Πανεπιστημιο Κρητης

Σχολη Θετικων Επιστημων

Διατμηματικο Μεταπτυχιακο Προγραμμα Σπουδων
«Μαθηματικα και Εφαρμογες τους»

Μεταπτυχιακη Εργασια

Ιστορια των προβληματων στα Μαθηματικα

Γεωργία Νικολάου Γκρίτζαλη

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχαήλ Λάμπρου

Ηράκλειο, Ιούλιος 2009

UNIVERSITY OF CRETE

SCHOOL OF SCIENCES

INTER-DEPARTMENTAL GRADUATE PROGRAM IN
"MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS"

MASTER OF SCIENCE THESIS

HISTORY OF PROBLEMS IN MATHEMATICS

Georgia Nikolaou Gritzali

Thesis Adviser: Michael Lambrou

Heraklion, July 2009

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση».
Η τριμελής επιτροπή είναι:

Μιχαήλ Λάμπρου

Μιχαήλ Κολουντζάκης

Στάθης Φίλιππας

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετώνται προβλήματα και συλλογές προβλημάτων τόσο των Μαθηματικών όσο και των Διασκεδαστικών Μαθηματικών, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, στην Ανατολή και την Δύση. Ειδικά εξετάζονται προβλήματα που εμφανίζονται σε διαφορετικούς πολιτισμούς και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Παρατηρείται ότι πολλά από αυτά όπως το πρόβλημα του Ιωσήπου, το πρόβλημα των εκατό πτηνών κ.α. επανεμφανίζονται σε όλα τα γεωγραφικά πλάτη. Επίσης μελετώνται συλλογές και προβλήματα που ξεχώρισαν είτε για την ποιότητα τους ή την διαχρονικότητα τους είτε για την συμβολή τους στη ανάπτυξη των μαθηματικών όπως προβλήματα των *Fibonacci*, *Hilbert*, *Scottish Book* κ.α. Από το τεράστιο σε πλήθος υπέροχο υλικό που υπάρχει, έχει επιλεγεί ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.

Λέξεις-Κλειδιά: Προβλήματα Μαθηματικών, Συλλογές Προβλημάτων, Μαθηματικοί Γρίφοι, Μαθηματικά Περιοδικά, Ολυμπιάδες Μαθηματικών.

Summary

In the present work are studied problems and collections of problems which concern Mathematics, as well as Recreational Mathematics, from the ancient times up to today, in the East and the West. Specifically are examined problems that are presented in different cultures and in different time periods. It is observed that many of them as the Josephus problem, the hundred fowls problem and others are redisplayed in all latitudes. Also are studied collections and problems that they distinguished for their quality or their diachronicity or for their contribution in the mathematical progress as Fibonacci's and Hilbert's problems, Scottish Book and others. There has been selected a representative sample from the enormous and remarkable material that is displayed in mathematical works during the centuries.

Keywords: Mathematical problems, Collections of problems, Mathematical puzzles, Mathematical magazines, Mathematical olympiads.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Συνοπτική Ιστορία των Προβλημάτων

1.1 Αίγυπτος

Αναζητώντας τις ρίζες των μαθηματικών και πότε εμφανίστηκαν οι πρώτες συλλογές προβλημάτων τόσο των μαθηματικών όσο και των διασκεδαστικών μαθηματικών, οδηγούμεθα στην αρχαία Αίγυπτο. Η πρώτη πηγή προβλημάτων είναι ο πάπυρος *Rhind*[1]. Πρόκειται για ένα αντίγραφο του 1650 π.Χ. ενώ το αυθεντικό χαμένο χειρόγραφο φαίνεται να είχε γραφτεί γύρω στο 2000-1800 π.Χ. Ο πάπυρος πήρε το ονομά του από τον *Alexander Henry Rhind* (1833-1863) που τον αγόρασε το 1858 στο Λούξορ της Αιγύπτου και στη συνέχεια τον κληροδότησε στο Βρετανικό Μουσείο, όπου και φυλλάσεται μέχρι σήμερα.[2] Είναι γραμμένος με στοιχεία μικτά της ιερογλυφικής και της ιερατικής γραφής και πρώτος τον αποκρυπτογράφησε ο *A. Eisenlohr*[3] το 1868.[4]

Ο πάπυρος *Rhind* περιλαμβάνει 80 περίπου αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα, τα περισσότερα από τα οποία έχουν να κάνουν με την καθημερινότητα. Τα γεωμετρικά προβλήματα αφορούν τον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωραφιού ή τον όγκο μιας αποθήκης σιτηρών. Ενώ τα αριθμητικά προβλήματα αφορούν

[1]Σπανιότερα καλείται πάπυρος *Ahmes*, προς τιμήν του *Ahmes* (∼1680-1620 π.Χ.) που είναι ο δημιουργός του αντιγράφου του 1650 π.Χ.
C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968, σελίς 12.

[2]Βλ. σχετικά B.L. Van Der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σελίς 2.

[3]A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägupter* (*Parуrus Rhind des British Museum*), Leipzig, 1877.

[4]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 22.

τον υπολογισμό μισθών, μοίρασμα ψωμιού κλπ., τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις πρώτου βαθμού ή λύνονται με απλή μέθοδο των τριών. Ωστόσο συναντάμε και προβλήματα τα οποία δεν φαίνεται να είχαν καμία πρακτική σημασία, αλλά είχαν σαν στόχο τη ψυχαγωγία. Ένα από τα σημαντικά, το οποίο συναντάμε αργότερα και στην Ευρώπη, είναι το παρακάτω, γνωστό σήμερα ως το *πρόβλημα του* $St.\ Ives$ (Βλ.σελιδα 80). Στον πάπυρο $Rhind$ δίνεται ως εξής:

Έχουμε 7 σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν 7 γάτες. Κάθε γάτα τρώει 7 ποντίκια.
Κάθε ποντίκι θα έτρωγε 7 σπόρους από σιτάρι, όπου κάθε σπόρους θα παρήγαγε 7 εκάτ[5] *δημητριακών.*
Ποιο είναι το άθροισμα όλων αυτών;

Στη λύση του προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος 7, 49, 343, 2401, 16807 και στην ουσία ζητείται το άθροισμα της.

Σήμερα σώζονται ακόμα 4 μικρότερα Αιγυπτιακά κείμενα, ο πάπυρος της Μόσχας, ο πάπυρος Καχούν, ο πάπυρος του Βερολίνου και ο Δερμάτινος κύλινδρος, με προβλήματα στοιχειωδών μαθηματικών.

1.2 Κίνα

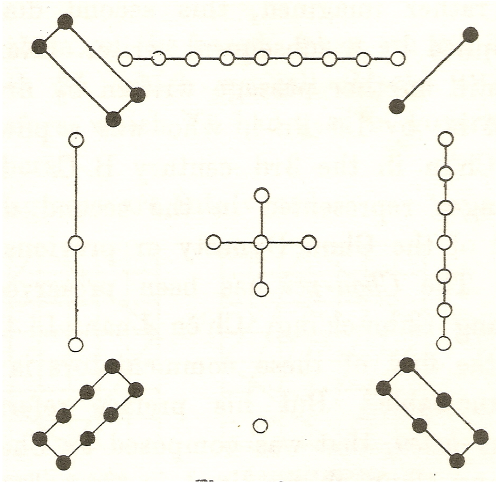
Ο Κινεζικός πολιτισμός είναι ένας από τους παλαιότερους και τους σημαντικότερους. Οι Κινέζοι ανέπτυξαν ιδιαίτερα τη λογοτεχνία, τη φιλοσοφία, τις τέχνες και έκαναν πολλές εφευρέσεις. Οι ρίζες των Κινεζικών μαθηματικών φαίνεται να είναι παλαιότερες από αυτές των Ελληνικών μαθηματικών, χωρίς να μπορεί να προσδιοριστεί πότε ακριβώς ξεκίνησαν τα μαθηματικά στην Κίνα. Αυτό συμβαίνει γιατί οι Κινέζοι αποδίδουν στους προγόνους τους μεταγενέστερες ανακαλύψεις καθώς επίσης αποδίδουν σε αυτούς ανακαλύψεις άλλων λαών. Το κυριώτερο όμως είναι η έλλειψη πρωταρχικών πηγών ύστερα από διαταγή του αυτοκράτορα $Shih\ Hoang$-Ti[6] το 213 π.Χ. να καούν όλα τα επιστημονικά κείμενα και όλοι οι διανοούμενοι της εποχής εκείνης.[7] Έτσι κείμενα τους σώζονται από τον 3ο αιώνα και μετά, ενώ τα πρώτα μαθηματικά τα συναντάμε σε θρησκευτικά κείμενα.

[5]Μονάδα μέτρησης της αρχαίας Αιγύπτου, που χρησιμοποιώταν για τη μέτρηση δημητριακών, ψωμιού και μπύρας.

[6]Ιδρυτής της Δυναστείας των $Ch'in$. Πέθανε το 210 π.Χ.
Βλ. σχετικά Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 9.

[7]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 203-204.

Ιερό βιβλίο I-Ching: Στο *Ιερό βιβλίο I-Ching* (Ιερό βιβλίο Αριθμητικής) συναντάμε το Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Το lo_shu

Σύμφωνα με τον μύθο το Σχήμα 1.1 βρέθηκε χαραγμένο στην πλάτη μιας χελώνας που βρισκόταν κοντά στον *Κίτρινο ποταμό*, την εποχή του αυτοκράτορα *Yü* το 2200 π.Χ.[8] Στο σχήμα δίνεται το όνομα *li-shu*, το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί ως μαγικό τετράγωνο.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Με τα μαγικά τετράγωνα ασχολήθηκαν πολλοί λαοί τόσο στη Δύση όσο και στην Ανατολή και είναι πάρα πολλές οι συλλογές διασκεδαστικών μαθηματικών που αναφέρονται σε αυτά. Μία εκτενέστερη περιγραφή γίνεται στην παράγραφο 2.8

Chiu-chang Suan-shu: Το *Chiu-chang Suan-shu* (Αριθμητική σε 9 Κεφάλαια) είναι το σπουδαιότερο σωζόμενο μαθηματικό κείμενο της αρχαίας Κίνας. Ο συγγραφέας του κειμένου καθώς και η ημερομηνία γραφής του δεν μας είναι γνωστά. Σύμφωνα με τον πρόλογο των σχολίων του *Liu Hui*, που γράφτηκε το 263 μ.Χ.,

[8]D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. 1, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίδες 28-29.

το κείμενο βασίστηκε σε παλαιότερα μη σωζόμενα κείμενα. Τα κείμενα αυτά συγκέντρωσε και αναδιαμόρφωσε ο *Chang T'sang* (∼250-150 π.Χ.) το 176 π.Χ.[9] Μία όχι και τόσο πιθανή εκδοχή είναι το *Chiu-chang Suan-shu* να προέρχεται από έργο της εποχής του *Chou-Kung* στις αρχές του 12ου π.Χ. αιώνα ή να είναι αποτέλεσμα ακόμα παλαιότερου έργου από την εποχή του *Huang-Ti* τον 27ο π.Χ. αιώνα.[10] Το *Chiu-chang Suan-shu* μετά τον *Chang T'sang* ξαναγράφτηκε από τον *Ching Ch'ou − ch'ang*, την πρώτη περίοδο της Δυναστείας των *Han* που ξεκίνησε με αυτοκράτορα τον *Kao-tsu* το 202 π.Χ. και άνθησε για δύο περίπου αιώνες.

Το κείμενο αυτό αποτελείται από 9 κεφάλαια. Περιλαμβάνει κανόνες για τη μέτρηση εμβαδού διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, ποσοστά, αναλογίες, απλή μέθοδο των τριών, υπολογισμό τετραγωνικών και κυβικών ριζών, όγκους στερεών κ.α. Τους κανόνες αυτούς εφαρμόζει σε 246 αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα. Ανάμεσά τους βρίσκονται δύο πολύ γνωστά προβλήματα, *των δεξαμενών* (Βλ. σελίς 39) και *του ταχυδρόμου*. Το δεύτερο το συναντάμε με τις ακόλουθες εκφωνήσεις:[11]

"Ένας καλός δρομέας πάει με 100 βήματα και ένας κακός με 60 βήματα και ο κακός βρίσκεται 100 βήματα μπροστά. Σε πόσα βήματα θα συναντηθούν;"

"Ένας λαγός τρέχει με 100 βήματα μπροστά από ένα σκύλο. Ο σκύλος τον καταδιώκει για 250 βήματα, τότε οι δυο τους απέχουν μόλις 30 βήματα. Σε πόσα βήματα θα έφτανε ο σκύλος τον λαγό;"

Δύο ακόμα αριθμητικά προβλήματα τα οποία συναντάμε ιδιαίτερα στην Κίνα είναι τα παρακάτω:

"Μερικοί φίλοι αγοράζουν πράγματα παρέα, αν δώσουν από 8 κέρματα ο καθένας θα έχουν περίσσευμα 3 κέρματα, ενώ αν δώσουν από 7, θα τους λείπουν 4. Πόσοι είναι οι φίλοι και πόσα κέρματα έχουν;"[12]

"Υπάρχουν τρία είδη σιταριού. Τρία δεμάτια από το πρώτο είδος μαζί με 2 από το δεύτερο και 1 από το τρίτο μας δίνουν 39 μονάδες. Επίσης 2 από το πρώτο, 3 από το δεύτερο και 3 από το τρίτο μας δίνουν 34 μονάδες. Τέλος 1 από το πρώτο, 2 από το

[9] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίδες 8-9.

[10] D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. 1, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίδες 31-32.

[11] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 16.

[12] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 16.

δεύτερο και 3 από το τρίτο δίνουν 26 μονάδες. Πόσες μονάδες σιταριού περιέχονται στο δεμάτι του κάθε είδους;"[13]

Τα γεωμετρικά προβλήματα στο *Chiu-chang Suan-shu* λύνονται με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος. Κάποια από τα πιο γνωστά που εμφανίζονται και σε μετέπειτα συλλογές είναι τα παρακάτω:

"*Ένα καλάμι φυτρώνει στη μέση τετράγωνης λίμνης πλευράς 10 ποδιών και περισσεύει 1 πόδι από την επιφάνεια. Αν το τραβήξουμε μέχρι την άκρη της λίμνης, θα φτάσει ίσα ίσα. Πόσο το βάθος της λίμνης;*"[14]

"*Ένα καλάμι με ύψος 10 πόδια σπάει. Μετά το λύγισμα η κορυφή του φτάνει 3 πόδια από τη βάση. Σε ποιο σημείο έσπασε;*"[15]

Αυτού του τύπου τα προβλήματα είναι ιδιαίτερα απλά και εμφανίζονται αρκετά συχνά σε πολλούς άλλους λαούς. Δεν γνωρίζουμε που πρωτοεμφανίστηκαν, διότι τα συναντάμε την ίδια περίοδο και στην Ινδία.

Sun-Tsu Suan-ching: Το 65 μ.Χ.[16] γράφτηκε το *Sun-Tsu Suan-ching* (Κλασική αριθμητική του *Sun-Tsu*). Πρόκειται για ένα βιβλίο αριθμητικής με κάποιους βασικούς κανόνες λογισμού με αριθμούς, καθώς και μία σειρά από προβλήματα. Από αυτά θα ξεχωρίσουμε και θα αναφέρουμε μόνο ένα, του οποίου η λύση στηρίζεται στο γνωστό Κινεζικό Θεώρημα Υπολοίπων της Θεωρίας Αριθμών. Το θεώρημα αυτό έγινε γνωστό σε εμάς από τον *Gauss* (1777-1855).

[13] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 18.

[14] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 22.

[15] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 23.

[16] Για την ημερομηνία γραφής του υπάρχουν διάφορες υποθέσεις. Κάποιοι, αναμεσά τους και ο αρχαιολόγος *Chu I-tsun* (1629-1709), υποστηρίζουν ότι το κείμενο είναι του 6ου π.Χ. αιώνα και ταυτίζουν το πρόσωπο του *Sun-Tsu* με τον διπλωμάτη *Sun Wu*. Ο μαθηματικός *Tei Chêng* (1722-1777) αντίθετα υποστηρίζει ότι το κείμενο γράφτηκε την εποχή του αυτοκράτορα *Ming-Ti* (58-75 μ.Χ.) της Δυναστείας των *Han*, πιο συγκεκριμένα, το 65 μ.Χ. που ο Βουδισμός εισήχθη στην Κίνα. Η δεύτερη φαίνεται να είναι η πιθανότερη εκδοχή.
Βλ. σχετικά Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 25.

"*Υπάρχουν ορισμένα αντικείμενα, άγνωστο πόσα. Αν διαιρεθούν δια του 3 αφήνουν υπόλοιπο 2. Αν διαιρεθούν δια του 5 το υπόλοιπο είναι 3, και δια του 7 το υπόλοιπο είναι 2. Πόσα είναι τα πράγματα;*"[17]

Chang-chiu-chien Suan-ching: Στην πορεία συναντάμε το *Chang-chiu-chien Suan-ching* (Κλασική αριθμητική του *Chang-chiu-chien*) του *Qiujian Zhang* (430-490), που είναι γνωστός και με το όνομα *Chang-chiu-chien*.[18] Η κλασική αριθμητική του *Chang-chiu-chien* δημοσιεύτηκέ το 468, σχολιάστηκε το 7ο αιώνα από τον *Li Ch'unfeng* και επαναδημοσιεύτηκε μαζί με άλλα κείμενα το 1084 την εποχή της διακυβέρνησης της Δυναστείας των *Sung*. Το κείμενο χωρίζεται σε τρία κεφάλαια και περιλαμβάνει 92 προβλήματα των μαθηματικών. Αναμεσά τους συναντάμε δύο από τις πιο γνωστές σήμερα κατηγορίες προβλημάτων. Η μία είναι η πρώτη εμφάνιση του προβλήματος των *εκατό πτηνών*:

'Ενας κόκορας αξίζει πέντε κέρματα, μία κότα 3 κέρματα και τρία κοτοπουλάκια μαζί 1 κέρμα. 'Ενας αγόρασε 100 πτηνά με 100 κέρματα. Πόσοι θα είναι οι κόκορες, πόσες οι κότες και πόσα τα κοτοπουλάκια που αγόρασε;[19]

Πρόκειται για ένα προβλημα απροσδιορίστου αναλύσεως, το οποίο στην πορεία των χρόνων εμφανίζεται σε πληθώρα βιβλίων αριθμητικής, σε όλους τους πολιτισμούς. Εκτενέστερη αναφορά γίνεται στην Παράγραφο 2.5.

Επίσης στο ίδιο κείμενο περιλαμβάνεται και το *πρόβλημα των ταχυδρόμων*, το οποίο ξανασυναντήσαμε στην Αριθμητική σε 9 Κεφάλαια. Η εκφώνηση που δίνεται εδώ είναι η εξής:

"*'Ενας έκλεψε ένα άλογο, το καβάλησε και έφυγε. 'Οταν έφτασε 37 μίλια μακριά ο ιδιοκτήτης του το πήρε είδηση και άρχισε να τον κυνηγά. 'Οταν ο ιδιοκτήτης έκανε 145 μίλια σταμάτησε να τον κυνηγά. Ο κλέφτης εκείνη τη στιγμή βρισκόταν 23 μίλια μπροστά. Αν συνέχιζε να τον κυνηγά σε πόσα μίλια θα τον έφτανε;*"[20]

---

[17] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 210.

[18] J.J. O'Connor and E.F. Robertson,
$http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhang_Qiujian.html$

[19] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 212.

[20] Y. Mikami, *The Developement of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974, σελίς 41.

1.3 Ινδία

Ο Ινδικός πολιτισμός είναι ένας από τους αρχαιότερους της ανθρωπότητας. Οι Ινδοί είχαν αναπτύξει υψηλού επιπέδου αρχαία φιλολογία και φιλοσοφία σε αντίθεση με τα μαθηματικά τους που δεν ήταν πολύ αναπτυγμένα ή ιδιαίτερα αξιόλογα. Ωστόσο ξεχώρισαν για την επινόηση του δεκαδικού συστήματος[21]. Τα πρώτα Ινδικά μαθηματικά τα συναντάμε σε θρησκευτικά κείμενα, όπως το *Sulvasutra* (∼500 π.Χ.) που περιλαμβάνει κανόνες για την κατασκευή βωμών με συγκεκριμένες διαστάσεις, σχήμα ή γεωμετρικές ιδιότητες.

Θα ξεχωρίσουμε τρεις αξιόλογους Ινδούς μαθηματικούς.

Aryabhata: Ο *Aryabhata* γεννήθηκε στη *Kusumapura*, τη σημερινή *Patua*, το 475 ή 476 μ.Χ. Το 499 μ.Χ. έγραψε το *Arybhatiyam* το πρώτο μαθηματικό κείμενο που περιλαμβάνει το Ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης. Το έργο αυτό θεωρείτο χαμένο για χρόνια, έως ότου το 1874 ο Ολλανδός *H. Kern* βρήκε δύο αντίγραφά του, στην Καλκούτα, ένα του 1820 και ένα του 1863. Πρόκειται για ένα κείμενο γραμμένο σε ποιητική μορφή που αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στα κεφάλαια αυτά ο *Aryabhata* μελετά τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τετραπλεύρου, του όγκου κύβου δεδομένης πλευράς, της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας ακεραίου αριθμού κ.α. Παράλληλα δίνεται μία σειρά προβλημάτων που ανάγονται στη λύση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού, καθώς και στη χρήση της απλής μεθόδου των τριών. Μέσα σε αυτά τα προβλήματα είναι και το *πρόβλημα των ταχυδρόμων.*

Στο *Arybhatiyam* δεν δίνονται αποδείξεις και ο συγγραφέας αναμιγνύει αληθείς και ψευδείς ισχυρισμούς. Για παράδειγμα υπολογίζει σωστά το εμβαδόν ενός τριγώνου και ενός τραπεζίου, ενώ κάνει λανθασμένα χρήση του ιδίου τύπου και για τον όγκο τετραέδρου.[22]

Brahmagupta (∼598-660 μ.Χ.): Το 628 μ.Χ. ο *Brahmagupta* έγραψε ένα κείμενο με τίτλο *Brahma-Sphuta-Siddhanta* (Το σύστημα του *Brahma*).[23] Το κείμενο αποτελείται από κεφάλαια έργων που είχαν ως θέμα την αστρονομία. Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει κανόνες και προβλημάτα που λύνονται με τη βοήθειά τους.[24] Σε ένα από τα κείμενα του γενικεύει, χωρίς απόδειξη, τον τύπο του Ήρωνα στην περίπτωση τετραπλεύρων. Δυστυχώς ο τύπος αυτός είναι σωστός μόνο για εγ-

[21] μάλλον μετά τον 4ο μ.Χ. αιώνα

[22] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 234-237.

[23] W.W.R. Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1908, σελίς 148.

[24] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 237-238.

γράψιμα τετράπλευρα, κάτι που δεν φαίνεται να γνώριζε ο *Brahmagupta*. Υπάρχει η άποψη ότι τον τύπο τον αντέγραψε από χαμένο σήμερα έργο του Αρχιμήδη, που ήταν σχετικό με τα εγγράψιμα τετράπλευρα.[25]

Ωστόσο ο *Brahmagupta* ήταν ο πρώτος που βρήκε τη γενική λύση της Διοφαντικής εξίσωσης $ax + by = c$.[26]

Bhaskara (1114-1185 μ.Χ.): Δύο έργα του *Bhaskara* που σώζονται σήμερα είναι η *Lilavanti* και το *Vija-Ganita*. Και τα δύο έργα περιλαμβάνουν μία σειρά προβλημάτων, αρκετά από τα οποία οφείλονται σε προγενέστερους του. Ο *Bhaskara* ωστόσο σε αρκετές περιπτώσεις έχει παρέμβει και τα έχει βελτιώσει. Πρόκειται για προβλήματα τα οποία ανάγονται στη λύση πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων, προβλήματα απροσδιορίστου ανάλυσεως, υπολογισμού εμβαδών, αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους αλλά και απλά γεωμετρικά προβλήματα, τα οποία λύνονται με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος, όπως αυτά που συναντήσαμε και στην Κίνα.

"Ένα καλάμι ύψους 32 ποδιών έσπασε και η κορυφή του ακούμπησε στο έδαφος 16 μονάδες από τη βάση του. Σε ποιο σημείο έσπασε;"

"Ένας φασιανός κάθεται στην κορυφή ενός στύλου, στη βάση του οποίου ένα φίδι είχε τη φωλιά του. Το φίδι εκείνη τη στιγμή βρισκόταν σε απόσταση 3 φορές το ύψος του στύλου, από τη φωλιά του. ο φασιανός επιτέθηκε προς το φίδι, διανύοντας ευθεία, και το πρόλαβε σε ένα σημείο του εδάφους αφού και τα δύο, φίδι και φασιανός, διένυσαν ίσες αποστάσεις. Πόσο απείχαν από τη φωλιά όταν συναντήθηκαν;"[27]

1.4 Αρχαία Ελλάδα

Τα μαθηματικά μπορεί να ξεκίνησαν από την Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα και οι αρχαίοι Έλληνες να πήραν τις βάσεις από εκεί, αλλά τα εξέλιξαν σε υψηλού επιπέδου επιστήμη, ιδίως την Γεωμετρία. Οι Αρχαίοι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που έθεσαν αξιώματα και τα βήματά τους βασίζονταν σε αποδείξεις.

Στην πρώτη περίοδο των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, μέχρι το θάνατο του Μεγάλου Αλεξάνδρου (323 π.Χ.), τα μαθηματικά είναι άμεσα συνδεδεμένα με τη

[25] Βλ. σχετικά C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968, σελίς 242.

[26] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968, σελίς 243.

[27] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968, σελίς 245.

φιλοσοφία. Είναι μία εποχή που δεν μας άφησε ακραιφνώς μαθηματικά κείμενα, αλλά μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες από μεταγενέστερες πηγές ή από φιλοσοφικά και ιστορικά κείμενα. Θα κάνουμε μία αναφορά μόνο στα σπουδαία ονόματα της εποχής εκείνης: *Θαλής (624-547 π.Χ.), Πυθαγόρας (∼550 π.Χ.), Αναξαγόρας (∼480 π.Χ.), Ιππίας (460-400 π.Χ.), Θεόδωρος ο Κυρηναίος (465-398 π.Χ.), Ιπποκράτης ο Χίος (∼470-410 π.Χ.), Αρχύτας (428-365 π.Χ.), Πλάτων (420-348 π.Χ.), Θεαίτητος (∼415-369 π.Χ.), Εύδοξος (407-354 π.Χ.), Μέναιχμος (375 π.Χ.)* και πολλοί άλλοι.

Ή επόμενη περίοδος περιλαμβάνει την άνθηση της Γεωμετρίας και τους μεγάλους Έλληνες γεωμέτρες, *Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλώνιο.*

Ευκλείδης[28]: Ο *Ευκλείδης* γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια, ήκμασε περί το 300 π.Χ. και είναι ένας από τους διασημότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Η φήμη του οφείλεται κυρίως στο έργο του με τίτλο *Στοιχεία*, ένα κείμενο με τις περισσότερες εκδόσεις σε όλο τον κόσμο μετά την *Αγία Γραφή*. Τα *Στοιχεία* αποτελούνται από 13 βιβλία και περιλαμβάνουν προτάσεις, θεωρήματα καθώς και 93 προβλήματα. Τα πρώτα έξι βιβλία είναι αφιερωμένα στη Γεωμετρία, όπου εισάγει βασικές έννοιες, ορισμούς, αιτήματα, αποδεικνύει θεωρήματα και λύνει προβλήματα. Τα βιβλία 7-9 έχουν να κάνουν με την Αριθμητική των ρητών αριθμών. Με αριθμητική ασχολείται και το δέκατο βιβλίο, το οποίο όμως ξεχωρίζει γιατί είναι αρκετά μεγαλύτερο σε σχέση με τα προηγούμενα και πολύ δυσκολότερο. Τέλος τα τελευταία τρια βιβλία των *Στοιχείων* ασχολούνται κυρίως με την γεωμετρία του χώρου.

Αρκετά από τα θέματα που μελετώνται στα *Στοιχεία* πρέπει να ήταν ήδη γνωστά στους Πυθαγορείους και ίσως να οφείλονται σε αυτούς. Το 5ο βιβλίο είναι αποτέλεσμα εργασιών του Ευδόξου.

Ο *Ευκλείδης* μπορεί να είναι διάσημος για τα *Στοιχεία*, ωστόσο είναι ο δημιουργός και άλλων πιο σημαντικών έργων, τα περισσότερα από τα οποία έχουν χαθεί. Δύο από τα βιβλία που θεωρούνται η συνέχεια των *Στοιχείων* και τα οποία για να τα μελετήσει κανείς πρέπει να είναι καλός γνώστης της Γεωμετρίας, είναι τα *Δεδομένα* και το *Περι διαιρέσεων.*

Τα *Δεδομένα* είναι το μοναδικό κείμενο του *Ευκλείδη* πέρα από τα *Στοιχεία*, που σώζεται σήμερα ολόκληρο. Πρόκειται για ένα έργο που περιλαμβάνει περίπου εκατό προτάσεις στις οποίες κάποια στοιχεία στο σχήμα είναι δεδομένα.
Π.χ. "*Εαν ένα τρίγωνο έχει μία γωνία δεδομένη και έχει δοθεί ο λόγος των πλευρών, οι οποίες περιέχουν τη γωνία, τότε το είδος του τριγώνου είναι δεδομένο.*"

[28]G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 62-72.

Το *Περι διαιρέσεων*, έχει χαθεί στα Ελληνικά και σώζεται μόνο ένα τμήμα του στα Αραβικά. Το κείμενο αυτό περιλαμβάνει προβλήματα στα οποία δίνεται κάποιο επίπεδο σχήμα και ζητείται να διαιρεθεί από ευθείες, κάτω από προυποθέσεις, σε μέρη που να έχουν κάποια δεδομένη σχέση.

Στον κατάλογο με τα χαμένα έργα του *Ευκλείδη* έχουμε ακόμη τα *Πορίσματα*, *Ψευδάρια*, *Τόποι προς επιφανεία Κωνικά*, *Φαινόμενα*, *Οπτικά* και *Κατοπτρικά*. Τέλος ένα απόσπασμα *επί του μοχλού* έφτασε σε εμάς από τους Άραβες και αποδίδεται στον Ευκλέιδη.[29]

Αρχιμήδης: Ο *Αρχιμήδης* (287-212 π.Χ.) ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών και ο δημιουργός πάρα πολλών και σημαντικών έργων. Ευτυχώς τα περισσότερα από τα έργα του έχουν σωθεί.

Σωζόμενα έργα:[30]

1. Περί σφαίρας και κυλίνδρου, βιβλία α′ και β′.
2. Κύκλου μέτρησις.
3. Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων.
4. Περί ελίκων.
5. Επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων ή Μηχανικά, βιβλία α′ και β′.
6. Ψαμμίτης.
7. Τετραγωνισμός παραβολής.
8. Περί Οχουμένων (Υδροστατική), βιβλία α′ και β′.
   (Σώζεται ελλιπές.)
9. Στομάχιον.
   (Σώθηκαν ελάχιστα αποσπάσματα).
10. Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος.
11. Βιβλίο λημμάτων.
12. Πρόβλημα Βοεικόν.

[29] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 71.

[30] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος, Αθήνα, 1970, σελίδες 9-11.

13. Περί σφαίρας και κυλίνδρου, α′ και β′.
14. Κύκλου μέτρησις.
15. Επίπεδο ισορροπιών, α′ και β′.
16. Εγγραφή κανονικού επταγώνου εις κύκλον.
17. Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων.
18. Αρχαί της Γεωμετρίας.
19. Περί υδραυλικού ωρολογίου.
20. Η Μέθοδος[31]

Απολεσθέντα έργα:[32]

1. Περί τριγώνων.
2. Περί τετραπλεύρων.
3. Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων.
4. Αριθμητικά.
5. Περί ζυγών.
6. Κεντροβαρικά.
7. Πλινθίδες και κύλινδροι.
8. Κατοπτρικά (Οπτική).
9. Ισοπεριμετρικά.
10. Στοιχεία των μηχανικών.
11. Ισορροπίαι.

[31] Εθεωρείτο χαμένο. Το ανακάλυψε ο Δανός *Heiberg* το 1906.
B.L. Van Der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001, σελίς 250.

[32] Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος, Αθήνα, 1970, σελίδες 30-34.

12. Σφαιροποιία (Κατασκευή πλανηταρίων).
13. Στοιχεία επί των στηρίξεων (Στατική).
14. Περί παραλλήλων γραμμών.
15. Περί βαρύτητος και ελαφρότητος.
16. Περί κοίλων παραβολικών καυστικών κατόπτρων.
17. Προοπτική.
18. Επισίδια βιβλία.
19. Βαρυουλκός Υδροσκοπίαι, Πνευματική.
20. Καύσις δια των κατόπτρων.
21. Περί αρχιτεκτονικής.
22. Περί δρομομέτρων.

Οι Άραβες αποδίδουν στον Αρχιμήδη και τα παρακάτω έργα:

1. Στοιχεία των Μαθηματικών.
2. Περί της διαμέτρου.
3. Συγγράμματα εν επιτομή.

Ο *Αρχιμήδης* συνέβαλε ιδιαίτερα στα σπουδαία προβλήματα της αρχαιότητας του τετραγωνισμού του κύκλου και της ευθειοποιήσεως της περιφέρειας κύκλου. Γενικότερα έκανε μελέτες σχετικές με τον τετραγωνισμό καμπυλόγραμμων επίπεδων σχημάτων, καθώς επίσης και με τον κυβισμό καμπύλων επιφανειών. Κατάφερε να υπολογίσει το εμβαδόν ενός παραβολικού τμήματος και μιας έλικας, της επιφάνειας και του όγκου της σφαίρας και ενός σφαιρικού τμήματος και θα μπορούσαμε να πούμε ότι άνοιξε τον δρόμο για τη δημιουργία του Απειροστικού λογισμού. Στον Αρχιμήδη οφείλονται η δημιουργία της Υδροστατικής επιστήμης και αρκετές μηχανικές επινοήσεις.[33]

Στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε σε ένα σπουδαίο αριθμητικό πρόβλημα του Αρχιμήδη, απροσδιορίστου αναλύσεως, γνωστό ως Πρόβλημα *Βοεικόν* (Παράγραφος 2.2).

[33]Βλ. σχετικά Sir T.L. Heath, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Τόμος 2, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σελίδες 37-38.

Απολλώνιος: Ένας ακόμα σπουδαίος μαθηματικός με πολύ σημαντικό έργο στη Γεωμετρία και τις Κωνικές Τομές είναι ο *Απολλώνιος* (~262-190 π.Χ.). Το πιο γνωστό από τα έργα του Απολλωνίου είναι τα *Κωνικά*, το οποίο αποτελείται από 8 βιβλία. Τα πρώτα τέσσερα βιβλία διασώθηκαν στο πρωτότυπο, τα επόμενα τρία σε Αραβική μετάφραση, ενώ το τελευταίο είναι χαμένο. Ο Απολλώνιος δεν είναι ο πρώτος που ανακάλυψε τις κωνικές τομές, όμως οργάνωσε τις εως τότε γνωστές τους ιδιότητες και ανακάλυψε πολλές νέες. Επίσης είναι εκείνος ο οποίος έδωσε στις κωνικές τομές τις ονομασίες έλλειψη, υπερβολή, παραβολή.

Ο Απολλώνιος έχει ακόμα αρκετές σημαντικές εργασίες, όπως τα *Περί επαφών*, *Περί λόγου αποτομής*, *Περί χωρίου αποτομής*, *Περί διωρισμένης τομής*, *Επίπεδοι τόποι*, *Νεύσεις*, στα οποία αναφερόμαστε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.1.1.

Μετά τους μεγάλους Γεωμέτρες *Ευκλείδη*, *Αρχιμήδη*, *Απολλώνιο*, η Ελληνική Γεωμετρία ατόνησε. Αυτός ίσως ήταν ένας από τους λόγους που σημαντικά τους κείμενα έχουν σήμερα χαθεί. Ακολούθησε μία μεγάλη περίοδος όπου τίποτα καινούργιο δεν παρουσιάστηκε, η μόνη φωτεινή εξαίρεση ήταν η ανάπτυξη της επίπεδης και της σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Ωστόσο αξίζει να αναφερθούν μερικά από τα πρόσωπα που ξεχώρισαν την περίοδο αυτή, όπως είναι οι *Ερατοσθένης* (276-197 π.Χ.), *Υψικλής* (190-120 π.Χ.), *Νικομήδης* (~250-150 π.Χ.), *Διοκλής* (240-180 π.Χ.), *Περσεύς* (180-120 π.Χ.), *Ζηνόδωρος* (200-140 π.Χ.), *Πάππος* (3ο αιώνα π.Χ.), *Γέμινος* (110-40 π.Χ.), *Μενέλαος* (70-130 μ.Χ.), *Πτολεμαίος* (85-165 μ.Χ.) κ.α.

Στον Πάππο αναφερόμαστε αναλυτικά στη σελίδα 114.

Διόφαντος: Φεύγοντας από τον τομέα της Γεωμετρίας και ερχόμενοι στην Αριθμητική, η πρώτη συλλογή αριθμητικών προβλημάτων που συναντάμε είναι τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου.

Οι πληροφορίες που έχουμε για τη ζωή του Διοφάντου είναι ελάχιστες. Δεν είμαστε βέβαιοι για το πότε έζησε, πιθανότατα περί το 250 π.Χ.[34] Γνωρίζουμε μόνον ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια και πέθανε εκεί στην ηλικία των 84 ετών.[35]

Το σημαντικότερο έργο του Διοφάντου είναι τα *Αριθμητικά*. Πρόκειται για μία συλλογή 150 περίπου προβλημάτων, που αποτελείται από δεκατρία βιβλία από τα οποία σήμερα σώζονται τα δέκα. Τα τέσσερα από αυτά βρέθηκαν στα τέλη της δε-

[34]Βλ. σχετικά B.L. Van Der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001, σελίς 325.

[35]Για τα χρόνια της ζωής του μαθαίνουμε μέσα από ένα πρόβλημα της Παλατινής Ανθολογίας. (Σελίς 36)

καετίας του 1960 με αρχές του 70 στη βιβλιοθήκη *Astan Quds* της πόλης *Meshed* του Ιράν. Πρόκειται για μία Αραβική μετάφραση, που οφείλεται στον Ελληνικής καταγωγής λόγιο *Quosta ibn Luqa* (9ος μ.Χ. αιώνας).[36] Η συλλογή περιλαμβάνει προβλήματα που οδηγούν στη λύση εξισώσεων πρώτου, δευτέρου και μόλις ένα[37] τρίτου βαθμού.[38] Καθώς και προβλήματα απροσδιορίστου αναλύσεως τα οποία απασχόλησαν ιδιαίτερα τον Διόφαντο και τα μελέτησε σε βάθος.

Παλατινή Ανθολογία: Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν και με προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών. Η σπουδαιότερη συλλογή προβλημάτων που συναντάμε είναι η *Παλατινή Ανθολογία* (Παράγραφος 2.1), με μία σειρά γνωστών σήμερα αριθμητικών προβληματων όπως προβλήματα *ηλικίας*, *μοιρασιάς*, *δεξαμενών* κ.α. Ίσως το πιο γνωστό και πιο κλασικό πρόβλημα αυτής της συλλογής είναι το *Βοεικό Πρόβλημα* του *Αρχιμήδη* (Παράγραφος 2.2), που ζητά να βρεθεί το πλήθος των βοϊδών του Θεού Ήλιου. Πρόκειται για πρόβλημα απροσδιορίστου αναλύσεως που χρειάστηκε να περάσουν αιώνες για να βρεθεί η πλήρης λύση του.

1.5 Αραβία

Τα Αραβικά μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν συνέχεια των Ελληνικών μαθηματικών. Μετά από έναν νικηφόρο πόλεμο κατά των Βυζαντινών ο *Al Mamun*, (χαλίφης το 809-833) συμπεριέλαβε στη συνθήκη ειρήνης και τον όρο να παραδώσουν οι ηττημένοι από ένα αντίγραφο όλων των σημαντικών αρχαίων Ελληνικών χειρογράφων. Έτσι οι Άραβες απέκτησαν κείμενα του *Αριστοτέλη*, του *Πτολεμαίου*, του *Ευκλείδη*, του *Αρχιμήδη* και πολλών άλλων. Συγχρόνως ο *Al Mamun* ίδρυσε τον *Οίκο της Σοφίας*, κάτι που οδήγησε στην αύξηση της μελέτης των αρχαίων Ελληνικών κειμένων μετά από την παρακμή που είχε επέλθει από τον 6ο αιώνα και μετά. Το αποτέλεσμα ήταν να αντιγραφούν και να διασωθούν αρκετά από τα κείμενα των οποίων σήμερα τα πρωτότυπα έχουν χαθεί.

Οι Άραβες δεν αρκέστηκαν μόνο στο να μελετήσουν τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, αλλά τα προήγαγαν σε μεγάλο βαθμό. Στην μελέτη των Αραβικών Μαθηματικών συναντάμε σπουδαία κείμενα και πολλούς αξιόλογους Άραβες μαθηματικούς. Πρίν όμως ξεκινήσουμε να περιγράφουμε κάποιες από τις Αραβικές συλλογές μαθηματικών και τα προβλήματα που συναντάμε σε αυτές, είναι σκόπι-

[36]Βλ. σχετικά Sir T.L. Heath, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Τόμος 2, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σελίδες 514-515.

[37]Sir T.L. Heath, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Τόμος 2, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σελίς 531.

[38]Sir T.L. Heath, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Τόμος 2, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σελίς 527.

μο να κάνουμε μία πολύ σύντομη αναφορά σε κάποιους από τους μεταφραστές των σημαντικών αρχαίων Ελληνικών κειμένων.

Οι πρώτοι σημαντικοί μεταφραστές ήταν κυρίως Σύριοι νεστοριανοί χριστιανοί και γνώστες της Ελληνικής γλώσσας οι οποίοι μετέφρασαν τα αρχαία Ελληνικά κείμενα στα Συριακά. Αργότερα από τα Συριακά μεταφράστηκαν στα Αραβικά. Σε κάποιες περιπτώσεις μεταφράστηκαν κείμενα από τα αρχαία Ελληνικά απευθείας στα Αραβικά.
Ο πρώτος που μετέφρασε μαθηματικά κείμενα ήταν ο *Al Haggag ibn Jusuf ibn Matar* (870-920). Μεταφράσεις του συμπεριλαμβάνουν τα *Στοιχεία* του *Ευκλείδη* και την *Αλμαγέστη* του *Πτολεμαίου*.
Αργότερα ο *Quosta ibn Luca al Balbecki* (9ος αιώνας) μετέφρασε κείμενα του *Θεοδοσίου*, του *Αυτολύκου*, του *Υψικλέους*, του *Αρίσταρχου* και του *Ήρωνα* κ.α.
Ο *Abu'l Abbas al-Fadl ibn Hatim al Nairiz*, γνωστός ως *Anaritio* (9ος αιώνας), μετέφρασε τα *Στοιχεία* του *Ευκλείδη* πάνω στα οποία έγραψε πολύτιμα σχόλια με ιστορικές πληροφορίες για τα έργα και τις μεθόδους των Ελλήνων.
Ο *Abu'l Fath Muhammed ibn Muhammed ibn Quasim ibn Fadl al Istahani*, μετέφρασε τα πρώτα 7 βιβλία από τα *Κωνικά* του *Απολλωνίου*. Από τα αυτά, τα 3 σώζονται μόνο από αυτή τη μετάφραση.[39]

Al Khowarizmi[40]: Ένα από τα πιο σημαντικά κείμενα είναι το *Al-jabr mal mugabala* του *Muhammed ibn Al Khowarizmi* (800-847). Το κείμενο αυτό θεωρείται το πρώτο εγχειρίδιο Άλγεβρας, αν και δεν χρησιμοποιεί τον συμβολισμό που έχουμε σήμερα. Από τον τίτλο του προέκυψε η λέξη "Άλγεβρα" και έμεινε ως διεθνής μαθηματικός όρος. Το *Al-jabr mal mugabala* σώζεται σε χειρόγραφο του 1342 και φυλάσσεται στην πανεπιστημιακή βιβλιοθήκη της Οξφόρδης. Το χειρόγραφο περιλαμβάνει πλήθος εφαρμογών τόσο στην Άλγεβρα, όσο και στη Γεωμετρία. Τα Αριθμητικά προβλήματα αφορούν κυρίως την καθημερινότητα, τον προσδιορισμό κληρονομιάς, καταμερισμό περιουσιακών στοιχείων, ρυθμίσεις εμπορικών συναλλαγών, καταμέτρηση γηπέδων κ.α. Ένας γνωστός τύπος προβλημάτων που συναντάμε σε αυτό το έργο είναι *προβλήματα κληρονομιάς*, τα οποία όμως είναι ιδιαίτερα περίπλοκα διότι δεν μας είναι γνωστοί οι Αραβικοί νόμοι για το κληρονομικό δίκαιο. Το Γεωμετρικό μέρος του έργου είναι εμφανώς επηρεσμένο από τα Ελληνικά μαθηματικά, αν και παρουσιάζει κάποια στοιχεία ερχόμενα από την Ανατολή. Το πιο κλασικό πρόβλημα που περιλαμβάνει είναι ο υπολογισμός του όγκου κόλουρου πυραμίδας με τετράγωνη βάση.

Ένα ακόμα σημαντικό έργο του *Al Khowarizmi* είναι η αριθμητική του που

---

[39] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 256-258.

[40] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 258-261.

σώζεται σήμερα σε λατινική μετάφραση με τίτλο *Algoritmi de numero Indorum*.

Tabit: Ο επόμενος σημαντικός Άραβας μαθηματικός και μεταφραστής είναι ο *Abu'l Hasan Tabit ibn Qorra ibn Merwan al Harrani* (826-901). Ο *Tabit* άνηκε στη θρησκεία των Σαββαίων, έτσι γνώριζε καλά Ελληνικά και μετέφρασε στα Αραβικά πολύ σημαντικά αρχαία Ελληνικά κείμενα του *Ευκλείδη*, του *Αρχιμήδη* (*Λήμματα* και *Περί Επταγώνου*), του *Απολλωνίου*, του *Πτολεμαίου* κ.α.[41]

Ο *Tabit* ασχολήθηκε με τους φίλους αριθμούς, τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος, βρήκε το εμβαδόν της έλλειψης και το εμβαδόν που περικλύει η παραβολή κ.α. Ένα από τα προβλήματα της αρχαιότητας που τον απασχόλησαν ήταν η *τριχοτόμηση της γωνίας*, για το οποίο έγραψε ένα ολόκληρο βιβλίο.

Abu Kamil[42]: Τα έργα του *Abu Kamil Sega ibn Aslam ibn Muhammed ibn Sega* (∼900) επηρρέασαν ιδιαίτερα τους Ευρωπαίους, κυρίως τον *Fibonacci*. Σε ένα απόσμασμα που περιλαμβάνει προβλήματα αριθμητικής συναντάμε το *πρόβλημα των εκατό πτηνών* με 5 είδη πουλιών που μας οδηγούν στις παρακάτω εξισώσεις:

$$x + y + z + u + v = 100 \quad \kappa\alpha\iota \quad 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}u + v = 100$$

Ο *Abu Kamil* προσδιορίζει και τις 2676 λύσεις!

Σε αυτόν οφείλεται μία συλλογή γεωμετρικών προβλημάτων, τα οποία λύνονται αλγεβρικά και έχουν σαν κύριο στόχο την εγγραφή και την περιγραφή κανονικών πολυγώνων με πλευρές 5, 10 και 15. Στη λύση των προβλημάτων εμφανίζονται εξισώσεις δευτέρου βαθμού ή εξισώσεις που ανάγονται σε δευτέρου βαθμού. Η συλλογή αυτή έγινε γνωστή μέσω μιας Εβραικής μετάφρασης του 1460.

Abu'l Wafa[43]: Στη συνέχεια συναντάμε τον *Muhammed ibn Muhammed ibn Jahja ibn Ismail Al Abbas Abu'l Wafa* (940-998), ο οποίος μετέφρασε και έγραψε σχόλια σε έργα του *Διοφάντου*, του *Ευκλείδη* κ.α. Ο *Abu'l Wafa* έγραψε πολλά ενδιαφέροντα γεωμετρικά έργα, τα περισσότερα από τα οποία είναι άγνωστα στην Ευρώπη. Ένα γνωστό και πολύ ενδιαφέρον βιβλίο του είναι το *Βιβλίο Γεωμετρικών Κατασκευών*. Το βιβλίο αυτό, όπως το δηλώνει και ο τίτλος του, περιλαμβάνει προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, κυρίως με κανόνα και διαβήτη. Ανάμεσα τους

[41] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968, σελίς 258

[42] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 264-265.

[43] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 267-270.

είναι κατασκευές κανονικών πολυέδρων, η κατασκευή του κανονικού επταγώνου και κανονικού εννεαγώνου. Ο *Abu'l Wafa* ήταν ο πρώτος που έκανε τις λεγόμενες κατασκευές με σκουριασμένο διαβήτη.[44] Παραδείγματος χάριν λύνει τα εξής προβλήματα κατασκευών.

"*Με ένα μόνο άνοιγμα του διαβήτη να εγγραφεί τετράγωνο σε κύκλο.*"

"*Να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο σε δοθέν τετράγωνο ΑΒΓΔ.* "

Alhazen[45]: Ο *Al Hasan ibn Al Hasan ibn Al Haitam Abu Ali* (965-1039), ο οποίος έγινε γνωστός στη Δύση ως *Alhazen*, ήταν μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος και γιατρός, ενώ έκανε σημαντικές ανακαλύψεις στην οπτική. Έχει γράψει πλήθος έργων, μαθηματικών, αστρονομικών, φιλοσοφικών (πάνω από 130) τα περισσότερα από τα οποία όμως δεν έχουν εκδοθεί. Τα κείμενά του φαίνεται να είναι επηρεασμένα από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.

Είναι ιδιαίτερα γνωστός για το λεγόμενο *πρόβλημα του Alhazen* που λέει το εξής:
"*Δοθέντος ενός κάτοπτρου Κ (κοίλου ή κυρτού) και δύο σημείων Α και Β, να προσδιοριστεί το σημείο Γ επί του Κ στο οποίο γίνεται η ανάκλαση ακτίνας φωτός από το Α στο Β.*"

Το πρόβλημα αυτό για το Κ επίπεδο είχε ήδη λυθεί από τον Ήρωνα, για τον κύκλο λύθηκε από τον *Alhazen*. Η περίπτωση του κύκλου, δεν επιδέχεται λύση με κανόνα και διαβήτη αλλά πρέπει να προσφύγουμε σε κωνικές τομές.

Al Biruni[46]: Ο *Al Biruni* (973-1048) ήταν μαθηματικός, αστρονόμος, ιστορικός και κατασκευαστής επιστημονικών οργάνων. Έγινε γνωστός για το έργο του για τον υπολογισμό των χορδών ενός κύκλου, ενώ ασχολήθηκε με την κατασκευή κανονικού επταγώνου και κανονικού εννεαγώνου. Ο *Al Biruni* φαίνεται πως έχει επηρεαστεί από τον *Brahmagupta*, ωστόσο δηλώνει ότι ο τύπος του Ήρωνα για τα τετράπλευρα, δεν ισχύει γενικά αλλά μόνο για τα εγγράψιμα, κάτι που ο *Brahmagupta* αγνοούσε.

---

[44] Διαβήτης με σταθερό άνοιγμα.

[45] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 271-272.

[46] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 272-273.

1.6 Δυτικός Μεσσαίωνας-Αναγέννηση

Βοήθιος: Στους πρώτους αυτούς αιώνες συναντάμε κείμενα των *Κασσιόδωρου* (475-570), *Βοήθιου* (480-525) και *Ισίδωρου* (560-663). Από αυτούς θα ξεχωρίσουμε τον Βοήθιο, ο οποίος αν και γεννήθηκε στη Ρώμη, ήταν καλός γνώστης της Ελληνικής γλώσσας και μετέφρασε στα λατινικά έργα του *Πτολεμαίου*, του *Νικόμαχου* και του *Ευκλείδη*. Επίσης είναι ο δημιουργός του έργου *Μαθήματα Αριθμητικής* το οποίο βοήθησε πολύ στην διάδοση των μαθηματικών γνώσεων. Το περιεχόμενο του έργου αυτού έχει πάρα πολλά κοινά στοιχεία με αυτό του Νικομάχου.[47] Το όνομα του *Βοήθιου* είναι στενά συνδεδεμένο με ένα παιχνίδι γνωστό ως *Αριθμομαχία*. Η *Αριθμομαχία* ήταν ένα παιχνίδι που απασχόλησε ιδιαίτερα στα χρόνια του Μεσσαίωνα. Η παράδοση ωστόσο θέλει τον Βοήθιο να εμπνεύστηκε και χρησιμοποίησε το παιχνίδι αυτό κατά τη διάρκεια της παραμονής του στη φυλακή.[48]

Αλκουίνος (735-804): Το 775 μ.Χ. συναντάμε μία όμορφη συλλογή προβλημάτων το *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (Θέματα προς άσκηση των νέων) που αποδίδεται στον Αββά Αλκουίνο. Τα περισσότερα από τα προβλήματα που περιλαμβάνει αυτή η συλλογή είναι καθαρά αριθμητικά ή σχετίζονται με τον υπολογισμό εμβαδών. Τα αριθμητικά προβλήματα είναι επηρεασμένα από τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, αλλά και από την Ανατολή. Έτσι συναντάμε γνωστές κατηγορίες προβλημάτων όπως τα *προβλήματα των εκατό πτηνών*, *προβλήματα δεξαμενών*, *προβλήματα ανταλλαγών* κ.α. Ενώ εμφανίζεται για πρώτη φορά το *πρόβλημα διάσχισης του ποταμού* (Παράγραφος 2.6), το οποίο στη συνέχεια επανεμφανίζεται σε διάφορες παραλλαγές σε πληθώρα μεταγενέστερων κειμένων. Στη συλλογή αυτή αναφερόμαστε αναλυτικότερα στην παράγραφο 2.4.

Στις αρχές του 12ου αιώνα σηματοδοτείται μία νέα εποχή με τα πρωτοεμφανιζόμενα τότε *universitas magistrorum et scholariorum*, μία εμβρυακή φάση των σημερινών πανεπιστημίων. Τα πρώτα ήταν της Βολωνίας (1100), του Παρισιού (1150), του Καίμπριτζ (1210), Πάδοβας (1222), Νεαπόλεως (1224).[49] Στην πορεία εξελίχθηκαν μέχρι να φτάσουν στη σημερινή δομή των πανεπιστημίων. Η δημιουργία αυτή βοήθησε στην ανάπτυξη του πολιτισμού και την επανεμφάνιση του ενδιαφέροντος για τη μελέτη των παλαιότερων σημαντικών έργων.

---

[47] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 184-185.

[48] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 188.

[49] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 199-200.

<u>*Leonardo Fibonacci*</u> (1175-1240): Απο τις πρώτες και σημαντικότερες προσωπικότητες που συναντάμε σε αυτή την περίοδο είναι ο Ιταλός *Leonardo Fibonacci* (1175-1240). Στο υπέροχο βιβλία Αριθμητικής με τίτλο *Liber Abaci* (1202) που έγραψε, περιλαμβάνεται μία σειρά από προβλήματα, τα οποία είναι εμφανώς επηρεασμένα από τα έργα των Αράβων μαθηματικών.

Για παράδειγμα το 6ο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε *εμπορικά προβλήματα*, όπως της μετατροπής νομισμάτων και το *πρόβλημα των εκατό πτηνών* , σε μία άλλη όμως εκδοχή:

"Κάποιος αγοράζει με 30 δηνάρια 30 πτηνά, μεταξύ των οποίων υπάρχουν πέρδικες, περιστέρια και σπουργίτια. Πόσα αγόρασε από το κάθε είδος αν γνωρίζουμε, ότι η τιμή της πέρδικας είναι 3 δηνάρια, του περιστεριού 2 και του σπουργιτιού $\frac{1}{2}$;"[50]

Το συγκεκριμένο πρόβλημα φαίνεται πως τον απασχόλησε ιδιαίτερα μιας και εμφανίζεται και σε κείμενό του με τίτλο *Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum Phylosophum domini Imperatoris* (Επιστολή του Λεονάρδου προς τον μάγιστρον Θεόδωρον, φιλόσοφον του Αυτοκράτορος) έχει την εξής εκφώνηση:

"Κάποιος αγοράζει πτηνά, μεταξύ των οποίων υπάρχουν σπουργίτια, τρυγόνια και περιστέρια. Πόσα αγόρασε από το κάθε είδος αν το ένα σπουργίτι στοιχίζει $\frac{1}{3}$ δηνάρια, το ένα τρυγόνι $\frac{1}{2}$ και το ένα περιστέρι 2 δηνάρια. "

Ο αριθμός των πτηνών που αγοράστηκαν και ο αριθμός των χρημάτων που χρειάστηκαν είναι άλλοτε ίσοι και άλλοτε διαφορετικοί. Για παράδειγμα, αν είναι και οι δύο 30, βρίσκει μία λύση. Αν είναι 29 τα πτηνά και 30 τα δηνάρια βρίσκει δύο λύσεις. Ενώ αν είναι τα πτηνά 15 και 30 τα δηνάρια το πρόβλημα είναι άλυτο στους θετικούς ακέραιους.[51]

Στο *Liber Abaci* πρωτοσυναντάμε το εξής *πρόβλημα κληρονομιάς*:

"Ένας άντρας που πλησίαζε το τέλος του, κάλεσε τους γιους του και τους ζήτησε να μοιράσουν την περιουσία του, σύμφωνα με την επιθυμία του. Στον μεγάλο γιο του είπε να πάρει ένα σόλδι και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον δεύτερο γιο του να πάρει 2 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον τρίτο γιο του είπε να πάρει 3 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν κ.ο.κ. Έτσι λοιπόν κάθε γιος θα παίρνει ένα σόλδι περισσότερο από τον προηγούμενο και το 1/7 από

---

[50]G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 295.

[51]G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 306.

ότι θα παραμένει. Τέλος, ο τελευταίος γιος θα πάρει ότι περισσέψει. Με αυτό τον τρόπο η περιουσία θα έχει μοιραστεί δίκαια και όλοι θα έχουν πάρει τα ίδια χρήματα. Πόσους γιους είχε και πόσο μεγάλη ήταν οι περιουσία του;"

Επίσης στο *Liber Abaci* περιλαμβάνονται *προβλήματα ανταλλαγών*, το *πρόβλημα του ταχυδρόμου* και άλλα, τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού και λύνονται εύκολα.

Ένα πρόβλημα σχετικό με αριθμητική πρόοδο και είναι το εξής:

"Είναι δύο οδοιπόροι από τους οποίους ο ένας τρέχει με 20 μίλια τη μέρα, ενώ ο άλλος τρέχει 1 μίλι την πρώτη μέρα, 2 τη δεύτερη, 3 την τρίτη κ.ο.κ. Ζητείται να βρεθεί μετά από πόσες μέρες οι δύο οδοιπόροι θα έχουν καλύψει την ίδια απόσταση."

Μια λιγότερο γνωστή κατηγορία είναι η παρακάτω:
"Ενός στήλου είναι μέσα στο έδαφος το $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ του μήκους του, αν το κομμάτι αυτό είναι 21 πόδια να βρεθεί το συνολικό μήκος του στήλου."[52]

Τέλος στο *Liber Abaci* συναντάμε το *πρόβλημα με τα κουνέλια*, το σπουδαιότερο της συλλογής, από το οποίο προκύπτουν οι γνωστοι σήμερα *αριθμοί του Fibonacci*. Περισσότερα πράγματα για τον *Fibonacci* και το *Liber Abaci* αναφέρουμε στην Παράγραφο 2.9.

Jordanus Nemorarius (1225-1260): Ο Γερμανός *Jordanus Nemorarius* ή *Giordano Nemorario* είναι ο δημιουργός 6 μαθηματικών βιβλίων που αφορούν την Αριθμητική, την Άλγεβρα και την Γεωμετρία. Ανάμεσα τους θα ξεχωρίσουμε ένα βιβλίο Αριθμητικής το *De Elementis Arithmeticae Ertis*, ένα Άλγεβρας το *De Numeris Datis* και ένα Γεωμετρίας με τίτλο *Liber Phylotegni de Triangulis*. Ο *Jordanus Nemorarius* είναι από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν γράμματα αντί για αριθμούς στους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Με αυτό τον τρόπο στο *De Numeris Datis* λύνει γενικά τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ενώ στη συνέχεια δίνει αριθμητικά παραδείγματα.[53] Το *Liber Phylotegni de Triangulis* αποτελείται από τέσσερα βιβλία που περιλαμβάνουν προβλήματα σχετικά με ευθύγραμμα σχήματα, κύκλο και εγγεγραμμένα ή περιγγεγραμμένα πολύγωνα. Ανάμεσα τους συναντάμε το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας καθώς και του διπλασιασμού του κύβου. Τα έργα του είναι εμφανώς επηρεασμένα από τους Άραβες συγγραφείς.[54]

[52] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 296.

[53] *http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Jordanus.html*

[54] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 317-318.

Μάξιμος Πλανούδης: Στη συνέχεια συναντάμε ένα κείμενο με τίτλο *Ψηφοφορία κατ' Ινδούς η λεγόμενη Μεγάλη* του μοναχού *Μάξιμου Πλανούδη* (1260-1310). Ο *Πλανούδης* ήταν ο πρώτος Έλληνας συγγραφέας που έγραψε για το Ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης. Στο κείμενο περιλαμβάνεται μία σειρά από προβλήματα, όπως το παρακάτω *πρόβλημα κληρονομιάς*.

«Ένας άντρας που πλησίαζε το τέλος του, ζήτησε να του φέρουν το χρηματοκιβώτιο του και μοίραζε την περιουσία του στους γιούς του, ως εξής: Ο πρώτος θα πάρει ένα χρυσό νόμισμα και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Ο δεύτερος θα πάρει 2 νομίσματα και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Ο τρίτος θα πάρει 3 νομίσματα και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. 'Οταν έφτασε σε αυτό το σημείο πέθανε και δεν πρόλαβε να συνεχίσει. Συνεχίζοντας τη διανομή με αυτόν τον τρόπο μέχρι το τέλος, να βρεθεί το πλήθος των γιων και το ποσό των χρημάτων που είχε αρχικά το χρηματοκιβώτιο.»[55]

Με ακριβώς τα ίδια νούμερα το πρωτοσυναντάμε στο *Liber Abaci* του *Fibonacci* (σελ. 84), ενώ στη συνέχεια σε συλλογές όπως του *Chuquet* (σελ. 86) και αλλού.

Ραβδάς: Προχωρώντας συνατάμε τον Νικόλαο Αρταβάσδο, γνωστό ως Ραβδά. Ο Ραβδάς είχε γράψει δύο έργα που τον έκαναν γνωστό, την λεγόμενη πρώτη και τη λεγόμενη δεύτερη των *Επιστολών*. Η δεύτερη των επιστολών γράφτηκε το 1341 μ.Χ. και περιλαμβάνει προβλήματα που παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα με αυτά της *Παλατινής Ανθολογίας*, με τη διαφορά ότι εδώ ο συγγραφέας δίνει και τις λύσεις των προβλημάτων. Ανάμεσα στα προβλήματα της συλλογής είναι και το *πρόβλημα των ανταλλαγών* που βρίσκεται σε πολλές μεταγενέστερες συλλογές.

«Δύο έμποροι διεκδικούν να αγοράσουν ένα σμαράγδι, του οποίου η αξία ανέρχεται στις 10 χιλιάδες χρυσά νομίσματα. Ο πρώτος λέει στον δεύτερο: Δώσε μου το $\frac{1}{5}$ *των χρημάτων σου για να μπορέσω να αγοράσω το σμαράγδι. Ο δεύτερος απαντά: 'Οχι, δάνεισέ μου το* $\frac{1}{7}$ *των χρημάτων σου και θα μπορέσω να το αγοράσω. Πόσα χρήματα είχε ο κάθε έμπορος;»*[56]

Το ενδιαφέρον στα παραπάνω προβλήματα τόσο της Δύσης όσο και της Ανατολής είναι ότι οι δημιουργοί τους και αυτοί που στην πορεία ασχολήθηκαν μαζί τους δεν είχαν το πλεονέκτημα του αλγεβρικού συμβολισμού και τα προβλήματα αυτά χρειάζονταν επιπλέον προσπάθεια και έξυπνα βήματα για να λυθούν.

[55] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 162-163.

[56] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 165.

Μανουήλ Μοσχόπουλος[57]: Το επόμενο σημαντικό έργο που συναντάμε είναι του *Μάνουήλ Μοσχόπουλου* ($\sim$1300). Ασχολείται με κατασκευή *Μαγικών τετραγώνων*, όπως αυτά που συναντήσαμε στα αρχαία Κινεζικά μαθηματικά. Ο Μοσχόπουλος διακρίνει όλους τους αριθμούς σε τρεις κατηγορίες:
περιττούς της μορφής $2k+1$, αρτίως άρτιους της μορφής 2^l, περιττώς αρτίους της μορφής $2^l(2k+1)$.

Στην εργασία του δίνει μεθόδους κατασκευής μαγικών τετραγώνων μόνο των δύο πρώτων κατηγοριών.

Ανακάλυψε πρώτος τα παρακάτω δύο Μαγικά τετράγωνα

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

1	62	59	8	9	54	51	16
60	7	2	61	52	15	10	53
6	57	64	3	14	49	56	11
63	4	5	58	55	12	13	50
17	46	43	24	25	38	35	32
44	23	18	45	36	31	26	37
22	41	48	19	30	33	40	27
47	20	21	42	39	28	29	34

Με τα *Μαγικά τετράγωνα* ασχολήθηκαν τόσο στην Ευρώπη, όσο και στην Ανατολή. Αναφερόμαστε αναλυτικότερα στα Μαγικά τετράγωνα στην Παράγραφο 2.8.

Johannes Müller (1436-1476): Ο Γερμανός *Johannes Müller* (1436-1476), γνωστός και ως *Regiomontanus*, είχε μελετήσει και μεταφράσει στα Λατινικά έργα του *Πτολεμαίου*, του *Ευκλείδη*, του *Αρχιμήδη*, του *Απολλωνίου* και άλλων μικρότερων Ελλήνων γεωμετρών στα Λατινικά. Το 1464 έγραψε το *De triangulis omnimodis libri* " (Περί παντοειδών τριγώνων), το οποίο είναι το πρώτο βιβλίο

[57]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 166-167.

Τριγωνομετρίας Ευρωπαίου συγγραφέα. Το έργο αυτό περιλαμβάνει πλήθος προτάσεων, θεωρήματα καθώς και προβλήματα.

Σε μία από τις επιστολές που έστειλε σε συναδέλφους ο *Regiomontanus* περιλαμβάνονται προβλήματα όμοια με αυτά που έχουμε δει στην Κίνα, Αραβία, και στον *Fibonacci* όπως το *πρόβλημα των εκατό πτηνών* και άλλα αριθμητικά προβλήματα:

"Να βρεθούν τρία τετράγωνα σε αριθμητική πρόοδο."
"Να βρεθούν τρία τετράγωνα σε μια αριθμητική πρόοδο, το μικρότερο των οποίων να μην υπερβαίνει τον 20.000."
"Να βρεθούν τρεις ακέραιοι αριθμοί που να έχουν άθροισμα 214, των οποίων τα τετράγωνα να αποτελούν αριθμητική πρόοδο."

Σε αρκετά από τα προβλήματα δεν δίνει λύση και δεν γνωρίζουμε αν μπορούσε να τα αντιμετωπίσει.

Albert Dürer[58] (1471-1528): Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε ένα Γερμανό ζωγράφο τον *Albert Dürer* (1471-1528) και στο έργο του με τίτλο *Μελαγχολία*[59]. Ο *Dürer* είναι ο πρώτος Γερμανός που φαίνεται πως γνώριζε τα μαγικά τετράγωνα, μιας και στον πίνακα του εμφανίζεται το παρακάτω πλαίσιο.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Το μαγικό αυτό τετράγωνο που προκύπτει από ένα ήδη γνωστό από τον Μοσχόπουλο, αν αλλάξουμε την θέση της δεύτερης με την τρίτη στήλη. Τα μαγικά τετράγωνα δεν είναι η μόνη σχέση του *Dürer* με τα μαθηματικά, καθώς είναι και ο συγγραφέας του *Institutionem geometricarum Liibri quatuor* (Μαθημάτων γεωμετρίας βιβλία τέσσερα). Πρόκειται για ένα εξαιρετικό κείμενο Γεωμετρίας σχετικό με θεωρίες και κατασκευές που αφορούν καμπύλες, επιφάνειες στερεών και άλλα ζητήματα χρήσιμα στους καλλιτέχνες.

Nicola Chuquet (1445-1488): Το 1484 γράφτηκε ένα πολύ αξιόλογο κείμενο με τον τίτλο *Triparty en la science des nombres* (Τριμερής Αριθμητική) από τον

[58] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 347.

[59] Βλ. φωτογραφία του πίνακα στη σελίδα 75

Νικόλαο *Chuquet*. Στη Παράγραφο 2.10 το μελετάμε αναλυτικότερα.

Johannes Widmann[60] (1460-1498): Το 1489 δημοσιεύτηκε ένα έργο του *Johannes Widmann* με τίτλο *Behend und hübsch rechnung auf allen Kauffmannschafften* (Ταχύς και κομψός λογισμός για όλες τις εμπορικές τάξεις). Στο έργο αυτό εμφανίζονται για πρώτη φορά τα σύμβολα + και - για τη δήλωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Δεν μπορούν όμως να αποδοθούν στον *Widmann*, καθώς χρησιμοποιούνταν ήδη. Πρόκειται για ένα βιβλίο αριθμητικής αποτελούμενο από τρία μέρη. Τα πρώτα δύο μέρη περιλαμβάνουν λογισμό με ακεραίους αριθμούς, με κλάσματα, αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους, αναλογίες καθώς και πρακτικά προβλήματα. Το τρίτο μέρος περιλαμβάνει γεωμετρικά προβλήματα σχετικά με τον υπολογισμό μηκών και εμβαδών επίπεδων σχημάτων με αριθμητικά δεδομένα. Το βιβλίο αυτό έγινε ιδιαίτερα γνωστό και επανεκδόθηκε το 1508 στο *Pforzheim*, το 1519 στο *Hagenau* και το 1526 στο *Augsburg*.[61] Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι κάποια τμήματα του κειμένου είναι παρμένα αυτολεξεί από την *Αριθμητική του Bamberg*.

Luca Pacioli[62] (1445-1514): Ο μαθηματικός, θεολόγος και φιλόσοφος *Luca Pacioli* ή *Lucas de Burgo* στα Λατινικά γεννήθηκε στο *Borgo San Sepolcro* στην *Umbria* της Ιταλίας. Η μεγάλη του φήμη στηρίζεται κυρίως στην μαθηματική εγκυκλοπαίδεια την οποία έγραψε με τίτλο *Summa di Arithmetica*, *Geometria*, *Proportioni et Proportionalità* ή απλά *Summa* η οποία εκδόθηκε το 1494 και επανεκδόθηκε το 1523. Ο *Pacioli* παραδέχεται ότι πολλά θέματα τα έχει πάρει από προγενέστερες εργασίες όπως το *Liber Abaci* του *Fibonacci*, έργα του *Ευκλείδη*, του *Βοήθιου*, του *Nemorario*, του *Regiomontano* και πολλών Αράβων μαθηματικών. Η *Summa* εκτός από μαθηματικά περιλαμβάνει ιστορικά και βιογραφικά στοιχεία. Το έργο αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη. Το ένα διαπραγματεύεται την επιστήμη του λογισμού και το άλλο τη Γεωμετρία. Αναλυτικότερα ο *Pacioli* στο πρώτο μέρος αναφέρεται στους τέλειους αριθμούς και λύνει προβλήματα απροσδιορίστου αναλύσεως, όπως αυτά που συναντήσαμε στην Κίνα, την Αραβία και τη Δύση, ασχολείται με κλάσματα, με το άθροισμα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και άλλα. Ενα μεγάλο κομμάτι του πρώτου μέρους του έργου του το αφιέρωσε στη λογιστική και ήταν αυτό που τον καθιέρωσε ως τον πατέρα της λογιστικής. Στη *Summa* δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά μία περιγραφή της λογιστικής μεθόδου

[60] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 358-360.

[61] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Widman.html*

[62] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 360-375.

που χρησιμοποιούσαν στην Ιταλία στις αρχές του 15ου αιώνα, γνωστή ως σύστημα διπλογραφιών.

Το δεύτερο μέρος της *Summa* όπως αναφέραμε και παραπάνω έχει να κάνει με τη Γεωμετρία. Ο *Pacioli* φαίνεται πως είχε μελετήσει τα *Στοιχεία* του *Ευκλείδη* και το *Practica Geometriae* του *Fibonacci* και δεν παρουσιάζει πολλά πρωτότυπα πράγματα. Θα περιοριστούμε στη αναφορά κάποιων προβλημάτων[63] από τα 100 που περιλαμβάνει το 8ο και τελευταίο τμήμα αυτού του μέρους.

"Αν γνωρίζουμε τις δύο πλευρές ενός τριγώνου και το εμβαδόν του να βρεθεί η τρίτη πλευρά."
"Να υπολογιστούν οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου."
"Αν δίνεται το εμβαδόν ενός τριγώνου και οι σχέσεις των πλευρών x, $x+1$, $x+2$ *να υπολογιστούν οι πλευρές."*
"Αν δίνεται τρίγωνο να εγγραφεί ημικύκλιο με τη βάση του στη μία πλευρά του τριγώνου και να εφάπτεται στις άλλες δύο."

Προχωράμε σε ένα ακόμα έργο του *Pacioli* με τίτλο *De viribus quantitatis*[64] (Περί δυνάμεων της ποσότητας), το οποίο σώζεται σε χειρόγραφο στη βιβλιοθήκη της Βολωνίας. Πρόκειται για μία συλλογή προβλημάτων του ίδιου τύπου με αυτά της συλλογής του Αλκουίνου, αρκετά από τα οποία συναντήσαμε και στον *Fibonacci*. Αργότερα τα βρίσκουμε και σε έργο του *Tartaglia*. Το πρώτο μέρος της συλλογής περιλαμβάνει αριθμητικά προβληματα που οδήγουν στη λύση γραμμικών ή μη εξισώσεων. Αναμεσά τους βρίσκονται το *πρόβλημα διάσχισης του ποταμού* και το *πρόβλημα του Ιωσήπου*. Το δεύτερο παρουσιάζεται στην εκδοχή 15 χριστιανών και 15 Μωαμεθανών όπου δίνει μνημονικούς κανόνες για την διάσωση των χριστιανών, όταν η εκλογή των θυμάτων γίνεται ανά 3,4,5 κλπ. μέχρι 12 άτομα. Το δεύτερο μέρος της συλλογής περιλαμβάνει 80 προβλήματα και 54 φυσικομαθηματικά παιχνίδια. Ανάμεσα τους βρίσκονται Γεωμετρικά προβλήματα στα οποία προσεγγίζονται κατασκευές κανονικών πολυγώνων με 9, 11, 13 και 17 γωνίες. Δυστυχώς το χειρόγραφο είναι κατεστραμμένο και δεν φαίνεται η κατασκευή του τελευταίου πολυγώνου. Τέλος το τρίτο και τελευταίο μέρος της συλλογής περιλαμβάνει μία σειρά από ανέκδοτα, παροιμίες, ποιήματα κλπ.

<u>*Christoff Rudolff*</u> (1499-1545): Ο Γερμανός *Rudolff* είναι γνωστός για το έργο του με τίτλο *Die Coss* (Ο Αλγεβρικός Λογισμός) που γράφτηκε το 1525. Το

[63] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίς 369.

[64] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 372-375.

Die Coss μπορεί να θεωρηθεί το πρώτο βιβλίο άλγεβρας στη Γερμανία. Στο έργο αυτό περιλαμβάνονται αριθμητικά προβλημάτα, ανάμεσα τους πολλά ήδη γνωστά από τα Κινεζικά μαθηματικά. Το πρόβλημα των εκατό πτηνών συναντάται στην εξής παραλλαγή:
"Ένας όμιλος αποτελούμενος από δεδομένο αριθμό αντρών, γυναικών και κοριτσιών υποχρεούται να πληρώσει κάποιον λογαριασμό. Γνωρίζοντας το ποσοστό που πρέπει να δώσει ο κάθε άντρας, κάθε γυναίκα και κάθε κοριτσάκι, ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των αντρών, των γυναικών και των κοριτσιών που αποτελούν τον όμιλο."[65]

Nicolò Tartaglia (1500-1557): Ο Ιταλός *Tartaglia* ήταν μαθηματικός, μηχανικός και τοπογράφος. Θεωρεί τον εαυτό του εφευρέτη της Βλητικής, καθώς είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι το μέγιστο βεληνεκές των πυροβόλων όπλων επιτυγχάνεται υπό γωνία βολής 45 μοιρών. Ένα από τα σημαντικά του έργα είναι το *Delli quesiti et inventioni diverse*[66] (περί διαφόρων προβλημάτων και νέων ευρημάτων), το οποίο τυπώθηκε για πρώτη φορά το 1546. Πρόκειται για μία συλλογή προβλημάτων μαζί με βιογραφικά και ιστορικά στοιχεία. Τα πρώτα τέσσερα κεφάλαια περιλαμβάνουν προβλήματα σχετικά με την βλητική και το πυροβολικό. Στο πέμπτο κεφάλαιο τα προβλήματα ανήκουν στην τοπογραφία και στα επόμενα τρία στην οχυρωματική και τη στατική. Το σημαντικότερο κεφάλαιο για εμάς είναι το ένατο και τελευταίο που περιλαμβάνει αριθμητικά, αλγεβρικά και γεωμετρικά προβλήματα. Τα αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα είναι αυτά που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Συναντάμε προβλήματα σχετικά με το εμπόριο και την καθημερινότητα, τα οποία λύνονται με τη βοήθεια εξισώσεων μέχρι και τρίτου βαθμού. Ο *Pacioli* ισχυρίζεται ότι όλες οι τριτοβάθμιες εξισώσεις είναι αδύνατες. Ο *Tartaglia* όμως δεν συμφωνεί με αυτή τη άποψη και βρήκε μεθόδους για τη λυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων, τις οποίες τελικά δημοσίευσε ο *Cardano* στο *Ars Magna*.

Ο *Tartaglia* ετοίμαζε να εκδώσει μία αναλυτική εργασία πάνω στην έρευνα που είχε κάνει και τα οποτελέσματα που είχε πάρει για τις εξισώσεις τρίτου βαθμού. Στην ουσία ήθελε να δημιουργήσει μία μαθηματική εγκυκλοπαίδεια, την οποία όμως δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει. Το έργο του αυτό έχει τον τίτλο *General trattato di numeri et misure*[67] (Γενική πραγματεία περί αριθμών και μεγεθών) και αν τυπωνόνταν σήμερα θα καταλάμβανε περίπου 4000 σελίδες! Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει πρακτική αριθμητική και προβλήματα που έχουν να κάνουν με την

[65] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 66.

[66] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 22-28.

[67] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 38-43.

καθημερινότητα και τις εμπορικές συναλλαγές. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει δυνάμεις, την εξαγωγή τετραγωνικών και κυβικών ριζών και σκέψεις για το πως έφτασε στον υπολογισμό των τριτοβάθμιων εξισώσεων. Επίσης εμφανίζει το γνωστό μας σήμερα τρίγωνο του *Pascal* και υποστηρίζει ότι είναι δική του ανακάλυψη, κάτι που βέβαια δεν ισχύει. Στην πορεία συναντάμε αναλογίες, ισοδύναμους αριθμούς και άλλα ήδη γνωστά. Ένα πρόβλημα στο οποίο αξίζει να σταθούμε είναι το παρακάτω:
"*Κάποιος έχει τέσσερα σταθμά, με σειρά μεγέθους κατασκευασμένα, ώστε με αυτά να μπορεί να ζυγίσει όσα κιλά μπορεί να σηκώσει με το χέρι του από 1 έως 40. Ζητείται να βρεθεί με ποια σειρά μεγέθους κατασκευάστηκαν τα σταθμά.*"[68]
Το πρόβλημα έγινε ιδιαίτερα γνωστό και το συναντάμε μετέπειτα σε συλλογή προβλημάτων του *Bachet*. Τα κεφάλαια 2-4 είναι σχετικά τόσο με πρακτικά όσο και με θεωρητικά ζητήματα της Γεωμετρίας. Τέλος στο 5ο μέρος συναντάμε αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα τα οποία λύνονται με τη βοήθεια εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

<u>*Cardano*</u> (1501-1576): Ο Ιταλός *Girolamo* ή *Hieronimo Cardano* ή *Jerome Cardan* ήταν μαθηματικός, γιατρός και είχε γράψει αρκετά βιβλία. Για τα έργα του *Cardano* μπορούμε να έχουμε αρκετές πληροφορίες διότι περιλαμβάνονται όλα μέσα στα *Άπαντα* του. Το πιο γνωστό από τα έργα του είναι το *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (Μεγάλης τέχνης ή περί αλγεβρικών μεθόδων Βιβλίον ένα) ή *Ars Magna*, 1545.[69] Πρόκειται για ένα βιβλίο Άλγεβρας που αποτελείται από 40 κεφάλαια, ανάμεσά τους ξεχωρίζει εκείνο στο οποίο παρουσιάζει μεθόδους για τη λύση εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Δεν είναι ο δημιουργός των μεθόδων αυτών, τις έχει μάθει από τον *Tartaglia*.

Το 1539 έγραψε ένα έργο με τίτλο *Practica Arithmeticae*[70] (Εφαρμογές της αριθμητικής). Πρόκειται για μία εργασία πάνω στην επιστήμη των αριθμών, επηρεασμένη από το *Liber Abaci* του *Fibonacci*, για το οποίο έμαθε μέσα από την *Summa* του *Pacioli*. Το *Practica Arithmeticae* χωρίζεται σε 67 κεφάλαια και, σύμφωνα με τον *Cardano*, προοριζόταν για το πρώτο μέρος μιας μεγάλης εγκυκλοπαίδειας για την τέχνη του λογισμού, με τίτλο *Opus Perfectum*. Σε αυτήν την εργασία μιλά για ακέραιους και κλασματικούς αριθμούς, κυβικές και τετραγωνικές ρίζες, αναλογίες, ενώ περιλαμβάνει αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα. Τα αριθμητικά είναι σχετικά με την καθημερινότητα, τις εμπορικές συναλλαγές όπως

[68]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίς 40.

[69]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίς 16.

[70]Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 13-15.

προβλήματα εταιρίας, ανταλλαγής νομισμάτων, τόκου κλπ. Τα προβλήματα αυτά οδηγούν σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, συστήματα εξισώσεων, ακολουθίες αριθμών, απλές εφαρμογές της συνδυαστικής και των πιθανοτήτων κ.α. Τα γεωμετρικά προβλήματα είναι συχνά απλή εφαρμογή τύπων. Ο *Cardano* για να διευκολύνει τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων δίνει ένα πίνακα χορδών και αποστημάτων κάποιων κανονικών πολυγώνων, και κάποια δεδομένα των κανονικών πολυέδρων. Ο *Cardano* έχει αντλήσει αρκετά πράγματα από τον *Pacioli* και έχει αφιερώσει ένα ολόκληρο κεφάλαιο για να ανεφέρει τα σφάλματα που συνάντησε στη *Summa* και τα διορθώνει.

1.7 17ος αιώνας και έπειτα

Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638): Ο Γάλλος μαθηματικός *Bachet* είναι ιδιαίτερα γνωστός για τα βιβλία που έγραψε με προβλήματα διασκεδαστικών μαθηματικών και για την λατινική μετάφραση των *Αριθμητικών* του *Διόφαντου* το 1621, που όπως λέγεται ήταν το βιβλίο πάνω στο οποίο έγραψε ο *Fermat* τις περιορισμένες σημειώσεις του για το διάσημο τελευταίο θεώρημα. Μία από τις πιο όμορφες συλλογές προβλημάτων-γρίφων έχει τίτλο *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*. Η συλλογή αυτή είναι η πρώτη συλλογή διασκεδαστικών μαθηματικών που τυπωθηκε ποτέ. Η πρώτη έκδοση έγινε το 1612 και επανεκδόθηκε πολλές φορές μέχρι και το 1959. Περιλαμβάνει προβλήματα από προγενέστερες συλλογές, όπως είναι η *Παλατινή Ανθολογία* και οι συλλογές του Αλκουίνου, του Μοσχόπουλου, του *Tartalia* κ.α. Αναφερόμαστε πιο αναλυτικά στην παράγραφο 2.11.

Τον 17ο αιώνα ξεκίνησε μία νέα και ιδιαίτερα γόνιμη περίοδος για τα μαθηματικά. Ο επιστημονικός κόσμος είχε αυξηθεί και οι εξελίξεις στους επιστημονικούς τομείς ήταν γρήγορες, έτσι υπήρξε ανάγκη μεγαλύτερης επικοινωνίας μεταξύ των επιστημόνων. Ήδη κάποιοι από τους επιστήμονες διατηρούσαν μεταξύ τους αλληλογραφιά επιστημονικού περιεχομένου, αλλά δεν ήταν δυνατόν να ενημερώνονται για την πορεία των ερευνών όλου του επιστημονικού κόσμου. Οι επιστολές που έστελναν ήταν και ένα μέσω για να ξεκαθαριστεί ποιος ήταν ο πρώτος που απέδειξε κάποιο θεώρημα ή έλυσε κάποιο πρόβλημα. Κάποιοι λοιπόν στον επιστημονικό χόρο ανέλαβαν να συγκεντρώνουν και να διαδίδουν τις πληροφορίες των νέων επιστημονικών ανακαλύψεων. Στα μαθηματικά τη θέση του διαμεσολαβιτή ανέλαβε αρχικά ο *Mersenne*, ενώ στη συνέχεια ακολούθησαν και άλλοι. Ο *Mersenne* συγκέντρωνε και στη συνέχεια έκανε γνωστές τις νέες ανακαλύψεις, ενώ κρατούσε ουδέτερη στάση ανάμεσα στις επιστημονικές αντιπαραθέσεις. Ο τρόπος αυτός της ενημέρωσης αντικαταστάθηκε από τα περιοδικά το 1665. Το 1665 κυκλοφόρησε το πρώτο επιστημονικό περιοδικό με τίτλο *Journal des Sçavants* (Εφημερίδα των λογίων). Από τότε ακολούθησαν πλήθος επιστημονικών, αλλά και καθαρά μαθηματικών περιοδικών[71].[72]

Marin Mersenne[73] (1588-1648): Ο Γάλλος μοναχός *Mersenne*, μία από τις ξεχωριστές προσωπικότητες του 17ου αιώνα, ήταν Μαθηματικός, Φιλόσοφος και Θεολόγος. Σήμερα είναι γνωστός για την αλληλογραφία, επιστημονικού περιεχομένου, που διατηρούσε με εξέχουσες μορφές της εποχής του και για την εργασία του στη Θεωρία αριθμών. Από το 1623 άρχισε να συγκεντρώνει πληροφορίες πάνω στις επιστήμες μέσα από τις συναντήσεις του ή μέσω της αλληλογραφίας που διατηρούσε με επιστήμονες της Ευρώπης και όχι μόνο. Κανόνιζε συναντήσεις επιστημόνων με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων, τον σχολιασμό εργασιών, πειράματα και άλλα. Οι συναντήσεις αυτές έγιναν γνωστές ως Παρισιάνικη Ακαδημία (*Académie Parisiensis*) ή Ακαδημία του *Mersenne*. Ο κατάλογος με τα άτομα που αλληλογραφούσε ο *Mersenne* συνεχώς αυξανόταν και ταξίδευε αρκετά για να συναντήσει μελετητές σε όλη την Ευρώπη. Μέσα από αυτή τη διαδικασία ο *Mersenne* βοήθησε στην αξιοποίηση του ταλέντου άλλων επιστημών, δίνοντας τους τη δυνατότητα να μοιραστούν τις ιδέες και τα αποτελέσματά τους με άλλους επιστήμονες και να οδηγηθούν προς τη σωστή κατεύθυνση στις έρευνές τους. Ο στόχος του *Mersenne* ήταν να εργαστούν όλοι μαζί για να προωθήσουν την επιστήμη. Μετά τον θάνατό του βρέθηκαν στο κελί του επιστολές με πάνω από 78 διαφορετικούς αποστολείς. Αρκετές από αυτές τις επιστολές δημοσιεύτηκαν. Ανάμεσα στα πρόσωπα με τα οποία συναναστράφηκε ο *Mersenne* με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο είναι οι *Peiresc*, *Gassendi*, *Descartes*, *Roberval*, *Beeckman*, *J.B. van Helmont*, *Fermat*, *Huygens*, *Pell*, *Galileo*, *Torricelli*, *Hobbes*, *E. Pascal* και *B. Pascal*.

Ο *Mersenne* είναι επίσης γνωστός για το έργο του στη Θεωρία Αριθμών. Κατάφερε να βρει μία μέθοδο υπολογισμού πρώτων αριθμών.
Οι ακέραιοι αριθμοί $M_m = 2^m - 1$, όπου m ένας θετικός ακέραιος ονομάζονται *αριθμοί του Mersenne* και αν p είναι ένας πρώτος και ο $M_p = 2^p - 1$ είναι και αυτός πρώτος, τότε ο M_p ονομάζεται *πρώτος του Mersenne*.

Ο *Mersenne* στο έργο του *Cogitata Physica-Mathematica* (1644) διατύπωσε ότι ο M_p είναι πρώτος για $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ και σύνθετος για όλους τους άλλους πρώτους για $p < 257$. Αποδείχθηκε όμως αργότερα ότι είχε

[71] Παράγραφος 7.

[72] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 141-145.

[73] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Mersenne.html*

κάνει 5 λάθη.[74] Είναι άγνωστο αν το πλήθος των πρώτων του *Mersenne* είναι πεπερασμένο.

Pierre Fermat[75] (1601-1665): Μια ακόμα σημαντική προσωπικότητα των Μαθηματικών είναι ο Γάλλος *Pierre Fermat*. Ο *Fermat* δεν δημοσίευσε εργασίες του. Μάλιστα η εργασία του με τίτλο *Dissertatio Geometrica de Linearum Curvarum Comparatione* (Γεωμετρική διατριβή περί συγκρίσεως καμπυλών γραμμών), δημοσιεύτηκε ως παράρτημα σε έργο άλλου συγγραφέα. Όμως ο *Fermat* έγραψε πολλές επιστολές μαθηματικού περιεχομένου, τις οποίες συνέλεξε και εξέδωσε ο γιος του *Samuel* (1630-1690) σε ένα έργο με τίτλο *Varia Opera Matematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani*. Στο πέρασμα του χρόνου βρέθηκαν και άλλες επιστολές του *Fermat* οπότε, το 1843, έγινε μία νέα έκδοση του παραπάνω έργου, η οποία ήρθε στο φως μισό αιώνα αργότερα. Η συμβολή του *Fermat* είναι μεγάλη σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, όπως η Γεωμετρία, η Αναλυτική Γεωμετρία, η Άλγεβρα και η Θεωρία Αριθμών.

Απο τις επιστολές του θα ξεχωρίσουμε μία του 1640 που είχε ως παραλήπτη τον *Mersenne*.[76] Σε αυτή ο *Fermat* μιλά για τα αποτελέσματα που πήρε από την μελέτη των *Μαγικών τετραγώνων*, συμπληρώνοντας την εργασία του *Bachet* και επεκτείνοντας τη σε άλλα σχήματα. Αναφέρει ότι μπορεί να κατασκευάσει *Μαγικά τετράγωνα* τα οποία αφαιρώντας μια ή δύο γωνίες να παραμένουν μαγικά και δίνει το Σχήμα 1.2.

[74] Π.χ. $M_{67} = 2^{67} - 1 = (193707721)(761838257287)$ δεν είναι πρώτος.
(Ανακαλύφθηκε τον Οκτώβριο του 1903 από τον Αμερικανό μαθηματικό *Frederick Nelson Cole*)

[75] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 253-254.

[76] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙ, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίδες 268-269.

1	2	185	186	5	6	7	190	191	192	11	194	195	14
15	16	26	25	27	177	176	175	174	173	172	171	27	28
42	156	31	165	159	34	35	162	37	164	158	40	167	29
56	142	152	46	52	149	148	147	146	47	53	45	153	43
57	128	59	130	61	135	134	63	132	66	137	68	139	70
71	125	73	123	122	76	120	119	19	75	116	82	114	84
85	111	96	109	108	107	91	92	90	103	102	87	100	98
112	97	110	95	89	93	105	106	104	94	88	101	86	99
126	83	115	81	80	118	77	78	121	117	74	124	72	113
140	69	138	60	131	62	64	133	65	136	67	129	58	127
141	55	54	144	150	151	50	49	48	145	151	143	44	154
168	41	157	32	33	160	161	36	163	38	39	166	30	155
182	170	180	179	178	23	22	21	20	19	18	17	181	169
183	184	3	4	187	188	189	8	9	10	193	12	13	196

Σχήμα 1.2

Στη ίδια επιστολή αναφέρει ότι ανακάλυψε κανόνες κατασκευής *Μαγικών κύβων* και δίνει το παράδειγμα του Σχήματος 1.3. Κάνει χρήση των αριθμών 1 έως 64 και ζητά το άθροισμα της κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου να είναι 130.

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

I.

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	33
9	55	54	12

II.

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

III.

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

IV.

Σχήμα 1.3

Bernard Frenicle de Bessy (1605-1675): Ο Γάλλος *Bernard Frenicle de Bessy* αν και άνηκε στον δικαστικό κλάδο ξεχώρισε για την επιδεξιότητα του στη λύση μαθηματικών προβλημάτων. Είχε δημιουργήσει δικές του μεθόδους τις οποίες εφάρμοζε στα προβλήματα. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την Θεωρία Αριθμών και αντάλλασε απόψεις μέσω αλληλογραφίας με τους *Descartes*, *Fermat*, *Huygens* και *Mersenne*. Από το 1660 και μετά σταμάτησε την ενασχόληση του με τα Μαθηματικά και ασχολήθηκε τη Θεολογία. Τα έργα του εκδόθηκαν μετά το θάνατό του, στον 5ο τόμο του *Mémoires* της Ακαδημίας των Επιστημών, της οποίας ήταν μέλος. Η συγκέντρωση και η έκδοση των έργων του οφείλεται στον *La Hire*. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα έργα του *Méthode pour trouver la solution des problèmes par les exlusions* (Μέθοδος λύσεως των προβλημάτων δια των αποκλεισμών) και *Traité des triangles rectangles en nombres* (Περί ορθογωνίων τριγώνων σε αριθμούς). Στο πρώτο δίνει τεχνάσματα για την ανακάλυψη ακέραιων λύσεων σε προβλήματα που ζητείται η εύρεση ορθογωνίων τριγώνων σε ακέραιους αριθμούς. Στο δεύτερο μελετά τα παραπάνω σε βάθος και δίνει αξιόλογες ιδιότητες. Στο έργο αυτό αποδεικνύει το θεώρημα του *Fermat*: "*Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου σε αριθμούς δεν γίνεται ποτέ τετράγωνο*". Επιπρόσθετα αποδεικνύει ότι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου σε αριθμούς δεν γίνεται ποτέ να είναι το διπλάσιο ενός τετραγώνου. Ένα ακόμα αξιόλογο έργο του είναι το *Frenicle* στο οποίο κάνει μία εκτεταμένη έρευνα στα *Μαγικά τετράγωνα*, ανακαλύπτοντας γύρω στα 880 τα οποία δημιουργούνται με τους αριθμούς 1 έως 16.

Jacob Ozanam (1640-1717): Ο Γάλλος *Ozanam* ξεκίνησε να σπουδάζει Θεολογία την οποία και παράτησε για να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά. Έγραψε αρκετά μαθηματικά κείμενα όπως τα *Méthode générale pour tracer les cadrans* (1673), *La géométrie practique du sr Boulenger* (1684), *Traité de la construction des équations pour la solution des problèmes indéterminez* (1687), *Traité des lieux géométriques* (1687), *Traité des lignes du premier genre*(1687), *De l' usage du compas de proportion* (1688), *Dictionnaire mathématique* (1691), *Cours de mathématiques* (1693). Ο *Ozanam* ωστόσο είναι περισσότερο γνωστός για μία συλλογή συλλογη με προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών. Η συλλογή κυκλοφόρησε το 1694 με τίτλο *Récréations mathématiques et physiques* και είναι φανερά επηρεασμένη από προγενέστερες συλλογές και ιδιαιτέρως από αυτή του *Bachet*. Στη συλλογή περιλαμβάνεται το παρακάτω πρόβλημα:
"*Έστω ότι έχουμε 16 χαρτία της τράπουλας. 4 ριγάδες, 4 ντάμες, 4 βαλέδες και 4 άσσους. Να τοποθετηθούν τα χαρτία σε έναν 4 επί 4 πίνακα, έτσι ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να μην περιλαμβάνει χαρτιά με το ίδιο σχέδιο ή φιγούρα.*

Antoine Arnauld[77] (1641-1694): Ο Γάλλος *Arnauld* ήταν πολύ γνωστός μαθηματικός στην εποχή του, είχε σχέσεις με τον *Leibniz*, τον *Huygens* και άλλους περίφημους μαθηματικούς της εποχής εκείνης. Το 1778 μετά τον θάνατό του έγινε μία πλήρης έκδοση όλου του έργου του μαζί, η οποία αποτελείται από 42 τόμους! Ένα λοιπόν από τα σημαντικά του βιβλία έχει τον τίτλο *Nouveaux élements de géométrie* (Νέα Στοιχεία Γεωμετρίας). Στο βιβλίο περιλαμβάνεται μία εργασία πάνω στα μαγικά τετράγωνα.

Isaak Newton (1643-1727): Ο *Newton* θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες που υπήρξαν ποτέ. Ασχολήθηκε με επαναστατικά αποτελέσματα με

[77] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίς 348.

τα μαθηματικά, τη φυσική, την μηχανική, την οπτική και την αστρονομία. Το πιο γνωστό από τα έργα που δημοσίευσε είναι το $Philosophiae\ Naturalis\ Principia\ Mathematica$ (ή *Principia*). Στη παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει ένα άλλο επίσης σημαντικό έργο του $Arithmetica\ Universalis$, το οποίο μελετάμε αναλυτικότερα στην Παράγραφο 2.12. Σε αυτό του το βιβλίο περιλαμβάνονται μία σειρά από αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα, πολλά από τα οποία είναι ιδιαίτερα γνωστά. Ένα πρόβλημα του $Arithmetica\ Universalis$ είναι το ακόλουθο:
Αν a *βόδια τρώνε* b *στρέμματα σε χρόνο* c
τότε $\frac{ae}{b}$ *βόδια τρώνε* e *στρ. στον ίδιο χρόνο* c.
Άρα, $\frac{ec}{bf}$ *βόδια θα τρώνε* e *στρ. σε χρόνο* f
και $\frac{ecfa}{bfh} = \frac{eca}{bh}$ *βόδια τρώνε* e *στρ. σε χρόνο* h.
Ο $Newton$ έλυσε αρκετά προβλήματα ένα από αυτά είναι το πρόβλημα του Βραχυστοχρόνου που έθεσε ο $Johann\ Bernoulli$. Λέγεται ότι το έλυσε μέσα σε ένα απόγευμα.

$\underline{Johann\ Bernoulli}$ (1667-1748): Ο $Johann\ Bernoulli$ το 1696 έθεσε στο $Acta\ Eruditorum$ το εξής πρόβλημα[78]:
"*Να βρεθεί η καμπύλη που συνδέει δύο σημεία σε ένα κατακόρυφο επίπεδο και κατά μήκος της οποίας ένα σωματίδιο χρειάζεται τον μικρότερο δυνατό χρόνο να γλιστρήσει από το ένα σημείο στο άλλο*".
Η καμπύλη αυτή ονομάστηκε Βραχυστόχρονη ή Καμπύλη ταχύτερης καθόδου. Ο $Bernoulli$ γνώριζε τη λύση του προβλήματος, η δημοσίευση του ήταν για να προκαλέσει και άλλους να ασχοληθούν. Πράγματι παρουσιάστηκαν ακόμα πέντε λύσεις. Η πρώτη ήταν του $Newton$, η οποία και δημοσιεύτηκε τον Ιανουάριο του 1697 στο $Philosophical\ Transactions$ της $Royial\ Society$. Στη συνέχεια τον Μάιο του 1697 δημοσιεύτηκαν στο $Acta\ Eruditorum$ οι λύσεις των $Leibniz$, $Johann\ Bernoulli$, $Jacob\ Bernoulli$ και η λατινική μετάφραση της λύσης του $Newton$. Το πρόβλημα έλυσε και ο $de\ L'H\hat{o}pital$, η λύση του ωστόσο δεν δημοσιεύτηκε παρά μόνο το 1988 από τον $Jeanne\ Peiffer$. Το πρόβλημα αυτό ήταν η αφορμή για να διατυπωθούν μία σειρά από σημαντικά προβλήματα.

$\underline{Nicolas\ Saunderson}$[79] (1682-1739): Ο Άγγλος μαθηματικός $Saunderson$ είναι ο δημιουργός ενός βιβλίου με τίτλο $Elements\ of\ Algebra$ που εκδόθηκε το 1740. Πρόκειται για ένα βιβλίο Άλγεβρας, που περιλαμβάνει πλήθος προβλημάτων κάποια από τα οποία είναι γνωστά από την Κίνα και την Ευρώπη. Το 6ο κεφάλαιο περιλαμβάνει μαγικά τετράγωνα με 7^2 στοιχεία.

---

[78] $http://www.gap-system.org/\tilde{}history/HistTopics/Brachistochrone.html$

[79] Βλ. σχετικά G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος ΙΙΙ, Τεύχος Α, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, 1971, σελίς 33.

<u>*Leonhard Euler*</u> (1707-1783): Ένας ακόμα σπουδαίος μαθηματικός που ασχολήθηκε με αρκετούς κλάδους των μαθηματικών και όχι μόνο είναι ο *Euler*. Ό κατάλογος με τα επιτεύγματα του *Euler* στα μαθηματικά είναι ιδιαίτερα μακρύς και δεν είναι είναι δυνατόν να αναφερθούμε σε όλα. Θα ξεχωρίσουμε κάποια που θα μπορούσαν να θεωρηθούν προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών. Ένα από αυτά, γνωστό σήμερα ως *οι γεφυρες του Konigsberg*, ήταν η αφορμή για τη δημιουργία της Θεωρίας Γραφημάτων. Ασχολήθηκε επίσης με τα μαγικά τετράγωνα και ανακάλυψε μία νέα μέθοδο κατασκευής τους και θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτόν οφείλονται τα σημερινά *sudoku*. Βρήκε ένα τρόπο μετακίνησης του αλόγου στο σκάκι έτσι ώστε να περάσει από όλα τα τετραγωνάκια μία και μόνο φορά (Βλ. Παράγραφο 2.13).

Κεφάλαιο 2

Αριθμητικά και Αλγεβρικά Προβλήματα

2.1 Παλατινή Ανθολογία

Μία από τις πηγές προβλημάτων της Ελληνικής αρχαιότητας είναι *Παλατινή Ανθολογία*. Το αρχαιότερο σωζόμενο χειρόγραφο εκδόθηκε το 917 μ.Χ. από τον Κωνσταντινο Κεφαλά, ο οποίος ήταν ιερωμένος της Βυζαντινής αυλής. Το όνομα Παλατινή της δόθηκε, διότι το χειρόγραφο αυτής της ανθολογίας βρέθηκε στην Παλατινή Βιβλιοθήκη της Χαϊδεμβέργης, το 1606. Είναι μία συλλογή που περιλαμβάνει μικρά επιγραμματικά ποιήματα που εμφανίστηκαν στην Ελληνική Βιβλιογραφία από τον 7ο π.Χ. αιώνα μέχρι τον 10ο μ.Χ. αιώνα. Τα ποιήματα αυτά είναι πάνω από 6000 και αποδίδονται σε περίπου 320 συγγραφείς. Η Ανθολογία περιέχει και 46 αριθμητικά προβλήματα που αποδίδονται στον Μητρόδωρο. Ωστόσο πιστεύεται ότι κάποια από αυτά μπορεί να μην επινοήθηκαν από τον ίδιο τον συγγραφέα, αλλά να διατυπώθηκαν παλαιότερα. Τα προβλήματα καταλήγουν είτε σε απλές γραμμικές εξισώσεις, είτε σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Ας δούμε κάποια από τα αυτά. Δίνουμε το αρχαίο κείμενο καθώς και τη μετάφρασή του.[1]

Προβλήματα ηλικίας

Μια γνωστή κατηγοριά που συναντάμε και σε σύγχρονα βιβλία διασκεδαστικών μαθηματικών είναι αυτά που μας δίνουν πληροφορίες για τον υπολογισμό της ηλικίας κάποιου προσώπου. Στην Παλατινή Ανθολογία συναντάμε ένα πρόβλημα για τον υπολογισμό της ηλικίας του Διόφαντου. Πρόκειται για επίγραμμα το οποίο, κατά την Ανθολογία, ήταν χαραγμένο στον τάφο του.

---

[1] *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία, Βιβλίον* XIV*: Προβλήματα, αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί*, 1967.
Ανθολογία Ελληνική, Βιβλίον ΙΔ': Αριθμητικά και γρίφοι, Τόμος 11, Κάκτος, 1992.

Πρόβλημα 126

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἆ μέγα θαῦμα!
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος· ἥμισυ πατρὸς
τοῦδ' ἐκάη κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

"Αυτός ο τάφος σκεπάζει τον Διόφαντο. Ω θαύμα μεγάλο! Ο τάφος δηλώνει με τρόπο επιστημονικό τα μέτρα της ζωής του. Ο θεός του έδωσε την μοίρα να είναι αγόρι για το ένα έκτο της ζωής του, και προσθέτοντας ένα δωδέκατο σκέπασε τις παρειές του με χνούδι. Του άναψε το φως του γάμου μετά από ένα έβδομο, και πέντε χρόνια μετά από τον γάμο του τού έδωσε έναν γιο. Αλίμονο, άμοιρο παιδί, στερνογεννημένο. Αφού έφτασε το μετρό της μισής ζωής του πατέρα του, μοίρα ψυχρή το πήρε. Αφού παρηγόρησε τη θλίψη του με τούτη τη σοφία των αριθμών για τέσσερα χρόνια, εξεμέτρησεν το ζην."

Λύση

Έστω x η ηλικία του Διόφαντου.
Τα παραπάνω καταλήγουν στην εξίσωση $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$,
από την οποία βρίσκουμε $x=84$.

Άρα ο Διόφαντος έζησε 84 έτη.

Προβλήματα μοιρασιάς
Πρόβλημα 3

Ἁ Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα·
"Τίπτε τοι, ὦ τέκος, ἄλγος ἐπέχραεν;" ὃς δ' ἀπάμειπτο·
"Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε, δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη· ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια·
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο, Τερψιχόρη δὲ
τέτρατον· ἑβδομάτην δ' Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην·
ἡ δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων,

Οὐρανίη δ’ ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι· Καλλιόπη δὲ
βριθομένη μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ’ ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω
πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

Η Αφροδίτη είπε στον Έρωτα που στεκόταν κατηφής: "Γιατί παιδί μου, είσαι θλιμμένος;" Κι αυτός απάντησε: "Οι Μούσες μου 'κλέψαν τα μήλα που είχα φέρει από τον Ελικώνα, αρπάζοντας τα από τον κόρφο μου, και τα μοιράστηκαν μεταξύ τους, παίρνοντας διαφορετικά η καθεμία. Το ένα πέμπτο από τα μήλα το πήρε η Κλειώ, το ένα δωδέκατο η Ευτέρπη, και η θεϊκή Θάλεια το ένα όγδοο. Η Μελπομένη πήρε το ένα εικοστό, η Τερψιχόρη το ένα τέταρτο, η Ερατώ το ένα έβδομο. Τριάντα μήλα μου 'κλεψε η Πολύμνια, η Ουρανία εκατόν είκοσι, ενώ η Καλλιόπη έφυγε με τριακόσια μήλα. Σου 'ρχομαι τώρα λοιπόν με τα χέρια ελαφρωμένα, και σου φέρνω ετούτα τα πενήντα μήλα που μου αφήσανε οι θεές."

Λύση

Έστω x τα μήλα που αρχικά είχε πάρει ο Έρωτας από τον Ελικώνα. Οπότε καταλήγουμε στην εξισώση
$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{12} + \frac{x}{8} + \frac{x}{20} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 30 + 120 + 300 + 50$
από την οποία παίρνουμε $x = 3360$.

Άρα ο Έρωτας αρχικά είχε 3360 μήλα.

Πρόβλημα 11

Τοὺς χιλίους στατῆρας, οὓς ἐκτησάμην,
λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο·
πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ηὐξήσθω δέκα
μέτρου τετάρτου τῶν λαχόντων τῷ νόθῳ.

"Αφήνω στους δύο γιους μου τους χίλιους στατήρες της περιουσίας μου. Το ένα πέμπτο όμως από το μερίδιο του γνησίου θέλω να αυξηθεί κατά δέκα από το ένα τέταρτο αυτού που παίρνει ο νόθος."

Λύση

Έστω α το μερίδιο του γνήσιου γιου και β το μερίδιο του νόθου. Διαβάζοντας το ποίημα καταλήγουμε στις παρακάτω δύο εξισώσεις:
$\alpha + \beta = 1000$ (1) και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} + 10$ (2)
Οπότε $\frac{1}{5}(1000 - \beta) = \frac{\beta}{4} + 10$

Άρα $\beta = \frac{3800}{9} = 422\frac{2}{9}$
και $\alpha = 1000 - \frac{3800}{9} = \frac{5200}{9} = 577\frac{7}{9}$.
Οπότε τελικά ο γνήσιος γιος θα πάρει $577\frac{7}{9}$ στατήρες και ο νόθος $422\frac{2}{9}$ στατήρες.

Πρόβλημα 49

Τεῦξόν μοι στέφανον, χρυσὸν χαλκόν τε κεράσσας,
κασσιτερόν θ’ ἅμα τοῖσι πολύκμητόν τε σίδηρον,
μνῶν ἑξήκοντα· χρυσὸς δ’ ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
δοιὰ μέρη τρισσῶν· χρυσὸς δ’ ἅμα κασσίτερός τε
τρισσὰ μέρη τετόρων· χρυσὸς δ’ αὖτ’ ἠδὲ σίδηρος
τόσσα μέρη τῶν πέντε. Πόσον δ’ ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ’ ἔτι λέξον
κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου,
ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνῶν ἑξήκοντα.

"Φτιάξε μου ένα στεφάνι, να ζυγίζει εξήντα μνες. Ανάμειξε χρυσάφι και χαλκό, και μαζί τους κασσίτερο και σίδερο δουλεμένο. Χρυσάφι και χαλκός μαζί να είναι τα δύο τρίτα. Χρυσάφι και κασσίτερος μαζί να είναι τα τρία τέταρτα. Χρυσάφι και σίδερο τα τρία πέμπτα. Πες μου πόσο χρυσάφι πρέπει να βάλεις, πόσο χαλκό, πόσο κασσίτερο και πόσο σίδερο, έτσι που να φτιάξεις ένα στεφάνι βαρύ εξήντα μνές."

Λύση

Έστω x, y, z, w το βάρος του χρυσού, του χαλκού, του κασσίτερου και του σιδήρου, αντίστοιχα. Τα επιτάγματα του προβλήματος δίνουν
$x + y = \frac{2}{3} \cdot 60, \quad x + z = \frac{3}{4} \cdot 60, \quad x + w = \frac{3}{5} \cdot 60$
και $x + y + z + w = 60$
Οπότε $y = 40 - x$, $z = 45 - x$, $w = 36 - x$
Άρα $x + 40 - x + 45 - x + 36 - x = 60$,
συνεπώς $x = 30,5, \quad y = 9,5, \quad z = 14,5$ και $w = 5,5$.

Για να φτιάξουμε στεφάνι που να ζυγίζει 60 μνές, θα χρειαστεί να αναμείξουμε 30,5 μνες χρυσού, 9,5 μνες χαλκού, 14,5 μνες κασσίτερου και 5,5 μνες σιδήρου.

Προβλήματα δεξαμενών
Πρόβλημα 130

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἤματι πλῆσεν ἅπασαν
δεξαμενήν, δυσὶ δ' οὗτος, ὅ δ' ἐν τρισὶν ἤμασιν οὗτος,
τέτρατος ἐν τετόρεσσι. Πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

"Από τους τέσσερις κρούνους ο πρώτος γέμισε όλη τη δεξαμενή σε μία μέρα. Ο δεύτερος σε δύο, ο τρίτος σε τρεις και ο τέταρτος σε τέσσερις ημέρες. Σε πόσο χρόνο θα τη γεμίσουν όλοι μαζί;"

<u>*Λύση*</u>

Έστω x τα λίτρα που χωράει η δεξαμενή. Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε:
Α κρουνός: Ρίχνει x λίτρα σε 1 μέρα.
Β κρουνός: Ρίχνει x λίτρα σε 2 μέρες.
Γ κρουνός: Ρίχνει x λίτρα σε 3 μέρες.
Δ κρουνός: Ρίχνει x λίτρα σε 4 μέρες.

Οπότε σε μία μέρα οι κρουνοί Α, Β, Γ, Δ, ρίχνουν x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$ λίτρα αντίστοιχα.
Επομένως όλοι μαζί μέσα σε μία μέρα ρίχνουν $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{25x}{12}$ λίτρα.
Για να γεμίσουν τη δεξαμενή, για να ρίξουν δηλαδή όλοι μαζί x λίτρα, χρειάζονται $\frac{12}{25}$ της μέρας.

Ένα ακόμα πόλυ όμορφο πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είναι το παρακάτω.

Πρόβλημα 135

Οἵδε λοετροχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ' Ἔρωτες,
καλλιρόου πέμποντες ἐπ' εὐρίποιο λοετρά.
Δεξιτερὸς μὲν ἔγωγε τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἔνι τόνδε κορέσσω·
λαιὸς δ' αὖ πισύρεσσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις·
ἐκ δ' ὁ μέσος τόξοιο κατ' ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.
Φράζεο δ', ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ,
ἐκ πτερύγων, τόξου τε, καὶ ἀμφιφορῆος ἱέντες.

"Εδώ στεκόμαστε τρεις Έρωτες, που χύνουμε στο λουτρό νερό, στέλνοντας τα ρέματά μας στον λουτήρα με την ωραία ροή. Εγώ στα δεξιά, με τα μακροφτέρουγα πέλματα μου, γεμίζω τον λουτήρα ως πάνω στο ένα έκτο της ημέρας. Εγώ στ' αριστερά, με τους αμφορείς μου, τον γεμίζω σε τέσσερις ώρες. Κι εγώ στη μέση, με το τόξο μου, θέλω μισή ημέρα ακριβώς. Για πες μου, σε πόσο λίγο χρόνο θα τον γεμίσουμε ρίχνοντας νερό από τα φτερά, το τόξο και τους αμφορείς ταυτόχρονα;"

Λύση

Έστω α τα λίτρα του νερού που χωράει ο λουτήρας.
Α Έρωτας: Ρίχνει α λίτρα σε $\frac{1}{6}$ της ημέρας ή $\frac{24}{6} = 4$ ώρες.
Β Έρωτας: Ρίχνει α λίτρα σε 4 ώρες.
Γ Έρωτας: Ρίχνει α λίτρα σε $\frac{1}{2}$ της ημέρας ή $\frac{24}{2} = 12$ ώρες.

Επομένως όλοι οι Έρωτες μαζί ρίχνουν $\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{12} = \frac{7\alpha}{12}$ λίτρα σε 1 ώρα. Άρα α λίτρα ρίχνουν και οι τρεις μαζί σε $\frac{12}{7}$ ώρες ή $\frac{1}{14}$ της ημέρας.[2]

Πρόβλημα 136

Πλινθουργοί, μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι,
ἦμαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον, οὐδ' ἔτι πολλῶν
ξρηίζω, πᾶσαν δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαν
πλίνθον ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευξες·
παῖς δὲ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίαις ἀπέληγεν·
γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα.
τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις;

"Χτίστες, βιάζομαι πολύ να σηκώσω αυτό το σπίτι. Σήμερα δεν έχει σύννεφα και δεν ζητώ πολλά τούβλα, αλλά έχω όσα χρειάζομαι παρά τριακόσια. Συ μόνος σου μέσα σε μια μέρα θα μπορούσες να φτιάξεις τόσα, αλλά ο γιος σου σταματούσε τη δουλειά κουρασμένος έχοντας φτιάξει διακόσια, και ο γαμπρός σου διακόσια πενήντα. Αν δουλέψετε όλοι μαζί σε πόσες ώρες θα τα φτιάξετε;"

Λύση

Οι χτίστες πρέπει να τοποθετήσουν 300 τούβλα. Σύμφωνα λοιπόν με την εκφώνηση έχουμε:
Α χτίστης: Τοποθετεί 300 τούβλα σε 1 μέρα
Β χτίστης: Τοποθετεί 200 τούβλα σε 1 μέρα
Γ χτίστης: Τοποθετεί 250 τούβλα σε 1 μέρα
Όλοι οι χτίστες μαζί μέσα σε μία μέρα μπορούν να φτιάξουν 300+200+250=750 τούβλα. Άρα 300 τούβλα μπορούν να τα φτιάξουν σε $\frac{300}{750} = \frac{2}{5}$ της ημέρας.

[2]Στα σχόλια που συνοδεύουν τα προβλήματα στο βιβλίο *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία, Βιβλίον* XIV*: Προβλήματα, αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί, 1967.* δίνεται η απάντηση $1\frac{1}{11}$ ώρες ή $\frac{1}{11}$ της μέρας. Την απάντηση αυτή την λαμβάνουμε αν υποθέσουμε ότι η μέρα έχει 12 ώρες.

Τα παραπάνω προβλήματα είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα και με μεγάλη ιστορία, γνωστά ως προβλήματα δεξαμενών (*cistern problems*). Το πρώτο πρόβλημα αυτής της κατηγορίας εμφανίζεται στο έργο *Chiu Chang Suan Shu* (150 π.Χ.) και αναφέρεται σε 5 σωλήνες που γεμίζουν μια δεξαμενή.[3] Στη συνέχεια το συναντάμε στις *Μετρήσεις* του Ήρωνα (50 μ.Χ.)[4] και στο Διόφαντο. Το συναντάμε στο *Propositiones ad Acuendos Juvenes* του Αλκουίνου (775 μ.Χ.), στη *Lilavati* του *Bhaskara* (1150 μ.Χ.), στο *Kholâsat al-Hisâb* του *Behâ Eddîn* (1600 μ.Χ.) και σε πολλά ακόμα κείμενα.

Στην πορεία των χρόνων εμφανίστηκαν πάρα πολλές παραλλαγές του προβλήματος. Από τις πιο γνωστές του 15ου-16ου αιώνα είναι αυτή με τα ζώα, όπου ένα λιοντάρι, ένας σκύλος και ένας λύκος τρώνε ένα πρόβατο. Καθώς και των αντρών που χτίζουν ένα σπίτι, όπως το πρόβλημα 136 που αναφέραμε παραπάνω. Τις συναντάμε σε κείμενα των *Johann Widman* (1489), *Tonstall* (1522), *Cataneo* (1546) και αλλού. Στα τέλη του 16ου αιώνα στη Γερμανία εμφανίζεται η εξής παραλλαγή: "*Αν ένας άντρας μπορεί να πιει μόνος του ένα βαρέλι κρασί σε 20 μέρες και μαζί με την γυναίκα του σε 14 μέρες, να βρεθεί πόσος χρόνος χρειάζεται για να πιεί μόνη της η γυναίκα ένα βαρέλι κρασί.*"[5]

[3]David Singmaster, *Chronology of Recreational Mathematics*, 1996.
http://www.eldar.org/~problemi/singmast/recchron.html

[4]Για κάποιους την πατρότητα του προβλήματος έχει ο Ήρωνας.
D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίς 538.

[5]Βλ. σχετικά D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίδες 536-541.

2.2 Βοεικόν πρόβλημα του Αρχιμήδη

Το 1769 ο *Gotthold Ephraim Lessing* βρήκε στη βιβλιοθήκη του *Wolfenbüttel* της Γερμανίας, όπου εργαζόταν ως βιβλιοθηκάριος, ένα βυζαντινό χειρόγραφο του 14ου αιώνα με 4 άγνωστα μέχρι τότε ποιήματα της Παλατινής Ανθολογίας.[6] Ένα από αυτά τα ποιήματα, με μαθηματικό περιεχόμενο, είναι το λεγόμενο Βοεικόν Πρόβλημα το οποίο αποδίδεται στον Αρχιμήδη. Είναι ένα αριθμητικό πρόβλημα γραμμένο σε Ιωνική διάλεκτο και αποτελείται από 22 ελεγείες. Ονομάστηκε *Βοεικόν* γιατί ζητά να βρεθεί το πλήθος των βοδιών του Θεού Ήλιου. Η Αρχιμήδεια προέλευση του προβλήματος φαίνεται και από τα πρώτα λόγια που συνοδεύουν το πρόβλημα:

"*πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.*"

Το πρόβλημα αυτό, υπό τη μορφή επιγράμματος, ο Αρχιμήδης το έστειλε σε επιστολή προς τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο στην Αλεξάνδρεια, για να αναζητηθεί η λύση από εκείνους που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα.

Ο Αρχιμήδης άλλωστε συνήθιζε να στέλνει επιστολές με μαθηματικά προβλήματα στους Αλεξανδρινούς μαθηματικούς. Κάποιες φορές μάλιστα συνήθιζε να στέλνει και λανθασμένες εκφωνήσεις, για να μπορέσει να έτσι να ελέγξει ποιοι ήταν αυτοί που ισχυρίζονταν ψευδώς ότι έλυναν τα προβληματά του.

Εκτός από το χειρόγραφο αυτό που βρέθηκε στη Γερμανία το 1769 και φυλάσσεται με τον κωδικό $G77$, λίγα χρόνια αργότερα βρέθηκε ένα ακόμα στο Παρίσι χωρίς το σχόλιο και φυλάσσεται με τον κωδικό P2448. Τα δύο αυτά χειρόγραφα έχουν μικροδιαφορές αλλά οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις.[7]

Σε αυτό σημείο παραθέτουμε το αρχαίο κείμενο με το πρόβλημα, καθώς και την μετάφραση του [8]. Επίσης θα σχολιάσουμε το ποίημα εκτενώς παρακάτω:

[6] Το ανακοίνωσε το 1773 στο *Beiträge zur Geschichte und Litteratur*.

[7] Βλ.σχετικά Μ. Λάμπρου, *Το βοεικόν πρόβλημα του Αρχιμήδη*, Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Δ. Α. Αναπολιτάνος - Β. Καρασμάνης (επιμ.), Τροχαλία, Αθήνα, 1992, σελίδες 195-218.

[8] Αρχιμήδης, Άπαντα Τόμος 4.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροτίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῆ.
ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
ξεῖνε, σὺ δ', Ἠελίοιο βόες πόσαι, ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μήν πώ γε σοφοῖς εναρίθμιος. ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλήθους Θρινακίης πεδία.
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας

καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

2.2.1 1ο μέρος

Ας δούμε τώρα το ποίημα αυτό τμηματικά, σε μετάφραση, και ας το αναλύσουμε.

"Το πλήθος των βοδιών του Ηλίου, ξένε, μέτρησε
με φροντίδα επισταμένη, αν μετέχεις της σοφίας,
που κάποτε βοσκούσαν στης Σικελίας τις πεδιάδες,
στης Θρινακίας το νησί, σε τέσσερα κοπάδια χωρισμένα
ανάλογα με τη χροιά τους. το ένα λευκό σαν γάλα ήταν,
το άλλο κατάμαυρο έλαμπε στιλπνό,
το τρίτο ήτανε ξανθό και το άλλο παρδαλό. Μα στο κάθε
κοπάδι ταύροι ήτανε πολλοί στον αριθμό
κι αυτή τη συμμετρία είχανε πετύχει:..."

Σε αυτούς τους πρώτους στίχους ο Αρχιμήδης ζητά από τον αναγνώστη να βρει το πλήθος των βοδιών του θεού Ήλιου. Εξηγεί ότι το πλήθος των ταύρων και των αγελάδων ήταν χωρισμένο σε κοπάδια ανάλογα με το χρώμα τους. Και έρχεται στους επόμενους στίχους να δώσει τα πρώτα σημαντικά στοιχεία για τον υπολογισμό τους.

" οι λευκότριχοι μισοί από τους μαύρους ήτανε κι ένα ακόμα τρίτο
συν όλους τους ξανθούς, ξένε, φαντάσου.
Όμως και οι μαυρότριχοι το ένα τέταρτο μέρος
των παρδαλών, μαζί με το ένα πέμπτο, συν όλους πάλι τους ξανθούς.
Πρόσθεσε όμως και τους παρδαλούς που υπολείπονται
να είναι το ένα έκτο των λευκών, μαζί με το ένα έβδομο,
κι όλοι μαζί να είναι ίσοι με όλους τους ξανθούς.
Τα θηλυκά τώρα γελάδια έτσι είχαν: τα λευκά από τη μια
ήταν της μαύρης αγέλης ολόκληρης
ακριβώς το ένα τρίτο και το ένα τέταρτο.
Τα μαύρα από την άλλη με το ένα τέταρτο, πάλι,
των παρδαλών μαζί με το ένα πέμπτο ήταν ίσα,
σαν βγαίναν όμως όλα με τους ταύρους στη βοσκή.
Με το ένα πέμπτο τώρα μαζί με το ένα έκτο της ξανθιάς αγέλης
ήταν τα παρδαλά ισάριθμα στο πλήθος.
Και των ξανθών ο αριθμός ίσος με το μισό του τρίτου
της λευκωπής αγέλης ήταν μέρους, μαζί με το ένα έβδομο."

Από τα επιτάγματα του προβλήματος καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:
$Λ=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})Μ+Ξ$
$Μ=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})Π+Ξ$
$Π=(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})Λ+Ξ$

$λ=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(Μ+μ)$
$μ=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(Π+π)$
$π=(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(Ξ+ξ)$
$ξ=(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(Λ+λ)$

όπου Λ=λευκοί, Μ=μαύροι, Π=ποικιλόχρωμοι, Ξ=ξανθοί ταύροι, αντίστοιχα και λ=λευκές μ=μαύρες, π=ποικιλόχρωμες, ξ=ξανθές αγελάδες, αντίστοιχα.

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα σύστημα 7 εξισώσεων με 8 αγνώστους. Λύνοντας λοιπόν αυτό το σύστημα παίρνουμε την εξής μονοπαραμετρική λύση:
Λ=10366482t
Μ=7460514t
Π=7358060t
Ξ=4149387t

λ=7206360t
μ=4893246t
π=3515820t
ξ=5439213t

όπου t θετικός ακέραιος

Αυτά όμως τα στοιχεία δεν αρκούν για να υπολογίσει κανείς τον ακριβή αριθμό των βοδιών. Ο Αρχιμήδης δίνει δύο ακόμη συνθήκες. Πριν όμως προχωρήσει στο δεύτερο τμήμα του προβλήματος προειδοποιεί κατά κάποιο τρόπο τον αναγνώστη για τις δυσκολίες που θα συναντήσει.

‟Άμα μπορείς, ξένε, να πεις πόσα ήτανε του Ήλιου τα γελάδια
ακριβώς, των ταύρων των θρεμμένων απ' τη μια,
μα και των αγελάδων, πόσες στο χρώμα ήταν,

ανόητο και αμαθή στους αριθμούς δεν θα σε πουν,
μα ούτε στους σοφούς θα σε συγκαταλέξουν."

2.2.2 2ο μερος

Τώρα όμως ας δούμε το δεύτερο και δυσκολότερο τμήμα:

"Όμως, εμπρός, εξέτασε κι αυτά ακόμα τα στοιχεία για του Ήλιου τα βόδια.
Κάθε φορά που τα λευκότριχα ανακατεύονταν στων μελανών
το πλήθος, στερεό σχήμα έφτιαχναν ισόμετρο
σε πλάτος και σε βάθος, κι όλες οι αχανείς πεδιάδες
της Θρινακίας γέμιζαν μ' αυτό το τετραγωνισμένο πλήθος.
Μ' αν πάλι συγκεντρώνονταν μαζί ξανθά και παρδαλά
σχημάτιζαν μια σφήνα που άρχιζε από ένα
κι έφτανε να φτιάξει τρίγωνο μ' ίσες πλευρές, χωρίς να περισσεύουν
κι ούτε να τους χρειάζεται βόδι από άλλο χρώμα."

Διαβάζοντας αυτο το τμήμα κανείς παίρνει τις εξής πληροφορίες
Λ+Μ = τέλειο τετράγωνο
και Ξ+Π = τρίγωνος αριθμός.
Ας τα δούμε ένα ένα.

Λ+Μ=n^2
Όμως Λ+Μ=$10366482t + 7460514t = 17826996t$
Επομένως $17826996t = n^2$
ή $2^2 \cdot 957 \cdot 4657t = n^2$
για να ισχύει αυτό θα πρέπει $t = 957 \cdot 4657s^2$.

Την ίδια στιγμή θα πρέπει Ξ+Π=$\dfrac{m(m+1)}{2}$.
Όμως Ξ+Π=$4149387t + 7358060t = 11507447t$.
Επομένως $11507447t = \dfrac{m(m+1)}{2}$
ή $7 \cdot 353 \cdot 4657t = \dfrac{m(m+1)}{2}$
ή $7 \cdot 353 \cdot 957 \cdot 4657^2 s^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$
ή $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 s^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$
πολλαπλασιάζοντας με 8 και προσθέτοντας 1 παίρνουμε
$$2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 s^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 1$$

ή $\quad 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 s^2 = (2m+1)^2$
θέτουμε $u = 2m+1$ και καταλήγουμε σε μια εξίσωση $Pell$
$$u^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 s^2 = 1$$
ή $\quad u^2 - 410286423278424 s^2 = 1.$

Μια εξίσωση που είναι αδύνατον να λυθεί χωρίς τη χρήση υπολογιστή, γι' αυτό άλλωστε και χρειάστηκαν πάρα πολλά χρόνια για να βρεθεί η πλήρης λύση του. Το 1773 το πρόβλημα αυτό δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά από τον $Lessing$ με ένα μαθηματικό σχόλιο του $Leiste$, ο οποίος όμως δεν είχε λύσει το 2ο και τελευταίο τμήμα του προβλήματος. Η πρώτη προσπάθεια ήταν από τον $Amthor$ το 1880, ο οποίος αν και δεν κατάφερε να βρει την πλήρη λύση του, προσδιόρισε με τη χρήση των εξισώσεων $Pell$, τα πρώτα 3 ψηφία της απάντησης (776) και έδειξε ότι η λύση είχε 206545 ψηφία.[9] Μία λύση (όχι η μικρότερη) δόθηκε αργότερα, το 1965, από τους $H.C.$ $Williams$, $R.A.$ $German$ και $C.R.$ $Zarnke$ του πανεπιστημίου του $Waterloo$. Ο υπολογισμός της λύσης έγινε με την βοήθεια δύο ηλεκτρονικών υπολογιστών, ενός $IBM7040$ και ενός $IBM1620$ και δημοσιεύτηκε στο $Mathematics$ of $Computation$. [10] Το 1980 ο $H.L.$ $Nelson$ με τη βοήθεια ενός $CRAY$-1, βρήκε την μικρότερη λύση, μαζί με εκτεταμένο έλεγχο μέσα σε 10 λεπτά. Το πρόγραμμα αυτό υπολόγισε και τις επόμενες 5 λύσεις. Η μικρότερη από αυτές έχει 206545 ψηφία και η μεγαλύτερη από αυτές πάνω από ένα εκατομύριο ψηφία. Δημοσιεύτηκαν στην $Journal$ of $Recreational$ $Mathematics$.[11]

Τη δυσκολία αυτή του προβλήματος την γνώριζε ο Αρχιμήδης και αυτό φαίνεται και από τους τελευταίους στίχους.

"Αυτά αφού τα βρεις, ξένε, και σε ένα μυαλό το χωρέσεις
κι όλους τους αριθμούς πεις για όλες τις ομάδες,
γύρνα περήφανος για τη νίκη σου και γνώριζε
πως εδώ κρίθηκες για πάντα μεγάλος στη σοφία."

[9] A. Amthor, *Das Problema Bovinum des Archimedes*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1880, σελίδες 121-171.
[10] H.C. Williams, R.A. German, C.R. Zarnke, *Solution of the Cattle Problem of Archimedes*, Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 92, Oct., 1965, σελίδες 671-674.
[11] H. L. Nelson, *A Solution to Archimedes' Cattle Problem*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 13, 1981, σελίδες 162-176.

2.2.3 Λύσεις

Το χειρόγραφο του $Wolfenbüttel$ περιλαμβάνει το πρόβλημα καθώς και ένα σχόλιο που δίνει μέρος της λύσης. Αυτός που έγραψε το σχόλιο[12] ισχυρίζεται ότι βρήκε την λύση, αλλά ωστόσο λύνει μόνο το πρώτο μέρος του προβλήματος και αντιστοιχεί στην τιμή t=80 της παραμέτρου. Για την τιμή αυτή δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του δεύτερου μέρους του προβλήματος. Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε και το σχόλιο στην αυθεντική του μορφή, για όποιον θα ήθελε να το μελετήσει.

Σχόλιο

‟Τὸ μὲν οὖν πρόϐλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ιδʹ καὶ ἁπλᾶς φπϐʹ καὶ μονάδας ͵ζτξʹ, κυανοχρόων δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ ἁπλῶν ͵ηωλʹ καὶ μονάδων ωʹ, μιξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ηʹ καὶ ἁπλῶν ͵ϡϛαʹ καὶ μονάδων υʹ· τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζʹ καὶ ἁπλᾶς ϛψηʹ, μονάδας δὲ ͵η· ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ' ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γριϐʹ καὶ μονάδας ϛφξʹ. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίξων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς ηʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ϐϡλαʹ καὶ μονάδας ͵ηφξʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ζχυʹ καὶ μονάδας ͵ηωʹ, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵θχπδʹ καὶ μονάδας ͵αρκʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γʹ καὶ ἁπλᾶς ͵θρμεʹ καὶ μονάδας ͵θχπʹ, ἡ δ' ἀγέλη τῶν πιοκιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ηωξδʹ καὶ μονάδας ͵δωʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς βʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ηϱκς καὶ μονάδας ͵εχʹ, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γρϛεʹ καὶ μονάδας ϡξʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γφιγʹ καὶ μονάδας ͵ζμʹ. Καὶ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλη τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑϐδομῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑϐδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων

[12]Το σχόλιο είναι μάλλον της Βυζαντινής εποχής. Βλ. σχετικά, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Ευάγγελου Σ. Σταμάτη, Επιμελητήριο της Ελλάδος, Αθήνα, 1970.

συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα."

Ας δούμε όμως τώρα τα βήματα που ακολούθησε ο *Amthor* για να βρει τη λύση, λύνοντας τις εξισώσεις *Pell* με τη βοήθεια των συνεχών κλασμάτων.[13]
Ο *Amthor* εκτελώντας σωστά όλα τα βήματα του προβλήματος κατέληξε στην εξίσωση *Pell* που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή την

$$u^2 - 410286423278424s^2 = 1$$

Όπως είδαμε παραπάνω, ο αριθμός $C = 410286423278424$ μπορεί να γραφτεί ως $C = 4729494(2 \cdot 4657)^2$
Έτσι αντί να λύσει την αρχική εξίσωση του *Pell* για το C, χώρισε το πρόβλημα σε δύο ευκολότερα. Έλυσε πρώτα την αντίστοιχη εξίσωση για το C', δηλαδή την

$$l^2 - C'k^2 = 1, \text{ όπου } l = u,\ k = 2 \cdot 4657s \text{ και } C' = 4729494.$$

Την έλυσε με την βοήθεια των συνεχών κλασμάτων σε έναν υπολογισμό που παίρνει γύρω στις 3 σελίδες. Βρήκε περίοδο στην $\sqrt{4729494}$ με μήκος 92!
Έτσι ο *Amthor* μετά από πολλούς υπολογισμούς κατέληξε στο ότι:
$l_1 = 109931986732829734979866232821433543901088049$
και $k_1 = 50549485234315033074477819735540408986340$
είναι η μικρότερη θετική λύση, άρα
$A = 109931986732829734979866232821433543901088049$
$+\ 50549485234315033074477819735540408986340 \cdot \sqrt{4729494}$

Οι επόμενες λύσεις μπορούν να υπολογιστούν από τον τύπο

$$l_n + k_n\sqrt{C'} = (l_1 + k_1\sqrt{C'})^n$$

Όμως αν τα x, y λύνουν την εξίσωση για το C, τότε και τα $x, 2 \cdot 4657y$ θα λύνουν την εξίσωση για το C', για κάποιο n θα έχουμε

$$x + 2 \cdot 4657y\sqrt{C'} = (l_1 + k_1\sqrt{C'})^n$$

Έτσι για να μπορέσει να βρεθεί η λύση της πρώτης εξίσωσης *Pell*, προσπάθησε να βρει την μικρότερη τιμή του n για την οποία το k_n διαιρείται από το $2 \cdot 4657$. Για να μπορέσει να το κάνει αυτό ο *Amthor* ανέπτυξε μια θεωρία, χρησιμοποίησε το ότι ο $p = 4657$ είναι πρώτος αριθμός για τον οποίο το σύμβολο *Legendre* $(\frac{C'}{p}) = -1$ και

[13]H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell Equation*, Notices of the American Mathematical Society Vol. 49, No 2, Febr. 2002.

πήρε ότι η ελάχιστη τιμή του n πρέπει να διαιρεί το $p + 1 = 4658$. Οπότε τελικά η μικρότερη[14] λύση της εξισωσης $Pell$ για το C δίνεται από τη σχέση:
$u_1 + s_1\sqrt{C} = A^{2329}$.

[14]Η μικρότερη λύση (206545 ψηφία) υπάρχει και στο διαδίκτυο στη σελίδα:
www.math.nyu.edu/˜crorres/Archimedes/Cattle/computer_output.html

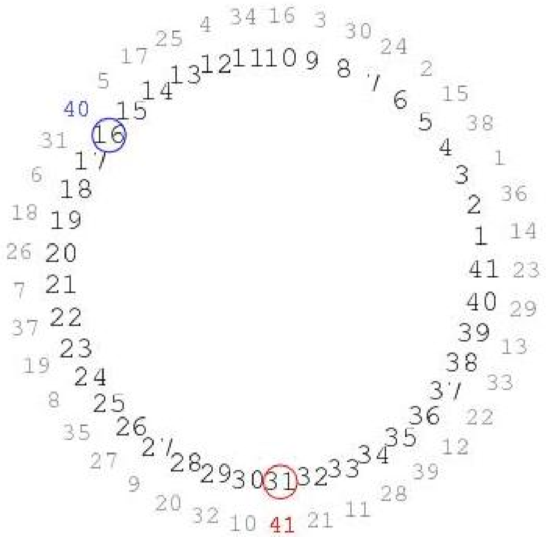
2.3 Το πρόβλημα του Ιωσήπου

Εργαζόμαστε σε ένα πρόβλημα που ήταν πολύ δημοφιλές κατά τη διάρκεια του 15ου και 16ου αιώνα, γνωστό ως το πρόβλημα του Ιωσήπου. Πήρε το όνομά του από τον Φλάβιο Ιώσηπο (*Flavius Josephus* 37-100 μ.Χ.), ο οποίος επέζησε του Ιουδαϊκό-Ρωμαϊκού πολέμου εξαιτίας του μαθηματικού του ταλέντου, όπως ισχυρίζονται πολλοί, και όχι λόγο μιας περίεργης τύχης ή της θείας πρόνοιας, όπως ισχυρίζεται ο ίδιος.

- *Κατά τη διάρκεια του εβραιορωμαϊκού πολέμου ο Ιώσηπος ήταν ένας από τους 41 Ιουδαΐους στρατιώτες που παγιδεύτηκαν σε μία σπηλιά περικυκλωμένοι από Ρωμαΐους. Ο μύθος λέει ότι προτίμησαν να αυτοκτονήσουν, παρά να συλληφθούν από τους Ρωμαΐους. Έτσι αποφάσισαν να καθορίσουν στην τύχη ποιος θα σκοτώσει ποιον, ώστε να γλυτώσουν την αιχμαλωσία και το κρίμα της αυτοκτονίας. Οπότε μπήκαν σε έναν κύκλο και θα σκότωναν κάθε τρίτο άτομο πηγαίνοντας κυκλικά μέχρι να μην απομείνει κανείς. Ο Ιώσηπος όμως δεν ήταν έτοιμος να πεθάνει και βρήκε γρήγορα ασφαλείς θέσεις γι' αυτόν και έναν φίλο του ώστε παρέμειναν ζωντανοί. Ποιες ήταν αυτές οι θέσεις;*

<u>*Λύση*</u>

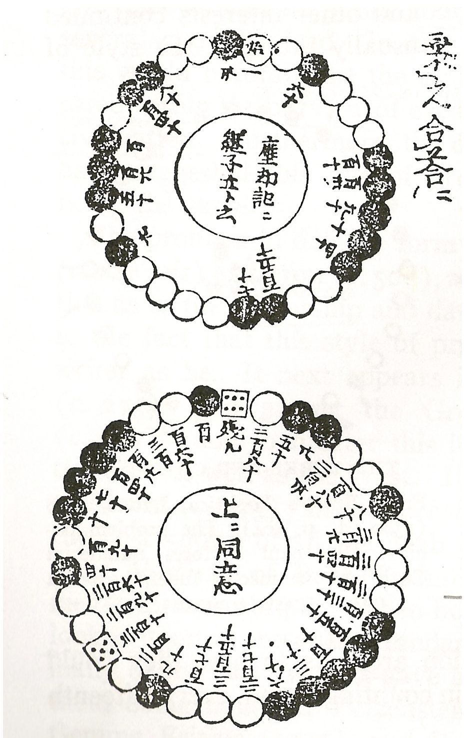
Τελευταίος θα μείνει αυτός στη 31η θέση και προτελευταίος αυτός στην 16η θέση, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.1

Το πρόβλημα ξεκινάει από τον αποδεκατισμό των αντρών του Ρωμαικού στρατού. Όταν κάποιος λόχος κρινόταν ένοχος για δειλία, ανταρσία ή για χαμηλές αξίες, επέλεγαν στην τύχη και σκότωναν κάθε 10ο άντρα. Ορισμένοι συγγραφείς, όπως οι Τίτος Λίβιος, ο Διονύσιος, ο Πολυβιος κ.α. αναφέρουν σε κείμενα τους συγκεκριμένα περιστατικά και άλλοι μιλούν για ένα γενικότερο έθιμο, μία συνηθισμένη τιμωρία.[15] Το πρώτο κείμενο στο οποίο συναντάμε ένα παρόμοιο πρόβλημα είναι το *De bello Judaico* του Ηγησίου (ψευδόνυμο που μάλλον ανήκει στον Αμβρόσιο του Μιλάνου (370)). Στο κείμενο αυτό αναφέρεται και το γεγονός της σωτηρίας του Ιώσηπου από παρόμοια επιλογή.

Παραλλαγές του προβλήματος υπάρχουν σε αρκετά κείμενα του 10ου αιώνα και μετά. Στην Ευρώπη το συναντάμε κυρίως σε χειρόγραφα του 10ου, 11ου και 12ου αιώνα. Στο *Tahbula* του Ραβίνου *ben Ezra* (1150), ακόμα σε κείμενα του *Chuquet* (1484) και του *Calandri* (1500). Μία από τις πιο γνωστές παραλλαγές του είναι η ακόλουθη.



Σχήμα 2.2: Το πρόβλημα του Ιώσηπου στην Ιαπωνία από το Muramatsu Kudayū Moseis's $Mantoku\ Jink\bar{o} - ri$ (1665)

[15] Βλ. σχετικά D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίς 541.

- **Οι Τούρκοι και οι Χριστιανοί** *Πάνω σε ένα πλοίο που βρισκόταν σε κίνδυνο ήταν 15 Τούρκοι και 15 Χριστιανοί. Έπρεπε να θυσιαστούν οι μισοί έτσι ώστε να επιζήσουν οι υπόλοιποι. Ήταν αναγκαίο η επιλογή να γίνει στην τύχη. Πώς θα έπρεπε να παραταχθούν στον κύκλο έτσι ώστε μετρώντας κάθε 15 άτομα αυτοί που θα θυσιάζονταν να ήταν όλοι Τούρκοι;*[16]

Μία εκτεταμένη μελέτη στην ιστορία των προβλημάτων Τούρκων και των Χριστιανών, όπως ονομάζονται, έχει κάνει ο *Wilhelm Ahrens* (1901). Ο *Ahrens* δήλωσε ότι ο *Cardan* είναι ο πρώτος που ονόμασε, στο *Practica Arithmeticae generalis* (1539), αυτού του είδους τα προβλήματα "*Ludus Josephus*". Ακόμα υποστηρίζει ότι το πρόβλημα αυτό υπήρχε στην Ιαπωνία από τον 10ο αιώνα και δημιουργήθηκε εκεί ανεξάρτητα. Ωστόσο το συναντάμε συχνά σε κείμενα του 16ου αιώνα και μετά, όπως των *Seki Kōwa* (1642-1708), *Muramatsu Kudayū Moseis* (17ο αιώνα) και *Miyake Kenryū* (18ο αιώνα).[17] Η Ιαπωνική εκδοχή μιλά για μία μητέρα που καταλάθος αποκλήρωσε τα παιδιά της.

- *Ένας πλούσιος αγρότης είχε 30 παιδιά, 15 από την πρώτη του σύζυγο που είχε πεθάνει και 15 από την δεύτερη συζυγό του. Η τωρινή του σύζυγος ανυπομονούσε να πάρει την περιουσία ο μεγαλύτερος γιος της, έτσι κάποια μέρα είπε στον άντρα της ότι αυτός μεγαλώνει και ότι θα πρέπει να ορίσει τον κληρονόμο του. Του πρότεινε λοιπόν να βάλουν όλα τα παιδιά σε έναν κύκλο και να εξαιρούν από την περιουσία κάθε 10ο, έτσι ώστε αυτό που θα έμενε τελευταίο να έπαιρνε την περιουσία. Η πρόταση αυτή φάνηκε λογική. Όμως καθώς η διαδικασία της επιλογής προχωρούσε ο αγρότης με μεγάλη του έκπληξη παρατήρησε ότι τα πρώτα 14 παιδιά που εξαιρέθηκαν ήταν από τον πρώτο του γάμο και ότι το επόμενο θα ήταν το τελευταίο παιδί από τον πρώτο του γάμο. Έτσι πρότεινε από αυτό το παιδί και πέρα να αλλάξουν τη φορά με την οποία μετρούσαν. Η γυναίκα του σκέφτηκε ότι το ποσοστό ήταν 15 προς 1, με εύνοια προς τα δικά της παιδιά, και δέχτηκε. Ποιος έγινε τελικά ο κληρονόμος του αγρότη;* [18]

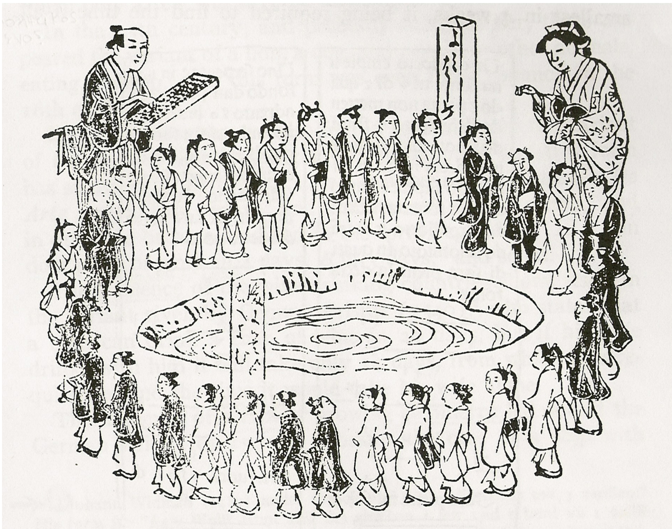
[16]D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol.II, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίς 541.

[17]Βλ. σχετικά, D.E. Smith and Y. Mikami, *A History of Japanese mathematics*, Chicago the open court publishing Company, 1914, σελίδες 80-84.

[18]W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations Essays*, Dover Publications, Inc., New York, 1987, σελίδες 33-34.

Λύση

Τελικά κληρονόμος θα γίνει το τελευταίο παιδί που απέμεινε στον κύκλο από την πρώτη σύζυγο του αγρότη. Στη θέση 14.
Ας δούμε με ποια σειρά τοποθετήθηκαν τα παιδιά:
BBABBBAAAAABB**A**ABBBBABAAABAABBA



Σχήμα 2.3: Το πρόβλημα του Ιώσηπου στην Ιαπωνία από τον $Miyake\ Kenry\bar{u}''s$ $Shojutsu\ Sangaku\ Zuye$ (1795), το πρόβλημα της θετής μητέρας.

Γενική Περίπτωση

Ένα γενικό τρόπο για να λυθεί το πρόβλημα του Ιωσήπου απέδειξε ο $P.G.\ Tait$ στο $Collected\ Scientific\ Papers$ το 1900 και είναι ο παρακάτω:[19]

Αν σε έναν κύκλο βρίσκονται αριθμημένα με τα φορά του ρολογιού n άτομα και διώχνουμε κάθε m-οστό άτομο, έστω $J(n) = p$ η αρχική θέση που είχε στον κύκλο αυτός που κατάφερε να επιζήσει.

Αν τώρα στον κύκλο πάρουμε $n+1$ άτομα και διώχνουμε πάλι κάθε m-οστό άτομο αυτός που θα επιζήσει θα είναι αυτός που βρισκόταν αρχικά στη θέση $J(n+1)$, όπου

$$J(n+1) = \begin{cases} p+m, & \alpha\nu \quad p+m \leq n+1 \\ p+m-(n+1), & \alpha\nu \quad p+m > n+1 \end{cases}$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να προβλέψουμε το άτομο που θα επιζήσει αν μετακινείται, από την αρχική σωτήρια θέση, κατά μήκος του κύκλου m θέσεις για

[19]W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations Essays*, Dover Publications, Inc., New York, 1987, σελίς 34.

κάθε άτομο που προστίθεται στον αρχικό κύκλο. Με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ξεκινάμε τη διαδικασία από την ίδια θέση.

Έστω τώρα ότι έχουμε στον κύκλο $n+x$ άτομα, η θέση που θα κατείχε αρχικά ο επιζών θα είναι η $J(n+x)$, όπου

$$J(n+x) = \begin{cases} p+mx, & \alpha\nu \quad p+mx \leq n+x, \ x = 0, 1, \cdots, [\frac{n-p}{m-1}] \\ p+mx-(n+x), & \alpha\nu \quad p+mx > n+x, \ x = [\frac{n-p}{m-1}]+1 \end{cases}$$

Με αυτό τον τρόπο ο $Tait$ ξεκινώντας από κάποια μικρή τιμή του n που γνωρίζει τη θέση p, όπου $p < m$, μπορεί να υπολογίσει σταδιακά τον επιζών για μεγαλύτερο n.

Π.χ. Έχουμε $n = 6$, $p = 1$, $m = 3$

Για $x_1 = 3$ έχουμε $n_1 = 9$ $J(9) = 1$,
για $x_2 = 5$ έχουμε $n_2 = 14$ $J(14) = 2$,
για $x_3 = 7$ έχουμε $n_3 = 21$ $J(21) = 2$,
για $x_4 = 10$ έχουμε $n_4 = 31$ $J(31) = 1$
και τέλος για $x_5 = 10$ έχουμε $n_5 = 41$ $J(41) = 31$.

Ένας πολύ εύκολος και όμορφος τρόπος για λυθεί το πρόβλημα του Ιώσηπου για $m = 2$ είναι με τη βοήθεια του δυαδικού συστήματος.

Έστω n, $n > 1$ θετικός ακέραιος, τα άτομα που βρίσκονται στον κύκλο αριθμημένα με τη φορά του ρολογιού και $j(n)$ το τελευταίο άτομο που θα παραμείνει στον κύκλο.

Αν $n = x_1x_2\ldots x_n$, όπου x_k είναι τα ψηφία n στο δυαδικό σύστημα, με $x_1 \neq 0$ τότε $j(n) = x_2x_3\ldots x_nx_1$.

Παράδειγμα: Αν $n = 368$, το οποίο στο δυαδικό σύστημα γράφεται ως $n = 101110000$ τότε $j(n) = 011100001$, το οποίο στο δεκαδικό σύστημα γράφεται $j(n) = 225$. Αν λοιπόν είχαμε 368 άτομα σε έναν κύκλο και διώχναμε κάθε δεύτερο άτομο στο τέλος θα έμενε αυτός που θα βρισκόταν στη θέση 225 του αρχικού κύκλου.

2.4 Alcuin

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα από τα παλαιότερα χειρόγραφα που περιέχουν αριθμητικά προβλήματα-γρίφους είναι το *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, που αποδίδεται στον Αββά Αλκουίνιο (*Alcuin* 735-804).[20] Το χειρόγραφο αυτό είναι γραμμένο στα λατινικά και περιλαμβάνει 56 προβλήματα, μαζί με τις λύσεις τους. Τα προβλήματα μπορούν να χωριστούν σε 11 κύριες κατηγορίες, όπως αναφέρει ο *David Singmaster*.[21] Δύο από τις πιο γνωστές είναι αυτές που αφορούν τα προβλήματα της διάσχισης ενός ποταμού και των εκατό πτηνών, τα οποία θα μελετήσουμε στις δύο επόμενες παραγράφους (2.6, 2.5). Ας δούμε μερικά από τα υπόλοιπα προβλήματα του *Propositiones ad Acuendos Juvenes*.

Προβλήματα Κληρονομιάς

Πρόβλημα 35: *Propositio de obitu cujusdam patrisfamilias.*
Quidam paterfamilias moriens reliquit infantes, et in facultare sua, solidorum dcccclx, et uxorem praegnantem. Qui jussit ut si ei masculus nasceratur, acciperet de omni massa dodrans, hoc est, uncias viiii. Et mater ipsius acciperet quadrans, hoc est, uncias iii. Si autem filia nata esset, acciperet septunx, hoc est vii uncias, et mater ipsius acciperet quincunx, hoc est, v uncias. Contigit autem ut geminos parturiret, id est, puerum et puellam. Solvat, qui potest, quantum accepit mater, et quantum filius, quantumve filia;

"Ένας πατέρας πέθανε και άφησε πίσω του παιδιά, έγκυο σύζυγο και 960 σόλδια από την περιουσία του. Πριν πεθάνει καθόρισε ότι αν η γυναίκα του έκανε γιο, τότε ο γιος θα έπρεπε να πάρει τα $\frac{3}{4}$ της κληρονομιάς, δηλαδή τα $\frac{9}{12}$. Η μητέρα θα έπρεπε να πάρει το ένα τέταρτο της περιουσίας, δηλαδή τα $\frac{3}{12}$. Ωστόσο, αν γεννιόταν κόρη, η κόρη θα έπρεπε να πάρει τα $\frac{7}{12}$ και η μητέρα $\frac{5}{12}$. Αλλά τελικά η γέννα της χάρισε δίδυμα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Πόσα θα πάρει τώρα η μητέρα, ο γιος και η κόρη;"

<u>*Λύση*</u>

Η περιουσία του πατέρα είναι 960 σόλδια.
Στην 1η περίπτωση: Ο γιος θα έπαιρνε τα $\frac{9}{12}$ της περιουσίας και η μητέρα $\frac{3}{12}$.

---

[20] P. J. Bulkholder, *Alcuin of York's Propositiones ad Acuendos Juvenes*, Introduction, commentary and translation. History of Science and Technology (Host) Bulletin (summer) Vol. 1.

[21] D. Singmaster, J. Hadley, *Problems to sharpen the young*, Mathematical Gazette Vol. 76, No. 475, Mar. 1992, σελίδες 102-126.
http://www.jstor.org/pss/3620384

Στην 2η περίπτωση: Η κόρη θα έπαιρνε τα $\frac{7}{12}$ και η μητέρα τα $\frac{5}{12}$.
Έτσι όμως μοιράζονται τα $\frac{24}{12}$ της περιουσίας, δηλαδή 2 φορές το 960. Οπότε να διαιρεθούν όλα τα μερίδια δια του 2.
Ο γιος θα πάρει $\frac{3}{24} \cdot 960 = 360$ σόλδια.
Η κόρη θα πάρει $\frac{7}{24} \cdot 960 = 280$ σόλδια.
Τέλος η μητέρα θα πάρει $\frac{3+5}{24} \cdot 960 = 320$ σόλδια.

Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει σε μία κατηγορία προβλημάτων που είναι γνωστή ως *προβλήματα κληρονομιάς*. Το πρόβλημα σε αυτή τη μορφή με τα δίδυμα ξεκινά από το *Les Falcidia* (50 π.Χ.). Εμφανίζεται σε κείμενα δικηγόρων όπως των *Juventius Celsus* (75 μ.Χ.), *Salvianus Julianus* (12ο αιώνα) και *Antoninus Pius* (138-161). Καθώς και σε κείμενο του *Caecilius Africanus* (100) ο οποίος ήταν γνωστός για τα δύσκολα νομικά του προβλήματα, και αλλού. Σε κείμενο του *Widman* (1489) παρουσιάζεται το πρόβλημα για τρίδυμα.[22] Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας εμφανίζονται σε διάφορες παραλλαγές ανάλογα με το νομικό πλαίσιο κάθε χώρας.

Προβλήματα ανταλλαγών

Πρόβλημα 16: *Propositio de duobus hominibus boves ducentibus.*
Duo homines ducebant boves per viam, e quibus unus alteri dixit : Da mihi boves duos; et habeo tot boves quot et tu habes. At ille ait : Da mihi et tu duos boves, et habeo duplum quam tu habes. Dicat qui vult, quot boves fuerunt, quot unusquisque habuit;

"Δύο άντρες οδηγούσαν κατά μήκος του δρόμου βόδια όταν ο ένας λέει στον άλλο: "Δώσε μου δύο βόδια και θα έχω ακριβώς τα ίδια με τα δικά σου." Τότε του απαντάει ο άλλος: "Δώσε μου εσύ δύο βόδια και θα έχω τα διπλάσια από αυτά που έχεις εσύ." Πόσα βόδια ύπάρχουν και πόσα έχει ο κάθε ένας άντρας;

<u>*Λύση*</u>

Έστω x, y τα βόδια του πρώτου και του δεύτερου άντρα αντίστοιχα.
Οπότε $x + 2 = y - 2$ (1) και $2(x - 2) = y + 2$ (2)
Από τις (1) και (2) παίρνουμε $x = 10$ και $y = 14$.

[22]D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίδες 545-546.

Προβλήματα Γεωμετρικής Προόδου

Στα προβλήματα αυτά κρατήσαμε τον τίτλο που τους έδωσε ο *Singmaster*. Στην λύση των προβλημάτων αυτών προκύπτουν αριθμοί που αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς Γεωμετρικής Προόδου.

Πρόβλημα 41: *Propositio de sode et scrofa.*
Quidam paterfamilias stabilivit curtem novam, in qua posuit scrofam, quae peperit porcellos vii in media sode, qui83 una cum matre, quae octava est, pepererunt igitur unusquisque in omni angulo vii. Et ipsa iterum in media sode cum omnibus generatis peperit vii. Dicat, qui vult, una cum matribus quot porci fuerunt;

Ένας αγρότης έφτιαξε μία τετράγωνη περίφραξη, μέσα στην οποία έβαλε μία γουρούνα. Η γουρούνα γέννησε επτά γουρουνάκια στη μέση του χοιροτροφείου. Οι απόγονοί της, μαζί με την μητέρα γέννησαν από επτά γουρουνάκια στη κάθε γωνία. Έπειτα, στο κέντρο του χοιροτροφείου η μητέρα και όλοι οι απόγονοί της γέννησαν από επτά ακόμα. Πόσα γουρούνια είναι τώρα, μαζί με τη μητέρα;

<u>*Λύση*</u>

Η αρχική γουρούνα γεννάει 7 γουρουνάκια. Στη συνέχεια τα 7+1=8 γουρούνια γεννούν από 7 γουρούνια, οπότε έχουμε $8 \cdot 7 = 56$, 56+8=64 γουρούνια στην 1η γωνία. Στην 2η γωνία μαζί με τα αρχικά, θα έχουμε $64 \cdot 8 = 512$. Στην 3η γωνία μαζί με τα αρχικά, θα έχουμε $512 \cdot 8 = 4096$. Στην 4η γωνία μαζί με τα αρχικά, θα έχουμε $4096 \cdot 8 = 32768$. Και τέλος στο κέντρο μαζί με τα αρχικά, θα έχουμε $332768 \cdot 8 = 262144$. Επομένως συνολικά τα γουρούνια που υπάρχουν μέσα στο χοιροτροφείο είναι 262144.

Πρόβλημα 13: *Propositio de rege.*
Quidam rex jussit famulo suo colligere de xxx villis exercitum, eo modo ut ex unaquaque villa tot homines sumeret quotquot illuc adduxisset. Ipse tamen ad villam primam solus venit; ad secundam cum altero; jam ad tertiam tres venerunt. Dicat, qui potest, quot homines fuissent collecti de xxx villis.

Ένας βασιλιάς διέταξε έναν υπάλληλό του να μαζέψει άντρες για το στρατό από 30 χωριά, ως εξής:
Πρέπει να παίρνει μαζί του φεύγοντας από κάθε χωριό τόσους άντρες, όσοι ήταν αυτοί που πήγαν. Δηλαδή, Στο πρώτο χωριό φτάνει μόνος και συνεπώς θα πάρει μαζί του άλλον ένα, στο δεύτερο χωριό φτάνουν δύο άρα θα πάρει μαζί του άλλους δύο, σύνολο 4 κ.ο.κ. Πόσους άντρες θα πάρει συνολικά από τα χωριά.

Λύση

Στο 1ο χωρίο πήγε ένας και έφυγαν 2,
στο 2ο χωριό πήγαν 2 και έφυγαν $4 = 2^2$,
στο 3ο χωριό πήγαν 4 και έφυγαν $8 = 2^3$
$\vdots$
στο 30ο χωριό πήγαν 536870912 και έφυγαν $1073741824 = 2^{30}$.

Από το 30ο χωριό θα φύγουν 1073741824, άρα ο υπάλληλος θα πάει στον βασιλιά του 1073741823 άντρες.

2.5 Το πρόβλημα των 100 πτηνών

Ο κινέζος μαθηματικός *Qiujian Zhang* (430-490), που είναι γνωστός και με το όνομα *Chang Ch'iu – Chin* ή *Chang Ch'ui – chien*, δημοσίευσε το 468 ένα μαθηματικό κείμενο με 92 προβλήματα. Σε όλα τα προβλήματα δίνει απαντήσεις και σε μερικά από αυτά δίνει και την μέθοδο με την οποία κατέληξε στη λύση. Ένα από τα πιο γνωστά και ευρέως διαδεδομένο προβλήμα είναι το παρακάτω:

- *Ένας κόκορας αξίζει πέντε κέρματα, μία κότα 3 κέρματα και τρία κοτοπουλάκια μαζί 1 κέρμα. Ένας αγόρασε 100 πτηνά με 100 κέρματα. Πόσοι θα είναι οι κόκορες, πόσες οι κότες και πόσα τα κοτοπουλάκια που αγόρασε;*[23]

Το πρόβλημα αυτό έγινε γνωστό ως "Το πρόβλημα των εκατό πτηνών". Το όνομα αυτό του δώθηκε γιατί στα περισσότερα μαθηματικά κείμενα στα οποία εμφανίζεται έχει να κάνει με πτηνά (κόκορες, φασιανοί κλπ), το σύνολο των οποίων είναι εκατό. Το συναντάμε στο χειρόγραφο *Bakhshali*, στο *Ganita – sara – sangraha* του *Mahavira* (850), στο *Βιβλίο σπάνιων θεμάτων στην τέχνη του λογισμού* του *Abu Kamil* (900) και αλλού.

Σπανιότερα συναντάμε το ίδιο πρόβλημα αλλά όπου τα πτηνά έχουν αντικατασταθεί με άλλα αντικείμενα, παραδείγματος χάριν στο *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, που αποδίδεται στον Αββά Αλκουίνιο (735-804), η διατύπωση του είναι με ζώα:

- *Dixit quidam emptor : Volo de denariis C porcos emere; sic tamen, ut verres X denariis emantur; scrofa autem V denariis; duo vero porcelli denario uno. Dicat, qui intelligit, quot verres, quot scorfae, quotve porcelli esse debeant, ut in neutris numerus nec superabundet, nec minuatur?*[24]

  Ένας έμπορος λέει:" Θέλω να αγοράσω 100 γουρούνια με 100 πένες, όταν ένας ώριμος χοίρος γουρούνι πωλείται για 10 δηνάρια, μία γουρούνα για 5 δηνάρια και δυο μικρά θυληκά γουρουνάκια για 1 δηνάριο." Πόσους χοίρους, πόσες γουρούνες και πόσα μικρά γουρουνάκια πρέπει να αγοράσει, ώστε να μην είναι ούτε περισσότερα ούτε λιγότερα από 100 (γουρούνια ή δηνάρια);

Τα προβλήματα αυτά οδηγούν σε δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους. Από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να διώξουμε τον ένα άγνωστο και στη συνέχεια κάνοντας δοκιμές ή με τη βοήθεια της διαιρετότητας να καταλήξουμε στις ακέραιες λύσεις. Ας δούμε τη λύση του αρχικού προβλήματος.

---

[23] *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Zhang_Qiujian.html*

[24] Πρόβλημα 5, *Propositiones ad Acuendos Juvenes*

Λύση (Αρχικού προβλήματος)

Οι επιταγές του προβλήματος οδηγούν στις παρακάτω δύο εξισώσεις
Α+Β+Γ=100 (1) και 5Α+3Β+$\frac{1}{3}$Γ=100 (2),
όπου Α = κόκορες, Β = κότες, Γ = κοτοπουλάκια.
Αρχικά μπορούμε να απαλείψουμε τον έναν άγνωστο, έστω τον Γ.
Είναι Γ=100-Α-Β
οπότε 5Α+3Β+$\frac{1}{3}$(100-Α-Β)=100
ή $B = 25 - \frac{7A}{4}$
Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι το Α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4 και δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη από 14, οπότε οι δυνατές τιμές για το Α είναι 0, 4, 8, 12. Άρα έχουμε
Α=0: Β=25 και Γ=75
Α=4: Β=18 και 78
Α=8: Β=11 και Γ=81
Α=12: Β=4 και Γ=84

Από αυτές τις λύσεις ο $Zhang$ στο χειρόγραφό του δίνει τις παρακάτω τρεις:

1, 4 κόκορες για 20 κέρματα, 18 κότες για 51 κέρματα
και 78 κοτόπουλα για 26 κέρματα
2, 8 κόκορες για 40 κέρματα, 11 κότες για 33 κέρματα
και 81 κοτόπουλα για 27 κέρματα
3, 12 κόκορες για 60 κέρματα, 4 κότες για 12 κέρματα
και 84 κοτόπουλα για 28 κέρματα

Την τέταρτη λύση, 0 κόκορες, 25 κότες και 75 κοτόπουλα, ο $Zhang$ δεν μπορούσε να την δεχτεί. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα Ο $Zhang$ δεν διευκρινίζει αν είχε κάποια μέθοδο με την οποία το έλυσε.

Παρόμοια προβλήματα με δύο εξισώσεις και τρεις αγνώστους συναντάμε και στα Ευρωπαικά και Αραβικά μαθηματικά στις αρχές του 8ου αιώνα.

Ο $Abu\ Kamil$ στην Αίγυπτο έχει δώσει ένα πρόβλημα με 5 είδη πτηνών και λέει ότι υπάρχουν 2676 λύσεις![25]

[25]Βλ. σχετικά, G. Loria, Ιστορία των μαθηματικών, Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, τόμος 1, 1971, σελίς 265.

2.6 Προβλήματα διάσχισης ποταμού

Μια ακόμα κατηγοριά προβλημάτων που ανήκει στα διασκεδαστικά μαθηματικά είναι τα προβλήματα που αφορούν την εύρεση μιας σειράς κινήσεων υπό περιορισμούς. Συνήθως διατυπώνονται με την μορφή προβλήματος μεταφοράς ανθρώπων, ζώων, πραγμάτων από τη μία όχθη ενός ποταμού στην άλλη κάτω από ορισμένους περιορισμούς. Οι τελευταίοι προσδιορίζουν πόσα αντικείμενα μπορούν να περάσουν μαζί, καθώς και ποια μπορούν να μείνουν πίσω, έτσι ώστε σταδιακά να περάσουν όλα απέναντι, χωρίς απώλειες. Ένα από τα παλαιότερα χειρόγραφα που περιλαμβάνει τέτοιου είδους προβλήματα είναι το *Propositiones ad Acuendos Juvenes*[26], που αποδίδεται στον Αββά Αλκουίνιο (*Alcuin* 735-804).[27] Αργότερα βρίσκουμε παρόμοια προβλήματα-γρίφους σε κείμενα των Νικολάου *Chuquet* (1445-1488), *Niccolò Tartaglia* (1499-1557), *Claude − Gaspar Bachet* (1581-1638), και αργότερα των *Eduard Lucas* (1842-1891), *Cadet De Fontenay*, *Gaston Tarry* (1843-1913) και άλλων.

Σε αυτό το σημείο ας αναφέρουμε κάποια από τα πιο γνωστά προβλήματα αυτής της κατηγορίας.

- **Ο λύκος, η κατσίκα και ένα καλάθι με λάχανα**

  Ένας αγρότης έχοντας μαζί του ένα λύκο, μία κατσίκα και ένα καλάθι με λάχανα θέλει να περάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμού. Εκεί υπάρχει μια βάρκα που αντέχει όμως το βάρος μόνο δυο αντικειμένων (αγρότη, λύκο, κατσίκα, καλάθι). Ωστόσο δεν μπορεί να αφήσει μόνο του τον λύκο με την κατσίκα, αλλά ούτε την κατσίκα μόνη της με το καλάθι που περιέχει τα λάχανα. Πώς γίνεται να περάσει απέναντι αυτός και το φορτίο του με ασφάλεια;[28]

[26] Bulkholder P. J., *Alcuin of York's Propositiones ad Acuendos Juvenes*, Introduction, commentary and translation. History of Science and Technology (Host) Bulletin (summer) Vol. 1, 1993.

[27] Βλ. σχετικά στην Παράγραφο 2.4

[28] M. Ascher, *A River-Crossing Problem in Cross-Cultural Perspective*, Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 1, Feb. 1990, σελίδες 26-29.
*http://www.jstor.org/stable/*2691506

Λύση

Διαδρομές	*Αρχική όχθη*	*Βάρκα*	*Αντίπερα όχθη*
Αρχικά	ΑΚΛΧ		
1.	ΛΧ	ΑΚ⟶	ΑΚ
2.	ΑΛΧ	⟵Α	Κ
3.	Λ	ΑΧ ⟶	ΑΚΧ
4.	ΑΚΛ	⟵ΑΚ	Χ
5.	Κ	ΑΛ ⟶	ΑΛΧ
6.	ΑΚ	⟵Α	ΛΧ
7.		ΑΚ ⟶	ΑΚΛΧ

Όπου Α=αγρότης, Κ=κατσίκα, Λ=λύκος, Χ=καλάθι με λάχανα

Η παραπάνω μορφή του γρίφου είναι από τους πιο γνωστές και ιδιαίτερα διαδεδομένες σε πολλές συλλογές διασκεδαστικών μαθηματικών. Ψάχνοντας κανείς μπορεί να βρει το ίδιο πρόβλημα με άλλη διατύπωση π.χ. με αλεπού, χήνα και καλάθι με φασόλια. Υπάρχουν όμως και άλλες παραλλαγές με διαφορετικούς περιορισμούς, που είναι όμως λίγο πολύ της ίδιας λογικής.

- **Ο ζηλιάρης σύζυγος**

  Τρεις ζηλιάρηδες σύζυγοι μαζί με τις γυναίκες τους χρειάζεται να περάσουν στην απέναντι όχθη ενός ποταμού. Όμως η βάρκα που βρήκαν χωράει μόνο δύο άτομα και ο κάθε άντρας δεν επιτρέπει να βρεθεί η συζυγός του μαζί με άλλον άντρα χωρίς ο ίδιος να είναι παρών. Πώς θα γίνει να περάσουν όλοι απέναντι χωρίς να υπάρξει πρόβλημα;[29]

[29] I. Pressman, D. Singmaster, *The Jealous husbands and The Missionaries and the Cannibals*, Mathematical Gazette, Vol. 73, No. 464, Jun. 1989.

Λύση

Διαδρομές	*Αρχική όχθη*	*Βάρκα*	*Αντίπερα όχθη*
Αρχικά	Αα Ββ Γγ		
1.	Αα Ββ	Γγ⟶	Γγ
2.	Αα Ββ Γ	⟵Γ	γ
3.	ΑΒΓ	αβ ⟶	αβγ
4.	Αα ΒΓ	⟵α	βγ
5.	Αα	ΒΓ ⟶	Ββ Γγ
6.	Αα Ββ	⟵Ββ	Γγ
7.	αβ	ΑΒ ⟶	ΑΒ Γγ
8.	αβγ	⟵γ	ΑΒΓ
9.	α	βγ ⟶	Α Ββ Γγ
10.	Αα	⟵Α	Ββ Γγ
11.		Αα⟶	Αα Ββ Γγ

Όπου Α,Β,Γ είναι οι άντρες και α,β,γ είναι οι γυναίκες τους, αντίστοιχα.

Αυτή είναι η πιο γνωστή μορφή του προβλήματος, αλλά το αρχικό πρόβλημα στο χειρόγραφο του Αλκουίνιου μιλούσε για τρεις άντρες με τις αδερφές τους που πρέπει να περάσουν το ποτάμι. Ο περιορισμός και σε αυτή την περίπτωση ήταν να μην μείνει η αδερφή κανενός με κάποιον από τους άλλους άντρες χωρίς τη δική του παρουσία. Το πρόβλημα έγινε ευρέως γνωστό στην Βόρεια Ευρώπη τον 13ο με 15ο αιώνα. Αργότερα παρουσιάστηκε μία παραλλαγή με αφεντικά και υπηρέτες και κοντά στα τέλη του 19ου αιώνα με κανίβαλους και ιερομόναχους. Ο *Tartaglia* (1499-1557), μελέτησε κατά πόσο μπορούν, με τους ίδιους περιορισμούς, να περάσουν απέναντι 4 ζευγάρια. Την απάντηση την έδωσε αργότερα ο *Bachet* (1581-1683), δείχνοντας ότι το πρόβλημα είναι αδύνατο.[30] Το 1879 ο *DeFontenay* έδειξε ότι τα 4 ζευγάρια θα μπορούσαν να περάσουν απέναντι αν υπήρχε ένα νησάκι μέσα στον ποταμό.[31] Οι παραλλαγές σε αυτό το πρόβλημα είναι αρκετές και δεν αφορούν μόνο το πλήθος των ζευγαριών αλλά και το πλήθος των ατόμων που μπορούν να επιβιβαστούν ταυτόχρονα στη βάρκα, καθώς και την ύπαρξη νησιού ή όχι.

[30] Στο βιβλίο του *Lewis Carroll* με τίτλο *Rediscovered Lewis Carroll Puzzles* (1995), ο *Edward Wakeling* παρουσιάζει μία λανθασμένη λύση.

[31] π.χ. *The four elopements*, H.E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίς 113.

- **Κανίβαλοι και Ιερομόναχοι**

  Τρεις κανίβαλοι και τρεις ιερομόναχοι πρέπει να περάσουν στην απέναντι όχθη ενός ποταμού με μια βάρκα που χωράει μόνο δύο άτομα τη φορά. Υπάρχει όμως ο εξής περιορισμός: οι κανίβαλοι δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να ξεπερνούν σε πλήθος τους μοναχούς. Αν συμβεί κάτι τέτοιο οι κανίβαλοι θα τους φάνε. Πώς θα γίνει να περάσουν όλοι απέναντι με ασφάλεια;[32]

  Η λύση του είναι ίδια με την παραπάνω αν όπου Α,Β,Γ οι κανίβαλοι και α,β,γ οι Ιερομόναχοι, αντίστοιχα. Το ίδιο πρόβλημα απαντάται και με τρεις σκύλους και τρεις γάτες κ.α.

- **Οικογένειες, κλέφτης και αστυνόμος**

  Σε μια όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας πατέρας με τους δύο γιους του, μία μητέρα με τις δυο κόρες της και ένας αστυνομικός με έναν κλέφτη. Όλοι αυτοί πρέπει να περάσουν απέναντι με μία σχεδία που χωράει δύο άτομα το πολύ. Δεν θα πρέπει όμως σε καμία περίπτωση να μείνει ο πατέρας με κάποια από τις κόρες χωρίς την παρουσία της μητέρας, η μητέρα με κάποιον από τους γιους χωρίς την παρουσία του πατέρα και ο κλέφτης δεν θα πρέπει να μείνει με κανένα μέλος της οικογένειας χωρίς την παρουσία του αστυνομικού. Την σχεδία μπορούν να πλοηγήσουν μόνο ο πατέρας, η μητέρα και ο αστυνομικός. Πώς θα γίνει να περάσουν απέναντι τηρώντας αυτούς τους κανόνες;

[32] I. Pressman, D. Singmaster, *The Jealous husbands and The Missionaries and the Cannibals*, Mathematical Gazette, Vol. 73, No. 464, Jun. 1989, σελίδες 73-81.

Λύση

Διαδρομές	*Αρχική όχθη*	*Βάρκα*	*Αντίπερα όχθη*
Αρχικά	ΑΚ Μκλ Παβ		
1.	Μκλ Παβ	ΑΚ⟶	ΑΚ
2.	Α Μκλ Παβ	⟵Α	Κ
3.	Μκλ Πα	Αβ ⟶	ΑΚ β
4.	ΑΚ Μκλ Πα	⟵Α Κ	β
5.	ΑΚ Μκλ	Πα ⟶	Παβ
6.	ΑΚ Μκλ Π	⟵Π	αβ
7.	ΑΚ κλ	ΜΠ ⟶	Μ Παβ
8.	ΑΚ Μκλ	⟵Μ	Παβ
9.	Μκλ	ΑΚ ⟶	ΑΚ Παβ
10.	Μκλ Π	⟵Π	ΑΚ αβ
11.	κλ	ΜΠ ⟶	ΑΚ Μ Παβ
12.	Μκλ	⟵Μ	ΑΚ Παβ
13.	λ	Μκ ⟶	ΑΚ Μκ Παβ
14.	ΑΚ λ	⟵ΑΚ	Μκ Παβ
15.	Κ	Αλ ⟶	Α Μκλ Παβ
16.	ΑΚ	⟵Α	Μκλ Παβ
17.		ΑΚ ⟶	ΑΚ Μκλ Παβ

Όπου Α=αστυνομικός, Κ=κλέφτης, Μ=μητέρα, κ,λ=κόρες, Π=πατέρας, α,β=γιοί

- **Οικογένεια στο ποτάμι**

  Ένας άντρας και μία γυναίκα που ζυγίζουν το ίδιο βάρος, βρίσκονται στην όχθη ενός ποταμού μαζί με δύο παιδιά που το καθένα ζυγίζει το μισό από το βάρος τους. Στο ποτάμι υπάρχει μια βάρκα που μπορεί να αντέξει μόνο το βάρος ενός ενήλικα ή δύο παιδιών. Πώς θα καταφέρουν να περάσουν στην απέναντι όχθη;[33]

[33]Bulkholder P. J., *Alcuin of York's Propositiones ad Acuendos Juvenes*, Introduction, commentary and translation. History of Science and Technology (Host) Bulletin (summer) Vol. 1, 1993, Πρόβλημα 19.

Λύση

Διαδρομές	*Αρχική όχθη*	*Βάρκα*	*Αντίπερα όχθη*
Αρχικά	ΑΒαϐ		
1.	ΑΒ	αϐ⟶	αϐ
2.	ΑΒα	⟵α	β
3.	Αα	Β ⟶	Βϐ
4.	Ααϐ	⟵β	Β
5.	Α	αϐ ⟶	Βαϐ
6.	Αα	⟵α	Βϐ
7.	α	Α ⟶	ΑΒϐ
8.	αϐ	⟵β	ΑΒ
9.		αϐ ⟶	ΑΒαϐ

Όπου Α, Β=ενήλικες και α, β=παιδιά

Και σε αυτό το πρόβλημα υπάρχουν διάφορες παραλλαγές, ας αναφέρουμε μία που έρχεται από την Ρωσία:[34]

Δύο αγόρια με μια βάρκα συμφώνησαν να βοηθήσουν 3 στρατιώτες να περάσουν στην απέναντι όχθη ενός ποταμού. Η βάρκα όμως ήταν τόσο μικρή, που χωρούσε μόνο ένας στρατιώτης ή τα 2 αγόρια. Κανένας στρατιώτης δεν θα μπορούσε να βρίσκεται στην βάρκα μαζί με κάποιο από τα αγόρια από φόϐο μήπως βυθιστεί η βάρκα. Πόσα ταξίδια θα χρειαστούν για να περάσουν όλοι οι στρατιώτες απέναντι;

Το πρόβλημα αυτό το συναντάμε και σε βιβλίο του *Dudeney*[35], όπου ένας στρατηγός ήθελε να περάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμού μαζί με τους 357 στρατιώτες του. Εκεί υπήρχε μία βάρκα με δύο αγόρια. Στη βάρκα μπορούσαν να βρίσκονται τα δύο παιδιά ή ένας μόνο ενήλικας. Πόσες διαδρομές χρειάζονται, ώστε να περάσουν ο στρατηγός και στρατιώτες του απέναντι και τα παιδιά να βρεθούν στην αρχική τους θέση;

Τέτοιοι γρίφοι συνεχίζουν να προκαλούν το ενδιαφέρον και να δημιουργούνται νέοι. Μια πιο πρόσφατη παραλλαγή θέλει το πέρασμα από τη μία όχθη του ποταμού στην άλλη, να γίνεται με τη βοήθεια κάποιας γέφυρας. Και σε αυτή την περίπτωση το πέρασμα γίνεται με κάποιους περιορισμούς που αφορούν π.χ. την αντοχή της γέφυρας, το πόσα άτομα μπορούν να την διασχίσουν ταυτόχρονα ή το χρόνο μέσα στον οποίο αυτό θα πρέπει να συμβεί.

[34] I. Peterson, *Tricky Crossing*, MAA online , Dec. 15, 2003.
*http://www.maa.org/mathland/mathtrek*_12_15_03.*html*

[35] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίς 88.

- **Η γέφυρα και η δάδα**

  Τέσσερεις άνθρωποι βρέθηκαν νύχτα σε ένα ποτάμι. Εκεί υπήρχε μία στενή γέφυρα την οποία μπορούσαν να διασχίσουν το πολύ δύο άτομα συγχρόνως. Επίσης, επειδή ήταν νύχτα, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν την μοναδική δάδα που διέθεταν. Ο Α μπορούσε να διασχίσει τη γέφυρα σε 1 λεπτό, ο Β σε 2 λεπτά, ο Γ σε 5 λεπτά και ο Δ σε 10 λεπτά. Όταν δύο άνθρωποι διασχίζουν τη γέφυρα συγχρόνως, η ταχύτητα με την οποία περπατούν είναι αυτή του πιο αργού. Πώς γίνεται να περάσουν απέναντι το πολύ σε 17 λεπτά;[36]

  Λύση

Διαδρομές	*Αρχική όχθη*	*Βάρκα*	*Αντίπερα όχθη*	*Λεπτά*
Αρχικά	ΑΒΓΔ			
1.	ΓΔ	ΑΒ$\longrightarrow$	ΑΒ	2
2.	ΑΓΔ	$\longleftarrow$Α	Β	2+1=3
3.	Α	ΓΔ $\longrightarrow$	ΒΓΔ	3+10=13
4.	ΑΒ	$\longleftarrow$Β	ΓΔ	13+2=15
5.		ΑΒ $\longrightarrow$	ΑΒΓΔ	15+2=17

  Υπάρχει μεγάλη ποικιλία και σε αυτόν τον γρίφο, διαφορετικοί χρόνοι με τους οποίους μπορεί ο καθένας τους να διασχίσει τη γέφυρα ή διαφορετικό το χρονικό περιθώριο μέσα στο οποίο πρέπει να έχουν περάσει όλοι απέναντι.

Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει το πέρασμα του ποταμού συνήθως δεν είναι μοναδικός. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας λύνονται με τη βοήθεια της Θεωρίας Γραφημάτων.

[36] M. Gardner, *Mathematics Puzzles from Around the World*, Πρόβλημα Ε13, σελίς 55.

2.7 Η μάχη των αριθμών (*Rithmomachia*)

Στα προβλήματα με αριθμούς μπορούμε να κατατάξουμε και ένα παχνίδι που έχει σχέση με αριθμούς την *Rithmomachia* ή το *παιχνίδι των φιλοσόφων* όπως είναι γνωστό. Η προέλευση του παιχνιδιού δεν είναι γνωστή. Οι μεσσαιωνικοί συγγραφείς το αποδίδουν στον Πυθαγόρα, αν και δεν το συναντάμε στην Ελληνική βιβλιογραφία. Οι βασικοί λόγοι φαίνεται πως είναι το Ελληνικό του όνομα και ότι στηρίζεται στη Θεωρία Αριθμών του Βοήθιου, *De Institione Arithmetica*. Ωστόσο το παιχνίδι αυτό πρωτοεμφανίζεται γύρω στο 1030 όπου ο μοναχός *Asilo* το χρησιμοποιούσε για διδακτικούς λόγους στο σχολείο του Μοναστηριού. Στη συνέχεια οι κανόνες του παιχνιδιού βελτιώθηκαν από τον μοναχό *Hermannus Contractus* (1013-1054) ο οποίος το χρησιμοποίησε στο σχολείο της Λιέγης. Η *Rithmomachia* από εκεί και έπειτα διαδόθηκε πολύ γρήγορα σε σχολεία της Γαλλίας και της Γερμανίας και τον 13ο αιώνα έγινε γνωστή και στην Αγγλία. Τον 15ο και 16ο αιώνα ήταν ένα ιδιαίτερα δημοφιλές παιχνίδι. Αν και ξεκίνησε να χρησιμοποιείται για διδακτικούς λόγους στην πορεία έγινε ένα παιχνίδι που είχε σαν στόχο την ψυχαγωγία. Ο μαθηματικός *Thomas Bradwardine* μαζί με συναδέλφους του έγραψαν το πρώτο κείμενο σχετικά με την *Rithmomachia*. Στη συνέχεια ιδίως μετά την εμφάνιση της τυπογραφίας γράφτηκαν πολλά βιβλία σχετικά με τη *Rithmomachia*, κάποια για διδακτικούς λόγους και κάποια για διασκεδαση. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να γίνει η *Rithmomachia* ευρέως γνωστή. Βιβλία σχετικά έχουν γράψει οι *Faber* (1496), *Claude de Boissière* (1554/56), *John Sherwood* (1474), *William Fulke* και *Ralph Lever* (1563), *Gustavus Selenus* (1616) και άλλοι.[37]Το παιχνίδι άρχισε να χάνει τη δημοτικότητά του από τον 17ο αιώνα και μετά, ενώ απέκτησε μεγάλη απήχηση το σκάκι. Ο *Selenus* έγραψε για την *Rithmomachia* σε παράρτημα ενός βιβλίου του αφιερωμένο στο σκάκι, έτσι αρκετοί μετέπειτα συγγραφείς αναφέρονται στη *Rithmomachia* με το όνομα *αριθμητικό σκάκι*.

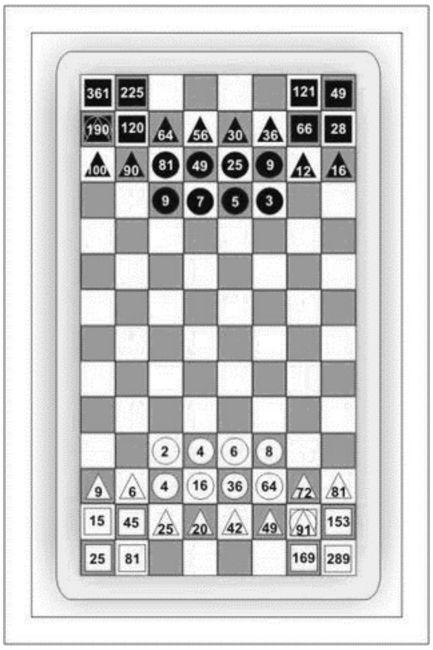
Ας δώσουμε τώρα μία περιγραφή του παιχνιδιού και των κανόνων του[38]. Πρόκειται για ένα παιχνίδι στρατηγικής για δύο άτομα που πολλοί το παρομοιάζουν με το σκάκι.

Το ταμπλό του παιχνιδιού (Σχήμα 2.4) μοιάζει με εκείνο του σκακιού μόνο που έχει 8 τετράγωνα από τη μία πλευρά και 16 από την άλλη. Τα πιόνια κάνουν αντίστοιχες κινήσεις με αυτά του σκακιού, όμως έχει και κάποιους επιπλέον κανόνες σύμφωνα με τα νούμερα που έχει το κάθε πιόνι.

Τα πιόνια έχουν τέσσερα σχήματα *κυκλους, τρίγωνα, τετράγωνα* και *πυραμίδες*. Οι *κύκλοι* μπορούν να κινηθούν ένα τετράγωνο διαγώνια (μπρος ή πίσω).

[37]Ann E. Moyer, *The Philosophers game*: *Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*, University of Michigan, 2001, σελίδες 1-2.

[38]Στην πορεία των χρόνων οι κανόνες του παιχνιδιού άλλαξαν αρκετές φορές, με αποτέλεσμα να υπάρχουν κάποιες διαφορές από εποχή σε εποχή.



Σχήμα 2.4: Το ταμπλό της *Rithmomachia*.

Τα *τρίγωνα* μπορούν να κινηθούν δύο τετράγωνα μόνο κάθετα ή οριζόντια.
Τα *τετράγωνα* μπορούν να κινηθούν τρία τετράγωνα μόνο κάθετα ή οριζόντια.
Πολλά πιόνια μαζί λαμβάνονται ως *πυραμίδες*, δηλαδή:
Η *άσπρη πυραμίδα* αποτελείται από τους κύκλους με τα νούμερα 4 και 1, τα τρίγωνα με τα νούμερα 16 και 9, και τα τετράγωνα με τα νούμερα 36 και 25, η οποία κάνει συνολικά 91.
Ενώ η *μαύρη πυραμίδα* αποτελείται από τον κύκλο με το 16, τα τρίγωνα με τα νούμερα 36 και 25, και τα τετράγωνα με τα νούμερα 64 και 49, η οποία κάνει συνολικά 190. Οι πυραμίδες μπορούν να κινηθούν όπως οι κύκλοι, τα τρίγωνα και τα τετράγωνα, όσο περιέχουν το αντίστοιχο κομμάτι.

Η Θεωρία αριθμών του Βοήθιου έχει να κάνει τόσο με τον τρόπο τον οποίο τοποθετούνται τα πιόνια πάνω στο ταμπλό [39] όσο και με τις νίκες του παιχνιδιού. Τα πιόνια των αντιπάλλων δεν ήταν ίδια, διέφεραν οι αριθμοί που είχαν πάνω. Όι κανόνες του παιχνιδιού και η νίκες έχουν να κάνουν με αυτά τα νούμερα.

Σε αντίθεση με το σκάκι, όταν ένα πιόνι μπορούσε να συλλάβει ένα άλλο παρέμενε στη θέση του και απο το ταμπλό αφαιρείτο το άλλο (το πιόνι του αντιπάλλου). Ας δούμε τους κανόνες που δίνουν τη δυνατότητα σε ένα πιόνι να συλλάβει ένα άλλο.

[39] Ann E. Moyer, *The Philosophers game*: *Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*, University of Michigan, 2001, σελίδες 10-12.

Εάν ένα πιόνι μπορεί να συλλάβει ένα του αντιπάλλου και έχει την ίδια αξία με αυτό, παραμένει στη θέση του και βγαίνει εκτός το πιόνι του αντιπάλλου.

Εάν ένα πιόνι με μικρή αξία πολλαπασιαστεί με τον αριθμό κενών διαστημάτων μεταξύ αυτού και ενός άλλου μεγαλύτερης αξίας και πάρει αποτέλεσμα ίσο με το πιόνι της μεγαλύτερης αξίας, το μεγαλύτερο πίονι αφαιρείται από το ταμπλό.

Εάν το άθροισμα δύο πιονιών που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός εχθρικού δώσει το ίδιο νούμερο με το εχθρικό πιόνι, το εχθρικό πιόνι συλλαμβάνεται και αφαιρείται από το ταμπλό.

Εάν ένα πιόνι περικυκλωθεί και από τις τέσσερις μεριές με αντίπαλλα πιόνια αφαιρείται.

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες καθορίζεται το πότε θα σταματήσει ένα παιχνίδι και ποιος θα είναι ο νικητής ποικίλουν. Χωρίζονται σε δύο κατηγορίες τις *κοινές νίκες* και τις *ανώτερες νίκες*.

Κοινές νίκες:

Κερδίζει ο παίκτης που θα συλλάβει περισσότερα πιόνια από έναν προσυμφωνηθέντα αριθμό.

Κερδίζει ο παίκτης που θα συλλάβει μεγαλύτερης σε άθροισμα αξίας πιόνια από έναν προσυμφωνηθέντα αριθμό.

Κερδίζει ο παίκτης που θα συλλάβει πιόνια με προκαθορισμένο αριθμό ψηφίων, τα οποία σε άθροισμα θα είναι μεγαλύτερης αξίας από έναν προσυμφωνηθέντα αριθμό.

Κερδίζει ο παίκτης που θα συλλάβει πιόνια με προκαθορισμένο αριθμό ψηφίων, τα οποία θα είναι περισσότερα από εναν προσυνφωνηθέντα αριθμό και μεγαλύτερης σε άθροισμα αξίας από έναν προσυμφωνηθέντα αριθμό.

Οι *ανώτερες νίκες* απαιτούν πολύ ικανούς παίκτες. Έπρεπε να τοποθετηθούν τα πιόνια σε γραμμική διάταξη στην αντίπαλη πλευρά του πίνακα, έτσι ώστε οι αριθμοί να σχηματίζουν αριθμητικές, γεωμετρικές ή αρμονικές προόδους.[40]

[40] Βλ. σχετικά Sally Wilkins, *Sports and Games of Medieval Cultures*, 2002, σελίδες 115-117.

2.8 Μαγικά Τετράγωνα

Ένα ακόμα παιχνίδι με τους αριθμούς είναι *Μαγικά τετράγωνα.*
Μαγικό τετράγωνο ονομάζεται ένας πίνακας $n \times n$ που περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι το n^2 και έχει την ιδιότητα το άθροισμα των γραμμών, των στηλών και των διαγωνίων του να είναι σταθερό.

π.χ.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Εάν οι αριθμοί που αποτελούν το μαγικό τετράγωνο $n \times n$ είναι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το n^2 τότε το άθροισμά κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου είναι σταθερό και δίνεται από τον τύπο $S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Τάξη ενός μαγικού τετραγώνου καλείται ο αριθμός των όρων σε κάθε πλευρά. Για παράδειγμα το παραπάνω *Μαγικό τετράγωνο* είναι 3ης τάξης. Μαγικά τετράγωνα 2ης τάξης δεν υπάρχουν.

Τα *Μαγικά τετράγωνα* τα πρωτοσυναντάμε στην Κίνα ενώ αργότερα εμφανίζονται σε όλους τους πολιτισμούς. Οι αρχαίοι λαοί είχα συσχετίσει τα μαγικά τετράγωνα με τη θρησκεία και την αστρολογία. Ο πρώτος που τα αποσύνδεσε και έδωσε μεθόδους κατασκευής τους ήταν ο Έλληνας *Μανουήλ Μοσχόπουλος*. Στην πορεία ανακαλύφθηκαν και άλλοι μέθοδοι από τους $Bachet$, $Euler$, $Fermat$ και άλλους. Ο $Cornelius\ Agrippa$ (1486-1535) κατασκεύασε Μαγικά τετράγωνα από 3η μέχρι 9ης τάξης στα οποία έδωσε ονόματα από πλανήτες. Ενώ ο $Dürer$ ζωγράφισε ένα στον πίνακά του με τίτλο Μελαγχολία.

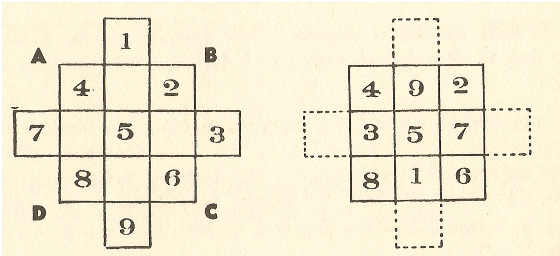
Ας δούμε ενδεικτικά δύο από τις μεθόδους κατασκευής των *Μαγικών τετραγώνων.*[41]

Μέθοδοι κατασκευής Μαγικών τετραγώνων περιττής τάξης

Ας δούμε τη μέθοδο του $Bachet$ για μαγικά τετράγωνα 3ης και 5ης τάξης.

Για να φτιάξουμε ένα Μαγικό τετράγωνο 3ης τάξης φτιάχνουμε αρχικά τον πίνακα στα αριστερά του Σχήματος 2.5. Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τα κενά μεταφέροντας σε αυτά τους αριθμούς που βρίσκονται εξωτερικά στην ίδια γραμμή,

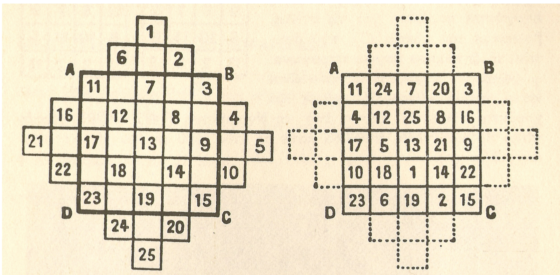
[41] G. Boucheny, *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Αθήνα, 1961.



Σχήμα 2.5

βαζοντάς τους απέναντι, όπως φαίνεται στον πίνακα που βρίσκεται στα δεξιά στο Σχήμα 2.5.

Με εντελώς παρόμοιο τρόπο συμπληρώνεται και το Μαγικό τετράγωνο της 5ης τάξης, Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6

<u>*Μέθοδοι κατασκευής Μαγικών τετραγώνων άρτιας τάξης*</u>

Για να φτιάξουμε ένα *Μαγικό τετράγωνο* άρτιας τάξης σχηματίζουμε αρχικά τον παρακάτω πίνακα.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Στη συνέχεια εναλλάσοντας τη 1η γραμμή με την 4η και την 2η γραμμή με την 3η, χωρίς να πειράξουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στις διαγωνίους παίρνουμε τον επόμενο πίνακα.

1	14	15	4
9	6	7	12
5	10	11	8
13	2	3	16

Έπειτα κάνουμε ακριβώς το ίδιο με τις στήλες, δηλαδή εναλλάσουμε την 1η στήλη με την 4η και την 2η στήλη με την 3η, χωρίς να πειράξουμε και πάλι τις διαγωνίους. Το τετράγωνο που προκύπτει είναι ένα *Μαγικό τετράγωνο.*

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Ιδιότητες

Τα Μαγικά τετράγωνα παρουσιάζουν και κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως

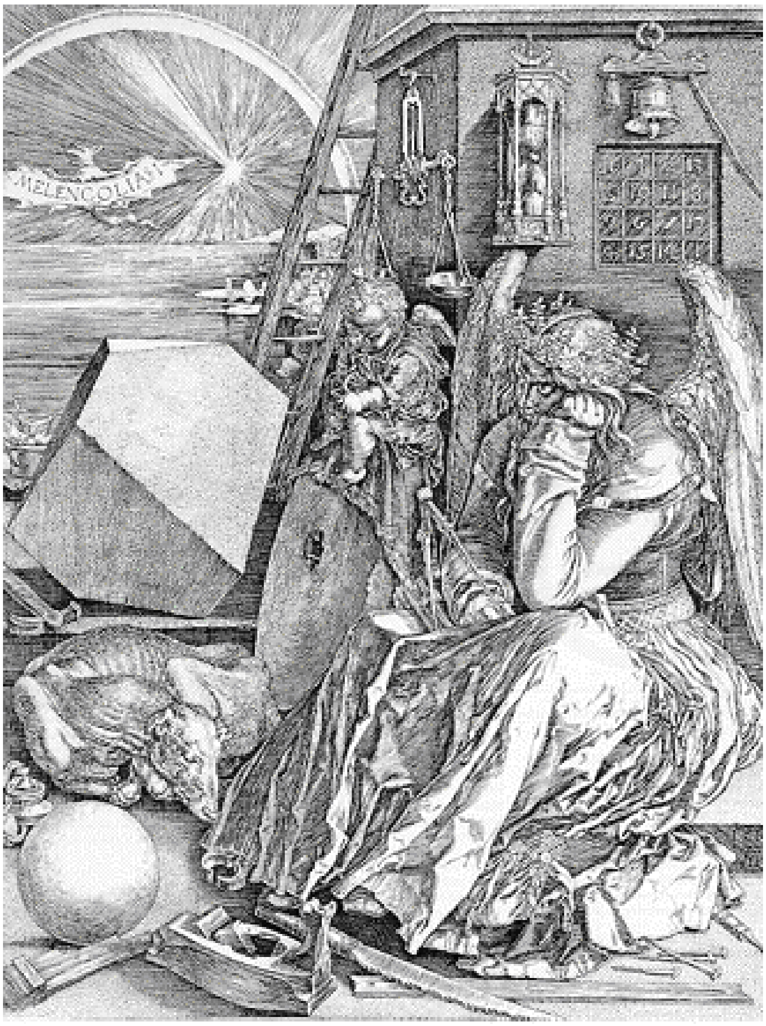
- Σε ένα οποιοδήποτε *Μαγικό τετράγωνο* μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό από όλους τους όρους του τετραγώνου και να παραμείνει πάλι μαγικό. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να πάρουμε άπειρα μαγικά τετράγωνα σε κάθε τάξη.

- Ομοίως σε ένα οποιοδήποτε *Μαγικό τετράγωνο* μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους του τετραγώνου με τον ίδιο αριθμό και να παραμείνει πάλι μαγικό.

Πριν κλείσουμε το κομμάτι αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι εκτός από τα Μαγικά τετράγωνα, έχουμε και άλλες κατηγορίες.
Τα *ημιμαγικά* τετράγωνα τα οποία δεν έχουν τις διαγωνίους τους μαγικές.
Τα *διαβολικά ή παμμαγικά* τετράγωνα τα οποία έχουν όλες τις διευθύνσεις των διαγωνίων τους μαγικές όπως αυτό στο σχήμα που ακολουθεί.

11	20	24	3	7
4	8	12	16	25
17	21	5	9	13
10	14	18	22	1
23	2	6	15	19

Καθώς και πολλές ακόμα κατηγορίες όπως τα υπερμαγικά, διμαγικά και τριμαγικά τετράγωνα, τα μαγικά τετράγωνα με περιθώρια, με σταυρό, με πλαίσια και με διαμερίσματα, οι μαγικοί κύκλοι και άλλα.



Σχήμα 2.7: Η *Μελαγχολία* του *Albert Dürer*.

2.9 Fibonacci

Ο *Fibonacci*[42] ήταν ένας από τους μεγαλύτερους Ευρωπαίους μαθηματικούς του μεσαίωνα. Γεννήθηκε στην Πίζα της Ιταλίας το 1175 και πέθανε το 1240. Το πλήρες όνομα του ήταν *Leonardo Bigollo* ή *Leonardo Pisano*, αλλά ο ίδιος αποκαλούσε τον εαυτό του *Fibonacci*, σύντμηση του *Filius Bonacci* (γιος του *Bonacci*), από το όνομα του πατέρα του. Ο πατέρας του ήταν ο *Guglielmo Bonacci*, τελωνειακός αξιωματικός στην σημερινή πόλη *Bejaia* της Αλγερίας, που παλαιότερα ήταν γνωστή ως *Bugia* ή *Bougie*. Έτσι ο *Leonardo* μεγάλωσε και σπούδασε εκεί, ενώ αργότερα ταξίδεψε σε διάφορα λιμάνια της Μεσογείου. Είχε λοιπόν την ευκαιρία να συναντήσει πολλούς εμπόρους και να γνωρίσει τα συστήματα με τα οποία έκαναν αριθμητική. Γρήγορα κατάλαβε τα πλεονεκτήματα του Ινδο-αραβικού συστήματος έναντι των υπολοίπων και ήταν από τους πρώτους που το εισήγαγαν στην Ευρώπη. Γύρω στο 1200 ο *Fibonacci* επέστρεψε στην Πίζα και το 1202 ολοκλήρωσε το πρώτο του βιβλίο το *Liber Abaci* (βιβλίο του Άβακα ή Βιβλίο των υπολογισμών), με το οποίο και θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Ο *Fibonacci* έγραψε συνολικά 4 βιβλία και μία επιστολή.

- Το *Liber Abaci* (Το βιβλίο των υπολογισμών), 1202

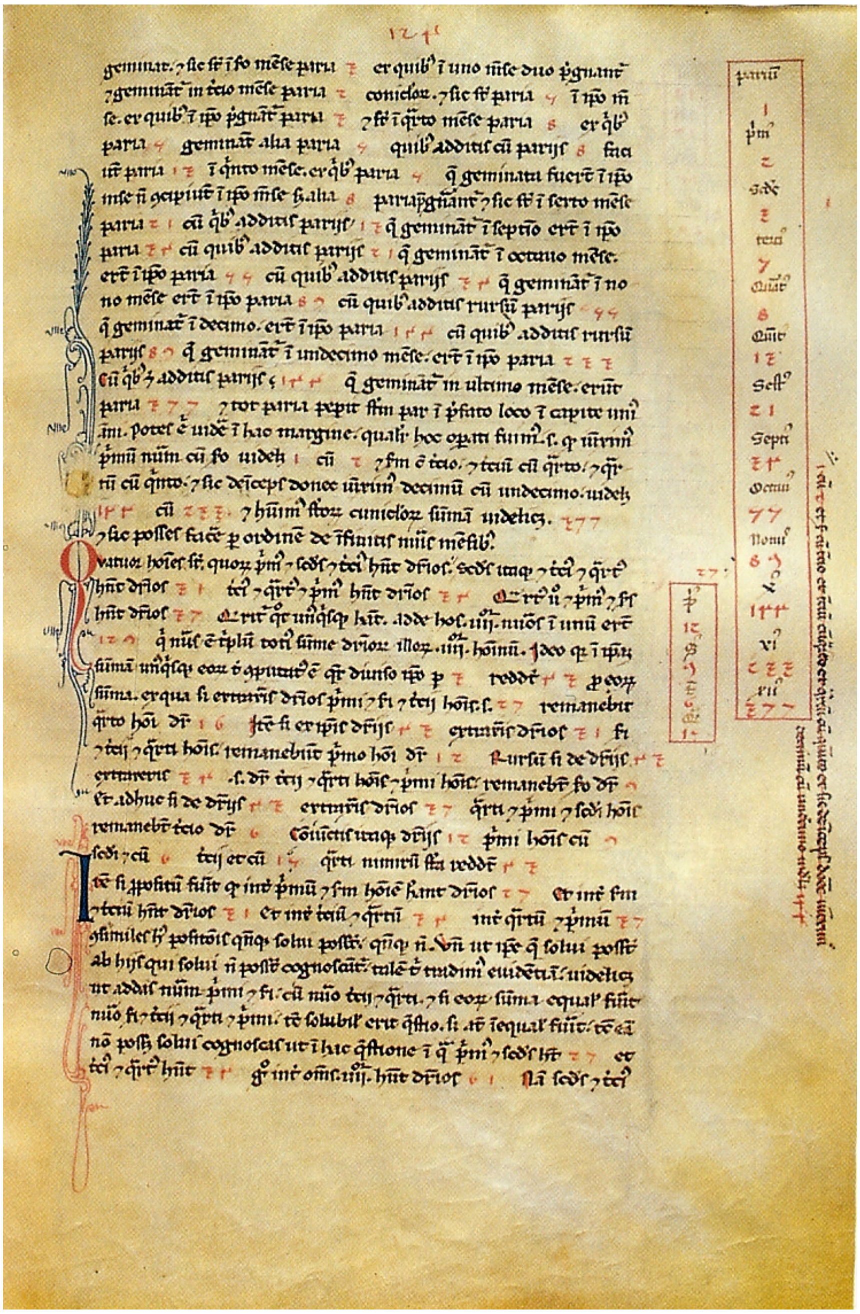
- Το *Practica Geometriae* (Πρακτική Γεωμετρία), 1220
  Ένα βιβλίο που περιλαμβάνει γεωμετρικά προβλήματα, με θεωρήματα βασισμένα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ωστόσο δεν περιλαμβάνονται αποδείξεις των θεωρημάτων, παρά μόνον πρακτικές πληροφορίες για την χρήση τους.

- Το *Liber Quadratorum* (Το βιβλίο των τετράγωνων αριθμών), 1225
  Το βιβλίο του αυτό είναι από τα πιο σημαντικά. Ασχολείται με τη Θεωρία Αριθμών, εξετάζει και ειδικότερα μεθόδους εύρεσης των πυθαγόρειων τριάδων.

- Το *Flos*, 1225
  Το βιβλίο του αυτό είναι μία συλλογή με τις λύσεις των προβλημάτων και των δευτεροβάθμιων εξισώσεων που τέθηκαν στον *Fibonacci* από τον *Johannes of Palermo*, μέλος της αυλής του Φρειδερίκου του Β'.

- Μία επιστολή στον δάσκαλο του *Theodorus*
  Περί γεωμετρικής ανάλυσης.

[42] Βλ. σχετικά *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Fibonacci.html*



Σχήμα 2.8: Μια σελίδα από το *Liber Abaci* που φυλάσσεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Φλωρεντίας.

Το *Liber Abaci* εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1202 στα λατινικά , ενώ επανεκδόθηκε το 1228. Η πρώτη του μετάφραση στα αγγλικά έγινε μόλις το 2002.[43] Σκοπός του *Fibonacci* με αυτό το βιβλίο είναι, όπως ο ίδιος αναφέρει, να κάνει γνωστο το Ινδο-Αραβικό σύστημα και να πείσει αρκετούς Ευρωπαίους να το χρησιμοποιήσουν. Στην Ευρώπη μέχρι τότε επικρατούσε το Ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης που ήταν αρκετά δύσχρηστο στην αριθμητική, ενώ δεν έχει σύμβολο για το 0.

Το *Liber Abaci* αποτελείται από 15 κεφάλαια, από τα οποία τα πρώτα κεφάλαια περιλαμβάνουν μία αναλυτική παρουσίαση του Ινδο-Αραβικού συστήματος αρίθμησης. Στη συνέχεια μέσα από προβλήματα δείχνει με ποιον τρόπο μπορούν να εφαρμοστούν τα παραπάνω στις εμπορικές συναλλαγές όπως μετατροπές νομισμάτων κ.α. Αναμεσα τους βρίσκονται γνωστές κατηγορίες προβλημάτων όπως *των εκατό πτηνών*, *του ταχυδρόμου* και τα *προβλήματα εταιρίας*. Στο 12 κεφάλαιο συναντάμε μία υπέροχη συλλογή προβλημάτων έντονα επηρεασμένη από την Ανατολή. Μέσα σε αυτά τα προβλήματα είναι και το γνωστό πρόβλημα με τα κουνέλια. Ο *Fibonacci* εισήγαγε το πρόβλημα με τα κουνέλια από το οποίο παίρνουμε τους διάσημους αριθμούς του *Fibonacci*. Θεωρείται πιθανό το πρόβλημα να μην ήταν δική του επινόηση, αλλά να το πήρε από κάποια από τις επαφές του και το συμπεριέλαβε στο βιβλίο του. Το όνομα *αριθμοί του Fibonacci* για την ακολουθία αυτή είναι αρκετά μεταγενέστερο και οφείλεται στον Γάλλο μαθηματικό *Edouard Lucas* (1842-1891).

- **Το πρόβλημα των κουνελιών**
  Ένας άνθρωπος βάζει ένα ζευγάρι κουνελιών σε ένα κλουβί. Πόσα ζευγάρια κουνελιών θα έχουν δημιουργηθεί από το αρχικό ζεύγος σε ένα χρόνο, όταν από τη φύση τους κάθε ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα γεννά ένα άλλο ζεύγος, και μπορούν να γεννήσουν από το δεύτερο μήνα της ζωής τους;

Τον πρώτο μήνα θα έχουμε μόνο το αρχικό ζευγάρι των κουνελιών. Τον δεύτερο μήνα θα έχουμε 2 ζευγάρια κουνελιών. Τον τρίτο μήνα το αρχικό ζευγάρι θα αναπαράγει ξανά ενώ το καινούργιο όχι, έτσι θα έχουμε 3 ζευγάρια. Τον τέταρτο μήνα τα δύο μεγαλύτερα ζευγάρια θα αναπαράγουν, ενώ το μικρότερο όχι, έτσι θα έχουμε 5 ζευγάρια. Όμοια και στους επόμενους μήνες.

[43] Fibonacci's Liber Abaci *A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, translated by L.E. Sigler, Springer – Verlag, New York, 2002.

Μήνες	*Αριθμός ζευγαριών*
Αρχικά	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233

Έτσι λοιπόν παίρνουμε την ακολουθία του $Fibonacci$ που είναι η εξής
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...
και δίνεται από τον αναδρομικό τύπο
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ και $F_0 = F_1 = 1$, όπου $n \geq 2$

Ιδιότητες

Η ακολουθία $Fibonacci$ έχει μελετηθεί ευρέως και έχει ανακαλυφθεί πληθώρα ιδιοτήτων της. Παρακάτω καταγράφουμε κάποιες ιδιότητες της ακολουθίας αυτής.

1. Δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας είναι πρώτοι μεταξύ τους.

2. Κάθε τρίτος όρος της ακολουθίας διαιρείται με το 2, κάθε τέταρτος όρος διαιρείται με το 3, κάθε πέμπτος όρος διαιρείται με το 5 και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το F_n διαιρεί κάθε όρο F_{kn} για κ = 1,2,3,...

3. Το άθροισμα 10 διαδοχικών αριθμών $Fibonacci$ είναι ίσος με 11 φορές τον 7ο στη σειρά αριθμό που χρησιμοποιείται.

4. Το άθροισμα των n πρώτων όρων είναι ίσο με $F_{n+2} - 1$.

5. Το τελευταίο ψηφίο κάθε όρου επαναλαμβάνεται σε ένα κύκλο 60 αριθμών, τα τελευταία 2 ψηφία επαναλαμβάνονται σε έναν κύκλο 300 αριθμών, τα τελευταία τρία ψηφία επαναλαμβάνονται σε έναν κύκλο 1500 αριθμών, τα τελευταία τέσσερα επαναλαμβάνονται σε 15000 αριθμούς κ.ο.κ. (Ο Don $Jarden$ απέδειξε ότι για $n > 2$ η περιοδικότητα των τελευταίων n ψηφίων είναι $15 \cdot 10^{n-1}$).

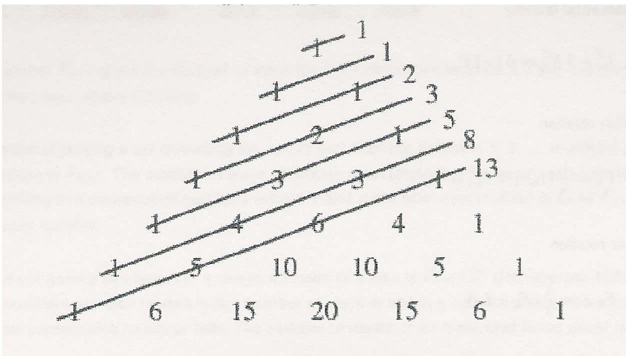
6. Ισχύει $F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$ $(Cassini, 1680)$

7. Ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας του $Fibonacci$ $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ τείνει προς την αποκαλούμενη χρυσή τομή ή χρυσή αναλογία φ=$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, όταν το n τείνει στο άπειρο.

8. $(F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}$ ($Lucas$, 1876)

9. Ισχύει ότι $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ (τύπος του $Binet$, 1843)

10. Οι αριθμοί του $Fibonacci$ εμφανίζονται στο τρίγωνο του $Pascal$, αν προσθέσουμε τους αριθμούς διαγώνια, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Προβλήματα

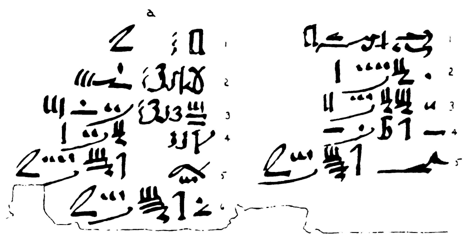
Όπως ήδη αναφέραμε εκτός από το πρόβλημα των κουνελιών το $Liber\ Abaci$ περιλαμβάνει αρκετά ακόμα προβλήματα-γρίφους. Ας δούμε κάποια από αυτά.

Πρόβλημα 2.9.1. *Επτά γυναίκες πηγαίνουν στη Ρώμη.*
Κάθε μία έχει 7 μουλάρια. Κάθε μουλάρι κουβαλάει 7 τσάντες.
Κάθε τσάντα έχει 7 καρβέλια ψωμιού. Κάθε ψωμί έχει 7 μαχαίρια.
Κάθε μαχαίρι έχει 7 θηκάρια.
Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός αντικειμένων;

Λύση

Τα προβλήματα αυτά λύνονται πολύ εύκολα σήμερα.
Πρόκειται για το άθροισμα όρων Γεωμετρικής Προόδου

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6 = 7(1+7^1+7^2+7^3+7^4+7^5) = 7\cdot\frac{7^6-1}{7-1} = 7\cdot 19608 = 137256$$



Σχήμα 2.9: Πάπυρος Rhind, πρόβλημα 79.

Το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα διαδεδομένο και έχει τις ρίζες του στην Αίγυπτο, όπου πρωτοεμφανίζεται στον πάπυρο *Rhind* (1650 π.Χ.) (βλέπε σελ.2).

Το 1730 εμφανίστηκε μία εκδοχή του που χρησιμοποιεί το 9 αντί του 7. Το πρόβλημα αυτό είναι σήμερα γνωστό ως το πρόβλημα του *St. Ives*, διότι έγινε ιδιαίτερα γνωστό μέσα από ένα παραδοσιακό αγγλικό παιδικό τραγούδι που αναφέρεται στο *St. Ives*.

Καθώς πήγαινα στο St. Ives συνάντησα έναν άντρα με 7 γυναίκες.
Κάθε γυναίκα είχε 7 τσάντες. Κάθε τσάντα είχε 7 γάτες.
Κάθε γάτα είχε 7 γατάκια. Πόσοι πηγαίνουν στο St. Ives;

Πρόβλημα 2.9.2. ***Το Λιοντάρι και ο λάκος***
Ένα λιοντάρι έχει παγιδευτεί μέσα σε έναν λάκο με βάθος 50 πόδια και προσπαθεί να βγει έξω. Κάθε μέρα σκαρφαλώνει το 1/7 του βάθους και το βράδυ κυλά προς τα κάτω το 1/9. Πόσες μέρες θα του πάρει για να καταφέρει να βγεί από το λάκο;

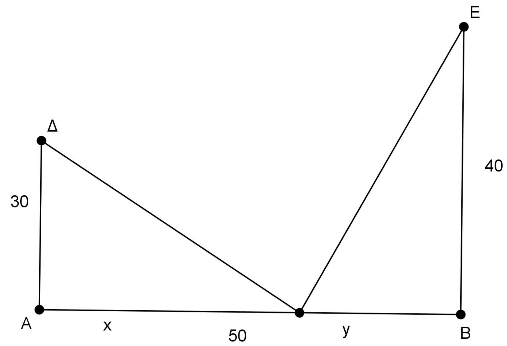
<u>*Λύση*</u>

$\frac{1}{7}50 - \frac{1}{9}50 = \frac{100}{63}$ το καθαρό ύψος που ανεβαίνει το λιοντάρι σε μία ολόκληρη μέρα. Για να ανέβει $50 - \frac{1}{7}50 = \frac{300}{7}$ πόδια χρειάζεται $\frac{300 \cdot 7 \cdot 9}{7 \cdot 100} = 27$ μέρες.
Για να βγει το λιοντάρι από το λάκο θα χρειαστούν 27+1=28 μέρες.

Ο *Fibonacci* παρουσιάζει μία σειρά από τέτοια προβλήματα. Ωστόσο φαίνεται να πρωτοεμφανίζονται στο χειρόγραφο *Bakhshali* του 7ου μ.Χ. αιώνα. Το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα διαδεδομένο και το συναντάμε σε πιο πρόσφατες συλλογές. Μία από τις ποιο γνωστές είναι αυτή με βάτραχο ή με σαλιγκάρι που αναρριχώνται έναν τοίχο.[44]

[44] G. Bouchenny, Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά, Αθήνα 1961, σελίς 78.

Πρόβλημα 2.9.3. ***Πουλιά και πύργοι***
Δύο πουλιά αρχίζουν να πετούν από τις κορυφές δύο πύργων που απέχουν 50 πόδια. Ο ένας πύργος έχει ύψος 30 πόδια και ο άλλος 40 πόδια. Τα πουλιά αρχίζουν να πετούν ταυτόχρονα, με τον ίδιο ρυθμό και φτάνουν στη μέση ενός συντριβανιού την ίδια στιγμή. Πόσο απέχει το συντριβάνι από τον κάθε ένα πύργο;



Λύση

Οι δύο πύργοι απέχουν ο ένας από τον άλλο 50 πόδια. Έστω x η απόσταση του πρώτου πύργου από το συντριβάνι και y του δεύτερου πύργου από το συντριβάνι.
Άρα $x + y = 50$ και $x^2 + 30^2 = y^2 + 40^2$
Λύνοντας τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε $x = 32$ και $y = 18$.

Το πρόβλημα αυτό κατατάσσεται στα γεωμετρικά προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών. Ωστόσο η λύση του απαιτεί μόνον τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Τέτοια προβλήματα έχουμε ήδη συναντήσει σε Κίνα και Ινδία.

Πρόβλημα 2.9.4. ***Τα ταξίδια***
Ένας άντρας πήγε στη $Lucca$ για δουλειές. Εκεί διπλασίασε τα χρήματά του αλλά ξόδεψε 12 δηνάρια. Μέτα πήγε στη Φλωρεντία, εκεί και πάλι διπλασίασε τα χρήματα του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τελικά επιστρέφει στην Πίζα, όπου και εκεί διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του έμεινε τίποτα. Πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε;

Λύση

1ος Τρόπος
Έστω x τα χρήματα που είχε αρχικά ο άντρας.
$Lucca$: $2x - 12$
Φλωρεντία: $2(2x - 12) - 12$

Πίζα: $2(2(2x-12)-12)-12=0$
Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε $x = \dfrac{84}{8} = 10.5$.
Άρα ο άντρας αρχικά είχε 10.5 δηνάρια.

2ος Τρόπος
Από τη στιγμή που δεν του έμεινε τίποτα σημαίνει ότι όταν ήταν στη Πίζα είχε 12 δηνάρια τα οποία και ξόδεψε. Όμως στη Πίζα είχε διπλασιάσει τα χρηματά του, άρα όταν έφτασε εκεί είχε 6 δηνάρια. Επομένως όταν ήταν στην Φλωρεντία είχε 18 δηνάρια από τα οποία ξόδεψε τα 12, όμως στη Φλωρεντία είχε διπλασιάσει τα χρήματα του, άρα όταν έφτασε εκεί είχε 9 δηνάρια. Τέλος όταν ήταν στη $Lucca$ είχε 21 από τα οποία ξόδεψε τα 12, όμως εκεί είχε διπλασιάσει τα χρήματα του, άρα όταν ξεκίνησε το ταξίδι του είχε 10.5 δηνάρια.

Πρόβλημα 2.9.5. *Δύο άντρες έχουν ο καθένας στην κατοχή τους ένα συγκεκριμένο ποσό από χρήματα. Ο πρώτος λέει στον δεύτερο: "Αν μου δώσεις 9 από τα δηνάρια σου, θα έχουμε και οι δύο το ίδιο ποσό". Τότε ο δεύτερος άντρας απαντά στον πρώτο: "Αν μου δώσεις 9 δηνάρια, θα έχω δέκα φορές το ποσό σου". Πόσα δηνάρια είχε ο κάθε άντρας αρχικά;*

Λύση

Έστω x και y τα χρήματα που έχουν στην κατοχή τους ο πρώτος και ο δεύτερος άντρας αντίστοιχα. Διαβάζοντας το πρόβλημα καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:
$x+9=y-9$ και $y+9=10(x-9)$
Λύνοντας τις εξισώσεις βρίσκουμε $x=13$ και $y=31$.

Ανήκει στα προβλήματα των ανταλλαγών και είναι όμοιο με το πρόβλημα 16 που συναντήσαμε νωρίτερα στον Αλκουίνο (Σελίς 2.4).

Πρόβλημα 2.9.6. *Τέσσερις άντρες έχουν ο καθένας στην κατοχή τους ένα συγκεκριμένο ποσό από χρήματα. Ο πρώτος, ο δεύτερος και ο τρίτος μαζί έχουν 27 δηνάρια. Ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος έχουν 31 δηνάρια. Ο τρίτος, ο τέταρτος και ο πρώτος έχουν 34. Τέλος ο τέταρτος, ο πρώτος και ο δεύτερος έχουν 37. Πόσα δηνάρια έχει ο κάθε άντρας;*

Λύση

Έστω x, y, z, w τα χρήματα του 1ου, 2ου, 3ου, 4ου άντρα αντίστοιχα. Διαβάζοντας το πρόβλημα καταλήγουμε στις παρακάτω τέσσερις εξισώσεις:

$x + y + z = 27$
$y + z + w = 31$
$z + w + x = 34$
$w + x + y = 37$
Λύνοντας τις εξισώσεις βρίσκουμε $x = 12$, $y = 9$, $z = 6$, $w = 16$. Άρα ο 1ος άντρας έχει 12 δηνάρια, ο 2ος έχει 9 δηνάρια, ο 3ος έχει 6 δηνάρια και ο 4ος έχει 16 δηνάρια.

Πρόβλημα 2.9.7. ***Η κληρονομιά***
Ένας άντρας που πλησίαζε το τέλος του, κάλεσε τους γιους του και τους ζήτησε να μοιράσουν την περιουσία του, σύμφωνα με την επιθυμία του. Στον μεγάλο γιό του είπε να πάρει ένα σόλδι και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον δεύτερο γιό του να πάρει 2 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον τρίτο γιο του είπε να πάρει 3 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν κ.ο.κ. Έτσι λοιπόν κάθε γιος θα παίρνει ένα σόλδι περισσότερο από τον προηγούμενο και το 1/7 από ότι θα παραμένει. Τέλος, ο τελευταίος γιος θα πάρει ότι περισσέψει. Με αυτό τον τρόπο η περιουσία θα έχει μοιραστεί δίκαια και όλοι θα έχουν πάρει τα ίδια χρήματα. Πόσους γιους είχε και πόσο μεγάλη ήταν οι περιουσία του;

Λύση

Έστω n η περιουσία του άντρα.
Οπότε ο πρώτος γιος θα πάρει $1 + \dfrac{n-1}{7}$ σόλδια.
Ο δεύτερος γιος θα πάρει $2 + \dfrac{n - (1 + \frac{n-1}{7}) - 2}{7}$ σόλδια.
Όμως το πρόβλημα λέει πως η περιουσία μοιράστηκε δίκαια, άρα

$$1 + \frac{n-1}{7} = 2 + \frac{n - (1 + \frac{n-1}{7}) - 2}{7}.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση βρίσκουμε $n = 36$. Δηλαδή, η περιουσία που έπρεπε να μοιραστεί αποτελείτο από 36 δηνάρια.
Επομένως, ο κάθε γιος πήρε $1 + \dfrac{n-1}{7} = 1 + \dfrac{36-1}{7} = 6$ δηνάρια, άρα είχε 6 γιούς.

Το πρόβλημα αυτό της κληρονομιάς φαίνεται να εμφανίζεται για πρώτη φορά στο $Liber\ Abaci$. Ένα όμοιο πρόβλημα συναντάμε και στον $Chuquet$, όπως θα δούμε παρακάτω (Σελίς 86).

2.10 Nicola Chuquet

Ο Νικόλαος *Chuquet* (1445-1488) είναι ένας ακόμα μαθηματικός ο οποίος ασχολήθηκε με προβλήματα-γρίφους. Το 1484 έγραψε ένα σημαντικό κείμενο με αντικείμενο την άλγεβρα, το *Triparty en la science des nombres* (Τριμερής Αριθμητική). Το χειρόγραφο αυτό ωστόσο ανακαλύφθηκε από τον *Aristide Marre* το 1870 και δημοσιεύτηκε σε δύο κομμάτια το 1880 και 1881 αντίστοιχα. Το πρώτο κομμάτι ήταν μία εργασία πάνω στην άλγεβρα καί το δεύτερο μία συλλογή με 166 προβλήματα.[45] Αν και τα δύο κομμάτια είναι μαζί στο χειρόγραφο υπάρχει ένα ερωτηματικό για το αν ανήκουν στον ίδιο συγγραφέα, ωστόσο και η συλλογή φαίνεται να έχει γραφτεί το 1484.[46] Το κείμενο του *Chuquet* είναι αρκετά επηρεασμένο από παλαιότερα χειρόγραφα, όπως του Αλκουίνου και του *Fibonacci*.

Πρόβλημα 2.10.1. *Τρεις παίκτες συμφωνούν ότι ο ηττημένος κάθε παιχνιδιού θα διπλασιάζει όσα χρήματα κατέχει ο καθένας από τους δύο άλλους. Παίζουν λοιπόν τρία παιχνίδια και χάνει ο καθένας τους από ένα. Στο τέλος κατέχει ο καθένας τους από 16 δραχμές. Πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους όταν ξεκίνησαν να παίζουν;*[47]

Λύση

Έστω Α, Β, Γ οι τρεις παίκτες και α, β, γ τα χρήματα που είχε ο καθένας αντίστοιχα όταν ξεκίνησε το παιχνίδι.

Παιχνίδια	***Α***	***Β***	***Γ***
Αρχικά	α	β	γ
1ο: έχασε ο Α	α-β-γ	2β	2γ
2ο: έχασε ο Β	2α-2β-2γ	3β-α-γ	4γ
3ο: έχασε ο Γ	4α-4β-4γ	6β-2α-2γ	7γ-β-α

1ος τρόπος
Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι στο τέλος κατέχει ο καθένας τους από 16 δραχμές, οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:
4α-4β-4γ=16 (1)
6β-2α-2γ=16 (2)
7γ-β-α=16 (3)
Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε α=26 , β=14, γ=8.

Δηλαδή, ο πρώτος παίκτης είχε αρχικά 26 δραχμές, ο δεύτερος 14 δραχμές και ο τρίτος 8 δραχμές.

[45] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chuquet.html*
[46] G. Loria, Ιστορία των Μαθηματικών, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1971, σελίς 356.
[47] G. Boucheny, *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Αθήνα, 1961, σελίς 81.

2ος τρόπος

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί και χωρίς τη χρήση άλγεβρας. Σε αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε ανάποδα. Αν υποθέσουμε ότι το τελευταίο παιχνίδι το έχασε ο Γ, τότε αμέσως πριν ο Α και ο Β θα είχαν 8 δρχ. ο καθένας, αφου στον τελευταίο γύρο διπλασιάζουν τα χρηματά τους και βρίσκονται με 16 δρχ. στην κατοχή τους. Άρα ο Γ έχασε 8+8=16 δραχμές στον τελευταίο γύρο, συνεπώς είχε 32. Με το ίδιο σκεπτικό, αν το δεύτερο παιχνίδι το έχασε ο Β, συμπεραίνουμε ότι αμέσως πριν ο Α είχε 4 δρχ. και ο Γ 16 δρχ. Ο Β έχασε λοιπόν 4+16=20 δραχμές, άρα αμέσως πριν θα είχε 28 δρχ. Τέλος, το πρώτο παιχνίδι το έχασε ο Α οπότε ο Β είχε αρχικά 14 δρχ. και ο Γ 8 δρχ. Όμως 14+8=22, άρα ο Α είχε 22+4=26 δρχ.

Πρόβλημα 2.10.2. *Μια κληρονομιά μοιράζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο μεταξύ ενός ωρισμένου αριθμού κληρονόμων. Ο πρώτος κληρονομεί a δρχ. και ν-οστό μέρος του υπολοίπου, ο δεύτερος $2a$ δρχ. και το ν-οστό μέρος τ ου νέου υπολοίπου, ο τρίτος $3a$ δρχ. και το ν-οστό μέρος του νέου υπολοίπου κ.ο.κ. Υπ' αυτές τις συνθήκες όλοι οι κληρονόμοι βρίσκονται να έχουν λάβει ίσα μερίδια. Ποιος είναι ο αριθμός των κληρονόμων και ποιο το μερίδιο του καθενός;*[48]

Λύση

Έστω x η κληρονομιά τότε ο πρώτος κληρονόμος θα πάρει $a + \dfrac{x-a}{\nu}$ δρχ.
Ο δεύτερος κληρονόμος θα πάρει $2a + \dfrac{x - (a + \frac{x-a}{\nu}) - 2a}{\nu}$ δρχ.
Όμως όλοι οι κληρονόμοι θα πάρουν ίσα μερίδια, οπότε

$$a + \frac{x-a}{\nu} = 2a + \frac{x - (a + \frac{x-a}{\nu}) - 2a}{\nu}$$

Κάνοντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $x = a(\nu-1)^2$.
Δηλαδή η κληρονομιά είναι $a(\nu-1)^2$ δρχ.
Ενώ το μερίδιο κάθε κληρονόμου είναι $a + \dfrac{a(\nu-1)^2 - a}{\nu} = a(\nu-1)$.
Συνεπώς το πλήθος των κληρονόμων είναι $\dfrac{a(\nu-1)^2}{a(\nu-1)} = \nu - 1$.

Το πρόβλημα αυτό το πρωτοσυναντήσανμε στο *Liber Abaci* του *Fibonacci* (Σελίς 84).

[48] G. Boucheny, *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Αθήνα, 1961, σελίς 66.

Πρόβλημα 2.10.3. *Κάποιος έχει μία μπουκάλα 8 κιλών γεμάτη κρασί και θέλει να δώσει απ' αυτό σε έναν φίλο του τα 4 κιλά. Για να το μετρήσει, διαθέτει μόνο δύο άλλα δοχεία, 5 κιλών το ένα και 3 κιλών το άλλο. Πώς πρέπει να ενεργήσει για να βάλει τα 4 κιλά κρασί στο δοχείο των 5 κιλών;*[49]

Λύση

Έστω Α το αρχικό δοχείο, Β το δοχείο που χωράει 5 κιλά και Γ το δοχείο που χωράει 3 κιλά.

Βήματα	***Α***	***Β***	***Γ***
Αρχικά	8	0	0
1.Ρίχνουμε από το Α στο Β	3	5	0
2.Ρίχνουμε από το Β στο Γ	3	2	2
3.Ρίχνουμε από το Γ στο Α	6	2	0
4.Ρίχνουμε από το Β στο Γ	6	0	2
5.Ρίχνουμε από το Α στο Β	1	5	2
6.Ρίχνουμε από το Β στο Γ	1	4	3
7.Ρίχνουμε από το Γ στο Α	4	4	0

Για να βάλουμε 6 κιλά στο δεύτερο δοχείο που χωράει 7 κιλά θα χρειαστούμε 10 βήματα. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να λυθεί αυτό το πρόβλημα.

Με αυτού του τύπου τα προβλήματα έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα ο Νικόλαος *Chuquet*. Στη συνέχεια τα συναντάμε στους *Tartaglia* (1500-1557) και *Claude-Gaspard Bachet* (1581-1638).

[49] G. Boucheny, *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Αθήνα, 1961, σελίς 55.

2.11 Claude-Gaspard Bachet

Ο *Claude-Gaspard Bachet*[50] (1581-1638) γεννήθηκε στη *Bourg-en-Bresse* της Γαλλίας και ασχολήθηκε με τα μαθηματικά και την ποίηση. Την περίοδο 1614 με 1628 συνέθεσε ποιήματα στα Γαλλικά, Ιταλικά και Λατινικά και δημοσίευσε μία ανθολογία με τίτλο *Delices*. Δημοσίευσε επίσης θρησκευτικές εργασίες, κυρίως μεταφράσεις ψαλμωδιών. Ωστόσο έγινε γνωστός για την Λατινική μετάφραση των Αριθμητικών του Διόφαντου που εκδόθηκε το 1621 καθώς και για τις συλλογές του με προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών. Μία από τις πιο όμορφες συλλογές έχει τίτλο *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres* και πρόκειται για την πρώτη συλλογή διασκεδαστικών μαθηματικών που τυπώθηκε. Η πρώτη έκδοση έγινε το 1612 και επανεκδόθηκε πολλές φορές μέχρι και το 1959. Τα αριθμητικά προβλήματα που περιλαμβάνει δεν είναι όλα πρωτότυπα, κάποια είναι παρμένα από προγενέστερες συλλογές όπως η *Παλατινή Ανθολογία* και οι συλλογές του Αλκουίνου, του Μοσχόπουλου και του *Tartalia*.

Ας δούμε αναλυτικά ένα δείγμα από τα προβλήματα που περιλαμβάνει.

Προβλήματα με αριθμούς

Πρόβλημα 2.11.1. *Ένα άτομο Α διαλέγει ένα νούμερο, το τριπλασιάζει και αυτό που βρίσκει το πολλαπλασιάζει με το αρχικό νούμερο που διάλεξε. Στη συνέχεια λέει στο άτομο Β αν το νούμερο το οποίο βρήκε είναι άρτιος ή περιττός αριθμός. Αν ο αριθμός είναι άρτιος το άτομο Α τον διαιρεί με το δύο, αν ο αριθμός είναι περιττός προσθέτει ένα και μετά διαιρεί με το δύο. Έπειτα πολλαπλασιάζει το αποτέλεσμα με τρία και λέει στο άτομο Β το πηλίκο της διαίρεσης του τελικού αποτελέσματος με το εννέα, αγνοώντας το υπόλοιπο. Αν το άτομο Β δώσει τον αριθμό n, ποιός είναι ο αριθμός με τον οποίο ξεκίνησε ο Α ;*

Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν ο αριθμός που σκέφτηκε ο Α είναι άρτιος, δηλαδή της μορφής $2n$, σύμφωνα με τις πράξεις θα έχουμε $3 \cdot 2n = 6n$.

Το $6n$ είναι άρτιος άρα $\frac{6n}{2} = 3n$, $3 \cdot 3n = 9n$, $\frac{9n}{9} = n$.

Επομένως ο Β θα καταλάβει ότι ο αριθμός που επέλεξε ο Α είναι άρτιος και θα τον βρει πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό με 2, δηλαδή $2n$.

Αν ο αριθμός που σκέφτηκε ο Α είναι περιττός, δηλαδή της μορφής $2n + 1$, σύμφωνα με τις πράξεις θα έχουμε $3 \cdot (2n + 1) = 6n + 3$.

[50]Βλ. σχετικά *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Bachet.html*

Το $6n+3$ είναι περιττός άρα $\dfrac{6n+3+1}{2} = 3n+2$, $3{\cdot}(3n+2) = 9n+6$, $\dfrac{9n+6}{9} = n+a$. Επομένως ο Β θα καταλάβει ότι ο αριθμός που επέλεξε ο Α είναι περιττός και θα τον βρει πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό με 2 και προσθέτοντας 1, δηλαδή $2n+1$.

Το πρόβλημα αυτό στην πορεία το συναντάμε στον *Chuquet*[51] και στον *Ozanam*[52]. Οι παραλλαγές του έχουν να κάνουν με το να μαντέψει το άτομο Α δύο ή περισσότερους αριθμούς. Στην περίπτωση που οι αριθμοί είναι πάνω από τρεις θα πρέπει να είναι μικρότεροι του 10.[53]

Πρόβλημα βάρους

Πρόβλημα 2.11.2. *Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός βαριδίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ζυγίσουν ένα ακέραιο αριθμό κιλών από το 1 έως το 40, αν τα βαρίδια μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε πλευρά του ζυγού;*[54]

Ο *Bachet* απαντά ότι χρειάζονται 4 βαρίδια των 1,3,9 και 27 κιλών.

Το ίδιο πρόβλημα λύνει και ο *Tartaglia* με τον περιορισμό τα βαρίδια να μπορούν να μπουν μόνο στη μία μεριά του ζυγού. Δίνει την απάντηση ότι χρειάζονται 6 βαρίδια των 1,2,4,8,16 και 32 κιλών.

Προβλήματα υγρού

Πρόβλημα 2.11.3. *Να μοιραστούν 24 βαρέλια με υγρό, εκ των οποίων τα 5 είναι γεμάτα, τα 8 άδεια και τα 11 μισογεμάτα, μεταξύ τριών ατόμων, έτσι ώστε ο καθένας να πάρει τον ίδιο αριθμό βαρελιών και την ίδια ποσότητα κρασιού.*[55]

Λύση

Βαρέλια	***Α***	***Β***	***Γ***
Γεμάτα	0	2	3
Μισογεμάτα	7	3	1
Άδεια	1	3	4

[51] G. Boucheny, Παράδοξα και Διασκεδαστικά μαθηματικά, Αθήνα, 1961, σελίς 30 και 34.

[52] G. Boucheny, Παράδοξα και Διασκεδαστικά μαθηματικά, Αθήνα, 1961, σελίς 31.

[53] W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematics Recreations and Essays*, Dover Publications Inc., New York, 1987, σελίδες 5-20.

[54] W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematics Recreations and Essays*, Dover Publications Inc., New York, 1987, σελίδες 50-54.

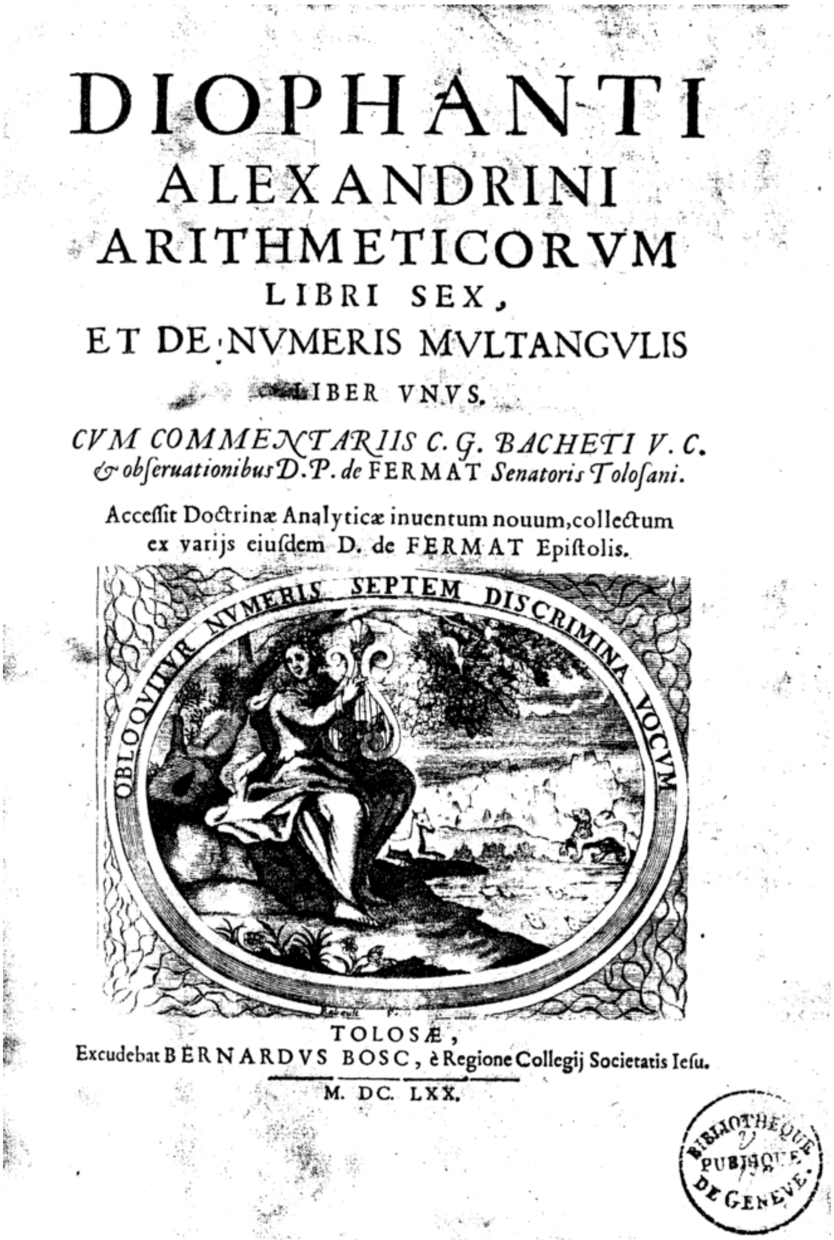
[55] G. Boucheny, Παράδοξα και Διασκεδαστικά μαθηματικά, Αθήνα, 1961, σελίς 61.

Όπου Α, Β και Γ τα τρία άτομα που μοιράζονται το κρασί. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η λύση δεν είναι μοναδική. Τα βαρέλια μπορούν να μοιραστούν και διαφορετικά. Ο $Bachet$ έχει δώσει αρκετές.

Ωστόσο όπως είπαμε και παραπάνω ο $Bachet$ στη συλλογή του περιλαμβάνει και πολλά γνωστά προβλήματα, όπως *το πρόβλημα της διάσχυσης του ποταμού*, *του Ιωσήπου* και τα *μαγικά τετράγωνα.*

Τα πρώτα δύο τα συναντάμε στις πιο γνωστές τους παραλλαγές. Το μεν πρώτο στην εκδοχή του λύκου, με την κατσίκα και το καλάθι με τα λάχανα και το δεύτερο στην εκδοχή των Τούρκων και των Χριστιανών.

Τώρα όσον αφορά τα *Μαγικά τετράγωνα* ασχολήθηκε κυρίως με την κατασκευή *Μαγικών τετραγώνων* των 3^2 και 5^2 θέσεων. Επινόησε μία μέθοδο για την κατασκευή όλων των *Μαγικών τετραγώνων* των $(2n+1)^2$ θέσεων.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

BIBLIOTHEQUE PUBLIQUE DE GENEVE

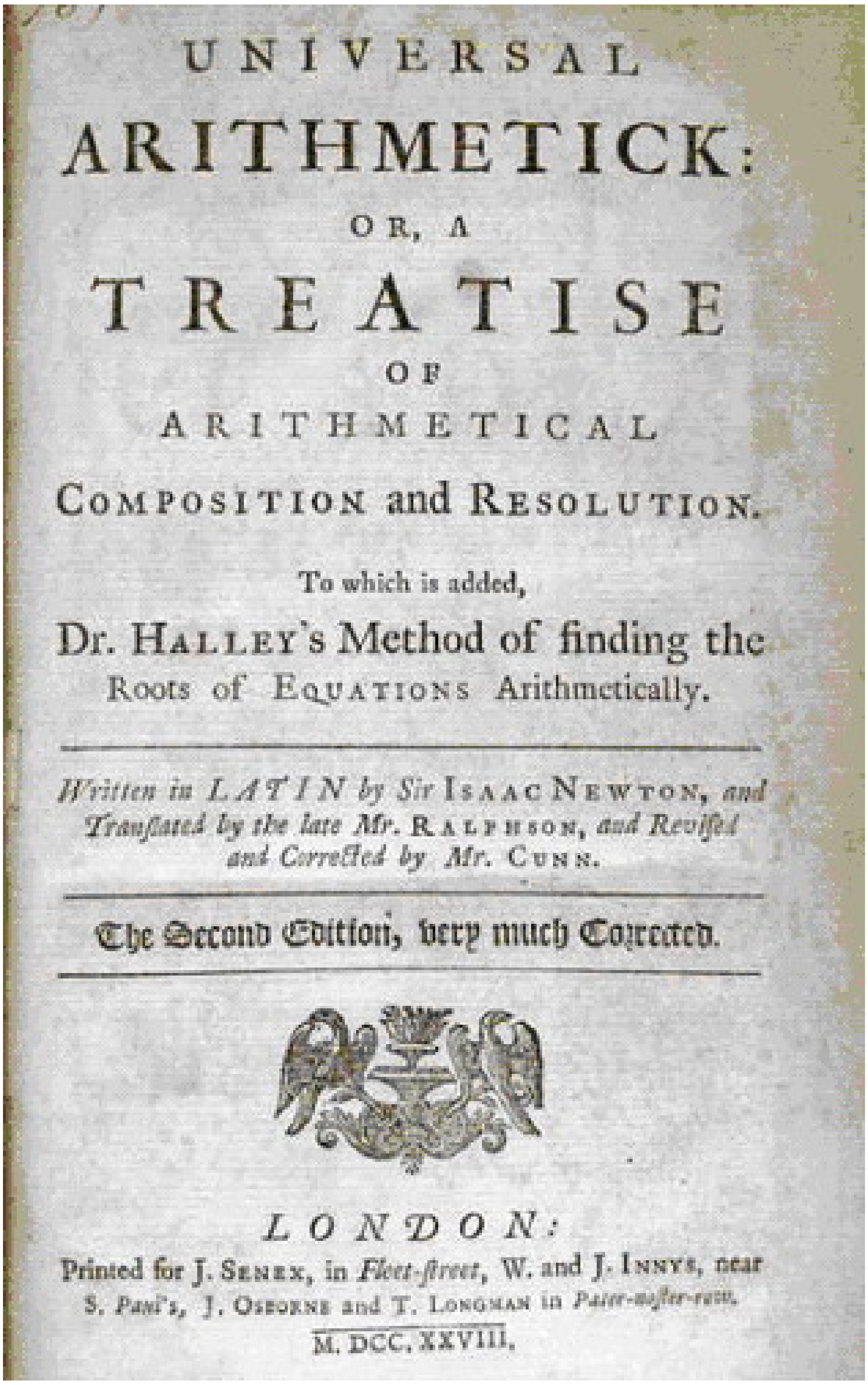
Σχήμα 2.10: Εξώφυλλο της Λατινικής έκδοσης των Αριθμητικών, 1621.

2.12 Isaac Newton

Ο Ισαάκ Νεύτων (*Isaac Newton*)[56] γεννήθηκε στις 4 Ιανουαρίου του 1643 στο *Woolsthorpe*, ένα χωριό κοντά στο *Grantham* του *Lincolnshire* και πέθανε στις 31 Μαρτίου του 1727. Πήρε το όνομα του πατέρα του Ισαάκ, που πέθανε τρεις μήνες πριν από την γέννησή του. Θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες που υπήρξαν ποτέ. Ασχολήθηκε με επαναστατικά αποτελέσματα με τα μαθηματικά, τη φυσική, την μηχανική, την οπτική και την αστρονομία. Ο Νεύτων δημοσίευσε αρκετές εργασίες, όμως ιδιαίτερα γνωστός έγινε με το έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (ή *Principia*), στο οποίο εισήγαγε τους νόμους της κίνησης και τον νόμο της βαρύτητας. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει όμως το *Arithmetica Universalis*, στο οποίο παρουσιάζονται μέθοδοι αλγεβρικής λύσης γεωμετρικών προβλημάτων και γίνεται μελέτη αλγεβρικών εξισώσεων. Τα παραπάνω γίνονται πράξη μέσα από μία σειρά προβλημάτων, κάποια από τα οποία θα σχολιάσουμε παρακάτω.

Το *Arithmetica universalis* τυπώθηκε αρχικά στα λατινικά στο *Cambridge* το 1707 από τον *William Whiston* και βασίστηκε πάνω σε σημειώσεις που είχε φτιάξει ο *Newton* για μία σειρά διαλέξεων την περίοδο 1673-1683. Δεν είναι γνωστό αν τελικά έγιναν οι διαλέξεις. Στη συνέχεια το 1720 εμφανίστηκε μία αγγλική μετάφραση από τον *Joseph Raphson* και το 1722 μία ακόμα λατινική έκδοση από τον *John Machin*. Μέσα στον 18ο αιώνα υπήρξαν ακόμα 7 εκδόσεις, στο Παρίσι, στο Αμστρενταμ, στο Μιλάνο και αλλού.

[56]Βλ. σχετικά *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Newton.html*


UNIVERSAL
ARITHMETICK:
OR, A
TREATISE
OF
ARITHMETICAL
COMPOSITION and RESOLUTION.

To which is added,
Dr. HALLEY's Method of finding the
Roots of EQUATIONS Arithmetically.

Written in LATIN by Sir ISAAC NEWTON, *and Translated by the late Mr.* RALPHSON, *and Revised and Corrected by Mr.* CUNN.

The Second Edition, very much Corrected.

LONDON:
Printed for J. SENEX, in *Fleet-street*, W. and J. INNYS, near S. *Paul's*, J. OSBORNE and T. LONGMAN in *Pater-noster-row*.
M. DCC. XXVIII.

Σχήμα 2.11: *Universal Arithmetick*, *London*, 1728.

Ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα που περιέχονται στο *Arithmetica Universalis* είναι το παρακάτω.

- *Αν a βόδια τρώνε το γρασίδι b στρεμμάτων λιβαδιού μέσα σε χρόνο c και d βόδια τρώνε το γρασίδι e στρεμμάτων λιβαδιού μέσα σε χρόνο f και το γρασίδι στο λιβάδι μεγαλώνει σταθερά, πόσα βόδια τρώνε το γρασίδι g στρεμμάτων μέσα σε χρόνο h;*[57]

Με το πρόβλημα αυτό, που μπορούμε να το κατατάξουμε στα διασκεδαστικά μαθηματικά, ασχολήθηκαν αρκετοί μετά από τον *Newton*. Το συναντάμε σε αρκετές συλλογές διασκεδαστικών μαθηματικών. Είτε στην ίδια μορφή, είτε παραλλαγές του. Κάποιες από αυτές τις συλλογές είναι των *Dudeney*[58], *H. Dörrie*[59], *Yakov Perelman*[60], *G. Boucheney*[61], *G. Polya*[62] και άλλων.
Ας δούμε όμως τη λύση που έδωσε ο ίδιος ο *Newton*.

Για να λύσει το πρόβλημα αυτό ο *Newton* στην ουσία το χωρίζει σε δύο κομμάτια. Στο πρώτο μελετά τι γίνεται όταν το γρασίδι παραμένει σταθερό, δεν αυξάνεται. Στο δεύτερο κομμάτι μελετά την αύξηση του χορταριού και πόσα βόδια μπορούν να τραφούν από αυτή. Ας το δούμε όμως πιο αναλυτικά.

Υποθέτουμε ότι το γρασίδι παραμένει σταθερό, ότι δηλαδή δεν μεγαλώνει καθόλου. Άρα, θα ισχύουν οι παρακάτω αναλογίες.
Αν a βόδια τρώνε b στρέμματα σε χρόνο c
τότε $\dfrac{ae}{b}$ βόδια τρώνε e στρέμματα στον ίδιο χρόνο c.
Άρα, $\dfrac{ec}{bf}$ βόδια θα τρώνε e στρέμματα σε χρόνο f
και $\dfrac{ecfa}{bfh} = \dfrac{eca}{bh}$ βόδια τρώνε e στρέμματα σε χρόνο h.

Υποθέτουμε τώρα ότι το γρασίδι να μεγαλώνει σταθερά καθώς περνάει ο χρόνος. Έχουμε ότι τα d βόδια τρώνε e στρέμματα σε χρόνο f, όμως το γρασίδι μεγαλώνει στα e στρέμματα μέσα στο χρόνο $f - c$ και η αύξηση θα πρέπει να είναι τόση ώστε να φάνε $d - \dfrac{ec}{bf}$ βόδια σε χρόνο f ή $\dfrac{df}{h} - \dfrac{ecfa}{bfh} = \dfrac{df}{h} - \dfrac{eca}{bh}$ βόδια σε χρόνο h.

---

[57] Isaak Newton, Translated by Joseph Raphson, *Universal Arithmetick*, 1720, Πρόβλημα XI, σελίδες 189-191.

[58] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, σελίδες 157-158.

[59] H. Dörrie, 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*: *Their History and Solution*, Dover Publications, Inc., New York, 1965, σελίδες 9-10.

[60] Yakov Perelman, *Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001, σελίδες 49-52.

[61] G. Boucheney, *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά*, Αθήνα 1961, σελίδες 67-68.

[62] G. Polya, *Mathematical Discovery*, Vol. I, John Wiley and Sons, 1981, σελίς 162.

Επομένως, αν η αύξηση του γρασιδιού σε χρόνο $f-c$ μπορεί να ταΐσει $\dfrac{df}{h}-\dfrac{eca}{bh}$ βόδια, η αύξηση σε χρόνο $h-c$ μπορεί να ταΐσει
$\dfrac{(\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh})(h-c)}{f-c}=\dfrac{dfbh-ecah-dfbc+ecac}{bhf-bhc}$ βόδια.
Αν τώρα σε αυτά προσθέσουμε τα $\dfrac{eca}{bh}$ βόδια που τρέφονται από το χορτάρι που υπήρχε σε e στρέμματα χωρίς την αύξηση του γρασιδιού μέσα σε χρόνο h, θα πάρουμε τον συνολικό αριθμό των βοϊδών που τρέφονται από e στρέμματα μέσα σε χρόνο h.
Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\frac{dfbh-ecah-dfbc+ecac}{bhf-bhc}+\frac{eca}{bh} &= \frac{dfbh-ecah-dfbc+ecac+ecfa-acec}{bhf-bhc}\\ &= \frac{dfbh-ecah-dfbc+ecfa}{bhf-bhc}\end{aligned}$$

βόδια τρέφονται από e στρέμματα μέσα σε χρόνο h.
Πόσα θα τραφούν σε g στρέμματα σε χρόνο h; Θα τραφούν
$\dfrac{(dfbh-ecah-dfbc+ecfa)g}{(bhf-bhc)e}=\dfrac{dfbhg-ecahg-dfbcg+ecfag}{bhfe-bhce}$ βόδια.

Έτσι ο $Newton$ αφού πρώτα έδωσε μία γενικά λύση στο πρόβλημα στη συνέχεια λύνει αριθμητικά παραδείγματα κάνοντας χρήση της τελικής σχέσης που έβγαλε.

Παράδειγμα
Αν 12 βόδια τρώνε το χορτάρι από $3\frac{1}{3}$ στρέμματα λιβαδιού μέσα σε 4 εβδομάδες, 21 βόδια τρώνε το χορτάρι από 10 στρέμματα μέσα σε 9 εβδομάδες και το χορτάρι μεγαλώνει σταθερά, πόσα βόδια θα φάνε 24 στρέμματα μέσα σε 18 εβδομάδες;

Λύση

Σε αυτή την περίπτωση $a=12$, $b=3\frac{1}{3}$, $c=4$, $d=21$, $e=10$, $f=9$, $g=24$, $h=18$. Άρα,

$$\frac{21\cdot 9\cdot 3\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 24-10\cdot 4\cdot 12\cdot 18\cdot 24-21\cdot 9\cdot 3\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 24+10\cdot 4\cdot 9\cdot 12\cdot 24}{3\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 9\cdot 10-3\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 4\cdot 10}=36$$

βόδια.

Ας δούμε τώρα την προσέγγιση που κάνει ο $Dörrie$[63] στο συγκεκριμμένο πρόβλημα.

- *a αγελάδες τρώνε το γρασίδι b αγρών σε c μέρες,*
  a' αγελάδες τρώνε το γρασίδι b' αγρών σε c' μέρες,
  και a'' αγελάδες τρώνε το γρασίδι b'' αγρών σε c'' μέρες.

  Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις εννέα μεταβλητές, αν υποθέσουμε ότι όλοι οι αγροί δίνουν την ίδια ποσότητα γρασιδιού, ότι η ημερήσια ανάπτυξη του είναι σταθερή και ότι όλες οι αγελάδες τρώνε την ίδια ποσότητα κάθε μέρα;

Λύση

Έστω,
M η αρχική ποσότητα γρασιδιού σε κάθε αγρό,
m η καθημερινή ανάπτυξη του γρασιδιού σε κάθε αγρό και
Q η καθημερινή κατανάλωση γρασιδιού από κάθε μία αγελάδα.

Επομένως, αν a αγελάδες τρώνε το γρασίδι b αγρών σε c μέρες, θα ισχύει η σχέση $bM + cbm = caQ$.
Όμοια, αν a' αγελάδες τρώνε το γρασίδι b' αγρών σε c' μέρες θα ισχύει η σχέση $b'M + c'b'm = c'a'Q$.
Και αν a'' αγελάδες τρώνε το γρασίδι b'' αγρών σε c'' μέρες θα ισχύεει η σχέση $b''M + c''b''m = c''a''Q$.

Επομένως καταλήγουμε σε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:
$bM + cbm - caQ = 0$
$b'M + c'b'm - c'a'Q = 0$
$b''M + c''b''m - c''a''Q = 0$

Για να έχει λύση διαφορετική της μηδενικής, το ομογενές αυτό σύστημα θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} b & cb & -ca \\ b' & c'b' & -c'a' \\ b'' & c''b'' & -c''a'' \end{vmatrix} = 0$$

[63]H. Dörrie, 100 *Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover Publication, Inc., 1965, σελίδες 9-10.

Πολλαπλασιάζοντας και με -1 παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} b & cb & ca \\ b' & c'b' & c'a' \\ b'' & c''b'' & c''a'' \end{vmatrix} = 0$$

Αυτή είναι η σχέση που ψάχναμε.

Ας δούμε δύο ακόμα από προβλήματα-γρίφους που συναντάμε στο *Arithmetica Universalis*.

Πρόβλημα 2.12.1. *Ένας άντρας ήταν πρόθυμος να μοιράσει κάποια χρήματα σε ζητιάνους. Του έλλειπαν 8 πένες για να μπορέσει να δώσει 3 πένες στο καθέ ζητιάνο. Συνεπώς, έδωσε 2 πένες στον καθένα και του περίσσεψαν 3 πένες. Ποιος ήταν ο αριθμός των ζητιάνων;*[64]

<u>*Λύση*</u>

Έστω x ο αριθμός των ζητιάνων και y τα χρήματα που είχε αρχικά ο άντρας. Οπότε $y + 8 = 3x$ και $2x = y - 3$.
Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε $y = 25$ και $x = 11$. Δηλαδή, οι ζητιάνοι ήταν 11.

Πρόβλημα 2.12.2. *Αν δύο ταχυδρόμοι Α και Β, απέχουν 59 μίλια ο ένας από τον άλλο και ξεκινούν το πρωί το ταξίδι για να συναντηθούν. Ο Α διανύει 7 μίλια μέσα σε δύο ώρες και ο Β διανύει 8 μίλια μέσα σε τρεις ώρες και ο Β ξεκινάει το ταξίδι του μία ώρα αργότερα σε σχέση με τον Α. Πόσα μίλια θα έχει διανύσει ο Α μέχρι να συναντήσει τον Β;*[65]

<u>*Λύση*</u>

Έστω x τα μήλια που θα έχει διανύσει ο Α μέχρι να συναντήσει τον Β, οπότε $59 - x$ είναι τα μίλια που θα διανύσει ο Β μέχρι το σημείο συνάντησης.
Ο Α ταξιδεύει 7 μίλια μέσα σε 2 ώρες, οπότε τα x μίλια θα τα διανύσει σε $\frac{2x}{7}$ ώρες.

[64] Isaak Newton, Translated by Joseph Raphson, *Universal Arithmetick*, 1720, Πρόβλημα IV, σελίς 180.
[65] Isaak Newton, Translated by Joseph Raphson, *Universal Arithmetick*, 1720, Πρόβλημα V, σελίς 180.

Ο Β ταξιδεύει 8 μίλια μέσα σε 3 ώρες, οπότε τα $59 - x$ μίλια θα τα διανύσει σε $\frac{3(59-x)}{8} = \frac{177-3x}{8}$ ώρες.

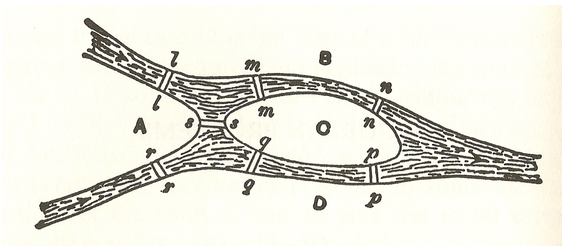
Ωστόσο ο ταχυδρόμος Β σύμφωνα με την εκφώνηση ξεκινάει μία ώρα αργότερα από τον Α, οπότε $1 + \frac{177-3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε $x = 35$. Δηλαδή, ο Α θα διανύσει 35 μίλια μέχρι να συναντήσει τον Β.

2.13 Leonhard Euler

Ο Ελβετός *Leonhard Euler*[66] (1707-1783) είναι μία από τις σημαντικότερες προσωπικότητες στον χώρο των μαθηματικών. Τις πρώτες μαθηματικές του γνώσεις τις πήρε από τον εφημέριο πατέρα του, που είχε την τύχη να παρακολουθήσει μαθήματα του *Jacob Bernoulli* (1654-1705). Η αρχική επιθυμία του πατέρα του ήταν ο *Euler* να ακολουθήσει τη Θεολογία, έτσι τον έστειλε στο πανεπιστήμιο του *Basel* το 1720. Βλέποντας όμως το ταλέντο του γιο του στις επιστήμες, κάτι που διαπίστωσε πρώτος ο *Johann Bernoulli*, αποσύρθηκε από αυτή του την απαίτηση. Ο *Euler* έκανε την πρώτη του δημοσίευση μόλις το 1726 και πρόκειται για ένα υπόμνημα με τίτλο *Constructio Linearum isochronarum in medio quocunque resistente*. Στη συνέχεια δημιούργησε απίστευτα πολλές και σημαντικές εργασίες. Ένα πλήρη κατάλογο με τις εργασίες του *Euler* δημοσιεύσε ο *G. Enestrom* 1913 με τον τίτλο *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker − Vereinigung*.[67]

Ο *Euler* έχει εργαστεί με επιτυχία στους περισσότερους τομείς των μαθηματικών όπως Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Απειροστικό Λογισμό, Γεωμετρία και είναι και ο δημιουργός του κλάδου της Τοπολογίας. Αυτό συνέβει μέσα από την προσπάθεια του να λύσει το πρόβλημα που ακολουθεί και είναι γνωστό ως *οι γέφυρες του Konigsberg*.

"Ο ποταμός Pregel διασχίζει την πόλη της Γερμανίας Konigsberg και τα κομμάτια της ξηράς συνδέονται με 7 γέφυρες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Είναι δυνατόν να διασχίσουμε διαδοχικά όλες τις γέφυρες, χωρίς να περάσουμε από καμία δεύτερη φορά;"

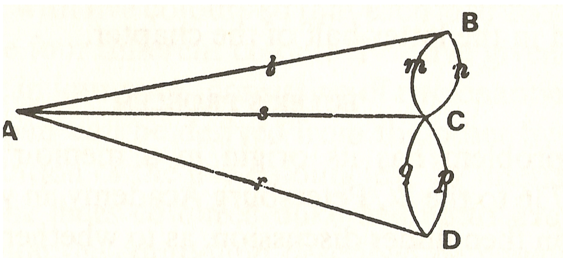


Σχήμα 2.12

[66] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος III, Τεύχος Α, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971, σελίδες 102-103.

[67] Στο διαδίκτυο υπάρχει ο πλήρης κατάλογος σε Αγγλική μετάφραση *http://www.math.dartmouth.edu/˜euler/docs/translations/enestrom/index.html*

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί γενικά με τη βοήθεια του διαγράμματος που φαίνεται στο Σχήμα 2.13, αν θεωρήσουμε τα νησιά ως σημεία (*κορυφές*) και τις γέφυρες ως ευθύγραμμα τμήματα (*ακμές*) που τα ενώνουν.



Σχήμα 2.13

Ο $Euler$ έλυσε το πρόβλημα και έδωσε αρνητική απάντηση.
Από τη θεωρία γραφημάτων έχουμε τα παρακάτω.
Αν ξεκινήσουμε από μία κορυφή ενός γραφήματος, ακολουθήσουμε μία ακμή και οδηγηθούμε σε μία δεύτερη κορυφή και από αυτή ακολουθήσουμε μία ακμή και οδηγηθούμε σε άλλη κορυφή κ.ο.κ. και αν καμία ακμή δεν περπατηθεί δύο φορές σε αυτή τη διαδικασία τότε η προκύπτουσα ακολουθία ακμών λέγεται μονοπάτι.
Ένα μονοπάτι κατα το οποίο διασχίζονται όλες οι κορυφές ενός γραφήματος ακριβώς μία φορά λέγεται μονοπάτι του $Euler$.

Θεώρημα 2.13.1. *Αν ένα γράφημα S το οποίο περιέχει μία περιττή κορυφή έχει ένα μονοπάτι του $Euler$, τότε κάθε μονοπάτι του $Euler$ σε αυτό το γράφημα θα πρέπει να ξεκινάει ή να σταματάει σε αυτή την κορυφή.*

Πόρισμα 2.13.1. *Αν ένα γράφημα S που περιέχει δύο περιττές κορυφές U, V, έχει ένα μονοπάτι $Euler$, τότε κάθε μονοπάτι του $Euler$ σε αυτό το γράφημα θα πρέπει να ξεκινάει από το U και να τελειώνει στο V ή το αντίστροφο.*

Πόρισμα 2.13.2. *Ένα γράφημα που περιέχει περισσότερες από δύο περιττές κορυφές δεν μπορεί να έχει μονοπάτι του $Euler$.*

Το γράφημα του Σχήματος 2.13 που αντιστοιχεί στο πρόβλημα με τις γέφυρες του $Konigsberg$, παρατηρούμε ότι περιέχει 4 περιττές κορυφές, οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 2.13.2 δεν μπορεί να έχει μονοπάτι του *Euler*.[68]

Το πρόβλημα αυτό το συναντάμε σε αρκετές από τις μετέπειτα συλλογές διασκεδαστικών μαθηματικών, όπως είναι του *W.W.R. Ball* και *H.S.M. Coxeter*[69], του *H.E. Dudeney*[70] και άλλες.

Στη συνέχεια να πούμε ότι ο *Euler* ασχολήθηκε με τα μαγικά τετράγωνα και δημιούργησε μία νέα μέθοδο κατασκευής τους. Έχει γράψει δύο βιβλία σχετικά ένα το 1782 με τίτλο *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques* και ένα το 1849 με τίτλο *De quadratis magicis*.

Μία νέα κατηγορία Μαγικών τετραγώνων δημιουργήθηκε μέσα απο το παρακάτω πρόβλημα που είναι γνωστό ως το *πρόβλημα του Euler*.

"*Να τοποθετηθούν σε ένα τετράγωνο 36 κυψελών, ισάριθμοι αξιωματικοί με 6 διαφορετικούς βαθμούς και 6 διαφορετικά συντάγματα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να μην περιέχει 2 αξιωματικούς με τον ίδιο βαθμό ή του ίδιου συντάγματος.*"[71]

[68]B. Averbach and O. Chein, *Problem Solving Through Recreational Mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1980, σελίδες 174-181.

[69]W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications Inc., New York, 1987, σελίδες 243-254.

[70]H.E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications Inc., New York, 1958, σελίδες 47-49.

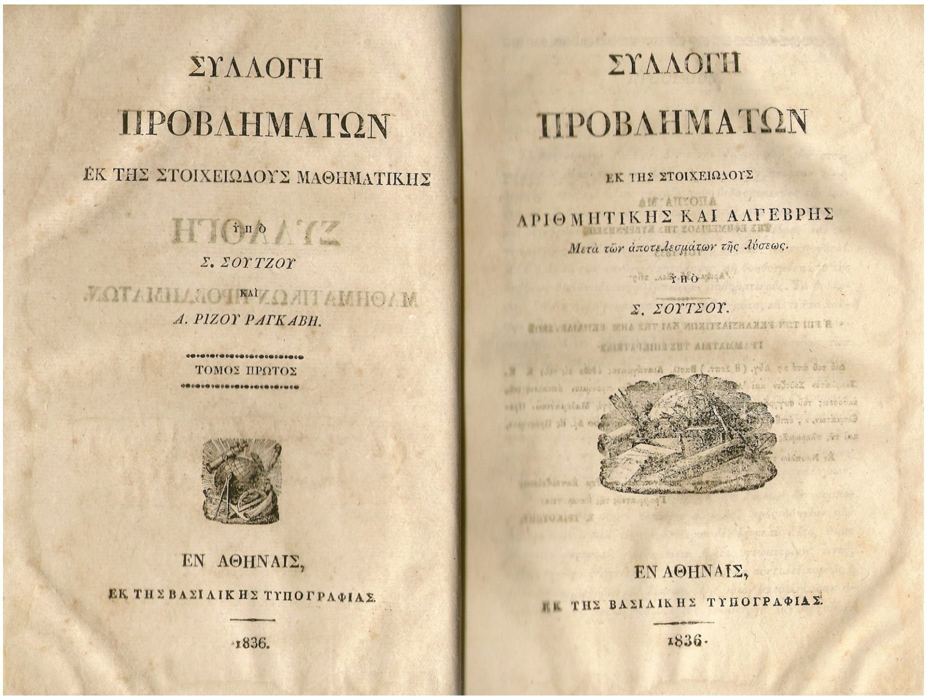
[71]W.W. Rouse Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications, Inc., New York, 1987, σελίς 192.

2.14 Ελληνικές συλλογές

Στη σύγχρονη Ελλάδα υπάρχουν ορισμένες ενδιαφέρουσες συλλογές. Αρκετές από αυτές δημιουργήθηκαν για τις σχολικές και φροντιστηριακές ανάγκες, ιδίως από την εποχή που οι εισαγωγικές εξετάσεις στα ΑΕΙ, στο Μετσόβειο Πολυτεχνείο ήταν δύσκολες.

- Αριθμητική-Άλγεβρα, Σ.Σούτσου και Α.Ρίζου Ραγκαβή

  Θα ξεκινήσουμε την αναφορά από μία συλλογή, ίσως όχι τόσο σπουδαία όσο άλλες αλλά αξίζει να αναφερθεί γιατί είναι η πρώτη συλλογή μετά την απελευθέρωση του κράτους. Η συλλογή των Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβη (1836) γράφτηκε για την εκπαίδευση και αποτελείται από δύο τόμους. Ο πρώτος περιλαμβάνει προβλήματα Αριθμητικής και Άλγεβρας και ο δεύτερος προβλήματα Γεωμετρίας και Τριγωνομετρίας. Ακολουθεί μία επισκόπηση του περιεχομένου του πρώτου τόμου και ένα μέρος των ασκήσεων που περιλαμβάνει, ενώ ο δεύτερος τόμος σχολιάζεται στην Παράγραφο 3.3.



Σχήμα 2.14

Ο πρώτος τόμος είναι χωρισμένος σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος ξεκινά κάνοντας πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, με ποσότητες που περιέχουν γράμματα, υπολογισμό δυνάμεων, ριζικών και φανταστικών ποσοτήτων. Περιλαμβάνει ακόμα λογάριθμους, μεταθέσεις, διώνυμα και πολυώνυμα με ακεραίους θετικούς εκθέτες κ.α. Στο δεύτερο μέρος συναντάμε τρόπους λύσεις αλγεβρικών εξισώσεων. Τέλος, στο τρίτο μέρος, περιλαμβάνονται 716 προβλήματα που οδηγούν στη λύση εξισώσεων πρώτου ή δευτέρου βάθμού με έναν ή περισσότερους αγνώστους, υψηλότερης τάξης εξισώσεις, σε αόριστα ή διοφαντικά προβλήματα, σε προβλήματα με αναλογίες, προβλήματα σειρών, μεταθέσεων, συνδυασμών και άλλα. Στα προβλήματα δεν δίνονται αναλυτικές λύσεις, παρά μόνον οι απαντήσεις. Ας δούμε ενδεικτικά κάποια από αυτά.

Πρόβλημα 2.1. *Σοφὸς ἔλεγε: μόλον ὅτι εἶμαι ἀρκετα ἡλικιωμένος, ἔχω ἀκόμη πατέρα καὶ πάππον· καὶ ἐρωτηθεὶς πόσον ἐτῶν εἶναι; ἀπεκρίθει: ὁ πατήρ μου ἦτον 23 ἐτῶν ὅταν μὲ ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου. καὶ ὁ πάππος μου ἦτον 22 ἐτῶν, ὅταν ἐγεννήθη ὁ πατήρ μου· πρὸ 20 ἐτῶν ἦτον ὅμως ἡ ἡλικία μου ἡμίσεια τῆς τωρινῆς τοῦ πατρός μου. Πόσης ἡλικίας ἦτον ἕκαστος αὐτῶν;*[72]

Λύση

Έστω x η ηλικία του γιού αντίστοιχα. Οπότε του πατέρα είναι $x + 23$ και του παππού $x + 23 + 22 = x + 45$. Η εκφώνηση μας οδηγεί στην εξίσωση $x - 20 = \dfrac{x + 23}{2}$. Από την οποία παίρνουμε $x = 63$.

Ο πατέρας είναι 86 ετών, ο παππούς 108 ετών και ο γιος 63 ετών.

Πρόβλημα 2.2. *Στρατηγός ἤθελε νὰ κατατάξῃ τὸ σῶμά του εἰς τετράγωνον καὶ τὸ ἐδοκίμασε κατὰ δύω τρόπους. Την πρώτην φορὰν τὸν ἔμειναν 39 περισσότεροι· τὴν δευτέραν ὅμως, ἐπειδὴ ηὔξησε τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καθ' ἕνα ἄνδρα, τὸν ἔλλειπαν 50 στρατιῶται πρὸς ἀποπλήρωσιν τοῦ τετραγώνου. Ἀπὸ πόσους συνίστατο τὸ σῶμά του;*[73]

Λύση

Έστω x οι άντρες που έχει ο στρατηγός στο σώμα του,
α οι άντρες που αντιστοιχούν στην πλευρά του πρώτου τετραγώνου και
β οι άντρες που σχηματίζουν την πλευρά του δεύτερου τετραγώνου.

[72] Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος Ι, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 52, σελίς 179.

[73] Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος Ι, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 204, σελίς 214.

Τότε θα έχουμε ότι,
$x = \alpha^2 + 39$ και $x = \beta^2 - 50$.
Οπότε $\beta^2 - \alpha^2 = 89$
ή $(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 89$.
Όμως η πλευρά του δεύτερου τετραγώνου είναι μεγαλύτερη κατά έναν άντρα, δηλαδή $\beta - \alpha = 1$.
Οπότε $\alpha = 44$ και $\beta = 45$.
Άρα $x = 1975$.

Ο στρατηγός έχει στο σώμα του 1975 στρατιώτες.

Πρόβλημα 2.3. *Κτηματίας ἐρωτηθεὶς περὶ τῶν ὑπαρχόντων του, ἀπεκρίθη, ὡς ἕπεται:*
‟ ἡ χρηματική μου κατάστασις εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ἂν τὴν αὐξήσω κατὰ 1578 τάλ. ἢ ἂν τὴν σμικρύνω κατὰ 142 τάλ. καὶ ἐξάξω τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῶν παραγομένων ἀριθμῶν, θέλουν διαφέρει αὐταὶ αἱ ῥίζαι κατὰ 10”. Πόση εἶναι ἡ κατάστασίς του;[74]

Λύση

Έστω ότι η περιουσία του αποτελείται από x τάλαντα. Από δεδομένα του προβλήματος οδηγούμαστε στην εξίσωση
$\sqrt[3]{(x + 1578)} - \sqrt[3]{(x - 142)} = 10$
Υψώνοντας στον κύβο έχουμε
$(x+1578) - (x-142) - 3\sqrt[3]{(x + 1578)(x - 142)}(\sqrt[3]{x + 1578} - \sqrt[3]{x - 142}) = 100$
οπότε παίρνουμε $\sqrt[3]{(x + 1578)(x - 142)} = 24$
Άρα $(x + 1578)(x - 142) = 13824$
ή $x^2 + 1436x - 237900 = 0$
$x_1 = -1586$ που απορρίπτεται και $x_2 = 150$.

Επομένως ο κτηματίας είχε στην κατοχή του 150 τάλαντα.

Πρόβλημα 2.4. *Ἄνδρες, γυναῖκες και παῖδες εὑρέθησαν εἰς ξενοδοχεῖον· ἕκαστος ἀνὴρ ἐξώδευσε 19 δρχ. ἑκάστη γυνὴ 10 καὶ ἕκαστος παῖς 8. Οἱ ἄνδρες εἶχαν ἐξοδεύσει μαζῆ 7 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὰς γυναῖκας καὶ 15 περισσοτέρας ἀπὸ τοὺς παῖδας. Πόσοι ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ἦσαν ἐκεῖ;* [75]

[74] Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος Ι, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 68, σελίς 253.

[75] Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος Ι, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 18, σελίς 280.

Λύση

Έστω x άντρες, y γυναίκες και z παιδιά.
Οπότε, αν κάθε άντρας ξόδεψε 19 δρχ όλοι μαζί θα ξόδεψαν $19x$ δρχ. Αντίστοιχα όλες οι γυναίκες μαζί θα ξόδεψαν $10y$ δρχ και όλα τα παιδιά μαζί $8z$ δρχ. Άρα σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $19x = 7 + 10y$ (1) και $19x = 15 + 8z$ (2).
Επομένως, $7 + 10y = 15 + 8z$
ή $z = \dfrac{5y}{4} - 1$ (3) Τα x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οπότε από την σχέση (3) βλέπουμε ότι το y θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4, δηλαδή $y = 4, 8, 12, ...$
Για $y = 4$ έχουμε $z = 4$ όμως $x = \dfrac{47}{19}$ απορρίπτεται.
Για $y = 8$ έχουμε $z = 9$ όμως $x = \dfrac{87}{19}$ απορρίπτεται.
Για $y = 12$ έχουμε $z = 14$ όμως $x = \dfrac{127}{19}$ απορρίπτεται.
Για $y = 16$ έχουμε $z = 19$ όμως $x = \dfrac{167}{19}$ απορρίπτεται.
Για $y = 20$ έχουμε $z = 24$ όμως $x = \dfrac{207}{19}$ απορρίπτεται.
Για $y = 24$ έχουμε $z = 29$ και $x = 13$
Όμοια συνεχίζουμε και για τις υπόλοιπες.

Δηλαδή, στο ξενοδοχείο βρίσκονταν 13 άντρες, 24 γυναίκες και 29 παιδιά κ.ο.κ.

Πρόβλημα 2.5. *Ἔμπορος ἠγόρασεν ἵππους καὶ βόας μαζῆ διὰ 1770 τάλ. καὶ ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον ἵππον 31 τάλ. καὶ δι' ἕκαστον βοὺν 21. Πὸσους ἵππους καὶ βόας ἠγόρασεν;*[76]

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ίππους και y βόδια.
Οπότε θα έχουμε $31x + 21y = 1770$.
ΜΚΔ(31,21)=1 και $31(-2) + 21(3) = 1$
πολλαπλασιάζω με 1770 και παίρνω
$31(-2 \cdot 1770) + 21(3 \cdot 1770) = 1770$
ή $31(-3540) + 21(5310) = 1770$

[76] Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος I, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 24, σελίς 281.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα ζεύγη $x = -3540+21t$ και $y = 5310-31t$, όπου $t\epsilon\mathbb{Z}$
Όμως $x, y > 0$ οπότε $168.5 < t < 171,29$, δηλαδή $t = 169, 170, 171$.
Για $t = 169$: $x = 9$ $y = 71$.
Για $t = 170$: $x = 30$ $y = 40$.
Για $t = 171$: $x = 51$ $y = 9$.

Δηλαδή ο έμπορος αγόρασε 9 ίππους και 71 βόδια ή 30 ίππους και 40 βόδια ή 51 ίππους και 9 βόδια.

Από την δεκαετία του 60 και πέρα εμφανίστηκαν πολλές συλλογές που δημιουργήθηκαν για τις σχολικές και φροντιστηριακές ανάγκες, ορισμένες όμως από αυτές ξεχώρισαν, όπως

- *Πέτρος Τόγκας, Άλγεβρα.*
  Πρόκειται για ένα βιβλίο Άλγεβρας το οποίο περιλαμβάνει θεωρία και παραδείγματα και στο τέλος κάθε παραγράφου μία σειρά από ασκήσεις άλυτες για την εξάσκηση των μαθητών. Το βιβλίο απευθυνόταν σε μαθητές Λυκείου και υποψήφιους στις Ανώτατες Σχολές. Οι λύσεις των Ασκήσεων δίνονται σε μία σειρά βιβλίων με τίτλο *Ασκήσεις και προβλήματα Άλγεβρας*.

- *Πέτρος Τόγκας, Άλγεβρα και συμπλήρωμα Άλγεβρας.*

- *Αριστείδης Πάλλας, Μεγάλη Άλγεβρα μετά Θεωρητικής Αριθμητικής.*
  Το βιβλίο περιλαμβάνει Θεωρία Αριθμών, διαιρετότητα, πρώτους αριθμούς, συστήματα αρίθμησης, κλασματικούς αριθμούς, ανισότητες, απόλυτη τιμή, διανύσματα, πολυώνυμα, εξισώσεις, συστήματα, πρωτοβάθμιες εξισώσεις απροσδιορίστου αναλύσεως και άλλα. Το βιβλίο αυτό προοριζόταν για υποψηφίους στις Ανώτατες Σχολές καθώς επίσης και σε φοιτητές της Φυσικομαθηματικής Σχολής του Πανεπιστημίου και των σπουδαστών του Πολυτεχνείου.

- *Αριστείδης Πάλλας, Ασκήσεις Άλγεβρας.*

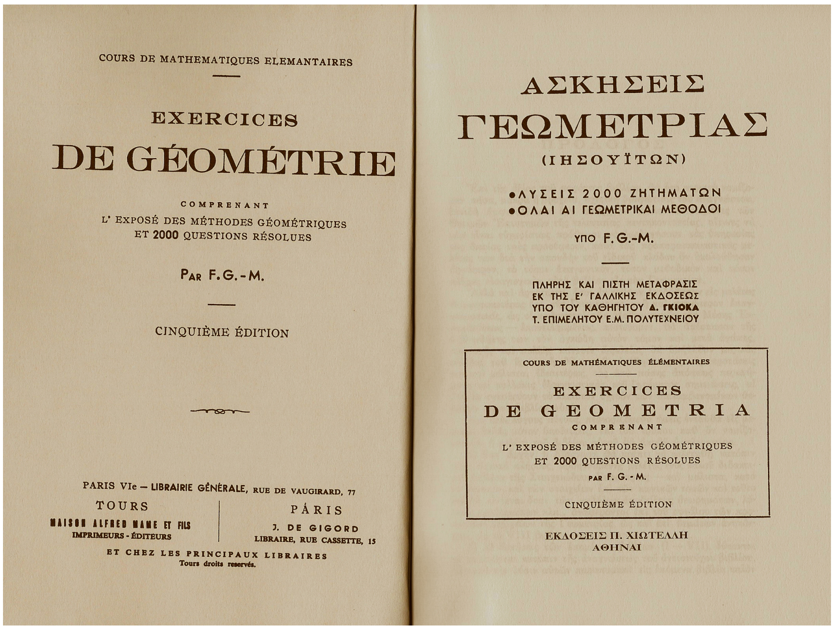
- *Παναγίωτης Μαγείρας, Αλγεβρικά Θέματα.*

Καθώς επίσης βιβλία του Μαραγκάκη και άλλων.

Κεφάλαιο 3

Συλλογές Γεωμετρίας-Τριγωνομετρίας

3.1 Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών


COURS DE MATHEMATIQUES ELEMANTAIRES

EXERCICES
DE GÉOMÉTRIE

COMPRENANT
L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES

PAR F.G.-M.

CINQUIÈME ÉDITION

PARIS VIe — LIBRAIRIE GÉNÉRALE, RUE DE VAUGIRARD, 77
TOURS
MAISON ALFRED MAME ET FILS
IMPRIMEURS - ÉDITEURS
PÁRIS
J. DE GIGORD
LIBRAIRE, RUE CASSETTE, 15
ET CHEZ LES PRINCIPAUX LIBRAIRES
Tours droits reservés.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

•ΛΥΣΕΙΣ 2000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
•ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ F.G.-M.

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Δ. ΓΚΙΟΚΑ
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIA
COMPRENANT
L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES
PAR F. G.-M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗ
ΑΘΗΝΑΙ

Σχήμα 3.1

Ένα από τα σπουδαιότερα έργα με ασκήσεις Γεωμετρίας που αξίζει να μελετήσει κανείς είναι οι *Ασκήσεις Γεωμετρίας* των Ιησουϊτών. Οι "Ασκήσεις Γεωμετρίας" των Ιησουϊτών είναι ένα πλήρες βιβλίο Γεωμετρίας που αποτελείται από 4 τόμους και περιλαμβάνει ασκήσεις Επιπεδομετρίας, Στερεομετρίας καθώς και Κωνικών Τομών. Αρχικά παρουσιάζει μεθόδους για να αποδειχθεί κάποιο θεώρημα ή να επιλυθεί κάποιο πρόβλημα της Γεωμετρίας. Ταξινομεί τις μεθόδους και στη συνέχεια τις αναλύει δίνοντας παραδείγματα. Μιλά για Γεωμετρικούς Τόπους, για χρήση βοηθητικών σχημάτων, για μετασχηματισμό σχημάτων, για διερεύνηση και επέκταση ενός προβλήματος, καθώς και για την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης, όπως και για μέγιστα και ελάχιστα. Στην πορεία και αφού δώσει στον αναγνώστη όλες τις βασικές πληροφορίες που χρειάζεται, περνα στην παρουσίαση θεωρημάτων και προβλημάτων. Σε αυτά, εκτός από τις απαντήσεις, δίνει και ιστορικές πληροφορίες. Έτσι η αξία του δεν περιορίζεται μόνο στο μαθηματικό του περιεχόμενο, αλλά και στις ιστορικές πληροφορίες που δίνει για τα προβλήματα και την πορεία τους. Το βιβλίο ξεκινά με κάποιες ιστορικές σημειώσεις για τη γένεση της Γεωμετρίας, λέγοντας ότι ξεκίνησε από τους Χαλδαίους και τους Αιγύπτιους, αλλά ότι η Ελλάδα είναι η αληθινή πατρίδα της Γεωμετρίας. Στη συνέχεια αναφέρεται στις σημαντικότερες προσωπικότητες που ασχολήθηκαν με τη Γεωμετρία και το έργο τους. Στο τέλος του τέταρτου τόμου παρέχει στον αναγνώστη ένα γεωμετρικό λεξικό με επώνυμες ευθείες, σημεία, κύκλους, καμπύλες, πολύγωνα κ.α. Παρουσιάζει επίσης ένα κατάλογο άπο ιστορικά προβλήματα.

Το βιβλίο πρωτοεκδόθηκε στα Γαλλικά και στη συνέχεια μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες. Στα Ελληνικά μεταφράστηκε από τον Δ. Γκιόκα, Επιμελητή του Ε.Μ.Π. Οι πρώτες Γαλλικές εκδόσεις του έγιναν από το ινστιτούτο της αδελφότητας των Χριστιανικών σχολείων που ήταν υπεύθυνο για την έκδοση των επιστημονικών κειμένων με στοιχειώδη μαθηματικά για περίπου 40 χρόνια (μέχρι το 1900 περίπου). Στα κείμενα που εκδόθηκαν από αυτό το ινστιτούτο δεν αναγράφεται το όνομα κανενός συγγραφέα παρά μόνο κάποια ενδεικτικά αρχικά. Στην 2η έκδοση των *Ασκήσεων Γεωμετρίας* συναντάμε τα αρχικά $F.I.C.$, στην 3η τα $F.J.$ και στις επόμενες εκδόσεις τα $F.G.M.$ Πολύ αργότερα έγινε γνωστό ότι $F.G.M.$ ήταν τα αρχικά του ονόματος $Frère\ Gabriel\ Marie$ (1834-1916), ο οποίος διορίστηκε ανώτατος θρησκευτικός ηγέτης της αδελφότητας το 1897.[1] Το κατά κόσμον όνομα του $Frère\ Gabriel\ Marie$ ήταν $Edmond\ Jean - Antoine\ Brunhes$. Εκτός από τις Ασκήσεις Γεωμετρίας ο ίδιος έγραψε και άλλα σημαντικά έργα, όπως το $Exercises\ de\ Geometrie\ Descriptive$ και το $Manuel\ de\ Mecanique$ (εκδόθηκε το 1916 μετά τον θάνατό του) και άλλα. Δυστυχώς εκτός από τις *Ασκήσεις Γεωμετρίας* κανένα άλλο έργο του δεν έχει μεταφραστεί στα Ελληνικά.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποια από τα ιστορικά προβλήματα που συναντάμε στις Ασκήσεις Γεωμετρίας των Ιησουϊτών.

---

[1] Βλ. σχετικά R.C. Archibald, $Frère\ Gabriel\ Marie$, $The\ American\ Mathematical\ Monthly$, Vol. 24, No. 6, June 1917, σελίδες 280-281.

3.1.1 Το πρόβλημα του Απολλωνίου

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (262-190 π.Χ.),[2] γεννήθηκε στην Πέργα, μία πόλη της Μικράς Ασίας. Θεωρείται Μέγας Γεωμέτρης και Αστρονόμος. Αν και είναι ιδιαίτερα γνωστός για το έργο *Κωνικά*, έχει αρκετές πολύ σημαντικές εργασίες, όπως τα *Περί επαφών*, *Περί λόγου αποτομής*, *Περί χωρίου αποτομής*, *Περί διωρισμένης τομής*, *Επίπεδοι τόποι*, *Νεύσεις*. Εκτός από τα *Κωνικά* και το *Περί λόγου αποτομής* που σώζονται, τα υπόλοιπα είναι χαμένα και πληροφορίες γι' αυτά αντλούμε από το 7ο βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου.[3] Στο *Περί επαφών* του Απολλώνιου, το οποίο αποτελείτο από δύο βιβλία, περιλαμβάνονταν όλες οι δυνατές περιπτώσεις του εξής προβλήματος: "Δίνονται τρία στοιχεία, τα οποία μπορεί να είναι σημεία, ευθείες, κύκλοι και ζητείται να γραφεί ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία και εφάπτεται στις ευθείες και στους κύκλους".[4] Τις δύο πιο απλές περιπτώσεις των τριών σημείων ή τριών ευθειών τις πρωτοσυναντάμε στον Ευκλείδη[5]. Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει 10 συνολικά περιπτώσεις από τις οποίες η δυσκολότερη είναι όταν τα τρία στοιχεία να είναι κύκλοι. Το γεγονός ότι δεν υπάρχουν οι λύσεις του Απολλωνίου παρά μόνο πληροφορίες από τον Πάππο, έκανε πολλούς μαθηματικούς να ασχοληθούν με το πρόβλημα. Ο κατάλογος είναι μακρύς αλλά συμπεριλαμβάνει τους *Adrianus Romanus* (1561-1615), *Vieta* (1540-1603), *Newton*[6], *Descartes*, *Euler*, *Poncelet*, *Gergonne*, *Bobillier*, *Mannhein*, *Fouché* και άλλους.[7]

Στις Άσκήσεις Γεωμετρίας των Ιησουϊτών συναντάμε την δυσκολότερη περίπτωση του προβλήματος του Απολλωνίου.

"*Να γραφεί κύκλος ο οποίος να εφάπτεται σε τρεις δοσμένους κύκλος (Α,α), (Β,β), (Γ,γ)*".[8]

Ο *Vieta* έλυσε το παραπάνω πρόβλημα ανάγοντάς το σε απλούστερη περίπτωση όπως θα δούμε αναλυτικά.

Έστω Ο το κέντρο του ζητούμενου κύκλου. Κατασκευάζουμε ένα κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα δ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Διαπιστώνουμε ότι ο κύκλος (Ο,δ+α) θα εφάπτεται στους κύκλους (Β,β-α), (Γ,γ-α) και θα διέρχεται από το σημείο Α.

Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο ακόλουθο:

[2] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Willey *and* Sons, Inc. New York London, 1968.

[3] Pappus of Alexandria, *Book of Collection*, μετάφραση του *Alexander Jones*, Part1, Springer – Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

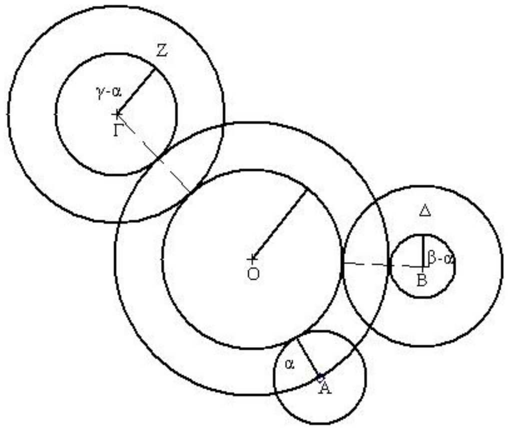
[4] G. Loria, Ιστορία των Μαθηματικών, Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, 1ος Τόμος, 1971.

[5] Στοιχεία, Βιβλίο IV

[6] Isaac Newton, *Universal Arithmetick*, μετάφραση του Joseph Raphson, 1720, σελίδες 249-303.

[7] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Τόμος III, σελίδες 710-711.

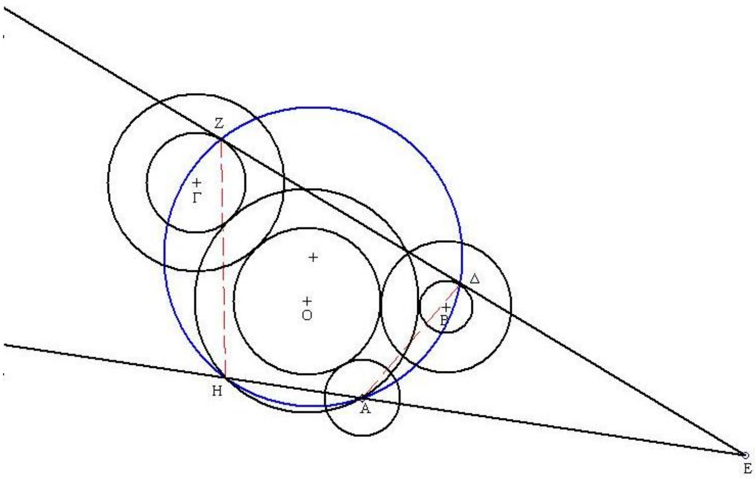
[8] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Τόμος I, σελίδες 18-19.



Σχήμα 3.2

"*Να γραφεί κύκλος διερχόμενος από σημείο Α και εφαπτόμενος στους κύκλους (Β,ΒΔ), (Γ,ΓΖ)*".

Έστω Ε το κέντρο ομοιότητας των κύκλων (Β,ΒΔ), (Γ,ΓΖ). Φέρνουμε από το Ε ευθεία που να διέρχεται από το Α. Παρατηρούμε ότι αν γραφεί κύκλος που να διέρχεται από τα Α, Δ, Ζ, ώστε $EA \cdot EH = EZ \cdot E\Delta$ θα μπορέσουμε να καθορίσουμε το σημείο Η.



Σχήμα 3.3

Επομένως, ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από δύο γνωστά σημεία και έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο ακόλουθο.

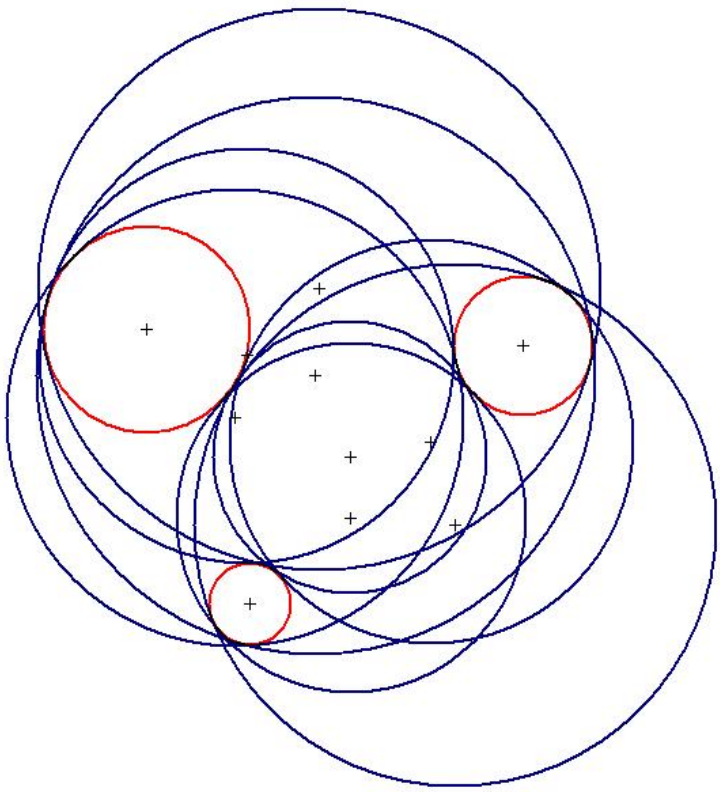
"*Να γραφεί κύκλος διερχόμενος από δοθέντα σημεία Α, Η και ο οποίος εφάπτεται στον κύκλο (Ο΄,ρ).*"

Το πρόβλημα αυτό όμως ανάγεται στο ακόλουθο.

"*Να γραφεί κύκλος που διέρχεται από τρία δοθέντα σημεία.*"

Το τελευταίο λύνεται πολύ εύκολα, και είναι γνωστό από τον Ευκλείδη (IV Βιβλίο).

Έτσι λύνοντας πρώτα το απλούστερο και πηγαίνοντας διαδοχικά προς τα πίσω βρίσκουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος. Ας σημειωθεί ότι, γενικά, το πρόβλημα έχει 8 λύσεις.

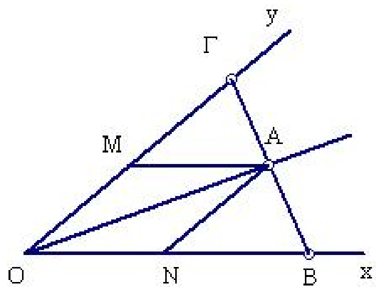


Σχήμα 3.4

Στις Ασκήσεις Γεωμετρίας των Ιησουϊτών συναντάμε ακόμα τρία προβλήματα του Απολλωνίου.

- **Περί λόγου αποτομής**

«*Πάνω σε δύο τεμνόμενες ευθείες Ox και Oy δίνονται δύο σταθερά σημεία Ζ και Η. Να αχθεί από δοθέν σημείο Α τέμνουσα ΒΑΓ με τέτοιο τρόπο ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ να έχουν δοθέντα λόγο $\frac{\mu}{\nu}$*».[9]



Σχήμα 3.5

Λύση

Έστω ΑΜ παράλληλη της Οx και ΑΝ παράλληλη της Oy. Από τα όμοια τρίγωνα ΜΓΑ και ΑΝΒ έχουμε

$\frac{M\Gamma}{NA} = \frac{MA}{NB}$ (1)

Όμως $\frac{H\Gamma}{ZB} = \frac{HM + M\Gamma}{ZN + NB} = \frac{\mu}{\nu}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε τα ΜΓ και ΝΒ.

Το πρόβλημα αυτό είναι μία από τις περιπτώσεις που εξετάζει ο Απολλώνιος στο έργο του *Περί λόγου αποτομής*. Πρόκειται για δύο βιβλία που εξετάζουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις του παρακάτω προβλήματος:[10]

«*Δίνονται δύο ευθείες παράλληλες ή τεμνόμενες μεταξύ τους και δύο σταθερά σημεία πάνω σε καθεμία από αυτές. Να αχθεί από δοθέν σημείο μία ευθεία*

[9] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Τόμος Ι, σελίς 184.

[10] Βλ. σχετικά, Sir Thomas L. Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Τόμος ΙΙ, Αθήνα 2001, σελίδες 217-221.

που θα τις τέμνει, έτσι ώστε τα τμήματα που θα περιέχονται μεταξύ των τομών και των σταθερών σημείων να έχουν δοσμένο λόγο."

Το *Περί λόγου αποτομής*, αν και έχει χαθεί το Ελληνικό πρωτότυπο, σώζεται στα Αραβικά. Υπάρχουν δύο αντίτυπα του χειρογράφου . Είναι 13ου αιώνα και φυλάσσονται το μεν ένα στην Οξφόρδη και το δε άλλο στην Κωνσταντινούπολη.[11]

- **Περί χωρίου αποτομής**
  "Πάνω σε δύο τεμνόμενες ευθείες Ox και Oy δίνονται δύο σταθερά σημεία Ζ και Η. Να αχθεί από δοθέν σημείο Α τέμνουσα ΒΑΓ με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο των ΑΓ και ΑΒ να είναι ίσο προς δοθέν τετράγωνο k^2".[12]

<u>*Λύση*</u>

Το πρόβλημα αυτό είναι ανάλογο με το προηγούμενο. Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα θα έχουμε
$\frac{M\Gamma}{NA} = \frac{MA}{NB}$ (1)
Όμως $H\Gamma \cdot ZB = k^2$
ή $(HM + M\Gamma)(ZN + NB) = k^2$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) υπολογίζουμε τα ΜΓ και ΝΒ.

Το πρόβλημα αυτό είναι μία από τις περιπτώσεις που εξετάζει ο Απολλώνιος στο έργο του *Περί χωρίου αποτομής*. Πρόκειται για δύο βιβλία στα οποία ο Απολλώνιος εξετάζει όλες τις δυνατές περιπτώσεις του παρακάτω προβλήματος:

"Δίνονται δύο ευθείες παράλληλες ή τεμνόμενες μεταξύ τους και δύο σταθερά σημεία πάνω σε καθεμία από αυτές. Να αχθεί από δοθέν σημείο μία ευθεία που τις τέμνει έτσι ώστε τα τμήματα που θα περιέχονται μεταξύ των τομών και των σταθερών σημείων να περικλείουν ένα δοσμένο ορθογώνιο."

Το *Περί χωρίου αποτομής* έχει χαθεί, ωστόσο από τις πληροφορίες που δίνει ο Πάππος, έγινε από τον *Edmund Halley* μία προσπάθεια αποκατάστασης του έργου.[13]

---

[11] Pappus of Alexandria, *Book of Collection*, μετάφραση του *Alexander Jones*, Part1, Springer – Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986, σελίδες 510-511.

[12] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Τόμος Ι, σελίς 185.

[13] Βλ. σχετικά, Sir Thomas L. Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Τόμος ΙΙ, Αθήνα 2001, σελίδες 221-222.

- **Περί διωρισμένης αποτομής**
  "*Δίνονται τέσσερα σημεία πάνω σε μία ευθεία γραμμή και ζητείται να προσδιοριστεί ένα πέμπτο, τέτοιο ώστε ο λόγος του γινόμενου των αποστάσεών του από τα δύο δοθέντα σημεία προς το γινόμενο των αποστάσεων των άλλων δύο να είναι ίσος με το λόγο δοθέντων μηκών μ και ν.*"[14]

<u>*Λύση*</u>

Έστω Α, Β, Γ, Δ τα δοθέντα σημεία και Χ το ζητούμενο σημείο. Έστω ένας άξονας με αρχή το Ο και α, β, γ, δ, χ οι αποστάσεις των σημείων από την αρχή Ο. Θα έχουμε $\dfrac{AX \cdot BX}{\Gamma X \cdot \Delta X} = \dfrac{\mu}{\nu}$ ή $\dfrac{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}{(\chi-\gamma)(\chi-\delta)} = \dfrac{\mu}{\nu}$
Από την τελευταία βρίσκουμε τις λύσεις του προβλήματος.

Το πρόβλημα αυτό βρισκόταν στο έργο του Απολλωνίου με τίτλο *Περί διωρισμένης αποτομής* που έχει χαθεί. Πληροφορίες για την ύπαρξη και το περιεχόμενο του έργου αυτού (2 βιβλία) συναντά κανείς μόνο στον Πάππο.[15]

3.1.2 Το πρόβλημα του Πάππου

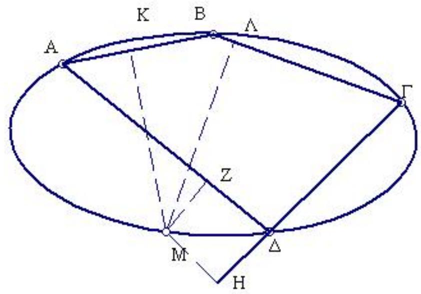
Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, μετά από τους μεγάλους γεωμέτρες Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιο, η ελληνικη Γεωμετρία ατόνησε. Στη μεγάλη αυτή περίοδο όπου δεν παρουσιάστηκε σχεδόν τίποτα το ιδιαίτερο, υπάρχουν ελάχιστες εξαιρέσεις. Στις εξαιρέσεις συμπεριλαμβάνεται και ο Πάππος (320 μ.Χ.) το κύριοτερο έργο του οποίου είναι η *Συναγωγή*. Το έργο του αυτό έχει ανεκτίμητη αξία γιατί, όπως αναφέραμε και νωρίτερα, περιλαμβάνει πολλές πληροφορίες για τα έργα των προγενέστερών του που έχουν χαθεί. Ωστόσο ο Πάππος δεν συγκέντρωσε απλά πράγματα από τις εργασίες των παλαιοτέρων αλλά τα συμπλήρωσε με ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις και τα επέκτεινε. Ένα από τα ενδιαφέροντα προβλήματα που συναντάμε στις Ασκήσεις Γεωμετρίας είναι το παρακάτω:

"*Αν από τυχαίο σημείο Μ έλλειψης φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου σε αυτή, το γινόμενο των κάθετων σε δύο απέναντι πλευρές προς το γινόμενο των καθέτων στις άλλες δύο πλευρές είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το σημείο Μ της έλλειψης.*"

<u>*Λύση*</u>

[14] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Τόμος Ι, σελίς 185.

[15] Βλ. σχετικά, Sir Thomas L. Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Τόμος ΙΙ, Αθήνα, 2001, σελίδες 222-223.



Σχήμα 3.6

Έστω C ο κύκλος του οποίου η προβολή μας δίνει την έλλειψη. Μεταφέρουμε παράλληλα το επίπεδο που βρίσκεται η έλλειψη έτσι ώστε η έλλειψη και ο κύκλος να αποκτήσουν κοινό σημείο Μ. Από το σημείο Μ τώρα φέρνουμε τις κάθετες στις πλευρές του εγγεγραμένου τετράπλευρου ΑΒΓΔ της έλλειψης και τις κάθετες στις πλευρές του εγγεγραμμένου τετράπλευρου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ του κύκλου που έχει ως προβολή του το ΑΒΓΔ.

Από το θεώρημα του Πάππου: Το γινόμενο των αποστάσεων από τυχαίο σημείο Μ περιφερείας κύκλου των δύο αντικείμενων πλευρών του εγγεγραμμένου σε αυτή τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με το γινόμενο των αποστάσεων του ίδιου σημείου από τις δύο άλλες πλευρές, έπεται ότι
$MK' \cdot MH' = M\Lambda' \cdot MZ'$ (1)

Όμως από γνωστό θεώρημα, το εμβαδόν της προβολής μιας επίπεδης επιφάνειας σε επίπεδο είναι ίσο με το γινόμενο του εμβαδού αυτής επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν το δύο επίπεδα. Άρα έχουμε ότι
$(M\Gamma\Delta) = (M'\Gamma'\Delta')\cos\omega$
ή $\dfrac{\Gamma\Delta \cdot MH}{2} = \dfrac{\Gamma'\Delta' \cdot MH'}{2} \cdot \cos\omega$
Η γωνία όμως που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα παραμένει σταθερή για οποιοδήποτε Μ, άρα το $\dfrac{MH'}{MH} = \lambda$ σταθερό.
Όμοια έχουμε $\dfrac{MK'}{MK} = \kappa$, $\dfrac{MZ'}{MZ} = \mu$, $\dfrac{M\Lambda'}{M\Lambda} = \nu$, όπου κ, μ, ν σταθερές.
Οπότε από την (1) $MK' \cdot MH' = M\Lambda' \cdot MZ'$
ή $\quad MK \cdot \kappa \cdot MH \cdot \lambda = M\Lambda \cdot \nu \cdot MZ \cdot \mu$
ή $\quad \dfrac{MK \cdot MH}{M\Lambda \cdot MZ} = \dfrac{\nu\mu}{\kappa\lambda}$,
που είναι σταθερό.

Το πρόβλημα αυτό είναι μία ειδική περίπτωση του παρακάτω προβλήματος:
"*Από τυχαίο σημείο Μ έλλειψης φέρνουμε ευθείες προς τις πλευρές του εγγεγραμμέ-*

νου σε αυτήν τετραπλεύρου, οι οποίες σχηματίζουν γωνίες α, β, γ, δ με τις πλευρές. Να δειχθεί ότι το γινόμενο των τμημάτων που αντιστοιχούν σε δύο απέναντι πλευρές προς το γινόμενο των τμημάτων που αντιστοιχούν στις δύο άλλες πλευρές είναι σταθερό".

Το σπουδαίο αυτό πρόβλημα είναι γνωστό ως "τόποι επί 4 ευθείες". Η γενική μορφή του προβλήματος είχε ήδη μελετηθεί από τους Ευκλείδη και Απολλώνιο, αλλά έγινε γνωστό από τον Πάππο. Έτσι του δόθηκε το όνομα *πρόβλημα του Πάππου* από τον $Descartes$, ο οποίος και το έλυσε με Αναλυτική Γεωμετρία. Με την επίλυση του ασχολήθηκαν ακόμα οι $Newton$ και $Chasles$. Στην ουσία με την επίλυση του προβλήματος "τόπου επί 4 ευθείες", επιλύεται ταυτόχρονα και το πρόβλημα κατασκευής μιας κωνικής τομής. Ο Πάππος στο VII βιβλίο της Συναγωγής έχει μιλήσει για τον γεωμετρικό τόπο αναφορικά με τρεις ή τέσσερις ευθείες (που είναι κωνική τομή) και συνεχίζει λέγοντας ότι μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να βρούμε γεωμετρικούς τόπους αναφορικά με πέντε, έξι ή και περισσότερες ευθείες. Οι τόποι αυτοί δεν είχαν γίνει γενικά γνωστοί ως την εποχή του, παρότι η σύνθεση ενός από αυτούς είχε γίνει και η χρησιμότητα του είχε επισημανθεί.[16]

[16]Βλ. σχετικά Sir Thomas L. Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Τόμος ΙΙ, Αθήνα 2001, σελίδες 464-465.

3.2 Γεωμετρία των Ναών της Ιαπωνίας

Πολύ ενδιαφέροντα και ξεχωριστά μαθηματικά συναντάμε και στην ανατολή, συγκεκριμένα στην Ιαπωνία. Μια από τις ωραιότερες και πιο ενδιαφέρουσες παραδόσεις που είχαν οι Ιάπωνες ήταν τα *sangaku*. Τα *sangaku* ("μαθηματικά ταμπλό" στα Ιαπωνικά) είναι προβλήματα μαθηματικών που εμφανίζονταν πάνω σε χρωματιστά ξύλινα ταμπλό. Τα ξύλινα αυτά ταμπλό τα προσέφεραν ως δώρα οι πιστοί και τα κρεμούσαν στις στέγες ιερών κτιρίων και ναών.[17]

Σχήμα 3.7: Ιερός ναός της περιφέρειας *Fukushima*.

Σχήμα 3.8: Το πρώτο *sangaku* που βρίσκεται στο δεξί τοίχο της διπλανής φωτογραφίας.

Σχήμα 3.9: Το *sangaku* αυτό με διαστάσεις $450cm \times 150cm$ κρεμάστηκε στον ναό του *Haguro* της περιφέρειας *Yamagata* το 1823.

[17] Το έθιμο της ανάρτησης ταμπλό στις στέγες των ναών υπήρχε πολύ πριν τα *sangaku*. Από τον 15ο αιώνα, ίσως και νωρίτερα οι πιστοί προσέφεραν ζωγραφιές αλόγων σε ξύλινα ταμπλό στους *kami*.

Η πλειοψηφία των προβλημάτων που εμφανίζονται στα *sangaku* είναι γεωμετρικά προβλήματα περί κύκλων, τριγώνων κ.α. Συνήθως ζητείται να προσδιοριστούν ποσότητες όπως η ακτίνα κάποιου κύκλου, η πλευρά κάποιου τριγώνου, η διαγώνιος ενός τετραπλεύρου κ.α. Στα προβλήματα αυτά σπανίως δινόταν η λύση, κάτι που στην πορεία ερμηνεύτηκε σαν πρόκληση για εύρεση λύσης.

Τα πολύ ενδιαφέροντα προβλήματα και θεωρήματα που συναντάμε στην Ιαπωνία είναι αρκετά διαφορετικά από αυτά που βρίσκουμε στις κλασικές γεωμετρίες. Η διαφορετικότητα τους οφείλεται στο ότι αναπτύχθηκαν στη περίοδο *Edo* (1603-1867)[18], όταν η Ιαπωνία για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα είχε αποκοπεί από το Δυτικό κόσμο και δεν επιτρεπόταν στους ντόπιους η έξοδος από τη χώρα, αλλά ούτε οι ξένοι μπορούσαν να εισέλθουν. Ακόμα και στα λιμάνια δεν μπορούσε να πλησιάσει κανένα καράβι παρά μόνο ένα Γερμανικό πλοίο, μία φορά το χρόνο, στο *Nagasaki*.

Η απομόνωση αυτή είχε ως αποτέλεσμα την άνθηση της Ιαπωνικής κουλτούρας, αλλά και την ανάπτυξη των Μαθηματικών τους χωρίς ξένες επιρροές. Οι Ιάπωνες εκείνη την περίοδο δεν ήταν σε θέση να γνωρίζουν την εξέλιξη των Μαθηματικών στο δυτικό κόσμο (π.χ. την σπουδαία συμβολή των *Newton* και *Leibniz*). Τα σύγχρονα Μαθηματικά απλοποιούν τη λύση ενός προβλήματος *sangaku*, για τους Ιάπωνες όμως η λύση απαιτούσε επιπλέον προσπάθεια και πολλές σελίδες υπολογισμών. Επίσης ανάμεσα στα προβλήματα συναντάμε και κάποια από τα γνωστά μας θεωρήματα (όπως του *Malfatti* κ.α.) τα οποία είχαν αποδειχθεί πολύ νωρίτερα από τους Ιάπωνες, αλλά λόγω του αποκλεισμού της Ιαπωνίας δεν είχαν γίνει γνωστά. Τα *sangaku* δημιουργήθηκαν από ανθρώπους (άνδρες, γυναίκες, παιδιά) όλων των κοινωνικών τάξεων, από αγρότες μέχρι σαμουράι. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ποικίλων προβλημάτων από πολύ εύκολα σε πάρα πολύ δύσκολα που χρειάζονται εξειδικευμένες γνώσεις για να λυθούν.

Δεν είναι γνωστό πότε ακριβώς ξεκίνησε η παράδοση με τα *sangaku*. Το παλαιότερο *sangaku* που σώζεται είναι του 1683 και βρέθηκε σε ναό της περιφέρειας *Tochigi*. Ωστόσο τον 19ο αιώνα ο *Yamaguchi Kanzan* αναφέρει ένα ακόμα παλαιότερο του 1668, που όμως έχει χαθεί. Το πιο πρόσφατο είναι του 1870 και ανακαλύφθηκε από τον *Hori Yoji* στον ναό του *Ubara*.[19] Δεν γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό των *sangaku* που έχουν δημιουργηθεί. Αρκετοί από τους ιερούς τόπους και τους ναούς εγκαταλήφθησαν ή καταστράφηκαν και έτσι πολλά *sangaku* δεν υπάρχουν σήμερα. Έχουν χαθεί τουλάχιστον 1738 *sangaku*, σώζωνται περίπου

[18]Η περίοδος αυτή καθορίστηκε από τη διακυβέρνηση του *Edo* ή *Tokugawa shogunate* ένα φεουδαρχικό καθεστώς της Ιαπωνίας που καθιερώθηκε από τον *Tokugawa Ieyasu* και κυβερνήθηκε από τους *shoguns* (στρατιωτικός βαθμός για κληρονόμους διοικητές των στρατιωτικών δυνάμεων στην Ιαπωνία) της οικογένειας *Takugawa* και τελείωσε με τον *Meiji Restoration*. Απομόνωσαν την Ιαπωνία για να μεγαλώσουν την δύναμή τους και την υπεροχή τους.

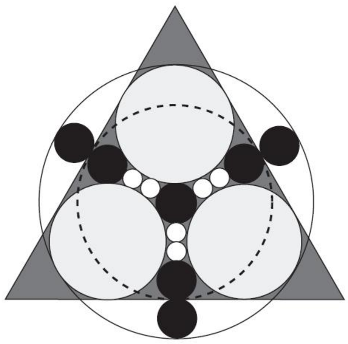
[19]H. Fukagawa and T. Rothman, *Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008, σελίς 9.

900.[20]

Η πρώτη συλλογή με *sangaku* δημοσιεύτηκε το 1790 από τον Ιάπωνα μαθηματικό *Fujita Kagen* (1765-1821) με τίτλο *Shimpeki Sampo* και το 1806 δημοσιεύτηκε μία σειρά προβλημάτων με τον τίτλο *Zoku Shimpeki Sampo*. Μετά το πέρας της περιόδου *Edo* δημοσιεύτηκε το 1989 μία συλλογή στα αγγλικά από τους *H. Fukagawa* και *D. Pedoe*, με τίτλο *Japanese Temple Geometry Problems Sangaku*. Η πιο πρόσφατη συλλογή, η οποία περιλαμβάνει και αρκετά ιστορικά στοιχεία, δημοσιεύτηκε το 2008 από τους *H. Fukagawa* και *T. Rothman* με τίτλο *Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry*.

Παραθέτουμε κάποια ενδεικτικά προβλημάτα. Αρχίζουμε με ένα εύκολο, αλλά ιδιαίτερο από άποψη σχηματισμού πρόβλημα. Ωφείλεται σε έναν 15χρονο μαθητή τον *Tanabe Shigetoshi* που αναρτήθηκε το 1865 στον ναο *Meiseirinji* στην περιφέρεια *Gifu*.

Πρόβλημα 3.2.1. *Μέσα σε ένα δοσμένο τρίγωνο περιέχονται τρεις μεγάλοι κύκλοι με ακτίνα α, 4 μεσαίοι κύκλοι με ακτίνα β και έξι μικροί με ακτίνα γ οι οποίοι εφάπτονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Αν η ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου είναι R και του εγγεγραμμένου είναι r, να υπολογιστεί η ακτίνα γ συναρτήσει του r.*[21]



Σχήμα 3.10

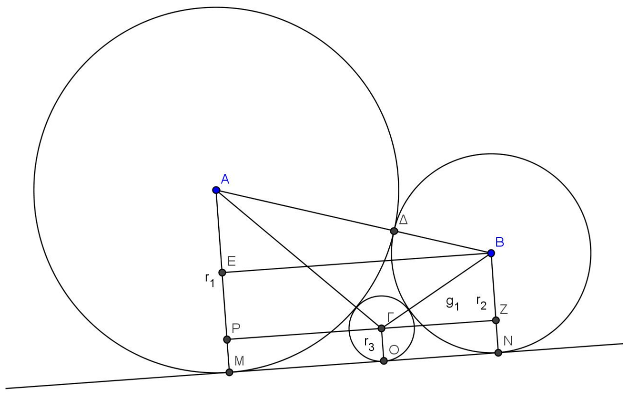
Λύση

[20]Υπάρχει κατάλογος στα Ιαπωνικά, με τα *sangaku* που σώζονται
http://www.morikita.co.ip/soft/0164/genzon.pdf
Φωτογραφίες υπάρχουν και στο διαδίκτυο,
http://www.sangaku.info

[21]H. Fukagawa and T. Rothman, *Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008, πρόβλημα 10, σελίς 97.

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $R = 5\beta + 4\gamma$
$R = 2\alpha + \beta$
$r = 3\beta + 4\gamma$
$\alpha + \beta = 2\beta + 4\gamma$
από όπου βρίσκουμε $\gamma = \frac{r}{10}$.

Πρόβλημα 3.2.2. *Δίνονται δύο κύκλοι $C_1 : (A, r_1)$, $C_2 : (B, r_2)$ οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά με την ευθεία (ε) και μεταξύ τους. Αν ο $C_3 : (\Gamma, r_3)$ που εφάπτεται εξωτερικά με τους C_1, C_2 και με την (ε) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις ακτίνες τους.*[22]



Σχήμα 3.11

<u>*Λύση*</u>

Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

Από το τρίγωνο ΑΒΕ: $AB^2 = AE^2 + EB^2$
$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + EB^2$
άρα $EB^2 = 4r_1r_2$
Από το τρίγωνο ΑΓΡ: $A\Gamma^2 = AP^2 + P\Gamma^2$
$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + P\Gamma^2$

[22] T. Rothman, *Japanese Temple Geometry*, Scientific American, Vol. 278, No. 5, May 1998, σελίς 86.

άρα $P\Gamma^2 = 4r_1r_3$

Από το τρίγωνο ΓΒΖ: $\Gamma B^2 = BZ^2 + \Gamma Z^2$

$(r_3 + r_2)^2 = (r_2 - r_3)^2 + \Gamma Z^2$

άρα $\Gamma Z^2 = 4r_2r_3$

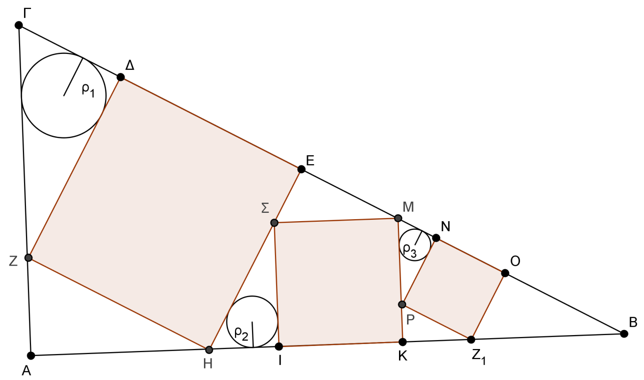
Όμως, $PZ^2 = (P\Gamma + \Gamma Z)^2 = P\Gamma^2 + \Gamma Z^2 + 2P\Gamma \cdot \Gamma Z$

Οπότε $4r_1r_2 = 4r_1r_3 + 4r_2r_3 + 2 \cdot 2\sqrt{r_1r_3}2\sqrt{r_2r_3}$

Από όπου παίρνουμε $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$

Το πρόβλημα αυτό βρέθηκε σε ένα ταμπλό του 1824 στην περιφέρεια *Gumma* και σώζεται μέχρι σήμερα.

Πρόβλημα 3.2.3. *Μέσα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχουν σχεδιαστεί τρία τετράγωνα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12 και οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΓΔΖ, ΗΣΙ και ΜΝΡ που σχηματίζονται. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις ακτίνες των τριών κύκλων.*

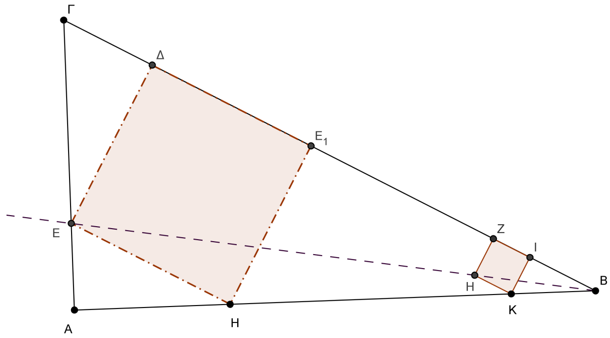


Σχήμα 3.12

Λύση

Το τετράγωνο εγγράφεται κατά μοναδικό τρόπο στο ορθογωνιο τρίγωνο (Σχημα 3.13).

Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΖΙΚΗ έτσι ώστε να έχει δύο κορυφές του πάνω στη ΓΒ και μία πάνω στην ΑΒ. Φέρνουμε την ημιευθεία που περνά από τα Β, Η, η



Σχήμα 3.13

οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Το σημείο Ε είναι η κορυφή του τετραγώνου που θέλαμε να κατασκευάσουμε.

Αν λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΗΕΒ, τότε λόγω της μοναδικότητας της κατασκευής των τετραγώνων (Σχήμα 3.12), λ θα είναι και ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΗΕΒ και ΚΜΒ, ΚΜΒ και Z_1OB.

Οπότε, $\dfrac{\Delta Z}{\Sigma I} = \dfrac{\Sigma I}{NP} = \lambda$

και $\dfrac{(\Gamma\Delta E)}{(H\Sigma I)} = \dfrac{(H\Sigma I)}{(MNP)} = \lambda^2$.

Από όπου έχουμε $\dfrac{\tau_{\Gamma\Delta E}\cdot\rho_1}{\tau_{H\Sigma I}\cdot\rho_2} = \dfrac{\tau_{H\Sigma I}\cdot\rho_2}{\tau_{MNP}\cdot\rho_3} = \lambda^2$,

όπου $\tau_{\Gamma\Delta E}$, $\tau_{H\Sigma I}$ και τ_{MNP} η ημιπερίμετρος των τριγώνων $\Gamma\Delta E$, $H\Sigma I$, MNP αντίστοιχα.

Δηλαδή, $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \lambda$.

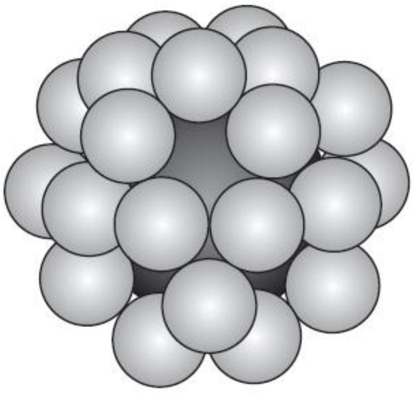
Το πρόβλημα είναι του 1913 και βρέθηκε σε ναό της περιφέρειας $Miyagi$.

Πρόβλημα 3.2.4. *Έστω μία μεγάλη σφαίρα που είναι περιστοιχισμένη από 30 μικρές και ίσες σφαίρες που η κάθε μία τους εφάπτεται με άλλες τέσσερις μικρές καθώς και με τη μεγάλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14. Πόση είναι η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας συναρτήσει της ακτίνας των μικρών;*[23]

<u>*Λύση*</u>

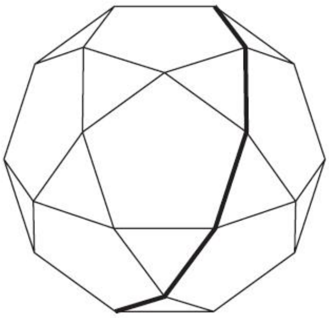
Έστω R η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας και r η ακτίνα των μικρών σφαιρών. Αν ενώσουμε κατάλληλα τα κέντρα δέκα μικρών σφαιρών θα σχηματιστεί κανονικό

[23] T. Rothman, *Japanese Temple Geometry*, Scientific American, Vol. 278, No. 5, May 1998, σελίδες 84-91.

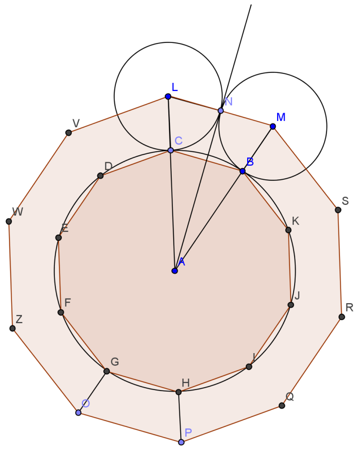


Σχήμα 3.14

δεκάγωνο όπως φαινεται στο σχήμα 3.20. Με τη βοήθεια της Επιπεδομετρίας και του Σχήματος 3.16 έχουμε ότι η $\widehat{LAM} = \dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, οπότε η $\widehat{LAN} = \dfrac{36^\circ}{2} = 18^\circ$.
Όμως $\sin 18^\circ = \dfrac{r}{R+r}$
ή $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{r}{R+r}$
Από όπου παίρνουμε $R = \sqrt{5}r$.



Σχήμα 3.15



Σχήμα 3.16

Η λύση αυτή δόθηκε από τον Ιάπωνα μαθηματικό $Yoshida$.[24] Το πρόβλημα είναι του 1798. Βρέθηκε στο ναό $Gy\bar{u}t\bar{o}$ $Tenn\bar{o}sha$ στο Τόκιο και δημιουργήθηκε

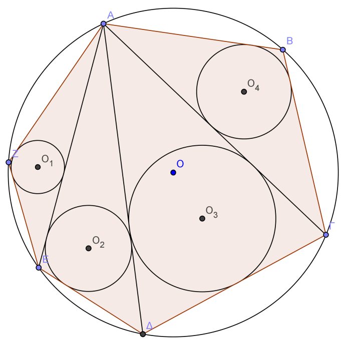
[24] H. Fukagawa and T. Rothman, *Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008, Πρόβλημα 14, σελίς 202.

από τον $Ishikawa\ Nagamasa$.

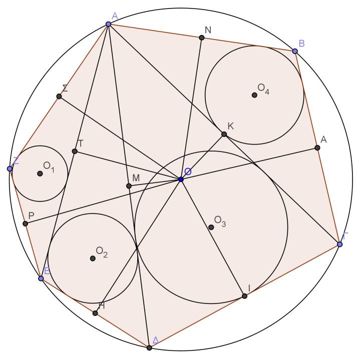
Από τα πιο ενδιαφέροντα θεωρήματα που συναντάμε σε $sangaku$ είναι το Ιαπωνικό θεώρημα για εγγράψιμα πολύγωνα, που είναι επέκταση του Ιαπωνικού θεωρήματος για εγγράψιμα τετράπλευρα.

- **Ιαπωνικό θεώρημα για εγγράψιμα πολύγωνα**
  Εάν τριγωνοποιήσουμε ένα εγγράψιμο πολύγωνο, το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων σε αυτά τα τρίγωνα κύκλων θα είναι σταθερό ανεξάρτητα από τον τρόπο τριγωνοποίησης του.

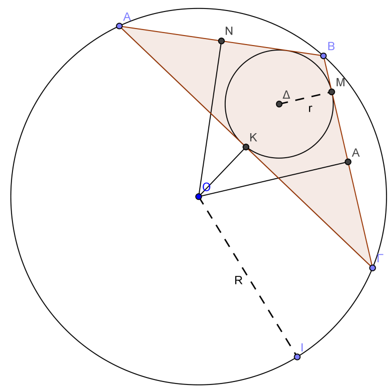
Απόδειξη



Σχήμα 3.17



Σχήμα 3.18



Σχήμα 3.19

Το πρόβλημα αυτό λύνεται πολύ εύκολα αν κάνουμε χρήση του θεωρήματος του $Carnot$:

“ *Έστω ΑΒΓ ένα τυχαίο τρίγωνο. Το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου*

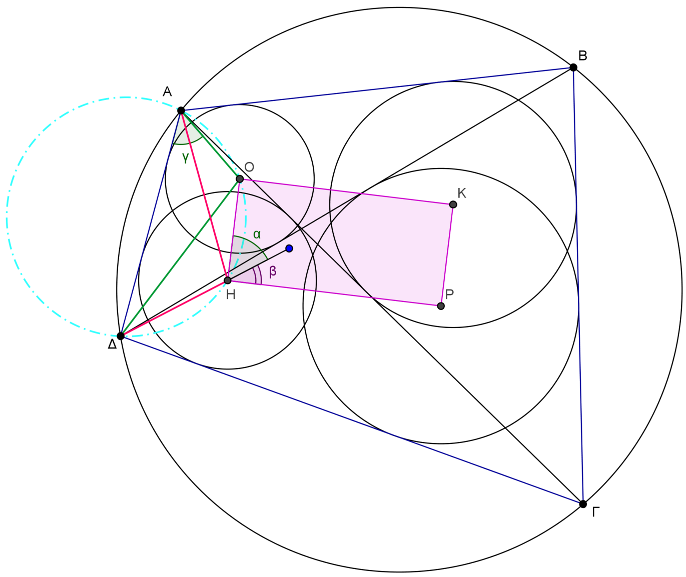
του περιγεγραμμένου κύκλου από τις πλευρές του τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου."
Δηλαδή, $OA + ON + OK = R + r$.
Εδώ μία απόσταση λαμβάνεται αρνητική αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα είναι εξ ολοκλήρου εκτός του τριγώνου. (Σχήμα 3.19)

Κατά την τριγωνοποίηση του εγγράψιμου n-γωνου θα σχηματίζονται $n-2$ τρίγωνα. Έστω OK_i, $i = 1, 2, 3, 4, ..., n-2$ το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου O από τις πλευρές των τριγώνων με εγγεγραμμένους τους κύκλους $O_1, O_2, O_3, O_4, ..., O_{n-2}$ αντίστοιχα. Από το θεώρημα του $Carnot$ θα έχουμε:
$R + r_1 = OK_1$,
$R + r_2 = OK_2$,
$\vdots$
$R + r_{n-2} = OK_{n-2}$
Προσθέτοντας κατα μέλη θα έχουμε
$(n-2)R + r_1 + r_2 + ... + r_{n-2} = OK_1 + OK_2 + ... + OK_{n-2}$
ή $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2} = OK_1 + OK_2 + ... + OK_{n-2} - (n-2)R$
Στο παραπάνω άθροισμα τις αποστάσεις του O από τις πλευρές των τριγώνων που είναι ταυτόχρονα και πλευρές του πολυγώνου τις υπολογίζουμε μία φορά, ενώ τις αποστάσεις του O από τις πλευρές των τριγώνων που είναι ταυτόχρονα και διαγώνιοι του πολυγώνου τις υπολογίζουμε δύο φορές και μάλιστα τη μία έχουν αρνητικό και την άλλη θετικό πρόσημο, οπότε δεν επηρεάζουν το άθροισμα. Άρα το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα που προκύπτουν από τον τυχαίο τριγωνισμό του πολυγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου O από τις πλευρές του πολυγώνου μειωμένο κατά $(n-2)R$ και επομένως σταθερό.

- **Ιαπωνικό θεώρημα για εγγράψιμα τετράπλευρα**
  Έστω ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και O,K,P,H τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΑΓΔ. Τότε το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα κέντρα είναι ορθογώνιο.

<u>*Απόδειξη*</u>

Είναι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma\Delta} = \dfrac{\widehat{A\Delta}}{2}$.
Από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι οι ΑΗ, ΔΟ είναι διχοτόμοι οπότε $\widehat{AO\Delta} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{AB\Delta}}{2}$.
Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\widehat{AH\Delta} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A\Gamma\Delta}}{2}$.



Σχήμα 3.20

Επομένως το τετράπλευρο ΑΟΗΔ είναι εγγράψιμο. Όμοια αποδεικνύεται ότι και το ΔΗΡΓ είναι εγγράψιμο.

Άρα $\widehat{H_1} = \alpha = \dfrac{\widehat{\Delta A O}}{2}$ και $\widehat{H_2} = \beta = \dfrac{\widehat{\Delta \Gamma P}}{2}$.

Όμως $\widehat{H} = \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^\circ$.

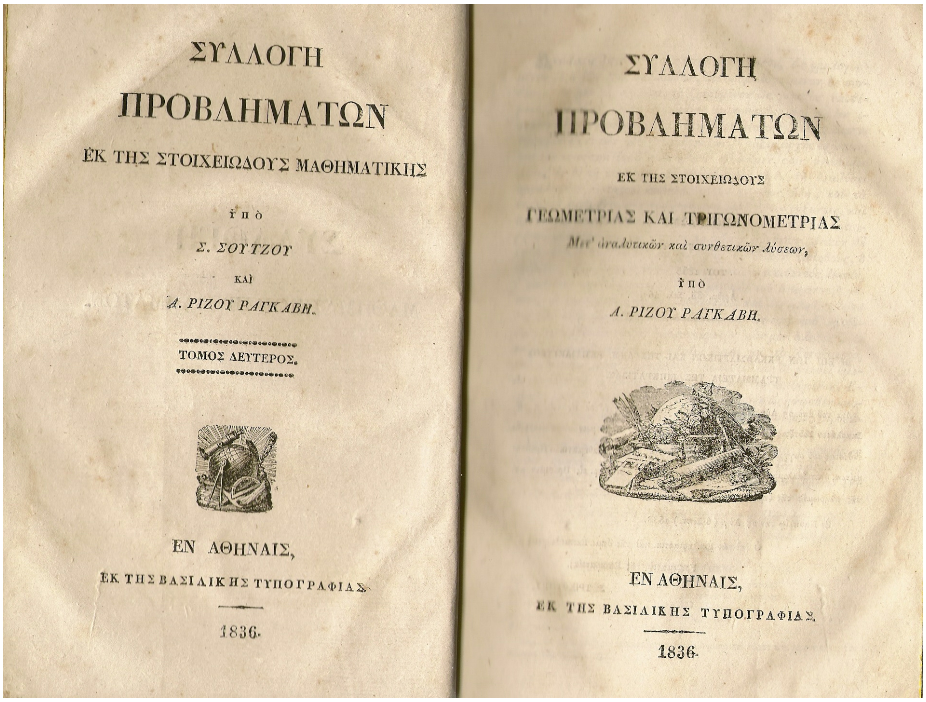
Άρα το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο.

3.3 Ελληνικές συλλογές

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε κάποιες από τις πιο ενδιαφέρουσες Ελληνικές συλλογές που αφορούν την Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία.

- Γεωμετρία-Τριγωνομετρία, Σ.Σούτσου και Α.Ρίζου Ραγκαβή.

  Τα προβλήματα *Γεωμετρίας-Τριγωνομετρίας* του *Α. Ρίζου Ραγκαβή* που αποτελούν όπως είπαμε το 2ο τόμο της συλλογής. Τον πρώτο τόμο τον σχολιάσαμε νωρίτερα στη παράγραφο 2.14. Τώρα θα παρουσιάσουμε το περιεχόμενο του δεύτερου τόμου και ένα μέρος των ασκήσεων που περιλαμβάνει.


ΣΥΛΛΟΓΗ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ἘΚ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ὙΠὸ
Σ. ΣΟΥΤΖΟΥ
ΚΑῚ
Α. ΡΙΖΟΥ ΡΑΓΚΑΒΗ.
ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,
ἘΚ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ.
1836.

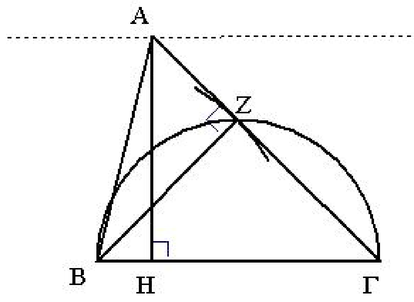
ΣΥΛΛΟΓΗ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ἘΚ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
Μετ' ἀναλυτικῶν καὶ συνθετικῶν λύσεων,
ὙΠὸ
Α. ΡΙΖΟΥ ΡΑΓΚΑΒΗ.
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,
ἘΚ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ.
1836.

Σχήμα 3.21

Ο δεύτερος τόμος, περιλαμβάνει υπολογισμό εμβαδού ευθυγράμμων σχημάτων, γεωμετρικό προσδιορισμό αποστάσεων και ύψων αντικειμένων κ.α. Επίσης περιλαμβάνει προβλήματα γεωμετρικών κατασκεύων με ή χωρίς αναλυτικές λύσεις, καθώς και γεωμετρικές κατασκευές αλγεβρικών ποσοτήτων, πολυγωνικά και Στερεομετρικά προβλήματα, προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου και προβλήματα με γεωμετρικούς τόπους στο επίπεδο. Σε όλα τα προβλήματα αυτού του τόμου παρουσιάζονται αναλυτικά οι λύσεις τους. Ας δούμε κάποια από αυτά.

Πρόβλημα 3.1. *Δοθείσης μιᾶς τῶν πλευρῶν, τοῦ δἰ αὐτὴν ὕψους, καὶ ἀκόμη ἑνὸς τῶν ὕψεων τριγώνου, να κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*[25]

Λύση



Σχήμα 3.22

Έστω ΒΓ = α η γνωστή πλευρά και ΑΗ = β και ΒΖ = γ τα γνωστά ύψη. Φέρνουμε το ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ. Στην συνέχεια φέρνουμε τον κύκλο με κορυφή το Β και ακτίνα γ, εκεί που τέμνονται οι δύο αυτοί κύκλοι είναι το σημείο Ζ. (Στην πραγματικότητα, ο κύκλος με διάμετρο την ΒΓ και ο κύκλος με κέντρο το Β και ακτίνα ίση με γ τέμνονται σε δύο σημεία, αλλά τα σχήματα που παίρνουμε είναι συμμετρικά, επομένως δεν πρόκειται για δεύτερη λύση). Τώρα γνωρίζουμε το ύψος ΑΗ, οπότε φέρνουμε παράλληλη ευθεία στην ΒΓ σε απόσταση β και προεκτείνουμε την ΓΖ, εκεί που θα τμήσει την ευθεία θα βρίσκεται το σημείο Α. Τέλος ενώνουμε το Α με το Β και κατασκευάσαμε το ζητούμενο τρίγωνο.

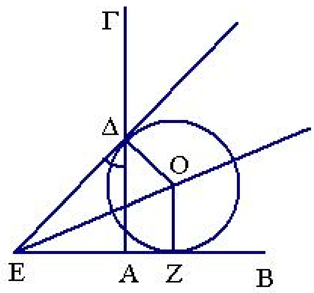
Πρόβλημα 3.2. *Δοθείσης ὀρθῆς γωνίας, καὶ σημείου ἐφ' ἑνὸς τῶν σκελῶν αὐτῆς, νὰ περιγραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ ἑτέρου σκέλους, καὶ διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, ἀλλὰ μὲ τρόπον ὥστε ἡ κατ' αὐτὸ ἐφαπτομένη νὰ σχηματίζῃ μὲ τὸ σκέλος τοῦτο δοθεῖσαν γωνίαν.*[26]

Λύση

Έστω $\widehat{\Gamma AB}$ η δοσμένη ορθή γωνία και σημείο Δ πάνω στην ΑΓ. Κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{A\Delta x}$ ίση με τη γωνία που πρέπει να σχηματίζει η ΑΓ στο

[25]Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος ΙΙ, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, § 99, σελίς 105.

[26]Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος ΙΙ, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, § 104, σελίς 107.



Σχήμα 3.23

σημείο Δ με την εφαπτομένη του κύκλου. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Α και έστω Ε το σημείο που τέμνει την Δx. Στη συνέχεια παίρνουμε πάνω στην ΑΒ τμήμα ΕΖ = ΕΔ και στα σημεία Δ και Ζ φέρνουμε κάθετες στην ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι κάθετες είναι το κέντρο του κύκλου που θέλουμε να κατασκευάσουμε.

Απόδειξη: Φέρνουμε την ΟΕ και βλέπουμε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΕΔ είναι ίσα (δίοτι, ΕΟ κοινή και ΕΖ = ΕΔ από κατασκευή) οπότε ΟΔ = ΟΖ. Άκόμα από κατασκευή έχουμε ότι ΟΖ είναι κάθετη στην ΑΒ. Άρα, η ΕΒ είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.

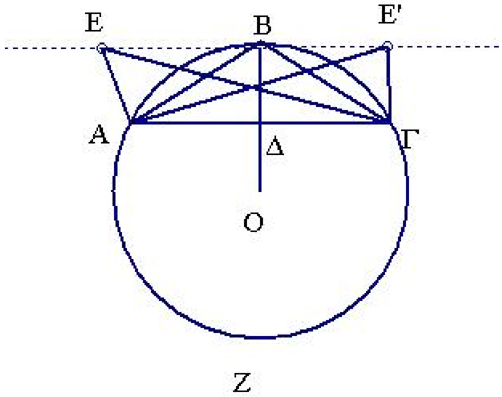
Πρόβλημα 3.3. *Μεταξὺ ὅλων τῶν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ἴσον ὕψος ἐχόντων τριγώνων, ζητεῖται τὸ ἔχον τὴν μεγίστην κορυφιακὴν γωνίαν.*[27]

Λύση

Έστω ΑΓ η βάση του τριγώνου και Δ το μέσον της. Από το Δ φέρνουμε την ΒΔ κάθετη στη ΑΓ και ίση με το ύψος του τριγώνου. Αν τώρα ενώσουμε το σημείο Β με τα Α και Γ, η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ θα είναι η μέγιστη.

Απόδειξη: Φέρνουμε τον περιγέγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη xx' της ΒΓ που διέρχεται από το Β. Η xx' η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Παίρνουμε τώρα δύο τυχαία σημεία πάνω στη xx' εκατέρωθεν του Β και τα ενώνουμε με τα Α και Γ, οπότε και σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΕ'Γ. Τα τρίγωνα αυτά έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος

[27]Σ. Σούτσου και Α. Ρίζου Ραγκαβή, Συλλογή προβλημάτων, τόμος ΙΙ, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836, Πρόβλημα 201, σελίς 232.



Σχήμα 3.24

και με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Όμως, $\widehat{AZ\Gamma} = \dfrac{\widehat{AZ\Gamma}}{2}$

$\widehat{AE\Gamma} = \dfrac{\widehat{AZ\Gamma}}{2} - \dfrac{\widehat{AB}}{2}$

$\widehat{AE'\Gamma} = \dfrac{\widehat{AZ\Gamma}}{2} - \dfrac{\widehat{B\Gamma}}{2}$

Οπότε, $\widehat{AZ\Gamma} > \widehat{AE\Gamma} > \widehat{AE'\Gamma}$.

Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει τη μέγιστη κορυφιακήν γωνία μεταξύ όλων όσων έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

Θα αναφέρουμε κάποιες ακόμα Ελληνικές συλλογές που αφορούν την Γεωμετρία και την Τριγωνομετρια και δημιουργήθηκαν για τις σχολικές και φροντιστηριακές ανάγκες. Ξεχωρίσαμε τις παρακάτω:

- *Πέτρου Τόγκα, Ασκήσεις Γεωμετρίας*
  Πρόκειται για μία σειρά βιβλίων που περιλαμβάνουν λυμένες ασκήσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, στο επίπεδο και στον χώρο. Οι λυμένες αυτές ασκήσεις είναι το συμπλήρωμα ενός βιβλίου με τίτλο Θεωρητική Γεωμετρία του ίδιου συγγραφέα που περιλαμβάνει ορισμούς, πλήθος θεωρημάτων, πορίσματα και άλυτα προβλήματα. Αυτά τα προβλήματα λύνονται στην παραπάνω σειρά βιβλίων. Ωστόσο κανείς μπορεί να τα μελετήσει ανεξάρτητα μιας και περιλαμβάνουν τις πλήρεις εκφωνήσεις των προβλημάτων.

- *Ιωάννου Φ. Πανάκη, 2500 Προβλήματα Γεωμετρικών Τόπων.*
Πρόκειται για ένα υπέροχο βιβλίο, το οποίο αποτελείται από δύο τόμους και περιλαμβάνει, όπως αναφέρει και ο τίτλος, του 2500 προβλήματα γεωμετρικών τόπων. Το βιλίο ξεκινά από τον ορισμό του γεωμετρικού τόπου και τα πιο απλά παράδειγματα και στη συνέχεια προχωρά σε βάθος με δυσκολότερες ασκήσεις στις οποίες δίνει αναλυτικές απαντήσεις. Πρόκειται για ένα βιβλίο πλήρες το οποίο προοριζόταν για μαθητές Λυκείου και μαθητές που ήθελαν να προετοιμαστούν για την εισαγωγή τους στις Ανώτατες Σχολές.

- *Διουυσίου Ι. Λιβέρη, Η Θεωρία της Γεωμετρικής Ασκήσεως*
Πρόκειται για ένα δίτομο βιβλίο μέσα στο οποίο δίνονται μέθοδοι για την λύση Γεωμετρικών Ασκήσεων, οι οποίες γίνονται πράξη μέσα 400 λυμένες ασκήσεις.

- *Αριστείδης Φ. Πάλλας, Μεγάλη Γεωμετρία.*

- *Σπύρος Κανέλλος, Ασκήσεις Γεωμετρίας*
Πρόκειται για μία σειρά βιβλίων με λυμένες ασκήσεις Γεωμετρίας, οι εκφωνήσεις των οποίων βρίσκονται στη *Θεωρητική Γεωμετρία.*

- *Ιωάννου Φ. Πανάκη, Τριγωνομετρία,* 1973
Πρόκειται για ένα τρίτομο έργο πάνω στην Τριγωνομετρία. Κάθε τόμος είναι ξεχωριστός και ολοκληρώνει τα θέματα που πραγματεύεται. Τα επιμέρους κεφάλαια περιλαμβάνουν θεωρία, εφαρμογές στην Γεωμετρία, Τριγωνομετρικές εξισώσεις και Ανισώσεις, παραδείγματα και ασκήσεις άλυτες για την εξάσκηση του μαθητή.

- *Πέτρου Τόγκα, Ασκήσεις και προβλήματα Τριγωνομετρίας*
Πρόκειται για μία σειρά βιβλίων τα οποία περιλαμβάνουν προβλήματα και ασκήσεις της Τριγωνομετρίας. Πρόκειται για τις λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου *Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία*, που περιλαμβάνει θεωρία, λυμένα παραδείγματα και πλήθος άλυτων ασκήσεων. Περιλαμβάνει αρχικά τριγωνομετρικούς αριθμούς, βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές εξισώσεις, συστήματα, ανισότητες, επίλυση τριγώνων.

- *Αριστείδης Φ. Πάλλας, Μεγάλη Τριγωνομετρία*
Πρόκειται για ένα βιβλίο το οποίο περιλαμβάνει πάνω από 1500 προβλήματα και ασκήσεις Τριγωνομετρίας. Τις λύσεις των ασκήσεων αυτών δίνει σε ένα δεύτερο βιβλίο με τίτλο *Λύσεις των Ασκήσεων των Περιεχομένων εις το βιβλίον Μεγάλη Τριγωνομετρία.*

- Σπύρος Κανέλλος, *Συστηματικαί Ασκήσεις Τριγωνομετρίας*

Καθώς επίσης βιβλία του Μαραγκάκη, Μαγείρα και άλλων.

Κεφάλαιο 4

Συλλογές γρίφων

Το 4ο Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε ένα μεγάλο κομμάτι των διασκεδαστικών μαθηματικών που είναι οι μαθηματικοί γρίφοι. Θα αναφερθούμε σε σημαντικές προσωπικότητες, από τον 19ο αιώνα και μετά, που ασχολήθηκαν αποκλειστικά με τα διασκεδαστικά μαθηματικά και τη δημιουργία μαθηματικών γρίφων, γράφοντας πληθώρα βιβλίων και σε άρθρα περιοδικών. Οι σημαντικότεροι είναι ο *Sam Loyd* (1841-1911), *Henry Ernest Dudeney* (1857-1930), *Lewis Carroll* (1832-1898) και *Martin Gardner* (1914).

4.1 *Sam Loyd*

Αρχικά θα αναφερθούμε στον *Samuel Loyd*[1], γνωστό ως *Sam Loyd*, που είναι από τους διασημότερους δημιουργούς μαθηματικών γρίφων και διασκεδαστικών προβλημάτων. Ο *Loyd* γεννήθηκε τον Ιανουάριο του 1841 στη Φιλαδέλφια των ΗΠΑ και πέθανε τον Απρίλιο του 1911 στη Νέα Υόρκη. Από πολύ μικρός γοητεύτηκε και άρχισε να ασχολείται με το σκάκι. Αργότερα συνέθεσε προβλήματα με βάση το σκάκι, για πολλά από τα οποία κέρδισε βραβεία. Στα 14 μόλις χρόνια του, τον Απρίλιο του 1855, δημοσίευσε το πρώτο σκακιστικό πρόβλήμα στο *New York Saturday Courier*. Μετά από αυτό ακολούθησαν μία σειρά από δημοσιεύσεις προβλημάτων στο *Chess Monthly*, ενώ από το 1857 έγινε συντάκτης αυτού του περιοδικού. Εκείνη την εποχή υπήρχε ένα γενικότερο ενδιαφέρον για το σκάκι και έτσι πολλές εφημερίδες και περιοδικά φιλοξενούσαν μόνιμες στήλες με αυτό το θέμα. Ο *Loyd* στην πορεία του συνέθεσε πολλούς ασυνήθιστους γρίφους και έγραφε σε στήλες εφημεριδων και περιοδικών όπως τα *Scientific American Supplement*, *American Chess Journal*, *Strand Magazine* κ.α. Επίσης εξέδιδε το μηνιαίο πε-

[1] *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1959, Introduction, σελίδες XI – XV.
και *http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Loyd.html*

ριοδικό *Sam Loyd's Puzzle Magazine*. Σε κάποια από τα περιοδικά υπέγραφε με ψευδώνυμα όπως το *W. King*, *A. Knight*, *W. K. Bishop* (ονόματα που δανείστηκε από τα ομώνυμα πούλια του σκακιού). Από το 1870 ο *Loyd* άρχισε να ασχολείται περισσότερο με μαθηματικούς γρίφους. Το 1890 άρχισε να γράφει τη στήλη γρίφων στο *Brooklyn Daily Eagle* και από το 1904 έγραφε και στο *Woman's Home Companion*. Ο *Loyd* δημιούργησε πάνω από 10000 γρίφους! Κατα τη διάρκεια της ζωής του δημοσίευσε μόνο ένα βιβλίο, το *Chess Strategy*, το 1878. Μετά τον θάνατό του ο γιος του *Samuel Loyd Jr.* δημοσίευσε συλλογές γρίφων του πατέρα του. Μία από τις πιο σημαντικές και πιο πλούσιες συλλογές είναι το *Sam Loyd's Cyclopedia of* 5000 *Puzzles* (1914)[2].

Ακολουθεί ένας κατάλογος βιβλίων με γρίφους του *Sam Loyd*.

- *Sam Loyd's Book of Tangram Puzzles*, από τον *Sam Loyd Jr.*, Dover Publications, Incorporated, Mineola, NY, U.S.A., 1968.
- *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, επιλογή και επιμέλεια του *Martin Gardner*, Dover Publications, Inc., New York, 1900.
- *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, επιλογή και επιμέλεια του *Martin Gardner*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- *The Puzzle King*: *Sam Loyd's Chess Problems and Selected Mathematical Puzzles*, επιμέλεια του *Sid Pickard*.
- *The* 15 *Puzzle*, επιμέλεια των *Jerry Slocum* και *Dic Sonneveld*.
- *Sam Loyd's Cyclopedia of* 5000 *Puzzles*, *Tricks and Conundrums with Answers*, από τον *Sam Loyd Jr*, Pinnacle Books, 1976.
- *Sam Loyd's Picture Puzzles*: *With Answers*, από τον *Sam Loyd*, 1924.

Στα βιβλία του *Loyd* περιλαμβάνονται αρκετά προβλήματα από αυτά που αναφέρθηκαν στο 2ο κεφάλαιο όπως το πρόβλημα της διάσχυσης του ποτσμού, η γέφυρα του *Königsberg*, το πρόβλημα του ταχυδρόμου κ.α. Ωστόσο ο *Loyd* είναι γνωστός για τα πολλά πρωτότυπα προβλήματα που δημιούργησε. Το 1871 δημιούργησε το *Tricky Donkey's puzzle*. Ωστόσο ο γρίφος αυτός έγινε γνωστός ως *P. T. Barnum's Tricky Donkey*, μιας και ο *P. T. Barnum* τον αγόρασε από τον *Loyd*, και τον κυκλοφόρησε ευρέως με αποτέλεσμα να κερδίσει πολλές χιλιάδες δολάρια. Ένας ακόμα πολύ γνωστός γρίφος είναι το *pony puzzle*, όπου δίνεται μία κάρτα με ένα πόνι το οποίο είναι χωρισμένο σε 6 κομμάτια και ζητείται να βρεθούν οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να ενωθούν τα κομμάτια

[2]Το βιβλίο διατίθεται δωρεάν στο διαδίκτυο *http : //www.samuelloyd.com/sams.puzzles.pdf*

ώστε να μας δώσουν άλλο πόνι. Το 1878 δημοσίευσε τον γρίφο 14-15 τον οποίο και θα δούμε αναλυτικά παρακάτω. Το 1896 δημιούργησε το *Get off the Earth mystery*. Πρόκειται για μία κάρτα που παριστάνει τη γη και γύρω της βρίσκονται 13 πολεμιστές. Με μία "περιστροφή" της γης ο ένας από τους πολεμιστές εξαφανίζεται και η ερώτηση είναι ποιος;[3] Στη συνέχεια εμφανίστηκαν και παραλλαγές του γρίφου γνωστές ως *The lost man puzzle* (1897) και *The puzzle of Teddy and the Lions* (1909).

The Pony puzzle

Ο γρίφος αυτός ένας από τους πιο επιτυχημένους γρίφους του *Loyd*, μιας και έχουν πουληθεί πάνω από εκατό χιλιάδες αντίγραφα του. Την ιδέα για την δημιουργία του έδωσε στον *Loyd* ο πρώην υπουργός της Ρωσίας *Andrew G. Curtin* καθώς γυρνούσαν από την Ευρώπη και συζητούσαν για το άσπρο άλογο που βρίσκεται ζωγραφισμένο στον λόφο *Uppington* στην Αγγλία. Πρόκειται για ένα σχέδιο που κοσμεί το λόφο χιλιάδες χρόνια και φαίνεται στο Σχημα 4.1

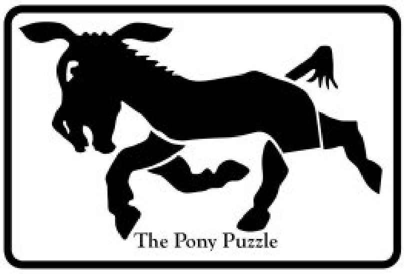
Σχήμα 4.1: Το άλογο στο λόφο του *Uppington*.

Ο *Loyd* δημιούργησε την κάρτα που φαίνεται στο Σχήμα 4.2 . Στην κάρτα απεικονίζεται ένα πόνι χωρισμένο σε 6 κομμάτια, τα οποία ζητείται να κοπούν και να ξανασυναρμολογηθούν ώστε να μας δώσουν ένα άλογο.[4] Ο γρίφος είχε μεγάλη

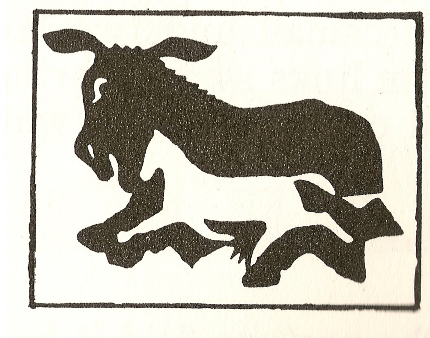
[3] *http://www.samuelloyd.com/homepage.v1.html*

[4] *Mathematical puzzles of Sam Loyd*, επιλογή και επιμέλεια του *Martin Gardner*, 1959, Πρόβλημα 45, σελίς 42.

επιτυχία και πολύς κόσμος προσπάθησε να φτιάξει άλλα άλογα με αποτέλεσμα να προκύψουν πολλές διαφορετικές λύσεις. Έτσι πλέον το ζητούμενο είναι να βρεθούν πόσα διαφορετικά άλογα μπορούν να σχηματιστούν με αυτά τα έξι κομμάτια. Η λύση του φαίνεται στο Σχήμα 4.3



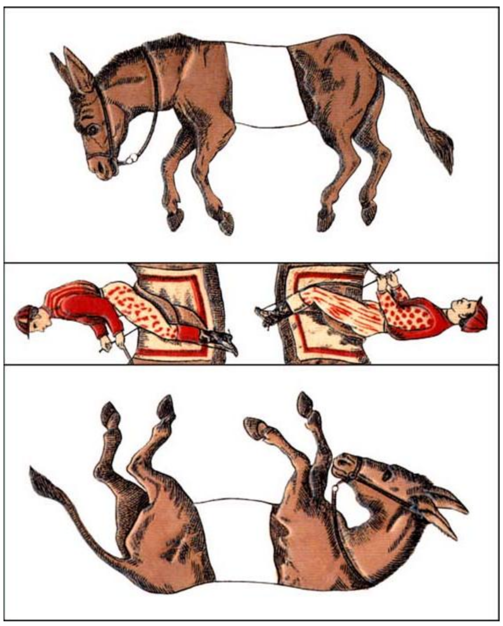
Σχήμα 4.2



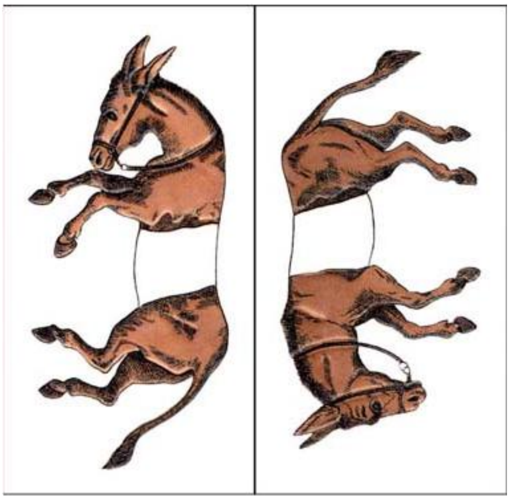
Σχήμα 4.3

Tricky Donkey's puzzle

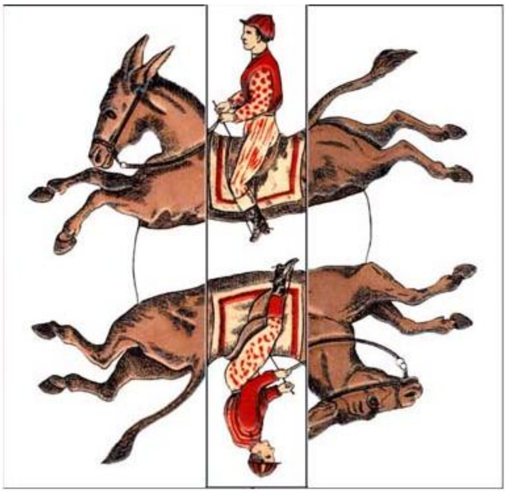
Στον γρίφο αυτόν δίνεται μια κάρτα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4 και ζητείται να κοπεί σε τρία κομμάτια και να ανασυναρμολογηθεί έτσι ώστε οι αναβάτες να καβαληκεύουν πάνω στα γαϊδούργια. Η λύση είναι απρόσμενη και φαίνεται στα σχήματα 4.5 και 4.6.



Σχήμα 4.4: Η κάρτα των *TrickyDonkey*



Σχήμα 4.5: Πρώτα τοποθετούμε τις κάρτες με τα δύο γαϊδούρια όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.6: Και στη συνέχεια τοποθετούμε και τους αναβάτες.

Ο γρίφος 14-15

Ένας από τους πιο γνωστούς γρίφους του *Loyd* είναι ο γρίφος 14-15, ο οποίος δημοσιεύτηκε το 1878. Ο γρίφος αυτός είναι ένα 4 επί 4 τετραγωνικό πλαίσιο που περιέχει μέσα του 15 τετραγωνικές ψηφίδες, οι οποίες μπορούν και ολισθαίνουν, και μία κενή θέση. Οι ψηφίδες είναι αριθμημένες από το 1 έως το 15 και ζητείται αφού, πρώτα ανακατευτούν, να μπουν σε μία προκαθορισμένη σειρά.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Πίνακας 4.1: Αρχική τοποθέτηση

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Πίνακας 4.2: Τελική τοποθέτηση

Ο *Sam Loyd* αφού έδωσε αρχικά τον Πίνακα 4.1, ζήτησε να τοποθετηθούν οι ψηφίδες με τη σειρά όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1, όπου το 14 και το 15 βρίσκονται σε ανάποδες θέσεις. Για αυτόν το γρίφο ο *Sam Loyd* προσέφερε το ποσό των 1000 δολαρίων για την πρώτη σωστή λύση του προβλήματος. Κανείς δεν μπόρεσε να πάρει το ποσό αν και ήταν πολλοί αυτοί που δήλωναν ότι κατάφεραν να το λύσουν. Αποδεικνύεται όμως με μαθηματικά ότι ο γρίφος αυτός δεν λύνεται. Έτσι ο *Loyd* πρόσφερε εκ του ασφαλούς αυτό το τεράστιο για την εποχή εκείνη ποσό ξέροντας ότι κανείς δεν θα ήταν σε θέση να το κερδίσει. Ας δούμε όμως τι γίνεται με αυτόν τον γρίφο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι από τις 10461394944000 πιθανές τοποθετήσεις των ψηφίδων, μόνο οι μισές είναι δυνατές. Οι πρώτες αποδείξεις που συναντάμε είναι του *W. W. Johnson*[5] (1879) που δείχνει ότι οι περιττές μεταθέσεις δεν λύνονται και του *W. E. Story*[6] (1879) που δείχνει ότι οι άρτιες μεταθέσεις είναι

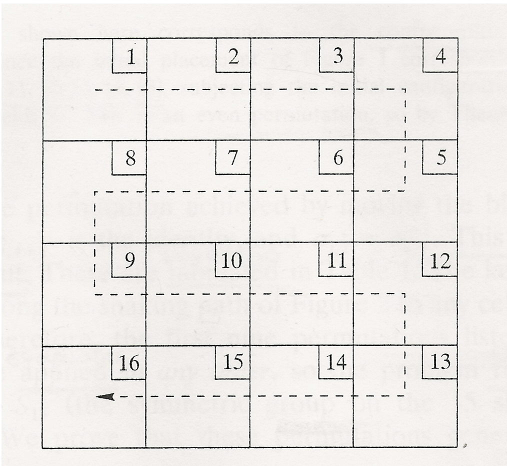
[5] *W. W. Johnson*, *Notes on the "15" Puzzle*, *American Journal of Mathematics* Vol. 2, No. 4, Dec. 1879, σελίδες 397-399.

[6] *W. E. Story*, *Notes on the "15" Puzzle*, *American Journal of Mathematics* Vol. 2, No. 4, Dec. 1879, σελίδες 399-404.

επιλύσιμες. Αργότερα παρουσιάσε μία απόδειξη ο *E. L. Spitzagel*[7] (1967). Το 1999 παρουσιάστηκε μία πιο απλή απόδειξη από τον *A. F. Archer*[8] την οποία και θα δούμε αναλυτικά.

Απόδειξη

Ονομάζουμε *ψηφίδες* τα κινούμενα αριθμημένα κομμάτια, *λευκή ψηφίδα* το κενό και *κελιά* τις θέσεις τους στο 4 επί 4 πλαίσιο. Επίσης, ονομάζουμε *τοποθέτηση* μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των ψηφίδων στο σύνολο των κελιών. Από μία αρχική τοποθέτηση επιθυμούμε να επιτύχουμε άλλες τοποθετήσεις μέσα από μία σειρά νόμιμων κινήσεων. Κάθε νόμιμη κίνηση εκτελείται όταν κινούμε την λευκή ψηφίδα και ανταλλάσουμε τη θέση της με κάποια από τις γειτονικές της, κάθετα ή οριζόντια.



Σχήμα 4.7

Αριθμούμε τα κελιά όπως στον πίνακα που Σχήματος 4.7, ακολουθώντας την διακεκομμένη γραμμή. Παρατηρούμε ότι αν κουνάμε τις ψηφίδες πάνω στο μονοπάτι δεν επηρεάζεται καθόλου η σειρά των ψηφίδων. Θα λέμε ότι δύο τοποθετήσεις είναι ισοδύναμες αν μπορούμε να λάβουμε την μία από την άλλη κουνώντας την λευκή ψηφίδα καταμήκος της διακεκομμένης γραμμής. Έτσι κάθε ισοδύναμη

[7] *E. L. Spitzagel*, *A New Look at the Fifteen Puzzle*, *Mathematics Magazine*, Vol. 40, No. 4, Sep. 1967, σελίδες 171-174.

[8] *A. F. Archer*, *A Modern Treatment of the* 15 *puzzle*, *American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 9, Nov. 1999, σελίδες 793-799.

κλάση ονομάζεται σχηματισμός ($configuration$) και περιέχει 16 τοποθετήσεις, μία για κάθε θέση που μπορεί να καταλάβει η λευκή ψηφίδα.
Αν η ψηφίδα i καταλαμβάνει το κελί j και η λευκή ψηφίδα καταλαμβάνει ένα κελί με μεγαλύτερο νούμερο τότε λέμε ότι η ψηφίδα i βρίσκεται στη θυρίδα ($slot$) j ή αλλιώς στη $j-1$. Όλες οι τοποθετήσεις σε έναν δοσμένο σχηματισμό έχουν τις 15 ψηφίδες στις ίδιες θυρίδες, έτσι μπορούμε να δηλώσουμε ένα σχηματισμό με $[a_1,\dots,a_{15}]$, όπου a_i είναι η θυρίδα που καταλαμβάνει η ψηφίδα i στον σχηματισμό.

Κάθε κίνηση της λευκής ψηφίδας πετυχαίνει έναν μετασχηματισμό των θυρίδων που καταλαμβάνουν οι ψηφίδες. Ένας σχηματισμός $[a_1,\dots,a_{15}]$ όταν δράσει πάνω του μία μετάθεση σ μετατρέπεται σε έναν άλλο σχηματισμό $[a_1,\dots,a_{15}]\sigma = [a_1\sigma,\dots,a_{15}\sigma]$.

Έστω $\sigma_{i,j}$ η μετάθεση που πετυχαίνουμε με την κίνηση της λευκής ψηφίδας από το κελί i στο κελί j. Όλες οι πιθανές τοποθετήσεις των θυρίδων είναι οι παρακάτω.
$\sigma_{i,i+1}$ που είναι η ταυτοτική,
$\sigma_{j,i} = \sigma_{i,j}^{-1}$
και μένουν ακόμα οι
$\sigma_{1,8} = (1,2,3,4,5,6,7)$
$\sigma_{2,7} = (2,3,4,5,6)$
$\sigma_{3,6} = (3,4,5)$
$\sigma_{5,12} = (5,6,7,8,9,10,11)$
$\sigma_{6,11} = (6,7,8,9,10)$
$\sigma_{7,10} = (7,8,9)$
$\sigma_{9,16} = (9,10,11,12,13,14,15)$
$\sigma_{10,15} = (10,11,12,13,14)$
$\sigma_{11,14} = (11,12,13)$.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτές οι μεταθέσεις παράγουν την A_{15}, όπου A_{15} είναι το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων της υποομάδας S_{15}.

Λήμμα 4.1.1. *Για $n \geq 3$ οι κύκλοι μήκους 3 παράγουν την A_n.*

Απόδειξη

Όλα τα στοιχεία της A_n μπορούν να αναλυθούν σε άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων. Έστω a, b, c, d διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία. Θεωρούμε δύο διαδοχικές αντιμεταθέσεις.
Έστω ότι έχουν ένα κοινό σημείο, δηλαδή θα είναι της μορφής: $(a,b),(b,c)$
Τότε, $(a,b)\cdot(b,c) = (b,c,a)$.

Έστω ότι δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή θα είναι της μορφής: $(a, b), (c, d)$.
Τότε, $(a, b) \cdot (c, d) = (a, b)(b, c)(b, c)(c, d) = (b, c, a) \cdot (c, d, b)$.
και $(a, b) \cdot (a, b) = id$.

Επομένως, το γινόμενο δύο διαδοχικών αντιμεταθέσεων δίνει έναν κύκλο με τρία στοιχεία ή γινόμενο κύκλων με τρία στοιχεία. Όμως κάθε μετάθεση της A_n μπορεί να αναλυθεί σε άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων. Έτσι αν χωριστούν σε διαδοχικά ζεύγη αντιμεταθέσεων, κάθε ζεύγος θα μας δώσει έναν κύκλο με τρία στοιχεία ή γινόμενο κύκλων με τρία στοιχεία. Άρα, η A_n παράγεται από κύκλους μήκους 3.

Ας ονομάσουμε διαδοχικούς τους κύκλους μήκους 3 που είναι αυτής της μορφής $(k, k+1, k+2)$.

Λήμμα 4.1.2. *Για $n \geq 3$ οι διαδοχικοί κύκλοι μήκους 3,*
$\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (n-2, n-1, n)\}$ *παράγουν την A_n.*

<u>Απόδειξη</u>

Για να δείξουμε ότι οι διαδοχικοί κύκλοι μήκους 3,
$\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (n-2, n-1, n)\}$ παράγουν την A_n, αρκεί να δείξουμε ότι οι διαδοχικοί κύκλοι μήκους τρία παράγουν όλους τους κύκλους μήκους 3 της A_n. Οι οποίοι από το Λήμμα 4.1.1 παράγουν την A_n. Παρατηρούμε ότι για $n = 3$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n = k$. Οι διαδοχικοί κύκλοι μήκους 3,
$\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (k-2, k-1, k)\}$ παράγουν όλους τους κύκλους μήκους 3 της A_k.
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή ότι οι διαδοχικοί κύκλοι μήκους 3 $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (k-2, k-1, k), (k-1, k, k+1)\}$ παράγουν όλους τους κύκλους μήκους 3 της A_{k+1}.

Έστω $S = (a_1, a_2, a_3)$, με $a_i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ ένας κύκλος μήκους 3 της A_{k+1}. Αφού ο S είναι κύκλος μήκους 3 θα υπάρχει $a_{i_0} \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ για το οποίο θα ισχύει $S(a_{i_0}) = a_{i_0}$. Επομένως το S μπορεί να θεωρηθεί στοιχείο της A_k, άρα παράγεται από τους διαδοχικούς κύκλους $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (k-2, k-1, k)\}$ και συνεπώς και από τους $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (k-2, k-1, k), (k-1, k, k+1)\}$.

Λήμμα 4.1.3. *Για κάθε μετάθεση σ , $\sigma \in S_n$ ισχύει $\sigma(a_1, \ldots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$.*

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\tau = (a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{i+1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$

Αν $x \in 1, 2, \ldots, n$ και $x = \sigma(a_i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ τότε θα έχουμε $(\sigma\tau\sigma^{-1})(x) = (\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(a_i)) = \sigma\tau(\sigma^{-1}\sigma(a_i) = \sigma(\tau(a_i)))$
Αν το $i \neq m$ θα έχουμε $\tau(a_i) = a_{i+1}$
Άρα $(\sigma\tau\sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$
από όπου έχουμε $(\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma(a_i) = \sigma(a_{i+1})$
Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η μετάθεση $(\sigma\tau\sigma^{-1})$ παίρνει το στοιχείο $\sigma(a_i)$ και το πάει στο στοιχείο $\sigma(a_{i+1})$.

Αν το $i = m$ θα έχουμε $\tau(a_i) = \tau(a_m) = a_1$
Άρα $(\sigma\tau\sigma^{-1})(x) = \sigma(a_1)$
από όπου έχουμε $(\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(a_i)) = (\sigma\tau\sigma^{-1})(\sigma(a_m)) = \sigma(a_1)$
Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η μετάθεση $\sigma\tau\sigma^{-1}$ παίρνει το στοιχείο $\sigma(a_m)$ και το πάει στο $\sigma(a_1)$.
Οπότε $\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \ldots & \sigma(a_i) & \ldots & \sigma(a_m) \\ \sigma(a_2) & \sigma(a_3) & \ldots & \sigma(a_{i+1}) & \ldots & \sigma(a_1) \end{pmatrix}$
ή $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$.

Θεώρημα 4.1.1. *Οι παραπάνω κύκλοι (σελ. 140) παράγουν την A_{15}.*

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι είναι περιττοί και άρτιες μεταθέσεις οπότε παράγουν την A_{15}. Για κάθε σ έχουμε $\sigma(a_1, \ldots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$.
Οπότε έχουμε:
$(1, 2, \ldots, 7)^2(3, 4, 5)(1, 2, \ldots, 7)^{-2} = (5, 6, 7)$
$(1, 2, \ldots, 7)^1(3, 4, 5)(1, 2, \ldots, 7)^{-1} = (4, 5, 6)$
$(1, 2, \ldots, 7)^0(3, 4, 5)(1, 2, \ldots, 7)^0 = (3, 4, 5)$
$(1, 2, \ldots, 7)^{-1}(3, 4, 5)(1, 2, \ldots, 7)^1 = (2, 3, 4)$
$(1, 2, \ldots, 7)^{-2}(3, 4, 5)(1, 2, \ldots, 7)^2 = (1, 2, 3)$
$(5, 6, \ldots, 11)^2(7, 8, 9)(5, 6, \ldots, 11)^{-2} = (9, 10, 11)$
$(5, 6, \ldots, 11)^1(7, 8, 9)(5, 6, \ldots, 11)^{-1} = (8, 9, 10)$
$(5, 6, \ldots, 11)^0(7, 8, 9)(5, 6, \ldots, 11)^0 = (7, , 8, 9)$
$(5, 6, \ldots, 11)^{-1}(7, 8, 9)(5, 6, \ldots, 11)^1 = (6, 7, 8)$
$(5, 6, \ldots, 11)^{-2}(7, 8, 9)(5, 6, \ldots, 11)^2 = (5, 6, 7)$
$(9, 10, \ldots, 15)^2(11, 12, 13)(9, 10, \ldots, 15)^{-2} = (13, 14, 15)$
$(9, 10, \ldots, 15)^1(11, 12, 13)(9, 10, \ldots, 15)^{-1} = (12, 13, 14)$
$(9, 10, \ldots, 15)^0(11, 12, 13)(9, 10, \ldots, 15)^0 = (11, 12, 13)$
$(9, 10, \ldots, 15)^{-1}(11, 12, 13)(9, 10, \ldots, 15)^1 = (10, 11, 12)$
$(9, 10, \ldots, 15)^{-2}(11, 12, 13)(9, 10, \ldots, 15)^2 = (9, 10, 11)$

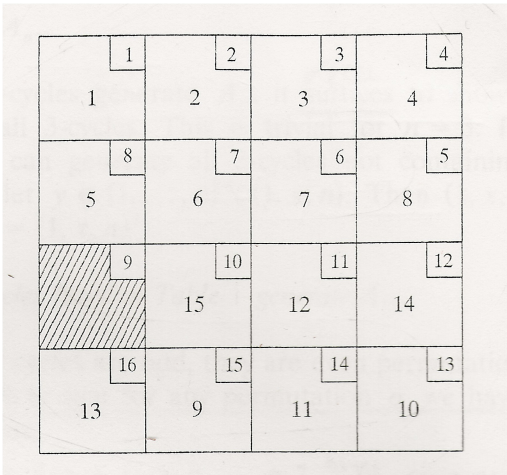
Αυτοί είναι όλοι οι συνεχόμενοι κύκλοι μήκους 3 της S_{15}, οπότε από το Λήμμα 1.2 έχουμε ότι παράγουν την A_{15}.

Έτσι άν εχουμε δύο τοποθετήσεις Α και Β που αντιστοιχούν στους σχηματισμούς Γ και Δ, μπορούμε να πάρουμε την τοποθέτηση Β από την Α, αν και μόνο αν η Β είναι άρτια μετάθεση της Α.

Αν οι τοποθετήσεις Α και Β έχουν τη λευκή ψηφίδα στο ίδιο κελί, μπορούμε να πάρουμε την τοποθέτηση Β από την Α αν και μόνο αν είναι άρτια μετάθεση των 15 ψηφίδων της Α.

Οπότε κάθε κίνηση της λευκής ψηφίδας έχει σαν αποτέλεσμα την μετακίνηση δυο ψηφίδων, οπότε για n περιττό (άρτιο) μπορούμε να πάρουμε την Α από την Β αν και μόνο αν η Α είναι περιττή (άρτια) μετάθεση των 16 ψηφίδων στην Β.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ως αρχική την τοποθέτηση αυτή του πίνακα που φαίνεται στο Σχήμα 4.8, που αντιστοιχεί στον σχηματισμό
Α=[1,2,3,4,8,7,6,5,10,11,12,15,14,13] και θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να πάρουμε την τοποθέτηση του παρακάτω σχήματος, που αντιστοιχεί στον σχηματισμό Β=[1,2,3,4,8,7,6,5,14,12,13,10,15,11,9].

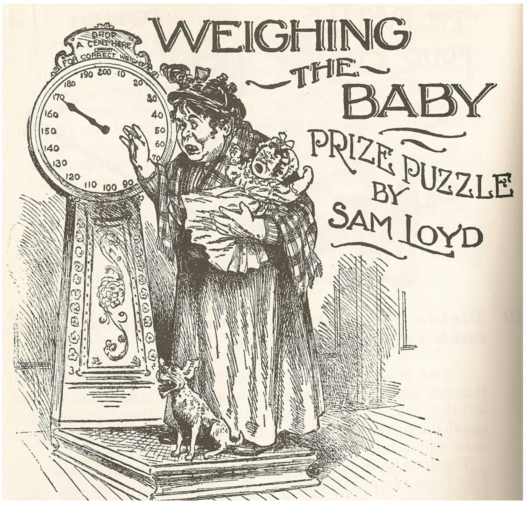


Σχήμα 4.8

Αν στον σχηματισμό Α δράσει η μετάθεση $\tau = (9, 14, 11, 13)(10, 12)$ τότε παίρνουμε την Β. Αφού η σ είναι μία άρτια μετάθεση, από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πάρουμε την Β από την Α.

Ας δούμε τώρα κάποιους από τους γρίφους που περιέχονται στα βιβλία *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* και *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*. Τα βιβλία αυτά περιλαμβάνουν ποικιλία προβλημάτων: αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα, προβλήματα σχετικά με ταχύτητα και απόσταση, με χρόνο, με αναζήτηση, γεωμετρικά προβλήματα, τοπολογικά, προβλήματα φυσικής και υπολογιστικά. Η επιλογή των προβλημάτων έχει γίνει από τον *Martin Gardner*, ο οποίος τα άντλησε από το *Cyclopedia* που αναφέραμε παραπάνω. Σε αυτά δίνονται είτε οι λύσεις είτε μόνον οι απαντήσεις.

Πρόβλημα 4.1.1. *Ζυγίζοντας το μωρό (Weighing the baby).*
Η Κυρία O'Toole έχοντας οικονομικό μυαλό θέλησε να ζυγίσει τον εαυτό της, το μωρό της και το σκύλο της με ένα μόνο σεντ. Αν αυτή ζυγίζει 100 κιλά περισσότερα από τον σκύλο και το μωρό μαζί και αν ο σκύλος ζυγίζει 60 τα εκατό λιγότερο από το μωρό, μπορείτε να καθορίσετε πόσο ζυγίζει το μωρό;[9]

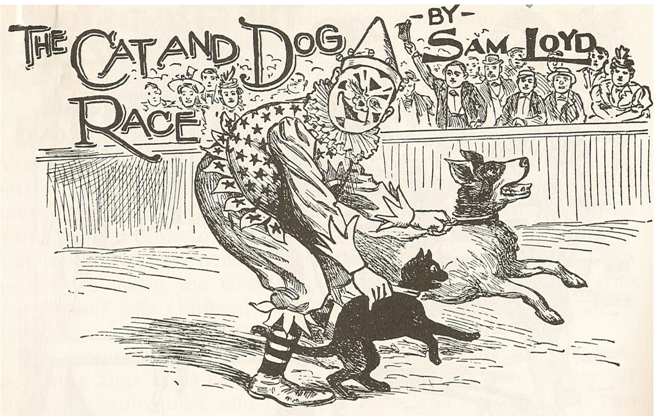


Σχήμα 4.9

<u>*Λύση*</u>

Έστω x, y, z τα κιλά της Κυρίας $O'Toole$, του μωρού και του σκύλου, αντίστοιχα. Οπότε από το πρόβλημα παίρνουμε την εξίσωση $x - 100 = y + z$ και από την εικόνα βλέπουμε ότι $x + y + z = 170$. Από όπου και βρίσκουμε ότι $x = 135$. Όμως $y + z = 35$ και $z = \frac{40}{100}y$ οπότε $y = 25$ και $z = 10$. Δηλαδή, η Κυρία $O'Toole$ είναι 135 κιλά, το μωρό 25 κιλά και ο σκύλος 10 κιλά.

[9] *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1959, Πρόβλημα 50, σελίς 48



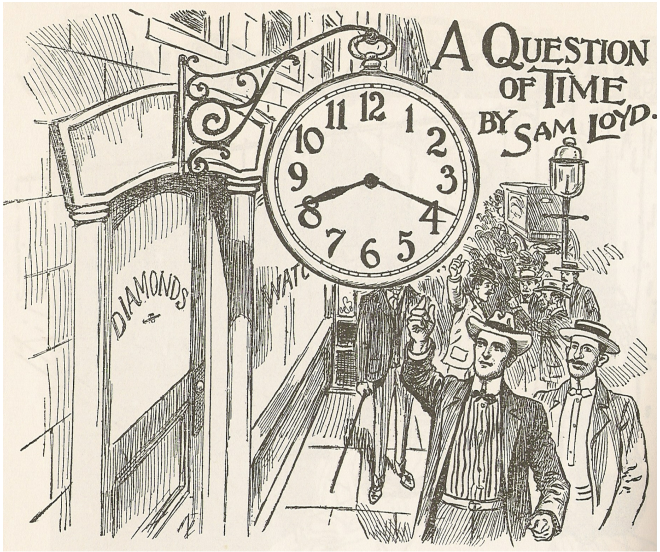
Σχήμα 4.10

Πρόβλημα 4.1.2. *Ο αγώνας της γάτας και του σκύλου (The cat and dog race). Ένας εκπαιδεύει μία γάτα και ένα σκύλο για να τρέξουν σε αγώνα 100 ποδιών σε ευθεία και επιστροφή πίσω. Ο σκύλος σε κάθε του βήμα καλύπτει απόσταση 3 ποδιών και η γάτα 2 ποδιών, αλλά η γάτα κάνει 3 βήματα για κάθε 2 που κάνει ο σκύλος. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ποιός θα νικήσει στον αγώνα;*[10]

<u>*Λύση*</u>

Ο σκύλος κάνοντας 33 βήματα θα έχει διανύσει 99 πόδια, άρα θα χρειαστεί ένα ακόμα βήμα για να φτάσει στο τέλος της διαδρομής. Οπότε χρειάζεται 34 βήματα να πάει και 34 για να γυρίσει πίσω, σύνολο 68 βήματα. Η γάτα θα χρειαστεί 50 βήματα για να διανύσει 100 πόδια και άλλα 50 βήματα για να γυρίσει πίσω. Όμως σύμφωνα με το πρόβλημα ο σκύλος κάνει 2 βήματα κάθε 3 βήματα της γάτας. Οπότε όταν η γάτα θα έχει κάνει 100 βήματα ο σκύλος θα έχει κάνει $\frac{2}{3}100 = 67$ βήματα. Άρα τον αγώνα θα τον κερδίσει η γάτα.

[10] *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1959, Πρόβλημα 16, σελίς 14.



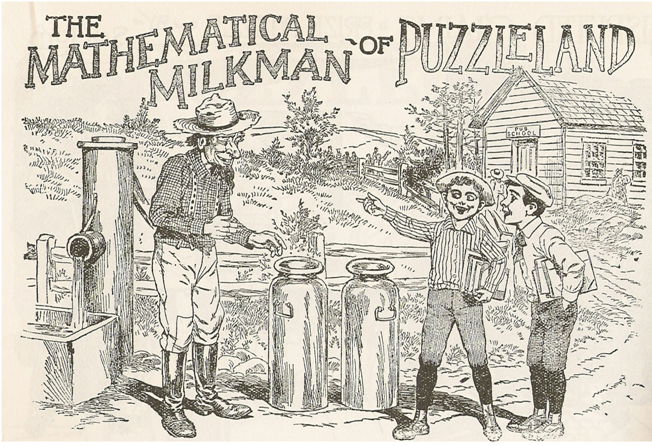
Σχήμα 4.11

Πρόβλημα 4.1.3. *Τι ώρα είναι; (A question of time).*
Ένα ρολόι δείχνει ότι η ώρα είναι 20 λεπτά μετά τις 8, όπως φαίνεται και στην εικόνα. Θεωρώντας ότι και οι δύο δείκτες έχουν την ίδια απόσταση από το 6, τι ώρα είναι ακριβώς;[11]

Λύση

Ο δείκτης των λεπτών κάνει 360 μοίρες για να φτάσει στο ίδιο σημείο, άρα κάνει $\frac{360}{60} = 6$ μοίρες το λεπτό. Όποτε σε 20-x λεπτά θα έχει κάνει $6(20 - x) = 120 - 6x$ μοίρες. Ο δείκτης των ωρών απο την άλλη κάνει $\frac{360}{12} = 30$ μοίρες την ώρα και $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ μοίρες το λεπτό. Οπότε σε x λεπτά ο δείκτης της ώρας θα έχει μετακινηθεί $\frac{x}{2}$ μοίρες από το 8. Όμως $\frac{x}{2} = 120 - 6x$
από την οποία σχέση βρίσκουμε ότι $x = 18\frac{6}{13}$ λεπτά.
Το ρολόι επομένως δείχνει 8 και 18 λεπτά και $27\frac{9}{13}$ δευτερόλεπτα.

[11] *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1959, Πρόβλημα 21, σελίς 16.



Σχήμα 4.12

Πρόβλημα 4.1.4. *Ο μαθηματικός γαλατάς (The mathematical milkman)*
Έχουμε δύο δοχεία Α και Β, το ένα με νερό και το άλλο με γάλα. Ρίχνω πρώτα από το Α στο Β ποσότητα υγρού τόση ώστε να διπλασιαστεί το περιεχόμενο του Β. Μετά ρίχνω από το Β στο Α ποσότητα υγρού τόση ώστε να διπλασιαστεί το περιεχόμενο του Α. Τέλος ρίχνω ξανά από το Α στο Β τόση ποσότητα υγρού ώστε να διπλασιαστεί το περιεχόμενο του. Βρίσκω ότι στο τέλος περιέχουν την ίδια ποσότητα υγρού και το Β περιέχει ένα γαλόνι περισσότερο νερό άπό ότι γάλα. Με πόσο νερό και πόσο γάλα ξεκίνησα στην αρχή και πόσο γάλα και πόσο νερό έχει κάθε δοχείο στο τέλος;[12]

Λύση

Διαδικασία	***Α δοχείο***	***Β δοχείο***
Αρχικά	α	β
Ρίχνουμε από το Α στο Β	α-β	2β
Ρίχνουμε από το Β στο Α	2α-2β	3β-α
Ρίχνουμε από το Α στο Β	3α-5β	6β-2α

Τελικά και τα δύο δοχεία έχουν ίσες ποσότητες υγρού, οπότε
3α-5β=6β-2α
Από όπου βρίσκουμε $\frac{a}{b} = \frac{11}{5}$
Ας υποθέσουμε ότι αρχικά είχαμε 11 μονάδες νερό και 5 μονάδες γάλα, και ας δούμε τη διαδικασία από την αρχή.

[12]*More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1960, Πρόβλημα 126, σελίς 90

Διαδικασία	***Α δοχείο***	***Β δοχείο***
Αρχικά	11 νερό	5 γάλα
Ρίχνουμε από το Α στο Β	6 νερό	5 νερό + 5 γάλα
Ρίχνουμε από το Β στο Α	9 νερό + 3 γάλα	2 γάλα + 2 νερό
Ρίχνουμε από το Α στο Β	6 νερό + 2 γάλα	5 νερό + 3 γάλα

Όμως από την εκφώνηση έχουμε ότι στο τέλος το Β δοχείο περιέχει ένα γαλόνι περισσότερο νερό άπό ότι γάλα. Οπότε θα πρέπει αρχικά να έχουμε $5\frac{1}{2}$ γαλόνια νερό και $2\frac{1}{2}$ γαλόνια γάλα.
Άρα τελικά στο Α δοχείο θα έχουμε 3 γαλόνια νερό και 1 γάλα και στο Β δοχείο $2\frac{1}{2}$ γαλόνια νερό και $1\frac{1}{2}$ γαλόνια γάλα.

4.2 *Henry Ernest Dudeney*

Ο *H. E. Dudeney*[13], ο οποίος θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους δημιουργούς γρίφων, γεννήθηκε στην Αγγλία το 1857 και πέθανε το 1930. Από πολύ μικρός έμαθε να παίζει σκάκι και πολύ σύντομα άρχισε να ασχολείται με τα προβλήματα σκακιού. Από την ηλικία των 9 ετών άρχισε να συνθέτει σκακιστικά προβλήματα και να τα δημοσιεύει σε τοπική εφημερίδα. Ο *Dudeney* είχε πάρει μόνο την βασική εκπαίδευση, αλλά το ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά ήταν μεγάλο. Έτσι, στον ελεύθερο χρόνο του διάβαζε Μαθηματικά και την ιστορία τους. Ο *Dudeney* άρχισε να γράφει άρθρα σε περιοδικά και συμμετείχε σε μία ομάδα συγγραφέων μαζί με τον *Conan Doyle*. Συνέβαλε σημαντικά για πάνω από 30 χρόνια στο περιοδικό *Strand* με το ψευδώνυμο *Sphinx*, ενώ είχε δική του στήλη στο *Perplexities*. Επίσης είχε δημοσιεύσει γρίφους στα *Blighty*, *Cassell's Magazine*, *The Queen*, *Tit-Bits*, και *Weekly Dispatch*. Όλα τα χρόνια της ζωής του έδειχνε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το σκάκι και υπήρξε ιδρυτικό μέλος της *British Chess Problem Society* το 1918.

Ο *Dudeney* και ο *Loyd* έζησαν την ίδια εποχή και θεωρούνται οι κύριοι δημιουργοί γρίφων στην εποχή τους. Ο *Sam Loyd* το 1893 άρχισε να στέλνει τους γρίφους του στην Αγγλία και έτσι ξεκίνησε η αλληλογραφία του με τον *Dudeney*. Αλληλογραφούσαν συχνά και αντάλλασαν απόψεις. Η αλληλογραφία τους σταμάτησε όταν ο *Dudeney* κατηγόρησε τον *Loyd* ότι οικειοποιήθηκε και δημοσίευσε ένα μεγάλο αριθμό από τους γρίφους του με το δικό του όνομα. Ωστόσο και ο *Dudeney* φαίνεται να είχε δημοσιεύσει γρίφους του *Loyd* με το δικό του όνομα.

Ας δούμε κάποιες από τις πιο γνωστές συλλογές του *Dudeney*:

- *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1907.
- *Amusements in Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958. (Η πρώτη έκδοση έγινε το 1917 από την Thomas Nelson and Sons.)
- *Modern Puzzles* (1926).
- *The World's Best Word Puzzles*, London, Daily News, 1925.
- *Puzzles and Curious Problems* (1967), επιμέλεια του *Martin Gardner*, Collins, Fontana Books, 1967 (Η πρώτη του δημοσίευση ήταν με τον τίτλο 536 *Puzzles and Curious Problems*, *part* 1).
- *More Puzzles and Curious Problems*, Collins, Fontana Books, 1967, επιμέλεια *Martin Gardner* (Η πρώτη του δημοσίευση ήταν με τον τίτλο 536 *Puzzles and Curious Problems*, *part* 2).

[13] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Dudeney.html

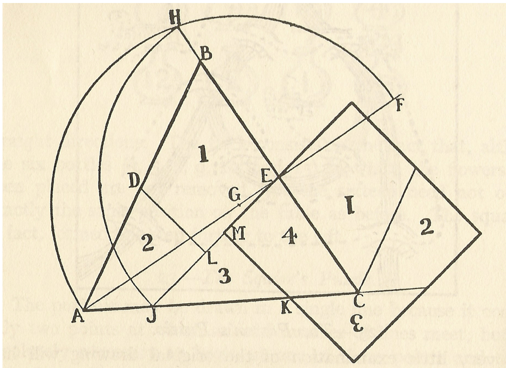
- *A Puzzle Mine*
- *Good Old Fashioned Challenging Puzzles and Perplexing Mathematical Problems*, Summersdale Publishers, 2007.

Ας δούμε κάποιους από τους γρίφους του *Dudeney*.

Ένας από τους πιο διάσημους γεωμετρικούς γρίφους είναι το *Haberdasher's problem*.[14] Το πρόβλημα αυτό το παρουσίασε ο *Dudeney* στο *Burlington House* στις 17 Μαΐου 1905 και αμέσως μετά στην *Royal Society*. Καθώς επίσης μετά από έναν μήνα και *Royal Institution*. Ωστόσο δημοσιεύτηκε και σε κάποια περιοδικά, όπως το *Daily Mail* τον Φεβρουάριο του ίδιου έτους και στο *Dispatch* το 1902 όπου ήταν και η πρώτη δημοσίευση του προβλήματος. Αν και πήρε αρκετά γράμματα από αναγνώστες που προσπάθησαν να το λύσουν κανείς δεν τα είχε καταφέρει. Ο πρώτος που τα κατάφερε, όπως αναφέρει ο ίδιος ο *Dudeney*, ήταν ο *Mr. C. W. M. Elroy*. Ας δούμε το πρόβλημα καθώς και τη λύση[15] του όπως την παρουσιάζει ο ίδιος ο *Dudeney*.

Γρίφος 4.1. *Έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο φτιαγμένο από ύφασμα και ζητείται να κοπεί σε τέσσερα ξεχωριστά κομμάτια, έτσι ώστε αν τα ενώσουμε να φτιάξουμε ένα τετράγωνο.*

Λύση



Σχήμα 4.13

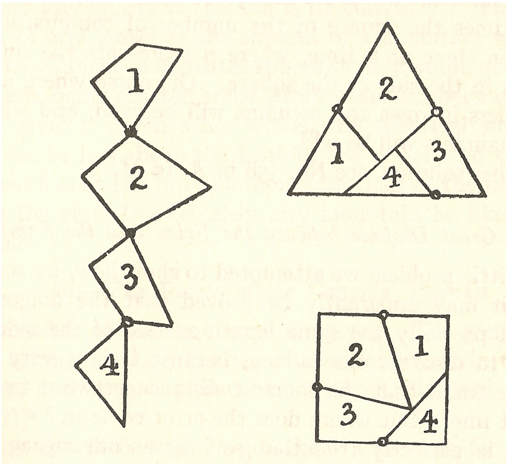
Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC. Βρίσκουμε το μέσον D της AB και το μέσον E της AC. Φέρνουμε την AE και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $EF = BE$, όπως

[14] *H. E. Dudeney*, *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, Πρόβλημα 26, σελίς 49

[15] *H. E. Dudeney*, *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, Πρόβλημα 26, σελίς 178-179

φαίνεται στο Σχήμα 4.16. Βρίσκουμε το μέσον G της AF και φέρνουμε το τόξο AHF όπου H η τομή του με την προέκταση της BE. EH είναι το μήκος της πλευράς του ζητούμενου τριγώνου. Τώρα με κέντρο το E και ακτίνα το EH φέρνουμε κύκλο που τέμνει την AC στο σημείο J. Παίρνουμε τμήμα $JK = BE$ πάνω στην AC, όπως φαίνεται στο σχήμα 1 και φέρνουμε την JE. Αν τώρα φέρουμε τις κάθετες στην JE από το K και το μέσον D της πλευράς AB, παίρνοντας τα σημεία M και L αντίστοιχα. Οπότε τώρα έχουμε τα τέσσερα κομμάτια που θέλαμε.

Ο *Dudeney* παρουσίασε τον γρίφο αυτό στη *Royal Society* τον Μάιο του, 1905, μέσα από ένα ξύλινο μοντέλο. Έφτιαξε με αυτά τα τέσσερα κομμάτια μία αλυσίδα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14. Όταν η αλυσίδα κλείσει από τη μία μεριά σχηματίζει το τρίγωνο, ενώ από την άλλη το τετράγωνο.



Σχήμα 4.14

4.3 *Lewis Carroll*

Ο *Lewis Carroll* ή αλλιώς *Charles Lutwidge Dodgson*, όπως είναι το πραγματικό του όνομα, γεννήθηκε στην Αγγλία στις 27 Ιανουαρίου του 1832 και πέθανε στις 14 Ιανουαρίου του 1898. Διεκπεραίωσε τις σπουδές του στο *Rugby* και στην Οξφόρδη, όπου αργότερα διορίστηκε Λέκτορας στο κολέγιο *Christ Church*, την περίοδο 1855-1881. Ο *Dodgson* από μικρή ηλικία έγραφε ποιήματα και μικρές ιστορίες που δημοσίευε στο περιοδικό *Mishmash* και αργότερα σε περιοδικά όπως τα *The Comic Times*, *Whitby Gazette* και *Oxford Critic*. Ωστόσο έγινε ιδιαίτερα γνωστός μέσα από το κλασικό πια παραμύθι *Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων* (*Alice's Advantures in Wonderland*, (1865)). Κάποια από τα πιο γνωστά έργα του *Carroll* είναι το *Through the Looking – Glass* και το *The Hunting of the Snark*. Είχε επίσης δημοσιεύσεις σχετικά με παιχνίδια, γρίφους, αινίγματα, αναγραμματισμούς, προβλήματα σκακιού, διασκεδαστικά προβλήματα και προβλήματα λογικής. Έχει συνθέσει πολλούς πρωτότυπους γρίφους και έχει επινοήσει τα *Doublets*. Τα *Doublets* είναι ένα παιχνίδι που από μία λέξη αλλάζοντας κάθε φορά μόνο ένα γράμμα, καταλήγουμε σε κάποια άλλη.

Π.χ. Ξεκινώντας από τη λέξη *MUM* μπορούμε να φτιάξουμε τη λέξη *DAD*, ως εξής:

MUM
MUD
MAD
DAD

Κάποια από τα υπόλοιπα βιβλία του είναι τα

- *Phantasmagoria and other poems*, Macmillan, London,1869.
- *Euclid and his Modern Rivals*, Macmillan, London, (1879).
- *A Tangled Tale*, Macmillan, London, 1885.
- *The Game of Logic*, Macmillan, London, 1886.
- *Pillow Problems* (1895).
- *Symbolic Logic*, *Part I*, *Elementary*, Macmillan, London, 1896.

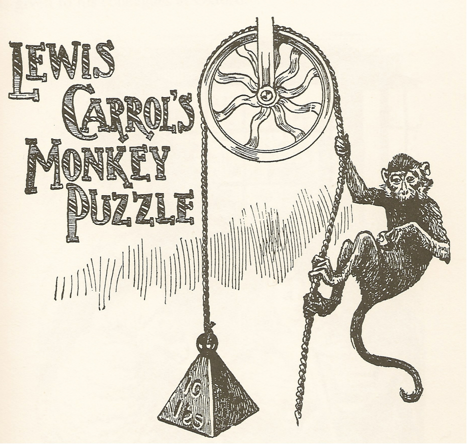
Επίσης, υπάρχουν συλλογές των γρίφων του από μετάπειτα εκδότες. Τέτοια είναι

- *Lewis Carroll's games and puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1992.

- *Rediscovered Lewis Carroll puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1995.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα από τους γρίφους του *Lewis Carroll*.

Γρίφος 4.1. *Το πρόβλημα της μαϊμούς και του βάρους.*
Έστω ένα σχοινί που είναι περασμένο από έναν τροχό στερεωμένο σταθερά στο ταβάνι. Στη μία άκρη του σχοινιού είναι δεμένο ένα βάρος 10 κιλών και στην άλλη κρατιέται μια μαϊμού, το βάρος και η μαϊμού βρίσκονται σε ισορροπία. Αν η μαϊμού αρχίσει να ανεβαίνει στο σχοινί, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα;[16]



Σχήμα 4.15

Αυτός είναι ένας από τους πιο γνωστούς γρίφους του *Lewis Carroll* τον οποίο δημιούργησε το 1893, ενώ ήταν στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Πρώτα ζήτησε από τους φοιτητές του να λύσουν τον γρίφο και πήρε πολλές και διαφορετικές απαντήσεις. Με το γρίφο αυτό ασχολήθηκαν και άλλοι δημιουργοί γρίφων. Τον συναντάμε και στο βιβλίο *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*[17] , στο οποίο ο επιμελητής της έκδοσης *Martin Gardner* αναφέρει ότι ο *Loyd* απάντησε λανθασμένα λέγοντας ότι όσο η μαϊμού θα ανεβαίνει το σχοινί, θα πέφτει γρήγορα με αυξανόμενη ταχύτητα. Απάντηση φυσικά είχε δώσει και ο ίδιος ο *Carroll*, ο οποίος υποστήριζε ότι το βάρος δεν θα μετακινηθεί καθόλου, ούτε προς τα πάνω,

[16] *Rediscovered Lewis Carroll Puzzles*, *Edward Wakeling*, Dover Publications, Inc., New York, 1995, Πρόβλημα 9, σελίς 15.

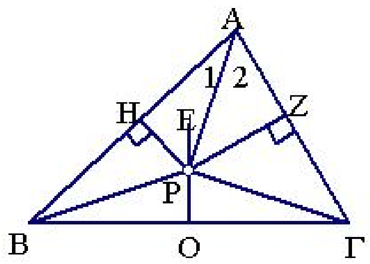
[17] *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover Publications, Inc., New York, 1960, Πρόβλημα 1, σελίς 1 και 121.

ούτε προς τα κάτω, αλλά θα παραμείνει σταθερό καθώς η μαϊμού θα ανεβαίνει στο σχοινί.

Ωστόσο η σωστή απάντηση είναι ότι ανεξάρτητα με το πώς ανεβαίνει η μαϊμού, το βάρος και η μαϊμού πάντα θα ζυγίζουν το ίδιο και θα ισορροπούν. Κάθώς θα ανεβαίνει η μαϊμού στο σχοινί, θα ανεβαίνει και το βάρος, με αποτέλεσμα την εξισορρόπηση τους. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με χρήση των νόμων της Φυσικής.

Παράδοξο: Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ο *Lewis Carroll* έχει δώσει μία απόδειξη, που με την πρώτη ματιά φαίνεται ολόσωστη, για το ότι κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές. Από τον αναγνώστη του προβλήματος ζητείται να βρεθεί η πλάνη. Ας δούμε το Σχήμα 4.16 και την απόδειξη έτσι ακριβώς όπως τα παρουσιάζει ο *Carroll*.[18]



Σχήμα 4.16

Έστω ΑΒΓ ένα τυχαίο τρίγωνο. Βρίσκουμε το μέσο της ΒΓ σημείο Ο και από το Ο φέρνουμε την ΟΕ κάθετη στην ΒΓ. Στη συνέχεια φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$, έστω Αx.

Οπότε: (1) Αν η διχοτόμος δεν συναντήσει την ΟΕ, θα είναι παράλληλες, δηλαδή Α$x\|$ΟΕ. Άρα ΑΒ=ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές.

(2) Αν η διχοτόμος συναντήσει την ΟΔΕ, έστω στο σημείο Ρ. Τότε φέρνουμε της ΡΒ, ΡΓ και τις κάθετες ΡΗ και ΡΖ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ΑΡΖ και ΑΡΗ είναι ίσα, γιατί έχουν μια κοινή πλευρά την ΑΡ, ίσες γωνίες η $\widehat{PAZ}$ με την $\widehat{PAH}$ και η $\widehat{AZP}$ με την $\widehat{AHP}$. Οπότε ΑΗ=ΑΖ και ΡΗ=ΡΖ.

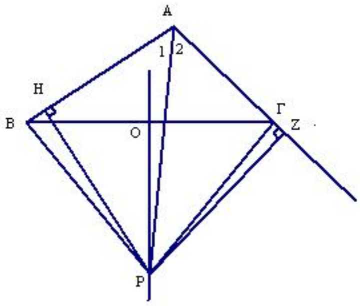
Επίσης τα τρίγωνα ΒΟΡ και ΓΟΡ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΟ=ΟΓ, η ΟΡ είναι κοινή και οι γωνίες στο Ο είναι ίσες. Επομένως, ΡΒ=ΡΓ.

Επίσης τα τρίγωνα ΡΗΒ και ΡΖΓ είναι ορθογώνια. Επομένως ΡΒ^2=ΡΗ^2+ΗΒ^2 και ΡΓ^2=ΡΖ^2+ΖΓ^2.

[18] *Rediscovered Lewis Carroll Puzzles*, *Edward Wakeling*, Dover Publications, Inc., New York, 1995, Πρόβλημα 27, σελίς 43.

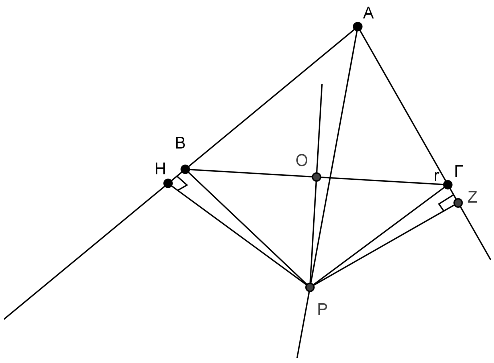
Αλλά, ΡΒ=ΡΓ και ΡΗ=ΡΖ. Οπότε, $HB^2=Z\Gamma^2$
Άρα ΗΒ=ΗΖ. Επίσης ΑΗ=ΑΖ. Επομένως ΑΒ=ΑΓ, δηλαδή το ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Έτσι κάθε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Απάντηση



Σχήμα 4.17

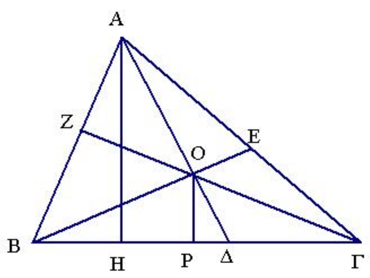
Η πλάνη της απόδειξης του *Lewis Carroll* φαίνεται αν κάποιος κάνει ένα ακριβές σχήμα. Ακολουθώντας τις οδηγίες της εκφώνησης με ακρίβεια οδηγηθήκαμε στο παραπάνω σχήμα. Η απόδειξη προχωρά κανονικά σχεδόν μέχρι το τέλος, μόνο που σε αυτό το σχήμα ΑΒ=ΑΗ+ΗΒ=ΑΖ+ΓΖ>ΑΓ και όχι ΑΒ=ΑΓ. Αυτό συμβαίνει διότι αν η μεσοκάθετός της βάσης και η διχοτόμος της γωνίας Α ή θα ταυτίζονται, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές ή θα τέμνονται εκτός του τριγώνου ΑΒΓ. Στην περίπτωση που θα τέμνονται εκτός του τριγώνου θα δείξουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε την παρακάτω κατάσταση, σχήμα 4.18, όπου οι κάθετες από το σημείο τομής Ρ θα τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ εξωτερικά, ταυτόχρονα.



Σχήμα 4.18

Τα τρίγωνα ΑΡΖ και ΑΡΗ είναι ίσα διότι $\widehat{HAP} = \widehat{PAZ}$ και ΑΡ κοινή, άρα ΑΗ=ΑΖ.
Τα τρίγωνα ΒΟΡ και ΒΟΓ είναι ίσα διότι ΒΟ=ΟΓ, ΟΡ κοινή και $\widehat{BOP} = \widehat{PO\Gamma}$, άρα ΒΡ=ΓΡ.
Τέλος τα τρίγωνα ΒΡΗ και ΡΓΖ είναι ίσα ΒΡ=ΓΡ, ΡΖ=ΡΗ, άρα ΒΗ=ΓΖ.
Επομένως ΑΒ=ΑΓ, διότι ΑΗ=ΑΖ και ΒΗ=ΓΖ. Άτοπο γιατί τότε οι ΑΡ, ΟΡ θα έπρεπε να ταυτίζονται.

Πρόβλημα 4.1. *Από τις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, άγονται οι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ έτσι ώστε να τέμνονται στο Ο. Να βρεθεί ο λόγος* $\frac{\Delta O}{\Lambda A}$ *συναρτήσει των λόγων* $\frac{EO}{EB}$ *και* $\frac{ZO}{Z\Gamma}$.[19]



Σχήμα 4.19

Λύση

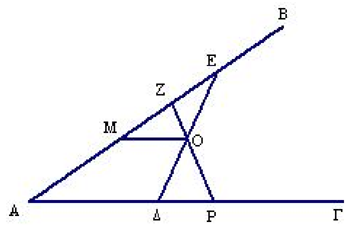
Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΟΓ έχουν κοινή βάση τη ΒΓ.
Επομένως, αν φέρουμε τα ύψη ΑΜ και ΟΡ των δύο αυτών τριγώνων θα έχουμε
$\frac{\text{OP}}{AM} = \frac{(BO\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ (1)
Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΟΡΔ είναι όμοια ($\widehat{HA\Delta} = \widehat{PO\Delta}$), άρα θα έχουμε
$\frac{OP}{AM} = \frac{O\Delta}{A\Delta}$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε $\frac{(BO\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{O\Delta}{A\Delta}$ (3)

Όμοια ισχύει $\frac{OE}{BE} = \frac{(AO\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ (4) και $\frac{OZ}{\Gamma Z} = \frac{(AOB)}{(AB\Gamma)}$ (5)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3),(4),(5) κατά μέλη παίρνουμε ότι
$\frac{O\Delta}{A\Delta} + \frac{OE}{BE} + \frac{OZ}{\Gamma Z} = 1$ ή $\frac{O\Delta}{A\Delta} = 1 - \frac{OE}{BE} - \frac{OZ}{\Gamma Z}$

[19]*The Mathematical Recreations of Lewis Carroll Pillow problems and a Tangled Tale*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, Πρόβλημα 24, σελίς 6.

Πρόβλημα 4.2. *Δίνονται δύο ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο και ένα σημείο που βρίσκεται μέσα στη γωνία που σχηματιζουν οι ευθείες αυτές. Να αχθεί γραμμή διερχόμενη από το σημείο αυτό, ώστε να σχηματίζει με τις δοσμένες ευθείες το τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδόν.*[20]



Σχήμα 4.20

Λύση

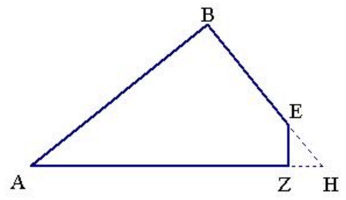
Έστω ΑΒ και ΑΓ οι δοσμένες ευθείες και Ο το σημείο. Φέρνουμε από το σημείο Ο παράλληλη στη ΑΓ και έστω ότι τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ. Στην ΜΒ παίρνουμε τμήμα ΜΕ, τέτοιο ώστε ΑΜ=ΜΕ. Ενώνουμε το Ε με το Ο και προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την ΑΓ σε σημείο Δ.
Οπότε ΕΟ=ΟΔ, διότι ΑΜ=ΜΕ και ΟΜ$||$ΑΓ.
Στη συνέχεια φέρνουμε τυχαία ευθεία ΖΡ που περνάει από το Ο.
Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΖΟΕ και ΟΔΡ βλέπουμε ότι
$\widehat{\Delta OP} = \widehat{ZOE}$, ΕΟ=ΟΔ, $\widehat{O\Delta P} > \widehat{EZO}$ οπότε ΟΡ $>$ΟΖ
και τριγ. ΖΟΕ $>$τριγ. ΟΔΡ
ΖΟΕ+ΑΔΟΖ $>$ ΟΔΡ+ΑΔΟΖ
Επομένως τριγ. ΑΡΖ $>$ τριγ. ΑΔΕ. Άρα το μικρότερο δυνατό τρίγωνο είναι το ΑΔΕ.

Πρόβλημα 4.3. *Δίνονται δύο γειτονικές πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ενός τετραπλεύρου και ότι οι γωνίες στις άλλες άκρες αυτών των πλευρών είναι κάθετες. Να βρεθούν α) οι άλλες δύο πλευρές β) το εμβαδόν.*

Λύση

Έστω ΑΒ=α και ΑΖ=β δοσμένες πλευρές και γωνία $\widehat{A}$ γνωστή. Έχουμε ακόμα $\widehat{B} = \widehat{Z} = 90°$.

[20] *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll Pillow. Problems and a Tangled Tale*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, Πρόβλήμα 62, σελίς 14.



Σχήμα 4.21

α) Οπότε $AH = \dfrac{BH}{\sin\widehat{A}}$ (1)

$BH = \alpha\tan\widehat{A} = \alpha\dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$ (2)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $AH = \dfrac{\alpha}{\cos\widehat{A}}$ (3)

Είναι $\tan\widehat{H} = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{A}}$ (4)

Όμως $EZ = ZH\tan\widehat{H}$,

όπου με την βοήθεια της (4) βρίσκουμε ότι $EZ = \dfrac{\alpha-\beta\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{A}}$ (5)

και $ZH = AH - AZ = \dfrac{\alpha-\beta\cos\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$ (6)

Ακόμα $\sin\widehat{H} = \dfrac{AB}{AH} = \cos\widehat{A}$ (7)

και $EH = \dfrac{EZ}{\sin\widehat{H}}$,

όπου με την βοήθεια της (7) βρίσκουμε ότι $EH = \dfrac{\alpha-\beta\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}}$ (8)

Οπότε $BE = BH - EH = \dfrac{\beta-\alpha\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{A}}$

β) $E_{AZEB} = E_{AZB} - E_{EZH} = \dfrac{1}{2}BH\cdot AB - \dfrac{1}{2}ZH\cdot EZ = \dfrac{2\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2)\cos\widehat{A}}{2\sin\widehat{A}}$

Πρόβλημα 4.4. *Κάποιοι άντρες κάθονται σε έναν κύκλο, έτσι ώστε ο καθένας να έχει δύο γείτονες. Ο κάθε άντρας έχει από ένα συγκεκριμμένο αριθμό από σελίνια. Ο πρώτος έχει ένα περισσότερο από τον δεύτερο, ο δεύτερος ένα περισσότερο από τον τρίτο κ.ο.κ. Τώρα ο πρώτος δίνει ένα σελίνι στον δεύτερο, ο δεύτερος με τη σειρά* *του 2 σελίνια στον τρίτο κ.ο.κ., δηλαδή κάθε ένας δίνει στον επόμενο 1 περισσότερο σελίνι από αυτά που πήρε από τον προηγούμενο και αυτό συνεχίζει όσο είναι δυνατόν. Στο τέλος θα υπάρχουν δύο γείτονες που ο ένας θα έχει 4 φορές περισσότερα σελίνια από τον άλλο. Πόσοι ήταν οι άντρες στον κύκλο; Πόσα χρήματα είχε ο φτωχότερος άντρας στην αρχή;*

Λύση

Έστω μ το σύνολο των αντρών και ν τα χρήματα που έχει ο πρώτος άντρας, οπότε τα χρήματα του καθένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Σειρά Αντρών	*σελίνια*
$1^{ος}$	ν
$2^{ος}$	ν-1
⋮	⋮
μ-$οστος$	ν-μ+1

Σύμφωνα λοιπόν με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φτωχότερος άντρας θα είναι ο τελευταίος. Έστω κ=ν-μ+1 τα λεφτά του του φτωχότερου άντρα. Οπότε οι γύροι θα σταματήσουν όταν ο φτωχότερος άντρας θα αδυνατεί να δώσει τα σελίνια που πρέπει. Μετά από τον πρώτο γύρο θα έχουν μαζευτεί μ σελίνια, οπότε μετά από κ γύρους θα έχουν μαζευτεί μκ σελίνια. Ωστόσο, θα συνεχίσουν με έναν ακόμα γύρο μέχρι τον άντρα στη θέση μ-1. Άρα συνολικά το ποσό που θα έχει μαζευτεί θα είναι κμ+μ-1 σελίνια και η χρηματική κατάσταση του καθενός φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Σειρά Αντρών	*σελίνια*
$1^{ος}$	ν-κ-1=ν-ν+μ-1-1=μ-2
$2^{ος}$	ν-κ-2=μ-3
⋮	⋮
(μ-1)-$οστος$	0
μ-$οστος$	κμ+μ-1

Τα χρήματα που έχουν τελικά στην κατοχή τους δύο γειτονικοί άντρες διαφέρουν κατά ένα σελίνι, εκτός από την περίπτωση του 1ου με τον μ-οστό άντρα. Οπότε αυτή θα είναι η περίπτωση που ο ένας θα έχει 4 φορές τα λεφτά του άλλου. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: κμ+μ-1=4(μ-2) ή κμ=3μ-7 ή κ=3-$\frac{7}{\mu}$.
Όμως το κ και το μ είναι ακέραιοι οπότε μ=7 και κ=2.

2η Περιπτωση: 4(κμ+μ-1)=μ-2 ή 4κμ=2-3μ ή κ=$\frac{2}{4\kappa} - \frac{3\mu}{4\kappa}$.
Όμως τα κ και μ είναι ακέραιοι και η εξισώση αυτή δεν δίνει πραγματικές λύσεις.

Άρα οι άντρες είναι 7 στο σύνολό τους και ο φτωχότερος άντρας στην αρχή του παιχνιδιού είχε 2 σελίνια.

4.4 *Martin Gardner*

Ο *Martin Gardner* γεννήθηκε το 1914 και μεγάλωσε στην *Oklahoma*. Είναι γνωστός Αμερικανός συγγραφέας που έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα με τα διασκεδαστικά μαθηματικά και τους γρίφους. Έγινε γνωστός από τη στήλη του περιοδικού *Scientific American* που λεγόταν Μαθηματικά παιχνίδια (*Mathematical Games*) στην οποία έγραφε από το 1956 έως το 1981. Επίσης έγραφε μία στήλη του *Asimov's Science Fiction Magazine* από τα τέλη του 1970 μέχρι τις αρχές του 1980. Ο *Gardner* έχει δημοσιεύσει πάνω από 70 βιβλία σχετικά με Μαθηματικά, Φιλοσοφία, Λογοτεχνία, Θρησκεία κ.α. Το 1983 βραβεύτηκε για το επιστημονικό συγγραφικό του έργο από το Αμερικανικό Ινστιτούτο Φυσικής (AIP) με το *Steele Foundation Prize*. Αγότερα, το 1987, τιμήθηκε με ένα ακόμα βραβείο, το *Steele Prize*, της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας (MAA).

Ας αναφέρουμε κάποια από τα βιβλία του: [21]

- *Mathematics, Magic and Mystery* (1956).
- *Mathematical Carnival: A New Round – up of Tantalizers and Puzzles from "Scientific American"* (1975).
- *Mathematical Puzzles and Diversions* (1959).
- *More Mathematical Puzzles and Diversions* (1961).
- *Further Mathematical Diversions* (1969).
- *Entertaining Mathematical Puzzles* (1986).
- *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers* (1988).
- *My Best Mathematical and Logic Puzzles* (1998).
- *Mathematical Puzzle Tales* (2001).

[21] Στην ιστοσελίδα *http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner* μπορεί να δεί κανείς έναν αρκετά μεγάλο κατάλογο με βιβλία του *Gardner*.

Προβλήματα-Γρίφοι

Γρίφος 4.1. *Ένας άντρας φτάνει κάθε απόγευμα στις 5 ακριβώς στο σταθμό όπου τον περιμένει η σύζυγός του με το αυτοκίνητο για να πάνε σπίτι. Μία μέρα όμως πήρε το προηγούμενο τρένο με αποτέλεσμα να φτάσει στις 4 στο σταθμό. Έτσι αποφάσισε να πάρει τον δρόμο για το σπίτι με τα πόδια. Κάποια στιγμή στο δρόμο συνάντησε τη γυναίκα του και γύρισαν παρέα με το αυτοκίνητο στο σπίτι 10 λεπτά νωρίτερα από ότι συνήθως. Αν υποθέσουμε ότι η γυναίκα οδηγεί πάντα με σταθερή ταχύτητα και ότι φτάνει πάντα ακριβώς στις 5 στο σταθμό, μπορεί να υπολογιστεί πόση ώρα περπάτησε ο άντρας μέχρι να συναντήσει τη σύζυγό του;*

Λύση

Το ζευγάρι γύρισε στο σπίτι 10 λεπτά νωρίτερα από ότι συνήθως. Αυτό σημαίνει ότι η γυναίκα γλίτωσε 10 λεπτά από τη διαδρομή σπίτι - σταθμός - σπίτι. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι σε 5 λεπτά από τη στιγμή που συνάντησε τον άντρα της θα έφτανε στο σταθμό. Οπότε τον συνάντησε 4:55, αφού καθημερινά έφτανε από τον σταθμό στις 5. Ο άντρας όμως έφτασε εκείνη τη μέρα στις 4 ακριβώς, άρα περπάτησε για 55 λεπτά.

Γρίφος 4.2. *Ένας άντρας κατεβαίνει αργά μία κυλιόμενη σκάλα και φτάνει κάτω αφού πατήσει σε 50 σκαλιά. Σαν ένα πείραμα ανεβαίνει γρήγορα την ίδια κυλιόμενη σκάλα, ένα ένα τα σκαλιά, και φτάνει πάνω μετά από 125 σκαλιά. Υποθέτουμε ότι ανεβαίνει 5 φορές γρηγορότερα από ότι κατεβαίνει και σε κάθε μία από τις διαδρομές ξεχωριστά η ταχύτητα του ήταν σταθερή. Πόσα σκαλιά είναι ορατά όταν η σκάλα παραμένει σταθερή;*[22]

Λύση

Έστω κ τα σκαλιά που παραμένουν ορατά όταν η σκάλα παραμένει σταθερή. Τότε κ-50 είναι το πλήθος των σκαλιών που δεν χρησιμοποίησε καθώς κατέβαινε την σκάλα και τα παραπάνω σκαλιά που χρειάστηκε όταν ανέβαινε είναι 125-κ.
Αν υποθέσουμε τώρα ότι ο άντρας κατεβαίνει 1 σκαλί σε χρόνο t, οπότε τα 50 σκαλιά θα τα κατέβει σε χρόνο $50t$. Στο χρονικό διάστημα αυτό δεν χρησιμοποιήθηκαν κ-50 σκαλιά, άρα η ταχύτητα της κίνησης της σκάλας είναι $\frac{\kappa - 50}{50t}$.
Ακόμα γνωρίζουμε ότι ανεβαίνει πέντε φορές γρηγορότερα από ότι κατεβαίνει, άρα ανεβαίνει τα 125 σκαλιά σε χρόνο $\frac{125t}{5} = 25t$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα χρειάστηκαν επιπλέον 125-κ σκαλιά, η ταχύτητα κίνησης της σκάλας είναι $\frac{125 - \kappa}{25t}$.

[22]Martin Gardner, *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Penguin Books, 1961, Πρόβλημα 4, σελίς 121.

Επομένως, $\dfrac{\kappa - 50}{50t} = \dfrac{125 - \kappa}{25t}$
Άρα κ=100
Δηλαδή όταν η σκάλα παραμένει σταθερή είναι ορατά 100 σκαλιά.

Γρίφος 4.3. *Ένας αφηρημένος υπάλληλος τράπεζας έκανε λάθος στην εξαργύρωση μιάς επιταγής και έδωσε στον πελάτη δολάρια αντί για τα σεντς και σεντς αντί για τα δολάρια. Με αποτέλεσμα ο πελάτης μετά που αγόρασε μία εφημερίδα των 5 σεντς, να διαπιστώσει ότι έχει ακριβώς το διπλάσιο ποσό από αυτό που έγραφε η επιταγή. Πόσα ήταν τα χρήματα της επιταγής;*[23]

Λύση

Έστω x τα δολάρια και y τα σεντς της επιταγής.
Ο υπάλληλος της τράπεζας έκανε λάθος και έδωσε y δολάρια και x σεντς.
Το y θα είναι λιγότερο από 100.
Αν το y δεν ξεπερνάει το 50 θα έχουμε
$2x = y$ και $2y = x - 5$.
Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε $x = -\dfrac{5}{3}$ και $y = -\dfrac{10}{3}$, που απορρίπτεται.
Αν όμως το $50 \leq y < 100$ τότε θα έχουμε
$2y - 100 = x - 5$ και $2x + 1 = y$.
Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε $x = 31$ και $y = 63$.
Δηλαδή, η επιταγή είχε το ποσό των 31 δολαρίων και 63 σεντς.

[23] *More Mathematical Puzzles and Diversions*, *Martin Gardner*, Penguin Books, 1961, Πρόβλημα 8, σελίς 123.

Κεφάλαιο 5

Σπουδαίες συλλογές

Μία εργασία που αναφέρεται σε προβλήματα και συλλογές προβλημάτων δεν θα μπορούσε να μην αναφερθεί στα 23 προβλήματα που παρουσίασε ο *David Hilbert* το 1900 καθώς και στο *Scottish Book*. Οι συλλογές αυτές είναι εξαιρετικά σημαντικές καθώς περιλαμβάνουν προβλήματα δύσκολα τα οποία συνέβαλαν στην ανάπτυξη και στη δημιουργία νέων κλάδων στα Μαθηματικά.

5.1 Τα προβλήματα του *Hilbert*

Ο κορυφαίος μαθηματικός *Hilbert* (1862-1943) γεννήθηκε και μεγάλωσε στο *Koenigsberg* της ανατολικής Πρωσίας (σημερινό *Kalinigrad* της Ρωσίας). Το 1885 πήρε το διδακτορικό του με τον καθηγητή *Ferdinand von Lindemann* παρουσιάζοντας μία εργασία πάνω στη Θεωρία των Αναλλοίωτων με τίτλο: *Über Invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondrere der Kugelfunktionen*. Ο *Hilbert* ήταν ένας ιδιαίτερα χαρισματικός μαθηματικός που είχε ευρείες γνώσεις στους περισσότερους τομείς των μαθηματικών και προσέφερε πολλά στη Θεωρία των Αναλλοίωτων, στη θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, στη Συναρτησιακή Ανάλυση με τους χώρους *Hilbert* και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών, αλλά και της Φυσικής. Αυτός σε συνεργασία με τους μαθητές του συνέβαλε στη μαθηματική υποδομή που χρειαζόταν στην κβαντομηχανική και σε άλλους κλάδους της Φυσικής. Αξίζει να αναφέρουμε κάποια από τα ονόματα των μαθητών του (75 υποψήφιοι διδάκτορες) οι οποίοι στη συνέχεια έγιναν διάσημοι μαθηματικοί. Είναι οι *Hermann Weyl*, *Hugo Steinhaus*, *Ernst Zermelo*, *Otto Blumenthal*, *Wilhelm Ackermann* και άλλοι.[1]

Ο *Hilbert* υποστήριζε ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα έπρεπε ή να έχει λύση

[1]Βλ. σχετικά *http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=7298*
Βιογραφικά στοιχεία *http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert*
και *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert.html*

ή απόδειξη ότι είναι αδύνατο. Πίστευε ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχει άγνωστο (*ignorabimus*). Η παρακάτω φράση του δηλώνει ακριβώς αυτό που υποστήριζε.
Wir müssen wissen. Wir werden wissen. (Πρέπει να ξέρουμε. Θα μάθουμε.)[2]

Σε μία ιστορική ομιλία[3] ο *Hilbert*, το 1900 στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι, παρουσίασε 23 προβλήματα που έμελλε να οδηγήσουν τις εξελίξεις μέσα στους ερχόμενους αιώνες. Τα 23 προβλήματα[4] αφορούν τόσο τα Θεωρητικά όσο και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Πρόκειται για προβλήματα που παρέμεναν άλυτα την εποχή εκείνη και αρκετά από αυτά είχαν απασχολήσει τον ίδιο τον *Hilbert*. Ήταν αυτά που πίστευε ο *Hilbert* ότι θα αποσχολήσουν ιδιαίτερα την μαθηματική κοινότητα τον 20ο αιώνα. Από τα προβλήματα, άλλα λύθηκαν πλήρως ή εν μέρει, άλλα επαναδιατυπώθηκαν και γενικεύτηκαν και κάποια ακόμα και σήμερα παραμένουν άλυτα.

Η παρουσίαση των προβλημάτων αυτών από τον *Hilbert* έχει μείνει ιστορική και αντίστοιχή της μέχρι σήμερα δεν έχει επαναληφθεί, αν και έχουν γίνει κάποιες απόπειρες.
Μετά απο τον *Hilbert* και άλλοι μαθηματικοί και μαθηματικοί οργανισμοί ανακοίνωσαν καταλόγους προβλημάτων. Εκτός από λίγες εξαιρέσεις, αυτά τα μετέπειτα προβλήματα δεν είχαν τόση επίδραση όσο η εργασία του *Hilbert*.

Ο *Hilbert* ξεκίνησε την παρουσίαση του με έναν μεγάλο πρόλογο θέτωντας κάποιες ερωτήσεις:

"Ποιος από εμάς δεν θα ήταν ευτυχής να σηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μία ματιά στην επερχόμενη πρόοδο της επιστήμης μας και να μάθει τα μυστικά αυτής της ανάπτυξης στους επόμενους αιώνες; Να μάθει ποιοι θα είναι οι συγκεκριμένοι στόχοι προς τους οποίους οι κορυφαίες μαθηματικές διάνοιες των επερχόμενων γενεών θα στρέψουν τις προσπάθειές τους; Ποιες νέες μέθοδοι και νέες αλήθειες από το ευρύ και πλούσιο φάσμα των μαθηματικών σκέψεων θα αποκαλυφθούν στους επόμενους αιώνες;"

[2] Victor Vinnikov, *We shall know*: *Hilbert's apology*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 21, No. 1, Dec. 1999, σελίδες 42-46.

[3] D. Hilbert, *Mathematical Problems*, American Mathematical Society, Vol. 37 No. 4 σελίδες 407-436.
http://www.ams.org/bull/2000-37-04/S0273-0979-00-00881-8/S0273-0979-00-00881-8.pdf

[4] Ο *Hilbert* συμπεριέλαβε 24 προβλήματα στον κατάλογό του, αλλά αποφάσισε να μην δημοσιεύσει ένα από αυτά. Το 24ο πρόβλημα ανακαλύφθηκε σε ένα αυθεντικό χειρόγραφο του *Hilbert* από έναν Γερμανό ιστορικό τον *Rüdiger Thiele* το 2000.
Rüdiger Thiele, *Hilbert's Twenty – Fourth Problem*, American Mathematical Monthly, Vol. 110, Jan. 2003, σελίδες 1-24.

Έπειτα συνέχισε μιλώντας για την φύση των μαθηματικών προβλημάτων και λέγοντας ότι η επίλυση τους είναι αυτή που βοηθά τα μαθηματικά να αναπτύσσονται. Τα προβλήματα, όπως χαρακτηριστικά είπε, αποτελούν ένδειξη ότι ένας επιστημονικός κλάδος είναι ζωντανός! Ένα πρόβλημα είναι πρώτης τάξεως αν ανοίγει ένα νέο θέμα οδηγώντας το ενδεχομένως σε ένα νέο επίπεδο έρευνας. Ένα τέτοιο πρόβλημα θα επιβιώσει και αν κάποτε λυθεί. Ξεκίνησε αναφέροντας δύο ονομαστά προβλήματα την εποχη εκείνη.
Το πρόβλημα του $Bernoulli$ της *Βραχυστόχρονης καμπύλης ή Καμπύλης ταχύτερης καθόδου* που έθεσε το 1696 που ήταν το έναυσμα για να διατυπωθούν μία σειρά από σημαντικά προβλήματα. Καθώς και το Τελευταίο Θεώρημα του $Fermat$: "Η εξίσωση $x^\nu + y^\nu = z^\nu$ δεν έχει μη-μηδενικές ακέραιες λύσεις για κανένα ν μεγαλύτερο του 2". Το τελευταίο θεώρημα του $Fermat$ το 1900 παρέμενε άλυτο, αν και είχε αποδειχθεί για πολλούς εκθέτες (τελικά λύθηκε το 1995 από τον $Andrew$ $Wiles$). Παρόλα αυτά είχε δώσει το έναυσμα για τη διερεύνηση ένος νέου κλάδου των μαθηματικών, της Θεωρίας Αλγεβρικών Σωμάτων.
Ακόμα ο $Hilbert$ μίλησε για την αυστηρότητα που χρειάζεται μία απόδειξη. Για να λυθεί ένα πρόβλημα θα πρέπει να υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος σαφώς διατυπωμένων υποθέσεων που να καταλήγουν στο συμπέρασμα ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Αυστήροτητα δεν θα πρέπει να υπάρχει μόνο σε κάποιους κλάδους των μαθηματικών, αλλά σε όλους τους τομείς της επιστήμης.
Στη συνέχεια άρχισε την παρουσίαση των προβλημάτων. Στην πραγματικότητα στην ομιλία του δεν ανέφερε και τα 23 προβλήματα, αλλά επέλεξε κάποια από αυτά. Ο πλήρης κατάλογος των προβλημάτων δημοσιεύτηκε στο γερμανικό περιοδικό $Göttinger\ Nachrichtento$. Τα προβλήματα του $Hilbert$ είναι τα ακόλουθα

1. Το πρόβλημα του $Cantor$ για τους πληθικούς αριθμούς του συνεχούς. Η υπόθεση του συνεχούς.

   Το πρώτο πρόβλημα στο οποίο αναφέρθηκε ο $Hilbert$ σε αυτή την ιστορική ομιλία ήταν του $Georg\ Cantor$ (1845-1918) και ανήκει στον κλάδο της Θεωρίας Συνόλων. Ο $Cantor$ ασχολήθηκε με τον πληθάριθμο των άπειρων συνόλων. Εισήγαγε τον πληθάριθμο για να μπορέσει να συγκρίνει το μέγεθος των άπειρων συνόλων και απέδειξε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι αυστηρά μικρότερος από αυτόν του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο οι αποδείξεις που έδωσε δεν έδειχναν τι γίνεται ανάμεσα στους δύο πληθάριθμους. Έτσι εισήγαγε την υπόθεση του συνεχούς, η οποία λέει ότι δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος να βρίσκεται αυστηρά μεταξύ αυτού των φυσικών αριθμών και αυτού των πραγματικών αριθμών. Ο $Cantor$ προσπάθησε για πολλά χρόνια να το αποδείξει, αλλά μάταια. Το πρόβλημα αυτό επανέφερε ο $Hilbert$ με την ομιλία του.
   Το 1938 ο $Kurt\ Gödel$ απέδειξε ότι η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς

είναι συνεπής με τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας των *Zermelo-Fraenkel*.[5] Αργότερα, το 1963, ο *Paul Cohen*[6] απέδειξε ότι και η άρνηση της υπόθεσης είναι επίσης συνεπής με τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας των *Zermelo-Fraenkel*.[7] Συνεπώς, αποδείχθηκε ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί ή να μην αποδειχθεί η υπόθεση του συνεχούς με βάση τα αξιώματα αυτά.

2. Η συνέπεια των αξιωμάτων της Αριθμητικής.

Με αυτό το δεύτερο πρόβλημα ο *Hilbert* ζητούσε να απαλειφθεί κάθε ενδεχόμενο μιας αντίφασης στα Μαθηματικά. Έτσι έθεσε το παρακάτω πρόβλημα: "Να αποδειχθεί ότι τα αξιώματα της Αριθμητικής δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή ότι ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων που βασίζεται πάνω σε αυτά δεν θα οδηγήσει ποτέ σε αντιφατικά αποτελέσματα." Ενώ λοιπόν ο *Hilbert* ζητούσε την απόδειξη ότι τα αξιώματα της Αριθμητικής έχουν συνέπεια, ο *Gödel*, το 1933, με το δεύτερο θεώρημα της μη πληρότητας έδειξε ότι καμία θεωρία δεν είναι αρκετά ισχυρή ώστε να αποδείξει τη συνέπεια της.
Αυτό αναφέρεται ότι εξενεύρησε τον *Hilbert*, ο οποίος πίστευε, όπως είπαμε και παραπάνω, ότι όλα μπορούν να αποδειχθούν, ότι δηλαδή δεν υπάρχει *ignorabimus*. Ο *Hilbert* ωστόσο δεν έδωσε κάποια απάντηση στα χρόνια μέχρι τον θάνατό του.

3. Η ισότητα των όγκων δύο τετράεδρων με ίσες βάσεις και ίσα ύψη.

Αυτό ήταν από τα πιο εύκολα σε σχέση με τα υπόλοιπα προβλήματα αυτής της παρουσίασης, και το πρώτο που λύθηκε. Ο *Hilbert* αναφέρθηκε στο θεώρημα του Ευκλείδη που λέει το εξής: "Δύο τριγωνικές πυραμίδες με ίσα ύψη έχουν η μία προς την άλλη ίσους λόγους με τους λόγους των βάσεών τους". Ο *Gerling* απέδειξε την ισότητα των όγκων δύο συμμετρικών πολύεδρων διαμερίζοντας τα σε ίσα μέρη. Ο *Hilbert* και ο *Gauss* πίστευαν ότι δεν γίνεται να λυθεί η γενική πρόταση του Ευκλείδη με αυτή τη μέθοδο. Ο *Hilbert* υποστήριζε ότι για τη λύση θα ήταν απαραίτητη η χρήση Απειροστικού Λογισμού. Για να διευκρινιστεί λοιπόν το πρόβλημα αυτό ο *Hilbert* ζητούσε μία αυστηρή απόδειξη της αδυναμίας να λυθεί έτσι το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα ζητούσε να καθοριστούν δύο τετράεδρα με ίσες βάσεις και ίσα υψη, τα οποία δεν θα μπορούσαν να διαμεριστούν σε ίσα ανά δύο τετράεδρα και ούτε θα μπορούσαν με την πρόσθεση ίσων τετραέδρων να μετασχηματιστούν

[5] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton University Press, 1940.

[6] Ο *Cohen* πήρε το *Fields Metal* το 1966 για τη εργασία του αυτή.

[7] P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, New York, 1966.

σε πολύεδρα που αυτά να μπορούν να αναλυθούν σε ίσα τετράεδρα. Η αρνητική απάντηση δόθηκε από τον *Max Dehn* το 1900 και το 1903 ο *Kagan* κατέληξε ανεξάρτητα στα ίδια αποτελέσματα.

4. Το πρόβλημα της ευθείας γραμμής ως τη μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Εναλλακτικές γεωμετρίες.

   Το πρόβλημα αυτό του *Hilbert* κατηγορήθηκε ότι δεν ήταν σαφώς διατυπωμένο και ότι δεν γίνεται να πάρει μία σαφή απάντηση.[8]

5. Η αρχή του *Lie* για συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών χωρίς την υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις ομάδες.

   Ο *Lie*, ύστερα από πολύχρονη μελέτη γεωμετρικών μετασχηματισμών, θεμελίωσε μία νέα θεωρία. Στη θεμελίωση της θεωρίας του υποθέτει οι συναρτήσεις που ορίζουν τις ομάδες του ότι είναι διαφορίσιμες. Ο *Hilbert* θέτει το ερώτημα αν μπορεί να αποφευχθεί η υπόθεση της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων που ορίζουν τις συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών. Το 1952 δόθηκε θετική απάντηση, από τον *Andrew Gleason* και τους *Deane Montgomery* και *Leo Zippin*.[9]

6. Αξιωματικοποίηση της Μαθηματικής Φυσικής.

   Ως προς αυτή την κατεύθυνση υπάρχει η εξής πρόοδος: Η Κλασική Μηχανική αξιωματικοποιήθηκε από τον *Georg Hamel* (1877-1954) το 1903,
   η Θερμοδυναμική αξιωματικοποιήθηκε από τον Κ. Καραθεοδωρή (1873-1950) το 1909,
   η Ειδική Σχετικότητα από τον *Robb* το 1914 και ανεξάρτητα από τον Καραθεοδωρή το 1924, η Θεωρία Πιθανοτήτων από τον *A.N. Kolmogorov* (1903-1987) το 1930,
   η Κβαντική Θεωρία Πεδίου από τον *Whiteman* στα τέλη της δεκαετίας του 1950.[10]

7. Η αρρητότητα και η υπερβατικότητα κάποιων συγκεκριμένων αριθμών.

   Ο *Hilbert* θέτει το ερώτημα αν η έκφραση α^{β} για μια αλγεβρική βάση α και έναν άρρητο αλγεβρικό εκθέτη β (π.χ. οι αριθμοί $2^{\sqrt{2}}$ και $e^{\pi} = i^{-2i}$)

[8] Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2001
Μετάφραση στα Ελληνικά: Η πρόκληση του Χίλμπερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007, σελίς 339.
[9] Jeremy J. Gray, Η πρόκληση του Χίλμερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007, σελίς 339.
[10] Jeremy J. Gray, Η πρόκληση του Χίλμερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007, σελίς 339.

παριστάνει πάντα έναν υπερβατικό ή τουλάχιστον έναν άρρητο αριθμό. Η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα ήταν καταφατική και δόθηκε ανεξάρτητα από τους *Aleksandr Gelfond* (1934) και *Theodor Schneider* (1935).

8. Προβλήματα πρώτων αριθμών. (Η κατανομή των πρώτων και η Υπόθεση του *Riemann*.)

   Αυτό είναι ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα το οποίο παραμένει άλυτο μέχρι και σήμερα. Η υπόθεση αυτή εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε μία εργασία του *Bernhard Riemann* (1826-1866) το 1859 με τίτλο "*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grösse*". Ο *Riemann* υπέθεσε ότι θα μπορούσε να περιγράψει επακριβώς την κατανομή των πρώτων αριθμών, αν κατάφερνε να αποδείξει την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης ιδιότητας για τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα $\zeta(s)$, δηλαδή της

   $$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

   .
   Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς που είναι διαφορετικοί από το 1. Οι τετριμένες λύσεις της συνάρτησης είναι όλοι οι άρτιοι αρνητικοί αριθμοί. Ο *Riemann* διατύπωσε την εικασία ότι οι μη τετριμένες λύσεις της είναι μιγαδικοί αριθμοί με πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$. Η υπόθεση αυτή έχει επαληθευτεί για περίπου 1,5 δισσεκατομύρια ρίζες, παρ' όλα αυτά η τελική αυστηρή απόδειξη δεν έχει δοθεί ακόμα.[11] Αν μπορούσε να βρεθεί η κατανομή των πρώτων αριθμών, συμπληρώνει ο *Hilbert*, ίσως να ήμασταν σε θέση να αποδείξουμε αυστηρά ένα σωρό προβλήματα. Ένα από αυτά είναι η εικασία του *Goldbach*, κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Καθώς επίσης και το πρόβλημα του αν έχει η γραμμική διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta y + c = 0$, με ακέραιους συντελεστές πρώτους μεταξύ τους πάντα λύση (x, y), όπου x,y πρώτοι αριθμοί.

9. Η απόδειξη του γενικότερου Νόμου της Αντιστροφής σε κάθε αριθμητικό σώμα.

   Το πρόβλημα αυτό λύθηκε μερικώς από τον *Emil Artin* το 1923.

[11] E. Bombieri, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis*, Clay Mathematics Institute, *http://claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/*
Το χειρόγραφο του *Riemann*:
http://claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/1859_manuscript/riemann1859.pdf
Μετάφραση του χειρογράφου στα αγγλικά από τον *David R. Wilkins*:
http://claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/1859_manuscript/EZeta.pdf

10. Καθορισμός της επιλυσιμότητας μιας Διοφαντικής Εξίσωσης.

    Το 10ο πρόβλημα που έθεσε ο *Hilbert* ζητούσε αν για κάθε διοφαντική εξίσωση με ρητούς συντελεστές υπάρχει διαδικασία σύμφωνα με την οποία καθορίζεται με πεπερασμένο πλήθος βημάτων κατά πόσο η εξίσωση αυτή έχει ακέραιες λύσεις. Το 1970 αποδείχθηκε από τον *Yuri Matiyasevich* ότι δεν υπάρχει τέτοια μέθοδος.[12] Πριν την τελική απάντηση από τον *Matiyasevich* πολλοί είχαν ασχοληθεί και προχωρήσει το πρόβλημα αυτό, όπως οι *Davis*, *Putnam*, *Robinson* και άλλοι.

11. Τετραγωνικές μορφές με τυχαίους αλγεβρικούς συντελεστές.

    "Με δεδομένη μία τετραγωνική εξίσωση με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών και με αλγεβρικούς συντελεστές, να βρεθούν οι ακέραιες ή κλασματικές λύσεις της που ανήκουν στο αλγεβρικό σύνολο που καθορίζουν οι συντελεστές της."

    Ο *H. Hasse* έλυσε το 1923-24 το πρόβλημα για τους ρητούς αριθμούς και ο *Siegel* τη δεκαετία του 1930 έλυσε το πρόβλημα για τους ακεραίους.

12. Επέκταση του θεωρήματος του *Kronecker* για τα αβελιανά σώματα σε οποιοδήποτε ρητό αλγεβρικό σύνολο.

    Το θεώρημα του *Kronecker* είναι το εξής: "Κάθε αβελιανό αριθμητικό σώμα που προκύπτει από το σύνολο των ρητών αριθμών παράγεται από μία σύνθεση σωμάτων ριζών της μονάδας." Ο *Hilbert* τόνισε τη μεγάλη σημασία της επέκτασης αυτού του θεωρήματος του *Kronecker* στην περίπτωση που, αντί για το σύνολο των ρητών αριθμών πάρουμε ως βάση ένα οποιοδήποτε σώμα αλγεβρικών αριθμών.

    Η λύση του προβλήματος ήρθε το 1920 με τη δημιουργία της Θεωρίας Αβελιανών Σωμάτων από τον *Takagi*.

13. Αδυναμία λύσης της γενικής εξίσωσης 7ου βαθμού θεωρώντας συναρτήσεις δύο μόνο μεταβλητών.

    Ο *Hilbert* στη συνέχεια θέτει το εξής ερώτημα: Είναι πιθανό οι λύσεις των εξισώσεων 7ου βαθμού να είναι συναρτήσεις των συντελεστών τους που να μην μπορούν να κατασκευαστούν από μία πεπερασμένη διαδοχή συναρτήσεων με δύο μόνο μεταβλητές; Για να αποδειχθεί αυτό, όπως τονίζει ο *Hilbert*, αρκεί

[12] Yu.V. Matiyasevich, *Hilbert's tenth problem*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.

να δειχθεί ότι η εξίσωση του 7ου βαθμού
$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ δεν είναι επιλύσιμη μέσω οποιωνδήποτε συνεχών συναρτήσεων με δύο μόνο μεταβλητές.

Το πρόβλημα αυτό λύθηκε αρνητικά από τους *Andrei Kolmogorov* και *Vladimir Arnold* το 1957.

14. Απόδειξη ότι ορισμένα πλήρη συστήματα συναρτήσεων είναι πεπερασμένα.

    Το πρόβλημα αυτό λύθηκε το 1962 από τον *Masayoshi Nagata*.

15. Αυστηρή θεμελίωση της απαριθμητικής γεωμετρίας του *Schubert*.

    Το 15ο πρόβλημα είναι το εξής: Να γίνει αυστηρός προσδιορισμός των αριθμών της απαριθμητικής Γεωμετρίας με ακριβέστερο προκαθορισμό των ορίων της ισχύος τους και ιδιαίτερα των αριθμών που βρήκε ο *Schubert* βασιζόμενος στην αρχή του απαριθμητικού λογισμού του, την αρχή της ειδικής θέσης ή της διατήρησης του αριθμού.

    Μία αυστηρά μαθηματική θεωρία οφείλεται στον *Van Der Waerden* στα τέλη της δεκαετίας του 1930.

16. Πρόβλημα στην τοπολογία των αλγεβρικών καμπυλών και επιφανειών.

    Το πρόβλημα αυτό στην πραγματικότητα χωρίζεται σε δύο επιμέρους προβλήματα. Το πρώτο ζητά να ερευνηθούν οι σχετικές θέσεις των κλάδων των αλγεβρικών καμπυλών βαθμού n, καθώς και των αλγεβρικών επιφανειών. Και το δεύτερο ζητά να καθοριστεί το άνω φράγμα για τον αριθμό των οριακών κύκλων σε πολυωνυμικά διανυσματικά σώματα βαθμού n και να μελετηθούν οι σχετικές θέσεις τους.

    Σχετικά με την τοπολογία των καμπυλών, τα καλύτερα αποτελέσματα οφείλονται στους *Ilya Itenberg* και *Oleg Viro* το 1996. Σχετικά με τους οριακούς κύκλους των ροών που δίνονται από πολυώνυμα, τα καλύτερα μερικά αποτελέσματα οφείλονται στον *Yuri Ilyashenko* στις αρχές του 1990.[13]

17. Παράσταση ορισμένων μορφών ως αθροίσματα τετραγώνων.

    Ο *Hilbert* θέτει το ακόλουθο ερώτημα: Αν κάθε πολυώνυμο πολλών μεταβλητών το οποίο παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές στους πραγματικούς, μπορεί να παρασταθεί σαν άθροισμα τετραγώνων ρητών συναρτήσεων.

[13] Jeremy J. Gray, Η πρόκληση του Χίλμπερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007, σελίς 340.

Λύθηκε για πραγματικά-κλειστά σώματα από τον *Emil Artin* το 1927. Το άνω φράγμα του αριθμού των μορφών που απαιτούνται οφείλεται στον *A. Pfister* το 1967. Η αρνητική λύση στη γενική περίπτωση οφείλεται στον *D.W. Dubois* το 1967.[14]

18. Διαμέριση του χώρου σε ίσα πολύεδρα.

    Το 18ο πρόβλημα του *Hilbert* στην πραγματικότητα είναι χωρισμένο σε τρία ερωτήματα. Το 1910 ο *Ludwig Bieberbach* απέδειξε ότι μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ομάδων πλακοστρώνουν το χώρο των ν διαστάσεων. Το 1928 ο *Karl Reinhardt* έλυσε το πρόβλημα των θεμελιωδών περιοχών στις τρεις διαστάσεις και το 1935 ο *Kurt Hensel* στις δύο. Το τρίτο ερώτημα αφορούσε το πρόβλημα της στοίβαξης των σφαιρών ή άλλων συγκεκριμένων σχημάτων. Λύθηκε στο τέλος του 20ου αιώνα με τη βοήθεια υπολογιστών.

19. Είναι πάντα οι λύσεις των κανονικών προβλημάτων του Λογισμού Μεταβολών αναγκαστικά αναλυτικές;

    Το πρόβλημα 19 λύθηκε για πρώτη φορά από τον *Serge Bernstein* το 1904.

20. Το γενικό πρόβλημα των οριακών τιμών.

    Έχουν όλα τα κανονικά προβλήματα μεταβολής λύση, με την προυπόθεση της ικανοποίησης κάποιων υποθέσεων που σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες (π.χ. ότι οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται σε αυτές τις συνθήκες είναι συνεχείς και έχουν κατά τμήματα μία ή περισσότερες παραγώγους) και με την προυπόθεση ακόμα ότι αν χρειαστεί θα επεκταθεί κατάλληλα η έννοια της λύσης;

21. Απόδειξη της ύπαρξης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που να έχουν προκαθορισμένη μονόδρομικη ομάδα.

    Λύθηκε αρνητικά από τους *Anosov* και *Bolibrukh* το 1994.

22. Ομογενοποιήση των αναλυτικών σχέσεων μέσω αυτομορφικών συναρτήσεων.

    Λύθηκε από τον *Paul Koebe* το 1907 και ανεξάρτητα από τον *Henri Poincaré* το 1907.

23. Περαιτέρω ανάπτυξη των μεθόδων του Λογισμού Μεταβολών.

[14] Jeremy J. Gray, Η πρόκληση του Χίλμπερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007, σελίς 340.

Το 23ο πρόβλημα του *Hilbert* είναι μία παρότρυνση στη μαθηματική κοινότητα να ασχοληθεί με τον Λογισμό Μεταβολών. Ένας κλάδος των μαθηματικών που μέχρι εκείνη τη στιγμή, όπως δηλώνει ο *Hilbert*, δεν είχε τύχει γενικής εκτίμησης.

5.2 *Scottish Book*

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το *Scottish Book*, ένα βιβλίο που περιλαμβάνει μαθηματικά προβλήματα και έχει μεγάλη επιστημονική και ιστορική αξία. Η ιστορική του αξία βασίζεται στο γεγονός ότι πολλά και γνωστά ονόματα μαθηματικών έχουν συνεισφέρει σε αυτό. Ας δούμε την ιστορία του και πώς φτάσαμε να το κρατάμε σήμερα στα χέρια μας.

Όλα ξεκίνησαν στην περίοδο του μεσοπολέμου στο *Lvov*. Η μαθηματική ζωή στο *Lvov* εκείνα τα χρόνια ήταν πολύ έντονη και οι μαθηματικοί, εκτός από τις επίσημες συναντήσεις στους στο πανεπιστήμιο, συνήθιζαν να συναντιούνται ανεπίσημα σε καφετέριες και να ανταλλάσουν απόψεις και προβλήματα. Μία τις καφετέριες που εξελίχθηκε στο στέκι τους ήταν το *Scottish Coffee House* που βρισκόταν κοντά στο πανεπιστήμιο. Αρχικά τα προβλήματα που τους απασχολούσαν τα συζητούσαν προφορικά ή, αρκετές φορές, τα έγραφαν πάνω στα τραπεζάκια του μαγαζιού. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να χάνονται πολύ σημαντικά προβλήματα. Έτσι κάποια μέρα η σύζυγος ενός από τους συχνότερους πελάτες του μαγαζιού, του *Stefan Banach*, αγόρασε ένα μεγάλο τετράδιο και τους το έδωσε για να σημειώνουν εκεί τα προβλήματά τους. Το τετράδιο αυτό το φυλούσε ο ιδιοκτήτης του μαγαζιού και το παρέδιδε στους μαθηματικούς όταν αυτοί το ζητούσαν. Το τετράδιο ονομάστηκε *Scottish Book* λόγο της καφετέριας. Το πρώτο πρόβλημα που συναντάμε μέσα στο *Scottish Book* γράφτηκε στις 17 Ιουλίου του 1935 από τον *Banach*. Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει συνολικά 193 προβλήματα. Τα περισσότερα είναι των *S. Banach*, *S.M. Ulam*, *S. Mazur*, *W. Orlicz*, *O. Schreier*, *H.D. Steinhaus*, *Auerbach*, *J.P. Schauder*, που ήταν και οι συχνότεροι πελάτες του μαγαζιού. Ακόμα συναντάμε προβλήματα των *S. Ruziewicz*, *Lomnicki*, *K. Kuratowski*, *Sternabach*, *M.R. Fréchet*, *Infeld*, *M. Kac*, *W.M. Nikliborc*, *S. Kaczmarz*, *A. Zygmund*, *W. Sierpinski*, *S. Eilenberg*, *J. Von Neumann*, *G. Birkhoff*, *Wavre*, *Ward*, *Stoilow*, *E. Szpilrajn*, *M. Eidelheit*, *K. Borsuk*, *Kampé de Fériet*, *B. Knaster*, *Bogolubow*, *S. Saks*, *Alexandroff*, *S. Sobolev*, *A.F. Fermant*, *Lusternik*. Κάποιοι από αυτούς ήταν περαστικοί από το *Lvov*. Μετά το ξέσπασμα του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου, το *Lvov* κατελήφθη από την Ρωσία, με αποτέλεσμα να συναντάμε Ρωσικά ονόματα από εκεί και έπειτα. Στην πορεία του πολέμου στο *Lvov* μπήκαν οι Γερμανοί οπότε και σταμάτησε η γραφή στο τετράδιο. Το τελευταίο πρόβλημα που συναντάμε είναι στις 31 Μαΐου του 1941 από τον *Hugo Steinhaus*. Όπως επισημαίνει ο *Ulam* στον πρόλογο του βιβλίου, το πρόβλημα αυτό φαίνεται να περιέχει ένα μάλλον μυστικό σύνολο αριθμών στα αποτελέσματά του. Δεν είναι ξεκάθαρο τι απέγινε το βιβλίο αυτό στη διάρκεια του πολέμου και πώς σώθηκε μέχρι σήμερα. Ο *Ulam* αναφέρει ότι το τετράδιο πρέπει να πήρε μαζί του στο *Wroclaw* ο γιος του *Banach* ενώ ο *Steinhaus* έστειλε αντίγραφό του στον *Ulam* μετά το τέλος του πολέμου.

Είναι σημαντικό να αναφερθούμε, έστω εν συντομία, σε κάποιους από τους μαθηματικούς που συναντάμε σε αυτό το βιβλίο.

Stefan Banach[15] (30/3/1892-31/8/1945): Ο *Banach* ήταν ο δημιουργός της Συναρτησιακής Ανάλυσης και ένας από τους ιδρυτές της Σχολής των Μαθηματικών στο *Lvov*. Παρουσίασε ένα χείμαρρο από σημαντικές εργασίες, ανάμεσα τους ήταν το βιβλίο *Théorie des Opérations Linéaires* (1932) που διαπραγματεύεται τους γνωστούς σήμερα χώρους *Banach* και αποδεικνύει πολλά θεμελιώδη θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Η αρχή έγινε το 1920 με τη διατριβή του με τίτλο "*On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations*", που ήταν και η αρχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Ας σημειωθεί ότι ο *Banach* δεν είχε πτυχίο Μαθηματικών και ότι έγινε εξαίρεση για να μπορέσει να παρουσιάσει την διατριβή του. Καθηγητής του στο διδακτορικό ήταν ο *Hugo Steinhaus*, με τον οποίο στη συνέχεια συνεργάστηκε στενά. Οι δύο δημοσίευσαν σημαντικές εργασίες και ήσαν οι πρώτοι εκδότες του *Studia Mathematica* το 1929 ενώ το 1931 εξέδωσαν μία σειρά από Μαθηματικές Μονογραφίες. Ο *Banach* είχε επίσης πολύ μεγάλη συνεισφορά στην ανάπτυξη της Θεωρίας των Τοπολογικών Διανυσματικών Χώρων, στη Θεωρία Μέτρου, στην ολοκλήρωση καθώς και στη Θεωρία Συνόλων. Το 1924 έγινε μέλος της Πολωνικής Ακαδημίας της Μάθησης (*Polish Academy of Learning*). Το 1939 έγινε μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών της Ουκρανίας (*Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*).

Hugo Steinhaus[16] (14/1/1887-25/2/1972): Ο *Hugo Dyonizy Steinhaus* είχε συγγράψει πλήθος εργασιών στην Ανάλυση, στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Στατιστική. Είναι ιδιαίτερα γνωστός για το βιβλίο του *Mathematical Snapshots* που έγραψε το 1937. Έκανε το διδακτορικό του με καθηγητή τον *Hilbert* και η διατριβή του, που παρουσιάστηκε το 1911, είχε τίτλο "*Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips*". Για την διατριβή του αυτή βραβεύτηκε. Ο *Steinhaus* είναι γνωστός και για το θεώρημα *Banach − Steinhaus*, το οποίο ήταν ένα από τα αποτελέσματα της συνεργασίας του με τον *Banach*.

Juliusz Pawel Schauder[17] (21/9/1899-9/1943): Ο *J.P. Schauder* είναι γνωστός για την εργασία του στη Συναρτησιακή Ανάλυση, τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και τη Μαθηματική Φυσική. Μπήκε στο πανεπιστήμιο του *Lvov* το 1919 και πήρε το διδακτορικό του το 1923, με καθηγητή τον *Steinhaus* και θέμα "*The theory of surface measure*". Οι περισσότερες μαθηματικές του εργασίες είναι πά-

[15] J.J. O'Connor and E.F. Robertson,
www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Banach.html

[16] J.J. O'Connor and E.F. Robertson,
www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Steinhaus.html

[17] J.J. O'Connor and E.F. Robertson,
www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Schauder.html

νω στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Ο *Schauder* δημοσίευσε τα θεωρήματα σταθερού σημείου για τους χώρους *Banach* το 1930. Το 1932 βραβεύτηκε με την υποτροφία *Rockefeller*. Ο *Schauder* σε συνεργασία με τον *J. Leray* δημοσίευσαν μία εργασία με τίτλο *Topologie et équations fonctionelles* στο *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* το 1934. Αυτή η εργασία ήταν πολύ σημαντική για την Τοπολογία και τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Για αυτή του την εργασία βραβεύτηκε το 1938 με το *Grand Prix Internationaux de Mathematiques Malaxa*.

Stanislaw Marcin Ulam[18] (3/5/1909-13/6/1984: Ο *S.M. Ulam* πήρε το διδακτορικό του το 1933 με επιβλέποντα καθηγητή τον *Banach*. Ο *Ulam* συμμετείχε στο *Manhattan Project* μετά από πρόσκληση του *von Neumann* και ήταν αυτός που έλυσε το πρόβλημα για το πώς θα γίνει η σχάση της βόμβας υδρογόνου. Επίσης ο *Ulam* επινόησε την μέθοδο *Monte − Carlo*, η οποία προσδιορίζει λύσεις μαθηματικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας μια μέθοδο στατιστικής δειγματοληψίας με τυχαίους αριθμούς. Τα επόμενα χρόνια χρησιμοποιήθηκε για τη υλοποίηση μαθηματικών προγραμμάτων στους υπολογιστές. Ο *Ulam* έδειχνε ιδιαίτερη αγάπη για την Αστρονομία, τη Φυσική και τα Μαθηματικά. Ανέπτυξε έναν αριθμό από μαθηματικά εργαλεία στη Θεωρία Αριθμών, στη Θεωρία Συνόλων, στη Εργοδική Θεωρία και στην Αλγεβρική Τοπολογία.

Stanislaw Mazur[19] (1/1/1905-5/11/1981): Ο *Mazur* παρουσίασε την διατριβή του το 1935 και βραβεύτηκε για αυτή. Ήταν ένας από τους διδακτορικούς μαθητές του *Banach* με τον οποίο στην πορεία συνεργάστηκε ευρύτατα. Ήταν μέλος της Σχολής των Μαθηματικών του *Lvov* και εργάστηκε πολύ πάνω στη Συναρτησιακή Ανάλυση και στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Ασχολήθηκε με τις γεωμετρικές μεθόδους στη γραμμική και μη γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση και στην μελέτη των αλγεβρών του *Banach*. Επίσης ασχολήθηκε με την θεωρία της αθροισιμότητας, τα πεπερασμένα παίγνια και τις περιοδικές συναρτήσεις. Το 1978 πήρε την τιμητική διάκριση του ισόβιου μέλους της Πολωνικής Μαθηματικής Κοινότητας, για την συνεισφορά του στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Το 1980 το πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας τον έχρισε επίτιμο διδάκτορα, αναγνωρίζοντας τον ως εξέχοντα Πολωνό μαθηματικό και ως συνιδρυτή της Πολωνικής Σχολής της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Wladyslaw Orlicz[20] (24/6/1903-9/8/1990): Ο *Wladyslaw Orlicz* ασχολή-

[18] J.J. O'Connor and E.F. Robertson, *www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Ulam.html*

[19] J.J. O'Connor and E.F. Robertson, *www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Mazur.html*

[20] J.J. O'Connor and E.F. Robertson,

θηκε με σημαντικά αποτελέσματα σε πολλούς τομείς των μαθηματικών, όπως οι χώροι συναρτήσεων, οι ορθογώνιες σειρές, η αθροισιμότητα, οι διανυσματικές συναρτήσεις, οι χώροι του *Sack*, οι πραγματικές συναρτήσεις, οι τοπικά κυρτοί μετρικοί χώροι, η Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης και αλλού. Δημοσίευσε συνολικά 171 εργασίες. Αρκέτες από αυτές ήσαν σε συνεργασία με άλλους κορυφαίους μαθηματικούς. Την διδακτορική του εργασία την έγραψε το 1928 με θέμα *Some problems in the theory of orthogonal series*, με καθηγητή τον *E. Zylinski*. Ο *Orlicz* κατέκτησε πολλές τιμητικές διακρίσεις και αρκετά βραβεία. Το 1948 κέρδισε το *Stefan Banach Prize* από την Πολωνική Μαθηματική Εταιρεία. Το 1954 κέρδισε το *Golden Cross of Merit*. Το 1956 εκλέχθηκε μέλος στην Πολωνική Ακαδημία Επιστημών. Το 1958 κέρδισε το *Commander's Cross* του Τάγματος *Polonia Restituta*. Το 1952 και το 1966 το *Individual State Prize*. Το 1973 έγινε μέλος της Πολωνικής Μαθηματικής Εταιρείας και πρόεδρος για τα έτη 1977-1979. Επίσης το 1973 βραβεύτηκε με το *Copernicus Medal* από το Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας και με το *Alfred Jurzykowski Foundation Award*. Το 1983 πήρε το *Medal of the Commission for National Education*. Ο *Orlicz* ήταν εκδότης του περιοδικού *Commentationes Mathematicae* για τα έτη 1955-1990 και εκδότης του *Studia Mathematica* για τα έτη 1962-1990.

5.2.1 Τετραγωνίζοντας το τετράγωνο

Στο *Scottish Book* συναντάμε πληθώρα δύσκολων προβλημάτων της Ανάλυσης, της Τοπολογίας και της Λογικής. Ωστόσο υπάρχουν προβλήματα σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, ακόμη και των διασκεδαστικών μαθηματικών. Θα ασχολήθούμε μόνο με ένα πρόβλημα. Τέθηκε από τον *Ruziewicz* και ανήκει στα διασκεδαστικά μαθηματικά:[21]
Μπορούμε να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων που να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους;

Το πρόβλημα του να χωριστεί ένα τετράγωνο σε μικρότερα τετράγωνα είναι μία απλή διαδικασία στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί και μπορούν να επαναλαμβάνονται κάποια τετράγωνα. Τι γίνεται όμως όταν τα τετράγωνα αυτά θα πρέπει να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους; Μπορεί να χωριστεί ένα τετράγωνο σε πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων που να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους;

Απάντηση δόθηκε από 4 προπτυχιακούς φοιτητές του Πανεπιστημίου του *Cambridge*, τους *R.L. Brooks*, *C.A.B. Smith*, *A.H. Stone* και *W.T. Tutte*, ύστερα από την μελέτη που έκαναν τα έτη 1936-1938. Μια εκτενή αναφορά για το πρόβλημα αυ-

---

www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies/Orlicz.html

[21] *Scottish Book*, Πρόβλημα 59. Το συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να είχε γραφτεί γύρω στο 1935.

τό συναντάμε σε ένα βιβλίο του *Martin Gardner*[22]. Ο *Gardner* παρουσιάζει ένα άρθρο που έγραψε ένας από τους 4 φοιτητές, ο *W.T. Tutte*.

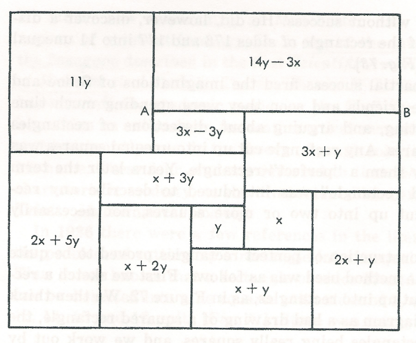
Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή της λύσης θα πρέπει να αναφέρουμε κάποιους ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω. Το τετράγωνο που μπορεί να χωριστεί σε τετράγωνα ονομάζεται *τετραγωνισμένο τετράγωνο.* Το τετράγωνο που μπορεί να χωριστεί σε άνισα μεταξύ τους τετράγωνα ονομάζεται *τέλειο τετράγωνο* ή *τέλεια τετραγωνισμένο τετράγωνο.* Όταν κανένα υποσύνολο των εσωτερικών τετραγώνων δεν σχηματίζει τετράγωνο ή ορθογώνιο, το αρχικό τετράγωνο ονομάζεται *απλό τετράγωνο* στην πρώτη περίπτωση ή *απλό τέλειο τετράγωνο* στη δεύτερη. Όμοια, ένα ορθογώνιο που μπορεί να χωριστεί σε τετράγωνα ονομάζεται *τετραγωνισμένο ορθογώνιο.* Το ορθογώνιο που μπορεί να χωριστεί σε άνισα μεταξύ τους τετράγωνα ονομάζεται *τέλειο ορθογώνιο* ή *τέλεια τετραγωνισμένο ορθογώνιο.* Όταν κανένα υποσύνολο των εσωτερικών τετραγώνων δεν σχηματίζει τετράγωνο ή ορθογώνιο, το αρχικό ορθογώνιο ονομάζεται *απλό ορθογώνιο* στην πρώτη περίπτωση ή *απλό τέλειο ορθογώνιο* στη δεύτερη.

Το πρόβλημα του διαχωρισμού ενός ορθογωνίου σε άνισα τετράγωνα είναι παλαιότερο, καθώς το συναντάμε σε κείμενα πρίν το 1935. Μάλιστα το πρώτο τετραγωνισμένο ορθογώνιο βρέθηκε από τον *Z. Moron* το 1925. Ωστόσο δεν είχε βρεθεί κανένα τετραγωνισμένο τετράγωνο.

Σύμφωνα με τον *W.T. Tutte*, ο πρώτος από την παρέα τους που είδε το πρόβλημα ήταν ο *Stone*, του οποίου διέγειρε την περιέργεια μια δήλωση σε ένα βιβλίο του *Dudeney* που φαίνεται να υπονοούσε ότι ήταν αδύνατο να χωριστεί ένα τετράγωνο σε μικρότερα διαφορετικά μεταξύ τους τετράγωνα. Έτσι αρχικά ο *Stone* προσπάθησε να απόδειξει μόνος του το αδύνατο της κατασκευής, αλλά δεν τα κατάφερε. Μπόρεσε όμως να διαχωρίσει ένα ορθογώνιο με πλευρές 176 και 177 σε 11 άνισα μεταξύ τους τετράγωνα. Αυτό ήταν το έναυσμα των ερευνών του, πάρεα με τους τρεις φίλους του.

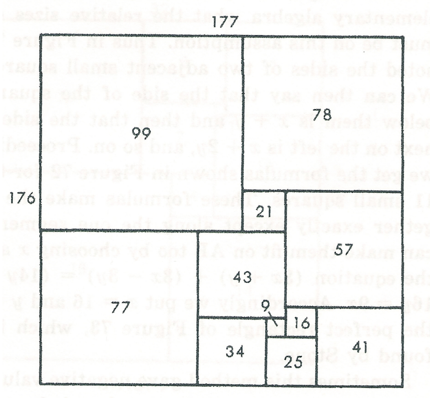
Η κατασκευή τέλειων ορθογωνίων αποδείχθηκε εύκολη. Έφτιαχναν ένα πρόχειρο σχήμα ξεκινώντας από δύο μικρά τεράγωνα με πλευρές x και y και συνέχιζαν φτιάχνοντας το Σχήμα 5.1.

[22] *M. Gardner*, *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, The University of Chicago press, 1987.



Σχήμα 5.1

Έτσι στη συνέχεια, μετρώντας την AB με δύο διαφορετικούς τρόπους θα έπρεπε $(3x - 3y) + (3x + y) = 14y - 3x$ που μας δίνει $16y = 9x$. Αν πάρουμε $x = 16$ και $y = 9$ θα καταλήξουμε στο πρώτο τέλειο ορθογώνιο που έφτιαξε ο $Stone$, Σχήμα 5.2.



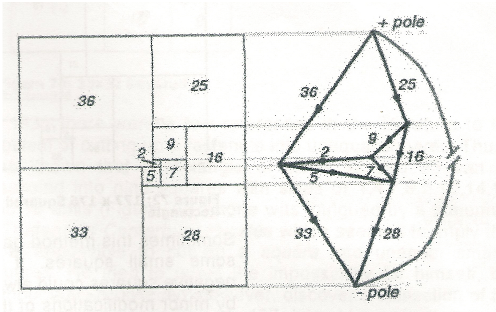
Σχήμα 5.2

Για να υπολογιστούν πιο περίπλοκα σχήματα αρκεί να ξεκινήσουμε με τρία αρχικά τετράγωνα.

Κάποιες φορές η μέθοδος αυτή δεν οδηγεί σε τέλεια ορθογώνια. Οι 4 φοιτητές έφτιαξαν έναν κατάλογο με όλα τα απλά τέλεια ορθογώνια που βρήκαν, ταξινομώντας τα με βάση την τάξη τους που καθοριζόταν από τα συνιστώμενα τετράγωνα, δηλαδή ένα τετραγωνισμένο ορθογώνιο είναι n-οστής τάξης όταν περιλαμβάνει n τετράγωνα. Πίστευαν, πως όσο θα μεγάλωνε ο κατάλογος τους κάπου θα συναντούσαν και ένα τέλειο τετράγωνο αλλά, κάτι τέτοιο δεν συνέβη.

Έτσι στη συνέχεια προσπάθησαν να παρουσιάσουν τα τετραγωνισμένα ορθογώνια με τη βοήθεια διαφόρων ειδών διαγραμμάτων. Αυτό το οποίο τελικά χρησιμοποίησαν ήταν εκείνο που τους πρότεινε ο $Smith$ και του έδωσαν το όνομά του. Μετέτρεψαν στην ουσία το χωρισμό ενός ορθογωνίου σε τετράγωνα σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Ας δούμε αναλυτικά πώς το έκαναν μέσα από τα ακόλουθα σχήματα. Κάθε οριζόντιο τμήμα του σχήματος παριστάνει μία τελεία, ένα τερματικό στο διάγραμμα του $Smith$. Τα τετράγωνα που βρίσκονται στο εσωτερικό του αρχικού τετραγώνου παριστάνονται με μία γραμμή στο σχήμα, ένα σύρμα που ενώνει τα δύο τερματικά στο διάγραμμα του $Smith$. Η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3

Στη συνέχεια φαντάστηκαν ότι από τα σύρματα αυτά, περνάει ρεύμα αριθμητικά ίσο με την πλευρά του αντίστοιχου τετραγώνου. Το κάθε σύρμα παριστάνει μοναδιαία αντίσταση.

Τα τερματικά που αντιστοιχούν στις εξωτερικές οριζόντιες πλευρές του ορθογωνίου ονομάστηκαν *θετικοί* και *αρνητικοί* πόλοι του κυκλώματος. Επειδή τα ηλεκτρικά δίκτυα τα οποία έφτιαξαν ακολουθούν τους νόμους του $Kirchoff$, κατέληξαν στα εξής:

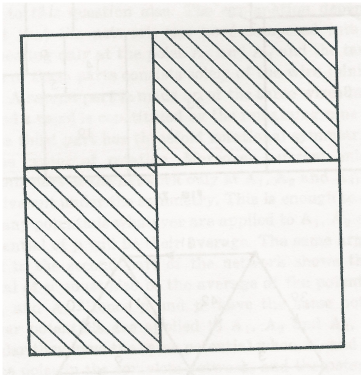
Κάθε οριζόντιο τμήμα αποτελεί την πλευρά κάποιων τετραγώνων. Το άθροισμα των τετραγώνων που βρίσκονται πάνω από το οριζόντιο τμήμα είναι είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων που βρίσκονται κάτω από αυτό.

Επίσης το συνολικό ρεύμα που εισέρχεται στον θετικό πόλο ή φεύγει από τον αρνητικό πόλο είναι ίσο με την οριζόντια πλευρά του ορθογωνίου. Τέλος η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πόλων είναι ίση με την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου.

Με τη βοήθεια του ηλεκτρικού αυτού κυκλώματος και τις παρατηρήσεις που έκαναν, ήταν σε θέση να βρίσκουν και να ταξινομούν πιο εύκολα όλα τα απλά τετραγωνισμένα ορθογώνια. Έτσι απέδειξαν α) ότι δεν υπάρχουν τέλεια τετραγωνισμένα ορθογώνια κάτω από την 9η τάξη, β) υπάρχουν 6 στη 10η τάξη, 22 στην 11η κ.ο.κ. Ωστόσο όμως και πάλι, ενώ ο κατάλογός τους αυξήθηκε, δεν είχαν καταφέρει να προσδιορίσουν τέλειο τετράγωνο.

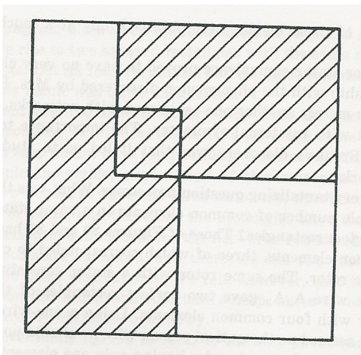
Κάποια στιγμή παρατήρησαν τυχαία, ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά τέλεια τετραγωνισμένα ορθογώνια με ακριβώς τις ίδιες πλευρές και ίδια στοιχεία.

Αν λοιπόν κατάφερναν να βρουν δύο διαφορετικά τετραγωνισμένα ορθογώνια με τις ίδεες πλευρές αλλά κανένα κοινό στοιχείο, θα μπορούσαν να κατασκευάσουν ένα τέλειο τετράγωνο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4

Ύστερα από πολύ εργασία και εργαζόμενοι πάνω σε διαγράμματα $Smith$ κατάφεραν να βρουν τετραγωνισμένα ορθογώνια με τέσσερα μόνο κοινά στοιχεία. Αν μπορούσαν όμως να βρουν με ένα μόνο κοινό στοιχείο θα έπερναν και ένα τέλειο τετράγωνο όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5

Τελικά ο *Smith* και ο *Stone* εργαζόμενοι σε πιο περιπλοκα κυκλώματα από ότι έκαναν μέχρι εκείνη τη στιγμή κατάφεραν να προσδιορίσουν τέλειο τετράγωνο τάξης 69. Ταυτόχρονα ο *Brooks*, εργαζόμενος μόνος του πάνω σε ένα πιο απλό κύκλωμα από ότι έκαναν μέχρι εκείνη τη στιγμή, βρήκε τέλειο τετράγωνο τάξης 39.

Ωστόσο το πρώτο *τέλειο τετράγωνο* το οποίο δημοσιεύτηκε ήταν του *Roland Sprague* το 1939. Ο *Sprague* συνδύασε μεταξύ τους τέλεια ορθογώνια και πήρε τέλειο τετράγωνο τάξης 55. Το μικρότερο *απλό τέλεια τετραγωνισμένο τετράγωνο* ανακαλύφθηκε από τον *A. J. W. Duijvestijn* το 1978, ο οποίος χρησιμοποίησε υπολογιστή. Το τετράγωνο έχει πλευρά 112 και αποτελείται από 21 τετράγωνα.

Το μικρότερο *τέλεια τετραγωνισμένο τετράγωνο* ανακαλύφθηκε από τον *T. H. Willcocks* και έχει 24 τετράγωνα.

Να αναφέρουμε ότι υπάρχουν πολλές παραλλαγές του προβλήματος οι οποίες έχουν να κάνουν με τους περιορισμούς που θα βάλουμε. Η πιο γνωστή παραλλαγή είναι το πάπλωμα της κυρίας *Perkins* (*Mrs. Perkins quilt*).[23]

Αντίστοιχα προβλήματα υπάρχουν και στις τρεις διαστάσεις με κύβους.

[23] M. Gardner, *Mathematical Carnival*, The Mathematical Association of America, 1989, σελίς 139-149.
Ελληνική Μετάφραση: *Το πανηγύρι των μαθηματικών: με απαντήσεις*, Τροχαλία, Αθήνα, 1986.

5.3 *Paul Erdös*

Μετά τον *Hilbert* και την ιστορική ομιλία του στο Παρίσι, το *Scottish Book* και σπουδαία ονόματα που περιλαμβάνει *Banach*, *Ulam*, *Mazur*, *Orlicz*, *Schreier*, *Steinhaus*, *Auerbach*, *Schauder* και άλλους, προχωράμε σε έναν ακόμα ταλαντούχο μαθηματικό τον *Paul Erdös*. Ο *Erdös*, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του εικοστού αιώνα, γεννήθηκε στο Βουκουρέστι το 1913 και πέθανε το 1996 σε ηλικία 83 ετών. Από πολύ νωρίς φάνηκε η ευφυΐα του και οι μαθηματικές του ικανότητες. Σε ηλικία τριών ετών ήταν σε θέση να πολλαπλασιάζει από μνήμης τριψήφιους αριθμούς και να υπολογίζει τα δευτερόλεπτα που είχαν ζήσει φίλοι της οικογένειας. Στα 18 του χρόνια έδωσε μία απλή απόδειξη στο ότι υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός ανάμεσα σε κάθε ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο του ένα και στον διπλάσιο του. Στη συνέχεια το 1949 ο *Erdös* μαζί με τον *Atle Selberg* έδωσαν μια "στοιχειώδη" απόδειξη στο Θεώρημα των πρώτων αριθμών.

Οι τομείς των Μαθηματικών που ενδιέφεραν περισσότερο τον *Erdös* ήταν η στοιχειώδης Θεωρία Αριθμών, η Θεωρία Γραφημάτων, η Συνδυαστική, η Ανάλυση, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν ασχολήθηκε επιτυχώς και με άλλους τομείς. Ο *Erdös* είχε αφιερώσει πραγματικά τη ζωή του στα μαθηματικά και για οτιδήποτε πέρα από αυτά αδιαφορούσε. Δεν είχε οικογένεια, χόμπι ή κάποια μόνιμη κατοικία. Ταξίδευε συνεχώς αναζητώντας μαθηματικά προβλήματα και νέους μαθηματικούς που θα μπορούσαν να βοήθησουν την εξέλιξη των μαθηματικών. Δούλευε με οποιονδήποτε άνθρωπο θα μπορούσε να δουλέψει, έδινε αποδείξεις, έθετε ερωτήματα και άκουγε νέες ιδέες. Πίστευε ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και ότι οι άνθρωποι απλώς τα ανακαλύπτουν. Αν και δεν πίστευε στην ύπαρξη του Θεού, υποστήριζε πως ο Θεος έχει ένα *Βιβλίο* που μέσα εκεί υπάρχουν οι ωραιότερες και κομψότερες αποδείξεις όλων των μαθηματικών θεωρημάτων.

Στην αναζήτηση του λοιπόν αυτή έκανε συνεχώς ταξίδια από το ένα μέρος στο άλλο. Έμενε σε σπίτια συναδέλφων του για να ανταλλάξουν ιδέες και να συνεργαστούν. Έκανε μαθηματικές έρευνες σε περισσότερες από είκοσι πέντε διαφορετικές χώρες. Ο *Erdös* έλυσε και έθεσε περισσότερα προβλήματα από οποιονδήποτε άλλο στην ιστορία των μαθηματικών μέχρι και σήμερα. Η ποσότητα αλλά και η ποιότητα του έργου του είναι πολύ σημαντική. Έγραψε μόνος του και σε συνεργασία με άλλους 1.475 ερευνητικά άρθρα. Είχε κάνει κοινές δημοσιεύσεις με 485 συνεργάτες και ταχυδρομούσε περίπου 1500 επιστολές μαθηματικού περιεχομένου το χρόνο.[24]

Ο *Erdös* δεν έδινε αξία στα χρήματα. Τα λεφτά που έβγαζε τα μοίραζε σε συγγενείς, συναδέλφους και φοιτητές και γενικώς σε ανθρώπους που τα είχαν ανάγκη. Από το 1950 και έπειτα άρχισε να κεντρίζει το ενδιαφέρον των συνεργατών του προ-

[24]Μία λίστα με δημοσιεύσεις του *Erdddotos* υπάρχει στο διαδίκτυο
$http://www.oakland.edu/upload/docs/Erdddotos Number Project/pub07.pdf$

σφέροντας χρηματικά ποσά για τα προβλήματα που αυτός δεν κατέφερε να λύσει. Μέχρι το 1987 το σύνολο των χρηματικών επάθλων είχε φτάσει τα 15.000 δολάρια. Τα χρηματικά έπαθλα κυμαίνονταν από 10 έως και 3.000 δολάρια ανάλογα με την δυσκολία που έκρινε ο *Erdös* ότι είχε το κάθε πρόβλημα. Μετά το θάνατό του, τα χρηματικά έπαθλα που είχαν να κάνουν με προβλήματα της θεωρίας Γραφημάτων ανέλαβαν να πληρώσουν οι Γκραχαμ και Τσουνγκ, ενώ τα έπαθλα για τα υπόλοιπα προβλήματα προσφέρθηκε να τα καλύψει ένας τραπεζίτης, ο Αντριου Μπιλ.

Πάρα πολλά από τα προβλήματα που έθετε έχουν λυθεί πλήρως ή εν μέρει, ωστόσο παραμένουν πάρα πολλές ανοιχτές εικασίες που περιμένουν τη λύση τους. Υπάρχουν πάνω από εκατό επικηρυγμένα προβλήματα θεωρίας Γραφημάτων και το συνολικό ποσο που προσφέρεται για την επίλυση τους φτάνει τα 10.000 δολάρια. [25]

[25] Βλ. σχετικά P. Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion, 1998
Ελληνική μετάφραση: *Ο άνθρωπος που αγαπούσε τους αριθμούς*, Α.Α. Λιβάνη, 2009.
B. Schechter, *My Brain is Open: The Mathematical Journey of Paul Erdös*, Simon and Schuster, 1998.

Κεφάλαιο 6

Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στα προβλήματα του *Hilbert* τα οποία ήταν σταθμός στην εξέλιξη των Μαθηματικών του 20ου αιώνα. Για να λυθούν όμως σπουδαία τέτοια προβλήματα θα πρέπει κανείς να έχει θέσει σωστές βάσεις και να έχει εκπαιδευτεί πρώτα με άλλα πιο απλά προβλήματα. Προβλήματα που βοηθούν στην αύξηση της φαντασίας, της εφευρετικότητας, της επιμονής, της συγκέντρωσης, τη χρήση μαθηματικών τεχνικών και άλλων ταλέντων που χρειάζεται ένας καλός λύτης προβλημάτων είναι και αυτά που απευθύνονται σε μαθητές που προετοιμάζονται για τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Πολλοί διάσημοι μαθηματικοί είχαν λάβει μέρος ως μαθητές σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και διακρίθηκαν.

Η διοργάνωση Μαθηματικών Ολυμπιάδων ξεκινά συνήθως από τα στενά όρια των τοπικών διαγωνισμών, επεκτείνονται στις Εθνικές Ολυμπιάδες και τέλος στις Διεθνείς Ολυμπιάδες.[1]

Η πρώτη Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη το 1959 στο Βουκουρέστι της Ρουμανίας και διοργανώθηκε από τη Ρουμανική Μαθηματική Εταιρία, η οποία έχει μακρά παράδοση στη διεξαγωγή Μαθηματικών διαγωνισμών. Την πρώτη χρονιά πήραν μέρος μόλις 58 μαθητές από 7 χώρες. Σήμερα συμμετέχουν πάνω από 85 χώρες. Η Ελλάδα έλαβε μέρος για πρώτη φορά το 1975.

Για την προετοιμασία των μαθητών αυτών μπορεί να βρει κανείς πληθώρα βιβλίων σε διάφορες γλώσσες αλλά κυρίως Αγγλικά, Ρωσικά, Κινεζικά, Ρουμανικά και Ουγγρικά. Τα βιβλία αυτά περιλαμβάνουν προβλήματα αυξημένης δυσκολίας ή πρωτοτυπίας σε ευρύ φάσμα Μαθηματικών από στοιχειώδη έως Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών, Ανάλυση και άλλους τομείς των μαθηματικών. Στη συνέχεια παραθέτουμε κατά χρονολογική σειρά έναν κατάλογο με κάποια από τα αγγλόφωνα βιβλία προβλημάτων που ξεχωρίσαμε, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και άλλα αξιόλογα. Τα παρακάτω χρησιμοποιούνται ευρέως για την προετοιμασία μαθητών

[1] Έναν πλήρες κατάλογο με διαγωνισμούς και μαθηματικές ολυμπιάδες βρίσκουμε
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_competitions

για τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

- D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, and I.M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Freeman, 1962.
- J Kürschák, G. Hajos, G. Neukomm and J. Surányi, *Hungarian Problem Book I*, Mathematical Association of America, 1967.
- J Kürschák, G. Hajos, G. Neukomm and J. Surányi, *Hungarian Problem Book II*, Mathematical Association of America, 1967.
- R. Honsberger, *Gems I*, Mathematical Association of America, 1973.
- R. Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, Mathematical Association of America, 1975.
- R. Honsberger, *Gems II*, Mathematical Association of America, 1976.
- L. Larson, *Problem Solving Through Problems*, Springer, 1985.
- M.S. Klamkin, *International Mathematical Olympiads*, 1978-1985, *and Forty Supplementary Problems*, Mathematical Association of America, 1986.
- A.M. Yaglom, I.M. Yaglom : *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Dover Publications, 1987.
- P.S. Bullen, D.S. Mitrinovic and M. Vasic, *Means and their Inequalities*, Springer, 1988.
- I.F. Sharygin, *Problems in Plane Geometry*, MIR, 1988.
- M.S. Klamkin, *USA Mathematical Olympiads* 1972-1986 *Problems and Solutions*, Mathematical Association of America, 1989. Υπάρχει ελληνική μετάφραση: Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. 1972-1986, Κάτοπτρο, 1997.
- L.C. Larson, *Problem Solving Through Problems*, Springer, 1985.
- E. Lozansky and C. Rousseau, *Beat it: An Introduction to Mathematical Competitions*, 1988.
- R. Honsberger, *Gems III*, Mathematical Association of America, 1991.

- M.E. Kuczma, 144 *Problems of the Austrian–Polish Mathematics Competition* 1978-1993, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994.
- E.J. Barbeau, M.S. Klamkin and W.O.J. Moser, *Five Hundred Mathematical Challenges*, Mathematical Association of America, 1995.
- E. Lozansky and C. Rousseau, *Winning Solutions*, *Springer – Verlag*, 1996.
- R. Vakil, *A Mathematical Mosaic*: *Patterns and Problem Solving*, Brendan Kelly Publishing Inc., 1996.
- R. Honsberger, *From Erdos to Kiev*: *Problems of Olympiad Caliber*, Mathematical Association of America, 1996.
- R. Honsberger, *In Polya's Footsteps*: *Miscellaneous Problems and Essays*, Mathematical Association of America, 1997.
- T. Andreescu, Z. Feng and Jr.G. Lee, *Mathematical Olympiads* 1995 – 1996 : *Problems and Solutions from Around the World*, The American Mathematics Competitions, 1997. Έκτοτε υπάρχει ετήσια έκδοση.
- A. Engel, *Problem – Solving Strategies*, Springer, 1998.
- A. Liu, *Chinese Mathematical Competitions and Olympiads* 1981-1993, AMT, Canberra, 1998.
- T. Andreescu and R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser Boston, 2000.
- T. Andreescu and Z. Feng, 101 *Problems in Algebra*: *From The Training Of The USA IMO Team*, Australian Mathematics Trust, 2001.
- T. Andreescu and Z. Feng, *USA and International Mathematical Olympiads* 2000, Mathematical Association of America, 2001.
  Είναι μία σειρά βιβλίων που κυκλοφορεί κάθε χρόνο.
- A. Liu, *Hungarian Problem Book III*, Mathematical Association of America, 2001.
- M.E. Kuczma, *International Mathematical Olympiads* 1986-1999, Mathemaatical Association of America, 2003.
- R. Honsberger, *Mathematical Diamonds*, Mathematical Association of America, 2003.

- T. Andreescu and B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser Boston, 2003.
- T. Andreescu and Z. Feng, 102 *Combinatorial Problems: From The Training Of The USA IMO Team*, Birkhäuser Boston, 2003.
- T. Andreescu, D. Andrica : 360 *Problems for Mathematical Contests*, GIL Publishing House, Zalau, 2003.
- T. Andreescu and Z. Feng, 103 *Trigonometry Problems: From The Training Of The USA IMO Team*, Birkhäuser Boston, 2004.
- A. Liu and B. Shawyer, *Problems from Murray Klamkin*, Mathematical Association of America, 2005.
- D. Djukic, V.Z. Jankovic, I. Matic and N. Petrovic, *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads* 1959-2004, Springer, 2005.
- Terence Tao, *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*, Oxford University Press, 2006.
- T. Andreescu, D. Andrica and Z. Feng, 104 *Number Theory Problems: From The Training Of The USA IMO Team*, Birkhäuser Boston, 2006.
- T. Andreescu and R. Gelca, *Putnam and Beyond* Springer, 2007.
- A. Liu and Br. Shawyer, *Problems from Murray Klamkin*, Mathematical Association of America, 2009.

Επίσης παραθέτουμε εδώ έναν μικρό κατάλογο αγγλόφωνων βιβλίων τα οποία έχουν καθιερωθεί για την εκμάθηση της απαραίτητης θεωρίας, πριν από τα βιβλία προβλημάτων που αναφέραμε. Όλα είναι βιβλία για δεύτερη ανάγνωση και απαιτείται μεγάλη εξοικείωση με την συνήθη βιβλιογραφία, πριν το επίπεδο των Μαθηματικών Ολυμπιάδων.

- G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge at the University Pr., 1934.
- G. Polya, *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945.
- D.S. Mitrinovic, *Elementary inequalities*, P. Noordhoff, 1964.
- H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, New York, 1967.

- H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Willey and sons, New York, 1969.
- D.S. Mitrinovic, J. Peraric and A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer, 1980.
- D.S. Mitrinovic, J. Peraric and V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Springer, 1989.
- C.G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2000.
- V. Cirtoaje, *Algebraic Inequalities. Old and New Method*, Gil Publishing House, 2006.

Προβλήματα

Αν και δεν μπορούμε να καλύψουμε μέσα από λίγα παραδείγματα τα υπέροχα προβλήματα που μπορεί να συναντήσει κανείς στην προαναφερθείσα βιβλιογραφία, ωστόσο θα παραθέσουμε κάποια.

Πρόβλημα 6.0.1. *Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *με ακέραιους συντελεστές έχει περιττές τιμές για* $x = 0$ *και* $x = 1$, *τότε η εξίσωση* $P(x) = 0$ *δεν μπορεί να έχει ακέραιες ρίζες.*[2]

Απόδειξη

Έστω a και b ακέραιοι αριθμοί με $a \neq b$, της ίδιας αρτιότητας.

Έχουμε $P(a) - P(b) = a_0(a^n - b^n) + a_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(a - b)$
Όμως $a - b|P(a) - P(b)$. Ο $a - b$ είναι άρτιος, άρα $P(a) - P(b)$ άρτιος.
Αν ο a είναι άρτιος, τότε από το προηγούμενο με $b = 0$ έπεται ότι $P(a) - P(0)$ άρτιος. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι το $P(0)$ είναι περιττός, άρα θα πρέπει και το $P(a)$ να είναι περιττός. Επομένως $P(a) \neq 0$.
Αν ο a είναι περιττός, τότε από το παραπάνω με $b = 1$ έπεται ότι $P(a) - P(1)$ άρτιος. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι το $P(1)$ είναι περιττός, άρα θα πρέπει και το $P(a)$ να είναι περιττός. Επομένως $P(a) \neq 0$.

Πρόβλημα 6.0.2. *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, *τέτοιο ώστε* $P(0), P(1), P(2), \ldots$ *να είναι όλοι πρώτοι αριθμοί.*[3]

Απόδειξη

Έστω a ένας συγκεκριμένος φυσικός αριθμός με $P(a) = p$, όπου p πρώτος.
Έχουμε $P(a+kp) - P(a) = a_0((a+kp)^n - a^n) + \ldots + a_{n-1}((a+kp) - a)$, για κάθε k ακέραιο.
Το $kp|P(a + kp) - P(a)$, κατά συνέπεια $p|P(a + kp) - P(a) = P(a + kp) - p$. Αν βρούμε έστω και μία από τις τιμές $P(a + kp)$, $k = 0, 1, \ldots$ διαφορετική από $\pm p$ τελειώσαμε. Πράγματι, υπάρχει τιμή των $P(a + kp)$ που να είναι διαφορετική του $\pm p$. Το πολυώνυμο είναι n-οστού βαθμού, άρα μπορεί να πάρει την τιμή π το πολύ n φορές. Όμοια και την τιμή -π το πολύ n φορές. Επομένως ανάμεσα στις $2n + 1$ τιμές της $P(a + kp)$, όπου $k = 0, 1, \ldots, 2n$ υπάρχει τουλάχιστον μία που να είναι διαφορετική του $\pm p$.

[2] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, and I.M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Freeman, 1962, Πρόβλημα 214, σελίς 47.

[3] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, and I.M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Freeman, 1962, Πρόβλημα 219, σελίς 48.

Το πρόβλημα αυτό απέδειξε πρώτος ο $Euler$. Ο ίδιος κατασκεύασε πολυώνυμα των οποίων οι τιμές για πολλούς διαδοχικούς ακεραίους είναι πρώτοι. Ένα τέτοιο είναι το $x^2 + x + 41$, το οποίο δίνει διακεκριμένους πρώτους για τους διαδοχικούς ακεραίους 0 έως 49 ($Euler$ 1772).

Πρόβλημα 6.0.3. *Να βρεθεί το ελάχιστο του $a^2 + b^2$, αν η εξίσωση $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.*[4]

Απόδειξη

Το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$.
Θέτοντας λοιπόν $y = x + \frac{1}{x}$ παίρνουμε $y^2 - 2 + ay + b = 0$.

Όμως το $y \in \mathbb{R}$ άρα με τη βοήθεια της ανισότητας $Cauchy - Schwarz$ έχουμε $(2 - y^2)^2 = (ay + b)^2 \leq (a^2 + b^2)(y^2 + 1)$
ή $\frac{(2 - y^2)^2}{y^2 + 1} \leq (a^2 + b^2)$,
με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a = \lambda y$, $b = \lambda$ και $\lambda \neq 0$, δηλαδή, $y = \frac{a}{b}$.
Θέτοντας $z = y^2$ παρατηρούμε ότι αφού $y = x + \frac{1}{x}$, τότε $z = y^2 \geq 4$.
Η $F(z) = \frac{(2 - z)^2}{z + 1} \leq (a^2 + b^2)$ είναι γνησίως αύξουσα για $z \geq 4$, συνεπώς $F(z) \geq F(4) = \frac{4}{5}$. Άρα $(a^2 + b^2) \geq \frac{4}{5}$.
Επίσης για $a = -\frac{4}{5}$ και $b = -\frac{2}{5}$ έχουμε $(a^2 + b^2) = \frac{4}{5}$. Άρα και $y = 2$ και $\frac{a}{b} = 2$.
Για αυτές τις τιμές των a, b, y η $y^2 - 2 + ay + b = 0$ ικανοποιείται. Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του $a^2 + b^2$ είναι το $\frac{4}{5}$.

Πρόβλημα 6.0.4. *Να βρεθούν όλες οι θετικές λύσεις του συστήματος*
$x_1 + \frac{1}{x_2} = 4, x_2 + \frac{1}{x_3} = 1, \ldots, x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4, x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1.$[5]

Απόδειξη

Με τη βοήθεια της ανισότητας $x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}$ με ισότητα αν και μόνον αν $x = \frac{1}{y}$ έχουμε

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, x_2 + \frac{1}{x_3} \geq 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}, \ldots, x_{99} + \frac{1}{x_{100}} \geq 2\sqrt{\frac{x_{99}}{x_{100}}}, x_{100} + \frac{1}{x_1} \geq 2\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}}.$$

[4] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998, Πρόβλημα 75, σελίς 258.
[5] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998, Πρόβλημα 78, σελίς 185.

Πολλαπλασιάζοντας όλες τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$$(x_1+\frac{1}{x_2})(x_2+\frac{1}{x_3})\cdot\ldots\cdot(x_{99}+\frac{1}{x_{100}})(x_{100}+\frac{1}{x_1}) \geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{\frac{x_{99}}{x_{100}}}2\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}} = 2^{100}.$$

Όμως το πρώτο μέλος από τις εξισώσεις της υπόθεσης ικανοποιεί

$$(x_1 + \frac{1}{x_2})(x_2 + \frac{1}{x_3}) \cdot \ldots \cdot (x_{99} + \frac{1}{x_{100}})(x_{100} + \frac{1}{x_1}) = 4^{50} = 2^{100}.$$

Οπότε ισχύουν οι ισότητες

$$x_1 = \frac{1}{x_2}, x_2 = \frac{1}{x_3}, \ldots, x_{99} = \frac{1}{x_{100}}, x_{100} = \frac{1}{x_1}.$$

Σε συνδυασμό με τις αρχικές εξισώσεις παίρνουμε

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_{99} = 2, x_{100} = \frac{1}{2}.$$

Κεφάλαιο 7

Μαθηματικά Περιοδικά

Εκτός από βιβλία που περιλαμβάνουν προβλήματα υπάρχουν και δεκάδες περιοδικά τα οποία είτε έχουν τμήμα με προτεινόμενα προβλήματα, είτε η ύλη τους είναι αποκλειστικά προβλήματα. Στα Μαθηματικά περιοδικά συναντάμε προβλήματα όλων των κατηγοριών, από πολύ απλές σχολικές ασκήσεις έως και ανώτερα ή ανοικτά προβλήματα σε όλους τους τομείς όπως Άλγεβρα, Ανάλυση, Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών, Πιθανότητες, κ.α. Ανάμεσά τους βρίσκουμε και προβλήματα των διασκεδαστικών μαθηματικών, γρίφους, προβλήματα λογικής κ.α.

Ένα κατάλογο με περιοδικά βρίσκουμε στο *Index to Mathematical Problems* 1980-1984 του *Stanley Rabinowitz*.[1] Ο *Rabinowitz* είναι μαθηματικός με διδακτορικό στην Ανάλυση και τη Θεωρία Αριθμών αλλά ασχολήθηκε επαγγελματικά με τους υπολογιστές και με την δημιουργία και τη λύση μαθηματικών προβλημάτων. Συνεργάστηκε με πολλά μαθηματικά περιοδικά ανά τον κόσμο. Αυτό που τον οδήγησε να γράψει το *Index* ήταν η μεγάλη δυσκολία που υπήρχε στην αναζήτηση ενός προβλήματος στα μαθηματικά περιοδικά. Παραθέτουμε τον κατάλογο με τα μαθηματικά περιοδικά σε δυτικοευρωπαϊκές γλώσσες.

- *Abacus* (*New York*)
  (1983-1988) Εκδόσεις: Springer – Verlag, New York,USA.

- *Aequationes Mathematicae*
  Πρώτη έκδοση το 1968. Η στήλη των προβλημάτων καταργήθηκε το 1988. Εκδόσεις: University of Waterloo, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland.

- *Algorithmica*
  Πρώτη έκδοση το 1986. Εκδόσεις: Springer – Verlag, New York, Inc., USA.

- *Alpha*
  Πρώτη έκδοση το 1967. Εκδόσεις: Verlag Volk und Wissen, East Germany.

[1] Stanley Rabinowitz, *Index to Mathematical Problems* 1980-1984, 1992, σελίδες 439-462.

- *The AMATYC Review*
  Πρώτη έκδοση το 1979. Εκδόσεις: American Mathematical Association of Two – Year College, Garden City, NY, USA.
- *The American Mathematical Monthly.*
  Πρώτη έκδοση το 1894. Εκδόσεις: The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA.
- *The Analyst*
  (1874-1883). Εκδόσεις: J.E. Hendricks, Des Moines, lowa, USA.
- *Archief, Uitgegeven door het Wiskundig Genootschap*
  (1870-1874). Εκδόσεις: Swets and Zeitlinger N.V. Amsterdam, The Netherlands.
- *Archimede*
  Πρώτη έκδοση το 1949. Εκδόσεις: Felice Le Monnier, Florence, Italy.
- *Archimedes*
  (1948-1972). Εκδόσεις: Josef Hubbel Regensburg.
- *Archimedes : Tijdschrift voor Lagere Wiskunde*
  (1892-1898). Εκδόσεις: W.J. Thieme and Cie, Zutphen.
- *The Australian Mathematics Teacher*
  Πρώτη έκδοση το 1945. Εκδόσεις: Australian Association of Mathematics Teachers, Kenmore Hills, Queensland.
- *The Bent of Tau Beta Pi*
  Εκδόσεις: The Tau Beta Pi Association Knoxville, TN, USA.
- *De Beoefenaar der Wiskunde*
  (1865-1870). Εκδόσεις: S.E. van Nooten, Schoonhoven.
- *Bit*
  Πρώτη έκδοση το 1961. Εκδόσεις: Copenhagen.
- *Boletín Matemático*
  (1928-1967). Εκδόσεις: Buenos Aires, Argentina.
- *Boletín Matemático Elemental*
  (1930-1934).
- *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.)*
  Πρώτη έκδοση το 1894. Η στήλη με τα προβλήματα δημιουργήθηκε το 1954 και καταργήθηκε το 1965. Εκδόσεις: American Mathematical Society, Providence, RI, USA.

- *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*
Εκδόσεις: European Association for Theoretical Computer Science, Leiden, The Netherlands.

- *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*
Πρώτη έκδοση το 1965. Εκδόσεις: The Institute of Mathematics and its Applications, Essex, England.

- *Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*, *series* 1
Η στήλη με τα προβλήματα καταργήθηκε το 1978.
Εκδόσεις: Malaysian Mathematical Society, Malaysia.

- *C I S M Journal*
Πρώτη έκδοση το 1988. Εκδόσεις: The Canadian Institute of Surveying and Mapping, Ottawa, Canada.

- *Canadian Mathematical Bulletin*
Πρώτη έκδοση 1958. Η στήλη με τα προβλήματα καταργήθηκε το 1983. Εκδόσεις: Canadian Mathematical Society, Ottawa, Canada.

- *Casopis Mathematicky a Fysiky*
Η στήλη των προβλημάτων ξεκίνησε το 1872 και καταργήθηκε το 1919. Εκδόσεις: Academia Praha.

- *Christiaan Huygens Mathematisch Tijdschrift*
(1921-1940). Εκδόσεις: P. Noordhoff NV, Groningen, The Netherlands.

- *CMS Notes*
Πρώτη έκδοση το 1969. Εκδόσεις: Canadian Mathematical Society Ottawa, Ontario, Canada.

- *The College Mathematics Journal*
Πρώτη έκδοση το 1984. Εκδόσεις: The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA.

- *Colloquium Mathematicum*
Πρώτη έκδοση το 1947. Εκδόσεις: Polska Akademia Nauk, Warsaw, Poland.

- *Crux Mathematicorum*
Πρώτη έκδοση το 1978. Εκδόσεις: Canadian Mathematical Society, Ottawa, Ontario, Canada.

- *Delta* (*Madison*)
(1968-1976). Εκδόσεις: University of Wisconsin – Waukesha Mathematical Society, Madison, WI, USA.

- *Delta (Warsaw)*
  Πρώτη έκδοση το 1974. Εκδόσεις: Warsaw, Poland.

- *Discrete Mathematics*
  Πρώτη έκδοση το 1971. Η στήλη με τα προβλήματα ξεκίνησε το 1981 και καταργήθηκε το 1989. Εκδόσεις: North Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands.

- *Education in Mathematics and Informatics*
  Εκδόσεις:Ministry of Education, Union of Bulgarian Teachers, Sofia, Bulgaria.

- *L'Education Mathematique*
  (1898-1980). Εκδόσεις: Librairie Vuibert, Griess and Vuibert, Paris, France.

- *Elemente der Mathematik*
  Πρώτη έκδοση το 1946. Εκδόσεις: Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland.

- *L'Enseignement Mathématique, series* 1.
  Πρώτη έκδοση το 1899 και τελευταία το 1954. Εκδόσεις: Commission internationale de l'Enseignement Mathématique, Geneva, Switzerland.

- *L'Enseignement Mathématique, series* 2.
  Πρώτη έκδοση το 1955. Εκδόσεις: Commission internationale de l'Enseignement Mathématique, Geneva, Switzerland.

- *Esercitazioni Matematiche*
  (1923-1938). Εκδόσεις: Circolo Matematico di Catania, Palermo, Italy.

- *Euclides*
  Πρώτη έκδοση το 1925. Η στήλη των προβλημάτων ξεκίνησε το 1959. Εκδόσεις: Wolters – Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

- *Eureka (Algonquin)*
  (1975-1977). Εκδόσεις: Algonquin College, Canada.

- *Eureka (Cambridge)*
  Πρώτη έκδοση το 1939. Η στήλη με τα προβλήματα ξεκίνησε το 1949. Εκδόσεις: Cambridge University Mathematical Society, Cambridge, England.

- *Fairy Chess Review*
  Η πρώτη έκδοση του περιοδικού έγινε το 1930. Το περιοδικό δεν εκδίδεται πλέον. Εκδόσεις: The British Chess Problem Society.

- *The Fibonacci Quarterly*
  Πρώτη έκδοση το 1963. Εκδόσεις: The Fibonacci Association, Santa Clara, CA, USA.

- *Fun with Mathematics*
  Εκδόσεις: Ontario Institute for Studies in Education, Toronto, Ontario, Canada.

- *Function*
  Πρώτη έκδοση το 1977. Εκδόσεις: Monash University, Clayton, Victoria, Australia.

- *Fundamental Mathematicae*
  Πρώτη έκδοση το 1920. Εκδόσεις: Polska Akademia Nauk, Warsaw, Poland.

- *Gaceta Matemática*
  Πρώτη έκδοση το 1949. Εκδόσεις: Instituto Jorge Juan de Mathematicas, Madrid, Spain.

- *The Games and Puzzles Journal*
  Τελευταίο τεύχος εκδόθηκε το 1989. Εκδόσεις: G.P. Jelliss, St. Leonardos on Sea, U.K.

- *Gazeta Matematica*
  Πρώτη έκδοση το 1974. Εκδόσεις: Societatea de Stinte Matematice din Republica, Socialista Romania, Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica, series A*
  (1964-1974). Εκδόσεις: Άγνωστες, Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica, series B*
  (1964-1974). Εκδόσεις: Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica si Fizica, series* 1
  (1895-1949). Εκδόσεις: Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica si Fizica, series* 2
  (1952-1954). Εκδόσεις: Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica si Fizica, series A*
  (1953-1963). Εκδόσεις: Editura Tehnica, Bucharest, Romania.

- *Gazeta Matematica si Fizica, series B*
  (1954-1963). Εκδόσεις: Editura Tehnica, Bucharest, Romania.

- *Gentleman's Diary or The Mathematical Repository*
(1741-1800). Εκδόσεις: London, England.

- *Glasnik Matematicki*
Πρώτη έκδοση το 1966. Η στήλη των προβλημάτων καταργήθηκε το 1975. Εκδόσεις: Societas Mathematicorum et Physicorum Croatiiae, Zagreb Yugoslavia.

- *Glasnik Matematicko – Fizicki i Astronomski*
(1946-1965). Εκδόσεις: Societas Mathematicorum et Physicorum Croatiiae, Zagreb Yugoslavia.

- *Graphs and Combinatorics*
Πρώτη έκδοση το 1985. Εκδόσεις: Springer – Verlag, New York, USA.

- *Indiana School Mathematics Journal*
(1965-1978). Εκδόσεις: Indiana Council of Teachers of Mathematics, Lafayette, IN, USA.

- *Institute of Mathematical Statistics Bulletin*
Πρώτη έκδοση το 1972. Η στήλη με τα προβλήματα ξεκίνησε το 1989. Εκδόσεις: Institute of Mathematical Statistics Bulletin Hayward, CA, USA.

- *L'Intermédiaire des Mathématiciens, series* 1
(1898-1920). Εκδόσεις: Gauthier – Villars et Fils, Paris, France.

- *L'Intermédiaire des Mathématiciens, series* 2
(1922-1925). Εκδόσεις: Gauthier – Villars et Fils, Paris, France.

- *Irish Mathematical Society Bulletin*
Εκδόσεις: Irish Mathematical Society, Galway, Ireland.

- *It's a Math Math World*
Πρώτη έκδοση το 1976. Εκδόσεις: Mathematical Association of Western Australia, Western Australia.

- *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereinigung*
Πρώτη έκδοση το 1890. Η στήλη με τα προβλήματα ξεκίνησε το 1922 και καταργήθηκε το 1939. Εκδόσεις: Teubner, Stuttgart, Stuttgart, Germany.

- *Le Jeune Archimède*
Εκδόσεις: Fédération Française des Jeux Mathématiques, Paris, France.

- *Jouer Jeux Mathématiques*
Πρώτη έκδοση το 1991. Εκδόσεις: Fédération Française des Jeux Mathématiques, Paris, France.

- *Journal de Mathématiques Élémentaires*
(1877-1980). Εκδόσεις: Librairie Vuibert, Paris, France.

- *Journal of Algorithms*
Πρώτη έκδοση το 1980. Εκδόσεις: Academic Press, New York, USA.

- *Journal of Recreational Mathematics*
Πρώτη έκδοση το 1968. Εκδόσεις: Baywood Publishing Company, Inc., Amityville, NY, USA.

- *Journal of the Indian Mathematical Club*
(1909-1910). Εκδόσεις: Indian Mathematical Club, Madras, India.

- *Journal of the Indian Mathematical Society*
(1911-1932). Εκδόσεις: Indian Mathematical Club, Madras, India.

- *Középiskolai Matematikai Lapok*
(1894-1914). Εκδόσεις: Budapest, Hungary.

- *Középiskolai Matematikai Lapok* (*KöMaL*), *N.S.*
Πρώτη έκδοση το 1947. Εκδόσεις: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Hungary.

- *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*
(1925-1939). Εκδόσεις: Budapest, Hungary.

- *Kvant*
Πρώτη έκδοση το 1970. Εκδόσεις: Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

- *Ladies' Dairy*
(1704-1840).

- *The Lady's and Gentleman's Diary*

- *The Leeds Correspondent*
(1814-1823) Εκδόσεις: James Nichols, Leeds, England.

- *Leybourn's Mathematical Repository*, *new series*
(1806-1835) Εκδόσεις: W. Glendinning, London, England.

- *Matemática Elemental*, *series* 1
(1922-1924) Εκδόσεις: Sociedad Matemática Espanõla, Madrid, Spain.

- *Matemática Elemental*, *series* 2
  Το τελευταίο τέύχος εκδόθηκε το 1930. Εκδόσεις: Sociedad Matemática Espanõla, Madrid, Spain.

- *Matemática Elemental*, *series* 3
  (1931-1939) Εκδόσεις: Sociedad Matemática Espanõla, Madrid, Spain.

- *Matemática Elemental*, *series* 4
  (1941-1948) Εκδόσεις: Sociedad Matemática Espanõla, Madrid, Spain.

- *La Matematica Elementare*
  (1931-1948) Εκδόσεις: Rome, Italy.

- *Matematicki Vesnik*
  Πρώτη έκδοση το 1949. Εκδόσεις: Belgrade, Yugoslavia.

- *Matematicko – Fizicki Lijt*
  Η πρώτη έκδοση έγινε το 1950. Το περιοδικό δεν εκδίδεται πλέον. Εκδόσεις: Zagreb.

- *Matematika*
  Εκδόσεις: Sofia, Bulgaria.

- *Matematika i Fizika*
  (1958-1975) Εκδόσεις: Bulgaria.

- *A Matematika Tanitása*
  Πρώτη έκδοση το 1953. Εκδόσεις: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Hungary.

- *Matematika v Shkole*
  Πρώτη έκδοση το 1934. Η στήλη με τα προβλήματα ξεκίνησε το 1948. Εκδόσεις: Izdatel'stvo Pedagogica, Russia.

- *Matematikai es Physikai Lapok*
  (1892-1943) Εκδόσεις: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Hungary.

- *Matematikai Lapok*
  Πρώτη έκδοση το 1949. Εκδόσεις: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Hungary.

- *Matematisk Tidsskrift*, *series* 4
  (1877-1882) Εκδόσεις: Swets and Zeilinger, Copenhagen, Amsterdam.

- *Matematisk Tidsskrift, series* 5
(1883-1888) Εκδόσεις: Swets and Zeilinger, *C*openhagen, Amsterdam.

- *Matematisk Tidsskrift, series A*
(1919-1952) Εκδόσεις: Matematisk forening, Copenhagen, Amsterdam.

- *Matematyka*
Πρώτη έκδοση το 1948. Εκδόσεις: Ministerstwo Edukacji Nardowej, Warsaw, Poland.

- *Mathe – Plus*
Το τελευταίο τεύχος κυκλοφόρησε το 1987.

- *Mathematica Scandinavica*
Πρώτη έκδοση το 1953. Η στήλη με τα προβλήματα έχει καταργηθεί. Εκδόσεις: Copenhagen.

- *Mathematical Exercises*
(1750-1753) Εκδόσεις: London, England.

- *The Mathematical Gazette*
Πρώτη έκδοση το 1894. Η στήλη με τα προβλήματα δημιουργήθηκε το 1981. Εκδόσεις: The Mathematical Association, London, United Kingdom.

- *The Mathematical Intelligencer*
Πρώτη έκδοση το 1978. Εκδόσεις: Springer – Verlag, New York, USA.

- *The Mathematical Log*
Πρώη έκδοση το 1957. Εκδόσεις: Mu Alpha Theta, Norman, OK, USA.

- *The Mathematical Magazine*
Η πρώτη έκδοση έγινε το 1882. Το περιοδικό δεν εκδίδεται πλέον. Εκδόσεις: Artemas Martin, Washington, DC, USA.

- *Mathematical Mayhem*
Πρώτη έκδοση το 1989. Εκδόσεις: Ontario Institute for Studies in Education, Toronto, Canada.

- *The Mathematical Monthly*
(1858-1861) Εκδόσεις: Trübner and Co., London, England.

- *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times, series* 1
(1863-1901) Εκδόσεις: C.F. Hodgson and Son, London, England.

- *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, *series* 2
(1902-1916) Εκδόσεις: Francis Hodgson, London, England.

- *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, *series* 3
(1916-1918) Εκδόσεις: Hodgson, London, England.

- *Mathematical Spectrum*
Πρώτη έκδοση το 1968. Εκδόσεις: Applied Probability Trust, Sheffield, England.

- *The Mathematical Visitor*
(1877-1894) Εκδόσεις: Artemas Martin, Erie, PA, USA.

- *Mathematics and Computer Education*
Πρώτη έκδοση το 1982. Εκδόσεις: The MATYC Journal, Inc. Old Bethpage, NY, USA.

- *Mathematics and Informatics*
Πρώτη έκδοση το 1991. Εκδόσεις: Science, Culture and Technology Publishing, Singapore.

- *Mathematics in School*
Πρώτη έκδοση το 1972. Εκδόσεις: The Mathematical Association Leicester, England.

- *Mathematics Magazine*
Πρώτη έκδοση το 1947. Εκδόσεις: The Mathematical Association of America, Washington DC, USA.

- *Mathematics Newsletter*
(1926-1934) Η στήλη με τα προβλήματα δημιουργήθηκε το 1929. Εκδόσεις: Baton Rouge, LA, USA.

- *Mathematics Student Bulletin*
(1981-1987) Εκδόσεις: University Of Waterloo.

- *Mathematics Student Journal*
(1954-1973) Εκδόσεις: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA.

- *Mathematics Student (Reston)*
(1973-1981) Εκδόσεις: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA.

- *Mathematics Students' Gazette*
(1966-1988) Εκδόσεις: Mathematical Association of Western Australia, Western Australia.

- *Mathematics Teacher*
Πρώτη έκδοση το 1908. Εκδόσεις: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA.

- *Mathematik in der Schule*
Πρώτη έκδοση το 1963. Εκδόσεις: Verlag Volk und Wissen, Germany.

- *Mathematische Semesterberichte*
Πρώτη έκδοση το 1981. Εκδόσεις :Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, Germany.

- *Mathesis*
(1881-1962) Εκδόσεις: Gauthier – Villars, Belgium.

- *Mathesis Polska*
(1926-1938)

- *The MATYC Journal*
(1967-1982) Εκδόσεις: Nassau Community College, Garden City, NY, USA.

- *Menemui Matematik*
Πρώτη έκδοση το 1979. Εκδόσεις: Malaysian Mathematical Society, Kuala Lumpur, Malaysia.

- *Missouri Journal of Mathematical Sciences*
Πρώτη έκδοση το 1989. Εκδόσεις: Central Missouri State University, Warrensburg, MO, USA.

- *National Mathematics Magazine*
(1934-1945) Εκδόσεις: S.T. Saunders, Mobile, AL, USA.

- *New Scientist*
Εκδόσεις: IPC Magazines, Ltd., W. Sussex, England.

- *New York State Mathematics Teachers' Journal*
Πρώτη έκδοση το 1950. Εκδόσεις: The Association of Mathematics Teachers of New York State, New York, USA.

- *Newsletter of the New Zealand Mathematical Society*
Εκδόσεις: The New Zealand Mathematical Society, Wellington, New Zealand.

- *Nieuw Archief voor Wiskunde, series* 1
(1875-1893) Εκδόσεις: Dutch Mathematical Society, Amsterdam,The Netherlands.

- *Nieuw Archief voor Wiskunde, series* 2
(1895-1951) Εκδόσεις: Dutch Mathematical Society, Amsterdam, The Netherlands.

- *Nieuw Archief voor Wiskunde, series* 3
(1953-1982) Εκδόσεις: Dutch Mathematical Society, Amsterdam,The Netherlands.

- *Nieuw Archief voor Wiskunde, series* 4
Πρώτη έκδοση το 1983. Εκδόσεις: Dutch Mathematical Society, Amsterdam, The Netherlands.

- *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*
(1913-1988) Εκδόσεις: Wolters – Noordhoff Groningen, The Netherlands.

- *Nordisk Matematisk Tidskriff*
(1953-1978) Εκδόσεις: Dansk Matematisk forening, Oslo, Norway.

- *NORMAT : Nordisk Matematisk Tidskriff*
Πρώτη έκδοση το 1979. Εκδόσεις: Norwegian University Press, Oslo, Norway.

- *The Northumbrian Mirror*
Πρώτη έκδοση το 1873. Το περιοδικό δεν εκδίδεται πλέον. Εκδόσεις: Alnwick, England.

- *Notices of the American Mathematical Society*
Πρώτη έκδοση το 1954. Η στήλη με τα προβλήματα δημιουργήθηκε το 1972. Εκδόσεις: American Mathematical Society, Providence, RI, USA.

- *Nouvelles Annales de Mathématiques*
(1842-1927) Εκδόσεις: Carilian – Gury et Vor. Dalmont, Paris, France.

- *Nyt Tidsskrift for Matematisk, series A*
(1890-1918) Εκδόσεις: Amsterdam, The Netherlands.

- *Obuchenieto po Matematika*
Πρώτη έκδοση το 1976. Εκδόσεις: Sofia, Bulgaria.

- *Ontario Mathematics Gazette*
Πρώτη έκδοση το 1962. Εκδόσεις: Ontario Association for Mathematics Education, Ontario, Canada.

- *Ontario Secondary School Mathematics Bulletin*
(1965-1986) Εκδόσεις: University of Waterloo, Waterloo, Ontario.

- *Order*
  Πρώτη έκδοση το 1984. Εκδόσεις: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.

- *Parabola*
  Εκδόσεις: University of New South Wales.

- *The Pentagon*
  Πρώτη έκδοση το 1940. Εκδόσεις: Kappa Mu Epsilon, United States.

- *Periodica Mathematica Hungarica*
  Πρώτη έκδοση το 1970. Εκδόσεις: János Bolyai Mathematical Society, Budapest, Hungary.

- *Periodico di Matematiche per L'Insegnamento Secondario*
  (1886-1918) Εκδόσεις: Zanichelli, Rome, Italy.

- *Periodico di Matematiche*
  Πρώτη έκδοση το 1921. Εκδόσεις: Rome, Italy.

- *Pi Mu Epsilon Journal*
  Πρώτη έκδοση το 1949. Εκδόσεις: Pi Mu Epsilon Fraternity, De Pere, WI, USA.

- *Praxis der Mathematik*
  Πρώτη έκδοση το 1959. Εκδόσεις: Aulis – Verlag Deubner und Co., West Germany.

- *Progress Report of the Indian Mathematical Club*
  (1908-1908) Εκδόσεις: S. Murty and Co., Madras, India.

- *Qarch*
  Πρώτη έκδοση το 1980. Εκδόσεις: Cambridge University Mathematical Society, Cambridge, England.

- *Quantum*
  Πρώτη έκδοση το 1989. Εκδόσεις: National Science Teachers Association, New York, USA.

- *Recreational Mathematics Magazine*
  (1961-1964) Εκδόσεις: Joseph S. Madachy, Kent, Ohio, USA.

- *Revista Matematica si Fizica*
  (1950-1954) Εκδόσεις: Editura Tehnica, Bucharest, Romania.

- *Revue de Mathématiques Spéciales*
  Πρώτη έκδοση το 1890. Εκδόσεις: Librairie Vuibert, Paris, France.

- *Rozhledy Matematicka – Prírodovedecké*
  (1921-1955)

- *Rozhledy Matematicko – Fyzika'lní*
  Πρώτη έκδοση το 1921. Εκδόσεις: State Pedagogical Publishers, Praha, Czeckoslovakia.

- *School of Science and Mathematics*
  Πρώτη έκδοση το 1905. Εκδόσεις: School of Science and Mathematics Association, Inc., Bowling Green, OH, USA.

- *The School Visitor*
  (1900-1904) Εκδόσεις: John S. Royer and Sons, Ohio, USA.

- *SIAM Review*
  Πρώτη έκδοση το 1959. Εκδόσεις: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.

- *Sigma*
  Πρώτη έκδοση το 1965. Εκδόσεις: Mathematical Association of Western Australia, Australia.

- *Sphinx*
  (1906-1932) Εκδόσεις: Brussels, Belgium.

- *Summation*
  Εκδόσεις: Association of Teachers of Mathematics of New York City, New York, USA.

- *Tangente*
  Πρώτη έκδοση το 1987. Εκδόσεις: Federation Francaise des Jeux Mathematiques, Paris, France.

- *Teaching Mathematics and its Applications*
  Πρώτη έκδοση το 1982. Εκδόσεις: Oxford University Press, Oxford, England.

- *Technology Review*
  Πρώτη έκδοση το 1899. Η στήλη των προβλημάτων ξεκίνησε το 1966. Εκδόσεις: Massachusetts Institute of Technology, Boston, MA, USA.

- *Theta*
  Πρώτη έκδοση το 1986. Εκδόσεις: Crew and Alsager College, Cheshire, United Kingdom.

- *Tidsskrift for Matematik, series* 1
  (1859-1863) Εκδόσεις: Swets and Zeilinger, Copenhagen, Amsterdam.

- *Tidsskrift for Matematik, series* 2
  (1865-1870) Εκδόσεις: Swets and Zeilinger, Copenhagen, Amsterdam.

- *Tidsskrift for Matematik, series* 3
  (1871-1876) Εκδόσεις: Swets and Zeilinger, Copenhagen, Amsterdam.

- *Today's Refinery*
  Πρώτη έκδοση το 1986. Εκδόσεις: Percy Publishing Co. Inc., Scrasdale, NY, USA.

- *Trigon*
  Εκδόσεις: Mathematical Association of South Australia, Australia.

- *The Two Year College Mathematics Journal*
  (1967-1983) Εκδόσεις:The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA.

- *De Vriend der Wiskunde*
  (1886-1916) Εκδόσεις:Culemborg, Blom and Olivierse Schoonhoven, The Netherlands.

- *Wiadomosci Matematyczne, series* 1
  (1897-1939) Εκδόσεις: Societatis Mathematicae Polonae, Warsaw, Poland.

- *Wiadomosci Matematyczne, series* 2
  Πρώτη έκδοση το 1955. Εκδόσεις: Societatis Mathematicae Polonae, Warsaw, Poland.

- *Wiskundige Opgaven*
  (1875-1936) Εκδόσεις: Noordhoff, Gronongen, The Netherlands.

- *Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, series* 2
  Εκδόσεις: P. Noordhoff N.V. Gronongen, The Netherlands.

- *Wissenschaftliche Nachrichten*

- *World Game Review*
  Εκδόσεις: Michael Keller Ellicott City, MD, USA.
- *Zeitschriff fur Mathematischen und Naturwissenschaften Unterricht*
  (1870-1943) Εκδόσεις: Teubner, B.G. Leipzig.

Θα δώσουμε ένα πολύ μικρό δείγμα ασκήσεων που δημοσιεύτηκαν σε κάποια από τα παραπάνω περιοδικά, μιας και είναι αδύνατο να παραθέσουμε όλα τα υπέροχα προβλήματα που φιλοξένησαν στις σελίδες τους.

Πρόβλημα 7.0.1. *Αποδείξτε ότι ο αριθμός των πρωταρχικών Πυθαγόρειων τριγώνων (ορθογώνια τρίγωνα με ακέραιες πλευρές που είναι σχετικά πρώτες) με σταθερή ακτίνα εγγεγραμένου κύκλου είναι πάντα δύναμη του 2.*[2]

<u>*Λύση*</u>

Η ακτίνα του εγγεγραμένου κύκλου δίνεται από τον τύπο $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Με τη βοήθεια των πρωταρχικών τριάδων $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ και $c = m^2 + n^2$, όπου m, n είναι σχετικά πρώτοι και δεν έχουν την ίδια αρτιότητα παίρνουμε $r = n(m-n)$.

Έστω p πρώτος με την ιδιότητα $p \mid r$.
Αν $p = 2$ τότε αναγκαστικά $p.n$ και $p \nmid m - n$.
Αν $p \neq 2$ τότε $p \mid n$ ή $p \mid m - n$, διότι είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Οπότε για p πρώτο μεγαλύτερο του 2 κάθε συνδυασμός επιλογών μας δίνει ένα ζευγάρι των m, n που παράγουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Άρα αν το r έχει k διακεκριμένους πρώτους μεγαλύτερους από το 2 υπάρχουν 2^k πρωταρχικά Πυθαγόρεια τρίγωνα με ακτίνα r.[3]

Πρόβλημα 7.0.2. *Να βρεθεί η πραγματική ρίζα της* $y^5 - 10y^3 + 20y - 12 = 0$.[4]

<u>*Λύση*</u>

Στη άσκηση αυτή δόθηκε πληθώρα λύσεων, στο περιοδικό παρουσιάζονται μόνο δύο. Εμείς θα αναφερθούμε στη λύση του *Murray S. Klamkin*, *University of Alberta*.

Οι εξισώσεις της μορφής $y^5 + 5py^3 + 5p^2y + a = 0$ λύνονται εύκολα με τη βοήθεια της παρακάτω αντικατάστασης $y = t + \dfrac{p}{t}$.

---

[2] *Crux Mathematicorum*, *Vol.* 21, 1995, Πρόβλημα 2012.
Το πρόβλημα προτάθηκε από τον *K.R.S. Sastry*, *Dodballapur*, *India*.

[3] Το πρόβλημα λύθηκε από αρκετά άτομα η λύση που δόθηκε από τον *Carl Bosley*, *Topeka*, *Kansas* παρουσιάζεται *Crux Mathematicorum*, *Vol.* 22, *No.* 1, *Febr.* 1996.

[4] *Crux Mathematicorum*, *Vol.* 16, 1990, Πρόβλημα 1507.
Το πρόβλημα προτάθηκε από τον Έλληνα Νίκο Δ. Διαμαντή, Πανεπιστήμιο της Πάτρας, Ελλάδα.

Ας το δούμε πρακτικά στην παραπάνω άσκηση.
Η εξίσωση $y^5 - 10y^3 + 20y - 12 = 0$ γράφεται $y^5 - 5 \cdot 2y^3 + 5 \cdot 2^2 y - 12 = 0$, οπότε για $y = t + \frac{2}{t}$ παίρνουμε $t^5 + \frac{2^5}{t^5} = 12$.

Από την τελευταία θέτοντας $w = t^5$ παίρνουμε $w^2 - 12w + 2^5 = 0$.
Οπότε $t = \sqrt[5]{8}$ ή $t = \sqrt[5]{4}$.

Για $t = \sqrt[5]{4}$ παίρνουμε $y = \sqrt[5]{4} + \frac{2}{\sqrt[5]{4}} = 2^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{3}{5}}$, η οποία επαληθεύει την εξίσωση.

Το *American Mathematical Monthly* είναι από τα σημαντικότερα περιοδικά στοιχειωδών μαθηματικών. Από την αρχή της δημιουργίας του ήταν ένα περιοδικό με ευρεία συλλογή προτεινόμενων προβλημάτων. Στις στήλες του φιλοξενησε μέχρι σήμερα προβλήματα τόσο των Θεωρητικών όσο και των Εφαρμοσμένων μαθηματικών, άρθρα πάνω σε διάφορα μαθηματικά θέματα, βιογραφίες μαθηματικών και άλλα.

Η αρχική ιδέα της ίδρυσης αυτού του περιοδικού ήταν του *B.F. Finkel*, ο οποίος κάλεσε τον *J.M. Colaw* ως συνεργάτη.

Ο εκδότης του περιοδικού *American Mathematical Monthly* έχει αλλάξει αρκετές φορές. Από το 1906 τον έλεγχο του περιοδικού είχε το Πανεπιστήμιο του Σικάγου και το 1912 έγινε συνεκδότης του περιοδικού το Πανεπιστήμιο της Ιλλινόης. Μέχρι το 1915 συμμετείχαν στις εκδόσεις ακόμα 12 Πανεπιστήμια. Από το 1916 μέχρι και σήμερα το περιοδικό εκδίδεται με την υποστήριξη της *Mathematical Association of America* της οποίας είναι μέλη κυρίως καθηγητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Από τη θέση του συντάκτη του περιοδικού, του υπεύθυνου για τον έλεγχο των προβλημάτων πέρασαν πολλοί, όπως οι *L.E. Dickson*, *S. Epstein*, *E. Glenn*, *G.E. Wahlin's*, *R.P. Baker*, *Otto Dunkel*, *H.P. Manning*, *Norman Anning*, *H.L. Olson*, *W.F. Cheney*, *H.S.M. Coxeter*, *Howard Eves*, *Orrin Frink*, *E.P. Starke*, κ.α.

Όπως επισημαίνει και ο *C.W. Trigg*[5], το *Monthly* στάθηκε πολύ τυχερό όσον αφορά τους συντάκτες των προβλημάτων του. Όλοι οι συντάκτες του, χωρίς εξαιρέσεις, είχαν πραγματικό ενθουσιασμό για τη δημιουργία, αλλά και τη λύση προβλημάτων. Είχαν υψηλές γνώσεις σε αρκετούς τομείς των Μαθηματικών και γνώριζαν τη σημασία των προβλημάτων στην ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Ένας από αυτούς, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ήταν ο *Otto Dunkel*. Ο *Dunkel* (1869-1951) ήταν συντάκτης του περιοδικού από το 1918 μέχρι το 1946

[5] *C.W. Trigg*, American Mathematical Monthly, MAA, Inc., Vol. 64, No. 7 Part II: *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, σελίς 5.

και διευθυντής του από το 1933 μέχρι το 1947. Διάβαζε όλες τις λύσεις που υποβάλλονταν στο περιοδικό και έγραφε παρατηρήσεις. Αν έβρισκε μία εσφαλμένη λύση, εξηγούσε την κατάσταση στον επίδοξο λύτη και πρότεινε διόρθωση. Σε κάποιες περιπτώσεις όπου σε δύσκολα προβλήματα δεν δινόταν κάποια λύση, πρότεινε ο ίδιος μια δική του. Ήταν ιδιαίτερα ευφυής και φαίνεται πως ήταν και ισχυρός σε όλους τους τομείς των Μαθηματικών. Η γραφή του συνέχισε να είναι ακριβής και αξιοπρόσεκτη μέχρι το τέλος.

Ένα πολύ ωραίο βιβλίο με προβλήματα μαθηματικών είναι το *The Otto Dunkel Memorial Problem Book* του *Otto Dunkel*, το όποιο είναι επιλογή προβλημάτων από το *American Mathematical Monthly*.[6]

Το 1957 συγκέντρωσε σε μία μοναδική συλλογή τα 400 καλύτερα προβλήματα που δημοσιεύτηκαν στα *Monthly* τα χρόνια 1918-1950.

Μέσα στα 400 καλύτερα προβλήματα συναντάμε τόσο προβλήματα που ανήκουν στα διασκεδαστικά μαθηματικά, όσο και πιο δύσκολα προβλήματα που χρειάζονται ιδιαίτερες γνώσεις για τη λύση τους. Όλα όμως έχουν ένα κοινό στοιχείο, να κερδίζουν το ενδιαφέρον του αναγνώστη. Μέσα στα 400 καλύτερα συναντάμε κάποια που ήδη αναφέραμε όπως τα παρακάτω.

Πρόβλημα 2838 (*Lewis Carroll*): *Έστω ένα σχοινί που είναι περασμένο από έναν τροχό στερεωμένο σταθερά στο ταβάνι. Στη μία άκρη του σχοινιού είναι δεμένο ένα βάρος 10 κιλών και στην άλλη κρατιέται μια μαϊμού, το βάρος και η μαϊμού βρίσκονται σε ισορροπία. Αν η μαϊμού αρχίσει να ανεβαίνει στο σχοινί, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα;*

Πρόβλημα 2933 (*H.E. Dudeney*): *Έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο φτιαγμένο από ύφασμα και ζητείται να κοπεί σε τέσσερα ξεχωριστά κομμάτια, έτσι ώστε αν τα ενώσουμε να φτιάξουμε ένα τετράγωνο.*

Ένα παρόμοιο πρόβλημα αν και αρκετά δυσκολότερο είναι το ακόλουθο:

Πρόβλημα E400 (*H.S.M. Coxeter*): *Να δείξετε πώς μπορεί να κοπεί ένα κανονικό εξάγωγο στο μικρότερο δυνατο αριθμό κομματιών, τα οποία αν ανασυναρμολογηθούν να μας δώσουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο με το ίδιο εμβαδό.*

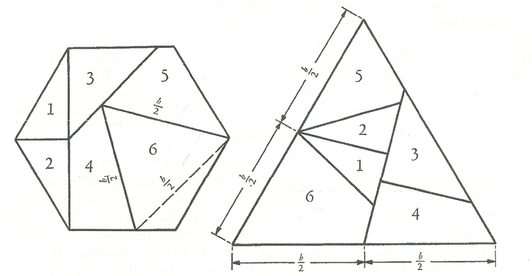
Τη λύση στο παραπάνω πρόβλημα έδωσε με δύο τρόπους ο *M. Goldberg* και ο *R.C. Yates* σε συνεργασία με τους *O.A. Nance* και *J.S. Smart*. Κατάφεραν να κόψουν το κανονικό εξάγωνο σε έξι κομμάτια και να το ανασυναρμολογήσουν παίρνοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο με το ίδιο εμβαδό. Ωστόσο δεν υπάρχει απόδειξη ότι δεν μπορεί να γίνει και με 5 κομμάτια.[7] Η λύση του *M. Goldberg* φαίνεται στο

---

[6] Otto Dunkel, *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, American Mathematical Monthly, MAA, Inc., Vol. 64, No. 7 Part II, August – September 1957.

[7] *American Mathematical Monthly*, *Vol.* 47, *No.* 7, *Aug. – Sept.* 1940, σελίδες 490-491.

Σχημα 7.1.



Σχήμα 7.1

Πρόβλημα 3242 ($R.S.$ $Underwood$): *Ένας άντρας βρίσκει ένα σωρό από καρύδες των οποίων το πλήθος διαιρείται ακριβώς με n αφού δώσει πρώτα μία καρύδα σε μία μαϊμού. Παίρνει το $\frac{1}{n}$-ιοστό από αυτές που έμειναν και αφήνει τις υπόλοιπες. Ένας δεύτερος άντρας βρίσκει αυτές που απέμειναν και δίνει μία καρύδα στη μαϊμού και παίρνει το $\frac{1}{n}$-ιοστό από τις υπόλοιπες. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου ένας n-οστός άντρας αφήσει στο τέλος μία σωρό από καρύδες το πλήθος των οποίων διαιρείται ακριβώς με το n. Πόσες καρύδες υπήρχαν αρχικά και πόσες έμειναν στο τέλος;*[8]

Λύση

Έστω ότι ο πρώτος άντρας συναντά x καρύδες και έστω y οι καρύδες που περισσεύουν στο τέλος.

Από τις x καρύδες που συναντά ο πρώτος άντρας δίνει 1 σε μία μαϊμού και το πλήθος αυτών που μένουν διαιρείται με το n, οπότε $x-1=kn$. Και οι καρύδες που θα αφήσει ο τελευταίος θα είναι $y=pn$.

Ο πρώτος άντρας φεύγοντας θα αφήσει

$$x-1-\left(\frac{x-1}{n}\right)=kn-\frac{kn}{n}=\frac{(kn-k)n}{n}=\frac{kn(n-1)}{n}=knl$$

καρύδες, όπου $l=\frac{n-1}{n}$.

[8] $American$ $Mathematical$ $Monthly$, $Vol.$ 35, $No.$ 1, $Jan.$ 1928, Πρόβλημα 3242, σελίδες 47-48.

Ο δεύτερος άντρας φεύγοντας θα αφήσει

$$kln-1-\frac{kln-1}{n}=\frac{n(kln-1)-(kln-1)}{n}=\frac{(n-1)(kln-1)}{n}=l(kln-1)=kl^2n-l$$

.

Ο τρίτος θα αφήσει kl^3n-l^2-l κ.ο.κ.

Επομένως ο r-οστός άντρας φεύγοντας θα αφήσει

$$\begin{aligned} kl^rn-(l^{r-1}+l^{r-2}+\ldots+l) &= kl^rn-l(l^{r-2}+\ldots+1) \\ &= kl^rn-l\frac{l^{r-1}-1}{l-1} \\ &\overset{l=\frac{n-1}{n}}{=} \frac{(k+1)(n-1)^r-(n-1)n^{r-1}}{n^{r-1}} \end{aligned}$$

Άρα για τον n-οστο θα πρέπει $\dfrac{(k+1)(n-1)^n-(n-1)n^{n-1}}{n^{n-1}}=pn$,
οπότε $\dfrac{k+1}{(p+1)n-1}=\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$.

Το $k+1$ και το $(p+1)n-1$ είναι ισοπολλαπλάσια και πρέπει $k+1=mn^{n-1}$ και $(p+1)n-1=m(n-1)^n$, από όπου προκύπτει $np=(n-1)(m(n-1)^{n-1}-1)$.

Όμως το $n \mid np=(n+1)(m(n-1)^{n-1}-1)$ και $(n,n-1)=1$ οπότε πρέπει $n \mid (m(n-1)^{n-1}-1)$.

Έστω ένα m' ώστε $m'((n-1)^{n-1}-1)$ να είναι πολλαπλάσιο του n. Η γενική τιμή m για την οποία θα γίνεται ο p ακέραιος δίνεται από τον τύπο $m=m'+nc$, όπου c φυσικός αριθμός.

Αν το m' είναι ο ελάχιστη τιμή του m ώστε το $m'((n-1)^{n-1}-1)$ να είναι πολλαπλάσιο του n, τότε όλες οι δυνατές τιμές του p λαμβάνονται για $c=1,2,3,...$

Άρα από την $k+1=mn^{n-1}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $k=mn^{n-1}-1$. Τώρα από τις αρχικές $x-1=kn$ και $y=pn$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα x και y,
$x=kn+1=(m'+nc)n^c-(n-1)$ και $y=pn=(m'+nc)(n-1)^n-(n-1)$.

Εκφράζοντας το $(n-1)^{n-1}$ σε δυνάμεις του n έχουμε

$$(n-1)^{n-1}=\binom{n-1}{n-1}n^{n-1}-\binom{n-1}{n-2}n^{n-2}+\binom{n-1}{n-3}n^{n-3}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{0}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με m και στη συνέχεια αφαιρούμε το 1 και στα δύο μέλη,

$$m(n-1)^{n-1}-1=m(\binom{n-1}{n-1}n^{n-1}-\binom{n-1}{n-2}n^{n-2}+\binom{n-1}{n-3}n^{n-3}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{0})-1.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:
Αν ο n είναι περιττός θα έχουμε

$$m(n-1)^{n-1}-1=n[m(\binom{n-1}{n-1}n^{n-2}-\binom{n-1}{n-2}n^{n-3}+\ldots-\binom{n-1}{1})]+m-1.$$

Αν ο n είναι άρτιος θα έχουμε

$$m(n-1)^{n-1}-1=n[m(\binom{n-1}{n-1}n^{n-2}-\binom{n-1}{n-2}n^{n-3}+\ldots+\binom{n-1}{1})]-m-1.$$

Από τις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή του m που ικανοποιεί την $m(n-1)^{n-1}-1 \equiv 0 mod n$, για n περιττό είναι το $m'=1$ και για n άρτιο είναι το $m'=n-1$.

Οπότε η γενική λύση του προβλήματος δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις
Για n περιττό $x=(1+nc)n^n-(n-1)$ και $y=(1+nc)(n-1)^n-(n-1)$.
Για n άρτιο $x=(n-1+nc)n^n-(n-1)$ και $y=(n-1+nc)(n-1)^n-(n-1)$.

Βιβλιογραφία

[1] Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία, Βιβλίον XIV: Προβλήματα, αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί, 1967.

[2] Ανθολογία Ελληνική, Τόμος 11, Βιβλίον ΙΔ': Αριθμητικά και γρίφοι, Κάκτος, 1992.

[3] Αρχιμήδους Άπαντα, Ε.Σ. Σταμάτη, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος, Αθήνα, 1970.

[4] Μ. Λάμπρου, Το βοεικόν πρόβλημα του Αρχιμήδη, Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Δ. Α. Αναπολιτάνος - Β. Καρασμάνης (επιμ.), σελ. 195-218, 1992 Τροχαλία, Αθήνα.

[5] Α. Ρίζου Ραγκαβή, Σ. Σούτζου, Συλλογή προβλημάτων, Βασιλική τυπογραφία, Αθήνα, 1836.

[6] A. Amthor, *Das Problema bovinum des Archimedes*, Zeitschrift für Mathematik und Physik.

[7] A.F. Archer, *A Modern Treatment of the* 15 *puzzle*, American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 9, Nov. 1999.

[8] R.C. Archibald, *Frère Gabriel Marie*, The American Mathematical Monthly, Vol. 24, No. 6, June 1917.

[9] M. Ascher, *A River-Crossing Problem in Cross-Cultural Perspective*, Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 1, Feb. 1990.
http://www.jstor.org/stable/2691506

[10] B. Averbach, O. Chein, *Problem Solving through Recreational Mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1980.

[11] W.W.R. Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1908.

[12] W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations Essays*, Dover Publications, Inc., New York, 1987.

[13] E. Bombieri, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis*, Clay Mathematics Institute,
http://claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

[14] G. Bouchenny, Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά, Αθήνα 1961.

[15] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Willey *and* Sons, Inc. New York London, 1968.

[16] P. J. Bulkholder, *Alcuin of York's Propositiones ad Acuendos Juvenes*, Introduction, commentary and translation. History of Science and Technology (Host) Bulletin (summer) Vol. 1.

[17] Lewis Carroll, *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll Pillow problems and a Tangled Tale*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[18] Lewis Carroll, *Rediscovered Lewis Carroll Puzzles*, *Edward Wakeling*, Dover Publications, Inc., New York, 1995.

[19] P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, New York, 1966.

[20] H. Dörrie, 100 *Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[21] H.E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[22] H.E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[23] O. Dunkel, *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, American Mathematical Monthly, MAA, Vol. 47, No. 7, Part II, Aug. – Sept. 1957.

[24] A. Eisenlohr, *Ein Mathematisches Handbuch der alten Ägupter* (*Papyrus Rhind des British Museum*), Leipzig, 1877.

[25] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.

[26] F.G.M., Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Χιωτέλης.

[27] Fibonacci's Liber Abaci *A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, translated by L.E. Sigler, Springer – Verlag, New York, 2002.

[28] H. Fukagawa and T. Rothman, *Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008.

[29] M. Gardner, *More Mathematical puzzles and Diversions*, Penguin Book, 1969.

[30] M. Gardner, *Mathematics Puzzles from Around the World*.

[31] M. Gardner, *The Second Scientific American book of Mathematical Puzzles and Diversions*, University Of Chicago Press, 1987.

[32] M. Gardner, *Mathematical Carnival*, Allen and U, 1976.

[33] J.J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2001.
Ελληνική μετάφραση: Η πρόκληση του Χίλμπερτ, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2007.

[34] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton University, Press, 1940.

[35] Sir T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921.
Ελληνική μετάφραση: Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001.

[36] D. Hilbert, *Mathematical Problems*, American Mathematical Society, Vol. 37, No. 4.
http://www.ams.org/bull/2000-37-04/S0273-0979-00-00881-8/S0273-0979-00-00881-8.pdf

[37] P. Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion, 1998
Ελληνική μετάφραση: *Ο άνθρωπος που αγαπούσε τους αριθμούς*, Α.Α. Λιβάνη, 2009.

[38] W.W. Johnson, W.E. Story, *Notes on the "15" Puzzle*, American Journal of Mathematics, Vol. 2, No. 4, Dec. 1879.
http://www.jstor.org/pss/2369492

[39] H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell Equation*, Notices of the American Mathematical Society 2002, Volume 49, No 2, Febr. 2002.
http://www.ams.org/notices/200202/fea-lenstra.pdf

[40] G. Loria, Ιστορία των Μαθηματικών, Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971.

[41] S. Loyd, *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, επιλογή και επιμέλεια του M. Gardner, Dover Publications, Inc., New York, 1900.

[42] S. Loyd, *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, επιλογή και επιμέλεια του M. Gardner, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

[43] Yu M. Matiyasevich, *Hilbert's tenth problem*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.

[44] Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974.

[45] Ann E. Moyer, *The Philosophers game*: *Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*, University of Michigan, 2001.

[46] H. L. Nelson, *A Solution to Archimedes' Cattle Problem*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 13, 1981.

[47] I. Newton, *Universal Arithmetick*, μετάφραση του Joseph Raphson, 1720.

[48] Pappus of Alexandria, *Book of Collection*, μετάφραση του *Alexander Jones*, Part 1, Springer – Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

[49] Y. Perelman, Διασκεδαστικά Μαθηματικά, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001.

[50] I. Peterson, *Tricky Crossing*, MAA online, Dec. 15, 2003.
http://www.maa.org/mathland/mathtrek_12_15_03.html

[51] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley and Sons, 1981.

[52] I. Pressman, D. Singmaster, *The Jealous husbands and The Missionaries and the Cannibals*, Mathematical Gazette, Vol. 73, No. 464, Jun. 1989.

[53] S. Rabinowitz, *Index to Mathematical Problems* 1980-1984, Mathpro Pr, 1992.

[54] T. Rothman, *Japanese Temple Geometry*, Scientific American, Vol. 278, No. 5, May 1998.

[55] B. Schechter, *My Brain is Open: The Mathematical Journey of Paul Erdos*, Simon and Schuster, 1998.

[56] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, I.M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Freeman, 1962.

[57] D. Singmaster, *Chronology of Recreational Mathematics*, 1996.
http://www.eldar.org/~problemi/singmast/recchron.html

[58] D. Singmaster, J. Hadley, *Problems to sharpen the young*, Mathematical Gazette, Vol. 76, No. 475, Mar. 1992.
*http://www.jstor.org/pss/*3620384

[59] D.E. Smith, *History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[60] D.E. Smith, Y. Mikami, *A History of Japanese mathematics*, Chicago the Open Court Publishing Company, 1914.

[61] E.L. Spitzagel, *A New Look at the Fifteen Puzzle*, Mathematics Magazine, Vol. 40, No. 4, Sep. 1967.

[62] R. Thiele, *Hilbert' s Twenty – Fourth Problem*, American Mathematical Monthly, Vol. 110, Jan. 2003.

[63] C.W. Trigg, *The Otto Dunkel Memorial Book*, American Mathematical Monthly, MAA, Part II, Vol. 64, No. 7, Aug. – Sept. 1957.

[64] V. Vinnikov, *He shall know: Hilbert' s Apology*, The Mathematical Intelligencer, Springer New York, *mathrmVol.* 21, *mathrmNo.* 1, *mathrmDec.* 1999.

[65] H.C. Williams, R.A. German, C.R. Zarnke, *Solution of the Cattle Problem of Archimedes*, Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 92, Oct. 1965.

Διαδίκτυο

www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/computer_output.html

*http://www.morikita.co.ip/soft/*0164*/genzon.pdf*

http://www.sangaku.info

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/translations/enestrom/index.html

http://logica.rug.ac.be/albrecht/alcuin.pdf

http://www.oakland.edu/upload/docs/Erdos Number Project/pub07.pdf

http://www.gap−system.org/~history/HistTopics/Brachistochrone.html

Αρκέτες από τις βιογραφίες τις αντλήσαμε από την παρακάτω σελίδα:
J.J. O'Connor and E.F. Robertson,
www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Biographies

Δίνουμε τον κατάλογο των προσώπων:
C.G. Bachet, S. Banach, N. Chuquet, H.E. Dudeney, L. Fibonacci, D. Hilbert, S. Loyd, S. Mazur, M. Mersenne, Newton, W. Orlicz, Z. Qiujian, J.P Schauder, H.D. Steinhaus, S.M. Ulam, J. Widmann.