Μεταπτυχιακή Εργασία: Σχέσεις ιδιοτιμών και περιοχές σύγκλισης των block επαναληπτικών μεθόδων SOR και SSOR για p-κυκλικούς πίνακες

Εμμ. Α. Κονταδάκης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
E-mail: kontad@math.uoc.gr

Επιβλέπων καθηγητής: Απ. Χατζηδήμος

20th October 2005

Περιεχόμενα

0 Εισαγωγή - Περίληψη Εργασίας

Η Επαναληπτική Μέθοδος Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης, (Successive Over-Relaxation (SOR)), έχει επανειλημμένα χρησιμοποιηθεί για την Αριθμητική Επίλυση Συστημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού, π.χ. από τον Dax [Da03] το 2003, Τετραγωνικού Προγραμματισμού, π.χ. από τον Cryer [Cr71] το 1971, καθώς και από άλλους ερευνητές των Επιχειρησιακών Μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία που έχει θεωρητικό χαρακτήρα, μελετάμε την block SOR, καθώς και την block επαναληπτική μέθοδο της Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (Symetric Successive Over-Relaxation (SSOR)), για τη λύση συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων $Ax = b$.

Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, έπειτα από μία εισαγωγή, περιγράφουμε τις κλασικές επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Στο Κεφάλαιο 2 αναφερόμαστε στο είδος του πίνακα A του γραμμικού συστήματος που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Ο πίνακας A θα ανήκει σε μιά κλάση αραιών πινάκων που καλούνται Γενικευμένοι Συνεπώς Διατεταγμένοι GCO(p-k,k), (όπου $p \geq 2,\ k = 1, \ldots, p-1$).

Στα επόμενα κεφάλαια προχωράμε στα κύρια αποτελέσματα αυτής της εργασίας. Στο Κεφάλαιο 3 βρίσκουμε την εξίσωση που συνδέει τις ιδιοτιμές του block επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου Jacobi με αυτές του πίνακα της block SOR. Κατόπιν, με τη βοήθεια της εξίσωσης που προέκυψε βρίσκουμε στο Κεφάλαιο 4 την ακριβή περιοχή σύγκλισης της block SOR επαναληπτικής μεθόδου και δείχνουμε ότι αυτή εξαρτάται μόνο από την παράμετρο της υπερχαλάρωσης $\omega \in \mathbb{R}$ και από τη φασματική ακτίνα του block επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου Jacobi.

Στο Κεφάλαιο 5, εργαζόμενοι με την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 3, και για την κλάση πινάκων που προαναφέραμε (GCO(p-k,k)), βρίσκουμε αυτή τη φορά την εξίσωση που συνδέει τις ιδιοτιμές του block επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου Jacobi με αυτές του πίνακα της μεθόδου block SSOR. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6, με βάση την εξίσωση του Κεφαλαίου 5, βρίσκουμε την ακριβή περιοχή σύγκλισης της block SSOR επαναληπτικής μεθόδου και δείχνουμε ότι αυτή εξαρτάται από την παράμετρο της υπερχαλάρωσης $\omega \in \mathbb{R}$, από τη φασματική ακτίνα του block επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου Jacobi και από το λόγο $l = \frac{k}{p}$.

1 Επαναληπτικές μέθοδοι

1.1 Γενικά

Σκοπός των επαναληπτικών μεθόδων είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων της μορφής

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad \det(A) \neq 0, \quad b \in \mathbb{C}^n \tag{1.1}$$

Η βασική ιδέα των επαναληπτικών μεθόδων είναι ότι ξεκινάμε από μια αυθαίρετη προσέγγιση της λύσης, έστω $x^{(0)}$, και με βάση κάποιον επαναληπτικό αλγόριθμο κατασκευάζονται διαδοχικά οι όροι μιας ακολουθίας $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, η οποία, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, συγκλίνει στη λύση του προς επίλυση συστήματος. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε μια διάσπαση του πίνακα A

$$A = M - N, \tag{1.2}$$

με μόνους περιορισμούς

(i) Ο πίνακας M να είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων M να λύνεται με πολύ λιγότερες πράξεις απ΄ ό,τι ένα άλλο με πίνακα A.

(iii) Η φασματική ακτίνα του πίνακα $T = M^{-1}N$ να είναι μικρότερη της μονάδας ($\rho(T) < 1$) και όσο το δυνατόν μικρότερη.

(Ο πίνακας M στη διάσπαση (1.2) είναι γνωστός ως (προρ)ρυθμιστής πίνακας.) Χρησιμοποιώντας την (1.2) στην (1.1) και αναδιατάσσοντας έχουμε

$$Mx = Nx + b \tag{1.3}$$

Η (1.3) είναι ισοδύναμη με την

$$x = Tx + c, \quad T := M^{-1}N, \quad c := M^{-1}N. \tag{1.4}$$

Η νέα εξίσωση (1.4), που είναι εξίσωση σταθερού σημείου και είναι ισοδύναμη με την αρχική (1.1), υποδεικνύει την κατασκευή του αλγορίθμου

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1.5}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε. (Ο πίνακας T στον αλγόριθμο (1.5) είναι γνωστός ως επαναληπτικός πίνακας του αλγορίθμου.)

Ο αλγόριθμος (1.5) παράγει ακολουθία διανυσμάτων $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, η οποία, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, συγκλίνει στη λύση $x = A^{-1}b$ του (1.1). Αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας που παράγει ο (1.5) στην λύση του (1.1) είναι η $\rho(T) < 1$.

1.2 Κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι

Οι κλασσικές επαναληπτικές μέθοδοι βασίζονται στην ακόλουθη διάσπαση του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων A

$$A = D - L - U, \tag{1.6}$$

όπου $D = \mathrm{diag}(A)$, δηλαδή, διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστοιχα του A, L αυστηρά κάτω τριγωνικός και U αυστηρά άνω τριγωνικός. Όπως είναι φανερό η διάσπαση (1.6) ορίζεται μονοσήμαντα.

Οι ορισμοί των κλασικών επαναληπτικών μεθόδων που αφορούν σ' αυτή την εργασία ακολουθούν παρακάτω.

1.2.1 Μέθοδος Jacobi

Στη μέθοδο του Jacobi ο ρυθμιστής πίνακας είναι ο $M = D$. Για να υπάρχει η μέθοδος θα πρέπει ο M να είναι αντιστρέψιμος, και αυτό ισχύει ανν $\det(M) = \det(D) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Επομένως η μέθοδος του Jacobi μπορεί να οριστεί ανν $a_{ii} \neq 0,\ i = 1(1)n$. Ακόμη, ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων $M = D$ είναι οικονομικότερο στην επίλυσή του (απαιτεί $O(n^2)$ πράξεις) από ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών A (απαιτεί $O(n^3)$ πράξεις με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss .) Άρα ικανοποιείται ο δεύτερος περιορισμός εφόσον ικανοποιείται ο πρώτος. Σε ό,τι αφορά τη σύγκλιση της μεθόδου τα πάντα εξαρτιούνται από το αν $\rho(T_J) \equiv \rho((D)^{-1}(L+U) < 1$, οπότε η μέθοδος συγκλίνει αλλιώς δε συγκλίνει. Σε μορφή πινάκων η μέθοδος του Jacobi είναι η ακόλουθη

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b,\ k = 0,1,2,..., \tag{1.7}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνονται από τον τύπο

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii},\ i = 1(1)n. \tag{1.8}$$

.

1.2.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Στην περίπτωση της Gauss-Seidel μεθόδου και με βάση την διάσπαση (1.6) επιλέγεται $M = D - L$. Για να υπάρχει η μέθοδος θα πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος του $D-L$, που είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Άρα αυτός είναι αντιστρέψιμος ανν $\det(D-L) \neq 0$, που ισοδυναμεί με $a_{ii} \neq 0,\ i = 1(1)n$. Ακόμη, ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων $D-L$, λύνεται με προς τα πίσω αντικαταστάσεις (δηλαδή απαιτεί $O(n^2)$ πράξεις) και επομένως είναι οικονομικότερο στην επίλυσή του από ένα σύστημα με πίνακα συντελεστών A. Η μέθοδος των Gauss-Seidel σε μορφή πινάκων είναι η ακόλουθη

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b,\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{1.9}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνονται από τον τύπο

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)})/a_{ii},\ i = 1(1)n. \tag{1.10}$$

Για την σύγκλιση της μεθόδου θα πρέπει $\rho(T_{GS}) \equiv \rho((D-L)^{-1}U) < 1$

1.2.3 Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Η μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης, γνωστή και ως SOR (Successive Over-Relaxation), αποτελεί μια μονοπαραμετρική γενίκευση της μεθόδου Gauss-Seidel . Συγκεκριμένα, θεωρώντας τη διάσπαση (1.6) με $\det(D) \neq 0$ ορίζουμε το ρυθμιστή πίνακα ως

$$M_\omega = \frac{1}{\omega}(D - \omega L),\ \omega \in \mathbb{C} - \{0\}, \tag{1.11}$$

όπου η παράμετρος ω καλείται παράμετρος υπερχαλάρωσης (ή SOR παράμετρος), οπότε είναι εύκολο να βρεθεί ότι η SOR μέθοδος είναι η ακόλουθη

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + c_\omega,\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{1.12}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε, και

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega U\right), \quad c_\omega = \omega(D-\omega L)^{-1}b. \tag{1.13}$$

Όπως είναι φανερό από την (1.11), για $\omega = 1$ η SOR μέθοδος δίνει αυτή των Gauss-Seidel .

Η αναλυτική εύρεση της οποιασδήποτε συνιστώσας του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνεται από την έκφραση

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii},\ i = 1(1)n. \tag{1.14}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η οποιαδήποτε συνιστώσα της νέας επανάληψης δίνεται σαν βαρυκεντρικός μέσος όρος της ίδιας συνιστώσας της προηγούμενης επανάληψης και της συνιστώσας που θα βρίσκαμε αν εφαρμόζαμε για την εύρεση της αντίστοιχης συνιστώσας τη μέθοδο των Gauss-Seidel.

Για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου υπάρχει μία αναγκαία συνθήκη η οποία είναι ανεξάρτητη των ιδιοτήτων του A. Αυτή δίνεται στο παρακάτω θεώρημα που διατυπώθηκε πρώτα από τον Kahan. (Βλέπε και [Ka58]).

Θεώρημα 1.1 ***(Kahan)*** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου είναι η ακόλουθη*

$$|\,\omega - 1| < 1,\ \omega \in \mathbb{C}, \quad (\omega \in (0,2),\ \omega \in \mathbb{R}).$$

1.2.4 Συμμετρική SOR (SSOR) Επαναληπτική Μέθοδος

Η Συμμετρική Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης είναι μία επαναληπτική μέθοδος στην οποία κάθε επανάληψη αποτελείται από δύο ημιεπαναλήψεις. Η πρώτη ημιεπανάληψη είναι η ίδια με την επανάληψη της SOR μεθόδου ενώ η δεύτερη ημιεπανάληψη αποτελεί μια "προς τα πίσω" επανάληψη της SOR μεθόδου. Συγκεκριμένα ορίζεται το $x^{(k+1/2)}$ από το $x^{(k)}$ από την SOR

$$x^{(k+1/2)} = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right] x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b \tag{1.15}$$

και το $x^{(k+1)}$ από το $x^{(k+1/2)}$ με την "προς τα πίσω" SOR μέθοδο

$$x^{(k+1)} = (D - \omega U)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega L\right] x^{(k+1/2)} + \omega (D - \omega U)^{-1} b. \tag{1.16}$$

Συνδυάζοντας τις (1.15)-(1.16) παίρνουμε

$$x^{(k+1)} = \mathcal{S}_\omega x^{(k)} + c_\omega \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.17}$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ οποιοδήποτε, όπου

$$\mathcal{S}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega \tag{1.18}$$

με $\mathcal{L}_\omega$, όπως ορίζεται στην (1.13)

$$\mathcal{U}_\omega = (D - \omega U)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega L\right), \tag{1.19}$$

$$c_\omega = \omega(2-\omega)(D - \omega U)^{-1} D (D - \omega L)^{-1} b. \tag{1.20}$$

Αντίστοιχο θεώρημα με το Θεώρημα 1.1 του Kahan ισχύει και για την SSOR μέθοδο.

Θεώρημα 1.2 *Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της SSOR μεθόδου είναι η ακόλουθη*

$$|\,\omega - 1| < 1,\ \omega \in \mathbb{C}, \quad (\omega \in (0,2),\ \omega \in \mathbb{R}).$$

1.3 Επαναληπτικοί πίνακες των μεθόδων

Ανακεφαλαιώνοντας τα προηγούμενα έχουμε συνολικά τα παρακάτω για τους (προ)ρυθμιστές αλλά κυρίως για τους Επαναληπτικούς πίνακες των μεθόδων Jacobi , Gauss-Seidel, SOR και SSOR, αντίστοιχα.

$$M_J = D\ ,\quad T_J = D^{-1}(L+U) \tag{1.21}$$

$$M_{GS} = D - L\ ,\quad T_{GS} = (D-L)^{-1}U \tag{1.22}$$

$$M_{SOR} = \frac{1}{\omega}(D-\omega L)\ ,\quad T_{SOR} = \mathcal{L}_\omega = (D-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega U\right) \tag{1.23}$$

και

$$\left.\begin{array}{r} M_{SSOR} = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D-\omega L)D^{-1}(D-\omega U), \\ \\ T_{SSOR} = \mathcal{S}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega = \\ = (D-\omega U)^{-1}\left((1-\omega)D+\omega L\right)(D-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D+\omega U\right) \end{array}\right\} \tag{1.24}$$

Οι μέθοδοι που ορίστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια καλούνται Point επαναληπτικές μέθοδοι και αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των Block επαναληπτικών μεθόδων. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τους ορισμούς που δώσαμε για τις Point επαναληπτικές μεθόδους και θα δώσουμε τους αντίστοιχους των Block επαναληπτικών μεθόδων.

1.4 Block Επαναληπτικές μέθοδοι

Για την επέκταση των ορισμών θεωρούμε πάλι προς επίλυση το γραμμικό σύστημα (1.1). Τώρα όμως διαχωρίζουμε τον πίνακα A σε Blocks $N \times N$ μορφή, με τη βασική προϋπόθεση ότι τα διαγώνια Blocks (υποπίνακες) του A είναι τετραγωνικοί πίνακες. Έχουμε συγκεκριμένα τα A_{ii} , $i = 1(1)N$, να είναι υποπίνακες διαστάσεων $n_i \times n_i$ με $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$. Οπότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,i} & \dots & A_{i,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,i} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

με $x_i, b_i \in \mathbb{C}^{n_i},\ i = 1(1)N$.

Στη συνέχεια θεωρούμε μία διάσπαση του A της ίδιας μορφής με την (1.6) με τη βασική διαφορά ότι ο πίνακας D δεν είναι ο γνώστος $D = \text{diag}(A)$ άλλα ο block διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{NN})$.

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \ldots & O \\ O & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \ldots & O & A_{N,N} \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

Οι πίνακες L και U ορίζονται και πάλι ως αυστηρά κάτω και αυστηρά άνω τριγωνικοί, αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν

$$A = D - L - U \tag{1.27}$$

και η διάσπαση αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη και εξαρτιέται μόνο από το διαχωρισμό σε blocks του πίνακα A.

Για να να μπορούν να οριστούν οι, αντίστοιχες των point, block επαναληπτικές μέθοδοι, θα πρέπει ο D να είναι αντιστρέψιμος. Αυτό ισχύει ανν οι block υποπίνακες $A_{ii},\ i = 1(1)N$, είναι αντιστρέψιμοι.

Έτσι λοιπόν οι block επαναληπτικές μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, SOR και SSOR ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες point, με τη διάσπαση όμως D, L, U όπως αυτή παρουσιάστηκε στις παραπάνω παράγραφους. Οι (προ)ρυθμιστές και οι Επαναληπτικοί πίνακες των block Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, SSOR μεθόδων δίνονται όπως στις (1.21)-(1.24), αντίστοιχα.

Έπισης ο $n \times n$ πίνακας B που όριζεται από την

$$B := -D^{-1}A + I \tag{1.28}$$

είναι ο block Jacobi πίνακας του A.

Η σχέση (1.28) για τον block Jacobi πίνακα του A προκύπτει αν ξεκινήσουμε από τα γνωστά. Δηλαδή ότι ο block Jacobi πίνακας του A είναι ο $B = D^{-1}(L + U)$. Κάνοντας πράξεις έχουμε $B = D^{-1}(L + U) = D^{-1}(D - D + L + U) = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$.

Κάτι επιπλέον που πρέπει να τονιστεί είναι ότι το Θεώρημα του Kahan (1.1 και το αντίστοιχό του 1.2) ισχύουν και για τις block SOR και block SSOR μεθόδους.

Στη συνέχεια οι μέθοδοι που θα μας απασχολήσουν θα είναι οι block επαναληπτικές μέθοδοι Jacobi, SOR και SSOR. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ειδικές κατηγορίες των πινάκων που θα μελετηθούν στις block μεθόδους, κάποιοι επιπλέον ορισμοί, καθώς και διάφορες ιδιότητες των εν λόγω πινάκων που θα χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

2 p-κυκλικοί πίνακες. Ορισμοί και ιδιότητες

2.1 p-κυκλικοί πίνακες.

Ορισμός 2.1 *Ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ που είναι διαχωρισμένος σε $N \times N$ block μορφή, λέγεται* ***ασθενώς κυκλικός με δείκτη*** *$p\,(> 1)$ αν υπάρχει ένας $n \times n$ μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε*

- *να μεταθέτει τα blocks του B σύμφωνα με τον $N \times N$ διαχωρισμό του,*
- *να ισχύει*

$$PBP^T = \begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & B_{1,p} \\ B_{2,1} & O & & O & O \\ O & B_{3,2} & & O & O \\ & & \ddots & & \\ O & O & \cdots & B_{p,p-1} & O \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες του PBP^T είναι τετραγωνικοί και το $p \in \{1, \cdots, N\}$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι όταν ο B δεν είναι διαχωρισμένος σε blocks, τότε ο ορισμός του "ασθενώς κυκλικού" είναι ίδιος με παραπάνω, μόνο που σαν blocks του B θεωρούμε τα n^2 στοιχεία του. Σε αυτή τη περίπτωση ο πίνακας μπορεί να είναι ταυτόχρονα ασθενώς κυκλικός με διαφορετικούς δείκτες.

Εάν έχουμε έναν πίνακα B που είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p και ισχύουν επιπλέον: $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $B \geq O$, και B αναγώγιμος πίνακας , τότε η μορφή του πίνακα PBP^T στη (2.1) λέγεται και **κανονική μόρφη του** B.

Ορισμός 2.2 *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}$ καλείται* ***p-κυκλικός****, αν ο αντίστοιχος block Jacobi πίνακας $B = I - D^{-1}A$ (πάντοτε σε σχέση με τον* block *διαχωρισμό που έχει γίνει στον A) είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη $p\,(> 1)$.*

Τους παραπάνω δύο ορισμούς για την ασθενή κυκλικότητα και την p-κυκλικότητα τους εισήγαγε ο Varga στο [Va](σελ. 44 και 113).

2.2 Κατευθυνόμενα γραφήματα και εφαρμογές στους p-κυκλικούς πίνακες.

Έστω πίνακας A όπως στην (1.25). Τότε

Ορισμός 2.3 *Ορίζουμε ως **block κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα** A, (βλέπε και [Va] σελ. 113), και το συμβολίζουμε με $G_\pi(A)$, ένα γράφημα το οποίο:*
(i) Έχει N κόμβους (N είναι το πλήθος των διαγώνιων blocks *του A), τους $P_\pi(1)$, $P_\pi(2)$, $\ldots$, $P_\pi(N)$.*
(ii) Αν $A_{i,j} \neq O$ τότε ο $P_\pi(i)$ συνδέεται με τον $P_\pi(j)$ στο γράφημα και το συμβολίζουμε με $P_\pi(i) \mapsto P_\pi(j)$.

Ορισμός 2.4 *Ένα (block) κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται **κυκλικό δείκτη** p αν είναι κλειστό, (δηλαδή οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του συνδέονται με κάποιο μονοπάτι), και αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των μηκών όλων των κλειστών διαδρομών πάνω σε αυτό είναι p.*

(Στο ([Va] σελ. 56) δίνεται ο αντίστοιχος με τον παραπάνω ορισμός όπου έχουμε όμως αντί για block, point κατευθυνόμενο γράφημα).

Θεώρημα 2.1 *Ένας πίνακας B είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p, αν το* block *κατευθυνόμενο γράφημά του είναι κυκλικό δείκτη p.*

Προφανής συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 2.2 *Ένας πίνακας A διαχωρισμένος, όπως στην (1.25), είναι p-κυκλικός εάν το* block *κατευθυνόμενο γράφημα του* block Jacobi *πίνακά του B είναι κυκλικό δείκτη p. ([Va] σελ. 114)*

Οι πίνακες που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια της εργασίας είναι οι p-κυκλικοί που έχουν τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \ldots & O & A_{1,k+1} & O & \ldots & O \\ O & A_{2,2} & \ldots & O & O & A_{2,k+2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & & O & O & \ldots & A_{p-k,p} \\ A_{p-k+1,1} & O & \ldots & & & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \ldots & A_{p,k} & O & O & \ldots & A_{p,p}, \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

όπου $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Οπότε οι block Jacobi πίνακες των πινάκων που είναι όπως στην (2.2), έχουν τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & B_{1,k+1} & O & \dots & O \\ O & O & \dots & O & O & B_{2,k+2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & & O & O & \dots & B_{p-k,p} \\ B_{p-k+1,1} & O & \dots & & & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & B_{p,k} & O & O & \dots & O \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Ορισμός 2.5 *Οι πίνακες, όπως στην ισότητα (2.2), λέγονται στη γλώσσα του Young (βλ. [Ya]) και* ***γενικευμένοι*** $(p-k,k)$ ***συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες*** *ή για συντομία* ***GCO(p-k,k)*** .

Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα που αφορά σε πίνακα της μορφής (2.2).

Παράδειγμα 2.1 *Σ' αυτό το παράδειγμα δίνεται ο* block Jacobi *πίνακας ενός πίνακα A έστω*

$$B = \begin{bmatrix} O & O & B_{1,3} & O & O \\ O & O & O & B_{2,4} & O \\ O & O & O & O & B_{3,5} \\ B_{4,1} & O & O & O & O \\ O & B_{5,2} & O & O & O \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

(Υπενθυμίζεται ότι οι block *διαγώνιοι υποπίνακες του B είναι τετραγωνικοί αφού αυτό αποτελεί μία από τις απαραίτητες προϋποθέσεις για τη ύπαρξή του.)*
Τότε το γράφημα του B είναι

$$P_\pi(1) \mapsto P_\pi(3) \mapsto P_\pi(5) \mapsto P_\pi(2) \mapsto P_\pi(4) \mapsto P_\pi(1)$$

Ο A είναι 5*-κυκλικός, και αυτό προκύπτει από το* block *κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B που είναι κυκλικό δείκτη p, όπου $p = 5$. Ο A μάλιστα είναι επιπλέον GCO(p-k,k) με $k = 2$.*

2.3 Χρήσιμες ιδιότητες των κατευθυνόμενων γραφημάτων

Καταρχήν τα block κατευθυνόμενα γραφήματα για τις δυνάμεις ενός πίνακα A μπορούν απλά να προκύψουν από το block κατευθυνόμενο γράφημα $G_\pi(A)$ του πίνακα A.

Αυτό ισχύει διότι το block κατευθυνόμενο γράφημα για τον πίνακα A^r, $r \geq 1$, είναι το κατευθυνόμενο γράφημα που σχηματίζεται θεωρώντας σαν μονοπάτια μήκους μονάδας σ' αυτό, όλα τα κατευθυνόμενα μονοπάτια του $G_\pi(A)$ που έχουν μήκος ακριβώς r. Με άλλα λόγια, για το κατευθυνόμενο μονοπάτι $\overrightarrow{P_\pi(i)P_\pi(l_1)}, \overrightarrow{P_\pi(l_1)P_\pi(l_2)}, \ldots, \overrightarrow{P_\pi(l_{r-1})P_\pi(l_r = j)}$, που βρίσκεται στο γράφημα $G_\pi(A)$, ενώνουμε κατευθείαν τον κόμβο $P_\pi(i)$ με τον $P_\pi(j)$ με ένα κατευθυνόμενο τόξο προς τον $P_\pi(j)$ μήκους 1 για το κατευθυνόμενο γράφημα $G_\pi(A^r)$.

Με την παραπάνω παρατήρηση μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για τη μορφή του πίνακα B^p, όταν B είναι ο block Jacobi πίνακας ενός πίνακα της μορφής (2.2), ή γενικότερα όταν είναι πίνακας της μορφής (2.3) με τετραγωνικούς block διαγώνιους υποπίνακες. Θα έχουμε λοιπόν ότι το γράφημα $G_\pi(B)$ αποτελείται από κλειστά μονοπάτια που ξεκινούν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο και έχουν την εξής μορφή

$$\begin{array}{lllll} P_\pi(i) & \longrightarrow & P_\pi(k+i(\mathrm{mod}p)) & \longrightarrow & P_\pi(2k+i(\mathrm{mod}p)) \\ \| & & & \swarrow & \qquad i \in \{1,\ldots,p\} \\ P_\pi(pk+i(\mathrm{mod}p)) & \leftarrow & P_\pi((p-1)k+i(\mathrm{mod}p)) & \leftarrow & \cdots \end{array} \tag{2.5}$$

Υποσημείωση 2.1 *Στον τύπο (2.5) όπου παρουσιάζεται δείκτης κόμβου με υπόλοιπο* $\mathrm{mod}p$ *ίσο με 0, αυτόν το δείκτη τον θεωρούμε ίσο με* p.

Άρα το γράφημα $G_\pi(B^p)$ αποτελείται από p ξένα κλειστά μονοπάτια μήκους 1. Το κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του $G_\pi(B)$ και ξεκινά και καταλήγει σ' αυτόν. Με λίγα λόγια ο B^p είναι διαγώνιος.

Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε στην εξής πρόταση:

Πρόταση 2.1 *Αν B είναι πίνακας της μορφής (2.3), με τετραγωνικούς* block *διαγώνιους υποπίνακες, τότε ο B^p είναι* block *διαγώνιος, με διαγώνιους υποπίνακές τους*

$$\tilde{B}_{ii} = B_{i,k+i(\mathrm{mod}p)} B_{k+i(\mathrm{mod}p),2k+i(\mathrm{mod}p)} \ldots B_{(p-1)k+i(\mathrm{mod}p),i} \; i \in \{1,\ldots,p\}. \tag{2.6}$$

Η Υποσημείωση 2.1 ισχύει και για τους δείκτες του τύπου (2.6).

Για να καταστήσουμε σαφέστερα τα παραπάνω θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα με τον πίνακα του Παραδείγματος 2.1.

Παράδειγμα 2.2 *Έχουμε ότι ο A είναι $GCO(3,2)$ και ο* block Jacobi *του A*

είναι

$$B = \begin{bmatrix} O & O & B_{1,3} & O & O \\ O & O & O & B_{2,4} & O \\ O & O & O & O & B_{3,5} \\ B_{4,1} & O & O & O & O \\ O & B_{5,2} & O & O & O \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Το γράφημα του B *είναι*

$$G_\pi(B) = P_\pi(1) \mapsto P_\pi(3) \mapsto P_\pi(5) \mapsto P_\pi(2) \mapsto P_\pi(4) \mapsto P_\pi(1).$$

Ή ποιο παραστατικά

$$G_\pi(B): \quad \begin{array}{ccccc} P_\pi(1) & \longrightarrow & P_\pi(3) & \longrightarrow & P_\pi(5) \\ \uparrow & & & \swarrow & \\ P_\pi(4) & \longleftarrow & P_\pi(2) & & \end{array} \tag{2.8}$$

Άρα για να σχηματίσουμε το $G_\pi(B^p)$ *παίρνουμε τα κλειστά μονοπάτια που εμφανίζονται σ΄ αυτό και έχουν μήκος* p*:*

$$\overrightarrow{P_\pi(1)P_\pi(3)}, \overrightarrow{P_\pi(3)P_\pi(5)}, \overrightarrow{P_\pi(5)P_\pi(2)}, \overrightarrow{P_\pi(2)P_\pi(4)}, \overrightarrow{P_\pi(4)P_\pi(1)} \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{P_\pi(2)P_\pi(4)}, \overrightarrow{P_\pi(4)P_\pi(1)}, \overrightarrow{P_\pi(1)P_\pi(3)}, \overrightarrow{P_\pi(3)P_\pi(5)}, \overrightarrow{P_\pi(5)P_\pi(2)} \tag{2.10}$$

$$\overrightarrow{P_\pi(3)P_\pi(5)}, \overrightarrow{P_\pi(5)P_\pi(2)}, \overrightarrow{P_\pi(2)P_\pi(4)}, \overrightarrow{P_\pi(4)P_\pi(1)}, \overrightarrow{P_\pi(1)P_\pi(3)} \tag{2.11}$$

$$\overrightarrow{P_\pi(4)P_\pi(1)}, \overrightarrow{P_\pi(1)P_\pi(3)}, \overrightarrow{P_\pi(3)P_\pi(5)}, \overrightarrow{P_\pi(5)P_\pi(2)}, \overrightarrow{P_\pi(2)P_\pi(4)} \tag{2.12}$$

$$\overrightarrow{P_\pi(5)P_\pi(2)}, \overrightarrow{P_\pi(2)P_\pi(4)}, \overrightarrow{P_\pi(4)P_\pi(1)}, \overrightarrow{P_\pi(1)P_\pi(3)}, \overrightarrow{P_\pi(3)P_\pi(5)} \tag{2.13}$$

και ενώνουμε σε κάθε ένα από αυτά τον πρώτο με το, τελευταίο κόμβο, που ταυτίζονται, και έχουμε

$$\begin{gathered} G_\pi(B^p) = \{P_\pi(1) \leftrightarrow P_\pi(1), P_\pi(2) \leftrightarrow P_\pi(2), \\ P_\pi(3) \leftrightarrow P_\pi(3), P_\pi(4) \leftrightarrow P_\pi(4), P_\pi(5) \leftrightarrow P_\pi(5)\} \end{gathered} \tag{2.14}$$

Στην περίπτωσή μας ο B^p θα είναι

$$B^p =$$

$$\begin{bmatrix} B_{1,3}B_{3,5}B_{5,2}B_{2,4}B_{4,1} & O & O & O & O \\ O & B_{2,4}B_{4,1}B_{1,3}B_{3,5}B_{5,2} & O & O & O \\ O & O & B_{3,5}B_{5,2}B_{2,4}B_{4,1}B_{1,3} & O & O \\ O & O & O & B_{4,1}B_{1,3}B_{3,5}B_{5,2}B_{2,4} & O \\ O & O & O & O & B_{5,2}B_{2,4}B_{4,1}B_{1,3}B_{3,5} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Στον επόμενο ορισμό θα δούμε ποια ακριβώς είναι η έννοια του συνεπώς διατεταγμένου πίνακα, που συναντήσαμε στον ορισμό των GCO(p-k,k) πινάκων, μόνο όμως στην απλή περίπτωση που $k = 1$, και όπως έχει δοθεί από τον Varga στο [Va] (σελ. 115). Ο ακριβής ορισμός της έννοιας του ''γενικευμένου συνεπώς διατεταγμένου'' υπάρχει στο βιβλίο του Young [Ya] (Κεφ. 13), αλλά εμάς σε αυτή την εργασία δεν θα μας απασχολήσει.

Ορισμός 2.6 *Εάν ο πίνακας A στην (1.25) είναι p-κυκλικός, τότε λέμε ότι είναι* ***συνεπώς διατεταγμένος*** *εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα*

$$B(a) := aE + a^{-(p-1)}F$$

είναι ανεξάρτητες του a, για $a \neq 0$, όπου, θεωρώντας τη διάσπαση (1.27) του A, έχουμε θέσει $E := D^{-1}L,\ F := D^{-1}U$, και άρα ο block Jacobi *πίνακας του A είναι ο $B = E + F$).*

Πρόταση 2.2 *Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο A είναι p-κυκλικός πίνακας της μορφής*

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \cdots & O & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & & O & O \\ O & A_{3,2} & & O & O \\ & & \ddots & & \\ O & O & \cdots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

με τετραγωνικούς και αντιστρέψιμους διαγώνιους υποπίνακες. Τότε ο A είναι συνεπώς διατεταγμένος.

Απόδειξη: Ο block Jacobi πίνακας του A είναι της μορφής (2.1). Δηλαδή

$$B = \begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & B_{1,p} \\ B_{2,1} & O & & O & O \\ O & B_{3,2} & & O & O \\ & & \ddots & & \\ O & O & \cdots & B_{p,p-1} & O \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

οπότε έχω

$$B(a) = \begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & a^{-(p-1)}B_{1,p} \\ aB_{2,1} & O & & O & O \\ O & aB_{3,2} & & O & O \\ & & \ddots & & \\ O & O & \cdots & aB_{p,p-1} & O \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Εφόσον οι πίνακες (2.17) και (2.18) είναι και οι δύο της μορφής (2.3) (με $k = p-1$), χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1 και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι

$$B^p(a) = B^p =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{1,p}B_{p,p-1}\dots B_{2,1} & O & \dots & O \\ O & B_{2,1}B_{1,p}B_{p,p-1}\dots B_{3,2} & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & O \\ O & O & \dots & B_{p,p-1}B_{p-1,p-2}\dots B_{1,p} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

για όλα τα $a \neq 0$. Για τυχαία ιδιοτιμή λ του $B(a)$ έχουμε ότι η λ^p είναι ιδιοτιμή του $B^p(a)$. Άρα λ^p είναι ιδιοτιμή και του B^p. Επομένως η λ^p είναι ανεξάρτητη του a. Όμως τότε και η λ είναι ανεξάρτητη του a. Οδηγούμαστε έτσι στο συμπέρασμα ότι οι πίνακες που έχουν τη μορφή (2.16) είναι **p-κυκλικοί και συνεπώς διατεταγμένοι** . □

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο δίνουμε δύο πολύ συμαντικές παρατηρήσεις, εκ των οποίων η πρώτη έχει το χαρακτήρα υπενθύμισης.

Παρατήρηση 2.1 *Όλοι οι παραπάνω ορισμοί και έννοιες ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι τα διαγώνια* blocks *του A είναι πίνακες τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι. Αυτή η προϋπόθεση θεωρείται ότι ισχύει διότι έτσι εξασφαλίζεται η ύπαρξη του επαναληπτικού πίνακα* Jacobi.

Παρατήρηση 2.2 *Οι πίνακες που έχουν τη μορφή (2.2), και στην γλώσσα του Young όπως είδαμε λέγονται GCO(p-k,k), δεν είναι απαραίτητα p-κυκλικοί. Στο Κεφάλαιο 3.2 θα δούμε πότε συμβαίνει αυτό, καθώς και πότε είναι p-κυκλικοί. Εμάς θα μας απασχολήσουν οι p-κυκλικοί GCO(p-k,k) πίνακες.*

3 Εύρεση σχέσης ιδιοτιμών των Block επαναληπτικών πινάκων Jacobi και SOR για p-κυκλικούς πίνακες

3.1 Περίπτωση block p-κυκλικού πίνακα της μορφής GCO(p-1,1)

Η πρώτη περίπτωση που θα μελετηθεί και κατόπιν θα προχωρήσουμε στην πιο γενική είναι αυτή του πίνακα της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & O & \dots & O \\ O & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & \vdots \\ O & O & A_{3,3} & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ A_{p,1} & O & \dots & O & A_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

όπου οι block υποπίνακες της κύριας διαγωνίου του A είναι αντιστρέψιμοι.

Ορίζουμε την (D, L, U) διάσπαση του πίνακα A ως εξής: $A = D - L - U$, με D, όπως στην (1.26), αντιστέψιμο,

$$-L = \begin{bmatrix} O & \dots & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & O \\ A_{p,1} & O & \dots & O \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

όπου ο $-L$ είναι κάτω τριγωνικός με μοναδικό μη μηδενικό υποπίνακα τον $A_{p,1}$, και

$$-U = \begin{bmatrix} O & A_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{p-1,p} \\ O & O & \dots & O \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

όπου οι μοναδικοί μη μηδενικοί υποπίνακες του $-U$ είναι αυτοί πάνω από την κύρια διαγώνιο.

Θέτοντας τώρα $E = D^{-1}L$ και $F = D^{-1}U$. Ο block Jacobi πίνακας B του

A είναι ο $B = E + F$ που έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} O & B_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & B_{p-1,p} \\ B_{p,1} & O & \dots & O \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Προφανώς έχουμε

$$E = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & O \\ B_{p,1} & O & \dots & O \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$F = \begin{bmatrix} O & B_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & B_{p-1,p} \\ O & O & \dots & O \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα που μας δίνει τη σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του block Jacobi επαναληπτικού πίνακα B και του αντίστοιχου της block SOR μεθόδου, για τον πίνακα A, όπως αυτός δόθηκε στην (3.1).

Θεώρημα 3.1 *Έστω ό,τι ο A είναι ένας* block *p-κυκλικός πίνακας, όπως στην (3.1), με αντιστρέψιμους διαγώνιους υποπίνακες. Εάν έχουμε $\omega \neq 0$ και $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή, του επαναληπτικού πίνακα της* block SOR *μεθόδου, $\mathcal{L}_\omega$, τότε το μ που ικανοποιεί τη σχέση*

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda \omega^p \mu^p, \tag{3.7}$$

είναι ιδιοτιμή του block Jacobi *πίνακα B που δίνεται στην (3.4). Αντίστροφα, αν μ είναι ιδιοτιμή του* block Jacobi *πίνακα B και $\lambda \neq 0$ ικανοποιεί την (3.7) τότε το λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$.*

Απόδειξη: Έχουμε για τον πίνακα της SOR ότι

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1} \left((1-\omega)D + \omega U\right). \tag{3.8}$$

Σ' αυτή τη σχέση αντικαθιστούμε τα L και U με τα DE και DF, αντίστοιχα, αφού διότι $E = D^{-1}L \Rightarrow L = DE$, $F = D^{-1}U \Rightarrow U = DF$. Έτσι η (3.8) μεταλλάσσεται στην

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega E)^{-1} \left((1-\omega)I + \omega F\right). \tag{3.9}$$

Έστω λοιπόν λ ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$ και y το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (μη μηδενικό διάνυσμα). Συμβολίζουμε με: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$, όπου ο block διαχωρισμός του y έχει γίνει με βάση αυτό του πίνακα A. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\omega y = \lambda y \quad &\Leftrightarrow \qquad (3.10)\\
&\Leftrightarrow \quad (I - \omega E)^{-1} \left((1-\omega) I + \omega F \right) y = \lambda y \\
&\Leftrightarrow \quad \left((1-\omega) I + \omega F \right) y = (I - \omega E) \lambda y \\
&\Leftrightarrow \quad (\lambda + \omega - 1) I y = (\lambda \omega E + \omega F) y \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω σχέση σε μορφή πινάκων είναι

$$
\begin{bmatrix} (\lambda+\omega-1)I_1 & O & \dots & O \\ O & (\lambda+\omega-1)I_2 & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & & & (\lambda+\omega-1)I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} O & \omega B_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \dots & \omega B_{p-1,p} \\ \lambda \omega B_{p,1} & \dots & \dots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \qquad (3.12)
$$

Όλες οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου

$$\phi(t) = \det(tI - \mathcal{L}_\omega), \qquad (3.13)$$

το οποίο, από τις (3.10)-(3.11), είναι ίσο με

$$\phi(t) = \det\left((t + \omega - 1) I - t\omega E - \omega F \right). \qquad (3.14)$$

Συμβολίζοντας πάντα με λ μία ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$ θέτουμε

$$
\tilde{B} := \lambda\omega E + \omega F = \begin{bmatrix} O & \tilde{B}_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \dots & \tilde{B}_{p-1,p} \\ \tilde{B}_{p,1} & \dots & \dots & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \omega B_{1,2} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \dots & \omega B_{p-1,p} \\ \lambda\omega B_{p,1} & \dots & \dots & O \end{bmatrix}. \qquad (3.15)
$$

Ο $\tilde{B}^p$, από την Πρόταση 2.1, είναι διαγώνιος και υπολογίζοντάς τον βρίσκουμε

$$\tilde{B}^p \;=$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{1,2}\tilde{B}_{2,3}\ldots\tilde{B}_{p-1,p}B_{p,1} & O & \ldots & O \\ O & \tilde{B}_{2,3}\tilde{B}_{3,4}\ldots\tilde{B}_{p-1,p}\tilde{B}_{p,1}\tilde{B}_{1,2} & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & O & \ldots & \tilde{B}_{p,1}\tilde{B}_{1,2}\ldots\tilde{B}_{p-1,p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda\omega^p B_{1,2}B_{2,3}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1} & O & \ldots & O \\ O & \lambda\omega^p B_{2,3}B_{3,4}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1}B_{1,2} & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & O & \ldots & \lambda\omega^p B_{p,1}B_{1,2}\ldots B_{p-1,p} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\omega^p \begin{bmatrix} B_{1,2}B_{2,3}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1} & O & \ldots & O \\ O & B_{2,3}B_{3,4}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1}B_{1,2} & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & O & \ldots & B_{p,1}B_{1,2}\ldots B_{p-1,p} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Επίσης πάλι από την Πρόταση 2.1 ο B^p είναι διαγώνιος και

$$B^p \;=$$

$$= \begin{bmatrix} B_{1,2}B_{2,3}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1} & O & \ldots & O \\ O & B_{2,3}B_{3,4}\ldots B_{p-1,p}B_{p,1}B_{1,2} & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & O & \ldots & B_{p,1}B_{1,2}\ldots B_{p-1,p} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Άρα

$$\tilde{B}^p = \lambda\omega^p B^p. \tag{3.18}$$

Επειδή $\lambda, \omega \neq 0$, έχουμε ο πίνακας $(\frac{1}{\lambda^{1/p}\omega}\tilde{B})^p$ είναι ίσος με τον B^p. Άρα ο $\frac{1}{\lambda^{1/p}\omega}\tilde{B}$ έχει τις ίδιες, ανεξάρτητες από τα λ, ω, ιδιοτιμές με αυτές του B.

$$\sigma(\tilde{B}) = \sigma(\lambda^{1/p}\omega B), \tag{3.19}$$

όπου $\sigma(\cdot)$ συμβολίζει το φάσμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα. Συνδυάζοντας τώρα τις (3.14) και (3.19) έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{L}_\omega$ είναι το

$$\phi(t) = \det\left((t + \omega - 1)I - t^{1/p}\omega B\right). \tag{3.20}$$

Σ' αυτό το σημείο παρεμβάλλεται ένα θεώρημα που είναι απαραίτητο για τη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2 ***(Romanovski)*** *Έστω ότι C είναι ένας $n \times n$ ασθενώς κυκλικός πίνακας δείκτη $k > 1$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του C είναι*

$$\phi(t) = \det(tI - C) = t^m \prod_{i=1}^{r}(t^k - \sigma_i^k), \tag{3.21}$$

όπου $m + rk = n$, και σ_i όλες οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του C. (βλέπε και ([Va] σελ. 44)).

Για τους πίνακες B και $\lambda^{1/p}\omega B$ ότι γνωρίζουμε λόγω της μορφής τους είναι ασθενώς κυκλικοί με δείκτη p. Έτσι εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Romanovski στην (3.20) έχουμε τελικά ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{L}_\omega$ είναι

$$\phi(t) = (t + \omega - 1)^m \prod_{i=1}^{r}\left((t + \omega - 1)^p - t\omega^p\mu_i^p\right), \tag{3.22}$$

όπου

- $n \times n$ είναι η διάσταση του A, άρα και του $\lambda^{1/p}\omega B$, και $m + rp = n$.
- Τα μ_i είναι οι ιδιοτιμές του B και είναι μη μηδενικές όταν $r \geq 1$.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να αποδείξουμε τις δύο κατευθύνσεις του θεωρήματος:

(i) Έστω λοιπόν ότι μ είναι ιδιοτιμή του block Jacobi πίνακα B, και έστω ότι η λ ικανοποιεί την (3.7). Τότε κάποιος από τους παράγοντες της (3.22) μηδενίζεται, πράγμα που αποδεικνύει ότι η λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$.Έτσι ολοκληρώνεται η μία κατεύθυνση του θεωρήματος.

(ii) Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $\omega \neq 0$, και ότι η λ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα $\mathcal{L}_\omega$. Τότε τουλάχιστον ένας παράγοντας της (3.22) μηδενίζεται.

- Εάν $\mu \neq 0$ και μ ικανοποιεί την (3.7), τότε $(\lambda+\omega-1) \neq 0$. Οπότε

$$(\lambda+\omega-1)^p = \lambda\omega^p\mu_i^p$$

για κάποια i, $1 \leq i \leq r$ όπου μ_i μη μηδενικά. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με την (3.7) έχουμε ότι

$$\lambda\omega^p(\mu^p - \mu_i^p) = 0. \tag{3.23}$$

Εφόσον τα λ, ω είναι μη μηδενικά τότε $\mu^p = \mu_i^p$. Παίρνοντας τις p-οστές ρίζες έχουμε

$$\mu = \mu_i e^{2\pi r/p}, \tag{3.24}$$

με το r να είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί την $0 \leq r < p$. Αλλά πάλι από την ασθενή κυκλικότητα του B και λόγω του Θεωρήματος 3.2 έχουμε ότι η μ είναι ιδιοτιμή του B.

- Εάν $\mu = 0$ ικανοποιεί την (3.7) τότε έχουμε $(\lambda+\omega-1) = 0$, οπότε η (3.20) μας δίνει $\phi(\lambda) = \det(\lambda^{1/p}\omega B) = 0 \Rightarrow \det B = 0$ δηλαδή η $\mu = 0$ είναι ιδιοτιμή του B.

Έτσι ολοκληρώνεται και η απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης του θεωρήματος. □

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι πρώτος ο Young το 1950, (βλ. [Ya50]), εισήγαγε τον ορισμό των 2-κυκλικών συνεπών διατεταγμένων πινάκων και έδειξε την ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.1 όπου το $p = 2$. Ο Varga το 1959, (βλ.[Va59]), γενίκευσε τον ορισμό που είχε δώσει ο Young, μιλώντας πλέον για p-κυκλικούς πίνακες και έδειξε το Θεώρημα 3.1, για κάθε $p \geq 3$.

3.2 Περίπτωση block p-κυκλικού πίνακα GCO(p-k,k)

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μία παρατήρηση όσον αφορά τους πίνακες που είναι της μορφής που μελετάται σ' αυτό το κεφάλαιο, τα συμπεράσματα της οποίας θα ισχύουν γενικότερα από εδώ και στο εξής.

Παρατήρηση 3.1 *Στον $GCO(p-k,k)$ πίνακα που έχουμε δει μέχρι τώρα (μορφή (2.2)) αν τα p και k δεν είναι πρώτα μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $p = r\tilde{p}$ και $k = r\tilde{k}$ και r είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης*

των p, k *(οπότε τα* $\tilde{p}$, $\tilde{k}$ *είναι πρώτα μεταξύ τους), τότε από τον τύπο του γραφήματος* $G_\pi(B)$ *του* B *όπως δίνεται στην (2.5) φαίνεται ότι αυτό αποτελείται από* r *ξεχωριστά κλειστά κυκλικά μονοπάτια μήκους* $\tilde{p}$.
Άρα αυτά μπορούν να γραφούν καλύτερα και σαν

$$
\begin{array}{ccccc}
P_\pi(i) & \longrightarrow & P_\pi(\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})) & \longrightarrow & P_\pi(2\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})) \\
\| & & & & \swarrow \qquad i \in \{1,\ldots,\tilde{p}\} \\
P_\pi(\tilde{p}\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})) & \leftarrow & P_\pi((\tilde{p}-1)\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})) & \leftarrow & \cdots
\end{array}
\tag{3.25}
$$

όπου το κάθε ένα από αυτά θα είναι μία ανακύκλωση από έναν κόμβο στο-ν εαυτό του και θα περνά από όλους τους κόμβους του $G_\pi(B)$. *Άρα για κάθε* $i \in \{1,\ldots,\tilde{p}\}$ *ο τύπος (3.25) είναι ουσιαστικά το ίδιο μονοπάτι και αποτελεί ολόκληρο το* $G_\pi(B)$. *Τα παραπάνω χρησιμοποιόντας το Θεώρημα 2.2 μας οδηγούν στα εξής συμπεράσματα.*

- *Ο* B *δεν είναι* p*-κυκλικός.*
- *Αντίθετα με το προηγούμενο ο* B *είναι* $\tilde{p}$*-κυκλικός και ο* $B^{\tilde{p}}$ *είναι διαγώνιος με διαγώνιους υποπίνακες τους*

$$\tilde{\tilde{B}}_{ii} = B_{i,\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})} B_{\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p}),2\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})} \cdots B_{(\tilde{p}-1)\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p}),i}, \; i \in \{1,\ldots,\tilde{p}\}, \tag{3.26}$$

  όπου οι $B_{i,\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})}$, $B_{\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p}),\ 2\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p})}$, $\ldots$, $B_{(\tilde{p}-1)\tilde{k}+i(\mathrm{mod}\tilde{p}),i}$ *είναι όλοι οι μη μηδενικοί υποπίνακες του* B, $\forall\ i \in \{1,\ldots,\tilde{p}\}$.

Επομένως τον $GCO(p-k,k)$ *πίνακα μπορούμε να τον θεωρούμε από τώρα και στο εξής σαν* $GCO(\tilde{p}-\tilde{k},\tilde{k})$ $\tilde{p}$*-κυκλικό πίνακα, επαναδιαχωρίζοντάς τον.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, στο εξής όταν αναφερόμαστε σε GCO(p-k,k)πίνακες, θα εννοούμε ότι τα p, k, είναι πρώτα μεταξύ τους, ο τύπος (2.5) θα αποτελεί ολόκληρο το γράφημα $\mathbf{G_\pi(B)}$ ***και θα σχηματίζει μία ακριβώς ανακύκλωση του κάθε κόμβου στον εαυτό του.***

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα επαναδιαχωρισμού, όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 3.1.

Παράδειγμα 3.1 *Έστω ότι ο πίνακας* A, *είναι* $GCO(3,6)$. *Σύμφωνα με την*

Παρατήρηση 3.1 ο A είναι και 3-κυκλικός $GCO(1,2)$. Έχουμε δηλαδή

$$B = \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & B_{1,7} & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & B_{2,8} & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O & B_{3,9} \\ B_{4,1} & O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & B_{5,2} & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & B_{6,3} & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & B_{7,4} & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & B_{8,5} & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & B_{9,6} & O & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & \check{B}_{1,3} \\ \check{B}_{2,1} & O & O \\ O & \check{B}_{3,2} & O \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Με $\check{B}_{1,3} = \begin{bmatrix} B_{1,7} & O & O \\ O & B_{2,8} & O \\ O & O & B_{3,9} \end{bmatrix}$, $\check{B}_{2,1} = \begin{bmatrix} B_{4,1} & O & O \\ O & B_{5,2} & O \\ O & O & B_{6,3} \end{bmatrix}$ *και*
$\check{B}_{3,2} = \begin{bmatrix} B_{7,4} & O & O \\ O & B_{8,5} & O \\ O & O & B_{9,6} \end{bmatrix}$.
Παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες του B στη μορφή που τον θεωρούμε $GCO(1,2)$, στη σχέση (3.27), είναι τετραγωνικοί.

Τώρα λοιπόν μπορούμε να ξεκινήσουμε την αναζήτηση για την εύρεση σχέσης αντίστοιχης με αυτήν του Θεωρήματος 3.1 στη γενικότερη περίπτωση πίνακα της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \dots & O & A_{1,k+1} & O & \dots & O \\ O & A_{2,2} & \dots & O & O & A_{2,k+2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & & \dots & \dots & \dots & A_{p-k,p} \\ A_{p-k+1,1} & O & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ O & O & \dots & A_{p,k} & O & O & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

όπου $k \in \{1, \dots, p-1\}$, τα p, k είναι πρώτα μεταξύ τους και οι $A_{i,i}$ είναι τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι υποπίνακες του A. Δηλαδή ο A είναι p-κυκλικός $GCO(p-k,k)$.
Για $k=1$ έχω την ειδική περίπτωση πίνακα του Κεφαλαίου 3.1.

Όπως ακριβώς και στο Κεφάλαιο 3.1 αρχίζουμε ορίζοντας την (D,L,U)

διάσπαση του πίνακα A. Έχουμε λοιπόν $A = D - L - U$ και

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \dots & O \\ O & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \dots & O & A_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

$$-L = \begin{bmatrix} O & \dots & & O \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ A_{p-k+1,1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ O & & A_{p,k} \ \dots & O \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

$$-U \ = \begin{bmatrix} O & \dots & A_{1,k+1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ O & & & & A_{p-k,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ O & O & \dots & & O \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Επίσης έχουμε $E = D^{-1}L$ και $F = D^{-1}U$ με τον block Jacobi πίνακα B του A να είναι $B = E + F$ και

$$E = \begin{bmatrix} O & \dots & \dots & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ B_{p-k+1,1} & \dots & \dots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & B_{p,k} & \dots & O \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$F \ = \begin{bmatrix} O & \dots & B_{1,k+1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ddots & O & B_{p-k,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \dots & O \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Για τον A λοιπόν στην (3.28) το αντίστοιχο θεώρημα του 3.1 είναι το:

Θεώρημα 3.3 *Έστω ό,τι ο A είναι GCO(p-k,k) πίνακας, δηλαδή όπως στην (3.28), με αντιστρέψιμους διαγώνιους υποπίνακες. Εάν $\omega \neq 0$ και $\lambda \neq 0$*

είναι μια ιδιοτιμή του block *επαναληπτικού πίνακα* $\mathcal{L}_\omega$ *της* SOR *μεθόδου που αντιστοιχεί στον* A, *τότε το* μ *που ικανοποιεί την*

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^k \omega^p \mu^p, \tag{3.34}$$

είναι ιδιοτιμή του block Jacobi *πίνακα* B. *Αντίστροφα αν* μ *είναι ιδιοτιμή του* block Jacobi *πίνακα* B *του* A *και* $\lambda \neq 0$ *ικανοποιεί την (3.34), τότε η* λ *είναι ιδιοτιμή του* $\mathcal{L}_\omega$.

Απόδειξη: Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τα ίδια με αυτά στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Ο $\mathcal{L}_\omega$ είναι όπως στην (3.9). Επίσης αν λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$ και y το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η ισοδυναμία $\mathcal{L}_\omega y = \lambda y \Leftrightarrow (\lambda + \omega - 1)y = (\lambda\omega E + \omega F)y$, που όπως είδαμε από τις (3.10) και (3.11), θα μας οδηγήσει στην αντίστοιχη ισότητα της (3.12), που είναι

$$\begin{bmatrix} (\lambda+\omega-1)I_1 & O & \dots & O \\ O & (\lambda+\omega-1)I_2 & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & & & (\lambda+\omega-1)I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & \omega B_{1,k+1} & O & \dots & O \\ O & O & \dots & O & O & \omega B_{2,k+2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & & O & O & \dots & \omega B_{p-k,p} \\ \lambda\omega B_{p-k+1,1} & O & \dots & & & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & \lambda\omega B_{p,k} & O & O & \dots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Όπως προηγουμένως όλες οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$, είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου

$$\phi(t) = \det(tI - \mathcal{L}_\omega\ ), \tag{3.36}$$

το οποίο, από τις (3.10) και (3.11), είναι ίσο με

$$\phi(t) = \det\left((t + \omega - 1)I - t\omega E - \omega F\right). \tag{3.37}$$

Παρατηρούμε από την Πρόταση 2.1 ότι οι πίνακες

$$\tilde{B}_{ii} := B_{i,k+i(\mathrm{mod}p)} B_{k+i(\mathrm{mod}p),2k+i(\mathrm{mod}p)} \dots B_{(p-1)k+i(\mathrm{modp}),i},$$

είναι οι διαγώνιοι υποπίνακες του B^p. Επίσης, αν

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & \omega B_{1,k+1} & O & \dots & O \\ O & O & \dots & O & O & \omega B_{2,k+2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & & O & O & \dots & \omega B_{p-k,p} \\ \lambda\omega B_{p-k+1,1} & O & \dots & & & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & \lambda\omega B_{p,k} & O & O & \dots & O \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

τότε πάλι από την Πρόταση 2.1 εφαρμοσμένη στον $\tilde{B}$ έχουμε ότι

$$\tilde{B}^p = \lambda^k \omega^p B^p. \tag{3.39}$$

Η (3.39) μας οδηγεί στην

$$\sigma(\tilde{B}) = \sigma(\lambda^{k/p}\omega B), \tag{3.40}$$

η απόδειξη της οποίας είναι ίδια με αυτήν της (3.19). Συνδυάζοντας τώρα την (3.37) με την (3.40) έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{L}_\omega$ είναι

$$\phi(t) = \det\left((t+\omega-1)I - t^{k/p}\omega B\right). \tag{3.41}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Romanovski, Θεώρημα 3.2, στον B, οπότε για $t \neq 0$ παίρνουμε από την (3.41) το πολυώνυμο

$$\phi(t) = (t+\omega-1)^m \prod_{i=1}^{r} \left((t+\omega-1)^p - t^k \omega^p \mu_i^p\right), \tag{3.42}$$

όπου $n \times n$ είναι η διάσταση του B, $m + rp = n$ και τα μ_i είναι οι ιδιοτιμές του B και είναι μη μηδενικές όταν $r \geq 1$. Οι ρίζες του (3.42) μας δίνουν όλες τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$. Ακολουθώντας τώρα ακριβώς τα βήματα (i) και (ii) της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1 αλλά χρησιμοποιώντας, όπου χρειάζεται, αντί για τους τύπους (3.7), (3.20), (3.22), τους (3.34), (3.41), (3.42), αντίστοιχα, ολοκληρώνεται η απόδειξή μας. □

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα πρέπει να πούμε ότι το Θεώρημα 3.3 που ουσιαστικά είναι η γενική περίπτωση του Θεωρήματος 3.1, αποδεικνύεται από τους Verner και Bernal στο [VeBe68], ενώ υπάρχει και στον Varga [Va].

4 Περιοχές σύγκλισης της Block SOR μεθόδου για p-κυκλικούς πίνακες

Σ' αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με το πρόβλημα του καθορισμού των περιοχών σύγκλισης της SOR μεθόδου για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων της μορφής $Ax = b$, όπου ο A είναι ένας block p-κυκλικός πίνακας της μορφής (3.28), δηλαδή $GCO(p-k, k)$ με $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ και p, k πρώτα μεταξύ τους. Για τον A ισχύουν, λοιπόν, όλα όσα αναφέρονται στο Κεφάλαιο 3.2.

Έστω τώρα ότι με $\sigma(\cdot)$ συμβολίζουμε το φάσμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα και με $\rho(\cdot)$ τη φασματική του ακτίνα. Θέτουμε $\nu = \rho(B)$, όπου B είναι ο block Jacobi πίνακας του A (βλέπε (2.3)).

Το ερώτημα που τίθεται πλέον είναι το ακόλουθο:

Για ποιά σημεία (ν, ω) του $(\nu, \omega)-$επιπέδου, όλες οι ρίζες του πολυωνύμου με μεταβλητή το λ που προκύπτει από την (3.34) βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, πράγμα που μας εξασφαλίζει λόγω του Θεωρήματος 3.3 ότι όλες οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$ είναι απόλυτα μικρότερες της μονάδας

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1, \tag{4.1}$$

δηλαδή ότι μέθοδος SOR για τον A συγκλίνει;

Για ένα συγκεκριμένο $\omega \in (0, 2)$, ορίζουμε

$$f(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^p - \lambda^k \omega^p \mu^p \tag{4.2}$$

και

$$g(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^p. \tag{4.3}$$

Σ' αυτό το σημείο κάνουμε μία παρένθεση και παραθέτουμε ένα θεώρημα που μας είναι γνωστό από τη Μιγαδική Ανάλυση και είναι απολύτως απαραίτητο για την εύρεση των περιοχών σύγκλισης της SOR μεθόδου. (βλ. [He])

Θεώρημα 4.1 ***(Rouché)*** *Έστω ότι οι f, g είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε απλά συνεκτικό τόπο Ω. Αν $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$ για όλα τα σημεία z μιας απλής κλειστής κατά τμήματα λείας καμπύλης γ, η οποία βρίσκεται μέσα στο Ω, τότε η f και η g έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στη γ (μετρώντας και τις πολλαπλότητες).*

Στην περίπτωσή μας θέτουμε $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Προφανώς οι $f(\lambda)$ και $g(\lambda)$ είναι αναλυτικές στο Ω σύμφωνα με τους ορισμούς τους στις (4.2) και

(4.3), αντίστοιχα. Η $g(\lambda)$ έχει όλες τις ρίζες της στο εσωτερικό του Ω και άρα προκύπτει από το Θεώρημα Rouché ότι για κάθε $\nu \geq 0$ για το οποίο ισχύει

$$|f(\lambda) - g(\lambda)| = |\lambda|^{p-k}\omega^p\nu^p < |\lambda + \omega - 1|^p = |g(\lambda)|, \quad \forall \lambda \in \partial\Omega, \tag{4.4}$$

όπου με $\partial\Omega$ συμβολίζεται το σύνορο του συνόλου Ω, οι $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ θα έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο Ω. Όμως εφόσον η f είναι πολυώνυμο του ίδιου βαθμού με την g, τότε $\forall \nu \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.4), η f θα έχει όλες τις ρίζες της μέσα στο Ω, δηλαδή θα έχουμε

$$\sigma(\mathcal{L}_\omega) \subset \Omega \Leftrightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1. \tag{4.5}$$

Η ανισότητα (4.4) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$\omega^p\nu^p < \min_{\lambda \in \partial\Omega} \frac{|\lambda + \omega - 1|^p}{|\lambda|^{p-k}}. \tag{4.6}$$

Όμως επειδή $\lambda \in \partial\Omega$ συνεπάγεται ότι $|\lambda|^{p-k} = 1$ και η (4.6) γίνεται

$$\omega^p\nu^p < \min_{\lambda \in \partial\Omega} |\lambda + \omega - 1|^p \tag{4.7}$$

Αντικαθιστώντας το $\lambda \in \partial\Omega$ με $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $y^2 = 1 - x^2$, στην (4.7) έχουμε

$$\begin{aligned} |\lambda + \omega - 1|^p &= |(x + \omega - 1) + iy|^p = \\ = ((x + \omega - 1)^2 + 1 - x^2)^{\frac{p}{2}} &= [1 + (\omega - 1)^2 + 2(\omega - 1)x]^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε τελικά ότι η (4.4) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$\omega^p\nu^p < \min_{x \in [-1,1]} h(x, \omega), \tag{4.8}$$

όπου

$$h(x, \omega) := [1 + (\omega - 1)^2 + 2(\omega - 1)x]^{\frac{p}{2}}. \tag{4.9}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την (4.8) για να βρούμε τα $\nu \geq 0$ για τα οποία ισχύει η (4.4) και καταλήγουμε στο θεώρημα που παραθέτουμε και το οποίο δίνει τα τελικά συμπεράσματα για τον καθορισμό των ακριβών περιοχών σύγκλισης της SOR μεθόδου για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων της μορφής $Ax = b$, όπου ο A είναι ένας block p-κυκλικός πίνακας της μορφής (2.2), δηλαδή $GCO(p - k, k)$.

Πριν την παράθεση του θεωρήματος εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε εφεξής στην εργασία μας.

Συμβολισμός: Το σύμβολο $\sim$ θα χρησιμοποιείται σαν σύμβολο διμελούς σχέσης

$$A \sim B,$$

για να δηλώσει ότι οι ποσότητες A, B το ίδιο πρόσημο.

Θεώρημα 4.2 *Έστω A ένας* block *p-κυκλικός πίνακας της μορφής (2.2), δηλαδή $GCO(p-k,k)$, και έστω ότι $\nu = \rho(B)$, όπου B ο* block Jacobi *πίνακας του A. Τότε με δεδομένο ότι $(\nu,\omega) \in R(p)$, έχουμε ότι $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$. Τονίζεται ότι $R(p)$ είναι η περιοχή στο $(\nu,\omega)-$επίπεδο που δίνεται από*

$$R := R(p,k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 < \omega \leq 1, & 0 \leq \nu < 1 \\ 1 \leq \omega < 2, & 0 \leq \nu < \frac{2-\omega}{\omega} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Απόδειξη: Αρκεί να βρούμε για ποια x η συνάρτηση $h(x,\omega)$ ελαχιστοποιείται. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} &= \frac{p}{2}[1+(\omega-1)^2+2(\omega-1)x]^{\frac{p}{2}-1}2(\omega-1) \\ &\sim (\omega-1)[1+(\omega-1)^2+2(\omega-1)x]^{\frac{p}{2}-1} \\ &= (\omega-1)[(x+\omega-1)^2+1-x^2]^{\frac{p}{2}-1} \end{aligned}$$

Επειδή $x \in [-1,1]$ και $\omega \in (0,2)$ έχουμε ότι $(x+\omega-1)^2+1-x^2 > 0$. Άρα

$$\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} \sim (\omega-1) \tag{4.11}$$

Από την (4.11) έχουμε:

(i) Όταν $\omega = 1$ τότε $h(x,\omega) = 1$ $\forall x \in [-1,1]$, οπότε από την (4.8) παίρνουμε

$$\nu < 1, \quad \omega = 1 \tag{4.12}$$

(ii) Όταν $\omega \in (0,1)$, η $h(x,\omega)$ είναι φθίνουσα ($\searrow$) ως προς x στο $[-1,1]$, και άρα παίρνει την ελάχιστη τιμή για $x=1$. Οπότε η (4.8) γίνεται

$$\begin{aligned} \omega^p\nu^p &< h(1,\omega), \quad \omega \in (0,1) \\ &= [1+(\omega-1)^2+2(\omega-1)]^{\frac{p}{2}} \\ &= \omega^p \Leftrightarrow \\ \omega^p\nu^p &< \omega^p, \quad \omega \in (0,1) \Leftrightarrow \\ \nu &< 1, \quad \omega \in (0,1). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Από τις (4.12)-(4.13) έχουμε τελικά ότι

$$\nu < 1, \quad \omega \in (0,1] \tag{4.14}$$

(iii) Όταν $\omega \in (1,2)$, η $h(x,\omega)$ είναι αύξουσα ($\nearrow$) ως προς x στο $[-1,1]$, και άρα παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $x=-1$. Οπότε η (4.8) γίνεται

$$\begin{aligned}
\omega^p \nu^p &< h(-1,\omega), \quad \omega \in (1,2) \\
&= [1+(\omega-1)^2 - 2(\omega-1)]^{\frac{p}{2}} \\
&= ((\omega-2)^2)^{\frac{p}{2}} \\
&= ((2-\omega)^p \;\Leftrightarrow \\
\omega^p \nu^p &< (2-\omega)^p, \quad \omega \in (1,2) \;\Leftrightarrow \\
\nu &< \frac{(2-\omega)}{\omega}, \quad \omega \in (1,2) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε σ' αυτό το σημείο ότι $\lim_{\omega \to 1^+} \frac{(2-\omega)}{\omega} = 1$. Άρα συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα και τις (4.12), (4.15) έχουμε

$$\nu < \frac{(2-\omega)}{\omega}, \quad \omega \in [1,2) \qquad (4.16)$$

Οι (4.14) και (4.16) είναι ισοδύναμες με την (4.4), για $\nu \geq 0$. Οδηγούμαστε έτσι στην ολοκλήρωση της απόδειξης. □

Κλείνοντας το Κεφάλαιο κάνουμε την εξής παρατήρηση:

Παρατήρηση 4.1 *Η περιοχή R όπου $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης για την block SOR επαναληπτική μέθοδο, δεν εξαρτάται από τα p, k του GCO(p-k,k) πίνακα A του γραμμικού συστήματος το οποίο μελετάμε.*

5 Εύρεση σχέσης ιδιοτιμών των Block επαναληπτικών πινάκων Jacobi και SSOR για p-κυκλικούς πίνακες

5.1 Εισαγωγή και διατύπωση της σχέσης των ιδιοτιμών

Ο πίνακας A που θα μας απασχολήσει σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι είναι $GCO(p-k,k)$. Δηλαδή, όπως ο πίνακας (3.28) με διαγώνιους υποπίνακες τετραγωνικούς και p, k πρώτα μεταξύ τους. Άρα ο αντίστοιχος block Jacobi πίνακας B είναι ο

$$
\begin{aligned}
B &= E+F = \\
&= \begin{bmatrix}
O & O & \dots & O & B_{1,k+1} & O & \dots & O \\
O & O & \dots & O & O & B_{2,k+2} & \dots & O \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O & O & \dots & & O & O & \dots & B_{p-k,p} \\
B_{p-k+1,1} & O & \dots & & & O & \dots & O \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
O & O & \dots & B_{p,k} & O & O & \dots & O
\end{bmatrix}, \quad (5.1)
\end{aligned}
$$

όπου E είναι όπως στην (3.32) και F όπως στην (3.33), αυστηρά κάτω και αυστηρά άνω τριγωνικοί πίνακες, αντίστοιχα. Ο block επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου $SSOR$ δίνεται όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο στην (1.24) από την $\mathcal{S}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega$. Συνδυάζοντας αυτό με την (3.9) έχουμε

$$
\mathcal{S}_\omega = (I-\omega F)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega E\right)(I-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega F\right) \qquad (5.2)
$$

Πρόταση 5.1 *Ο $\mathcal{S}_\omega$ είναι όμοιος με τον πίνακα*

$$
\tilde{\mathcal{S}}_\omega = (I-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega E\right)(I-\omega F)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega F\right). \qquad (5.3)
$$

Απόδειξη: Ο $\mathcal{S}_\omega$ είναι όμοιος με τον πίνακα

$$
\begin{aligned}
&(I-\omega F)\ \mathcal{S}_\omega\ (I-\omega F)^{-1} = \\
&= \left((1-\omega)I+\omega E\right)(I-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega F\right)(I-\omega F)^{-1}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Επειδή οι E και F είναι αυστηρά τριγωνικοί, οι $(I-\omega E)^{-1}$, $(I-\omega F)^{-1}$ είναι πολυωνυμικές εκφράσεις των E και F, αντίστοιχα, οι οποίες βρίσκονται παρακάτω στις (5.17) και (5.14) και συνεπώς αντιμετατίθενται, στην (5.4), με τις $(1-\omega)I+\omega E$ και $(1-\omega)I+\omega F$, αντίστοιχα. Επομένως ο $(I-\omega F)\,\mathcal{S}_\omega\,(I-\omega F)^{-1}$ είναι ίσος με τον πίνακα

$$\tilde{\mathcal{S}}_\omega = (I-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega E\right)(I-\omega F)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega F\right) \qquad (5.5)$$

Άρα ο $\mathcal{S}_\omega$ είναι όμοιος με τον $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$. □

Εφεξής θα χρησιμοποιούμε για τους σκοπούς μας τον πίνακα $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ επειδή έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον $\mathcal{S}_\omega$ αλλά είναι πιό πρακτικός στη χρήση του. Ορίζοντας

$$M(C) := (I-\omega C)^{-1}[(1-\omega)I+\omega C] \qquad (5.6)$$

για κάθε αυστηρά τριγωνικό πίνακα C, μπορούμε να γράψουμε τον $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ και σαν

$$\tilde{\mathcal{S}}_\omega = M(E)M(F). \qquad (5.7)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα που δίνει τη σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του block Jacobi πίνακα B και του επαναληπτικού πίνακα της block SSOR μεθόδου, δηλαδή τη σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του B και του πίνακα $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$.

Σημειώνουμε εδώ ότι θα εξεταστεί η περίπτωση όπου για τα k, p ισχύουν τα εξής

$$p = qk + a,\ 1 \le a \le k,\ q \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \qquad (5.8)$$

δηλαδή $k \le p/2$.

Η Γενίκευση όπου το $k \in \{1,\dots,p-1\}$, θα γίνει στο Κεφάλαιο 5.3.

Θεώρημα 5.1 *Έστω ό,τι ο A είναι GCO(p-k,k) πίνακας, δηλαδή όπως στην (3.28), με αντιστρέψιμους διαγώνιους υποπίνακες. Επίσης έστω ότι για τα p, k που είναι πρώτα μεταξύ τους ισχύει και η $k \le p/2$. Τότε*

- *Εάν $\lambda \neq (1-\omega)^2$ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{S}_\omega$ και μ ικανοποιεί τη σχέση*

  $$[\lambda-(\omega-1)^2]^p = \lambda^k[\lambda-(\omega-1)]^{p-2k}(2-\omega)^{2k}\omega^p\mu^p, \qquad (5.9)$$

  τότε το μ είναι ιδιοτιμή του block Jacobi *πίνακα B.*

- *Αντίστροφα, εάν μ είναι ιδιοτιμή του B και $\lambda \neq (1-\omega)^2$ ικανοποιεί την (5.9), τότε η λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{S}_\omega$.*

5.2 Απόδειξη Θεωρήματος 5.1

Έχουμε

$$\omega F = \begin{bmatrix} O & \dots & \omega B_{1,k+1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ O & & & & \omega B_{p-k,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ O & O & \dots & & O \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

και για $m \leq q$

$$(\omega F)^m = \tag{5.11}$$

$$= \begin{bmatrix} O & \dots & \omega^m (B_{1,k+1} B_{k+1,2k+1} \cdots B_{(m-1)k+1,mk+1}) & \dots & O \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ O & & & & \omega^m (B_{y,k+y} \cdots B_{(m-1)k+y,mk+y}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ O & \dots & & \dots & O \end{bmatrix}$$

όπου $y = (q-m)k + a = p - mk$. Επίσης ισχύει ότι

$$(\omega F)^{q+1} = O, \tag{5.12}$$

οπότε λόγω της (5.12) έχουμε

$$(I - \omega F)[I + \omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q] = I^{q+1} - (\omega F)^{q+1} = I. \tag{5.13}$$

Άρα

$$(I - \omega F)^{-1} = [I + \omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q]. \tag{5.14}$$

Επιπλέον έχουμε

$$(\omega E)^2 = O, \tag{5.15}$$

και λόγω της (5.15)

$$(I - \omega E)(I + \omega E) = I^2 - (\omega E)^2 = I. \tag{5.16}$$

Άρα

$$(I - \omega E)^{-1} = (I + \omega E). \tag{5.17}$$

Αντικαθιστώντας το δεύτερο μέλος της (5.17) στην $M(E)$ και κάνοντας πράξεις έχουμε

$$M(E) = (I + \omega E)[(1-\omega)I + \omega E] = [(1-\omega)I + (2-\omega)\omega E] \tag{5.18}$$

Αντικαθιστώντας, αντίστοιχα, το δεύτερο μέλος της (5.14) στην $M(F)$ και κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} M(F) &= [I + \omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q][(1-\omega)I + \omega F] \\ &= \left[(1-\omega)I + (2-\omega)\left(\omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Από τις (5.19) και (5.18) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_\omega &= M(E)M(F) \\ &= [(1-\omega)I + (2-\omega)\omega E] \\ &\quad \times \left[(1-\omega)I + (2-\omega)\left(\omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q\right)\right] \\ &= (1-\omega)^2 I + (2-\omega)(1-\omega)[\omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q] \\ &\quad + (2-\omega)(1-\omega)\omega E + (2-\omega)^2\omega E[\omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q] \end{aligned} \tag{5.20}$$

Για πρακτικούς λόγους θέτουμε

$$\sigma := (2-\omega)(1-\omega) \tag{5.21}$$

και

$$\tilde{F} := \omega F + (\omega F)^2 + \ldots + (\omega F)^q. \tag{5.22}$$

Άρα η (5.20) γίνεται

$$\tilde{\mathcal{S}}_\omega = M(E)M(F) = \sigma(\omega E + \tilde{F}) + \omega(2-\omega)^2 E\tilde{F} + (1-\omega)^2 I \tag{5.23}$$

Έστω τώρα ότι λ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ και X το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_\omega X &= \lambda X \overset{(5.23)}{\Longleftrightarrow} \\ \Longleftrightarrow \left[\sigma(\omega E + \tilde{F}) + \omega(2-\omega)^2 E\tilde{F}\right] X &= \left(\lambda - (1-\omega)^2\right) X. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Θέτοντας

$$\tau = \lambda - (1-\omega)^2 \neq 0, \tag{5.25}$$

που είναι μία από τις υποθέσεις του θεωρήματος, έχουμε

$$\sigma + \tau = \lambda + 1 - \omega. \tag{5.26}$$

Διασπώντας τώρα την (5.24) σε δύο άλλες σχέσεις, τις

$$\sigma\tilde{F}X = \tau \begin{bmatrix} Y_1 \\ - \\ O \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

και

$$\left[\sigma\omega E + \omega(2-\omega)^2 E\tilde{F}\right] X = \tau \begin{bmatrix} O \\ - \\ Y_2 \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} Y_1 \\ - \\ Y_2 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

με το Y_1 να αποτελείται από τις πρώτες $p-k$ block συνιστώσες ενώ το Y_2 από τις υπόλοιπες k block συνιστώσες του X.
Η (5.27) ισχύει διότι οι τελευταίες k block γραμμές του πίνακα $\sigma\tilde{F}$ είναι μηδενικές. Αντίστοιχα, η (5.28) ισχύει διότι οι πρώτες $p-k$ block γραμμές του πίνακα $\left[\sigma\omega E + \omega(2-\omega)^2 E\tilde{F}\right]$ είναι μηδενικές.
Θέτοντας $X = [X_1^T X_2^T \dots X_i^T]^T$, όπου X_i διάνυσμα με n_i, $i = 1(1)p$, ($\sum_{i=1}^{p} n_i = n$), συνιστώσες αντίστοιχα, η (5.27) αναλύεται στις εξής εξισώσεις

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} a \\ \text{εξ/σεις} \end{array}
\begin{cases}
\sigma \sum_{j=0}^{q-1} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{ik+1,(i+1)k+1}\right] X_{(j+1)k+1} = \tau X_1 & (5.30._{[(q-1)k+a]}) \\
\vdots & \vdots \\
\sigma \sum_{j=0}^{q-1} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{ik+a,(i+1)k+a}\right] X_{(j+1)k+a} = \tau X_a & (5.30._{[(q-1)k+1]})
\end{cases} \\[2em]
\begin{array}{c} k \\ \text{εξ/σεις} \end{array}
\begin{cases}
\sigma \sum_{j=0}^{q-2} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{ik+a+1,(i+1)k+a+1}\right] X_{(j+1)k+a+1} = \tau X_{a+1} & (5.30._{[(q-1)k]}) \\
\vdots & \vdots \\
\sigma \sum_{j=0}^{q-2} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{(i+1)k+a,(i+2)k+a}\right] X_{(j+2)k+a} = \tau X_{a+k} & (5.30._{[(q-2)k+1]})
\end{cases} \\[2em]
\vdots \\[2em]
\begin{array}{c} k \\ \text{εξ/σεις} \end{array}
\begin{cases}
\sigma \sum_{j=0}^{1} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{(i+q-3)k+a+1,(i+q-2)k+a+1}\right] X_{(j+q-2)k+a+1} = \tau X_{(q-3)k+a+1} & (5.30._{2k}) \\
\vdots & \vdots \\
\sigma \sum_{j=0}^{1} \omega^{j+1} \left[\prod_{i=0}^{j} B_{(i+q-2)k+a,(i+q-1)k+a}\right] X_{(j+q-1)k+a} = \tau X_{(q-2)k+a} & (5.30._{(k+1)})
\end{cases} \\[2em]
\begin{array}{c} k \\ \text{εξ/σεις} \end{array}
\begin{cases}
\sigma\omega B_{(q-2)k+a+1,(q-1)k+a+1} X_{(q-1)k+a+1} = \tau X_{(q-2)k+a+1} & (5.30._{k}) \\
\vdots & \vdots \\
\sigma\omega B_{(q-1)k+a,qk+a} X_{qk+a} = \tau X_{(q-1)k+a} & (5.30._{1})
\end{cases}
\end{array}
\tag{5.30}
$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε $q-1$ k-άδες εξισώσεων, όπου η κάθε k-άδα έχει τον ίδιο αριθμό όρων στο άθροισμα κάθε εξίσωσής της. Έχουμε επίσης και a εξισώσεις με q όρους η κάθε μία στο άθροισμά της.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι εξισώσεις $(5.30._{\,mk+\delta})$, με δ να είναι

$$\delta \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq \delta \leq k \tag{5.31}$$

και m

$$m \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq m < q-1, \tag{5.32}$$

είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δίνονται από τον τύπο

$$
\begin{array}{c}
\frac{\sigma\omega^{m+1}}{\tau^{m+1}}(\sigma+\tau)^m \left(\prod_{i=0}^{m} B_{[q-(m+1)+i]k+a-\delta+1,(q-m+i)k+a-\delta+1}\right) \times \\
\times X_{qk+a-\delta+1} \;=\; X_{[q-(m+1)]k+a-\delta+1} \qquad (5.33._{mk+\delta})
\end{array}
\tag{5.33}
$$

Για τυχαίο $\delta \in \{1,\ldots,k\}$. Θα δείξουμε την προαναφερθείσα ισοδυναμία με

επαγωγή ως προς m.
Επαγωγή:

(i) Για $m = 1$, αντικαθιστώντας την $(5.30.\delta)$ στην $(5.30.k+\delta)$, η τελευταία γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{\sigma\omega^2}{\tau^2}(\sigma+\tau)(B_{(q-2)k+a-\delta+1,(q-1)k+a-\delta+1}B_{(q-1)k+a-\delta+1,qk+a-\delta+1})\times&\\ \times X_{qk+a-\delta+1} \ = \ X_{(q-2)k+a-\delta+1}.&\end{aligned} \tag{5.34}$$

Οπότε η $(5.30.k+\delta)$ είναι ισοδύναμη με την $(5.33.k+\delta)$ για $\delta \in \{1,\ldots,k\}$.

(ii) Έστω ότι η $(5.30.mk+\delta)$ είναι ισοδύναμη με την $(5.33.mk+\delta)$ για κάθε $m \in \{1,\cdots,\phi\}$, όπου $\phi \in \mathbb{N}$, $\phi < q-2$. Θα δείξουμε ότι η ισοδυναμία ισχύει και για $m = \phi+1$, οπότε θα έχουμε τελειώσει την επαγωγή. Αντικαθιστούμε λοιπόν στην $(5.30.((\phi+1)k+\delta))$ τις $(5.30.\delta)$, $(5.30.(k+\delta))$, έως $(5.30.(\phi k+\delta))$. Η $(5.30.((\phi+1)k+\delta))$ γίνεται

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\sigma\omega}{\tau}\frac{\sigma\omega^{\phi+1}}{\tau^{\phi+1}}(\sigma+\tau)^{\phi}+\frac{\sigma\omega^2}{\tau}\left(\frac{\sigma\omega^{\phi}}{\tau^{\phi}}(\sigma+\tau)^{\phi-1}\right)+\ldots+\frac{\sigma\omega^{\phi}}{\tau}\times\right.\\ &\left.\times\left(\frac{\sigma\omega^2}{\tau^2}(\sigma+\tau)\right)+\frac{\sigma\omega^{\phi+1}}{\tau}\frac{\sigma\omega}{\tau}+\frac{\sigma\omega^{\phi+2}}{\tau}\right]\times\\ &\times\left(\prod_{i=0}^{\phi+1}B_{[q-\phi-2+i]k+a-\delta+1,(q-\phi-1+i)k+a-\delta+1}\right)\ X_{qk+a-\delta+1} \ = \\ &= X_{(q-\phi-2)k+a-\delta+1} \quad \Longleftrightarrow\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sigma\omega^{\phi+2}}{\tau^{\phi+2}}(\sigma+\tau)^{\phi+1}\left(\prod_{i=0}^{\phi+1}B_{[q-\phi-2+i]k+a-\delta+1,(q-\phi-1+i)k+a-\delta+1}\right)\times\\ &\times X_{qk+a-\delta+1} \ = \ X_{(q-\phi-2)k+a-\delta+1}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

Επομένως η εξίσωση στην (5.35) είναι ισοδύναμη με την $(5.30.((\phi+1)k+\delta))$. Όμως αυτή δεν είναι άλλη από την $(5.33.mk+\delta)$ για $m = \phi+1$. Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγή.

Επεκτείνοντας τώρα τα συμπεράσματα της επαγωγής και για $m = q-1$, με επιλογή του $\delta \in \{1,\ldots,a\}$, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι a εξισώσεις, από $(5.30.[(q-1)k+1])$ έως και $(5.30.[(q-1)k+a])$ είναι επίσης ισοδύναμες με τις αντίστοιχες που δίνονται από τον τύπο (5.33). Επίσης θέτοντας στον (5.33) $m = 0$ παίρνουμε τις εξισώσεις από $(5.30.1)$ έως $(5.30.k)$.

Συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα σε μία πρόταση έχουμε

Πρόταση 5.2 *Οι σχέσεις (5.30.$mk+\delta$) είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες (5.33.$mk+\delta$) όταν*

- $$m \in \{0, \dots, q-2\} \quad \textit{και} \quad \delta \in \{1, \dots, k\}, \tag{5.36}$$

- *ή όταν*
$$m = q-1 \quad \textit{και} \quad \delta \in \{1, \dots, a\}. \tag{5.37}$$

Η σχέση λοιπόν

$$\sigma \tilde{F} X = \tau \begin{bmatrix} Y_1 \\ - \\ O \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

με διαδοχικές αντικαταστάσεις μας δίνει τις (5.33).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι σχέσεις που προκύπτουν αναλύοντας την (5.28). Αυτές είναι οι

$$\begin{array}{c} \sigma\omega B_{p-k+1,1} X_1 + (2-\omega)^2 \sum_{j=1}^{q} \omega^{j+1} B_{p-k+1,1} [\prod_{i=1}^{j} B_{(i-1)k+1,ik+1}] \times \\ \times X_{jk+1} = \tau X_{p-k+1} \end{array} \tag{5.39.1}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{c} \sigma\omega B_{p-k+a,a} X_a + (2-\omega)^2 \sum_{j=1}^{q} \omega^{j+1} B_{p-k+a,a} [\prod_{i=1}^{j} B_{(i-1)k+a,ik+a}] \times \\ \times X_{jk+a} = \tau X_{p-k+a} \end{array} \tag{5.39.a}$$

$$\begin{array}{c} \sigma\omega B_{p-k+a+1,a+1} X_{a+1} + \\ +(2-\omega)^2 \sum_{j=1}^{q-1} \omega^{j+1} B_{p-k+a+1,a+1} [\prod_{i=1}^{j} B_{(i-1)k+a+1,ik+a+1}] \times \\ \times X_{jk+a} = \tau X_{p-k+a+1} \end{array} \tag{5.39.$a+1$}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{c} \sigma\omega B_{p,k} X_k + (2-\omega)^2 \sum_{j=1}^{q-1} \omega^{j+1} B_{p,k} [\prod_{i=1}^{j} B_{ik,(i+1)k}] \times \\ \times X_{(j+1)k} = \tau X_p \ . \end{array} \tag{5.39.k}$$

(5.39)

Παρατηρούμε ότι οι πρώτες a από αυτές έχουν $q+1$ όρους στα αθροίσματά τους ενώ οι υπόλοιπες $k-a$ έχουν q όρους.

Για $s \in \{1, \dots, k\}$ αντικαθιστούμε στη σχέση (5.39.s) τα X_{jk+p}, όπου $j = 0$ έως $q-1$ αν $s \le a$, ή $j = 0$ έως $q-2$ αν $s > a$, με τα ίσα τους από τις αντίστοιχες σχέσεις ($5.33.(jk+a+1-s)$), οπότε αυτή γίνεται

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\sigma^2\omega^{q+1}}{\tau^q}(\sigma+\tau)^{q-1}+\sigma(2-\omega)^2\omega^{q+1}\textstyle\sum_{i=1}^{q-1}\dfrac{(\sigma+\tau)^{i-1}}{\tau^i}+\\&+\omega^{q+1}(2-\omega)^2\Big]\textstyle\prod_{i=1}^{q}B_{p-k+s,s}B_{(i-1)k+s,ik+s}X_{qk+s}=\tau X_{p-k+s},\end{aligned}\tag{5.40}$$

εάν $s\leq a$ ή

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\sigma^2\omega^{q+1}}{\tau^q}(\sigma+\tau)^{q-1}+\sigma(2-\omega)^2\omega^{q+1}\textstyle\sum_{i=1}^{q-1}\dfrac{(\sigma+\tau)^{i-1}}{\tau^i}+\\&+\omega^{q+1}(2-\omega)^2\Big]\textstyle\prod_{i=1}^{q-1}B_{p-k+s,s}B_{(i-1)k+s,ik+s}X_{(q-1)k+s}=\tau X_{p-k+s},\end{aligned}\tag{5.41}$$

εάν $s>a$.
Εκτελώντας πράξεις στις (5.40), (5.41), βρίσκεται ότι είναι ίσες με τις

$$\begin{aligned}\omega^{q+1}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-1}\textstyle\prod_{i=1}^{q}B_{p-k+s,s}B_{(i-1)k+s,ik+s}X_{qk+s}&=\\=\tau^{q+1}X_{p-k+s},&\end{aligned}\tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}\omega^{q}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-2}\textstyle\prod_{i=1}^{q-1}B_{p-k+s,s}B_{(i-1)k+s,ik+s}X_{(q-1)k+s}&=\\=\tau^{q}X_{p-k+s},&\end{aligned}\tag{5.43}$$

αντίστοιχα. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω οι (5.39) είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{q+1}}{\tau^{q+1}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-1}\textstyle\prod_{i=1}^{q}B_{p-k+1,1}B_{(i-1)k+1,ik+1}X_{qk+1}&=\\=X_{p-k+1}&\end{aligned}\tag{5.44.1}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{q+1}}{\tau^{q+1}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-1}\textstyle\prod_{i=1}^{q}B_{p-k+a,a}B_{(i-1)k+a,ik+a}X_{qk+a}&=\\=X_{p-k+a}&\end{aligned}\tag{5.44.a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{q}}{\tau^{q}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-2}\textstyle\prod_{i=1}^{q-1}B_{p-k+a+1,a+1}B_{(i-1)k+a+1,ik+a+1}X_{(q-1)k+a}&=\\=X_{p-k+a+1}&\end{aligned}\tag{5.44.$a+1$}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{q}}{\tau^{q}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-2}\textstyle\prod_{i=1}^{q-1}B_{p,k}B_{ik,(i+1)k}X_{qk}&=\\=X_{p}&\end{aligned}\tag{5.44.k}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο πίνακας του συστήματος των εξισώσεων (5.44) που έχει διαμορφωθεί, είναι GCO(a,k) με a, k πρώτα μεταξύ τους, και έχει μη μηδενικούς υποπίνακες τους

$$\frac{\omega^{m+1}}{\tau^{m+1}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{m-1}\tilde{B}_{s,((m-n+1)k+s-a)}, \tag{5.45}$$

με

$$\tilde{B}_{s,((m-n+1)k+s-a)} := \prod_{i=1}^{m} B_{p-k+s,s}B_{(i-1)k+s,ik+s} \tag{5.46}$$

όπου $s \in \{1,\dots,k\}$ και $m=q$ όταν $s \leq a$ διαφορετικά $m=q-1$. Οπότε το σύστημα (5.44) γράφεται αλλιώς ως

$$\tilde{B} = \left[\begin{array}{cccccccc}
O & O & \dots & O & \nu_1\tilde{B}_{1,k-a+1} & O & \dots & O \\
O & O & \dots & O & O & \nu_1\tilde{B}_{2,k-a+2} & \dots & O \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O & O & \dots & & O & O & \dots & \nu_1\tilde{B}_{a,k} \\
\nu_2\tilde{B}_{a+1,1} & O & \dots & & & O & \dots & O \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
O & O & \dots & \nu_2\tilde{B}_{k,k-a} & O & O & \dots & O
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} X_{p-k+1} \\ X_{p-k+2} \\ \vdots \\ X_{p-k+a} \\ X_{p-k+a+1} \\ \vdots \\ X_p \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} X_{p-k+1} \\ X_{p-k+2} \\ \vdots \\ X_{p-k+a} \\ X_{p-k+a+1} \\ \vdots \\ X_p \end{array}\right] \tag{5.47}$$

με

$$\nu_1 := \frac{\omega^{q+1}}{\tau^{q+1}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-1}, \tag{5.48}$$

$$\nu_2 := \frac{\omega^{q}}{\tau^{q}}(2-\omega)^2\lambda(\sigma+\tau)^{q-2}. \tag{5.49}$$

Άρα από την Πρόταση 2.1 έχουμε ότι ο $\tilde{B}^k$ είναι διαγώνιος. Επίσης οι διαγώνιοι υποπίνακες του $\tilde{B}^k$ μας δίνουν

$$\nu_1^a\ \nu_2^{k-a}\ \dot{B}_{ii}X_{p-k+i}\ =\ X_{p-k+i}, \tag{5.50}$$

όπου

$$\dot{B}_{ii} := \tilde{B}_{i,k-a+i(\mathrm{mod}k)}\dots\tilde{B}_{(k-1)(k-a)+i(\mathrm{mod}k),i}. \tag{5.51}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι τα $\dot{B}_{ii}$, εφόσον αρχίζουν και τελειώνουν με τον ίδιο δείκτη και είναι γινόμενα υποπινάκων του αρχικού μας πίνακα B, θα είναι αναγκαστικά διαγώνιοι υποπίνακες αυτού του πίνακα υψωμένου στην p δύναμη. Δηλαδή

$$\dot{B}_{ii} = B_{p-k+i,i} B_{i,k+i(\mathrm{mod}p)} \dots B_{(p-2)k+i(\mathrm{mod}p),(p-1)k+i(\mathrm{mod}p)}. \tag{5.52}$$

Υπολογίζοντας το γινόμενο $\nu_1^a\ \nu_2^{k-a}$ που βρίσκεται στην παράσταση (5.50)

$$\begin{aligned} \nu_1^a\ \nu_2^{k-a} &= \\ &= \frac{\omega^{(q+1)a}}{\tau^{(q+1)a}}(2-\omega)^{2a}\lambda^a(\sigma+\tau)^{(q-1)a} \times \\ &\quad \times \frac{\omega^{q(k-a)}}{\tau^{q(k-a)}}(2-\omega)^{2(k-a)}\lambda^{k-a}(\sigma+\tau)^{(q-2)(k-a)} \\ &= \frac{\omega^p}{\tau^p}(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\sigma+\tau)^{p-2k}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Τώρα αν υποθέσουμε ότι κάποιο από τα X_{p-k+i}, $i \in \{1,\dots,k\}$ είναι μηδέν, τότε από την (5.47) είναι φανερό ότι $X_{p-k+i} = 0\ \forall\ i \in \{1,\dots,k\}$, οπότε από τις (5.33) συμπεραίνουμε γενικά ότι το X είναι ίσο με μηδέν, που είναι άτοπο αφού υποθέσαμε στην αρχή ότι το X είναι ιδιοδιάνυσμα του $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ και άρα μη μηδενικό.

Έχουμε λοιπόν από τις (5.50) και (5.53) την

$$\begin{aligned} \frac{\omega^p}{\tau^p}(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\sigma+\tau)^{p-2k}\ \dot{B}_{ii}X_{p-k+i} &= X_{p-k+i} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\omega^p}{(\lambda-(1-\omega)^2)^p}(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\lambda+\omega-1)^{p-2k}\ \dot{B}_{ii}X_{p-k+i} &= X_{p-k+i} \end{aligned} \tag{5.54}$$

Στην (5.54) το $2-\omega$ καθώς και το ω είναι διαφορετικά του μηδενός διότι για τη μέθοδό μας ισχύει το Θεώρημα 1.2, που αποτελεί αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλισή της. Επίσης εξ' υποθέσεως έχουμε θέσει τα λ, $\lambda-(1-\omega)^2$ διαφορετικά του μηδενός. Επιπλέον, είδαμε ότι και $X_{p-k+i} \neq O$. Άρα από τα προηγούμενα ισχύει υποχρεωτικά ότι και $\lambda+\omega-1 \neq 0$. Έτσι την (5.54) μπορούμε να τη γράψουμε και ως

$$\dot{B}_{ii}X_{p-k+i} = \frac{(\lambda-(1-\omega)^2)^p}{\omega^p(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\lambda+\omega-1)^{p-2k}}\ X_{p-k+i} \tag{5.55}$$

Παρατηρούμε από την (5.55) ότι το X_{p-k+i} είναι ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\dot{B}_{ii}$, που όπως είδαμε είναι διαγώνιος υποπίνακας του B^p, με ιδιοτιμή την $\dfrac{(\lambda-(1-\omega)^2)^p}{\omega^p(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\lambda+\omega-1)^{p-2k}}$. Όμως όλοι οι διαγώνιοι υποπίνακες του B^p έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Επίσης από Θεώρημα 3.2, του Romanovski, έχουμε

$$\dot{B}_{ii}Y_{p-k+i} = \mu^p Y_{p-k+i} \quad (\mu \neq 0,\ Y_{p-k+i} \neq 0) \tag{5.56}$$

αν και μόνο αν μ είναι μη μηδενική ιδιοτιμή του B. Ο συνδυασμός της (5.55) με την (5.56) μας δίνει ότι

$$\mu^p = \frac{(\lambda-(1-\omega)^2)^p}{\omega^p(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\lambda+\omega-1)^{p-2k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-(1-\omega)^2)^p = \mu^p\omega^p(2-\omega)^{2k}\lambda^k(\lambda+\omega-1)^{p-2k}, \tag{5.57}$$

όπου το μ είναι ιδιοτιμή του B. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι αν λ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$, συνεπώς και του $\mathcal{S}_\omega$, που είναι ο πίνακας της SSOR μεθόδου, για την οποία έχουμε $\lambda-(1-\omega)^2 \neq 0$, εάν $\omega \in (0,2)$ και εάν μ ικανοποιεί την (5.57), τότε μ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του block Jacobi πίνακα B.

Για το αντίστροφο τώρα εάν $\omega \in (0,2)$, υποθέτουμε ότι μ είναι μία ιδιοτιμή του B. Επίσης εάν λ ικανοποιεί την (5.57) με $\lambda-(1-\omega)^2 \neq 0$, θα δείξουμε ότι η λ είναι ιδιοτιμή του $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$ και επομένως και του $\mathcal{S}_\omega$.

Αρχίζουμε λοιπόν αναφέροντας ότι από την υπόθεση $\mu \neq 0$. Όπως είδαμε και προηγουμένως από την (5.56) γι΄ αυτό το μ υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $Y_{p-k+i} \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\dot{B}_{ii}Y_{p-k+i} = \mu^p Y_{p-k+i}, \quad i \in \{1,\ldots,k\}. \tag{5.58}$$

Αντικαθιστώντας τώρα από την (5.57) το μ^p στην (5.58) και ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία σε σχέση με αυτά που έγιναν μέχρις εδώ, (ό,τι δείξαμε μέχρι να καταλήξουμε στην (5.55) με τις υποθέσεις που έχουμε κάνει αποτελούν ισοδυναμία), ορίζουμε τα $Y_j \neq 0, \quad j \in \{1,\ldots,p\}$ ώστε να ισχύουν οι (5.27), (5.28) και καταλήγουμε τελικά ότι η λ είναι ιδιοτιμή του $\tilde{\mathcal{S}}_\omega$. □

5.3 Γενίκευση Θεωρήματος 5.1

Το Θεώρημα 5.1 το δείξαμε στην ειδική περίπτωση όπου $k \leq p/2$. Έστω τώρα $k > p/2$. Θέτοντας $k' = p-k$, ο p-κυκλικός GCO(p-k,k) πίνακας στην

(3.28) μπορεί να παρασταθεί και σαν GCO(k′,p-k′). Δηλαδή θα έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & O & \dots & O & A_{1,p-k'+1} & O & \dots & O \\ O & A_{2,2} & \dots & O & O & A_{2,p-k'+2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & & \dots & \dots & \dots & A_{k',p} \\ A_{k'+1,1} & O & \dots & O & \dots & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ O & O & \dots & A_{p,p-k'} & O & O & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix}, \tag{5.59}$$

Ο ανάστροφος του A, (συμβολίζουμε A^T), είναι p-κυκλικός GCO(p-k′,k′) πίνακας με $k' < p/2$. Έτσι εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1 στον A^T η σχέση ιδιοτιμών που βρίσκουμε είναι

$$[\lambda - (\omega - 1)^2]^p = \lambda^{k'}[\lambda - (\omega - 1)]^{p-2k'}(2 - \omega)^{2k'}\omega^p\mu^p. \tag{5.60}$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ′ οψιν ότι

$$\sigma(\mathcal{S}_\omega\ ) = \sigma(\mathcal{S}_\omega^T) = \sigma(\mathcal{S}_\omega^{A^T}), \tag{5.61}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα εξαγόμενα του Θεωρήματος 5.1 για τον A^T, ισχύουν και για τον A.

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι ακόμα και αν για έναν πίνακα A που είναι p-κυκλικός GCO(p-k,k) ισχύει $k > p/2$, επιστρέφουμε και πάλι στην περίπτωση του Θεωρήματος 5.1 εργαζόμενοι απλώς για τον ανάστροφο του και εφαρμόζοντας αυτά που βρίσκουμε σε αυτόν.

Κλείνοντας το Κεφάλαιο 5 θα αναφέρουμε ότι τη σχέση των ιδιοτιμών των Block επαναληπτικών πινάκων Jacobi και SSOR για p-κυκλικούς πίνακες που είναι GCO(p-k,k) ή GCO(k,p-k), με $(p, k) = (2, 1)$, την έδειξαν ανεξάρτητα οι D'Sylva και Miles στο [DaMi63], και ο Lynn στο [Ly64]. Επίσης την αντίστοιχη σχέση για $p \geq 3,\ k = 1$ έδειξαν οι Varga, Niethammer και Cai στο [VNC84]. Τέλος τη σχέση στη γενική περίπτωση έδειξαν οι Chong και Cai στο [ChCa85] το 1985.

6 Περιοχές σύγκλισης της Block SSOR μεθόδου για p-κυκλικούς πίνακες

6.1 Εισαγωγή και διατύπωση θεωρημάτων για περιοχές σύγκλισης

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εργαστούμε όπως και στο τέταρτο για να βρούμε τις περιοχές σύγκλισης της block SSOR μεθόδου για τη λύση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων $Ax = b$, όπου ο A είναι block αντιστρέψιμος πίνακας της μορφής (3.28), δηλαδή $GCO(p-k,k)$, με p, k πρώτα μεταξύ τους και $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Γνωρίζουμε τώρα ότι για τον block Jacobi πίνακα B του A ισχύει η ισότητα (5.1), καθώς επίσης και οι (3.32), (3.33) για τους E και F, αντίστοιχα. Επιπλέον έχουμε και την ισχύ της ισότητας (5.2) για τον block SSOR πίνακα του A.

Θα βασιστούμε στο κύριο θεώρημα του προηγούμενου κεφαλαίου που μας δίνει τη σχέση των ιδιοτιμών των block SSOR και block Jacobi μεθόδων για $GCO(p-k,k)$ πίνακες, το οποίο παρατίθεται και εδώ.

Θεώρημα 6.1 *Έχουμε την εξίσωση*

$$\left[\lambda - (\omega-1)^2\right]^p = \lambda^k \left[\lambda - (\omega-1)\right]^{p-2k} (2-\omega)^{2k} \omega^p \mu^p \tag{6.1}$$

με $\omega \in (0,2)$. Τότε $0 \neq \lambda \in \sigma(\mathcal{S}_\omega)$ αν και μόνο αν $\mu \in \sigma(B)$.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι με $\rho(\cdot)$ συμβολίζουμε τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα και θέτουμε $\nu := \rho(B)$. Εγείρεται τώρα το εξής ερώτημα.

Για ποιά σημεία (ν, ω) στο $(\nu, \omega)-$επίπεδο όλες οι λύσεις λ του (6.1) βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, πράγμα που μας εξασφαλίζει ότι

$$\rho(\mathcal{S}_\omega) < 1, \tag{6.2}$$

δηλαδή ότι η SSOR μεθοδος συγκλίνει;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα για $p \geq 3$, τη δίνει το πρώτο κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου που είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.2 *Έστω ότι ο A είναι* block *αντιστρέψιμος $GCO(p-k,k)$ πίνακας, όπως στην (3.28), με $p \geq 3$ και $k < \frac{1}{2}p$. Επίσης έστω ότι τα διαγώνια* blocks *του A είναι τετραγωνικοί και αντιστέψιμοι πίνακες. Θεωρούμε ότι B και $\mathcal{S}_\omega$ είναι οι* block Jacobi *και* block SSOR *επαναληπτικοί πίνακες του A που δίνονται στις (5.1) και (5.2), αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\rho(B) = \nu$. Τότε εξασφαλίζεται ότι*

$\rho(\mathcal{S}_\omega) < 1$ όταν γνωρίζουμε ότι $(\nu,\omega) \in R(l)$, όπου $R(l)$ είναι η περιοχή στο $(\nu,\omega)-$επίπεδο που δίνεται από

$$R(l) = \begin{cases} 0 < \omega \le 1, \quad 0 \le \nu < 1, & (6.3a) \\[2em] 1 \le \omega \le \omega_l^*, \quad 0 \le \nu < \dfrac{1+(\omega-1)^2}{(2-\omega)^{2l}\omega^{2-2l}} =: \nu_{1,\,l}(\omega), & (6.3b) \\[2em] (a) \;\; l \in (0, 3/8], \;\; \omega_l^* \le \omega < 2, & \\[1em] \qquad 0 \le \nu < \dfrac{(\omega-1)^{1/2}(\phi(\omega)+1)^l}{\omega(1-2l)^{(1-2l)/2}(2l)^l} =: \nu_{2,\,l}(\omega), & (6.3c.i) \\[1em] (b) \;\; l \in (3/8, 1/2), \;\; \omega_l^* \le \omega \le \omega_l^{**}, & \\[1em] \qquad 0 \le \nu < \dfrac{(\omega-1)^{1/2}(\phi(\omega)+1)^l}{\omega(1-2l)^{(1-2l)/2}(2l)^l} = \nu_{2,\,l}(\omega), & (6.3c.ii) \\[2em] l \in (3/8, 1/2), \;\; \omega_l^{**} \le \omega < 2, & \\[1em] \qquad 0 \le \nu < 1, & (6.3d) \end{cases}$$

όπου

$$l = \frac{k}{p}, \tag{6.4}$$

$$\omega^* := \omega_l^* := \frac{2(\phi_l^*+2)^{1/2}}{(\phi_l^*+2)^{1/2}+(\phi_l^*+2)^{1/2}}, \quad \phi^* := \phi_l^* := \frac{1+(9-16l)^{1/2}}{2(1-2l)}, \tag{6.5}$$

$$\omega^{**} := \omega_l^{**} := \frac{2(\phi_l^{**}+2)^{1/2}}{(\phi_l^{**}+2)^{1/2}+(\phi_l^{**}+2)^{1/2}}, \quad \phi^{**} := \phi_l^{**} := \frac{-1+4l}{1-2l}, \tag{6.6}$$

και

$$\phi := \phi(\omega) := \omega - 1 + \frac{1}{\omega-1}, \quad \omega \neq 1. \tag{6.7}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.2 δίνεται στο Υποκεφάλαιο 6.2. Η βασική ιδέα της απόδειξης, όπως και στο Κεφάλαιο 4, είναι η χρησιμοποίηση του Θεωρήματος 4.1, του Rouché που εφαρμόζεται σε αναλυτικές συναρτήσεις και επομένως και στο πολυώνυμο ως προς λ στην (6.1).

Η ανάλυση των ιδιοτήτων του συνόρου της περιοχής $R(l)$ που δίνεται στην (6.3), γίνεται στο Υποκεφάλαιο 6.3 και συνοψίζεται στο δεύτερο κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού που είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.3 *Υπό τις συνθήκες κάτω από τις οποίες έχουμε την ισχύ του Θεωρήματος 6.2 και για οποιουσδήποτε αριθμούς* $l_1,\ l_2 \in (0, \frac{1}{2})$ *έχουμε*

$$R(l_1) \subset R(l_2) \tag{6.8}$$

αν και μόνο αν

$$(i) \quad 0 < l_1 < l_2 \leq \frac{3}{8}\ , \tag{6.9}$$

ή

$$(ii) \quad 0 < l_1 \leq l^* < \frac{3}{8} < l_2 < \frac{1}{2}\ , \tag{6.10}$$

όπου l^* *είναι η μοναδική πραγματική ρίζα μέσα στο* $(0, \frac{3}{8})$ *της εξίσωσης*

$$\nu_{2,\ l^*}(2) = \nu_{2,\ 1/2}(2) = \lim_{l \to (1/2)^-} \nu_{2,\ l}(2) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ , \tag{6.11}$$

ή

$$(iii) \quad 0 < l^* < l_1 < \frac{3}{8} < l_2 \leq l_2^*(l_1) < \frac{1}{2}\ , \tag{6.12}$$

όπου $l_2^*(l_1)$ *είναι η μοναδική πραγματική ρίζα μέσα στο* $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ *της εξίσωσης*

$$\nu_{2,\ l_2^*(l_1)}(2) = \nu_{2,\ l_1}(2)\ , \tag{6.13}$$

ή

$$(iv) \quad 0 < l^* < l_1^*(l_2) \leq l_1 < \frac{3}{8} < l_2 < \frac{1}{2} \tag{6.14}$$

όπου $l_1^*(l_2)$ *είναι η μοναδική πραγματική ρίζα μέσα στο* $(l^*, \frac{3}{8})$ *της εξίσωσης*

$$\nu_{2,\ l_1^*(l_2)}(2) = \nu_{2,\ l_2}(2)\ . \tag{6.15}$$

Για κάθε άλλο ζεύγος αριθμών $l_1,\ l_2 \in (0, \frac{1}{2})$ *κανένα από τα* $R(l_1),\ R(l_2)$ *δεν είναι υποσύνολο του άλλου. Επιπλέον,*

$$R := \bigcap_{l \in (0,1/2)} R(l) := \begin{cases} 0 < \omega < 2\ , & 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}\ , \\ 0 < \omega \leq \dfrac{2}{1 + (2\nu - 1)^{1/2}}\ , & \frac{1}{2} < \nu < 1\ . \end{cases} \tag{6.16}$$

Παρακάτω παραθέτουμε μερικά ακόμα συμπεράματα που αφορούν ολόκληρο το Κεφάλαιο 6.

(i) Η ανάλυση που θα γίνει στα Υποκεφάλαια 6.2 και 6.3 θα δείξει ότι η περιοχή σύγκλισης $R(l)$ της $SSOR$ μεθόδου εξαρτάται μόνο από τα ν, ω και από το λόγο $l = \frac{k}{p}$.

(ii) Θα δείξουμε ότι καθώς το l τείνει στο 0^+, το σημείο που οι καμπύλες $\nu_{1,l}(\omega)$ και $\nu_{2,l}(\omega)$ τέμνονται, το οποίο είναι και σημείο που εφάπτονται, τείνει στο σημείο $(0, \frac{1}{2})$.

(iii) Για $l = \frac{1}{2}$, η περιοχή $R(\frac{1}{2})$ είναι το παραλληλόγραμμο

$$0 < \omega < 2, \quad 0 \leq \nu < 2.$$

Επίσης $R(l) \subset R(\frac{1}{2}), \forall l \in (0, 1/2)$. Έτσι η (6.16) μπορεί να ενισχυθεί και να γραφτεί όπως παρακάτω

$$\bigcap_{l \in (0,1/2]} R(l) = \bigcap_{l \in (0,1/2)} R(l) := R. \tag{6.17}$$

(iv) Θεωρούμε ότι οι λογικές τιμές που μπορεί να πάρει το l είναι ρητοί αριθμοί στο $(0, 1/2)$, παρόλο που η ανάλυση που γίνεται σ' αυτό το κεφάλαιο καλύπτει πραγματικές τιμές του l από ολόκληρο το διάστημα $(0, 1/2)$. Στην πραγματικότητα μπορούμε να δούμε ότι η ανάλυση καλύπτει ολόκληρο το διάστημα (0,1). Αυτό συμβαίνει διότι αν A είναι GCO(p-k,k) με $l = k/p \in (1/2, 1)$, τότε λόγω των συμπερασμάτων του Υποκεφαλαίου 5.3, ισχύει γι' αυτόν η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου με l' αντί για l στους τύπους, όπου $l' = \frac{p-k}{p} = 1 - l \in (0, 1/2)$.

Σε αυτό το σημείο κλείνοντας το υποκεφάλαιο πρέπει να πούμε ότι η εύρεση των ακριβών περιοχών σύγκλισης της Block SSOR μέθοδου για την κλάση των p-κυκλικών GCO(p-k,k) πινάκων που έχουμε δει, έγινε αρχικά στην περίπτωση $p \geq 3,\ k = 1$, από τους Χατζηδήμο και Neumann το 1989 (βλ. [HaNe89]). Οι ίδιοι συγγραφείς το 1990 βρήκαν τις ακριβείς περιοχές σύγκλισης στη γενική περίπτωση όπου $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. (βλ. [HaNe90])

6.2 Απόδειξη θεωρήματος 6.2

Αρχικά ανακαλούμε το Θεώρημα 4.1, του Rouché.Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε την εξίσωση (6.1) και ζητάμε να καθορίσουμε τις περιοχές όπου βρίσκονται οι ρίζες λ αυτής, σε συνάρτηση με το

$$\nu := \rho(B) = \max_{\mu \in \sigma(B)} |\mu|.$$

Η βασική ιδέα, όπως και στο Κεφάλαιο 4, είναι η εξής: Θέτουμε

$$f(\lambda) = \left[\lambda - (\omega-1)^2\right]^p - \lambda^k \left[\lambda - (\omega-1)\right]^{p-2k} (2-\omega)^{2k} \omega^p \mu^p \tag{6.18}$$

και

$$g(\lambda) = \left[\lambda - (\omega-1)^2\right]^p \ . \tag{6.19}$$

Αφού η $g(\lambda)$ έχει για κάθε $\omega \in (0,2)$ όλες τις ρίζες της στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, με εφαρμογή του Θεωρήματος του Rouché στο μοναδιαίο κύκλο για τις $f(\lambda),\ g(\lambda)$ τίθεται το εξής ερώτημα: *Δοθέντος $\omega \in (0,2)$ για ποιά $\mu \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} |\lambda - (\omega-1)|^{p-2k} (2-\omega)^{2k} \omega^p |\mu|^p &= |f(\lambda) - g(\lambda)| < |g(\lambda)| \\ &= |\lambda - (\omega-1)^2|^p,\ \forall \lambda \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.20}$$

όπου με Ω συμβολίζουμε το μοναδιαίο δίσκο;

Καθώς $\lambda - (\omega-1) \neq 0$ όταν $\lambda \in \partial\Omega$, για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα αρκεί να καθορίσουμε, για δοθέν $\omega \in (0,2)$, εκείνα τα $\mu \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει

$$\min_{\lambda \in \partial\Omega} \frac{|\lambda - (\omega-1)^2|^p}{|\lambda - (\omega-1)|^{p-2k}} > (2-\omega)^{2k} \omega^p |\mu|^p \iff$$

$$\iff \quad \min_{\lambda \in \partial\Omega} \frac{|\lambda - (\omega-1)^2|}{|\lambda - (\omega-1)|^{1-2l}} > (2-\omega)^{2l} \omega |\mu| \tag{6.21}$$

με $l = k/p$.

Για $\lambda \in \partial\Omega$ γράφουμε $\lambda = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Τότε ο λόγος που εμφανίζεται στην (6.21) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda - (\omega-1)^2|}{|\lambda - (\omega-1)|^{1-2l}} &= \frac{\sqrt{(x-(\omega-1)^2)^2 + y^2}}{[\sqrt{(x-(\omega-1))^2 + y^2}]^{1-2l}} \\ &= \frac{[x^2 + y^2 + (\omega-1)^4 - 2(\omega-1)^2 x]^{1/2}}{[x^2 + y^2 + (\omega-1)^2 - 2(\omega-1)x]^{1/2-l}} \\ &\overset{x^2+y^2=1}{=} \frac{[1 + (\omega-1)^4 - 2(\omega-1)^2 x]^{1/2}}{[1 + (\omega-1)^2 - 2(\omega-1)x]^{1/2-l}} \quad =: \ h(x,\omega). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Έτσι γίνεται φανερό ότι η ανισότητα (6.21) είναι ισοδύναμη με την

$$\min_{x\in[-1,1]} h(x,\omega) > (2-\omega)^{2l}\omega|\mu|. \tag{6.23}$$

Λόγω της (6.23), για σταθερό $\omega \in (0,2)$, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της $h(x,\omega)$ σαν συνάρτησης του $x \in [-1,1]$. Υπενθυμίζουμε ότι χρησιμοποιούμε το συμβολισμό "$\sim$" εννοώντας την ισότητα των προσήμων μεταξύ δύο εκφράσεων.

Πριν ξεκινήσουμε την έρευνά μας παραθέτουμε μία παρατήρηση που θα μας χρειαστεί στη συνέχεια.

Παρατήρηση 6.1

(i) *Για $\omega = 1$ μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (6.20) είναι η $|\mu| < 1$.*

(ii) *Επιπλέον, όταν $\omega = 1$, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\lambda \in \partial\Omega$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου (6.18) είναι η $\lambda^k = \mu^p$.*

Απόδειξη: Επειδή $h(x,1) = 1$, $\forall x \in [-1,1]$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η (6.23) γίνεται $|\mu| < 1$. Άρα, όταν $\omega = 1$, η συνθήκη $|\mu| < 1$ είναι ισοδύναμη με την (6.20).
Για την απόδειξη του δεύτερου σκέλους της παρατήρησης έχουμε ότι όταν $\omega = 1$, τότε $f(\lambda) = \lambda^{p-k}(\lambda^k - \mu^p)$. Από αυτό προκύπτει κατευθείαν το ζητούμενο. □

Λόγω της Παρατήρησης 6.1 εφεξής θα μας ενδιαφέρουν τα $\omega \in (0,2)\setminus\{1\}$. Για τέτοια ω λοιπόν ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$h_1 := h_1(x,\omega) := 1 + (\omega-1)^4 - 2(\omega-1)^2 x \tag{6.24}$$

και

$$h_2 := h_2(x,\omega) := 1 + (\omega-1)^2 - 2(\omega-1)x \tag{6.25}$$

Από την (6.22) έχουμε $h(x,\omega) = \dfrac{h_1^{1/2}}{h_2^{1/2-l}}$. Επίσης οι h_1, h_2 παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Αλλά τότε θα έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} &= \frac{-(\omega-1)^2 h_2^{1/2-l}h_1^{-1/2} + (\omega-1)(1-2l)h_2^{-1/2-l}h_1^{1/2}}{h_2^{1-2l}} \\ &\sim -(\omega-1)^2 h_2^{1/2-l}h_1^{-1/2} + (\omega-1)(1-2l)h_2^{-1/2-l}h_1^{1/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-(\omega-1)^2h_2+(\omega-1)(1-2l)h_1}{h_2^{1/2+l}h_1^{1/2}} \\
&\sim -(\omega-1)^2h_2+(\omega-1)(1-2l)h_1 \\
&= -(\omega-1)^2[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)x] \\
&\quad +(\omega-1)(1-2l)[1+(\omega-1)^4-2(\omega-1)^2x] \\
&= (\omega-1)-(\omega-1)^2-(\omega-1)^4+(\omega-1)^5 \\
&\quad -2l(\omega-1)-2l(\omega-1)^5+4l(\omega-1)^3x \\
&\sim (\omega-1)\left[\left((\omega-1)^2+\frac{1}{(\omega-1)^2}\right)(1-2l)\right. \\
&\quad \left.-\left((\omega-1)+\frac{1}{\omega-1}\right)+4lx\right] \\
&\sim (\omega-1)(x-\Psi(\omega)), \qquad (6.26)
\end{aligned}
$$

όπου

$$\Psi(\omega) := \frac{1}{4l}\left(\omega-1+\frac{1}{\omega-1}\right)-\frac{(1-2l)}{4l}\left[(\omega-1)^2+\frac{1}{(\omega-1)^2}\right]. \qquad (6.27)$$

Για να βρούμε τώρα τα κρίσιμα σημεία της $h(x,\omega)$ στο διάστημα [-1,1], αρκεί να βρούμε αυτά τα σημεία, στο [-1,1], για τα οποία ο δεύτερος παράγοντας του δεξιού μέλους της (6.26) μηδενίζεται. Υπενθυμίζεται ότι το ω θεωρείται σταθερό και $\omega \in (0,2)\setminus\{1\}$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις.

6.2.1 Περίπτωση 1η: $0<\omega<1$.

Σ' αυτή την περίπτωση από την (6.26) έχουμε

$$\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} \sim -(x-\Psi(\omega)).$$

Επιπλέον $(\omega-1)+\dfrac{1}{(\omega-1)} < -2$ και

$$\left((\omega-1)+\frac{1}{(\omega-1)}\right)^2 > 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\omega-1)^2 + \frac{1}{(\omega-1)^2} > 2,$$

οπότε, από την (6.27), $\Psi(\omega) < -1/2l - (1-2l)/2l = -1/l + 1 < -2+1 = -1$, καθώς έχουμε $l < 1/2$. Συνεπώς ισχύει $-(x - \Psi(\omega)) < -x - 1 < 0$, αφού $x \in [-1, 1]$, το οποίο δείχνει ότι $\dfrac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} < 0$. Έτσι αποδεικνύεται ότι

$$\min_{x \in [-1,1]} h(x,\omega) = h(1,\omega) = (2-\omega)^{2l}\omega. \tag{6.28}$$

Συνδυάζοντας την (6.28) με την (6.23) οδηγούμαστε στα ακόλουθα συμπεράσματα.

Λήμμα 6.1 *Για κάθε* $\omega \in (0,1)$

(i) Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (6.20) είναι $|\mu| < 1$.

(ii) Όταν $|\mu| = 1$, *μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για το* $\lambda \in \partial\Omega$ *να είναι ρίζα του* $f(\lambda)$ *είναι* $\lambda = 1$ *και* $\mu^p = 1$.

Απόδειξη: Από τις (6.28) και (6.23) η απόδειξη του (i) είναι άμεση. (Ουσιαστικά αυτή έγινε με τα επιχειρήματα που μας οδήγησαν στο λήμμα.) Άρα μένει μόνο να δειχθεί το (ii). Η επάρκεια της συνθήκης είναι άμεση αν την αντικαταστήσουμε στην (6.18). Έχουμε δηλαδή ότι $f(\lambda) = 0$ όταν $\lambda = 1$ και $\mu^p = 1$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\lambda = x + iy \in \partial\Omega$ είναι ρίζα του $f(\lambda)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $|\mu| = 1$ παρατηρούμε από τις (6.18) και (6.22) ότι $h(x,\omega) = (2-\omega)^{2l}\omega$. Αλλά επειδή η (6.23) ισχύει για όλα τα $|\mu| < 1$, θα πρέπει να έχουμε $x = 1$, και άρα $\lambda = 1$. Θέτοντας τώρα $f(1) = 0$ παίρνουμε $\mu^p = 1$. □

6.2.2 Περίπτωση 2η: $1 < \omega < 2$.

Παρατηρούμε από την (6.26) ότι,

$$\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} \sim (x - \Psi(\omega)).$$

Επιπλέον έχοντας τη $\phi(\omega)$, όπως στην (6.7), συμπεραίνουμε ότι

$$\phi(\omega) > 2. \tag{6.29}$$

Επίσης έχουμε

$$\phi^2(\omega) - 2 = (\omega-1)^2 + \frac{1}{(\omega-1)^2} \tag{6.30}$$

Αντικαθιστώντας τις (6.7) και (6.30) στην (6.27) έχουμε

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4l}[-(1-2l)\phi^2(\omega) + \phi(\omega) + 2(1-2l)]. \tag{6.31}$$

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια το πρόσημο της $x - \Psi(\omega)$, όταν οι τιμές του x κειμένονται μεταξύ -1 και 1. Για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της $\Psi(\omega)$ συναρτήσει των $l = k/p$ και ω.

Λήμμα 6.2 *Για $\omega \in (1,2)$, έχουμε*

(i)

$$-1 \geq \Psi(\omega) \tag{6.32}$$

όταν

$$\phi^* := \frac{1 + (9-16l)^{1/2}}{2(1-2l)} \leq \phi(\omega) < \infty, \tag{6.33}$$

(ii)

$$1 \geq \Psi(\omega) \geq -1 \tag{6.34}$$

όταν

$$(a) \qquad l \in (0, \frac{3}{8}], \quad 2 < \phi(\omega) \leq \phi^*. \tag{6.35}$$

ή

$$(b) \qquad l \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}), \quad \phi^{**} \leq \phi(\omega) \leq \phi^*. \tag{6.36}$$

όπου

$$\phi^{**} := \frac{-1+4l}{1-2l}. \tag{6.37}$$

(iii)

$$\Psi(\omega) \geq 1 \tag{6.38}$$

όταν

$$l \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}), \quad 2 < \phi(\omega) \leq \phi^{**}. \tag{6.39}$$

Απόδειξη:

(i) Για το πρώτο σκέλος του λήμματος έχουμε

$$\Psi(\omega) \leq -1 \overset{(6.31)}{\Longleftrightarrow} (1-2l)\phi^2(\omega) - \phi(\omega) - 2 \geq 0 \tag{6.40}$$

θέτουμε

$$f_1(\phi) := (1-2l)\phi^2 - \phi - 2. \tag{6.41}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου f_1, (ως προς ϕ), είναι

$$\phi^* := \phi_1 = \frac{1+(9-16l)^{1/2}}{2(1-2l)}, \quad \phi_2 = \frac{1-(9-16l)^{1/2}}{2(1-2l)} \tag{6.42}$$

Από αυτές η $\phi^* = \phi_1$ είναι η μεγαλύτερη. Μάλιστα $\phi_1 > 2, \ \forall l \in (0, 1/2)$ επειδή $f_1(2) = -4l < 0 = f_1(\phi_1)$. Επίσης η ϕ_2 είναι πάντοτε μικρότερη από το 0. Άρα έχουμε τον επόμενο Πίνακα για το πολυώνυμο f_1

ϕ		ϕ_2	2	$\phi^* = \phi_1$	
$f_1(\phi)$	$+$	0	—	0	$+$

Πίνακας 1: Πρόσημο της $f_1(\phi)$ για τις διάφορες τιμές του ϕ.

Άρα λοιπόν αν $\phi(\omega) \geq \phi^*$ τότε προφανώς ισχύει η ανισότητα $f_1(\phi(\omega)) \geq 0$, που είναι ισοδύναμη με την ανισότητα (6.32).

(ii) Όσον αφορά στο δεύτερο σκέλος του λήμματος για να έχουμε καταρχήν

$$\Psi(\omega) \geq -1 \overset{(6.31)}{\Longleftrightarrow} (1-2l)\phi^2(\omega) - \phi(\omega) - 2 \leq 0, \tag{6.43}$$

θα πρέπει, όπως είναι φανερό και από τον Πίνακα 1, να ισχύει

$$\phi(\omega) \in (2, \phi^*]. \tag{6.44}$$

Για την ανισότητα

$$\Psi(\omega) \leq 1 \tag{6.45}$$

έχουμε

$$\Psi(\omega) \leq 1 \overset{(6.31)}{\Longleftrightarrow} (1-2l)\phi^2(\omega) - \phi(\omega) - 2(1-4l) \geq 0. \tag{6.46}$$

Ορίζουμε

$$f_2(\phi) := (1-2l)\phi^2 - \phi - 2(1-4l). \tag{6.47}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου f_2 είναι οι

$$\tilde{\phi}_1 = 2, \quad \phi^{**} := \tilde{\phi}_2 = \frac{-1+4l}{1-2l}. \tag{6.48}$$

Για τις ϕ_1, ϕ_2 έχουμε τα εξής

ϕ			2		ϕ^{**}	
$f_2(\phi)$	+		0	$-$	0	+

Πίνακας 2: Πρόσημο της $f_2(\phi)$ όταν $l \in (3/8, 1/2)$.

ϕ		ϕ^{**}		2	
$f_2(\phi)$	+	0	$-$	0	+

Πίνακας 3: Πρόσημο της $f_2(\phi)$ όταν $l \in (0, 3/8)$.

(α) Όταν $l = \frac{3}{8}$ τότε $\phi^{**} = 2$, οπότε για την f_2 ισχύει $f_2 \geq 0 \ \ \forall \phi \in \mathbb{R}$.
(β) Όταν $l \in (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ τότε $\phi^{**} > 2$. Οπότε για την f_2 παίρνουμε τον Πίνακα προσήμων 2.
(γ) Τέλος όταν $l \in (0, \frac{3}{8})$ τότε $\phi^{**} < 2$. Οπότε για το το f_2 παίρνουμε τον Πίνακα προσήμων 3.

Άρα με δεδομένο ότι $\phi(\omega) > 2$, η ανισότητα $f_2(\phi(\omega)) \geq 0$ προκύπτει αμέσως από τους Πίνακες 2 και 3 καθώς και το (α), όταν

$$\phi(\omega) \geq \phi^{**}, \quad l \in (3/8, 1/2) \tag{6.49}$$

ή

$$\phi(\omega) > 2, \quad l \in (0, 3/8]. \tag{6.50}$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε την εξής παρατήρηση

Παρατήρηση 6.2 *Για κάθε* $l \in (0, 1/2)$

$$\phi^{**} < \phi^{*}. \tag{6.51}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω ανισότητας έχουμε

$$f_1(\phi^{**}) = f_2(\phi^{**}) - 8l = -8l \overset{l \,\in\, (0,\, \frac{1}{2})}{<} 0 = f_1(\phi^{*}). \tag{6.52}$$

Συνδυάζοντας την ανισότητα (6.52) με τον Πίνακα 1 προκύπτει η (6.51).

Οι (6.49) και (6.50) τώρα μας δίνουν την ισοδύναμη της $f_2(\phi(\omega)) \geq 0$ που είναι, όπως είδαμε και προηγουμένως από την (6.46), η ανισότητα

$$\Psi(\omega) \leq 1. \tag{6.53}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την (6.51) και την (6.43), που ισχύει όταν έχουμε την (6.44), δηλαδή όταν $\phi(\omega) \in (2, \phi^{*}]$, καταλήγουμε στην ολοκλήρωση του δεύτερου σκέλους του λήμματος.

(iii) Το τρίτο σκέλος του λήμματος προκύπτει από το γεγονός ότι η ανισότητα $\Psi(\omega) \geq 1$ είναι ισοδύναμη με την $f_2(\phi(\omega)) \leq 0$. Έτσι από τον Πίνακα 2 παίρνουμε κατευθείαν τις συνθήκες (6.39). $\square$

Χάρη στις παρατηρήσεις του Λήμματος 6.2 είδαμε πως συμπεριφέρεται η $\Psi(\omega)$ συναρτήσει των $l = k/p$ και ω. Πριν όμως προχωρήσουμε στη μελέτη του προσήμου της $x - \Psi(\omega)$ και κατόπιν της $\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x}$, θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις επιπλέον που αφορούν στη $\phi(\omega)$ και την αντίστροφή της.

Λύνοντας την εξίσωση $\phi = \omega - 1 + \dfrac{1}{\omega - 1}$ ως προς ϕ βρίσκουμε δύο ρίζες. Αυτές είναι οι

$$\omega_1(\phi) = \frac{\phi + 2 + (\phi^2 - 4)^{1/2}}{2}, \quad \omega_2(\phi) = \frac{\phi + 2 - (\phi^2 - 4)^{1/2}}{2} \; . \tag{6.54}$$

Ας σημειωθεί ότι η παράγωγος της $\phi(\omega)$ είναι

$$\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} = 1 - \frac{1}{(\omega - 1)^2} \; . \tag{6.55}$$

Η τελευταία για $\omega \in (1, 2)$ είναι πάντα αρνητική. Άρα η $\phi(\omega)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ω στο $(1, 2)$, και το πεδίο τιμών της είναι το $(2, +\infty)$. Επομένως πρέπει και η αντίστροφη συνάρτηση της $\phi(\omega)$, που θα ονομάσουμε $\omega(\phi)$, να είναι γνησίως φθίνουσα όταν $\phi \in (2, +\infty)$ και το πεδίο τιμών της να είναι το $(1, 2)$. Αυτό συμβαίνει αν επιλέξουμε

$$\omega(\phi) := \omega_2(\phi) = \frac{\phi + 2 - (\phi^2 - 4)^{1/2}}{2}, \tag{6.56}$$

η οποία, επειδή το πεδίο ορισμού της μας ενδιαφέρει να είναι το $(2, +\infty)$, γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} \omega(\phi) &= \frac{\phi + 2 - (\phi^2 - 4)^{1/2}}{2} \\ &= \frac{(\phi + 2)((\phi + 2)^{1/2} - (\phi - 2)^{1/2})((\phi + 2)^{1/2} + (\phi - 2)^{1/2})}{2(\phi + 2)^{1/2}((\phi + 2)^{1/2} + (\phi - 2)^{1/2})} \\ &= \frac{2(\phi + 2)^{1/2}}{(\phi + 2)^{1/2} + (\phi - 2)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Ακολούθως θα θεωρούμε

$$\omega^* = \omega(\phi^*), \tag{6.58}$$

με ϕ^* αυτό του Λήμματος 6.2, όπως στις (6.5) και (6.33). Επίσης θα θεωρούμε

$$\omega^{**} = \omega(\phi^{**}), \tag{6.59}$$

με ϕ^{**}, αυτό του Λήμματος 6.2 στην (6.37). Κάνουμε τώρα την ακόλουθη παρατήρηση για τα ω^* και ω^{**}.

Παρατήρηση 6.3 *Για κάθε* $l \in (0, 1/2)$

$$\omega^* < \omega^{**}. \tag{6.60}$$

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 6.2 και από το γεγονός ότι η $\omega(\phi)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, η ανισότητα (6.60) προκύπτει άμεσα. $\square$

Είμαστε σε θέση πλέον να προχωρήσουμε στη μελέτη του προσήμου τη- ς $x - \Psi(\omega)$ και κατόπιν της $\frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x}$, που θα μας οδηγήσει στην εύρεση του $\min_{x\in[-1,1]} h(x,\omega)$ στην (6.23). Σ' αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε ότι βρισκόμαστε στην 2^{η} περίπτωση όπου $\omega \in (1, 2)$. Εξετάζουμε λοιπόν τις εξής υποπεριπτώσεις:

- 1η υποπερίπτωση:
  Όταν

$$1 < \omega \leq \omega^*, \tag{6.61}$$

  έχουμε από τον ορισμό της $\omega(\phi)$ ότι

$$\phi^* \leq \phi(\omega) < \infty. \tag{6.62}$$

  Οπότε από το Λήμμα 6.2.(i), $\Psi(\omega) \leq -1$ και για $x \in (-1, 1]$,

$$x - \Psi(\omega) > 0 \overset{(6.26)}{\Longrightarrow} \frac{\partial h(x,\omega)}{\partial x} > 0.$$

  Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η $h(x,\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[-1, 1]$ οπότε

$$\begin{aligned} \min_{x\in[-1,1]} h(x,\omega) &= h(-1,\omega) \\ &= \frac{[1 + (\omega-1)^4 + 2(\omega-1)^2]^{1/2}}{[1 + (\omega-1)^2 + 2(\omega-1)]^{1/2-l}} \\ &= \frac{1 + (\omega-1)^2}{\omega^{1-2l}} \,. \end{aligned} \tag{6.63}$$

  Συνδυάζοντας την (6.63) με την (6.23) είναι φανερό πλέον ότι για κάθε $\omega \in (1, \omega^*]$, η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν

$$|\mu| < \frac{1 + (1-\omega)^2}{(2-\omega)^{2l}\omega^{2-2l}} := \nu_{1,\,l}(\omega) := \nu_1(\omega) \tag{6.64}$$

- 2η υποπερίπτωση:
  Όταν

$$l \in (0, 3/8] \quad \text{και} \quad \omega^* \leq \omega < 2 \Leftrightarrow 2 < \phi(\omega) \leq \phi^*, \tag{6.65}$$

ή όταν

$$l \in (3/8, 1/2) \quad \text{και} \quad \omega^* \leq \omega < \omega^{**} \Leftrightarrow \phi^{**} < \phi(\omega) \leq \phi^*, \tag{6.66}$$

τότε από το Λήμμα 6.2.(ii), έχουμε ότι για $x \in [-1, 1]$

$$(\omega - 1)(x - \Psi(\omega)) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h(x, \omega)}{\partial x} \leq 0 \quad \text{όταν} \quad x \leq \Psi(\omega), \tag{6.67}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = \Psi(\omega)$, ενώ

$$(\omega - 1)(x - \Psi(\omega)) > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h(x, \omega)}{\partial x} > 0 \quad \text{όταν} \quad x > \Psi(\omega). \tag{6.68}$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα

$$\min_{x \in [-1,1]} h(x, \omega) = h(\Psi(\omega), \omega). \tag{6.69}$$

Συνδυάζοντας την (6.69) με την (6.23), έχουμε ότι για κάθε $\omega \in [\omega^*, 2)$ και $l \in (0, 3/8]$, ή για κάθε $\omega \in [\omega^*, \omega^{**})$ και $l \in (3/8, 1/2)$, η ανισότητα (6.20) ισχύει αν και μόνο αν

$$|\mu| < \frac{[1 + (\omega - 1)^4 - 2(\omega - 1)^2 \Psi(\omega)]^{1/2}}{(2 - \omega)^{2l} \omega [1 + (\omega - 1)^2 - 2(\omega - 1)\Psi(\omega)]^{1/2 - l}} =: \nu_{2,\, l}(\omega) := \nu_2(\omega). \tag{6.70}$$

- 3η υποπερίπτωση:
  Όταν

$$l \in (3/8, 1/2) \quad \text{και} \quad \omega^{**} \leq \omega < 2 \Leftrightarrow 2 < \phi(\omega) \leq \phi^{**}, \tag{6.71}$$

τότε από Λήμμα 6.2(iii), $\Psi(\omega) \geq 1$ και για $x \in [-1, 1)$

$$(\omega - 1)(x - \Psi(\omega)) < 0 \overset{(6.26)}{\Longrightarrow} \frac{\partial h(x, \omega)}{\partial x} < 0. \tag{6.72}$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η $h(x, \omega)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[-1, 1]$ οπότε

$$\begin{aligned} \min_{x \in [-1,1]} h(x, \omega) &= h(1, \omega) \\ &= \frac{[1 + (\omega - 1)^4 - 2(\omega - 1)^2]^{1/2}}{[1 + (\omega - 1)^2 - 2(\omega - 1)]^{1/2 - l}} \\ &= \omega (2 - \omega)^{2l} \ . \end{aligned} \tag{6.73}$$

Συνδυάζοντας την (6.73) με την (6.23) είναι φανερό ότι για κάθε $\omega \in [\omega^{**}, 2)$ και για $l \in (3/8, 1/2)$, η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν

$$|\mu| < 1. \tag{6.74}$$

Πριν συνοψίσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε ένα λήμμα θα παραθέσουμε μία παρατήρηση όσον αφορά την $\nu_2(\omega)$.

Παρατήρηση 6.4 *θα δείξουμε την ισότητα των δύο τύπων που έχουμε βρει μέχρι τώρα για την $\nu_2(\omega)$, οι οποίοι δίνονται στις (6.3c) και (6.70), αντίστοιχα. Για το σκοπό αυτό θα ξεκινήσουμε από αυτόν που δίνεται στην (6.70).*

$$
\begin{aligned}
\nu_2(\omega) &= \frac{\left[1+(\omega-1)^4-2(\omega-1)^2\Psi(\omega)\right]^{1/2}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)\Psi(\omega)\right]^{1/2-l}} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2+l}\left[\dfrac{1}{(\omega-1)^2}+(\omega-1)^2-2\Psi(\omega)\right]^{1/2}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left[(\omega-1)+\dfrac{1}{(\omega-1)}-2\Psi(\omega)\right]^{1/2-l}} \\
&\overset{(6.30)}{=} \frac{(\omega-1)^{1/2+l}\left[\phi^2(\omega)-2-2\Psi(\omega)\right]^{1/2}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left[\phi(\omega)-2\Psi(\omega)\right]^{1/2-l}} \\
&\overset{(6.31)}{=} \frac{(\omega-1)^{1/2+l}\left[\phi^2(\omega)-2+\dfrac{1}{2l}\phi^2(\omega)-\phi^2(\omega)-\dfrac{1}{2l}\phi(\omega)-\dfrac{1}{l}+2\right]^{1/2}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left[\phi(\omega)+\dfrac{1}{2l}\phi^2(\omega)-\phi^2(\omega)-\dfrac{1}{2l}\phi(\omega)-\dfrac{1}{l}+2\right]^{1/2-l}} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2+l}\left(\dfrac{1}{2l}\right)^{1/2}\left[\phi^2(\omega)-\phi(\omega)-2\right]^{1/2}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left[\phi(\omega)(1-\dfrac{1}{2l})+(\dfrac{1}{2l}-1)\phi^2(\omega)-2(\dfrac{1}{2l}-2)\right]^{1/2-l}} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2+l}\left(\dfrac{1}{2l}\right)^{1/2}\left[\phi^2(\omega)-\phi(\omega)-2\right]^{l}}{(2-\omega)^{2l}\omega\left(\dfrac{1-2l}{2l}\right)^{\frac{1}{2}-l}} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2}[(\omega-1)(\phi(\omega)-2)(\phi(\omega)+1)]^l}{(2-\omega)^{2l}\omega(1-2l)^{\frac{1}{2}-l}(2l)^l} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2}(2-\omega)^{2l}(\phi(\omega)+1)^l}{(2-\omega)^{2l}\omega(1-2l)^{\frac{1}{2}-l}(2l)^l} \\
&= \frac{(\omega-1)^{1/2}(\phi(\omega)+1)^l}{\omega(1-2l)^{\frac{1}{2}-l}(2l)^l}\,. \qquad (6.75)
\end{aligned}
$$

Συνοψίζουμε τώρα τα προηγούμενα αποτελέσματα στο ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 6.3 *Έστω ότι* $\omega \in (1,2)$ *και* ω^*, ω^{**} *όπως δίδονται στις (6.58) και (6.59), αντίστοιχα. Τότε*

(i) *Για* $\omega \in (1,\omega^*]$, *η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν* $|\mu| < \nu_1(\omega)$. *Επιπλέον, για κάθε ω σ΄ αυτό το διάστημα,*

$$\nu_1(\omega) < 1. \tag{6.76}$$

(ii) *Για* $l \in (0,3/8]$ *και* $\omega \in [\omega^*,2)$, *η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν* $|\mu| < \nu_2(\omega)$. *Επιπλέον, για κάθε ω σ΄ αυτό το διάστημα,*

$$\nu_2(\omega) < 1. \tag{6.77}$$

(iii) *Για* $l \in (3/8,1/2)$ *και* $\omega \in [\omega^*,\omega^{**})$, *η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν* $|\mu| < \nu_2(\omega)$. *Επιπλέον, για κάθε* $\omega \in [\omega^*,\omega^{**})$,

$$\nu_2(\omega) < 1. \tag{6.78}$$

(iv) *Για* $l \in (3/8,1/2)$ *και* $\omega \in [\omega^{**},2)$, *η (6.20) ισχύει αν και μόνο αν* $|\mu| < 1$. *Επιπλέον για* $\omega = \omega^{**}$ *έχουμε* $\nu_2(\omega) = 1$.

(v) *Για* $\omega \in (1,\omega^*]$ *και* $|\mu| = \nu_1(\omega)$, $\lambda \in \partial\Omega$ *είναι ρίζα του* $f(\lambda)$ *αν και μόνο αν* $\lambda = -1$ *και*

$$\mu^p = (-1)^k \frac{[1+(1-\omega)^2]^p}{(2-\omega)^{2k}\omega^{2p-2k}}. \tag{6.79}$$

(vi) *Για* $l \in (0,3/8]$, $\omega \in (\omega^*,2)$ *και* $|\mu| = \nu_2(\omega)$, *αν* $\lambda \in \partial\Omega$ *είναι ρίζα του* $f(\lambda)$, *τότε δεν είναι πραγματικός αριθμός. Ομοίως για* $l \in (3/8,1/2)$, $\omega \in [\omega^*,\omega^{**})$.

(vii) *Για* $l \in (3/8,1/2)$ *και* $\omega \in [\omega^{**},2)$, *όταν* $|\mu| = 1$, *ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε* $\lambda \in \partial\Omega$ *και να είναι ρίζα του* $f(\lambda)$ *είναι* $\lambda = 1$ *και* $\mu^p = 1$.

Απόδειξη:

(i) Το πρώτο κομμάτι αυτού του μέρους του λήμματος έχει δειχθεί στην 1η υποπερίπτωση που μας οδήγησε στην (6.64). Για να δείξουμε την (6.76) ανακαλούμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $h(x,\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-1,1]$ όταν $\omega \in (1,\omega^*]$. Έτσι από (6.22) βρίσκουμε ότι

$$\max_{x\in[-1,1]} h(x,\omega) = h(1,\omega) = \omega(2-\omega)^{2l}. \tag{6.80}$$

Το οποίο μας οδηγεί σε συνδιασμό και με την (6.63) στην

$$(2-\omega)^{2l} > \frac{1+(\omega+1)^2}{\omega^{1-2l}} \Leftrightarrow 1 > \nu_1(\omega). \tag{6.81}$$

(ii) Η απόδειξη του αρχικού κομματιού αυτού του μέρους του λήμματος έγινε στα βήματα που μας οδήγησαν στην (6.70). Για να δείξουμε την (6.77) ανακαλούμε το γεγονός ότι όταν $l \in (0, 3/8]$, στο $[\omega^*, 2)$, η συνάρτηση $h(x, \omega)$ είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι $x = \Psi(\omega)$ και κατόπιν γνησίως αύξουσα. Άρα

$$h(1,\omega) > h(\Psi(\omega),\omega) \Leftrightarrow (2-\omega)^{2l} > h(\Psi(\omega),\omega). \tag{6.82}$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές αυτής της ανισότητας με $(2-\omega)^{2l}$, παίρνουμε την (6.77).

(iii) Όπως και στο (ii) η απόδειξη του αρχικού κομματιού και αυτού του μέρους του λήμματος, έγινε στα βήματα που μας οδήγησαν στην (6.70). Για να δείξουμε την (6.78) ανακαλούμε το γεγονός ότι όταν $l \in (3/8, 1/2)$, στο $[\omega^*, \omega^{**})$, η συνάρτηση $h(x, \omega)$ είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι $x = \Psi(\omega)$ και κατόπιν γνησίως αύξουσα. Άρα

$$h(1,\omega) > h(\Psi(\omega),\omega) \Leftrightarrow \omega(2-\omega)^{2l} > h(\Psi(\omega),\omega) \Leftrightarrow 1 > \nu_2(\omega). \tag{6.83}$$

(iv) Η απόδειξη του πρώτου σκέλους του (iv) είναι στα επιχειρήματα που μας οδήγησαν στην (6.74). Επιπλέον για $\omega = \omega^{**}$ έχω $\Psi(\omega) = 1$ οπότε $\nu_2(\omega) = 1$.

(v) Υποθέτουμε τώρα ότι $\omega \in (1, \omega^*]$. Αν $\lambda = -1$ και $\mu^p = \frac{(-1)^k[1+(1-\omega)^2]^p}{(2-\omega)^{2k}\omega^{2p-2k}}$ τότε αντικαθιστώντας στην (6.18) προκύπτει άμεσα ότι το -1 είναι ρίζα της f. Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $\lambda \in \partial\Omega$ είναι ρίζα του $f(\lambda)$. Τότε εφόσον $\lambda = x + iy$ και $\mu = \nu_1(\omega)$, παρατηρούμε, από (6.18) και (6.22), ότι $h(x, \omega) = [1 + (\omega - 1)^2]/\omega^{1-21}$. Αλλά επειδή (6.23) ισχύει για κάθε $\mu < \nu_1(\omega)$, θα πρέπει να έχουμε $\lambda = -1$. Θέτοντας $f(-1) = 0$ στην (6.18) προκύπτει άμεσα η ζητούμενη παράσταση για το μ^p.

(vi) Υποθέτουμε ότι $l \in (0, 3/8]$, $\omega \in (\omega^*, 2)$, και ότι $\lambda \in \partial\Omega$ είναι ρίζα του $f(\lambda)$. Τότε εφόσον $\lambda = x + iy$ και $\mu = \nu_2(\omega)$, παρατηρούμε, από (6.18) και (6.22), ότι $h(x, \omega) = h(\Psi(\omega), \omega)$. Αλλά επειδή (6.23) ισχύει για κάθε $\mu < \nu_2(\omega)$ και εφόσον έχουμε και την ισχύ της (6.69), θα πρέπει το x να βρίσκεται στο διάστημα $(-1, 1)$, δηλαδή το λ να είναι φανταστικός.
Στην περίπτωση που $l \in (3/8, 1/2)$, $\omega \in [\omega^*, \omega^{**})$, η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με προηγουμένως.

(vii) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$ και $\mu^p = 1$. Αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο $f(\lambda)$, βλέπουμε ότι αυτό μηδενίζεται. Η απόδειξη της αντίθετης κατεύθυνσης είναι ακριβώς ίδια με αυτή του Λήμματος 6.1.(ii).

6.3 Η γεωμετρία των καμπυλών $\nu_{1,l}(\omega)$, $\nu_{2,l}(\omega)$ και η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3

Κατ΄ αρχήν θα δείξουμε ότι οι καμπύλες $\nu_{1,l}(\omega)$, $\nu_{2,l}(\omega)$ έχουν κοινό σημείο για $\omega = \omega^*$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\Psi(\omega^*) &= \Psi(\omega(\phi^*)) = \frac{1}{4l}[-(1-2l)\phi^2(\omega(\phi^*)) + \phi(\omega(\phi^*)) + 2(1-2l)] \\ &= \frac{1}{4l}[-(1-2l)(\phi^*)^2 + \phi^* + 2(1-2l)] \\ &\overset{(6.41),(6.42)}{=} -1. \end{aligned} \tag{6.84}$$

Επίσης

$$\nu_{1,\,l}(\omega^*) = \frac{h(-1,\omega^*)}{(2-\omega^*)^{2l}\omega^*}, \tag{6.85}$$

και

$$\begin{aligned}\nu_{2,\,l}(\omega^*) &= \frac{h(\Psi(\omega^*),\omega^*)}{(2-\omega^*)^{2l}\omega^*} \\ &= \frac{h(-1,\omega^*)}{(2-\omega^*)^{2l}\omega^*}. \end{aligned} \tag{6.86}$$

Οπότε από (6.85) και (6.86) είναι φανερός ο ισχυρισμός μας.

Συνεχίζουμε με το εξής λήμμα:

Λήμμα 6.4 *Το κοινό σημείο για $\omega = \omega^*$ των καμπυλών $\nu_{1,l}(\omega)$, και $\nu_{2,l}(\omega)$ είναι σημείο επαφής τους.*

Απόδειξη: Εφόσον, όπως είδαμε $\nu_{1,l}(\omega^*) = \nu_{2,l}(\omega^*)$, θα έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[\nu_{1,l}^p(\omega) - \nu_{2,l}^p(\omega)]|_{\omega=\omega^*} = p\ \nu_{1,l}^{p-1}(\omega^*)[\nu_{1,l}'(\omega^*) - \nu_{2,l}'(\omega^*)]. \tag{6.87}$$

Αλλά τότε, επειδή $\nu_{1,l}(\omega^*) \neq 0$, για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας αρκεί να δείξουμε ότι το πρώτο μέλος της ισότητας της εξίσωσης (6.87) είναι 0. Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta(\omega) &:= \frac{\partial}{\partial\omega}[\nu_{1,l}^{p}(\omega) - \nu_{2,l}^{p}(\omega)] \\
&= \frac{1}{(2-\omega)^{4k}\omega^{4p-4k}} \left\{(2-\omega)^{2k}\omega^{2p-2k} p[1+(\omega-1)^2]^{p-1} 2(\omega-1) \right. \\
&\qquad - \left[1+(\omega-1)^2\right]^p \left[-2k(2-\omega)^{2k-1}\omega^{2p-2k} \right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. +(2p-2k)(2-\omega)^{2k}\omega^{2p-2k-1}\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{\omega^{2p}(2-\omega)^{4k}[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)\Psi(\omega)]^{p-2k}} \\
&\quad \times \left\{\omega^p(2-\omega)^{2k}[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)\Psi(\omega)]^{p/2-k} \right. \\
&\qquad \times \frac{p}{2}[1+(\omega-1)^4-2(\omega-1)^2\Psi(\omega)]^{p/2-1} \\
&\qquad \times [4(\omega-1)^3-4(\omega-1)\Psi(\omega)-2(\omega-1)^2\Psi^{'}(\omega)] \\
&\qquad -[1+(\omega-1)^4-2(\omega-1)^2\Psi(\omega)]^{p/2} \\
&\qquad \times \left\{p\,\omega^{p-1}(2-\omega)^{2k}[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)\Psi(\omega)]^{p/2-k} \right. \\
&\qquad\quad +(\frac{p}{2}-k)\omega^p(2-\omega)^{2k}[1+(\omega-1)^2-2(\omega-1)\Psi(\omega)]^{p/2-k-1} \\
&\qquad\quad \left.\left. \times[2(\omega-1)-2\Psi(\omega)-2(\omega-1)\Psi^{'}(\omega)]\right\}\right\}. \qquad (6.88)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη $\Delta(\omega)$ το ω^* παρατηρούμε ότι οι παρονομαστές που εμφανίζονται σ' αυτήν είναι ίσοι. Πράγματι έχουμε

$$
\begin{aligned}
[1+(\omega^*-1)^2-2(\omega^*-1)\Psi(\omega^*)] &= [1+(\omega^*-1)^2+2(\omega^*-1)] \\
&= [(\omega-1)+1]^2 \\
&= (\omega^*)^2. \qquad (6.89)
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$
\frac{1}{(\omega^*)^{2p}(2-\omega^*)^{4k}[1+(\omega^*-1)^2-2(\omega^*-1)\Psi(\omega^*)]^{p-2k}} = \frac{1}{(2-\omega^*)^{4k}(\omega^*)^{4p-4k}}. \qquad (6.90)
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
[1+(\omega^*-1)^4-2(\omega^*-1)^2\Psi(\omega^*)] &= [1+(\omega^*-1)^4+2(\omega^*-1)^2] \\
&= [(\omega^*-1)^2+1]^2. \qquad (6.91)
\end{aligned}
$$

Με βάση τα παραπάνω, κάνοντας αλγεβρικές πράξεις και απλοποιήσεις στη $\Delta(\omega^*)$ έχουμε τελικά ότι

$$
\Delta(\omega^*) = \frac{[1+(\omega^*-1)^2]^{p-2}}{(2-\omega^*)^{2k+1}(\omega^*)^{2p-2k+2}}\Delta_1(\omega^*), \qquad (6.92)
$$

όπου

$$\Delta_1(\omega^*) = (2-\omega^*)(\omega^*-1)\left\{p\ (\omega^*)^2(\omega^*-1) - (p-2k)[1+(\omega^*-1)^2]^2\right\}\Psi^{'}(\omega^*). \quad (6.93)$$

Είναι γνωστό τώρα ότι $\omega^* \neq 1$. (Για την ακρίβεια από τον ορισμό της $\phi(\omega)$ και του ω^* έχουμε ότι $\omega^* > 1$.) Άρα η παράγωγος

$$\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{4l}[1-(\omega-1)^{-2}] - \frac{1-2l}{4l}[2\omega-2-2(\omega-1)^{-3}], \quad (6.94)$$

είναι φραγμένη στο $\omega = \omega^*$. Θα δείξουμε ότι η $\Delta_1(\omega^*)$ είναι 0, όποτε και η $\Delta(\omega^*)$ θα είναι 0, και έτσι θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε από το δεξί μέλος της (6.93)

$$\begin{aligned}
p\ (\omega^*)^2(\omega^*-1) - (p-2k)[1+(\omega^*-1)^2]^2 &= \\
\overset{(6.89),(6.91)}{=} \quad & +p\ (\omega^*-1)[(\omega^*-1)^2+2(\omega^*-1)+1] \\
& \quad -(p-2k)[1+(\omega^*-1)^4+2(\omega^*-1)^2] \\
= \quad & +p\ (\omega^*-1)^2[(\omega^*-1)+2+\frac{1}{(\omega^*-1)}] \\
& \quad -(p-2k)(\omega^*-1)^2[\frac{1}{(\omega^*-1)^2}+(\omega^*-1)^2+2] \\
= \quad & p(\omega^*-1)^2)[-(1-2l)(\phi^*)^2+\phi^*+2] \\
\overset{(6.41),(6.42)}{=} \quad & 0. \qquad (6.95)
\end{aligned}$$

Οπότε η $\Delta(\omega^*) = 0$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Θα επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στην συμπεριφορά της καμπύλης $\nu_{1,l}(\omega)$. Παρατηρούμε από την (6.64) ότι η καμπύλη $\nu_{1,l}(\omega)$ είναι καλά ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $(0,2)$, και όχι μόνο στο $(1,\omega^*]$ όπου ορίστηκε και χρησιμοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 6.2. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι η $\nu_{1,l}(\omega)$ έχει ένα μοναδικό ακρότατο σημείο στο διάστημα $(1,2)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\nu_{1,\ l}^{'}(\omega) &= \frac{1}{[(2-\omega)^{2l}\omega^{2-2l}]^2}\left\{(2-\omega)^{2l}\omega^{2-2l}2(\omega-1) - [1+(\omega-1)^2]\right. \\
& \qquad \left.\times[-2l(2-\omega)^{2l-1}\omega^{2-2l} + (2-\omega)^{2l}(2-2l)\omega^{1-2l}]\right\} \\
&\sim \omega(\omega-1) - [1+(\omega-1)^2]\left[\frac{-l\omega+(1-l)(2-\omega)}{(2-\omega)}\right] \\
&\sim \omega(\omega-1)(2-\omega) - [1+(\omega-1)^2][2(1-l)-\omega] \\
&= \omega(2-\omega)(\omega-1) + (\omega(2-\omega)-2)[2(1-l)-\omega] \\
&= -[(1-2l)\omega^2 - 4(1-l)\omega + 4(1-l)]. \qquad (6.96)
\end{aligned}$$

ω	0		1		$\tilde{\omega}_1$		2
$\nu_{1,\,l}(\omega)$	∞	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞

Πίνακας 4: Συμπεριφορά της $\nu_{1,l}(\omega)$.

Οι ρίζες $\tilde{\omega}_1$ και $\tilde{\omega}_2$ του πολυωνύμου που εμφανίζεται στην τελευταία γραμμή της (6.96) είναι οι

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{2(1-l)^{1/2}}{(1-l)^{1/2}+l^{1/2}}, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{2(1-l)^{1/2}}{(1-l)^{1/2}-l^{1/2}}. \tag{6.97}$$

Αυτές ικανοποιούν πάντα τη συνθήκη $1 < \tilde{\omega}_1 < 2 < \tilde{\omega}_2$. Στον Πίνακα 4 δίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της $\nu_{1,l}(\omega)$. Απ΄ αυτόν μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το $\tilde{\omega}_1$ είναι το μοναδικό ακρότατο σημείο της $\nu_{1,l}(\omega)$ στο διάστημα $(1,2)$.

Στη συνέχεια Θα δώσουμε ακόμη μία ιδιότητα που αφορά στο $\tilde{\omega}_1$.

Λήμμα 6.5 *Το σημείο $(\nu_{1,l}(\tilde{\omega}_1), \tilde{\omega}_1)$ της καμπύλης $\nu_{1,l}(\omega)$ βρίσκεται πριν από το σημείο $(\nu_{1,l}(\omega^*), \omega^*)$ όπου εφάπτονται οι καμπύλες $\nu_{1,l}(\omega)$, και $\nu_{2,l}(\omega)$, δηλαδή αντιστοιχεί σε μικρότερη τεταγμένη $\tilde{\omega}_1 < \omega^*$.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 < \omega^* \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(1-l)^{1/2}}{(1-l)^{1/2}+l^{1/2}} < \frac{2(\phi^*+2)^{1/2}}{(\phi^*+2)^{1/2}+(\phi^*-2)^{1/2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{1+\dfrac{l^{1/2}}{(1-l)^{1/2}}} < \frac{2}{1+\dfrac{(\phi^*-2)^{1/2}}{(\phi^*+2)^{1/2}}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-l}{l} < \frac{\phi^*+2}{\phi^*-2},
\end{aligned} \tag{6.98}$$

όπου από την τελευταία, αντικαθιστώντας το ϕ^* από την (6.42) και κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε στην ισοδύναμη ανισότητα

$$0 < \frac{10l-3+(9-16)^{1/2}+2l(9-16)^{1/2}}{-3+8l+(9-16)^{1/2}}, \tag{6.99}$$

η οποία ισχύει για κάθε $l \in (0, 1/2)$. Έτσι έχουμε και την ισχύ της αρχικής ανισότητας. □

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει τη συμπεριφορά της $\nu_{1,l}(\omega)$ συναρτήσει του ω. Στη συνέχεια θα ερευνήσουμε την εξάρτηση της $\nu_{1,l}(\omega)$ από το l.

Λήμμα 6.6 *Για* $0 < l_1 < l_2 < 1/2$ *ισχύουν τα ακόλουθα*

$$\nu_{1,l_1}(\omega) > \nu_{1,l_2}(\omega), \quad \omega \in (0,1), \tag{6.100.a}$$
$$\nu_{1,l_1}(1) = \nu_{1,l_2}(1), \tag{6.100.b}$$
$$\nu_{1,l_1}(\omega) < \nu_{1,l_2}(\omega), \quad \omega \in (1,2), \tag{6.100.c}$$

Επιπλέον για όλα τα $\omega \in (1,2)$ *ισχύει ότι*

$$\lim_{l \to 0^+} \nu_{1,\ l}(\omega) = \frac{1+(\omega-1)^2}{\omega^2}\ . \tag{6.101}$$

Απόδειξη: Από την (6.64) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{1,l_1}(\omega)}{\nu_{1,l_2}(\omega)} &= \frac{\dfrac{1+(\omega-1)^2}{(2-\omega)^{2l_1}\omega^{2-2l_1}}}{\dfrac{1+(\omega-1)^2}{(2-\omega)^{2l_2}\omega^{2-2l_2}}} \\ &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^{2(l_2-l_1)} \end{aligned} \tag{6.102}$$

Οι (6.100.a)-(6.100.c) προκύπτουν άμεσα από την (6.102). Η έκφραση στην (6.101) προκύπτει και αυτή άμεσα αν πάρουμε το όριο στην (6.64), δηλαδή

$$\lim_{l \to 0^+} \nu_{1,l}(\omega) = \lim_{l \to 0^+} \frac{1+(\omega-1)^2}{(2-\omega)^{2l}\omega^{2-2l}} = \frac{1+(\omega-1)^2}{\omega^2}\ . \qquad \square$$

Για να δείξουμε τώρα την εξάρτηση του σημείου $\tilde{\omega}_1$ της καμπύλης $\nu_{1,l}(\omega)$ από το l θα συμβολίζουμε το σημείο αυτό με

$$\tilde{\omega}_{1,l} := \tilde{\omega}_1.$$

Ομοίως για να δείξουμε την εξάρτηση από το l του σημείου ω^*, όπου, όπως είδαμε και στο Λήμμα 6.5, οι καμπύλες $\nu_{1,l}(\omega), \nu_{2,l}(\omega)$ εφάπτονται σ' αυτό, θα το συμβολίζουμε με

$$\omega_l^* := \omega^*.$$

Από την (6.97) παίρνουμε

$$\lim_{l \to 0^+} \tilde{\omega}_{1,l} = \lim_{l \to 0^+} \frac{2(1-l)^{1/2}}{(1-l)^{1/2}+l^{1/2}} = 2,$$

και καθώς η $\nu_{1,\,l}(\omega)$ είναι συνεχής ως προς το ω, αλλά και ως προς το $l \in (0, 1/2)$, έχουμε από την (6.101) ότι

$$\lim_{l\to 0^+} \nu_{1,l}(\tilde{\omega}_{1,l}) = \frac{1}{2}.$$

Τελικά δείξαμε ότι

$$\lim_{l\to 0^+} (\nu_{1,l}(\tilde{\omega}_{1,l}), \tilde{\omega}_{1,l}) = (\frac{1}{2}, 2). \tag{6.103}$$

Θα εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του σημείων ω_l^* καθώς το l τείνει στο 0. Πρώτα θα δείξουμε ότι για $0 < l_1 < l_2 < 1/2$,

$$\omega_{l_1}^* > \omega_{l_2}^*. \tag{6.104}$$

Πράγματι, από την επιχειρηματολογία, που μας οδήγησε στους τύπους (6.56) και (6.57) άλλα και με άμεσο υπολογισμό, έχουμε ότι

$$\frac{d\omega}{d\phi} \sim \frac{-4}{((\phi)^2 - 4)^{1/2}} < 0, \qquad \phi \in (2, \infty).$$

Άρα

$$\frac{d\omega_l^*}{d\phi_l^*} < 0.$$

Επίσης από την (6.42) υπολογίζουμε την $d\phi_l^*/dl > 0$. Αλλά τότε θα ισχύει και $d\omega_l^*/dl < 0$, από το οποίο προκύπτει η (6.104).
Ξανά από την (6.42) έχουμε $\lim_{l\to 0^+} \phi_l^* = 2$, και εφόσον η ω_l^* είναι συνεχής ως προς ϕ_l^*, έχουμε

$$\lim_{l\to 0^+} \omega_l^* = \lim_{\phi_l^*\to 2^+} \omega(\phi_l^*) = 2. \tag{6.105}$$

Έτσι εφαρμόζοντας για μία ακόμη φορά τη σχέση (6.101) παίρνουμε

$$\lim_{l\to 0^+} (\nu_{1,l}(\omega_l^*), \omega_l^*) = (\frac{1}{2}, 2). \tag{6.106}$$

Έχοντας αναλύσει λεπτομερώς τη συνάρτηση $\nu_{1,l}(\omega)$, στη συνέχεια θα αναλύσουμε και τη συμπεριφορά της $\nu_{2,l}(\omega)$ πρώτα ως συνάρτησης του ω για σταθερό $l \in (0, 1/2)$ και κατόπιν ως συνάρτησης του l για σταθερό $\omega \in (1, 2)$. Πριν ξεκινήσουμε θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η $\nu_{2,l}(\omega)$, όπως άλλωστε φαίνεται και από την (6.3c), ότι αυτή είναι καλά ορισμένη σε ολόκληρο το $(1, \infty)$ και όχι μόνο στο διάστημα $[\omega^*, 2)$.

Λήμμα 6.7 *Έστω $l \in (0, 1/2)$. Τότε* *(i) Για κάθε* $l \in (0, 3/8]$,

$$\nu_{2,l}(\omega_1) < \nu_{2,l}(\omega_2), \quad 1 < \omega_1 < \omega_2 \leq 2. \tag{6.107}$$

(ii) Για κάθε $l \in (3/8, 1/2)$,

$$\nu_{2,l}(\omega_1) < \nu_{2,l}(\omega_2), \quad 1 < \omega_1 < \omega_2 \leq \tilde{\omega}_1^{'} \tag{6.108}$$

και

$$\nu_{2,l}(\omega_1) > \nu_{2,l}(\omega_2), \quad \tilde{\omega}_1^{'} < \omega_1 < \omega_2 < 2, \tag{6.109}$$

όπου

$$\tilde{\omega}_1^{'} = \omega^{**} = \frac{2}{1 + (-3 + 8l)^{1/2}} \ . \quad \textit{(Για την } \omega^{**} \textit{ βλέπε και (6.59))} \tag{6.110}$$

Απόδειξη:

(i) Επειδή η $\nu_{2,l}(\omega)$ είναι καλά ορισμένη για όλα τα $\omega > 1$, συνάγεται από την $(6.3c)$ ότι

$$\begin{aligned}
\nu_2^{'}(\omega) &\sim \omega \left[\frac{1}{2}(\omega - 1)^{-1/2}(\phi + 1)^l + (\omega - 1)^{1/2} l (\phi + 1)^{l-1} \phi^{'} \right] \\
&\quad -(\omega - 1)^{1/2}(\phi + 1)^l \\
&\sim \omega(\phi + 1) + 2l\omega(\omega - 1)\phi^{'} - 2(\omega - 1)(\phi + 1) \\
&= (\phi + 1)(2 - \omega) + 2l\omega(\omega - 1)\phi^{'} \\
&= \left(\omega - 1 + \frac{1}{\omega - 1} + 1 \right)(2 - \omega) + 2l\omega(\omega - 1)\left[1 - \frac{1}{(\omega - 1)^2} \right] \\
&\sim (1 - 2l)\omega^2 - \omega + 1.
\end{aligned} \tag{6.111}$$

Για $l \in (0, 3/8]$ η διακρίνουσα $D = 8l - 3$ του τριωνύμου στην (6.111) είναι αρνητική ή μηδενική, οπότε η $\nu_{2,l}(\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για $l \in (3/8, 1/2)$ η διακρίνουσα του τριωνύμου στην (6.111) είναι θετική. Έτσι οι δύο διακριτές ρίζες αυτού είναι οι

$$\tilde{\omega}_1^{'} = \frac{1 - (-3 + 8l)^{1/2}}{2(1 - 2l)} = \frac{2}{1 + (-3 + 8l)^{1/2}} \ , \tag{6.112}$$

$$\tilde{\omega}_2^{'} = \frac{1 + (-3 + 8l)^{1/2}}{2(1 - 2l)} = \frac{2}{1 - (-3 + 8l)^{1/2}} \ . \tag{6.113}$$

ω	1		$\tilde{\omega}_1^{'}$		2		$\tilde{\omega}_2^{'}$		∞
$\nu_{2,\ l}(\omega)$	$1-2l$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞

Πίνακας 5: Συμπεριφορά της $\nu_{2,\ l}(\omega)$.

Αυτές ικανοποιούν τη συνθήκη $1 < \tilde{\omega}_1^{'} < 2 < \tilde{\omega}_2^{'}$. (Μάλιστα για $l = 3/8$, $\tilde{\omega}_1^{'} = \tilde{\omega}_2^{'} = 2$). Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω Πίνακα 5, ο οποίος δείχνει τα διαστήματα μονοτονίας της $\nu_{2,l}(\omega)$.

Με μία προσεκτική ματιά στον Πίνακα 5 προκύπτουν αμέσως οι (6.108), (6.109). Απομένει να δείξουμε ότι $\omega^{**} = \tilde{\omega}_1^{'}$. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}
\omega^{**} &= \frac{2(\phi^{**}+2)^{1/2}}{(\phi^{**}+2)^{1/2}+(\phi^{**}-2)^{1/2}} \\
&= \frac{2}{1+\left(\dfrac{\phi^{**}-2}{\phi^{**}+2}\right)^{1/2}} \\
&\overset{(6.48)}{=} \frac{2}{1+\left(\dfrac{\dfrac{-1+4l}{1-2l}-2}{\dfrac{-1+4l}{1-2l}+2}\right)^{1/2}} \\
&= \frac{2}{1+(-3+8l)^{1/2}} \quad = \quad \tilde{\omega}_1^{'}\ .
\end{aligned}$$

□

Διατυπώνουμε τώρα ένα λήμμα αντίστοιχο με το Λήμμα 6.5

Λήμμα 6.8 *Το σημείο $(\nu_{2,l}(\tilde{\omega}_1^{'}), \tilde{\omega}_1^{'})$ της καμπύλης $\nu_{2,l}(\omega)$ βρίσκεται μετά το σημείο $(\nu_{2,l}(\omega^*), \omega^*)$ στο οποίο εφάπτονται οι καμπύλες $\nu_{1,l}(\omega)$, και $\nu_{2,l}(\omega)$, δηλαδή αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τεταγμένη $\omega^* < \tilde{\omega}_1^{'}$.*

Απόδειξη: Επειδή ισχύει ότι $\tilde{\omega}_1^{'} = \omega^{**}$, τότε από Παρατήρηση 6.3 η απόδειξη του λήμματος είναι άμεση. (Ουσιαστικά το λήμμα είναι η ίδια η Παρατήρηση 6.3) □

Πριν ερευνήσουμε την εξάρτηση της $\nu_{2,l}(\omega)$ από το l, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της οριακής καμπύλης

$$\nu_{2,1/2}(\omega) := \lim_{l\to(1/2)^-} \nu_{2,l}(\omega), \tag{6.115}$$

για όλα τα $\omega \in (1,2]$. Από την έκφραση (6.3c), και έχοντας υπ' όψιν ότι $\lim_{l\to(1/2)^-}(1-2l)^{1-2l}=1$, έχουμε

$$\lim_{l\to(1/2)^-} \nu_{2,l}(\omega) = \frac{(\omega^2-\omega+1)^{1/2}}{\omega} \quad \forall\omega \in (1,2]. \tag{6.116}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \nu'_{2,1/2}(\omega) &= \frac{\frac{1}{2}(\omega^2-\omega+1)^{1/2}(2\omega-1)\omega-(\omega^2-\omega+1)^{1/2}}{\omega^2} \\ &\sim (2\omega-1)\omega-2\omega^2+2\omega-2) \\ &\sim \omega-2 \quad \leq 0\ . \end{aligned} \tag{6.117}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η $\nu_{2,1/2}(\omega)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,2]$, πράγμα το οποίο συμφωνεί και με τα αποτελέσματα του Λήμματος 6.7 στην περίπτωση όπου $l \in (3/8, 1/2)$. Επίσης σημειώνουμε ότι καθώς $l \to (1/2)^-$ τα τρία σημεία $(\nu_{2,1/2}(\tilde{\omega}_1),\tilde{\omega}_1)$, $(\nu_{2,1/2}(\omega^*),\omega^*)$ και $(\nu_{2,1/2}(\omega^{**}),\omega^{**})$ ταυτίζονται με το $(\nu,\omega)=(1,1)$.

Κάτι άλλο που πρέπει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό είναι ότι

$$\lim_{l\to(1/2)^-}\lim_{\omega\to1^+}(\nu_{2,l}(\omega),\omega) = 0 \neq 1 = \lim_{\omega\to1^+}\lim_{l\to(1/2)^-}(\nu_{2,l}(\omega),\omega).$$

Στη συνέχεια δίνονται και αποδεικνύονται δύο λήμματα που δείχνουν καθαρά το πώς εξαρτάται η καμπύλη $\nu_{2,l}(\omega)$ από το l.

Λήμμα 6.9 *Για $0<l_1<l_2\leq 3/8$ έχουμε το εξής*

$$\nu_{2,l_1}(\omega) < \nu_{2,l_2}(\omega), \quad 1<\omega\leq 2. \tag{6.118}$$

Απόδειξη: Από την έκφραση (6.3c) για την $\nu_{2,l}(\omega)$ έχουμε ότι κάθε ένας από τους παράγοντές της είναι θετικός για $\omega \in (1,2]$, $\ l \in (0,1/2)$. Έτσι και η $\nu_{2,l}(\omega)$ για κάθε ζεύγος (l,ω) στην παραπάνω περιοχή είναι θετική. Θέτουμε

$$\begin{aligned} z &:= z(l,\omega) \;:=\; \ln\nu_{2,l}(\omega) \\ &= \ln\frac{(\omega-1)^{1/2}}{\omega} + l\ln(\phi+1) - \frac{1}{2}\ln(1-2l) + l\ln(1-2l) - l\ln(2l). \end{aligned} \tag{6.119}$$

Παραγωγίζοντας την (6.119) ως προς l έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} &= \ln(\phi+1) - \frac{(-2)}{2(1-2l)} + \ln(1-2l) + l\frac{(-2)}{(1-2l)} - \ln(2l) - l\frac{2}{2l} \\ &= \ln\left[\frac{(1-2l)(\phi+1)}{2l}\right]. \end{aligned} \tag{6.120}$$

Όπως έχουμε επισημάνει και παραπάνω (βλέπε (6.55)), η $\phi(\omega)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο διάστημα $(1, 2]$ και εφόσον $\phi(2) = 2$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{(1-2l)}{2l}(\phi+1) \geq \frac{3(1-2l)}{2l} \quad (\text{με ``$=$'' μόνο για } \phi(2)=2). \tag{6.121}$$

Όμως, για όλα τα $l \in (0, 3/8]$,

$$\frac{3(1-2l)}{2l} \geq 1 \quad (\text{με ``$=$'' μόνο για } l = 3/8).$$

Αυτό το αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με την (6.120) και την (6.119), συνεπάγεται ότι για σταθερό $\omega \in (1, 2]$, η $\nu_{2,l}(\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς l στο διάστημα $(0, 3/8]$. □

Λήμμα 6.10 *Σαν συνάρτηση του* l, *η* $\nu_{2,l}(2)$ *είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $(0, 3/8]$ *και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $[3/8, 1/2)$.

Απόδειξη:

- Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει άμεσα το πρώτο συμπέρασμα για $l \in (0, 3/8]$.
- Για $l \in [3/8, 1/2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l}(2) &= \ln\left[\frac{(1-2l)(\phi(2)+1)}{2l}\right] \\ &= \ln\frac{3(1-2l)}{2l} \quad \leq \quad 0 \quad (\text{με ``$=$'' μόνο για } l=3/8). \end{aligned} \tag{6.122}$$

Οπότε η $\nu_{2,l}(2)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. □

Με μια προσεκτική εξέταση των Λημμάτων 6.4-6.10 αποδεικνύονται οι ισχυρισμοί μας στο Θεώρημα 6.3. Τέλος η (6.16) προκύπτει από τις (6.101), (6.103), (6.106), και από το γεγονός ότι για κάθε $\omega \in (1, 2)$ το οριακό σημείο $\lim_{l\to 0^+}(\nu_{1,l}(\omega), \omega)$, είναι το σημείο

$$\left(\frac{1+(\omega-1)^2}{\omega^2}, \omega\right),$$

όπου η $\nu = (1+(\omega-1)^2)/\omega^2$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της

$$\omega = \frac{2}{1+(2\nu-1)^{1/2}}, \quad \nu \in (1/2, 1).$$

Αναφορές

[ChCa85] L. Chong and D. Y. Cai. *Relationship Between Eigenvalues of Jacobi and SSOR Iterative Matrix With $p-$Weak Cyclic Matrix.* J. Comput. Math. Coll. Univ.(in Chinese) 1:79–84, 1985.

[ΧαΔο] Β. Δουγάλης, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος. *Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας.* Ηράκλειο, 2003

[DaMi63] E. D'Sylva and G.A. Miles. *The S.S.O.R. Iteration Scheme for Equations With σ_1-Orderings.* Computer J. , 6:271–273, 1963.

[HaNe89] A. Hadjidimos and M. Neumann. *Precise Domains of Convergence for the Block SSOR Method Associated with $p-$Cyclic Matrices.* BIT, 29:311–320, 1989.

[HaNe90] A. Hadjidimos and M. Neumann. *Convergence Domains of the SSOR Method for Generalized Consistently Ordered Matrices.* J. Comput. Appl. Maths, 33:35–52, 1990.

[He] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis.* Wiley, New York, 1974.

[Ka58] W. Kahan. *Gauss-Seidel Methods of Solving Large Systems of Linear Equations.* Doctoral Thesis, University of Toronto, Toronto, Canada, 1958.

[Ly64] M.S. Lynn. *On the Equivalence of SOR, SSOR and USSOR as Applied to σ_1-Ordered Systems of Linear Equations.* Computer J. , 7:72–75, 1964.

[Sa96] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PWS Publishing Company, Boston. MA, 1996.

[VNC84] R.S. Varga, W. Niethammer, and D.Y. Cai. *$p-$Cyclic Matrices and the Symmetric Successive Overrelaxation Method.* Linear Algebra Appl. , 58:425–439, 1984.

[Va] R.S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* 2nd, revised and expanded, edition. Springer, Berlin. 2000.

[Va59] R.S. Varga. *$p-$Cyclic Matrices: A Generalization of the Young-Frankel Successive Overrelaxation Scheme.* Pacific J. Math. , 9:617–628, 1959.

[VeBe68] J.H. Verner and M.J.M.. Bernal. *On Generalizations of the Theory of Consistent Orderings for Successive Overrelaxation Methods.* Numer. Math. , 12:215–222, 1968.

[Ya] D.M. Young. *Iterative Solution of Large Linear Systems.* Academic Press, New York, 1971.

[Ya50] D.M. Young. *Iterative Methods for Solving Partial Differential Equations of Elliptic Type.* Doctoral Thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1950.

[Da03] A. Dax. *An Open Question on Cyclic Relaxation.* BIT Numerical Mathematics vol.43, no. 5, pp. 929-943, 2003.

[Cr71] C.W. Cryer *The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Overrelaxation.* SIAM J.Control , 9:385-392,1971.