σημείο αναφο-ράς το x_0.

Παρατηρήσαμε αμέσως μετά τον ορισμό 1.6, ότι για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ και $s \in \mathscr{A}^0(V)$ είναι

$$F_{X,Y}(s) = d^{\nabla}(\nabla s)(X,Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]} s$$

Επομένως αν η συνοχή είναι επίπεδη, τότε έχουμε ότι

$$\nabla_{[X,Y]} s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s)$$

Επιπροσθέτως, αν τα διανυσματικά πεδία X, Y είναι βασικά, δηλαδή

$X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ για κάποιον χάρτη $(x^1, \ldots, x^n)$ της M, τότε $[X,Y] = 0$.

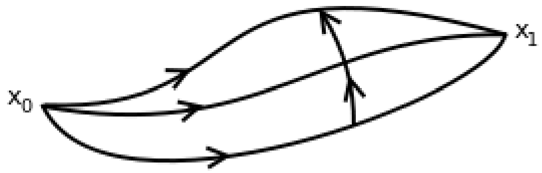
Άρα προκύπτει ότι

$$\nabla_X(\nabla_Y s) = \nabla_Y(\nabla_X s)$$

Καταλήγουμε λοιπόν τώρα ότι αν $V(y,t)$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας λείας καμπύλης γ πάνω στην επιφάνεια Riemann M τότε

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{DV}{dt}\right) = \frac{D}{dt}\left(\frac{DV}{ds}\right)$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι τότε η παράλληλη μετατόπιση με οποιονδήποτε τρόπο πάνω σε ένα πλέγμα για την επιφάνεια Riemann δεν αλλάζει την κατεύθυνση του διανύσματος (**μονοδρομία**).
Πράγματι, έστω $H:[0,1]\times[0,1]\to M$ μια (κατά τμήματα) C^∞ ομοτοπία $rel\{0,1\}$ με $H(t,0)=x_0$ και $H(t,1)=x_1$, $\forall t\in[0,1]$ και $H(t,\cdot):[0,1]\to M$ τόξο απ' το x_0 στο x_1.



Έστω X_0 ένα διάνυσμα στο fiber της V πάνω από το $x_0\in M$ και $X(t,\cdot)$ η παράλληλη μεταφορά του X_0 κατά μήκος του $H_t=H(t,\cdot)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $X(t,1), t\in[0,1]$ είναι σταθερό.

Έχουμε $\frac{DX}{ds}=0$ και συνεπώς

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{DX}{dt}\right) = \frac{D}{dt}\left(\frac{DX}{ds}\right) = 0$$

αφού η δέσμη είναι επίπεδη.

Άρα το $\frac{DX}{dt}$ είναι παράλληλο κατά μήκος της H_t. Όμως είναι

$$\frac{DX}{dt}(t,0) = \nabla_{\frac{\partial H}{\partial t}(t,0)}X = \nabla_0 X = 0$$

καθώς η ομοτοπία είναι $rel\{0,1\}$ δηλαδή με σταθερά άκρα.

Κατά συνέπεια $\frac{DX}{dt}=0$ που σημαίνει ότι το $X(\cdot,s)$ είναι παράλληλο κατά μήκος της $H(\cdot,s)$. Ειδικά το $X(t,1)$ είναι η παράλληλη μεταφορά του $X(0,1)$ κατά μήκος του σταθερού τόξου $H(t,1)=x_1$. Άρα $X(t,1)=X(0,1)$, $\forall t\in[0,1]$ και ειδικά $X(1,1)=X(0,1)$, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Επομένως αφού κάθε κλάση ομοτοπίας με σταθερά άκρα καθορίζει και ένα πλέγμα μεταξύ δύο loops πάνω στην επιφάνεια Riemann, η παράλληλη μετατόπιση καθορίζει ένα μοναδικό στοιχείο για κάθε κλάση ομοτοπίας. Έτσι παίρνουμε τον ομομορφισμό

$$\rho : \pi_1\left(M\right) \to GL\left(n,\mathbb{C}\right)$$

που είναι η αναπαράσταση της ολονομίας. □

1.2 Ολόμορφες δομές σε διανυσματικές δέσμες

Ορισμός 1.17. Ορίζουμε ως **ολόμορφη δομή (holomorphic structure)** πάνω σε μια μιγαδική C^∞ διανυσματική δέσμη V, μια $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση

$$d''_B : \Omega^0\left(M;V\right) \to \Omega^{0,1}\left(M;V\right)$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$d''_B\left(fs\right) = d''f \otimes s + fd''_B s$$

όπου $d''f = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$. Τοπικά μπορούμε να γράψουμε όπως και για τον τελεστή της συνοχής

$$d''_B = d'' + Bd\overline{z}$$

όπου ο B είναι πίνακας συναρτήσεων.

Παρατήρηση 1.18. Με τον ίδιο τρόπο που είδαμε πώς μεταβάλλει η αλλαγή ενός τοπικού πλαισίου τον πίνακα της συνοχής, έτσι και εδώ αν e' με $e' = eg$ είναι ένα άλλο ολόμορφο τοπικό πλαίσιο, τότε

$$B_{e'} = g^{-1} \cdot \left(d''g\right) + g^{-1} \cdot B_e \cdot g$$

Ο συνήθης ορισμός της ολόμορφης δομής σε μια διανυσματική δέσμη είναι μέσω τοπικών τετριμενοποιήσεων που σχετίζονται με ολόμορφες απεικονίσεις μετάβασης. Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως, βρίσκοντας τοπικά μια βάση από λύσεις της εξίσωσης $d''_B s = 0$. Έτσι λοιπόν έχουμε

Λήμμα 1.19. Έστω V μια C^∞ διανυσματική δέσμη. Η V είναι ολόμορφη διανυσματική δέσμη τότε και μόνο τότε ορίζεται μια ολόμορφη δομή για τη V.

Απόδειξη. $\left(\Rightarrow\right)$ Αν V είναι ολόμορφη με ολόμορφες απεικονίσεις μετάβασης τότε παίρνουμε τα ολόμορφα τοπικά πλαίσια s ως προς τις τετριμμενοποιήσεις και ορίζουμε την ολόμορφη δομή με $d''_B s = 0$.

$\left(\Leftarrow\right)$ Αν d''_B ολόμορφη δομή πάνω στη V τότε αυτή επιδέχεται ολόμορφο τοπικό πλαίσιο που ορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $d''_B s = 0$, δηλαδή οι απεικονίσεις μετάβασης είναι ολόμορφες άρα V ολόμορφη. □

Παρατήρηση 1.20. Αυτό βέβαια που απομένει να δείξει κανείς είναι ότι μια εξίσωση της μορφής $d''s+Bs=0$, έχει πράγματι αρκετές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, ούτως ώστε να επαληθευτεί ότι η κλάση των n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της εξίσωσης δεν είναι κενή.
Μια πλήρης απόδειξη για τούτο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για χώρους Banach για τον μη-γραμμικό τελεστή $g^{-1}d''g$, υπάρχει στο άρθρο των Atiyah-Bott $\left[1\right]$ στη σελίδα 555. (Η απόδειξη βασίζεται στις εξής παρατηρήσεις:
Αν s_U για $U \subset M$ είναι το τοπικό πλαίσιο που θέλουμε να κατασκευάσουμε και θ ο πίνακας της d''_B ως προς αυτό το πλαίσιο, τότε αν μετασχηματίσουμε το s_U σε gs_U όπου g είναι gauge transformation, προκύπτει η

$$d''_B g s_U = \left(d''g + g\theta\right)s_U$$

Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση λύσης της

$$g^{-1}d''g + \theta = 0$$

Θεωρώντας αυτήν ολικά πάνω από την S^2 και χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των χώρων Sobolev H^k, προκύπτει ότι η $P : H^2 \to H^1$ με $P\left(g\right) = g^{-1}d''g$ είναι λεία. Επιπλέον η παράγωγός της στο $g=1$ (ο ταυτοτικός πίνακας) είναι ο γραμμικός ελλειπτικός τελεστής d'', ο οποίος στην S^2 είναι επί και έχει πυρήνα τους σταθερούς πίνακες. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για χώρους Banach προκύπτει τότε ότι η $P\left(g\right) = -\theta$ έχει κοντά στο $g=1$ μοναδική λύση $g \in H^2$, κάθετη προς τις σταθερές, δεδομένου ότι θ είναι κοντά στο μηδέν στον H^1. Αν θ είναι C^∞, τότε και g είναι.) □

Ορισμός 1.21. Δύο ολόμορφες δομές d''_{B_1}, d''_{B_2} θα ονομάζονται **ισοδύναμες (equivalent)**, αν υπάρχει gauge transformation g τέτοιος ώστε $g^{-1}d''_{B_1}g = d''_{B_2}$.

Παρατήρηση 1.22. Εύκολα βλέπουμε από την παραπάνω σχέση ότι αν s είναι λύση της $d''_{B_2}s = 0$, τότε gs είναι λύση της $d''_{B_1}s = 0$. Επομένως ένας τέτοιος gauge transformation απεικονίζει λύσεις της εξίσωσης $d''_{B_2}s = 0$ σε λύσεις gs της $d''_{B_1}s = 0$.

Έστω τώρα V μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη και d''_1, d''_2 δύο ολόμορφες δομές πάνω στη V. Ορίζονται τότε ολόμορφες διανυσματικές δέσμες V_1, V_2 από τις δομές d''_1, d''_2 αντίστοιχα πάνω από την ίδια υποκείμενη δέσμη V, καθώς είδαμε ότι θα υπάρχει πάντα τοπικά μια βάση από λύσεις της εξίσωσης $d''_B s = 0$, πράγμα το οποίο ισοδυναμεί με την ολομορφία των απεικονίσεων μετάβασης για τη δέσμη.

Αυτό που θα δούμε τώρα είναι ότι οι ολόμορφες δομές αυτές είναι gauge ισοδύναμες εάν και μόνο εάν οι επαγόμενες ολόμορφες διανυσματικές δέσμες είναι ισόμορφες.

Πρόταση 1.23. Έστω V μια C^∞ μιγαδική διανυσματική δέσμη τάξεως n και d_1'', d_2'' δύο ολόμορφες δομές πάνω στη V, από τις οποίες επάγονται οι ολόμορφες διανυσματικές δέσμες V_1, V_2 αντίστοιχα. Τότε $d_1'' \sim d_2'' \Leftrightarrow V_1 \simeq V_2$ ολόμορφος ισομορφισμός.

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$Έστω $g : V \to V$ ο C^∞ αυτομορφισμός από την gauge ισοδυναμία των ολομόρφων δομών. Έστω $s = \left(s^1, \ldots, s^n\right)$ ένα τοπικό πλαίσιο με πίνακες μετάβασης $a_{\{UW\}}$, οι οποίοι καθορίζονται από την ανάλυση $s_U^i = \sum_j a_{\{UW\}}^{ij} s_W^j$. Αν εφαρμόσουμε την απεικόνιση g στη σχέση αυτή, παίρνουμε (από τη γραμμικότητα του g) ότι $g\left(s_U^i\right) = \sum_j a_{\{UW\}}^{ij} g\left(s_W^j\right)$, που σημαίνει ότι οι πίνακες μετάβασης του πλαισίου $g\left(s\right) = \left(gs^1, \ldots, gs^n\right)$ είναι οι ίδιοι με αυτούς του πλαισίου s. Άρα λοιπόν η απεικόνιση που στέλνει $s^i \mapsto gs^i$ είναι συμβατή με τους πίνακες μετάβασης και ο πίνακας αναπαράστασης της g ως προς τα πλαίσια s και gs είναι ο ταυτοτικός (που έχει ολόμορφα στοιχεία).
$(\Leftarrow)$Ο ολόμορφος ισομορφισμός $g : V_1 \to V_2$ απεικονίζει ολόμορφα sections σε ολόμορφα sections, με άλλα λόγια απεικονίζει λύσεις s_i της εξίσωσης $d_1''t = 0$ σε λύσεις gs_i της εξίσωσης $d_2''t = 0$. Τότε επιλέγοντας ένα τυχόν ολόμορφο τοπικό πλαίσιο $s = \left(s_1, \ldots, s_n\right)$, έχουμε ότι $d_1''s_i = 0 = g^{-1}d_2''gs_i$ για όλα τα στοιχεία του πλαισίου. Έχουμε λοιπόν έναν C^∞ αυτομορφισμό g της υποκείμενης δέσμης V, τέτοιον ώστε $d_1'' = g^{-1}d_2''g$, δηλαδή $d_1'' \sim d_2''$. □

Κάθε συνοχή d_A σε μια διανυσματική δέσμη V επάγει μια ολόμορφη δομή, ορίζοντας

$$d_A''s = \left(d_A s\right)^{0,1}$$

Δηλαδή, εάν η τοπική παράσταση της συνοχής d_A είναι $d_A = d + Bd\overline{z} + Cdz$, τότε η τοπική παράσταση της ολόμορφης δομής είναι $d_A'' = d'' + Bd\overline{z}$.

Προς το αντίστροφο ερώτημα τώρα, εισάγουμε τους εξής ορισμούς

Ορισμός 1.24. Έστω V μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη στην M. Μια **ερμιτιανή μετρική (hermitian metric)** στη V, είναι ένα ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο σε κάθε ίνα V_x της V, το οποίο μεταβάλλεται λεία για $x \in M$, δηλαδή αν το $e = \left(e_1, \ldots e_n\right)$ είναι ένα C^∞ τοπικό πλαίσιο για την V, τότε οι συναρτήσεις

$$h_{ij}\left(x\right) = \left\langle e_i\left(x\right), e_j\left(x\right)\right\rangle$$

είναι C^∞.
Θα λέμε **ερμιτιανή διανυσματική δέσμη** μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη, εφοδιασμένη με ερμιτιανή μετρική.

Ορισμός 1.25. Αν V είναι μια ερμιτιανή διανυσματική δέσμη και d_A είναι συνοχή στη V, θα λέμε ότι d_A είναι **unitary συνοχή,** αν είναι συμβατή με την ερμιτιανή δομή. Αν δηλαδή συμβαίνει

$$d\left\langle s,t\right\rangle = \left\langle d_A s, t\right\rangle + \left\langle s, d_A t\right\rangle$$

για κάθε ζεύγος από sections s, t.

Λήμμα 1.26. Αν V είναι μια ολόμορφη ερμιτιανή διανυσματική δέσμη, τότε υπάρχει μοναδική unitary συνοχή στη V, συμβατή με την ολόμορφη δομή και λέγεται **συνοχή του Chern.**

Απόδειξη. Έστω $e = \left(e_1, \ldots e_n\right)$ ένα ολόμορφο πλαίσιο της δέσμης και ας ορίσουμε $h_{ij} = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$. Ας δούμε αρχικά τι θα σήμαινε η ύπαρξη μιας τέτοιας συνοχής:
Κατ' αρχήν αν υπάρχει μια τέτοια συνοχή, τότε ο πίνακας αυτής θ_e θα αποτελείται μόνο από (1,0)-μορφές καθώς οι (0,1)-μορφές θα μηδενίζονται όλες εφόσον $d_A'' = \overline{\partial}$.
Επιπλέον, από τη συμβατότητα με το ερμιτιανό γινόμενο θα προέκυπτε ότι

$$\begin{aligned} dh_{ij} &= d\left(e_i, e_j\right) \\ &= \underbrace{\sum_k \theta_{ik} h_{kj}}_{(1,0)-\mu o\rho\varphi\varepsilon\varsigma} + \underbrace{\sum_k \overline{\theta}_{jk} h_{ik}}_{(0,1)-\mu o\rho\varphi\varepsilon\varsigma} \end{aligned}$$

Καθώς όμως παράλληλα είναι $dh_{ij} = \partial h_{ij} + \overline{\partial} h_{ij}$, συγκρίνοντας τους βαθμούς των μορφών συνάγεται ότι

$$\partial h_{ij} = \sum \theta_{ik} h_{kj}$$

$$\overline{\partial} h_{ij} = \sum \overline{\theta}_{jk} h_{ik}$$

Δηλαδή σε μορφή πινάκων

$$\partial h = \theta h$$

$$\overline{\partial} h = h\left(\overline{\theta}\right)^T$$

Από αυτήν την ανάλυση, συμπεραίνουμε ότι αν θεωρήσουμε την μοναδική λύση $\theta = \partial h \cdot h^{-1}$ και των δύο αυτών εξισώσεων ως τον πίνακα της συνοχής που θέλουμε να ορίσουμε, τότε τοπικά το λήμμα έχει δειχτεί. Για να ορίζεται η συνοχή ολικά, αρκεί να δείξουμε τη συμβατότητα ως προς την αλλαγή του πλαισίου. Δηλαδή αν $e' = \left(e'_1, \dots, e'_n\right)$ είναι ένα άλλο ολόμορφο πλαίσιο, τότε πρέπει να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\theta_e &= dg \cdot g^{-1} + g \cdot \theta_{e'} \cdot g^{-1} \\ &= \partial g \cdot g^{-1} + g \cdot \theta_{e'} \cdot g^{-1}\end{aligned}$$

όπου $g = \left(g_{ij}\right)$ είναι ο πίνακας μετάβασης που αποτελείται από ολόμορφες συναρτήσεις, όπως έχουμε δει.
Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}h_{ij} &= \left(e_i, e_j\right) = \left(\sum_k g_{ik} e'_k, \sum_l g_{jl} e'_l\right) = \sum_k g_{ik}\left(e'_k, \sum_l g_{jl} e'_l\right) = \sum_k g_{ik}\overline{\left(\sum_l g_{jl} e'_l, e'_k\right)} \\ &= \sum_k g_{ik} \sum_l \overline{g}_{jl}\,\overline{\left(e'_l, e'_k\right)} = \sum_{k,l} g_{ik} h'_{kl} \overline{g}_{jl} = \sum_l \left(\sum_k g_{ik} h'_{kl}\right) \overline{g}_{jl} = \sum_l c_{il} \overline{g}_{jl}\end{aligned}$$

όπου βοηθητικά θεωρήσαμε πίνακα $c = g \cdot h_{e'}$.

Επομένως

$$h_e = g \cdot h_{e'} \cdot \left(\overline{g}\right)^T$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\theta_e &= \partial h_e \cdot h_e^{-1} \\ \theta_{e'} &= \partial h_{e'} \cdot h_{e'}^{-1}\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$\begin{aligned}\theta_e &= \partial h_e \cdot h_e^{-1} = \partial\left(g \cdot h_{e'} \cdot \left(\overline{g}\right)^T\right) \cdot \left(g \cdot h_{e'} \cdot \left(\overline{g}\right)^T\right)^{-1} \\ &= \left[\left(\partial g\right) \cdot h_{e'} \cdot \left(\overline{g}\right)^T + g \cdot \left(\partial h_{e'}\right) \cdot \left(\overline{g}\right)^T + g \cdot h_{e'} \cdot \cancel{\partial\left(\overline{g}\right)^T}\right]\left(\left(\left(\overline{g}\right)^T\right)^{-1} \cdot \left(h_{e'}\right)^{-1} \cdot g^{-1}\right) \\ &= \left(\partial g\right) \cdot h_{e'} \cdot \left(\overline{g}\right)^T \cdot \left(\left(\overline{g}\right)^T\right)^{-1} \cdot \left(h_{e'}\right)^{-1} \cdot g^{-1} + g \cdot \left(\partial h_{e'}\right) \cdot \left(\overline{g}\right)^T \cdot \left(\left(\overline{g}\right)^T\right)^{-1} \cdot \left(h_{e'}\right)^{-1} \cdot g^{-1} \\ &= \left(\partial g\right) \cdot g^{-1} + g \cdot \theta_{e'} \cdot g^{-1}\end{aligned}$$

□

Αν επιπλέον πάρουμε τώρα $e = \left(e_1, \dots e_n\right)$ ένα ορθοκανονικό πλαίσιο (υπάρχει πάντα τέτοιο εφαρμόζοντας ορθοκανονικοποίηση Gramm-Schmidt στον χώρο με εσωτερικό γινόμενο), τότε έχουμε ότι

$$0 = d\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \theta_{ij} + \overline{\theta}_{ji}$$

δηλαδή ο πίνακας της συνοχής που επάγεται από την παραπάνω απόδειξη ως προς ένα ορθοκανονικό πλαίσιο είναι λοξά ερμιτιανός.

Επομένως αν η ολόμορφη δομή στη διανυσματική δέσμη V ορίζεται από τον τελεστή

$$d''_B = d'' + Bd\overline{z}$$

τότε η μοναδική συνοχή που επάγεται με την ιδιότητα να είναι συμβατή ως προς δεδομένη ολόμορφη δομή και ως προς το ερμιτιανό γινόμενο έχει τη μορφή

$$d_B = d + Bd\overline{z} - \overline{B}^T dz$$

Παρατήρηση 1.27. Η συζυγία με **unitary gauge transformation** , δηλαδή με gauge transformation, που διατηρεί το ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, $\left\langle gs, gt \right\rangle = \left\langle s, t \right\rangle$, αντιστοιχίζει unitary συνοχή σε unitary συνοχή.

Πράγματι αν d_A μια unitary συνοχή τότε είναι

$$\left\langle \left(g^{-1}d_A g\right)s,t \right\rangle + \left\langle s,\left(g^{-1}d_A g\right)t \right\rangle = \left\langle g^{-1}\left[d_A\left(gs\right)\right], g^{-1}\left(gt\right) \right\rangle + \left\langle g^{-1}\left(gs\right), g^{-1}\left[d_A\left(gt\right)\right] \right\rangle$$

$$= \left\langle d_A\left(gs\right), gt \right\rangle + \left\langle gs, d_A\left(gt\right) \right\rangle = d\left\langle gs, gt \right\rangle = d\left\langle s, t \right\rangle$$

άρα και $g^{-1}d_A g$ unitary. □

Στο εξής λοιπόν, *μπορούμε να σκεφτόμαστε το χώρο των ολομόρφων δομών πάνω σε μια διανυσματική δέσμη V και το χώρο των unitary συνοχών στη δέσμη, ως ένα και το αυτό.* Η παρατήρηση αυτή θα μας χρειαστεί παρακάτω στο να αναλύσουμε τις ολόμορφες δομές μιας επιφάνειας Riemann χρησιμοποιώντας gauge theory.

2

Διαιρέτες και Chern Classes

Στο κεφαλαίο αυτό θα δούμε ορισμένα βασικά στοιχεία από την αλγεβρική γεωμετρία που θα μας είναι χρήσιμα στη συνέχεια. Τα κεντρικά αποτελέσματα που θα δείξουμε εδώ είναι αφενός ότι οι C^∞ μιγαδικές line bundles καθορίζονται έως C^∞ ισομορφισμού από την πρώτη Chern class τους, και αφετέρου ότι οι ολόμορφες line bundles με πρώτη Chern class μηδέν επιδέχονται σταθερές απεικονίσεις μετάβασης και επίσης παραμετρίζονται από έναν αλγεβρικό τόρο. Το βασικό σημείο στην απόδειξη αυτού του αποτελέσματός είναι ότι το sheaf των C^∞ συναρτήσεων πάνω στην M είναι όπως λέμε fine. Για περισσότερες πληροφο-ρίες γύρω από sheaves καθώς και για ορισμένα αποτελέσματα που χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη σε τούτο το κεφάλαιο, παραπέμπουμε στο βιβλίο των Gunning και Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables.

2.1 Διαιρέτες

Τις επιφάνειες Riemann εδώ θα τις θεωρούμε πάντοτε συμπαγείς.

Ορισμός 2.1. Έστω M μια επιφάνεια Riemann. Θα ονομάζουμε **διαιρέτη (Weil divisor)** στην M, έναν πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό της μορφής

$$D = \sum_{z\in M} n_z z$$

όπου $n_z \in \mathbb{Z}$ με πεπερασμένο πλήθος $n_z \neq 0$.

Το σύνολο των διαιρετών στην M αποτελεί μια προσθετική αβελιανή ομάδα, την οποία στη συνέχεια θα συμβολίζουμε ως $\operatorname{Div}(M)$.

Αν $g \not\equiv 0$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση πάνω στην M και $z \in M$, τότε γράφοντας $\operatorname{ord}_z g = k\ (>0)$, θα εννοούμε ότι η g έχει ρίζα τάξης k στο z, ενώ γράφοντας $\operatorname{ord}_z g = -k\ (<0)$, ότι η g έχει πόλο τάξης k στο z. Αν δεν συμβαίνει κάτι από αυτά τότε θα γράφουμε $\operatorname{ord}_z g = 0$.

Ορισμός 2.2. Ως **Cartier divisor** σε μια επιφάνεια Riemann M ορίζουμε ένα global section του χώρου $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ των μη μηδενικών μερομόρφων συναρτήσεων πάνω στην M, modulo οι μη μηδενικές ολόμορφες συναρτήσεις.

Λήμμα 2.3. Οι δύο παραπάνω ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Ένα global section $\sigma \in H^0\left(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*\right)$ του χώρου $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ δίδεται από ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_a\}$ της M και μερόμορφες συναρτήσεις $f_a \neq 0$ στο U_a με $\frac{f_a}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*\left(U_a \cap U_\beta\right)$.

Τότε για κάθε $z \in U_a \cap U_\beta$ είναι απαραίτητα $\operatorname{ord}_z\left(f_a\right) = \operatorname{ord}_z\left(f_\beta\right)$, οπότε ορίζουμε τον Weil divisor

$$D = \sum_{z \in \bigcup_a U_a = M} \operatorname{ord}_z\left(f_a\right) \cdot z$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται για $z \in U_a$.

Επειδή οι πόλοι και οι ρίζες των f_a είναι μεμονωμένα σημεία και η M είναι συμπαγής, έχουμε πεπερασμένο πλήθος συντελεστών μη μηδενικό.
Αντίστροφα, έστω Weil divisor

$$D = \sum_{z \in M} n_z z$$

Μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_a\}$ της M με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε z (που είναι πεπερασμένα το πλήθος) με $n_z \neq 0$ να περιέχεται ακριβώς σε ένα U_a. Έστω $f_a \in \mathcal{O}\left(U_a\right)$ η local equation του D στο U_a. Τότε οι $f_a \in \mathcal{M}^*\left(U_a\right)$ ορίζουν ένα global section του $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, καθώς τα f_a, f_β ανήκουν και τα δύο στο $\mathcal{O}^*\left(U_a \cap U_\beta\right)$ αφού στο $U_a \cap U_\beta$ δεν έχουν ούτε πόλους ούτε μηδενικά. □

Έχουμε λοιπόν τώρα ότι

$$H^0\left(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*\right) = \operatorname{Div}(M)$$

Ορισμός 2.4. Έστω M μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και $D = \sum_{z \in M} n_z z$. Τότε ορίζουμε ως **βαθμό (degree)** του διαιρέτη D, τον ακέραιο

$$\deg D = \sum n_z$$

Προφανώς, η απεικόνιση

$$\deg : \operatorname{Div}\left(M\right) \to \mathbb{Z}$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

2.2 Διαιρέτες και line bundles

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι οι line bundles περιγράφονται από απεικονίσεις μετάβασης $\left\{g_{\alpha\beta}\right\}$, οι οποίες είναι ολόμορφες, πουθενά μηδενιζόμενες και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = 1 \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = 1 \end{cases}$$

Μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο όλων των line bundles με δομή ομάδας θεωρώντας ως γινόμενο, το τανυστικό γινόμενο μεταξύ line bundles και αντίστροφο, τη δυική δέσμη. Συγκεκριμένα με όρους απεικονίσεων μετάβασης έχουμε ότι
Αν $L \sim \left\{g_{\alpha\beta}\right\}$ και $L' \sim \left\{g'_{\alpha\beta}\right\}$ τότε

$$\begin{aligned} L \otimes L' &\sim \left\{g_{\alpha\beta} \cdot g'_{\alpha\beta}\right\} \\ L^{\vee} &\sim \left\{g_{\alpha\beta}^{-1}\right\} \end{aligned}$$

όπου θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $L^{\vee}$ για τη δυική δέσμη.
Ονομάζουμε λοιπόν την ομάδα των line bundles μιας επιφάνειας Riemann M, **ομάδα Picard** της M, την οποία και συμβολίζουμε $\operatorname{Pic}\left(M\right)$.

Από τον ορισμό τώρα της συνομολογίας Čech, έχουμε ότι $\operatorname{Pic}\left(M\right) = H^1\left(M, \mathcal{O}^*\right)$ καθώς η περιγραφή των line bundles μέσω των απεικονίσεων μετάβασης, βοηθάει στο να δούμε ότι οι δύο αυτές ομάδες είναι εφοδιασμένες ουσιαστικά με την ίδια δομή.

Έστω τώρα D διαιρέτης στην M με local defining functions $f_\alpha \in \mathcal{M}^*\left(U_\alpha\right)$ πάνω από ένα ανοιχτό κάλυμμα $\left\{U_\alpha\right\}$ της M. Παρατηρούμε τότε ότι οι συναρτήσεις

$$g_{a\beta} = \frac{f_a}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*\left(U_a \cap U_\beta\right)$$

Επιπλέον στο σύνολο $U_a \cap U_\beta \cap U_\gamma$ είναι $g_{a\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma a} = 1$.
Θα ονομάζουμε την line bundle που επάγεται με απεικονίσεις μετάβασης τις $\left\{g_{a\beta} = \dfrac{f_a}{f_\beta}\right\}$, **associated line bundle** του διαιρέτη D και τη συμβολίζουμε $\left[D\right]$.

Μπορούμε να δούμε τώρα ότι ο ορισμός που δώσαμε είναι καλός:
Αν $\left\{f'_a\right\}$ είναι μια άλλη οικογένεια από local defining functions για τον D, τότε είναι $h_a = \dfrac{f_a}{f'_a} \in \mathcal{O}^*\left(U_a\right)$ και $g'_{a\beta} = \dfrac{f'_a}{f'_\beta} = g_{a\beta} \cdot \dfrac{h_\beta}{h_a}$ για κάθε a, β, δηλαδή οι associated line bundles που προκύπτουν είναι ισόμορφες σύμφωνα με το λήμμα 0.13.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε D, D' δύο διαιρέτες με local data $\left\{f_a\right\}, \left\{f'_a\right\}$ αντίστοιχα (ορισμός Cartier), τότε παρατηρούμε ότι ο διαιρέτης $D + D'$ έχει local data $\left\{f_a \cdot f'_a\right\}$. Με βάση λοιπόν τον παραπάνω ορισμό της associated line bundle και τον ορισμό του τανυστικού γινομένου δεσμών μέσω απεικονίσεων μετάβασης συνάγεται ότι

$$\left[D + D'\right] = \left[D\right] \otimes \left[D'\right]$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η απεικόνιση

$$\left[\quad\right] : \mathrm{Div}\left(M\right) \to \mathrm{Pic}\left(M\right)$$

είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων.

Ορισμός 2.5. Ορίζουμε **διαιρέτη μιας μερόμορφης συνάρτησης** $g \not\equiv 0$

$$\left(g\right) = \sum_{z \in M} \left(\mathrm{ord}_z g\right) \cdot z$$

Η g έχει μεμονωμένες ρίζες και πόλους, οπότε καθώς η M είναι συμπαγής, υπάρχουν πεπερασμένοι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα.
Σημειώνουμε ότι $\deg\left(g\right) = 0$.

Πρόταση 2.6. Η associated line bundle $\left[D\right]$ ενός διαιρέτη D είναι τετριμμένη αν και μόνο αν ο D είναι διαιρέτης μιας μερόμορφης συνάρτησης.

Απόδειξη. Έστω $D = (f)$ όπου f είναι μια μερόμορφη συνάρτηση στην M. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως local data του διαιρέτη D ως προς ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_a\}$ της M, τους περιορισμούς $f_a = f\big|_{U_a}$. Τότε στο $U_a \cap U_\beta$ έχουμε

$$\frac{f_a}{f_\beta} = 1$$

και άρα $g_{a\beta} = 1$. Επομένως η $[D]$ είναι τετριμμένη.
Αντίστροφα, αν D έχει local data τις μερόμορφες $\{f_a\}$ και η line bundle $[D]$ είναι τετριμμένη, τότε αν $g_{a\beta} = \dfrac{f_a}{f_\beta}$ είναι οι απεικονίσεις μετάβασης της $[D]$, έχουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $h_a \in \mathcal{O}^*(U_a)$, τέτοιες ώστε

$$\frac{f_a}{f_\beta} = g_{a\beta} = \frac{h_a}{h_\beta}$$

από το λήμμα 0.13. και αφού τετριμμένη line bundle σημαίνει ότι $g'_{a\beta} = 1$.
Αν λοιπόν θεωρήσουμε

$$f = f_a \cdot h_a^{-1} = f_\beta \cdot h_\beta^{-1} = \dots$$

συνεχίζοντας το patching σε όλα τα στοιχεία του καλύμματος $\{U_a\}$, βλέπουμε ότι η f είναι μια ολική μερόμορφη συνάρτηση στην M με $(f) = D$, καθώς εκ κατασκευής η f έχει local data τις $\{f_a\}$. $\square$

Ορισμός 2.7. Δύο διαιρέτες D, D' θα λέμε ότι είναι **γραμμικά ισοδύναμοι (linearly equivalent)** και θα γράφουμε $D \sim D'$, αν $D = D' + (f)$ για κάποια $f \in \mathcal{M}^*(M)$.
Σημειώνουμε ότι αν $D \sim D'$, τότε $\deg D = \deg D'$.

Παρατήρηση 2.8. Από το γεγονός ότι η απεικόνιση $[\ \ ]$ είναι ομομορφισμός και την πρόταση 2.6., συμπεραίνουμε ότι D, D' είναι γραμμικά ισοδύναμοι αν και μόνο αν $[D] = [D']$. Αποδεικνύεται τώρα ότι για μια επιφάνεια Riemann M, η ομάδα Picard, $\mathrm{Pic}(M)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των διαιρετών $\mathrm{Div}(M)$ modulo γραμμική ισοδυναμία, δηλαδή

$$\mathrm{Pic}\left(M\right) \simeq \frac{\mathrm{Div}\left(M\right)}{\sim}$$

Αυτό που ουσιαστικά μένει μόνο να δεχθεί είναι ότι ο ομομορφισμός

$$\left[\quad\right] : \mathrm{Div}\left(M\right) \to \mathrm{Pic}\left(M\right)$$

είναι επιμορφισμός ομάδων. Έστω λοιπόν $L \in \mathrm{Pic}\left(M\right)$ μια line bundle με απεικονίσεις μετάβασης $g_{\alpha\beta}$. Μπορεί να δείξει κανείς μέσω του Θεωρήματος Riemann-Roch παρακάτω, ότι *κάθε line bundle έχει global μερόμορφο section* s . Τότε αναγκαστικά είναι

$$\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

και άρα $L = \left[\left(s\right)\right]$.

(Ο ορισμός του διαιρέτη ενός section γίνεται διαμέσου των τοπικών μερομόρφων συναρτήσεων που το ορίζουν) ☐

2.3 Το Θεώρημα Riemann-Roch

Ορισμός 2.9. Ένας διαιρέτης $D = \sum_{z \in M} n_z z$ θα λέγεται **effective** αν $n_z \geq 0$ για κάθε z. Θα γράφουμε $D \geq D'$ αν $D - D'$ effective.

Ορισμός 2.10. Έστω $\eta \not\equiv 0$ μια μερόμορφη διαφορική μορφή, όπου τοπικά μπορούμε να γράψουμε $\eta = f dz$ και να ορίσουμε $\mathrm{ord}_z \eta = \mathrm{ord}_z f$. Έτσι λοιπόν ως προς την η θεωρούμε διαιρέτη

$$\left(\eta\right) := \sum \left(\mathrm{ord}_z \eta\right) z$$

Ένας διαιρέτης K στην M θα λέγεται **κανονικός (canonical divisor)**, αν υπάρχει μερόμορφη 1-μορφή $\eta \not\equiv 0$, τέτοια ώστε $K = \left(\eta\right)$.

Παρατήρηση 2.11. Κάθε δύο canonical divisors είναι γραμμικά ισοδύναμοι. Πράγματι, αν $K = \left(\eta\right), K' = \left(\eta'\right)$ με η, η' μερόμορφες, τότε θεωρώντας $g = \frac{\eta}{\eta'}$, έχουμε ότι η g είναι μερόμορφη και $K - K' = \left(g\right) \Leftrightarrow K = K' + \left(g\right)$.

Επίσης αν D διαιρέτης σε μια επιφάνεια Riemann M ορίζουμε:

$$\mathscr{L}\left(D\right)=\left\{g\in\mathscr{M}\left(M\right):g\equiv 0 \ \text{ ή } D+\left(g\right)\geq 0\right\}$$
$$h^0\left(D\right)=\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{L}\left(D\right)$$

Θεώρημα 2.12 (Riemann-Roch). Αν M είναι μια συμπαγής επιφάνεια Riemann γένους p και D είναι διαιρέτης στην M, τότε

$$h^0\left(D\right)=\deg D-p+1+h^0\left(K-D\right)$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο βιβλίο του J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 211. □

Το Θεώρημα μας λέει ότι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων μερομόρφων συναρτήσεων g στην M για τις οποίες είναι $\left(g\right)\geq -D$, ισούται με το βαθμό του διαιρέτη D $-$[το γένος της M] $+1+$[το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων μερομόρφων 1-μορφών η στην M που ικανοποιούν $\left(\eta\right)\geq D$].

Το σπουδαιότερο είναι ότι το θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μερομόρφων συναρτήσεων με πόλους το πολύ σε εκείνα τα z_ν όπου $s_\nu>0$ (για $D=\sum s_\nu z_\nu$). Ειδικότερα, εάν $\deg D\geq p$ τότε μπορούμε πάντα να βρούμε μια τέτοια μερόμορφη συνάρτηση, επομένως *σε μια επιφάνεια Riemann υπάρχουν πάντα μερόμορφες συναρτήσεις.*

2.4 Chern Classes

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε την πρώτη Chern class για line bundles χωρίς να χρειαστεί να εκβαθύνουμε στον αξιωματικό ορισμό των Chern classes.

Έστω M μια επιφάνεια Riemann και θεωρούμε την exponential sheaf sequence

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathscr{O}\xrightarrow{e}\mathscr{O}^*\longrightarrow 0$$

όπου $e\left(f\right)=e^{2\pi i f}, f\in\mathscr{O}$ και i είναι η ένθεση. Η ακολουθία είναι προφανώς ακριβής και άρα επάγει τη μακρά ακριβή ακολουθία στη συνομολογία

$$\ldots\xrightarrow{i^*}H^1\left(M;\mathscr{O}\right)\xrightarrow{e^*}H^1\left(M;\mathscr{O}^*\right)\xrightarrow{\delta}H^2\left(M;\mathbb{Z}\right)\xrightarrow{i^*}H^2\left(M;\mathscr{O}\right)\xrightarrow{e^*}\ldots$$

Αν τώρα $L\in\operatorname{Pic}\left(M\right)=H^1\left(M,\mathscr{O}^*\right)$ είναι μια line bundle, ορίζουμε **πρώτη Chern class** της L

$$c_1\left(L\right)=\delta\left(L\right)\in H^2\left(M,\mathbb{Z}\right)$$

Στην περίπτωση όπου D είναι διαιρέτης στην M, ορίζουμε ως **Chern class** του διαιρέτη D, την $c_1\left(\left[D\right]\right)$.
Καθώς ορίσαμε τις Chern classes μέσω του ομομορφισμού δ έπεται ότι

$$c_1\left(L \otimes L'\right) = c_1\left(L\right) + c_1\left(L'\right)$$

$$c_1\left(L^\vee\right) = -c_1\left(L\right)$$

Παρατήρηση 2.13. Γενικότερα αν E, E' διανυσματικές δέσμες μεγαλύτερης τάξης
$c_1\left(E \oplus E'\right) = c_1\left(E\right) \cdot c_1\left(E'\right)$ (Whitney Product Formula)

$c_1\left(E^\vee\right) = -c_1\left(E\right)$

$c_1\left(E \otimes E'\right) = c_1\left(E\right) \cdot \operatorname{rank}\left(E'\right) + c_1\left(E'\right) \cdot \operatorname{rank}\left(E\right)$ □

Επιπλέον, καθώς η μακρά ακριβής ακολουθία στη συνομολογία είναι φυσική, αν $f : M \to N$ είναι μια απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann, έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc}
H^1\left(M;\mathcal{O}^*\right) & \xrightarrow{\delta} & H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \\
\uparrow f^* & & \uparrow f^* \\
H^1\left(N;\mathcal{O}^*\right) & \xrightarrow{\delta} & H^2\left(N;\mathbb{Z}\right)
\end{array}$$

Επομένως αν L είναι μια line bundle στην N, τότε $c_1\left(f^*L\right) = f^*c_1\left(L\right)$.

Έστω τώρα $\mathscr{A}$ και $\mathscr{A}^*$ τα sheaves των C^∞ συναρτήσεων και των μη μηδενικών C^∞ συναρτήσεων αντίστοιχα. Όπως είπαμε και στην παράγραφο 2.2, μια C^∞ line bundle L με απεικονίσεις μετάβασης $\left\{g_{\alpha\beta}\right\}$ καθορίζεται έως C^∞ ισομορφισμού από την κλάση συνομολογίας $\left[\left\{g_{\alpha\beta}\right\}\right] \in H^1\left(M, \mathscr{A}^*\right)$. Θεωρώντας πάλι την exponential sheaf sequence για τις C^∞ συναρτήσεις

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathscr{A} \xrightarrow{e} \mathscr{A}^* \longrightarrow 0$$

και εφόσον η μακρά ακριβής ακολουθία στη συνομολογία είναι φυσική, αν πάρουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{O} \to \mathscr{A}$, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccc} H^1\left(M;\mathscr{A}\right) & \longrightarrow & H^1\left(M;\mathscr{A}^*\right) & \xrightarrow{\delta'} & H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ H^1\left(M;\mathscr{O}\right) & \longrightarrow & H^1\left(M;\mathscr{O}^*\right) & \xrightarrow{\delta} & H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \end{array}$$

Επομένως από τη μεταθετικότητα, αν L είναι C^∞ line bundle, μπορούμε να ορίσουμε Chern class $c_1\left(L\right) = \delta'\left(L\right)$. Καθώς όμως $\mathscr{A}$ είναι fine sheaf δηλαδή δέχεται διαμέριση της μονάδας υπαγόμενη σε οποιοδήποτε τοπικά πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα της M, έχουμε ότι $H^1\left(M;\mathscr{A}\right) = 0$ και άρα από την ακρίβεια του διαγράμματος έπεται ότι δ' είναι μονομορφισμός. Αν λοιπόν για δύο C^∞ line bundles L, L' συμβαίνει να είναι $c_1\left(L\right) = c_1\left(L'\right)$, τότε συνεπάγεται ότι $L \simeq L'$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι *μια C^∞ μιγαδική line bundle καθορίζεται μέχρι C^∞ ισομορφισμού από την πρώτη Chern class αυτής.*

Ορισμός 2.14. Το $c_1\left(L\right)$ θεωρούμενο ως ακέραιος διαμέσου του ισομορφισμού $H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}$, ορίζεται ως ο βαθμός της line bundle L, $\deg L = c_1\left(L\right)$.

Αποδεικνύεται ότι αν $L = \left[D\right]$, τότε $\deg L = \deg D$.

Ειδικότερα, αν s είναι ένα μερόμορφο section της L, οπότε $L = \left[\left(s\right)\right]$, τότε $\deg L = \deg\left(s\right)$.

Επομένως αν η line bundle L επιδέχεται ολόμορφο section, τότε αναγκαστικά $\deg L \geq 0$. Ειδικότερα $\deg L = 0$ και επιδέχεται ολόμορφο section τότε και μόνο τότε είναι η τετριμμένη.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα ειδικότερο αποτέλεσμα.
Ο εγκλεισμός ανάμεσα στις exact sheaf sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathscr{O} & \to & \mathscr{O}^* & \to & 0 \\ & & \| & & \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* & \to & 0 \end{array}$$

επάγει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} H^1\left(M;\mathscr{O}\right) & \xrightarrow{e^*} & H^1\left(M;\mathscr{O}^*\right) & \xrightarrow{c_1} & H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \\ \uparrow i_1^* & & \uparrow i_2^* & & \| \\ H^1\left(M;\mathbb{C}\right) & \longrightarrow & H^1\left(M;\mathbb{C}^*\right) & \longrightarrow & H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \end{array}$$

Η απεικόνιση i_1^* είναι η δεύτερη προβολή στην ομάδα

$$H^1\left(M,\mathbb{C}\right)=H^{1,0}\left(M\right)\oplus H^{0,1}\left(M\right)$$

καθώς $H^1\left(M,\mathcal{O}\right)\simeq H^1\left(M,\Omega^0\right)\simeq H^{0,1}\left(M\right)$, με την διάσπαση να υφίσταται καθώς μια επιφάνεια Riemann είναι πολλαπλότητα Kähler. Άρα η i_1^* είναι επί.

Έτσι κάθε line bundle $L\in \operatorname{Pic}\left(M\right)=H^1\left(M,\mathcal{O}^*\right)$ που ανήκει στον πυρήνα της c_1, ανήκει και στην εικόνα της i_2^*. Αυτό μπορούμε να το δούμε κάνοντας diagram chasing στο παραπάνω διάγραμμα. Δηλαδή αν $L\in\ker c_1$, τότε L ανήκει στην κλάση συνομολογίας ενός σύγκυκλου με σταθερούς συντελεστές.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι *κάθε line bundle σε μια επιφάνεια Riemann με Chern class 0 επάγεται από σταθερές απεικονίσεις μετάβασης.*

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε και γεωμετρικά το σύνολο αυτών των line bundles ως αλγεβρική πολλαπλότητα.

Έστω λοιπόν $\operatorname{Pic}^0\left(M\right)$ η ομάδα των ολομόρφων line bundles σε μια επιφάνεια Riemann M με μηδενική Chern class, δηλαδή ορίζουμε $\operatorname{Pic}^0\left(M\right)=\ker c_1$.

Καθώς η απεικόνιση $e^*:H^0\left(M,\mathcal{O}\right)\to H^0\left(M,\mathcal{O}^*\right)$ είναι επί, η μακρά ακριβής ακολουθία στη συνομολογία που επάγεται από την exponential sheaf sequence σπάει σε δύο κομμάτια

$$0\to H^0\left(M,\mathbb{Z}\right)\to H^0\left(M,\mathcal{O}\right)\to H^0\left(M,\mathcal{O}^*\right)\to 0$$

και

$$0\longrightarrow H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)\xrightarrow{i^*}H^1\left(M,\mathcal{O}\right)\xrightarrow{e^*}H^1\left(M,\mathcal{O}^*\right)\xrightarrow{c_1}H^2\left(M,\mathbb{Z}\right)\xrightarrow{i^*}\ldots$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ακρίβεια στην δεύτερη ακολουθία και το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, έχουμε ότι

$$\ker c_1=\operatorname{Im}e^*=\frac{H^1\left(M,\mathcal{O}\right)}{\ker e^*}=\frac{H^1\left(M,\mathcal{O}\right)}{\operatorname{Im}i^*}$$

Όμως $\operatorname{Im}i^*=\dfrac{H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)}{\ker i^*}=H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)$ αφού η i^* είναι 1-1.

Επομένως

$$\operatorname{Pic}^0\left(M\right)=\frac{H^1\left(M,\mathscr{O}\right)}{H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)}$$

Μάλιστα είναι $\dfrac{H^1\left(M,\mathscr{O}\right)}{H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)}\simeq\dfrac{H^0\left(M,\Omega^1\right)^\vee}{H_1\left(M,\mathbb{Z}\right)}$ με την ένθεση

$$i:H_1\left(M,\mathbb{Z}\right)\to H^0\left(M,\Omega^1\right)^\vee$$

$$\gamma \quad \mapsto \quad \int_\gamma \; : H^0\left(M,\Omega^1\right)\to\mathbb{C}$$

Έχουμε τώρα ότι αν M είναι μια επιφάνεια Riemann γένους g, τότε από το Θεώρημα Van Kampen είναι $H^1\left(M,\mathbb{Z}\right)\simeq\mathbb{Z}^{2g}$, ενώ και $H^1\left(M,\mathscr{O}\right)\simeq\mathbb{C}^g$ καθώς εξ' ορισμού το γένος μιας επιφάνειας Riemann ορίζεται ως η μιγαδική διάσταση $\dim_{\mathbb{C}}H^1\left(M,\mathscr{O}\right)$.
Επομένως

$$\operatorname{Pic}^0\left(M\right)=\frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}^{2g}}$$

Άρα λοιπόν $\operatorname{Pic}^0\left(M\right)$ *είναι μιγαδικός τόρος διάστασης* g και αποδεικνύεται ότι είναι μάλιστα αλγεβρικός τόρος, με την εμβύθιση σε κάποιον μιγαδικό προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n$ να δίδεται από θήτα συναρτήσεις. Είναι δηλαδή μια abelian variety γι' αυτό και συνήθως η ομάδα $\operatorname{Pic}^0\left(M\right)$ ονομάζεται και Picard Variety.

3

Ταξινόμηση των διανυσματικών δεσμών βαθμού μηδέν

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι ο χώρος των ολομόρφων δομών σε μια διανυσματική δέσμη είναι ουσιαστικά ο ίδιος με τον χώρο των unitary συνοχών. Καταλήξαμε επίσης ότι οι C^{∞} μιγαδικές line bundles καθορίζονται τοπολογικά από την πρώτη Chern class τους. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τα συμπεράσματα αυτά για να δείξουμε ότι μπορούμε να παραμετρίσουμε unitary κλάσεις ισοδυναμίας επίπεδων συνοχών από ολόμορφες line bundles με βαθμό 0. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ένα τέτοιο αποτέλεσμα δε μπορεί να γενικευτεί στη μορφή αυτή για διανυσματικές δέσμες μεγαλύτερης τάξης, έστω και για τετριμμένες. Είναι ανάγκη να εξαιρέσουμε κάποιες (παθολογικές) δέσμες από αυτές, προκειμένου να φτάσουμε στην επιθυμητή παραμετρικοποίηση. Το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου τούτου, το Θεώρημα Narasimhan-Seshadri, του οποίου την απόδειξη δεν θα δούμε εδώ, μας λέει ακριβώς σε ποιες ολόμορφες διανυσματικές δέσμες βαθμού μηδέν πρέπει να περιοριστούμε, προκειμένου αυτές να παραμετρίζουν το χώρο των αναγώγων unitary επίπεδων συνοχών, modulo ισοδυναμία. Η συνθήκη της stability που πρέπει να ικανοποιούν οι ολόμορφες διανυσματικές δέσμες, θα παρατηρήσουμε ότι ικανοποιείται αυτομάτως στην περίπτωση των ολομόρφων line bundles.

3.1 Ταξινόμηση των ολομόρφων line bundles βαθμού μηδέν

Θεώρημα 3.1. Κάθε ολόμορφη δομή στην τετριμμένη line bundle $M \times \mathbb{C}$ είναι ισοδύναμη με την ολόμορφη δομή που επάγεται από μια unitary επίπεδη συνοχή. Η συνοχή αυτή είναι επιπλέον μοναδική modulo unitary gauge transformation.

Απόδειξη. Έστω ολόμορφη δομή στην $M \times \mathbb{C}$

$$d''_B = d'' + B$$

όπου $B \in \Omega^{0,1}\left(M\right)$.

Θεωρώντας complex gauge transformation της μορφής $g = e^f$ παίρνουμε συνοχή

$$g^{-1}d''_B g = d'' + d''f + B$$

και η επαγόμενη unitary συνοχή (χρησιμοποιώντας την τετριμμένη ερμιτιανή μετρική στην $M \times \mathbb{C}$) είναι

$$d + \left(d''f + B\right) - \left(d'\,\overline{f} + \overline{B}\right)$$

Η συνοχή αυτή είναι επίπεδη αν και μόνο αν

$$0 = d\left(d''f + B - d'\,\overline{f} - \overline{B}\right) = d'd''\left(f + \overline{f}\right) + d\left(B - \overline{B}\right)$$

δηλαδή η ύπαρξη της ζητούμενης επίπεδης συνοχής ισοδυναμεί με την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $-d'd''\left(f + \overline{f}\right) = d\left(B - \overline{B}\right)$.

Έχουμε όμως ότι ο διαφορικός τελεστής $id'd''$ είναι αυτοσυζηγής και άρα ο μηδενό-χωρός του είναι οι σταθερές. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η εξίσωση

$$d'd''h = \beta$$

έχει λύση αν και μόνο αν β είναι κάθετο προς τις σταθερές ως προς το ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\int_M \beta = 0$$

[Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $T\left(h\right) = \beta$ για κάποιο h και για $T = id'd''$, τότε είναι $\left\langle \beta, c \right\rangle = \left\langle T\left(h\right), c \right\rangle = \left\langle h, T\left(c\right) \right\rangle = 0$ αφού T αυτοσυζυγής.
Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι β είναι κάθετο προς τις σταθερές, τότε έπεται ότι $\beta \notin \ker T$, εφόσον ο πυρήνας του T αποτελείται ακριβώς από τις σταθερές. Από το rank+nullity τώρα έπεται το ζητούμενο.]
Από το θεώρημα του Stokes τώρα έχουμε ότι $\beta = d\left(B - \overline{B}\right)$ είναι κάθετο προς τις σταθερές, επομένως μπορούμε πράγματι να λύσουμε αυτή την εξίσωση και να βρούμε τη ζητούμενη f καθορίζοντας έτσι την επίπεδη συνοχή.

Μοναδικότητα. Έστω τώρα d_A, d_B unitary επίπεδες συνοχές με επαγόμενες ολόμορφες δομές ισοδύναμες. Δηλαδή υπάρχει $g : M \to \mathbb{C}^*$ τέτοιος ώστε

$$\left(d'' + A\right)g = g\left(d'' + B\right)$$

$$\Rightarrow \qquad d''g + Ag = gd'' + gB$$

Όμως αφού gd'' δρα πάνω σε ολόμορφα sections (ολόμορφη line bundle), έχουμε ότι $d''s = 0$, άρα $gd'' = 0$. Επίσης καθώς τα sections εδώ παίρνουν τιμές στο $\mathbb{C}$ έχουμε ότι $gB = Bg$. Επομένως συνάγουμε ότι

$$d''g + \left(A - B\right)g = 0$$

Με άλλα λόγια αν ορίσουμε $d_C = d + \left(A - B\right) - \left(\overline{A} - \overline{B}\right)$, τότε έχουμε

$$d_C''g = 0$$

όπου d_C unitary επίπεδη συνοχή.

Η καμπυλότητα είναι

$$F_A = d_A^2 = \left(d_A' + d_A''\right)^2 = d_A'd_A'' + d_A''d_A'$$

για οποιαδήποτε συνοχή d_A.
Καθώς έχουμε $F_A = 0$ και $d_C''g = 0$ έπεται ότι

$$d_C''d_C'g = 0$$

Θεωρούμε τώρα L^2-νόρμα του g (Weitzenböck technique):

$$i\int_M d_C'g \wedge \overline{d_C'g} \geq 0$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ολοκλήρωση κατά μέρη και το Θεώρημα του Stokes, το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$i\int_M \left(d_C''d_C'g\right)\overline{g}$$

Αυτό όμως μηδενίζεται καθώς είδαμε ότι $d_C''d_C'g = 0$, επομένως $d_C'g = 0$.
Άρα λοιπόν είναι $d_Cg = d_C'g + d_C''g = 0 + 0 = 0$.
Επιπλέον

$$d\left\langle g, g\right\rangle = \left\langle d_Cg, g\right\rangle + \left\langle g, d_Cg\right\rangle = 0$$

Καταλήγουμε ότι g έχει σταθερό μήκος και άρα $g/\left\|g\right\|$ είναι unitary gauge transformation μεταξύ των ολομόρφων δομών d_A και d_B. □

Το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να παραμετρήσουμε ολόμορφες line bundles βαθμού 0 από κλάσεις ισοδυναμίας unitary επίπεδων συνοχών. Επίσης είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, ότι αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας line bundles με σταθερές απεικονίσεις μετάβασης αποτελούν αλγεβρικό τόρο.

3.2 Το Θεώρημα Narasimhan-Seshadri

Το αμέσως επόμενο ερώτημα που προκύπτει με δεδομένο το θεώρημα αυτό είναι μήπως θα μπορούσαμε να φτάσουμε σε ένα ανάλογο αποτέλεσμα εάν επιχειρήσουμε να ανεβάσουμε την τάξη της δέσμης, θεωρώντας κατ' αρχήν ολόμορφες δομές στην τετριμμένη $M \times \mathbb{C}^2$. Είναι όλες ισοδύναμες με ολόμορφες δομές που επάγονται από unitary επίπεδες συνοχές? Θα δούμε ότι η απάντηση είναι αρνητική:

Έστω s ολόμορφο global section πάνω στην τετριμμένη ολόμορφη διανυσματική δέσμη $M \times \mathbb{C}^2$, ως προς την ολόμορφη δομή που επάγεται από μια unitary επίπεδη συνοχή d_A. Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο του $M \times \mathbb{C}^2$, επαναλαμβάνουμε την ίδια τεχνική με αυτήν της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος (Weitzenböck argument), οπότε έχουμε

$$0 \leq i\int_M \left\langle d'_A s, d'_A s \right\rangle = i\int_M \left\langle d''_A d'_A s, s \right\rangle = 0$$

αν εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη και καθώς είναι $F_A = d'_A d''_A + d''_A d'_A = 0$ και $d''_A s = 0$. Άρα είναι $d'_A s = 0$ επομένως όπως πριν, το s έχει σταθερό μήκος. Καταλήγουμε δηλαδή ότι κάθε ολόμορφο global section στην $M \times \mathbb{C}^2$ δε μηδενίζεται πουθενά.

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια ολόμορφη δομή για τη δέσμη $M \times \mathbb{C}^2$ ως προς την οποία θα υπάρχει ένα μηδενιζόμενο global section και άρα θα καταλήξουμε ότι δε μπορεί εδώ να υπάρχει η συγκεκριμένη ισοδυναμία ολομόρφων δομών. Έστω $x \in M$ ένα σημείο με τοπική εξίσωση $f(z) = 0$ σε κάποια γειτονιά U του x. Τότε το $\left\{M \setminus \{x\}, U\right\}$ αποτελεί ένα ανοιχτό κάλυμμα της M. Στο σύνολο $M \setminus \{x\}$ θεωρούμε την ολόμορφη σταθερή συνάρτηση 1, στο U έχουμε την ολόμορφη f και πάνω στην τομή $\left(M \setminus \{x\}\right) \cap U = U \setminus \{x\}$ η απεικόνιση μετάβασης f^{-1} δεν μηδενίζεται πουθενά. Επομένως από αυτές τις ολόμορφες απεικονίσεις ορίζεται μια ολόμορφη line bundle η οποία έχει ένα ολόμορφο section που μηδενίζεται στο x. Είναι δηλαδή η associated line bundle του διαιρέτη $D = x, [x]$. Θέτοντας τώρα $V = L \oplus L^{\vee}$ τότε καθώς $c_1(V) = 0$ και όπως έχουμε πει οι C^{∞} διανυσματικές δέσμες καθορίζονται πλήρως από την πρώτη Chern class αυτών, έπεται ότι η V είναι ουσιαστικά η τετριμμένη $M \times \mathbb{C}^2$ και είδαμε ότι έχει ένα ολόμορφο global section το οποίο μηδενίζεται κάπου. ☐

Στη συνέχεια αναζητούμε ικανές συνθήκες έτσι ώστε να μπορέσουμε να ταξινομήσουμε τις ολόμορφες δομές των διανυσματικών δεσμών με τάξη μεγαλύτερη της μονάδος. Θα χρειαστεί πρώτα να εισάγουμε μερικούς ορισμούς.

Παρατήρηση 3.2. Για κάθε ολόμορφη διανυσματική δέσμη V με απεικονίσεις μετάβασης $g_{\alpha\beta}$ ορίζεται η διανυσματική δέσμη $\det V$, με απεικονίσεις μετάβασης τις συναρτήσεις $\det g_{\alpha\beta}$ (οι $g_{\alpha\beta}$ έχουν τιμές πίνακες). Η $\det V$ είναι μια line bundle, η οποία καλείται **determinant line bundle**.

Ορισμός 3.3. Ορίζουμε ως **βαθμό μιας διανυσματικής δέσμης** V, το βαθμό της αντίστοιχης determinant line bundle, $\deg V = \deg\left(\det V\right)$.

Καμιά φορά ο ακέραιος αυτός συμβολίζεται με την ίδια την Chern class της δέσμης $\deg\left(V\right) = c_1\left(V\right)$.

Ορισμός 3.4. Θα ονομάζουμε μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη V **stable,** αν για κάθε γνήσια υποδέσμη της, $V' \subset V$ με $0 < \operatorname{rank}\left(V'\right) < \operatorname{rank}\left(V\right)$ ισχύει ότι

$$\frac{\deg\left(V'\right)}{\operatorname{rank}\left(V'\right)} < \frac{\deg\left(V\right)}{\operatorname{rank}\left(V\right)}$$

Ο αριθμός $s\left(V\right) = \dfrac{\deg\left(V\right)}{\operatorname{rank}\left(V\right)}$ λέγεται **κλίση (slope)** της δέσμης V.

Παρατήρηση 3.5. $i)$ Κάθε line bundle L βαθμού μηδέν είναι stable.

Πράγματι, αν N είναι μια line subbundle της L τότε η ύπαρξη του ομομορφισμού της ένθεσης $N \to L$ ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός ολομόρφου section του χώρου $N^{\vee} \otimes L$. Οπότε από την ύπαρξη του ολομόρφου section επάγεται ότι

$$\deg\left(N^{\vee} \otimes L\right) > 0 \Leftrightarrow -\deg N + \deg L > 0 \Leftrightarrow \deg L > \deg N$$

$ii)$ Υπάρχουν unstable line bundles βαθμού μεγαλύτερου του μηδενός.

Πράγματι, αν L είναι μια line bundle με $\deg L = 1$ τότε θεωρώντας $V = L \oplus L^{-1}$ τότε βλέπουμε ότι $\deg V = 0$ και αφού $L \subset V$, V unstable. $\square$

Ορισμός 3.6. Μια συνοχή d_A πάνω σε μια διανυσματική δέσμη V θα ονομάζεται **ανάγωγη (irreducible)** συνοχή, αν δε διατηρεί μη τετριμμένες υποδέσμες, δηλαδή, αν για κάθε μη τετριμμένη υποδέσμη $V' \subset V$ δεν ισχύει ότι

$$d_A\left(\Omega^0\left(V'\right)\right) \subset \Omega^1\left(V'\right).$$

Προς την κατεύθυνση του αποτελέσματος που αναζητούμε, παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει το εξής.

Πρόταση 3.7. Έστω V μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη τάξης 2 και βαθμού 0. Τότε αν η ολόμορφη δομή στη V προέρχεται (ή είναι ισοδύναμη) από μια unitary, ανάγωγη, επίπεδη συνοχή τότε η V είναι stable.

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια line subbundle $L \subset V$ με βαθμό $\deg L \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
• Αν $\deg L = 0$, τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε την L με μια unitary επίπεδη συνοχή από το θεώρημα 3.1.
• Αν $\deg L > 0$, τότε θεωρώντας έναν διαιρέτη D με βαθμό $d = \deg L$, εφόσον είναι $d > 0$, ορίζεται ολόμορφο section s με $\left(s\right) = D$. Οπότε τώρα αν θεωρήσουμε $L' = \left[D\right]$, παίρνουμε μια line bundle L' του ίδιου βαθμού με την L, η οποία έχει ολόμορφο section. Άρα υπάρχει ένας ολόμορφος ομομορφισμός $L \otimes \left(L'\right)^{-1} \to L$, διότι $H^0\left(\left(L \otimes \left(L'\right)^{-1}\right)^{-1} \otimes L\right) = H^0\left(L'\right)$. [Στην περίπτωση των line bundles είναι $L^{\vee} = L^{-1}$]. Δηλαδή υπάρχει ομομορφισμός $L \otimes \left(L'\right)^{-1} \to L \to V$ και μπορούμε πάλι από το θεώρημα 3.1 να εφοδιάσουμε με μια unitary επίπεδη συνοχή τη διανυσματική δέσμη $L \otimes \left(L'\right)^{-1}$, καθώς αυτή βλέπουμε ότι έχει βαθμό 0.
Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις λοιπόν, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός από μια line bundle L_0 βαθμού μηδέν προς την V, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει ολόμορφο global section s πάνω στην $L_0^{\vee} \otimes V$.
Επιπλέον καθώς η δεδομένη διανυσματική δέσμη V, αλλά και η $L_0^{\vee}$ είναι εφοδιασμένες με unitary επίπεδες συνοχές, επάγεται unitary επίπεδη συνοχή $d_{L_0^{\vee} \otimes V}$ και για τη δέσμη $L_0^{\vee} \otimes V$, ορίζοντας $d_{L_0^{\vee} \otimes V} = d_{L_0^{\vee}} \otimes 1 + 1 \otimes d_V$ [όπου εννοούμε εδώ ότι $d_{L_0^{\vee}} \otimes 1\left(s \otimes t\right) = d_{L_0^{\vee}}\left(s\right) \otimes t$]. Εξασφαλίσαμε λοιπόν την ύπαρξη ενός ολομόρφου global section της δέσμης $L_0^{\vee} \otimes V$, η οποία εφοδιάζεται με μια unitary επίπεδη συνοχή. Επαναλαμβάνοντας τώρα για τρίτη φορά το Weitzenböck argument, δείχνουμε ότι για το ολόμορφο global section s της $L_0^{\vee} \otimes V$ είναι $d_{L_0^{\vee} \otimes V} s = 0$.

Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι η L (και άρα και η L^{-1}) διατηρείται από τη συνοχή, αφού όπως είπαμε η ύπαρξη του s ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός ομομορφισμού $L \otimes \left(L'\right)^{-1} \to L \to V$. Επομένως η συνοχή είναι reducible, καταλήγοντας έτσι στην αντίφαση που θέλαμε. □

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι επίπεδες συνοχές επάγουν stable ολόμορφες δομές. Όπως είδαμε όμως, οι συνοχές αυτές δεν ¨γεμίζουν¨ το σύνολο όλων των ολομόρφων δομών. Το επόμενο Θεώρημα είναι αυτό που ξεκαθαρίζει πλήρως την κατάσταση και μας φανερώνει ακριβώς ποια είναι οι θέση των επίπεδων συνοχών σε σχέση με τις ολόμορφες δομές για μια ολόμορφη διανυσματική δέσμη μηδενικού βαθμού και οποιασδήποτε τάξης.

Θεώρημα 3.8.(Narasimhan-Seshadri) Κάθε ολόμορφη δομή σε μια stable ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού μηδέν πάνω από μια επιφάνεια Riemann M είναι ισοδύναμη με την ολόμορφη δομή που επάγεται από μια unitary ανάγωγη επίπεδη συνοχή. Η συνοχή αυτή είναι επιπλέον μοναδική, modulo unitary gauge transformation. □

Μια διαφορετική απόδειξη από αυτή που δόθηκε αρχικά υπάρχει στο άρθρο του Donaldson, A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri και η οποία είναι πιο κοντά στις τεχνικές τις Gauge Theory, χωρίς όμως και πάλι να είναι μια εύκολη υπόθεση.

Μπορούμε ωστόσο να πάρουμε μια ιδέα για τη διάσταση του χώρου των κλάσεων ισοδυναμίας stable διανυσματικών δεσμών τάξης n και βαθμού μηδέν. Οι κλάσεις αυτές βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις κλάσεις των irreducible αναπαραστάσεων $\pi_1(M) \to U(n)$ modulo συζυγία με $U(n)$. Αυτό έπεται από το παραπάνω θεώρημα και από το γεγονός ότι μια επίπεδη συνοχή επάγει αναπαράσταση $\pi_1(M) \to GL(n,\mathbb{C})$ με την εικόνα αυτής της αναπαράστασης να είναι η ομάδα ολονομίας της συνοχής, όπως είδαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 1. Επιπλέον η συνθήκη ότι η συνοχή είναι unitary, ισοδυναμεί με το γεγονός ότι για κάθε καμπύλη πάνω στην επιφάνεια Riemann η παράλληλη μετατόπιση είναι γραμμική ισομετρία και άρα η εικόνα της αναπαράστασης είναι μέσα στην $U(n)$.

Έχουμε ακόμα ότι $U(n)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{C}^{n^2}$ και μπορεί να δείξει κανείς ότι ο χώρος των αναγώγων αναπαραστάσεων $\pi_1(M) \to U(n)$ που μας ενδιαφέρει είναι λεία πολλαπλότητα. Για τη διάστασή της τώρα παρατηρούμε το εξής:

Καθώς για μια επιφάνεια Riemann γένους g είναι

$$\pi_1(M) = \left\langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \,\middle|\, A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g^{-1} B_g^{-1} = 1 \right\rangle$$

προκύπτει ότι μια τέτοια αναπαράσταση καθορίζεται από n^2-διάστατες επιλογές για κάθε A_i, B_i αλλά και μια (n^2-1)-διάστατη επιλογή για τη συνθήκη, εφόσον η εξίσωση $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g^{-1} B_g^{-1} = 1$ ορίζει μια υπερεπιφάνεια του χώρου των αναπαραστάσεων της $\pi_1(M)$. Επιπλέον, ο πυρήνας της δράσης συζυγίας πάνω στην $U(n)$ είναι ακριβώς το κέντρο της ομάδας, $Z(U(n))$. Όμως γενικά έχουμε ότι το κέντρο της $GL(n,\mathbb{C})$ αποτελείται από τους σταθερούς πίνακες λI με $\lambda \in \mathbb{C}^*$, οπότε η συζυγία έχει διάσταση n^2-1 αφού είναι τετριμμένη μόνο στους σταθερούς πίνακες, οι οποίοι γνωρίζουμε ότι είναι μονοδιάστατοι. Επομένως έχουμε $2gn^2 - (n^2-1)$ βαθμούς ελευθερίας για την απεικόνιση των A_i, B_i, πλην n^2-1 η διάσταση της συζυγίας.

Επομένως η διάσταση του χώρου που μας ενδιαφέρει είναι

$$2gn^2 - 2\left(n^2 - 1\right) = \left(2g - 2\right)n^2 + 2$$

4

Η προσέγγιση μέσω Συμπλεκτικής Γεωμετρίας

Το ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα Narasimhan-Seshadri είναι πώς η έννοια της stability έχει να κάνει με επίπεδες συνοχές; Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την προσέγγιση του Hitchin στην έννοια της stability από μια πολύ διαφορετική σκοπιά, αυτήν της συμπλεκτικής γεωμετρίας, ενός κλάδου που ξεκίνησε από τη Hamiltonian μηχανική. Θα ξεκινήσουμε στην παράγραφο 4.1 θέτοντας τους βασικούς ορισμούς γύρω από τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες και θα ορίσουμε μια έννοια stability για τα σημεία των πολλαπλοτήτων αυτών. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αναλυτικά τρία παραδείγματα γύρω από τις έννοιες αυτές. Τα παραδείγματα αυτά δεν είναι χρήσιμα μόνο ως προς την κατανόηση των εννοιών, αλλά χρησιμοποιούνται καθοριστικά παρακάτω στο κεφάλαιο 5. Στην παράγραφο 4.3 αναλύουμε πώς εφάρμοσε ο Hitchin αυτή τη θεωρία για το χώρο των ολομόρφων δομών και θα δούμε ότι μια moment map για τον χώρο αυτό είναι η καμπυλότητα της αντίστοιχης συνοχής. Αυτό λοιπόν που προκύπτει εντυπωσιακά είναι ότι τα stable points σε αυτήν την περίπτωση είναι ακριβώς οι unitary επίπεδες συνοχές. Έτσι λοιπόν από το θεώρημα των Narasimhan-Seshadri συμπεραίνουμε ότι η πεπερασμένης διάστασης αριθμητική έννοια της stability συμπίπτει με την απειροδιάστατη έννοια μέσω της moment map.

4.1 Συμπλεκτικές δομές και η moment map

Ορισμός 4.1. Ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος λέγεται **συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος** αν εφοδιάζεται με μια **συμπλεκτική μορφή**, δηλαδή μια αντισυμμετρική, διγραμμική, μη εκφυλισμένη (nondegenerate) 2-μορφή ω. Λέγοντας μη εκφυλισμένη εννοούμε ότι αν $\forall v \in V$ είναι $\omega\left(v,w\right)=0$, τότε $w=0$.

Ορισμός 4.2. Μια C^∞ πολλαπλότητα M θα λέγεται **συμπλεκτική πολλαπλότητα** αν εφοδιάζεται με μια κλειστή συμπλεκτική μορφή, δηλαδή αν υπάρχει μια $\omega \in \Omega^2\left(M\right)$ τέτοια ώστε:

$i)$ $d\omega = 0$

$ii)$ Σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_p\left(M\right)$ αν $\omega_p\left(X,Y\right)=0 \;\; \forall Y \in T_p\left(M\right)$ τότε $X=0$.

Παρατηρήσεις 4.3. *i)* Οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες είναι πάντα άρτιας διάστασης (Λήμμα Cartan). Για μια πλήρη απόδειξη παραπέμπουμε: K. Αθανασόπουλος, Notes on Symplectic Geometry, p. 15.
ii) Όλες οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες της ίδιας διάστασης έχουν τοπικά την ίδια δομή (Θεώρημα Darboux). Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι δεν υπάρχει τοπική θεωρία πάνω στις συμπλεκτικές πολλαπλότητες.
iii) Αν ω είναι μια συμπλεκτική δομή για μια πολλαπλότητα M τότε η μορφή $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ είναι μορφή όγκου, επομένως κάθε συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη.
iv) Δεν δέχονται όλες οι πολλαπλότητες άρτιας διάστασης συμπλεκτική δομή.
Για παράδειγμα αν η S^4 εφοδιαζόταν με συμπλεκτική δομή ω, τότε καθώς είναι $H^2_{DR}\left(S^4\right) = 0$ και ω κλειστή, έπεται ότι υπάρχει μια 1-μορφή a, τέτοια ώστε $\omega = da$. Τότε όμως από την προηγούμενη παρατήρηση, η μορφή όγκου θα ήταν $\omega \wedge \omega = da \wedge da = d\left(a \wedge da\right)$ και άρα από το θεώρημα του Stokes ο όγκος της S^4 θα ήταν μηδενικός.
v) Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n, τότε ο $V \times V^*$ εφοδιάζεται πάντα με συμπλεκτική μορφή.
Θεωρούμε στον $V \times V^*$ την αντισυμμετρική, διγραμμική μορφή ω με τύπο

$$\omega\left((v,a),(v',a')\right) = a'\left(v\right) - a\left(v'\right)$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\omega\left((v,a),(v',a')\right) = 0$, $\forall\left(v',a'\right) \in V \times V^*$, τότε έχουμε ότι $a'\left(v\right) - a\left(v'\right) = 0$, οπότε $a'\left(v\right) = a\left(v'\right)$, $\forall\left(v',a'\right)$. Άρα ισχύει και για το στοιχείο $\left(v',0\right) \in V \times V^*$ δηλαδή έχουμε $a\left(v'\right) = 0$, $\forall v' \in V$, επομένως $a = 0$. Με όμοιο τρόπο συνάγεται ότι και $v = 0$ και άρα η ω είναι μη εκφυλισμένη. Αυτή η παρατήρηση είναι χρήσιμη στο να επαληθεύσει κανείς τα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα 4.4. *i)* Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^{2n}$ εφοδιασμένος με την κανονική συμπλεκτική δομή $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$ είναι μια συμπλεκτική πολλαπλότητα, όπου $dx^1,\ldots,dx^n,dy^1,\ldots,dy^n$ είναι οι κανονικές βασικές διαφορικές 1-μορφές στον $\mathbb{R}^{2n}$.
ii) Η συνεφαπτόμενη δέσμη $\pi : T^*\left(M\right) \to M$ κάθε C^∞ πολλαπλότητας είναι μια συμπλεκτική πολλαπλότητα. Πράγματι, αν $\left(U,q^1,\ldots,q^n\right)$ είναι ένας χάρτης της M και $\left(\pi^{-1}\left(U\right),q^1,\ldots,q^n,p^1,\ldots,p^n\right)$ είναι ο αντίστοιχος χάρτης για την $T^*\left(M\right)$ τότε η κανονική συμπλεκτική δομή στην $T^*\left(M\right)$ ορίζεται από την κλειστή 2-μορφή

$$\omega\Big|_{\pi^{-1}(U)} = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp^i$$

iii) Κάθε πολλαπλότητα Kähler και γενικότερα κάθε ομαλή αλγεβρική πολλαπλότητα είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα.

Ορισμός 4.5. Αν V είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, θ είναι τυχούσα διαφορική n-μορφή και $x \in V$, ορίζουμε **εσωτερικό πολλαπλασιασμό ή συστολή** με x **(interior multiplication or contraction)** την γραμμική απεικόνιση

$$i_x : \wedge^n \left(V\right) \to \wedge^{n-1}\left(V\right)$$

με $i_x \theta\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right) = \theta\left(x, y_1,\ldots,y_{n-1}\right)$.

Αποδεικνύεται τότε (βλ. Κ. Αθανασόπουλος, Notes on Symplectic Geometry, p.27) ότι $\forall X \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ και διαφορική μορφή θ, η παράγωγος Lie της θ ως προς X ικανοποιεί

$$\mathscr{L}_X \theta = d\left(i_X \theta\right) + i_X d\theta \qquad \textbf{(Cartan's formula)}$$

Θεωρούμε μια δράση μιας ομάδας Lie $G \curvearrowright M$, η οποία διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή ω της M (δηλαδή $\omega\left(g\cdot x, g\cdot y\right) = \omega\left(x,y\right), \forall g \in G$). Τότε για κάθε στοιχείο της αντίστοιχης άλγεβρας Lie, $X \in \mathscr{G}$, παράγεται από τη δράση το πεδίο Killing $\tilde{X} = \left(\psi_g\right)_{*e}\left(X\right)$ όπου ψ η δράση και e το ουδέτερο στοιχείο της G. Καθώς η δράση $G \curvearrowright M$ όπως υποθέσαμε διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή της M, προκύπτει ότι το πεδίο Killing $\tilde{X}$ αφήνει την ω αναλλοίωτη, δηλαδή $\mathscr{L}_{\tilde{X}}\omega = 0$.
Επομένως, αν M είναι μια συμπλεκτική πολλαπλότητα (οπότε $d\omega = 0$) και η δράση μιας ομάδας Lie G στην M διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή ω, τότε από τον τύπο του Cartan βλέπουμε αμέσως ότι $d\left(i_{\tilde{X}}\omega\right) = 0$.

Αν επιπλέον η μορφή $i_{\tilde{X}}\omega$ είναι ακριβής (το οποίο συμβαίνει για παράδειγμα όταν $H^1\left(M,\mathbb{R}\right) = 0$), τότε έπεται ότι θα υπάρχει μια συνάρτηση $\mu_X \in C^\infty\left(M\right)$ τέτοια ώστε $d\mu_X = i_{\tilde{X}}\omega$ και μάλιστα υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση για κάθε στοιχείο της άλγεβρας Lie $\mathscr{G}$.
Επομένως έχουμε μια γραμμική απεικόνιση

$$\mathscr{G} \to C^\infty\left(M\right)$$

ή ισοδύναμα μια απεικόνιση

$$\mu : M \to \mathscr{G}^*$$

όπου $\mathscr{G}^*$ είναι η δυική της Lie άλγεβρας $\mathscr{G}$.

Τώρα για την ομάδα Lie G με ουδέτερο στοιχείο e και αντίστοιχη άλγεβρα Lie $\mathscr{G}$, εξηγούμε ποια είναι η δράση που επάγεται στην $\mathscr{G}$ από τη δράση συζυγίας της

G στον εαυτό της $\psi_g\left(h\right) = ghg^{-1}, g \in G$. Η δράση αυτή σταθεροποιεί το ουδέτερο στοιχείο και επάγει την **adjoint linear representation** Ad: $G \to \mathrm{Aut}\left(\mathscr{G}\right)$ με τύπο

$$\mathrm{Ad}_g\left(X\right) = \left(\psi_g\right)_{*e}\left(X\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} g\left(\exp tX\right)g^{-1}$$

Αυτή με τη σειρά της επάγει μια αναπαράσταση Ad^*: $G \to \mathrm{Aut}\left(\mathscr{G}^*\right)$στη δυϊκή της άλγεβρας Lie, $\mathscr{G}^*$, η οποία ορίζεται ως $\mathrm{Ad}_g^*\left(a\right) = a \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$, $a \in \mathscr{G}^*$ και λέγεται **coadjoint representation** της G.

Ορισμός 4.6. Όταν η παραπάνω απεικόνιση μ που είδαμε έχει την επιπλέον ιδιότητα να παραμένει αναλλοίωτη (equivariant) κάτω από τη δράση της ομάδας G πάνω στην M και στην $\mathscr{G}^*$, δηλαδή όταν ισχύει $\mu\left(g \cdot x\right) = g \cdot \mu\left(x\right)$, τότε η μ λέγεται **moment map**. Εδώ θεωρούμε τη δράση $g \cdot x$ να είναι η δράση της $G \curvearrowright M$ και τη δράση $g \cdot \mu\left(x\right)$ να είναι η coadjoint πάνω στην $\mathscr{G}^*$ που ορίσαμε προηγουμένως. Αν ακόμα συμβολίσουμε με ϕ τη δράση $G \curvearrowright M$, τότε ο χώρος $\left(M, \omega, \phi, \mu\right)$ ονομάζεται **Hamiltonian G-space** και η πολλαπλότητα M καλείται **Hamiltonian G-manifold**.

Ορισμός 4.7. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ένας αυτομορφισμός της δέσμης, $I \in \mathrm{Aut}\, V$ ονομάζεται **μιγαδική δομή (complex structure)**, αν είναι $I^2 = -id_V$.

Μια τέτοια δομή κάνει τον V μιγαδικό διανυσματικό χώρο, ορίζοντας τον πολλαπλασιασμό με i ως $iv := Iv$. Αντίστροφα, ο πολλαπλασιασμός με i σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο είναι μια μιγαδική δομή στον αντίστοιχο πραγματικό διανυσματικό χώρο.

Αν τώρα M είναι μια πολλαπλότητα Kähler με ερμιτιανή μετρική g και αντίστοιχη μορφή Kähler $\omega = -\mathrm{Im}\, g$, τότε εξ' ορισμού

$$\omega\left(X, Y\right) = g\left(IX, Y\right)$$

Συνεπώς από τους ορισμούς:

$$d\mu_X\left(Y\right) = i_{\tilde{X}}\omega\left(Y\right) = \omega\left(\tilde{X}, Y\right) = g\left(I\tilde{X}, Y\right)$$

Αν $Y \in T_p\left(\mu^{-1}\left(0\right)\right)$, τότε $d\mu_X\left(Y\right) = 0$ με εκτίμηση της μ σε κάθε X, έτσι $g\left(IX, Y\right) = 0$, οπότε *το διανυσματικό πεδίο IX είναι κάθετο στο $\mu^{-1}\left(0\right)$*.

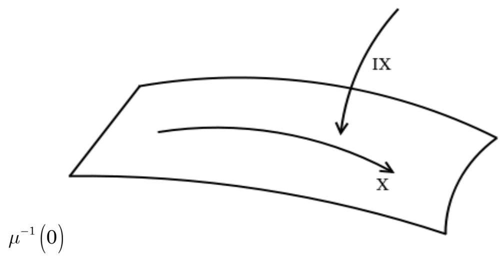
Δηλαδή έχουμε

$$\mathrm{grad}\mu_X = IX$$

Στην περίπτωση τώρα όπου η G διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή και τη μετρική της πολλαπλότητας Kähler M (άρα και την μιγαδική δομή), τότε η $\mathcal{G} \oplus I\mathcal{G}$ παράγει μια μιγαδική άλγεβρα Lie από ολόμορφα διανυσματικά πεδία ως προς την I. Υποθέτουμε περαιτέρω ότι η μιγαδική άλγεβρα Lie που προκύπτει από τη δράση της Lie άλγεβρας της $G^{\mathbb{C}} = G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ πάνω στην M, είναι ακριβώς η $\mathcal{G} \oplus I\mathcal{G}$.

Ορισμός 4.8. Με την παραπάνω υπόθεση ένα σημείο στην M θα λέγεται **stable** (σωστότερα semistable), αν μετασχηματίζεται μέσω της δράσης της $G^{\mathbb{C}}$ σε ένα σημείο του συνόλου μηδενισμού της moment map, $\mu^{-1}(0)$.

Γεωμετρικά συμβαίνει το εξής:
Καθώς η moment map μ ικανοποιεί τη σχέση $\mu(g \cdot x) = g \cdot \mu(x)$, αν $x \in \mu^{-1}(0)$ τότε και $g \cdot x \in \mu^{-1}(0)$ για κάθε $g \in G$ από τη γραμμικότητα της coadjoint δράσης δηλαδή η G δρα στο $\mu^{-1}(0)$. Επιπλέον τα διανυσματικά πεδία X που παράγονται από τη δράση $G \times \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)$ είναι επομένως εφαπτόμενα στο $\mu^{-1}(0)$, όταν το 0 είναι regular value για να είναι υποπολλαπλότητα η $\mu^{-1}(0)$.
Είδαμε όμως ότι $\mathrm{grad}\mu_X = IX$, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο IX είναι κάθετο στο $\mu^{-1}(0)$.



Επομένως ένα stable σημείο κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς του IX προς το $\mu^{-1}(0)$. Τα σημεία αυτά τώρα σχηματίζουν στην πραγματικότητα μια γειτονιά του $\mu^{-1}(0)$ [αυτό μπορεί να το δει κανείς από το tubular neighborhood theorem καθώς τα διανυσματικά πεδία IX αποτελούν την normal bundle της υποπολλαπλότητας $\mu^{-1}(0)$, οπότε έπεται ότι θα υπάρχουν γειτονιές $\mathcal{U} \subset \mu^{-1}(0)$ και $\mathcal{V}$ της normal bundle οι οποίες θα είναι αμφιδιαφορικές]. *Ο χώρος λοιπόν $\mu^{-1}(0)$ παραμετρίζεται από τις τροχιές των stable points και σε κάθε σημείο του $\mu^{-1}(0)$ υπάρχει μια τροχιά (έστω και η τετριμμένη) ενός stable point που να διέρχεται από εκεί. Επίσης αν η M είναι συμπαγής τότε το ίδιο ισχύει και για την G οπότε έπεται ότι ο χώρος των τροχιών θα είναι Hausdorff.*

4.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.9. Έστω $M = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ το σύνολο των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων εφοδιασμένο με την τετραγωνική μορφή $I(A) = \|A\|^2 = \mathrm{Tr}(AA^*)$, όπου με A^* συμ-βολίζουμε τον αναστροφοσυζυγή του πίνακα $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Καθώς ο πίνακας $AB^* + BA^*$ είναι ερμιτιανός θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές, άρα και πραγματικό ίχνος. Μια μετρική Riemann λοιπόν για τον χώρο $M = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ είναι η

$$g(A,B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(AB^* + BA^*\right)$$

Έστω τώρα η ομάδα Lie $G = U(n)$ των unitary πινάκων με τη δράση συζυγίας πάνω στην M. Επίσης έστω ω η αντίστοιχη μορφή Kähler που επάγεται όπως είδαμε αμέσως μετά τον ορισμό 4.7.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η δράση της $U(n) \curvearrowright \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ διατηρεί τη μετρική Riemann g:

Αν U είναι ένας ορθογώνιος πίνακας και $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ τότε είναι

$$\begin{aligned}
g(U \cdot A, U \cdot B) &= g\left(UAU^{-1}, UBU^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\left(UAU^{-1}\right)\left(UBU^{-1}\right)^* + \left(UBU^{-1}\right)\left(UAU^{-1}\right)^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(UAU^{-1}UB^*U^{-1} + UBU^{-1}UA^*U^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(UAB^*U^{-1} + UBA^*U^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[U\left(AB^* + BA^*\right)U^{-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(AB^* + BA^*\right) = g(A,B)
\end{aligned}$$

καθώς για έναν unitary πίνακα ισχύει ότι $U^* = U^{-1}$ και γενικά για δύο πίνακες $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ισχύει ότι $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.

Καθώς λοιπόν η g διατηρείται από τη δράση της $U(n)$ και η δράση μετατίθεται με τη μιγαδική δομή i, τότε η δράση της $U(n)$ διατηρεί και τη συμπλεκτική μορφή Kähler. Πράγματι:

$$\omega\left(U\cdot A,U\cdot B\right)=g\left(i\left(U\cdot A\right),U\cdot B\right)=g\left(U\cdot\left(iA\right),U\cdot B\right)=g\left(iA,B\right)=\omega\left(A,B\right)$$

Επιπλέον, η πραγματική Lie άλγεβρα $\mathfrak{u}\left(n\right)$ για την ομάδα $U\left(n\right)$ αποτελείται από τους $n\times n$ λοξά-ερμιτιανούς (skew-hermitian) πίνακες.

Παρατηρούμε ακόμα ότι αν $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$, τότε ο πίνακας $C=\frac{1}{2}i\left[A,A^*\right]$ είναι στοιχείο της Lie άλγεβρας $\mathfrak{u}\left(n\right)$:

$$C^*=-\frac{1}{2}i\left[A,A^*\right]^*=\frac{1}{2}i\left[A^*,A\right]=-\frac{1}{2}i\left[A,A^*\right]=-C$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{\mu}:\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)\to\mathfrak{u}\left(n\right)$$

$$\tilde{\mu}\left(A\right)=-\frac{1}{2}i\left[A,A^*\right]$$

Ορίζουμε moment map

$$\mu:\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)\to\mathfrak{u}\left(n\right)^*$$

$$A\mapsto g\left(\tilde{\mu}\left(A\right),\ \cdot\ \right)$$

Η $\tilde{\mu}$ μετατίθεται με τη δράση της $U\left(n\right)$ πάνω στην $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ και στην Lie άλγεβρα $\mathfrak{u}\left(n\right)$ οπότε από τον φυσικό ισομορφισμό $\mathfrak{u}\left(n\right)\simeq\mathfrak{u}\left(n\right)^*$ με $X\mapsto g\left(X,\cdot\ \right)\in\mathfrak{u}^*\left(n\right)$ που επάγεται από τη μετρική Riemann g, έπεται η μετάθεση και για την μ (η coadjoint δράση εδώ είναι πάλι η δράση συζυγίας πάνω στους λοξά-ερμιτιανούς πίνακες):

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\left(U\cdot A\right)=\tilde{\mu}\left(UAU^{-1}\right)&=-\frac{1}{2}i\left[UAU^{-1},\left(UAU^{-1}\right)^*\right]\\&=-\frac{1}{2}i\left(UAU^{-1}\left(U^{-1}\right)^*A^*U^*-\left(U^{-1}\right)^*A^*U^*UAU^{-1}\right)\\&=-\frac{1}{2}i\left(UAA^*U^{-1}-UA^*AU^{-1}\right)\end{aligned}$$

ενώ από την άλλη μεριά είναι:

$$\begin{aligned}U\cdot\tilde{\mu}\left(A\right)=U\tilde{\mu}\left(A\right)U^{-1}&=-U\left(\frac{1}{2}iAA^*-\frac{1}{2}iA^*A\right)U^{-1}\\&=-\frac{1}{2}i\left(UAA^*U^{-1}-UA^*AU^{-1}\right)\end{aligned}$$

Για κάθε $X\in\mathfrak{u}\left(n\right)$ έχουμε σ' αυτήν την περίπτωση

$$\mu_X\left(A\right) = g\left(\tilde{\mu}\left(A\right), X\right) = g\left(-\frac{1}{2}i\left[A, A^*\right], X\right)$$

Το διαφορικό τώρα $d\mu_X\left(A\right)$ θα είναι ο γραμμικός εκείνος μετασχηματισμός $T : \mathscr{M}_n\left(\mathbb{C}\right) \to \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$\lim_{\left\|H\right\| \to 0} \frac{\left\|\mu_X\left(A+H\right) - \mu_X\left(A\right) - T\left(H\right)\right\|}{\left\|H\right\|} = 0$$

Καθώς λοιπόν είναι $\mu_X\left(A\right) = g\left(\tilde{\mu}\left(A\right), X\right)$ υπολογίζουμε το $\dfrac{\left\|\tilde{\mu}\left(A+H\right) - \tilde{\mu}\left(A\right)\right\|}{\left\|H\right\|}$ για να συμπεράνουμε τον T.

Θεωρώντας $H \in \mathscr{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ και τη νόρμα ως προς τη μετρική g, είναι

$$\frac{\left\|\tilde{\mu}\left(A+H\right) - \tilde{\mu}\left(A\right)\right\|}{\left\|H\right\|} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left\|-i\left(A+H\right)\left(A^* + H^*\right) + i\left(A^* + H^*\right)\left(A+H\right) - i\left(-AA^* + A^*A\right)\right\|}{\left\|H\right\|}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left\|i\left(-AH^* - HA^* - HH^* + A^*H + H^*A + H^*H\right)\right\|}{\left\|H\right\|}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{\left\|i\left(-AH^* - HA^* + A^*H + H^*A\right)\right\|}{\left\|H\right\|} + \frac{\left\|-HH^* + H^*H\right\|}{\left\|H\right\|}\right]$$

Αλλά $\dfrac{\left\|-HH^* + H^*H\right\|}{\left\|H\right\|} \leq \dfrac{\left\|HH^*\right\| + \left\|H^*H\right\|}{\left\|H\right\|} \leq \dfrac{2\left\|H\right\|\left\|H^*\right\|}{\left\|H\right\|} \to 0$ όταν $\left\|H\right\| = \left\|H^*\right\| \to 0$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$d\tilde{\mu}\left(A\right)\left(H\right) = \frac{1}{2}i\left(-AH^* - HA^* + A^*H + H^*A\right)$$

και άρα

$$d\mu_X\left(A\right)\left(H\right) = \frac{1}{2}g\left(i\left(-AH^* - HA^* + A^*H + H^*A\right), X\right)$$

Έστω $\phi : U(n) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ με $(U,A) \mapsto UAU^*$ η δράση της $U(n)$ πάνω στο $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και $X \in \mathfrak{u}(n)$. Το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο Killing $\tilde{X}$ της δράσης έχει τύπο

$$\tilde{X}_A = (\phi_A)_{*I_n}(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) A \exp(tX)^* = XA + AX^*$$

Άρα $(i_{\tilde{X}}\omega)_A(H) = g\left(i\left(XA + AX^*\right), H\right)$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(i\left(XAH^* - AXH^* + HA^*X - HXA^*\right)\right)$$

καθώς $X^* = -X$, αφού $X \in \mathfrak{u}(n)$.

Από την άλλη μεριά $d\tilde{\mu}(A)(H) = \frac{1}{2} i\left(-[A,H^*] + [A^*,H]\right)$, οπότε είναι

$$d\mu_X(A)(H) = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left(i\left(-[A,H^*] + [A^*,H]\right)X^* - iX\left(-[A,H^*] + [A^*,H]\right)^*\right)$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left(i\left(-[A,H^*]X^* + [A^*,H]X^* - X[A^*,H] + X[A,H^*]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left(i\left(-[A,H^*] + [A^*,H]\right)(X^* - X)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(iX\left(-[A^*,H] + [A,H^*]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(i\left(-XA^*H + XHA^* + XAH^* - XH^*A\right)\right)$$

$$= (i_{\tilde{X}}\omega)_A(H)$$

όπου κάναμε χρήση της ιδιότητας $\operatorname{Tr}(CD) = \operatorname{Tr}(DC)$.
Επομένως η μ είναι πράγματι moment map.

Περαιτέρω, η μιγαδοποίηση $U(n)^{\mathbb{C}} = U(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq U(n) \oplus iU(n)$ είναι η επέκταση του $U(n)$ ως $\mathbb{C}$-module. Μάλιστα είναι

$$U(n)^{\mathbb{C}} = GL(n,\mathbb{C})$$

Αυτό προκύπτει καθώς $\dim_{\mathbb{R}} U(n) = n + \dfrac{2n(n-1)}{2} = n^2$, άρα και η $iU(n)$ είναι επίσης n^2-διάστατη, οπότε $\dim_{\mathbb{R}} U(n)^{\mathbb{C}} = 2n^2$ ή $\dim_{\mathbb{C}} U(n)^{\mathbb{C}} = n^2$. Από την άλλη μεριά έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} GL(n,\mathbb{C}) = n^2$ και η $GL(n,\mathbb{C})$ είναι συνεκτική ομάδα Lie (σε αντίθεση με την $GL(n,\mathbb{R})$ η οποία αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες). Οπότε καθώς $U(n)^{\mathbb{C}}$ είναι και κλειστή υποομάδα της $GL(n,\mathbb{C})$ με την ίδια διάσταση, έπεται το συμπέρασμα.

Τώρα η Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ της μιγαδοποίησης $U(n)^{\mathbb{C}} = GL(n,\mathbb{C})$ είναι η μιγαδοποίηση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{u}(n)$ των unitary πινάκων, η οποία θυμίζουμε ότι αποτελείται από skew-hermitian πίνακες. Αυτό έπεται από τη μοναδική γραφή κάθε μιγαδικού πίνακα A στη μορφή $P+iQ$, για $P=\frac{1}{2}(A-A^*)$ και για $Q=\frac{1}{2i}(A+A^*)$. Επομένως είναι $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})=\mathfrak{u}(n)\oplus i\mathfrak{u}(n)$.

Για να δούμε ποια είναι τα stable points σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι σύνολο $\mu^{-1}(0)$ αποτελείται από τους $n\times n$ μιγαδικούς κανονικούς (normal) πίνακες:

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(0) &= \left\{A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \tilde{\mu}(A)=0\right\} = \left\{A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : [A,A^*]=0\right\} \\ &= \left\{A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AA^* = A^*A\right\}\end{aligned}$$

Επίσης από το φασματικό θεώρημα (spectral theorem) για έναν πίνακα $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ έχουμε ότι

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow A = UDU^*$$

όπου D διαγώνιος και U unitary.
Οπότε ένας πίνακας $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι stable, αν μετασχηματίζεται κάτω από τη δράση της $U(n)^{\mathbb{C}}=GL(n,\mathbb{C})$ σε έναν normal πίνακα. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ stable} &\Leftrightarrow MAM^{-1} \text{ normal, για κάποιον } M\in GL(n,\mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow MAM^{-1} = UDU^*, \text{ για } D: \text{διαγώνιο και } U: \text{unitary.} \\ &\Leftrightarrow A = M^{-1}UDU^*M \\ &\Leftrightarrow A = \left(M^{-1}U\right)D\left(M^{-1}U\right)^{-1}\end{aligned}$$

Επομένως οι stable πίνακες είναι ακριβώς οι διαγωνίσιμοι.

Παρατηρούμε τέλος ότι η $U(n)$ πράγματι δρα στους normal πίνακες:
Αν U unitary και A normal τότε

$$\begin{aligned}\left(UAU^{-1}\right)\left(UAU^{-1}\right)^* &= UAU^{-1}UA^*U^{-1} = UAA^*U^{-1} = UA^*AU^{-1} \\ &= UA^*U^{-1}UAU^{-1} = \left(UAU^{-1}\right)^*\left(UAU^{-1}\right)\end{aligned}$$

δηλαδή και ο UAU^{-1} είναι normal. □

Παράδειγμα 4.10. Έστω τώρα $M = S^2 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ εφοδιασμένη με την συνήθη μετρική (round metric) $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ σε σφαιρικές συντεταγμένες (θ,ϕ). Η συμπλεκτική μορφή επάγεται από την Kähler μετρική του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, δηλαδή την Fubini-Study metric

$$g = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left\|Z\right\|^2 = \frac{i}{4\pi}d\left(\left(\bar{\partial}-\partial\right)\log\left\|Z\right\|^2\right)$$

όπου $Z : U \to \mathbb{C}^2 \setminus \left\{0\right\}$ ανύψωση του $U \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Μέσω της στερεογραφικής προβολής μπορεί να δείξει κανείς ότι η round metric είναι η Fubini-Study. Πάνω λοιπόν σε αυτήν την συμπλεκτική πολλαπλότητα θεωρούμε τη δράση της ομάδας των περιστροφών της σφαίρας $G = \mathrm{SO}\left(3\right)$ με όλα τα στοιχεία αυτής να είναι ισομετρίες της S^2 που διατηρούν τον προσανατολισμό.

Βλέπουμε αμέσως ότι η δράση $\mathrm{SO}\left(3\right) \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή ω, καθώς η ω είναι το στοιχείο όγκου της πολλαπλότητας και εξ' ορισμού η $\mathrm{SO}\left(3\right)$ διατηρεί το στοιχείο όγκου. Επιπλέον η Lie άλγεβρα $\mathfrak{so}\left(3\right)$ που αντιστοιχεί στην ομάδα Lie $\mathrm{SO}\left(3\right)$, είναι ισόμορφη με την ομάδα των 3×3 λοξά-συμμετρικών πινάκων με το γινόμενο Lie να δίδεται από το μεταθέτη. Μπορούμε τώρα να ταυτίσουμε τη δυϊκή της Lie άλγεβρας αυτής, $\mathfrak{so}\left(3\right)^*$, με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\widehat{\ } : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}\left(3\right)$$

$$\left(v_1, v_2, v_3\right) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών Lie $\left(\mathbb{R}^3, \times\right)$ και $\mathfrak{so}\left(3\right)$. Ο ανάστροφος τώρα του ισομορφισμού $\widehat{\ }$ επάγει έναν ισομορφισμό από την $\mathfrak{so}\left(3\right)^*$ στον $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ και ο $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ μπορεί να ταυτιστεί με φυσικό τρόπο με τον $\mathbb{R}^3$ μέσω του Ευκλειδείου εσωτερικού γινομένου.

Θεωρούμε $p = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ το κάθετο διάνυσμα σε ένα σημείο $\left(x,y,z\right)$ της μοναδιαίας σφαίρας S^2, για την οποία η συμπλεκτική μορφή (και μορφή όγκου) είναι η

$$\omega = i_p\left(dx \wedge dy \wedge dz\right) = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

Υπολογίζουμε για τα διανυσματικά πεδία $X = y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}$ και τυχόν $v \in T_p\left(S^2\right)$:

$$
\begin{aligned}
& i_X\omega\left(v\right)=\omega\left(X,v\right)= \\
& =xdy\wedge dz\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y},v\right)+ydz\wedge dx\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y},v\right)+zdx\wedge dy\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y},v\right) \\
& =x\left[dy\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dz\left(v\right)-dz\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dy\left(v\right)\right] \\
& +y\left[dz\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dx\left(v\right)-dx\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dz\left(v\right)\right] \\
& +z\left[dx\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dy\left(v\right)-dy\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dx\left(v\right)\right] \\
& =x\left[-zdz\left(v\right)-ydy\left(v\right)\right]+y\left[ydx\left(v\right)-0\right]+z\left[0+zdx\left(v\right)\right] \\
& =-xzdz\left(v\right)-xydy\left(v\right)+y^2dx\left(v\right)+z^2dx\left(v\right) \qquad \left(*\right)
\end{aligned}
$$

καθώς γενικά είναι $du\wedge dv\left(X,Y\right)=du\left(X\right)\cdot dv\left(Y\right)-dv\left(X\right)\cdot du\left(Y\right)$ και $du_i\left(\dfrac{\partial}{\partial u_j}\right)=\delta_{ij}$.

Όμως αφού $x^2+y^2+z^2=1$ συνεπάγεται ότι $xdx+ydy+zdz=0$, άρα είναι

$$x^2dx\left(v\right)=-xydy\left(v\right)-xzdz\left(v\right)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην $\left(*\right)$ έχουμε

$$\left(*\right)=x^2dx\left(v\right)+y^2dx\left(v\right)+z^2dx\left(v\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\left(v\right)=dx\left(v\right)$$

Επομένως, $i_X\omega\left(v\right)=dx\left(v\right)$ και αφού το v ήταν τυχόν, έχουμε $i_X\omega=dx$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη βάση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}\left(3\right)^*\simeq\mathbb{R}^3$ από τα διανυσματικά πεδία

$$X=y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \ Y=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ \ Z=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$$

έχουμε ότι

$$i_X\omega=dx\ ,\ i_Y\omega=dy\ ,\ i_Z\omega=dz$$

με κυκλική εναλλαγή και για τα διανυσματικά πεδία Y και Z. Επομένως στα στοιχεία X,Y,Z της βάσης της άλγεβρας Lie αντιστοιχίζονται οι προβολές του $\mathbb{R}^3$: $\mu_X=\pi_1,\mu_Y=\pi_2,\mu_Z=\pi_3$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η moment map σε αυτήν την περίπτωση είναι η ένθεση της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$, $\mu : S^2 \to \mathbb{R}^3$ καθώς έχουμε και ότι αυτή μετατίθεται με τη δράση της $\mathrm{SO}(3)$ στη σφαίρα και στον $\mathbb{R}^3$.

Επίσης παρατηρούμε ότι εδώ $\mu^{-1}(0) = \varnothing$.

Η μιγαδοποίηση της $\mathrm{SO}(3)$ είναι η προβολική γραμμική ομάδα των 2×2 μιγαδικών πινάκων

$$\mathrm{SO}(3)^{\mathbb{C}} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$$

Πράγματι, από τη μια μεριά έχουμε ότι $\mathrm{SO}(3)^{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(3,\mathbb{C}) \simeq \dfrac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$. Αυτό μπορεί να το δει κανείς σε δύο βήματα:

• $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C}) \simeq \mathscr{L}_+^{\uparrow}$, όπου $\mathscr{L}_+^{\uparrow}=\mathrm{SO}(3,1)$ η restricted Lorentz group [Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο του Michel Gourdin, Basics of Lie Groups, p.40].

• $\mathscr{L}_+^{\uparrow} \simeq \dfrac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$ [Μια απόδειξη για τούτο υπάρχει στο βιβλίο των Moshe Carmeli και Shimon Malin, Theory of Spinors: An Introduction, p.56].

Από την άλλη μεριά τώρα έχουμε εξ' ορισμού ότι $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \simeq \dfrac{SL(2,\mathbb{C})}{Z(SL(2,\mathbb{C}))}$ με το κέντρο της ειδικής γραμμικής ομάδας να είναι

$$\begin{aligned} Z(SL(2,\mathbb{C})) &= \{A \in SL(2,\mathbb{C}) : AB = BA,\ \forall B \in SL(2,\mathbb{C})\} \\ &= \{\lambda I_2 : \lambda^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}\} = \{\pm I_2\} \simeq \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Επιπλέον η Lie άλγεβρα που επάγεται από τη μιγαδοποίηση $\mathrm{SO}(3)^{\mathbb{C}}$ είναι η $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ και έχουμε δει ότι $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ επομένως

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \oplus i\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus i\mathfrak{so}(3) \qquad \square$$

Παράδειγμα 4.11. Επεκτείνοντας το παραπάνω παράδειγμα τώρα, θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \simeq S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$ των διατεταγμένων τετράδων σημείων του $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ με τον ισομορφισμό να δίδεται από τη στερεογραφική προβολή. Θεωρούμε επίσης τη διαγώνια δράση πάλι της ομάδας $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright M$.

Γενικά αν $(M_1,\omega_1,\phi,\mu_1),(M_2,\omega_2,\phi,\mu_2),\dots,(M_n,\omega_n,\phi,\mu_n)$ είναι Hamiltonian G-spaces τότε και $(M_1 \times\cdots\times M_n, \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n, \phi, {\pi_1}^*\mu_1 + \ldots + {\pi_n}^*\mu_n)$ είναι Hamiltonian G-space, όπου $\pi_j : M_1 \times \cdots M_n \to M_j$ οι προβολές. Οπότε στην περίπτωση της $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \simeq S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$ με τη moment map για κάθε αντίτυπο S^2 υπό τη δράση της $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright S^2$ να είναι όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα η ένθεση $\mu : S^2 \to \mathbb{R}^3$, έχουμε ότι μια moment map είναι η

$$\begin{aligned} \mu : S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύνολο μηδενισμού της moment map αποτελείται από εκείνες τις τετράδες σημείων στην S^2 με το κέντρο μάζας τους να βρίσκεται στο $0 \in \mathbb{R}^3$. Έτσι τα stable points είναι ακριβώς εκείνες οι τετράδες οι οποίες απεικονίζονται μέσω της δράσης της $\mathrm{SO}(3)^{\mathbb{C}} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ σε μια τέτοιους είδους διάταξη. Παράλληλα έχουμε ότι $\mathbb{CP}^1 \simeq \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ οπότε βλέπουμε τα στοιχεία της M ως τετράδες στοιχείων του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου και πάνω σε αυτά να δρα η ομάδα των μετασχηματισμών Möbius $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Οπότε υπό αυτήν την σκοπιά, ένα stable point είναι μια τετράδα σημείων για την οποία υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius που την απεικονίζει σε μια άλλη τετράδα σημείων με κέντρο βάρους το μηδέν.

Η ποσότητα εκείνη η οποία παραμένει αναλλοίωτη από την ομάδα των μετασχηματισμών Möbius είναι ο διπλός λόγος (cross-ratio) μιας τετράδας σημείων:
Αν $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ διαφορετικά σημεία μεταξύ τους, ο διπλός λόγος ορίζεται ως

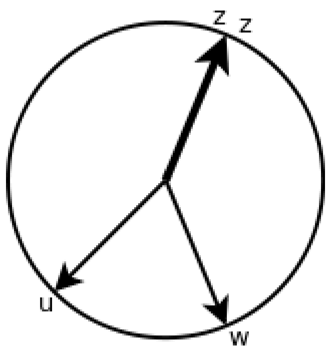
$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

Επεκτείνουμε τον ορισμό στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ορίζοντας τότε το διπλό λόγο παραλείποντας τις διαφορές που περιλαμβάνουν το στοιχείο ∞, δηλαδή για παράδειγμα αν $z_1 = \infty$ τότε ορίζουμε $[\infty, z_2; z_3, z_4] = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$. Για τετράδες σημείων διαφορετικών μεταξύ τους, αποδεικνύεται ότι ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από την $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ (βλ. Κ. Αθανασόπουλος, A crash course in Hyperbolic Geometry, p. 8), δηλαδή $[f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ για κάθε $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:
- Θεωρούμε εκείνες τις τετράδες σημείων της M με κάποιες από τις συντεταγμένες τους να συμπίπτουν.

Αν συμπίπτουν ακριβώς δύο από τις συντεταγμένες, τότε ένα σημείο $(a, a, b, c) \in M$ είναι stable μόνο όταν $b = c$. Πράγματι αυτό μπορούμε να το δούμε καθώς τότε η διαγώνια δράση ενός μετασχηματισμού Möbius θα το αντιστοιχίσει σε μια τετράδα

$\left(z,z,u,w\right)$ και αφού η στερεογραφική προβολή διατηρεί τις γωνίες, τα z,u,w αντιστοιχούν σε διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ πάνω σε κύκλο.



Οπότε μια τέτοια διάταξη διανυσμάτων μπορεί να έχει άθροισμα μηδέν μόνο όταν $w=u$ και w αντίθετο του z. Καταλήγουμε λοιπόν ότι για συμπτώσεις δύο ακριβώς συντεταγμένων, stable points είναι εκείνες οι τετράδες όπου οι συντεταγμένες τους συμπίπτουν ανά ζεύγη: $\left(x,y,x,y\right)$, $\left(x,x,y,y\right)$,$\left(x,y,y,x\right)$ και μάλιστα τότε ένας μετασχηματισμός Möbius θα τα απεικονίσει σε αντιποδικά σημεία της S^2.
Αν συμπίπτουν ακριβώς τρεις συντεταγμένες τότε με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, βλέπουμε ότι ένα τέτοιο σημείο ποτέ δεν μπορεί να είναι stable.
Αν πάλι συμπίπτουν και οι τέσσερις συντεταγμένες, ένα τέτοιο σημείο δε μπορεί να απεικονιστεί σε τετράδα με κέντρο βάρους το μηδέν, καθώς η δράση είναι διαγώνια.

- Έστω τώρα $\left(a,b,c,d\right)\in M$ μια τετράδα διακεκριμένων σημείων με διπλό λόγο $\left[a,b;c,d\right]=k$. Καθώς ένας μετασχηματισμός Möbius διατηρεί το διπλό λόγο, τότε το τυχόν $\left(a,b,c,d\right)$ θα είναι stable point, εάν υπάρχουν $z,w\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ τέτοια ώστε

$$\left[z,z';w,w'\right]=k$$

όπου $z'=-\dfrac{z}{\left|z\right|^2}$ είναι το αντιποδικό του $z\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, εφόσον τότε θα έχουμε ένα στοιχείο του $\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ που θα απεικονίζει το $\left(a,b,c,d\right)$ στην τετράδα $\left(z,z',w,w'\right)$ η οποία έχει προφανώς κέντρο βάρους το μηδέν.
Έχουμε

$$\left[z,z';w,w'\right]=k \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{z+\dfrac{w}{\left|w\right|^2}}{z+\dfrac{z}{\left|z\right|^2}}\cdot\frac{w+\dfrac{z}{\left|z\right|^2}}{w+\dfrac{w}{\left|w\right|^2}}=k \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(z\left|w\right|^2+w\right)\left(w\left|z\right|^2+z\right)}{\left(z\left|z\right|^2+z\right)\left(w\left|w\right|^2+w\right)}=k \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\left|w\right|^2+\frac{w}{z}\right)\left(\left|z\right|^2+\frac{z}{w}\right)=k\left(\left|z\right|^2+1\right)\left(\left|w\right|^2+1\right)$$

Μπορούμε να περιοριστούμε στην εύρεση λύσεων $\left(z,w\right)$ με $\left|z\right|=1$ και $\left|w\right|=1$.

Τότε η παραπάνω εξίσωση θέτοντας $u=\frac{w}{z}$ παίρνει τη μορφή

$$\left(1+u\right)\left(1+\frac{1}{u}\right)=4k \quad \Leftrightarrow$$

$$u^2+2\left(1-2k\right)u+1=0$$

η οποία έχει πάντοτε λύση στο $\mathbb{C}$ για κάθε k. Άρα για οποιαδήποτε τετράδα διακεκριμένων σημείων μπορούμε να καθορίσουμε ένα μετασχηματισμό Möbius που να την απεικονίζει σε τετράδα με κέντρο βάρους το μηδέν και άρα κάθε τέτοια τετράδα αποτελεί stable point.

Παρατηρούμε ωστόσο ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=16k\left(k-1\right)$. Για διπλό λόγο $k=0$ και $k=1$, βλέπουμε ότι οδηγούμαστε αναγκαστικά σε σημεία $\left(a,b,c,d\right)$ με συμπτώσεις, ενώ από την άλλη μεριά είναι $\left[x,y;x,y\right]=0$ και $\left[x,x;y,y\right]=1$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα stable points σε αυτό το παράδειγμα είναι όλες οι τετράδες με διακεκριμένα σημεία, καθώς επίσης και οι τετράδες σημείων της μορφής $\left(x,y,x,y\right)$, $\left(x,x,y,y\right)$, $\left(x,y,y,x\right)$.

Θα καθορίσουμε τώρα τις κλάσεις ισοδυναμίας των stable points. Αυτές είναι ακριβώς οι τροχιές της δράσης της ομάδας $\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ πάνω στα stable points

$$C_{\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)}=\left\{\left(f\left(z_1\right),f\left(z_2\right),f\left(z_3\right),f\left(z_4\right)\right),\text{για } f\in\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)\right\}$$

Αφού ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από τους μετασχηματισμούς Möbius, ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας από τη δράση της $\mathrm{PSL}\left(2,\mathbb{C}\right)$ καθορίζεται από το διπλό λόγο. Επιπλέον αποδεικνύεται (παραπέμπουμε ξανά Κ. Αθανασόπουλος, A crash course in Hyperbolic Geometry, p. 7) ότι για κάθε ζεύγος τριάδων $\left(z_1,z_2,z_3\right)$ και $\left(w_1,w_2,w_3\right)$ με διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, υπάρχει ένας μοναδικός μετασχηματισμός Möbius f, τέτοιος ώστε $f\left(z_1\right)=w_1, f\left(z_2\right)=w_2, f\left(z_3\right)=w_3$. Στην περίπτωση λοιπόν όπου όλα τα σημεία μιας τετράδας $\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)$ είναι διακεκριμένα, τότε υπάρχει ένας μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που να αντιστοιχίζει τα πρώτα τρία σημεία της τετράδας στα σημεία $1,0,\infty$ αντίστοιχα. Μάλιστα αυτός έχει τύπο

$$f\left(z\right)=\left[z,z_3;z_2,z_1\right]$$

Άρα λοιπόν η τροχιά της δράσης καθορίζεται από την εικόνα μονάχα του τέταρτου στοιχείου z_4, όπου σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει η εικόνα αυτή θα ανήκει στο $\mathbb{C}\mathrm{P}^1\setminus\left\{0,1,\infty\right\}$.

Από την άλλη μεριά για τα stable points με συμπτώσεις βλέπουμε ότι είναι

$$\left[x,y;x,y\right]=0 \text{ και } \left[x,x;y,y\right]=1 \text{ και } \left[x,y;y,x\right]=\infty$$

Επομένως συνολικά έχουμε ότι ο χώρος των τροχιών της δράσης είναι όλος ο $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

□

4.3 Moment map για το χώρο των ολομόρφων δομών

Θεωρούμε τώρα $\mathcal{C}$ το χώρο των ολομόρφων δομών σε μια διανυσματική δέσμη V πάνω από μια επιφάνεια Riemann M, ο οποίος είναι affine space (βλ. M. Atiyah-R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, p. 547). Οπότε η διαφορά δύο ολομόρφων δομών αποτελεί στην πραγματικότητα εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{B}\in\Omega^{0,1}\left(M;\mathrm{End}\,V\right)$ της πολλαπλότητας Kähler $\mathcal{C}$, η οποία είναι εφοδιασμένη με την τετραγωνική μορφή

$$\left\|\dot{B}\right\|^2=i\int_M \mathrm{Tr}\left(\dot{B}^*\dot{B}\right)$$

όπου εδώ υπενθυμίζουμε ότι μια ολόμορφη δομή γράφεται $d''_B=d''+Bd\overline{z}$. Από την τετραγωνική μορφή αυτή συνάγουμε την συμπλεκτική μορφή του χώρου $\mathcal{C}$ με τον ίδιο τρόπο όπως στο παράδειγμα 4.9

$$\omega\left(d''_A,d''_B\right)=g\left(id''_A,d''_B\right)=\frac{1}{2}i\int_M \mathrm{Tr}\left(i\left(B^*A-A^*B\right)\right)=-\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\left(B^*A-A^*B\right)$$

Πάνω στην πολλαπλότητα $\mathcal{C}$ παίρνουμε να δρα η ομάδα G των unitary gauge transformations, με τη μιγαδοποίησή της, $G^{\mathbb{C}}$, να είναι η ομάδα όλων των μιγαδικών gauge transformations.

Για να βρούμε μια moment map και τα stable points για το χώρο $\mathcal{C}$ είναι ευκολότερο να δούμε τα στοιχεία του $\mathcal{C}$ ως unitary συνοχές, καθώς περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο ότι υπάρχει (affine) ισομορφισμός $\mathcal{C}\simeq\mathcal{A}$ μεταξύ του χώρου των ολομόρφων δομών $\mathcal{C}$, με τον χώρο των unitary συνοχών $\mathcal{A}$ σε μια διανυσματική δέσμη V πάνω από μια επιφάνεια Riemann M. Έτσι αν $d''_A=d''+Ad\overline{z}$ και

$d''_B = d'' + Bd\overline{z}$ δύο ολόμορφες δομές τότε, όπως έχουμε δει, αυτές αντιστοιχούν στις unitary συνοχές $d_A = d + Ad\overline{z} - A^* dz$ και $d_B = d + Bd\overline{z} - B^* dz$ αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι

$$d_A \wedge d_B = d + B^* A dz \wedge d\overline{z} - A^* B dz \wedge d\overline{z} = d + \left(B^* A - A^* B\right) dz \wedge d\overline{z}$$

και παίρνουμε συμπλεκτική μορφή πάνω στα στοιχεία του $\mathscr{A}$

$$\omega\left(d_A, d_B\right) = \int_M \mathrm{Tr}\left(d_A \wedge d_B\right) = \int_M \mathrm{Tr}\left(B^* A - A^* B\right)$$

Η Lie άλγεβρα της ομάδας G αποτελείται από skew-hermitian sections $\psi \in \Omega^0\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$ καθώς έχουμε δει ότι η Lie άλγεβρα της ομάδας των unitary πινάκων αποτελείται από skew-hermitian πίνακες. Θεωρώντας τη δράση συζυγίας $g^{-1} d_A g$ της $G \curvearrowright \mathscr{A}$ προκύπτει ότι το διανυσματικό πεδίο Killing που αντιστοιχεί στο ψ είναι το

$$\tilde{\psi} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\left(t\psi\right)^* d_A \exp\left(t\psi\right) = \cancel{-\psi d_A\left(1\right)} + d_A \psi = d_A \psi$$

το οποίο τοπικά γράφεται ως $d_A \psi = \left(d + A\right)\psi = d\psi + \left[A, \psi\right]$, καθώς ψ έχει τιμές skew-hermitian πίνακες και η πράξη στη Lie άλγεβρα είναι ο μεταθέτης.

Όπως και στα παραδείγματα έτσι και εδώ η μετρική Riemann με την οποία είναι εφοδιασμένος ο χώρος επάγει ένα φυσικό ισομορφισμό μεταξύ της άλγεβρας Lie, $\mathscr{G} = \Omega^0\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$ και της δυικής αυτής, $\mathscr{G}^* = \Omega^2\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$ (Hodge star isomorphism). Ζητούμε λοιπόν μια απεικόνιση $\mu : \mathscr{A} \to \Omega^2\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$.

Γνωρίζουμε όμως παράλληλα ότι και ο τελεστής της καμπυλότητας είναι μια απεικόνιση $F : \mathscr{A} \to \Omega^2\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$. Θα δούμε ότι πράγματι η καμπυλότητα είναι μια moment map για το χώρο που μας ενδιαφέρει.

Για κάθε $\dot{A} \in \Omega^1\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$ τοπικά είναι $d_A \dot{A} = \left(d + A\right)\dot{A} = d\dot{A} + \left[A, \dot{A}\right]$, όπου με αυτή τη γραφή ο πίνακας A είναι ένας πίνακας 1-μορφών και όχι C^∞ συναρτήσεων όπως στον ορισμό της συμπλεκτικής μορφής του χώρου. Καθώς όμως για την καμπυλότητα έχουμε την τοπική παράσταση $F_A = dA + A^2$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} dF_A &= d\left(dA + A^2\right) = d\left(dA\right) + d\left(A \wedge A\right) = d\dot{A} + dA \wedge A - A \wedge dA \\ &= d\dot{A} + \dot{A}A - A\dot{A} = d\dot{A} + \left[A, \dot{A}\right] = d_A \dot{A} \end{aligned}$$

Η moment map μ, την οποία αναζητούμε για τον χώρο $\mathscr{A}$, έχει την ιδιότητα αν $\psi \in \mathscr{G} \equiv \Omega^0\left(M; \mathrm{End}\, V\right)$ και $\dot{A} \in \mathscr{A}$ τότε

$$d\mu_\psi\left(\dot{A}\right) = \left(i_{\tilde{\psi}}\omega\right)\left(\dot{A}\right) = \omega\left(\tilde{\psi}, \dot{A}\right)$$

Ωστόσο για τον τελεστή καμπυλότητας είναι $dF : \mathscr{A} \to \Omega^2\left(M;\operatorname{End} V\right)$ και από την απεικόνιση δυϊσμού μεταξύ $\Omega^0\left(M;\operatorname{End} V\right)$ και $\Omega^2\left(M;\operatorname{End} V\right)$ έχουμε ότι για κάθε $\psi \in \Omega^0\left(M;\operatorname{End} V\right)$ υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση

$$dF_{\psi} : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \text{ με } dF_{\psi}\left(\dot{A}\right) = \int_M \operatorname{Tr}\left(\psi \wedge dF_A\right)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη είναι

$$\begin{aligned} dF_{\psi}\left(\dot{A}\right) &= \int_M \operatorname{Tr}\left(\psi \wedge dF_A\right) = \int_M \operatorname{Tr}\left(\psi \wedge d_A\dot{A}\right) \\ &= \int_M \operatorname{Tr}\left(d_A\psi \wedge \dot{A}\right) = \int_M \operatorname{Tr}\left(\tilde{\psi} \wedge \dot{A}\right) = \omega\left(\tilde{\psi}, \dot{A}\right) \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι η καμπυλότητα είναι μια moment map

$$\mu\left(A\right) = F\left(A\right) \in \Omega^2\left(M;\operatorname{End} V\right)$$

Συμπεραίνουμε ότι τα stable points για τον χώρο των ολομόρφων δομών, οι stable ολόμορφες δομές, είναι εκείνες οι οποίες είναι gauge ισοδύναμες με στοιχεία του συνόλου μηδενισμού της moment map, δηλαδή με unitary επίπεδες συνοχές. Βλέπουμε λοιπόν ότι το Θεώρημα των Narasimhan-Seshadri πιστοποιεί ότι η πεπερασμένης διάστασης έννοια της stability για μια διανυσματική δέσμη έτσι όπως την είδαμε στο κεφάλαιο 3, συμπίπτει με την απειροδιάστατη έννοια αυτής, έτσι όπως την προσεγγίσαμε με όρους Συμπλεκτικής Γεωμετρίας. Αυτή η προσέγγιση μάλιστα είναι που χρησιμοποιείται από τον Donaldson στην δική του απόδειξη του Θεωρήματος.

5

Self-duality equations

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 4, αυτή τη φορά πάνω στο συνεφαπτόμενο χώρο των ολομόρφων δομών για την τετριμμένη διανυσματική δέσμη τάξης 2 πάνω από μια επιφάνεια Riemann. Δουλεύοντας στο χώρο αυτόν, ο Hitchin κατέληξε να δει, ότι τα stable ζεύγη ως προς μια moment map είναι ακριβώς οι λύσεις των αυτοσυζυγών εξισώσεων Yang-Mills πάνω από τον $\mathbb{R}^4$. Η καινούργια αυτή προσέγγιση οδήγησε σε πολύ σημαντικά αποτελέσματα στην τοπολογία και γεωμετρία των 4-πολλαπλοτήτων. Στη συνέχεια, θα δούμε στην παράγραφο 5.2 πώς με αφορμή τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να ορίσουμε μια κατάλληλη έννοια stability, αυτή τη φορά για ζεύγη $\left(V,\Phi\right)$, όπου V μια τάξης 2 ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού μηδέν και Φ ένα ολόμορφο section του χώρου $\operatorname{End} V \otimes K$. Η μελέτη από τον Hitchin της έννοιας της stability για ζεύγη $\left(V,\Phi\right)$ συνεισέφερε σημαντικά στην απόδειξη του non-abelian Hodge theorem όπως αναφέραμε και στον πρόλογο. Η ευρύτητα της δουλειάς του, καταδεικνύεται επιπροσθέτως από την εφαρμογή της παραγράφου 5.3. Εκεί θα δούμε πώς, θεωρώντας ένα συγκεκριμένο ζευγάρι $\left(V,\Phi\right)$, μπορούμε να φτάσουμε μέσω της gauge theory σε έναν τρόπο να παραμετρίσουμε τις ολόμορφες (σύμμορφες) δομές μιας επιφάνειας Riemann, από το χώρο των holomorphic quadratic differentials. Ο χώρος παραμέτρων αυτός έχει διαφορετικές ιδιότητες από την συνήθη κατασκευή του χώρου Teichmüller.

5.1 Η σύνδεση με τις αυτοσυζυγείς εξισώσεις Yang–Mills

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνεφαπτόμενη δέσμη $T^*\mathcal{C}$ του χώρου $\mathcal{C}$ των ολομόρφων δομών στην τετριμμένη διανυσματική δέσμη $V = M \times \mathbb{C}^2$, η οποία συνεφαπτόμενη δέσμη είναι μια συμπλεκτική πολλαπλότητα όπως έχουμε δει. Τα εφαπτόμενα διανύσματα στο χώρο $\mathcal{C}$ (ο οποίος είναι affine space), δίδονται από στοιχεία $A \in \Omega^{0,1}\left(M;\operatorname{End} V\right)$, επομένως τα συνεφαπτόμενα διανύσματα είναι τα στοιχεία $\Phi \in \Omega^{1,0}\left(M;\operatorname{End} V\right)$, μέσω της απεικόνισης δυϊσμού $\int_M \operatorname{Tr}\left(\Phi \wedge \dot{A}\right)$.

Η συμπλεκτική μορφή που επάγεται από τη μετρική της $T_*\left(\mathcal{C}\right)$ είναι

$$\omega\Big(\big(\dot{B}_1,\dot{\Phi}_1\big),\big(\dot{B}_2,\dot{\Phi}_2\big)\Big)=\int_M \mathrm{Tr}\Big(\dot{\Phi}_1\dot{B}_2-\dot{\Phi}_2\dot{B}_1\Big)$$

Θεωρούμε πάλι την ομάδα G των unitary gauge αυτομορφισμών της δέσμης V να δρα στη συμπλεκτική πολλαπλότητα $T^*\mathcal{C}$, κάτω από τη δράση συζυγίας $\Big(g^{-1}d''_B g, g^{-1}\Phi g\Big)$, η οποία διατηρεί τη συμπλεκτική μορφή, οπότε ορίζεται μια moment map.

Τώρα, ένα skew-hermitian section $\Psi\in\mathcal{G}^*=\Omega^0\Big(M;\mathrm{End}\,V\Big)$ καθορίζει το πεδίο Killing

$$\tilde{\Psi}=\Big(d''_B\Psi,\big[\Phi,\Psi\big]\Big)$$

στην $T^*\mathcal{C}$, όπως έχουμε δει αναλυτικά στην παράγραφο 4.3 και το παράδειγμα 4.9. Οπότε μια moment map μ σε αυτήν την περίπτωση ικανοποιεί

$$d\mu_\Psi\Big(\dot{B},\dot{\Phi}\Big)=\omega\Big(\tilde{\Psi},\big(\dot{B},\dot{\Phi}\big)\Big)=\int_M \mathrm{Tr}\Big(\big[\Phi,\Psi\big]\dot{B}-\dot{\Phi}d''_B\Psi\Big)=\int_M \mathrm{Tr}\Big(\Psi\Big(d''_B\dot{\Phi}+\big[\dot{B},\Phi\big]\Big)\Big)$$

όπου για την τελευταία ισότητα αφενός είναι $\int_M \mathrm{Tr}\Big(-\dot{\Phi}d''_B\Psi\Big)=\int_M \mathrm{Tr}\Big(\Psi\Big(d''_B\dot{\Phi}\Big)\Big)$ με ολοκλήρωση κατά μέρη, και αφετέρου $\int_M \mathrm{Tr}\Big(\big[\Phi,\Psi\big]\dot{B}\Big)=\int_M \mathrm{Tr}\Big(\Psi\big[\dot{B},\Phi\big]\Big)$ κάνοντας χρήση της ιδιότητας $\mathrm{Tr}\Big(CD\Big)=\mathrm{Tr}\Big(DC\Big)$.

Παρατηρούμε ωστόσο ότι

$$\Big(d''_B\Phi\Big)^{\cdot}=d''_B\dot{\Phi}+\big[\dot{B},\Phi\big]$$

Πράγματι από τη μια μεριά είναι

$$\begin{aligned}\Big(d''_B\Phi\Big)^{\cdot}&=\Big[\Big(d+B\Big)\Phi\Big]^{\cdot}=d\Big[\Big(d+B\Big)\Phi\Big]=d\Big(d\Phi\Big)+d\big[B,\Phi\big]=d\Big(d\Phi\Big)+d\Big(B\Phi-\Phi B\Big)\\&=d\dot{\Phi}+\dot{B}\Phi+B\dot{\Phi}-\dot{\Phi}B-\Phi\dot{B}\end{aligned}$$

ενώ από την άλλη

$$\begin{aligned}d''_B\dot{\Phi}+\big[\dot{B},\Phi\big]&=\Big(d+B\Big)\dot{\Phi}+\big[\dot{B},\Phi\big]=d\dot{\Phi}+\big[B,\dot{\Phi}\big]+\big[\dot{B},\Phi\big]\\&=d\dot{\Phi}+B\dot{\Phi}-\dot{\Phi}B+\dot{B}\Phi-\Phi\dot{B}\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν μια moment map για τη συνεφαπτόμενη δέσμη στην $T^*\mathcal{C}$ είναι η

$$\mu\Big(B,\Phi\Big)=d''_B\Phi$$

Βλέπουμε τώρα ότι το zero fiber $\mu^{-1}\Big(0\Big)$ αποτελείται από τα ζεύγη ολομόρφων δομών d''_B και sections Φ του χώρου $\mathrm{End}\,V\otimes K$ τα οποία είναι ολόμορφα ως προς την d''_B, όπου $K=T^*M$ η canonical line bundle της επιφάνειας Riemann M.

Επικεντρωνόμαστε στο εξής στη μιγαδική αναλυτική υποπολλαπλότητα $\mu^{-1}\left(0\right)$ της συνεφαπτόμενης δέσμης $T^{*}\mathcal{C}$.
Εφοδιάζουμε την υποπολλαπλότητα αυτή με την τετραγωνική μορφή

$$\left\|\left(\dot{B},\dot{\Phi}\right)\right\|^{2}=i\int_{M}\mathrm{Tr}\left(\dot{B}^{*}\dot{B}+\dot{\Phi}\dot{\Phi}^{*}\right)$$

και θεωρούμε τη μορφή Kähler που επάγεται από την τετραγωνική μορφή.
Επιπλέον παίρνουμε τη δράση συζυγίας της ομάδας των unitary gauge αυτομορφισμών πάνω στη συμπλεκτική πολλαπλότητα $\mu^{-1}\left(0\right)$. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε μια moment map από τα παραδείγματα που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4:

- Στην παράγραφο 4.3. είδαμε ότι ο χώρος $\left(\mathcal{C},\omega_{1},\mu_{1}\right)$ είναι Hamiltonian, υπό τη δράση συζυγίας των unitary gauge transformations, με την ω_{1} να επάγεται από την τετραγωνική μορφή $i\int_{M}\mathrm{Tr}\left(B^{*}B\right)$ και μια moment map να είναι η καμπυλότητα $\mu_{1}\left(A\right)=F\left(A\right)\in\Omega^{2}\left(M;\mathrm{End}\,V\right)$.
- Η δράση συζυγίας της $G\curvearrowright\Omega^{1,0}\left(M;\mathrm{End}\,V\right)$ είναι κατά σημείο η δράση της $U\left(n\right)\curvearrowright\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$. Στο παράδειγμα 4.9 είδαμε ότι ο χώρος $\left(\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{C}\right),\omega_{2},\mu_{2}\right)$ είναι Hamiltonian υπό τη δράση συζυγίας των unitary πινάκων, με την ω_{2} να επάγεται από την τετραγωνική μορφή $\mathrm{Tr}\left(A^{*}A\right)$ και μια moment map τότε να είναι η $\mu_{2}\left(A\right)=g\left(-\frac{1}{2}i\left[A,A^{*}\right],\ \cdot\ \right)\in\mathfrak{u}\left(n\right)^{*}$.

Έτσι λοιπόν, εφόσον είδαμε στο παράδειγμα 4.11 ότι το γινόμενο Hamiltonian G-χώρων είναι Hamiltonian G-χώρος, συμπεραίνουμε ότι και ο χώρος

$$\left(\mu^{-1}\left(0\right)\subset\mathcal{C}\times\Omega^{1,0}\left(M;\mathrm{End}\,V\right),\omega,\mu\right)$$

είναι Hamiltonian κάτω από τη δράση των unitary gauge transformations με δομή $\omega=\omega_{1}\wedge\omega_{2}$ και moment map

$$\hat{\mu}\left(A\right)=F_{A}+g\left(\left[A,A^{*}\right],\ \cdot\ \right)\in\Omega^{2}\left(M;\mathrm{End}\,V\right)$$

όπου εδώ η μετρική g είναι στο χώρο των unitary συνοχών, όπου όπως είδαμε στην αρχή της παραγράφου 4.3 η συμπλεκτική μορφή εκεί δεν έχει τη σταθερά μπροστά. Επομένως τα stable points του χώρου $\mu^{-1}\left(0\right)\subset\mathcal{C}\times\Omega^{1,0}\left(M;\mathrm{End}\,V\right)$ είναι τα ζεύγη των unitary συνοχών d_{A} και sections Φ έτσι ώστε αυτά να ικανοποιούν τις

$$d_{A}''\Phi=0\ \text{ και }\ F_{A}+\left[\Phi,\Phi^{*}\right]=0\qquad(1)$$

Ως προς ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $z = x_1 + ix_2$ και μια τετριμμενοποίηση της δέσμης V, η συνοχή d_A γράφεται ως

$$d_A = d + A_1 dx_1 + A_2 dx_2$$

όπου A_1, A_2 είναι πίνακες συναρτήσεων ενώ παράλληλα μπορούμε να γράψουμε

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\phi_1 - i\phi_2\right)dz$$

με ϕ_1, ϕ_2 να είναι skew-hermitian πίνακες με στοιχεία συναρτήσεις, από τη γραφή ενός οποιουδήποτε μιγαδικού πίνακα σε άθροισμα πινάκων αυτής της μορφής, όπως είδαμε και στο παράδειγμα 4.9.

Έτσι, οι εξισώσεις $\left(1\right)$ είναι ακριβώς οι **αυτοσυζυγείς εξισώσεις Yang-Mills (self dual Yang-Mills equations)** στον $\mathbb{R}^4$ της μορφής

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \phi_1 dx_3 + \phi_2 dx_4$$

Για το λόγο αυτό οι εξισώσεις $\left(1\right)$ ονομάζονται και **self-duality equations**.

5.2 Stability και self-duality equations

Είδαμε ότι οι stable ολόμορφες δομές με την έννοια της moment map ταυτίζονται με τις ολόμορφες δομές που παραμετρίζουν μια stable διανυσματική δέσμη υπό τον ορισμό 3.4, ενώ στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε τα stable σημεία του χώρου $\mu^{-1}\left(0\right) \subset \mathcal{C} \times \Omega^{1,0}\left(M; \operatorname{End} V\right)$, ως τα ζεύγη $\left(d''_B, \Phi\right)$ που ικανοποιούν τις self-duality equations. Αναμένουμε έτσι και μια έννοια stability αυτή τη φορά για ζεύγη $\left(V, \Phi\right)$, όπου V μια τάξης 2 ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού μηδέν και Φ ολόμορφο section του χώρου $\operatorname{End} V \otimes K$. Η έννοια αυτή θα πρέπει να *γενικεύει την ιδέα των stable διανυσματικών δεσμών* όπως αυτή εισήχθη στο κεφάλαιο 3, καθώς όταν $\Phi = 0$, οι self-duality εξισώσεις είναι ακριβώς η εξίσωση μηδενισμού της καμπυλότητας. Επιπλέον, αυτή η έννοια οφείλει να εξασφαλίζει ότι *αν ένα ζεύγος $\left(d''_B, \Phi\right)$ ικανοποιεί τις self-duality equations, με την ολόμορφη δομή d''_B να παραμετρίζει τη διανυσματική δέσμη V, τότε το ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ είναι stable.*
Ο κατάλληλος ορισμός είναι ο ακόλουθος

Ορισμός 5.1. Θα ονομάζουμε ένα ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ **stable**, όπου V μια τάξης 2 ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού 0 και Φ ένα ολόμορφο section του $\operatorname{End} V \otimes K$, αν ο βαθμός κάθε Φ-αναλλοίωτης υποδέσμης της V είναι μικρότερος του μηδενός. Εδώ βλέπουμε το section Φ ως μια απεικόνιση $\Phi : V \to V \otimes K$ και λέγοντας ότι μια υποδέσμη $L \subset V$ είναι Φ-αναλλοίωτη εννοούμε ότι είναι $\Phi\left(L\right) \subseteq L \otimes K$.

Παρατήρηση 5.2. Παρατηρούμε αμέσως ότι αν V είναι stable ως διανυσματική δέσμη, τότε και για κάθε ολόμορφο section Φ του $\operatorname{End} V \otimes K$, το ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ είναι stable.

Θα δείξουμε τώρα ότι πράγματι μια λύση των self-duality equations δίνει ένα stable ζεύγος.

Πρόταση 5.3. Έστω V ολόμορφη διανυσματική δέσμη, η οποία παραμετρίζεται από μια ολόμορφη δομή d''_B και Φ ολόμορφο section του χώρου $\operatorname{End} V \otimes K$, έτσι ώστε $\left(d''_B, \Phi\right)$ είναι μια irreducible λύση των self-duality equations. Τότε το ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ είναι stable.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική με αυτήν της απόδειξης της πρότασης 3.7. Αν το ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ δεν είναι stable τότε υπάρχει ένα ολόμορφο section s στο $L_0^* \otimes V$ το οποίο είναι Φ-αναλλοίωτο και η δέσμη L_0^* παραμετρίζεται από μια unitary επίπεδη συνοχή. Η συνοχή αυτή καθώς και η συνοχή d_B που παραμετρίζει τη δέσμη V, επάγουν μια unitary συνοχή d_A στο $L_0^* \otimes V$. Επίσης με ολοκλήρωση κατά μέρη

$$0 \leq i \int_M \left\langle d'_A s, d'_A s \right\rangle = i \int_M \left\langle d''_A d'_A s, s \right\rangle$$

Από τις εξισώσεις όμως έχουμε ότι

$$d'_A d''_A + d''_A d'_A = F_A = -\left[\Phi, \Phi^*\right]$$

και καθώς είναι $d''_A s = 0$ αφού s ολόμορφο, καταλήγουμε ότι

$$0 \leq -i \int_M \left\langle \left[\Phi, \Phi^*\right] s, s \right\rangle$$

Γενικά αν A είναι ένας μιγαδικός πίνακας με ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v, τότε από τις ιδιότητες του μιγαδικού εσωτερικού γινομένου και του αυτοσυζυγή τελεστή είναι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \left(A^* - \bar{\lambda}\right) v, \left(A^* - \bar{\lambda}\right) v \right\rangle = \\ &= \left\langle A^* v, A^* v \right\rangle + \left\langle A^* v, -\bar{\lambda} v \right\rangle + \left\langle -\bar{\lambda} v, A^* v \right\rangle + \left\langle -\bar{\lambda} v, -\bar{\lambda} v \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \left\langle A^*v, A^*v \right\rangle - \lambda \left\langle A^*v, v \right\rangle - \overline{\lambda} \left\langle v, A^*v \right\rangle - \overline{\lambda} \left\langle v, -\overline{\lambda} v \right\rangle$$
$$= \left\langle AA^*v, v \right\rangle - \lambda \left\langle v, Av \right\rangle - \overline{\lambda} \left\langle Av, v \right\rangle - \overline{\lambda} \left(-\lambda \right) \left\langle v, v \right\rangle$$
$$= \left\langle AA^*v, v \right\rangle - \left\langle \lambda v, Av \right\rangle - \overline{\lambda} \left\langle \lambda v, v \right\rangle - \overline{\lambda} \left(-\lambda \right) \left\langle v, v \right\rangle$$
$$= \left\langle AA^*v, v \right\rangle - \left\langle Av, Av \right\rangle - \cancel{\left| \lambda \right|^2 \left\langle v, v \right\rangle} + \cancel{\left| \lambda \right|^2 \left\langle v, v \right\rangle}$$
$$= \left\langle AA^*v, v \right\rangle - \left\langle A^*Av, v \right\rangle$$

Επομένως $\left\langle \left[A, A^* \right] v, v \right\rangle \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό και το γεγονός ότι το section s είναι Φ-αναλλοίωτο δηλαδή $\Phi s = \lambda s$, καταλήγουμε ότι

$$0 = -i \int_M \left\langle \left[\Phi, \Phi^* \right] s, s \right\rangle = i \int_M \left\langle d_A'' d_A' s, s \right\rangle = i \int_M \left\langle d_A' s, d_A' s \right\rangle$$

Οπότε είναι $d_A' s = 0$ και άρα $d_A s = d_A' s + d_A'' s = 0$. Έτσι αφού $L_0 \subset V$ και για τη συνοχή d_A της $L_0^* \otimes V$ έχουμε $d_A s = 0$, αυτό σημαίνει ακριβώς ότι η υποδέσμη L_0 διατηρείται από τη συνοχή, δηλαδή η συνοχή είναι εξ' ορισμού reducible.

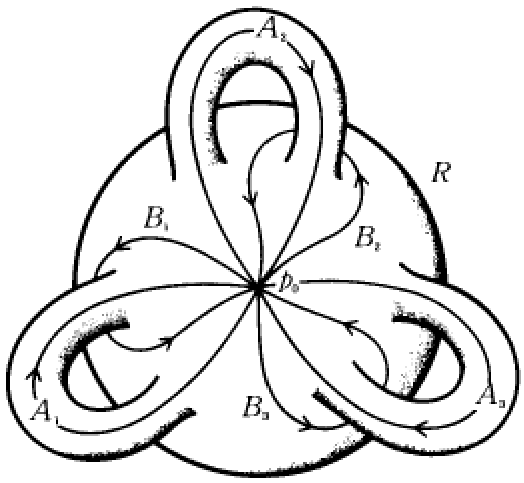
Επίσης καθώς $\int_M \left\langle \left[\Phi, \Phi^* \right] s, s \right\rangle = 0$ με $\left\langle \left[\Phi, \Phi^* \right] s, s \right\rangle \geq 0$ από παραπάνω, έπεται ότι

$0 = \left\langle \left[\Phi, \Phi^* \right] s, s \right\rangle = \left\langle \left(\Phi^* - \overline{\lambda} \right) s, \left(\Phi^* - \overline{\lambda} \right) s \right\rangle$ άρα $\left(\Phi^* - \overline{\lambda} \right) s = 0$ και άρα $\Phi^* s = \kappa s$.

Επομένως η λύση στις self-duality equations δεν είναι irreducible και έχουμε άτοπο όπως και στην απόδειξη της πρότασης 3.7. Άρα το ζεύγος $\left(V, \Phi \right)$ είναι stable υπό τον ορισμό 5.1. □

Ανάλογα προς την πρόταση 3.7. όπου το Θεώρημα Narasimhan-Seshadri μας εξασφάλιζε την αντίστροφη κατεύθυνση της πρότασης αυτής, έτσι και εδώ ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα προς την αντίστροφη κατεύθυνση, μια απόδειξη του οποίου μπορεί να βρει κανείς στο άρθρο του N.J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, p. 59-126.

Θεώρημα 5.4. Έστω V μια τάξης 2 ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού 0 πάνω από μια επιφάνεια Riemann M γένους $g > 1$, ώστε το ζεύγος $\left(V, \Phi \right)$ είναι stable. Τότε η ολόμορφη δομή της δέσμης V είναι gauge ισοδύναμη με μια ολόμορφη δομή A, έτσι ώστε το ζεύγος $\left(A, \Phi \right)$ να αποτελεί irreducible λύση των self-duality equations. Επιπλέον, η λύση αυτή είναι μοναδική modulo unitary gauge transformations.



Μια επιφάνεια Riemann γένους $g = 3$

5.3 Η παραμετρικοποίηση των ολομόρφων δομών μιας επιφάνειας Riemann μέσω gauge theory

Θα δούμε τώρα πώς, θεωρώντας μια συγκεκριμένη κλάση stable ζευγών επάνω από μια επιφάνεια Riemann M γένους $g > 1$, μπορούμε να φτάσουμε σε μια παραμετρικοποίηση των σύμμορφων δομών (conformal structures) της M από τα holomorphic quadratic differentials στην M, με διαφορετικό τρόπο απ' ότι γίνεται στο Θεώρημα Teichmüller.

Έστω $K = T^*M$ η canonical line bundle της επιφάνειας Riemann, η οποία έχει βαθμό $\deg K = 2g - 2$ (βλ. J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 215). Υπάρχουν τότε (βλ. E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex Algebras and Algebraic Curves, p. 138) 2^{2g} μη ισόμορφες ολόμορφες τετραγωνικές ρίζες της K (ισοδύναμα υπάρχουν 2^{2g} μη ισοδύναμες spin structures πάνω στην M) και επιλέγουμε μία

$$K^{\frac{1}{2}} =: L$$

οπότε εξ' ορισμού ικανοποιείται $L^{\otimes 2} = L \otimes L = K$.

Θεωρούμε την ολόμορφη διανυσματική δέσμη βαθμού 0 και τάξης 2

$$V = K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}$$

και βλέπουμε ότι η διανυσματική δέσμη αυτή δεν είναι stable, καθώς η υποδέσμη της, $K^{\frac{1}{2}}$, έχει θετικό βαθμό, $\deg K^{\frac{1}{2}} = g - 1 > 0$.

Λήμμα 5.5. Κάθε άλλη υποδέσμη της V θετικού βαθμού περιέχεται στην $K^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Έστω L ολόμορφη line subbundle της V με $\deg L > 0$. Από την ένθεση $L \to V$ συνάγεται ότι υπάρχει ολόμορφο section στην $H^0\left(V \otimes L^{-1}\right)$. Όμως

$$H^0\left(V \otimes L^{-1}\right) = H^0\left(\left(K^{\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right) \oplus \left(K^{-\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right)\right) = H^0\left(K^{\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right) \oplus H^0\left(K^{-\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right)$$

Καθώς όμως $\deg\left(K^{-\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right) < 0$, η δέσμη $K^{-\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}$ δεν έχει μη τετριμμένα ολόμορφα sections (βλ. J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 229) και άρα $H^0\left(K^{-\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right) = 0$. Επομένως το παραπάνω section ανήκει στην $H^0\left(K^{\frac{1}{2}} \otimes L^{-1}\right)$ και αντιστοιχεί σε ένθεση $L \to K^{\frac{1}{2}}$. □

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\operatorname{End} V \otimes K = \left(V^* \otimes V\right) \otimes K = \left(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}}\right) \otimes \left(K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}\right) \otimes K$$

$$= \left(\mathcal{O} \oplus K^{-1} \oplus K \oplus \mathcal{O}\right) \otimes K = K \oplus \mathcal{O} \oplus K^2 \oplus K$$

Διαλέγουμε ένα ολόμορφο section $\Phi \in H^0\left(\operatorname{End} V \otimes K\right) = H^0\left(K \oplus \mathcal{O} \oplus K^2 \oplus K\right)$ $= H^0\left(K\right) \oplus H^0\left(\mathcal{O}\right) \oplus H^0\left(K^2\right) \oplus H^0\left(K\right)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $0 \in H^0\left(K\right)$ το zero section, $1 \in H^0\left(\mathcal{O}\right)$ ο κανονικός ισομορφισμός $1 : K^{\frac{1}{2}} \to K^{-\frac{1}{2}} \otimes K$ και $q \in H^0\left(K^2\right)$ holomorphic quadratic differential $q : K^{-\frac{1}{2}} \to K^{\frac{1}{2}} \otimes K$.

Καθώς το section Φ δίδεται από έναν αντιδιαγώνιο πίνακα, βλέπουμε ότι αν L είναι υποδέσμη της $K^{\frac{1}{2}}$, τότε το Φ δεν την αφήνει αναλλοίωτη.

Επειδή όπως είδαμε αυτές είναι και οι μοναδικές υποδέσμες της V μη αρνητικού βαθμού, συμπεραίνουμε ότι το ζεύγος $\left(V, \Phi\right)$ είναι stable.

Επομένως, από το Θεώρημα 5.4, αντιστοιχεί μια irreducible λύση $\left(d_A, \Phi\right)$ των self-duality equations όπου d_A είναι μια unitary συνοχή ισοδύναμη προς την ολόμορφη δομή της V.

Παρατηρούμε τώρα ότι ο μιγαδικός αυτομορφισμός που δίδεται από τον πίνακα

$$g = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

αφήνει αναλλοίωτη τη συνοχή της $K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}$, ενώ επιπλέον με πράξεις βλέπουμε ότι

$$g^{-1}\Phi g = -\Phi$$

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι τα ζεύγη $\left(d_A, \Phi\right)$ και $\left(d_A, -\Phi\right)$ τα οποία είναι αμφότερα λύσεις των self-duality equations, είναι ισοδύναμα κάτω από τη δράση ενός μιγαδικού αυτομορφισμού της δέσμης V. Από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος 5.4, έπεται ότι οι λύσεις αυτές είναι ισοδύναμες κάτω από τη δράση ενός unitary gauge transformation. Άρα υπάρχει ένας unitary gauge transformation $u = \left(u_{ij}\right)$ τέτοιος ώστε $u^{-1} d_A u = d_A$.

Λήμμα 5.6. Η συνοχή d_A είναι μια reducible συνοχή.

Απόδειξη. Έχουμε ότι για την ολόμορφη διανυσματική δέσμη V με ολόμορφη δομή d_A υπάρχει ένας unitary ολόμορφος αυτομορφισμός $u : V \to V$ με $u\left(\Phi\right) = -\Phi$.
Ορίζονται τότε ολικά πάνω στην πολλαπλότητα M οι απεικονίσεις της ορίζουσας και του ίχνους του αυτομορφισμού u

$$\det u : M \to \mathbb{C} \ \text{ με } \left(\det u\right)\left(x\right) := \det\left(u_x\right)$$
$$\mathrm{Tr} u : M \to \mathbb{C} \ \text{ με } \left(\mathrm{Tr} u\right)\left(x\right) := \mathrm{Tr}\left(u_x\right)$$

όπου $u_x : V_x \to V_x$ είναι γραμμικός αυτομορφισμός στα fiber της δέσμης V.
Οι απεικονίσεις αυτές ορίζονται καλά καθώς η ορίζουσα και το ίχνος μιας γραμμικής απεικόνισης δεν εξαρτώνται από την επιλογή της βάσης του διανυσματικού χώρου V_x.
Καθώς u είναι ολόμορφος αυτομορφισμός έχουμε ότι και οι $\mathrm{det u}, \mathrm{Tr} u : M \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις και άρα παντού σταθερές αφού η επιφάνεια Riemann M υποτίθεται συμπαγής (Θεώρημα Liouville).
Επομένως $\det u = c_1$ και $\mathrm{Tru} = c_2$ οπότε οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 θα είναι σταθερές σε όλη την M. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε η απεικόνιση u_x είναι διαγωνίσιμη για κάθε $x \in M$ και $V_x = V\left(\lambda_1\right) \oplus V\left(\lambda_2\right)$ όπου $V\left(\lambda_i\right)$ οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι διάστασης 1. Αφού όπως είδαμε οι ιδιοτιμές είναι σταθερές σε όλο το M, ορίζονται καλά καθώς θα διατρέχει το x όλη την M οι αντίστοιχες ολόμορφες line subbundles L_1, L_2 της V έτσι ώστε $V = L_1 \oplus L_2$, που δείχνει ακριβώς ότι η συνοχή που παραμετρίζει την ολόμορφη δέσμη V είναι μια reducible συνοχή.

• Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, τότε καθώς έχουμε ότι ο πίνακας του αυτομορφισμού u είναι ένας unitary πίνακας, έπεται ότι είναι διαγωνίσιμος, και άρα διαγώνιος. Επομένως είναι $u = \lambda I$ και $u^{-1} = \frac{1}{\lambda} I$. Είδαμε όμως στην αρχή της παραγράφου 5.1, ότι η ομάδα των unitary αυτομορφισμών της δέσμης V δρα πάνω στα ζεύγη $\left(d''_B, \Phi\right)$ με τη δράση συζυγίας $\left(u^{-1} d''_B u, u^{-1} \Phi u\right)$. Εδώ όμως είναι $u^{-1} \Phi u = \Phi \neq -\Phi$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. □

Λήμμα 5.7. Η συνοχή d_A προέρχεται από μια unitary συνοχή της υποδέσμης $K^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Καθώς η συνοχή d_A είδαμε ότι είναι reducible, η V γράφεται ως

$$L_1 \oplus L_2 \simeq K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}$$

και αφού είναι $\deg V = 0$, οι βαθμοί των line bundles L_1 και L_2 πρέπει να είναι ετερόσημοι, οπότε ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\deg L_1 > 0$ και $\deg L_2 < 0$.

Ως υποδέσμη, η $L_1 \to K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}$ και άρα χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με αυτήν της απόδειξης του λήμματος 5.5, καταλήγουμε ότι $L_1 \to K^{\frac{1}{2}}$.

Από την άλλη μεριά, $K^{\frac{1}{2}} \to L_1 \oplus L_2$, και πάλι χρησιμοποιώντας degrees όπως προηγουμένως καταλήγουμε ότι $K^{\frac{1}{2}} \to L_1$. Άρα $K^{\frac{1}{2}} \simeq L_1$ και αναγκαστικά τότε είναι $K^{-\frac{1}{2}} \simeq L_2$. □

Ορίζεται έτσι ερμιτιανή δομή πάνω στην $K = \left(K^{\frac{1}{2}}\right)^{\otimes 2}$ συμβατή με την ολόμορφη δομή της M, καθώς η ύπαρξη τέτοιας ερμιτιανής δομής ισοδυναμεί με την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $\partial h = \theta \cdot h$, όπου $h = \left(h_{ij}\right)$ με $h_{ij} = \left(e_i, e_j\right)$ το ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο ως προς ένα ολόμορφο τοπικό πλαίσιο και θ ο πίνακας της συνοχής (βλ. P. Griffiths-J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, p. 73).

Τώρα καθώς $\left(d_A, \Phi\right)$ είναι μια irreducible λύση των self-duality equations έχουμε ότι ικανοποιείται η εξίσωση $F_A + \left[\Phi, \Phi^*\right] = 0$ όπου F_A η καμπυλότητα ως προς τη συνοχή d_A και κάνοντας τις πράξεις είναι

$$F_A = -\left[\Phi, \Phi^*\right] = \begin{pmatrix} 1 - q\overline{q} & 0 \\ 0 & q\overline{q} - 1 \end{pmatrix}$$

Αφού δείξαμε ότι η d_A είναι reducible πάνω στην $K^{\frac{1}{2}} \oplus K^{-\frac{1}{2}}$, έπεται τότε ότι η καμπυλότητα ως προς τη συνοχή στην $K^{\frac{1}{2}}$ είναι $\tilde{F} = \left(1 - q\overline{q}\right)\omega$, όπου ω η μορφή Kähler ως προς τη μετρική (βλ. B. Lawson, The Theory of Gauge Fields in four dimensions, p. 50). Τότε η καμπυλότητα F της επαγόμενης συνοχής στην canonical bundle $K = \left(K^{1/2}\right)^{\otimes 2}$ είναι

$$F = \tilde{F} \wedge id + id \wedge \tilde{F} = 2\left(1 - \left\|q\right\|^2\right)\omega$$

(βλ. Ib Madsen and J. Tornehave, From Calculus to Cohomology, p. 186).

Στη συνέχεια θα δούμε ότι σε κάθε περίπτωση για το quadratic differential q έχουμε πάνω στην M μια μετρική σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4.

• Αν $q = 0$ τότε $F = 2\omega$ και άρα η ω είναι εξ' ορισμού Kähler-Einstein μετρική. Το πρόσημο της σταθερής καμπυλότητας ως προς μια Kähler-Einstein μετρική καθορίζεται από την πρώτη Chern class της επιφάνειας Riemann M

$$c_1\left(M\right) := c_1\left(T\left(M\right)\right) = \deg T\left(M\right) = \chi\left(M\right) = 2 - 2g < 0$$

καθώς υποθέσαμε για το γένος της M ότι $g > 1$ (βλ. J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 231). Ισχύει τώρα ότι αν γενικά $F = \lambda\omega$, τότε η απόλυτη τιμή της σταθερής καμπυλότητας ως προς την Kähler-Einstein μετρική είναι $s = \lambda \cdot 2n$, όπου n είναι η μιγαδική διάσταση της μιγαδικής πολλαπλότητας (βλ. Arthur Besse, Einstein Manifolds, p. 319).
Καταλήγουμε λοιπόν ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μια μετρική σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4.

• Αν $q \neq 0$ τότε θεωρούμε τη μετρική $\hat{h}dz \otimes d\overline{z}$ με

$$\hat{h} = q + \left(h + \frac{q\overline{q}}{h}\right) + \overline{q}$$

όπου $hdz \otimes d\overline{z}$ είναι η ερμιτιανή μετρική στην M που καθορίζεται από τη λύση των self-duality equations όπως είδαμε.
Θεωρώντας την h ως ένα section στην $K \otimes \overline{K}$ μπορούμε να δούμε και την $\hat{h}$ ως ένα section στην $\left(K \oplus \overline{K}\right) \otimes \left(\overline{K} \oplus K\right) = K^2 \oplus \left(K \oplus \overline{K}\right) \oplus \left(\overline{K} \oplus K\right) \oplus \overline{K}^2$ και παρατηρούμε ότι πράγματι

$$q \in K^2, \quad h \in K \oplus \overline{K}, \quad \frac{q\overline{q}}{h} \in K^2 \otimes \overline{K}^2 \otimes K^{-1} \otimes \overline{K}^{-1} = \overline{K} \otimes K, \quad \overline{q} \in \overline{K}^2$$

Επίσης είναι χρήσιμο για τη συνέχεια να αναφέρουμε εδώ, ότι q είναι το $\left(2,0\right)$-μέρος της μετρικής $\hat{h}$, $h+\dfrac{q\overline{q}}{h}$ είναι το $\left(1,1\right)$-μέρος και $\overline{q}$ το $\left(0,2\right)$-μέρος αυτής.

Η μετρική $\hat{h}$ δεν είναι συμβατή με τη μιγαδική δομή της M, όμως θα δούμε ότι επίσης έχει σταθερή αρνητική καμπυλότητα -4.

Αρχικά γράφουμε την $\hat{h}dz \otimes d\overline{z}$ ως εξής

$$\hat{h} = h\left(dz + \frac{\overline{a}}{h}d\overline{z}\right)\left(d\overline{z} + \frac{a}{h}dz\right)$$

όπου $q = adz^2$.

Η Levi-Civita συνοχή d_B είναι torsion-free, διατηρεί τη μετρική και τη μιγαδική δομή και άρα οι εξισώσεις δομής για τη μετρική $\hat{h}$ δίνουν

$$d_B\left(dz + \frac{\overline{a}}{h}d\overline{z}\right) = \Theta \otimes \left(dz + \frac{\overline{a}}{h}d\overline{z}\right)$$

για μια 1-μορφή Θ.

Αν θέσουμε $u = dz + \dfrac{\overline{a}}{h}d\overline{z}$, τότε είναι $\left\langle u,u\right\rangle = h^{-1}$.

Πράγματι, αυτό μπορούμε να το δούμε κατ' αναλογία προς την υπερβολική μετρική $\dfrac{1}{y^2}dzd\overline{z}$ του χώρου H^2. Το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο αυτό δίνει

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{y^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2} \qquad \text{αν } z = x + iy,$$

με τον πίνακα του γινομένου στον εφαπτόμενο χώρο να είναι

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας του γινομένου στο συνεφαπτόμενο χώρο είναι ο αντίστροφος αυτού

$$\begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $\left\langle dz,dz\right\rangle = y^2$. Ανάλογα τώρα συμπεραίνουμε ότι ως προς τη μετρική $\hat{h} = hu\overline{u}$, είναι πράγματι $\left\langle u,u\right\rangle = h^{-1}$.

Τώρα καθώς η συνοχή d_B διατηρεί τη μετρική έχουμε

$$-\frac{dh}{h^2} = d\left(h^{-1}\right) = d\left\langle u,u\right\rangle$$

$$= \left\langle d_B u, u \right\rangle + \left\langle u, d_B u \right\rangle$$
$$= \left\langle \Theta \otimes u, u \right\rangle + \left\langle u, \Theta \otimes u \right\rangle$$
$$= \Theta h^{-1} + \bar{\Theta} h^{-1}$$

Ισοδύναμα

$$-\frac{dh}{h} = \Theta + \bar{\Theta} \qquad (ii)$$

Επιπλέον καθώς u είναι μια $(1,0)$-μορφή ως προς τη μετρική $\hat{h}$ είναι

$$\Theta \wedge u = d\left(dz + \frac{\overline{a}}{h} d\overline{z}\right) = -\overline{a}\,\frac{d'h}{h^2} \wedge d\overline{z} \qquad (iii)$$

καθώς a ολόμορφη και άρα $\overline{a}$ αντιολόμορφη ($\dfrac{\partial \overline{a}}{\partial z} = 0$).

Γράφουμε τώρα

$$\Theta = \Theta^{1,0} dz + \Theta^{0,1} d\overline{z}$$

και προκύπτουν οι εξής σχέσεις

- $\Theta^{1,0} + \bar{\Theta}^{0,1} = -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial z}$

Πράγματι, από την (ii) έχουμε

$$\Theta^{1,0} dz + \Theta^{0,1} d\overline{z} + \bar{\Theta}^{1,0} d\overline{z} + \bar{\Theta}^{0,1} dz = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z} dz + -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$$

οπότε συγκρίνοντας τους τύπους των μορφών προκύπτει ότι

$$\Theta^{1,0} + \bar{\Theta}^{0,1} = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}$$

- $-\Theta^{0,1} + \dfrac{\overline{a}}{h}\Theta^{1,0} = -\dfrac{\overline{a}}{h^2}\dfrac{\partial h}{\partial z}$

Πράγματι, από την (iii) έχουμε

$$\left(\Theta^{1,0} dz + \Theta^{0,1} d\overline{z}\right) \wedge \left(dz + \frac{\overline{a}}{h} d\overline{z}\right) = -\overline{a}\,\frac{d'h}{h^2} \wedge d\overline{z}$$

$$\frac{\overline{a}}{h}\Theta^{1,0} dz \wedge d\overline{z} - \Theta^{0,1} dz \wedge d\overline{z} = -\frac{\overline{a}}{h^2}\frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge d\overline{z}$$

$$\frac{\overline{a}}{h}\Theta^{1,0} - \Theta^{0,1} = -\frac{\overline{a}}{h^2}\frac{\partial h}{\partial z}$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$-\Theta^{0,1} + \frac{\overline{a}}{h}\Theta^{1,0} = \frac{\overline{a}}{h}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{\overline{a}}{h}\left(\Theta^{1,0} + \overline{\Theta}^{0,1}\right) = \frac{\overline{a}}{h}\Theta^{1,0} + \frac{\overline{a}}{h}\overline{\Theta}^{0,1}$$

$$\Rightarrow \qquad \Theta^{0,1} = -\frac{\overline{a}}{h}\overline{\Theta}^{0,1}$$

Αν τώρα είναι $\Theta^{0,1} \neq 0$, τότε $\Theta^{0,1} = -\frac{\overline{a}}{h}\overline{\Theta}^{0,1} = -\frac{\overline{a}}{h}\frac{a}{h}\Theta^{0,1}$ και άρα είναι $a\overline{a} = h^2$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί η $adz^2 = q$ έχει ρίζες. Συγκεκριμένα το Θεώρημα Riemann-Roch εξασφαλίζει ότι υπάρχουν $4g-4$ ομφαλικά σημεία (umbilical points) για το quadratic differential q (βλ. Bennett Chow, Elliptic and Parabolic methods in Geometry, p. 75)

Επομένως $\Theta^{0,1} = 0$ και έτσι

$$\Theta = \Theta^{1,0}dz = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}dz$$

Η καμπυλότητα λοιπόν ως προς τη Levi-Civita συνοχή d_B είναι

$$F_B = d\Theta = \left(d' + d''\right)\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\right)d\overline{z} \wedge dz = -d''d'\log h$$

Αυτή θα είναι η καμπυλότητα και ως προς τη συνοχή d_A που είχαμε αρχικά από τη λύση των self-duality equations:

$$F_A = -d''d'\log h = 2\left(h - \frac{a\overline{a}}{h}\right)dz \wedge d\overline{z}$$

Παράλληλα όμως η μορφή Kähler για τη μετρική $\hat{h}dz \otimes d\overline{z}$ είναι

$$\hat{h}dz \wedge d\overline{z} = h\left(dz + \frac{\overline{a}}{h}d\overline{z}\right) \wedge \left(d\overline{z} + \frac{a}{h}dz\right) = \left(h - \frac{a\overline{a}}{h}\right)dz \wedge d\overline{z}$$

και έτσι έχουμε πάλι ότι

$$F_A = 2\hat{\omega}$$

οπότε και σε αυτήν την περίπτωση, κάτω από την ίδια προσέγγιση με την περίπτωση $q = 0$, έχουμε μετρική σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4. □

Έχουμε λοιπόν μια οικογένεια από μετρικές σταθερής αρνητικής καμπυλότητας για την επιφάνεια Riemann M, η οποία οικογένεια παραμετρίζεται από το χώρο των holomorphic quadratic differentials $Q\left(M\right)$.

Από το Θεώρημα Riemann-Roch προκύπτει ότι

$$\dim_{\mathbb{C}} Q\left(M\right) = 3g - 3$$

για γένος $g > 1$ (βλ. J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 217).

Για να δείξουμε τώρα ότι και κάθε μετρική σταθερής αρνητικής καμπυλότητας αναπαρίσταται από ένα holomorphic quadratic differential, χρησιμοποιούμε ένα

Θεώρημα των Earle και Eells (βλ. C. Earle and J. Eells, A fibre bundle description of Teichmüller Theory, J. Differential Geometry 3 (1969), p. 19-43):

Θεώρημα 5.8. Αν M, M' είναι δύο ομοιομορφικές (ιδίου γένους) επιφάνειες Riemann εφοδιασμένες με μετρικές σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4, τότε υπάρχει μια μοναδική αρμονική συνάρτηση $F : M \to M'$, ομοτοπική με την ταυτοτική που είναι και αμφιδιαφόριση.

Έστω λοιπόν μια μετρική φ σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4 στην M. Τότε ως ένα section στην $\left(K \oplus \bar{K}\right) \otimes \left(\bar{K} \oplus K\right)$, το $\left(2,0\right)$-μέρος της μετρικής αυτής είναι ένα holomorphic quadratic differential $q_{\varphi} \in H^0\left(K^2\right)$. Από το q_{φ} παίρνουμε με τον τρόπο που είδαμε προηγουμένως τη μετρική $\hat{h}_{q_{\varphi}}$, η οποία έχει επίσης σταθερή αρνητική καμπυλότητα -4. Τότε από το θεώρημα των Earle και Eells υπάρχει μια αρμονική $F : \left(M, \varphi\right) \to \left(M, \hat{h}_{q_{\varphi}}\right)$, ομοτοπική με την ταυτοτική και αμφιδιαφόριση. Έτσι λοιπόν οι μετρικές φ και $\hat{h}_{q_{\varphi}}$ επάγουν την ίδια ολόμορφη δομή πάνω στην M.

Όλες λοιπόν οι μετρικές σταθερής αρνητικής καμπυλότητας -4 πάνω σε μια επιφάνεια Riemann M παραμετρίζονται από το χώρο $Q\left(M\right)$. Από την άλλη μεριά, κάθε ολόμορφη δομή (conformal structure) στην M γένους $g > 1$ αναπαρίσταται από μια μετρική σταθερής αρνητικής καμπυλότητας (βλ. J. Jost, Compact Riemann Surfaces, p. 161)

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τεχνικές από τη gauge theory καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι *οι ολόμορφες δομές (conformal structures) μιας επιφάνειας Riemann* M *γένους* $g > 1$ *παραμετρίζονται από τα holomorphic quadratic differentials, αποτελώντας έτσι ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο διάστασης* $3g - 3$.

Αναφορές

[1] Athanassopoulos K., A crash course in Hyperbolic Geometry, University of Crete, 2007

[2] Athanassopoulos K., Notes on characteristic classes, University of Crete.

[3] Athanassopoulos K., Notes on Symplectic Geometry, University of Crete, 2007.

[4] Atiyah M. F. and Bott R., The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308 (1982), 523-612.

[5] Berndt R., An Introduction to Symplectic Geometry, American Mathematical Society, 2000.

[6] Besse A., Einstein manifolds, Springer, 1987.

[7] Carmeli M. and Malin S., Theory of Spinors: An Introduction, World Scientific Pub., 2006.

[8] Chow B., Gulliver R., Levy S. and Sullivan J., Elliptic and parabolic methods in Geometry, A.K. Peters/CRC Press, 1996.

[9] Donaldson S. K., A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, J. Differential Geom. 18 (1983), 269-277.

[10] Earle C. and Eells J., A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Differential Geom. 3 (1969), 19-43.

[11] Frenkel E. and Ben-Zvi D., Vertex algebras and algebraic curves, Second Edition, American Mathematical Society, 2004.

[12] Gourdin M., Basics of Lie groups, Editions Frontieres, 1982

[13] Griffiths P. and Harris J., Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience, 1978

[14] Gunning R. and Rossi H., Analytic functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall Series in Modern analysis, 1965.

[15] Hector G. and Hirsch U., Introduction to the geometry of Foliations Part A, Friedr. Vieweg & Sohn, 1981.

[16] Hitchin N. J., Gauge theory on Riemann surfaces, '' Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987) '', 99-118, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[17] Hitchin N. J., Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J. 54 (1987), 91-114

[18] Hitchin N.J., The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987), 59-126.

[19] Jost J., Compact Riemann surfaces, Third Edition, Springer, 2006.

[20] Kobayashi S., Differential Geometry of complex vector bundles, Publications of the Mathematical society of Japan, 1987.

[21] Kolar I., Michor W. and Slovak J., Natural operations in differential geometry, Springer-Verlag, 1993.

[22] Lawson B., The theory of Gauge Fields in four dimensions (Cbms Regional Conference Series in Mathematics), 1985.

[23] Lee J., Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2003.

[24] Madsen Ib and Tornehave J., From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes, Cambridge University Press, 1997.

[25] Woodward C., Moment maps and geometric invariant theory, Les cours du CIRM, 1 no. 1: Hamiltonian Actions: invariants et classification (2010), p.55-98.

[26] Yang K., Compact Riemann surfaces and algebraic curves, World Scientific Publishing, 1988.