ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΚΑΡΑΤΖΙΑ

«Εκτιμητές με συρρικνωτές της παραμέτρου θέσεως νόμων με ελλειπτική συμμετρία για το γενικό γραμμικό μοντέλο»

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτή η εργασία αποτελεί μέρος μιας εκτεταμένης θεωρίας επί των εκτιμητών με συρρικνωτή.

Αυτή η θεωρία, η οποία τοποθετείται στο πλαίσιο της γραμμικής στατιστικής συμπερασματολογίας, έχει εισαχθεί από τους $James$ και $Stein$(1961) και έκτοτε έχει δώσει θέση σε πολυάριθμες και ποικίλες επεκτάσεις (γενικά βιβλία που αναφέρονται σ' αυτήν τη θεωρία είναι π.χ εκείνα των $Judge$ και $Bock$(1978), $Arnold$(1981) και $Gruber$(1998)). Όμως παρά τα πολλαπλά πλεονεκτήματα των εκτιμητών με συρρικνωτή, αυτοί δεν αναπληρώνουν πάντοτε τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων(ε.ε.τ).

Τα παρακάτω κεφάλαια, στα οποία υιοθετείται η "$coordinate\ free$" προσέγγιση των νόμων με σφαιρική συμμετρία (Κεφ.1) καθώς και εκείνη του προβλήματος εκτίμησης της παραμέτρου θέσεως νόμων με ελλειπτική συμμετρία (Κεφ.2, 3, 4) αποτελούν μια αναλυτική συνθετική εργασία των άρθρων των $Cellier$, $Fourdrinier$ και $Robert$ (1985 έως 1994) επί των εκτιμητών με συρρικνωτή. Μια δε εφαρμογή στην οποία γίνεται χρήση ενός εκτιμητή με συρρίκνωση σε πραγματικά δεδομένα δίδεται στο τέλος της εργασίας(Κεφ.5).

1.ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

1.1 Στο πλαίσιο της θεωρίας των εκτιμητών με συρρικνωτή (διαφορετικά λεγόμενη των $James - Stein$) του μέσου ϑ, ενός κανονικού νόμου (διανύσματος) y επί του E (διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n επί του $\mathbb{R}$) ή γενικότερα της παραμέτρου θέσεως ϑ νόμου με ελλειπτική συμμετρία, δεχόμαστε ότι: το ϑ ανήκει σε ένα γνωστό διανυσματικό υπόχωρο Θ του Ε διαστάσεως k $(0 < k < n)$ και ότι η διασπορά αυτού του νόμου είναι $\sigma^2 v$, όπου το σ^2 (λεγόμενος *παράγοντας της διασποράς*) είναι *γνωστός* ή *άγνωστος* ενώ το v είναι *γνωστή* και θετικά ορισμένη διγραμμική συμμετρική μορφή επί του E^* (δυϊκός του Ε)(στην περίπτωση των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων η παράμετρος διακύμανσης θεωρείται *ολικά γνωστή*).

Θεωρούμε μια γενική τετραγωνική απώλεια και με την βοήθεια του συνδεδεμένου με αυτήν κινδύνου συγκρίνουμε με τον ε.ε.τ. φ^0 τους εκτιμητές φ τέτοιους ώστε το $\varphi(y) - \varphi^0(y)$ να είναι συγγραμμικό με την εικόνα του $\varphi^0(y)$ υπό ένα ενδομορφισμό c του Θ. Είναι πρακτικό αυτοί οι εκτιμητές να γραφούν γενικά υπό τη μορφή:

$$\varphi(y) = \varphi^0(y) - H\Big(\varphi^0(y), y - \varphi^0(y)\Big)c(\varphi^0(y))$$

όπου Η είναι μια απεικόνιση του $\Theta \times \Theta^\perp$ μέσα στον $\mathbb{R}$ ($^\perp$ σημειώνει την ορθογωνικότητα αναφορικά με την v^{-1}) και η Η ονομάζεται *συρρικνωτής*.

Σημειώνουμε με $\overline{v^{-1}}$ την τετραγωνική μορφή που συνδέεται με την v^{-1} (και $\overline{v^{-1}_{\Theta^\perp}}$ τον περιορισμό της επί του $\Theta^\perp$). Υπενθυμίζουμε ότι ο

$$s^2(y) = \frac{\overline{v_{\Theta^\perp}^{-1}}(y - \varphi^0(y))}{n-k}$$

είναι ο συνήθης αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2.

Η ιδιαίτερη περίπτωση όπου υπάρχει μια τετραγωνική μορφή $\bar{b}$ επί του Θ τέτοια ώστε η $H(x,z)$ να είναι συνάρτηση του ζεύγους $\Big(\bar{b}(x),\ \overline{v_{\Theta^\perp}^{-1}}(z)\Big)$ αποτελεί το αντικείμενο αυτής της εργασίας υπό διάφορα σχήματα υποθέσεων επί του c και επί του συρρικνωτή (και επομένως ιδιαίτερα επί του $\bar{b}$ και $\overline{v_{\Theta^\perp}^{-1}}$).

Γενικά οι υποθέσεις επί των αλγεβρικών μετασχηματισμών b και c είναι λιγότερο εξαναγκαστικές από τις υποθέσεις αναλυτικότητας για την συνάρτηση Η οι οποίες είναι περιοριστικές.

Ένα ιδιαίτερο περιοριστικό πλαίσιο επιλογής του b είναι εκείνο όπου διαθέτουμε λίγη πληροφορία για τη διασπορά των παρατηρήσεων. Μια τέτοια περίπτωση είναι εκείνη όπου η κοινή διασπορά των παρατηρήσεων είναι πλήρως άγνωστη. Η συνάρτηση συρρίκνωσης εξαρτάται τότε μόνο από το $\varphi^0(y)$ μέσω της τιμής στο $\varphi^0(y)$ της αντίστροφης τετραγωνικής μορφής του εκτιμητή της διασποράς ο οποίος ακολουθεί την κατανομή $Wishart$.

Υπάρχουν πολλές εργασίες για τις οποίες όμως η επιλογή των b και c είναι πιο περιοριστική από αυτή των κεφαλαίων 2,3,4 όπως όταν $b = v_\Theta^{-1}$ και $c = id_\Theta$ για πολυάριθμα αποτελέσματα ή όπως στον $Berger$ (1976) όπου $b = v_\Theta^{-1} q^{-1} v_\Theta^{-1}$ και $c = q^{-1} v_\Theta^{-1}$.

1.2 Για μια συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, σημειώνουμε:

$$E_{\vartheta,\sigma}[g(y)] = \int_E g(y) P_{\vartheta,\sigma}(dy) \qquad \text{όπου} \qquad P_{\vartheta,\sigma} = \mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2 v)$$

ή για ένα ελλειπτικά συμμετρικό νόμο P_ϑ γύρω από το ϑ,

$$E_\vartheta[g(y)] = \int_E g(y) P_\vartheta(dy)$$

***Εκτιμητές των* James – Stein**

Οι εκτιμητές του ϑ συγκρίνονται μέσω μιας τετραγωνικής απώλειας συνδεδεμένη με μια διγραμμική συμμετρική μορφή q επί του Θ. Όπως στους περισσότερους συγγραφείς και εδώ θεωρείται η απώλεια

$$\sigma^{-2}\bar{q}\Big(\varphi(y) - \vartheta\Big)$$

(ενώ για ελλειπτικά συμμετρικούς νόμους θεωρούμε την $\bar{q}(\varphi(y) - \vartheta)$) σαν τιμή της απώλειας η οποία υφίσταται όταν εκτιμήσουμε το ϑ με το $\varphi(y)$. Ο συνδεμένος με αυτήν κίνδυνος θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} R(\varphi; \vartheta, \sigma) &= E_{\vartheta,\sigma}[\sigma^{-2}\bar{q}(\varphi(y) - \vartheta)] \\ (\text{ή} \qquad R(\varphi; \vartheta) &= E_\vartheta[\bar{q}(\varphi(y) - \vartheta)]) \end{aligned}$$

Αυτό το πλαίσιο γενικεύεται στο Κεφάλαιο 3 στο οποίο θεωρείται μια οικογένεια από απώλειες συνδεδεμένες με μια οικογένεια γραμμικών μορφών.

Είναι καλά γνωστό ότι ο ε.ε.τ. φ^0 του ϑ είναι ελάχιστου κινδύνου μεταξύ των αμερόληπτων γραμμικών εκτιμητών (Θεώρημα των $Gauss - Markov$) και ακόμη, για τον κανονικό νόμο, μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών του ϑ (Θεώρημα των $Lehmann - Scheffe$). Από το άλλο μέρος αυτός είναι $minimax$ (δηλαδή ο φ^0 ελαχιστοποιεί τον μέγιστο κίνδυνο, $\sup_{\vartheta,\sigma} R(\varphi;\vartheta,\sigma)$, μεταξύ όλων των εκτιμητών φ) σταθερού κινδύνου ίσου με το $tr(v_\Theta q)$. Για τον κανονικό νόμο ο φ^0 είναι εξίσου ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας.

Όμως το 1956, ο $C.Stein$ αποδεικνύει ότι ο φ^0 είναι παραδεκτός μόνο όταν $k \leq 2$ δηλαδή όταν $k \geq 3$, υπάρχει πάντοτε ένας εκτιμητής $\tilde{\varphi}$ τέτοιος ώστε:

$$R(\tilde{\varphi};\vartheta,\sigma) \leq R(\varphi^0;\vartheta,\sigma)$$

για κάθε (ϑ,σ), με την αυστηρή ανισότητα να ισχύει για ένα τουλάχιστον (ϑ,σ). Αργότερα οι $James$ και $Stein(1961)$ δίνουν τον εκτιμητή

$$\varphi_{JS}(y) = \Big(1 - \rho\frac{s^2(y)}{v_\Theta^{-1}(\varphi^0(y))}\Big)\varphi^0(y)$$

με $\rho = \frac{(n-k)(k-2)}{n-k+2}$, ο οποίος έχει κίνδυνο ομοιομόρφως μικρότερο από εκείνον του φ^0 για τον "συνήθη" κίνδυνο συνδεδεμένο με την $q = v_\Theta^{-1}$. Φαίνεται τότε το γιατί ο εκτιμητής φ_{JS}, λεγόμενος των $James - Stein$, έχει ονομαστεί *εκτιμητής με συρρικνωτή*: αυτός πολλαπλασιάζει τον εκτιμητή φ^0 με ένα συντελεστή μικρότερο του 1 και τον συρρικνώνει προς το 0.

2. ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΤΕΣ

Στη συνέχεια πολλοί συγγραφείς εκμεταλεύονται το αποτέλεσμα των $James - Stein$ και το γενικεύουν κατά διάφορους τρόπους σχηματίζοντας σιγά σιγά έναν ειδικό κλάδο της γραμμικής στατιστικής (βλ.$Judge$ και $Bock(1978)$). Παρουσιάζουμε σε αυτήν την παράγραφο τα κυριότερα βήματα της θεωρίας των εκτιμητών με συρρίκνωση:

Ο $Baranchik(1964)$ εισάγει για πρώτη φορά την έννοια της συνάρτησης συρρίκνωσης, h, θεωρώντας τους εκτιμητές:

$$\varphi_B(y) = \Big(1 - h\Big(\frac{s^2(y)}{v_\Theta^{-1}(\varphi^0(y))}\Big)\Big)\varphi^0(y)$$

και αποδεικνύει επί της h ικανές συνθήκες κυριαρχίας του φ επί του φ^0. Πολλοί συγγραφείς από το 1964 μέχρι το 1976 γενικεύουν αυτές τις υποθέσεις.

Μια δεύτερη γενίκευση εισάγεται από τους $Berger$ και $Bock(1976)$ με τον *ενδομορφισμό συρρίκνωσης* c, ενδομορφισμός του Θ, θεωρώντας τους εκτιμητές:

$$\varphi_{BB}(y) = \Big(id_\Theta - h\Big(\frac{s^2(y)}{v_\Theta^{-1}(\varphi^0(y))}\Big)c\Big)\varphi^0(y)$$

Οι $Judge$ και $Bock(1978)$ γενικεύουν αυτούς τους εκτιμητές στους

$$\varphi_{JB}(y) = \Big(id_\Theta - h\Big(\frac{s^2(y)}{b(\varphi^0(y))}\Big)c\Big)\varphi^0(y)$$

όπου b είναι μια διγραμμική μορφή επί του Θ η οποία διαγωνιοποιείται όπως και ο c, σε μια ίδια βάση v_Θ^{-1}-ορθοκανονική και q-ορθογώνια. Επειδή οι συναρτήσεις συρρίκνωσης είναι πάντα θετικές, παρατηρούμε ότι, μέσα σε μια τέτοια βάση, οι διάφορες συντεταγμένες του $\varphi^0(y)$ "συρρικνώνονται" προς το 0.

Οι επαρκείς υποθέσεις των *Judge* και *Bock* επί της h γενικεύονται από τους *Cellier* και *Fourdrinier*(1985)(Κεφ.2) στην περίπτωση που η συνάρτηση συρρίκνωσης δεν είναι διαφορίσιμη ούτε καν συνεχής και επεκτείνουν τα αποτελέσματα τους (Κεφ.3) θεωρώντας τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \Big(id_\Theta - h\Big(\bar{b}(\varphi^0(y)), \frac{1}{s^2(y)}\Big)c\Big)\varphi^0(y)$$

με υποθέσεις λιγότερο εξαναγκαστικές επί της συνάρτησης συρρίκνωσης και με μία παρατήρηση y ακολουθώντας ένα νόμο με ελλειπτική συμμετρία.

Να σημειώσουμε ότι ο *Brown*(1966) γενικεύει το αποτέλεσμα του *Stein*(1956) με την εκτίμηση της παραμέτρου θέσεως μιας ευρείας κλάσης νόμων. Άλλοι συγγραφείς χρησιμοποιούν τους εκτιμητές με συρρίκνωση για να κυριαρχήσουν τον ε.ε.τ της παραμέτρου θέσεως ϑ νόμων, πέραν του κανονικού, κυρίως νόμων με σφαιρική συμμετρία.

Στο Κεφ.3 αποδεικνύονται εξ ίσου υποθέσεις πολύ γενικές της κυριαρχίας επί του ε.ε.τ της παραμέτρου θέσεως νόμων με ελλειπτική συμμετρία εν αντιθέσει με τους προηγούμενους συγγραφείς όπου οι υποθέσεις είναι ανεξάρτητες της οικογένειας των θεωρούμενων νόμων.

Να σημειώσουμε ότι για τους περισσότερους νόμους, ο θεωρούμενος εκτιμητής φ^0 δεν είναι εκείνος των ελαχίστων τετραγώνων, αλλά εκείνος της μεγίστης πιθανοφάνειας. Είναι λοιπόν ενδιαφέρον να εξετάσουμε την επιρροή των εκτιμητών με συρρικνωτή επί της επίδοσης αυτού του εκτιμητή (βλ. Κεφ.5).

Υπενθυμίζουμε ότι ο *Stein*(1981) εισάγει μία κλάση εκτιμητών της μορφής:

$$\varphi_S(y) = \varphi^0(y) + grad \log[f(\varphi^0(y))]$$

όπου η f είναι μια C^1 *superharmonic* συνάρτηση επί του Θ (ταυτίζοντας τον Θ με τον χώρο των παρατηρήσεων E και αυτόν με τον $\mathbb{R}^k$) όταν ο τελεστής της διασποράς είναι γνωστός.

Οι *Brandwein* και *Strawderman*(1991) γενικεύουν τα αποτελέσματα του *Stein* σε ένα πλαίσιο σφαιρικά συμμετρικών νόμων, δεδομένης πυκνότητας, με τους εκτιμητές:

$$\varphi_{BS} = \varphi^0(y) + \alpha g(\varphi^0(y))$$

όπου $\alpha(>0)$ μεταβάλλεται σε ένα φραγμένο διάστημα και το *divg* να είναι *super-harmonic.*

Οι *Cellier* και *Fourdrinier*(1991, 1994) (Κεφ.4) γενικεύουν τα αποτελέσματα εκείνων σε ένα γενικότερο πλαίσιο νόμων με ελλειπτική συμμετρία(χωρίς την ανάγκη ύπαρξης πυκνότητας) με τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \varphi^0(y) + \|y - \varphi^0(y)\|^2 g(\varphi^0(y))$$

κάνοντας μη-αναγκαία την υπόθεση της *superharmonicity* επί της g και δίδοντας μια ακριβή έκφραση της διαφοράς των κινδύνων των φ και φ^0 και όχι απλά ένα κάτω φράγμα όπως στους *Brandwein* και *Strawderman.*

3. ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να καταστήσει σαφείς τις υποθέσεις κυριαρχίας του φ^0 από τον φ φερόμενες επί της συνάρτησης συρρίκνωσης h (εξαρτόμενη από τα $\bar{b}(x)$ και $\overline{v^{-1}}(z)$) και σχετικά με τις οποίες ορισμένα κλασικά αποτελέσματα να φαίνονται σαν πορίσματα.

Επίσης να δώσει μια ποικιλία υποθέσεων αλγεβρικής φύσεως (επί του c και ενδεχομένως επί του b) και αναλυτικές υποθέσεις επί της h. Στην πορεία της εργασίας οι πρώτες θα έχουν την τάση να ελλαττώνονται και ταυτοχρόνως οι δεύτερες να ενισχύονται.

Συγκεκριμένα

– στο Κεφ.1 δίδεται μια αναλυτική μελέτη των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων με χαρακτηριστικές ιδιότητες αναγκαίες στην μελέτη των εκτιμητών με συρρίκνωση για την παράμετρο θέσεως αυτών των νόμων.

– στο Κεφ.2 περιοριζόμαστε στην ιδαίτερη περίπτωση της κανονικότητας των νόμων χωρίς καμμία υπόθεση αναλυτικότητας επί της συνάρτησης συρρικνώσεως h ενώ ο c και η b είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι μέσα σε μια βάση v_Θ^{-1}-ορθοκανονική και q-ορθογώνια.

– στο Κεφ.3 επανερχόμαστε στην ελλειπτικότητα των νόμων και η h δεν είναι διαφορίσιμη. Όμως οι υποθέσεις κυριαρχίας επί του φ^0 που συνδέονται με την κλάση των απωλειών, εξαρτώνται από την κλάση των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων δια μέσου της κοινής τους παραμέτρου διακύμανσης αποδεικνύοντας έτσι την *robustesse* αυτών των εκτιμητών ενώ διατηρούνται οι αλγεβρικές υποθέσεις του Κεφ.2.

– στο Κεφ.4 υπό τους ελλειπτικά συμμετρικούς νόμους γύρω από το ϑ (χωρίς την ανάγκη ύπαρξης πυκνότητας) και μόνο με την χρήση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων αυτών των νόμων, για ιδιαίτερης μορφής εκτιμητές με συρρίκνωση στους οποίους δεν υπεισέρχεται η $\bar{b}$ και ο ενδομορφισμός c αντικαθίσταται από μια διανυσματική συνάρτηση g, δεχόμαστε την παραγωγισιμότητα του παράγοντα συρρίκνωσης g.

– στο Κεφ.5 παραθέτουμε δύο εφαρμογές της πιο απλής μορφής εκτιμητών με συρρίκνωση, του αρχικού εκτιμητή του *Stein*, σε πραγματικά δεδομένα. Στις εφαρμογές αυτές γίνεται φανερή η κυριαρχία του εκτιμητή με συρρίκνωση επί του συνήθη εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων παρουσιάζοντας την πρακτική και πραγματική σημασία αυτών των εκτιμητών.

Ορισμένες τεχνικές αποδείξεων έχουν ανάγκη κάποιων λημμάτων τα οποία στηρίζονται στο ολοκλήρωμα του *Stieltjes* και δίδονται ως Παράρτημα στο Κεφ.2. Όμως, στο τέλος της εργασίας ακολουθεί ένα άλλο Παράρτημα το οποίο δίδεται για να διευκρινιστούν κλασικά αποτελέσματα που εμφανίζονται στους υπολογισμούς και αναφέρεται στις μη-κεντρικές $\mathcal{X}^2$ και $\mathcal{F}$ κατανομές.

Κεφάλαιο 1

ΕΠΙ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΜΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Στο πλαίσιο της θεωρίας των εκτιμητών με συρρικνωτές (λεγόμενοι εκτιμητές των *James–Stein*) αποδεικνύεται, όπως φαίνεται στα παρακάτω κεφάλαια, ενδιαφέρουσα η μελέτη των ιδιοτήτων αυτών των εκτιμητών σε προσέγγιση «*coordinate free*» και μέσα σε ένα πλαίσιο πιο γενικό απο εκείνο του πολυδιάστατου κανονικού νόμου.

Σε αυτό το μέρος συγκεντρώνουμε και ενοποιούμε τα αποτελέσματα τα οποία φαίνονται ενδιαφέροντα μέσα στο στατιστικό πλαίσιο του γραμμικού μοντέλου ακολουθώντας τους *Cellier* και *Fourdrinier* (1989). Σκοπός μας είναι να χορηγήσουμε μια παρουσίαση «*coordinate free*» των νόμων με ελλειπτική συμμετρία μέσα σε ένα γενικό πλαίσιο ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, μέσα στον οποίο η ιδιότητα του αναλλοιώτου μέσω ορθογώνιου μετασχηματισμού συνδέεται με την έννοια της παραμέτρου διακύμανσης. Συγγραφείς όπως ο *Kruskal*[31] και ο *Stone*[40], αναπτύσουν το ενδιαφέρον μιας τέτοιας προσέγγισης όσον αφορά τη διαφάνεια, τη συντομία και τον ουσιώδη χαρακτήρα των λαμβανομένων αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια, το Ε θα σημειώνει έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο (δηλαδή διανυσματικό χώρο επί του σώματος $\mathbb{R}$) πεπερασμένης διάστασης n . Εφοδιάζουμε τον Ε με την τοπολογία που γενάται απο τις γραμμικές μορφές επί του Ε και τη συνδεδεμένη με αυτή σ-άλγεβρα των *boreliennes* $\mathcal{B}(\mathrm{E})$, η οποία είναι επίσης, επειδή ο Ε είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, η σ-άλγεβρα που γεννάται από τις γραμμικές μορφές.

1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω (Ω ,$\mathcal{F}$,μ) ένας χώρος μέτρου. Σημειώνουμε με $M(\Omega, \mathcal{F})$ το διανυσματικό χώρο των μετρησίμων συναρτήσεων του $(\Omega, \mathcal{F})$ στον $(E, \mathcal{B}(E))$.

1.1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΟΥ $M(\Omega, \mathcal{F})$

Ορισμός 1.1.1

*Έστω $f \in \mathrm{M}(\Omega,\mathcal{F})$. Λέμε ότι η f είναι μ-**ολοκληρώσιμη** αν*

$$\forall t \in E^*(\textit{δυϊκός του } E), \quad t \circ f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

Σε αυτήν την περίπτωση ονομάζουμε **ολοκλήρωμα** της f αναφορικά με το μ το στοιχείο

$\mu(f)$ του E^{**} το οποίο θα συμβολίζουμε με $\int_\Omega f d\mu$ ή επίσης με $E_\mu f$ αν το μ είναι μια πιθανότητα, ορισμένο απο:

$$\forall t \in E^*, \ \ \mu(f)(t) = \mu(t \circ f)$$

Παρατήρηση 1.1.2

Επειδή ο E^{**} είναι κανονικά ισόμορφος με τον E, θα ταυτίσουμε το $\mu(f)$ με το διάνυσμα του E, το οποίο συμβολίζουμε με τον ίδιο τρόπο, ορισμένο από:

$$\forall t \in E^*, \ \ \mu(f)(t) = t(\mu)(f)$$

Ορισμός 1.1.3

*Έστω P ένα μέτρο πιθανότητας επί του $(E, \mathcal{B}(E))$. Αν η id_E είναι P ολοκληρώσιμη και αν συμβολίσουμε $m = E_P(id_E)$, λέμε ότι το P δέχεται **μέσο** m.*

Ειδική περίπτωση 1.1.4

Υποθέτουμε ότι ο E είναι ευκλείδειος χώρος. Σημειώνουμε με $< \, , \, >$ το βαθμωτό γινόμενο και με $\| \cdot \|$ την επαγόμενη νόρμα. Οι E και E^* είναι τότε ισόμορφοι μέσω του ισομορφισμού του E επί του E^*, $u \rightsquigarrow < u, \cdot >$.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

Πρόταση 1.1.5

Αν $f \in \mathrm{M}(\Omega, \mathcal{F})$, τότε

1. *η f είναι μ-ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\forall u \in E, \ \ < u, f(.) > \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

2. *το ολοκλήρωμα της f, $\mu(f)$,είναι το μοναδικό διάνυσμα του E που επαληθεύει την:*

$$\forall u \in E, \ \ < u, \mu(f) > = \int_\Omega < u, f(\omega) > \mu(d\omega)$$

3. *η f είναι μ-ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$||f|| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

δηλαδή η f είναι «ισχυρά» ολοκληρώσιμη (Bochner-ολοκληρώσιμη).

Απόδειξη

1. Αν η f είναι μ-ολοκληρώσιμη τότε, $\forall t \in E^*$, $t \circ f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Επειδή $\forall u \in E$, $< u, . >$ είναι γραμμική μορφή επί του E, η προηγούμενη σχέση θα ισχύει και για $t = < u, . >$.
Αντιστρόφως έστω ότι: $\forall u \in E$, $< u, f(.) > \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Τότε αν $t \in E^*$ επειδή η $u \rightsquigarrow < u, . >$ είναι επί, $\exists u_0 \in E : t = < u_0, . >$. Λοιπόν $t \circ f = < u_0, f(.) > \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

2. Η μοναδικότητα του $\mu(f) (\in E)$ είναι άμεση επειδή

$$\forall t \in E^*, \ \ \mu(f)(t) = \mu(t \circ f) = t(\mu(f))$$

Λοιπόν αν υπάρχει ένα άλλο διάνυσμα $[\mu(f)]'$ του Ε, αυτό οφείλει να ικανοποιεί:

$$\forall u \in E, \ < u, [\mu(f)]' >= \int_\Omega < u, f(\omega) > \mu(d\omega)$$

όπου $\int_\Omega < u, f(\omega) > \mu(d\omega) =< u, \mu(f) >$. Από όπου το αποτέλεσμα επειδή η $y \rightsquigarrow < y, . >$ είναι ισομορφισμός.

3. Έστω $||f|| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Για κάθε $u \in E$ και κάθε ω∈Ω, από την ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$, έχουμε:

$$| < u, f(\omega) > | \leq \|u\|\|f(\omega)\|$$

Λοιπόν η f είναι μ-ολοκληρώσιμη.
Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η f είναι μ-ολοκληρώσιμη. Έστω $(e_1, ..., e_n)$ μια ορθοκανονική βάση του Ε. Για κάθε $x \in E$, έχουμε:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |$$

Για κάθε $i(\in 1, 2, ..., n)$, $< e_i, f(.) >\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ και λοιπόν $\|f\| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
Σημειώνουμε ότι εδώ η $\|f\|^2$ είναι η απεικόνιση από τον Ω στον $\mathbb{R}_+$: $\omega \rightsquigarrow \|f(\omega)\|^2$

1.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 1.2.1

Έστω P μια πιθανότητα επί του $(E, \mathcal{B}(E))$. Ονομάζουμε ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** *του P την απεικόνιση ϕ_P, από τον E^* στο $\mathbb{C}$ ορισμένη από:*

$$\forall t \in E^*, \ \phi_P(t) = E_P(e^{it})$$

Παρατήρηση 1.2.2

Αν P_t συμβολίζει το νόμο εικόνα της P μέσω του t τότε έχουμε:

$$\forall t \in E^*, \ \phi_P(t) = \phi_{P_t}(id_\mathbb{R})$$

Αν το f είναι μια γραμμική απεικόνιση απο τον Ε σε ένα άλλο πραγματικό διανυσματικό χώρο F πεπερασμένης διάστασης, τότε έχουμε:

$$\forall s \in F^*, \ \phi_{P_f}(s) = \phi_P({}^t f(s))$$

Πράγματι, από το θεώρημα της μεταφοράς, έχουμε:

$$\forall t \in E^*, \ \phi_P(t) = E_P(e^{it}) = \int_E e^{it(x)} P(dx) = \int_\mathbb{R} e^{iy} P_t(dy) = \phi_{P_t}(1)$$

όπου $1 = id_\mathbb{R}$

Για το δεύτερο μέρος της παρατήρησης, επειδή μια τέτοια γραμμική απεικόνιση είναι μετρήσιμη, από το θεώρημα της μεταφοράς, έχουμε:

$$\forall s \in F^*, \ \phi_{P_f}(s) = \int_F e^{is} dP_f = \int_E e^{is \circ f} dP = \phi_P({}^t f(s))$$

Ειδική περίπτωση 1.2.3

Στην περίπτωση του ευκλείδιου χώρου $(E, <,>)$, η ϕ_P θα ταυτίζεται με την απεικόνιση από τον Ε στο $\mathbb{C}$ που ορίζεται από την:

$$\forall u \in E, \;\; \phi_P(u) = E_P(e^{i<u,.>})$$

Στην περίπτωση λοιπόν που ο $E = \mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, επιστρέφουμε στη συνήθη έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Πρόταση 1.2.4

Αν P, Q είναι δυο πιθανότητες επί του $(E, \mathcal{B}(E))$ τέτοιες ώστε $\phi_P = \phi_Q$ τοτε $P = Q$

Απόδειξη

Ο Ε είναι πεπερασμένης διάστασης n. Έστω ξ ο συνήθης ισομορφισμός του Ε επί του $\mathbb{R}^n$. Αν P_ξ και Q_ξ είναι οι νόμοι εικόνες των νόμων P και Q μέσω του ξ, από την Παρατήρηση 1.2.2 έχουμε:

$$\forall s \in (\mathbb{R}^n)^*, \;\; \phi_{P_\xi}(s) = \phi_P({}^t\xi(s)) = \phi_Q({}^t\xi(s)) = \phi_{Q_\xi}(s)$$

Επειδή η πρόταση είναι αληθινή στον $\mathbb{R}^n$, $P_\xi = Q_\xi$ και λοιπόν $P = Q$ αφού $\mathcal{B}(E) = \sigma(\xi)(= \xi^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}))$.

Πόρισμα 1.2.5

Κάθε πιθανότητα P επί του E χαρακτηρίζεται από τις εικόνες της μέσω όλων των γραμμικών μορφών επί του E.

Απόδειξη

Έστω Q μια άλλη πιθανότητα επί του Ε τέτοια ώστε:

$$\forall t \in E^*, \;\; P_t = Q_t$$

Τότε, απο την Παρατήρηση 1.2.2, έχουμε για κάθε $t \in E^*$,

$$\phi_{P_t}(1) = \phi_{Q_t}(1) \Rightarrow \phi_P(t) = \phi_Q(t)$$

Λοιπόν, από την Πρόταση 1.2.4, $P = Q$.

1.3 ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙ ΤΟΥ $(E, \mathcal{B}(E))$.

Έστω k ένας ακέραιος θετικός, μη μηδενικός (δηλ. $k \in \mathbb{N}$)

Ορισμός 1.3.1

*Λέμε οτι μια πιθανότητα P επί του $(E, \mathcal{B}(E))$ είναι **τάξης** k , αν :*

$$\forall t \in E^*, \;\; t \in L^k(E, \mathcal{B}(E), P).$$

Είναι φανερό ότι αν P είναι τάξης k τότε είναι και τάξης j , για κάθε j με $j \leq k$.

Πρόταση 1.3.2

Μια πιθανότητα P επί του $(E,\mathcal{B}(E))$ είναι τάξης k αν και μονον αν

$$\forall(t_1,t_2,...,t_k)\in(E^*)^k,\ \ \prod_{i=1}^{k}t_i\in L^1(E,\mathcal{B}(E),P).$$

Απόδειξη

1. Το ότι η υπόθεση είναι ικανή είναι προφανές, αρκεί να πάρουμε $f_i=t,\forall i\in 1,...,k$.

2. Αποδεικνύουμε ότι η υπόθεση είναι αναγκαία. Έστω $(t_1,...,t_k)\in(E^*)^k$. Για κάθε j με $0\le j\le k-2$ έχουμε $(k-j-1)/(k-j)+1/(k-j)=1$ και από την ανισότητα *Hölder* έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|\prod_{i=1}^{k-j}t_i\|_{k/(k-j)} &= (\int_E(\prod_{i=1}^{k-j}t_i)^{k/(k-j)}dP)^{(k-j)/k}\\
&= (\int_E\prod_{i=1}^{k-j-1}t_i^{k/(k-j)}t_{k-j}^{k/(k-j)}dP)^{(k-j)/k}\\
&\le (\|\prod_{i=1}^{k-j-1}t_i^{k/(k-j)}\|_{(k-j)/(k-j-1)}\|t_{k-j}^{k/(k-j)}\|_{k-j})^{(k-j)/k}\\
&= (\int_E\prod_{i=1}^{k-j-1}t_i^{k/(k-j-1)}dP)^{(k-j-1)/k}(\int_E t_{k-j}^{k}dP)^{1/k}\\
&= \|\prod_{i=1}^{k-j-1}t_i\|_{k/(k-j-1)}\|t_{k-j}\|_k
\end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε αναδρομικά ότι:

$$\begin{aligned}
E_P(\prod_{i=1}^{k}|t_i|)=\|\prod_{i=1}^{k}t_i\|_1 &\le \|\prod_{i=1}^{k-1}t_i\|_{k/(k-1)}\|t_k\|_k\\
&\le \|\prod_{i=1}^{k-2}t_i\|_{k/(k-2)}\|t_{k-1}\|_k\|t_k\|_k\le...\le\prod_{i=1}^{k}\|t_i\|_k
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ορισμός 1.3.3

*Αν μια πιθανότητα P επί του $(E,\mathcal{B}(E))$ είναι k-τάξης, ονομάζουμε **ροπή k-τάξης**, την k-γραμμική μορφή m_k πάνω στον E^*, ορισμένη από:*

$$\forall(t_1,...,t_k)\in(E^*)^k,\ \ m_k(t_1,...,t_k)=E_P(\prod_{i=1}^{k}t_i)$$

1.4 ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΕΝΟΣ ΝΟΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙ ΤΟΥ E

Ορισμός 1.4.1

Έστω ότι ένα μέτρο πιθανότητας P επί του $(E, \mathcal{B}(E))$ δέχεται ροπή τάξης 2. Τότε ονομάζουμε ***διασπορά*** *του νόμου P την ροπή τάξης 2 του κεντρικού νόμου.*

Αυτή είναι διγραμμική θετική μορφή επί του E^*, την οποία συμβολίζουμε με v, ορισμένη από:

$$\forall (t,s) \in E^* \times E^*, \ \ v(t,s) = \int_E t(x-m_1)s(x-m_1)P(dx)$$

,

όπου m_1 το διάνυσμα του E όπως έχει ορισθεί στην Παρατήρηση 1.1.2 .

Επαληθεύεται σε αυτήν την περίπτωση ο «κλασικός» τύπος της διασποράς:

$$\forall (t,s) \in E^* \times E^*, \ \ v(t,s) = m_2(t,s) - m_1(t)m_1(s)$$

Πράγματι, επειδή από την Παρατήρηση 1.1.2, $\forall t \in E^*, \ m_1(t) = t(m_1)$, έχουμε:

$\forall (t,s) \in E^* \times E^*$,

$$\begin{aligned}
v(t,s) &= \int_E t(x-m_1)s(x-m_1)P(dx) = \int_E (t(x)-t(m_1))(s(x)-s(m_1))P(dx) \\
&= \int_E t(x)s(x)P(dx) - t(m_1)\int_E s(x)P(dx) - s(m_1)\int_E t(x)P(dx) + t(m_1)s(m_1) \\
&= \int_E t(x)s(x)P(dx) - t(m_1)m_1(s) - s(m_1)m_1(t) + t(m_1)s(m_1) \\
&= m_2(t,s) - m_1(t)m_1(s) - m_1(s)m_1(t) + m_1(t)m_1(s) \\
&= m_2(t,s) - m_1(t)m_1(s)
\end{aligned}$$

Πρόταση 1.4.2

Έστω P μια πιθανότητα επί του $(E, \mathcal{B}(E))$. Έστω f μια γραμμική απεικόνιση από τον E στον F, πραγματικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης. Συμβολίζουμε P_f το νομο εικόνα του P μέσω της f επί του $(F, \mathcal{B}(F))$.

1. *Αν P δέχεται την m σαν ροπή τάξης 1, η P_f δέχεται μια ροπή τάξης 1 ίση με $m \circ {}^t f$.*
2. *Αν P δέχεται μια ροπή τάξης 2 και αν v σημειώνει τη διασπορά του P, ο P_f δέχεται μια ροπή τάξης 2 και η διασπορά του είναι ίση με $v\Big({}^t f(\cdot), \ {}^t f(\cdot)\Big)$.*

Απόδειξη

1. Αν P δέχεται μια ροπή τάξης 1, τότε

$$\forall s \in F^*, E_{P_f}(|s|) = E_P(|s \circ f|) < +\infty,$$

αφού $s \circ f \in E^*$. Έτσι P_f έχει ροπή τάξης 1. Αυτή είναι ίση με $m \circ {}^t f$, αφού $\forall s \in F^*$,

$$(m \circ {}^t f)(s) = m({}^t f(s)) = E_P({}^t f(s)) = E_P(s \circ f) = E_{P_f}(s)$$

2. Υποθέτουμε ότι P δέχεται μια ροπή τάξης 2. Τότε, $\forall(t,s) \in F^* \times F^*$,

$$E_{P_f}(|st|) = E_P(|s \circ f||t \circ f|) < +\infty$$

αφού $s \circ f, t \circ f \in E^*$. Άρα P_f εισάγει μια ροπή τάξης 2. Η διασπορά του P_f είναι ίση με $v({}^t f(.),{}^t f(.))$, αφού $\forall(r,s) \in F^* \times F^*$,

$$m_2({}^t f(r),{}^t f(s)) = E_P({}^t f(r){}^t f(s)) = \int_E (r \circ f)(x)(s \circ f)(x)P(dx) = E_{Pf}(rs)$$

Ειδική περίπτωση σε ευκλείδιο χώρο 1.4.3

Έστω $(E, <,>$ ένας ευκλείδιος χώρος όπως στην ειδική περίπτωση 1.1.4 της οποίας διατηρούμε τις έννοιες.

Πρόταση 1.4.4

Μια πιθανότητα P επί του $(E, \mathcal{B}(E))$ δέχεται ροπή τάξης k αν και μόνο αν $\|.\| \in L^k(E, \mathcal{B}(E), P)$.

Απόδειξη

Έστω $(e_1, ..., e_n)$ μια ορθοκανονική βάση του E. Τότε υπάρχουν δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί a και b, με $0 \leq a \leq b$, τέτοιοι ώστε:

$$\forall x \in E, a^k \|x\|^k \leq \sum_{i=1}^{n} | < e_i, x > |^k \leq b^k \|x\|^k \tag{1.1}$$

Από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα, διότι:

αν $\|.\| \in L^k$ τότε $< e_i, . > \in L^k, \forall i \in 1, ..., n$ από το 2ο μέρος της 1.1.

Όμως, $\forall u \in E,\ u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ και $< u, . > = \sum_{i=1}^{n} u_i < e_i, . > \in L^k$. Λοιπόν η P δέχεται ροπή k-τάξης.

Αντιστρόφως, αν P δέχεται ροπή k-τάξης, $\forall u \in E,\ < u, . > \in L^k$. Οπότε, $\forall i \in 1, ..., n$, $< e_i, . > \in L^k$ και επομένως $\sum_{i=1}^{n} | < e_i, . > |^k \in L^1$. Άρα $\|.\|^k \in L_1$ από το 1ο μέρος της (1.1).

Παρατήρηση 1.4.5

Η ροπή τάξης k του P ταυτίζεται με την k-γραμμική μορφή επί του E την οποία σημειώνουμε με m_k και ορίζεται ως εξής:

$$\forall(u_1, ..., u_k) \in E^k,\ m_k(u_1, ..., u_k) = E_P\Big(\prod_{i=1}^{k} < u_i, \cdot >\Big)$$

Στην περίπτωση $E = \mathbb{R}^n$, εφοδιασμένος με το κλασσικό βαθμωτό γινόμενο, αν η P είναι τάξης 2, η διασπορά v του P ορίζεται από την:

$$\forall u, u' \in \mathbb{R}^n,\ v(u, u') = \int_{\mathbb{R}^n} < u, x - m_1 >< u', x - m_1 > P(dx) = {}^t u [\int_{\mathbb{R}^n} (x - m_1)^t (x - m_1) P(dx)] u$$

δηλαδή η v είναι ο $n \times n$ πίνακας $\int_{\mathbb{R}^n} (x - m_1)^t (x - m_1) P(dx)$, γνωστός ως πίνακας διασπορώνσυνδιασπορών της P.

Πρόταση 1.4.6 Χαρακτηριστική συνάρτηση και ροπές

Αν μια πιθανότητα P επί του $(E, \mathcal{B}(E))$ δέχεται μια ροπή τάξης k, m_k, η χαρακτηριστική της συνάρτηση ϕ_P είναι της κλάσης C^k επί του E και επαληθεύει,

$$\forall h \in E \text{ και } \forall (t_1, ..., t_k) \in E^k, \ \phi_P^{(k)}(h) = i^k E_P\Big((\prod_{i=1}^{n} < t_i, . >) e^{i<h,.>} \Big)$$

Ιδιαιτέρως,

$$\phi_P^{(k)}(0_E) = i^k m_k$$

Απόδειξη

1. Στηριζόμενοι στην έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών (βλ. π.χ.[14]), θα δείξουμε επαγωγικά ότι η ϕ_P είναι k-φορές παραγωγίσιμη επί του Ε και ικανοποιεί τον τύπο που δίδεται στην πρόταση.

1.i) Έστω $k = 1$.Θα δείξουμε ότι $\forall (t, h) \in E^2$, η ϕ_P επαληθεύει:

$$\phi'_P(h) \cdot t = i E_P[< t, . > e^{i<h,.>}]$$

Έχουμε, για $l \in E$,

$$\begin{aligned}
A(h,l) &= |\phi_P(h+l) - \phi_P(h) - iE_P[< l, . > e^{i<h,.>}]| \\
&= |E_P[e^{i<h+l,.>} - e^{i<h,.>} - i < l, . > e^{i<h,.>}]| \\
&= |E_P[e^{i<h,.>}(e^{i<l,.>} - 1 - i < l, . >)]| \\
&\leq E_P[|e^{i<h,.>}| \cdot |e^{i<l,.>} - 1 - i < l, . > |] \\
&= E_P[|e^{i<l,.>} - 1 - i < l, . > |] \\
&= \int_E |e^{i<l,x>} - 1 - i < l, > |P(dx) \\
&= \int_E | < l, x > |\varepsilon(x, l) P(dx)
\end{aligned}$$

από το ανάπτυγμα $Taylor$, όπου $\forall x \in E$,

$$\lim_{l \to 0_E} \varepsilon(x, l) = 0$$

Συνεπώς, από την ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$:

$$A(h,l) \leq \|l\| \int_E \|x\| \varepsilon(x,l) P(dx) \tag{1.2}$$

Ακόμη, $\forall a \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|e^{ia} - 1 - ia| \leq 2|a| \tag{1.3}$$

Πράγματι, επειδή η (1.3) είναι ισοδύναμη με την

$$|e^{ia} - 1 - ia^2|^2 \leq 4|a|^2$$

και αυτή ισοδύναμη με την

$$2 - 2\cos a - 2a \sin a \leq 3a^2$$

θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f(a) = 2 - 2\cos a - 2a \sin a - 3a^2$$

Θα δείξουμε ότι $f(a) \leq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι άρτια συνάρτηση, αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ f(a) \leq 0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ f'(a) = -2a(\cos a + 3) \leq 0$$

δηλαδή η f είναι φθίνουσα επί του $\mathbb{R}_+$ και επομένως

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, f(a) \leq 0$$

Από την (1.3) έχουμε τότε:

$$\forall x \in E,\ \varepsilon(x,l) = \frac{|e^{i<l,x>} - 1 - i < l, x > |}{| < l, x > |} \leq 2$$

Ο νόμος P δέχεται μια ροπή τάξης 1, που σημαίνει ότι :

$$\forall x \in E,\ \|x\|\varepsilon(x,l) \leq 2\|x\|$$

με $\|.\| \in L^1(E, \mathcal{B}(E), P)$, από την πρόταση 1.4.4. Επίσης,

$$\|x\|\varepsilon(x,l) \to 0 \ \textit{καθώς}\ l \to 0_E$$

Άρα από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue*,

$$\int_E \|x\|\varepsilon(x,l)P(dx) \to 0 \ \textit{καθώς}\ l \to 0_E$$

Από την (1.2) προκύπτει τότε ότι:

$$\forall h \in E, A(h) = o(\|l\|) \qquad (l \to 0_E)$$

Συνεπώς η ϕ_P είναι παραγωγίσιμη και η ϕ'_P επαληθεύει τον επιθυμητό τύπο.

$1.ii)$ Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα είναι αληθές μέχρι $(k-1)$-τάξη. Τότε, από επαγωγική υπόθεση και κάνοντας χρήση της ανισότητας $Cauchy - Schwarz$, έχουμε:
$\forall h \in E$ *και* $\forall (t_1, ..., t_k) \in E^k$,

$$A(h, t_1, ..., t_k) \ = \ \left|\phi_P^{(k-1)}(h + t_1) \cdot (t_1, ..., t_k) - \phi_P^{(k-1)}(h) \cdot (t_1, ..., t_k) - i^k E_P(\prod_{i=1}^{k} < t_i, . > e^{i<h,.>})\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= |i^{k-1}E_P(\prod_{i=2}^{k} < t_i, . > e^{i<t_1+h,.>}) - i^{k-1}E_P(\prod_{i=2}^{k} < t_i, . > e^{i<h,.>}) \\
&\qquad\qquad\qquad -i^k E_P(\prod_{i=1}^{k} < t_i, . > e^{i<h,.>})| \\
&= |i^{k-1}E_P(\prod_{i=2}^{k} < t_i, . > e^{i<h,.>}(e^{i<t_1,.>} - 1 - i < t_1, . > |))| \\
&\leq E_P(\prod_{i=2}^{k} | < t_i, . > | \cdot |e^{i<h,.>}| \cdot |e^{i<t_1,.>} - 1 - i < t_1, . > |) \\
&= \int_E (\prod_{i=2}^{k} | < t_i, . > | \cdot |e^{i<h,.>}| \cdot |e^{i<t_1,.>} - 1 - i < t_1, . > |) \\
&\leq \int_E (\prod_{i=2}^{k} \|t_i\| \cdot \|x\|)|e^{i<t_1,x>} - 1 - i < t_1, x > |P(dx) \\
&= \prod_{i=2}^{k} \|t_i\| \int_E \|x\|^{k-1}| < t_1, x > |\varepsilon(x, t_1)P(dx), \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

όπου $\forall x \in E$,

$$\lim_{t_1 \to 0_E} \varepsilon(x, t_1) = 0$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας ακόμη μια φορά την ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$ στην (1.4), παίρνουμε

$$A(h, t_1, ..., t_k) \leq \prod_{i=1}^{k} \|t_i\| \int_E \|x\|^k \varepsilon(x, t_1)P(dx)$$

Οπότε, $\forall\ h \in E, \forall\ t_1 \in E$, έχουμε:

$$A(h, t_1) = \sup_{\|t_i\|=1,\ 2 \leq i \leq k} A(h, t_1, ..., t_k) \leq \|t_1\| \int_E \|x\|^k \varepsilon(x, t_1)P(dx)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο όπως στο $1.i$), προκύπτει

$$\forall h \in E,\ A(h, t_1) = o(\|t_1\|) \qquad (t_1 \to 0)$$

Συνεπώς η ϕ_P είναι k-φορές παραγωγίσιμη επί του Ε και επαληθεύει την επιθυμητή σχέση.

2. Γνωρίζουμε ότι

$$\|\phi_P^{(k)}(h)\| = \sup_{|t_i|=1,\ i=1,..,k} |\phi_P^{(k)}(h)(t_1, ..., t_k)|$$

Επομένως, για τη συνέχεια της $\phi_P^{(k)}$, αρκεί να δείξουμε

$$\lim_{l \to 0_E} \|\phi_P^{(k)}(h + l) - \phi_P^{(k)}(h)\| = 0$$

Για κάθε $\forall(h,l) \in E^2$ και $\forall(t_1,...,t_k) \in E^k$ τέτοια ώστε $\|t_i\| = 1,\ 1 \leq i \leq k$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
|\phi_P^{(k)}(h+l)(t_1,...,t_k) - \phi_P^{(k)}(h)(t_1,...,t_k)| &= |E_P(i^k(\prod_{i=1}^{k} < t_i,. >)(e^{i<h+l,.>} - e^{i<h,.>}))| \\
&\leq E_P(\prod_{i=1}^{k} |< t_i,. >| \cdot |e^{i<h+l,.>} - e^{i<h,.>}|) \\
&\leq \int_E \|x\|^k |e^{i<h+l,x>} - e^{i<h,x>}| P(dx)
\end{aligned}$$

Επειδή $|e^{i<h+l,x>} - e^{i<h,x>}| \leq 2,\quad \forall x \in E$, και η P δέχεται μια ροπή τάξης k, το αποτέλεσμα προκύπτει χρησιμοποιώντας το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης του $Lebesgue$.

2. ΑΚΤΙΝΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ-ΝΟΜΟΙ ΜΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Πολλά από τα αποτελέσματα στην πολυδιάστατη στατιστική ανάλυση έχουν εξαχθεί υπό την υπόθεση της κανονικότητας($normalite$). Φαίνεται ότι για κάποια από αυτά, η βασική ιδιότητα που υπεισέρχεται στην απόδειξή τους, είναι το αναλλοίωτο του κανονικού νόμου υπό περιστροφή (ή πιο γενικά υπό ορθογώνιου μετασχηματισμού).

Οι πολλαπλές ιδιότητες ενός αναλλοίωτου υπό περιστροφή νόμου έχουν δοθεί από πολλούς συγγραφείς. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε τους $Kelker$ [29], $Cambanis$ [13] και $Eaton$ [21].

Όπως σε αυτό που προηγήθηκε, υϊοθετούμε μια παρουσίαση «$coordinate\ free$» τέτοιων νόμων τοποθετημένοι μέσα στο γενικό πλαίσιο ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης.

Έννοιες

1. Για κάθε βαθμωτό γινόμενο w επί του E, η απεικόνιση $x \rightsquigarrow w(x,.)$ είναι ένας ισομορφισμός του Ε επί του E^* ο οποίος εισάγει το βαθμωτό γινόμενο v επί του E^* που ορίζεται από:

$$\forall(x,y) \in E \times E,\ v(w(x,.),w(y,.)) = w(x,y)$$

Ομοίως κάθε βαθμωτό γινόμενο v επί του E^* εισάγει ένα βαθμωτό γινόμενο w επί του Ε, ο οποίος ταυτοποιείται με τον E^{**}(διδυϊκός του Ε).

Υπό αυτές τις υποθέσεις, παρατηρούμε ότι, αν $(e_1,...,e_n)$ είναι μια βάση του Ε, τότε $(e_1^*,...,e_n^*)$ είναι η δυϊκή της βάση στο Ε και οι πίνακες του w και v στις αντίστοιχες βάσεις είναι αντιστρέψιμοι και ο ένας είναι ο αντίστροφος του άλλου. Είναι λοιπόν φυσικό να σημειώνουμε

$$v = w^{-1} \text{ και } w = v^{-1}$$

2. Έστω Η ένας διανυσματικός υποχώρος του Ε. Αν w είναι ένα βαθμωτό γινόμενο επί του Ε, ορίζουμε w_H τον περιορισμό του w επί του $H \times H$.

Αν v είναι ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*, σημειώνουμε με $v_{(H)}$ το βαθμωτό γινόμενο επί του H^* που ορίζεται ως εξής: $v_{(H)} = v({}^t\pi, {}^t\pi)$, όπου π είναι η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του Ε επί του Η. Επαληθεύεται ότι

$$(v_{(H)})^{-1} = (v^{-1})_H$$

3. Στη συνέχεια, αν το v ορίζει ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*, σημειώνουμε με $< \, , >$ και $\|.\|$, το βαθμωτό γινόμενο και την επαγώμενη νόρμα αντίστοιχα, για την ευκλείδεια δομή που ορίζεται από το v^{-1} επί του E.

Ορίζουμε ως $B_{v,r}$(αντίστοιχα $S_{v,r}$) την μπάλα (αντίστοιχα τη σφαίρα) κέντρου 0_E και ακτίνας $r \geq 0$. Ειδικότερα θα σημειώνουμε με $B_v = B_{v,1}$ και $S_v = S_{v,1}$.

2.1 ΑΚΤΙΝΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ-ΝΟΜΟΙ ΜΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Ορισμός 2.1.1

*Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Ένα μέτρο (αντ. μια πιθανότητα) επί του E ονομάζεται **ακτινικό** (radiale)$\Big($ αντ. **ακτινικός νόμος** $\Big)$, με παράμετρο διακύμανσης v, αν αυτό παραμένει αναλλοίωτο υπό v^{-1}-ορθογώνιους μετασχηματισμούς.*

Η υπόθεση ότι η παράμετρος διακύμανσης είναι ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*, δικαιολογείται όπως θα δούμε στην Πρόταση 2.3.3, από το ότι, αν ένας ακτινικός νόμος δέχεται ροπή τάξης 2, αυτή η τελευταία είναι μια παράμετρος διακύμανσης.

Ορισμός 2.1.2

*Ένα μέτρο (αντ. μια πιθανότητα) επί του E είναι ένα μέτρο (αντ. ένας νόμος) με **ελλειπτική συμμετρία** επί του E, με παράμετρο θέσης $\lambda \in E$ και με παράμετρο διακύμανσης v, αν αυτό είναι η εικόνα, υπό τη μεταφορά του διανύσματος λ, ενός ακτινικού μέτρου (αντ. νόμου) επί του E με παράμετρο διακύμανσης v.*

Παρατήρηση 2.1.3

Αν ένα μέτρο με ελλειπτική συμμετρία επί του E δέχεται v ως παράμετρο διακύμανσης, αυτό δέχεται ως παράμετρο διακύμανσης το av, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$. Θα δούμε αργότερα ότι στην πράξη η παράμετρος διακύμανσης ορίζεται με ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

Δεδομένου της σχέσης μεταξύ των ακτινικών μέτρων και των μέτρων με ελλειπτική συμμετρία, θα περιοριστούμε στην συνέχεια στη μελέτη των ιδιοτήτων των ακτινικών μέτρων. Οι ιδιότητες των μέτρων με ελλειπτική συμμετρία συμπεραίνονται από εκείνες των ακτινικών εύκολα.

Πρόταση 2.1.4

1. Ένας νόμος πιθανότητας P επί του E είναι ένας ακτινικός νόμος με παράμετρο διακύμανσης v, αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση ϕ_P είναι συνάρτηση του $\|.\|^2$. Υπάρχει λοιπόν συνάρτηση $\psi_P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$,τέτοια ώστε:

$$\forall t \in E, \ \phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2)$$

2. Σε αυτήν την περίπτωση οι νόμοι εικόνα του P μέσω όλων των γραμμικών μορφών επί του E νόρμας 1, είναι ίδιοι και η χαρακτηριστική τους συνάρτηση είναι η απεικόνιση $a \rightsquigarrow \psi_P(a^2)$.

Απόδειξη

1. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η υπόθεση είναι αναγκαία.

Έστω $t \in E$ και $t' \in E$ τέτοια ώστε $\|t\| = \|t'\|$. Υπάρχει λοιπόν ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός g του E, τέτοιος ώστε $g(t') = t$. Χρησιμοποιώντας κατά σειρά την v^{-1}-

ορθογωνικότητα της g, το θεώρημα της μεταφοράς και το γεγονός ότι ο P είναι ακτινικός, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\phi_P(t) &= E_P(e^{i<t,.>}) = E_P(e^{i<g(t'),.>}) = E_P(e^{i< g(t'),\, g(\, g^{-1}(.)\,)>}) \\ &= E_P(e^{i<t',g^{-1}(.)>}) = E_{P_{g^{-1}}}(e^{i<t',.>}) = E_P(e^{i<t',.>}) \\ &= \phi_P(t')\end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $\psi_P(\|.\|^2)$ τέτοια ώστε $\forall t \in E,\ \phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2)$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η υπόθεση είναι ικανή.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\psi_P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε:

$$\forall t \in E,\ \phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2)$$

Έστω g ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός. Ισχύει από το θεώρημα της μεταφοράς ότι:

$$\begin{aligned}\forall t \in E,\ \phi_{P_g}(t) &= E_P(e^{i<t,g(.)>}) = E_P(e^{i< g(g^{-1}(t))\ ,\ g(.)\ >}) = E_P(e^{i<g^{-1}(t),.>}) \\ &= \phi_P(g^{-1}(t)) = \psi_P(\|g^{-1}(t)\|^2) = \phi_P(t)\end{aligned}$$

Συνεπώς $P_g = P$ σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.4 .

2. Έστω $f \in E^*$ τέτοια ώστε $\|f\| = 1$. Επειδή η απεικόνιση $x \rightsquigarrow < x, . >$ είναι ένας ισομορφισμός του E επί του E^*, σημειώνουμε με t το διάνυσμα του E τέτοιο ώστε $f =< t, . >$.

Έστω F ο υπόχωρος που γεννάται από το t, π η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του E επί του F και ξ ο ισομορφισμός του $\mathbb{R}$ επί του $F(\ \xi(a) = at\ )$.

Είναι φανερό ότι $f = \xi^{-1} \circ \pi$.

Πράγματι, επειδή $\forall x \in E,\ \exists a \in \mathbb{R} :\ \pi(x) = at$, έχουμε,

$$\begin{aligned}f(x) =< t, x >=< t, \pi(x) + (x - \pi(x)) > &= < t, \pi(x) > + < t, x - \pi(x) > \\ &= < t, \pi(x) > \\ &= < t, at >= a\|t\|^2\end{aligned}$$

και

$$\xi^{-1} \circ \pi(x) = \xi^{-1}\Big(\pi(x)\Big) = \xi^{-1}(at) = a$$

Όμως, $\|f\|^2 = v(f, f) = v(\ v^{-1}(t, \cdot),\ v^{-1}(t, \cdot)\ ) = v^{-1}(t, t) = \|t\|^2$

Άρα, αν $\|f\| = 1$, τότε $\|t\| = 1$ και $f = \xi^{-1} \circ \pi$.

Για κάθε $s \in E$, από την Παρατήρηση 1.2.2 και το γεγονός ότι η π είναι αυτοσυζηγής, δηλαδή $\forall s, x \in E,\ < s, \pi(x) >=< \pi(s), x >$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi_{P_\pi}(s) = E_P(e^{i<s,.>}) &= \int_F e^{i<s,x>} P_\pi(dx) = \int_E e^{i<s,\pi(y)>} P(dy) \\ &= \int_E e^{i<\pi(s),y>} P(dy) = \phi_P\Big(\ \pi(s)\ \Big)\end{aligned}$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $s = at$,

$$\phi_{P_\pi}(at) = \phi_P\Big(\ \pi(at)\ \Big) = \phi_P(at) = \psi_P(\|at\|^2) = \psi_P(a^2\|t\|^2) = \psi_P(a^2)$$

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
\phi_{P_f}(a) &= E_{P_f}(e^{(ia\cdot)}) = \int_{\mathbb{R}} e^{iax} P_f(dx) = \int_E e^{iaf(y)} P(dy) \\
&= \int_E e^{ia(\xi^{-1}\circ\pi)(y)}(dy) = \int_F e^{ia\xi^{-1}(z)} P_\pi(dz) \\
&= \int_F e^{i<at,\xi^{-1}(z)t>} P_\pi(dz)
\end{aligned}$$

Έπειδη, $\xi^{-1}(z)t = \xi\Big(\ \xi^{-1}(z)\ \Big) = z$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_F e^{i<at,z>} P_\pi(dz) = \phi_{P_\pi}(at) = \psi_P(a^2)$$

Άρα, $\forall a \in \mathbb{R},\ \phi_{P_f}(a) = \psi_P(a^2)$.

Πρόταση 2.1.5

Έστω P ένας ακτινικός νόμος πιθανότητας επί του E.

Εκτός αν ο P είναι ο νόμος του Dirac στο 0_E, η παράμετρος διακύμανσης του P προσδιορίζεται κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

Απόδειξη

Έστω v_1, v_2 δυο παράμετροι διακύμανσης του P. Σημειώνουμε με $\|.\|_1, \|.\|_2$ τις συνδεδεμένες με αυτές νόρμες. Υπάρχει μια βάση του E, $(e_1, ..., e_n)$ η οποία είναι συγχρόνως v_1^{-1}-ορθοκανονική και v_2^{-1}-ορθογώνια (βλ.[37]). Έστω $\lambda_1, ..., \lambda_n$ οι διαγώνιοι συντελεστές του διαγώνιου πίνακα της v_2^{-1} σε αυτήν τη βάση (για $1 \leq i \leq n$ έχουμε $\lambda_i > 0$).

Έστω

$$m = \min_{1\leq k\leq n} \lambda_k \ \text{ και } i \text{ ένας δείκτης τέτοιος ώστε } \lambda_i = m$$

και

$$M = \max_{1\leq k\leq n} \lambda_k \ \text{ και } j \text{ ένας δείκτης τέτοιος ώστε } \lambda_j = M$$

Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $m < M$ τότε το P είναι το μέτρο του *Dirac* στο 0_E.

Ορίζουμε τους ενδομορφισμούς f και g του E από τις σχέσεις:

$$\forall k\ (1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j) \quad f(e_k) = g(e_k) = e_k$$

$$f(e_i) = e_j\ ,\ \ f(e_j) = e_i\ ,\ \ g(e_i) = \sqrt{\frac{m}{M}}\, e_j\ ,\ \ g(e_j) = \sqrt{\frac{M}{m}}\, e_i$$

Είναι φανερό ότι ο f είναι v_1^{-1}-ορθογώνιος και ο g είναι v_2^{-1}-ορθογώνιος.

Υποθέτουμε $m < M$. Έστω $t \neq 0_E$ στο E και έστω x_0 το διάνυσμα του E του οποίου οι συντεταγμένες ως προς τη βάση $(e_1, ..., e_n)$ είναι $(\|t_i\|_1\ \delta_{kj})_{1\leq k\leq n}$, όπου δ_{kj} το σύμβολο του *Kronecker*, δηλαδή $x_0 = \|t\|_1\ e_j$.

Έχουμε $\|x_0\|_1 = \|t\|_1$. Ορίζουμε τότε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των διανυσμάτων του E από τη σχέση:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = (g\circ f)(x_{n-1})$$

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$x_n = \Big(\frac{m}{M}\Big)^{\frac{1}{2}} x_{n-1} = \Big(\frac{m}{M}\Big)^{\frac{n}{2}} x_0$$

και κατα συνέπεια, αφού $m < M$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0_E$$

Επιπλέον, επειδή ο P είναι v_2-ακτινικός και ο g v_2^{-1}-ορθογώνιος, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi_P(x_n) = \phi_P\Big(g\circ f(x_{n-1})\Big) &= E_P\Big(\ e^{\,i<g\circ f(x_{n-1}),\,.\,>_{v_2^{-1}}}\ \Big) = E_{P_g}\Big(\ e^{i<g\circ f(x_{n-1}),\,.\,>}\ \Big)\\
&= E_P\Big(\ e^{i<g\circ f(x_{n-1})\ ,\,g(\,.\,)>}\ \Big) = E_P\Big(\ e^{i<f(x_{n-1}),\,.\,>}\ \Big)\\
&= \phi_P\Big(f(x_{n-1})\Big)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια, οτι ο P είναι v_1-ακτινικός και ο f v_1^{-1}-ορθογώνιος, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi_P\Big(f(x_{n-1})\Big) &= E_P\Big(\ e^{\,i<f(x_{n-1}),\,.\,>_{v_1^{-1}}}\ \Big) = E_{P_f}\Big(\ e^{i<f(x_{n-1}),\,.\,>}\ \Big)\\
&= E_P\Big(\ e^{i<f(x_{n-1})\ ,\,f(\,.\,)>}\ \Big) = E_P\Big(\ e^{i<x_{n-1},\,.\,>}\ \Big)\\
&= \phi_P(x_{n-1})
\end{aligned}$$

Άρα ,

$$\phi_P(x_n)\ =\ \phi_P(x_{n+1})$$

Από αυτό, προκύπτει οτι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\phi_P(x_n)\ =\ \phi_P(x_0)\ =\ \Psi_P\Big(\|x_0\|_1^2\Big)\ =\ \Psi_P\Big(\|t\|_1^2\Big)\ =\ \phi_P(t)$$

και λοιπόν η ακολουθία $\Big(\phi_P(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή .

Επομένως, από την συνέχεια της ϕ_P στο 0_E , έχουμε:

$$1\ =\ \phi_P(0_E)\ =\ \lim_{n\to+\infty}\phi_P(x_n)\ =\ \phi_P(t)$$

Επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $t\in E$, ο νόμος P είναι ο νόμος του *Dirac* στο σημείο 0_E.

Τελικά αποδείξαμε οτι, αν ο P δεν είναι ο νόμος του *Dirac* στο 0_E, $m = M$ και συνεπώς $v_2^{-1} = m\ v_1^{-1}$.

2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΩΝ ΑΚΤΙΝΙΚΩΝ

I. Το μέτρο του Lebesgue επί του E

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*.

Έστω $(e_1, ..., e_n)$ μια βάση v^{-1}-ορθοκανονική του E και ξ ο φυσικός ισομορφισμός του $\mathbb{R}^n$ επί του E ορισμένος από την

$$\forall (x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \xi(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Είναι φανερό ότι ο ξ είναι μια διμετρήσιμη ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ επί του E. Ορίζουμε τότε το μέτρο του *Lebesgue* επί του E και το σημειώνουμε με λ_v, την εικόνα μέσω του ξ του μέτρου του *Lebesgue* λ^n επί του $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda_v = \xi(\lambda^n)\ \ \Big(\text{ή}\ \ \lambda_v = (\lambda^n)_\xi\Big)$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το αναλλοίωτο του μέτρου του *Lebesgue* επί του $\mathbb{R}^n$ υπό ορθογώνιο μετασχηματισμό συνεπάγει από το ένα μέρος ότι το λ_v είναι ένα μέτρο ακτινικό επί του Ε το οποίο δέχεται το v για παράμετρο διακύμανσης και από το άλλο μέρος ότι το λ_v δεν εξαρτάται από την εκλογή της v^{-1}-ορθοκανονικής βάσης.

α) Το αναλλοίωτο του μέτρου λ^n υπό ορθογώνιο μετασχηματισμό

Είναι γνωστό ότι:

αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας ενδομορφισμός 1-1 και επί, τότε:

$$f(\lambda^n) << \lambda^n \text{ και } \frac{df(\lambda^n)}{d\lambda^n} = \frac{1}{|Detf|}$$

δηλαδή το $f(\lambda^n)$ είναι σταθερής πυκνότητας αναφορικά με το μέτρο λ^n.

Ιδιαιτέρως, αν ο ενδομορφισμός είναι ορθογώνιος,

$$Detf = +1 \text{ ή } Detf = -1 \text{ και } f(\lambda^n) = \lambda^n$$

β) Το λ_v είναι ακτινικό με παράμετρο διακύμανσης v

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\varphi(\lambda_v) = \lambda_v, \quad \text{για κάθε } v^{-1} - \text{ορθογώνιο μετασχηματισμό } \varphi$$

Πράγματι, $\forall B \in \mathcal{B}(E)$,

$$\varphi(\lambda_v)(B) = \lambda_v\Big(\varphi^{-1}(B)\Big) = \lambda^n\bigg(\xi^{-1}\Big(\varphi^{-1}(B)\Big)\bigg) = \lambda^n\Big((\varphi\circ\xi)^{-1}(B)\Big)$$

Αν $\Phi = \Big(\ _{\mathcal{E}}(\varphi)_{\mathcal{E}}\ \Big)$ είναι ο πίνακας του ενδομορφισμού φ ως προς τη βάση $\mathcal{E}$, τότε $\varphi\circ\xi = \xi\circ\Phi$. Οπότε, λόγω του α), έχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda^n\Big((\varphi\circ\xi)^{-1}(B)\Big) &= \lambda^n\Big((\xi\circ\Phi)^{-1}(B)\Big) = \lambda^n\bigg(\Phi^{-1}\Big(\xi^{-1}(B)\Big)\bigg)\\ &= \Phi(\lambda^n)\Big(\xi^{-1}(B)\Big) = \lambda^n\Big(\xi^{-1}(B)\Big)\\ &= \xi(\lambda^n)(B) = \lambda_v(B)\end{aligned}$$

γ) Το λ_v δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης

Έστω $\mathcal{E}$ μια βάση του Ε και $\xi : \mathbb{R}^n \to E$ ο φυσικός ισομορφισμός που συνδέεται με αυτήν τη βάση.

Ονομάζουμε γενικά μέτρο του *Lebesgue* συνδεδεμένο με την $\mathcal{E}$ και το σημειώνουμε με $\lambda_{\mathcal{E}}$, την εικόνα $\xi(\lambda^n)$. Δηλαδή,

$$\lambda_{\mathcal{E}} = \xi(\lambda^n)$$

Έστω τώρα $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ δύο βάσεις του Ε και ξ, ξ' οι αντίστοιχοι ισομορφισμοί του $\mathbb{R}^n$ επί του Ε. Αν $\lambda_{\mathcal{E}} = \xi(\lambda^n)$ και $\lambda_{\mathcal{E}'} = \xi'(\lambda^n)$ έχουμε:

$$\forall x \in E, \qquad \frac{d\lambda_{\mathcal{E}'}}{d\lambda_{\mathcal{E}}}(x) = \frac{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}'})}{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}})}\Big(\xi^{-1}(x)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d\xi^{-1}\circ\xi'(\lambda^n)}{d\lambda^n}\Big(\xi^{-1}(x)\Big) \\
&= \frac{1}{|Det(\xi^{-1}\circ\xi')|} = \frac{1}{|Det\Big(\,_{\mathcal{E}}(1_E)_{\mathcal{E}'}\Big)|} \\
&= |Det\Big(\,_{\mathcal{E}'}(1_E)_{\mathcal{E}}\Big)|
\end{aligned}
$$

Πράγματι, αν $\lambda_{\mathcal{E}'} << \lambda_{\mathcal{E}}$ τότε $\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}'}) << \xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}})$ και λοιπόν, $\forall A \in \mathcal{B}(E)$,

$$
\lambda_{\mathcal{E}'}(A) = \int_A \frac{d\lambda_{\mathcal{E}'}}{d\lambda_{\mathcal{E}}}(x)\lambda_{\mathcal{E}}(dx) \tag{1.5}
$$

Όμως,

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{E}'}(A) &= \lambda_{\mathcal{E}'}\Big((\xi\circ\xi^{-1})(A)\Big) = \xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}'})\ \Big(\xi^{-1}(A)\Big) \\
&= \int_{\xi^{-1}(A)} \frac{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}'})}{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}})}\ d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}}) \\
&= \int_A \frac{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}'})}{d\xi^{-1}(\lambda_{\mathcal{E}})}\circ\xi^{-1}\ d\lambda_{\mathcal{E}} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

από το θεώρημα της μεταφοράς.

Από τις (1.5), (1.6) προκύπτει τότε η παραπάνω πρώτη ισότητα. Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του $\lambda_{\mathcal{E}}$ προκύπτει η δεύτερη ισότητα. Η τρίτη ισότητα προκύπτει από το α) αφού ο $\xi^{-1}\circ\xi'$ $(:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n)$ είναι αυτομορφισμός.

Ιδιαιτέρως αν οι βάσεις $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ είναι v^{-1}-ορθοκανονικές, ο ενδομορφισμός $\xi\circ\xi^{-1}$ είναι ορθογώνιος και επομένως $|Det(\xi\circ\xi')| = 1$. Απ'οπου $\lambda_{\mathcal{E}} = \lambda_{\mathcal{E}'}$.

Αυτό ακριβώς μας επιτρέπει να σημειώνουμε με λ_v το μέτρο ίσο με όλα τα μέτρα $\lambda_{\mathcal{E}}$ όπου $\mathcal{E}$ είναι v^{-1}-ορθοκανονική βάση. Το λ_v ονομάζεται μερικές φορές μέτρο του *Lebesgue* για το v.

Είναι προφανές ότι επί του $\mathbb{R}^n$, $\lambda^n = \lambda_{\underline{B}}$, όπου $\underline{B}$ είναι το κανονικό βαθμωτό γινόμενο.

δ) Αν v_1, v_2 είναι δυο βαθμωτά γινόμενα επί του E^*, τα $\lambda_{v_1}, \lambda_{v_2}$ είναι δυο μέτρα ισοδύναμα

Είναι πρακτικό εδώ να σημειώνουμε με $_{\mathcal{F}}(\phi)_{\mathcal{E}}$ τον πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης $\phi : E \to F$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{E},\mathcal{F}$ των πραγματικών διανυσματικών χώρων E και F αντιστοίχως και να θεωρήσουμε τα $v_i,\ i = 1,2$, σαν γραμμικούς ισομορφισμούς του E^* επί του E.

Έστω $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ δυο βάσεις του E, v_1^{-1}-ορθοκανονική και v_2^{-1}-ορθοκανονική αντιστοίχως. Θεωρούμε τον ενδομορφισμο του E, $v_2\circ v_1^{-1}$. Αυτός επαληθεύει:

$$
\begin{aligned}
_{\mathcal{E}_1}(v_2\circ v_1^{-1})_{\mathcal{E}_1} &= {}_{\mathcal{E}_1}(v_2)_{\mathcal{E}_1^*}\ {}_{\mathcal{E}_1^*}(v_1^{-1})_{\mathcal{E}_1} = {}_{\mathcal{E}_1}\ (v_2)_{\mathcal{E}_1^*} \\
&= {}_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}\ {}_{\mathcal{E}_2}(v_2)_{\mathcal{E}_2^*}\ {}_{\mathcal{E}_2^*}(1_E)_{\mathcal{E}_1^*} \\
&= {}_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}\ {}_{\mathcal{E}_2^*}(1_E)_{\mathcal{E}_1^*} \\
&= {}_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}\ {}^t\Big[\ {}_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}\Big]
\end{aligned}
$$

Λοιπόν,

$$Det(v_2 \circ v_1^{-1}) = Det\Big({}_{\mathcal{E}_1}(v_2 \circ v_1^{-1})_{\mathcal{E}_1}\Big) = \Big[Det_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}\Big]^2$$

και

$$|Det_{\mathcal{E}_1}(1_E)_{\mathcal{E}_2}| = \sqrt{Det(v_2 \circ v_1^{-1})}$$

Από το γ) προκύπτει τότε ότι:

$$\frac{d\lambda_{v_2}}{d\lambda_{v_1}} = \frac{d\lambda_{\mathcal{E}_2}}{d\lambda_{\mathcal{E}_1}} = \frac{1}{\sqrt{Det(v_2 \circ v_1^{-1})}} = \sqrt{Det(v_1 \circ v_2^{-1})}$$

Απ'οπου προκύπτει η ισοδυναμία των μέτρων λ_{v_1} και λ_{v_2}.

II. Ο κανονικός n-διάστατος νόμος

Ονομάζουμε κανονικό νόμο επί του Ε κάθε νόμο πιθανότητας P επί του Ε του οποίου η εικόνα μέσω κάθε γραμμικής μορφής επί του Ε είναι κανονικός νόμος επί του $\mathbb{R}$. Ένας τέτοιος νόμος δέχεται ροπή τάξης 1 και ροπή τάξης 2 (βλ. 1.3.1).

Υποθέτουμε ότι ο P είναι κεντρικός νόμος και υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική του συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\forall t \in E^*,\ \ \phi_P(t) = \phi_{P_t}(1) &= exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2\ P_t(dx)\Big\} \\ &= exp\Big\{-\frac{1}{2}E_P(t^2)\Big\} = exp\Big\{-\frac{1}{2}v(t,t)\Big\}\end{aligned}$$

όπου v σημειώνει τη διασπορά του P(βλ. 1.4.1).

Αν v είναι θετικά ορισμένη, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.4, ο νόμος P είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v. Σημειώνουμε αυτόν το νόμο με $\mathcal{N}_E(0_E, v)$.

Πυκνότητα του $\mathcal{N}_E(0_E, v)$ αναφορικά με το λ_v

Έστω v θετικά ορισμένο και $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση του Ε και ξ ο φυσικός ισομορφισμός του $\mathbb{R}^n$ επί του Ε(δηλαδή ο ισομορφισμός που συνδέεται με τη βάση $\mathcal{E}$). Τότε εξ'ορισμού,

$$\xi^{-1}\Big(\mathcal{N}_E(0_E, v)\Big) = \mathcal{N}_n(0, \underline{B})$$

όπου $\underline{B}$ το κανονικό βαθμωτό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$ το οποίο σημειώνουμε και με 1 επειδή ο συνδεδεμένος με αυτό ισομορφισμός είναι η ταυτοτική επί του $\mathbb{R}^n$ ($1_{\mathbb{R}^n}$).

Λοιπόν, $\mathcal{N}_n(0, \underline{B}) = \mathcal{N}_n(0, 1) = \Big(\mathcal{N}_1(0,1)\Big)^n$ και

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \ \frac{d\mathcal{N}_n(0,1)}{d\lambda^n}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ exp\Big\{-\frac{1}{2}\underline{B}(y,y)\Big\}$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in E$,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{N}_E(0_E, v)}{d\lambda_v}(x) &= \frac{d\xi^{-1}\Big(\mathcal{N}_E(0_E, v)\Big)}{d\xi^{-1}(\lambda_v)}\Big(\xi^{-1}(x)\Big) = \frac{d\mathcal{N}_n(0,1)}{d\lambda^n}\Big(\xi^{-1}(x)\Big) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ exp\Big\{-\frac{1}{2}\underline{B}(\xi^{-1}(x), \xi^{-1}(x))\Big\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ exp\Big\{-\frac{1}{2}v^{-1}(x,x)\Big\}\end{aligned}$$

Απ'οπου
$$\frac{d\mathcal{N}_E(m,v)}{d\lambda_v}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ exp\Big\{-\frac{1}{2}\|x\|^2\Big\}$$

Στην περίπτωση που ο P δεν είναι κεντρικός, αν m σημειώνει το μέσο, τότε ο νόμος P είναι ένας νόμος με ελλειπτική συμμετρία και σημειώνεται με $\mathcal{N}_E(m,v)$:

$$\mathcal{N}_E(m,v) = \tau_m\Big(\mathcal{N}_E(0_E,v)\Big)$$

όπου τ_m η μεταφορά του μέσου m.

III. **O n-διάστατος νόμος του Cauchy**

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*.

Μια πιθανότητα P επί του E είναι ένας νόμος του *Cauchy* με παράμετρο v αν, για κάθε γραμμική μορφη t επί του E, ο νόμος εικόνα P_t είναι ένας νόμος του *Cauchy* επί του $\mathbb{R}$ με παράμετρο κλίμακας την $\sqrt{v(t,t)}$.

Υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός τέτοιου νόμου.

Για κάθε $t \in E^*$,
$$\phi_P(t) = \phi_{P_t}(1) = exp\Big\{-\sqrt{v(t,t)}\Big\}$$

Επομένως ο P είναι ένας ακτινικός νόμος που δέχεται τη v ως παράμετρο διακύμανσης. Ένας τέτοιος νόμος χαρακτηρίζεται κεντρικός και σημειώνεται με $\mathcal{C}(0_E,v)$.

Υπολογισμός της πυκνότητας του $\mathcal{C}(0_E,v)$ αναφορικά με το λ_v

Έστω $(e_1,...,e_n)$ μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση του E και ξ ο ισομορφισμός του $\mathbb{R}^n$ επί του E ο οποίος συνδέεται με αυτή τη βάση. Εξ'ορισμού έχουμε:

$$\xi^{-1}\Big(\mathcal{C}(0_E,v)\Big) = \mathcal{C}_n(0,\underline{B})$$

όπου το $\underline{B}$ είναι το κανονικό βαθμωτό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$ το οποίο σημειώνεται και με 1 (βλ. Παράγραφο II.) και ο $\mathcal{C}_n(0,\underline{B})$, νόμος του *Cauchy* επί του $\mathbb{R}^n$, δέχεται πυκνότητα την

$$\frac{d\mathcal{C}_n(0,1)}{d\lambda_n}(y) = \frac{K_n}{\Big(1+\underline{B}(y,y)\Big)^{\frac{n+1}{2}}},\quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

με $K_n = \pi^{-\frac{(n+1)}{2}}\ \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)$ (βλ.[27]).

Συνεπώς, ο $\mathcal{C}(0_E,v)$ δέχεται πυκνότητα την:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{C}(0_E,v)}{d\lambda_v}(x) &= \frac{d\xi^{-1}\Big(\mathcal{C}(0_E,v)\Big)}{d\xi^{-1}(\lambda_v)}\Big(\xi^{-1}(x)\Big)\\
&= \frac{d\mathcal{C}_n(0,1)}{d\lambda^n}\Big(\xi^{-1}(x)\Big)\\
&= \frac{K_n}{\Big(1+\underline{B}\Big(\xi^{-1}(x),\xi^{-1}(x)\Big)\Big)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \frac{K_n}{\Big(1+v^{-1}(x,x)\Big)^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{K_n}{\left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Στην περίπτωση που ο P δεν είναι κεντρικός, αν m σημειώνει την παράμετρο θέσης, τότε ο P είναι ένας νόμος με ελλειπτική συμμετρία και σημειώνεται με $\mathcal{C}(m,v)$:

$$\mathcal{C}(m,v) = \tau_m\Big(\mathcal{C}(0_E,v)\Big)$$

όπου τ_m η μεταφορά της παραμέτρου m.

IV. **Ο ομοιόρφος νόμος επί μιας n-διάστατης σφαίρας**

Έστω v βαθμωτό γινόμενο επί του E^*.

Πρόταση 2.2.1

Υπάρχει επί της S_v μοναδικός ακτινικός νόμος του E με παράμετρο διακύμανσης v, που ονομάζεται ομοιόμορφος νόμος επί της S_v και σημειώνεται με $\mathcal{U}_v$.

Απόδειξη

Προσαρμόζουμε εδώ την απόδειξη που δίδεται από τον *J.L.Philoche* [36] στην περίπτωση που $E=\mathbb{R}^n$.

i) Ύπαρξη

Έστω λ_v το μέτρο του *Lebesgue* επί του E αναφορικά με το v.

Έστω $N : B_v - \{0_E\} \to S_v$ ορισμένη ως:

$$\forall x \in B_v - \{0_E\},\ \ N(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x$$

Έστω $\mathcal{U}_v$ το μέτρο πιθανότητας επί του E ορισμένο από την:

$$\forall A \in \mathcal{B}(E),\ \ \mathcal{U}_v(A) = \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big(N^{-1}(A\cap S_v)\Big)$$

δηλαδή το $\mathcal{U}_v$ είναι η κανονικοποίηση του μέτρου εικόνα μέσω της N του ίχνους του λ_v επί της B_v.

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{U}_v$ είναι ακτινικό με παράμετρο διακύμανσης v. Έστω g ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός του E. Είναι φανερό ότι $N\circ g = g\circ N$. Για κάθε $A\in\mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_v\Big(g^{-1}(A)\Big) &= \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big[N^{-1}\Big(g^{-1}(A)\cap S_v\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big[N^{-1}\Big(g^{-1}(A)\cap g^{-1}(S_v)\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big[N^{-1}\Big(g^{-1}(A\cap S_v)\Big)\Big] = \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big[g^{-1}\Big(N^{-1}(A\cap S_v)\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\, \lambda_v\Big(N^{-1}(A\cap S_v)\Big) = \mathcal{U}_v(A)
\end{aligned}$$

λόγω του αναλλοιώτου του λ_v υπό ορθογώνιου μετασχηματισμού.

Συνεπώς $\mathcal{U}_v$ ακτινικό με παράμετρο διακύμανσης v.

$ii)$*Μοναδικότητα*

Η απόδειξη βασίζεται στη θεωρία του μέτρου του $Haar$.

Η ομάδα O_v των v^{-1}-ορθογώνιων μετασχηματισμών επί του E είναι μια συμπαγής τοπολογική ομάδα. Υπάρχει λοιπόν μια μοναδική πιθανότητα ν αναλλοίωτη μέσω των μεταφορών από αριστερά δηλαδή των απεικονίσεων τ_g, ορισμένες, για g σταθερό μέσα στην O_v, από την:

$$\forall h \in O_v, \;\; \tau_g(h) = g \circ h$$

(βλ.[34]). Το ν ονομάζεται μέτρο του $Haar$ επί του O_v.

Έστω $C(S_v)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων επί της S_v με τιμές πραγματικές. Για κάθε $f \in C(S_v)$, για κάθε $g \in O_v$ και κάθε $x \in S_v$, ορίζουμε τις $f_x(g)$ και $f_g(x)$ από τη σχέση:

$$f_x(g) = f_g(x) = f\Big(g^{-1}(x)\Big)$$

Επειδή η O_v ενεργεί μεταβατικά επί της S_v, δηλαδή

$$\forall x, y \in S_v, \; \exists g \in O_v \;:\; x = g(y),$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\nu(f_x) &= \int_{O_v} f_x(\omega)\nu(d\omega) = \int_{O_v} f_{g(y)}(\omega)\nu(d\omega) = \int_{O_v} f\bigg(\omega^{-1}\Big(g(y)\Big)\bigg)\nu(d\omega) \\
&= \int_{O_v} f\Big((g^{-1}\omega)^{-1}(y)\Big)\nu(d\omega) = \int_{O_v} f_{g^{-1}\omega}(y)\nu(d\omega) \\
&= \int_{O_v} f_y(g^{-1}\omega)\nu(d\omega) = \int_{O_v} f_y \circ \tau_{g^{-1}} d\nu \\
&= \int_{O_v} f_y d\nu_{\tau_{g^{-1}}} = \int_{O_v} f_y d\nu = \nu(f_y)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\forall x, y \in S_v, \;\; \nu(f_x) = \nu(f_y)$$

και επομένως

$$\forall f \in C(O_v) \;\text{ το }\; \int_{O_v} f_x(g)\nu(dg) \;\text{ δεν εξαρτάται από το }\; x(\in S_v)$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε επί της S_v ένα νόμο πιθανότητας Q από τη σχέση:

$$\forall f \in C(S_v), \;\; \int_{S_v} f dQ = \int_{O_v} f_x d\nu$$

Έστω P ένας νόμος v-ακτινικός επί της S_v και $f \in C(S_v)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{S_v} f(x)P(dx) &= \int_{O_v}\bigg(\int_{S_v} f(x)P(dx)\bigg)\nu(dg) = \int_{O_v}\bigg(\int_{S_v} f_g(x)P(dx)\bigg)\nu(dg) \\
&= \int_{S_v}\bigg(\int_{O_v} f_x(g)\nu(dg)\bigg)P(dx) = \int_{O_v} f_x(g)\nu(dg) \\
&= \int_{S_v} f dQ
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε κατά σειρά ότι $\nu(O_v) = 1$, θεώρημα της μεταφοράς, P είναι $v-$ ακτινικός και τέλος το ότι το $\int_{O_v} f_x(g)\nu(dg)$ είναι ανεξάρτητο του x.

Συνεπώς $P = Q$, το οποίο αποδεικνύει τη μοναδικότητα.

Ορισμός 2.2.2

Έστω $r \in \mathbb{R}_+$. Ονομάζουμε ***ομοιόμορφο νόμο επί της*** *$S_{v,r}$, το νόμο εικόνα, μέσω της ομοθεσίας λόγου r του ομοιόμορφου νόμου επί της S_v. Σημειώνουμε αυτόν το νόμο με $\mathcal{U}_{v,r}$.*

2.3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ

Ιδιότητα 2.3.1

Κάθε μίγμα (*melange*) ακτινικών νόμων επί του Ε είναι ένας ακτινικός νόμος επί του Ε.

Απόδειξη

Έστω P ένας νόμος πιθανότητας επί του Ε και τ μια μετάβαση πιθανότητας από τον Ε προς τον Ε τέτοια ώστε, $\forall x \in E$, $\tau^x\Big(= \tau(x,.)\Big)$ να είναι ένας νόμος v-ακτινικός επί του Ε.

Ονομάζουμε μίγμα ακτινικών νόμων, την πιθανότητα $\tilde{P}$(είκονα της P μέσω της τ) η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\forall B \in \mathcal{B}(E), \;\; \tilde{P}(B) = \int_E \tau^x(B)P(dx)$$

Ο $\tilde{P}$ είναι τότε v-ακτινικός. Πράγματι, για κάθε ϕ, v^{-1}-ορθογώνιο μετασχηματισμό επί του Ε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\tilde{P})_\phi(B) &= \tilde{P}\Big(\phi^{-1}(B)\Big) = \int_E \tau^x\Big(\phi^{-1}(B)\Big)P(dx) \\
&= \int_E (\tau^x)_\phi(B)P(dx) \\
&= \int_E \tau^x(B)P(dx) = \tilde{P}(B)
\end{aligned}$$

Ιδιότητα 2.3.2

Έστω P ένας ακτινικός νόμος επί του Ε. Αν ο P δέχεται άτομο στο $a \in E$, τότε $a = 0_E$.

Απόδειξη

Έστω $a \neq 0_E$. Θεωρούμε τη σφαίρα $S(0_E, \|a\|)$ κέντρου 0_E και ακτίνας $\|a\|$.

Επειδή $\forall x \in S(0_E, \|a\|)$, $\|x\| = \|a\|$, υπάρχει ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός g του Ε, τέτοιος ώστε $g(a) = x$. Άρα, αν P είναι v-ακτινικός,τότε

$$\forall x \in S(0_E, \|a\|), \;\; P(\{x\}) = P_g(\{x\}) = P\Big(g^{-1}(\{x\})\Big) = P(\{a\}) > 0$$

επειδή το α είναι άτομο. Συνεπώς $P\Big(S(0_E, \|a\|)\Big) = +\infty$, άτοπο.

Πρόταση 2.3.3

Έστω P ακτινικός νόμος επί του Ε. Αν P είναι πιθανότητα τάξης 2, τότε ο P δέχεται τη δεύτερη τάξης ροπή του ως παράμετρο διακύμανσης.

Απόδειξη

Έστω v μια παράμετρος διακύμανσης του P. Αφού P ακτινικός από την Πρόταση 2.1.4, $\exists \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

$$\forall t \in E,\ \phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) = (\psi_P \circ g)(t) \text{ όπου } g(t) = \|t\|^2 = v^{-1}(t,t)$$

Η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη στον Ε και επαληθεύει $\forall (t,z) \in E \times E$,

$$g'(t) \cdot z = 2v^{-1}(t,z) \text{ και } g''(t) = g'$$

Συνεπώς, $\forall (x,y) \in E \times E$,

$$g'(0_E) = 0 \quad \text{και} \quad g''(0_E)(x,y) = 2v^{-1}(x,y)$$

Έστω m_2 η ροπή τάξης 2 του P. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.6, η ϕ_P είναι της κλάσης C^2 στο Ε και επαληθεύει

$$\phi''_P(0_E) = -m_2^{-1}$$

Έχουμε $\forall t \in E$ ότι η $\phi''_P(t)$ επαληθεύει:

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \phi''_P(t) \cdot (x,y) = \psi'_P\Big(g(t)\Big) \cdot \Big(g''(t) \cdot (x,y)\Big) + \psi''_P\Big(g(t)\Big) \cdot \Big(g'(t) \cdot x, g'(t) \cdot y\Big)$$

Επομένως για $t = 0_E$,

$$\begin{aligned} \phi''_P(0_E) \cdot (x,y) &= \psi'_P\Big(g(0_E)\Big) \cdot \Big(g''(0_E) \cdot (x,y)\Big) + \psi''_P\Big(g(0_E)\Big) \cdot \Big(g'(0_E) \cdot x, g'(0_E) \cdot y\Big) \\ &= 2\psi'_P(0)v^{-1}(x,y) + \psi''_P(0) \cdot (0_E, 0_E) = 2\psi'_P(0)v^{-1}(x,y) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \ m_2^{-1}(x,y) = -2\psi'_P(0)v^{-1}(x,y)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ροπή τάξης 2 είναι ανάλογη της παραμέτρου διακύμανσης, οπότε είναι επίσης μια παράμετρος διακύμανσης(σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.5).

Πρόταση 2.3.4 *Εικόνα ακτινικού νόμου μέσω γραμμικής απεικόνισης*

Έστω P ακτινικός νόμος επί του E με παράμετρο διακύμανσης v.

Έστω f μια «επί» γραμμική απεικόνιση από τον E στον F.

Τότε ο νόμος εικόνα P_f του P μέσω της f είναι ακτινικός επί του F και δέχεται παράμετρο διακύμανσης την $v\Big(\ {}^t f(.), {}^t f(.)\ \Big)$.

Απόδειξη

1. Έστω Η διανυσματικός υπόχωρος του Ε και π η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του Ε επί του Η. Θα αποδείξουμε ότι ο P_π είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης $v_{(H)} = v(\ {}^t\pi, {}^t\pi\ )$, δηλαδή σύμφωνα με την εισαγωγή της Παραγράφου 2, ότι ο P_π είναι αναλλοίωτος υπό κάθε $(v_{(H)})^{-1} = (v^{-1})_H$-ορθογώνιο μετασχηματισμό.

Έστω γ ένας $(v^{-1})_H$-ορθογώνιος μετασχηματισμός επί του Η. Ο μετασχηματισμός δ επί του Ε που ορίζεται από την

$$\forall x \in E,\ \delta(x) = \gamma\Big(\pi(x)\Big) + x - \pi(x)$$

είναι v^{-1}-ορθογώνιος και δέχεται για αντίστροφο τον δ^{-1} ορισμένο από την

$$\forall y \in E,\ \delta^{-1}(y) = \gamma\Big(\pi(y)\Big) + y - \pi(y)$$

Επειδή $\gamma \circ \pi = \pi \circ \delta$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(E)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(P_\pi)_\gamma(B) = P_\pi\Big(\gamma^{-1}(B)\Big) &= P\Big((\gamma\circ\pi)^{-1}(B)\Big) = P\Big((\pi\circ\delta)^{-1}(B)\Big) = P\Big((\delta^{-1}\circ\pi^{-1})(B)\Big)\\ &= P_\delta\Big(\pi^{-1}(B)\Big) = P\Big(\pi^{-1}(B)\Big) = P_\pi(B)\end{aligned}$$

απ'οπου προκύπτει το ζητούμενο.

2. Σημειώνουμε με H το διανυσματικό υπόχωρο $(Kerf)^{\perp v^{-1}}$(v^{-1}-ορθογώνιος του $Kerf$) και π την v^{-1}-ορθογώνια προβολή επί του H. Τότε $f = g \circ \pi$ όπου g είναι ένας ισομορφισμός του H επί του F ($g = f|_H$).

Τότε, η εικόνα μέσω της g, του ακτινικού νόμου P_π με διακύμανση $v_{(H)}$, είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης $v_{(H)}\Big(\ {}^t g(.),{}^t g(.)\ \Big) = v_{(F)}$, αφού

$$\begin{aligned}\forall t \in F,\ \ \phi_{g(P_\pi)}(t) &= \int_F e^{i(v_{(F)})^{-1}(t,y)} g(P_\pi)(dt) = \int_H e^{i(v_{(F)})^{-1}(\ t,\, g(x)\ )} P_\pi(dx)\\ &= \int_H e^{i(v_{(H)})^{-1}(\ g^{-1}(t),\, x\ )} P_\pi(dx) = \phi_{P_\pi}(\ g^{-1}(t)\ )\\ &= \psi_{P_\pi}\Big(\|g^{-1}(t)\|^2_{(v_{(H)})^{-1}}\Big)\end{aligned}$$

όπου

$$\|g^{-1}(t)\|^2_{(v_{(H)})^{-1}} = (v_{(H)})^{-1}\Big(g^{-1}(t), g^{-1}(t)\Big) = (v_{(F)})^{-1}(t,t) = \|t\|^2_{(v_{(F)})^{-1}}$$

Επειδή $P_f = g(P_\pi)$, ο P_f είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης την:

$$v_{(H)}\Big(\ {}^t g(.),\ {}^t g(.)\ \Big) = v\Big(\ {}^t\pi(\ {}^t g\ ),\ {}^t\pi(\ {}^t g)\Big) = v\Big(\ {}^t(g\circ\pi),\ {}^t(g\circ\pi)\ \Big) = v(\ {}^t f,\ {}^t f\ )$$

2.4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ

Αναπτύσσουμε εδώ δύο τύπους χαρακτηρισμού των ακτινικών νόμων. Από τη μια μεριά (βλ. Πρόταση 2.4.1 και Πόρισμα 2.4.3) κάθε ακτινικός νόμος παρουσιάζεται κλασσικά σαν ένα μίγμα ομοιόμορφων νόμων επί σφαιρών. Σε αυτήν την περίπτωση, η ακτίνα και το κανονικό διάνυσμα είναι ανεξάρτητα. Από την άλλη μεριά (βλ. Πρόταση 2.4.5), σύμφωνα με τον *Eaton*, χαρακτηρίζουμε έναν ακτινικό νόμο μέσω του δεσμεύμενου νόμου κάθε γραμμικής μορφής αναφορικά με κάθε άλλη ορθογώνια γραμμική μορφή.

Πρόταση 2.4.1

Έστω P ένας νόμος πιθανότητας επί του E και v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*.
Οι δυο ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
i) P είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v.
ii) P είναι ένα μίγμα ομοιόμορφων νόμων επί των σφαιρών του E κέντρου 0_E.

Σε αυτήν την περίπτωση, μια κανονική απόδοση του δεσμευμένου νόμου του P αναφορικά με το ότι $\|.\| = r$ είναι ο $\mathcal{U}_{v,r}$.

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$

Υπάρχει απεικόνιση ψ_P από τον $\mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2)$$

Έστω t σταθερό στο E. Για κάθε u του E με $\|u\| = 1$, έχουμε:

$$\phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) = \psi_P(\|t\|^2 \cdot \|u\|^2) = \phi_P(\|t\|u)$$

Λοιπόν, ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς το $\mathcal{U}_v$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi_P(t) &= \int_{S_v} \phi_P(\|t\|u)\mathcal{U}_v(du) = \int_{S_v} \Big(\int_E e^{i<y,\|t\|u>} P(dy)\Big)\mathcal{U}_v(du) \\
&= \int_E \Big(\int_{S_v} e^{i<y,\|t\|u>}\mathcal{U}_v(du)\Big)P(dy) = \int_E \phi_{\mathcal{U}_v}(\|t\|y)P(dy) \\
&= \int_E \psi_{\mathcal{U}_v}(\|t\|^2\|y\|^2)P(dy) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi_{\mathcal{U}_v}(\|t\|^2 r^2)P_{\|\ \|}(dr) \\
&= \int_{\mathbb{R}+} \phi_{\mathcal{U}_v}(rt)P_{\|\ \|}(dr) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi_{\mathcal{U}v,r}(t)P_{\|\ \|}(dr)
\end{aligned}$$

Απ'οπου προκύπτει ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(E)$,

$$P(B) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{U}_{v,r}(B)P_{\|\ \|}(dr)$$

το οποίο ολοκληρώνει αυτό το μέρος της απόδειξης.

$ii) \Rightarrow i)$

Προφανές από την Πρόταση 2.2.1 και την ιδιότητα 2.3.1 .

Παρατήρηση 2.4.2

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι ένας νόμος πιθανότητας επί του $\mathbb{R}_+$ χαρακτηρίζει έναν ακτινικό νόμο επί του E όταν αυτός θεωρηθεί σαν νόμος της ακτίνας του.

Πόρισμα 2.4.3

Έστω P ένας νόμος πιθανότητας επί του E χωρίς άτομο στο 0_E και v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Έστω N η απεικόνιση από το $E - \{0_E\}$ στον E ορισμένη ως εξής:

$$\forall x \in E - 0_E, \ N(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x$$

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$i)$ P είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v.

$ii)$ Ο νόμος P_N είναι ο ομοιόμορφος νόμος επί της σφαίρας S_v και οι τυχαίες μεταβλητές N και $\|\ \|$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$

Υποθέτουμε ότι ο P είναι v-ακτινικός. Υπολογίζουμε το νόμο του P_N Έστω g ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός του Ε και f μια πραγματική θετική συνάρτηση $\mathcal{B}(E)$-μετρήσιμη. Λοιπόν, από θεώρημα μεταφοράς και λόγω v-ακτινικότητας του P, έχουμε:

$$E_{P_N}(f \circ g) = E_P(f \circ g \circ N) = E_P(f \circ N \circ g) = E_P(f \circ N) = E_{P_N}(f)$$

Συνεπώς P_N είναι v-ακτινικός. Επειδή ο P_N ορίζεται επί της S_v, από την Πρόταση 2.2.1, έχουμε $P_N = \mathcal{U}_v$.

Υπολογίζουμε το δεσμευμένο νόμο του Ν αναφορικά με τη $\| \ \|$ τον οποίο συμβολίζουμε με $P_N^{\| \ \|}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.1, έχουμε $P_{\| \ \|}$-σχεδόν για κάθε $r \in \mathbb{R}_+$,

$$P_N^{\| \ \|=r} = (\mathcal{U}_{v,r})_N = \mathcal{U}_v = P_N$$

Συνεπώς Ν και $\| \ \|$ ανεξάρτητες.

$ii) \Rightarrow i)$

Για κάθε $x \in E - \{0_E\}$, έχουμε $x = \|x\| N(x)$. Από τις υποθέσεις του $ii)$ συμπεραίνουμε εύκολα ότι ο δεσμευμένος νόμος του P αναφορικά με $\| \ \| = r$ είναι $\mathcal{U}_{v,r}$ και συνεπώς ότι ο P είναι v-ακτινικός. Πράγματι

$$P^{\| \ \|=r} = P_{\| \ \| \cdot N}^{\| \ \|=r} = \left(P_N^{\| \ \|=r} \right)_{\mathrm{H}(r)}$$

όπου $\mathrm{H}(r)$ σημειώνει την ομοθεσία λόγου r.

Επειδή, εξ'υποθέσεως οι N, $\|.\|$ είναι ανεξάρτητες και $P_N = \mathcal{U}_v$, η προηγούμενη σχέση καταλήγει στην:

$$P^{\|\cdot\|=r} = \Big(P_N \Big)_{\mathrm{H}(r)} = \Big(\mathcal{U}_v \Big)_{\mathrm{H}(r)} = \mathcal{U}_{v,r}$$

Όμως,

$$\forall B \in \mathcal{B}(E), \ P(B) = \int_{\mathbb{R}_+} P^{\|\cdot\|=r}(B) P_{\|\cdot\|}(dr)$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.1, ο νόμος P είναι ακτινικός παραμέτρου διακύμανσης v.

Παρατήρηση 2.4.4

Από το προηγούμενο πόρισμα συμπεραίνουμε ότι ένας v-ακτινικός νόμος επί του Ε χαρακτηρίζεται από το ζεύγος $(N, \| \ \|)$ όταν οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ο νόμος του N είναι ο $\mathcal{U}_{v,r}$.

Πρόταση 2.4.5

Έστω P μια πιθανότητα επί του Ε και v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$i)$ Ο P είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v.

$ii)$ Για κάθε ζεύγος (f, g) μη μηδενικών, v-ορθογώνιων γραμμικών μορφών επί του E, ο δεσμευμένος νόμος του g αναφορικά με την f είναι συμμετρικός επί του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$

Έστω f, g δύο μη-μηδενικές γραμμικές μορφές επί του E, v-ορθογώνιες. Σημειώνουμε $H_f = (Kerf)^{\perp v^{-1}}$ και $H_g = (Kerg)^{\perp v^{-1}}$.

Η γραμμική απεικόνιση (f,g) από τον E στον $\mathbb{R}^2$ είναι επί. Πράγματι, επειδή οι f, g είναι επί και $f(H_f) = Imf,\ g(H_g) = Img$, για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, υπάρχουν $x_a \in H_f$ και $x_b \in H_g$ τέτοια ώστε:

$$f(x_a) = a \ \text{ και } \ g(x_b) = b$$

Όμως $v(f,g) = 0$ συνεπάγεται ότι $H_g \subset Kerf$ και $H_f \subset Kerg$, διότι:

$$\exists x, y \in E \ : f = v^{-1}(x,.) \ \ , \ \ g = v^{-1}(y,.)$$

Λοιπόν

$$v^{-1}(x,y) = v\Big(\ v^{-1}(x,.) \ , \ v^{-1}(y,.) \ \Big) = v(f,g) = 0$$

απ'οπου, $x \in Kerg$ και $y \in Kerf$.

Οπότε, αν $z \in H_f$, $\ v^{-1}(z,z') = 0 \ \ \forall z' \in Kerf$. Επομένως, $v^{-1}(z,y) = 0$ δηλαδή $z \in Kerg$. Άρα $H_f \subset Kerg$. Ομοίως $H_g \subset Kerf$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα έχουμε:

$$\begin{aligned}(f,g)(x_a + x_b) &= \Big(f(x_a) + f(x_b), g(x_a) + g(x_b)\Big)\\ &= \Big(f(x_a) + 0, 0 + g(x_b)\Big) = (a,b)\end{aligned}$$

Εφ'οσον η $(f,g)(: E \to \mathbb{R}^2)$ είναι γραμμική και επί, από την Πρόταση 2.3.4, ο νόμος $P_{(f,g)}$ είναι ακτινικός επί του $\mathbb{R}^2$.

Συνεπώς,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \ \int_B P_g^{f=y}(-A) P_f(dy) = P_{(f,g)}\Big(B \times (-A)\Big) = P_{(f,g)}(B \times A)$$

επειδή η απεικόνιση στο $(x,y) \rightsquigarrow (x,-y)$ είναι ορθογώνια αναφορικά με κάθε βαθμωτό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^2$.

Λοιπόν,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \ \int_B P_g^{f=y}(-A) P_f(dy) = \int_B P_g^{f=y}(A) P_f(dy)$$

Απ'οπου

$$P_f - \sigma.\beta., \ \ P_{-g}^f = P_g^f$$

$ii) \Rightarrow i)$

Η απόδειξη θα βασιστεί στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.4.6

Έστω f και g δύο γραμμικές μορφές επί του E. Αν ο δεσμευμένος νόμος της g αναφορικά με την f είναι συμμετρικός επί του $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $\phi_{P_{af+bg}} = \phi_{P_{af-bg}}$.

Απόδειξη

Έχουμε $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{Paf+bg}(t) &= E_{P_{af+bg}}(e^{it\cdot}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_{af+bg}(dx) = \int_E e^{it(\ af(y)+bg(y)\ )} P(dy) \\
&= E_P\Big(e^{it(af+bg)}\Big) = E_P\bigg(E_P\Big(e^{it(af+bg)}|\ f\Big)\bigg) \\
&= E_P\bigg(e^{itaf} E_P\Big(e^{itbg}|\ f\Big)\bigg) = E_P\Big(e^{itaf} E_P(e^{-itbg}|\ f)\Big) \\
&= E_P\bigg(E_P\Big(e^{it(af-bg)}|\ f\Big)\bigg) = \phi_{P_{af-bg}}(t)
\end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $ii) \Rightarrow i)$.

Έστω γ ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός επί του E. Ορίζουμε για κάθε $t \in E$,

$$f = v^{-1}\bigg(\frac{1}{2}\Big(t+\gamma(t)\Big), \cdot\bigg) \ \text{ και } \ g = v^{-1}\bigg(\frac{1}{2}\Big(t-\gamma(t)\Big), \cdot\bigg)$$

Παρατηρούμε ότι $v(f,g) = 0$, αφού

$$\begin{aligned}
v(f,g) &= v\bigg(\ v^{-1}\Big(\frac{1}{2}(t+g(t)), \cdot\Big)\ ,\ v^{-1}\Big(\frac{1}{2}(t-g(t)), \cdot\Big)\bigg) \\
&= v^{-1}\bigg(\ \frac{1}{2}\Big(t+g(t)\Big)\ ,\ \frac{1}{2}\Big(t-g(t)\Big)\ \bigg) \\
&= \frac{1}{4}\|t\|^2 - \frac{1}{4}\|\gamma(t)\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Ακόμη, είναι προφανές ότι $f+g = v^{-1}(t,\cdot)$ και $f-g = v^{-1}\Big(\gamma(t),\cdot\Big)$

Άρα, από το Λήμμα 2.4.6, έχουμε $\phi_{P_{f+g}} = \phi_{P_{f-g}}$ και ιδιαιτέρως $\phi_{P_{f+g}}(1) = \phi_{P_{f-g}}(1)$ όπου

$$\begin{aligned}
\phi_{P_{f+g}}(1) = \phi_{P_{f-g}}(1) &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{ix} P_{f+g}(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix} P_{f-g}(dx) \\
&\Leftrightarrow \int_E e^{iv^{-1}(t,x)} P(dx) = \int_E e^{iv^{-1}(\ \gamma(t),x\ )} P(dx) \\
&\Leftrightarrow \phi_P(t) = \phi_P(\gamma(t)) \\
&\Leftrightarrow \phi_P(t) = \phi_{P_{\gamma^{-1}}}(t)
\end{aligned}$$

Λοιπόν, από την Πρόταση 1.2.4, έχουμε $P = P_{\gamma^{-1}}$. Άρα ο P είναι ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v.

Πρόταση 2.4.7 *Περίπτωση νόμων με πυκνότητα*

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*, P νόμος πιθανότητας επί του E απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο του Lebesgue λ_v επί του E. Τότε οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) P ακτινικός με παράμετρο διακύμανσης v

ii) P δέχεται μια πυκνότητα f_P της μορφής

$$\forall y \in E,\ f_P(y) = \xi_P(\|y\|^2)$$

όπου ξ_P μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$.

Απόδειξη

Έστω f_P μια πυκνότητα του P αναφορικά με το λ_v.

$i) \Rightarrow ii)$

Έστω g ένας v^{-1}-ορθογώνιος μετασχηματισμός. Έχουμε: $\forall A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
\int_A f_P d\lambda_v &= P(A) = P_g(A) = P\Big(g^{-1}(A)\Big) = \int_{g^{-1}(A)} f_P d\lambda_v \\
&= \int_{g^{-1}(A)} f_P \circ g^{-1} \circ g d\lambda_v = \int_A f_P \circ g^{-1} d(\lambda_v)_g \\
&= \int_A f_P \circ g^{-1} d\lambda_v
\end{aligned}$$

Άρα, $f_P \circ g^{-1} = f_P,\ \lambda_v$-σχεδόν παντού.

Δηλαδή, πράγματι υπάρχει $\xi_P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, μετρήσιμη (αφού f_P μετρήσιμη και $\|\cdot\|$ συνεχής) τέτοια ώστε:

$$\forall y \in E,\ f_P(y) = \xi_P(\|y\|^2)$$

$ii) \Rightarrow i)$

Έστω g ένας μετασχημαρισμός v^{-1}-ορθογώνιος. Έχουμε: $\forall A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
P_g(A) = P\Big(g^{-1}(A)\Big) &= \int_{g^{-1}(A)} f_P(x)\lambda_v(dx) = \int_{g^{-1}(A)} \xi_P(\|x\|^2)\lambda_v(dx) \\
&= \int_{g^{-1}(A)} \xi_P\Big(\|g(x)\|^2\Big)\lambda_v(dx) = \int_{g^{-1}(A)} (f_P \circ g)(x)\lambda_v(dx) \\
&= \int_A f_P(y)(\lambda_v)_g(dy) = \int_A f_P(y)\lambda_v(dy) = P(A)
\end{aligned}$$

Άρα P ακτινικός νόμος επί του E.

Η πρόταση που ακολουθεί και το θεμελιώδες θεώρημα 2.4.9 αποτελούν μια ιδιαιτέρως χρήσιμη ιδιότητα στους ακτινικούς νόμους.

Πρόταση 2.4.8

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Έστω H ένα υπερεπίπεδο του E και π η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του E επί του H.

Για κάθε $r > 0$, ο νόμος εικόνα μέσω της π του ομοιόμορφου νόμου $\mathcal{U}_{v,r}$ επί της σφαίρας $S_{v,r}$ είναι απόλυτα συνεχής αναφορικά με το μέτρο του Lebesgue $\lambda_{v_{(H)}}$ επί του H.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια πιθανότητα P επί του E, v-ακτινική και απόλυτα συνεχής αναφορικά με το μέτρο *Lebesgue* λ_v επί του E. Ένας τέτοιος νόμος υπάρχει πάντοτε $\Big($αρκεί να θεωρήσουμε τον κανονικό νόμο $N_E(0_E, v)\Big)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.7, P δέχεται μια πυκνότητα f_P της μορφής $f_P(x) = \xi_P(\|x\|^2)$ όπου ξ_P είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$.

Για κάθε θετική μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση ϕ από τον H στον $\mathbb{R}_+$, έχουμε από το θεώρημα της μεταφοράς ότι:

$$\int_H \phi(y)\Big(\mathcal{U}_{v,r}\Big)_\pi(dy) \;=\; \int_E (\phi\circ\pi)(x)(\mathcal{U}_{v,r}\Big)_\pi(dx) = E_P(\phi\circ\pi|\,\|\;\|=r) \tag{1.7}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της Πρότασης 2.4.1.

Αλλά για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση ψ από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E_{P_{\|\;\|}}\Big[\psi E_P\Big((\phi\circ\pi)|\,\|\;\|\Big)\Big] &= \int_{\mathbb{R}_+}\psi(r)E_P\Big((\phi\circ\pi)|\,\|\;\|\Big)(r)\;P_{\|\;\|}(dr)\\
&= \int_E \psi(\|x\|)\;E_P(\phi\circ\pi|\,\|\;\|)(\|x\|)\;P(dx)\\
&= \int_E (\psi\circ\|\;\|)\;E_P(\phi\circ\pi|\,\|\;\|)\circ\|\;\|\;dP\\
&= \int_E \psi(\|\;\|)\;E_P\Big(\phi\circ\pi|\sigma(\;\|\;\|)\Big)\;dP\\
&= \int_E E_P\Big(\psi(\|\;\|)\;(\phi\circ\pi)|\sigma(\;\|\;\|)\Big)\;dP\\
&= \int_E \psi(\|x\|)\;(\phi\circ\pi)(x)\;P(dx)\\
&= \int_E \psi(\|x\|)\;(\phi\circ\pi)(x)\;\xi_P(\|x\|^2)\lambda_v(dx)\\
&= \int_{H\times H^\perp}\psi(\|y+z\|)\;\phi(y)\;\xi_P(\|y+z\|^2)\lambda_{v_{(H)}}(dy)\lambda_{v_{(H^\perp)}}(dz)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Έστω $(e_1,\;\dots\;,e_n)$ μία v^{-1}-ορθοκανονική βάση του E τέτοια ώστε η $(e_1,\;\dots\;,e_{n-1})$ να αποτελεί$(v_{(H)})^{-1}$-ορθοκανονική βάση του H και η (e_n) να αποτελεί $(v_{(H^\perp)})^{-1}$-ορθοκανονική βάση του $H^\perp$.

Επειδή $dim(H^\perp)=1$ και $\|y+z\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$ που σημαίνει οτι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (1.8) είναι άρτια ως πρός z, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_{H\times H^\perp}\Psi\Big(\|y+z\|\Big)\;\phi(y)\;\xi_P\Big(\|y+z\|^2\Big)\;\lambda_{v_{(H)}}(dy)\;\lambda_{v_{(H^\perp)}}(dz)\\
=\;\;& 2\int_{H\times H_1^\perp}\Psi\Big(\|y+z\|\Big)\;\phi(y)\;\xi_P\Big(\|y+z\|^2\Big)\;\lambda_{v_{(H)}}(dy)\;\lambda_{v_{(H^\perp)}}(dz)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

όπου $H_1^\perp \;=\; \Big\{z\in H^\perp\;:\;z=z'e_n,\;z'>0\Big\}$.

Θεωρούμε στη συνέχεια την αλλαγή μεταβλητής:

$$\begin{array}{rcl}
T\;:\;H\times H_1^\perp & \rightarrow & H\times\mathbb{R}_+^*\\
(\;y\;,\;z\;) & \rightsquigarrow & (y,\|y+z\|)
\end{array}$$

Αν $(y_1,\;\dots\;,y_{n-1})$ είναι οι συντεταγμένες του y ως πρός την βάση $(e_1,\;\dots\;,e_{n-1})$ και z' εκείνη του z ως πρός τη βάση (e_n),

$$\text{θέτοντας :}\qquad \left.\begin{array}{c} y=y\\ r=\|y+z\|\end{array}\right\}\quad\text{λαμβάνουμε :}\qquad \left\{\begin{array}{c}(y_1,\;\dots\;,y_{n-1})=(y_1,\;\dots\;,y_{n-1})\\ z'=\sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}\end{array}\right.$$

όταν $\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \; < \; r^2$.

Η Ιακωβιανή αυτού του μετασχηματισμού είναι:

$$J \; = \; Det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial r} \end{pmatrix} \;\; = \;\; Det\Big(\frac{\partial y}{\partial y}\Big) \; Det\Big(\frac{\partial z'}{\partial r}\Big) \; = \; \frac{\partial z'}{\partial r} \; = \; r \, \Big(r^2 \; - \; \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\Big)^{-1|2}$$

Έτσι το ολοκλήρωμα στην (1.9) γίνεται:

$$2 \int_{K'} \Psi(r) \; \phi(y_1, \; \ldots \; , y_{n-1}) \; \xi_P(r^2) \; r\Big(r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\Big)^{-1|2} \; \lambda^{n-1}(dy_1, \; \ldots \; , dy_{n-1}) \; \lambda_{\mathbb{R}_+}(dr)$$

$$= 2 \int_K \psi(r)\phi(y)\xi_P(r^2)g(y,r)\lambda_{v_{(H)}}(dy)\lambda_{\mathbb{R}+}(dr)$$

όπου $K' \; = \; \Big\{(y_1, \; \ldots \; , y_{n-1}, r) \; \in \; \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^* \; : \; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \; < \; r^2 \; \Big\}$

και

$$K = \Big\{ \; (y,r) \in H \times \mathbb{R}_+ \; : \|y\| < r \Big\} \;\; \text{και} \;\; g(y,r) = r(r^2 - \|y\|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Παρατηρούμε ότι το $\lambda_{\mathbb{R}_+}$ είναι ισοδύναμο με το $(\lambda_v)_{\|\,\|}$ και ότι μία πυκνότητα του $\lambda_{\mathbb{R}_+}$ αναφορικά με το $(\lambda_v)_{\|\,\|}$ είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{K} \; : \; r \rightsquigarrow \frac{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)}{n\pi^{\frac{n}{2}}} r^{1-n}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις έννοιες της Παραγράφου 2.2 I, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \;\; (\lambda_v)_{\|\,\|}(B) \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_B(r) \; (\lambda_v)_{\|\,\|}(dr) = \int_E \mathbf{1}_B(\|x\|) \; \lambda_v(dx) \\
&= \;\; \int_E \mathbf{1}_B(\|x\|)\xi \; (\lambda^n)(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B\Big(\|\xi(y)\|\Big) \; \lambda^n(dy) \\
&= \;\; \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B\Big((\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{\frac{1}{2}}\Big) \; \lambda^n(dy_1, ..., dy_n)
\end{aligned}$$

Με τη χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων, το τελευταίο ολοκλήρωμα καταλήγει στο κλασικό ολοκλήρωμα:

$$= \int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1}\mathbf{1}_B(r)\Big(\int_{S^{n-1}} d\sigma_{n-1}\Big)\lambda_{\mathbb{R}+}(dr)$$

$$= \int_B r^{n-1} \; \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)}\lambda_{\mathbb{R}_+}(dr)$$

(βλ.[33])

Συνεπώς έχουμε:

$$
\begin{aligned}
E_{P_{\|\ \|}}\Big[\psi\ E_P(\phi\circ\pi|\ \|\ \|)\Big] &= 2\int_K \psi(r)\phi(y)\xi_P(r^2)g(y,r)\mathcal{K}(r)\ \lambda_{v(H)}(dy)(\lambda_v)_{\|\ \|}(dr)\\
&= 2\int_K \psi(r)\phi(y)g(y,r)\mathcal{K}(r)\ \lambda_{v(H)}(dy)P_{\|\ \|}(dr)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\psi(r)\Big(2\int_{\{y\in H:\|y\|<r\}}\phi(y)g(y,r)\mathcal{K}(r)\ \lambda_{v(H)}(dy)\Big)P_{\|\ \|}(dr)
\end{aligned}
$$

Επειδή η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε ψ μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$, έχουμε:

$$
\forall r>0,\ E_P(\phi\circ\pi|\|\ \|=r)=2\int_H \phi(y)g(y,r)\mathcal{K}(r)\mathbf{1}_{\{y\in H:\|y\|<r\}}(y)\ \lambda_{v(H)}(dy)
$$

Αυτή είναι αληθής για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση ϕ από τον H στον $\mathbb{R}_+$. Λοιπόν, λόγω της προηγούμενης σχέσης (1.7), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $r>0$, το $(\mathcal{U}_{v,r})_\pi$, μέτρο επί της $B_{v(H),r}$, είναι απόλυτα συνεχές αναφορικά με το μέτρο *Lebesgue* $\lambda_{v(H)}$ επί του H και δέχεται πυκνότητα αναφορικά με το $\lambda_{v(H)}$ επί της $B_{v(H),r}$, τη συνάρτηση

$$
2\ \mathcal{K}(r)\ g(\cdot,r)=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{r^{2-n}}{(r^2-\|\cdot\|^2)^{\frac{1}{2}}}
$$

Θεώρημα 2.4.9

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^* και P ένας νόμος ακτινικός επί του E με παράμετρο διακύμανσης v, ο οποίος δε δέχεται άτομο στο 0_E.

Τότε η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του P σε κάθε γνήσιο διανυσματικό υποχώρο H του E είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο του Lebesgue $\lambda_{v(H)}$ επί του H.

Απόδειξη

1. Υποθέτουμε αρχικά ότι $dimH=dimE-1$. Αν π η v^{-1}- ορθογώνια προβολή επί του H τότε, $\forall r>0$, ο νόμος $(\mathcal{U}_{v,r})_\pi$ είναι απόλυτα συνεχής αναφορικά με το $\lambda_{v(H)}$ και δέχεται πυκνότητα h_r σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση.

Αφού ο P είναι v-ακτινικός, από την Πρόταση 2.4.1 και το Θεώρημα του *Fubini*, έχουμε: για κάθε $\phi\ :H\to\mathbb{R}_+$ μετρήσιμη,

$$
\begin{aligned}
E_{P_\pi}(\phi)=E_P(\phi\circ\pi) &= \int_{\mathbb{R}_+^\star}\Big(\int_E(\phi\circ\pi)(x)\,\mathcal{U}_{v,r}(dx)\Big)P_{\|\ \|}(dr)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^\star}\Big(\int_H\phi(y)\ (\mathcal{U}_{v,r})_\pi(dy)\Big)P_{\|\ \|}(dr)\\
&= \int_H\phi(y)\ \Big(\int_{\mathbb{R}_+^\star}h_r(y)P_{\|\ \|}(dr)\Big)\lambda_{(H)}(dy)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς ο P_π είναι απόλυτα συνεχές αναφορικά με το $\lambda_{(H)}$ και δέχεται ως πυκνότητα το μίγμα των προβολών των ομοιόμορφων νόμων, δηλαδή την απεικόνιση:

$$
y\rightsquigarrow\int_{\mathbb{R}_+^\star}h_r(y)P_{\|\ \|}(dr)
$$

2. Στη γενική περίπτωση που ο H είναι ένας γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του E με $dimH = n - m$, $m > 1$, εφαρμόζουμε διαδοχικά την Πρόταση 2.4.8 όπως στην ειδική περίπτωση 1, m φορές, επειδή από την Πρόταση 2.3.4, η προβολή ενός ακτινικού νόμου είναι ακτινικός νόμος.

Πρόταση 2.4.10

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Έστω H_1 ένας γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του E διαστάσεως k και π_1 η v^{-1}-ορθογώνια προβολή επί του H_1.

Για κάθε $r > 0$, ο νόμος εικόνα του ομοιόμορφου νόμου $\mathcal{U}_{v,r}$ επί της σφαίρας $S_{v,r}$ υπό την π_1 είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο του Lebesgue $\lambda_{v_{(H_1)}}$ επί του H_1 και δέχεται πυκνότητα την f

$$f\,:\; x \rightsquigarrow C_r^{n,k}(r^2 - \|x\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\,\mathbf{1}_{B_{v,r}}(x)$$

όπου $B_{v,r} = \{\, x \in H_1 \;:\; \|x\| < r \,\}$ και $C_r^{n,k} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})r^{2-n}}{\Gamma(\frac{n-k}{2})\pi^{\frac{k}{2}}}$ η σταθερά κανονικοποίησης.

Απόδειξη

Έστω $l = codim(H_1)$ δηλαδή $l = n - k$.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή ως προς l.

Για $l = 1$, η πρόταση είναι αληθής λόγω της Πρότασης 2.4.8.

Δεχόμαστε την ισχύ της πρότασης για l και θα την αποδείξουμε για $l+1$ (δηλαδή δεχόμαστε την ισχύ της για k και θα την αποδείξουμε για $k-1$).

Έστω H_2 διανυσματικός υπόχωρος του H_1, διαστάσεως $k-1$ και ϕ^0 η v^{-1}-ορθογώνια προβολή του E επί του H_2. Αν π_2 είναι η ορθογώνια προβολή του H_1 επί του H_2 τότε $\phi^0 = \pi_2 \circ \pi_1$.

Για κάθε λοιπόν μετρήσιμη συνάρτηση $\phi\,:H_2 \to \mathbb{R}_+$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_{H_2} \phi\; d(\mathcal{U}_{v,r})_{\phi^0} = \int_{H_2} \phi\; d\Big((\mathcal{U}_{v,r})_{\pi_1}\Big)_{\pi_2} \\
= \;& \int_{H_1} \phi\circ\pi_2\; d(\mathcal{U}_{v,r})_{\pi_1} = \int_{H_1} \phi\Big(\pi_2(x)\Big)\; C_r^{n,k}(r^2 - \|x\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\,\mathbf{1}_{B_{v,r}}(x)\;\lambda_{v_{(H_1)}}(dx) \\
= \;& \int_{H_2\times H_2^{\perp}} \phi\Big(\pi_2(y+z)\Big)\; C_r^{n,k}(r^2 - \|y+z\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\,\mathbf{1}_{B_{v,r}}(y+z)\;\lambda_{v_{(H_2)}}(dy)\lambda_{v_{(H_2^{\perp})}}(dz) \\
= \;& \int_{\{(y,z)\in H_2\times H_2^{\perp}:\,\|y+z\|<r\}} \phi(y)\; C_r^{n,k}(r^2 - \|y+z\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\,\mathbf{1}_{B_{v,r}}(y+z)\;\lambda_{v_{(H_2)}}(dy)\lambda_{v_{(H_2^{\perp})}}(dz) \\
= \;& \int_{H_2} \phi(y)\Big(\int_{\{\,z\in H_2^{\perp}\,:\,\|z\|^2\le\, r^2-\|y\|^2\,\}} C_r^{n,k}(r^2 - \|y+z\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\;\lambda_{v_{(H_2^{\perp})}}(dz)\Big)\lambda_{v_{(H_2)}}(dy)
\end{aligned}$$

όπου $dimH_2^{\perp} = 1$ αφού $H_2^{\perp}$ ο συμπληρωματικός υπόχωρος του H_2 ως προς τον H_1 αρχικό χώρο.

Από αυτό προκύπτει ακόμη ότι ο νόμος εικόνα $(\mathcal{U}_{v,r})_{\phi^0}$ είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο του Lebesgue $\lambda_{v_{(H_2)}}$ και δέχεται πυκνότητα την g

$$g\,:\; y \rightsquigarrow \int_{\{\,z\in H_2^{\perp}\,:\,\|z\|^2\le\, r^2-\|y\|^2\,\}} C_r^{n,k}(r^2 - \|y+z\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\;\lambda_{v_{(H_2^{\perp})}}(dz)$$

Όμως, όταν $\|y\| < r$,

$$\int_{\{ z\in H_2^{\perp}\ :\ \|z\|^2\leq r^2-\|y\|^2 \}} (r^2-\|y+z\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\ \lambda_{v_{(H_2^{\perp})}}(dz) = 2\int_0^{\sqrt{r^2-\|y\|^2}} (r^2-\|y\|^2-z^2)^{\frac{n-k}{2}-1}dz$$

$$\begin{aligned}
&= 2(r^2-\|y\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\int_0^{\sqrt{r^2-\|y\|^2}}\Big(1-\frac{z^2}{r^2-\|y\|^2}\Big)^{\frac{n-k}{2}-1}dz \\
&= 2(r^2-\|y\|^2)^{\frac{n-k-1}{2}}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-k}{2}-1}du \\
&= 2(r^2-\|y\|^2)^{\frac{n-k-1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-k-1}dt
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας για το τελευταίο ολοκλήρωμα το μετασχηματισμό $u = \sin t$.

Υπολογισμός του $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-k-1}dt$

Είναι προφανές ότι:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \int (\cos t)^m dt = \frac{(\cos t)^{m-1}\sin t}{m} + \frac{m-1}{m}\int (\cos t)^{m-2}dt$$

Θέτοντας λοιπόν, $n-k-1 = 2p+q$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p+q}dt &= \frac{2p+q-1}{2p+q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p+q-2}dt \\
&= \frac{2p+q-1}{2p+q}\ \frac{2p+q-3}{2p+q-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p+q-4}dt \\
&= ... \\
&= \frac{(2p+q-1)(2p+q-3)...(2p+q-(2p-1))}{(2p+q)(2p+q-2)...(2p+q-(2p-2))}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^q dt
\end{aligned}$$

Αν q=0,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p+q}dt = \frac{(2p-1)(2p-3)...3\cdot 1}{2p\ (2p-2)...4\cdot 2}\ \frac{\pi}{2} = \frac{(2p-1)(2p-3)...3\cdot 1}{2^p p(p-1)...2\cdot 1}\ \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$$

λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$$\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{(2p-1)(2p-3)...3\cdot 1}{2^p}\ \sqrt{\pi}$$

Αν $q = 1$, προκύπτει ομοίως ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p+q}dt = \frac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-1)...3} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})(p+\frac{1}{2})}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εκφράσεις $p = \frac{n-k-1}{2}$ όταν $q = 0$ και $p = \frac{n-k-2}{2}$ όταν $q = 1$, λαμβάνουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-k-1}dt = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\Gamma(\frac{n-(k-1)}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-(k-1)}{2})}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} g(y) &= 2(r^2 - \|y\|^2)^{\frac{n-k-1}{2}}\ C_r^{n,k}\ \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \mathbf{1}_{B_{v,r}}(y) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})r^{2-n}}{\Gamma(\frac{n-(k-1)}{2})\pi^{(k-1)|2}}\ (r^2 - \|y\|^2)^{\frac{n-(k-1)}{2}-1}\ \mathbf{1}_{B_{v,r}}(y) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.4.11

Αν $\vartheta(\in H_1)$ σταθερό και $\tau_\vartheta(x) = x + \vartheta$ η μεταφορά του διανύσματος ϑ, τότε ο νόμος εικόνα

$$\mathcal{U}_{v,r,\vartheta} = (\mathcal{U}_{v,r})_{\tau_\vartheta}$$

είναι ο ομοιόμορφος επί της σφαίρας $S_{v,r,\vartheta}$ κέντρου ϑ και ακτίνας r. Σ'αυτήν την περίπτωση

$$(\mathcal{U}_{v,r,\vartheta})_{\pi_1} << \lambda_{v_{(H_1)}}$$

και

$$\frac{d(\mathcal{U}_{v,r,\vartheta})_{\pi_1}}{d\lambda_{v_{(H_1)}}}(x) = C_r^{n,k}\ (r^2 - \|x-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}-1}\ \mathbf{1}_{B_{v,r,\vartheta}}(x)$$

όπου $B_{v,r,\vartheta} = \{\ x \in H_1\ :\ \|x-\vartheta\| \leq r\ \}$.

Πράγματι, για κάθε $B \in \mathcal{B}(H_1)(= \mathcal{B}(E) \cap H_1)$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{v,r,\vartheta})_{\pi_1}(B) &= \Big((\mathcal{U}_{v,r})_{\tau_\vartheta}\Big)_{\pi_1}(B) = \Big((\mathcal{U}_{v,r})_{\pi_1}\Big)_{\tau_\vartheta}(B) \\ &= \int_{\tau_\vartheta^{-1}(B)} f\ d\lambda_{v_{(H_1)}} = \int_B f \circ \tau_\vartheta^{-1} d\Big(\lambda_{v_{(H_1)}}\Big)_{\tau_\vartheta} \\ &= \int_B f \circ \tau_{-\vartheta}\ d\lambda_{v_{(H_1)}} \end{aligned}$$

επειδή, επί του Ε, $\pi_1 \circ \tau_\vartheta = \tau_\vartheta \circ \pi_1$ και το μέτρο του *Lebesgue* παραμένει αναλλοίωτο υπό μεταφορά.

2.5 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

Πρόταση 2.5.1

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*. Έστω επίσης P ακτινικός νόμος επί του E με παράμετρο διακύμανσης v.

Αν η v^{-1}-ορθογώνια προβολή π του P επί ενός διανυσματικού υπόχωρου H του E ($dim H \neq 0$) είναι ένας κανονικός νόμος, τότε ο P είναι ένας κανονικός νόμος, $\mathcal{N}_E(0_E, \sigma^2 v)$.

Απόδειξη

Έστω $f \in H^*$, με $\|f\| = 1$. Τότε $f \circ \pi \in E^*$ και $\|f \circ \pi\| = 1$, αφού

$$\|f \circ \pi\| = v(f \circ \pi,\ f \circ \pi) = v(\ {}^t\pi(f),\ {}^t\pi(f)\ ) = v_H(f, f) = \|f\|$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.4,

$$\forall t \in E,\ \ \varphi_P(t) = \psi(\|t\|^2)$$

όπου η συνάρτηση $a \rightsquigarrow \psi(a^2)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $P_{f\circ\pi} = (P_\pi)_f$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\forall t \in E, \;\; \varphi_P(t) = \varphi_{P_{f\circ\pi}}(\|t\|)$$

Εξ'υποθέσεως ο P_π είναι κανονικός. Λοιπόν ο $P_{f\circ\pi}$ είναι κανονικός και η φ_P έχει τη συναρτησιακή μορφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης του νόμου $N_E(0_E, \sigma^2 v)$.

Πρόταση 2.5.2

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^* και P ένας v-ακτινικός νόμος επί του E. Έστω $(e_1, ..., e_n)$ μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση του E. Αν οι περιθωριακοί νόμοι P_i του P επί των διανυσματικών χώρων E_i που παράγονται από τα e_i, $1 \leq i \leq n$, είναι ανεξάρτητοι, τότε ο νόμος P είναι κανονικός $\mathcal{N}(0_E, \sigma^2 v)$.

Απόδειξη

Για κάθε $t \in E$, έστω $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ το διάνυσμα «συντεταγμένων» του t ως προς τη βάση $(e_1, ..., e_n)$.

Τότε, από την ανεξαρτησία των P_i και την απόδειξη της Πρότασης 2.1.4,

$$\phi_P(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{P_i}(t_i e_i) = \prod_{i=1}^{n} \psi_P(t_i^2)$$

Επίσης, επειδή ο P είναι v-ακτινικός,

$$\phi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) = \psi_P(\sum_{i=1}^{n} t_i^2)$$

Συνεπώς η συνεχής συνάρτηση ψ_P ικανοποιεί την ισότητα,

$$\psi_P(a+b) = \psi_P(a)\psi_P(b)$$

Επομένως η ψ_P είναι μια εκθετική συνάρτηση: $\psi_P(s) = e^{as}$.

Επιπλέον, επειδή η ψ_P είναι φραγμένη επί του $\mathbb{R}_+$, έχουμε $a \leq 0$. Άρα,

$$\phi_P(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{at_i^2} = e^{a\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = e^{av^{-1}(t,t)}$$

αυτό το οποίο δείχνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ένας άλλος ενδιαφέρον νόμος πιθανότητας, συνδεδεμένος με τον $\mathcal{N}ormlale$ νόμο στην στατιστική συμπερασματολογία είναι ο νόμος του $\mathcal{F}isher$ ή ($\mathcal{F}$-κατανομή) ο οποίος στο πλαίσιο των σφαιρικά συμμετρικών νόμων εμφανίζεται (βλ.[36]) ως εξής:

Πρόταση 2.5.3

Έστω v ένα βαθμωτό γινόμενο επί του E^*, P ένας νόμος πιθανότητας επί του E χωρίς άτομο στο 0_E και N η απεικόνιση από τον $E - \{0_E\}$ μέσα στον E, ορισμένη:

$$\forall x \in E - \{0_E\}, \; N(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Έστω H και $H^{\perp\, v^{-1}}$ συμπληρωματικοί υπόχωροι του E διαστάσεων k και $n-k$ αντίστοιχα. Έστω ακόμη π_1 και $\pi_2 (= id_E - \pi_1)$ οι v^{-1}-ορθογώνιες προβολές επί των H και $H^{\perp}$ αντίστοιχα.

Τότε αν $\mathcal{U}_v$ ο ομοιόμορφος νόμος επί της σφαίρας S_v του E, ο νόμος εικόνα του $\mathcal{U}_v$ υπο την στατιστική

$$\phi(x) = \frac{\|\pi_1(x)\|^2/k}{\|\pi_2(x)\|/(n-k)}$$

είναι ο κεντρικός νόμος του $\mathcal{F}$iher, $\mathcal{F}_{k,n-k}$, με k και $n-k$ βαθμούς ελευθερίας.

Απόδειξη

Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in E$,

$$(\phi \circ N)(x) = \frac{\|\pi_1\Big(N(x)\Big)\|^2/k}{\|\pi_2\Big(N(x)\Big)\|^2/(n-k)} = \frac{\|\pi_1(x)\|^2/k}{\|\pi_2(x)\|^2/(n-k)} = \phi(x)$$

Λοιπόν

$$(P_N)_\phi = (P)_{\phi\circ N} = (P)_\phi$$

Επειδή σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.3, $P_N = \mathcal{U}_v$ ανν ο P είναι ακτινικός, χωρις περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι,

$$P = \mathcal{N}(0_E, v)$$

Θεωρώντας τώρα μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση του Ε, $(e_1, ..., e_n)$, τέτοια ώστε $(e_1, ..., e_k)$ και $(e_{k+1}, ..., e_n)$ να είναι βάσεις των Η και $H^{\perp}$ αντιστοίχως, έχουμε:

αν $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ τότε

$$\pi_1(x) = \sum_{i=1}^k x_i e_i \ \text{ και } \ \pi_2(x) = \sum_{j=k+1}^n x_j e_j$$

Επομένως,

$$\|\pi_1(x)\|^2 (= \|\pi_1(x)\|^2_{v^{-1}_{(H)}}) = \sum_{i=1}^k x_i^2$$

$$\|\pi_2(x)\|^2 (= \|\pi_2(x)\|^2_{v^{-1}_{(H^\perp)}}) = \sum_{j=k+1}^n x_j^2$$

και

$$\frac{\|\pi_1(x)\|^2/k}{\|\pi_2(x)\|^2/(n-k)} = \frac{(\sum_{i=1}^k x_i^2)/k}{(\sum_{j=k+1}^n x_j^2)/(n-k)}$$

Επειδή $x \sim \mathcal{N}(0_E, v)$, οι $x_i, \quad i = 1, ..., n$ είναι ανεξάρτητες και $x_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Τούτο συνεπάγεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\sum_{i=1}^k x_i^2$ και $\sum_{j=k+1}^n x_j^2$ είναι ανεξάρτητες με νόμους $\mathcal{X}_k^2$ και $\mathcal{X}_{n-k}^2$ αντίστοιχα. Λοιπόν, από τον κλασικό ορισμό του νόμου $\mathcal{F}$ έχουμε το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2.5.4

i) Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι στο πλαίσιο των σφαιρικών νόμων, η κεντρική $\mathcal{F}$-κατανομή ορίζεται ως ο νόμος εικόνα μέσω της στατιστικής ϕ, του ομοιόμορφου νόμου $\mathcal{U}_v$ (τον οποίο αναλυτικότερα σημειώνουμε με $\mathcal{U}_{v,1,0}$)

ii) Αν $\vartheta(\in H)$ σταθερό, στο πλαίσιο των σφαιρικά συμμετρικών νόμων, η μη κεντρική $\mathcal{F}$-κατανομή (παραμέτρου $\|\vartheta\|^2$) ορίζεται επίσης ως ο νόμος εικόνα του ομοιόμορφου νόμου επί της σφαίρας κέντρου ϑ και ακτίνας 1, $\mathcal{U}_{v,1,\vartheta}$ (τον οποίο σημειώνουμε και με $\mathcal{U}_{v,\vartheta}$) μέσω της στατιστικής ϕ.

Πράγματι, επειδή η στατιστική ϕ είναι ελεύθερη υπό ομοθεσία,αν $h_r(x) = rx$ $(r > 0)$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{v,r,\vartheta})_\phi(B) &= \mathcal{U}_{v,r,\vartheta}\Big(\phi^{-1}(B)\Big) = \Big((\mathcal{U}_{v,\vartheta})_{h_r}\Big)\Big(\phi^{-1}(B)\Big) = (\mathcal{U}_{v,\vartheta})_{\phi\circ h_r}(B) \\ &= (\mathcal{U}_{v,\vartheta})_\phi(B)\end{aligned}$$

Λοιπόν

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{v,\vartheta})_\phi(B) &= \int_{\mathbb{R}_+} (\mathcal{U}_{v,r,\vartheta})_\phi(B)\, P_{\|\cdot\|}(dr) = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_{S_{v,r,\vartheta}} \mathbf{1}_{\phi^{-1}(B)}\, d\mathcal{U}_{v,r,\vartheta}\Big)\, P_{\|\cdot\|}(dr) \\ &= P_\vartheta\Big(\phi^{-1}(B)\Big) = (P_\vartheta)_\phi(B)\end{aligned}$$

όπου P_ϑ ο v-ελλειπτικά συμμετρικός νόμος με παράμετρο θέσεως ϑ.

Οπότε, επιλέγοντας, όπως στην Πρόταση 2.5.3, $P_\vartheta = \mathcal{N}_E(\vartheta, v)$, προκύπτει με όμοιο τρόπο ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\sum_{i=1}^k x_i^2$ και $\sum_{j=k+1}^n x_j^2$ είναι ανεξάρτητες με κατανομές $\mathcal{X}_k^2(\|\vartheta\|^2)$ (βλ. Παράρτημα, §1) και $\mathcal{X}_{n-k}^2$ αντιστοίχως. Συνεπώς από τον κλασικό ορισμό της μη κεντρικής $\mathcal{F}$-κατανομής (βλ. Παράρτημα, §2) έχουμε το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 2

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΤΩΝ JAMES – STEIN (περίπτωση Κανονικών νόμων)

Σ'αυτο το κεφάλαιο μελετάμε, σύμφωνα με τους *Cellier* και *Fourdrinier* (1985) και *Cellier*, *Fourdrinier* και *Robert* (1989, [17]), το πρόβλημα της εκτίμησης του μέσου μιας πολυδιάστατης κανονικής κατανομής της οποίας η διασπορά είναι γνωστή ή άγνωστη κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα, δια μέσου των *εκτιμητών με συρρίκνωση*, οι οποίοι κυριαρχούν ομοιόμορφα τον συνήθη εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων υπό μια τετραγωνική συνάρτηση απώλειας συνδεδεμένη με μια οποιαδήποτε τετραγωνική μορφή.

1. ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΤΕΣ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ ΓΙΑ ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΑΠΩΛΕΙΑ

1.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Παρατηρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα y μέσα σε ένα διανυσματικό χώρο Ε πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{R}$, που ακολουθεί κανονικό νόμο $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2 v)$ μέσου ϑ και διασποράς $\sigma^2 v$, όπου:

i) το ϑ είναι *άγνωστο* και ανήκει σε γνωστό διανυσματικό υπόχωρο Θ του Ε, διάστασης k ($k \geq 3$).

ii) το v είναι μια διγραμμική συμμετρική μορφή επί του δυϊκού του Ε, E^*, *θετικά ορισμένη* και *γνωστή* (είναι πρακτικό να τη θεωρήσουμε ως ένα γραμμικό ισομορφισμό του E^* επί του Ε).

iii) το $\sigma^2 (> 0)$ είναι *γνωστό ή άγνωστο* ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζουμε (και αν είναι σ^2 άγνωστο, υποθέτουμε ότι $k < n - 1$).

Το πρόβλημα είναι η εκτίμηση του ϑ. Κάθε εκτιμητής του ϑ είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση φ από τον Ε στον Θ. Το κριτήριο σύγκρισης των εκτιμητών που υϊοθετούμε είναι ο κίνδυνος αναφορικά με μια τετραγωνική συνάρτηση απώλειας ορισμένης μέσω μιας διγραμμικής συμμετρικής θετικής μορφής q (όχι απαραίτητα θετικά ορισμένης), προκαθορισμένη για όλη την παρακάτω μελέτη.

Γενικά σ'οτι ακολουθεί, αν w είναι μια διγραμμική συμμετρική μορφή, σημειώνουμε με $\bar{w}$ την τετραγωνική μορφή που συνδέεται με αυτήν. Έτσι η υφιστάμενη απώλεια όταν παρέχεται το ϑ' ενώ η «αληθινή τιμή» είναι το ϑ, γράφεται

$$\sigma^{-2} \bar{q}(\vartheta' - \vartheta)$$

Σημειώνουμε φ^0 τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας του ϑ, δηλαδή τη v^{-1}-ορθογώνια προβολή του Ε επί του Θ (καλούμενος μερικές φορές *γενικευμένος εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων*). Η διασπορά του είναι μια διγραμμική συμμετρική μορφή επί του Θ^*, την οποία σημειώνουμε με v_Θ (σημειώνουμε ότι v_Θ^{-1} είναι ο περιορισμός του v^{-1} στον Θ).

Είναι χρήσιμο στη συνέχεια να αναφέρουμε ότι:

αν $\Theta^\perp$ ο υπόχωρος του Ε, ορθογώνιος (αναφορικά με το v^{-1}) του Θ, τότε οι v^{-1}-ορθογώνιες προβολές του Ε επί του Θ και επί του $\Theta^\perp$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\Big($αναφορικά με την $\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v)\Big)$ και έχουμε:

$$\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v)=\mathcal{N}_\Theta(\vartheta,\sigma^2 v_\Theta)\times\mathcal{N}_{\Theta^\perp}(0,\sigma^2 v_{\Theta^\perp})$$

Τούτο σημαίνει ότι:

$$\varphi^0(y)\sim\mathcal{N}_\Theta(\vartheta,\sigma^2 v_\Theta)\ \text{ και }\ y-\varphi^0(y)\sim\mathcal{N}_{\Theta^\perp}(0,\sigma^2 v_{\Theta^\perp})$$

.

1.2 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΤΩΝ JAMES – STEIN

1.2.1 Οι εκτιμητές φ με τους οποίους θα ασχοληθούμε εδώ κατασκευάζονται με τη βοήθεια:

– μιας θετικά ορισμένης συμμετρικής διγραμμικής μορφής b επί του Θ
– ενός ενδομορφισμού c του Θ
– μιας μετρήσιμης απεικόνισης h από το $\mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{R}_+$

Αν σ^2 *γνωστό*, το φ εκφράζεται υπό τη μορφή:

$$\varphi(y)=\varphi^0(y)-h\Big(\sigma^{-2}\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\cdot c\Big(\varphi^0(y)\Big) \tag{2.1}$$

Αν σ^2 είναι *άγνωστο*, αντικαθιστούμε στον τύπο (2.1), το σ^2 με τη συνήθη αμερόληπτη εκτίμηση του δηλαδή την $\frac{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}{n-k}$ και το φ εκφράζεται υπό τη μορφή:

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \varphi^0(y)-h\Big(\frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\,\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\cdot c\Big(\varphi^0(y)\Big)\\ &= \Big[id_\Theta-h\Big(\frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\,\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)c\Big]\varphi^0(y)\end{aligned} \tag{2.2}$$

1.2.2 Κίνδυνος των JAMES – STEIN γενικευμένων εκτιμητών

Σε αυτήν την παράγραφο συμβολίζουμε, για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση f από τον Ε στον $\mathbb{R}$ και για κάθε $\vartheta\in\Theta$,

$$E_\vartheta\Big[f(y)\Big]=\int_E f(y)\,\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v;dy)$$

και για κάθε $y\in E$,

$$\tilde{h}(y)=h\Big(\sigma^{-2}\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\qquad \text{αν } \sigma^2 \text{ είναι γνωστό}$$

$$\tilde{h}(y) = h\Big(\frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big) \qquad \text{αν } \sigma^2 \text{ είναι αγνωστό}$$

Υπολογισμός του κινδύνου

Σημειώνουμε, για κάθε $\vartheta \in \Theta$, $R(\varphi;\vartheta)$ την τιμή στο ϑ της συνάρτησης κινδύνου του φ. Έχουμε

$$\begin{aligned}
R(\varphi;\vartheta) &= \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi(y)-\vartheta\Big)\Big] = \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)-\vartheta\Big)\Big] \\
&= \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)-2q\Big(\varphi^0(y)-\vartheta,\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)+\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

και ιδιαιτέρως ο

$$R(\varphi^0;\vartheta) = \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)\Big]$$

είναι πεπερασμένος και ίσος με το $tr(v_\Theta q)$ όπως αποδεικνύεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
R(\varphi^0;\vartheta) &= \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)\Big] \\
&= \sigma^{-2}\int_E \bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)\,\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v;dy) \\
&= \sigma^{-2}\int_{\Theta\times\Theta^\perp} \bar{q}(x-\vartheta)\,\mathcal{N}_\Theta(\vartheta,\sigma^2 v_\Theta;dx)\,\mathcal{N}_{\Theta^\perp}(0,\sigma^2 v_{\Theta^\perp};dz) \\
&= \sigma^{-2}\int_{\Theta} \bar{q}(x-\vartheta)\,\mathcal{N}_\Theta(\vartheta,\sigma^2 v_\Theta;dx) \\
&= \int_{\Theta} \bar{q}(z)\,\mathcal{N}_\Theta(0,v_\Theta;dz)
\end{aligned}$$

Έστω $(e_1,...,e_n)$ μια βάση v^{-1}-ορθοκανονική τέτοια ώστε η $(e_1,...,e_k)$ να είναι ορθογώνια για την q. Οι πίνακες των v, v^{-1} είναι τότε ο μοναδιαίος πίνακας I_n ενώ ο πίνακας της q είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τα q_i $(q_i \geq 0)$.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται τότε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{j=1}^k q_j z_j^2\,\mathcal{N}_k(0,I_k;dz_1,...,dz_k) &= \sum_{j=1}^k q_j\int_{\mathbb{R}^k} z_j^2\,\mathcal{N}_k(0,I_k;dz_1,...,dz_k) \\
&= \sum_{j=1}^k q_j\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}} z_j^2\,\mathcal{N}(0,1;dz_j)\Big)\mathcal{N}_{k-1}(0,I_{k-1};dz^j) \\
&= \sum_{j=1}^k q_j = tr(v_\Theta q)
\end{aligned}$$

όπου $z^j = {}^t(z_1,...,z_{j-1},z_{j+1},...,z_k)$

Συνθήκη για να είναι ο κίνδυνος πεπερασμένος

Λήμμα 1.2.1

Μια αναγκαία και ικανή συνθηκή για να είναι ο κίνδυνος στο θ ενός εκτιμητή του τύπου (2.1) ή του τύπου (2.2) πεπερασμένος είναι:

$$E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] < \infty$$

Απόδειξη

Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από τον ανωτέρω υπολογισμό του κινδύνου, την ανισότητα του *Schwarz* και το γεγονός ότι $R(\varphi^0;\vartheta) < \infty$. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε αρχικά ότι:

$$E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] < \infty$$

.

Από τον ανωτέρω υπολογισμό του κινδύνου λαμβάνουμε:

$$R(\varphi;\vartheta) = R(\varphi^0;\vartheta) - 2\sigma^{-2}E_\vartheta\Big[q\Big(\varphi^0(y)-\vartheta,\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] + \sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big]$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$,

$$\begin{aligned} E_\vartheta\Big[q\Big(\varphi^0(y)-\vartheta,\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] &\leq E_\vartheta\Big[\bar{q}^{1/2}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)\bar{q}^{1/2}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] \\ &\leq \Big(E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\varphi^0(y)-\vartheta\Big)\Big]\Big)^{1/2}\Big(E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big]\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

όπου έκαστος παράγοντας στο δεξιό μέλος της ανισότητας είναι πεπερασμένος.

Λοιπόν στην έκφραση του κινδύνου $R(\varphi;\vartheta)$ κάθε όρος είναι πεπερασμένος και συνεπώς $R(\varphi;\vartheta) < \infty$.

Αντιστρόφως, δεχόμαστε ότι $R(\varphi;\vartheta) < \infty$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} R(\varphi;\vartheta) &\geq R(\varphi^0;\vartheta) - 2\sigma^{-1}\Big(R(\varphi^0;\vartheta)\Big)^{1/2}\Big(E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big]\Big)^{1/2} \\ &\quad +\sigma^{-2}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] \\ &= \Big[\Big(R(\varphi^0;\vartheta)\Big)^{1/2} - \sigma^{-1}E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big]\Big]^2 \end{aligned}$$

Απ'οπου, $E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] < \infty$.

1.2.3 Υποθέτουμε σε όλη τη συνέχεια της παραγράφου 1 ότι b, c και h ικανοποιούν τις α-κόλουθες ιδιότητες:

$(P1)$ υπάρχει μια βάση $(e_1, ..., e_n)$ του Ε, υ^{-1}-ορθοκανονική, της οποίας τα k πρώτα στοιχεία αποτελούν βάση του Θ ορθογώνια για την q και για την b και μέσα στην οποία ο ενδομορφισμός c διαγωνιοποιείται

$(P2)$ οι ιδιοτιμές του c είναι όλες θετικές ή μηδενικές

$(P3)$ ο ενδομορφισμός του Θ^*, qc^2b^{-1} δεν είναι ταυτοτικά μηδέν

$(P4)$ για κάθε ϑ που ανήκει στο Θ, $E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(\tilde{h}(y)c\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big)\Big] < \infty$

Η επιλογή των υποθέσεων $(P1), (P2)$ και $(P3)$ που έχουν υϊοθετηθεί για τα b και c είναι ουσιαστικά εκείνη του *Berger* (1976) επαναλλαμβανόμενη στη συνέχεια και από άλλους συγγραφείς. Η διαφορά με εκείνους είναι ότι εδώ η συνάρτηση συρρίκνωσης δεν είναι διαφορίσιμη, ούτε καν συνεχής.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο *Stein* (1981) για το ίδιο πρόβλημα, όταν σ^2 γνωστό, θεωρεί εκτιμητές της μορφής

$$\varphi^0(y) + grad\ log\Big[f\Big(\varphi^0(y)\Big)\Big]$$

με τους συρρικνωτές f ορισμένους «απέυθείας» επί του Θ και όχι μέσω μιας τετραγωνικής μορφής ορισμένης σάυτόν τον υπόχωρο. Υποθέτει λοιπόν ότι η f είναι συνεχής και $\sigma.\pi.$ διαφορίσιμη και εισάγει υποθέσεις επί του *gradient* του $log f$.

Παρατηρήσεις επί αυτών των ιδιοτήτων

$a)$ Η ύπαρξη μιας βάσης $(e_1, ..., e_n)$, v^{-1}-ορθοκανονικής και τέτοιας ώστε $(e_1, ..., e_k)$ να είναι ορθογώνια για το q, είναι μια στοιχειώδης ιδιότητα της ευκλείδειας άλγεβρας (βλέπε π.χ. [37]). Η $(P1)$ είναι λοιπόν μια υπόθεση επί της εκλογής των b και c.

$b)$ Είναι στοιχειώδες ότι ο ενδομορφισμός qc^2b^{-1} είναι διαγωνιοποιήσιμος και ότι οι ιδιοτιμές του είναι θετικές ή μηδεν. Η ιδιότητα (P3) ισοδυναμεί λοιπόν με την

$$(P3') \qquad pgvp(qc^2b^{-1}) > 0$$

όπου $pgvp$ συμβολίζει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

$c)$ Η ιδιότητα (P4) εξασφαλίζει το πεπερασμένο του κινδύνου και την εγκυρότητα των υπολογισμων που πραγματοποιούνται στην απόδειξη του θεωρήματος.

1.3 ΘΕΩΡΗΜΑ

1.3.1 Εισάγουμε την πραγματική σταθερά a που ορίζεται ως εξής:

$$a = \frac{2[tr(v_\Theta qc) - 2pgvp(v_\Theta qc)]}{pgvp(qc^2b^{-1})}$$

Θεώρημα 1.3.1

Αν σ^2 γνωστό (αντ. άγνωστο), υπό τις υποθέσεις (P1),(P2),(P3),(P4), μια ικανή συνθήκη για να είναι ο γενικευμένος εκτιμητής των $James - Stein$ φ, ορισμένος από την (2.1) (αντ. από την (2.2)), κινδύνου ομοιομόρφως μικρότερου ή ίσου από εκείνο του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας φ^0 είναι η απεικόνιση $t \rightsquigarrow th(t)$ να είναι αύξουσα και φραγμένη από το a (αντ. από το $a\frac{n-k}{n-k+2}$).

Επιπλέον για να είναι ο φ, ορισμένος από την (2.1) (αντ. από την (2.2)) κινδύνου αυστηρά ομοιομόρφως μικρότερου από εκείνο του φ^0, αρκεί να υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί t_1, t_2 τέτοιοι ώστε:

$$0 < t_1 < t_2 \ \text{ και } \ 0 < t_1h(t_1) \leq t_2h(t_2) < a$$

$\Big($αντ. $0 < t_1 < t_2$ και $0 < t_1 h(t_1) \leq t_2 h(t_2) < \frac{a(n-k)}{n-k+2}\Big)$

Παρατηρήσεις 1.3.1

a) Θα είναι πρακτικό στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος, να καταφύγουμε στην έκφραση υπό μορφή πινάκων, με τη βοήθεια μιας βάσης $(e_1, ..., e_n)$ της οποίας την ύπαρξη εξασφαλίζει η ιδιότητα (P1), των διάφορων συμμετρικών διγραμμικών μορφών και των ενδομορφισμών που χρησιμοποιούνται.

Φυσικά οι πίνακες των v και v^{-1} είναι ίσοι με τον I_n, μοναδιαίο πίνακα τάξης n. Οι πίνακες των q, b και c, είναι διαγώνιοι και σημειώνονται αντίστοιχα:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_k \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_k \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_k \end{bmatrix}$$

όπου για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, $q_i \geq 0$, $b_i > 0$ και $c_i \geq 0\Big($σύμφωνα με την (P2)$\Big)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} pgvp(v_\Theta qc) &= \max_{1 \leq i \leq k} q_i c_i \\ tr(v_\Theta qc) &= \sum_{i=1}^{k} q_i c_i \\ pgvp(qc^2 b^{-1}) &= \max_{1 \leq i \leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} \end{aligned}$$

Η (P3) εκφράζει λοιπόν ότι υπάρχει i $(1 \leq i \leq k)$ τέτοιο ώστε $q_i > 0$ και $c_i > 0$. Σημειώνουμε ακόμη με $y_1, ..., y_n$ τους συντελεστές του y αναφορικά με τη βάση $(e_1, ..., e_n)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \varphi^0(y) &= (y_1, ..., y_k) \\ \overline{v^{-1}}\Big(y - \varphi^0(y)\Big) &= \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 \\ \varphi(y) &= \Big(\ \varphi_1(y), ..., \varphi_k(y)\ \Big) \end{aligned}$$

όπου, για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, φ_i δίνεται από τον τύπο

$$\varphi_i(y) = \Big(1 - h(t) c_i\Big) y_i$$

όπου, στην περίπτωση που το σ^2 είναι *γνωστό*,

$$t = \sigma^{-2} \sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2 \tag{2.3}$$

και στην περίπτωση που το σ^2 είναι *άγνωστο*,

$$t = \frac{n-k}{\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2} \ \sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2 \tag{2.4}$$

b) Για την υπαρξη ενός τουλάχιστον γενικευμένου εκτιμητή των $James - Stein$, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος και μη ταυτόσημου με τον φ^0, θα πρέπει η απεικόνιση h να μην είναι ταυτοτικά μηδέν και συνεπώς το a είναι αυστηρά θετικό. Δηλαδή ότι:

$$tr(v_\Theta qc) > 2pgvp(v_\Theta qc)$$

ή αλλιως

$$\sum_{i=1}^{k} q_i c_i > 2 \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i$$

Αυτή η συνθήκη μπορεί να πραγματοποιηθεί αν $k > 2$.

Απόδειξη του Θεωρήματος

Έστω $\vartheta \in \Theta$. Θα σημειώνουμε, για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση f από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$,

$$E_\vartheta[f(y_1, ..., y_n)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, ..., y_n)\; exp\Big\{\Big(-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big\}\; dy_1...dy_n$$

όπου τα ϑ_i είναι οι συντεταγμένες του ϑ ως προς τη βάση $(e_1, ..., e_n)$.

Επίσης θέτουμε:

$$\Delta\varphi(\vartheta) = R(\varphi^0; \vartheta) - R(\varphi; \vartheta)$$

Η έκφραση του κινδύνου του φ στο ϑ, $R(\varphi; \vartheta)$, που είδαμε στην 1.2.2 και η προσφυγή στην έκφραση υπό μορφή πινάκων (βλ. Παρατήρηση a) ανωτέρω) μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\Delta\varphi(\vartheta) = A_\varphi(\vartheta) - B_\varphi(\vartheta)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_\varphi(\vartheta) &= \frac{2}{\sigma^2}\, E_\vartheta\Big[q\Big(\varphi^0(y) - \vartheta,\ h(t)c(\varphi^0(y))\Big)\Big] = \frac{2}{\sigma^2} E_\vartheta\Big[\sum_{i=1}^{k} q_i c_i y_i (y_i - \vartheta_i) h(t)\Big] \\ B_\varphi(\vartheta) &= \frac{1}{\sigma^2}\, E_\vartheta\Big[\bar{q}\Big(h(t)c(\varphi^0(y))\Big)\Big] = \frac{2}{\sigma^2} E_\vartheta\Big[\sum_{i=1}^{k} q_i c_i^2 y_i^2 h^2(t)\Big] \end{aligned}$$

Η απόδειξή μας θα βασιστεί σε ένα φράξιμο εκ των κάτω του $A_\varphi(\vartheta)$ και σε ένα φράξιμο εκ των άνω του $B_\varphi(\vartheta)$.

Κάτω φράγμα του $\mathbf{A}_{\varphi}(\vartheta)$

Για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, θέτουμε:

$$\begin{aligned} a_i &= E_\vartheta\Big[h(t) y_i (y_i - \vartheta_i)\Big] = \int_{\mathbb{R}^n} h(t) y_i (y_i - \vartheta_i)\; \mathcal{N}_n(\vartheta, \sigma^2 I_n; dy_1, ..., dy_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} h(t) y_i (y_i - \vartheta_i)\; \mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2; dy_i)\Big)\; \mathcal{N}_{n-1}(\vartheta^i, \sigma^2 I_{n-1}; dy^i) \end{aligned}$$

όπου $\vartheta^i = (\vartheta_1, ..., \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, ..., \vartheta_k, 0..., 0)$ και $y^i = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$.

Όμως στο εσωτερικό ολοκλήρωμα, ολοκληρώνοντας κατά μέρη ως προς τη μεταβλητή y_i και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4.1 κατωτέρω, για $g(y_i) = y_i h(t)$ και $f(y_i) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \vartheta_i)^2\}$ λαμβάνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) y_i (y_i - \vartheta_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\; exp\{-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\} dy_i = -\int_{\mathbb{R}} h(t) y_i f'(y_i) dy_i = \int_{\mathbb{R}} f(y_i) dg(y_i)$$

Επειδή $k \geq 3$, σχεδόν βέβαια για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, $\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2 - b_i y_i^2 > 0$. Εφαρμόζοντας τότε το Λήμμα 1.4.2 για $a = \frac{b_i}{\sigma^2} > 0$ και $b = \frac{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2 - b_i y_i^2}{\sigma^2} > 0$, έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} f(y_i) dg(y_i) \geq \int_{\mathbb{R}} f(y_i) h(t)\Big(1 - \frac{2b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big) dy_i = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} h(t)\Big(1 - \frac{2b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big)\mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2; dy_i)$$

Άρα

$$\begin{aligned} a_i &\geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\sigma^2 \int_{\mathbb{R}} h(t)\Big(1 - \frac{2b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big)\, \mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2; dy_i)\Big)\, \mathcal{N}_{n-1}(\vartheta^i, \sigma^2 I_{n-1}; dy^i) \\ &= \sigma^2 E_\vartheta\Big[h(t)\Big(1 - \frac{2b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big)\Big] \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} A_\varphi(\vartheta) &= \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} q_i c_i E_\vartheta\Big[h(t) y_i (y_i - \vartheta_i)\Big] \\ &\geq \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} q_i c_i \sigma^2 E_\vartheta\Big[h(t)\Big(1 - \frac{2b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big)\Big] \\ &= 2E_\vartheta\Big[h(t)\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i c_i - \frac{2\sum_{i=1}^{k} q_i c_i b_i y_i^2}{\sum_{j=1}^{k} b_j y_j^2}\Big)\Big] \\ &\geq 2E_\vartheta\Big[h(t)\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i c_i - 2\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i\Big)\Big] \\ &= 2\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i c_i - 2\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i\Big) E_\vartheta\Big[h(t)\Big] \end{aligned}$$

Άνω φράγμα του $\mathrm{B}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\vartheta})$

$$\begin{aligned} B_\varphi(\vartheta) &= \sigma^{-2} E_\vartheta\Big[h^2(t)\sum_{i=1}^{k} q_i c_i^2 y_i^2\Big] = \sigma^{-2} E_\vartheta\Big[t h^2(t)\ \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i y_i^2}{t}\ \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i c_i^2 b_i^{-1} b_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{k} b_i y_i^2}\Big] \\ &\leq \sigma^{-2}\ \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} \cdot E_\vartheta\Big[t h^2(t)\ \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i y_i^2}{t}\Big] \end{aligned}$$

- Στην περίπτωση που το σ^2 είναι *γνωστό*, από την (2.3), $\frac{\sum_{=1}^{k} b_i y_i^2}{t} = \sigma^2$ και λοιπόν

$$B_\varphi(\vartheta) \leq \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} E_\vartheta\Big[t h^2(t)\Big]$$

- Στην περίπτωση που το σ^2 είναι *άγνωστο*, από την (2.4), $\frac{\sum_{=1}^{k} b_i y_i^2}{t} = \frac{\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2}{n-k}$ και συνεπώς

$$B_\varphi(\vartheta) \leq \frac{1}{n-k}\ \sigma^{-2} \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} E_\vartheta\Big[t h^2(t)\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2\Big]$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
&\sigma^{-2} E_\vartheta\Big[th^2(t)\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2\Big]\\
&= \sigma^{-2}\int_{\mathbb{R}^n} th^2(t)\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2\ \mathcal{N}_n(\vartheta,\sigma^2 I_n; dy_1,...,dy_n)\\
&= \sigma^{-2}\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{j=k+1}^{n}\Big[\int_{\mathbb{R}^{n-k}} th^2(t) y_j^2\ \mathcal{N}_{n-k}(0,\sigma^2 I_{n-k}; dy_{n-k},...,dy_n)\Big]\mathcal{N}_k(\vartheta,\sigma^2 I_k; dy_1,...,dy_k)
\end{aligned}$$

Επειδή $n-k\geq 2$, σχεδόν βέβαια για κάθε j $(k+1\leq j\leq n)$, $\sum_{i=k+1}^{n} y_i - y_j^2 > 0$. Από το Λήμμα 1.4.3, προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\sigma^{-2} E_\vartheta\Big[th^2(t)\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2\Big]\\
&\leq \sigma^{-2}\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{j=k+1}^{n}\Big[\int_{\mathbb{R}^{n-k}} th^2(t)\Big(1+\frac{2y_j^2}{\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2}\Big)\ \mathcal{N}_{n-k}(0,\sigma^2 I_{n-k}; dy_{k+1},...,dy_n)\Big]\\
&\qquad\qquad \mathcal{N}_k(\vartheta,\sigma^2 I_k; dy_1,...,dy_k)\\
&= (n-k+2)E_\vartheta\Big[th^2(t)\Big]
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$B_\varphi(\vartheta)\leq \max_{1\leq i\leq k}(p_i c_i^2 b_i^{-1})\ \frac{n-k+2}{n-k}\ E_\vartheta[th^2(t)]$$

Κάτω φράγμα του $\boldsymbol{\Delta_\varphi(\vartheta)}$

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω μπορούμε να γράψουμε:

- στην περίπτωση που σ^2 είναι *γνωστό*

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi(\vartheta) &= A_\varphi(\vartheta) - B_\varphi(\vartheta)\\
&\geq 2\Big(\sum_{i=1}^{k} q_i c_i - 2\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i\Big)E_\vartheta[h(t)] - \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} E_\vartheta[th^2(t)]\\
&= E_\vartheta\Big[h(t)\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{k} q_i c_i - 2\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i\Big) - \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} th(t)\Big]\Big]\\
&= E_\vartheta\Big[h(t)\Big[a\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} - \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} th(t)\Big]\Big]\\
&= \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1} E_\vartheta\Big[h(t)\Big(a - th(t)\Big)\Big] \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

- στην περίπτωση που σ^2 είναι *άγνωστο*

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi(\vartheta) &\geq E_\vartheta\Big[h(t)\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{k} q_i c_i - 2\max_{1\leq i\leq k} q_i c_i\Big) - \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1}\ \frac{n-k+2}{n-k}\ th(t)\Big]\Big]\\
&= \max_{1\leq i\leq k} q_i c_i^2 b_i^{-1}\ \frac{n-k+2}{n-k}\ E_\vartheta\Big[h(t)\Big(\frac{n-k}{n-k+2}a - th(t)\Big)\Big] \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Το φράξιμο εκ των άνω της απεικόνισης $t \rightsquigarrow th(t)$ μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι $\Delta_\varphi(\vartheta) \geq 0$ δηλαδή ότι ο κίνδυνος του φ είναι μικρότερος ή ίσος του κινδύνου του φ^0.

Οι δύο ικανές συνθήκες (αναφορικά με τις περιπτώσεις που το σ^2 είναι γνωστό και άγνωστο αντίστοιχα) μας επιτρέπουν να επιβεβαιώσουμε ότι ο κίνδυνος του φ είναι αυστηρά μικρότερος του φ^0 ως άμεση συνέπεια των ανισοτήτων (2.5) και (2.6).

Πράγματι στην (2.5),

$$\begin{aligned}
&E_\vartheta\Big[h(t)\Big(a - th(t)\Big)\Big] \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} h\Big(\sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2\Big)\Big(a - \sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2 h(\sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2)\Big)\mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n; dy_1, ..., dy_n) \\
&\quad \geq \int_A h\Big(\sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2\Big)\Big(a - \sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2 h(\sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2)\Big)\mathcal{N}_k(0, \sigma^2 I_k; dy_1, ..., dy_k)
\end{aligned}$$

όπου $A = \{\ (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k\ :\ t_1 \leq \sigma^{-2}\sum_{j=1}^k b_j y_j^2 \leq t_2\}$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$0 < t_1 < t_2 \quad \text{και} \quad 0 < t_1 h(t_1) \leq t_2 h(t_2) < a$$

Ακόμη, επειδή η απεικόνιση $t \rightsquigarrow th(t)$ είναι αύξουσα, $\forall t \in [t_1, t_2],\ 0 < th(t) < a$. Λοιπόν

$$E_\vartheta\Big[h(t)\Big(a - th(t)\Big)\Big] > 0$$

Όμοια για την (2.6).

1.4 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η έννοια του ολοκληρώματος του *Stieltjes* και των σχετικών ιδιοτήτων του τις οποίες χρησιμοποιούμε στην ανάπτυξη των παρακάτω Λημμάτων, είναι κλασικές και παραπέμπουμε στον *Natanson* (1974) Κεφ. 8,9.

Λήμμα 1.4.1

Έστω f μια πραγματική συνεχής συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Έστω g μια πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης επί του $\mathbb{R}$.

Τότε τα ολοκληρώματα του Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)df(x)$$

υπάρχουν και επαληθεύουν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)df(x)$$

Απόδειξη

Πρόκειται για ένα κλασικό αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης κατά μέρη του ολοκληρώματος *Stieltjes* μιας συνάρτησης συνεχούς και φραγμένης επί του $\mathbb{R}$ αναφορικά με μια συνεχή συνάρτηση φραγμένης κύμανσης επί του $\mathbb{R}$

Συγκεκριμένα, η ύπαρξη του πρώτου ολοκληρώματος είναι άμεση από τον ορισμό του (S)-ολοκληρώματος επί του $\mathbb{R}$ και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)g(x)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη επί του $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \Big[\ [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)df(x)\Big]$$

Επειδή η g είναι φραγμένη επί του $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$,

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} [\ f(x)g(x)\ ]_a^b = 0$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = -\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b g(x)df(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)df(x)$$

απ'οπου και η ύπαρξη του δεύτερου ολοκληρώματος και η ζητούμενη σχέση.

Λήμμα 1.4.2

Έστω h μια απεικόνιση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $th(t)$ να είναι αύξουσα και φραγμένη επί του $\mathbb{R}_+$. Έστω f μια απεικόνιση θετική συνεχής επί του $\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Για $a, b > 0$, σταθερά, σημειώνουμε με g την απεικόνιση επί του $\mathbb{R}$ ορισμένη από την:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = xh(ax^2 + b)$$

Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(ax^2+b)\Big(1 - \frac{2ax^2}{ax^2+b}\Big)dx$$

Απόδειξη

Η g είναι φραγμένης κύμανσης επί του $\mathbb{R}$, διότι αυτή γράφεται ως γινόμενο δυο απεικονίσεων φραγμένης κύμανσης επί του $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα της απεικόνισης

$$x \rightsquigarrow (ax^2+b)h(ax^2+b)$$

η οποία είναι φραγμένη και μονότονη κατά τμήματα επί του $\mathbb{R}$ $\Big($αν $x < 0,\ x \rightsquigarrow (ax^2+b)h(ax^2+b) \downarrow,$ αν $x > 0,\ x \rightsquigarrow (ax^2+b)h(ax^2+b) \uparrow \Big)$ και της απεικόνισης

$$x \rightsquigarrow \frac{x}{ax^2+b}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο φραγμένη (από το $1/b$) επί του $\mathbb{R}$

Κατά συνέπεια, από το Λήμμα 1.4.1, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$ υπάρχει. Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\Big((ax^2+b)h(ax^2+b)\ \frac{x}{ax^2+b}\Big) = I_1 + I_2 + J$$

όπου

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\frac{x}{ax^2+b}d\Big((ax^2+b)h(ax^2+b)\Big) \\ I_2 &= \int_{0}^{+\infty} f(x)\frac{x}{ax^2+b}d\Big((ax^2+b)h(ax^2+b)\Big) \\ J &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ax^2+b)h(ax^2+b)d\Big(\frac{x}{ax^2+b}\Big) \end{aligned}$$

Το I_1 είναι το ολοκλήρωμα του *Stieltjes* μιας αρνητικής συνάρτησης αναφορικά με μια φθίνουσα συνάρτηση επί του $\mathbb{R}_-$ ($t \rightsquigarrow th(t)$ αύξουσα επί του $\mathbb{R}_+$). Λοιπόν $I_1 \geq 0$.

Το I_2 είναι ένα το ολοκλήρωμα του *Stieltjes* μιας θετικής συνάρτησης αναφορικά με μια αύξουσα συνάρτηση επί του $\mathbb{R}_+$. Λοιπόν $I_2 \geq 0$. Τελικά $I_1 + I_2 \geq 0$.

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) \geq J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(ax^2+b)\Big(1 - \frac{2ax^2}{ax^2+b}\Big)dx$$

Λήμμα 1.4.3

Έστω h μια απεικόνιση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $t \rightsquigarrow th(t)$ να είναι αύξουσα και φραγμένη στον $\mathbb{R}_+$. Τότε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \frac{a}{x^2+b}\ h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}dx \\ \leq\ & \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2+b}h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big(1 + \frac{2x^2}{x^2+b}\Big)exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}dx \end{aligned}$$

Απόδειξη

Θέτουμε

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}dx$$

όπου, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x^2\ \frac{a}{x^2+b}\ h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή η g είναι θετική συνάρτηση, το ολοκλήρωμα I υπάρχει πάντα (ενδεχομένως και με τιμή $+\infty$) και είναι ίσο με:

$$\lim_{\substack{\gamma \to -\infty \\ \delta \to +\infty}} \int_{\gamma}^{\delta} g(x)exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}dx$$

Η απεικόνιση $x \rightsquigarrow g(x)exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$ είναι το γινόμενο της συνεχούς απεικόνισης $x \rightsquigarrow xexp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$ και της απεικόνισης $k : x \rightsquigarrow \frac{ax}{x^2+b}h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)$.

Όμως, σε κάθε διάστημα $[\gamma, \delta]$ του $\mathbb{R}$ η k είναι φραγμένης κύμανσης αφού μπορεί να γραφεί

$$k(x) = \Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\ \Big]^2\ \frac{x^3+bx}{a}$$

με $x \rightsquigarrow \Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\ \Big]^2$ κατά τμήματα μονότονη επί του $[\gamma, \delta]$ και $x \rightsquigarrow \frac{x^3+bx}{a}\ \uparrow$ επί του $[\gamma, \delta]$.

Επομένως μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μέρη στο διάστημα $[\gamma, \delta]$:

$$\begin{aligned} \int_\gamma^\delta g(x) exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} dx &= \int_\gamma^\delta x exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} k(x) dx = -\sigma^2 \int_\gamma^\delta k(x) d\Big(exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}\Big) \\ &= -\Big[\sigma^2 k(x) exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}\Big]_\gamma^\delta + \sigma^2 \int_\gamma^\delta exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} d\Big(k(x)\Big) \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Όμως αν β τέτοιο ώστε $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ th(t) \leq \beta$, τότε

$$\begin{aligned} |k(x) exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}| &= \Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\ \Big]^2\ \frac{|x^3+bx|}{a} exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} \\ &\leq \frac{\beta^2}{a}\ |x^3+bx| exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Παίρνοντας τα όρια, όταν $\substack{\gamma\to-\infty \\ \delta\to+\infty}$, στην (2.7) και χρησιμοποιώντας την (2.8) έχουμε

$$I = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} dk(x)$$

Όμως

$$\begin{aligned} dk(x) &= \frac{x^3+bx}{a}\ d\Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big]^2 + \Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big]^2 d\Big(\frac{x^3+bx}{a}\Big) \\ &= 2xh\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big) d\Big[\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big] +\ \frac{a}{x^2+b}\ \Big(1+\frac{2x^2}{x^2+b}\Big) h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big) dx \end{aligned}$$

Άρα

$$I = I_1 + I_2$$

όπου

$$I_1 = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xh\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big) exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} d\Big(\ \frac{a}{x^2+b}\ h\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big) \leq 0$$

αφού το ολοκλήρωμα αυτό του *Stieltjes* είναι στον $\mathbb{R}_-$ ολοκλήρωμα μιας αρνητικής συνάρτησης αναφορικά με μια αύξουσα και στον $\mathbb{R}_+$ μιας θετικής συνάρτησης αναφορικά με μια φθίνουσα συνάρτηση και

$$I_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\ \frac{a}{x^2+b}\ h^2\Big(\frac{a}{x^2+b}\Big)\Big(1+\frac{2x^2}{x^2+b}\Big) exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} dx$$

Επομένως, $I = I_1 + I_2 \leq I_2$ και το Λήμμα αποδείχτηκε.

2. ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΗΣ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗΣ

2.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1.1 Υπό τις έννοιες της § 1.1, περιοριζόμεθα εδώ στο πρόβλημα της εκτίμησης του μέσου ϑ όταν η διασπορά $\sigma^2 v$ είναι γνωστή εκτός από τον πολλαπλασιοστικό παράγοντα σ^2.

Για την εκτίμηση λοιπόν του ϑ, θεωρούμε τους *εκτιμητές με συρρικνωτή* της μορφής:

$$\varphi(y) = \Big[id_\Theta - h\Big(\bar{b}(\varphi^0(y)),\ \frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\Big)c\Big]\varphi^0(y) \tag{2.9}$$

όπου
- b είναι μια θετική συμμετρική διγραμμική μορφή επί του Θ
- c είναι ένας ενδομορφισμός του Θ
- h είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση από τον $\mathbb{R}_+^2$ στον $\mathbb{R}_+$
- id_Θ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός

Αυτός ο εκτιμητής δεν ορίζεται όταν $\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y)) = 0$. Όμως για όλα τα $\vartheta \in \Theta$ και $\sigma > 0$ αυτό το ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0 (σημειώνουμε ότι $\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y)) \sim \sigma^2 \mathcal{X}^2_{n-k}$).

2.1.2 Υποθέτουμε, όπως στην §1, ότι τα b, c και q ικανοποιούν τις παρακάτω υποθέσεις:

($\tilde{P}1$) Υπάρχει μια βάση $(e_1, ..., e_n)$ του Ε, v^{-1}-ορθοκανονική της οποίας τα k πρώτα στοιχεία να αποτελούν βάση του Θ, q-ορθογώνια, μέσα στην οποία c και b διαγωνιοποιούνται.

($\tilde{P}2$) Όλες οι ιδιοτιμές του c είναι μη αρνητικές.

($\tilde{P}3$) $Rank(b) \geq 3$, το οποίο υποδηλώνει ότι $k \geq 3$, και $Kerb \subset Kerc$, το οποίο υποδηλώνει ότι ο περιορισμός του cb^- στην Imb ορίζεται μονοσήμαντα για κάθε γενικευμένο αντίστροφο b^- του b.

($\tilde{P}4$) ${}^t cqcb^-$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.

Όταν ικανοποιείται η ($\tilde{P}3$) τότε η ($\tilde{P}4$) είναι ισοδύναμη με την

($\tilde{P}4'$) q δεν είναι ταυτοτικά μηδέν επί της Imc.

Πράγματι αν ${}^t cqcb^-(\vartheta^*) = 0,\ \forall\vartheta^* \in Imb$, τότε

$$\begin{aligned}
&{}^t cqc(b_{Kerb^\perp})^{-1}(\vartheta^*) = 0 \text{ με } \vartheta^* = b(\vartheta),\ \forall\vartheta\in\Theta \\
\Rightarrow\quad &{}^t cqc(\vartheta) = 0,\ \forall\vartheta \in (Kerb)^\perp (\supset (Kerc)^\perp) \\
\Rightarrow\quad &q\Big(c(\vartheta), c(\cdot)\Big) = 0,\ \forall\vartheta \in (Kerc)^\perp \\
\Rightarrow\quad &q\Big(c(\vartheta), c(\vartheta)\Big) = 0,\ \forall\vartheta \in \Theta \\
\Rightarrow\quad &q \equiv 0 \ \text{ επί της} Imc
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $q \equiv 0$ επί της Imc. Τότε, $\forall\vartheta^* \in \Theta^*$, έχουμε:

$${}^t cqcb^-(\vartheta^*) = q\Big(c(b^-(\vartheta^*)), c(\cdot)\Big) = 0$$

Παρατηρήσεις σχετικά με αυτές τις υποθέσεις αναφέρθησαν ήδη στην § 1.2.3

2.1.3 Οι εκτιμητές του τύπου (2.9) προφανώς γενικεύουν τους εκιμητές του τύπου (2.2) και αποτελούν συνέχεια των εκτιμητών του *Strawderman* (1973) (ο οποίος για το ίδιο πρόβλημα θεωρεί την περίπτωση όπου $q = b = v_{\Theta}^{-1}$ και $c = id_{\Theta}$, βλέπε § 2.4). Η ουσιαστική διαφορά με εκείνους είναι ότι εδώ, οι *Cellier* και *Fourdrinier* [17] εισάγουν την υπόθεση «ελέγχου» της συνάρτησης συρρίκνωσης (βλέπε § 2.2) την οποία πρώτος εισήγαγε ο *Alam* (1973) (στην περίπτωση που σ^2 ήταν γνωστό). Η υπόθεση αυτή είναι σαφώς πιο γενική από εκείνη η οποία υπάρχει στην βιβλιογραφία για τις συναρτήσεις συρρίκνωσης μιας μεταβλητής ή δύο μεταβλητών.

Το κύριο όμως χαρακτηριστικό των θεωρούμενων εκτιμητών (2.9) είναι το ίδιο με εκείνο των εκτιμητών του τύπου (2.2) δηλαδή ότι η συνάρτηση συρρίκνωσης δεν είναι αναγκαία συνεχής. Η υπόθεση της συνέχειας όπως και η διαφορισιμότητα για τη συνάρτηση συρρίκνωσης είναι συνήθης στο πλείστο της σχετικής βιβλιογραφίας.

2.2 ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η απεικόνιση f από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$ ονομάζεται *ελεγχόμενη* αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απεικόνιση $t \rightsquigarrow t^{\lambda} f(t)$ να είναι αύξουσα επί του $\mathbb{R}_+$. Αν η f είναι *ελεγχόμενη*, έστω

$$\lambda_0 = \inf\{\ \lambda :\ t \rightsquigarrow t^{\lambda} f(t) \text{ να είναι αύξουσα επί του } \mathbb{R}_+\ \}$$

Η ύπαρξη του *infimum* εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το

$$A = \{\ \lambda :\ t \rightsquigarrow t^{\lambda} f(t) \text{ να είναι αύξουσα επί του } \mathbb{R}_+\ \}$$

είναι φραγμένο εκ των κάτω.

Πράγματι, έστω ότι το Α δεν είναι φραγμένο εκ των κάτω. Τότε, θα υπάρχει $\{\lambda_n\} \subset A$ τέτοια ώστε $\lambda_n \to -\infty$ (αν $|A| < +\infty$ τότε το Α είναι προφανώς φραγμένο) και $g_n(t) = t^{\lambda_n} f(t) \uparrow$ επί του $\mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $t_1, t_2 \in D_f$ με $0 < t_1 < t_2$. Θα πρέπει

$$t_1^{\lambda_n} f(t_1) \leq t_2^{\lambda_n} f(t_2),\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\lambda_n} \leq \left(\frac{f(t_2)}{f(t_1)}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επειδή $\lambda_n \to -\infty$, $\exists N$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq N$,

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\lambda_n} > \frac{f(t_2)}{f(t_1)}\ ,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Τότε η f ονομάζεται *ελεγχόμενη σε ύψος* λ_0. Παρατηρούμε επίσης ότι η $t \rightsquigarrow t^{\lambda_0} f(t)$ είναι αύξουσα.

Πράγματι, αφού υπάρχει $\{\lambda_n\} \subset A$ τέτοια ώστε $\lambda_n \to \lambda_0$, προφανώς

$$g_n(t) = t^{\lambda_n} f(t) \to t^{\lambda_0} f(t) = g(t) \quad \text{του } \ n \to +\infty$$

Λοιπόν,

$\forall t_1, t_2 \in D_f$ με $0 < t_1 < t_2, g_n(t_1) \leq g_n(t_2)$ και επομένως παιρνώντας στο όριο, $g(t_1) \leq g(t_2)$.

Παρατήρηση 2.2.1

Έστω f *ελεγχόμενη σε ύψος* λ και έστω $\mu > \lambda$, τότε, αν η f δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν, έχουμε:

$$\lim_{t \to +\infty} t^\mu f(t) = +\infty$$

Πράγματι: $t^\mu f(t) = t^{\mu-\lambda} t^\lambda f(t)$. Επειδή $t \rightsquigarrow t^\lambda f(t) \uparrow$ το $\lim_{t\to+\infty} t^\lambda f(t)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Ενώ η $t^{\mu-\lambda}$ τείνει στο $+\infty$ καθώς το $t \to +\infty$.

2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεώρημα 2.3.1

Υπο τις υποθέσεις $(\widetilde{P}1)$,$(\widetilde{P}2)$,$(\widetilde{P}3)$ *και* $(\widetilde{P}4)$, *μια ικανή συνθήκη για να κυριαρχεί ο εκτιμητής* φ *που ορίζεται στην (2.9) τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας* φ^0 *είναι να υπάρχουν δυο θετικοι πραγματικοί αριθμοί* λ_1 *και* λ_2 *τέτοιοι ώστε, για κάθε* $u \in \mathbb{R}_+^*$, *η* $h(\cdot, u)$ *να είναι ελεγχόμενη σε ύψος* λ_1, *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$, *η* $h(t, \cdot)$ *να είναι ελεγχόμενη σε ύψος* λ_2 *και η απεικόνιση*

$$(t, u) \rightsquigarrow tuh(t, u)$$

να είναι φραγμένη από την ποσότητα:

$$\beta = 2\,\frac{tr(v_\Theta qc) - 2\lambda_1 pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp(\,{}^t cqcb^-)}\;\frac{n-k}{n-k+2\lambda_2}$$

όπου $pgvp$ *και* tr *είναι η μέγιστη ιδιοτιμή και το ίχνος του σχετικού ενδομορφισμού αντίστοιχα.*

Παρατήρηση 2.3.2

Οι συμβολισμοί $v_\Theta qc$ και ${}^t cqcb^-$ έχουν νόημα θεωρώντας το v_Θ ως απεικόνιση του Θ^* στον Θ και τα q και b ως απεικονίσεις από τον Θ στον Θ^* (βλ. [37]). Μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως γινόμενα πινάκων.

Παρατήρηση 2.3.3

Για να διαφέρει ο φ από τον φ^0, πρέπει να δείξουμε την ύπαρξη μιας τιμής u_0 τέτοια ώστε η $h(\cdot, u_0)$ να μην είναι ταυτοτικά μηδέν. Γι'αυτό το β πρέπει να είναι θετικό και συνεπώς

$$tr(v_\Theta qc) > 2\lambda_1 pgvp(v_\Theta qc)$$

Από την άλλη πλευρά, η $t \rightsquigarrow tu_0 h(t, u_0)$ είναι φραγμένη από το β, το οποίο υποδηλώνει (σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2.1) ότι $\lambda_1 \geq 1$ (επειδή διαφορετικά θα είχαμε: $\lim_{t\to+\infty} th(t, u_0) = +\infty$).

Οπότε πρέπει να έχουμε

$$tr(v_\Theta qc) > 2pgvp(v_\Theta qc)$$

το οποίο είναι εφικτό αφού $k > 2$ από την $(\widetilde{P}3)$. Έτσι βρίσκουμε ξανά την αναγκαία και ικανή συνθήκη της μη παραδοχής του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας που καθιερώθηκε από τον *Stein* (1956).

Απόδειξη του Θεωρήματος

Έννοιες

Υπό την υπόθεση $(\widetilde{P}1)$, μπορούμε να γράψουμε τους πίνακες των q, b, c αναφορικά με τη βάση $(e_1, ..., e_k)$ ως εξής:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_k \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_k \end{bmatrix}$$

και να υποθέτουμε ότι $b_1, ..., b_m$ (με $3 \leq m \leq k$) είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του B. Οπότε

$$\begin{aligned} &\forall i (m < i \leq k), \quad b_i = c_i = 0 \quad (\text{αφού } Kerb \subset Kerc) \\ &pgvp(v_\Theta qc) = \max_{1 \leq i \leq m} (q_i c_i) \\ &tr(v_\Theta qc) = \sum_{i=1}^{m} q_i c_i \\ &pgvp({}^t qcb^-) = \max_{1 \leq i \leq m} (q_i c_i^2 b_i^{-1}) \end{aligned}$$

Αν $y_1, ..., y_n$ είναι οι συντεταγμένες του y αναφορικά με τη βάση $(e_1, ..., e_n)$, έχουμε:

$$\varphi^0(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i$$

$$\overline{v^{-1}}(y - \varphi^0(y)) = \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 \qquad (\text{το οποίο θα σημειώνουμε με } \frac{n-k}{u})$$

και

$$\bar{b}\Big(\varphi^0(y)\Big) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^2 \qquad (\text{το οποίο θα σημειώνουμε με } t)$$

Αν f είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}$, συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} E[f(y_1, ..., y_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, ..., y_n)\, \mathcal{N}_n(\vartheta, \sigma^2 I_n; dy_1, ..., dy_n) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, ..., y_n) exp\Big[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big] dy_1 ... dy_n \end{aligned}$$

Το πεπερασμένο του κινδύνου

Συμπεραίνουμε από το πεπερασμένο του κινδύνου του φ^0 και την ανισότητα $Schwarz$ ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο κίνδυνος του φ πεπερασμένος στο σημείο (ϑ, σ) είναι

$$E[\bar{q}(\varphi^0(y) - \varphi(y))] < +\infty \qquad (\text{βλέπε } \S 1.2.2)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της ανισότητας γράφεται:

$$B_\varphi = \sigma^{-2} E[\bar{q}(h(t), u) c(\varphi^0(y))] = \sigma^{-2} E[h^2(t, u)\ \bar{q}(c(\varphi^0(y)))] = \frac{1}{\sigma^2} E\Big[\sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 y_i^2 h^2(t, u)\Big]$$

και αν το B_φ είναι πεπερασμένο, η διαφορά του κινδύνου του φ από εκείνον του φ^0 είναι πεπερασμένη και μπορεί να γραφεί ως $\Delta\varphi = A_\varphi - B_\varphi$, όπου

$$\begin{aligned}
A_\varphi &= \frac{2}{\sigma^2}\, E[q(\varphi^0(y)-\vartheta, \varphi^0(y)-\varphi(y))] = \frac{2}{\sigma^2}\, E[q(\varphi^0(y)-\vartheta, h(t,u)c(\varphi^0(y)))] \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\, E[h(t,u)q(\varphi^0(y)-\vartheta, c(\varphi^0(y)))] = \frac{2}{\sigma^2}\, E\Big[\sum_{i=1}^m q_i c_i y_i (y_i-\vartheta_i) h(t,u)\Big]
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι το B_φ είναι πεπερασμένο. Σύμφωνα με τις υποθέσεις, $tuh(t,u) \leq \beta$. Από την άλλη πλευρά,

$$\frac{1}{t}\, \sum_{i=1}^m q_i c_i^2 y_i^2$$

είναι φραγμένο διότι, για όλα τα i $(1 \leq i \leq m)$, $b_i > 0$ και

$$\frac{1}{t}\, \sum_{i=1}^m q_i c_i^2 y_i^2 = \frac{1}{t}\, \sum_{i=1}^m (q_i c_i^2 b_i^{-1}) b_i y_i^2 \leq \max_{1\leq i\leq m} (q_i c_i^2 b_i^{-1})$$

Λοιπόν, για να είναι το B_φ πεπερασμένο, αρκεί

$$E\Big[\frac{1}{tu^2}\Big] < +\infty$$

Συνεπώς, αφού t και u είναι ανεξάρτητες (οι προβολές είναι ανεξάρτητες), αρκεί:

$$E\Big[\frac{1}{u^2}\Big] < +\infty \quad \text{και} \quad E\Big[\frac{1}{t}\Big] < +\infty$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
E\Big[\frac{1}{u^2}\Big] &= \frac{1}{(n-k)^2}\, E\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^n y_j^2\Big)^2\Big] = \frac{1}{(n-k)^2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \Big(\sum_{j=k+1}^n y_j^2\Big)^2 \mathcal{N}_{n-k}(0, \sigma^2 I_{n-k}; dy_{k+1}, ..., y_n) \\
&= \frac{\sigma^4}{(n-k)^2}\, E\Big[\Big(\sum_{j=k+1}^n \frac{y_j^2}{\sigma^2}\Big)^2\Big] = \frac{\sigma^4}{(n-k)^2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \|z\|^4 \mathcal{N}_{n-k}(0, I_{n-k}; dz) \\
&= \frac{\sigma^4}{(n-k)^2} \int_{\mathbb{R}_+} u^2 \mathcal{X}_{n-k}^2(du) = \frac{\sigma^4}{(n-k)^2}\, (2(n-k)+(n-k)^2) = \frac{\sigma^4}{n-k}\, (n-k+2)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
E\Big[\frac{1}{t}\Big] &\leq \frac{1}{\min_{1\leq i\leq m} b_i}\, E\Big[\Big(\sum_{i=1}^m y_i^2\Big)^{-1}\Big] \\
&= \frac{1}{\min_{1\leq i\leq m} b_i}\, \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^2}\, \mathcal{N}_m\Big((\vartheta_1, ..., \vartheta_m), \sigma^2 I_m; dy_1, ..., dy_m\Big) \\
&= \frac{\sigma^{-2}}{\min_{1\leq i\leq m} b_i}\, \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\|z\|^2}\, \mathcal{N}_m\Big((\vartheta_1/\sigma, ..., \vartheta_m/\sigma), I_m; dz\Big) \\
&= \frac{\sigma^{-2}}{\min_{1\leq i\leq m} b_i}\, \int_{\mathbb{R}_+} u^{-1} \mathcal{X}_m^2\Big(\sum_{i=1}^m (\frac{\vartheta_i^2}{\sigma^2}); du\Big)
\end{aligned}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο επειδή $m \geq 3$ (βλέπε Παράρτημα Πορ.1.1)

Κάτω φράγμα του $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\varphi}}$

Το A_φ είναι πεπερασμένο και εφ'οσον έχουμε θεωρήσει μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση, είναι δυνατόν να γράψουμε αυτό το ολοκλήρωμα σαν ένα πεπερασμένο διαδοχικό ολοκλήρωμα επί του $\mathbb{R}$ και να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
A_\varphi &= \frac{2}{\sigma^2}\, E\Big[\sum_{i=1}^{m} q_i c_i y_i (y_i - \vartheta_i) h(t,u)\Big] \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} q_i c_i y_i (y_i - \vartheta_i) h(t,u) \mathcal{N}_n(\vartheta, \sigma^2 I_n; dy_1, ..., dy_n) \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} q_i c_i \int_{\mathbb{R}^n} y_i (y_i - \vartheta_i) h(t,u) \mathcal{N}_n(\vartheta, \sigma^2 I_n; dy_1, ..., dy_n) \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} q_i c_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} y_i (y_i - \vartheta_i) h(t,u) \mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2; dy_i)\Big) \mathcal{N}_{n-1}(\vartheta^i, \sigma^2 I_{n-1}; dy^i)
\end{aligned}$$

όπου $\vartheta^i = (\vartheta_1, ..., \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, ..., \vartheta_k, 0, ..., 0)$ και $y^i = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$

Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα, ολοκληρώνοντας κατά μέρη ως προς τη μεταβλητή y_i παίρνουμε, για κάθε $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} y_i (y_i - \vartheta_i) h(t,u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big] dy_i \\
= &\int_{\mathbb{R}} y_i h(t,u)\, d\Big(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big]\Big) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big]\, d\Big(y_i h(t,u)\Big)
\end{aligned}$$

αφού $\lim_{y_i \to \pm\infty} y_i h(t,u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big] = 0$ από το γεγονός ότι η $(t,u) \rightsquigarrow tuh(t,u)$ φραγμένη.

Επειδή για όλα τα $u \in \mathbb{R}_+^*$, η απεικόνιση $h(\cdot, u)$ είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ_1, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Παρατήρηση (i) του Λήμματος 2.5.1 με $p = h(\cdot, u)$, $\;a = b_i > 0$ και $b = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^2 - b_i y_i^2 > 0$. Έχουμε τότε:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big]\, d\Big(y_i h(t,u)\Big) \\
\geq\; &\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{(y_i - \vartheta_i)^2}{2\sigma^2}\Big] h(t,u) \Big[1 - 2\lambda_1\, \frac{b_i y_i^2}{t}\Big] dy_i
\end{aligned}$$

Λοιπόν,

$$A_\varphi \geq 2E\Big[h(t,u) \sum_{i=1}^{m} q_i c_i \Big(1 - 2\lambda_1\, \frac{b_i y_i^2}{t}\Big)\Big] \geq 2E\Big[h(t,u) \Big(\sum_{i=1}^{m} q_i c_i - 2\lambda_1 \max_{1 \leq i \leq m}(q_i c_i)\Big)\Big]$$

Άνω φράγμα του $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\varphi}}$

$$B_\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 E[y_i^2 h^2(t,u)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 E\Big[\frac{y_i^2}{t}\; tuh(t,u)\; \frac{1}{u}\; h(t,u)\Big] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 E\Big[\frac{y_i^2}{(n-k)t}\; tuh(t,u) \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 h(t,u)\Big]
\end{aligned}
$$

Όπως στην παραπάνω παράγραφο, ανάγουμε το πρόβλημα στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων επί του $\mathbb{R}$. Για $k+1 \le j \le n$, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} y_j^2 h(t,u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}\Big]\, dy_j &= \int_{\mathbb{R}} y_j h(t,u)\, d\Big(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}\Big]\Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}\Big]\, d\Big(y_j h(t,u)\Big)
\end{aligned}
$$

Επειδή, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η απεικόνιση $h(t,\cdot)$ είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ_2, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Παρατήρηση (ii) του Λήμματος 2.5.1 με $p = h(t,\cdot)$, $\;a = \frac{1}{n-k} > 0$ και $b = \frac{1}{n-k}\Big(\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 - y_j^2\Big) > 0$ (αφού $n-k \ge 2$). Λοιπόν, έχουμε:

$$
\frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} y_j^2 h(t,u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}\Big]\, dy_j \le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, exp\Big[-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}\Big] h(t,u)\Big(1 + 2\lambda_2\, \frac{y_j^2}{n-k}\, u\Big)\, dy_j
$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
B_\varphi &= \frac{1}{\sigma^2(n-k)}\, E\Big[\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 y_i^2}{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^2}\; tuh(t,u) \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 h(t,u)\Big] \\
&= \frac{1}{\sigma^2(n-k)}\, E\Big[\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i c_i^2 b_i^{-1} b_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^2}\; tuh(t,u) \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 h(t,u)\Big] \\
&\le \max_{1\le i\le m}(q_i c_i^2 b_i^{-1})\; \frac{\beta}{n-k} \sum_{j=k+1}^{n} E\Big[h(t,u)\Big(1 + 2\lambda_2\, \frac{y_j^2}{n-k}\, u\Big)\Big] \\
&\le \max_{1\le i\le m}(q_i c_i^2 b_i^{-1})\; \frac{\beta}{n-k}\Big((n-k)E[h(t,u)] + 2\lambda_2 E\Big[h(t,u)\; \frac{\sum_{j=k+1}^{n} y_j^2}{n-k}\; u\Big]\Big) \\
&= \max_{1\le i\le m}(q_i c_i^2 b_i^{-1})\; \frac{\beta}{n-k}\; (n-k+2\lambda_2)E[h(t,u)]
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας

$$
\beta = 2\, \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i c_i - 2\lambda_1 \max_{1\le i\le m}(q_i c_i)}{\max_{1\le i\le m}(q_i c_i^2 b_i^{-1})}\; \frac{n-k}{n-k+2\lambda_2}
$$

παίρνουμε $\Delta\varphi = A_\varphi - B_\varphi \ge 0$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

2.4 ΜΙΑ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η περίπτωση, η πιο συνήθης, χρησιμοποιούμενη από πολλούς συγγραφείς, όπως οι *Baranchik*, *Alam*, *Strawderman* και *Ben Mansour*, όταν το σ είναι γνωστό ή άγνωστο, είναι εκείνη όπου

$$
b = v_\Theta^{-1} \;\;,\;\; q = v_\Theta^{-1} \;\text{ και }\; c = id_\Theta
$$

Περιοριζόμαστε σάυτή την περίπτωση και θεωρούμε τους εκιμητές με συρρικνωτή

$$h(t,u) = f\Big(\overline{v_\Theta^{-1}}(\varphi^0(y)), \frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\Big)$$

δηλαδή θεωρούμε τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \Big[1 - f\Big(\overline{v_\Theta^{-1}}(\varphi^0(y)), \frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y-\varphi^0(y))}\Big)\Big]\varphi^0(y) \tag{2.10}$$

Τότε,

Πόρισμα 2.4.1

Αν $k \geq 3$, μια επαρκής υπόθεση, για να κυριαρχεί ο εκτιμητής φ, της παραπάνω μορφής, τον φ^0, είναι να υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1 (1 \leq \lambda_1 < \frac{k}{2})$ και $\lambda_2 (\lambda_2 \geq 1)$ τέτοιοι ώστε

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \ f(\cdot, u) \text{ να είναι ελεγχόμενη σε ύψος } \lambda_1$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ , \ \ f(t, \cdot) \text{ να είναι ελεγχόμενη σε ύψος } \lambda_2$$

και η απεικόνιση $(t,u) \rightsquigarrow tuf(t,u)$ να είναι φραγμένη εκ των άνω από το

$$\frac{2(k-2\lambda_1)(n-k)}{n-k+2\lambda_2}$$

Ένα απλό παράδειγμα το οποίο δικαιολογεί το ενδιαφέρον του Πορίσματος 2.4.1, το οποίο γενικεύει το Θεώρημα του *Strawderman* (1973), είναι το εξής:

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον εκτιμητή φ της μορφής (2.10) με συνάρτηση συρρίκνωσης

$$f(t,u) = \frac{c}{ut(t+1)}$$

όπου c είναι μια σταθερά στο διάστημα $[0, \frac{2(k-2\lambda_1)(n-k)}{n-k+2\lambda_2}]$ για λ_1 σταθερό στο διάστημα $[1, \frac{k}{2})$ με $k \geq 5$ και $\lambda_2 \geq 1$.

Η συνάρτηση $f(t,u)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Πορίσματος 2.4.1.

Πράγματι, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+^*$, η συνάρτηση

$$t \rightsquigarrow t^{\lambda_1} f(t,u) = \frac{c}{u}\ \frac{t^{\lambda_1 - 1}}{t+1} \quad \text{είναι αύξουσα}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+^*$, η

$$u \rightsquigarrow u^{\lambda_2} f(t,u) = \frac{c}{t(t+1)}\ u^{\lambda_2 - 1} \quad \text{είναι αύξουσα}$$

και για κάθε $(t,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq tuf(t,u) = \frac{c}{t+1} \ \leq c \leq \ \frac{2(k-2\lambda_1)(n-k)}{n-k+2\lambda_2}$$

Αντιθέτως, η συνάρτηση $f(t,u)$ δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Πορίσματος 2.4.1 για $\lambda_1 = 1$ (δηλαδή αυτές του *Strawderman* (1973)) επειδή, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+^*$, η απεικόνιση

$t \rightsquigarrow \frac{c}{u(t+1)}$ δεν είναι αύξουσα.

Μερική περίπτωση

Τέλος, ενδιαφερόμεθα για την περίπτωση όπου ο συρρικνωτής f είναι της μορφής:

$$f(t,u) = g(t \cdot u)$$

με $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δηλαδή θεωρούμε τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \Big[1 - g\Big(\overline{v_\Theta^{-1}}(\varphi^0(y)) \cdot \frac{n-k}{\overline{v^{-1}}(y - \varphi^0(y))}\Big)\Big]\varphi^0(y) \tag{2.11}$$

Αυτός ο εκτιμητής είναι της ίδιας μορφής με τους εκτιμητές των *Baranchik*, *Ben Mansour* και της §1 για αυτή την κλασική περίπτωση.

Για τους εκτιμητές αυτούς έχουμε:

Πόρισμα 2.4.2

Αν $k \geq 3$, μια επαρκής υπόθεση κυριαρχίας του εκτιμητή φ του τύπου (2.11) επί του φ^0 είναι να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ $(1 \leq \lambda \leq \frac{k}{2})$ τέτοιος ώστε η συνάρτηση g να είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ και ότι η $ug(u)$ να είναι ομοιομόρφως φραγμένη από το $\frac{2(k-2\lambda)(n-k)}{n-k+2\lambda}$.

2.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-ΛΗΜΜΑ

Μια γενίκευση του Λήμματος 1.4.2 αποτελεί το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 2.5.1

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση από τον $\mathbb{R}$ στον $\mathbb{R}_+$ και p μια συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$ ελεγχόμενη σε ύψος λ. Έστω a και b αυστηρά θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, ορίζουμε τη συνάρτηση g_ε ως εξής:

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad g_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot x \cdot p[(ax^2 + b)^\varepsilon]$$

Αν η f είναι $g_\varepsilon - Stieltjes$ ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg_\varepsilon(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p[(ax^2+b)^\varepsilon][\varepsilon - 2\lambda\,\frac{ax^2}{ax^2+b}\,]dx$$

Απόδειξη

Αν η f είναι $g_\varepsilon - Stieltjes$ ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg_\varepsilon(x) = \lim_{\substack{\gamma \to -\infty \\ \delta \to +\infty}} \int_\gamma^\delta f(x)dg_\varepsilon(x)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η ανισότητα είναι αληθής σε κάθε διάστημα $[\gamma, \delta]$ με $\gamma < 0$ και $\delta > 0$. Σταθεροποιούμε το $[\gamma, \delta]$ με $\gamma < 0$ και $\delta > 0$. Τότε, στο $[\gamma, \delta]$ η απεικόνιση

$$x \rightsquigarrow ([ax^2 + b]^\varepsilon)^\lambda\; p\Big([ax^2 + b]^\varepsilon\Big)$$

είναι κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση και συνεπώς είναι φραγμένης κύμανσης. Επειδή $b > 0$, η

$$x \rightsquigarrow (ax^2 + b)^{\varepsilon\lambda}$$

είναι επίσης κατά τμήματα μονότονη στο $[\gamma, \delta]$. Εξ'αυτών προκύπτει ότι επί του $[\gamma, \delta]$, η

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon x}{([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda}\,([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda p([ax^2+b]^\varepsilon)$$

είναι φραγμένης κύμανσης ως γινόμενο δυο συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης.

Οπότε,

$$\begin{aligned}\int_\gamma^\delta f(x)dg_\varepsilon(x) &= \int_\gamma^\delta f(x)\,\frac{x}{([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda}\,d\Big[\varepsilon([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda p([ax^2+b]^\varepsilon)\Big] \\ &+ \int_\gamma^\delta f(x)([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda p([ax^2+b]^\varepsilon)\,d\Big[\frac{\varepsilon x}{([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda}\Big]\end{aligned}$$

το οποίο θα συμβολίσουμε κατά τρόπο προφανή με $I + J$.

Το I είναι το άθροισμα του ολοκληρώματος στο $[0, \delta]$ μιας θετικής συνάρτησης αναφορικά με μια αύξουσα συνάρτηση και του ολοκληρώματος στο $[\gamma, 0]$ μιας αρνητικής συνάρτησης αναφορικά με μια φθίνουσα συνάρτηση. Οπότε $I \geq 0$.

Η απεικόνιση $x \rightsquigarrow \frac{\varepsilon x}{([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda}$ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[\gamma, \delta]$. Η παράγωγός της είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ και επομένως είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[\gamma, \delta]$. Λοιπόν, αναλύοντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}J &= \int_\gamma^\delta f(x)([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda p([ax^2+b]^\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon - \frac{2\varepsilon^2\lambda a x^2}{ax^2+b}}{([ax^2+b]^\varepsilon)^\lambda}\right)dx \\ &= \int_\gamma^\delta f(x)p([ax^2+b]^\varepsilon)\Big(\varepsilon - 2\lambda\,\frac{ax^2}{ax^2+b}\Big)dx \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Οι σχέσεις $I \geq 0$ και (2.12) μας οδηγούν στο συμπέρασμα.

Παρατήρηση 2.5.1

(i) Αν $\varepsilon = 1$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg_1(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(ax^2+b)\Big(1 - 2\lambda\,\frac{ax^2}{ax^2+b}\Big)dx$$

(ii) Αν $\varepsilon = -1$, συμβολίζουμε $r = -g_{-1}$ και προφανώς παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dr(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p\Big(\frac{1}{ax^2+b}\Big)\Big(1 + 2\lambda\frac{ax^2}{ax^2+b}\Big)dx$$

Κεφάλαιο 3

ROBUSTES ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΘΕΣΕΩΣ ΓΙΑ ΝΟΜΟΥΣ ΜΕ ΕΛΛΕΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Σ'αυτό το κεφάλαιο γενικεύονται τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2 μέσα στο γενικότερο πλαίσιο εκτίμησης της παραμέτρου θέσεως νόμων με ελλειπτική συμμετρία, ακολουθώντας τους *Cellier*, *Fourdrinier* και *Robert*(1989, [18]). Η κλάση των θεωρούμενων εκτιμητών είναι εκείνη της μορφής (2.9) του προηγούμενου κεφαλαίου με συνάρτηση συρρίκνωσης μη-συνεχή.

Δίδονται επαρκείς συνθήκες ομοιόμορφης κυριαρχίας επί του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων αναφορικά με την οικογένεια των συναρτήσεων απωλείας, συνδεδεμένες με την κλάση των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων μέσω της κοινής τους παραμέτρου διακύμανσης, αποδεικνύοντας έτσι την ρωμαλεότητα (*robustesse*) των θεωρούμενων εκτιμητών.

Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα στην ιδιαίτερη περίπτωση της εκτίμησης ενός πολυδιάστατου κανονικού μέσου.

Αποδεικνύουμε τέλος, το πως προσαρμόζονται τα ανωτέρω στις περιπτώσεις, συνήθως μεταχειριζόμενες στη βιβλιογραφία, όπου ο συρρικνωτής, σχεδόν πάντοτε διαφορίσιμος, είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής (συνάρτηση του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων).

1. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

1.1 ΝΟΜΟΙ ΜΕ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Έστω E ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διαστάσεως n και w μία θετικά ορισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή επί του E^*, δυϊκός του E (και εδώ είναι πρακτικό να την θεωρούμε ως ένα γραμμικό ισομορφισμό του E^* επί του E). Η αντίστροφη της εισάγει μία θετικά ορισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή επί του E την οποία σημειώνουμε με w^{-1}.

Υπενθυμίζουμε (βλέπε Κεφ.1, §2) οτι ένας νόμος επί του E θα λέγεται *ακτινικός* με παράμετρο διακύμανσης w αν παραμένει αναλλοίωτος υπό οποιονδήποτε w^{-1}-ορθογώνιο μετασχηματισμό. Επίσης, οτι η παράμετρος διακύμανσης αυτού του νόμου ορίζεται κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα (δηλ. w και w' είναι δύο παράμετροι διακύμανσης αν και μόνο αν $w' = aw$ όπου $a \in \mathbb{R}_+^*$).

Δεδομένου του $\vartheta \in E$, ένας νόμος με ελλειπτική συμμετρία γύρω από το ϑ με παράμετρο διακύμανσης w, είναι ο νόμος εικόνα ενός ακτινικού νόμου μ, με παράμετρο διακύμανσης w, μέσω της συνάρτησης μεταφοράς του ϑ. Θα σημειώνουμε $P_{\vartheta,\mu}$ αυτόν το νόμο.

Αν ο $P_{\vartheta,\mu}$ είναι απόλυτα συνεχής αναφορικά με το μέτρο του *Lebesgue* λ_w, ο $P_{\vartheta,\mu}$ δέχεται μία πυκνότητα της μορφής $f\Big(\overline{w^{-1}}(y-\vartheta)\Big)$ όπου f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση επί του $\mathbb{R}_+$ (βλέπε Πρότ. 2.4.7, Κεφ.1) (θα σημειώνουμε και εδώ, όπως στο Κεφ.2, με $\overline{v}$ την τετραγωνική μορφή που συνδέεται με την συμμετρική διγραμμική μορφή v).

1.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ

Έστω y μια παρατήρηση ενός νόμου $P_{\vartheta,\mu}$ με ελλειπτική συμμετρία επί ενός n-διάστατου πραγματικού διανυσματικού χώρου Ε. Η παράμετρος θέσης ϑ είναι άγνωστη και η παράμετρος διακύμανσης του ακτινικού νόμου μ είναι v, γνωστή διγραμμική συμμετρική μορφή θετικά ορισμένη επί του E^*.

Σημειώνουμε με $\| \ \|$ τη νόρμα που συνδέεται με τη v^{-1} και v_Θ την αντίστροφη του περιορισμού της v^{-1} επί του Θ.

Υποθέτουμε ότι το ϑ ανήκει σε γνωστό k-διάστατο υπόχωρο Θ του Ε $(2 < k < n-1)$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι το μ ανήκει σε ένα υποσύνολο Μ του συνόλου των ακτινικών νόμων με παράμετρο διακύμανσης v. Κάθε ν στο Μ έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_\nu(\|y\|^2)$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις:

$$(H1)\ E_{0,\nu}\Big[\|y\|^2\Big] < +\infty$$

$$(H2)\ \forall\vartheta\in\Theta,\ E_{\vartheta,\nu}\left[\frac{\|y-\varphi^0(y)\|^4}{\|\varphi^0(y)\|^2}\right] < +\infty$$

$$(H3)\ f_\nu \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

όπου
– για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση g επί του Ε, $E_{\vartheta,\nu}[g(y)] = \int_E g(y)P_{\vartheta,\nu}(dy)$
– φ^0 είναι η v^{-1}-ορθογώνια προβολή επί του Θ (δηλ. ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του ϑ). Αυτός ακολουθεί έναν ελλειπτικά συμμετρικό νόμο P_{ϑ,μ_Θ}, όπου $\mu_\Theta = \mu_{\varphi^0}$, ο οποίος δέχεται την v_Θ για παράμετρο διακύμανσης (βλ. Πρόταση 2.3.4, Κεφ.1).

Αυτές οι υποθέσεις είναι αναγκαίες για να εξασφαλίσουμε το πεπερασμένο του κινδύνου και για την εγκυρότητα των υπολογισμών μας (σημειώνουμε ότι η (Η3) δεν ικανοποιείται πάντοτε (π.χ. *Cauchy*)).

1.3 ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗ

Η παράμετρος θέσης εκτιμάται μέσω μιας μετρήσιμης συνάρτησης φ από τον Ε στον Θ. Υποθέτοντας ότι η απώλεια στην εκτίμηση του ϑ από το $\varphi(y)$ είναι $\overline{q_\mu}(\varphi(y)-\vartheta)$, όπου $\overline{q_\mu}$ είναι μια θετική τετραγωνική μορφή επί του Θ (όχι απαραίτητα θετικά ορισμένη), ο κίνδυνος ενός εκτιμητή φ είναι $R(\varphi;\vartheta,\mu) = E_{\vartheta,\mu}[\overline{q_\mu}(\varphi(y)-\vartheta)]$, ο οποίος επιτρέπει τη σύγκριση των εκτιμητών.

Οι *εκτιμητές με συρρίκνωση* που θα θεωρήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται από τον τύπο:

$$\varphi(y) = \varphi^0(y) - h\Big(\bar{b}(\varphi^0(y)), \frac{n-k}{\|y-\varphi^0(y)\|^2}\Big)\, c(\varphi^0(y)), \tag{3.1}$$

όπου
– b είναι μια θετικά ορισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή επί του Θ
– c είναι ένας ενδομορφισμός του Θ
– h είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση από το $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{R}_+$, η οποία θα ονομάζεται *συνάρτηση συρρίκνωσης*.

Παρατήρηση 1.3.1

Αν υποθέσουμε $Kerb \subset Kerc$ και $rank(b) \geq 3$, δεν είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε τη b θετικά ορισμένη. Σε αυτήν την περίπτωση, τα παρακάτω αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα αντικαθιστώντας το b^{-1} με b^{-}, όπου b^{-} ο γενικευμένος αντίστροφος του b (βλ. Κεφ.2, §2).

1.4 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗ

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση $(e_1, ..., e_n)$ του Ε τέτοια ώστε η $(e_1, ..., e_k)$ να είναι μια q_μ-ορθογώνια βάση του Θ για κάθε $\mu \in M$. Αυτή η υπόθεση επιβάλλει μια «σχέση» μεταξύ των συναρτήσεων απώλειας. Δίνουμε στην Παρατήρηση 2.2.1, που ακολουθεί το θεώρημα, μια πρακτική περίπτωση αυτής της «σχέσης».

Θα θεωρήσουμε μόνο εκτιμητές της μορφής (3.1) οι οποίοι ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$(P1)$ οι πίνακες των b και c είναι διαγώνιοι ως προς τη βάση $(e_1, ..., e_k)$

$(P2)$ οι ιδιοτιμές του c είναι μη αρνητικές

$(P3)$ ο ενδομορφισμός ${}^t c q_\mu c b^{-1}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν (δηλ. οι $\overline{q_\mu}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν επί της $Im\ c$)

Κάποιοι συγγραφείς χρησιμοποιούν εκτιμητές χωρίς τον περιορισμό $(P1)$ (όπως π.χ. ο *Brandwein* [9]) αλλά πάντοτε επιβάλλουν ισχυρότερες υποθέσεις αναλυτικότητας.

2. ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑ ΕΠΙ ΤΟΥ φ^0

2.1 ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ανακαλούμε τις έννοιες της §2.2 του Κεφ.2.

Έστω g μια συνάρτηση από το $\mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{R}_+$. Η g θα ονομάζεται *ελεγχόμενη* αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απεικόνιση $t \rightsquigarrow t^\lambda g(t)$ να είναι αύξουσα συνάρτηση επί του $\mathbb{R}_+$. Αν η g είναι ελεγχόμενη, έστω

$$\lambda_0 = \inf\{\, \lambda \in \mathbb{R} :\ t^\lambda g(t) \text{ αύξουσα επί του } \mathbb{R}_+\}$$

τότε η g θα λέγεται *ελεγχόμενη σε ύψος* λ_0.

Παρατηρούμε ότι, αν η g είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ_0, τότε η $t^{\lambda_0} g(t)$ είναι αύξουσα και ότι, για κάθε $\lambda > \lambda_0$,

$$\lim_{t \to +\infty} t^\lambda g(t) = +\infty$$

εφ'οσον η $g(t)$ δεν έιναι ταυτοτικά μηδέν.

2.2 ΤΟ ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Μετά από αυτόν τον προκαταρτικό ορισμό, μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1

Δεδομένου του φ, ικανοποιώντας τις υποθέσεις (P1), (P2), (P3), ο κίνδυνος του φ είναι μικρότερος ή ίσος του κινδύνου του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων φ^0 *για κάθε* $(\vartheta,\mu)\in\Theta\times M$ *αν:*

i) υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ_1 *τέτοιος ώστε η* $h(\cdot,u)$ *να είναι ελεγχόμενη σε ύψος* λ_1*, για κάθε* $u\in\mathbb{R}_+$.

ii) υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ_2 *τέτοιος ώστε η* $h(t,\cdot)$ *να είναι ελεγχόμενη σε ύψος* λ_2*, για κάθε* $t\in\mathbb{R}_+$.

iii) $tuh(t,u)\leq \frac{n-k}{n-k+2\lambda_2}\,\gamma$*, για κάθε* $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$*, όπου*

$$\gamma = 2\inf_{\mu\in M}\frac{tr(v_\Theta q_\mu c)-2\lambda_1 pgvp(v_\Theta q_\mu c)}{pgvp({}^t c q_\mu c b^{-1})}$$

και όπου tr *και* $pgvp$ *είναι το ίχνος και η μέγιστη ιδιοτιμή του θεωρούμενου ενδομορφισμού.*

Παρατηρήση 2.2.1

1. Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ο φ διάφορος από τον φ^0 είναι $\gamma>0$. Επειδή η h ικα- νοποιεί τα $i)$ και $iii)$, είναι $\lambda_1\geq 1$. Συνεπώς ο c πρέπει να ικανοποιεί

$$tr(v_\Theta q_\mu c)-2pgvp(v_\Theta q_\mu c)>0$$

από το οποίο συνεπάγεται $k>2$. Έτσι βρίσκουμε πάλι το φράγμα για τη μη παραδοχή του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων, που πρώτος απέδειξε ο $Stein(1956)$ για την περίπτωση κανονικότητας και γενίκευσε ο $Brown(1966)$ για πιο γενικούς νόμους.

2. Θεωρούμε τη μερική περίπτωση όπου $\overline{q}_\mu(\vartheta)=s(\mu)\overline{q}(\vartheta)$ για κάθε $(\vartheta,\mu)\in\Theta\times M$ (δεδομένης μιας αυθαίρετης τετραγωνικής μορφής $\overline{q}$ επί του Θ και μιας θετικής συνάρτησης s από το M στον $\mathbb{R}_+^*$). Τότε

$$\gamma = 2\,\frac{tr(v_\Theta qc)-2\lambda_1 pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp({}^t cqcb^{-1})}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

Έννοιες

Σύμφωνα με την υποθέση $(P1)$, τα q_μ, b και c έχουν την ακόλουθη αναπαράσταση υπό μορφή πινάκων ως προς τη βάση $(e_1,...,e_k)$:

$$Q=\begin{bmatrix} q_{\mu,1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & q_{\mu,k}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_k\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} c_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & c_k\end{bmatrix}$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$pgvp(v_\Theta q_\mu c)=\max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i$$

$$tr(v_\Theta q_\mu c)=\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i$$

και

$$pgvp(\,{}^t c q_\mu c b^{-1}) = \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i} c_i^2 b_i^{-1}$$

Αν

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

τότε

$$\varphi^0(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i$$

$$\overline{v_{\Theta^\perp}^{-1}}(y - \varphi^0(y)) = \|y - \varphi^0(y)\|^2 = \sum_{j=k+1}^{n} y_j^2 \qquad (\text{σημειώνεται με } \frac{n-k}{u})$$

και

$$\bar{b}(\varphi^0(y)) = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i^2 \qquad (\text{σημειώνεται με } t)$$

Για κάθε πραγματική συνάρτηση g επί του $\mathbb{R}^n$, σημειώνουμε

$$E_{\vartheta,\mu}[g(y_1,...,y_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1,...,y_n) f_\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\vartheta_i)^2\Big) dy_1...dy_n$$

όταν υπάρχει αυτό το ολοκλήρωμα και τέλος σημειώνουμε

$$\beta = \frac{n-k}{n-k+2\lambda_2}\,\gamma$$

Το πεπερασμένο του κινδύνου

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ο κίνδυνος του φ^0 είναι πεπερασμένος για κάθε (ϑ,μ) όταν ικανοποιείται η (H1). Πράγματι για κάθε (ϑ,μ) έχουμε:

$$\begin{aligned}
R(\varphi^0;\vartheta,\mu) &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\overline{q_\mu}(\varphi^0(y)-\vartheta)\Big] = \int_E \overline{q_\mu}(\varphi^0(y)-\vartheta)\; P_{\vartheta,\,\mu}(dy)\\
&= \int_\Theta \overline{q_\mu}(x-\vartheta)\;(P_{\vartheta,\,\mu})_{\varphi^0}(dx) = \int_\Theta \overline{q_\mu}(x-\vartheta)\; P_{\vartheta,\,\mu_\Theta}(dx)\\
&= \int_\Theta \overline{q_\mu}(t)\; P_{0,\,\mu_\Theta}(dt) = \int_\Theta \overline{q_\mu}(t)\;\mu_\Theta(dt) = \int_\Theta \overline{q_\mu}(t) f_{\mu_\Theta}(\|t\|^2)\;\lambda_{v_\Theta}(dt)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i} t_i^2 f_{\mu_\Theta}\Big(\sum_{i=1}^{k} t_i^2\Big) dt_1...dt_k \le \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i}\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{i=1}^{k} t_i^2 f_{\mu_\Theta}\Big(\sum_{i=1}^{k} t_i^2\Big) dt_1...dt_k\\
&\qquad\qquad = \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i}\int_\Theta \|t\|^2\;\mu_\Theta(dt)\\
&\qquad\qquad = \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i}\int_E \|\varphi^0(y)\|^2\;\mu(dy)
\end{aligned}$$

όπου $\mu_\Theta = (\mu)_{\varphi^0} = v_\Theta - radiale$ και $\mu = P_{0,\mu}$. Η τελευταία παράσταση είναι πεπερασμένη λόγω της (H1):

Πράγματι,

$$y = y - \varphi^0(y) + \varphi^0(y)$$

Συνεπώς,

$$\|y\|^2 = \|y-\varphi^0(y)\|^2 + \|\varphi^0(y)\|^2 + 2\underbrace{v^{-1}\Big(y-\varphi^0(y), \varphi^0(y)\Big)}_{=0}$$

Λοιπόν, υπό την (H1),

$$\int_E \|y\|^2\mu(dy) = \int_E \|y-\varphi^0(y)\|^2\mu(dy) + \int_E \|\varphi^0(y)\|^2\mu(dy) < +\infty$$

απ΄ όπου

$$\int_E \|\varphi^0(y)\|^2\mu(dy) < +\infty$$

Ακολουθεί τότε από την ανισότητα του *Schwarz* ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο κίνδυνος του φ πεπερασμένος για κάθε (ϑ,μ), είναι

$$E_{\vartheta,\mu}\Big[\overline{q_\mu}(\varphi^0(y)-\varphi(y))\Big] < +\infty$$

για κάθε (ϑ,μ). Το αριστερό μέλος αυτής της ανισότητας μπορεί να γραφεί

$$B_\varphi = E_{\vartheta,\mu}\Big[\overline{q_\mu}\Big(h\Big(\bar{b}(\varphi^0(y)),\ \frac{n-k}{\|y-\varphi^0(y)\|^2}\Big)\ c(\varphi^0(y))\Big)\Big] = E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i^2y_i^2h^2(t,u)\Big]$$

Αν το B_φ είναι πεπερασμένο, τότε η διαφορά του κιδύνου του φ^0 και του φ είναι πεπερασμένη και μπορεί να γραφεί $\Delta\varphi = A_\varphi - B_\varphi$ όπου

$$\begin{aligned} A_\varphi &= 2E_{\vartheta,\mu}\Big[q_\mu\Big(\varphi^0(y)-\vartheta, \varphi^0(y)-\varphi(y)\Big)\Big] = 2E_{\vartheta,\mu}\Big[q_\mu\Big(h(t,u)c(\varphi^0(y)), \varphi^0(y)-\vartheta\Big)\Big] \\ &= 2E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_iy_i(y_i-\vartheta_i)h(t,u)\Big] \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι το B_φ είναι πεπερασμένο. Από τις υποθέσεις του θεωρήματος έχουμε ότι $tuh(t,u) \le \beta$. Επειδή $b_i > 0$ $(1 \le i \le k)$ έχουμε:

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i^2y_i^2 \le \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i}c_i^2b_i^{-1}$$

Συνεπώς, από την υπόθεση (H2), παίρνουμε

$$B_\varphi \le \beta^2 \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i}c_i^2b_i^{-1}E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{1}{tu^2}\Big] < +\infty$$

Κάτω φράγμα του $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\varphi}}$

Επειδή το A_φ είναι πεπερασμένο και θεωρούμε μια v^{-1}-ορθοκανονική βάση, το A_φ μπορεί να διασπαστεί σε πεπερασμένα διαδοχικά ολοκληρώματα επί του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε για $1 \le i \le k$,

$$\alpha_i = \int_{\mathbb{R}} y_ih(t,u)(y_i-\vartheta_i)f_\mu(\omega)dy_i, \qquad \text{όπου} \qquad \omega = \sum_{j=1}^{n}(y_j-\vartheta_j)^2$$

Επειδή ικανοποιείται η (H3), η $g_\mu(x) = -\int_x^{+\infty} f_\mu(z)dz = -\int_0^{+\infty} f_\mu(z)dz + \int_0^x f_\mu(z)dz$ είναι διαφορίσιμη, αυξάνει στο 0 (θεώρ. *Lebesgue*) καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και επαληθεύει $g'_\mu(x) = f_\mu(x)$ $\sigma.\beta.$ Έτσι $\frac{\partial}{\partial y_i}\, g_\mu(\omega) = 2(y_i - \vartheta_i) f_\mu(\omega) = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(-\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big)$ $\sigma.\beta.$ από το οποίο έχουμε:

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i h(t,u) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(-\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) dy_i \tag{3.2}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη στην (3.2) παίρνουμε

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) d(y_i h(t,u)) \tag{3.3}$$

το οποίο είναι το ολοκλήρωμα *Stieltjes* της συνάρτησης $y_i \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz$, συνεχής και φραγμένη, αναφορικά με τη συνάρτηση $y_i \rightsquigarrow y_i h(t,u)$, φραγμένης κύμανσης επειδή η h είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ. Πράγματι, επειδή

$$\lim_{y_i \to \pm\infty} \int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz = 0 \quad , \quad \lim_{y_i \to \pm\infty} |y_i h(t,u)| \le \lim_{y_i \to \pm\infty} \frac{\beta |y_i|}{tu} = 0$$

έχουμε:

$$\Big[y_i h(t,u) \Big(-\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Επειδή η $h(\cdot,u)$ είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ_1 για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.5.1, Παρατ.(i) του Κεφ.2, στο a_i. Προκύπτει τότε,

$$a_i \ge \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) h(t,u) \Big(1 - 2\lambda_1\, \frac{b_i y_i^2}{t}\Big) dy_i$$

Οπότε

$$A_\varphi \ge 2\Big(\sum_{i=1}^k q_{\mu,i} c_i - 2\lambda_1 \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i} c_i\Big) \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) h(t,u) dy_1 ... dy_n$$

Άνω φράγμα του $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\varphi}}$

Υπό τις παραπάνω έννοιες συμπεραίνουμε οτι,

$$\begin{aligned} B_\varphi &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{i=1}^k q_{\mu,i} c_i^2 y_i^2 h^2(t,u)\Big] \\ &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{i=1}^k q_{\mu,i} c_i^2 \frac{y_i^2 b_i^{-1} b_i}{(n-k)t}\, tuh(t,u) \sum_{j=k+1}^n y_j^2 h(t,u)\Big] \\ &\le \frac{\beta}{n-k} \max_{1\le i\le k} q_{\mu,i} c_i^2 b_i^{-1}\, E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{j=k+1}^n y_j^2 h(t,u)\Big] \end{aligned}$$

Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε μόνο ολοκληρώματα επί του $\mathbb{R}$. Για $k+1 \le j \le n$, ορίζουμε

$$\begin{aligned} \beta_j = \int_{-\infty}^{+\infty} y_j^2 h(t,u) f_\mu(\omega) dy_j &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_j h(t,u) y_j f_\mu(\omega) dy_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\int_\omega^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) d(y_j h(t,u)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Επειδή η $h(t,\cdot)$ είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ_2 και $k < n-1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά το Λήμμα 2.5.1,Παρατ.(ii) του Κεφ.2, το οποίο μας δίνει

$$\beta_j \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\int_{\omega}^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) h(t,u)\Big(1+2\lambda_2\ \frac{u}{n-k}\ y_j^2\Big)dy_j$$

Οπότε

$$B_\varphi \leq \frac{\beta}{n-k}\ \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i^2 b_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{2}\int_{\omega}^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big) h(t,u)(n-k+2\lambda_2)dy_1...dy_n$$

Κάτω φράγμα του Δ_φ

Θεωρώντας ότι

$$\beta = \frac{n-k}{n-k+2\lambda_2}\ \inf_{\mu\in M}\ \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i - 2\lambda_1 \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i}{\max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i^2 b_i^{-1}}$$

ακολουθεί από τα ανωτέρω ότι $\Delta\varphi \geq 0$, για κάθε (ϑ,μ) $\in$Θ×M, αυτό το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

2.3 Η NORMALE ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Αν η κατανομή του y είναι μια n-διάστατη κανονική, $\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v)$, με άγνωστο μέσο ϑ και διασπορά γνωστή εκτός από τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα σ^2, αυτή η κατανομή είναι μια ειδική περίπτωση νόμου με ελλειπτική συμμετρία (βλ.2.2 Παραδείγματα, Κεφ.1) με παράμετρο θέσης ϑ και παράμετρο διακύμανσης v.

Έστω $M = \{\ \mathcal{N}(0,\sigma^2 v) : \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*\ \}$. Είναι προφανές ότι η $\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (H1), (H2) και (H3). Η συνάρτηση απώλειας είναι η συνήθης $\sigma^{-2}\bar{q}(\vartheta-\varphi(y))$ για την εκτίμηση του ϑ. Έτσι στην ειδική αλλά σημαντική περίπτωση εκτίμησης του μέσου μιας k-διάστατης κανονικής όταν η διασπορά είναι μερικώς άγνωστη, οι εκτιμητές της μορφής (3.1) κυριαρχούν τον εκτιμητή φ^0 αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις $i)$, $ii)$ και $iii)$ του προηγούμενου αποτελέσματος με

$$\gamma = 2\ \frac{tr(v_\Theta qc) - 2\lambda_1 pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp({}^t cqcb^{-1})}$$

Προκύπτει λοιπόν, ως πόρισμα του θεωρήματος, το Θεώρημα 2.3.1 του Κεφ.2, το οποίο γενίκευσε τις κλασικές υποθέσεις επί της συνάρτησης συρρίκνωσης (όπως των *Baranchik* [3] και *Bock*[8]).

3. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ Ο ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΤΗ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΤΟ $\varphi^0(\mathbf{y})$

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Εδώ η διάσταση του Θ μπορεί να είναι απο 3 μέχρι n, τη διάσταση του Ε (δηλ. εδώ δεν είναι αναγκαίο η διάσταση του Θ να είναι μικρότερη του $n-1$). Με τις έννοιες της παραγράφου 1.2, υποθέτουμε ότι το μ ανήκει σε μια οικογένεια Μ, η οποία μπορεί να καταλήξει στο μ_0, νόμων *radiales* με παράμετρο διακύμανσης v που δέχονται πυκνότητα πιθανότητας f_μ και ικανοποιούν τις υποθέσεις $(H1)$, $(H'2)$, $(H3)$ και $(H4)$ όπου

$$(H'2)\ \ \forall\vartheta\in\Theta,\ \ E_{\vartheta,\mu}\Big[\|\varphi^0(y)\|^{-2}\Big]<+\infty$$

$$(H4)\ \ d=\inf_{\mu\in M}\inf_{s\in S_\mu}\Big(\int_s^{+\infty}f_\mu(z)dz/f_\mu(s)\Big)>0,\ \ \text{όπου}\ \ S_\mu=\{s\in\mathbb{R}_+:f_\mu(s)>0\}$$

Σημειώνουμε ότι η (H4) είναι παρόμοια των συνθηκών που εμφανίζονται στους *Berger*(1975) και *Bock*(1985).

Οι εκτιμητές που θεωρούμε εδώ είναι της μορφής:

$$\varphi(y)=\varphi^0(y)-h\Big(\bar{b}(\varphi^0(y))\Big)c(\varphi^0(y)) \tag{3.5}$$

όπου h είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_+$ στον $\mathbb{R}_+$ και τα b, c ορίζονται όπως στην §1.3.

3.2 ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Πρόταση 3.2.1

Υπό τις υποθέσεις (P1),(P2) και (P3), μια ικανή συνθήκη για να έχει ο εκτιμητής φ του τύπου (3.5) κίνδυνο μικρότερο ή ίσο από αυτόν του φ^0 είναι να υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε η h να είναι ελεγχόμενη σε ύψος λ και $th(t)\le\frac{d}{2}\,\gamma$, για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, όπου

$$\gamma=\inf_{\mu\in M}2\,\frac{tr(v_\Theta q_\mu c)-2\lambda pgvp(v_\Theta q_\mu c)}{pgvp(\,{}^tcq_\mu cb^{-1})}$$

Απόδειξη

Επειδή αυτή η πρόταση είναι πολύ πλησίον του θεωρήματος, η απόδειξή της είναι πολύ όμοια με εκείνη του θεωρήματος. Αυτή λοιπόν θα είναι συνοπτική και θα διατηρήσουμε τις έννοιες της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος. Το πεπερασμένο του κινδύνου εξασφαλίζεται από την $(H'2)$. Πράγματι από το πεπερασμένο του κινδύνου αρκεί $B_\varphi<+\infty$. Όμως

$$\begin{aligned}B_\varphi &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\bar{q}_\mu(\varphi^0(y)-\varphi(y))\Big]=E_{\vartheta,\mu}\Big[\sum_{i=1}^k q_{\mu,i}c_i^2y_i^2h^2(t)\Big]\\ &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{\sum_{i=1}^k q_{\mu,i}c_i^2y_i^2}{t^2}\,t^2h^2(t)\Big]\\ &\le \Big(\frac{d}{2}\,\gamma\Big)^2\max_{1\le i\le k}q_{\mu,i}c_i^2b_i^{-1}\,E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{1}{t}\Big]\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{1}{t}\Big] &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{1}{\sum_{i=1}^k b_iy_i^2}\Big]\le\frac{1}{\min_{1\le i\le k}b_i}\,E_{\vartheta,\mu}\Big[\Big(\sum_{i=1}^k y_i^2\Big)^{-1}\Big]\\ &= \frac{1}{\min_{1\le i\le k}b_i}\,E_{\vartheta,\mu}[\|\varphi^0(y)\|^{-2}]<+\infty\end{aligned}$$

Όπως στην απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος, μπορούμε να γράψουμε τη διαφορά των κινδύνων μεταξύ του φ^0 και του φ υπό τη μορφή $\Delta\varphi=A_\varphi-B_\varphi$. Όμοια παίρνουμε

$$A_\varphi = 2E_{\vartheta,\mu}\Big[q_\mu(\varphi^0(y)-\vartheta,\varphi^0(y)-\varphi(y))\Big]=2E_{\vartheta,\mu}\Big[h(t)q_\mu(\varphi^0(y)-\vartheta,c(\varphi^0(y))\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= 2E_{\vartheta,\mu}\Big[h(t)\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i y_i(y_i-\vartheta_i)\Big]\\
&\geq 2\Big(\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i - 2\lambda \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i\Big)\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{1}{2}\int_{\omega}^{+\infty} f_\mu(z)dz\Big)h(t)dy_1...dy_n
\end{aligned}
$$

Η (H4) συνεπάγεται τότε

$$
A_\varphi \geq 2\Big(\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i - 2\lambda \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i\Big)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{2}\, h(t)f_\mu(\omega)dy_1...dy_n
$$

Ακόμη το φράξιμο εκ των άνω για το B_φ είναι ευκολότερο απ'οτι στην απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος (εδώ αποφεύγεται η χρήση του Λήμματος 2.5.1 του Κεφ.2). Λοιπόν,

$$
\begin{aligned}
B_\varphi &= E_{\vartheta,\mu}\Big[\frac{\sum_{i=1}^{k} q_{\mu,i}c_i^2 y_i^2}{t}\ h(t)\ th(t)\Big]\\
&\leq \frac{d}{2}\,\gamma \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i^2 b_i^{-1}\ E_{\vartheta,\mu}[h(t)]\\
&= \frac{d}{2}\,\gamma \max_{1\leq i\leq k} q_{\mu,i}c_i^2 b_i^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} h(t)f_\mu(\omega)dy_1...dy_n
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση του γ, αποδεικνύουμε την πρόταση.

3.3 Η NORMALE ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Όπως στην παράγραφο 2.3, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση εκτίμησης του μέσου μιας *Normale* κατανομής. Αν $M = \{\ \mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2 v):\ \vartheta\in\Theta,\ \sigma^2\geq\sigma_0^2\ \}$, τότε το άνω φράγμα για την $th(t)$ είναι

$$
2\sigma_0^2\ \frac{tr(v_\Theta qc) - 2\lambda pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp(\ {}^t cqcb^{-1})}
$$

αν επιλέξουμε μια συνάρτηση απώλειας όπως στην παράγραφο 2.3, δηλ. την $\sigma^{-2}\bar{q}(\varphi(y)-\vartheta)$ (το αποτέλεσμα παρουσιάστηκε στο Θεωρ.1.3.1 του Κεφ.2, όπου το σ^2 θεωρείτο γνωστό).

Πράγματι, αν $\overline{q_\mu}(\varphi(y)-\vartheta) = \sigma^{-2}\bar{q}(\varphi(y)-\vartheta)$, το γ γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \inf_{\mu\in M} 2\ \frac{\sigma^{-1}\Big(tr(v_\Theta qc) - 2\lambda pgvp(v_\Theta qc)\Big)}{\sigma^{-1}pgvp(\ {}^t cqcb^{-1})}\\
&= 2\ \frac{tr(v_\Theta qc) - 2\lambda pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp(\ {}^t cqcb^{-1})}
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
d &= \inf_{\mu\in M}\inf_{s\in S_\mu}\frac{\int_s^{+\infty} f_\mu(z)dz}{f_\mu(s)} = \inf_{\mu\in M}\inf_{s\in S_\mu}\frac{\int_s^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\ e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}dz}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\ e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}}\\
&= \inf_{\mu\in M}\inf_{s\in S_\mu}\frac{2\sigma^2[-e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}]_s^{+\infty}}{e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}} = \inf_{\mu\in M} 2\sigma^2 = 2\sigma_0^2
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
th(t) \leq \frac{d}{2}\,\gamma = 2\sigma_0^2\ \frac{tr(v_\Theta qc) - 2\lambda pgvp(v_\Theta qc)}{pgvp(\ {}^t cqcb^{-1})}
$$

Κεφάλαιο 4

ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗ ΥΠΟ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Θεωρούμε, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα της εκτίμησης της παραμέτρου θέσεως ϑ ενός νόμου με ελλειπτική συμμετρία (χωρίς την ανάγκη ύπαρξης πυκνότητας) μέσα στο πλαίσιο ενός γενικευμένου γραμμικού μοντέλου δηλ. όταν το ϑ ανήκει σε ένα γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο του χώρου των παρατηρήσεων.

Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα των *Cellier* και *Fourdrinier* (1992, 1994) (οι οποίοι επεκτείνουν τα αποτελέσματα των *Brandwein* και *Strawderman* (1991)), δίδομεν ένα αμερόληπτο εκιμητή της διαφοράς των κινδύνων του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων φ^0 και κάθε εκτιμητή με συρρικνωτή της μορφής:

$$\varphi = \varphi^0 - \|X - \varphi^0\| \; g \circ \varphi^0$$

Εξ αυτού συμπεραίνουμε μια γενική υπόθεση κυριαρχίας του φ επί του φ^0 αναφορικά με μια οποιαδήποτε τετραγωνική απώλεια, κάνοντας μη αναγκαία οποιαδήποτε υπόθεση *superharmonicite* επί του g. Δεχόμαστε όμως εν αντιθέσει με τα προηγούμενα κεφάλαια (2 και 3), τη διαφορισιμότητα της g.

1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΘΕΣΕΩΣ ΑΝΑΦΟΡΙΚΑ ΜΕ ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

1.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η μέθοδος που υϊοθετούμε (και εδώ) για την εκτίμηση της παραμέτρου θέσεως, στο πλαίσιο του γενικού γραμμικού μοντέλου, είναι εκείνη των προηγουμένων κεφαλαίων δηλαδή της «*coordinate free*».

Σημειώνουμε εδώ με $(E, < \, , \, >)$ ένα ευκλείδειο χώρο διαστάσεως n και Θ ένα γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο του Ε διαστάσεως k $(0 < k < n)$.

Έστω $x (\in E)$ μια παρατήρηση ενός νόμου με ελλειπτική συμμετρία P_ϑ παραμέτρου θέσεως ϑ (και παραμέτρου διακύμανσης $< \, , \, >^{-1}$). Υπενθυμίζουμε ότι η ελλειπτική συμμετρία (βλ. Κεφαλαίο 1) είναι ισοδύναμη με το ότι ο P_ϑ είναι η εικόνα μέσω της μεταφοράς του ϑ ενός νόμου που μένει αναλλοίωτος υπό οποιανδήποτε ορθογώνιο μετασχηματισμό (αναφορικά με το βαθμωτό γινόμενο $< \, , \, >$).

Η κύρια υπόθεση σ'αυτό το μοντέλο (η οποία συμπίπτει με εκείνη των Κεφαλαίων 2, 3) είναι ότι η παράμετρος θέσεως ϑ ανήκει στον Θ με διάσταση αυστηρά μικρότερη από εκείνη του E.

Μια μικρή καινοτομία αυτού του κεφαλαίου είναι ότι δεν υποθέτουμε την ύπαρξη πυκνότητας του P_ϑ ως προς το μέτρο του *Lebesgue* επί του E.

Η παράμετρος θέσης ϑ εκτιμάται από μετρήσιμες συναρτήσεις φ από τον E στον Θ. Για να συγκρίνουμε τους διάφορους εκτιμητές, θεωρούμε μια γενική τετραγωνική συνάρτηση απώλειας, η οποία συνδέεται με μια θετική τετραγωνική μορφή q επί του Θ. Η απώλεια που παρέχεται υπό την εκτίμηση $\varphi(x)$ όταν το ϑ είναι η αληθινη τιμή της παραμέτρου, είναι

$$q\Big(\varphi(x)-\vartheta\Big)$$

Έτσι ένας εκτιμητής φ βελτιώνει ένα άλλο εκτιμητή φ', αν ο κίνδυνος $R(\varphi;\cdot)$ του φ είναι μικρότερος ή ίσος του κινδύνου του φ' δηλαδή

$$\forall\vartheta\in\Theta,\ R(\varphi;\vartheta)=\int_E q\Big(\varphi(x)-\vartheta\Big)P_\vartheta(dx)\le\int_E q\Big(\varphi'(x)-\vartheta\Big)P_\vartheta(dx)=R(\varphi';\vartheta)$$

Επειδή $k<n$, ο συνήθης εκτιμητής του ϑ είναι η $<\ ,\ >$-ορθογώνια προβολή φ^0 του E επί του Θ, ο οποίος ως γνωστόν είναι ο ε.ε.τ. του ϑ.

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δώσει γενικές συνθήκες για μια ευρεία κλάση εκτιμητών με συρρίκνωση οι οποίοι βελτιώνουν τον συνήθη ε.ε.τ. φ^0.

Οι εκτιμητές με συρρικνωτή που θεωρούμε είναι της μορφής

$$\varphi=\varphi^0-\|X-\varphi^0\|^2\cdot g\circ\varphi^0 \tag{4.1}$$

όπου g είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση από τον Θ στον Θ και X η ταυτοτική απεικόνιση επί του E.

Οι εκτιμητές της μορφής (4.1) διαφέρουν εκείνων των προηγούμενων κεφαλαίων στους οποίους η παρουσία του ενδομορφισμού c, εναρμονίζοντας την συρρίκνωση κατά συνιστώσα, αντικαθίσταται από μια διανυσματική συνάρτηση.

Επίσης είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ο συρρικνωτής $\|X-\varphi^0\|^2\cdot g\circ\varphi^0$ περιέχει τον «υπολειματικό όρο» $\|X-\varphi^0\|^2$. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η παρουσία αυτού του όρου, οδηγεί σε κάποιες ιδιότητες «ρωμαλεότητας» επειδή δοθείσης της παρατήρησης x, ο υπολειματικός όρος $\|x-\varphi^0(x)\|^2$, παριστάνοντας το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ του x και της προβολής του επί του Θ, διαισθητικά ενισχύει την πληροφορία που χρησιμοποιείται για τον εκτιμητή.

Η μέθοδος για την κυριαρχία του φ επί του φ^0 στηρίζεται όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, στον υπολογισμό της διαφοράς των κινδύνων των εκτιμητών φ^0 και φ αντιστοίχως.

Ο υπολογισμός βασίζεται στο γεγονός ότι, ο P_ϑ όντως ελλειπτικά συμμετρικός, είναι ένα μίγμα ομοιόμορφων νόμων, $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$, επί των σφαιρών $S_{r,\vartheta}=\{x\in E:\ \|x-\vartheta\|=r\}$ του E, κέντρου ϑ και ακτίνας r. Αυτό που μας επιτρέπει να γράψουμε, για κάθε συνάρτηση f P_ϑ-ολοκληρώσιμη, ότι

$$E_\vartheta(f)=\int_E f dP_\vartheta=\int_{\mathbb{R}_+}E_{r,\vartheta}(f)\rho(dr)$$

όπου $E_{r,\vartheta}$ σημειώνει τη μέση τιμή αναφορικά με τον ομοιόμορφο νόμο $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$ επί της σφαίρας $S_{r,\vartheta}$ και ρ είναι ο νόμος της ακτίνας δηλαδή $\rho=(P_0)_{\|\cdot\|}$ (βλ. Πρότ.2.4.1, Κεφ.1).

Επίσης, επειδή ο νόμος εικόνα του $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$ υπό την φ^0 $\Big((\mathcal{U}_{r,\vartheta})_{\varphi^0}\Big)$ είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο του *Lebesgue* επί του Θ (Πρότ.2.4.8, Κεφ.1), η αντίστοιχη πυκνότητα φαίνεται να είναι ένα πολύ καλό εργαλείο.

Αυτή μας επιτρέπει να δώσουμε μια ακριβή έκφραση της διαφοράς των κινδύνων και όχι απλά ένα κάτω φράγμα όπως στους *Brandwein* και *Strawderman* [10], [11]. Η χρήση αυτής αξιοποιεί την πληροφορία ότι το ϑ ανήκει σ'ενα γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο.

1.2 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗΣ

Για να εξασφαλίσουμε το πεπερασμένο του κινδύνου του συνήθη εκτιμητή φ^0 και του κινδύνου του εκτιμητή με συρρίκνωση φ, χρειαζόμαστε τις δύο ακόλουθες υποθέσεις (H_1) και (H_2) :

$$\begin{array}{ll} (H_1) & \displaystyle\int_E \|X\|^2 \, dP_0 < +\infty \\ (H_2)\ \ \forall\vartheta\in\Theta, & \displaystyle\int_E \|X-\varphi^0\|^4 \cdot \|g\circ\varphi^0\|^2 \, dP_\vartheta < +\infty \end{array}$$

Παρατήρηση 1.2.1

Στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.1, χρησιμοποιούμε αντί της (H_1) τη συνθήκη

$$\int_E \|\varphi^0\|^2 \, dP_0 < +\infty$$

Αρχικά, αυτή η συνθήκη φαίνεται ασθενέστερη της (H_1). Ωστόσο, αποδεικνύεται κατωτέρω ότι, επειδή ο P_0 είναι ακτινικός, οι δύο αυτές συνθήκες είναι ισοδύναμες.

Πράγματι, επειδή ο P_0 είναι ακτινικός, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_E \|\varphi^0(x)\|^2 \, P_0(dx) &= \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_{S_r} \|\varphi^0(x)\|^2 \, \mathcal{U}_r(dx) \Big) \rho(dr) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_{S_1} r^2 \|\varphi^0(y)\|^2 \, \mathcal{U}_1(dy) \Big) \rho(dr) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} r^2 \varrho(dr) \cdot \int_{S_1} \|\varphi^0(y)\|^2 \, \mathcal{U}_1(dy) \end{aligned} \tag{4.2}$$

και όμοια,

$$\begin{aligned} \int_E \|X(x)\|^2 \, P_0(dx) &= \int_{\mathbb{R}_+} r^2 \rho(dr) \cdot \int_{S_1} \|y\|^2 \, \mathcal{U}_1(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} r^2 \rho(dr) \end{aligned}$$

Λοιπόν, αν $\int_E \|\varphi^0\|^2 \; dP_0 < +\infty$, από την (4.2) παίρνουμε ότι $\int_{\mathbb{R}_+} r^2 \rho(dr) < +\infty$ και συνεπώς $\int_E \|X\|^2 \, dP_0 < +\infty$

Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $\|X\|^2 = \|X-\varphi^0\|^2 + \|\varphi^0\|^2 \geq \|\varphi^0\|^2$. Άρα οι δυο συνθήκες είναι ισοδύναμες.

Παρατήρηση 1.2.2

Συχνά είναι δύσκολο να ελεγχθεί η συνθήκη (H_2). Για το λόγο αυτό, στην παράγραφο 3 αποδεικνύουμε ότι η παρακάτω συνθήκη

$$(H_3) \qquad \exists a > 0,\ \forall t \in \Theta, \quad \|t\| \, \|g(t)\| \leq a$$

είναι ικανή να εξασφαλίσει την (H_2). Τέτοιας μορφής συνθήκη δώσαμε ήδη στα Κεφ.2 και 3, όπου ο παράγοντας συρρίκνωσης ήταν βαθμωτός (εκεί η συνθήκη είναι $tg(t) \leq a$). Έτσι αυτή είναι μια φυσιολογική γενίκευση όταν ο g είναι διανυσματικός.

Ένα τελευταίο σημαντικό σημείο είναι, όπως αποδεικνύεται στην παράγραφο 3, ότι η συνθήκη (H_3) επιβάλλει τη διάσταση του Θ να είναι μεγαλύτερη του 2. Έτσι βρίσκουμε ξανά τη συνθήκη επί της διάστασης για την αποδοχή του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων.

Υποθέτουμε παρακάτω ότι $k \geq 3$.

1.3 ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Θεωρώντας τις συνθήκες (H_1) και (H_2), τη διαφορισιμότητα του παράγοντα συρρίκνωσης g και ότι $k \geq 3$, το κύριο αποτέλεσμα σχετικά με την κυριαρχία του εκτιμητή με συρρίκνωση φ της μορφής (4.1) δίδεται από το Θεώρημα 1.3.1, το οποίο προκύπτει από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διαφοράς των κινδύνων των φ^0 και φ είναι ο

$$\left(\frac{2}{n-k+2}\, div(Q \circ g \circ \varphi^0) - q \circ g \circ \varphi^0\right) \|X - \varphi^0\|^4$$

Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την κυριαρχία του φ επί του φ^0 είναι

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \frac{\int_E div(Q \circ g \circ \varphi^0)\, \|X - \varphi^0\|^4 \, dP_\vartheta}{\int_E q \circ g \circ \varphi^0 \, \|X - \varphi^0\|^4 \, dP_\vartheta} \geq \frac{n-k+2}{2}$$

όπου Q είναι ο ενδομορφισμός που συνδέεται με την τετραγωνική μορφή q και το βαθμωτό γινόμενο $< \,,\, >$.

Παρατήρηση 1.3.3

Η ακριβής σχέση που συνδέει τον ενδομορφιμό Q, το βαθμωτό γινόμενο $< \,,\, >$ και την τετραγωνική μορφή q είναι

$$\forall \vartheta \in \Theta, \;\; q(\vartheta) =< \vartheta,\; Q(\vartheta) >$$

Προφανώς η διγραμμική συμμετρική μορφή που συνδέεται με την q είναι η

$$(x, y) \rightsquigarrow < x,\; Q(y) >$$

(βλ. [37], $pp57$).

Απόδειξη

Από την Παρατήρηση 1.2.1, παρατηρώντας πρώτα ότι ο λόγος των δύο τετραγωνικών μορφών είναι φραγμένος, η συνθήκη (H_1) είναι ισοδύναμη με την $(H_1)'$ όπου

$$(H_1)' \qquad \int_E q(\varphi^0) dP_0 < +\infty$$

Πράγματι, ο ενδομορφισμός Q είναι $< \,,\, >$-συμμετρικός και υπάρχει λοιπόν βάση ορθοκανονική του Θ (ως προς το $< \,,\, >_\Theta$) που τον διαγωνιοποιεί. Άρα, για κάθε $x \in E$,

$$\frac{q\Big(\varphi^0(x)\Big)}{\|\varphi^0(x)\|^2} = \frac{< \varphi^0(x), Q\Big(\varphi^0(x)\Big) >}{\|\varphi^0(x)\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^k Q_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq Q_M$$

και όμοια
$$\frac{\|\varphi^0(x)\|^2}{q\Big(\varphi^0(x)\Big)} \leq \frac{1}{Q_m}$$
όπου $\varphi^0(x) = \sum_{i=1}^k x_i e_i$ με $(e_1, ..., e_k)$ την προαναφερθείσα βάση του Θ, $Q_i, \quad i = 1, ..., k$ οι ιδιοτιμές του Q και Q_M, Q_m η μέγιστη και η ελάχιστη ιδιοτιμή του Q αντιστοίχως.

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύουμε την ισοδυναμία των $(H_1), (H_1)'$.

Με τον ίδιο τρόπο, είναι φανερό ότι η (H_2) είναι ισοδύναμη με την $(H_2)'$ με
$$(H_2)' \quad \forall \vartheta \in \Theta, \quad \int_E \|X - \varphi^0\|^4 \cdot g \circ q \circ \varphi^0 \, dP_\vartheta < +\infty$$

Σταθεροποιούμε το ϑ μέσα στο Θ. Σύμφωνα με την $(H_1)'$ και τη γραμμικότητα του φ^0, ο κίνδυνος $R(\varphi^0; \vartheta)$ είναι πεπερασμένος, αφού
$$R(\varphi^0; \vartheta) = \int_E q\Big(\varphi^0(x) - \vartheta\Big) \, P_\vartheta(dx) = \int_E q\Big(\varphi^0(x - \vartheta)\Big) \, P_\vartheta(dx) = \int_E q\Big(\varphi^0(x)\Big) \, P_0(dx) < +\infty$$

Θεωρώντας τη διαφορά των κινδύνων
$$\delta(\vartheta) = R(\varphi^0; \vartheta) - R(\varphi; \vartheta)$$
μεταξύ του κινδύνου του φ^0 και του κινδύνου του φ στο ϑ, το πεπερασμένο του κινδύνου $R(\varphi; \vartheta)$ είναι τότε συνέπεια της συνθήκης $(H_2)'$.

Πράγματι, έχουμε:
$$\delta(\vartheta) = \int_E q\Big(\varphi^0 - \vartheta\Big) \, dP_\vartheta - \int_E q\Big(\varphi - \vartheta\Big) \, dP_\vartheta$$
Όμως,
$$\begin{aligned} \forall x \in E, \ \ q\Big(\varphi(x) - \vartheta\Big) &= \ < \varphi(x) - \vartheta, Q\Big(\varphi(x) - \vartheta\Big) > \\ &= \ q\Big(\varphi^0(x) - \vartheta\Big) - 2\|x - \varphi^0(x)\|^2 < \varphi^0(x) - \vartheta, Q \circ g \circ \varphi^0(x) > \\ & \qquad + \|x - \varphi^0(x)\|^4 q\Big(g \circ \varphi^0(x)\Big) \end{aligned}$$
Άρα
$$\delta(\vartheta) = 2 \int_E \|X - \varphi^0\|^2 < \varphi^0 - \vartheta, Q \circ g \circ \varphi^0 > \, dP_\vartheta - \int_E \|X - \varphi^0\|^4 \, q \circ g \circ \varphi^0 \, dP_\vartheta$$

Η υπόθεση $(H_2)'$ εξασφαλίζει το πεπερασμένο του δεύτερου όρου της παραπάνω ισότητας. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του $Schwarz$ στον πρώτο όρο, έχουμε:
$$\begin{aligned} & \int_E \|X - \varphi^0\|^2 | < \varphi^0 - \vartheta, Q \circ g \circ \varphi^0 > | \, dP_\vartheta \\ & \leq \int_E \|X - \varphi^0\|^2 \, q^{\frac{1}{2}}(\varphi^0 - \vartheta) \, q^{\frac{1}{2}}(g \circ \varphi^0) \, dP_\vartheta \\ & \leq \Big(\int_E \|X - \varphi^0\|^4 q(g \circ \varphi^0) \, dP_\vartheta\Big)^{\frac{1}{2}} \, \Big(\int_E q(\varphi^0 - \vartheta) \, dP_\vartheta\Big)^{\frac{1}{2}} \\ & = \Big(\int_E \|X - \varphi^0\|^4 q(g \circ \varphi^0) \, dP_\vartheta\Big)^{\frac{1}{2}} \, \Big(R(\varphi^0, \vartheta)\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

λόγω της $(H_2)'$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την έκφραση της διαφοράς των κινδύνων δ(ϑ). Επειδή ο P_ϑ είναι ελλειπτικά συμμετρικός νόμος, έχουμε

$$\delta(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}_+} \delta_r(\vartheta)\ \rho(dr)$$

όπου

$$\delta_r(\vartheta) = 2\int_{S_{r,\vartheta}} \|X-\varphi^0\|^2 < \varphi^0 - \vartheta, Q\circ g\circ \varphi^0 > d\mathcal{U}_{r,\vartheta} - \int_{S_{r,\vartheta}} \|X-\varphi^0\|^4\ q\circ g\circ\varphi^0 d\mathcal{U}_{r,\vartheta}$$

όπου τα $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$, $S_{r,\vartheta}$ και ρ έχουν οριστεί στην παράγραφο 1.1.

Έτσι τα αποτελέσματα της πρότασης θα αποδειχτούν, δουλεύοντας «δεσμευτικά» επί της ακτίνας, δηλαδή με το $\delta_r(\vartheta)$. Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $x \in S_{r,\vartheta}$,

$$\|(X-\varphi^0)(x)\|^2 = \|x-\varphi^0(x)\|^2 = r^2 - \|\varphi^0(x) - \vartheta\|^2$$

Λοιπόν, οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στην έκφραση του $\delta_r(\vartheta)$ εξαρτώνται μόνο από τον φ^0 και επομένως χρησιμοποιώντας το θεώρημα μεταφοράς και την πυκνότητα του φ^0 υπό τον $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$, $(\mathcal{U}_{r,\vartheta})_{\varphi^0}$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\delta_r(\vartheta) &= 2C_r^{n,k}\int_{B_{r,\vartheta}} < t-\vartheta, (Q\circ g)(t) >\ (r^2 - \|t-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}}\ \lambda_\Theta(dt) \\ &- C_r^{n,k}\int_{B_{r,\vartheta}} (q\circ g)(t)(r^2-\|t-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}+1}\lambda_\Theta(dt) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

όπου $C_r^{n,k}$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης της πυκνότητας (βλ. Προτ.2.4.10 Κεφ1) και $B_{r,\vartheta} = \{\ x\in\Theta:\ \|x-\vartheta\| \le r\ \}$.

Το αποτέλεσμα πηγάζει δουλεύοντας με τον πρώτο όρο της (4.3). Το κλειδί εδώ είναι ότι το διάνυσμα $(r^2-\|t-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}}\ (t-\vartheta)$ μπορεί να γραφεί ως το *gradient* στο σημείο t της συνάρτησης

$$\gamma : t \to \frac{-(r^2-\|t-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}+1}}{n-k+2}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (βλ. [32])

$$\forall t\in\Theta,\ \ div(\gamma\cdot Q\circ g)(t) =< \nabla\gamma(t), (Q\circ g)(t) > + \gamma(t)\ div(Q\circ g)(t) \qquad (4.4)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{B_{r,\vartheta}} < t-\vartheta, (Q\circ g)(t) >\ (r^2-\|t-\vartheta\|^2)^{\frac{n-k}{2}}\ \lambda_\Theta(dt) = \int_{B_{r,\vartheta}} < \nabla\gamma(t), (Q\circ g)(t) > \lambda_\Theta(dt)$$

$$= \int_{B_{r,\vartheta}} div(\gamma\cdot Q\circ g)(t)\ \lambda_\Theta(dt) - \int_{B_{r,\vartheta}} \gamma(t)\ div(Q\circ g)(t)\ \lambda_\Theta(dt) \qquad (4.5)$$

Τώρα, το *Θεώρημα της απόκλισης* μας επιτρέπει να γράψουμε το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4.5) ως εξής:

$$\int_{B_{r,\vartheta}} div(\gamma\cdot Q\circ g)(t)\ \lambda_\Theta(dt) = \int_{S_{r,\vartheta}} < (\gamma\cdot Q\circ g)(t), \frac{t-\vartheta}{\|t-\vartheta\|} >\ \sigma_{r,\vartheta}(dt) \qquad (4.6)$$

όπου το $\sigma_{r,\vartheta}$ είναι το «μέτρο εμβαδό» επί της $S_{r,\vartheta}$ ακτίνας r και κέντρου ϑ επί του Θ και διαπιστώνουμε ότι ο όρος αυτός είναι μηδέν αφού η συνάρτηση γ είναι ταυτοτικά μηδέν επί της $S_{r,\vartheta}$. Από τις (4.3),(4.5) και (4.6) προκύπτει

$$\delta_r(\vartheta) = C_r^{n,k} \int_{B_{r,\vartheta}} \Big(\frac{2}{n-k+2}\, div(Q \circ g)(t) - (q \circ g)(t) \Big) \Big(r^2 - \|t - \vartheta\|^2 \Big)^{\frac{n-k}{2}+1} dt$$

Έτσι, επιστρέφοντας σε ολοκλήρωμα αναφορικά με το P_ϑ, έχουμε:

$$\delta(\vartheta) = \int_E \Big(\frac{2}{n-k+2}\, div(Q \circ g \circ \varphi^0) - q \circ g \circ \varphi^0 \Big) \|X - \varphi^0\|^4 \, dP_\vartheta$$

Αυτό το ολοκλήρωμα αποδεικνύει ότι ο $\Big(\frac{2}{n-k+2}\, div(Q \circ g \circ \varphi^0) - q \circ g \circ \varphi^0 \Big) \|X - \varphi^0\|^4$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διαφοράς των κινδύνων των φ^0 και φ. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη κυριαρχίας του φ επί του φ^0 προκύπτει άμεσα από αυτήν την έκφραση.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα που είναι άμεση συνέπεια της πρότασης.

Θεώρημα 1.3.1

Υποθέτουμε ότι οι (H_1) και (H_2) ικανοποιούνται, ο παράγοντας συρρίκνωσης g είναι διαφορίσιμος και το $k \geq 3$.

Μια ικανή συνθήκη για την κυριαρχία του φ επί του φ^0 είναι

$$q \circ g \leq \frac{2}{n-k+2}\, div(Q \circ g) \tag{4.7}$$

επί του $\Theta\Big(= \varphi^0(E)\Big)$.

Παρατήρηση 1.3.4

Η απόδειξη της Πρότασης 1.3.1 απαιτεί τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης g. Στην πραγματικότητα, ισχύει ακόμη και αν η g είναι ασθενώς διαφορίσιμη. Αυτή η αδύναμη υπόθεση μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε κλασικούς τύπους $James - Stein$ εκτιμητών για τους οποίους ο παράγοντας συρρίκνωσης είναι ασθενώς διαφορίσιμος για $k \geq 3$ (βλ. Παράγραφο 2).

Παρατήρηση 1.3.5

Όπως ο $C.Stein$ (1981), στην περίπτωση κανονικού νόμου, κατασκευάσαμε και εδώ έναν αμερόληπτο εκτιμητή της διαφοράς των κινδύνων. Αυτό οφείλεται στη χρήση της πυκνότητας του $(\mathcal{U}_{r,\vartheta})_{\varphi^0}$, η οποία αποδεικνύεται να είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο. Τέτοιας μορφής αποτελέσματα δεν μπορούν να προκείψουν δια μέσω των $Brandwein$ και $Strawderman$ [10] και [11], επειδή αυτοί χρησιμοποιούν ένα κάτω φράγμα για τη διαφορά των κινδύνων με σκοπό να αποδείξουν την κυριαρχία του φ.

Φυσικά βρίσκουμε πάλι την ενδιαφέρουσα ιδιότητα της «ρωμαλεότητας» που έχει ήδη παρατηρηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένα τελευταίο σημείο που είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε είναι ότι η απόδειξη του θεωρήματος δεν απαιτεί πυκνότητα για τον P_ϑ.

2. ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα γενικό παράδειγμα μη-σφαιρικού εκτιμητή με συρρικνωτή προκύπτει επιλέγοντας τον παράγοντα συρρίκνωσης g να ορίζεται ως:

$$\forall t \in \Theta, \ \ g(t) = r(\|t\|^2)\,\frac{A(t)}{b(t)}$$

όπου r είναι μια θετική διαφορίσιμη, αύξουσα συνάρτηση, ο A είναι ένας συμμετρικός ενδομορφισμός του οποίου οι ιδιοτιμές είναι θετικές και b είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή επί του Θ. Θεωρούμε λοιπόν τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi = \varphi^0 - \|X - \varphi^0\|^2 r(\|\varphi^0\|^2)\,\frac{A(\varphi^0)}{b(\varphi^0)}$$

Για κάθε ενδομορφισμό c επί του Θ, σημειώνουμε με c_M, c_m και $tr(c)$ τη μέγιστη ιδιοτιμή, την ελάχιστη ιδιοτιμή και το ίχνος του c αντίστοιχα. Επιπλέον, αν d είναι μια τετραγωνική μορφή επί του Θ, διατηρούμε τις ίδιες έννοιες για την d με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν για τον ενδομορφισμό που συνδέεται με την d και το βαθμωτό γινόμενο $< \, , \, >$ (δηλαδή $d(\vartheta) = \, < \vartheta, D(\vartheta) >$ όπου $D : \Theta \to \Theta$ ενδομορφισμός).

Για κάθε $t \in \Theta$, έχουμε:

$$\|t\| \cdot \|g(t)\| = r(\|t\|^2)\,\frac{\|t\|}{b(t)}\,\|A(t)\| \leq \ \frac{A_M}{b_m}\ r(\|t\|^2)$$

Πράγματι, υποθέτοντας την ύπαρξη μιας βάσης του Θ, $(e_1, ..., e_n)$ $< \, , \, >_\Theta$-ορθοκανονικής και q-ορθογώνιας στην οποία τα A, b διαγωνιοποιούνται, έχουμε:

$$\forall t \in \Theta, \ \ \frac{\|A(t)\|}{b(t)} \ = \ \frac{\left(\sum_{i=1}^k A_i^2 t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^k b_i t_i^2} \ \leq \ \frac{A_M \|t\|}{b_m \|t\|^2} \ = \ \frac{A_M}{b_m \|t\|}$$

όπου $A_i, b_i, \ \ i = 1, ..., k$ είναι οι ιδιοτιμές των A, b αντίστοιχα.

Λοιπόν, η συνθήκη (H_3) ικανοποιείται εφόσον η συνάρτηση r είναι φραγμένη. Τότε, ο κίνδυνος του εκτιμητή με συρρίκνωση θα είναι πεπερασμένος (βλ. Παράγραφο 3).

Επίσης, υπό την παραπάνω βάση του Θ, για κάθε $t \in \Theta$, έχουμε:

$$(q \circ g)(t) = \ \frac{r^2(\|t\|^2)}{b^2(t)}\,(q \circ A)(t) \leq \frac{(Q^{\frac{1}{2}} \circ A)_M^2}{b_m}\ \ \frac{r^2(\|t\|^2)}{b(t)}$$

όπου $Q^{\frac{1}{2}}$ είναι ο ενδομορφισμός που ικανοποιεί $Q = Q^{\frac{1}{2}} \circ Q^{\frac{1}{2}}$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (4.4), έχουμε:

$$\begin{aligned}
div(Q \circ g)(t) &= div\Bigg(\ \frac{r(\|t\|^2)}{b(t)}\ Q\Big(A(t)\Big)\ \Bigg) \\
&= \ < r(\|t\|^2) \cdot \nabla\Big(b(t)\Big)^{-1}, (Q \circ A)(t) > + \ \frac{1}{b(t)}\ \Bigg(< \nabla r(\|t\|^2), (Q \circ A)(t) > \\
&\qquad + r(\|t\|^2)\ div(Q \circ A)(t)\Bigg) \\
&= \ -\frac{r(\|t\|^2)}{b^2(t)}\ < \nabla b(t), (Q \circ A)(t) > + \ \frac{1}{b(t)}\ \Big(\ 2r'(\|t\|^2) < t, (Q \circ A)(t) > + tr(Q \circ A) r(\|t\|^2)\ \Big)
\end{aligned}$$

Όμως,

$$< \nabla b(t), (Q \circ A)(t) >=< 2\sum_{i=1}^{k} b_i t_i e_i, \sum_{i=1}^{k} (Q \circ A)_i t_i e_i >= 2\sum_{i=1}^{k} b_i (Q \circ A)_i t_i^2 \leq 2(Q \circ A)_M \, b(t)$$

Συνεπώς (δεδομένου ότι οι r και r' είναι μη αρνητικές):

$$div(Q \circ g)(t) \geq -2(Q \circ A)_M \, \frac{r(\|t\|^2)}{b(t)} \, + 2\frac{(Q \circ A)_m}{b_M} \, r'(\|t\|^2) + tr(Q \circ A) \, \frac{r(\|t\|^2}{b(t)}$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι για να ικανοποιείται η συνθήκη (4.7) του Θεωρήματος αρκεί, για κάθε $t \in \Theta$,

$$\frac{(Q^{\frac{1}{2}} \circ A)_M^2}{b_m} \cdot \frac{r^2(\|t\|^2)}{b(t)} \leq \frac{2}{n-k+2}\Bigg(-2(Q \circ A)_M \, \frac{r(\|t\|^2)}{b(t)} \, +2\frac{(Q \circ A)_M}{b_M} \, r'(\|t\|^2) + tr(Q \circ A) \, \frac{r(\|t\|^2)}{b(t)}\Bigg)$$

το οποιό είναι ισοδύναμο με

$$\left(\frac{(Q^{\frac{1}{2}} \circ A)_M^2}{b_m} \, r(\|t\|^2) + \, \frac{2\Big(2(Q \circ A)_M - tr(Q \circ A)\Big)}{n-k+2}\right) \frac{r(\|t\|^2)}{b(t)} \leq \, \frac{4(Q \circ A)_m}{(n-k+2)b_M} \, r'(\|t\|^2)$$

Επειδή η συνάρτηση r' είναι μη αρνητική, η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αν, για κάθε $t \in \Theta$,

$$r(\|t\|^2) \leq 2\frac{tr(Q \circ A) - 2(Q \circ A)_M}{n-k+2} \, \cdot \, \frac{b_m}{(Q^{\frac{1}{2}} \circ A)_M^2}$$

Παρατήρηση 2.1

Το παραπάνω παράδειγμα περιέχει τα παραδείγματα 2.1 και 2.2 των *Brandwein* και *Strawderman* [10] καθώς και το παράδειγμα 3.1 αυτών στο [11]. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το αποτέλεσμα της κυριαρχίας επιβάλλει μόνο $k \geq 3$ (αφού πρέπει να έχουμε $tr(Q \circ A) - 2(Q \circ A)_M > 0$) ενώ αυτό των *Brandwein* και *Strawderman* απαιτεί $k \geq 4$.

Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι, όταν $k = n$ (περίπτωση την οποία αυτοί θεωρούν) η μέθοδός τους απαιτεί η $div g$ να είναι *superharmonic* το οποίο είναι αληθές για $k \geq 4$.

Αυτή η απαίτηση επαληθεύεται εύκολα με το εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα: Αν r =σταθερά, $A = id_\Theta$ και $b = \| \cdot \|^2$ περίπτωση κατά την οποία ο θεωρούμενος εκτιμητής $\varphi(x)$ καταλήγει στον

$$\varphi(x) = \Big(1 - r \, \frac{\|x - \varphi^0(x)\|^2}{\|\varphi^0(x)\|^2}\Big)\varphi^0(x)$$

αρχικό εκτιμητή των $James - Stein$, έχουμε:

$$\Delta div\Big(g(t)\Big) = \Delta div(\frac{rt}{\|t\|^2}) = -\frac{r(k-2)(k-4)}{\|t\|^4}$$

Αντιθέτως, σ'αυτό το κεφάλαιο, δεν γίνεται καμμία υπόθεση της *superharmonicity*. Λοιπόν η κυρτότητα της r, η οποία απαιτείται από τους *Brandwein* και *Strawderman*, δεν χρειάζεται.

3. ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΤΟΥ φ

Σημειώσαμε, στην παράγραφο 2, ότι το πεπερασμένο του κινδύνου του φ εξασφαλίζεται από την υπόθεση (H_2). Αυτή η υπόθεση είναι συχνά αυτονόητη στα άρθρα σχετικά με τους εκτιμητές με συρρίκνωση (βλ. [10] και [11]) αλλά αξίζει να μελετηθεί. Τα παρακάτω δίνουν στοιχεία που δείχνουν ότι η υπόθεση (H_2) δεν είναι τόσο ισχυρή, αφού δεν περιορίζει την κλάση των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων (τέτοια είναι η κλάση των ελλειπτικά συμμετρικών νόμων με πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης σύμφωνα με την (H_1) και την Παρατήρηση 1.2.1). Λοιπόν, αυτή είναι κυρίως μια συνθήκη επί του παράγοντα συρρίκνωσης g. Στην πραγματικότητα, όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 1.2.2, χρησιμοποιούμε την ισχυρότερη συνθήκη (H_3).

Η συνθήκη (H_2), για σταθεροποιημένο ϑ στο Θ, δηλώνει:

$$B = \int_E \|x - \varphi^0(x)\|^4 \; \|g\Big(\varphi^0(x)\Big)\|^2 \; P_\vartheta(dx) < +\infty$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.1, δουλεύοντας δεσμευτικά επί της ακτίνας, μπορούμε να γράψουμε με τους ίδιους συμβολισμούς:

$$B = \int_{\mathbb{R}+} B(r)\; \rho(dr)$$

όπου

$$B(r) = \int_{S_{r,\vartheta}} \|x - \varphi^0(x)\|^4 \; \|g\Big(\varphi^0(x)\Big)\|^2 \, \mathcal{U}_{r,\vartheta}(dx)$$

Είναι φανερό ότι, για κάθε $r \in \mathbb{R}_+$,

$$B(r) \le r^2 \int_{S_{r,\vartheta}} \|x - \varphi^0(x)\|^2 \; \|g\Big(\varphi^0(x)\Big)\|^2 \, \mathcal{U}_{r,\vartheta}(dx)$$

Λοιπόν, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (H_3) της Παρατήρησης 1.2.2, έχουμε:

$$B(r) \le a^2 r^2 \int_{S_{r,\vartheta}} \frac{\|x - \varphi^0(x)\|^2}{\|\varphi^0(x)\|^2} \, \mathcal{U}_{r,\vartheta}(dx) = a^2 r^2 \; \frac{n-k}{k} \; \int_{S_{r,\vartheta}} \frac{\|x - \varphi^0(x)\|^2/n-k}{\|\varphi^0(x)\|^2/k} \, \mathcal{U}_{r,\vartheta}(dx)$$

Επειδή ο $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$ είναι ελλειπτικά συμμετρικός, η εικόνα του $\mathcal{U}_{r,\vartheta}$, υπό τη στατιστική

$$T(x) = \frac{\|x - \varphi^0(x)\|^2/n-k}{\|\varphi^0(x)\|^2/k} \quad ,$$

είναι ανεξάρτητη του r, αφού

$$(\mathcal{U}_{r,\vartheta})_T = \Big((\mathcal{U}_{1,\vartheta})_{\tau_r}\Big)_T = (\mathcal{U}_{1,\vartheta})_{T\circ\tau_r} = (\mathcal{U}_{1,\vartheta})_T$$

όπου $\tau_r(x) = \frac{x}{r}$, $\forall x \in E$ και $(\mathcal{U}_{r,\vartheta})_T$ είναι ανάλογη μιας μη-κεντρικής $\mathcal{F}_{n-k,k}$-κατανομής (βλ. Παρατ.2.5.4, Κεφ1).

Το τελευταίο λοιπόν ολοκλήρωμα είναι η μέση τιμή αυτής της κατανομής, η οποία είναι πεπερασμένη για $k \ge 3$ (βλ. Παράρτημα,Πορ.2.3 (ii)).

Οπότε, για ορισμένη θετική σταθερά L,

$$B \le L \int_{\mathbb{R}_+} r^2 \rho(dr)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση όταν το ολκλήρωμα είναι αναφορικά με ένα ελλειπτικα συμμετρικό νόμο, το πεπερασμένο του κινδύνου του φ^0 εξασφαλίζει ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο (αυτό είναι στην πράξη η υπόθεση (H1)).

Κεφάλαιο 5

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ ΜΕ ΣΥΡΡΙΚΝΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε δύο εφαρμογές των εκτιμητών με συρρίκνωση σε πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα(δείγμα των οποίων δίδονται σε πίνακα στο τέλος του κεφαλαίου) αφορούν, για την πρώτη εφαρμογή, επίγειες μετρήσεις βροχόπτωσης σε σταθμούς στο χώρο της Μεσογείου ενώ για τη δεύτερη εφαρμογή, αφορούν ζεύγη μετρήσεων: επίγειες μετρήσεις βροχόπτωσης και αντίστοιχες μετρήσεις με τηλεπισκόπηση από δορυφόρο.

Η πρώτη εφαρμογή, §1, στηρίζεται το απλό μοντέλο εκεί δηλαδή που ο χώρος των παρατηρήσεων Ε συμπίπτει με το χώρο των παραμέτρων Θ, ο οποίος ταυτίζεται με τον R^k, ενώ η διασπορά του νόμου των παρατήρησεων θεωρείται άγνωστη.

Συγκεκριμένα παρατηρούμε το τυχαίο διάνυσμα x του R^k $(k \geq 3)$ το οποίο ακολουθεί τον κανονικό νόμο:

$$X \sim \mathcal{N}_k(\vartheta, \sigma^2 I_k) \tag{5.1}$$

και το πρόβλημα είναι εκείνο της μέσης βροχόπτωσης ϑ.

Περιοριζόμεθα λοιπόν στους εκτιμητές με συρρίκνωση του Κεφ.2, §1, λαμβάνοντας τις διγραμμικές μορφές b και q να συνδέονται με τον μοναδιαίο πίνακα I_k, τον ενδομορφισμό c να είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός επί του R^k και τη συνάρτηση συρρίκνωσης h να είναι της μορφής $h(t) = \frac{k-2}{t}$. Δηλαδή θεωρούμε τον εκτιμητή της μορφής:

$$\varphi(x) = \Big(1 - \frac{k-2}{\|x\|^2}\Big)x \tag{5.2}$$

(αρχικός εκτιμητής του $Stein$) ο οποίος συγκρίνεται με τον εκτιμητή μεγίστης πιθανόφανειας x υπό τη συνήθη τετραγωνική απώλεια $\|\hat{\vartheta} - \vartheta\|^2$, απώλεια η οποία υφίσταται από την εκτίμηση $\hat{\vartheta}$ του ϑ.

Εδώ είναι φανερή η κυριαρχία του εκτιμητή του $Stein$ επί του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας. Η μέθοδος βασίζεται στους $Efron$ και $Morris$ (1975) μέσω των οποίων επιτυγχάνεται κατάλληλος μετασχηματισμός των δεδομένων, σε δεδομένα μοναδιαίας διασποράς, ώστε να είναι δυνατή η χρήση του εκτιμητή της μορφής (5.2).

Η δεύτερη εφαρμογή, §2, αφορά πρόβλημα πολυσυγραμμικότητας το οποίο γενικά εμφανίζεται ως εξής: παρατηρούμε ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα

$$y = X\alpha + z \tag{5.3}$$

όπου

$\alpha(\in R^k)$ είναι άγνωστο και $k < n$

Q (n, k) γνωστός πίνακας, $rank(X) = k$

z $n-$διάστατο τυχαίο διάνυσμα με $E(z) = 0$, $Var(z) = \sigma^2 I_n$ με σ^2 γενικά άγνωστο

Ο κίνδυνος των εκτιμητών του α υπολογίζονται αναφορικά με κανονικοποιημένες τετραγωνικές απώλειες της μορφής:

$$\sigma^{-2}\ {}^t(\hat{\alpha}-\alpha)Q(\hat{\alpha}-\alpha) \tag{5.4}$$

όπου Q (k,k)-πίνακας συμμετρικός και θετικά ορισμένος, καλούμενος *πίνακας απωλείας*. Εδώ τα X και Q μπορούν να μεταβάλλονται.

Τοποθετούμαστε στην περίπτωση όπου $z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n$. Τότε το παρατηρούμενο διάνυσμα y ακολουθεί τον κανονικό νόμο:

$$y \sim \mathcal{N}_n(X\alpha, \sigma^2 I_n)$$

δηλαδή βρισκόμαστε στο γενικό γραμμικό μοντέλο των προηγουμένων κεφαλαίων με $\vartheta = X\alpha \in \Theta$ όπου $\Theta = ImX$, υπόχωρος του R^n, διαστάσεως $k(< n)$. Λοιπόν η εκτίμηση του ϑ ανάγεται εδώ στην εκτίμηση του α.

Είναι καλά γνωστό ότι ο ε.ε.τ. του α είναι ο

$$\hat{\alpha}^0(y) = ({}^tXX)^{-1}\ {}^tXy$$

με πίνακα διασπορών-συνδιασπορών τον $\sigma^2({}^tXX)^{-1}$. Ο κίνδυνος του αναφορικά με την τετραγωνική απώλεια (5.4) είναι σταθερός και ίσος με το $\sigma^2 tr\Big(({}^tXX)^{-1}Q\Big)$.

Για την εκτίμηση του α, θεωρούμε, όπως στο Κεφ.2, τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \hat{\alpha}^0(y) - h\Big(\ {}^t\hat{\alpha}^0(y)B\hat{\alpha}^0(y), s^2(y)\Big)C\hat{\alpha}^0(y) \tag{5.5}$$

όπου

C (k,k) – πίνακας

B (k,k) – πίνακας συμμετρικός και θετικά ορισμένος

s^2 ο συνήθης εκτιμητής της διασποράς : $s^2(y) = \dfrac{1}{n-k}\|y - X\hat{\alpha}^0(y)\|^2$

h μετρήσιμη συνάρτηση από τον $R_+ \times R_+$ στον R_+

Αν $k \geq 3$ και αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^k$ μέσα στην οποία οι πίνακες ${}^tXX$, Q C και B διαγωνιοποιούνται και αν οι ιδιοτιμές του C είναι όλες θετικές ή μηδέν τότε, αποδεικνύεται όπως το Θεώρημα 2.3.1, Κεφ.2, η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Μια ικανή συνθήκη ώστε ο εκτιμητής φ του τύπου (5.5) να κυριαρχεί ομοιόμορφα τον ε.ε.τ. $\hat{a}^0$, είναι να υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί $\mu_1 > 0$ και μ_2:

$$\begin{aligned} &\forall u > 0\ \ ,\quad t \rightsquigarrow t^{\mu_1}h(t,u) \uparrow \\ &\forall t > 0\ \ ,\quad u \rightsquigarrow t^{\mu_2}h(t,u) \downarrow \\ &\forall (t,u) \in (\mathbb{R}_+)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{t}{u}\ h(t,u) \leq 2\ \frac{tr\Big(({}^tXX)^{-1}QC\Big) - 2\mu_1 pgvp\Big(({}^tXX)^{-1}QC\Big)}{pgvp({}^tCQCB^{-1})}\ \frac{n-k}{n-k-2\mu_2} \tag{5.6}$$

(οι παραπάνω υποθέσεις είναι συμβατές αν $\mu_1 \geq 1$ και $\mu_2 \leq -1$)

Μερική περίπτωση (όταν σ^2 γνωστό: $\sigma^2 = 1$)

a) Θεωρούμε τους εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \hat{a}^0(y) - h({}^t\hat{a}^0(y)B\hat{a}^0(y))C\hat{a}^0(y) \tag{5.7}$$

Τότε προφανώς έχουμε:

Πόρισμα

Ο εκτιμητής φ της μορφής (5.7) κυριαρχεί ομοιόμορφα τον ε.ε.τ. $\hat{a}^0$, αν:

$$t \rightsquigarrow th(t) \uparrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ th(t) \leq 2\ \frac{tr\Big(({}^tXX)^{-1}QC\Big) - 2\mu_1 pgvp\Big(({}^tXX)^{-1}QC\Big)}{pgvp({}^tCQCB^{-1})}$$

(βλ. Θεώρημα 1.3.1, Κεφ.2)

b) Περιοριζόμαστε στην ειδική περίπτωση όπου $C = I_k$, $Q = B =^t XX$ και $h(t) = \frac{k-2}{t}$ δηλαδή θεωρούμε εκτιμητές της μορφής:

$$\varphi(y) = \hat{a}^0(y) - \frac{k-2}{{}^t\hat{a}^0(y)({}^tXX)\hat{a}^0(y)}\ \hat{a}^0(y) \tag{5.8}$$

Τότε, επειδή $k \geq 3$, ικανοποιούνται οι συνθήκες του Πορίσματος και ο εκτιμητής φ του τύπου (5.7) κυριαρχεί ομοιόμορφα τον ε.ε.τ. $\hat{a}^0$.

Στην §2 το πρόβλημα περιορίζεται στην ταυτόχρονη εκτίμηση μονοδιάστατων παραμέτρων a τριων ανεξάρτητων γραμμικών μοντέλων τύπου (5.3), με $\sigma^2 = 1$, το οποίο αποτελεί ιδιαίτερη περίπτωση του προβλήματος των $Efron$ και $Morris$ (1972). Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται μέσω του ε.ε.τ. $\hat{a}^0$ και του εκτιμητή φ της μορφής (5.7) οι οποίοι και συγκρίνονται υπό την τετραγωνική απώλεια (5.4) για $Q =^t XX$, σε μια προσπάθεια βέλτιστης εκτίμησης των επίγειων τιμών βροχόπτωσης.

1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΚΙΜΗΤΗ ΤΩΝ JAMES – STEIN

Θεωρούμε το πρόβλημα εκτίμησης της μέσης μηνιαίας βροχόπτωσης κάθε σταθμού, γνωρίζοντας τις επίγειες τιμές βροχόπτωσης 5 ημερών του Οκτωβρίου. Η παρατήρησή μας είναι λοιπόν ένα διάνυσμα με 85 συνιστώσες, κάθε μια από τις οποίες είναι ο δειγματικός μέσος των τιμών βροχόπτωσης αυτών των 5 ημερών, για τους 85 σταθμούς αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι τιμές βροχόπτωσης κάθε σταθμού όπως επίσης και κάθε μέρας στον ίδιο σταθμό, είναι ανεξάρτητες. Λοιπόν, το παρατηρούμενο διάνυσμα είναι

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{85} \end{bmatrix}$$

όπου y_i οι δειγματικοί μέσοι των 5 ημερών για κάθε σταθμό.

Επειδή, ως γνωστόν, το Κ.Ο.Θ. μας δίνει την κατά προσέγγιση κατανομή αθροίσματος ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών, δεχόμαστε κατά προσέγγιση, ότι:

$$y_i \sim \mathcal{N}(\vartheta_i, \sigma^2) \qquad \acute{\eta} \qquad y \sim \mathcal{N}_{85}(\vartheta, \sigma^2 I_{85})$$

όπου ϑ_i, $i = 1, ..., 85$, συμβολίζει τη μέση μηνιαία βροχόπτωση κάθε σταθμού, διασποράς σ^2.

Η άγνωστη διασπορά σ^2 μπορεί να καταστεί μοναδιαία, χρησιμοποιώντας έναν ανάλογο μετασχηματισμό με εκείνο των $Efron$ και $Morris$ (1972):

$$f_n(y_i) = \sqrt{n}\ sin^{-1}(\frac{y_i}{6} - 1)$$

λαμβάνοντας έτσι τις παρατηρήσεις $x_i = f_n(y_i)$ με κατά προσέγγιση κατανομή:

$$x_i \sim \mathcal{N}(\vartheta_i, 1) \quad \acute{\eta} \quad x \sim \mathcal{N}(\vartheta, I_{85})$$

δηλαδή αναγόμαστε στο μοντέλο (5.1). Οι υπολογισμοί έχουν πραγματοποιηθεί σε $Excel$, $Microsoft\ Office$ 2003.

Τα αποτελέσματα είναι εντυπωσιακά. Διαπιστώνουμε ότι ο εκτιμητής του $Stein$ έχει σαφέστατα μικρότερο κίνδυνο από αυτόν του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας ενώ υπερέχει τουλάχιστο στους 73 από τους 85 σταθμούς. Ακόμη και μετά από διάφορες επιλογές των πέντε ημερών με βάση τις τιμές των οποίων κάνουμε την εκτίμηση, συμπεραίνουμε ότι ο εκτιμητής (5.2) κυριαρχεί πάντα τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας και υπερέχει στις περισσότερες περιπτώσεις, τουλάχιστο στα 2/3 των σταθμών.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για ανάλογο πρόβλημα, οι $Efron$ και $Morris$ προτείνουν ένα εκτιμητή με συρρίκνωση ο οποίος έχει «ομαλότερη» συμπεριφορά σε σχέση με αυτόν του $Stein$. Ο εκτιμητής εκείνων μειώνει αισθητά τις πιο μεγάλες απώλειες που εμφανίζει ο (5.2) σε κάποιες συνιστώσες του διανύσματος, ενώ παράλληλα διατηρεί σε μεγάλο ποσοστό την καλή απόδοσή του.

2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΓΕΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΙΚΟΤΗΤΑΣ(ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ)

Θεωρούμε το πρόβλημα της εκτίμησης των επίγειων τιμών της βροχόπτωσης, γνωρίζοντας τις αντίστοιχες τιμές βροχόπτωσης με τηλεπισκόπηση από δορυφόρο. Για το σκοπό αυτό, κάνουμε 3 ανεξάρτητες γραμμικές παλινδρομήσεις:

$$y_i = X_i a_i + z_i \quad , \ i = 1, 2, 3$$

Θεωρούμε ανεξάρτητες μεταβλητές τις τιμές της βροχόπτωσης που ελήφθησαν με τηλεπισκόπηση στις $6h$ το απόγευμα σε κάθε περιοχή (αθροιστική βροχόπτωση 6 ωρών σε κάθε μια από τις 226 περιοχές, στήλη $S18 : 6h$ του πίνακα) των ημερών 1,5 και 22 του μήνα Οκτωβρίου. Οι εξαρτημένες μεταβλητές των μοντέλων είναι οι αντίστοιχες επίγειες τιμές των 226 σταθμών των ίδιων ημερών (στήλη $G18 : 6h$ του πίνακα).

Η εκτίμηση των y^i επιβάλλει την ταυτόχρονη εκτίμηση των a_i με X_i γνωστό. Έτσι το γενικό μοντέλο διαμορφώνεται στο

$$y = Xa + z \qquad \text{του τύπου (5.3)}$$

με

$$\begin{aligned}
&X\ (3n, 3) - \text{πίνακα γνωστό, } rg(X) = 3(= k) \text{ και } n = 85 \\
&Z\ (3n, 1) - \text{ τυχαίο διάνυσμα : } z \sim \mathcal{N}_{3n}(0, I_{3n}) \\
&a(3, 1) - \text{ άγνωστο διάνυσμα}
\end{aligned}$$

Δύο εκτιμητές βρίσκονται σε σύγκριση υπό την τετραγωνική απώλεια

$$^t(\hat{a} - a)^t XX(\hat{a} - a) = \sum_{i=1}^{3} \|X_i\|^2 (\hat{a}_i - a)^2$$

– ο ε.ε.τ. $\hat{a}^0(y) = (^tXX)^{-1}\ ^tXy = \ ^t(^tX_1y^1/\|X^1\|^2\ ,\ ^tX_2y^2/\|X^2\|^2\ ,\ ^tX_3y^3/\|X^3\|^2)$ (όπου $\|\cdot\|$ η συνήθης ευκλείδεια $norme$) του οποίου ο κίνδυνος είναι σταθερός και ίσος με το $tr(^tXX\ )^{-1}(^tXX) = trI_3 = 3$

– ο εκτιμητής του $Stein$ της μορφής (5.8):

$$\varphi(y) = \Big(1 - \frac{1}{{}^t\hat{a}^0(y)\ {}^tXX\ \hat{a}^0(y)}\Big)\hat{a}^0(y)$$

ο οποίος συρρικνώνει τον $\hat{a}^0$ προς την αρχή 0 και κυριαρχεί ομοιόμορφα τον $\hat{a}^0$ υπό την παραπάνω τετραγωνική απώλεια.

Σημειώνοντας με $\hat{a}^0_i\ , = 1, 2, 3$, τις συντεταγμένες του $\hat{a}^0$, ο εκτιμητής του $Stein$ για κάθε μια από τις συνιστώσες $\hat{a}^0_i$ θα είναι ο

$$\varphi_i(y) = \Big(1 - \frac{1}{{}^t\hat{a}^0(y)\ {}^tXX\ \hat{a}^0(y)}\Big)\hat{a}^0_i(y)$$

με

$${}^t\hat{a}^0(y)\ {}^tXX\ \hat{a}^0(y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{({}^tX_i y_i)^2}{\|X_i\|^2}$$

Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με χρήση του ελεύθερου πακέτου στατιστικής ανάλυσης R 2.0.1 ($www.rproject.com$). Τα αποτελέσματα των γραμμικών παλινδρομήσεων παρουσιάζονται παρακάτω.

```
mera1

Call:
lm(formula = data$S1 ~ data$G1 - 1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-0.7218  0.0000  0.0000  0.0000  2.6695 

Coefficients:
        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
data$G1  0.10182    0.01349   7.546 9.94e-13 ***
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1 

Residual standard error: 0.3207 on 234 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1957,     Adjusted R-squared: 0.1923 
F-statistic: 56.94 on 1 and 234 DF,  p-value: 9.942e-13
```

```
mera5

Call:
lm(formula = data$S5 ~ data$G5 - 1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.2790  0.0000  0.0000  0.0000  0.1096

Coefficients:
        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
data$G5 0.046493   0.001132   41.08   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

Residual standard error: 0.02053 on 234 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8782,     Adjusted R-squared: 0.8777
F-statistic:  1687 on 1 and 234 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
mera22

Call:
lm(formula = data$S22 ~ data$G22 - 1)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-3.595  0.000  0.000  0.000  4.739

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
data$G22   0.2434     0.0213   11.43   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

Residual standard error: 0.734 on 234 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.3582,     Adjusted R-squared: 0.3555
F-statistic: 130.6 on 1 and 234 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους των 3 γραμμικών μοντέλων, εφαρμόζουμε τον εκτιμητή των $James-Stein$. Οι υπολογισμοί έχουν πραγματοποιηθεί σε $Excel$, $Microsoft\ Office$ 2003.

$Y_i^1-\hat{Y}_{iML}^1$	$Y_i^1-\hat{Y}_{iJ-S}^1$	$Y_i^5-\hat{Y}_{iML}^5$	$Y_i^5-\hat{Y}_{iJ-S}^5$	$Y_i^{22}-\hat{Y}_{iML}^{22}$	$Y_i^{22}-\hat{Y}_{iJ-S}^{22}$	ML vs JS	ML vs JS	ML vs JS
0,15	0,158448	0	0	-0,4868	-0,48047	ML	-	JS
-0,1	-0,0987	0	0	1,3566	1,359764	JS	-	ML
-0,2	-0,1922	0	0	0,72376	0,735149	JS	-	ML
0,7	0,715597	0	0	-0,2302	-0,22071	ML	-	JS
1	1,003899	0	0	-3,5944	-3,54378	ML	-	JS
1,8	1,8026	0	0	0,64778	-0,61077	ML	-	JS
0,3	0,3013	0	0	3,24282	3,251362	ML	-	ML
0	0	0	0	1,32962	1,331835	-	-	ML
0,74	0,74208	0	0	4,7396	4,758582	ML	-	ML
2,67	2,67039	0	0	2,8452	2,914799	ML	-	ML
1,5	1,5	0	0	-2,6642	-2,62307	-	-	JS
1,1	1,1	0	0	3,7698	3,779291	-	-	ML
-0,01	-0,00987	0	0	1,8	1,8	JS	-	-
0	0	0	0	0,8783	0,879882	-	-	ML
-0,01	-0,00987	0	0	-0,2434	-0,24024	JS	-	JS
0,02	0,01974	0	0	0	0	JS	-	-
0	0	0	0	0,04868	-0,04805	-	-	JS
0	0	0	0	0,02434	-0,02402	-	-	JS
-0,1	-0,0987	0	0	0	0	JS	-	-
-0,08	-0,07896	0	0	0	0	JS	-	-
0	0	-0,0093	0,00918	0	0	-	JS	-
-0,7	-0,6844	0	0	-0,4868	-0,48047	JS	-	JS
-0,2	-0,1974	0	0	-0,2434	-0,24024	JS	-	JS
0	0	0	0	-0,9736	-0,96095	-	-	JS
0	0	0	0	0,14604	-0,14414	-	-	JS
0	0	0	0	-1,4604	-1,44142	-	-	JS
-0,52	-0,50284	0	0	0,43812	-0,43243	JS	-	JS
-0,1	-0,0987	0	0	0	0	JS	-	-
0	0	-0,0093	0,00918	0	0	-	JS	-
0	0	0,27896	0,27533	0	0	-	JS	-
0	0	-0,09299	-0,09178	0	0	-	JS	-
0	0	0,109619	0,119892	0	0	-	ML	-
24,0664	24,07002	0,098653	0,098773	126,0694	126,0815	11	4	14
					Σύνολο	18	5	22

ML	J-S	SSE ML	SSE J-S
0,1	0,0987	150,2344	150,2503
0,046493	0,045889		
0,2434	0,240236		

Μολονότι τα αποτελέσματα δεν είναι εντυπωσιακά, παρατηρούμε ότι ο εκτιμητής του *Stein* επιτυγχάνει καλύτερες εκτιμήσεις από τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας στα $2/3$ των σταθμών. Οι σχετικά «μεγάλες» αποκλίσεις στους υπόλοιπους σταθμούς εξηγούν το γιατί οι συνολικές του απώλειες είναι τελικά ελάχιστα μεγαλύτερες από αυτές του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας. Θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι στις 3 ανεξάρτητες γραμμικές παλινδρόμησεις που πραγματοποιήθηκαν, οι 2 είχαν μικρό συντελεστή συναρμογής, γεγονός που συνηγορεί επιπλέον στη μέτρια απόδοση του εκτιμητή $James - Stein$.

Συνοψίζοντας λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι ο εκτιμητές με συρρίκνωση δεν έχουν μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον και μπορούν σε πολλές περιπτώσεις να βελτιώσουν τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων πετυχαίνοντας καλύτερες εκτιμήσεις.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ενδεικτικά οι τιμές βροχόπτωσης κάποιων περιοχών από επίγειες μετρήσεις και από μετρήσεις με τηλεπισκόπηση από δορυφόρο. Παραθέτουμε μια σύντομη περιγραφή των στηλών:

- στήλη id: περιέχει τους «αριθμούς-ταυτότητες» των σταθμών
- στήλη x και στήλη y: αφορά γεωγραφικές συντεταγμένες
- στήλη $month, day, year$
- στήλες $G0h, G6:6h, G6:12h, G12h, G18:6h, G18:12h, GDAILY$ περιέχουν επίγειες μετρήσεις σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές της ημέρας
- στήλες $S0h, S6:6h, S6:12h, S12h, S18:6h, S18:12h, SDAILY$ περιέχουν μετρήσεις με τηλεπισκόπηση σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές της ημέρας
- στήλες f, l αφορούν γεωγραφικές συντεταγμένες

id	x	y	year	month	day	G0h	G6:6h	G6:12h	G12h	G18:6h
7770	20	-237	2004	10	1	0	0	0	0	0
7770	20	-237	2004	10	2	0	0	0	0	0
7770	20	-237	2004	10	3	0	0	0	0	0
7770	20	-237	2004	10	4	0	0,2	0,2	0	0
7770	20	-237	2004	10	5	0,2	0,4	0,6	0	0
7770	20	-237	2004	10	6	0	0,2	0,2	0	0
7770	20	-237	2004	10	7	0	0	0	0,2	0
7770	20	-237	2004	10	8	0,2	0,2	0,4	0	0
7770	20	-237	2004	10	9	0,2	0,2	0,4	0	0
7770	20	-237	2004	10	10	0	0	0	4	0

G18:12h	GDAILY	S0h	S6:6h	S6:12h	S12h	S18:6h	S18:12h	SDAILY	f	l
0	0	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0	999	999	999	999	999	999	999	41,37	9,17
0	0,2	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0,6	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0,2	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0,2	0,2	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0,4	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
0	0,4	999	999	999	0	0	0	999	41,37	9,17
4	4	999	999	999	15,6	1	16,5	999	41,37	9,17

Πίνακας 1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Η ΜΗ-ΚΕΝΤΡΙΚΗ $\mathcal{X}^2$-ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Λήμμα 1.1

Η μη-κεντρική $\mathcal{X}^2$-πιθανότητα με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο δ, $\mathcal{X}^2_n(\delta)$, είναι η σύνθεση της πιθανότητας Poisson παραμέτρου $\delta/2$, $\pi(\delta/2)$, και της μετάβασης πιθανότητας από τον $\mathbb{N}_0$ στον $\mathbb{R}_+$, η οποία με κάθε k συνδέει την κεντρική $\mathcal{X}^2$-πιθανότητα με $n+2k$ βαθμούς ελευθερίας, $\mathcal{X}^2_{n+2k}$.

Άλλες εκφράσεις του Λήμματος

(1) Αν $X_1, ...X_n$ ανεξάρτητες τ.μ.: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$ $i = 1, ..., n$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \mathcal{X}^2_n(\delta) \quad \text{όπου} \;\; \delta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$$

(2) Αν μία τ.μ Y ακολουθεί, δεσμευτικά με μία τ.μ K, το νόμο $\mathcal{X}^2_{n+2K}$ και αν K ακολουθεί την *Poisson* $\pi(\delta/2)$ τότε η Y ακολουθεί την $\mathcal{X}^2_n(\delta)$.

(3) Για κάθε απεικόνιση, από τον $\mathbb{R}_+$ μέσα στον $\mathbb{R}$, $\mathcal{X}^2_n(\delta)$-ολοκληρώσιμη, έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\mathcal{X}^2_n(\delta; dx) = \int_{\mathbb{N}_0} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\mathcal{X}^2_{n+2k}(dx) \right) \pi(\delta/2; dk)$$

Απόδειξη

Η πυκνότητα πιθανότητας η οποία προκύπτει από την σύνθεση της $\pi(\delta/2)$ και της μετάβασης $k \rightsquigarrow \mathcal{X}^2_{n+2k}$ είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\delta/2}}{k!} \Big(\frac{\delta}{2}\Big)^k \frac{y^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \frac{e^{-y/2}}{2^{\frac{n}{2}+k}}$$

η οποία δεν είναι άλλη από την πυκνότητα της $\mathcal{X}^2_n(\delta)$ (βλ. [24]).

Πόρισμα 1.1

Έστω $v \in \mathbb{R}$, η ροπή τάξεως v της μη-κεντρικής $\mathcal{X}^2_n$-πιθανότητας, $\mathcal{X}^2(\delta)$, είναι πεπερασμένη αν και μόνον αν $v > -n/2$. Σ'αυτή την περίπτωση,

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^v \mathcal{X}^2_n(\delta; dx) = 2^v \int_{\mathbb{N}_0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+v+k)}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \, \pi(\delta/2; dk)$$

Απόδειξη

Από την έκφραση (3) του Λήμματος 1.1, έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_n^2(\delta; dx) = \int_{\mathbb{N}_0} \Big(\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_{n+2k}^2(dx) \Big) \pi(\frac{\delta}{2}; dk) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_{n+2k}^2(dx) \Big) \frac{e^{-\frac{\delta}{2}} (\frac{\delta}{2})^k}{k!} \tag{1.1}$$

όπου $\forall k \in N_0, \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_{n+2k}^2(dx) \ \in \ (0, +\infty]$

• αν $u \le -\frac{n}{2}$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_n^2(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} x^u \ \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} \ x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+} x^{(u+\frac{n}{2})-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Θέτοντας $a = u + \frac{n}{2}$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 x^a e^{-\frac{x}{2}} dx + \int_1^{+\infty} x^a e^{-\frac{x}{2}} dx = I_1 + I_2 \quad \text{όπου } a \le -1$$

Επειδή $e^{-\frac{x}{2}} \downarrow$ στο $[0, 1]$,

$$I_1 \ge \int_0^1 x^a e^{-\frac{1}{2}} dx = +\infty$$

ενώ

$$I_2 < +\infty$$

Επομένως, $\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_n^2(dx) = +\infty$ δηλαδή ο μηδενικός όρος στην (1.1) απειρίζεται, άρα

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_n^2(\delta; dx) = +\infty$$

• αν $u > -\frac{n}{2}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_{n+2k}^2(dx) &= \int_{\mathbb{R}_+} x^u \ \frac{1}{\Gamma(k+\frac{n}{2}) 2^{k+\frac{n}{2}}} \ x^{k+\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{n}{2}) 2^{k+\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+} x^{(u+k+\frac{n}{2})-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{n}{2}) 2^{k+\frac{n}{2}}} \cdot \Gamma(u+k+\frac{n}{2}) 2^{u+k+\frac{n}{2}} \\
&= 2^u \ \frac{\Gamma(u+k+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

και η ζητούμενη σχέση προκύπτει άμεσα από τις (1.1) και (1.2).

Μένει να επαληθεύσουμε σε αυτήν την περίπτωση ότι $\int_{\mathbb{R}_+} x^u \mathcal{X}_n^2(\delta; dx) < +\infty$. Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι:

$$\forall t \ge 0, \quad \mathcal{X}_n^2(\ \delta,\ [0,t]\ ) \le \mathcal{X}_n^2(\ 0,\ [0,t]\ )$$

Πράγματι, έστω $M = {}^{t}(X_1, ..., X_n)$ διανυσματική τυχαία μεταβλητή με $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$, $i = 1, ..., n$, ανεξάρτητες. Αν $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ τότε $Z \sim \mathcal{X}_n^2(\delta)$ όπου $\delta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$. Μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού η Z γράφεται

$$Z = U + V \quad \text{όπου} \quad U = \sum_{i=1}^{n-1} {Y_i}^2 \text{ και } V = {Y_n}^2$$

με $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1),\ i = 1, ..., n-1$ και $Y_n \sim \mathcal{N}(\sqrt{\delta}, 1)$. Για κάθε $z \geq 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} F_V(z) &= P(V \leq z) = P({Y_n}^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq Y_n \leq \sqrt{z}) \\ &= P(-\sqrt{z} - \sqrt{\delta} \leq Y_n - \sqrt{\delta} \leq \sqrt{z} - \sqrt{\delta}) \\ &= \Phi(\sqrt{z} - \sqrt{\delta}) - \Phi(-\sqrt{z} - \sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Παρατηρούμε ότι, καθώς $\delta \uparrow,\ F_V(z) \downarrow$. Άρα, για κάθε $z \geq 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(U + V \leq z) &= \int_0^z \Big(\int_0^{-u+z} f_{(U,V)}(u, v) dv \Big) du \\ &= \int_0^z \Big(\int_0^{-u+z} f_V(v) dv \Big) f_U(u) du \\ &= \int_0^z F_V(z - u) f_U(u) du \end{aligned}$$

το οποίο φθίνει αν το δ αυξάνει. Συνεπώς, επειδή $Z \sim \mathcal{X}_n^2(\delta)$,

$$\forall z \geq 0, \quad \mathcal{X}_n^2(\delta, [0, z]) \leq \mathcal{X}_n^2(0, [0, z])$$

Επειδή $x^u \geq 0$, προκύπτει:

$$\int_0^{+\infty} x^u \mathcal{X}_n^2(\delta; dx) \leq \int_0^{+\infty} x^u \mathcal{X}_n^2(0; dx) < +\infty$$

και το πόρισμα αποδείχτηκε.

2. Η ΜΗ-ΚΕΝΤΡΙΚΗ $\mathcal{F}$-ΚΑΤΑΝΟΜΗ
(ή μη κεντρική κατανομή του Fisher)

Λήμμα 2.2

Η μη-κεντρική $\mathcal{F}$-πιθανότητα με n, m βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο δ, $\mathcal{F}_{n,m}(\delta)$, είναι η σύνθεση της πιθανότητας Poisson παραμέτρου $\delta/2$, $\pi(\delta/2)$, και της μετάβασης πιθανότητας από τον $\mathbb{N}_0$ στον $\mathbb{R}_+$, η οποία με κάθε k συνδέει την κεντρική $\frac{n+2k}{n}\mathcal{F}_{n+2k,m}$-κατανομή.
($\mathcal{F}_{n+2k,m}$ είναι η κεντρική $\mathcal{F}$-κατανομή με $n + 2k, m$ βαθμούς ελευθερίας).

Άλλες εκφράσεις του Λήμματος

(1) Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τ.μ : $X \sim \mathcal{X}_n^2(\delta)$ και $Y \sim \mathcal{X}_m^2$ τότε η τ.μ $F = \frac{X/n}{Y/m} = \frac{m}{n}\ \frac{X}{Y}$ ακολουθεί την $\mathcal{F}_{n,m}(\delta)$

(2) $\forall z \in \mathbb{R}_+$, $\ P(F \leq z) = \displaystyle\int_{\mathbb{N}_0} P\Big(F_{n+2k,m} \leq \frac{nz}{n+2k}\Big) \pi(\delta/2; dk)$

Απόδειξη

Πράγματι, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, έχουμε:

$$\mathcal{F}_{n,m}(\delta; B) = \int_{\mathbb{N}_0}\Big(\int_B \Big(\frac{n+2k}{n}\mathcal{F}_{n+2k,m}\Big)(dz)\Big)\pi(\delta/2; dk)$$

Γνωρίζοντας ότι η πυκνότητα πιθανότητας της $\frac{n+2k}{n}\mathcal{F}_{n+2k,m}$ είναι η

$$z \rightsquigarrow \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)\Gamma(\frac{m}{2})}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{\frac{n}{2}+k} z^{\frac{n}{2}+k-1}\Big(1+\frac{n}{m}z\Big)^{-(\frac{n+m}{2}+k)}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z),$$

η πυκνότητα πιθανότητας που προκύπτει από την σύνθεση της $\pi(\delta/2)$ και της μετάβασης $k \rightsquigarrow \frac{n+2k}{n}\mathcal{F}_{n+2k,m}$, είναι:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(m/2)}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{n/2} z^{\frac{n}{2}-1}\Big(1+\frac{n}{m}z\Big)^{-(n+m)/2}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta/2}\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\ \frac{1}{k!}\Big(\frac{\frac{\delta}{2}\ \frac{n}{m}z}{1+\frac{n}{m}z}\Big)^k \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{n/2} z^{\frac{n}{2}-1}\Big(1+\frac{n}{m}z\Big)^{-(n+m)/2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Big(\frac{n+m}{2}\Big)_k}{\Big(\frac{n}{2}\Big)_k}\ \frac{1}{k!}\Big(\frac{\frac{\delta}{2}\ \frac{n}{m}z}{1+\frac{n}{m}z}\Big)^k
\end{aligned}$$

όπου $(a)_k = a(a-1)\dots(a+k-1)$.

Αυτή η πυκνότητα δεν είναι άλλη από την π.π της $\mathcal{F}_{n,m}(\delta)$ (βλ. π.χ. [33]).

Το (1) είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα που αποτελεί και τον ορισμό της μη-κεντρικής $\mathcal{F}$-κατανομής (βλ. [33]).

Το (2) προκύπτει από το (1) ως εξής:

$$\begin{aligned}
\forall z>0,\ P(F\le z) = P\Big(\frac{X/n}{Y/m}\le z\Big) &= P\Big(\frac{X}{Y}\le\frac{nz}{m}\Big) \\
&= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\ \frac{x}{y}\le\frac{nz}{m}\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\ \frac{x}{y}\le\frac{nz}{m}\}} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} f_Y(y)\Big(\int_0^{\frac{nzy}{m}} f_X(x)dx\Big)dy \\
&= \int_0^{+\infty} P\Big(X\le\frac{nzy}{m}\Big)f_Y(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{X}_n^2(\delta)\le\frac{nzy}{m}\Big)\mathcal{X}_m^2(dy)
\end{aligned}$$

Όμως, από το Λήμμα 1.1,

$$P\Big(\mathcal{X}_n^2(\delta)\le\frac{nzy}{m}\Big) = \int_{\mathbb{N}_0}\Big(\int_0^{\frac{nzy}{m}}\mathcal{X}_{n+2k}^2(dt)\Big)\pi(\delta/2; dk)$$

και με τη χρήση του Θεωρήματος του $Fubini$,

$$P\Big(\frac{X/n}{Y/m}\le z\Big)=\int_{\mathbb{N}_0}\Big(\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{\frac{nzy}{m}}\mathcal{X}^2_{n+2k}(dt)\Big)\mathcal{X}^2_m(dy)\Big)\pi(\delta/2;dk)$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{\frac{nzy}{m}}\mathcal{X}^2_{n+2k}(dt)\Big)\mathcal{X}^2_m(dy) &= \int_{\{\frac{t}{y}\le\frac{nz}{m}\}}\mathcal{X}^2_m(dy)\mathcal{X}^2_{n+2k}(dt)\\ &= \int_{\Big\{\frac{t/n+2k}{y/m}\le\frac{nz}{n+2k}\Big\}} f_T(t)f_Y(y)dtdy\\ &= P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m}\le\frac{nz}{n+2k}\Big)\end{aligned}$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει το ζητούμενο:

$$P(F\le z)=\int_{\mathbb{N}_0}P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m}\le\frac{nz}{n+2k}\Big)\pi(\delta/2;dk)\quad .$$

Η αντίστροφη μη-κεντρική $\mathcal{F}$-κατανομή

Πόρισμα 2.2

Έστω F τ.μ : $F\sim\mathcal{F}_{n,m}(\delta)$. Τότε η F^{-1} ακολουθεί μία μη-κεντρική $\mathcal{F}$-κατανομή η οποία λαμβάνεται από τη σύνθεση μιας Poisson $\pi(\delta/2)$ και μιας μετάβασης πιθανότητας η οποία με κάθε k συνδέει την κεντρική $\frac{n}{n+2k}\mathcal{F}_{m,n+2k}$-πιθανότητα. Σε μία τέτοια περίπτωση σημειώνουμε:

$$F^{-1}\sim\mathcal{F}^{-1}_{n,m}(\delta)\ \Big(=\mathcal{F}_{m,n}(\delta)\Big)$$

Απόδειξη

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\forall z>0\,,\ \ P\Big(F^{-1}\le z\Big) &= P\Big(F\ge\frac{1}{z}\Big)=1-P\Big(F<\frac{1}{z}\Big)\\ &= 1-\int_{\mathbb{N}_0}P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m}\le\frac{n}{(n+2k)z}\Big)\pi(\delta/2;dk)\\ &= \int_{\mathbb{N}_0}P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m}>\frac{n}{(n+2k)z}\Big)\pi(\delta/2;dk)\\ &= \int_{\mathbb{N}_0}P\Big(\frac{1}{\mathcal{F}_{n+2k,m}}<\frac{(n+2k)z}{n}\Big)\pi(\delta/2;dk)\\ &= \int_{\mathbb{N}_0}P\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k}<\frac{(n+2k)z}{n}\Big)\pi(\delta/2;dk)\end{aligned}$$

Ροπές

Πόρισμα 2.3

i) $A\nu$ $F \sim \mathcal{F}_{n,m}(\delta)$ $\tau\acute{o}\tau\epsilon$ $E(F) = \frac{m(n+\delta)}{n(m-2)}$, $\forall m > 2$

ii) $A\nu$ $Z \sim \mathcal{F}^{-1}_{n,m}(\delta)$ $\tau\acute{o}\tau\epsilon$ EZ *υπάρχει, για κάθε* $n > 2$.

Απόδειξη

Από το (2), προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
i)\quad E(F) &= \int_0^{+\infty} P(F > z)dz \\
&= \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\mathbb{N}_0} P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m} > \frac{nz}{n+2k}\Big)\pi(\delta/2;dk)\Big)dz \\
&= \int_{\mathbb{N}_0}\Big(\int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m} > \frac{nz}{n+2k}\Big)dz\Big)\pi(\delta/2;dk) \\
&= \int_{\mathbb{N}_0}\frac{n+2k}{n}\Big(\int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m} > t\Big)dt\Big)\pi(\delta/2;dk)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{όπου}\quad \int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m} > t\Big)dt &= E\Big(\mathcal{F}_{n+2k,m}\Big) \\
&= \frac{m}{m-2}\ ,\quad \text{για}\ \ m > 2
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
E(F) = \frac{m}{n(m-2)}\int_{\mathbb{N}_0}(n+2k)\pi(\delta/2;dk) &= \frac{m}{n(m-2)}\Big(n + 2\underbrace{\int_{\mathbb{N}_0}k\pi(\delta/2;dk)}_{=\delta/2}\Big) \\
&= \frac{m}{n(m-2)}(n+\delta)
\end{aligned}
$$

ii) Από το Πόρισμα 2.2, προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
E(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z > z)dz &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\mathbb{N}_0} P\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k} > \frac{(n+2k)z}{n}\Big)\pi(\delta/2;dk)\Big)dz \\
&= \int_{\mathbb{N}_0}\Big(\int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k} > \frac{(n+2k)z}{n}\Big)dz\Big)\pi(\delta/2;dk) \\
&= \int_{\mathbb{N}_0}\frac{n}{n+2k}\Big(\int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k} > t\Big)dt\Big)\pi(\delta/2;dk)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{όπου}\quad \int_0^{+\infty} P\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k} > t\Big)dt &= E\Big(\mathcal{F}_{m,n+2k}\Big) \\
&= \frac{n+2k}{n+2k-2}\ ,\quad \forall k \geq 0\ \ \text{και}\ \ n > 2
\end{aligned}
$$

Λοιπόν, για $n > 2$, $E(Z)$ υπάρχει και

$$E(Z) = \int_{\mathbb{N}_0} \frac{n}{n+2k-2}\pi(\delta/2; dk) \leq \frac{n}{n-2}$$

Βιβλιογραφία

[1]**Alam K.**(**1973**) A family of admissible minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution $-Annals\ of\ Statistics, 1, pp.517-525$

[2]**Arnold J.**(**1981**) The theory of linear model and multivariate analysis -$Wiley$

[3] **Baranchik A.**(**1964**) Multiple regression and estimation of the mean vector of a multivariate normal distribution $-$ *Stanford Univ.*, *Technica Report No*51

[4] **Ben Mansour D.**(**1983**) Presentation, dans les cas classiques et bayesiens, des estimateurs de James $-$ Stein generalises $-$ *These de* 3 *cycle de l'Universite de Rouen*

[5] **Berger J.O.**(**1975**) Minimax estimation of location vectors for a wide class of densities$-$ $Annals\ of\ Statistics, 3, No6, pp.1318-1328$

[6] **Berger J.**, **Bock M.E**(**1976**) Eliminating singularities of Stein-type estimators of location vectors -*JRSS B* 37(2), *pp*$166-170$

[7] **Berger J.O.**(**1976**) Minimax estimation of a multivariate normal mean vector with arbitrary quadratic loss $-$ $Journal\ of\ Multivariate\ Analysis, 6, pp.256-264$

[8] **Bock M.E.**(**1985**) Minimax estimators that shift toward a hypersphere for location vectors of spherically symmetric distributions $-$ *Journal of Multivariate Analysis*, 17, 127-147

[9] **Brandwein A.C.**(**1979**) Minimax estimation of the mean of spherically symmetrical distributions under quatradic loss $-$ $Journal\ of\ Multivariate\ Analysis, 9, pp.579-588$

[10] **Brandwein A.C. and Strawderman W.E.**(**1991**) Generalizations James $-$ Stein estimators under spherical symmetry $-$ *Annals of Statistics*, *vol* 19, *No* 3, *pp*.$1639-1650$

[11] **Brandwein A.C. and Strawderman W.E.**(**1991**) Improved estimates of location in the presence of an unknown scale $-$ *Journal of Multivariate Analysis* 39, *pp*.$305-314$

[12] **Brown** (**1966**) On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters -*Ann.Math.Stat.* 37 (5), *pp*$1087-1136$

[13] **Cambanis S.**, **Huang S. and Simons G.**(**1981**) On the theory of elliptically contoured distributions. $-$ *Journal of Multivariate Analysis* 11, *pp*.$368-385$

[14] **Cartan** (**1977**) Cours de Calcul Differentiel $-$ *Hermann*, *Paris*

[15] **Cellier D. et Fourdrinier D.**(**1985**) Estimateurs à rétrécisseurs de la moyene d'une loi normale multidimensionelle, pour un coût quadratique général $-$ *Statistique et Analyse des Donees*, *vol* 10, *pp*.$26-41$

[16] **Cellier D. et Fourdrinier D.(1988)** Sur les lois a symmetrie elliptique -*Lecture Notes in Mathematics, Seminaire de Probabilites XXIV* 1988/89

[17] **Cellier D., Fourdrinier D et Robert C.(1989)** Controlled Shrinkage Estimators(A class of estimators better than the least squares estimator, with respect to a general quadratic loss, for normal observations) − *Statistics* 20, 1, *pp*.13 − 22

[18] **Cellier D., Fourdrinier D et Robert C.(1989)** Robust shrinkage estimators of the location parameter for elliptically symmetric distributions− *Journal of Multivariate Analysis*, 29, *pp*.39 − 52

[19] **Cellier D. et Fourdrinier D.(1992)** Estimation du parametre de position d′une loi a spherique : une condition generale de domination de l′estimateur des moindres carres - *C.R.Acad.Sci.Paris, t*.315, *Serie I, pp*.1203 − 1206

[20] **Cellier D. et Fourdrinier D.(1994)** Shrinkage estimators under spherical symmetry for the general linear model − *Document* 1994 − 09, *Universite de Rouen*

[21] **Eaton M.L.(1986)** A characterization of spherical distributions.−*Journal of Multivariate Analysis*, 20,*pp*. 272 − 276

[22] **Efron B. and Morris C.(1972)** Empirical Bayes on vector observations : An extension of Stein′s method-*Biometrica*, 59, 2, *pp*.335 − 347

[23] **Efron B. and Morris C.(1975)** Data Analysis using Stein′s estimator and its generalizations-*Journal of the American Statistical Association*, *vol* 70, 350, *pp*.311 − 319

[24] **Fourgeaud C. and Fuchs A.(1972)** Statistique − *Dunod*

[25] **Gruber H.J.M(1998** Improving efficiency by shrinkage − *Marcel − Dekker, INC.*

[26] **James W., Stein C.(1961)** Estimation with quadratic loss -*Proc.4th Berkeley Symp. Math.Stat.Prob.* 1, *pp*.136 − 179

[27] **Johnson N. and Kotz S.(1976)** Distributions in Statistics. Continuous Multivariate Distributions − *John Wiley & Sons, Inc*,

[28] **Judge G.G and Bock E.M(1978)** The statistical implications of Pre − test and Stein-rule estimators in econometrics − *North − Holland*

[29] **Kelker D.(1970)** Distribution theory of spherical distributions and a location scale parameter generalization. − *Sankhyā A*.32, *pp*.419 − 430

[30] **Kruskal W.(1961)** The coordinate-free approach to Gauss − Markov and its application to missing and extra observations − *Proceedings Fourth Berkeley Symp.Math. Statist. Probab.*, 1, *pp*.435 − 451

[31] **Kruskal W.(1968)** When are Gauss – Markov and least squares estimators the same?A coordinate – free approach. – *Ann.Math.Statist.*39, *pp.*70 – 75

[32] **Lelong – Ferrand J., Arnaudies J.M.(1977)** Cours de mathematiques – *Tame* 3, *Geometrie et cinematique – Dunod Universite*

[33] **Muirhead R.J.(1982)** Aspects of Multivariate Statistical Theory – *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*

[34] **Nachbin L.(1965)** The Haar integral – *D. Van Nostrand Company*

[35] **Natanson(1974)** Theory of functions of a real variable

[36] **Philoche J.L.(1977)** Une condition de validite pour le test F – *Statistique et Analyse des Donees* 1, *pp.*37 – 60

[37] **Ramis E(1974)**, Cours de Mathematique Speciales , 1 *Algebre Masson*

[38] **Stein C.(1956)** Inadmissibility of the usual estimator of the mean of a mutlivariate normal distribution – *Third Berkeley Symp.Math.Statist.Probab.*, 1, *pp.*197 – 206.*Univ. of California Press, Berkerley*

[39] **Stein C.(1981)** Estimation of the mean of a multivariate normal distribution – *The Annals of Statistics*, *vol* 9, *No* 6, *pp.*1135 – 1151

[40] **Stone M.(1977)** A unifed approach to coordinate – free multivariate analysis.–*Ann.Inst. Statist.Math.A*29, *pp.*43 – 57

[41] **Stone M.(1987)** Coordinate free Multivariate Statistics – *Clarendon Press – Oxford*

[42] **Strawderman W.(1973)** Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal mean vector for the case of common unknown variance – *Annals of Statistics*, 1, *pp.*1189 – 1194