ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΜΠΟΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΛΕΠΤΟΥ ΕΜΠΟΔΙΟΥ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΓΚΙΚΑΣ

Επιβλέπων καθηγητής: ΙΩΑΝΝΗΣ ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2005

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία αποδεικνύουμε τη βέλτιστη $C^{1,1}$ ομαλότητα της λύσης του κλασικού προβλήματος εμποδίου. Επίσης αποδεικνύουμε τη βέλτιστη $C^{1,1/2}$ ομαλότητα για τη λύση του προβλήματος του λεπτού εμποδίου. Τέλος δείχνουμε την C^{α} $(0 < \alpha < 1)$ ομαλότητα του τελεστή $(-\Delta)^s u$ όταν ικανοποιεί ένα αντίστοιχο πρόβλημα εμποδίου.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά : κλασικό πρόβλημα εμποδίου, πρόβλημα λεπτού εμποδίου, ψευδοδιαφορικοί τελεστές.

Abstract

In this thesis we prove optimal $C^{1,1}$ regularity for the classical obstacle problem. We also prove optimal $C^{1,1/2}$ regularity for the thin obstacle problem. Finally we prove C^{α} $(0 < \alpha < 1)$ regularity for the operator $(-\Delta)^s u$ that satisfies a similar obstacle problem.

Key words and phrases : obstacle problem, thin obstacle problem, fractional Laplace operator.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο σκοπός του συγγράμματος αυτού είναι να παρουσιάσουμε μία οικογένεια προβλημάτων «ελευθέρων συνόρων». Τα «ελεύθερα σύνορα» είναι μία περιοχή των μαθηματικών κλασσική αλλά και σύγχρονη. Οι πρόσφατες εξελίξεις στις τεχνικές έδωσαν μεγάλο ενδιαφέρον στις εφαρμογές και ιδιαιτέρως στην χρηματοοικονομία. Η οικογένεια με την οποία θα ασχοληθούμε είναι αυτή των «εμποδίων». Το κλασικό πρόβλημα του εμποδίου περιγράφεται ως εξής.

Θεωρούμε μία ελαστική μεμβράνη η οποία καλύπτει ένα εμπόδιο και τα άκρα της κείνται σε ένα επίπεδο. Σκοπός μας είναι από όλες τις δυνατές μεμβράνες να προσδιορίσουμε την μεμβράνη με την ελάχιστη δυναμική ενέργεια. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα φραγμένο χωρίο Ω, συμβολίζουμε το εμπόδιο με μια συνάρτηση φ, όπου $\varphi|_{\partial\Omega} < 0$ και $\sup_\Omega \varphi > 0$. Η αμελητέου πάχους μεμβράνη παρίσταται με μία συνάρτηση u που πρέπει να ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

με $u|_{\partial\Omega} = 0$ και $u \geq \varphi$ στο Ω.

Το ζητούμενο σε ένα τέτοιου είδους πρόβλημα είναι η ύπαρξη και μοναδικότητα του ελαχίστου (την συνάρτηση u που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα), η βέλτιστη ομαλότητα της λύσεως και η ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου, δηλαδή το σύνορο του συνόλου επαφής $\{u = \varphi\}$.

Σε αυτό το σύγγραμμα θα επικεντρωθούμε στο ερώτημα της βελτίστου ομαλότητας της λύσεως αυτού και των επομένων προβλημάτων της οικογενείας αυτής. Στο κεφάλαιο 2 λοιπόν, παρουσιάζουμε το αποτέλεσμα της βέλτιστης ομαλότητα της u, ήτοι $C^{1,1}$, δεδομένου ότι η φ είναι τουλάχιστον $C^{1,1}$. Η απόδειξη αυτή οφείλεται αρχικά στον *J. Frehse* (ίδε [9]) και αργότερα με διαφορετικό τρόπο από τους *L. A. Caffarelli* και *D.Kinderlehrer* (ίδε [4] και [9]).

Μία παραλλαγή αυτού του προβλήματος, που θα μας απασχολήσει στο κεφάλαιο 3 είναι το γνωστό ως πρόβλημα του *Signorini* ή αλλιώς πρόβλημα του «λεπτού εμποδίου» που διαφέρει από το προηγούμενο πρόβλημα, μόνο στο ότι ο φορέας του εμποδίου είναι μικρότερης διάστασης. Το εν λόγω πρόβλημα σχετίζεται με το πραγματικό πρόβλημα του *Signorini*, δηλαδή την ισορροπία ενός ελαστικού σώματος όταν βρίσκεται πάνω από μία άκαμπτη επιφάνια.

Το πρώτο αποτέλεσμα για την ομαλότητα της λύσεως οφείλεται στον *J. Frehse* (ίδε [10]) και εν συνεχεία, στα τέλη της δεκαετίας του 70, στον *L. A. Caffarelli* ότι η λύση είναι $C^{1,\alpha}$ για κάποιο $\alpha \leq 1/2$. Διαφορετικές αποδείξεις έχουν δοθή από τους *H. Brezis* και *D. Kinderlehrer* την δεκαετία του 70. Η βέλτιστη ομαλότητα απεδείχθει προσφάτως απο τους *I. Αθανασόπουλο* και *L. A. Caffarelli* (ίδε [1]).

Εάν ο φορέας του εμποδίου είναι υποσύνολο του $\Omega \cap \mathbb{R}^{n-1}$ τότε είναι δυνατόν το πρόβλημα του *Signorini* να μελετηθεί στον $\mathbb{R}^{n-1}$ ανάλογα με το κλασσικό πρόβλημα του εμποδίου, όπου ο τελεστής του *Laplace* αντικαθίσταται με έναν μη τοπικό τελεστή της μορφής $(-\Delta)^{1/2}$.

Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζουμε αποτελέσματα τέτοια όχι μόνο με εκθέτη $1/2$, αλλά με εκθέτη s, όπου $0 < s \leq 1$. Εδικότερα, παρουσιάζουμε την C^α ομαλότητα της $(-\Delta)^s u$, για $s \in (0,1)$ και για μία επαρκώς ομαλή συνάρτηση φ, όπου συμπεραίνουμε από την παράγραφο (5.4) του παραρτήματος ότι $u \in C^{\alpha+2s}$ ή $u \in C^{1,\alpha+2s-1}$ δεδομένου ότι $\alpha + 2s < 1$ ή $\alpha + 2s > 1$ αντίστοιχα. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ο *L. E. Silvestre* έχει αποδείξει, ότι έχουμε βέλτιστη ομαλότητα $C^{1,s}$ της u, όταν το σύνολο $\Lambda = \{u = \varphi\}$ είναι κυρτό (ίδε [19]). Όταν το σύνολο Λ είναι τυχαίο η βέλτιστη ομαλότητα της u παραμένει ανοιχτό πρόβλημα.

Σε αυτό το πλαίσιο, το πρόβλημα ισοδυναμεί με την μελέτη των εξής: να ευρεθή μία συνάρτηση u που ικανοποιεί,

1. $u \geq \varphi \quad$ στον $\mathbb{R}^n$

2. $(-\Delta)^s u \geq 0 \quad$ στον $\mathbb{R}^n$

3. $(-\Delta)^s u = 0 \quad$ για εκείνα τα x έτσι ώστε $u(x) > \varphi(x)$

4. $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$,

με την συνάρτηση φ να παίρνει και θετικές τιμές και μη-θετικές στο άπειρο.

Όπου το παραπάνω πρόβλημα ταυτίζεται με εκείνο του κλασικού εμποδίου για $s = 1$ και εκείνου του λεπτού εμποδίου για $s = 1/2$ (ίδε παράγραφο (2.1) και παράγραφο (4.3) αντίστοιχα).

Συνολικά τα προβλήματα εμποδίων, απαντώνται σε πολλές και διάφορες εφαρμογές τόσο των φυσικών όσο και των οικονομικών επιστημών. Ιδιαίτερα χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση διαφόρων χρηματηστηριακών προιόντον και δη των παραγώγων αμερικάνικου τύπου. Τελικά κλείνουμε την εισαγωγή με μία τέτοια εφαρμογή. Έστω ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με παραδοτέα τιμή K και ορίμανση T. Δηλαδή ο κάτοχός του έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση να πωλήσει το πρωτογενές προϊόν, από τη στιγμή που έχει υπογράψει το συμβόλαιο εώς τη χρονική στιγμή T, στην προσυμφωνημένη τιμή K. Εάν υποθέσουμε ότι η αξία του πρωτογενούς προϊόντος δίδεται ως μία στοχαστική ανέλιξη X_t με $X_0 = x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$, τότε το κέρδος του κατόχου στον χρόνο t είναι $\varphi(X_t) = (K - X_t)^+$. Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθεί η αξία του δικαιώματος αυτού, δηλαδή τι πρέπει να πληρώσει κάποιος για να αγοράσει αυτό το συμβόλαιο. Ο προσδιορισμός της αξίας αυτής βασίζεται στην «αρχή της μη-επιτηδιότητας». Η αρχή αυτή περιγράφεται ως «δεν είναι δυνατόν να κερδίσουμε από μία χρηματιστηριακή πράξη χωρίς να διακινδυνεύσουμε κάποιο ποσό» (ίδε [2] ή βιβλίο του *J.C.Hull* [13]). Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε μια συνάρτηση u που να ικανοποιεί την σχέση,

$$u(x) = \sup_t E[\varphi(X_t);\ t < T].$$

Η συνάρτηση αυτή αντιπροσωπεύει την αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή μηδέν, εάν η αρχική αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι x. Στην περίπτωσή μας, παίρνουμε $T = +\infty$, δηλαδή εξετάζουμε την περίτωση που έχουμε ένα αέναο αμερικάνικο δικαίωμα. Σε αυτή την περίπτωση έχει αποδειχθεί ότι η u ικανοποιεί τις συνθήκες (1-4) για $s \in (0,1)$, εάν X_t ακολουθεί μία στοχαστική ανέλιξη *Lévy*, ενώ για $s = 1$, εάν X_t ακολουθεί μία κίνηση *Brown* (για περισσότερες λεπτομέριες ίδε [8], [17], [18]).

Κεφάλαιο 2

Το Κλασικό Πρόβλημα του Εμποδίου.

2.1 Παρουσίαση του Προβλήματος και Πρώτες Ιδιότητες της Λύσεως.

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα του εμποδίου και θα δείξουμε τις πρώτες ιδιότητες για την λύση του ακόλουθου προβλήματος:

$$\inf_{u \in K} \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

όπου

$$K = \{u \in H^1,\ u|_{\partial D} = f(x),\ u \geq \varphi \ \sigma\chi\epsilon\delta\acute{o}\nu \ \pi\alpha\nu\tau o\acute{v}\}.$$

Εδώ το $D \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό, φραγμένο με ομαλό σύνορο. Η συνάρτηση f είναι ομαλή συνάρτηση στο $\overline{D}$ και φ είναι ομαλή συνάρτηση στο D, με $\varphi|_{\partial D} < f(x)$, που την όνομαζουμε εμπόδιο.

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση την οποία συμβολίζουμε με u_0 (ίδε παράρτημα θεώρημα (5.2.1)).

Στο παρακάτω λήμμα δείχνουμε ότι η u_0 είναι υπεραρμονική και σας ανατρέχουμε στο παράρτημα (παράγραφο (5.3)) για τον ορισμό και κάποιες ιδιότητες των υπεραρμονικών συναρτήσεων.

Λήμμα 2.1.1

α) u_0 παίρνει τίμες ανάμεσα στο $\lambda_1 = \min_{x \in \overline{D}}(f(x))$ και στο $\lambda_2 = \max_{x \in \overline{D}}(f(x), \varphi(x))$,

β) η u_0 είναι υπεραρμονική.

Απόδειξη :

α) Η $\overline{u}(x) = \min(u_0(x),\ \lambda_2)$ ανήκει στο $H^1(D)$ και μάλιστα

$$\nabla \overline{u} = \begin{cases} \nabla u_0 & , u_0 \leq \lambda_2 \\ 0 & , u_0 > \lambda_2 \end{cases}$$

οπότε έχω

$$\int_D |\nabla \overline{u}|^2 dx \ = \ \int_{\{u_0 \leq \lambda_2\}} |\nabla u_0|^2 dx$$

και

$$\int_D |\nabla u_0|^2 dx \;=\; \int_D |\nabla \overline{u}|^2 dx \;+\; \int_{\{u_0>\lambda_2\}} |\nabla u_0|^2 dx \;\geq \int_D |\nabla \overline{u}|^2 dx,$$

αφού ομώς $\overline{u}$ ανήκει στο K από μοναδικότητα της λύσης έχω οτι $\overline{u} = u_0$ σ.π. οπότε έχω :

$$u_0 \;=\; min(u_0, \lambda_2) \;\Rightarrow\; u_0 \;\leq\; \lambda_2.$$

Ομοίως δείχνουμε οτι $u_0 \;\geq\; \lambda_1$ θέτοντας τώρα $\overline{u} \;=\; \max(u_0, \lambda_1)$.
β) Έστω $\zeta \in C_0^{1,1}(D)$ τότε η ζ ανήκει στο K οπότε

$$\int_D |\nabla u_0|^2 dx \;\leq\; \int_D |\nabla u_0 +\; \varepsilon\zeta|^2 dx \;=\int_D |\nabla u_0|^2 dx \;+\; 2\varepsilon \int_D \nabla u_0 \nabla\zeta dx \;+\; \varepsilon^2 \int_D \nabla\zeta dx,$$

πηγαίνοντας το $2\varepsilon\int_D \nabla u_0 \nabla\zeta dx$ στο άλλο μέλος και απαλοίφοντας το $\int_D |\nabla u_0|^2 dx$ διαιρώντας με το ε και στέλνοντάς το στο 0 έχω ότι

$$-\int_D \nabla u_0 \nabla\zeta dx \;\leq\; 0 \;\Leftrightarrow\; \int_D u_0 \Delta\zeta dx \;\leq\; 0,$$

η τελευταία ισοδυναμία ισχύει αφού $\zeta \in C_0^{1,1}(D)$. □

Πόρισμα 2.1.2 *Η συνάρτηση u_0 είναι κατά σημείο ορισμένη και κατω ημισυνεχής.*

Απόδειξη :

Άμεση συνέπεια από λήμμα (5.3.2) και πόρισμα (5.3.3). □

Πόρισμα 2.1.3 *Το σύνολο $\Omega \;=\; \{x \in D : u_0(x) > \phi(x)\}$ είναι ανοιχτό και το σύνολο $\Lambda \;=\; \{x \in D : u_0(x) = \phi(x)\}$ (σχετικά ως προς D) κλειστό.*

Απόδειξη :

Το ότι το Λ είναι σχετικά κλείστο ως προς το D έπεται από το γεγονός ότι η $U = u_0 - \phi$ είναι κάτω ημισυνεχής. Ειδικότερα, έστω x_n μία ακολουθία που ανήκει στο Λ με $x_n \to x_0$ και $x_0 \in D$, τότε θα έχουμε :

$$U(x_0) \;\leq\; \liminf_{x_n \to x_0} U(x_n) \;= \liminf_{x_n \to x_0} (\phi(x_n) - \phi(x_n)) \;= 0, \quad \textit{αφού}\; x_n \in \Lambda.$$

Απ'οπου συμπεραίνουμε ότι $u_0(x_0) \leq \phi(x_0)$, όμως έχω ότι η u_0 ικανοποιεί την $u_0(x_0) \geq \phi(x_0)$, οπότε έχω συνολικά, ότι Λ είναι σχετικά κλειστό ως προς D. Άρα Ω σχετικά ανοίχτο ως προς D που σημαίνει ότι $\Omega = D \cap O$ όπου $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Άρα και το Ω ανοιχτό ως τομή δύο ανοιχτών συνόλων. □

Πόρισμα 2.1.4 *Η κατανομή Δu_0 έχει φορέα (σχετικά) με το D στο (σχετικά) κλειστό σύνολο $\{x \in D : u_0(x) = \varphi(x)\}$*

Απόδειξη :

Έστω $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ και $0 < \varepsilon < \frac{\inf_{x\in support(\zeta)}(u_0(x)-\varphi(x))}{\sup_{x\in\Omega}|\zeta(x)|}$. Τότε η $u_0 - \varepsilon\zeta \in K$ οπότε έχω :

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \ \le \ \int_\Omega |\nabla u_0 - \ \varepsilon\zeta|^2 dx \ = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \ - \ 2\varepsilon \int_\Omega \nabla u_0 \nabla\zeta dx \ + \ \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\zeta dx.$$

Πηγαίνοντας το $-2\varepsilon \int_D \nabla u_0 \nabla \zeta dx$ στο άλλο μέλος και απαλοίφοντας το $\int_D |\nabla u_0|^2 dx$ διαιρώντας με το ε και στέλνοντάς το στο 0 έχω ότι

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\zeta dx \ \le \ 0 \ \Leftrightarrow \ -\int_\Omega u_0 \Delta\zeta dx \ \le \ 0.$$

Η τελευταία ισοδυναμία ισχύει αφού $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$. Όμως η u_0 είναι υπεραρμονική στο D άρα και στο Ω, οπότε η u_0 αρμονικη στο Ω. □

Πόρισμα 2.1.5 *Η u_0 είναι συνεχής συνάρτηση στο D.*

Απόδειξη :

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος (5.3.4). □

2.2 Βέλτιστη Ομαλότητα της Λύσεως.

Σε αυτή την παράφραφο θα δείξουμε την $C^{1,1}$ ομαλότητα της λύσης, με την βοήθεια του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 2.2.1 *Έστω $u_0(x_0) = \varphi(x_0)$ τότε :*
α) Εάν $\sup_{|x-y|\le r}(|\varphi(x) - \varphi(y))| \le \sigma(r)$, τότε :

$$\sup_{x\in B_r(x_0)} (u_0(x) - \varphi(x)) \le C\sigma(2r).$$

β) Εάν $\sup_{|x-y|\le r}(|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|) \le \sigma(r))$, τότε :

$$\sup_{x\in B_r(x_0)} (u_0(x) - \varphi(x)) \le Cr\sigma(2r).$$

Όπου $C > 0$ και $\sigma(r)$ αύξουσα συνάρτηση, δεξιά συνεχής με $\sigma(0) = 0$.

Απόδειξη :

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w(x) = u(x) - \varphi(x_0) + \sigma(r),$$

που είναι μία μη αρνητική, συνεχής και υπεραρμονική συνάρτηση στο $B_r(x_0)$.

Έστω $w = w_1 + w_2$, όπου w_1 αρμονική συνάρτηση ίση με τη w στο ∂B_r και $w_2 = w - w_1$. Επιπλέον, όσο η w_1 τόσο και η w_2 είναι μη αρνητικές συναρτήσεις, αφού η πρώτη είναι αρμονική με $w \geq 0$ στο ∂B_r και η δεύτερη υπεραρμονική (άρα παίρνει ελάχιστη τιμή στο ∂B_r) και είναι ίση με 0 στο σύνορο ∂B_r. Οπότε έχω το εξής :

$$0 \leq w_1, w_2 \leq w \tag{2.1}$$

Τώρα για τη w_1 έχω ότι ισχύει η ανισότητα *Harnack* :

$$w_1(x) \leq Cw_1(y) \; \forall x, \; y \in B_{\frac{r}{2}}(x_0),$$

οπότε από (2.1) έχω ότι $\forall x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0)$:

$$w_1(x) \leq Cw_1(x_0) \leq Cw(x_0) = C\sigma(r). \tag{2.2}$$

Επίσης για τη w_2 έχω, αφού είναι αρμονική στο $\Omega \cap B_r(x_0)$, 0 στο $\partial B_r(x_0)$ και όχι ταυτοτικά ίση με το 0 παίρνει μεγιστη τιμή στο $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$. Οπότε συνολικά έχω ότι παίρνει μέγιστο στο σύνολο $\Lambda \cap B_r(x_0)$. Δηλαδή, υπάρχει $x_1 \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ που η w_2 παίρνει μέγιστο και μάλιστα

$$u_0(x_1) = \varphi(x_1). \tag{2.3}$$

Οπότε από (2.1), (2.3) έχω ότι:

$$w_2(x_1) \leq w(x_1) = u_0(x_1) - \varphi(x_1) + \sigma(r) = \sigma(r). \tag{2.4}$$

Τέλος από τις σχέσεις (2.2), (2.4) έχω $\forall x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0)$:

$$w(x) \leq (C+1)\sigma(r)$$

και

$$u_0(x) - \varphi(x) \leq u_0(x) - \varphi(x_0) + C\sigma(r) \leq (C+2)\sigma(r).$$

Γεγονός που αποδεικνύει το (α).
β) Δουλεύουμε ομοίως όπως το (α), θέτοντας τώρα $w(x) = u_0(x) - L(x) + r\sigma(r)$, όπου $L(x) = \varphi(x_0) + \nabla(\varphi(x_0))(x - x_0)$ και παρατηρώντας ότι $\forall x \in B_r(x_0)$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \nabla(\varphi(x_0))(x-x_0)| = |\int_0^1 \nabla(\varphi(tx + (1-t)x_0))(x-x_0)dt - \nabla(\varphi(x_0))(x-x_0)|.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα μέσης τιμης για το ολοκλήρωμα έχω για κάποιο $0 \leq t_0 \leq 1$ και $c = t_0 x + (1-t_0)x_0$:

$$= |\nabla(\varphi(c))(x-x_0) - \nabla(\varphi(x_0))(x-x_0)| \leq \sigma(|c-x_0|)|x-x_0| \leq \sigma(r)r.$$

Οπότε έχω :

$$L(x) - r\sigma(r) \leq \varphi(x) \leq u_0(x)$$

και όμοια αποδυκνείω όπως το (α) ότι,

$$u_0(x) - \varphi(x) \leq u_0(x) - L(x) + r\sigma(r) \leq r\sigma(r). \tag{2.5}$$

□

Θεώρημα 2.2.2 *Εαν η φ είναι $C^{1,1}$ τότε είναι και η u_0.*

Απόδειξη :

1 περίπτωση : εάν υπάρχει $r_0,\ x$ έτσι ώστε $\forall r < r_0\ B_r(x) \subseteq \Lambda$ τότε η u_0 φράσσεται απ΄τη $C^{1,1}(D)$ νόρμα της φ.
2 περίπτωση : εάν υπάρχει $0 < r < \delta,\ x$ (όπου δ πολύ μικρό) έτσι ώστε $B_r(x) \subset B_{2r}(x) \subset\subset \Omega$ τότε από *Schauder* εκτιμήσεις στο εσωτερικό (βλέπε [12]), αφού η u_0 αρμονική εκεί, έχω :

$$||u_0||_{C^{1,1}(B_r(x))} \le C(r,n) \sup_{B_r(x)} |u_0(x)|$$

3 περίπτωση : εάν υπάρχει $r_0,\ x_0 \in \Lambda$ έτσι ώστε $\forall r < 4r_0 < 2\delta\ \ B_r(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$.
Τότε θεωρώ $x_1 \in \Omega \cap B_r(x_0)$ και $\rho = d(x_1, \Lambda) = d(x_1, x_0)$. Τότε u_0 αρμονική εκεί και θέτοντας στο προηγούμενο λήμμα $\sigma(r) = r$, και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.5) έχω ότι, :

$$|\nabla^2(u_0(x_1))| = |\nabla^2(u_0(x_1) - L_{x_0}(x) + \rho\sigma(\rho))| \le \frac{C}{\rho^2} \sup_{B_\rho(x_1)} |u_0 - L_{x_0}(x) + \rho\sigma(\rho)| \le \frac{C}{\rho^2}\rho^2 = C.$$

Από όπου συμπεράνουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της u_0 είναι *Lipschitz* συνεχείς. $\square$

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα του Λεπτού Εμποδίου.

Πρωτού να ασχοληθείτε με το πρόβλημα του λεπτού εμποδίου θα ήταν καλύτερο να δείτε την παράγραφο (5.1) του παραρτήματος.

Το πρόβλημα του λεπτού εμποδίου που θα μας απασχόλησει είναι το εξής :

$$\inf_{u\in K}\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx,$$

όπου

$$K = \{u \in H^1(B_1(0)) :\ u - f \ \in\ H^1_0(B_1(0)),\ u \geq 0 \ \textit{στο}\ \overline{B_1(0)} \cap \mathbb{R}^{n-1} \textit{ως προς το}\ H^1(B_1(0))\}.$$

Εδώ η συναρτηση f είναι ομαλή στο $\overline{B_1(0)}$, συμμετρική ως προς το $\{x_n = 0\}$, παίρνει τιμές τόσο θετικές όσο και αρνητικές στο σύνορο και τέλος $0 < f(x)$ στο $\overline{B_1(0)} \cap \mathbb{R}^{n-1}$.

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση την οποία συμβολίζουμε με u, αφού K κυρτό και κλειστό (βλέπε παράρτημα θεώρημα (5.2.1)).

Η u είναι συμμετρική ως προς το $\{x_n = 0\}$ και όπως στο πρόβλημα του εμποδίου αποδεικνύεται όμοια ότι η u είναι υπεραρμονική και αρμονική στο ανοιχτό $B_1(0)\backslash\Lambda$, όπου $\Lambda = \{(x', 0) \in B_1(0)\ :\ u(x', 0) = 0\}$. Στον παρόν κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι η $u_{x_n} \in C^\alpha$, που όπως ξέρουμε είναι μία ικανή συνθήκη για τα προβλήματα *Neumann*, ώστε να συμπεράνουμε ότι η $u \in C^{1,\alpha}$(ίδε [12]).

3.1 Lipschitz Ομαλότητα και Σχεδόν κυρτότητα.

Σε αυτήν την ενότητα με την βοήθεια του παρακάτω λήμματος θα δείξω την *Lipschitz* ομαλότητα για την u.

Λήμμα 3.1.1 *Έστω u η λύση του παραπάνω προβλήματος του λεπτού εμποδίου. Τότε υπάρχει μία σταθερά C έτσι ώστε :*
α)

$$||u||_{H^1(B_{1/2}(0))} \leq C||u||_{L^2(B_1(0))}$$

β)

$$||u||_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \leq C||u||_{L^2(B_1(0))}$$

Απόδειξη :

α)

Πρώτα θα δείξω ότι οι συναρτήσεις u^+, u^- είναι υφαρμονικές. Θεωρούμε λοιπόν την $h \in C_0^\infty(B_1(0)),\ h \geq 0$ και γ_δ την δέλτα γραμμική απεικόνιση του $Heaviside$. Δηλαδή,

$$\gamma_\delta(u) = \begin{cases} 0 \quad για \quad u \leq 0 \\ u/\delta \quad για \quad 0 < u \leq \delta \\ 1 \quad για \quad u > \delta \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι :

$$0 \leq \frac{u}{\delta}\chi_{\{0<u\leq\delta\}} \leq \chi_{\{0<u\leq\delta\}} \to 0 \ \ καθώς \ \ \delta \to 0,$$

οπότε έχω :

$$\gamma_\delta = \frac{u}{\delta}\chi_{\{0<u\leq\delta\}} + \chi_{\{u>\delta\}} \to \chi_{\{u>0\}} \ \ καθώς \ \ \delta \to 0,$$

και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του $Lebesque$ έχω :

$$\int_{B_1(0)} \gamma_\delta(u)dx \to \int_{B_1(0)} \chi_{\{u>0\}}dx \ \ καθώς \ \ \delta \to 0. \tag{3.1}$$

Τώρα επιλέγω $0 < \varepsilon < \delta/C$, όπου $C = \sup_{B_1(0)} h$, τότε η $u_\varepsilon = u - \varepsilon h\gamma_\delta(u)$ ανήκει στο K, οπότε έχω :

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx$$

$$\leq \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{B_1(0)} |\nabla h\gamma_\delta(u)|^2 dx - 2\varepsilon \int_{B_1(0)} \nabla u \nabla(\gamma_\delta h)dx.$$

Τώρα απαλοίφοντας τον αριστερό όρο της ανίσωσης με το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιου όρου, στη συνέχεια διαιρώντας με το 2ε και στέλνοντάς το ε στο 0 έχω :

$$\int_{B_1(0)} \nabla u \nabla h\gamma_\delta dx \leq \int_{B_1(0)} h\nabla u \nabla\gamma_\delta dx = -\int_{\{0<u<\delta\}} \frac{h}{\delta}|\nabla u|^2 dx \leq 0.$$

Από την σχέση (3.1), καθώς το δ πάει στο 0 έχω :

$$\int_{B_1(0)} \nabla u \nabla h\chi_{\{u>0\}}dx = \int_{B_1(0)} \nabla u^+ \nabla h dx \leq 0,$$

δηλαδή η u^+ είναι υφαρμονική.

Όμως αφού u υφαρμονική έχω ότι :

$$\int_{B_1(0)} \nabla u^- \nabla h dx = \int_{B_1(0)} \nabla u^+ \nabla h dx - \int_{B_1(0)} \nabla u \nabla h dx \leq 0.$$

Άρα και η u^- είναι υφαρμονική. Τώρα θεωρούμε $h \in C_0^\infty(B_1(0)),\ 0 \leq h \leq 1$ και $h = 1$ στο $B_{1/2}(0)$ τότε η $w = u - h^2u^+$ ανήκει στο K οπότε έχω :

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1(0)} |\nabla w|^2 dx.$$

Κάνοντας τις πράξεις στο δευτερο μελος η ανισότητα γίνεται :

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx + 4\int_{B_1(0)} h^2 |\nabla h|^2 |u^+|^2 dx + \int_{B_1(0)} h^4 |\nabla u^+|^2 dx$$

$$-4\int_{B_1(0)} hu^+ \nabla u \nabla h dx - \int_{B_1(0)} 2h^2 \nabla u^+ \nabla u + 2\int_{B_1(0)} h^3 u^+ \nabla h \nabla u^+ dx$$

Το πρώτο μέρος της ανισότητας του αριστερού μέρους απαλοίφεται με το πρώτο όρο του δεξιού μέρους, επίσης παρατηρώ ότι :

$$\int_{B_1(0)} 2h^2 \nabla u^+ \nabla u dx = \int_{B_1(0)} 2h^2 |\nabla u^+|^2 dx$$

και στον τέταρτο και έχτο όρο εφαρμόζω την $Cauchy - Swhartz$ ανισότητα με παράμετρους $\epsilon, \epsilon' > 0$ αντίστοιχα, οπότε έχω συνολικά :

$$(1 - 4\epsilon - 2\epsilon') \int_{B_1(0)} h^2 |\nabla u^+|^2 dx \leq C(\epsilon, \epsilon', h, |\nabla h|) \int_{B_1(0)} |u^+|^2 dx$$

Οπότε παίρνω $1 - 4\epsilon - 2\epsilon' > 0$ και αφού $h = 1$ στο $B_{1/2}(0)$ έχω ότι :

$$\int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u^+|^2 dx \leq C \int_{B_1(0)} |u|^2 dx.$$

Ομοίως για την u^- έχω :

$$\int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u^-|^2 dx \leq C \int_{B_1(0)} |u|^2 dx.$$

Και αφού

$$\int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u|^2 dx = \int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u^+|^2 dx + \int_{B_{1/2}(0)} |\nabla u^-|^2 dx.$$

Γεγονός που αποδεικνύει το α) .
β)
Αφού η u^+ είναι υφαρμονική $\forall\, x \in B_{1/2}(0)$ έχω :

$$u^+(x) \leq \frac{1}{B_{1/8}(x)} \int_{B_{1/8}(x)} u^+ dx$$

Οπότε από $Jensen$ η τελευταία ανίσωση γίνεται :

$$\sup_{B_{1/2}(0)} u^+ \leq C||u||_{L^2(B_1(0))} dx.$$

Ομοίως για την u^- έχω :

$$\sup_{B_{1/2}(0)} u^- \leq C||u||_{L^2(B_1(0))} dx.$$

Γεγονός που αποδεικνύει το β), αφού $|u| = u^+ + u^-$. □

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω u η λύση του παραπάνω προβλήματος του λεπτού εμποδίου. Τότε υπάρχει μία σταθερά C έτσι ώστε :*
α)

$$||u||_{Lip(B_{1/2}(0))} \leq C||u||_{L^2(B_1(0))}$$

β)

$$\inf_{B_{1/2}(0)} u_{\tau\tau} \geq -C||u||_{L^2(B_1(0))}$$

Όπου $u_{\tau\tau}$ είναι της μορφής $u_{x_i x_j}$ για $1 \leq i, j \leq n-1$

Απόδειξη :

α)

Για να αποδείξουμε το (α) παίρνω την τυχαία συνάρτηση h που ικανοποιεί το εξης :

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \quad \sigma\tau o \quad B_1(0) \backslash \{x_n = 0\} \\ h = 0 \quad \sigma\tau o \quad B_1(0) \cap \{x_n = 0\} \\ h = -m \quad \sigma\tau o \quad \partial B_1(0), \end{cases}$$

όπου m είναι μία θετική σταθερά με $-m < \inf_{\partial B_1(0)} u$. Τώρα, η h ορίζεται σε όλη την μοναδιαία μπάλλα και η u είναι η αντίστοιχη λύση του προβλήματος του εμποδίου με εμπόδιο την h, αφού έχω ότι :

$$\{u \in H^1(B_1(0)) : \; u - f; \in \; H_0^1(B_1(0)), \; u \geq h \; \sigma\tau o \, B_1(0) \omega\varsigma \; \pi\rho o\varsigma \; \tau o \; H^1(B_1(0))\} \subset K.$$

Επίσης, παρατηρώ ότι η h είναι αναλυτική στο $B_{1/2}^+$ (και $B_{1/2}^-$) πάνω στο $x_n = 0$. Θέτω λοιπόν $M = \sup_{B_{1/2}} |\nabla h|$. Όμως ξέρω ότι ισχύει $|\nabla u| \leq |\nabla h|$ (ίδε [15]), οπότε έχω $\forall x \in B_{1/2}$:

$$|\nabla u|^2 \leq |\nabla h|^2 \leq M^2 \leq C \int_{B_{1/2}} |\nabla u|^2 dx.$$

Γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του (α).
β)

Για να φράξουμε την $u_{\tau\tau}$ μεγαλώνουμε το εμπόδιο στο $h_\epsilon(x', x_n) = -x_n^2/\varepsilon$ και συμβολίζω την αντίστοιχη λύση του εμποδίου με u_ϵ. Τότε από αποτελέσματα του προβλήματος του εμποδίου (ίδε [5]) ξέρω ότι $(u_\epsilon)_{\tau\tau} \geq 0$ στο $\{u_\epsilon = h_\epsilon\}$ καθώς και στο $\partial\{u_\epsilon > h_\epsilon\} \cap \{u_\epsilon = h_\epsilon\}$.Θα προχωρήσουμε στην απόδειξή μας τώρα με την βοήθεια της μέθοδος του *Berstein*. Έστω, η ομαλή συνάρτηση $0 \leq \eta \leq 1$ τέτοια ώστε να μηδενίζεται κοντά στο $\partial(B_1)$, $\eta(x) = 1 \; \forall x \in B_{1/2}$ και θέτω :

$$g(x) = \eta(x)(u_\epsilon)_{\tau\tau}(x) - \lambda|\nabla u_\epsilon(x)|^2.$$

Η g για $\epsilon < 1$ παίρνει ελάχιστο στο σύνολο $\{u_\epsilon > h_\epsilon\}$. Έστω ότι παίρνει ελάχιστο στο x_0, τότε στο x_0 έχω δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση :
$\eta(x_0) = 0$, τότε $\forall x \in B_{1/2}$ έχω :

$$(u_\epsilon)_{\tau\tau}(x) \geq -\lambda|\nabla u_\epsilon(x_0)|^2.$$

Δεύτερη περίπτωση :
$\eta(x_0) > 0$

$$\Delta g = \Delta\eta(u_\epsilon)_{\tau\tau} + 2\nabla\eta\nabla(u_\epsilon) - 2\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(u_\epsilon)^2_{x_ix_j} \geq 0$$

επιπλέον θα έχω :

$$0 = \nabla g = \nabla\eta(u_\epsilon)_{\tau\tau} + \eta\nabla(u_\epsilon)_{\tau\tau} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda(u_\epsilon)_{x_i}\nabla(u_\epsilon)_{x_i}.$$

Πολλαπλασιάζω την πρώτη με η και την τελευταία με $\nabla\eta$ και την αφαίρω απ'την πρώτη, οπότε έχουμε :

$$0 \leq (\eta\Delta\eta - 2|\nabla\eta|^2)(u_\epsilon)_{\tau\tau} + 4\lambda\nabla\eta\sum_{i=1}^{n}(u_\epsilon)_{x_i}\nabla(u_\epsilon)_{x_i} - 2\lambda\eta\sum_{i,j=1}^{n}(u_\epsilon)^2_{x_ix_j}.$$

Θέτω $C = \eta(x_0),\ C_1 = \sup_{B_{1/2}}|\eta\Delta\eta| + |\nabla\eta|^2,\ C_2 = |\nabla\eta|$ και για $\lambda > \frac{C_1}{C}$ έχω :

$$|D^2u_\epsilon|^2 \leq 4C_1|D^2u_\epsilon||\nabla u_\epsilon|.$$

Όμως το $M = -(u_\epsilon)_{\tau\tau}(x_0) \leq |D^2u_\epsilon(x_0)|$, οπότε έχω επιπλέον :

$$M \leq |D^2u_\epsilon| \leq 4C_1|\nabla u_\epsilon|.$$

Τότε και σε αυτή την περίπτωση έχω $\forall x \in B_{1/2}$:

$$(u_\epsilon)_{\tau\tau}(x) \geq -\lambda|\nabla u_\epsilon(x_0)|^2.$$

Τώρα η $|\nabla u_\epsilon|$ είναι υφαρμονική εκτός του $\Lambda_\epsilon = \{u_\epsilon = h_\epsilon\}$ και $\nabla u_\epsilon = \nabla h_\epsilon$ στο Λ_ϵ. Αφού η συνάρτηση h του μέρους (α) είναι αναλυτική κοντά στο $\{x_n = 0\}$ και $h(x', 0) = 0$, έχω ότι $h(x', x_n) > -Cx_n > h_\epsilon$, εάν $x_n > C\epsilon$. Όμως $u_\epsilon \geq h$ στο $\{x_n = 0\}$ και στο ∂B_1 και αφού $u_\epsilon - h$ υφαρμονική στο B_1^+(και B_1^-), έχω ότι $u_\epsilon \geq h$ στο B_1. Οπότε

$$\Lambda_\epsilon \subset \{x \in B_1(0) : |x_n| \leq C\epsilon\}. \tag{3.2}$$

Έτσι, με το γεγονος, ότι η συνάρτηση $\max(u, -x_n^2/\epsilon)$ ανοίκει στο

$$K_\epsilon = \{u \in H^1(B_1(0)) :\ u - f(x)\ \in\ H_0^1(B_1(0)),\ u \geq h_\epsilon \textit{ στο } B_1(0) \textit{ως προς το } H^1(B_1(0)),$$
$$f > h_\epsilon \textit{ στο } \partial B_1\}$$

και με τη σχέση (3.2) έχω :

$$\int_{B_1}|\nabla u_\epsilon|^2dx \leq \int_{B_1}\nabla\max(u, -x_n^2/\epsilon)dx \leq C'\int_{B_1}|\nabla u|^2dx + 2C. \tag{3.3}$$

Τώρα το ότι η $|\nabla u_\epsilon|$ είναι φραγμένη ανεξάρτητα του ϵ στην $B_r(0)$ με $r < 1$ και $x_0 \in B_r(0)$ προκύπτει όπως στο προηγούμενο λήμμα, αφού η συνάρτηση $\max(|\nabla u_\epsilon|, 2C)$ είναι υφαρμονική. Οπότε και στις δύο περιπτώσεις $\forall x \in B_{1/2}$ έχω :

$$(u_\epsilon)_{\tau\tau}(x) \geq -C.$$

Αφού η u_ϵ αρμονική εκτος του Λ_ϵ και $|u_\epsilon| = |h_\epsilon| \leq C\epsilon$ στο Λ_ϵ εχω ότι η $|u_\epsilon| \leq C$ και απ'την ανισότητα (3.3) έχω ότι υπάρχει u' τέτοια ώστε $u_\epsilon \rightharpoonup u'$ στο $H^1(B_1(0))$. Επίσης $\forall v \in K_\epsilon$ η u_ϵ ικανοποιεί την (βλεπε στο παράρτημα την παρατήρηση) :

$$\int_{B_1} \nabla v \nabla (v - u_\epsilon) dx \geq 0 \tag{3.4}$$

και αφού συγκλίνει ασθενώς στην u' έχω ότι και η u' ικανοποιεί την ίδια σχέση. Όμως για μικρά ϵ έχω ότι $H^{1,\infty} \cap K \subset H^{1,\infty} \cap K_\epsilon$, απ'οπου συνεπάγεται ότι η u' ικανοποιεί την (3.4) $\forall v \in K$, όμως το πρόβλημα του λεπτού εμποδίου είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα να βρουμε μια u που να ικανοποιεί την σχέση (3.4) $\forall v \in K$ οπότε από μοναδικότητα έχω $u = u'$ σχεδόν παντού. Οπότε $\forall \zeta \in H_0^1(B_r(x_0))$ με $B_r(x_0) \subset B_{1/2}(0)$ και $\Lambda \cap B_r(x_0) = \emptyset$, έχω :

$$-C \int_{B_r} \zeta dx \leq \int_{B_r} (u_\epsilon)_{\tau\tau} \zeta dx = -\int_{B_r} (u_\epsilon)_\tau \zeta_\tau dx \to -\int_{B_r} (u)_\tau \zeta_\tau dx$$

απ'οπου συνεπάγεται $u_{\tau\tau}(x_0) \geq -C$, αφού $u_{\tau\tau}$ συνεχής στο $B_r(x_0)$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του (β). □

Απ'το θεώρημα (3.1.2) βλέπουμε ότι $u_{x_n x_n} \leq C$ στο $B_{1/2} \backslash \Lambda$, αφού η u είναι αρμονική σε αυτό το χωρίο.

Παρατήρηση.

Τέλος, το Λήμμα (3.1.1) καθώς και η προηγούμενη παρατήρηση, μας επιτρέπει να ορίσουμε το $\lim_{x_n \to 0} u_{x_n}(x', x_n) = \lim_{x_n \to 0} -u_{x_n}(x', -x_n)$ (αφού η u είναι συμμετρίκη). Επίσης, εάν $(x', 0)$ δεν ανήκει στο Λ τότε η u είναι αρμονική σε αυτό το σημείο και αφού είναι συμμετρική έχω

$$\frac{u(x', x_n) - u(x', 0)}{x_n} = -\frac{u(x', -x_n) - u(x', 0)}{-x_n}$$

Οπότε παίρνοντας το όριο $x_n \to 0^+$, έχω ότι $u_{x_n}(x', 0) = 0$. Τέλος, εάν $(x', 0) \in \Lambda$, θεωρούμε $\zeta \in C_0^\infty(B_1(0))$ και $\zeta \geq 0$. Τότε αφού η u είναι υπεραρμονική θα ισχύει :

$$0 \leq \int_{B_1} \nabla u \nabla \zeta dx = 2 \int_{B_1^+} \nabla u \nabla \zeta dx = -2 \int_{x_n = 0} u_{x_n} \zeta dS_x \Rightarrow u_{x_n}(x', 0) \leq 0.$$

Αφού u συμμετρική και αρμονική στο B_1^+.

3.2 Τοπικές $\mathbf{C^{1,\alpha}}$ Εκτιμήσεις

Θα ξεκινήσουμε αυτήν την παράγραφο για το τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την u, από αυτά που ήδη ξέρουμε από πριν.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω η u η λύση μας στο $B_1(0)$ και $||u||_{L^2(B_1)} \leq 0$. Τότε υπάρχει κάποια σταθερά ώστε στο $B_{1/2}^+$ να ισχύει:*

a) $u(x', x_n) - Cx_n^2$ να είναι κοίλη ως προς το x_n, $u(x', x_n) + C|x'|^2$ να είναι κυρτή ως προς το x'
Ειδικότερα

β) $u_{x_n}(x', t) - u_{x_n}(x', s) \leq C(t - s)$

γ) $u(x',t) - u(x',0) \leq Ct^2$

δ) εάν $u(x',t) \geq h$ *τότε στην μισή μπάλλα*

$$HB'_r = \{z' : |z' - x'| \leq r, (z' - x')\nabla_{x'} u \geq 0\}$$

να ισχύει $u(x',t) \geq h - Cr^2$.

Απόδειξη :

α)

Η u είναι αρμονική στο $B^+_{1/2}$, οπότε για να αποδείξω ότι η u είναι κοίλη ως προς το x_n, παραγωγίζω την $u - Cx_n^2$ δύο φορές ως προς x_n και απ΄το θεώρημα (3.1.2), συμπεραίνω οτι είναι μη θετική, άρα κοίλη. Ομοίως δουλεύω για την $u + C|x'|^2$ που την παραγωγίζω δύο φορες ως προς x'_i που βλέπω $\forall i = 1, .., n-1$ να είναι μη αρνητική, άρα κυρτή.
β)

Απ΄το θεώρημα (3.1.2) προκύπτει το (β), ειδικότερα έχω :

$$u_{x_n}(x',t) - u_{x_n}(x',s) = \int_s^t u_{x_n x_n}(r)dr \leq C(t-s)$$

γ)

Καθώς στην ανισότητα στο (β) το s πάει στο 0, τότε απ΄τη παρατήρηση μετά το θεώρημα (3.1.2) προκύπτει η $u_{x_n} \leq Ct$. Οπότε εαν ολοκληρώσω την παραπάνω σχέση από 0 εώς t έχω το (γ).
δ)

Κάνοντας $Taylor$ στην u για $z' \in HB'_r(x')$ θα έχω :

$$u(z',t) = u(x',t) + (z'-x')\nabla u(x',t) + \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{x'_i x'_j}(sz' + (1-s)x', t)(z'_i - x'_i)(z'_j - x'_j)ds,$$

από όπου μέσω του θεωρήματος (3.1.2) και της υπόθεσης προκύπτει το ζητούμενο. □

Από εδώ και κάτω θα δουλέψουμε πάνω στον κύλινδρο $\Gamma_r = B'_r \times [0, \frac{r}{2n}]$ για να απλοποιήσουμε την γεωμετρία.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω ότι* $||u||_{L^2(\Gamma_1)} \leq 1$ *και το 0 ανήκει στο* Λ, *επίσης υποθέτω ότι*

$$\inf_{\Gamma_r} u_{x_n} \geq -r^\alpha.$$

Τότε

$$\sup_{\Gamma_{r/2}}(u) - \inf_{\Gamma_{r/2}}(u) \leq Cr^{1+\alpha}.$$

Απόδειξη :

Αν πάρω το όριο στη σχέση (β) του λήμματος (3.2.1) και αφού $\lim_{s\to 0} u_{x_n}(x', s) \leq 0$ έχω $\forall x \in \Gamma_r$:

$$u_{x_n}(x', x_n) \leq Cr \leq Cr^{\alpha},$$

αφού $r \leq 1$ και $\alpha \leq 1$. Οπότε λόγω αυτού και της υπόθεσης θα έχω συνολικά :

$$\sup_{\Gamma_r} |u_{x_n}| \leq Cr^{\alpha}$$

Επίσης για κάθε $t, s \in (0, \frac{r}{2n}]$ και τυχαίο $x' \in B'_r$ έχω :

$$u(x', t) - u(x', s) = \int_0^1 u_{x_n}(x', kt + (1-k)s)(t-s)dk \leq Cr^{1+\alpha},$$

όμως η u από θεώρημα (3.1.2)(α) είναι συνεχής στο Γ_r, οπότε έχω :

$$\sup_{0\leq t\leq \frac{r}{2n}} u - \inf_{0\leq t\leq \frac{r}{2n}} u \leq Cr^{1+\alpha}. \tag{3.5}$$

Εάν υπάρχει Μ τέτοιο ώστε να ισχύει $\sup_{B'_{r/2}} u(x', 0) \leq Mr^{1+\alpha}$ τότε έχουμε τελειώσει, γιατί θα έχουμε $\forall (x', s),\ (y', s) \in \Gamma_{r/2}$:

$$u(x', t) - u(y', s) = u(x', s) - u(x', 0) - u(y', s) + u(x', 0) - u(y', 0) \leq CMr^{1+\alpha},$$

η τελευταία σχέση προκύπτει απ'την σχέση (3.5) και απ'την υπόθεσή μας.

Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχει τέτοιο Μ και για κάθε $M > 0$ να ισχύει $\sup_{B'_{r/2}} u(x', 0) > Mr^{1+\alpha}$. Τότε από λήμμα (3.2.1)(δ) υπάρχει $HB'_{r/2}(x', 0)$ τέτοια ώστε $\forall z' \in HB'_{r/2}(x', 0)$ να ισχύει :

$$u(z', 0) \geq Mr^{1+\alpha} - Cr^2 \geq C_0 Mr^{1+a}\ , \text{διαλέγοντας το } M >> C. \tag{3.6}$$

Επίσης έχουμε

$$u(z', t) - u(z', e) = \int_e^t u_{x_n}(z', s)ds \geq -Cr^{1+\alpha}$$

Πηγαίνοντας το e στο 0 και απ'την σχέση (3.6) έχω :

$$u(z', t) \geq C_1 Mr^{1+\alpha}. \tag{3.7}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $V_{r/2}$ του λήμματος (5.3.2) για τις $n-1$ διαστάσεις. Τότε θα έχουμε :

$$\int_{B'_{r/2}} \Delta_{z'} u(z', t) V_{r/2} dz' = \int_{B'_{r/2}} u(z', t) \Delta_{z'} V_{r/2} dz' = \int_{B'_{r/2}} u(z', t) \Delta_{z'} V dz' - \int_{B'_{r/2}} u \Delta_{z'} P_{r/2} dz'$$

και αφού $\Delta V = C_1 \delta(x)$ θα έχουμε :

$$\int_{B'_{r/2}} \Delta_{z'} u(z', t) V_{r/2} dz' = C_1 u(0, t) - \frac{C_2}{|B'_{r/2}|} \int_{B'_{r/2}} u(z', t) dz', \tag{3.8}$$

Τώρα εάν $z' \in HB'_{r/2}(x',0)$, τότε ισχύει η (3.6), αλλιώς θα έχουμε :

$$u(z',t) \geq -Cr^{1+\alpha}.$$

Τέλος, αφού το μηδέν ανήκει στο Λ θα έχω από το λήμμα (3.2.1)(γ) το εξής :

$$u(0,t) = u(0,t) - u(0,0) \leq Cr^2 \leq Cr^{1+\alpha}.$$

Οπότε θα έχω συνολικά :

$$C_1 u(0,t) - \frac{C_2}{|B'_{r/2}|}\int_{B'_{r/2}} u(z',t)dz' \leq -C_4 M r^{1+\alpha},$$

επιπλέον ολοκληρώνοντας ως προς t θα έχουμε :

$$\int_0^t (C_1 u(0,s) - \frac{C_2}{|B'_{r/2}|}\int_{B'_{r/2}} u(z',s)dz')ds \leq -C_5 M r^{2+\alpha}. \tag{3.9}$$

Τέλος για τον πρώτο όρο της σχέσης (3.8), ολοκληρώνοντάς το ως προς t και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η u είναι αρμονική έχω :

$$|\int_0^t \int_{B'_{r/2}} \Delta_{z'} u(z',s) V_{r/2} dz' ds| = |-\int_{B'_{r/2}} \int_0^t u_{x_n x_n}(z',s) V_{r/2} ds dz'| =$$

$$|-\int_{B'_{r/2}} (u_{x_n}(z',t) - u_{x_n}(z',0)) V_{r/2} dz'| \leq Cr^\alpha \int_{B'_{r/2}} V_{r/2} dz \leq C_6 r^{2+\alpha}.$$

Ομώς απ'την σχέση (3.9) έχουμε :

$$-C_6 r^{2+\alpha} \leq -C_5 M r^{2+\alpha}.$$

Άτοπο εάν διαλέξω το M πολύ μεγάλο. □

Θεώρημα 3.2.3 *($C^{1,\alpha}$ εκτίμηση). Έστω u η λύση μας στο Γ_1 με $||u||_{L^2(\Gamma_1)} \leq 1$ και 0 να ανήκει στο Λ. Τότε υπάρχει μία σταθερά C και $\mu < 1$ τέτοια ώστε*

$$\sup_{\Gamma_{4^{-k}}} |u| \leq C(\frac{\mu}{4})^k$$

Απόδειξη :

Στην πραγματικότητα θα δείξω ότι :

$$\sup_{\Gamma_{4^{-k}}} |u_{x_n}| \leq C(\mu)^k.$$

Την απόδειξη θα την κάνουμε με επαγωγή. Έστω λοιπόν οτι για $k \leq k_0$. Τότε θα έχουμε :

$$\sup_{\Gamma_{4^{-k_0}}} |u_{x_n}| \leq C(\mu)^{k_0}.$$

Ειδικότερα έχουμε,

$$\sup_{\frac{1}{2}\Gamma_{4^{-k_0}}} |u| \leq CM(\frac{\mu}{4})^{k_0}.$$

Τώρα κανονικοποιούμε τη u στο Γ_1 θέτοντας :

$$\overline{u}(x) = C^{-1}(\frac{4}{\mu})^{k_0} u(4^{-k_0 x}).$$

Επιπλέον, έχουμε :
(i) $\sup|\overline{u}_{x_n}| \leq 1$
(ii) $\sup|\overline{u}| \leq M$
και
(iii) $\overline{u}_{x_n x_n} \leq \ C_0 C^{-1}(4\mu)^{-k_0}$ και $\overline{u}_{\tau\tau} \geq \ -C_0 C^{-1}(4\mu)^{-k_0}$.
Στην συνέχεια διαλέγουμε $k*$ έτσι ώστε $C_0 C^{-1} \leq C_1 \mu^{k*}$ και θέτουμε :

$$w = \overline{u} - C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}(|x'|^2 - (n-1)x_n^2).$$

Αφού η w είναι αρμονική εκτός του Λ και είναι 0 στο $x = 0$ παίρνει θετικό μέγιστο στο $\partial(\Gamma_{1/2}\backslash\{\overline{u} = 0\})$.
Η w δεν μπορεί να παίρνει μέγιστο στο $\Gamma_{1/2} \cap \Lambda$, αφού είναι αρνητική εκεί. Οπότε η w παίρνει μεγιστό ή σε καποιο $(x_0', 1/(4n)) \in \Gamma_{1/2}$ ή σε κάποιο $(x_0', t) \in \Gamma_{1/2}$ με $|x_0'| = 1/2$.
Έστω παίρνει μέγιστο στο $(x_0', 1/(4n))$. Τότε $w(x_0', 1/4n) \geq 0 \Rightarrow$

$$\overline{u} \geq C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}(|x'|^2 - (n-1)x_n^2) \geq -\frac{n-1}{16n^2} C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0} \Rightarrow$$

$$\overline{u}(x) = C^{-1}(\frac{4}{\mu})^{k_0} u(4^{-k_0}x) \geq -\frac{n-1}{16n^2} C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0} \Rightarrow u(4^{-k_0}) \geq -\frac{n-1}{16n^2} C_0 4^{-2k_0}$$

Οπότε από λήμμα (3.2.1) υπάρχει $HB_{1/2}'(x_0', 1/4n)$ έτσι ώστε

$$u(4^{-k_0}x) \geq -\frac{n-1}{16n^2} C_0 4^{-2k_0} - \frac{C_0}{16} 4^{-2k_0} \geq -\frac{n-1+n^2}{16n^2} 4^{-2k_0}.$$

Οπότε έχουμε συνολικά :

$$\overline{u} \geq -\frac{n-1+n^2}{16n^2} C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0} \qquad\qquad \forall x' \in HB_{1/2}'(x_0', 1/4n)$$

Τώρα εάν $(4^{-k_0}x', 0) \in \Lambda$, τότε κάνοντας $Taylor$ θα έχουμε :

$$\overline{u}_{x_n}(x', 0) \leq C_3 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0} \tag{3.10}$$

Εάν $(4^{-k_0}x', 0)$ δεν ανήκει στο Λ τότε $\overline{u}_{x_n}(x', 0) = 0$, οπότε και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι ισχύει η σχέση (3.10).
Τέλος, εάν παίρνει μέγιστο στο $(x_0', t) \in \Gamma_{1/2}$ με $|x_0'| = 1/2$. Τοτέ θα συμβαίνει το έξης :

$$|x_n|^2 \leq \frac{1}{16n^2} = \frac{|x_0'|^2}{2n^2}.$$

Οπότε, αφού η w θετική σε αυτό το σημείο θα έχουμε :

$$\overline{u}(x_0', t) \geq \frac{2n^2 - n + 1}{4n^2} C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}.$$

Ομοίως με πριν θα έχουμε $\forall (x', t) \in HB_{1/2}'(x_0', t)$:

$$\overline{u}(x', t) \geq \frac{8n^2 - 4n + 3}{4n^2} C_1 \mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}, \tag{3.11}$$

όμως απο λήμμα (3.2.1)(γ) ισχύει :

$$\overline{u}(x',0) > \overline{u}(x',t) - \frac{C_1\mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}}{16n^2}$$

και από τη σχέση (3.11) έχουμε ότι

$$\overline{u}(x',0) > 0 \Rightarrow \overline{u}_{x_n}(x',0) = 0 \qquad\qquad \forall x' \in HB'_{1/2}(x'_0,t).$$

Έτσι συμπεραίνουμε, ότι υπάρχει μισή μπάλλα με κέντρο κάποιου σημείου του $B'_{1/2}$ που να μας δίνει :

$$\overline{u}_{x_n}(x',0) \geq -C_3\mu^{k*}(4\mu)^{-k_0}.$$

Εάν τώρα διαλεξουμε το $1/4 \leq \mu \leq 1/2$, τότε έχουμε για ένα συγκεκριμένο $k*$

$$0 \geq \overline{u}_{x_n}(x',0) \geq -C_3(\frac{1}{2})^{k*} \geq -\frac{1}{2}.$$

Αφού $|\overline{u}_{x_n}| \leq 1$ στο Γ_1 από την αναπαράσταση του τύπου του $Poisson$ παίρνουμε,

$$|\overline{u}_{x_n}| < \theta < 1,$$

στο εσωτερικό του χωρίου,

$$D = \{|x'| \leq \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{4n}\}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός τώρα ότι η u είναι ημικοίλη επιστρέφουμε στο $x_n = 0$ και έχουμε,

$$|\overline{u}| \leq \theta + C_3(\frac{1}{2})^{k*} = \mu < 1,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση.

Από το προηγούμενο θεωρήμα μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη ενός $0 < \alpha < 1$, έτσι ώστε $sup_{\Gamma_r}|u_{x_n}| \leq Cr^{\alpha}$, οπότε να συμπεράνουμε από το θεώρημα (3.2.3) το $sup_{\Gamma_r}|u| \leq Cr^{1+\alpha}$. Ο τρόπος που προκύπτει αυτό το αποτέλεσμα είναι ο εξής :
έστω $x \in \Gamma_{4^{-k}} \backslash \Gamma_{4^{-k-1}}$ τότε

$$|x| \geq 2^{-k-1}(1+1/2n)^{1/2} \Rightarrow log|x| \geq (-k-1)log2 + log(1+1/2n)^{1/2} \Rightarrow$$

$$-k \leq \frac{log|x|}{log2} + \frac{1 - log(1+1/2n)^{1/2}}{log2} = \frac{log|x|}{log2} + C_1.$$

Απ'το λήμμα (3.2.3) έχουμε :

$$|u_{x_n}| \leq Ce^{klog\mu} \leq Ce^{(\frac{log|x|}{log2}+C_1)(-log\mu)} \Rightarrow$$

$$|u_{x_n}| \leq C_2|x|^{\frac{-log\mu}{log2}}$$

Από όπου συμπεραίνουμε οτι το α είναι ίσο με $\frac{-log\mu}{log2}$.

Πόρισμα 3.2.4 *Έστω η u η λύση μας και $||u||_{L^2(B_1)} \leq 1$, τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε :*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(B^+_{1/4})} \leq C$$

Απόδειξη :

Έστω $d_F(x',t)$ συμβολίζει την απόσταση του (x',t) απ'το Λ και $d(x_1,x_2)$ την απόσταση των σημείων αυτών και θεωρούμε δύο σημεία (x_1,t_1), (x_2,t_2). Τέλος, επειδή μας ενδιαφέρει πως ένα σημείο από $B^+_{1/4}\setminus\Lambda$ προσεγγίζει η u_{x_n} ένα σημείο του Λ, θεώρώ δύο περιπτώσεις. Πρώτη περίπτωση :

$$d_F = \max_{1=1,2} d_F(x'_i,t_i) > 4d((x'_1,t_1),(x'_2,t'_2))$$

Αφού η u είναι αρμονική στο $B_{d_{F/2}}(x'_1,t_1)$ ή στο $(B_{d_{F/2}}(x'_2,t'_2))$ έχουμε ότι για κάποια $x,\ y\in B_{d_{F/2}}((x'_1,t_1))$ και $c=tx+(1-t)y,\quad t\in[0,1]$:

$$u(x)-u(y)\leq|\nabla u(c)||x-y|\leq Cd_F\leq Cd_F^{1+\alpha}\Rightarrow$$

$$\sup_{B_{d_{F/2}}}(u)-\inf_{B_{d_{F/2}}}(u)\leq Cd_F^{1+\alpha}$$

και χρησιμοποιώ εκ των υστέρων εκτιμήσεις (βλέπε [12]) όπου θα έχουμε :

$$|u_{x_n}|\leq Cd_F^{\alpha},$$

στο $B_{d_{F/4}}(x_1,t_1)$.
Εάν τώρα

$$d_F = \max_{1=1,2} d_F(x'_i,t) \leq 4d((x'_1,t_1),(x'_2,t'_2))$$

Τότε από πριν γνωρίζουμε ότι :

$$|u(x_i,t_i)|\leq Cd_F^{1+\alpha}\leq Cd^{1+\alpha}$$

και

$$\nabla|u(x_i,t_i)|\leq Cd_F^{\alpha}\leq Cd^{\alpha}$$

Οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

3.3 Κυρτή Περίπτωση

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που $u_{\tau\tau}>0$ $(u_{x_nx_n}<0)$. Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι η $u\in C^{1,1/2}$.

Η απόδειξη του παραπάνω σχετίζεται με τον υπολογισμό της πρώτης ιδιοτίμης του ακόλουθου προβλήματος ιδιοτιμών.

Λήμμα 3.3.1 *Έστω ∇_θ συμβολίζει το επιφανειακό gradient πάνω στην μαναδιαία σφαίρα ∂B_1. Θεωρούμε*

$$\lambda_0=\inf_{w\in H^{1/2}(\partial B_1^+),\ w=0\ \text{στο}\ \partial(B'_1)^-}\frac{\int_{\partial B_1^+}|\nabla_\theta w|^2dS}{\int_{\partial B_1^+}w^2dS},$$

όπου

$$B_1^+=\{x=(x',x_n)\in B_1: x_n>0\},\ B'_1=B_1\cap\mathbb{R}^{n-1}$$

και

$$\partial(B'_1)^-=\{x=(x'',x_{n-1})\in B'_1: x_{n-1}<0\}.$$

Τότε

$$\lambda_0 = \frac{2n-3}{4}$$

Απόδειξη :

Γνωρίζω ότι το παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών έχει μοναδική λύση και οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Οπότε, εάν βρω μία συνάρτηση να ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπανω προβλήματος, να είναι αρμονική και παντού μη αρνητική, τότε αυτή η συνάρτηση αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή.
Θεωρούμε λοιπόν στο B_1^+ την συνάρτηση :

$$w_0 = \rho^{1/2}\cos(\psi/2),$$

όπου, $\rho = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}$, $\psi = \arctan(\frac{x_{n-1}}{x_n})$. Απο τις σχέσεις :

$$0 = \Delta w_0 = w_{0\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} w_{0\rho} + \frac{1}{\rho^2}\Delta_\theta w_0,$$

και

$$-\Delta_\theta w_0 = \lambda w_0,$$

έχουμε :

$$\Delta_\theta w_0 = \frac{2n-3}{4} w_0.$$

Οπότε θέτω :

$$\tilde{w} = \begin{cases} w_0(x_{n-1}, x_n) & \textit{όταν} \quad x_{n-1} > 0,\ x_n > 0 \\ w_0(-x_{n-1}, x_n) & \textit{όταν} \quad x_{n-1} < 0,\ x_n > 0 \\ 0 \quad \textit{όταν} \quad x_n = 0. \end{cases}$$

Τότε η $\tilde{w}$ είναι αρμονική, μη αρνητική παντού και ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος των ιδιοτιμών. Οπότε είναι μία ιδιοσυνάρτηση του προβλήματός μας, που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή λ_0. $\square$

Λήμμα 3.3.2 *Έστω w συνεχής συνάρτηση στο $\overline{B_r^+}$, αρμονική στο B_r^+, $w(0) = 0$, $w(x', 0) \leq 0, w(x', 0)w_{x_n}(x', 0) = 0$, $\forall x' \in B_r'$ και $\{x' \in B_r' \ : \ w(x', 0) < 0\}$ είναι μη κενό και κυρτό. Θεωρούμε την :*

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\int_{B_r^+} \frac{|\nabla w|^2}{|x|^{n-2}}$$

τότε $\varphi(r) < \infty$ και φθίνουσα ως προς το $r \in (0, R)$.

Απόδειξη :

Αφού η w αρμονική, έχουμε ότι $\Delta w^2 = 2w\Delta w + 2|\nabla w|^2 = 2|\nabla w|^2$ απ'οπου συνεπάγεται :

$$\varphi'(r) = -\frac{1}{2r^2}\int_{B_r^+} \frac{\Delta w^2}{|x|^{n-2}} dx + \frac{1}{r^{n-1}}\int_{(\partial B_r)^+} |\nabla w|^2 dS = I_1 + I_2.$$

Τωρα,

$$I_1 = -\frac{1}{2r^2}(\int_{B_r^+} w^2 \Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} dx - \int_{\partial B_r^+} w^2 \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{|x|^{n-2}} + \frac{2ww_v}{|x|^{n-2}} dS) = \frac{1}{2r^2}(0 + I_3 + I_4)$$

$$I_3 = \int_{\partial(B_r)^+} w^2 \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{|x|^{n-2}} dS + \int_{\{x_n=0\}} w^2 \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{|x|^{n-2}} dS =$$

$$\int_{\partial(B_r)^+} w^2 \frac{2-n}{|x|^{n-1}} dS = \frac{2-n}{r^{n-1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS.$$

$$I_4 = -\int_{\partial(B_r)^+} \frac{2ww_v}{|x|^{n-2}} dS - \int_{\{x_n=0\}} \frac{2ww_v}{|x|^{n-2}} dS = -\int_{\partial(B_r)^+} \frac{2ww_v}{|x|^{n-2}} dS,$$

όπου εχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $w(x',0)w_{x_n}(x',0) = 0$.
Όμως $\forall x \in \partial(B_r)^+$, έχουμε $w_r = \frac{1}{r}\nabla u \cdot x \Rightarrow$

$$I_4 = -\frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial(B_r)^+} 2ww_r dS.$$

Τέλος για το I_2 έχουμε :

$$I_2 = (\frac{1}{r^{n+1}} \int_{(\partial B_r)^+} |\nabla_\theta w|^2 dS + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{(\partial B_r)^+} |w_r|^2 dS).$$

Οπότε έχουμε συνολικά :

$$\varphi'(r) \geq \frac{2-n}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS - \frac{1}{r^n} \int_{\partial(B_r)^+} ww_r dS + I_2$$

Εφαρμόζοντας στο δεύτερο όρο την ανισότητα $Schwartz$, έχουμε

$$\varphi'(r) \geq \frac{2-n}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS$$

$$-(\frac{1}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS)^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial(B_r)^+} 2w_r^2 dS)^{\frac{1}{2}} + I_2 \geq$$

$$-\frac{2n-3}{4r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS + \frac{1}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} |\nabla_\theta w|^2 dS,$$

όπου στον τελευταίο όρο έχουμε ανταкαταστήσει το I_2. Τέλος, αφού το σύνολο $\{x' \in B'_r : w(x',0) < 0\}$ είναι μη κενό και κυρτό, έχουμε ότι η w μηδενίζεται σε μεγαλύτερο μέρος απ'την μισή μπάλλα. Οπότε χωρίς περιορισμό της γενικότητας (κάνοντας μία αλλαγή συντεταγμένων), θεωρούμε ότι η w μηδενίζεται στο χωρίο $\{x \in B_r : x'_{n-1} < 0, \ x_n = 0\}$. Οπότε απ'το λήμμα (3.3.1) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.3.3 *Έστω η u είναι η λύση του προβλήματός μας, τότε η $u \in C^{1,1/2}$ σε κάθε μεριά του Λ.*

Απόδειξη :

Έστω το 0 δεν ανήκει στο Λ, μπορώ να δουλέψω όπως στο λήμμα(3.3.2), αφού $w(0) = 0$, $\{w(x,0) < 0\} \subset \Lambda$ που το Λ είναι κυρτό και τέλος $w(x',0)w_{x_n}(x',0) \geq 0$. Οπότε έχουμε :

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_r^+} |\nabla w|^2 dx \leq C.$$

Επίσης, αφού η w μηδενίζεται τουλάχιστον στό μισό του συνόλου $\{x_n = 0\} \cap B_r$ από ανισότητα *Poincare* έχω το εξής :

$$\frac{1}{|B_r^+|}\int_{B_r^+} w^2 dx \leq Cr^2 \frac{1}{|B_r^+|}\int_{B_r^+} |\nabla w|^2 \leq Cr.$$

Τώρα η w^2 είναι υφαρμονική στο B_r, αφού έστω $h \in C_0^\infty(B_1)$ μη αρνητική, τότε θα έχω

$$\int_{B_1} \nabla w^2 \nabla h dx = -\int_{B_1} \Delta w^2 h dx - 2\int_{\{x_n=0\}} w_{x_n} w h dx \leq 0,$$

αφού $w(x',0)w_{x_n}(x',0) \geq 0$ και u συμμετρική ως προς το $x_n = 0$. Οπότε θα έχουμε :

$$w^2|_{B_r} \leq C(\int_{B_r^+} w^2 dx + \int_{B_r^-} w^2 dx) \leq Cr.$$

Τώρα έστω $x = (x',t)$ και θεωρούμε δύο περιπτώσεις :
α) εάν $d(x, \{u(x',0) = 0\}) \leq 4t$, τότε στην μπάλλα $B_t(x)$ η w είναι αρμονική και

$$|w| \leq Ct^{1/2}$$

β) εάν $d(x, \{u(x',0) = 0\}) \geq 4t$, τότε στην μπάλλα $B_{d/2}(x)$ η w είναι αρμονική και

$$|w| \leq Cd^{1/2}.$$

Απ'οπου προκύπτει το ζητούμενο, αφού μας ενδιαφέρει πως ένα σημείο από $B_{r/2}^+ \setminus \Lambda$ προσεγγίζει η u_{x_n} ένα σημείο του Λ. □

3.4 Το κεντρικό Αποτέλεσμα.

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε τη $C^{1,1/2}$ ομαλότητα της u υποθέτοντας την $C^{1,\alpha}$ ομαλότητα της, για $0 < \alpha \leq 1/2$. Θα ξεκινήσουμε με το πρώτο λήμμα που βασίζεται στο λήμμα (3.2.1).

Λήμμα 3.4.1 *Έστω η u είναι η λύση του προβλήματος μας με $0 \in \Lambda$. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ που εξαρτάται απ'το α έτσι ώστε η κυρτή θήκη του $\{(x',0) : u_{x_n}(x',0) < -r^{\alpha+\delta}\}$ στην B'_r, για $r < 1$ να μην περιέχει το 0.*

Απόδειξη :

Έστω $(x',0) \in \{(x',0) : u_{x_n}(x',0) < -r^{\alpha+\delta}\})$, αφου $u_{x_n,x_n} < M$ από *Taylor* ως προς h και επειδή $u(x',0) = 0$, έχω :

$$u(x',h) \leq -r^{\alpha+\delta}h + \frac{M}{2}h^2$$

και για $\delta = \frac{r^{\alpha+m\delta}}{M}$ για κάποιο $m > 1$ έχω :

$$u(x',h) \leq \frac{-r^{2\alpha+(m+1)}}{2M},$$

αφου $r < 1$ και $m > 1$. Επιπλέον εάν $|x'| < \frac{r}{2M}$ έχω :

$$u(x',h) + M|x'| \leq \frac{-r^{2\alpha+(m+1)}}{2M} + \frac{r^2}{4M},$$

και για $\delta < \frac{2(1-\alpha)}{M+1}$ γίνεται :

$$u(x', h) + M|x'| \leq \frac{-r^{2\alpha+(m+1)}}{4M}. \tag{3.12}$$

Απ'την άλλη μεριά έχω ότι :

$$|u(0,h)| = |u(0,h) - u(0,0)| \leq C_0 h^{1+\alpha} = C_0 \frac{r^{(\alpha+m\delta)(1+\alpha)}}{M^{1+\alpha}},$$

και εάν επιλέξω $M > 4C_0 > 1$ η τελευταία σχέση γίνεται :

$$u(0,h) \geq -C_0 \frac{r^{(\alpha+m\delta)(1+\alpha)}}{4M},$$

τέλος εάν επιλέξω $(\alpha + m\delta)(1+\alpha) > 2\alpha + (m+1)\delta$ και $2\frac{(1-\alpha)}{m\alpha-1} > \delta > \frac{\alpha(1-\alpha)}{m\alpha-1}$ (απ'οπου συμπεραίνω ότι θα πρέπει να ισχύει $m > 1 + \alpha/2$) θα έχω :

$$u(0,h) \geq -C_0 \frac{r^{(2\alpha+(m+1)\delta)}}{4M}. \tag{3.13}$$

Έστω λοιπόν ότι $(0,0) \in < \{(x',0) : u_{x_n}(x',0) < -r^{\alpha+\delta}\} >$, τότε υπάρχουν $(x',0),(y',0) \in \{(x',0) : u_{x_n}(x',0) < -r^{\alpha+\delta}\}$ τέτοια ώστε $0 = tx' + (1-t)y',\ 0 \leq t \leq 1$, οπότε από λήμμα (3.2.1) και σχέση (3.12) θα έχω :

$$u(0,h) \leq tu(x',h) + (1-t)u(y',h) + t|x'|^2 + (1-t)|y'|^2 < \frac{-r^{2\alpha+(m+1)}}{4M}.$$

Άτοπο από την σχέση (3.13). □

Λήμμα 3.4.2 *Έστω $\delta > 0$ και u είναι η λύση μας, θέτω $w = u_{x_n}$, τότε για $r < 1$ έχουμε :*

$$\varphi(r) = \frac{1}{r} \int_{B_r^+} \frac{|\nabla w|^2}{|x|^{n-2}} dx.$$

Τότε, υπάρχει μία σταθερά C, έτσι ώστε
α) εάν,

$$2\alpha + \delta > 1, \quad \varphi(r) \leq C$$

β) εάν,

$$2\alpha + \delta < 1, \quad \varphi(r) \leq Cr^{2\alpha+\delta-1}.$$

Απόδειξη :

Δουλεύουμε όπως στο λήμμα (3.3.2) όπου έχουμε :

$$\varphi'(r) \geq -\frac{2n-3}{4r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} w^2 dS + \frac{1}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} |\nabla_\theta w|^2 dS.$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $w_t = -(w + r^{\alpha+\delta})^-$ και παρατηρούμε ότι :

$$\int_{\partial(B_r)^+} |\nabla_\theta w_t|^2 dS = \int_{\partial(B_r)^+ \cap \{w < -r^{\alpha+\delta}\}} |\nabla_\theta w|^2 dS \leq \int_{\partial(B_r)^+} |\nabla_\theta w|^2 dS.$$

Τότε έχουμε :

$$\varphi'(r) \geq -\frac{2n-3}{4r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} (w - w_t + w_t)^2 dS + \frac{1}{2r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} |\nabla_\theta w_t|^2 dS.$$

και από το λήμμα (3.3.1) (για τον ίδιο λόγο που η w το ικανοποιεί το λήμμα (3.3.1) στο θεώρημα (3.3.3)) έχουμε:

$$\varphi'(r) \geq -\frac{2n-3}{4r^{n+1}} \int_{\partial(B_r)^+} (w - w_t)^2 + 2w_t(w - w_t) dS.$$

Τώρα, εάν $w < -r^{\alpha+\delta}$ και αφού έχουμε ότι και $|w| < Cr^\alpha$ τότε $(w - w_t)^2 + 2w_t(w - w_t) < 3Cr^{2\alpha+\delta}$ και, εάν $w > -r^{\alpha+\delta}$, έχουμε $(w - w_t)^2 + 2w_t(w - w_t) \leq Cr^{2\alpha+2\delta}$, οπότε έχουμε συνολικά :

$$\varphi'(r) \geq -\frac{3(2n-3)}{4} Cr^{2\alpha+\delta-2}.$$

Επιπλέον,

$$\varphi(1) - \varphi(r) \geq -\frac{3(2n-3)}{4(2\alpha+\delta-1)} C + \frac{3(2n-3)}{4(2\alpha+\delta-1)} Cr^{2\alpha+\delta-1},$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη εάν διαλέξουμε το C αρκετά μεγάλο. $\square$

Θεώρημα 3.4.3 *Έστω η u είναι η λύση του προβλήματός μας, τότε η $u \in C^{1,1/2}$ σε κάθε μεριά του Λ.*

Απόδειξη :

Θεωρούμε την $w = u_{x_n}$, και την w_t του πρηγούμενου λήμματος. Αφού η w_t μηδενίζεται τουλάχιστον στό μισό του συνόλου $\{x_n = 0\} \cap B_r$ από ανισότητα *Poincare* έχουμε το εξής :

$$\frac{1}{|B_r^+|} \int_{B_r^+} w_t^2 dx \leq Cr^2 \frac{1}{|B_r^+|} \int_{B_r^+} |\nabla w_t|^2 dx.$$

Επιπλέον,

$$\frac{1}{r^{n+1}} \int_{B_r^+} |\nabla w_t|^2 dx = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{B_r^+ \cap \{w < -r^{\alpha+\delta}\}} |\nabla w|^2 dx \leq \frac{C}{r^{n-1}} \int_{B_r^+} |\nabla w|^2 \leq C\varphi(r).$$

Τώρα αφού η w_t^2 είναι υφαρμονική (αποδεικνύεται όμοια όπως στο θεώρημα (3.3.3)), $\forall |x| \leq r$ έχουμε :

$$w_t^2(x) \leq \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s(x)} w_t^2 dx \leq \frac{1}{|B_s|} \int_{B_r(x)} w_t^2 dx, \qquad \text{για} \quad s < r - |x|$$

$$\leq C \frac{r^n}{s^n r^n} \int_{B_r^+(x)} w_t^2 dx \leq C \frac{r^n}{s^n} \varphi(r) r.$$

Τώρα από το λήμμα (3.4.2), εάν $(2\alpha + \delta > 1)$ (δηλαδή $\varphi \leq C$ αναγώμαστε όπως στην κυρτή περίπτωση. Αλλιώς, θα έχουμε $u \in C^{1,\alpha+\delta/2}$, οπότε θέτω $\alpha_1 = \alpha + \delta/2$ και δουλεύω ομοίως με πριν. Μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα έχουμε ότι $u \in C^{1,\alpha_n+\delta/2}$, με $\alpha_n = \alpha + (n-1)\delta$ και $2\alpha_n + \delta > 1$ και έτσι αναγώμαστε στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή $u \in C^{1,1/2}$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ομαλότητα των λύσεων του προβλήματος του Εμποδίου για Ψευδο-διαφορικούς τελεστές του Τύπου $(-\Delta)^S$.

4.1 Το Πρόβλημα του εμποδίου για τον Τελεστή $(-\Delta)^s$.

Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε μία λύση για το πρόβλημά μας και θα δείξουμε τα πρώτα αποτελέσματα για την ομαλότητα της λύσης.
Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Θεωρούμε την συνάρτηση u που ικανοποιεί τα παρακάτω :
1. $u \geq \varphi$ στον $\mathbb{R}^n$

2. $(-\Delta)^s u \geq 0$ στον $\mathbb{R}^n$

3. $(-\Delta)^s u = 0$ στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ u(x) > \varphi(x)\}$.

4. $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε φ υπάρχει μία λύση του παραπάνω προβλήματος.
Θα κατασκευάσουμε την u ως την συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dydx,$$

για κάθε συνάρτηση $u \in \dot{H}^s$ που ικανοποιεί την $u \geq \varphi$. Για κάθε συνάρτηση $f \in \dot{H}^s$, η νόρμα στον $\dot{H}^s$ δίνεται από :

$$||f||_{\dot{H}^s} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dydx}.$$

Ο χώρος $\dot{H}^s$ είναι ένας χώρος $Hilbert$ και το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από :

$$\begin{aligned} < f, g >_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}{|x - y|^{n+2s}} dxdy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-\Delta)^s g(x) dx. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{u \in \dot{H}^s \;:\; u \geq \varphi\}$ είναι κυρτό, κλειστό και μη κενό, αφού η φ είναι φραγμένη και έχει συμπαγή φορέα. Έτσι, το συναρτησοειδές J έχει ένα μοναδικό ελάχιστο στο σύνολο αυτό (ίδε παράρτημα θεώρημα (5.2.1)). Στις προτάσεις, που ακολουθούν θα αποδείξουμε ότι ο ελαχιστοποιητής είναι η λύση του προβλήματός μας.

Πρόταση 4.1.1 *Η συνάρτηση u είναι μία υπερλύση του $(-\Delta)^s u \geq 0$.*

Απόδειξη :

Έστω $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ μία μη αρνητική συνάρτηση. Τότε για $t > 0$ η συνάρτηση $u + th$ είναι μεγαλύτερη ή ίση της φ. Οπότε ικανοποιεί την εξής σχέση :

$$< u, u >_{\dot{H}^s} \leq < u + th, u + th >_{\dot{H}^s} \Rightarrow$$

$$0 \leq 2t < u, h >_{\dot{H}^s} + t^2 < h, h >_{\dot{H}^s}$$

$$= 4 \int_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\Delta)^s h(x)dx + t^2 < h, h >_{\dot{H}^s},$$

διαιρώντας με το t και στέλνοντάς το έπειτα στο 0 έχω ότι :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\Delta)^s h(x)dx \geq 0,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού η h είναι μία τυχαία, ομαλή και μη αρνητική συνάρτηση. □

Πρόταση 4.1.2 *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε για κάποιο $r > 0$ και $\epsilon > 0$, να έχω $u - \varphi > \epsilon$ στο $B_r(x_0)$, τότε $(-\Delta)^s u(x_0) = 0$.*

Απόδειξη :

Έστω $h \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ και $0 < t < \frac{u(x)-\varphi(x)}{sup|h|}$, τότε θα έχω $u - th \geq \varphi$. Οπότε εάν δουλέψουμε όπως στην πρόταση (4.1.1), θα έχουμε το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια θέτω $U = u - \varphi$ και υποθέτω ότι η $(-\Delta)^s\varphi$ είναι μία συνεχής συνάρτηση. Κάνοντας τις πράξεις βλεπουμε ότι η U ικανοποιεί ένα όμοιο πρόβλημα εμποδίου και ότι ελαχιστοποιεί το παρακάτω συναρτησοειδές,

$$||U||^2_{\dot{H}^s} + 4 \int_{\mathbb{R}^n} U(x)(-\Delta)^s \varphi(x)dx.$$

Και από τις ιδιότητες που ήδη ξέρουμε για την u, έχουμε ότι η U ικανοποιεί $(-\Delta)^s U \geq (-\Delta)^s \varphi$ και $U \geq 0$.

Πρόταση 4.1.3 *Η συνάρτηση U, επίσης ελαχιστοποιεί το :*

$$I(V) = ||V||^2_{\dot{H}^s} + 4 \int_{\mathbb{R}^n} V(x)(-\Delta)^s \varphi(x)\chi_{\{V>0\}}dx,$$

από όλες τις V που ανήκουν στον $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη :

Εάν $V \geq 0$, τότε $I(V) = ||V||^2_{\dot{H}^s} + 4\int_{\mathbb{R}^n} V(x)(-\Delta)^s\varphi(x)dx$, από όπου συνεπάγεται ότι $U = V$ απο μοναδικότητα.
Εάν $V < 0$ σε κάποια σημεία, τότε αρκεί να δείξω ότι $I(V) \geq I(V^+)$, ισοδύναμα αρκεί να δείξω ότι $||V||_{\dot{H}^s} \geq ||V^+||_{\dot{H}^s}$. Θέτω $D_1 = \{V \geq 0\}$, $D_2 = \{V \leq 0\}$ και $V^- = V - V^+$.

$$
\begin{aligned}
||V||^2_{\dot{H}^s} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|V(x)-V(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx \\
&= \int_{D_1}\int_{D_1} \frac{|V^+(x)-V^+(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx + 2\int_{D_1}\int_{D_2} \frac{|V^+(x)+V^-(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx \\
&+ \int_{D_2}\int_{D_2} \frac{|V^-(x)-V^-(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx \\
&\geq \int_{D_1}\int_{D_1} \frac{|V^+(x)-V^+(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx = ||V^+||_{\dot{H}^s},
\end{aligned}
$$

και αφού U είναι ελάχιστο του I από όλες τις μη αρνητικές συναρτήσεις έχω, $I(V) \geq I(V^+) \geq I(U)\ \forall\ V \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. □

Πρόταση 4.1.4 *Η συνάρτηση U ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα (με την ένοια των κατανομών τουλάχιστον)*

$$(-\Delta)^s u + (-\Delta)^s\varphi\chi_{\{V>0\}} \leq 0$$

Απόδειξη :

Παίρνουμε μια ομαλή συνάρτηση h μη αρνητική και θεωρούμε το $I(U-th)$.Τότε έχω :

$$
\begin{aligned}
I(U-th) &= ||U-th||^2_{\dot{H}^s} + 4\int_{\mathbb{R}^n}(U(x)-th(x))(-\Delta)^s\varphi(x)\chi_{\{V-th>0\}}dx \\
&= I(U) - t\Big(2 < U,h >_{\dot{H}^s} + 4\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(-\Delta)^s\varphi(x)\chi_{\{V>0\}}\Big)dx \\
&+t^2||h||^2_{\dot{H}^s} - 4t\int_{\{th>U>0\}}(U(x)-th(x))(-\Delta)^s\varphi(x)dx.
\end{aligned}
$$

Όμως

$$\Big|\int_{\{th>U>0\}}(U(x)-th(x))(-\Delta)^s\varphi(x)dx\Big| \leq \int_{\{th>U>0\}} th(x)|(-\Delta)^s\varphi(x)|dx = o(t),$$

αφού $\int_{\{th>U>0\}} h(x)|(-\Delta)^s\varphi(x)|dx \to 0$, από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Οπότε έχω συνολικά

$$I(U) \leq I(U-th) \leq I(U) - 4t\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s h(x)(U(x)+\varphi(x)\chi_{\{V>0\}})dx + o(t),$$

διαιρώντας με t και στέλνοντάς το στο 0 έχω :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s h(x)(U(x)+\varphi(x)\chi_{\{V>0\}})dx \leq 0.$$

Γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού η h είναι τυχαία συνάρτηση. □

Πόρισμα 4.1.5 *$(-\Delta)^s U \in L^\infty$, U είναι συνεχής, και $(-\Delta)^s U = -(-\Delta)^s \varphi$ στο σύνολο $\{U > 0\}$.*

Απόδειξη :

Έχουμε ήδη δείξει ότι,

$$-(-\Delta)^s \varphi \leq (-\Delta)^s U \leq -(-\Delta)^s \varphi \chi_{\{U>0\}}, \tag{4.1}$$

οπότε $(-\Delta)^s U \in L^\infty$, αφού $(-\Delta)^s \varphi \in L^\infty$. Τώρα από την πρόταση (5.4.10) έχω ότι η U είναι συνεχής από όπου έπεται ότι το σύνολο $\{U > 0\}$ είναι ανοιχτό. Οπότε μέσω της σχέσης (4.1) έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του πορίσματος. □

Πόρισμα 4.1.6 *Η συνάρτηση u είναι συνεχής, $(-\Delta)^s u \in L^\infty$, $(-\Delta)^s u = 0$ στο $\Omega = \{u > \varphi\}$.*

$$0 \leq (-\Delta)^s u \leq (-\Delta)^s \varphi (1 - \chi_{\{U>0\}}).$$

Απόδειξη :

Άμεση συνέπεια του πορίσματος (4.1.5). □

Πόρισμα 4.1.7 *Η συνάρτηση u είναι η ελάχιστη υπερλύση του $(-\Delta)^s u \geq 0$ που είναι μεγαλύτερη ή ίση της φ και είναι μη αρνητική στο άπειρο ($\liminf_{|x| \to +\infty} u(x) \geq 0$).*

Απόδειξη :

Έστω υ μία άλλη συνάρτηση που ικανοποιεί τα παραπάνω, θέτω $\Omega = \{u > \varphi\}$ και $m = \min(u, \upsilon)$. Στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ έχω $m = u$, όμως στο Ω γνωρίζω ότι ισχύει $(-\Delta)^s u = 0$ και από την πρόταση (5.5.9) $(-\Delta)^s (m - u) \geq 0$, οπότε από την πρόταση (5.5.8) έχω $m = u$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 4.1.8 *Η συνάρτηση u είναι φραγμένη και $\sup u \leq \sup \varphi$*

Απόδειξη :

Από υπόθεση έχω $u \geq \varphi$. Η σταθερή συνάρτηση $\upsilon = \sup \varphi$ είναι υπερλύση πάνω από την φ και από πρόταση (4.1.7) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.1.9 *Εάν το εμπόδιο φ έχει modulus συνέχειας c τότε και η συνάρτηση u έχει το ίδιο modulus συνέχειας.*

Απόδειξη :

Αφού c είναι *modulus* συνέχειας για την φ έχω $\forall x,\ h \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x+h) + c(h) \geq \varphi(x),$$

όμως

$$u(x+h) + c(h) \geq \varphi(x+h) + c(h) \geq \varphi(x).$$

Οπότε, από πρόταση (4.1.7) έχω $u(x+h) + c(h) \geq u(x)$, $\forall x,\ h \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή, η u έχει *modulus* συνέχειας το c. □

Πόρισμα 4.1.10 *Η συνάρτηση u είναι Lipschitz, και η Lipschitz σταθερά δεν είναι μεγαλύτερη από εκείνης της φ.*

Απόδειξη :

Το ζητούμενο ακολουθεί από την πρόταση (4.1.9) με $c(r) = C|r|$. □

Πρόταση 4.1.11 *Υποθέτουμε ότι $\varphi \in C^{1,1}$. Για κάθε διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε $C = \sup -\partial_{ee}\varphi$. Τότε $\partial_{ee}u \geq -C$. Έτσι, η u είναι ημικυρτή, και επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει ένα παραβολοειδές που την ακουμπά από κάτω.*

Απόδειξη :

Αφού $\partial_{ee}\varphi \geq -C$, έχω

$$\frac{\varphi(x+th) - \varphi(x-th)}{2} + Ct^2 \geq \varphi(x),$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον

$$\upsilon(x) = \frac{u(x+th) - u(x-th)}{2} + Ct^2 \geq \varphi(x),$$

και η υ είναι υπερλύση της $(-\Delta)^s\upsilon \geq 0$. Οπότε από πρόταση (4.3.7), έχω $\upsilon \geq u$, τότε

$$\upsilon(x) = \frac{u(x+th) - u(x-th)}{2} + Ct^2 \geq u(x),$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον $\partial_{ee}u \geq -C$. □

Πρόταση 4.1.12 *Υποθέτουμε ότι $(-\Delta)^s\varphi \leq C$ για κάποια θετική σταθερά και $s \in (0,1)$. Τότε, $(-\Delta)^s u \leq C$ (ίσως για μια διαφορετική σταθερά που εξαρτάται από την διάσταση n).*

Απόδειξη :

Εφαρμόζουμε το πόρισμα (5.5.11) για να έχουμε

$$\varphi(x) \leq \varphi * \gamma_\lambda + C\lambda^{2s},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$. Αφού η u είναι $s-$υπεραρμονική έχω :

$$u * \gamma_\lambda + C\lambda^{2s} \geq \varphi * \gamma_\lambda + C\lambda^{2s} \geq \varphi(x),$$

τότε από πρόταση (4.1.7) έχω $u * \gamma_\lambda + C\lambda^{2s} \geq u$, από όπου μέσω της πρότασης (5.5.11) έχω $(-\Delta)^s u \leq C$. □

4.2 Επιπλέον Ομαλότητα της Λύσης του προβληματος του εμποδίου.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την ομαλότητα της u. Ειδικότερα θα δείξουμε ότι το $(-\Delta)^s u$ ανήκει στον C^α για κάποιο μικρό α, εάν το εμπόδιο φ είναι αρκετά ομαλό.
Για την μελέτη της ομαλότητας του προβλήματος θα θεωρήσουμε την διαφορά $u - \varphi$. Το πρόβλημα τώρα μετατρέπεται σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα εμποδίου, με εμπόδιο 0, αλλά υπάρχει

το δεξί μέρος της ισότητας. Τέλος την λύση του προβλήματος θα την συνεχίσουμε να την καλούμε u.
Έτσι, έστω u η λύση του ακόλουθου προβλήματος:

$$u(x) \geq 0, \tag{4.2}$$

$$(-\Delta)^s u(x) \geq \phi(x), \tag{4.3}$$

$$(-\Delta)^s u(x) = \phi(x) \text{ όταν } u > 0, \tag{4.4}$$

όπου $\phi = -(-\Delta)^s \varphi$, για το εμπόδιο φ της προηγούμενης ενότητας. Τέλος θέτουμε $w = (-\Delta)^s u$.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα υποθέσουμε ότι η φ είναι C^∞, άρα και η $\phi \in C^\infty$. Οπότε, γνωρίζουμε από την ενότητα (4.3) ότι η u είναι μία φραγμένη *Lipschitz* συνεχής συνάρτηση (πόρισμα (4.1.10)) και ημικυρτή (πρόταση (4.1.11)), τέλος ξέρουμε ότι η $w \in L^\infty$ από το πόρισμα (4.1.6). Συνολικά γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$$\sup_x |\phi(x)| \leq C, \tag{4.5}$$

$$\sup_{x,y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|} \leq C, \tag{4.6}$$

$$u_{ee} \geq -C \ \ \forall \, e \text{ έτσι ώστε } |e| = 1, \tag{4.7}$$

$$|w(x)| \leq C. \tag{4.8}$$

Λήμμα 4.2.1 *Για $s \in (0,1)$, υπάρχει μία σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το s και την διάσταση, έτσι ώστε εάν υ είναι φραγμένη και ημικυρτή,*

$$\sup_x |\upsilon(x)| < A$$

$$\inf_x \inf_{|e|=1} \upsilon_{ee}(x) \geq -B$$

τότε $\sup_x (-\Delta)^s \upsilon(x) \leq C A^{1-s} B^s$.

Απόδειξη :

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η υ είναι ομαλή, αλλιώς παίρνουμε έναν ομαλοποιητή $\psi_\lambda(x) = \frac{\psi(\frac{x}{\lambda})}{\lambda^n}$ και έχουμε για κάθε $\lambda > 0$, ότι η $\psi_\lambda * \upsilon$ είναι λεία συνάρτηση και ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος. Οπότε εάν μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι $\sup_x (-\Delta)^s (\psi_\lambda * \upsilon)(x) \leq C B^s A^{1-s}$ ομοιόμορφα ως προς λ και στη συνέχεια περνάμε στο όριο κάθώς το λ πάει στο 0.
Η $(-\Delta)^s \upsilon$ μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα,

$$(-\Delta)^s \upsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\upsilon(x) - \upsilon(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

$$\leq \int_{B_R(x)} \frac{-\nabla \upsilon(x)(y-x) + B|y-x|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(x)} \frac{A}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

$$\leq B \frac{1}{|x-y|^{n+2s-2}} dy + 2A \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

$$\leq C(BR^{2-2s} + AR^{-2s}).$$

Αντικαθιστώντας όπου R το $\sqrt{\frac{A}{B}}$ έχω το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 4.2.2 *Έστω υ έτσι ώστε $||(-\Delta)^s\upsilon||_{L^\infty} \leq C$. Για $\alpha < 2s$, θέτω $\upsilon_\lambda = \frac{1}{\lambda^\alpha}\upsilon(\lambda x)$. Τότε $||(-\Delta)^s\upsilon_\lambda||_{L^\infty} \to 0$ καθώς $\lambda \to 0$.*

Απόδειξη :

Γνωρίζω ότι

$$(-\Delta)^s\upsilon_\lambda(x) = \frac{\lambda^{2s}}{\lambda^\alpha}(-\Delta)^s(\upsilon)(\lambda x),$$

οπότε έχω

$$|(-\Delta)^s\upsilon_\lambda(x)| \leq \frac{\lambda^{2s}}{\lambda^\alpha}||(-\Delta)^s(\upsilon)||_{L^\infty} \leq C\frac{\lambda^{2s}}{\lambda^\alpha} \to 0.$$

□

Λήμμα 4.2.3 *Για κάθε $s \in (0,1)$ και $\delta > 0$, εάν ϵ και α διαλεχτούν να είναι αρκετά μικρά, τότε υπάρχει ένα $\gamma > 0$ έτσι ώστε εάν*

$$(-\Delta)^s\upsilon(x) \leq \epsilon \text{ για } x \in B_1(0),$$
$$\upsilon(x) \leq 1 \text{ για } x \in B_1(0),$$
$$\upsilon(x) \leq |2x|^\alpha \text{ για } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0),$$
$$\delta \leq |\{x \in B_1(0) : \upsilon(x) \leq 0\}|,$$

τότε $\upsilon(x) \leq 1-\gamma$ για κάθε $x \in B_{1/2}(0)$.

Απόδειξη :

Όπως στο λήμμα (4.2.1) θεωρούμε την υ ομαλή.
Έστω $b(x) = \beta(|x|)$ μία ομαλή ακτινική συνάρτηση με φορέα στο B_1, έτσι ώστε $\beta(0) = 1$ και η β να είναι φθίνουσα.
Για αρκετά μικρό ϵ και α, μπορύμε να διαλέξουμε ένα θετικό αριθμό $\kappa < 1/4$, έτσι ώστε

$$\epsilon + \kappa \sup_x(-\Delta)^s b(x) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/4}} \frac{|8y|^\alpha - 1}{|y|^{n+2s}}dy < \frac{\delta}{2\cdot 2^{n+2s}}. \tag{4.9}$$

Θέτω $\gamma = \kappa(\beta(1/2) - \beta(3/4))$. Υποθέτω ότι υπάρχει $x_0 \in B_1/2$, έτσι ώστε $\upsilon(x_0) > 1-\gamma = 1-\kappa(\beta(1/2)-\beta(3/4))$. Τότε, $\upsilon(x_0) + \kappa\beta(|x_0|) \geq 1 + \kappa\beta(3/4) \geq \upsilon(y) + \kappa\beta(y)$ για κάθε $x \in B_1 \setminus B_{3/4}$. Δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $\upsilon(x) + \kappa b(x)$ στο B_1 είναι μεγαλύτερο απ'το 1 και λαμβάνεται στο εσωτερικό του $B_{3/4}$. Έστω ότι λαμβάνει μέγιστο στο $x_1 \in B_{3/4}$, από το ένα μέρος έχω ότι

$$(-\Delta)^s(\upsilon + \kappa b)(x_1) = (-\Delta)^s\upsilon(x_1) + \kappa(-\Delta)^s b(x_1) \leq \epsilon + \kappa(-\Delta)^s b(x_1),$$

και απ'το άλλο μέρος έχω :

$$(-\Delta)^s(\upsilon + \kappa b)(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\upsilon+\kappa b)(x_1) - (\upsilon+\kappa b)(y)}{|x_1 - y|^{n+2s}}dy. \tag{4.10}$$

Τώρα για κάθε σημείο z που ανήκει στο B_1 ξέρουμε ότι $(\upsilon+\kappa b)(x_1) \geq (\upsilon+\kappa b)(z)$ και από υπόθεση ξέρω ότι $|A_0| = |\{x \in B_1(0) : \upsilon(x) \leq 0\}| \geq \delta$. Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε ένα κάτω φράγμα για το ολοκλήρωμα (4.10).

$$(-\Delta)^s(\upsilon+\kappa b)(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} \frac{(\upsilon+\kappa b)(x_1) - (\upsilon+\kappa b)(y)}{|x_1-y|^{n+2s}}dy + \int_{B_1} \frac{(\upsilon+\kappa b)(x_1) - (\upsilon+\kappa b)(y)}{|x_1-y|^{n+2s}}dy$$

$$= I_1 + I_2.$$

Τώρα για το I_1 έχω :

$$I_1 \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1 + \kappa b(3/4) - |2y|^\alpha}{|x_1 - y|^{n+2s}} dy \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1 - (2(|y - x_1| + |x_1|))^\alpha}{|x_1 - y|^{n+2s}} dy,$$

όμως $|x_1| \leq \frac{3}{4} \leq 3|x_1 - y|$, αφού $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$. Οπότε θα έχω συνολικά (κανοντας μια αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα),

$$I_1 \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1 + \kappa b(3/4) - (8|y - x_1|)^\alpha}{|x_1 - y|^{n+2s}} dy \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4}} \frac{1 - (8|y|)^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Για το I_2 τώρα έχω

$$I_2 \geq \int_{A_0} \frac{1 - 2\kappa}{|x_1 - y|^{n+2s}} dy \geq \frac{\delta}{2 \cdot 2^{n+2s}}.$$

Γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη, γιατί οδηγούμαστε σε άτοπο απο την σχέση (4.9).□

Πόρισμα 4.2.4 *Για κάθε $s \in (0,1)$ και $\delta > 0$, εάν ϵ και α διαλεχτούν να είναι αρκετά μικρά, τότε υπάρχει ένα $\gamma > 0$ έτσι ώστε εάν*

$$|(-\Delta)^s \upsilon(x)| \leq \epsilon \text{ για } x \in B_1(0),$$

$$|\upsilon(x)| \leq 1 \text{ για } x \in B_1(0),$$

$$|\upsilon(x)| \leq |2x|^\alpha \text{ για } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0),$$

τότε $\sup_{B_{1/2}} \upsilon - \inf_{B_{1/2}} \upsilon \leq 2 - \gamma$.

Απόδειξη :

Θεωρώ το ίδιο γ όπως το λήμμα (4.2.3) για $\delta = \frac{|B_1|}{2}$. Υποθέτω ότι $|\{x \in B_1 \,:\, \upsilon \leq 0\}| \geq \frac{|B_1|}{2}$, αλλιώς θεωρώ την $-\upsilon$ αντί της υ. Από λήμμα (4.2.3) παίρνω ότι $\upsilon(x) \leq 1 - \gamma \; \forall x \in B_{1/2}$, άρα $\sup_{B_{1/2}} \upsilon - \inf_{B_{1/2}} \upsilon \leq 2 - \gamma$. □

Λήμμα 4.2.5 *Για κάθε $s \in (0,1)$ και $\alpha \in (0, 2s)$, εάν δ είναι κοντά στο $|B_1|$, τότε μπορούμε να διαλεξουμε ϵ τέτοιο ώστε, να υπάρχει ένα $\gamma > 0$ έτσι ώστε εάν*

$$(-\Delta)^s \upsilon(x) \leq \epsilon \text{ για } x \in B_1(0),$$

$$\upsilon(x) \leq 1 \text{ για } x \in B_1(0),$$

$$\upsilon(x) \leq 1 + |2x|^\alpha \text{ για } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0),$$

$$\delta \leq |\{x \in B_1(0) : \upsilon(x) \leq 0\}|,$$

τότε $\upsilon(x) \leq 1 - \gamma$ *για κάθε* $x \in B_{1/2}(0)$.

Απόδειξη :

Η απόδειξη είναι όμοια με αυτής του λήμματος (4.2.3) με την μόνη διαφορά, ότι διαλέγουμε το κ έτσι ώστε :

$$\epsilon + \kappa(-\Delta)^s b(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/4}} \frac{|8y|^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy < \inf_{A \subset B_1, |A| = \delta} \int_A \frac{1/2}{|x_1 - y|^{n+2s}} dy,$$

που χρειαζόμαστε το δ να είναι κοντά στο $|B_1|$ έτσι ώστε ο τελευταίος όρος του αριστερού μέρους να είναι μικρότερος από εκείνου του δεξιού. □

Λήμμα 4.2.6 *Για κάθε $s \in (0,1)$, έστω υ μια συνάρτηση έτσι ώστε $(-\Delta)^s \upsilon(x) = 0$ για κάθε x που ανήκει σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω. Υποθέτουμε ότι*

$$|\upsilon(x) - \upsilon(y)| \leq c(|x-y|), \tag{4.11}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega,\ y \in \mathbb{R}^n$ και κάποιο modulus συνέχειας c. Τότε το ίδιο ισχύει για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη :

Το μόνο που μας μένει να δείξουμε είναι ότι ισχύει η (4.11) όταν $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση υ είναι συνεχής στο Ω λόγω του ότι η $(-\Delta)^s \upsilon$ είναι μηδέν εκεί και στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ λογω της σχέσης (4.11), έτσι η υ είναι συνεχής. Θέτω $\upsilon_1(z) = \upsilon(z) - \upsilon(z + x - y)$, τότε $(-\Delta)^s \upsilon_1(z) = 0$ για $z \in \Omega \cap (\Omega + y - x)$ και $\upsilon_1(z) \leq c(|x-y|)$ όταν το z δεν ανήκει στο $\Omega \cap (\Omega + y - x)$. Από την αρχή μεγίστου έχω ότι $\upsilon(z) \leq c(|x-y|)$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, βάζοντας τώρα στη θέση του z το y έχω το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2.7 *Έστω $\mu > 0$, εάν $u(x) \geq \mu r^2$ για κάποιο $x \in B_r$, τότε*

$$|\{x \in B_{2r} : u(x) > 0\}| \geq \delta |B_{2r}|,$$

για κάποιο δ που εξαρτάται από το μ.

Απόδειξη :

Γνωρίζω ότι η u είναι ημικυρτή, οπότε για κάθε x υπάρχει ένα παραβολοϊδές που ακουμπά την u από κάτω, δηλαδή

$$u(y) \geq u(x) + B(y-x) - \frac{C}{2}|x-y|^2,$$

όπου B είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στο υποδιαφορικό της $u(y) + \frac{C}{2}|x-y|^2$ στο x.

Τώρα θεωρώ το σύνολο

$$A = \{y : B(y-x) \geq 0\} \cap B_{(\frac{\mu}{C})^{1/2} r}.$$

Έστω $y \in A$ τότε

$$u(y) \geq u(x) + B(y-x) - \frac{C}{2}|x-y|^2 \geq u(x) - \frac{\mu r^2}{2} \geq \frac{\mu r^2}{2} > 0.$$

Το σύνολο A είναι το μισό της μπάλλας, οπότε εάν $(\frac{\mu}{C})^{1/2} \leq 1$ το A περιέχεται πλήρως στην μπάλλα B_{2r} και συμπεραίνουμε το αποτέλεσμα για $\delta = \frac{1}{2}(\frac{\mu}{4C})^{n/2}$, αφού

$$|\{x \in B_{2r} : u(x) > 0\}| \geq |A| \geq \frac{1}{2}|B_{(\frac{\mu}{C})^{1/2} r}| = \frac{1}{2}(\frac{\mu}{4C})^{n/2}|B_{2r}|.$$

Αν τώρα $(\frac{\mu}{C})^{1/2} > 1$ παίρνουμε $A' = \{y : B(y-x) \geq 0\} \cap B_r$ και ομοίως φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα για $\delta = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε την C^α ομαλότητα της w.

Θεώρημα 4.2.8 *Έστω ότι η u και η w είναι όπως τις (4.2-4.8), τότε η w είναι C^α συνεχής, και η C^α νόρμα της εξαρτάται απ'την σταθερά των σχέσεων (4.2-4.8).*

Απόδειξη :

Ας κανονικοποιήσουμε τις u και w, έτσι ώστε $||w||_{L^\infty} = 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά C_0, έτσι ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει :

$$\sup_{B_{2^{-k}}(x)} w - \inf_{B_{2^{-k}}(x)} w \leq C_0 2^{-\alpha k}, \tag{4.12}$$

δηλαδή ότι η w είναι C^α. Αφού η συνάρτηση w είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε C_0 ώστε η σχέση (4.12) να ισχύει για $k \leq k_0$. Θα δείξουμε το αποτέλεσμα με επαγωγή, διαλέγοντας το C_0 αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η σχέση (4.12) να ισχύει $\forall k \in \mathbb{N}$.
Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρώ $x = 0$ και ότι το 0 ανήκει στον φορέα της u (θα θεωρήσουμε αργότερα την άλλη περίπτωση). Έστω λοιπόν, ότι η σχέση (4.12) ισχύει για $k = 0, 1, .., k_0$, ας πάμε να δείξουμε ότι ισχύει και για $k = k_0 + 1$. Έστω $\delta > 0$ (ένας μικρός αριθμός που θα προσδιοριστεί αργότερα), θα αποδείξουμε ότι

$$|\{x \in B_{2^{-k}} : w(x) - \inf_{B_{2^{-k_0}}} \leq \frac{C_0}{2} 2^{-\alpha k_0}\}| \geq \delta |B_{2^{k_0}}|. \tag{4.13}$$

Αλλά πρώτα θα δείξουμε πως η σχέση (4.13) εφαρμόζεται στην επαγωγή μας. Θεωρώ την συνάρτηση

$$\upsilon(x) = 2C_0^{-1} 2^{k_0 \alpha}(w(2^{-k_0}x) - \inf_{B_{2^{-k_0}}} w) - 1.$$

Τότε εάν διαλέξουμε το $\alpha < 2 - 2s$ και αρκετά μικρό καθώς και το k_0 αρκετά μεγάλο θα έχω ότι η υ ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος (4.2.3) με $1 - s$. Αφού,

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{1-s}\upsilon(x) &= 2C_0^{-1} 2^{k_0 \alpha}(-\Delta)^{1-s} o\, (-\Delta)^s u(2^{-k_0}x) \\ &\leq C' 2^{-2k_0 + k_0 \alpha} < \epsilon,\end{aligned}$$

για $x \in B_1$ και k_0 αρκετά μεγάλο.
Η σχέση $\upsilon(x) \leq 1$, για $x \in B_1$, βγαίνει από την σχέση (4.12). Η σχέση $\delta \leq |\{x \in B_1(0) : \upsilon(x) \leq 0\}|$, βγαίνει από την σχέση (4.13) και τέλος η σχέση $\upsilon(x) \leq |2x|^\alpha$ για $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$, βγαίνει από το λήμμα (4.2.2).
Οπότε υπάρχει $\gamma > 0$ έτσι ώστε $\upsilon(x) \leq 1 - \gamma$ για $x \in B_{1/2}$, που συνεπάγεται

$$w(2^{-k_0}x) \leq (1 - \frac{\gamma}{2}) C_0 2^{-k_0 \alpha} + \inf_{B_{2^{-k_0}}} w,$$

για $x \in B_{2^{-k_0 - 1}}$. Οπότε εάν διαλέξω το $\gamma < 1/2$ έχω :

$$\sup_{B_{2^{-k_0-1}}} w - \inf_{B_{2^{-k_0-1}}} w \leq C_0 2^{-\alpha(k_0+1)},$$

και τελειώνει εδώ η επαγωγή μας.
Μας μένει λοιπόν να δείξουμε την σχέση (4.13). Θα την δείξουμε με άτοπο. Έστω ότι ισχύει :

$$|\{x \in B_{2^{-k}} : w(x) - \inf_{B_{2^{-k_0}}} w \leq \frac{C_0}{2} 2^{-\alpha k_0}\}| \leq \delta |B_{2^{k_0}}|. \tag{4.14}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $w(x) \geq \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\inf_{B_{2^{-k_0}}} w \geq \inf_{B_{2^{-k_0}}} \phi$ και αφού η ϕ είναι *Lipschitz*

$$\sup_{B_{2^{-k_0-1}}} \phi - \inf_{B_{2^{-k_0-1}}} \phi \leq C 2^{-k_0} < \frac{C_0}{2} 2^{-\alpha k_0},$$

για k_0 αρκετά μεγάλο.
Επίσης γνωρίζουμε ότι, όταν $u(x) > 0$, τότε $w(x) = \phi(x)$, και επιπλέον έχω

$$\{x \in B_{2^{-k}} : u(x) > 0\} \subset \{x \in B_{2^{-k}} : w(x) - \inf_{B_{2^{-k_0}}} \leq \frac{C_0}{2} 2^{-\alpha k_0}\},$$

οπότε έχω συνολικά

$$\{x \in B_{2^{-k}} : u(x) > 0\} \leq \delta |B_{2^{k_0}}|.$$

Διαλέγουμε το δ στην απόδειξή μας αρκετά μικρό, έτσι ώστε απο το λήμμα (4.2.7) να έχω $u(x) \leq \mu 2^{-2k_0}$ $\forall x \in B_{\frac{3}{4}2^{-k_0}}$.
Τώρα θεωρώ το παραμετρικοποιημένο πρόβλημα :

$$\overline{u}(x) = C_0^{-1} 2^{k_0(\alpha+2s)} u(2^{-k_0} x),$$

$$\overline{w}(x) = C_0^{-1} 2^{k_0 \alpha} w(2^{-k_0} x),$$

$$\overline{\phi}(x) = C_0^{-1} 2^{k_0 \alpha} \phi(2^{-k_0} x),$$

οι συναρτήσεις $\overline{u}$, $\overline{w}$, επίσης ικανοποιούν τις αρχικές μας υποθέσεις :

$$\overline{w}(x) = (-\Delta)^s \overline{u}(x)$$

$$\overline{u}(x) \geq 0,$$

$$\overline{w} \geq \phi(x),$$

$$\overline{w} = \overline{\phi}(x) \text{ } \acute{o}\tau\alpha\nu \text{ } \overline{u} > 0,$$

και από τις σχέσεις ((4.5)-(4.8)), έχω

$$\sup_{x,y} \frac{|\overline{\phi}(x) - \overline{\phi}(y)|}{|x-y|} \leq C 2^{-k_0(1-\alpha)},$$

$$\overline{u}_{ee} \geq -C 2^{-k_0(2-2s-\alpha)} \ \forall \ e \text{ έτσι ώστε } |e| = 1,$$

$$\overline{u}(x) \leq C 2^{-k_0(2-2s-\alpha)} \ \forall x \in B_{3/4}.$$

Εάν διαλέξουμε το C_0, έτσι ώστε να θεωρήσουμε το k_0 αρκετά μεγάλο, για να έχουμε

$$\sup_{x,y} \frac{|\overline{\phi}(x) - \overline{\phi}(y)|}{|x-y|} \leq \epsilon, \tag{4.15}$$

$$\overline{u}_{ee} \geq -\epsilon \ \forall \ e \text{ έτσι ώστε } |e| = 1, \tag{4.16}$$

$$0 \leq \overline{u}(x) \leq \epsilon \ \forall x \in B_{3/4}, \tag{4.17}$$

για τυχαίο $\epsilon << \delta$.
Από τις σχέσεις (4.15), (4.17) και από το λήμμα (4.2.6), έχω ότι η $\overline{u}$ είναι *Lipschitz* στο $B_{5/8}$ και η νόρμα της είναι μικρότερη από $C\epsilon$.
Οπότε η επαγωγή μου μετατρέπεται στην

$$\sup_{B_{2^k}(x)} \overline{w} - \inf_{B_{2^k}(x)} \overline{w} \leq C_0 2^{\alpha k},$$

για $k = 0, 1, 2...$
Τότε θα έχουμε

$$|\overline{w}(x) - \overline{w}(0)| \leq 1, \qquad \text{για} \ \ |x| \leq 1$$

$$|\overline{w}(x) - \overline{w}(0)| \leq |2x|^{\alpha}, \qquad \text{για} \ \ |x| > 1$$

τέλος από την (4.14)

$$|\{x \in B_1 : \overline{w}(x) - \inf_{B_1} \overline{w} \leq \frac{1}{2}\}| \leq \delta |B_1|$$

$$\Rightarrow (1-\delta)|B_1| \leq |\{x \in B_1 : \overline{w}(x) - \inf_{B_1} \overline{w} > \frac{1}{2}\}|. \tag{4.18}$$

Τώρα θεωρώ την ομαλή συνάρτηση $0 \leq b \leq 1$ που ικανοποιεί τα εξής :

$$b(x) = 0, \quad \text{εάν } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{5/8}$$

$$b(x) = 1, \quad \text{εάν } x \in \setminus B_{7/16}.$$

Έτσι έχουμε :

$$b(x)\overline{u}(x) \leq \epsilon,$$

$$(b(x)\overline{u}(x))_{ee} = b_{ee}\overline{u} + 2b_e\overline{u}_e + b\overline{u}_{ee} \geq -C\epsilon - C'.$$

Θέτω $h = (-\Delta)^s(b\overline{u})$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα (4.2.1), για να συμπεράνουμε ότι $h \leq C\epsilon^s$. Από κατασκευής έχω $\overline{u} - b\overline{u} = 0$ στο $B_{7/16}$, επιπλέον

$$0 = -\Delta(u - bu) = (-\Delta)^{1-s}(w - h) \qquad \text{στο} \ \ B_{7/16}.$$

Θέτω $\upsilon = 1 + 2(h(x) + \inf_{B_1} \overline{w} - \overline{w}(x) - C\epsilon^s)$. Τότε,

$$(-\Delta)^{1-s}\upsilon = 0 \qquad \text{στο} \ \ B_{7/16},$$

$$\sup_{B_1} \upsilon \leq 1,$$

$$\sup_{B_{2^k}} \upsilon \leq 1 + 2(h(x) + |\overline{w}(x) - \overline{w}(0)| - 2C\epsilon^s \leq 1 + 2(2 \cdot 2^k)^{\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

και από τη σχέση (4.18) έχω:

$$(1-\delta)|B_1| \leq |\{x \in B_1 : \upsilon(x) < 0\}|.$$

Τότε, εάν το δ διαλεχτεί αρκετά μικρό, εφαρμόζουμε το λήμμα (4.2.5) (παραμετρικοποιώντας την υ) για να βγάλουμε, $\upsilon(x) \leq (1-\gamma)$ από όπου συνεπάγεται,

$$\overline{w} \geq \gamma + 2\inf_{B_1} \overline{w} + 2h + 2C\epsilon^s, \tag{4.19}$$

για $x \in B_{5/8}$.
Θέτω $\upsilon_1(x) = b(x)\overline{u} + \epsilon b(2x)$. Τότε $\max \upsilon(x) = \upsilon(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in B_{5/8}$. Επιπλέον, αφού $0 \in supp\overline{u}$ και $\epsilon b(0) = \epsilon \leq \epsilon b(x_0)$, έχω ότι $\overline{u}(x_0) > 0$, οπότε υπάρχει περιοχή του x_0, τέτοια ώστε $u(x) > 0$, δηλαδή, $(-\Delta)^s\overline{u}(x) = \overline{\phi}(x)$, που συνεπάγεται ότι τόσο η $(-\Delta)^s\overline{u}$ όσο και η $(-\Delta)^s\upsilon_1(x)$, είναι ομαλές συναρτήσεις σε μια περιοχή του x_0. Αφού στο σημείο x_0 η υ_1 παίρνει μέγιστο, συνεπάγεται

$$0 \leq (-\Delta)^s\upsilon_1(x_0) = h(x_0) + \epsilon(-\Delta)^s b(2x) \leq h(x_0) + C\epsilon^s,$$

οπότε έχουμε,

$$\overline{w}(x_0) \geq \gamma + \inf_{B_1} \overline{w} + h(x_0) - C\epsilon^s,$$

από όπου συμπεραίνουμε μέσω της (4.19) και του ότι $x \in supp\overline{u}$ την ακόλουθη ανισότητα,

$$\gamma \leq \overline{\phi}(x_0) - \inf_{B_1} \overline{\phi} + C\epsilon^s < C'\epsilon^s,$$

οπότε έχω συνολικά,

$$\overline{w}(x_0) - \inf_{B_1} \overline{w} \leq \frac{1}{2} - \frac{\upsilon(x_0)}{2} + h(x_0) - C\epsilon^s \leq C'\epsilon^s < 1/2,$$

δηλαδή δεν υπάρχει δ, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση (4.14). Γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη, εάν $x \in suppu$. Για να το επεκτείνουμε τώρα σε όλο τον $\mathbb{R}^n$ δουλεύουμε ως εξής, έστω $x \in \{u = 0\} \setminus int(\{u = 0\})$, θεωρώ μία ακολουθία $x_n \in \{u > 0\}$ τέτοια ώστε να συγκλίνει στο x. Τότε $\forall y \in \{u > 0\}$ έχω ότι ισχύει

$$|w(y) - w(x_n)| \leq C|x_n - y|^\alpha,$$

που συνεπάγεται παίρνοντας το όριο, ότι $w \in C^\alpha$. Εάν τώρα $x \in int\{u = 0\}$, έχουμε $(-\Delta)^{1-s} w = 0$ οπότε από το λήμμα (4.2.6) έχω το ζητούμενο. $\square$

4.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα του Λεπτού Εμποδίου.

Θεωρούμε μία συνάρτηση $u_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ που ανήκει στον S. Έστω $u : \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης *Laplace* στον πάνω ημίχωρο που μηδενίζεται στο άπειρο και έχει την u_0 σαν αρχική συνθήκη :

$$u(x', 0) = u_0(x') \qquad , \text{για } x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\Delta u(x) = 0 \qquad , \text{για } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, +\infty)$$

Θεωρούμε τον τελεστή $T : u_0 \to -\partial_n u$. Παρατηρούμε

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0)(-\partial_n u(x', 0))dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times (0,+\infty)} -u(x)\Delta u(x) + |\nabla u|^2 dx \geq 0,$$

δηλαδή ο τελεστής T είναι θετικος. Επιπλέον, αφού η $\partial_n u(x)$ είναι επίσης αρμονική συνάρτηση, εάν εφαρμόσουμε τον τελεστή δύο φορές παίρνουμε :

$$ToTu_0 = (-\partial_n)(-\partial_n)u(x', 0) = \partial_{nn} u(x', 0)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_{ii} u(x', 0) = -\Delta u_0,$$

δηλαδή ο τελεστής T είναι ο τελεστής $(-\Delta)^{1/2}$.

Επειδή συχνά το πρόβλημα του λεπτού εμποδίου μελετάται σε φραγμένα χωρία, αλλάζουμε το πρόβλημα με τον εξής τρόπο. Έστω ότι έχουμε την λύση του λεπτού εμποδίου του ακόλουθου προβλήματος στην μοναδιαία μπάλλα :

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{στο } B_1^+(0)$$

$$u(x) = 0 \quad \sigma\tau o \ (\partial B_1(0))^+$$
$$u(x', 0) \geq \varphi(x') \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \ |x'| \leq 1$$
$$\partial u(x', 0) \leq 0 \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \ |x'| \leq 1$$
$$\partial u(x', 0) = 0 \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \ u(x', 0) > \varphi(x')$$

και τέλος έχω $\varphi(x') < 0$ όταν $|x'| = 1$. Έστω $0 \leq \eta \leq 1$ μία ακτινική συνάρτηση ομαλή, έτσι ώστε $\{\varphi > 0\} \subset\subset \{\eta = 1\}$ και $supp\eta \subset B_1(0)$. Η συνάρτηση ηu είναι μεγαλύτερη της φ και επίσης ικανοποιεί $\partial \eta u(x', 0) \leq 0$, όταν $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $\partial \eta u(x', 0) = 0$, όταν $\eta u(x', 0) > \varphi(x')$. Παρόλου που η συνάρτηση ηu δεν είναι αρμονική στον πάνω ημίχωρο, η $\Delta \eta u$ ωστόσο είναι ομαλή συνάρτηση. Θεωρώ την υ που είναι η μοναδική φραγμένη λύση του παρακάτω προβλήματος $Newmann$ στο πάνω ημίχωρο,

$$\Delta \upsilon(x) = \Delta \eta u = \Delta \eta(x) u(x) + 2\nabla \eta(x) \nabla u(x)$$

$$\partial_n \upsilon(x', 0) = 0$$

Αφού η $\Delta \eta u$ είναι ομαλή με συμπαγή φορέα, η υ είναι μία ομαλή συνάρτηση. Τώρα η συνάρτηση $\eta u - \upsilon$ είναι η λύση του προβλήματος του λεπτού εμποδίου με εμπόδιο την $\phi(x') - \upsilon(x', 0)$. Έτσι περνάμε από την φραγμένη περίπτωση στην μη φραγμένη και εφαρμόζουμε τα αποτελέσματά μας.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα.

5.1 Βασικοί Ορισμοί.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε βασικούς ορισμού που θα χρειαστούν κυρίως στο κεφάλαιο 3 (για περισσότερες λεπτομέριες ίδε [15]).

Ορισμός 5.1.1 *Έστω $u \in H^1(\Omega)$, όπου Ω ανοιχτό, φραγμένο, με ομαλό σύνορο και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $E \subset \overline{\Omega}$. Τότε η $u \geq 0$ στο E ως προς στο $H^1(\Omega)$, εάν υπάρχει μία ακολουθία $u_n \in H^{1,\infty}(\Omega)$ έτσι ώστε :*

$$u_n(x) \geq 0 \ \text{ για } \ x \in E \ \text{ και } \ u_n \to u \ \text{ στο } \ H^1(\Omega).$$

Εάν $-u \geq 0$ στο $H^1(\Omega)$ και $u \leq 0$ στο $H^1(\Omega)$ τότε θα λέμε, ότι $u = 0$ στο $H^1(\Omega)$. Επίσης θα λέμε ότι $u \leq h$ στο $H^1(\Omega)$, εάν $h - u \geq 0$ στο $H^1(\Omega)$ για δύο στοιχεία $u, h \in H^1(\Omega)$. Ειδικότερα, η h μπορεί να είναι σταθερή συνάρτηση, το οποίο μας οδηγεί στον εξής ορισμό :

$$\sup_{x\in E} u \ = \ \inf \{M \in \mathbb{R} : u \leq M \text{ στο } E \text{ στο } H^1(\Omega)\}.$$

Επιπλέον, παρατηρώ ότι το υποσύνολο των συναρτήσεων $u \in H^1(\Omega)$ ικανοποιώντας $u \geq 0$ στο Ε ως προς στο $H^1(\Omega)$ είναι ένας κυρτός και κλειστός κώνος. Ειδικότερα, μία άμεση συνέπεια είναι ότι στον παραπάνω ορισμό αρκεί να διαλέξουμε μία ακολουθία τέτοια ώστε $u_m \rightharpoonup u$ στο $H^1(\Omega)$, απ'το θεώρημα των $Banach - Saks$.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην διατύπωση της πρότασης που είναι :

Πρόταση 5.1.2 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο, $E \subset \overline{\Omega}$, και $u \in H^1(\Omega)$.*
α) Εάν $u \geq 0$ στο E ως προς στο $H^1(\Omega)$, τότε $u \geq 0$ στο E σχεδόν παντου.
β) Εάν $u \geq 0$ στο E σχεδόν παντου, τότε $u \geq 0$ στο E ως προς στο $H^1(\Omega)$.
γ) Εάν $u \in H_0^1(\Omega)$ και $u \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω, τότε υπάρχει μία ακολουθία $u_n \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ έτσι ώστε $u_n \geq 0$ στο Ω και $u_n \to u$ στον $H_0^1(\Omega)$.
δ) Εαν E ανοιχτό υποσύνολο του Ω και $u \geq 0$ σχεδόν παντού στο E, τότε $u \geq 0$ στο K ως προς το $H^1(\Omega)$ για κάθε συμπαγές K υποσύνολο του Ω.

Ορισμός 5.1.3 *Έστω $u \in H^1(\Omega)$. Θα λέμε ότι $u(x) > 0$ για $x \in \Omega$ ως προς το $H^1(\Omega)$ εάν υπάρχει μία περιοχή $B_r(x)$ και $h \in H_0^{1,\infty}(B_r(x))$, $h \geq 0$, να μην είναι παντού 0, έτσι ώστε $u - h \geq 0$ ως προς το $H^1(\Omega)$.*

5.2 Ύπαρξη και Μοναδικότητα των Λύσεων για τα Τρία Προβλήματα.

Θεωρώ το παρακάτω πρόβλημα :

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω K κυρτό και κλειστό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Επίσης έστω ένας διγραμμικός συμμετρικός τελεστης $a(.,.) : H \times H \rightarrow R$ που να ικανοποιεί $a(u,u) \geq C||u||_H^2, \quad \forall u \in H$ και $f \in H'$. Υπάρχει, τότε ένα μοναδικό $u \in K$ που να ικανοποιεί*

$$I(u) = a(u,u) - < f, u >= \inf_{v \in K} I(v)$$

και αυτή μάλιστα ικανοποιήται η εξής σχέση,

$$a(u, v-u) \geq < f, v-u >, \quad \forall\, v \in K$$

επίσης εάν $u_1,\ u_2$ είναι λύσεις του παραπάνω προβλήματος με αντίστοιχες $f_1,\ f_2 \in H'$ τότε :

$$||u_1 - u_2||_H \leq \frac{1}{C}||f_1 - f_2||_{H'}, \tag{5.1}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται απ΄το τελεστή a.

Απόδειξη :

Πρώτα θα δείξουμε την (5.1). Έστω $u_1,\ u_2$ λύσεις του προβλήματος με αντιστοιχες $f_1,\ f_2$. Τότε αυτές θα ικανοποιούν :

$$a(u_i, v-u_i) \geq < f, v-u_i >, \quad \forall\, v \in K \ \ \textit{και} \ \ i = 1,2 \Rightarrow$$

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq < f_1, u_2 - u_1 >$$

και

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq < f_2, u_1 - u_2 > .$$

Στη συνέχεια τα προσθέτω κατά μέλη οπότε έχω :

$$-a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq - < f_1 - f_2, u_1 - u_2 > \Rightarrow$$

$$C||u_1 - u_2||_H^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq < f_1 - f_2, u_1 - u_2 > \leq ||f_1 - f_2||_{H'}||u_1 - u_2||_H,$$

απ'οπου συνεπάγεται η σχέση (5.1).
Τώρα μένει να αποδείξουμε την ύπαρξη της u. Θέτω

$$d = \inf_{\{u \in K\}} I(u).$$

Αφού $\forall u \in K$ ισχύει,

$$I(u) \geq C||u||_H^2 - ||f||_{H'}||u||_H \geq C||u||_H^2 - \frac{C'}{\epsilon}||f||_{H'}^2 + \epsilon||u||_H,$$

διαλέγοντας $\epsilon < C$ έχω :

$$I(u) \geq -\frac{C'}{\epsilon}||f||_{H'}^2 \quad \forall u \in K,$$

οπότε υπάρχει ακολουθία $u_n \in K$ τέτοια ώστε $d \leq I(u_n) \leq d + 1/n \quad \forall\, n$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμου, έχω :

$$C||u_n - u_m||_H^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)) =$$

$$2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I(\frac{1}{2}(u_n + u_m)) \leq 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}),$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει $4 < f, u_n > +4 < f, u_m > -8 < f, \frac{1}{2}(u_n + u_m) >= 0$. Οπότε η ακολουθία u_n είναι $Cauchy$, οπότε υπάρχει $u \in K$ έτσι ώστε $u_n \to u$ στο H και $I(u_n) \to I(u)$, οπότε $I(u) = d$. Τώρα $\forall v \in K$ έχω ότι $u + \epsilon(v - u) \in K$ $\forall \epsilon \in [0, 1]$ και

$$I(u + \epsilon(v - u)) \geq I(u),$$

όμως για $\epsilon = 0$ η συνάρτηση $\varphi(\epsilon) = I(u + \epsilon(v - u))$ παίρνει ελάχιστο, οπότε θα έχω $\varphi'(0) = 0$, επιπλέον έχω

$$\varphi(\epsilon) = 2\epsilon a(u, v - u) + \epsilon^2 a(v - u, v - u) - 2\epsilon < f, v - u > \Rightarrow$$

$$\varphi'(\epsilon) = 2a(u, v - u) + \epsilon a(v - u, v - u) - < f, v - u >,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη για $\epsilon = 0$. □

Παρατήρηση. Για $f = 0$ έχω ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ότι η συνάρτηση u πρέπει να ικανοποιεί την :

$$a(v, v - u) \geq 0 \quad \forall\, v \in K. \tag{5.2}$$

Όντως, έστω η u ικανοποιεί το πρόβλημά μας, τότε θα έχω :

$$0 \leq a(v - u, v - u) = a(v, v - u) - a(u, v - u) \leq a(v, v - u).$$

Έστω η u ικανοποιεί το (5.2), τότε θα έχω για $0 \leq t \leq 1$ και $w \in K$:

$$0 \leq a(u + t(w - u), t(w - u)) = ta(u, w - u) + t^2 a(w - u, w - u),$$

διαιρώντας το τελευταίο όρο με t και στέλνοντάς το στο μηδέν, έχω το ζητούμενο.

5.3 Ιδιότητες των υπεραρμονικών συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τον ορισμό των υπεραρμόνικών συναρτήσεων και θα δείξουμε κάποιες ιδιότητες, αυτών των συναρτήσων.

Ορισμός 5.3.1 *Η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(D)$ είναι υπεραρμονική στο D, εάν $\forall\, \psi \in C_0^{1,1}(D)$ με ψ μη αρνητική να ικανοποιείται η ανισότητα:*

$$\int_D u \Delta \psi dx \leq 0$$

Λήμμα 5.3.2 *Εάν η u είναι υπεραρμονική τότε η μέση τιμή της είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς R. Ειδικότερα, εάν $0 < R < S$*

$$\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy \;\geq\; \frac{1}{|B_S(x_0)|} \int_{B_S(x_0)} u(y) dy$$

Απόδειξη :

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα το αποδείξω για $x_0 = 0$. Θεωρούμε την παραβολοειδής συνάρτηση $P_R(x) = a(R)|x|^2 + b(R)$ που εφάπτεται από κάτω της θεμελιώδους λύσης $V = \frac{1}{|x|^{n-2}}$ στο $|x| = R$ και επιλέγω $a(R) = \frac{2-n}{2R^n}$ και $b(R) = \frac{n}{2R^{n-2}}$ ώστε η συνάρτηση

$$V_R = \begin{cases} V - P_R \ \text{για} \ |x| < R \\ 0 \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

να είναι $C^{1,1}$ και $\Delta V_R = -a(R)$, μακριά απ'το 0. Επίσης για $R < S$ έχω $V_R \leq V_S$.
Στην συνέχεια θέτω $\psi = V_S - V_R$, τότε παρατηρώ ότι, η ψ μηδενίζεται έξω απ'το $B_S(0)$, $\psi \in C_0^{1,1}$, $\psi \geq 0$ και

$$\Delta\psi \ = \ -2a(S)\chi_{B_S(0)} + 2a(R)\chi_{B_R(0)}.$$

Τέλος, για την υπεραρμονική u εφαρμόζουμε τον ορισμό (5.3.1) με συνάρτηση ελέγχου την παραπάνω ψ οπότε έχω

$$0 \ \geq \ \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\psi dx \ = \ (n-2)q(n)(\frac{1}{|B_S(x_0)|}\int_{B_S(x_0)} u(y)dy \ - \ \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(y)dy)$$

όπου $q(n)$ ο όγκος της μοναδιαίας μπάλλας. □

Πόρισμα 5.3.3 *Κάθε άνω φραγμένη υπεραρμονική συνάρτηση u, έχει μοναδικά κατά σημείο ορισμένα αντιπρόσωπο απ'τη σχέση :*

$$u(x_0) \ = \ \lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(y)dy \ .$$

Επίσης, η u είναι κάτω ημισυνεχής, δηλαδή

$$u(x_0) \ \leq \ \liminf_{x\to x_0} u(x).$$

Απόδειξη :

α) Από θεώρημα παραγώγισης του *Lebesque* έχω ότι $u(x_0) \ = \ \lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(y)dy$ σχέδον παντού. Για τα x_0 που δεν ισχύει ορίζω την u να παίρνει τις τιμές του ορίου : $u(x_0) = \lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} u(y)dy$. Το όριο υπάρχει, αφού απ'την υπόθεση και απ'το λήμμα (5.3.2) έχω μία άνω φραγμένη ακολουθία καθώς το R φθίνει.

Για το ότι είναι κάτω ημισυνεχής θεωρώ τις απολύτως συνεχείς συναρτήσεις $u_n(x) = \frac{1}{|B_{\frac{1}{n}}(x)|}\int_{B_{\frac{1}{n}}(x)} u(y)dy$ που συγκλίνουν κατά σημείο στο $u(x)$ και εάν $n > m$ τότε ισχύει $\forall x \ \ u(x) \geq u_n(x) \geq u_m(x)$. Έστω x_0 και $\varepsilon \geq 0$. Θεωρώ n έτσι ώστε $|u_n(x_0) - u(x_0)| < \varepsilon/2$ και $\delta > 0$ έτσι ώστε $\forall x \in B_\delta(x_0)$ να έχω $|u_n(x) - u_n(x_0)| < \varepsilon/2$ τότε έχω το εξής :

$$u(x) - u(x_0) = u(x) - u_n(x) + u_n(x) - u(x_0) + u_n(x_0) - u_n(x_0)$$

$$\geq u_n(x) - u(x_0) + u_n(x_0) - u_n(x_0) > \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Δηλαδή, η u είναι κάτω ημισυνεχής στο x_0 και αφού το x_0 είναι τυχαίο έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη. □

Θεώρημα 5.3.4 *Έστω u υπεραρμονική συνάρτηση, και υποθέτουμε ότι η* $u/support(\Delta(u))$ *είναι συνεχής. Τότε u είναι συνεχής*

Απόδειξη :

Έστω ότι η u δεν είναι συνεχής . Οπότε υπάρχει ακολουθία $x_k \in D$ με $x_k \in D$ $\forall k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in D$ και $\lim_{k\to\infty}(u(x_k)) \neq u(x_0)$ (το όριο υπάρχει αφού u κάτω ημισυνεχής).
α) Τότε $x_0 \in support(\Delta(u))$, γιατί αλλιώς η u θα ήταν αρμονική σε μια περιοχή του x_0 άρα και συνεχής άτοπο.
β) Η $x_k \notin support(\Delta(u))$, αφού η u είναι συνέχης εκεί. γ) Έστω $\lim_{k\to\infty}(u(x_k)) = a > u(x_0) = 0$ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας).
δ) Επιπλέον, από ημισυνέχεια , δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε $u(x) > -\varepsilon \;\; \forall x \in B_\delta(x_0)$.

Θεωρώ $y_k \in support(\Delta u_0)$ να είναι το πλησιέστερο σημείο στο x_k, ειδικότερα $\delta_k = |x_k - y_k| \leq |x_k - x_0| \to 0$.
Οπότε $\lim_{k\to\infty}(u(y_k)) = u(x_0) = 0$, αφού η u είναι συνεχής στο $support(\Delta u_0)$. Τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε το άτοπο.

Από λήμμα (5.3.2) έχω ότι $\forall s < \delta_k < \frac{\delta}{2}$

$$\frac{1}{|B_s(y_k)|}\int_{B_s(y_k)} u(y)dy \;\geq\; \frac{1}{|B_{\delta_k}(y_k)|}\int_{B_{\delta_k}(y_k)} u(y)dy$$

και απ΄το πόρισμα (5.3.3) έχω ότι καθώς $s \to \infty$:

$$u(y_k) \;\geq\; \frac{1}{|B_{\delta_k}(y_k)|}\int_{B_{\delta_k}(y_k)} u(y)dy. \tag{5.3}$$

Επιπλέον έχω ότι :

$$\int_{B_{2\delta_k}(y_k)} u(y)dy \;= \int_{B_{\delta_k}(x_k)} u(y)dy + \int_{B_{2\delta_k}(y_k)-B_{\delta_k}(x_k)} u(y)dy = I_1 + I_2.$$

Επίσης θεωρώ $|x_k - x_0| < \delta \; \forall k \geq k_0$ για κάποιο k_0 που εξαρτάται απ΄το δ. Οπότε για το I_2, στο χωρίο που ολοκληρώνουμε έχω ότι $u > -\varepsilon \Rightarrow I_2 > -\varepsilon|B_{2\delta_k}|$.

Για το I_1, έχω ότι η u είναι αρμονική εκεί που την ολοκληρώνουμε, οπότε απ΄το θεώρημα μέσης τιμής έχω ότι

$$I_1 > -\varepsilon|B_{\delta_k}(x_k)|.$$

Επιπλέον από (5.3) έχω ότι :

$$u(y_k) \geq \frac{-\varepsilon(\delta_k)^n 2^n q(n) + (\delta_k)^n q(n) u(x(k))}{(\delta_k)^n q(n)} = -\varepsilon 2^n + u(x_k).$$

Οπότε καθώς $k \to \infty$ έχω ότι:

$$0 = \lim_{k\to\infty} u(y_k) \geq \lim_{k\to\infty} u(x_k) = a > 0.$$

Άτοπο. $\square$

5.4 Βασική Θεωρία για τους Ψευδο-διαφορικούς τελεστές του Τύπου $(-\Delta)^s$.

Στην παρακάτω παράγραφο θα δείξουμε βασίκες ιδιότητες του τελεστή $(-\Delta)^s$ που θα μας χρειαστούν στο κεφάλαιο 4. Στις αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών, συχνά θα αναφερόμαστε στο βιβλίο του *Landkof* ([16]) . Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με S τον χώρο τών $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ συναρτήσεων που ικανοποιούν την εξής σχέση,

$$\sup |x^\alpha D^\beta \phi| < \infty,$$

για κάθε πολυδείκτη α, β. Και τον δυικό του θα τον συμβολίζουμε με S', που είναι ο χώρος τον κατανομών στον $\mathbb{R}^n$.
Τώρα θα δώσουμε ένα ορισμό για τον ψευδοδιαφορικό τελεστή $(-\Delta)^s$.

Ορισμός 5.4.1 *Έστω $s \in (-n/2, 1]$ και $f \in S$, ορίζουμϵ τον $(-\Delta)^s$ ως τον μϵτασχηματισμό Fourier :*

$$\widehat{(-\Delta)^s} f(\xi) = |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi), \tag{5.4}$$

ή ισοδύναμα ϵάν $s \in (0, 1)$

$$(-\Delta)^s f(x) = c_{n,s} PV \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \tag{5.5}$$

ή ϵάν $s \in (-n/2, 0)$

$$(-\Delta)^s f(x) = c_{n,-s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \tag{5.6}$$

όπου

$$c_{n,s} = \pi^{2s-n} \frac{\Gamma(\frac{n+2s}{2})|s-1|}{\Gamma(|s|)}.$$

Για την ισοδυναμία των σχέσεων (5.4) και (5.5), καθώς και των (5.4) και (5.6) θα σας αναπρέξουμε στο βιβλίο του *Landkof* [16], καθώς επίσης ότι $(-\Delta)^s f \in C^\infty$ και ότι δεν ανήκει στον S. Επίσης από την σχέση (5.4) έχω ότι ισχύει, $(-\Delta)^1 = -\Delta$, $(-\Delta)^0 = Id$ και $(-\Delta)^{s_1} o (-\Delta)^{s_2} = (-\Delta)^{s_1+s_2}$. Επίσης απ΄την (5.6) έχω ότι η θεμελιώδη λύση του τελεστή $(-\Delta)^s$ είναι η συνάρτηση $F(x) = c_{n,-s}\frac{1}{|x|^{n-2s}}$, δηλαδή $(-\Delta)^s F = \delta_0$ όταν $n > 2s$ (ίδε *Landkof* [16]).
Τώρα ας μελετήσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.5). Παίρνω για την απλοποίηση των πράξεων $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και θέτω $T = B_1(0)$ και για s διαφορο του $n + 2k$ $(k = 0, 1, ...)$ έχω την :

$$\psi(x, s) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y+x)}{|y|^{n+2s}} dy$$

$$= c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} \frac{f(x) - f(y+x)}{|y|^{n+2s}} dy + c_{n,s} \int_T \frac{f(x) - f(y+x)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

όμως

$$c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} \frac{f(x)}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{c_{n,s}}{2s} f(x) \omega_n,$$

όπου

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

το εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας.
Οπότε έχω συνολικά

$$\psi(x,s) = c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n\setminus T}\frac{-f(y+x)}{|y|^{n+2s}}dy + c_{n,s}\int_T \frac{f(x)-f(y+x)}{|y|^{n+2s}}dy + \frac{c_{n,s}}{2s}f(x)\omega_n. \tag{5.7}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πρώτος και ο τρίτος όρος της σχέσης (5.7) είναι πεπερασμένοι. Τώρα για να μελετήσουμε τον μεσαίο όρο εισάγουμε την μέση τιμή,

$$\widetilde{f}(x,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=r} f(x+y)d\omega_y.$$

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$c_{n,s}\int_T \frac{f(x)-f(y+x)}{|y|^{n+2s}}dy = c_{n,s}\omega_n\int_0^1 (f(x)-\widetilde{f}(x,r))r^{-2s-1}dr. \tag{5.8}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο του $Pizzeti$:

$$\widetilde{f}(x,r) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{1!2n}r^2 + ... + \frac{\Delta^m f(x)}{m!2^m n(n+2)...(n+2m-2)}r^{2m} + O(r^{2m+2})(r\to 0),$$

βλέπουμε ότι $\widetilde{f}(x,r) - f(x) = O(r^2)$ και επιπλέον το ολοκλήρωμα (5.8) είναι πεπερασμένο όταν το $s\in[0,1)$. Οπότε η συνάρτηση $\psi(x,s)$ είναι αναλυτικά συνεχής όταν $s\in[0,1)$.
Τέλος παρατηρώντας ότι

$$\lim_{s\to 0}\frac{c_{n,s}}{2s} = \frac{1}{\omega_n}$$

τότε απ'τη σχέση (5.7) παίρνω ότι :

$$\psi(x,0) = f(x)$$

Για να μελετήσουμε τώρα την $\psi(x,s)$ όταν $s\in[1,2)$, γράφουμε την $\psi(x,s)$ ως εξής :

$$\psi(x,s) = c_{n,s}\omega_n\int_0^\infty (f(x)-\widetilde{f}(x,r))r^{-2s-1}dr = c_{n,s}\omega_n\int_0^1 (f(x)-\widetilde{f}(x,r)+\frac{\Delta f(x)}{1!2n}r^2)r^{-2s-1}dr$$

$$+\frac{c_{n,s}}{2n(2-2s)}\omega_n\Delta f(x) + c_{n,s}\omega_n\int_1^\infty (f(x)-\widetilde{f}(x,r))r^{-2s-1}dr. \tag{5.9}$$

Όμως απ'τον τύπο του $Pizzeti$ έχω :

$$f(x)-\widetilde{f}(x,r)+\frac{\Delta f(x)}{1!2n}r^2 = O(r^4),$$

Οπότε έχω ότι η $\psi(x,s)$ είναι ομαλή όταν $s\in[1,2)$. Επίσης βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει και η σχέση :

$$\psi(x,s) = c_{n,s}\omega_n\int_0^\infty (f(x)-\widetilde{f}(x,r)+\frac{\Delta f(x)}{1!2n}r^2)r^{-2s-1}dr,$$

και

$$\psi(x,1) = -\frac{1}{4\pi^2}\Delta f.$$

Ας συνεχίσουμε τώρα δίνοντας τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.4.2 *Έστω* $\overline{S} = \{f \in C^{\infty} : \ (1+|x|^{n+2s})f^{(k)}(x)$ *να είναι φραγμένη* $\forall k \geq 0\}$. *Επίσης θεωρώ την τοπολογία στο* $\overline{S}$ *που δίνεται από την ημινόρμα :*

$$[f]_k = \sup(1+|x|^{n+2s})f^{(k)}(x).$$

Και συμβολίζουμε τον δυικό χώρο με $\overline{S'}$

Μπορούμε να ελέξουμε ότι $(-\Delta)^s f \in \overline{S}$, όταν $f \in S$.
Επίσης από την συμμετρία του τελεστή $(-\Delta)^s$ μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό στον χώρο $\overline{S'}$ μέσω της δυικότητας, δηλαδή εάν $u \in \overline{S'}$, τότε:

$$< (-\Delta)^s u, f > = < u, (-\Delta)^s f > .$$

Τώρα ο χώρος που θα ασχοληθούμε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα είναι ο L^1 με βάρος, ειδικότερα :

$$L_s = L^1_{loc} \cap \overline{S'} = \Big\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+2s}} dx < \infty \Big\}.$$

Η νόρμα στον L_s δίνεται από :

$$||u||_{L_s} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+2s}} dx.$$

Σε ειδικές περιπτώσεις, οι τύποι μας μέσω του μετασχηματισμού *Fourier* ή μέσω του καταχρηστικού ολοκληρώματος μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε το $(-\Delta)^s u$. Η παρακάτω πρόταση μας λέει μια περίπτωση που το $(-\Delta)^s u$ μπορεί να εκφραστεί από το καταχρηστικό ολοκλήρωμα (5.5).

Πρόταση 5.4.3 *Έστω* f *μία συνάρτηση που ανήκει στο* L_s *και είναι* $C^{2s+\varepsilon}$ *(ή* $C^{1,2s+\varepsilon-1}$ *εάν* $s > 1/2$*) για κάποιο* $\varepsilon > 0$ *σε ένα ανοιχτό* Ω*, τότε για* $s \in (0,1)$*,* $(-\Delta)^s f$ *είναι συνεχής συνάρτηση στο* Ω *και η τιμή της δίνεται απ'το καταχρηστικό ολοκλήρωμα (5.5).*

Απόδειξη :

Πρώτα θα δείξουμε ότι, εάν εφαρμόσουμε το ολοκλήρωμα (5.5) στην f τότε αυτό είναι πεπερασμένο $\forall x \in \ \Omega$.
Έστω $s \leq 1/2, \ f \in C^{2s+\varepsilon}(\Omega)$ και $B_r(x) \subset \Omega$ για κάποιο $r > 0$. Τότε θα έχω,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy + \int_{B_r(x)} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy,$$

ο πρώτος όρος της παραπάνω ισότητας είναι πεπερασμένος, αφού $f \in L_s$. Αρκεί να δείξω ότι είναι πεπερασμένος και ο δεύτερος όρος.

$$\int_{B_r(x)} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \leq C \int_{B_r(x)} \frac{|x-y|^{2s+\varepsilon}}{|x-y|^{n+2s}} dy < \infty.$$

Έστω τώρα $s > 1/2$ και $f \in C^{1,2s+\varepsilon-1}(\Omega)$, τότε παρατηρώ ότι

$$\int_{B_r(x)} \frac{Df(x)(y-x)}{|x-y|^{n+2s}} dy = 0,$$

οπότε για κάποιο $c = tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]$, έχω ότι

$$\int_{B_r(x)} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \leq \int_{B_r(x)} \frac{|Df(c)-Df(x)|}{|x-y|^{n+2s}}dy \leq \int_{B_r(x)} \frac{|x-y|^{2s+\varepsilon-1}}{|x-y|^{n+2s}}dy < \infty.$$

Έστω ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $f_k \in S$, ομοιόμορφα φραγμένη στο $C^{s+\varepsilon}(\Omega)$ (ή $C^{1,2s+\varepsilon-1}(\Omega)$), που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο Ω_0 καθώς επίσης συγκλίνει στην f ως προς την νόρμα L_s. Στη συνέχεια θεωρώ $r > 0$ τέτοιο ώστε $B_r(x) \subset \Omega_0$ για κάποιο $x \in \Omega_0$. Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονος ότι η f_k είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $C^{s+\varepsilon}(\Omega)$ (ή $C^{1,2s+\varepsilon-1}(\Omega)$) μπορούμε να δείξουμε ότι τα δύο ολοκληρώματα συγκλίνουν ομοιόμορφα στο Ω_0.

$$(-\Delta)^s f_k = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_k(x)-f_k(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \to c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy.$$

Όμως $(-\Delta)^s f_k \to (-\Delta)^s f$ στην τοπολογία του S'. Απ'οπου συνεπάγεται ότι το $(-\Delta)^s f$ συμπίπτει με το ολοκλήρωμα στο Ω_0 από τη μοναδικότητα του ορίου και αφού το Ω_0 ήταν τυχαίο, αυτό συμβαίνει $\forall x \in \Omega$. $\square$

Θα προχώρησουμε τώρα με δύο προτάσεις που η απόδειξή τους είναι τετριμμένη, αλλά μας δείχνουν μία μορφή της αρχής μεγίστου που συμπεραίνουμε χρησιμοποιώντας το καταχρηστικό ολοκλήρωμα.

Πρόταση 5.4.4 *Υποθέτουμε ότι $u \in L_s$, και ότι υπάρχει ένα σημείο x_0 έτσι ώστε :*
1. $u(x_0) = 0$.
2. Η u ανήκει στον $C^{s+\varepsilon}$ (ή $C^{1,2s+\varepsilon-1}$) για κάποιο $\varepsilon > 0$ σε μια περιοχή του x_0.
3. $u \geq 0$ στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε $(-\Delta)^s u(x_0) \leq 0$. Επιπλέον, $(-\Delta)^s u(x_0) = 0$ μόνο όταν $u = 0$.

Πρόταση 5.4.5 *Υποθέτουμε ότι $u, f \in L_s$, και ότι υπάρχει ένα σημείο x_0 έτσι ώστε :*
1. $u(x_0) = f(x_0)$
2. Οι u, f ανήκουν στον $C^{s+\varepsilon}$ (ή $C^{1,2s+\varepsilon-1}$) για κάποιο $\varepsilon > 0$ σε μια περιοχή του x_0.
3. $u \geq f$ στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε $(-\Delta)^s u(x_0) \leq (-\Delta)^s f(x_0)$. Επιπλέον, $(-\Delta)^s u(x_0) = (-\Delta)^s f(x_0)$ μόνο όταν $u = f$.

Οι επόμενες προτάσεις που θα ακολουθήσουν, μας δείχνουν την ομαλότητα $(-\Delta)^s u$, όταν η u έχει κάποιες ιδιότητες.

Πρόταση 5.4.6 *Έστω η $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, για $\alpha \in (0,1]$ και $\alpha > 2s > 0$, τότε η $(-\Delta)^s u \in C^{0,\alpha-2s}(\mathbb{R}^n)$ και*

$$[(-\Delta)^s u]_{C^{0,\alpha-2s}} \leq C[u]_{C^{0,\alpha}},$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ'τα α, s και n.

Απόδειξη :

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, ας εκτιμήσουμε την διαφορά $|(-\Delta)^s u(x_1) - (-\Delta)^s u(x_2)|$.

$$|(-\Delta)^s u(x_1) - (-\Delta)^s u(x_2)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_1) - u(x_1+y) + u(x_2+y) - u(x_2)}{|y|^{n+2s}}dy\Big| \leq I_1 + I_2,$$

όπου

$$I_1 = \Big| \int_{B_r(0)} \frac{u(x_1) - u(x_1 + y) + u(x_2 + y) - u(x_2)}{|y|^{n+2s}} dy \Big|$$

και

$$I_2 = \Big| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \frac{u(x_1) - u(x_1 + y) + u(x_2 + y) - u(x_2)}{|y|^{n+2s}} dy \Big|.$$

Για την εκτίμηση του I_1, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $|u(x_i) - u(x_i + y)| \leq C[u]_{C^{0,\alpha}} |y|^\alpha$ για $i = 1, 2$. Οπότε έχω :

$$I_1 \leq \int_{B_r(0)} C[u]_{C^{0,\alpha}} \frac{|y|^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy \leq C[u]_{C^{0,\alpha}} r^{\alpha - 2s}.$$

Για το I_2, χρησιμοποιούμε την $|u(x_1 + y) - u(x_2 + y)| \leq C[u]_{C^{0,\alpha}} |x_1 - x_2|^\alpha$, οπότε θα έχω :

$$I_2 \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} C[u]_{C^{0,\alpha}} \frac{|x_1 - x_2|^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy \leq C[u]_{C^{0,\alpha}} r^{-2s} |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Οπότε παίρνοντας για $r = |x_1 - x_2|$ και προσθέτωντας τα I_1, I_2 έχω το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.4.7 *Έστω $u \in C^{1,\alpha}$, για $\alpha \in (0, 1]$ και $s > 0$, τότε :*
1. Εάν $\alpha > 2s$, τότε $(-\Delta)^s u \in C^{1,\alpha - 2s}$ και

$$[(-\Delta)^s u]_{C^{1,\alpha-2s}} \leq C[u]_{C^{1,\alpha}},$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα α, s και n.
2. Εάν $\alpha < 2s$, τότε $(-\Delta)^s u \in C^{0,\alpha - 2s+1}$ και

$$[(-\Delta)^s u]_{C^{0,\alpha-2s+1}} \leq C[u]_{C^{1,\alpha}},$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα α, s και n.

Απόδειξη :

1.
Έστω, $f \in S$ τότε θα έχω :

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s} f(\xi) = (i\xi)|\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) = \widehat{(-\Delta)^s \frac{\partial f}{\partial x_i}}(\xi) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s f = (-\Delta)^s \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall\, i = 1, .., n.$$

Οπότε θα έχω,

$$< \frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s u, f >= - < u, (-\Delta)^s \frac{\partial f}{\partial x_i} >= - < u, \frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s f >=< (-\Delta)^s \frac{\partial u}{\partial x_i}, f > \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s u = (-\Delta)^s \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall\, i = 1, .., n.$$

Όμως η $u_{x_i} \in C^{0,\alpha}$ και από πρόταση (5.4.6) έχω ότι, $(-\Delta)^s \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{0,\alpha - 2s}$, απ'οπου συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^s u \in C^{0,\alpha - 2s}.$$

Γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του (1).
2.
Υποθέτουμε ότι $s < 1/2$. Τότε δουλεύοντας ομοίως όπως την πρόταση (5.4.6) έχουμε :

$$|(-\Delta)^s u(x_1) - (-\Delta)^s u(x_2)| \leq I_1 + I_2,$$

για τα ίδια $I_1,\ I_2$ με εκείνης της πρότασης. Αλλά τώρα για να εκτιμήσουμε τα $I_1,\ I_2$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $u \in C^{1,\alpha}$, ειδικότερα, για τα $I_1,\ I_2$ χρησιμοποιώ τις δύο παρακάτω ανισότητες αντίστοιχα

$$|u(x_1) - u(x_1+y) + u(x_2+y) - u(x_2)| \leq C[u]_{C^{1,\alpha}}(|y||x_1-x_2|^\alpha)$$

και

$$|u(x_1) - u(x_1+y) + u(x_2+y) - u(x_2)| \leq C[u]_{C^{1,\alpha}}(|y|^\alpha|x_1-x_2|).$$

Οπότε για $r = |x_1 - x_2|$ έχω το επιθυμητό αποτέλεσμα.
Εάν τώρα $s \geq 1/2$, γράφω $(-\Delta)^s = (-\Delta)^{s-1/2} o (-\Delta)^{1/2}$ και το αποτέλεσμα ακολουθεί κάνοντας την παρατήρηση ότι $(-\Delta)^{1/2} = \sum_i R_i \partial_i$, όπου R_i είναι ο μετασχηματισμός του *Riesz* (ίδε [15], [16]). □

Πρόταση 5.4.8 *Έστω $u \in C^{k,\alpha}$, και υποθέτουμε ότι $k + \alpha - 2s$ δεν είναι ακέραιος. Τότε $(-\Delta)^s u \in C^{l,\beta}$, όπου l είναι το ακέραιο μέρος του $k + \alpha - 2s$ και $\beta = k + \alpha - 2s - l$.*

Απόδειξη :

Εάν $\alpha > 2s$, τότε $D^\beta u \in C^{0,\alpha}$ για $|\beta| = k$. Οπότε από πρόταση (5.4.6) έχω ότι $D^\beta(-\Delta)^s u \in C^{0,a-2s}$ απ'οπου συνεπάγεται ότι $-(\Delta)^s u \in C^{k,\alpha-2s}$.
Εάν τώρα $a < 2s$, τότε $D^\beta u \in C^{1,\alpha}$ για $|\beta| = k - 1$. Οπότε από πρόταση (5.4.7) έχω ότι $D^\beta(-\Delta)^s u \in C^{0,a-2s+1}$ απ'οπου συνεπάγεται ότι $(-\Delta)^s u \in C^{k-,\alpha-2s+1}$. □

Πρόταση 5.4.9 *Έστω $w = (-\Delta)^s u$, υποθέτουμε ότι $w \in C^{0,\alpha}$ και $u \in L^\infty$, για κάποιο $\alpha \in (0,1]$ και $s > 0$, τότε*
1. Εάν $\alpha + 2s < 1$, τότε $u \in C^{0,\alpha+2s}(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον

$$||u||_{C^{0,\alpha+2s}(\mathbb{R}^n)} \leq C(||u||_{L^\infty} + ||w||_{C^{0,\alpha}}),$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα $\alpha,\ s$ και n.
2. Εάν $\alpha + 2s > 1$, τότε $u \in C^{1,\alpha+2s-1}(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον

$$||u||_{C^{1,\alpha+2s-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C(||u||_{L^\infty} + ||w||_{C^{0,\alpha}}),$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα $\alpha,\ s$ και n.

Απόδειξη :

Αρκεί να δείξουμε χώρις περιορισμό της γενικότητας ότι η u παίρνει την ανάλογη ομαλότητα ($C^{0,\alpha+2s}$ ή $C^{1,\alpha+2s-1}$)σε μια περιοχή του μηδενός. Θεωρώ λοιπόν, μία ομαλή συνάρτηση η με $0 \leq \eta \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $supp \eta \subset B_2(0)$ και $\eta(x) = 1\ \forall x \in B_1(0)$. Θεωρώ τώρα την συνάρτηση

$$u_0(x) = c_{n,-s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(y) w(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy = (-\Delta)^{-s}(\eta w)(x),$$

επιπλέον έχω, $(-\Delta)^s u_0 = w\eta$, όπου συνεπάγεται :

$$(-\Delta)^s u_0 = (-\Delta)^s u \qquad \forall x \in B_1(0),$$

ειδικότερα για κάθε $x \in B_{1/2}(0)$ έχω ότι $u - u_0 = 0$.
Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $u_0 \in C^{0,\alpha+2s}(B_{1/2}(0)$ ή $u_0 \in C^{1,\alpha+2s-1}(0)$. Η u_0 λοιπόν, γράφεται ως εξής : $u_0 = (-\Delta)^{1-s} o (-\Delta)^{-1}\eta w$, όμως από τις εκτιμήσεις για την εξίσωση *Poisson* έχω ότι $(-\Delta)^{-1}\eta w \in C^{2,\alpha}$. Και απο την πρόταση (5.4.8) προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.4.10 *Έστω $w = (-\Delta)^s u$, υπθέτουμε ότι $w \in L^\infty$ και $u \in L^\infty$, για κάποιο $\alpha \in (0,1]$ και $s > 0$, τότε*
1. Εάν $2s < 1$, τότε $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha < 2s$. Επιπλέον

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(||u||_{L^\infty} + ||w||_{L^\infty}),$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα α, s και n.
2. Εάν $2s > 1$, τότε $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha < 2s - 1$. Επιπλέον

$$||u||_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(||u||_{L^\infty} + ||w||_{L^\infty}),$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄τα α, s και n.

Απόδειξη :

Η απόδειξη είναι ίδια με αυτής της πρότασης (5.4.9)με την διαφορά ότι χρησιμοποιούμε $C^{1,\alpha}$ εκτιμήσεις για την εξίσωση *Poisson* με L^∞ εκτιμήσεις του δεξιού μέρους αντί για $C^{2,\alpha}$ εκτιμήσεις. □

5.5 Ιδιότητες των $s-$Υπεραρμονικών Συναρτήσεων

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε ιδιότητες των $s-$υπεραρμονικών συναρτήσεων, όμοιες με εκείνων των υπεραρμονικών. Αλλά πρώτα ας ορίσουμε το πότε είναι μία συνάρτηση $s-$υπεραρμονική.

Ορισμός 5.5.1 *Λέμε ότι η $u \in \overline{S'}$ είναι $s-$υπεραρμονική σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω, εάν για κάθε μη αρνητική συνάρτηση ελέγχου ϕ με φορέα μέσα στο Ω να ισχύει*

$$< u, (-\Delta)^s \phi > \geq 0.$$

Στην συνέχεια θα θέλαμε να δώσουμε μία ιδιότητα στην u ανάλογη με τον ορισμό των υπεραρμονικών συναρτήσεων, που συγκρίνουν τις τιμές τους σε ένα σημείο με την μέση τιμή τους γύρω από μία "μικρή" μπάλλα με κέντρο το εν λόγω σημείο. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα περιοριστούμε στον χώρο L_s και θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική συνάρτηση ελέγχου. Θεωρώ λοιπόν, $\Phi(x) = \frac{C}{|x|^{n-2s}}$ την θεμελιώδη λύση του τελεστή $(-\Delta)^s$ και θεωρώ την συνάρτηση $\Gamma \in C^{1,1}$ ως εξής :

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C(2s-n)|x|^2 + C(1-2s+n) & , \text{εάν} \quad |x| \leq 1 \\ \Phi(x) & , \text{εάν} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Δοθέντως $\lambda > 0$, θεωρώ την $\Gamma_\lambda = \frac{1}{\lambda^{n-2s}}(\frac{x}{\lambda})$. Η συνάρτηση Γ_λ συμπίπτει με την Φ εκτός της μπάλλας ακτίνας λ με κέντρο το μηδέν, και είναι ένα παραβολοειδές μέσα στην μπάλλα .
Έτσι, θα συνεχίσουμε με την επόμενη πρόταση για να χρησιμοποιήσουμε την $(-\Delta)^s\Gamma_\lambda$, σαν μία προσεγγιστική ταυτότητα και ισχύει $\Gamma_{\lambda_2} \geq \Gamma_{\lambda_1}$, όταν $\lambda_1 > \lambda_2$. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα παραλείπουμε την σταθερά $c_{n,s}$.

Πρόταση 5.5.2 *Η $(-\Delta)^s\Gamma$ είναι μία θετική συνεχής συνάρτηση στον L^1. Επίσης είναι $s-$υπεραρμονική και ισχύει :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s\Gamma(x)dx = 1.$$

Απόδειξη :

Αφού η $\Gamma \in C^{1,1}$ είναι υπεραρμονική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα (5.5) για να υπολογίσουμε την $(-\Delta)^s\Gamma$.
Εάν x_0 δεν ανήκει στο $B_1(0)$, τότε $\Gamma(x_0) = \Phi(x_0)$ και παρατηρώντας ότι για κάθε άλλο x ότι ισχύει, $\Gamma(x) \leq \Phi(x)$, έχω :

$$(-\Delta)^s\Gamma(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(x_0) - \Gamma(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}}dy > \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x_0) - \Phi(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}}dy = 0,$$

αφού Φ είναι η θεμελιώδης λύση.
Εάν τώρα $x_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει x_1 και $\delta > 0$ τέτοια ώστε $\Phi(x - x_1) + \delta \geq \Gamma(x)$ και $\Phi(x_0 - x_1) + \delta = \Gamma(x_0)$. Οπότε θα έχω :

$$(-\Delta)^s\Gamma(x_0) > \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x_0 - x_1) + \delta - \Phi(y - x_1) - \delta}{|x_0 - y|^{n+2s}}dy = 0.$$

Εάν τώρα $x_0 = 0$ τότε η Γ παίρνει ολικό μέγιστο στο x_0 οπότε έχω $(-\Delta)^s\Gamma(x_0) > 0$.
Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s\Gamma(x)dx$ δουλεύουμε ως εξής :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s\Gamma(x)dx - 1 =< (-\Delta)^s\Gamma - (-\Delta)^s\Phi, 1 >=< \Gamma - \Phi, 0 >= 0.$$

□

Θέτω $\gamma_\lambda = (-\Delta)^s\Gamma_\lambda$.

Πρόταση 5.5.3 *Για κάθε $\lambda > 0$, η συνάρτηση $\gamma_\lambda(x)$ μηδενίζεται όπως η $\frac{1}{|x|^{n+2s}}$, όταν $|x| \to \infty$*

Απόδειξη :

Για $|x| > 2\lambda$ μεγάλο έχω ότι, $\Gamma_\lambda(x) = \Phi(x)$ και

$$(-\Delta)^s\Gamma_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\lambda(x) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}}dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{|x - y|^{n+2s}}dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}}dy$$

$$= \int_{\{|y|\leq\lambda\}} \frac{\Phi(y) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}}dy \leq \int_{\{|y|\leq\lambda\}} \frac{\frac{C}{|y|^{n-2s}} - \frac{C_1|y|^2}{\lambda^{n-2s-2}}}{|x - y|^{n+2s}} \leq \frac{C(n, \lambda, s)}{|x|^{n+2s}}.$$

□

Πρόταση 5.5.4 *Εάν $u \in L_s$, τότε :*

$$u * \gamma_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\gamma_\lambda(x - y)dy \to u(x) \text{ σχεδόν παντού, καθώς } \lambda \to 0.$$

Απόδειξη :

Πρώτα απ'ολα θεωρώ την u μία ομαλή συνάρτηση (αλλιώς δουλεύω όπως το λήμμα (4.2.1)), έπειτα βλέπουμε ότι η $u(y)\gamma_\lambda(x-y)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, αφού $u \in L_s$ και από πρόταση (5.5.3) η συνάρτηση $\gamma_\lambda(x)$ μηδενίζεται όπως η $\frac{1}{|x|^{n+2s}}$, όταν $|x| \to \infty$.
Επίσης έχω το εξής :

$$\gamma_\lambda(x) = (-\Delta)^s\Gamma_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\lambda(x)-\Gamma_\lambda(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy = \frac{1}{\lambda^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\lambda(\frac{x}{\lambda})-\Gamma_\lambda(\frac{y}{\lambda})}{|x-y|^{n+2s}}dy$$

$$= \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\lambda(\frac{x}{\lambda})-\Gamma_\lambda(y)}{|\frac{x}{\lambda}-y|^{n+2s}}dy = \frac{1}{\lambda^n}\gamma_1(\frac{x}{\lambda}).$$

Τέλος, αφού γ_1 είναι μη αρνητική και $\int_{\mathbb{R}^n}\gamma_1(x)dx = 1$, έχω το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.5.5 *Εάν η $(-\Delta)^s u$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τότε*

$$(-\Delta)^s u(x) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{C}{\lambda^{2s}}(u(x) - u*\gamma_\lambda(x))$$

όπου C εξαρτάται μόνο απ΄το s και n.

Απόδειξη :

Αφού η $(-\Delta)^s u$ είναι συνεχής στο σημείο x, τότε είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x και για κάθε $g \in L^1(R^n)$ με συμπαγή φορέα και λ αρκετά μικρό, ετσι ώστε να μπορώ να έχω :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s u(x-y)\frac{g(\frac{y}{\lambda})}{\lambda^n}dy = \int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s u(x-\lambda y)g(y)dy \to (-\Delta)^s u(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy,\ \textit{όταν}\ \lambda \to 0.$$

Στη συνέχεια θεωρώ $g(y) = \Phi(y) - \Gamma(y)$, τότε

$$\frac{1}{\lambda^n}g(\frac{x}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^n}\Phi(\frac{x}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda^{2s}}\Gamma_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^{2s}}(\Phi(x) - \Gamma_\lambda(x)).$$

Οπότε έχω συνολικά :

$$\frac{1}{C\lambda^{2s}}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s u(x-y)(\Phi(x)-\Gamma_\lambda(x)) = \frac{1}{C\lambda^{2s}}(u(x) - u*\gamma_\lambda(x)) \to (-\Delta)^s u(x),\ \textit{όταν}\ \lambda \to 0.$$

□

Πρόταση 5.5.6 *Μια συνάρτηση $u \in L_s$ είναι $s-$υπεραρμονική σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω εάν και μόνο εάν η u είναι κάτω ημισυνεχής στο Ω και ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα*

$$u(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\gamma_\lambda(x-x_0)dx,$$

$\forall x_0 \in \Omega$ και για λ αρκετά μικρό.

Απόδειξη :

Θεωρώ $r > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$, επιπλέον ξέρουμε ότι συνάρτηση $\Gamma_{\lambda_2} - \Gamma_{\lambda_1} \geq 0$ είναι $C^{1,1}$ με συμπαγή φορέα στο $B_r(0)$. Εάν u είναι $s-$υπεραρμονική στο $B_r(x_0)$ τότε :

$$0 \leq < (-\Delta)^s u, \Gamma_{\lambda_2}(x-x_0) - \Gamma_{\lambda_1}(x-x_0) > = < u, (-\Delta)^s\Gamma_{\lambda_2}(x-x_0) - (-\Delta)^s\Gamma_{\lambda_1}(x-x_0) > \Rightarrow$$

$$u * \gamma_{\lambda_2}(x_0) \geq u * \gamma_{\lambda_1}(x_0).$$

Έστω τώρα ένα τυχαίο ανοιχτό σύνολο $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Θέτω $r = dist(\Omega_0, \partial\Omega)$, τότε εάν $r > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$, έχω

$$u * \gamma_{\lambda_2}(x) \geq u * \gamma_{\lambda_1}(x) \text{ στο } \Omega_0.$$

Όμως $u * \gamma_{\lambda_2}(x) \to u(x)$ στο Ω_0 (αλλάζοντάς την ίσως σε ένα σύνολο μέτρου 0). Τέλος παρατηρώ ότι για κάθε λ η $u * \gamma_\lambda(x)$ είναι συνεχής, οπότε η u είναι όριο αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι κάτω ημισυνεχής. □

Πόρισμα 5.5.7 *Υπάρχει μία σταθερά C έτσι ώστε για κάθε $x \in \Omega$,*

$$u(x) \geq u * \gamma_\lambda(x) - C\lambda^{2s},$$

εάν και μόνον εάν $(-\Delta)^s u \geq -C$ στο Ω (με την ένοια ότι $(-\Delta)^s u + C$ είναι ένα μη αρνητικό μέτρο Radon).

Απόδειξη :

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Ω είναι φραγμένο (αφού εάν $f > -C$ τοπικά στο Ω είναι ισοδύναμο με το $f > -C$ σε ολόκληρο το Ω για κάθε κατανομή f).
Έστω $g = C\Phi * \chi_\Omega$, που συνεπάγεται ότι $(-\Delta)^s g = C\chi_\Omega$.
Απ΄την πρόταση (5.5.5), για κάθε $x \in \Omega$ έχω :

$$C = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda^{2s}}(g(x) - g * \gamma_\lambda(x)),$$

επίσης από την πρόταση (5.5.5) μπορούμε να δούμε ότι $\forall x \in \Omega$

$$C = \frac{1}{\lambda^{2s}}(g(x) - g * \gamma_\lambda(x)),$$

για $\lambda < dist(x, \partial\Omega.)$
Τώρα θεωρώ την $u+g$, τότε $(u+g)(x) \geq (u+g) * \gamma_\lambda(x)$ που είναι ισοδύναμο σύμφωνα με την πρόταση (5.5.6) με το η $u+g$ να είναι $s-$υπεραρμονική, δηλαδή $(-\Delta)^s(u+g) \geq 0 \Leftrightarrow (-\Delta)^s u \geq -C$ στο Ω. □

Έχοντας την πρόταση (5.5.6) στο μυαλό μας, μπορούμε να αποδείξουμε βασικές ιδιότητες των $s-$υπεραρμονικών συναρτήσεων, χωρίς να χρησιμοποιούμε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα. Θα δείξουμε τώρα μια αρχή μεγίστου.

Πρόταση 5.5.8 *Έστω $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο, u μία $s-$υπεραρμονική συνάρτηση στο Ω, κάτω ημισυνεχής στο $\overline{\Omega}$, έτσι ώστε $u \geq 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Τότε $u \geq 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, εάν $u(x) = 0$ σε κάποιο σημείο $x \in \Omega$, τότε $u = 0$ σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη :

Έστω ότι παίρνει αρνητικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in \Omega$. Τότε για κάποιο $\lambda > 0$ έχω ότι ισχύει $u(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\gamma_\lambda(x - x_0)dx$. Όμως γνωρίζουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma_\lambda(x)dx = 1$, που συνεπάγεται

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(x_0))\gamma_\lambda(x - x_0)dx,$$

άτοπο, αφού $\gamma_\lambda > 0$. Εάν τώρα $u(x_0) = 0$, αφού $u \geq 0$, παίρνουμε

$$0 = u(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\gamma_\lambda(x - x_0)dx \geq 0,$$

δηλαδή $u = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. □

Πρόταση 5.5.9 *Εάν οι συναρτήσεις $u_1,\ u_2 \in L_s$ είναι $s-$υπεραρμονικές στο Ω, τότε είναι και η $u = \min(u_1, u_2)$.*

Απόδειξη :

Έστω $x_0 \in \Omega$, από την πρόταση (5.5.6) υπάρχει $\lambda > 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$u_i(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} u_i(x)\gamma_\lambda(x-x_0)dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \min(u_1(x), u_2(x))\gamma_\lambda(x-x_0)dx \ \ \text{όπου}\ \ i = 1, 2 \Rightarrow$$

$$\min(u_1(x_0), u_2(x_0)) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \min(u_1(x), u_2(x))\gamma_\lambda(x-x_0)dx,$$

που από την πρόταση (5.5.6) έχω το ζητούμενο. □

Οι $s-$υφαρμονικές συναρτήσεις ορίζονται με τον προφανή τρόπο και έχουν ανάλογες ιδιότητες με εκείνων των $s-$υπεραρμονικών, δηλαδή :

Πρόταση 5.5.10 *Μια συνάρτηση $u \in L_s$ είναι $s-$υφαρμονική σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω εάν και μόνο εάν η u είναι πάνω ημισυνεχής στο Ω και ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα*

$$u(x_0) \leq \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\gamma_\lambda(x-x_0)dx,$$

$\forall x_0 \in \Omega$ και για λ αρκετά μικρό.

Πόρισμα 5.5.11 *Υπάρχει μία σταθερά C έτσι ώστε για κάθε $x \in \Omega$,*

$$u(x) \leq u * \gamma_\lambda(x) + C\lambda^{2s},$$

εάν και μόνον εάν $(-\Delta)^s u \leq +C$ στο Ω.

Πρόταση 5.5.12 *Έστω $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο, $u,\ \upsilon$ δύο $s-$υπεραρμονικές συναρτήσεις στο Ω, με $u - \upsilon$ κάτω ημισυνεχής στο $\overline{\Omega}$, έτσι ώστε $u \geq \upsilon$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Τότε $u \geq \upsilon$ στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, εάν $u(x) = \upsilon(x)$ σε κάποιο σημείο $x \in \Omega$, τότε $u = \upsilon$ σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη :

Εφαρμόζουμε την πρόταση (5.5.8) στην συνάρτηση $u - \upsilon$. □

Ομοίως ορίζουμε μία συνάρτηση $s-$αρμονική εάν είναι $s-$υπεραρμονική και $s-$υφαρμονική ταυτόχρονα και σε αυτή την περίπτωση έχουμε :

Πρόταση 5.5.13 *Μια συνάρτηση $u \in L_s$ είναι $s-$αρμονική σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω εάν και μόνο εάν η u είναι συνεχής στο Ω και ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα*

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\gamma_\lambda(x-x_0)dx,$$

$\forall x_0 \in \Omega$ και για λ αρκετά μικρό.

Βιβλιογραφία

[1] I.Athanasopoulos, L.A.Caffareli. Optimal regularity of lower dimensional obstacle problems, Zap. Nauchn. Sem S.-Peterburg Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI) 310 (2004), 49-66.

[2] F.Black,M.Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Economy 81(1973), 635-654.

[3] H.Brezis,D.Kinderlehrer, The smoothness of solution to non-linear variational inequalities, Indiana J. Math 23 (1974), 831-844.

[4] L.A.Caffareli. Further regularity for the Signorini problem. -*Comm. P.D.E.* 4(9) (1979), 1067-1075.

[5] L.A.Caffareli. Compactness methods in free boundary problems. -*Comm. P.D.E.* 5(4), (1980), 427-448.

[6] L.A.Caffareli. The obstacle problem revisited. *J. Fourier Anal. Appl.,* 4(4-5):383-402, 1998.

[7] L.A.Caffareli, D.Kinderlehrer.(1980). Potential methods in variational inequalities J. Analyse Math., 37, 285-295.

[8] R.Cont, P.Tancof. *Financial modelling with jump processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[9] J.Frehse(1972). On the regularity of solutions of a second order variational inequality. Boll. Un. Mat. Ital.,6(4).

[10] J.Frehse(1972). On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4 (1977), 343-362.

[11] A.Friedman.*Variational principles and free-boundary problems.* John Wiley & Sons, 1982.

[12] D.Gilbarg, N.S.Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1983.

[13] J.C.Hull. *Options, ftures and other derivatives.* 5th Edition, Prentice-Hall, Inc, 2003.

[14] L.L.Helms. *Introduction to potential theory.* Robert E. Krieger Pumblishing Company Huntington, New York, 1975.

[15] D.Kinderlehrer, G.Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their application.* Academic Press, 1980.

[16] N.S.Landkof.*Foundations of modern potential theory.* Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the Russian by A.P.Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180.

[17] S.Z.Levendoskiĭ. Pricing of the American put under Lévy processes. *Int. J. Theor. Appl. Finance,* 7(3):303-335, 2004.

[18] H.P.ham. Optimal stopping, free boyndary, and American option in a jump-diffusion model. *Appl. Math. Optim.*, 35(2):145-164, 1997.

[19] L.E.Silvestre. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the laplace operator. *To appear*, 2005.