Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» των Τμημάτων
Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Δυσκολίες στη μάθηση της Γραμμικής Άλγεβρας

Ιωάννα Π. Γκαζάνη

Επιβλέποντας καθηγητής: Χρήστος Κουρουνιώτης

Ηράκλειο, 2013

University of Crete
School of Sciences and Engineering
Inter-departmental Graduate Program in
''Mathematics and its Applications'' of the Mathematics and
Applied Mathematics Departments

Master Thesis

Difficulties in the learning of Linear Algebra

Ioanna P. Gkazani

Advisor: Christos Kourouniotis

Heraklion, 2013

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά στην εκπαίδευση με επιβλέποντα τον κ. Κουρουνιώτη Χρήστο.

Την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν:

Χρήστος Κουρουνιώτης (Πανεπιστήμιο Κρήτης)

Θεοδόσης Ζαχαριάδης (Πανεπιστήμιο Αθηνών)

Μαρία Λουκάκη (Πανεπιστήμιο Κρήτης)

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κ. Χρήστο Κουρουνιώτη που επέβλεψε την παρούσα εργασία καθώς επίσης και τα μέλη της επιτροπής αξιολόγησής μου, κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη και κ. Μαρία Λουκάκη.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω του φίλους και συμφοιτητές μου που τόσο καιρό ήταν κοντά μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την υποστήριξη και την αγάπη τους.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στην αδερφή μου Ευδοκία και στον φίλο μου Γιάννη που μου συμπαραστάθηκαν σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές την πρώτη φορά που έρχονται αντιμέτωποι με το μάθημα της Γραμμική Άλγεβρας στα πρώτα χρόνια των σπουδών τους. Για τον σκοπό αυτό εξετάστηκαν απαντήσεις φοιτητών σε τελικές εξετάσεις του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, που παρακολούθησαν τα δύο υποχρεωτικά μαθήματα, Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα και Γραμμική Άλγεβρα Ι κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2002-03 και 2003-04 αντίστοιχα.

Στο πλαίσιο αυτό, μελετάται η διδασκαλία των μαθημάτων Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα και Γραμμική Άλγεβρα Ι. Στη συνέχεια, γίνεται μια επισκόπηση στην παρούσα βιβλιογραφία όπου και παρουσιάζονται κάποιες από τις βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Το θεωρητικό πλαίσιο που ακολουθείται για την αξιολόγηση των απαντήσεων των φοιτητών είναι της Stewart (2008) όπου συνδυάζονται οι Τρείς Κόσμοι των Μαθηματικών του Tall και η θεωρία APOS του Dubinsky.

Abstract

The present work reviews the difficulties faced by university students, when they are confronted with the subject of *Linear Algebra* for the first time in the early years of their studies. For this purpose, the work examines the responses given by students in their final exams at the Department of Mathematics of the University of Crete, who attended the two compulsory courses, *Introduction to Linear Algebra* and *Linear Algebra I* during the academic years 2002-03 and 2003-04 respectively.

The teaching of the courses *Introduction to Linear Algebra* and *Linear Algebra I* is studied within this context. Then, an overview is presented pertaining to the existing literature about some of the main difficulties faced by students in the *Linear Algebra* course.
The theoretical framework used to assess the responses of students is the one proposed by Stewart (2008), which combines Tall's *Three Worlds of Mathematics* and Dubinsky's *APOS theory*.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Γραμμική άλγεβρα είναι ο τομέας των μαθηματικών που σχετίζεται με διανυσματικούς χώρους, συχνά πεπερασμένων ή αριθμήσιμα απείρων διαστάσεων, καθώς και με γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των χώρων αυτών.

Τόσο σε Τμήματα Μαθηματικών, όσο και στις υπόλοιπες σχολές θετικών επιστημών, τα μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας είναι υποχρεωτικά στα πρώτα έτη των σπουδών. Ένας από τους λόγους που συμβαίνει αυτό είναι για να δώσει στους φοιτητές τις απαραίτητες βάσεις ώστε να μπορέσουν να παρακολουθήσουν στη συνέχεια των σπουδών τους μαθήματα όπου εμφανίζονται έννοιες της γραμμικής άλγεβρας. Διαφορικές εξισώσεις, γραμμικός προγραμματισμός, κρυπτογραφία και αριθμητική ανάλυση είναι μόνο μερικά από αυτά τα μαθήματα. Η Γραμμική Άλγεβρα έχει εφαρμογές σε πολλά επιστημονικά πεδία: πολλά προβλήματα της επιστήμης των υπολογιστών, της χημείας και της οικονομίας διατυπώνονται και λύνονται αποκλειστικά με έννοιές της.

Εκτός από τις πολλές εφαρμογές που αναφέρθηκαν παραπάνω, τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας, είναι πολύ σημαντικά για τους πρωτοετείς φοιτητές αφού τους εισάγουν σε έναν πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης και στη λογική των αποδεικτικών ασκήσεων. Με αυτό τον τρόπο μπορούν να συμβάλουν στην ομαλή μετάβαση από τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε αυτά της τριτοβάθμιας.

Παρόλο το πλούσιο θεωρητικό υπόβαθρο που μπορεί να προσφέρει η γραμμική άλγεβρα, οι περισσότεροι φοιτητές που παρακολούθησαν ένα τέτοιο μάθημα, το περιγράφουν ως ένα μάθημα που σχετίζεται με πράξεις πινάκων. Αν και αυτό το κομμάτι αφορά μεγάλο μέρος του μαθήματος, το υπόλοιπο κομμάτι της διδαχθείσας ύλης αφορά σε θεωρητικές έννοιες και η πλειοψηφία των φοιτητών αντιμετωπίζει δυσκολίες τόσο στην κατανόηση των εννοιών αυτών όσο και στον χειρισμό των συμβόλων της γραμμικής άλγεβρας.

Στην παρούσα εργασία περιγράφονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές όταν έρχονται σε επαφή με τις βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας και πως αυτές οι δυσκολίες μπορούν να αποτελέσουν εμπόδιο στην εκμάθησή της.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

Στο 2^{ο} Κεφάλαιο αναφέρονται τα μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και περιγράφεται η ύλη για το καθένα από αυτά. Στη συνέχεια εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται οι βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας, στα πλαίσια κάθε μαθήματος.

Στο 3^{ο} Κεφάλαιο γίνεται μια επισκόπηση στην παρούσα βιβλιογραφία όσον αφορά στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά την εκμάθηση της γραμμικής άλγεβρας.

Στο 4^{ο} Κεφάλαιο περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο που προτείνει η Stewart ώστε να ερευνηθούν τα επίπεδα κατανόησης των εννοιών της γραμμικής άλγεβρας από τους φοιτητές. Το πλαίσιο αυτό βασίζεται σε δύο πολύ διαδεδομένες θεωρίες μάθησης: τους

«Τρείς κόσμους των μαθηματικών» των Watson, Spyrou και Tall και την θεωρία APOS του Dubinsky.

Στο 5^{ο} Κεφάλαιο σχολιάζονται οι απαντήσεις που δόθηκαν από φοιτητές σε τελικές εξετάσεις που διεξήχθηκαν στο Πανεπιστήμιο Κρήτης στα πλαίσια των μαθημάτων Γραμμικής Άλγεβρας που είχαν διδαχτεί. Από τις απαντήσεις αυτές γίνεται μια προσπάθεια για τον προσδιορισμό του επιπέδου κατανόησης του κάθε φοιτητή. Με αυτόν τον τρόπο εντοπίζονται λάθη και παρανοήσεις που κάποιες φορές αφορούν μεγάλο μέρος των φοιτητών της τάξης.

Κεφαλαίο 2: Η Γραμμική Άλγεβρα όπως διδάσκεται στο Πανεπιστήμιο Κρήτης

2.1 Περιγραφή της ύλης των μαθημάτων

Στο Μαθηματικό Τμήμα υπάρχουν δύο υποχρεωτικά μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας, Γραμμική Άλγεβρα Ι και Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ. Στον οδηγό υπάρχουν και άλλα μαθήματα επιλογής όπως Γραμμική Άλγεβρα ΙΙΙ και Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα αλλά σε αυτή την εργασία μελετήθηκαν γραπτά μόνο από τα δύο υποχρεωτικά μαθήματα.

2.1.1 Γραμμική Άλγεβρα Ι

Η Γραμμική Άλγεβρα Ι είναι υποχρεωτικό μάθημα του πρώτου έτους για τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών. Η ύλη του μαθήματος στον οδηγό σπουδών περιγράφεται ως εξής:

Αντικείμενο του μαθήματος είναι η μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας των χώρων $\mathbb{R}^n$ *και* $\mathbb{C}^n$ *και των γραμμικών υποχώρων τους. Βασικό εργαλείο αποτελεί η διαδικασία απαλοιφής Gauss για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Η συστηματική μελέτη της διαδικασίας απαλοιφής στοχεύει να αναδείξει τη χρησιμότητά της σε υπολογιστικά προβλήματα, ενώ παράλληλα αξιοποιείται για τη βαθύτερη θεωρητική ανάλυση των εννοιών που συνδέονται με συστήματα γραμμικών εξισώσεων, την άλγεβρα του*$\mathbb{R}^n$ *και την άλγεβρα των πινάκων.*

Στόχος του μαθήματος είναι η μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ και των υποχώρων τους, ενώ ταυτόχρονα γίνεται σύντομη αναφορά σε ζητήματα ταχύτητας και ακρίβειας υπολογισμών.
Ένα από τα συγγράμματα που προτείνεται στους φοιτητές για το συγκεκριμένο μάθημα είναι το «Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές» του G.Strang από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Συνήθως ο κάθε διδάσκων προτείνει και σημειώσεις ώστε να βοηθήσει τους φοιτητές στην κατανόηση του μαθήματος. Συγκεκριμένα για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι, οι καθηγητές συνηθίζουν να προτείνουν διάφορα σχετικά πακέτα σημειώσεων που είναι γραμμένα από καθηγητές του Τμήματος. Παράλληλα με τη διδασκαλία πραγματοποιείται Ολοήμερο Εργαστήριο Προβλημάτων όπου οι φοιτητές έχουν την ευκαιρία να συζητήσουν για προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας με τους διδάσκοντες και με φοιτητές μεγαλύτερων ετών.

2.1.2 Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ είναι επίσης υποχρεωτικό για τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών και διδάσκεται στο δεύτερο έτος των σπουδών. Στον οδηγό σπουδών η ύλη του μαθήματος περιγράφεται ως εξής:

Αντικείμενο του μαθήματος είναι η μελέτη διανυσματικών χώρων και γραμμικών απεικονίσεων. Εισάγονται οι έννοιες του διανυσματικού χώρου και των γραμμικών απεικονίσεων και μελετώνται τα βασικά αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας, ξεκινώντας από τα αξιώματα. Σκοπός του μαθήματος είναι αφ' ενός να συνδέσει τη μελέτη θεωρητικών προβλημάτων με τις υπολογιστικές μεθόδους και τεχνικές που αναπτύχθηκαν στη Γραμμική Άλγεβρα Ι, και αφ' ετέρου να αναδείξει τη χρησιμότητα της αξιωματικής προσέγγισης, παρουσιάζοντας έννοιες και παραδείγματα όπου αυτή είναι αποτελεσματικότερη.

Πολλές από τις έννοιες που αναφέρθηκαν και ίσως να αναλύθηκαν στη Γραμμική Άλγεβρα Ι επαναλαμβάνονται και σε αυτό το μάθημα και προσεγγίζονται τώρα αξιωματικά. Ταυτόχρονα με τη διδασκαλία πραγματοποιείται και Εργαστήριο Προβλημάτων όπου είτε ο-η διδάσκων-ουσα είτε ο-η φοιτητής-φοιτήτρια μεγαλύτερου έτους, λύνει προβλήματα που έχουν επιλεχτεί για να βοηθηθούν οι φοιτητές στην κατανόηση της θεωρίας. Και σε αυτό το μάθημα προτείνεται το ίδιο βιβλίο που προτάθηκε και για τη διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας Ι παράλληλα με σημειώσεις που επιλέγει να ακολουθήσει ο κάθε διδάσκων-ουσα.

Το 2009, με το νέο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος διαμορφώθηκε η ύλη όπως περιγράφεται παραπάνω. Πριν το 2009 το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι ονομαζόταν Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα ενώ το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Γραμμική Άλγεβρα Ι. Οι αλλαγές αυτές έγιναν χωρίς η ύλη να έχει αλλάξει ουσιαστικά. Μεταξύ του 2003 και του 2009 έγιναν κάποιες αλλαγές, κυρίως όσον αφορά το κεφάλαιο των ιδιοτιμών, που μεταφέρθηκε από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα στη Γραμμική Άλγεβρα Ι, και μετά λίγα χρόνια πάλι πίσω στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.

Τα γραπτά που θα μελετηθούν σε επόμενο κεφάλαιο είναι από εξεταστικές των ακαδημαϊκών ετών 2002-3 και 2003-4 οπότε και τα μαθήματα έχουν την παλιά τους ονομασία.

2.2 Βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας

Παρακάτω εξετάζονται κάποιες από τις έννοιες που αναφέρονται και στα δύο μαθήματα όπως και ο τρόπος που προσεγγίζονται σε κάθε περίσταση.

2.2.1 Υπόχωρος

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι εισάγεται αρχικά η έννοια του υπόχωρου, πριν από τη γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία, και αφού αναφερθούν οι έννοιες αυτές, μελετάται η βάση και η διάσταση του υπόχωρου. Στο βιβλίο του Strang ακολουθείται επίσης η ίδια σειρά. Συγκεκριμένα αναφέρονται παραδείγματα διανυσματικών χώρων και μετά δίνεται ο ορισμός του υπόχωρου (σελίδα 75).

Ορισμός *Υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου λέγεται ένα μη κενό υποσύνολο που ικανοποιεί τις δύο επόμενες απαιτήσεις:*

(i) *Εάν προσθέσουμε δύο διανύσματα x και y του υπόχωρου, το άθροισμα $x + y$ περιέχεται στον υπόχωρο.*

(ii) *Εάν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα x του υπόχωρου με έναν αριθμό c , το πολλαπλάσιοcxπεριέχεται πάλι στον υπόχωρο.*

Αντίστοιχα ο ορισμός που δίνεται στις σημειώσεις του κ. Κουρουνιώτη:

Ορισμός *Ένα υποσύνολο $\mathcal{V}$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος (ή γραμμικός υπόχωρος) του$\mathbb{R}^n$ εάν*

1. *$\mathcal{V}$ δεν είναι κενό, $\mathcal{V} \neq 0$.*
2. *$\mathcal{V}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: εάν $a, b \in \mathcal{V}$ τότε $a + b \in \mathcal{V}$.*
3. *$\mathcal{V}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: εάν $a \in \mathcal{V}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda a \in \mathcal{V}$.*

Στη συνέχεια των σημειώσεων αναφέρονται παραδείγματα υπόχωρων όπως οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

Στο$\mathbb{R}^3$, διανυσματικοί υπόχωροι είναι: όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$, κάθε επίπεδο που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, κάθε ευθεία που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, το μονοσύνολο $\{0 \in \mathbb{R}^3\}$

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, από τα πρώτα μαθήματα διδάσκονται τα *Αξιώματα του Διανυσματικού Χώρου* και ακολουθεί ο ορισμός του υπόχωρου. Παρακάτω φαίνεται ο ορισμός όπως δίνεται στις σημειώσεις του κ. Κουρουνιώτη για το μάθημα της Γραμμική Άλγεβρας ΙΙ.

Ορισμός *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο$\mathcal{V}$ πάνω από το σώμα $\mathcal{K}$, και ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{X}$ του $\mathcal{V}$. Το $\mathcal{X}$ λέγεται γραμμικός υπόχωρος του$\mathcal{V}$ (ή διανυσματικός υπόχωρος του$\mathcal{V}$) εάν*

2 *Το $\mathcal{X}$ είναι κλειστό ως προς την πρόθεση διανυσμάτων,*

$$v, w \in \mathcal{X} \Longrightarrow v + w \in \mathcal{X}$$

3 *Το $\mathcal{X}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,*

$$v \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{K} \Longrightarrow av \in \mathcal{X}$$

2.2.2 Γραμμική Εξάρτηση και Ανεξαρτησία

Και στα δύο μαθήματα διδάσκεται η γραμμική ανεξαρτησία. Στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι από τις πρώτες εβδομάδες εισάγεται η έννοια της γραμμικής εξάρτησης και στη συνέχεια αφού έχουν παρουσιαστεί οι πράξεις με πίνακες και η επίλυση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους, διδάσκεται η γραμμική ανεξαρτησία. Ακολούθως δίνονται οι ορισμοί της γραμμικής εξάρτησης και της γραμμικής ανεξαρτησίας από το βιβλίο του Strang (σελίδα 92):

Εάν ο τετριμμένος συνδυασμός είναι ο μόνος που παράγει το μηδέν, δηλαδή,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0 \text{ συμβαίνει μόνο όταν } c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

τότε τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε είναι γραμμικώς εξαρτημένα και κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Και αντίστοιχα δίνονται οι ορισμοί από τις σημειώσεις του κ. Κουρουνίωτη για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι:

Ορισμός *Τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$του $\mathbb{R}^n$ είναι* ***γραμμικά εξαρτημένα*** *εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, \cdots, c_n$ οι οποίοι δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιος ώστε $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$.*

Τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή εάν ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \cdots, v_n$ που είναι ίσος με μηδέν είναι ο τετριμμένος, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.

Προκειμένου να προσδιορίσουν οι φοιτητές αν τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τους προτείνεται να σχηματίσουν τον $m \times n$ πίνακα A με τα $v_1, \cdots, v_n$να είναι οι στήλες του. Στη συνέχεια κάνοντας απαλοιφή στον A, να καταλήξουν σε έναν κλιμακωτό πίνακα B. Αν κάποιες από τις στήλες του πίνακα B δεν περιέχουν οδηγούς τότε τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ενώ αν όλες οι στήλες του B περιέχουν οδηγούς τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ εισάγονται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου, στη συνέχεια οι γραμμικοί υπόχωροι και οι υπόχωροι που παράγονται από ένα σύνολο και αργότερα η γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία που συνδέονται με τη έννοια της βάσης (η έννοια της βάσης αναφέρεται και στη Γραμμική Άλγεβρα Ι).
Παρακάτω οι ορισμοί όπως δίνονται στις σημειώσεις του κ. Κουρουνιώτη για την γραμμική εξάρτηση και τη γραμμική ανεξαρτησία:

Ορισμός *Η πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $v_1, v_2, \cdots, v_n, n \geq 2$, είναι* ***γραμμικά εξαρτημένη*** *εάν κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $j, 1 \leq j \leq n$, και αριθμοί $a_i \in \mathcal{K}$ για κάθε i, με $1 \leq i \leq n, i \neq j$, τέτοιοι ώστε $v_j = a_1v_1 + \cdots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \cdots + a_nv_n$.*

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι ***γραμμικά ανεξάρτητη*** *εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Για μία πεπερασμένη συλλογή $v_1, \cdots, v_n, n \geq 2$, αυτό σημαίνει οτι κανένα στοιχείο της συλλογής δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.*

Για να αποδείξουν οι φοιτητές ότι κάποια διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα χρησιμοποιούν το ακόλουθο λήμμα όπως δίνεται παρακάτω στις ίδιες σημειώσεις.

Λήμμα 2.3 *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \cdots, v_n, n \geq 1$, είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητη*** *εάν και μόνον εάν ο μοναδικός τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \cdots, v_n$ είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.*

Συγκεκριμένα, για να αποδείξουν ότι τα διανύσματα $v_1, \cdots, v_n$είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι φοιτητές εξετάζουν τους γραμμικούς συνδυασμούς $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$. Σύμφωνα με το λήμμα για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα, θα πρέπει $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ *μόνο όταν* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$*, δηλαδή όταν όλοι* συντελεστές είναι όλοι ίσοι με 0.

2.2.3 Παράγοντας έναν υπόχωρο και Βάση

Μέτα από την γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διδάσκεται πως παράγεται ένας υπόχωρος από ένα σύνολο διανυσμάτων (Span) και αμέσως μετά αναφέρεται η βάση του υπόχωρου. Η σειρά αυτή ακολουθείται και στα δύο μαθήματα όπως και στο βιβλίο του Strang.

Πιο συγκεκριμένα, στο βιβλίο του Strang στη σελίδα 96 ορίζεται τι σημαίνει για ένα σύνολο διανυσμάτων να παράγουν ένα χώρο:

Ένα ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς συγκεκριμένων διανυσμάτων $w_1, \cdots, w_l$, τότε τα διανύσματα αυτά παράγουν τον χώρο. Με άλλα λόγια, κάθε διάνυσμα v του $\mathcal{V}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των w:

$v = c_1w_1 + \cdots + c_lw_l$ *για κάποιους συντελεστές* c_i.

Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός της βάσης στην σελίδα 97:

Ορισμός *Βάση ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που έχει ταυτόχρονα και τις δύο ιδιότητες:*

(1) Είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
(2) Παράγει τον χώρο.

Πριν από τον ορισμό αναφέρεται η παραγωγή υπόχωρου από ένα σύνολο διανυσμάτων (Span) και μάλιστα συνδέεται διαισθητικά με την έννοια της βάσης αφού αναφέρεται ότι η ιδέα των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν τον χώρο είναι *κανένα διάνυσμα να μην πάει χαμένο*. Αμέσως μετά τον ορισμό αναφέρεται η ύπαρξη πολλών βάσεων για τον ίδιο διανυσματικό χώρο και ακολουθεί η έννοια της διάστασης του διανυσματικού χώρου.

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι οι έννοιες της βάσης και της παραγωγής χώρου (span) διδάσκονται μεταξύ της 4η και της 6η εβδομάδας μαθημάτων. Ο κ. Κουρουνιώτης αναφέρει στις σημειώσεις του μαθήματος (σελ. 48 και 50):

Ορισμός *Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $w_1, \cdots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$* ***παράγουν*** *τον υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ εάν*

1. $w_j \in \mathcal{V}$ *για κάθε* $j = 1, \cdots, k$ *και*

2. *Κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \cdots, w_k$, δηλαδή για κάθε $v \in \mathcal{V}$ υπάρχουν αριθμοί $c_1, \cdots, c_k$ τέτοια ώστε $v = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k$.*

Ορισμός *Βάση ενός διανυσματικού υπόχωρου $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ το οποίο*

1. *Παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{V}$ και*
2. *Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Ακολουθεί η έννοια της διάστασης όπου και αναφέρεται η ύπαρξη πολλών διαφορετικών βάσεων για έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που όμως όλες έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Τέλος, στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ η έννοιες της παραγωγής χώρου και της βάσης εισάγονται από τις πρώτες εβδομάδες διδασκαλίας. Στην σελίδα 27 των σημειώσεων του κ. Κουρουνιώτη αναφέρεται:

Εάν ένα υποσύνολο $\mathcal{S}$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ παράγει το $\mathcal{V}$, τότε κάθε στοιχείο του $\mathcal{V}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του$\mathcal{S}$. Εάν επιπλέον το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι μοναδικός για κάθε στοιχείο του $\mathcal{V}$. Γι' αυτό το λόγο ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει ένα χώρο $\mathcal{V}$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται βάση του $\mathcal{V}$.

Ορισμός *Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ λέγεται βάση του $\mathcal{V}$ εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$.*

Διαισθητικά αναφέρεται ότι:

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, και επίσης ως ένα ελάχιστο παράγον σύνολο του $\mathcal{V}$.

Κεφάλαιο 3: Βιβλιογραφική Έρευνα

3.1 Η γραμμική άλγεβρα και πως αντιμετωπίζεται από τους φοιτητές

Η επίδοση των φοιτητών συνήθως είναι πολύ καλή όταν έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά με το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας, και πολλές φορές μάλιστα καλύτερη από το μάθημα του λογισμού που δίνεται το ίδιο εξάμηνο (Dorier, 2000). Όπως αναφέρουν οι Britton & Henderson παρόλο που οι φοιτητές έχουν καλύτερη επίδοση στη γραμμική άλγεβρα, το μάθημα του λογισμού είναι πιο οικείο σε αυτούς (Britton & Henderson, 2009). Συγκεκριμένα στο δεύτερο έτος νιώθουν πιο άνετα με το μάθημα του διανυσματικού λογισμού, που το περιεχόμενο/αντικείμενο του μαθήματος είναι εντελώς άγνωστο γι αυτούς, παρά με το αντίστοιχο μάθημα γραμμικής άλγεβρας ΙΙ. Γι' αυτή τους την προτίμηση ίσως να ευθύνεται και η στάση των καθηγητών απέναντι στο μάθημα (όσον αφορά τη διδασκαλία του μαθήματος). Οι Britton & Henderson παρατηρούν ότι στη γραμμική άλγεβρα, σε αντίθεση με άλλες περιοχές των μαθηματικών, πολλές φορές δεν αναγνωρίζεται η εννοιολογική δυσκολία που παρουσιάζει το αντικείμενο και αυτό μπορεί να επιβραδύνει την κατανόησή τους από τους φοιτητές έως ότου να πετύχουν υψηλότερου επιπέδου μαθηματική αντίληψη. Για παράδειγμα όταν διδάσκεται ο ε-δ ορισμός του ορίου στον απειροστικό λογισμό οι καθηγητές καταλαβαίνουν το αυξημένο επίπεδο δυσκολίας και δεν έχουν την απαίτηση οι φοιτητές να κατανοήσουν άμεσα και σε βάθος τον ορισμό. Από την άλλη οι έννοιες στη γραμμική άλγεβρα δεν αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο . Για παράδειγμα, ο ορισμός της κλειστότητας ως προς την πρόσθεση θεωρείται εύκολος από τους καθηγητές, αφού σε δοσμένα παραδείγματα όπου ζητείται η επαλήθευση της κλειστότητας θεωρείται διαδικασία ρουτίνας. Αυτή την άποψη βέβαια δεν την συμμερίζονται πάντα οι φοιτητές (Britton & Henderson, 2009).

Στην πραγματικότητα, η γραμμική άλγεβρα είναι ένα μάθημα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων (Dorier & Sierpinska, 2001) και μπορεί να προσφέρει υψηλού επιπέδου θεωρητική γνώση στους φοιτητές (Sierpinska, 2002), κάτι που τους κάνει τις περισσότερες φορές να μην καταφέρνουν να κατανοήσουν την τυπική θεωρία.

Νωρίτερα αναφέρθηκε ότι συνήθως οι φοιτητές τα πάνε καλά με το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας και εδώ γεννάται το ερώτημα τι είναι αυτό που τους κάνει να πετυχαίνουν στο μάθημα χωρίς να έχουν καταφέρει να κατανοήσουν όλες τις έννοιες που διδάσκονται σε αυτό. Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα αρκεί μια ματιά στις σημειώσεις του μαθήματος. Το μάθημα εκτός από τις θεωρητικές γνώσεις που προσφέρει, αποτελείται και από υπολογιστικά μέρη όπου ο φοιτητής καλείται να μιμηθεί μεθοδολογίες προκειμένου να λύσει τις ασκήσεις. Εξαιτίας των τυπικών εννοιών που διδάσκονται στο θεωρητικό κομμάτι του μαθήματος, η γραμμική άλγεβρα παραμένει γνωστικά και εννοιολογικά δύσκολο αντικείμενο. Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι η αφηρημένη φύση και ο πολύ θεωρητικός χαρακτήρας του αντικειμένου είναι οι κύριες αιτίες δυσκολίας των φοιτητών. (Britton & Henderson, 2009). Είναι γεγονός ότι το αντικείμενο του μαθήματος είναι αφηρημένο και περιέχει γενικές έννοιες όπως του διανυσματικού χώρου, της βάσης, της διάστασης και του πυρήνα που είναι δύσκολα στην κατανόηση (Stewart, 2008).

Η Stewart αναφέρει ότι οι ασκήσεις που δίνονται στους φοιτητές στα πλαίσια του μαθήματος είναι ακατάλληλες αφού χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι οι «τυπικές ασκήσεις» και συμπεριλαμβάνουν ερωτήματα όπως το να βρουν το συμπλήρωμα ενός χώρου. Τέτοιου τύπου ασκήσεις θεωρούνται δύσκολες από τους φοιτητές. Η δεύτερη κατηγορία είναι «υπολογιστικές ασκήσεις» και οι φοιτητές τις προτιμούν αφού τις θεωρούν εύκολες. Ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι όταν ζητείται να βρεθούν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα (Stewart, 2008). Παρόλο που στη γραμμική άλγεβρα απαιτούνται τόσο αριθμητικές όσο και εννοιολογικές δεξιότητες, για να πετύχει κάποιος στο μάθημα, δεν χρειάζεται να έχει και τα δύο (Dorier, 2000). Ο Dorier αναφέρει ότι και οι ίδιοι οι καθηγητές δίνουν λιγότερη σημασία στα τυπικά μέρη της διδασκαλίας (ειδικά στην αρχή) και περισσότερη σε αλγοριθμικές ενότητες που συνδέονται με πράξεις πινάκων και γραμμικούς μετασχηματισμούς (Dorier, 1999). Την ίδια παρατήρηση βλέπουμε και από τον Carlson:

Οι φοιτητές αρχικά μαθαίνουν πώς να λύνουν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων και πώς να υπολογίζουν προϊόντα πινάκων. Αυτά τους φαίνονται εύκολα. Όταν μπαίνουμε σε έννοιες όπως υπόχωροι, spanning και γραμμική ανεξαρτησία μπερδεύονται και αποπροσανατολίζονται. (Carlson, 1992)

Για τον ίδιο, όταν οι φοιτητές καλούνται να κατανοήσουν τις τυπικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας, δυσκολεύονται αφού οι νέες έννοιες δεν σχετίζονται με υπολογισμούς, όπως συνήθιζαν να αντιμετωπίζουν τις ασκήσεις της γραμμικής μέχρι τώρα. Ένας ακόμη λόγος που αναφέρεται από τον Carlson ότι δυσκολεύει τους φοιτητές είναι ότι οι νέες έννοιες δεν συνδέονται με τις προηγούμενες γνώσεις τους. Σε αντίθεση με το μάθημα του απειροστικού λογισμού, που οι έννοιες εκεί είναι πιο κοντά στην προηγούμενη εμπειρία των φοιτητών με τα μαθηματικά (όπως για παράδειγμα οι ορισμοί της συνάρτησης, του ορίου και της συνέχειας), στη γραμμική άλγεβρα μπορούν λιγότερο να χρησιμοποιούν τη διαίσθησή τους για όρους όπως span και ιδιοδιάνυσμα (Halel, 1993 αναφέρεται στο Dorier, 2000).

3.2 Το εμπόδιο του φορμαλισμού

Σύμφωνα με τον Tall ο αξιωματικός φορμαλισμός κατασκευάζει τυπική γνώση σε αξιωματικά συστήματα προσδιορισμένα με ένα συνολοθεωρητικό ορισμό, των οποίων οι ιδιότητες προκύπτουν μέσω μαθηματικών αποδείξεων (Tall, 2011).

Το 1987 ο Dorier εξέτασε τις γνώσεις και τις σκέψεις των φοιτητών στην αρχή του δεύτερου έτους των σπουδών τους για τις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας που είχαν διδαχτεί στο πρώτο έτος. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποίησε ένα ερωτηματολόγιο όπου οι ερωτήσεις εξέταζαν τόσο τις υπολογιστικές ικανότητες των φοιτητών όσο και την ικανότητά τους να αντιμετωπίζουν ασκήσεις που αφορούν στην τυπική θεωρία. Μια από τις ερωτήσεις, ήταν ποια κατά τη γνώμη τους είναι η μεγαλύτερη δυσκολία κατά τη μάθηση της γραμμικής άλγεβρας. Από τις απαντήσεις των φοιτητών, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι περισσότερες δυσκολίες που αντιμετώπισαν ήταν λόγω της γλώσσας, του φορμαλισμού και της μεγάλης ποσότητας ορισμών και θεωρημάτων (Dorier, 2000).

Παρατηρείται ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν προσπαθούν να χειριστούν αριθμούς, διανύσματα, εξισώσεις, συντεταγμένες και λοιπά και βυθίζονται κάτω από μια χιονοστιβάδα νέων λέξεων, συμβόλων, ορισμών και θεωρημάτων (Parraguez, Oktaη, 2010). Πολλοί ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο «το εμπόδιο του φορμαλισμού» για να περιγράψουν τις δυσκολίες αυτές. Συγκεκριμένα, στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας, το πρόβλημα των φοιτητών με τα τυπικά μέρη του μαθήματος δεν είναι απλώς δυσκολία με το φορμαλισμό, αλλά κυρίως δυσκολία στην κατανόηση της ειδικής χρήσης του φορμαλισμού στην γραμμική άλγεβρα αλλά και δυσκολίες στην ερμηνεία των τυπικών εννοιών σε πιο διαισθητικά πλαίσια[i]. Ακόμη για το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας, οι Britton & Henderson εκφράζουν την άποψη πως η δυσκολία των φοιτητών οφείλεται στο γεγονός ότι καλούνται να μάθουν και να καταλάβουν (ίσως για πρώτη φορά) έννοιες, και όχι υπολογιστικούς αλγόριθμους όπως αρχικά στα πλαίσια του μαθήματος και αυτό το θεωρούν μια παραλλαγή αυτού που ορίσαμε ως «εμπόδιο του φορμαλισμού» (Britton & Henderson, 2009).

Ο Dorier προσπαθώντας να εντοπίσει τα αίτια της δυσκολίας των φοιτητών με τον φορμαλισμό στα μαθηματικά γενικότερα, παρατηρεί ότι στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση από τις αρχές της δεκαετίας του ΄80 σταμάτησε σταδιακά να δίνεται έμφαση στους τυπικούς ορισμούς των μαθηματικών, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην είναι εξοικειωμένοι με αυτούς. Αυτό έχει αντίκτυπο και στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας αφού και εδώ παρατηρούνται δυσκολίες. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι ο φορμαλισμός είναι μια από τις βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας (Dorier, 2000).

3.2.1 Το εμπόδιο του φορμαλισμού στη γραμμική ανεξαρτησία

Ο Dorier το 1990 στα πλαίσια μιας έρευνας σε ένα γαλλικό πανεπιστήμιο, εξέτασε αν ο φορμαλισμός είναι ένα διδακτικό εμπόδιο το οποίο σχετίζεται με την έλλειψη προαπαιτούμενων γνώσεων. Για τις ανάγκες αυτής της έρευνας έδωσε στη διάρκεια ενός εξαμήνου επτά τεστ[ii] στους φοιτητές, το πρώτο από αυτά δόθηκε την πρώτη εβδομάδα διδασκαλίας όπου αποτιμήθηκαν οι προηγούμενες γνώσεις των φοιτητών για το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας (προκαταρκτικό τεστ), ενώ το τελευταίο ήταν η τελική εξέταση.

---

[i] Ο Dorier κατέληξε σε αυτά τα συμπεράσματα όταν το 1990 μελέτησε τη συσχέτιση ανάμεσα στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με τη χρήση των τυπικών ορισμών και στις δυσκολίες με τη χρήση των μαθηματικής συνεπαγωγής σε διαφορετικά πλαίσια, χρησιμοποιώντας στατιστικά εργαλεία.

[ii] Στα επτά τεστ συμπεριλαμβάνονταν: 4 τεστ που δίνονται κάθε δεύτερη εβδομάδα, 1 τεστ ενδιάμεσης εξέτασης, 1 τεστ τελικής εξέτασης και 1 τεστ ερωτήσεων σωστού/λάθους.

Στα αποτελέσματά του, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η υψηλή συσχέτιση που βρέθηκε στην επιτυχία στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας με την απόδοση των φοιτητών στο προκαταρκτικό τεστ. Ο ίδιος αναφέρει:

Τα αποτελέσματα φαίνεται να δείχνουν ότι ένα συγκεκριμένο επίπεδο από τις προηγούμενες ικανότητες στην βασική λογική, και κυρίως στην ικανότητα χρήσης της ποσοδεικτών, απαιτείται ώστε να επιτευχθεί μία ελάχιστη επιτυχία στη γραμμική άλγεβρα.

Ένα από τα θέματα που μελετήθηκε στα πλαίσια αυτής της έρευνας, ήταν η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με τον τυπικό ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας. Η κατανόηση και η χρήση του τυπικού ορισμού της, αποτελεί εμπόδιο στη μάθηση της γραμμικής άλγεβρας. Παρατηρείται ότι, οι φοιτητές καταφέρνουν να ελέγξουν αν ένα σύνολο από ν- άδες, από εξισώσεις, από πολυώνυμα ή από συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητα αλλά δυσκολεύονται στην χρήση του τυπικού ορισμού (Dorier, 1999). Παρακάτω αναφέρονται οι παρατηρήσεις του Dorier όσον αφορά σε τρείς ερωτήσεις όπου οι φοιτητές για να απαντήσουν έπρεπε να έχουν κατανοήσει τον τυπικό ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας και μάλιστα οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν ήταν λανθασμένες. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στις σελίδες 101-103 (Dorier, 2000). (τα συγκεκριμένα παραδείγματα παρουσιάστηκαν και μελετήθηκαν από τους Robert & Robinet το 1989).
Οι ερωτήσεις συμπεριλαμβάνονταν στο τεστ σωστού/λάθους.

1. $Έστω\ u, v\ και\ w\ τρία\ διανύσματα\ στον\ \mathbb{R}^3.\ Αν\ είναι\ ανα\ δύο\ μη\ συγγραμμικά,\ είναι\ γραμμικά\ ανεξάρτητα;$

2.1 $Έστω\ u, v\ και\ w\ τρία\ διανύσματα\ στον\ \mathbb{R}^3, και\ f\ μια\ γραμμική\ συνάρτηση\ στον\ \mathbb{R}^3.\ Αν\ τα\ u, v\ και\ w\ είναι\ γραμμικά\ ανεξάρτητα, είναι\ και\ τα\ f(u), f(v)\ και\ f(w) γραμμικά\ ανεξάρτητα;$

2.2 $Έστω\ u, v\ και\ w\ τρία\ διανύσματα\ στον\ \mathbb{R}^3, και\ f\ μια\ γραμμική\ συνάρτηση\ στον\ \mathbb{R}^3.\ Αν\ τα\ f(u), f(v)\ και\ f(w) είναι\ γραμμικά\ ανεξάρτητα, είναι\ και\ τα\ u, v\ και\ w\ γραμμικά\ ανεξάρτητα;$

Στην περίπτωση της ερώτησης 1 οι περισσότερες απαντήσεις είναι θετικές (ότι δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα) και οι φοιτητές δικαιολόγησαν την απάντησή τους δίνοντας αποδείξεις και παραδείγματα. Κάποιες φορές όταν ζητείται από τους φοιτητές να αποδείξουν ότι περισσότερα από δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ξεκινάνε δείχνοντας ότι η σχέση ισχύει για δύο από αυτά και στη συνέχεια συμπεριλαμβάνοντας όλα τα υπόλοιπα ένα-ένα, καταλήγουν στη σωστή απάντηση. Ο Dorier χαρακτηρίζει αυτή μέθοδο «τοπική προσέγγιση σε συνολικό ερώτημα» αφού σε κάποιες περιπτώσεις αν γίνει ελεγχόμενα, μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματική, παρόλο που είναι μια διαδικασία όπου οι φοιτητές είναι αρκετά επιρρεπείς σε λάθη. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι φοιτητές δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν τη γραμμική ανεξαρτησία «συνολικά» κι έτσι καταφεύγουν σε «τοπικές» προσεγγίσεις. Ο Dorier για να περιγράψει αυτή την τακτική αντιμετώπισης των ασκήσεων δανείζεται τον όρο *θεωρήματα σε δράση* (Theoremes en acte - Theorems in action) του Vergnaud (Dorier 1990, αναφέρεται Dorier, 2000). Τα θεωρήματα σε δράση είναι κανόνες ή θεωρήματα τα οποία είναι έγκυρα σε περιορισμένες καταστάσεις, αλλά που δημιουργούν προβλήματα όταν γενικεύονται λανθασμένα και σε άλλες περιπτώσεις. Ο πρώτος αναφέρει ότι, ειδικά για τις ασκήσεις που οι φοιτητές καλούνται να αποδείξουν γραμμική ανεξαρτησία, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που «χτίζουν» *θεωρήματα σε δράση* (για περισσότερα παραδείγματα τέτοιων θεωρημάτων σελ 101 Dorier, 2000). Για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων στη διδασκαλία, ο Dorier προτείνει στους καθηγητές, να συζητήσουν με τους ίδιους τους φοιτητές τις λύσεις που έδωσαν στη παραπάνω ερώτηση. Ακόμη προτείνει οι καθηγητές να γνωρίσουν τα *θεωρήματα σε δράση* που τείνουν να φτιάχνουν οι φοιτητές, ώστε να τους βοηθήσουν να καταλάβουν τα πιθανά τους λάθη.

Στις ερωτήσεις 2.1 και 2.2 οι περισσότερες απαντήσεις ήταν «ναι» και «όχι» αντίστοιχα, παρόλο που σε πολλές περιπτώσεις οι απαντήσεις συνοδεύονταν από μια απόδειξη πολύ κοντά στην σωστή. Ακολουθεί παράδειγμα με μια απάντηση όπως δίνεται στο βιβλίο του Dorier στην σελίδα 101.

$$
\begin{aligned}
&Αν\ \alpha U+\beta V+\gamma W=0\ τότε\ f(\alpha U+\beta V+\gamma W)=0\\
&τότε\ η\ f\ είναι\ γραμμική\ συνάρτηση: \alpha f(U)+\beta f(V)+\gamma f(W)=0\\
&τώρα\ επειδή\ U,V\ και\ W\ είναι\ γραμμικά\ ανεξάρτητα\ \alpha=\beta=\gamma=0\\
&οπότε\ f(U),f(V) και\ f(W)\ είναι\ ανεξάρτητα
\end{aligned}
$$

Η αρχική παρατήρηση των Robert και Robinet, που ασχολήθηκαν πρώτοι με τις ασκήσεις αυτές, ήταν ότι οι φοιτητές αντιμετώπιζαν προβλήματα με τη μαθηματική συνεπαγωγή, συγχύζοντας την υπόθεση με το συμπέρασμα. Αυτή βέβαια είναι μια προφανής παρατήρηση όσον αφορά στην χρήση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας (Dorier, 1999). Για τον Dorier το ερώτημα ήταν αν η σύγχυση αυτή συσχετίζεται με την απόδοση των φοιτητών στο προκαταρκτικό τεστ. Τα αποτελέσματα της στατιστικής έρευνας έδειξαν ότι η συσχέτιση ήταν μηδενική και μερικές φορές αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι, για την κατανόηση του φορμαλισμού της θεωρίας του διανυσματικού χώρου στη γραμμική άλγεβρα, απαιτούνται ικανότητες στο κομμάτι της μαθηματικής λογικής και όχι γενικές γνώσεις. Ακόμη, κάποιες δυσκολίες που παρουσιάζονται λόγω του φορμαλισμού στη γραμμική άλγεβρα, πρέπει να αντιμετωπίζονται στο συγκεκριμένο πλαίσιο της γραμμικής άλγεβρας προκειμένου να ξεπεραστούν.

Ένα ακόμη πρόβλημα που συζητήθηκε ήταν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές τόσο με τις αποδείξεις όσο και με την ακρίβεια στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας. Μετά από πειράματα ο Dorier κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, οι φοιτητές είναι σε θέση να «χτίσουν» πιο αυστηρές αποδείξεις, αν καταφέρουν να συνδέσουν τις τυπικές έννοιες με την διαισθητική τους αντίληψη. Ο ίδιος αναφέρει ότι πρέπει η διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας να δίνει στους φοιτητές καλύτερους τρόπους να συνδέουν τα τυπικά αντικείμενα της θεωρίας με προηγούμενες έννοιες και έτσι με αυτό τον τρόπο η μάθηση να βασίζεται περισσότερο στη διαίσθηση. Επίσης προσθέτει:

Αυτό προϋποθέτει όχι μόνο να δίνονται παραδείγματα, αλλά και να δείχνεται πώς συνδέονται όλα αυτά τα παραδείγματα και ποιος είναι ο ρόλος των τυπικών εννοιών στις εμπλεκόμενες μαθηματικές δραστηριότητες.

3.3 Το πρόβλημα των αναπαραστάσεων

Οι έννοιες στη γραμμική άλγεβρα έχουν πολλές αναπαραστάσεις και μάλιστα αυτό αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας στην εκμάθησή της. Για τον Hillel οι αναπαραστάσεις διακρίνονται από το διαφορετικό λεξιλόγιο που η καθεμία χρησιμοποιεί για την ίδια έννοια. Οι αναπαραστάσεις αυτές συνυπάρχουν και πολλές φορές εναλλάσσονται (όχι ισοδύναμα) και περιλαμβάνουν τρία είδη (Hillel, 2000):

Αφηρημένη μορφή (abstract mode): χρησιμοποιείται λεξιλόγιο και έννοιες της γενικής τυπικής θεωρίας, περιλαμβάνοντας: διανυσματικό χώρο, υπόχωρο, Linear span, διαστάσεις, operations, πυρήνες.

Αλγεβρική μορφή (algebraic mode): χρησιμοποιείται λεξιλόγιο και έννοιες πιο συγκεκριμένης θεωρίας του $\mathbb{R}^n$, περιλαμβάνοντας: ν- αδες, πίνακες, βαθμός πίνακα, λύση συστήματος εξισώσεων, χώρος στηλών.

Γεωμετρική μορφή (geometric mode): χρησιμοποιείται λεξιλόγιο και έννοιες των δύο και τριών διαστάσεων, περιλαμβάνοντας: ευθύγραμμα τμήματα, σημεία, ευθείες, επίπεδα, γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά σαν βέλος, αλγεβρικά σαν μια γραμμή ή στήλη αριθμών ή συμβόλων ενός πίνακα, και αφηρημένα σαν ένα στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου.

Οι Dorier και Sierpinska πρόσθεσαν στη παραπάνω λίστα την γραφική μορφή αναπαράστασης (graphical mode), την μορφή πίνακα (tabular mode) και την συμβολική μορφή (symbolic mode). Ακόμη υπάρχουν η καρτεσιανή (Cartesian) και η παραμετρική (parametric) αναπαράσταση του υπόχωρου (Dorier & Sierpinska, 2001).

Η ύπαρξη πολλών αναπαραστάσεων δεν είναι το μοναδικό πρόβλημα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι φοιτητές. Για πολλές έννοιες της γραμμικής άλγεβρα, υπάρχουν μηχανισμοί για την μετάβαση από την μια αναπαράσταση στην άλλη αν και αυτό δεν είναι πάντα εύκολο. Ο Hillel ονομάζει αυτή τη δυσκολία *πρόβλημα των αναπαραστάσεων* (Hillel, 2000). Συνήθως στη διδασκαλία οι καθηγητές εισάγουν μια έννοια με μια συγκεκριμένη αναπαράσταση και στη συνέχεια μεταπηδούν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη αλλάζοντας συμβολισμούς και τρόπους περιγραφής, χωρίς να προειδοποιήσουν τους φοιτητές (Dorier, 2002).

Για τους φοιτητές αυτή η μετάβαση δεν είναι πάντα εύκολη και αυτονόητη. Χρειάζεται να εξασκηθούν ώστε να καταλαβαίνουν ότι οι ιδιότητες κάθε αναπαράστασης είναι ανεξάρτητες, να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι αναπαραστάσεις αυτές συνδέονται και φυσικά να μπορούν να δουν με ποιόν τρόπο επωφελούνται όταν μετακινούνται από τη μια αναπαράσταση στην άλλη (Britton & Henderson, 2009).

Η ικανότητα αυτή της εναλλαγής ονομάζεται *ευελιξία στην αναπαράσταση, και* ο Thomas αναφέρει ότι είναι ζωτικής σημασίας για την μάθηση των μαθηματικών, αφού περιλαμβάνει την ικανότητα στη «μετάφραση» του λεξιλογίου από τη μια αναπαράσταση στην άλλη και την ικανότητα αλληλεπίδρασης διαδικαστικά και εννοιολογικά σε κάθε αναπαράσταση (Stewart & Thomas, 2007). Εκτός από την *ευελιξία στην αναπαράσταση*, για την κατανόηση της γραμμικής άλγεβρας, απαιτείται και η ανάπτυξη της ικανότητας των φοιτητών να *συμπυκνώνουν* σε αναγνωρίσιμες εννοιολογικές δομές σημαντικό εύρος αυτών που στο παρελθόν θεωρούσαν μεμονωμένα αντικείμενα και ενέργειες σε αντικείμενα. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις τώρα θεωρούνται αντικείμενα από μόνες τους, στοιχεία του διανυσματικού χώρου και όχι τόσο διαδικασίες που αντιστοιχίζουν αριθμούς σε άλλους αριθμούς (Dorier & Sierpinska, 2001). Τέλος, μια άλλη σημαντική πτυχή της μάθησης της γραμμικής άλγεβρας είναι η *γενίκευση*. Συγκεκριμένα ο Hillel αναφέρει (Hillel, 2000):

Η γνώση της γραμμικής άλγεβρας σε αυτό το επίπεδο απαιτεί ότι οι φοιτητές αρχίζουν να σκέπτονται σχετικά με τα αντικείμενα και τις λειτουργίες της άλγεβρας, όχι μόνο από την άποψη των σχέσεων μεταξύ συγκεκριμένων πινάκων, διανυσμάτων και πράξεων, αλλά και από την άποψη του συνόλου των δομών, όπως, διανυσματικοί χώροι πάνω από σώματα, άλγεβρες, και τάξεις γραμμικών τελεστών.

3.4 Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές λόγω της γενίκευσης των εννοιών

Οι Chandler και Taylor παρατηρούν ότι συνήθως στη διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας, οι έννοιες εισάγονται στον $\mathbb{R}^n$ και μετά γενικεύονται, αυξάνοντας έτσι το επίπεδο της αφαιρετικότητας με αποτέλεσμα οι φοιτητές να μπερδεύονται και να απογοητεύονται (Chandler & Taylor, 2008).

Για τους Dorier και Sierpinska αυτή η διδακτική προσέγγιση όπου τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου προκύπτουν από την γενίκευση των ιδιοτήτων του $\mathbb{R}^n$, είναι αρκετά αναποτελεσματική όσον αφορά στην κατανόηση των φοιτητών (Dorier & Sierpinska, 2001)[iii]. Και ο Hillel αναφέρει ότι, όταν στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας οι φοιτητές έρχονται σε επαφή με έννοιες που σχετίζονται με τον $\mathbb{R}^n$ αντιμετωπίζουν ένα εμπόδιο. Παρατηρεί ότι

[iii] Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου γίνονται πιο κατανοητά όταν εισάγονται από μια πιο γενική προοπτική ενός αλγεβρικού συστήματος και εννοιών όπως του ουδέτερου στοιχείου σε σχέση με μια μαθηματική πράξη, του αντίθετου ή ανάστροφου στοιχείου, κλπ (Dorier & Sierpinska, 2001).

ένα μεγάλο μέρος προβλημάτων μπορεί να αντιμετωπιστεί άμεσα ή έμμεσα με την θεωρία των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, οπότε το αλγεβρικό επίπεδο περιγραφής γίνεται εμπόδιο στη μάθηση της θεωρίας (Hillel, 2000).

Δεδομένου λοιπόν του αυξημένου επιπέδου δυσκολίας, για να βοηθήσουν τους φοιτητές τους να ξεπεράσουν το επίπεδο της αφαιρετικότητας, οι Chandler και Taylor ζητούσαν από αυτούς να ασχοληθούν με διανυσματικούς χώρους με τους οποίους δεν ήταν εξοικειωμένοι, όπως το σύνολο όλων των πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Η διαδικασία αυτή της επαλήθευσης των δέκα αξιωμάτων φαινόταν βαρετή στους φοιτητές, όμως τους βοήθησε να εξοικειωθούν με την έννοια του διανυσματικού χώρου.

Στη συνέχεια, παρατήρησαν ότι κάποια από τα λάθη των φοιτητών οφειλόταν στο γεγονός ότι αντιμετώπιζαν κάποιες ασκήσεις ακλουθώντας μια σειρά από βήματα και χειρισμούς συμβόλων. Για παράδειγμα όταν έβλεπαν την λέξη «υπόχωρος» σκεφτόταν μια διαδικασία δύο βημάτων: να αποδείξουν την κλειστότητα ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Γι αυτόν τον λόγο, ζήτησαν από τους φοιτητές να κατασκευάσουν δύο μη τετριμμένους υπόχωρους. Από τις απαντήσεις τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, αφενός οι φοιτητές έχουν έλλειψεις στην κατανόηση του ορισμού του υπόχωρου και αφετέρου δεν καταφέρνουν να συνδέσουν τις έννοιες: βάση ενός διανυσματικού χώρου και υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου.

Στη διδασκαλία, προκειμένου να βοηθήσουν τους φοιτητές να κατανοήσουν την έννοια του υπόχωρου, προσδιόριζαν γεωμετρικά όλους τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, εξηγώντας ότι θα πρέπει να είναι ευθείες ή επίπεδα που να διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Σε αυτό το σημείο συνέδεσαν την έννοια της βάσης, δείχνοντας ότι ένα υποσύνολο μιας βάσης του $\mathbb{R}^3$, παράγει είτε μια ευθεία είτε ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Στο τέλος της διδασκαλίας οι φοιτητές είχαν βοηθηθεί αρκετά ώστε να μπορούν να γενικεύσουν τις έννοιες αυτές στον διανυσματικό χώρο. Οι Chandler και Taylor θεωρούν πολύ σημαντικό οι καθηγητές μέσα από τις ασκήσεις που δίνουν στους φοιτητές, να μπορούν να προσδιορίσουν το επίπεδο κατανόησής τους όσον αφορά σημαντικές έννοιες και ορισμούς. Οι ίδιες προτείνουν να δίνονται περισσότερες ασκήσεις που να απαιτούν κατασκευές, γιατί με αυτόν τον τρόπο, οι φοιτητές αναπτύσσουν δεξιότητες αιτιολόγησης που είναι απαραίτητες για την εκμάθηση πιο προχωρημένων μαθηματικών εννοιών, αφού με αυτόν τον τρόπο έχουν την ευκαιρία να βρίσκουν αντιπαραδείγματα και να υπερασπίζονται τους ισχυρισμούς τους (Chandler & Taylor, 2008).
Τη μέθοδο των Chandler και Taylor προτείνουν και οι Britton & Henderson για τάξεις με μικρό αριθμό φοιτητών (Britton & Henderson, 2009).

Στο μάθημα της γραμμικής άλγεβρας συναντάμε πολλούς τύπους ασκήσεων που οι φοιτητές για την επίλυσή τους εκτελούν μια σειρά από βήματα. Προβλήματα παρουσιάζονται όταν οι έννοιες δεν περιορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ αφού οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να εφαρμόσουν τις ίδιες στρατηγικές που μάθανε βήμα προς βήμα. Για παράδειγμα πρέπει να ακολουθήσουν τελείως διαφορετική διαδικασία προκειμένου να προσδιορίσουν βάση ενός διανυσματικού χώρου που παράγεται από διανύσματα και από συναρτήσεις (Carlson, 1992).

Κεφάλαιο 4: Θεωρητικό πλαίσιο

4.1 Οι τρείς κόσμοι των μαθηματικών

Το 2002 οι Watson, Spyrou και Tall μελέτησαν τις εννοιολογικές δυσκολίες για την κατανόηση των διανυσμάτων. Ανέφεραν δύο είδη προσεγγίσεων για την ανάπτυξη αυτής της έννοιας. Από τη μια τη *γεωμετρική και τη συμβολική* προσέγγιση. Στη γεωμετρική τα διανύσματα αναπαριστούν έννοιες όπως η δύναμη, η επιτάχυνση, η ταχύτητα και στη *συμβολική* τα διανύσματα παρουσιάζονται σε πίνακες. Από την άλλη την *τυπική* προσέγγιση που εισάγεται σε πανεπιστημιακό επίπεδο με τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου. Παρατήρησαν ότι δεν ήταν απλά τρείς διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών (γεωμετρική, συμβολική και τυπική), αλλά τρείς τελείως διαφορετικοί τύποι γνωστικής ανάπτυξης. Όπως αναφέρει κι ο Tall «τρία είδη τόσο διαφορετικά, ώστε να μοιάζουν κάτοικοι τριών διαφορετικών κόσμων».

4.1.1 **Embodied World** (Σωματοποιημένος κόσμος)

Ο πρώτος κόσμος αναφέρεται ως «εννοιολογικός σωματοποιημένος κόσμος» ή πιο απλά «Σωματοποιημένος κόσμος». Σε αυτό τον κόσμο η αντίληψη και η πράξη περιλαμβάνουν αντανακλάσεις αντιλήψεων και πράξεων οι οποίες αναπτύσσονται σε ένα εξελιγμένο (sophisticated) πλατωνικό πλαίσιο (Watson, Spyrou, Tall, 2002). Ο όρος «σωματοποίηση » για τον Tall συνάδει με τον αντίστοιχο όρο που χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη, δηλαδή «δίνω σωματική υπόσταση» σε μια αφηρημένη ιδέα (Tall, 2004). Με αυτό τον τρόπο περιλαμβάνει όλες τις έννοιες σε οπτικο-χωρικούς όρους, και όχι μόνο την αντίληψη των πραγματικών αντικειμένων. Δηλαδή δεν περιορίζεται σε αντικείμενα που αντιλαμβανόμαστε οπτικά, αλλά, επεκτείνεται και σε άλλα που εμπλέκουν την οπτικο-χωρική φαντασία. Για παράδειγμα, από την ευκλείδεια γεωμετρία η ευθεία, πού θεωρείται ως μια γραμμή, απείρου μήκους και μηδενικού πάχους, χωρίς αρχή και τέλος, δεν έχει φυσική υπόσταση είναι όμως έννοια του σωματοποιημένου κόσμου.

4.1.2 **Proceptual-symbolic world** (Συμβολικός κόσμος)

Ο όρος procept εισάγεται από τους Tall και Gray (Tall & Gray, 1991) και είναι ένα κράμα των λέξεων process (διαδικασία) και concept (έννοια). Οι Tall και Gray εξέτασαν την δυϊκότητα ανάμεσα στη διαδικασία και την έννοια. Συγκεκριμένα παρατήρησαν ότι γίνεται χρήση του ίδιου συμβολισμού για την αναπαράσταση τόσο της διαδικασίας όσο και του αποτελέσματος αυτής. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός 4+3 περιλαμβάνει την πράξη (διαδικασία) της πρόσθεσης και την έννοια του αθροίσματος των δύο αριθμών. Οι όροι διαδικασία και έννοια είναι πολύ στενά συνδεδεμένοι μεταξύ τους σε κάθε σύμβολο των μαθηματικών.

Ο συμβολικός κόσμος (Proceptual-symbolic world) είναι ο κόσμος των συμβόλων της αριθμητικής, της άλγεβρας και του λογισμού που δρουν ως διαδικασίες που κάνουμε και ως έννοιες που σκεφτόμαστε (Watson, Spyrou, Tall, 2002).

4.1.3 **Formal-axiomatic world** (Τυπικός κόσμος)

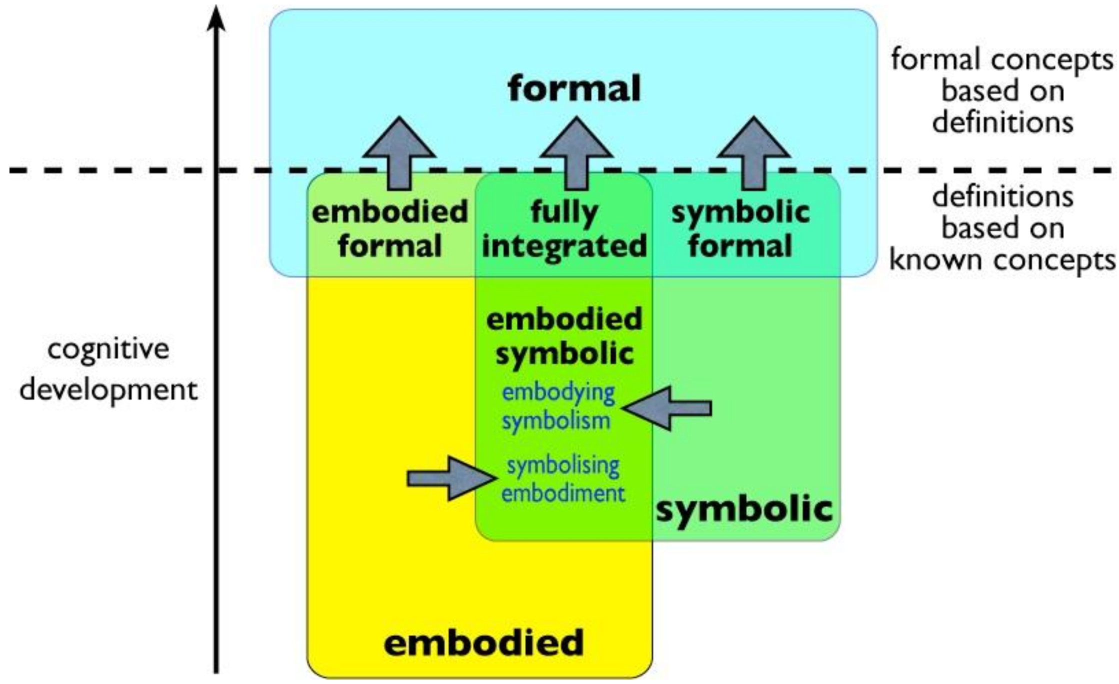
Ο τυπικός κόσμος είναι ο κόσμος των ορισμών και των αποδείξεων που οδηγούν στην κατασκευή της αξιωματικής θεωρίας. Τώρα οι ορισμοί χρησιμοποιούνται ως αξιώματα για να προσδιορίσουν μαθηματικές δομές (όπως «ομάδα», «πεδίο», «διανυσματικός χώρος», «τοπολογικός χώρος» κλπ) (Tall, 2004).

Οι τρείς αυτοί κόσμοι αναπτύσσονται με μορφή αλληλένδετων ακολουθιών. Αρχικά στον σωματοποιημένο κόσμο φτιάχνονται εξελιγμένες έννοιες που σχετίζονται με τις αισθητηριακές εμπειρίες. Στη συνέχεια στον συμβολικό κόσμο, όπου αναπτύσσεται η ικανότητα χειρισμού συμβόλων, εξελίσσονται σε ένα ανώτερο πνευματικά επίπεδο οι έννοιες του σωματοποιημένου κόσμου. Για παράδειγμα οι έννοιες της αριθμητικής και της αρίθμησης εισάγονται για πρώτη φορά στον σωματοποιημένο κόσμο ενώ στο συμβολικό κόσμο αναπτύσσονται πιο περίπλοκες έννοιες των αριθμών (αρνητικοί αριθμοί, κλάσματα, ρητοί αριθμοί κλπ) (Stewart, 2008). Για τον τυπικό κόσμο ο Tall αναφέρει ότι η σκέψη εδώ μπορεί να αναπτυχθεί από τις έννοιες του σωματοποιημένου κόσμου και τους χειρισμούς του συμβολικού κόσμου (Tall, 2004). Ο τυπικός κόσμος δεν μπορεί να αναπτυχθεί απομονωμένα από τους υπόλοιπους .

Η αλληλεξάρτηση των τριών κόσμων τονίζεται και από τον Tall (Tall 2008).

Τυπικές θεωρίες με βάση τα αξιώματα συχνά οδηγούν σε θεωρήματα δομής, τα οποία αποκαλύπτουν ότι ένα αξιωματικό σύστημα (όπως ένας διανυσματικός χώρος) έχει μια πιο εξελιγμένη «σωματοποίηση» και συνάφεια με τον συμβολισμό -για παράδειγμα ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος είναι ένα n-διάστατο σύστημα συντεταγμένων. Με τον τρόπο αυτό το θεωρητικό πλαίσιο που εκτελεί πλήρη κύκλο, δημιουργεί από τη σωματοποίηση και τον συμβολισμό το φορμαλισμό (τυπικός κόσμος), επιστρέφει για μια ακόμη φορά σε μια πιο εξελιγμένη μορφή σωματοποίησης και συμβολισμού, και στη συνέχεια, δίνει νέους τρόπους για την κατανόηση ακόμα πιο εξελιγμένων μαθηματικών εννοιών.

Η Stewart αναφέρει ότι ο σωματοποιημένος κόσμος δίνει νόημα στις έννοιες και βοηθάει τον μαθητή/φοιτητή να περάσει στον τυπικό κόσμο (σελ.36, Stewart, 2008). Το παρακάτω διάγραμμα είναι από τον Tall (Tall, 2008) και παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι τρείς κόσμοι αλληλεπιδρούν. (Εικόνα 1)



Εικόνα 1

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι έννοιες του συμβολικού κόσμου που προέρχονται από την επαφή του με τον σωματοποιημένο κόσμο καταλήγουν σε μια πιο εξελιγμένη μορφή συμβολισμού. Στην πράξη όμως αυτό δεν συμβαίνει πάντα.

Πολλές φορές οι φοιτητές καταφέρνουν να λύνουν σωστά ασκήσεις ακολουθώντας έναν άκαμπτο αλγόριθμο, εκτελώντας δηλαδή μια διαδικασία που βασίζεται στην επανάληψη πράξεων και χειρισμό των συμβόλων που έμαθαν. Μπορούν επιτυχημένα να καταλήξουν σε σωστή λύση αλλά χωρίς να κατανοούν τη φυσική σημασία (σωματοποιημένος κόσμος) των συμβολικών πράξεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα από την γραμμική άλγεβρα (όπως διδάσκεται και εξετάζεται στη δική μας σχολή) είναι όταν δίνεται στους φοιτητές μια γραμμική απεικόνιση $\mathcal{L}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, όπου $\mathcal{V}, \mathcal{W}$είναι διανυσματικοί χώροι. Τους ζητείται να βρουν τον πίνακα της $\mathcal{L}$ ως προς μια βάση $(\mathcal{E})$ του $\mathcal{V}$ και στη συνέχεια τους δίνεται μια δεύτερη βάση $(\mathcal{B})$ του $\mathcal{V}$ και τους ζητείται να βρουν τον πίνακα αλλαγής βάσης από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{B}$. Η πλειοψηφία των φοιτητών παρουσιάζουν μια σειρά από πράξεις με πίνακες, χωρίς απαραίτητα να μπορούν να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα που βρήκαν. Σε αυτή την περίπτωση ενώ οι έννοιες περνούν από τον σωματοποιημένο στον συμβολικό κόσμο, δεν καταφέρνουν να ακολουθήσουν την κυκλική πορεία και να αναχθούν σε ένα εξελιγμένο επίπεδο του συμβολικού και του σωματοποιημένου κόσμου.

Ακόμη σε κάποιες περιπτώσεις μια έννοια μπορεί να καταλήγει στον τυπικό κόσμο μόνο μέσω του συμβολικού - χωρίς να έρθει σε επαφή με τον σωματοποιημένο κόσμο. Αυτό παρατηρείται σε περιπτώσεις όπου αυτοί που μαθαίνουν είναι ήδη μαθηματικοί (Stewart, 2008).

4.2 Η θεωρία APOS

Η θεωρία APOS αποτελεί εξέλιξη της *αφαιρετικής σκέψης* της γνωστικής θεωρίας του Piaget (reflective abstraction). Η αφαιρετική σκέψη είναι χαρακτηριστικό του τέταρτου σταδίου γνωστικής ανάπτυξης, της τυπικής λογικής περιόδου, και τα άτομα μπαίνουν σ’ αυτό κατά τη διάρκεια της εφηβείας , δηλαδή μετά το 11ο ή το 12ο έτος της ηλικίας τους. Σ’ αυτό το στάδιο οι άνθρωποι αναπτύσσουν την ικανότητα να σκέφτονται αφηρημένες έννοιες και είναι σε θέση να κάνουν επαγωγικούς και υποθετικούς συλλογισμούς (Παπαμαστοράκης, 2010). Με την απόκτηση της αφαιρετικής σκέψης οι έφηβοι μπορούν να κατασκευάσουν μαθηματικές δομές και κατ’ επέκταση μπορούν να αναπτύξουν πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες.

Ο Dubinsky με την θεωρία APOS προσεγγίζει την διδασκαλία πιο προχωρημένων μαθηματικών σε προπτυχιακό επίπεδο εξελίσσοντας την *αφαιρετική σκέψη* της γνωστικής θεωρίας του Piaget παρόλο που η δεύτερη αναπτύσσεται σε νεαρή ηλικία και εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της εφηβείας.

Η θεωρία APOS περιγράφει τη διαδικασία της εξέλιξης κάθε έννοιας στο μυαλό ενός ατόμου. Αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες: Action (πράξη), Process (διαδικασία), Object (αντικείμενο) και Schema (σχήμα). Από τα αρχικά των λέξεων αυτών προέρχεται και το ακρωνύμιο APOS. Παρακάτω περιγράφονται αυτές οι συνιστώσες.

Η ***πράξη (Action)*** είναι το πρώτο στάδιο επεξεργασίας μιας έννοιας. Σύμφωνα με τον Dubinsky είναι ο μετασχηματισμός αντικειμένων που το άτομο αντιλαμβάνεται ως οδηγίες βήμα προς βήμα στο πώς να παρουσιάσει μια μαθηματική πράξη (Dubinsky, 2001). Για παράδειγμα δίνεται στους φοιτητές ένα γραμμικό σύστημα ν αγνώστων, ν-άδες και πίνακες διαφόρων διαστάσεων και ζητείται να απαντήσουν ποιο από αυτά είναι πιθανή λύση του συστήματος (σχετική ερώτηση φαίνεται στην εικόνα 2)

4. Consider the equation: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(a) Is $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ a solution to this equation? Why of why not? (b) Is $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solution to this equation? Why or why not?

Εικόνα 2

Αν οι φοιτητές προσπαθήσουν να τα αντικαταστήσουν ένα-ένα στο σύστημα χωριστά και να κάνουν πράξεις προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση, υποθέτουμε ότι δεν είναι σε θέση να αναρωτηθούν πότε μια ν-άδα ή ένας πίνακας μπορεί να είναι πιθανή λύση (De Vries, Arnon, 2004). Η Stewart παρατήρησε ότι σε αυτό το στάδιο επεξεργασίας το άτομο δεν έχει ολοκληρωμένη εικόνα του αντικειμένου που διδάσκεται κι έτσι δεν είναι σε θέση να προβλέψει αποτελέσματα ή να περιγράψει τη διαδικασία προφορικά (Stewart, 2008).

Όταν το άτομο επαναλαμβάνει μια *πράξη*, προσπαθεί να κάνει τις κατάλληλες συνδέσεις για να εσωτερικεύσει την έννοια και έτσι περνά στο στάδιο της ***διαδικασίας (process).*** Από το προηγούμενο παράδειγμα στο στάδιο αυτό θα βρίσκονται οι φοιτητές που μπορούν να συσχετίσουν τη διάσταση της ν-άδας ή του πίνακα με τον αριθμό των άγνωστων μεταβλητών στο γραμμικό σύστημα (De Vries, Arnon, 2004). Τώρα τα άτομα μπορούν να εκτελέσουν μια *πράξη* χωρίς να έχουν κάποιο εξωτερικό ερέθισμα. Ακόμη μπορούν να συνθέσουν ή να αντιστρέψουν πράξεις.

Όταν το άτομο μπορεί να προβληματιστεί με τις πράξεις που σχετίζονται με μια συγκεκριμένη *διαδικασία* και συνειδητοποιεί τους μετασχηματισμούς που δρουν, τότε μπορεί να κατασκευάσει ένα ***αντικείμενο (object)*** (Dubinsky, 2001). Για παράδειγμα δίνεται στους φοιτητές ένα γραμμικό σύστημα και τους ζητείται να προβλέψουν πως θα είναι η λύση. Αν απαντήσουν στο ερώτημα υποθέτουμε ότι έχουν κατακτήσει αυτό το επίπεδο κατανόησης και μπορούν να φτιάξουν ένα *αντικείμενο* (De Vries, Arnon, 2004). Τώρα τα άτομα μπορούν να αντιμετωπίσουν τη γνώση ως σύνολο.

Τέλος, το ***σχήμα (schema)*** αφορά σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Το άτομο έχει ήδη στην κατοχή του *πράξεις*, *διαδικασίες*, *αντικείμενα* και άλλα *σχήματα* που συνδέονται εννοιολογικά με αυτή την συγκεκριμένη έννοια της οποίας το *σχήμα* προσπαθεί να φτιάξει (Dubinsky, 2001). Στο πλαίσιο αυτό καθορίζεται ρητά ποια «φαινόμενα» (δηλαδή ποιες *πράξεις*, ποιες *διαδικασίες*, ποια *αντικείμενα* και ποια από τα άλλα *σχήματα*) είναι στο πεδίο ενός *σχήματος* και ποια όχι. Από αυτή την άποψη όταν ο φοιτητής προσπαθεί να κατανοήσει μια μαθηματική έννοια, φτιάχνει μια πολύ συγκεκριμένη πνευματική δομή. Με αυτό τον τρόπο είναι εύκολο να συσχετιστεί η αποτυχία του φοιτητή να κατανοήσει την έννοια, με πνευματικές κατασκευές που δεν έγιναν.

Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μια λεπτομερής περιγραφή των *σχημάτων* με τέτοιον τρόπο ώστε οι πνευματικές κατασκευές να αποτελούν έναν τρόπο οργάνωσης των υποθέσεων σχετικά με το πως πραγματοποιείται η εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών. Αυτή η διαδικασία αναφέρεται ως *γενετική ανάλυση* μιας μαθηματικής έννοιας και είναι το αποτέλεσμα της θεωρητικής ανάλυσής της, με τέτοιον τρόπο ώστε οι πνευματικές δομές του ατόμου να μπορούν να εξελιχθούν σε βαθμό που να μπορεί να κατανοήσει την έννοια (Dubinsky, Mcdonald, 2001) (Stewart, 2008). Η *γενετική ανάλυση* δεν γίνεται με μοναδικό τρόπο καθώς κάθε άτομο μπορεί να κατασκευάσει διαφορετικές πνευματικές δομές για την ίδια έννοια, καθώς επίσης δεν μπορεί να γίνει για όλες τις μαθηματικές έννοιες. Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η *γενετική ανάλυση* της έννοιας του ολοκληρώματος όπως προτείνεται από τον Czarnocha (Stewart, 2008) (Εικόνα 3).

Η *γενετική ανάλυση*, εφόσον γίνει με τρόπο που να αντανακλά τις πνευματικές δομές των φοιτητών, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως διαγνωστικό εργαλείο, αφού παρέχει στους διδάσκοντες πληροφορίες σχετικά με τη διαδικασία ανάπτυξης της έννοιας που μελετάται και τις πνευματικές κατασκευές που συσχετίζονται με αυτή (DeVries, Arnon, 2004).

1 . Object level of function

2 . Object level of partition

3 . Action on a function and a partition.
Construct one Riemann sum of one function with one partition.

4 . Process conception of Reimann sum.
Coordinate the process of a function and the process of a partition via the Reimann sum formula.

5 . Object conception of Reimann sum
Encapsulate 4.
Variations of the sum (Left, Right, Trap, Mid)
Dependence on n.

6 . Action on Reimann sum
Compare with an area or a solution to a differential equation.
This is done on a vague, pictorial, intuitive level.
Improve the approximation.

7 . Process on Reimann sum
Interiorization of 6.

8 . Apply limit schema to obtain a number.
At this point, very few students will have a strong limit schema so it is unclear
how the concept of definite integral will grow for them. It needs study.

Εικόνα 3: Γενετική ανάλυση της έννοιας του ολοκληρώματος

Ο Tall υποστηρίζει ότι η θεωρία APOS δεν έχει τη δυναμική να εφαρμοστεί σε όλες τις διδακτικές ενότητες, αλλά μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών ή των υπεύθυνων προγραμμάτων σπουδών. Ο ίδιος αναφέρει σχετικά και με την θεωρία APOS ότι είναι «αξιόλογο εργαλείο και όχι παγκόσμιο υπόδειγμα» (Tall,1999). Επίσης σχολιάζει την εφαρμογή της θεωρίας τόσο σε μαθηματικά επιπέδου δημοτικού, όσο και σε ανώτερα μαθηματικά. Στην δεύτερη περίπτωση, διακρίνει δύο είδη φοιτητών: αυτούς που προσπαθούν να φτιάξουν μόνοι τους νοήματα για τους ορισμούς από την εμπειρία τους και αυτούς που παίρνουν τον ορισμό όπως αυτός δίνεται από άλλους και δημιουργούν νοήματα κυρίως μέσα από την απόδειξη θεωρημάτων. Η θεωρία APOS μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία των δεύτερων. Ακόμη αναφέρει ότι (σελ. 7,Tall, 1999):

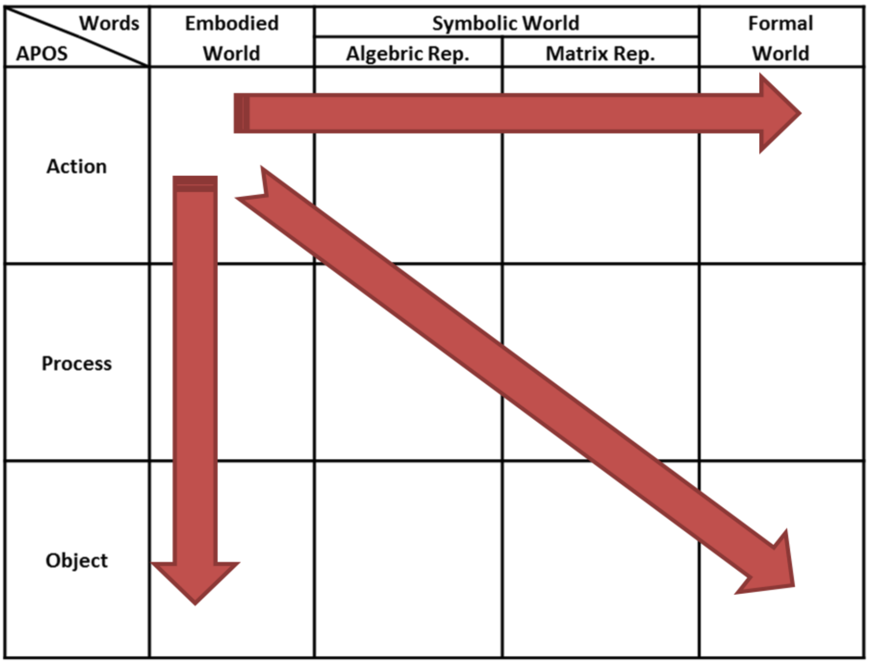
Η θεωρία APOS έχει πολλές εφαρμογές στα στοιχειώδη μαθηματικά της αριθμητικής, της άλγεβρας, του λογισμού αλλά είναι λίγη η σχέση της με τη μελέτη του χώρου και του σχήματος.

4.3 Το θεωρητικό πλαίσιο που προτείνει η S. Stewart

Η Stewart θεωρεί ότι οι τρείς κόσμοι των μαθηματικών του Tall και η θεωρία APOS του Dubinski είναι δύο μοντέλα μάθησης που μπορούν να είναι συμπληρωματικά και αναφέρει:

Το 2004 που δημοσιεύθηκαν οι τρείς κόσμοι (του Tall) φάνηκαν να έχουν τη δυναμική να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την έρευνα στις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας. (…) ενώ οι έννοιες της πράξης, της διαδικασίας και του αντικειμένου της θεωρίας APOS ήδη ήταν αντικείμενο προσοχής, το ερώτημα ήταν κατά πόσο ο συνδυασμός των δύο θεωριών μπορεί να παράγει κάτι που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση και την αξιολόγηση των διαδικασιών μάθησης των μαθητών.

Δημιουργήθηκε ένα πλαίσιο όπου μελετήθηκε η «διαδικασία» κάθε σταδίου της θεωρίας APOS στους τρείς κόσμους των μαθηματικών. Για το πλαίσιο αυτό σχεδιάστηκε ένα πλέγμα με 12 κελιά ώστε να εξεταστεί η *πράξη,* η *διαδικασία* και το *αντικείμενο* μιας έννοιας σε κάθε έναν από τους τρείς κόσμους των μαθηματικών, σωματοποιημένο, συμβολικό και τυπικό. Αυτό κατορθώνεται όταν υπάρχουν *πράξεις*, *διαδικασίες* και *αντικείμενα* και στους τρείς κόσμους. Στα πλαίσια της γραμμικής άλγεβρας στον συμβολικό κόσμο υπάρχουν αλγεβρικές αναπαραστάσεις και αναπαραστάσεις με πίνακες. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η εξέλιξη μιας έννοιας: το οριζόντιο βέλος δείχνει το πώς αυξάνεται η πολυπλοκότητα της έννοιας καθώς κινούμαστε από τον σωματοποιημένο κόσμο στον τυπικό, το κάθετο βέλος δείχνει την αύξηση στο επίπεδο δυσκολίας από την πράξη στο αντικείμενο και τέλος το διαγώνιο βέλος αφορά σε μια εξέλιξη που είναι πιο δύσκολο να επιτευχθεί, την κατάκτηση του *αντικειμένου* του τυπικού κόσμου. (Εικόνα 4)



Εικόνα 4

Παρακάτω θα εξεταστούν συγκεκριμένες έννοιες της γραμμικής άλγεβρας.

4.3.1 Υπόχωρος

Η έννοια του υπόχωρου είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμική Άλγεβρας. Η κατανόηση της έννοιας αυτής προϋποθέτει την κατανόηση άλλων εννοιών της γραμμικής άλγεβρας όπως του γραμμικού συνδυασμού και του χώρου που παράγεται από ένα σύνολο διανυσμάτων ($span$). Ακόμη εμπλέκεται άμεσα η έννοια της βάσης.

i. Σωματοποιημένος κόσμος

Η έννοια του υπόχωρου εισάγεται στο σωματοποιημένο κόσμο. Στο βιβλίο του Strang πριν δοθεί ο ορισμός αναφέρεται:

Γεωμετρικά, σκεφτείτε τον συνηθισμένο τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ *και διαλέξτε ένα επίπεδο διερχόμενο από την αρχή. Αυτό το επίπεδο είναι από μόνο του ένας διανυσματικός χώρος. Εάν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του επιπέδου με 3 ή -3 ή κάποιο άλλο αριθμό, παίρνουμε ένα διάνυσμα περιεχόμενο στο ίδιο επίπεδο. Εάν προσθέσουμε δύο διανύσματα του επιπέδου, το άθροισμά τους παραμένει στο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι ένας υπόχωρος του αρχικού χώρου* $\mathbb{R}^3$ *(…)*

Κατά τη διάρκεια της εξέλιξης της έννοιας αυτής στο μυαλό ενός ατόμου, περνά και από τα τρία στάδια της θεωρίας APOS. Σε αυτόν τον κόσμο, η ικανότητα του φοιτητή να οπτικοποιεί ότι ένα σύνολο γραμμικών συνδυασμών δύο ή τριών δοσμένων διανυσμάτων διέρχεται από την αρχή των αξόνων αποτελεί μια *πράξη*. Στη συνέχεια, στο στάδιο της *διαδικασίας*, ο φοιτητής κατανοεί ότι τα επίπεδα που διέρχονται από την αρχή των αξόνων στον $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι. Τέλος, το *αντικείμενο* σε αυτόν τον κόσμο επιτυγχάνεται όταν ο φοιτητής μπορεί να δει τον χώρο που παράγεται από τρία διανύσματα v_1, v_2, v_3 ($span\ \{v_1, v_2, v_3\}$) ως ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.

ii. Συμβολικός κόσμος

Όπως με την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας, έτσι και τώρα με την έννοια του υπόχωρου, στον συμβολικό κόσμο υπάρχουν αλγεβρικές αναπαραστάσεις και αναπαραστάσεις με πίνακες.

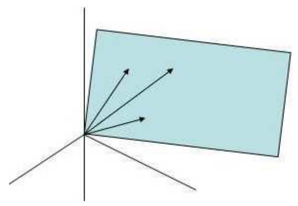
Στην αλγεβρική αναπαράσταση η έννοια περνά μόνο από τα στάδια της *πράξης* και του *αντικειμένου*. Στην *πράξη* αυτής της αναπαράστασης ο φοιτητής καταλαβαίνει, για παράδειγμα, ότι το σύνολο των στοιχείων της ευθείας $x + y = 1$ δεν αποτελούν υπόχωρο, αφού το 0 δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτά. Ενώ το *αντικείμενο* περιλαμβάνει την κατανόηση ότι ο χώρος που παράγεται από τα $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ($span\ \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$) είναι ο υπόχωρος των $v_1, v_2, \cdots, v_n$

Στην αναπαράσταση με πίνακες του συμβολικού κόσμου, στο στάδιο της *πράξη* ο φοιτητής κατανοεί ότι ο $\mathcal{U}$ με $\mathcal{U} = \{(a, b, c): a = b = c\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και μπορεί να συμπεράνει ότι το μηδενικό διάνυσμα αποτελεί υπόχωρο. Στη *διαδικασία* ο φοιτητής αντιλαμβάνεται ότι το $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωρος. Τέλος ένα *αντικείμενο*, όπως και στην αλγεβρική αναπαράσταση, περιλαμβάνει ότι ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα που τώρα είναι στήλες αυτού του πίνακα: $\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\right)$ είναι υπόχωρος, και παράγεται από τα παρακάτω διανύσματα $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

iii. Τυπικός κόσμος

Ο τυπικός κόσμος είναι ο κόσμος που εισάγει τον τυπικό ορισμό του υπόχωρου. Κατά την εξέλιξή της, η έννοια εδώ, περνά και από τα τρία στάδια της θεωρίας APOS. Στο στάδιο της *πράξης* στον τυπικό κόσμο, ο φοιτητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τον ορισμό σαν να ακολουθεί μια σειρά από βήματα για να προσδιορίσει αν ένας διανυσματικός χώρος είναι υπόχωρος. Στη συνέχεια, στο στάδιο της *διαδικασίας*, μπορεί να δει διαδικασίες που σχετίζονται με τον υπόχωρο σε άλλες έννοιες όπως για παράδειγμα, στον γραμμικό συνδυασμό και στο χώρο που παράγεται από διανύσματα ($span$). Ακόμη, μπορεί να επαληθεύσει τις ιδιότητες ενός υπόχωρου για έναν γενικό διανυσματικό χώρο (ότι συμπεριλαμβάνεται το μηδενικό διάνυσμα και είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Τέλος ως ένα *αντικείμενο* σε αυτόν τον κόσμο, ο φοιτητής μπορεί να δει έναν υπόχωρο σαν έναν ξεχωριστό διανυσματικό χώρο.

Στον πίνακα πίνακα 1 (Πίνακας 1: Η έννοια του υπόχωρουΠίνακας 1) φαίνονται όπως περιγράφηκαν παραπάνω, τα επίπεδα κατανόησης την έννοιας του υπόχωρου που πρέπει να κατακτήσουν οι φοιτητές:

Worlds APOS	Embodied World	Symbolic World		Formal World
		Algebraic Rep.	Matrix Rep.	
Action	Can visualise a set of linear combinations of 2 or 3 given vectors through origin	e.g. The set of all points on the line $x+y=1$ is not a subspace. It does not include the zero vector	Let $\mathcal{U}=\{(a,b,c): a=b=c\}$, $\mathcal{U}$is a subspace of $\mathbb{R}^3$ The zero vector is a subspace.	Use the definition (in a procedure) to identify a subspace.
Process			$\mathbb{R}^n$ is a subspace	Can see processes that relate subspace to other concepts such as linear combination and span. Can check properties of a subspace: for a general vector space (including the zero vector closed under addition and scalar multiplication)
Object	$span\ \{v_1, v_2, v_3\}$as a plane through the origin	$(span\ \{v_1, v_2, \cdots, v_n\})$ is the subspace spanned by $v_1, v_2, \cdots, v_n$	Span $\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\right)$ is the subspace spanned by the vectors	See a subspace as a vector space itself

Πίνακας 1: Η έννοια του υπόχωρου

4.3.2 Γραμμική ανεξαρτησία

i. Σωματοποιημένος κόσμος

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, στον σωματοποιημένο κόσμο περιλαμβάνονται οι έννοιες σε οπτικο-χωρικούς όρους. Η γραμμική ανεξαρτησία παρουσιάζεται από την αρχή της διδασκαλίας σε αυτόν τον κόσμο αφού δίνεται έμφαση στις οπτικές πτυχές τις έννοιας. Στο βιβλίο του Strang αμέσως μετά τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας αναφέρεται:

Η γραμμική εξάρτηση παριστάνεται εύκολα στον τρισδιάστατο χώρο, όταν όλα τα διανύσματα ξεκινούν από την αρχή. Δύο διανύσματα είναι εξαρτημένα όταν περιέχονται στην ίδια ευθεία. Τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα, όταν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Μια τυχαία επιλογή τριών διανυσμάτων, χωρίς ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, θα έπρεπε να παράγει γραμμική ανεξαρτησία. Απ' την άλλη μεριά, τέσσερα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ *είναι πάντοτε εξαρτημένα.*

Η Stewart προτείνει ότι η εξέλιξη της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας στον σωματοποιημένο κόσμο, αποτελείται από τις συνιστώσες *πράξη*, *διαδικασία* και *αντικείμενο* της θεωρίας APOS. Ο σχεδιασμός δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο επίπεδο είναι μια *πράξη* σε αυτόν τον κόσμο. Στο επόμενο στάδιο της εξέλιξης, στη *διαδικασία*, ο φοιτητής μπορεί να σκεφτεί τρία οποιαδήποτε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Τέλος, το *αντικείμενο* στον σωματοποιημένο κόσμο επιτυγχάνεται όταν ο φοιτητής κατανοεί ότι δύο οποιαδήποτε διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο και αν ένα τρίτο διάνυσμα βρίσκεται στο επίπεδο αυτό τότε είναι γραμμικά εξαρτημένο από τα άλλα δύο, αν όχι τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

ii. Συμβολικός κόσμος

Νωρίτερα, αναφέρθηκε ότι ο συμβολικός κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων που δρουν ως διαδικασίες που κάνουμε και ως έννοιες που σκεφτόμαστε και μάλιστα στη γραμμική άλγεβρα σε αυτόν τον κόσμο υπάρχουν τόσο αλγεβρικές αναπαραστάσεις όσο και αναπαραστάσεις με πίνακες. Στην εξέλιξη της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας σύμφωνα με την θεωρία APOS στον συμβολικό κόσμο υπάρχουν αυτές οι δύο αναπαραστάσεις.

Στην αλγεβρική αναπαράσταση του συμβολικού κόσμου, ο φοιτητής έχει κατακτήσει το επίπεδο της *πράξης* αν προκειμένου να δείξει τη γραμμική εξάρτηση, μπορεί να αναδιατάξει το $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ ώστε να πάρει έναν γραμμικό συνδυασμό $v_1 = -\frac{c_2}{c_1}v_2 - \frac{c_3}{c_1}v_1, c_1 \neq 0$. Στη συνέχεια στο στάδιο της *διαδικασίας* γίνεται κατανοητό ότι τα γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα μπορούν να γραφτούν το ένα ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τέλος, για να φτιάξει ο φοιτητής ένα *αντικείμενο* αρκεί να μπορεί να σκεφτεί ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, v_i ως οντότητα και να μπορεί να τα χρησιμοποιήσει (για παράδειγμα ως βάση).

Στην αναπαράσταση με πίνακες του συμβολικού κόσμου, για την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας τα στάδια της εξέλιξης είναι τα ίδια με την αλγεβρική αναπαράσταση, μόνο που τώρα τα διανύσματα παρουσιάζονται σε μορφή πινάκων. Για την κατανόηση μιας *πράξης* εδώ, ακολουθεί ένα παράδειγμα:

Το σύστημα εξισώσεων $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

έχει την προφανή λύση $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Επίσης αναπαριστάται με πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Στην *πράξη* ο φοιτητής βλέποντας τον πίνακα καταλαβαίνει ότι τα διανύσματα αυτά δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, ή ότι το ένα δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Η ικανότητα συσχετισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας με την εξάρτηση των γραμμών του σχετικού πίνακα όταν αυτός είναι σε κλιμακωτή μορφή, αποτελεί μια *διαδικασία* σε αυτόν τον κόσμο. Τέλος, ένα *αντικείμενο* σε αυτόν τον κόσμο επιτυγχάνεται όταν ο φοιτητής μπορεί να σκέφτεται έναν πίνακα που οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \cdots, a_{ni})$ ως οντότητα, και να το χρησιμοποιήσει για παράδειγμα ως βάση.

iii. Τυπικός κόσμος

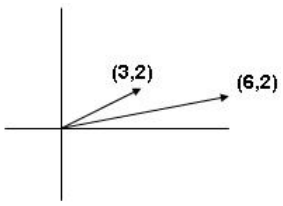
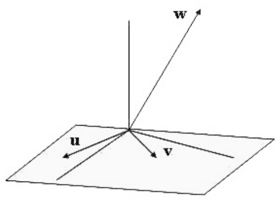
Ο τυπικός κόσμος είναι ο κόσμος των ορισμών και των αποδείξεων και, σύμφωνα με τον Tall, δεν μπορεί να αναπτυχθεί απομονωμένα από τους άλλους δύο κόσμους. Σε αυτό τον κόσμο η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας καθώς εξελίσσεται, δεν περνά από το στάδιο της πράξης. Στην *διαδικασία* του τυπικού κόσμου ο φοιτητής μπορεί να βλέπει όλες τις διαδικασίες που σχετίζονται με τη γραμμική ανεξαρτησία και σε άλλες έννοιες τις γραμμικής άλγεβρας όπως: γραμμικός συνδυασμός, $span$, $rank$και βάση. Το *αντικείμενο* σε αυτόν τον κόσμο αφορά στην κατανόηση του τυπικού ορισμού, όπου αν τα $v_1, v_2, \cdots, v_n$είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η εξίσωση

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0, v_i \in \mathcal{V}, c_i \in \mathcal{F}$.

Ο φοιτητής κατακτώντας το στάδιο του τυπικού αντικειμένου, έχει κατανοήσει την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας. Από τον τυπικό ορισμό φαίνεται ότι ο φοιτητής για να φτάσει σε αυτό το σημείο έχει κατανοήσει πλήρως και άλλες έννοιες της γραμμικής άλγεβρας όπως αυτή του γραμμικού συνδυασμού και ακόμη πιο πίσω την έννοια του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, των διανυσμάτων κλπ (Stewart, 2008).

Στον πίνακα 2 (Πίνακας 2) φαίνονται όπως περιγράφηκαν παραπάνω, τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας, που πρέπει να κατακτήσουν οι φοιτητές:

Worlds APOS	Embodied World	Symbolic World		Formal World
		Algebraic Rep.	**Matrix Rep.**	
Action	Can draw two specific linearly independent vector 	Can arrange $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ to get a linear combination $v_1 = -\frac{c_2}{c_1}v_2 - \frac{c_3}{c_1}v_1,\ c_1 \neq 0$ (To show dependent)	$c_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ This equation has trivial solution, where $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Also $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\3 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Vectors are not multiples, or linear combination of each other.	
Process	Can show any 3 linear independent vectors 	Can see that for linearly dependent vectors one can always be written as a linear combination of the others.	Can relate linear independence and dependence to row-reduced echelon form of a relevant matrix.	Can see processes that relate linear independence to other linear algebra concepts such as: linear combination, span, rank and basis.
Object	Any two vectors define a plane, and if the third vector does not lie on the same plane means vectors are independent.	Can think of a set of linearly independent vectors, v_i as an entity and can use it eg as a basis.	Can think of a matrix as a set of linearly independent vectors $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \cdots, a_{ni})$ and as an entity, and can use it eg as a basis.	Understands the formal definition, where the equation $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ has only the trivial solution, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Πίνακας 2: Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας

4.3.3 Παραγωγή ενός χώρου ($span$)

i. Σωματοποιημένος κόσμος

Στον σωματοποιημένο κόσμο περιλαμβάνονται οι έννοιες σε οπτικο-χωρικούς όρους, έτσι σε αυτή την περίπτωση αναφέρεται η παραγωγή χώρων του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Στο βιβλίο του Strang μετά τον ορισμό της παραγωγής χώρων αναφέρεται το παρακάτω παράδειγμα όπου και παρουσιάζεται η έννοια στον σωματοποιημένο κόσμο (σελίδα 96, παράδειγμα 6)

Παράδειγμα 6 *Τα διανύσματα $w_1 = (1,\ 0,\ 0),\ w_2 = (0,\ 1,\ 0)$ και $w_3 = (-2,\ 0,\ 0)$ παράγουν το επίπεδο (το επίπεδο x, y) μέσα στον τρισδιάστατο χώρο. Το ίδιο κάνουν και τα δύο πρώτα διανύσματα μόνα τους, ενώ τα w_1 και w_3 παράγουν μόνο μια ευθεία.*

Στον σωματοποιημένο κόσμο η έννοια της παραγωγής ενός χώρου, καθώς εξελίσσεται περνά και από τα τρία στάδια της θεωρίας APOS. Μια *πράξη* στον κόσμο αυτόν καθορίζεται από την ικανότητα του φοιτητή να δει ότι δύο διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο. Στη συνέχεια, στο στάδιο της *διαδικασίας*, ο φοιτητής καταλαβαίνει ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που διέρχονται από την αρχή των αξόνων ορίζουν ένα επίπεδο, όλα τα σημεία του επιπέδου αυτού ανήκουν στον χώρο που παράγεται από τα δύο διανύσματα. Τέλος, ένα *αντικείμενο* σε αυτόν τον χώρο φτιάχνεται από τον φοιτητή όταν βλέπει το επίπεδο που προκύπτει σαν ένα αντικείμενο από μόνο του.

ii. Συμβολικός κόσμος

Στον συμβολικό κόσμο η έννοια περνά μόνο από τα στάδια του *αντικειμένου* και της *διαδικασίας*. Εδώ υπάρχουν αναπαραστάσεις αλγεβρικές και με πίνακες.

Μια *πράξη* στην αλγεβρική αναπαράσταση του συμβολικού κόσμου, επιτυγχάνεται όταν ο φοιτητής μπορεί να υπολογίσει τον χώρο που παράγεται από δύο διανύσματα ($span\{v_1, v_2\}$) και να δει ότι ένα τρίτο διάνυσμα μπορεί να ανήκει στον χώρο που παράγουν τα v_1, v_2 ($span\{v_1, v_2\}$), για παράδειγμα το $w = 2v_1 + v_2$. Στη *διαδικασία* ο φοιτητής καταλαβαίνει ότι ένα διάνυσμα που είναι γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων ανήκει στον χώρο που παράγουν τα δύο αυτά διανύσματα. Για παράδειγμα $w = k_1v_1 + k_2v_2$ είναι η γενική μορφή των στοιχείων που ανήκουν στον χώρο που παράγεται από τα v_1, v_2 (είναι στοιχεία του $span\{v_1, v_2\}$).

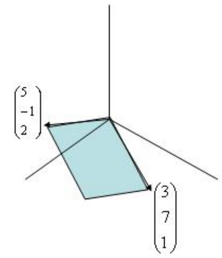
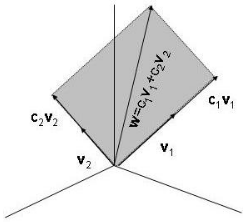
Στην αναπαράσταση με πίνακες, μια *πράξη* καθορίζεται από την ικανότητα του φοιτητή να υπολογίζει αν ένα διάνυσμα ανήκει στο χώρο που παράγουν κάποια άλλα διανύσματα ($span\ S$) εκτελώντας απαλοιφή Gauss. Τέλος, στην *διαδικασία* του συμβολικού κόσμου ο φοιτητής μπορεί να κατανοήσει και να γενικεύσει την μέθοδο που ακολούθησε στην προηγούμενη *πράξη*.

iii. Τυπικός κόσμος

Στον τυπικό κόσμο, η έννοια της παραγωγής χώρου περνά μόνο από τα στάδια της *διαδικασίας* και του *αντικειμένου* της θεωρίας APOS. Στην *διαδικασία* του τυπικού κόσμου ο φοιτητής μπορεί να συσχετίσει την έννοια της παραγωγής χώρου με άλλες έννοιες της γραμμικής άλγεβρας, όπως για παράδειγμα τον γραμμικό συνδυασμό, την βάση και τον υπόχωρο. Τέλος, το *αντικείμενο* του τυπικού κόσμου περιλαμβάνει τον τυπικό ορισμό της παραγωγής χώρου.

Στον πίνακα 3 (Πίνακας 3) φαίνονται όπως περιγράφηκαν παραπάνω, τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της παραγωγής χώρου, που πρέπει να κατακτήσουν οι φοιτητές:

Worlds APOS	**Embodied World**	**Symbolic World**		**Formal World**
		Algebraic Rep.	**Matrix Rep.**	
Action	Can see that 2 vectors define a plane	Can calculate elements of $span\{v_1, v_2\}$ e.g. $w = 2v_1 + v_2$	Can calculate whether a particular vector v belongs to a particular	

		w is a member of $span\{v_1, v_2\}$	$span\ S$ by Gaussian elimination	
Process	Can see that two linearly independent vectors originating from the same point determine a plane. The set of all points in the plane is the $span$ of these vectors 	$w = k_1 v_1 + k_2 v_2$ as a general element of $span\{v_1, v_2\}$	Can understand and generalise a method for the content in the above action-matrix cell	Can relate span to other linear algebra concepts such as linear combination, basis and subspace
Object	Can see the resulting plane as an object in its own right			The definition of the $span$

Πίνακας 3: Η έννοια της παραγωγής υπόχωρου

4.3.4 Βάση

Η έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου είναι θεμελιώδης και περιγράφει ένα σύνολο διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητων που παράγουν τον χώρο. Η έννοια αυτή συνδέεται άμεσα με τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και της παραγωγής χώρων ($span$) και έμμεσα με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού.

i. Σωματοποιημένος κόσμος

Στον σωματοποιημένο κόσμο, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, φτιάχνονται εξελιγμένες έννοιες που σχετίζονται με τις αισθητηριακές εμπειρίες, οπότε όσον αφορά την έννοια της βάσης, αναφερόμαστε σε βάσεις του $\mathbb{R}^3$ που είναι αντιληπτές με την οπτικό-χωρική φαντασία. Στον σωματοποιημένο κόσμο η έννοια της βάσης, καθώς εξελίσσεται, περνά και από τα τρία στάδια της θεωρίας APOS. Μια *πράξη* σε αυτόν τον κόσμο προσδιορίζεται από την ικανότητα του φοιτητή να δει ότι τρία διανύσματα που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$όπως για παράδειγμα η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια, στο στάδιο της *διαδικασίας* ο φοιτητής αναγνωρίζει κι άλλες ορθογώνιες και ορθοκανονικές βάσεις, για παράδειγμα μετασχηματισμούς της κανονική βάσης του $\mathbb{R}^3$. Τέλος, στο *αντικείμενο* του σωματοποιημένου κόσμου ο φοιτητής αντιλαμβάνεται ότι αν «εφαρμόσει» έναν μετασχηματισμό σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ τότε θα έχει μια άλλη βάση του $\mathbb{R}^3$.

ii. Συμβολικός κόσμος

Στον συμβολικό κόσμο η έννοια της βάσης έχει αλγεβρικές αναπαραστάσεις και αναπαραστάσεις με πίνακες, και μάλιστα σε κάθε αναπαράσταση περνά και από τα τρία στάδια της θεωρίας APOS.

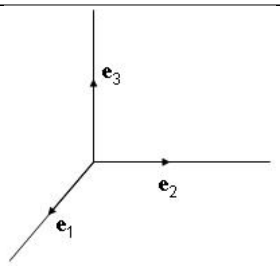
Στην αλγεβρική αναπαράσταση του συμβολικού κόσμου, μια *πράξη* περιλαμβάνει την ικανότητα του φοιτητή να αναγνωρίσει ότι η βάση ενός δισδιάστατου υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη εξίσωση όπως για παράδειγμα, την $x + 2y - z = 0$ ή ακόμα να βρει τον μηδενόχωρο λύνοντας το ομογενές σύστημα. Στη συνέχεια, στο στάδιο της *διαδικασίας*, ο φοιτητής μπορεί να περιγράψει μια βάση για οποιονδήποτε διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$. Τέλος, ένα *αντικείμενο* της αλγεβρικής αναπαράστασης του συμβολικού κόσμου επιτυγχάνεται όταν ο φοιτητής καταλαβαίνει ότι όταν τα διανύσματα $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ είναι βάση του.

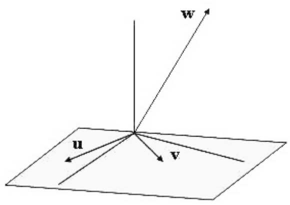
Στην αναπαράσταση με πίνακες στο στάδιο της *πράξης* ο φοιτητής μπορεί να βρει μια βάση για τον διανυσματικό χώρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $\left\{\begin{bmatrix}1\\5\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\11\end{bmatrix}\right\}$ ή να βρει τον μηδενόχωρο ενός πίνακα, μια βάση για τον μηδενόχωρο ή μια βάση για τον χώρο στηλών. Στη *διαδικασία* αυτού του κόσμου ο φοιτητής μπορεί να γενικεύσει την *πράξη* βρίσκοντας βάση για τις στήλες ενός πίνακα, για τον πυρήνα ή για έναν διανυσματικό χώρο. Τέλος, για να φτιάξει ο φοιτητής ένα *αντικείμενο* βλέπει ότι οι στήλες ενός αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.

iii. Τυπικός κόσμος

Τέλος, στον τυπικό κόσμο, οι έννοιες περνούν μόνο από το στάδιο της *διαδικασίας* και του *αντικειμένου*. Στη *διαδικασία* γίνεται κατανοητό ότι η γραμμική ανεξαρτησία εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν πάρα πολλά διανύσματα σε μια βάση ενώ το ότι παράγουν τον χώρο εξασφαλίζει ότι τα διανύσματα της βάσης δεν είναι πολύ λίγα. Τέλος, το *αντικείμενο* επιτυγχάνεται με τον κατανόηση του ορισμού της βάσης, ότι δηλαδή ένα σύνολο διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητων που παράγουν τον χώρο είναι βάση του χώρου.

Στον πίνακα 4 (Πίνακας 4) φαίνονται όπως περιγράφηκαν παραπάνω, τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της βάσης, που πρέπει να κατακτήσουν οι φοιτητές:

Worlds APOS	**Embodied World**	**Symbolic World**		**Formal World**
		Algebraic Rep.	**Matrix Rep.**	
Action	 See three specific non-coplanar vectors as a basis of $\mathbb{R}^3$ e.g. The standard basis for $\mathbb{R}^3$ (above)	Can find a basis for S, where S is the two dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$ satisfying an equation e.g. $x + 2y - z = 0$ Can find the $NS(A)$ which we call the general solution of the system $Ax = 0$	Can find a basis for the vector space in $\mathbb{R}^3$ spanned by the vectors $\left\{\begin{bmatrix}1\\5\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\11\end{bmatrix}\right\}$ Find the nullspace of a specific matrix (A), and find a basis for $NS(A)$ Find a basis for $CS(A)$	

Process	Can picture general orthogonal and orthonormal bases. Can see certain transformations (e.g. rotation, reflection) of a basis as also providing a basis in $\mathbb{R}^3$ 	Can describe a basis for any vector space in $\mathbb{R}^n$	Can generalize the method for finding a basis for $Col\ A$ or $Nul\ A$ describe the resulting bases. Can find a basis for any vector space in $\mathbb{R}^n$	Understands that linear independence ensures that there are not too many vectors in a basis, and spanning ensures that there are not too few
Object	Can operate on a basis, with certain transformations (e.g. rotation, reflection) to provide another basis for $\mathbb{R}^3$	Can see that a set of vector $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ form a basis for all of $\mathbb{R}^n$ if they are linearly independent and span $\mathbb{R}^n$	See the columns of an invertible $n \times n$ matrix forming a basis for all of $\mathbb{R}^n$ because they are linearly independent and span $\mathbb{R}^n$	Can understand the definition of a basis: A basis for a subspace H of $\mathbb{R}^n$ is a linearly independent set in H that spans H

Πίνακας 4: Η έννοια της βάσης

Η Stewart παρατηρεί ότι πολλές φορές παρόλο που μια έννοια εισάγεται στον σωματοποιημένο κόσμο, ο διδάσκων προχωρά στους άλλους κόσμους πολύ γρήγορα αφού ο στόχος του μαθήματος είναι η κατάκτηση του τυπικού τρόπου σκέψης. Η ίδια θεωρεί ότι η σκέψη στον σωματοποιημένο κόσμο είναι αξιόλογη αφού αυξάνει τη διαθεσιμότητα της αναπαράστασης της έννοιας εμπλουτίζοντας με αυτόν τον τρόπο την σκέψη. Αν θεωρηθεί ότι ο στόχος της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών θα πρέπει να είναι η αύξηση της δύναμης των αναπαραστάσεων των μαθητών, πιστεύει ότι θα έπρεπε να προστεθεί μια οπτική-σωματοποιημένη προσέγγιση στη διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας που συχνά βασίζεται στον συμβολικό και τυπικό κόσμο.

Κεφάλαιο 5: Σχόλια στα Γραπτά των φοιτητών

Οι φοιτητές παρακολούθησαν το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2002-03 το μάθημα Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα στο οποίο και εξετάστηκαν τον Ιούνιο του 2003. Στη συνέχεια, το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2003-04 οι ίδιοι φοιτητές παρακολούθησαν το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι και εξετάστηκαν τον Ιανουάριο του 2004. Οι φοιτητές που απέτυχαν στην εξέταση αυτή, συμμετείχαν στην εξέταση του Σεπτεμβρίου του 2004. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα σχετικά με την ύλη, πολλές έννοιες αναφέρονται στα πλαίσια και των δύο μαθημάτων. Μερικές από αυτές τις έννοιες ήταν: γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία, υπόχωρος, βάση, διάσταση υπόχωρου, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και άλλες. Οι ασκήσεις που επιλέχτηκαν παρακάτω ήταν ασκήσεις που είτε ήταν πιο κοντά στην τυπικό ορισμών κάποιων εννοιών, είτε η αντιμετώπισή τους από τους φοιτητές φανερώνει τα επίπεδα κατανόησης κάποιων εννοιών.

5.1 Γραμμική ανεξαρτησία/Γραμμική εξάρτηση

Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας είναι θεμελιώδης για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και συνδέεται άμεσα με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι περισσότεροι φοιτητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τις έννοιες γραμμικός συνδυασμός και γραμμική εξάρτηση, να δυσκολεύονται και με την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας. Κάτι που μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι παραπάνω έννοιες μεταξύ τους είναι η παρουσίασή τους στον σωματοποιημένο κόσμο αφού εδώ εμπλέκονται γεωμετρικά αντικείμενα όπως η ευθεία και το επίπεδο που είναι πιο κοντά στην αισθητηριακή αντίληψη των φοιτητών. Σε αυτόν τον κόσμο αναφέρεται ότι αν τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ενώ αν τρία διανύσματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο τότε είναι γραμμικά εξαρτημένα και το ένα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Ακόμη, η κατανόηση των οπτικών- χωρικών διαστάσεων της έννοιας που γίνεται στον σωματοποιημένο κόσμο μπορεί να βοηθήσει στην μετάβασή της στον συμβολικό κόσμο, που είναι πολύ σημαντικό στάδιο για την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας αφού, οι ασκήσεις αντιμετωπίζονται με έννοιες αυτού του κόσμου. Συγκεκριμένα, στις ασκήσεις όπου ζητείται ο τυπικός ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας απαιτείται χρήση της γλώσσα της αλγεβρικής αναπαράστασης του συμβολικού κόσμου, ενώ οι υπόλοιπες ασκήσεις συνήθως αντιμετωπίζονται με αναπαραστάσεις με πίνακες, κάτι που όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, προτείνεται και στο βιβλίο του Strang. Ο τυπικός ορισμός, που παρουσιάζεται στον τυπικό κόσμο, εμπλέκει και έννοιες των αλγεβρικών αναπαραστάσεων του συμβολικού κόσμου καθώς αναφέρεται ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, \cdots, v_n$. Συγκεκριμένα σύμφωνα με τον τυπικό ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας τα $v_1, \cdots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν «$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ *συμβαίνει μόνο όταν* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$» και στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν υπάρχουν τα $c_1, \cdots, c_n$ που δεν είναι όλα μηδέν και ικανοποιούν $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$, τότε τα $v_1, \cdots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εδώ φαίνεται η άμεση σύνδεση των εννοιών της γραμμικής εξάρτησης και της γραμμικής ανεξαρτησίας με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού όπως και η χρήση την γλώσσας των αλγεβρικών αναπαραστάσεων στον τυπικό ορισμό.

5.1.1 Εξέταση στο μάθημα Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα (Ιούνιος 2003)

Στην τελική εξέταση του μαθήματος Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα το θέμα που αφορούσε στην γραμμική ανεξαρτησία ήταν το δεύτερο ερώτημα του δεύτερου θέματος.

2. (5)
Δίδονται τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 0)$ και $v_2 = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε διανύσματα
α΄) v_3 τέτοιο ώστε $\{v_1, v_2, v_3\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
β΄) v_4 τέτοιο ώστε $\{v_1, v_2, v_4\}$ να είναι γραμμικά εξαρτημένο, αλλά $\{v_2, v_4\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

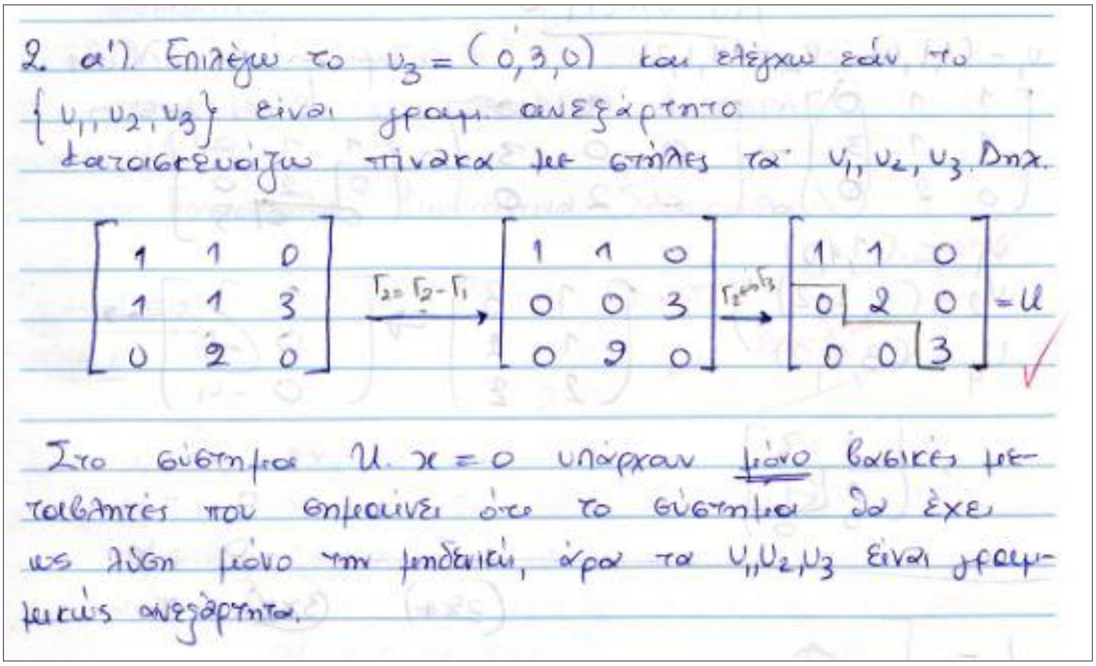
Εικόνα 5

Αν και το θέμα αυτό δεν ζητά άμεσα από τους φοιτητές να αναφέρουν τον τυπικό ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας, εμπλέκει την έννοια αυτή όπως και τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και του γραμμικού συνδυασμού. Οι φοιτητές που δεν κατανόησαν πλήρως αυτές τις έννοιες, δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν ή δεν απάντησαν καθόλου. Πιο συγκεκριμένα, η σωστή ανταπόκριση στο *(α΄)* ερώτημα σχετίζεται με την κατάκτηση του σωματοποιημένου κόσμου από τους οι φοιτητές και την ικανότητά τους να μπορούν να δουν ότι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ενώ ένα τρίτο όταν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτά τα δύο είναι γραμμικά εξαρτημένο και όταν βρίσκεται σε διαφορετικό επίπεδο, είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Όταν οι φοιτητές βρουν ένα διάνυσμα που υποθέτουν ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα δύο που δίνονται, για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, χρειάζονται έννοιες του συμβολικού κόσμου. Οι περισσότεροι φοιτητές, έβαλαν τα διανύσματα σε πίνακα και εκτέλεσαν πράξεις. Για το ερώτημα *(β΄)* από την άλλη δεν υπήρχε κάποια συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης. Αυτό το ερώτημα εμπλέκει και την έννοια της γραμμικής εξάρτησης, αφού για την αντιμετώπισή του απαιτείται βαθύτερη κατανόηση της σύνδεσης των εννοιών γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία.

Οι απαντήσεις των φοιτητών

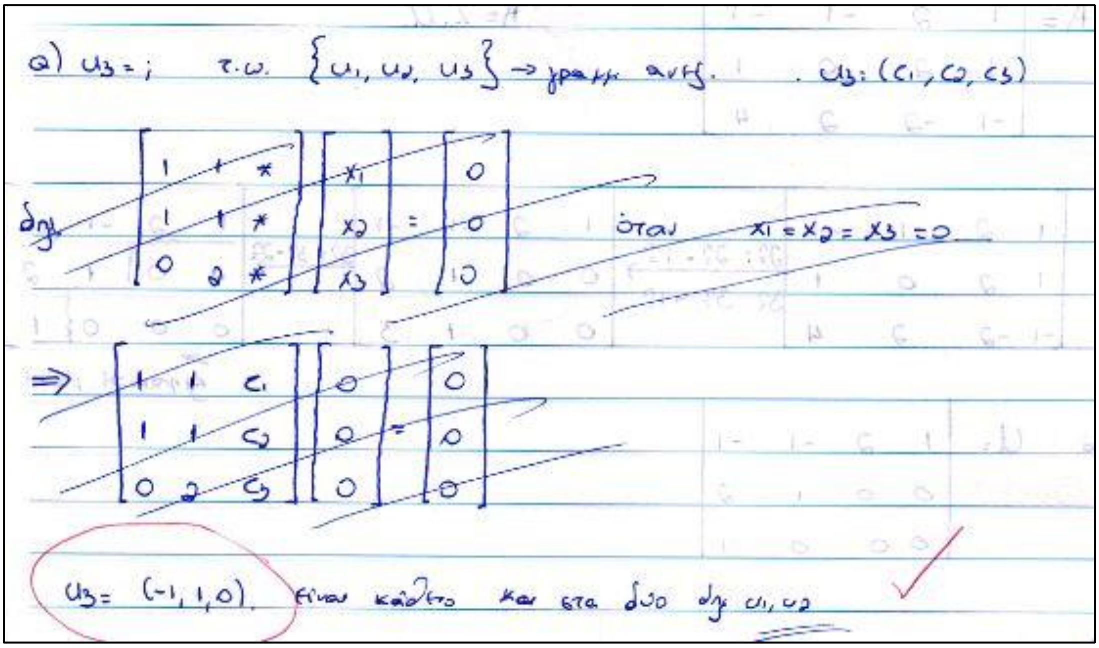
Ερώτημα (α΄)

Στην εξέταση συμμετείχαν 80 φοιτητές. Με το (α΄) ερώτημα ασχολήθηκαν οι 51 ενώ απάντησαν σωστά οι 16. Για την αντιμετώπιση του ερωτήματος *(α΄)* κάποιοι φοιτητές αφού επέλεξαν τυχαία ένα διάνυσμα, έφτιαξαν έναν πίνακα 3×3 με τα 3 διανύσματα. Στη συνέχεια είτε έκαναν απαλοιφή Gauss, είτε έλεγξαν αν η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν. Οι φοιτητές είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι στις πράξεις με πίνακες αφού έχουν ασχοληθεί αρκετά από την αρχή του εξαμήνου. Άλλωστε, οι περισσότερες ασκήσεις που αφορούν στην γραμμική ανεξαρτησία λύνονται φτιάχνοντας πίνακα με τα διανύσματα και κάνοντας πράξεις. Οι φοιτητές που αντιμετώπισαν την άσκηση βάζοντας τα διανύσματα σε πίνακα φαίνεται να έχουν κατακτήσει τον συμβολικό τρόπο σκέψης και συγκεκριμένα την αναπαράσταση με πίνακες. Χαρακτηριστική επίλυση άσκησης με αυτόν τον τρόπο είναι της φοιτήτριας Α1, η οποία όχι μόνο φέρνει τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, αλλά για να αιτιολογήσει την απάντησή της αναφέρει ότι το ομογενές σύστημα $Ux = 0$ έχει μόνο την μηδενική λύση και γι αυτό τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Εικόνα 6). Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι νωρίτερα στην διδασκαλία αναφέρθηκε η επίλυση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους.



Εικόνα 6: Λύση της φοιτήτριας Α1 στο ερώτημα (α')

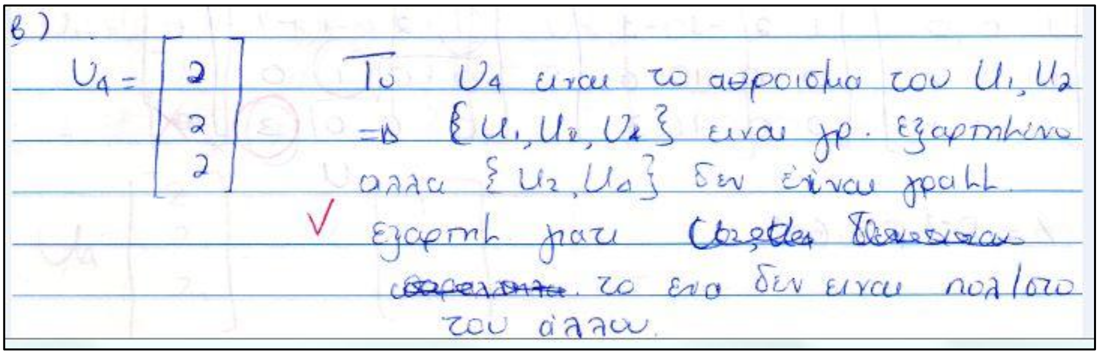
Από την άλλη ο φοιτητής Α2, αρχικά, όπως φαίνεται και από το τμήμα του γραπτού που έχει διαγράψει, προσπάθησε να ακολουθήσει τον ίδιο τρόπο σκέψης με την φοιτήτρια Α1, δηλαδή να αποδείξει ότι το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική (Εικόνα 7). Στην προσπάθειά του αυτή δεν χρησιμοποιεί σωστά τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας αφού γράφει «όταν $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ » και όχι «μόνο όταν $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ » όπως φαίνεται και στη εικόνα 3. Ίσως αυτό να φανερώνει ελλιπή κατανόηση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας και πιθανόν να ήταν και το κρίσιμο σημείο που τον έκανε να εγκαταλείψει αυτή την προσέγγιση. Τελικά, επέλεξε το διάνυσμα που είναι κάθετο τόσο στο v_1 όσο και στο v_2. Αυτή η στρατηγική επίλυσης αποκαλύπτει κατάκτηση του σωματοποιημένου *αντικειμένου* από τον φοιτητή, που μπορεί να δει ότι δύο διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο και ένα τρίτο διάνυσμα όταν δεν βρίσκεται στο επίπεδο αυτό είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα άλλα δύο.



Εικόνα 7: Λύση του φοιτητή Α2 στο ερώτημα (α')

Ερώτημα *(β')*

Στο ερώτημα (β') απάντησαν σωστά λιγότεροι από ότι στο ερώτημα (α'). Συγκεκριμένα από τους 80 φοιτητές ασχολήθηκαν με το θέμα οι 47 ενώ οι 14 παρουσίασαν σωστή απάντηση. Ένας τρόπος προσέγγισης της άσκησης ήταν η επιλογή ενός v_4 τέτοιου ώστε $v_4 = \lambda v_1$. Με αυτόν τον τρόπο τα $\{v_1, v_2, v_4\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, ενώ τα $\{v_2, v_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Οι φοιτητές που έλυσαν ή που προσπάθησαν να λύσουν έτσι την άσκηση, έχουν κατανοήσει ότι δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και αν το τρίτο διάνυσμα δεν βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τα προηγούμενα δύο τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητο με κάθε ένα από αυτά τα δύο. Αυτή η σκέψη είναι του σωματοποιημένου κόσμου αφού εμπλέκεται η έννοια της ευθείας. Μια άλλη ενδιαφέρουσα προσέγγιση είναι η επιλογή του $v_4 = v_1 + v_2$ όπως για παράδειγμα, η λύση της φοιτήτριας Α3 (Εικόνα 8). Η φοιτήτρια εδώ έχει κατανοήσει την έννοια της γραμμικής εξάρτησης και βλέπει ότι τα γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα γράφονται το ένα ως γραμμικός συνδυασμός του άλλου, έχοντας κατακτήσει την *διαδικασία* του συμβολικού κόσμου.



Εικόνα 8: Λύση της φοιτήτριας Α3 στο ερώτημα (β')

5.1.2 Εξέταση στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι (Ιανουάριος 2004)

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι, ζητήθηκε ο τυπικός ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας καθώς και μια άσκηση που απαιτούσε την εφαρμογή του ορισμού. Πρόκειται για την δεύτερη άσκηση του θέματος Α.

2. (9)

α΄. Πότε ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο;

β΄. Δείξτε οτι εαν τα διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα $\{x_i \,|\, 1 \leq i \leq n,\ i \text{ περιττός}\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Εικόνα 9

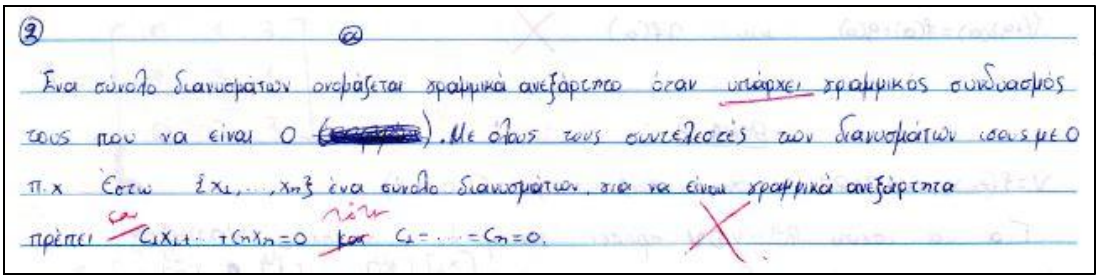
Για να θεωρηθεί σωστή μια απάντηση στο ερώτημα *(α')*, έπρεπε ή να διατυπωθεί σωστά ο τυπικός ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας ή να περιγραφεί σωστά πότε ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από την άλλη, για να απαντήσουν οι φοιτητές σωστά στο ερώτημα *(β')*, πρέπει όχι μόνο να έχουν κατανοήσει πλήρως τον τυπικό ορισμό, αλλά ταυτόχρονα να έχουν αναπτύξει ικανότητες στη μαθηματική λογική και στον χειρισμό συμβόλων.

Οι απαντήσεις των φοιτητών

Ερώτημα (α')

Με το ερώτημα αυτό ασχολήθηκαν οι 61 από τους 69 που συμμετείχαν στην εξέταση αλλά από αυτούς μόνο οι 23 παρουσίασαν σωστή απάντηση. Οι περισσότεροι από τους φοιτητές που ασχολήθηκαν με αυτό το ερώτημα προσπάθησαν να αποδώσουν όσο πιο πιστά μπορούσαν τον ορισμό που δόθηκε στο μάθημα, μιας και από τις απαντήσεις απουσίαζε κάθε διαισθητική προσέγγιση. Ακόμη και οι φοιτητές που στην προηγούμενη εξέταση απέδειξαν τη γραμμική ανεξαρτησία βάζοντας τα διανύσματα σε πίνακες ή λύνοντας το ομογενές σύστημα, δεν ανέφεραν κάτι σχετικό εδώ. Οι προσεγγίσεις αυτές ήταν του τυπικού κόσμου. Κάποιοι από τους φοιτητές που ανέφεραν αυτούσιο τον ορισμό όπως δόθηκε στο μάθημα είναι πιθανό να τον αποστήθισαν. Για να αποφευχθούν αυτά τα γραπτά στη συγκεκριμένη έρευνα, θα χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο για την κατανόηση του ορισμού, η ανταπόκριση των ίδιων φοιτητών στο *(β')* ερώτημα της ίδιας άσκησης. Έτσι, θα μελετηθούν μόνο τα γραπτά των φοιτητών που στο ερώτημα *(β')* χρησιμοποίησαν τον ορισμό που έδωσαν στο ερώτημα *(α').* Οι φοιτητές για να αποδώσουν τον ορισμό χωρίς να τον αποστηθίσουν έπρεπε να έχουν κατακτήσει την *διαδικασία* και το *αντικείμενο* του τυπικού κόσμου αφού, η κατανόηση του τυπικού ορισμού εμπλέκει και τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, καθώς και να χειριστούν σωστά την γλώσσα της αλγεβρικής αναπαράστασης του συμβολικού κόσμου.

Στη λύση που παρουσίασε η φοιτήτρια Α10 αναφέρει ότι (Εικόνα 10): «ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός που να είναι 0. Με όλους τους συντελεστές των διανυσμάτων ίσους με 0» και συνεχίζει την απάντησή της: «π.χ. έστω $\{x_1, \cdots, x_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα πρέπει $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ και $c_1 = \cdots = c_n = 0$».


(2) (α)

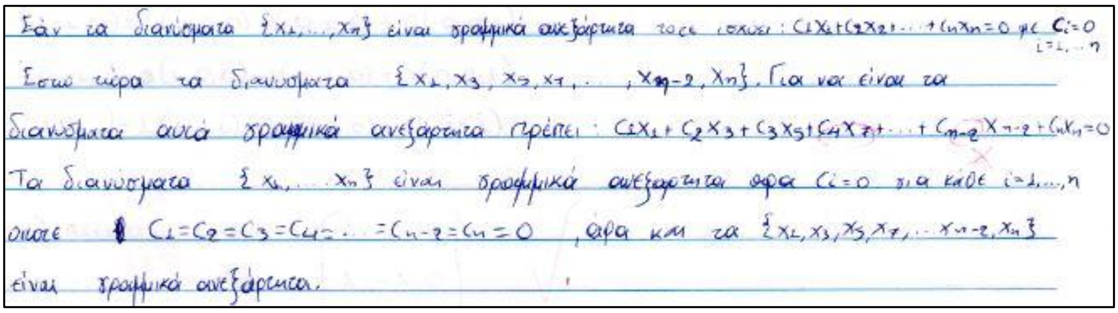
Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός τους που να είναι 0 ( ). Με όλους τους συντελεστές των διανυσμάτων ίσους με 0

π.χ. Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων, για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα πρέπει $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$ και $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Εικόνα 10: Λύση της φοιτήτριας Α10 στο ερώτημα (α')

Στο δεύτερο μέρος της απάντησής της (τρίτη και τέταρτη σειρά) ο ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας δεν δίνεται σωστά αφού γράφει «πρέπει $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ και $c_1 = \cdots = c_n = 0$» και όχι « εάν $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ τότε $c_1 = \cdots = c_n = 0$». Πιθανόν στις δύο πρώτες σειρές της απάντησης να προσπαθεί να περιγράψει με λέξεις αυτό που γράφει παρακάτω με σύμβολα οπότε το «… πρέπει $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$» να το περιγράφει ως «υπάρχει γραμμικός συνδυασμός που να είναι 0» ενώ το «$c_1 = \cdots = c_n = 0$» ως «Με όλους τους συντελεστές των διανυσμάτων ίσους με 0». Σε αυτή την περίπτωση ίσως η φοιτήτρια όχι μόνο να αντιμετωπίζει προβλήματα στη σύνδεση των εννοιών γραμμική ανεξαρτησία και γραμμικός συνδυασμός αλλά ταυτόχρονα να δυσκολεύεται να δει την σχέση ανάμεσα στις σχέσεις $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ και $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Η πρώτη δυσκολία, δηλαδή η λανθασμένη σύνδεση των εννοιών γραμμική ανεξαρτησία και γραμμικός συνδυασμός, μπορεί να είναι η αδυναμία της φοιτήτριας να κατακτήσει τη *διαδικασία* του τυπικού κόσμου. Η δεύτερη δυσκολία συνδυάζει την λανθασμένη χρήση των συμβόλων της άλγεβρας που είναι στον συμβολικό κόσμο και την παρανόηση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας και παρατηρείται σε πάρα πολλά γραπτά φοιτητών.

Στην περίπτωση της φοιτήτριας Α10, είναι εμφανής η παρανόηση και από την απάντηση που δίνει στο ερώτημα *(β')*.


Εάν τα διανύσματα $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ισχύει: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$ με $c_i = 0$, $i = 1, \dots, n$

Έστω τώρα τα διανύσματα $\{x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_n\}$. Για να είναι τα διανύσματα αυτά γραμμικά ανεξάρτητα πρέπει: $c_1x_1 + c_2x_3 + c_3x_5 + c_4x_7 + \dots + c_{n-2}x_{n-2} + c_nx_n = 0$

Τα διανύσματα $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα $c_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$

οπότε $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \dots = c_{n-2} = c_n = 0$, άρα και τα $\{x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εικόνα 11: Λύση φοιτήτριας Α10 στο ερώτημα β'

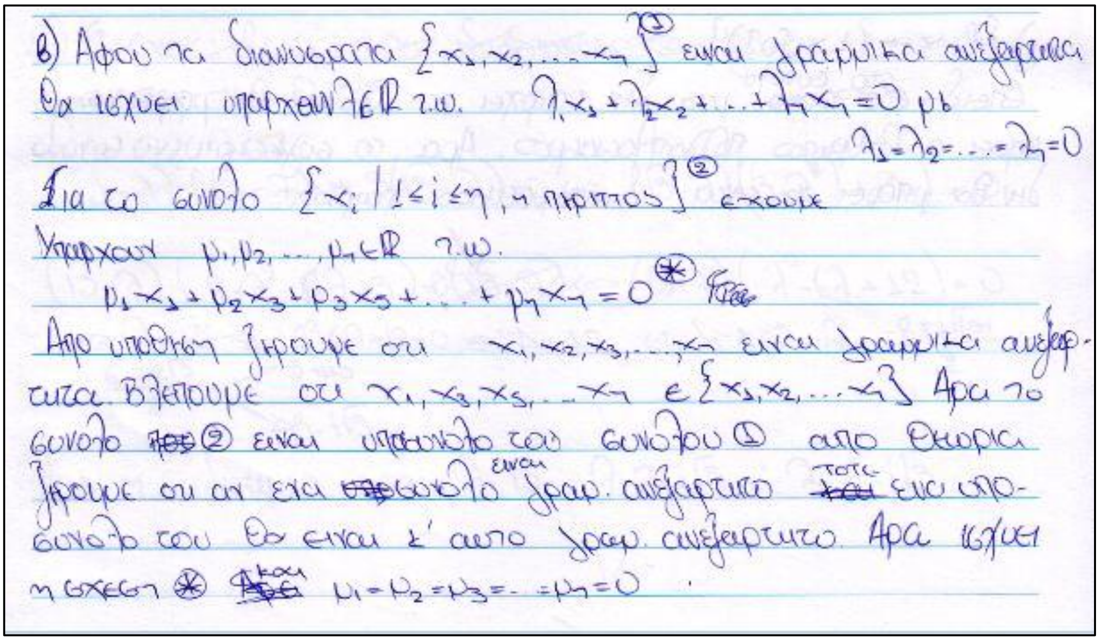
Όπως φαίνεται και από την εικόνα 11, η φοιτήτρια, εκτός από τα λάθη που έκανε στην αρίθμηση, αναφέρει ξανά λανθασμένα τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας στην πρώτη σειρά της απάντησής της και στη συνέχεια δεν αναφέρει με σαφήνεια ποια είναι τα δεδομένα και ποιο το ζητούμενο του ερωτήματος.

Ερώτημα *(β')*

Σε αυτό το ερώτημα απάντησαν οι 57 από τους 69 φοιτητές που συμμετείχαν στην εξέταση. Το ερώτημα αυτό προβλημάτισε πολλούς φοιτητές αφού στις σημειώσεις του μαθήματος αναφέρεται η ακόλουθη πρόταση (Κουρουνιώτης, Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, σελ. 24):

Πρόταση 2.4 *Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε κάθε συλλογή που την περιέχει είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένη. Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε κάθε συλλογή που περιέχεται σε αυτήν είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητη.*

Πολλοί από τους φοιτητές απάντησαν ότι τα διανύσματα $\{ x_i | 1 \leq i \leq n, i\ περιττός\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού είναι συλλογή που περιέχεται σε μια συλλογή από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και δεν θεώρησαν απαραίτητο να παρουσιάσουν κάποια απόδειξη. Για παράδειγμα, η λύση που παρουσίασε ο φοιτητής Α11 (Εικόνα 12).


β) Αφού τα διανύσματα $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ① είναι γραμμικά ανεξάρτητα θα ισχύει υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ με $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Για το σύνολο $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n, n$ περιττος$\}$ ② έχουμε Υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_5 + \dots + \mu_n x_n = 0$ ⊛

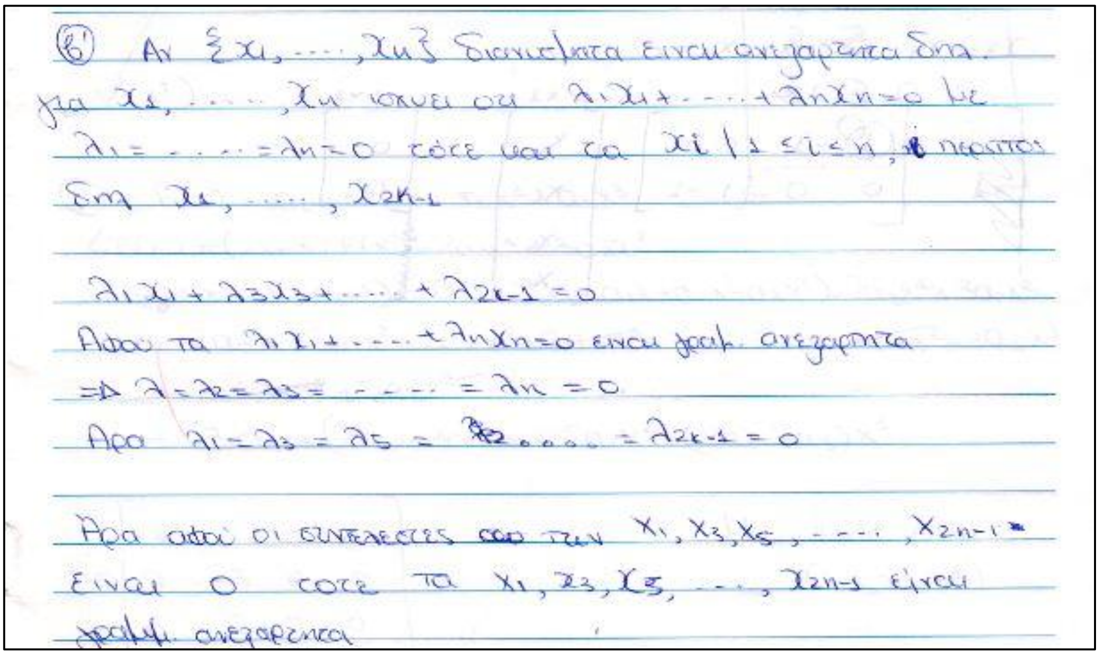
Από υπόθεση ξέρουμε ότι $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Βλέπουμε ότι $x_1, x_3, x_5, \dots x_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Άρα το σύνολο ② είναι υποσύνολο του συνόλου ① από θεωρία ξέρουμε ότι αν ένα σύνολο είναι γραμ. ανεξάρτητο τότε ένα υποσύνολό του θα είναι κ' αυτό γραμ. ανεξάρτητο. Άρα ισχύει η σχέση ⊛ και $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n = 0$.

Εικόνα 12: Λύση του φοιτητή Α11 στο ερώτημα β'

Εδώ ο φοιτητής δεν αναφέρει και πολύ σωστά τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας, συγκεκριμένα γράφει «$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ με $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 0$» και όχι «$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ μόνον όταν $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 0$». Στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την παραπάνω πρόταση και ξεκινάει σωστά αφού αναφέρει «Υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_5 + \cdots + \mu_n x_n = 0$» αλλά στο τέλος δεν καταλήγει στο «… τότε $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = 0$», αφού με κάποια αβεβαιότητα αναφέρει ότι

«Άρα ισχύει η σχέση * και $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = 0$» αν και η αρχική επιλογή στην θέση του «και» ήταν «άρα». Η παρανόηση εδώ είναι στον χειρισμό των αλγεβρικών αναπαραστάσεων που εμπλέκονται στον τυπικό ορισμό. Εδώ, όπως και νωρίτερα με την απάντηση της φοιτήτριας Α10, ο φοιτητής Α11 δεν έχει κατανοήσει την σχέση ανάμεσα στις σχέσεις $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ και $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 0$.

Το ίδιο λάθος με την απόδοση του ορισμού έκανε και η φοιτήτρια Α3 όπου επίσης ανέφερε «$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ με $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_n = 0$» (Εικόνα 13). Στη συνέχεια βέβαια χρησιμοποιεί τη σωστή δομή της απόδειξη και καταλήγει στο συμπέρασμα: «Αφού οι συντελεστές των $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1}$ είναι 0 τα $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα». Η φοιτήτρια από τον τρόπο που προσεγγίζει την άσκηση φαίνεται να έχει κατανοήσει πλήρως την δομή του τυπικού ορισμού και, παρόλο που αντιμετωπίζει προβλήματα στον χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων, ~~να~~ έχει κατακτήσει το *αντικείμενο* του τυπικού κόσμου.


(β) Αν {x1, ..., xn} διανύσματα είναι ανεξάρτητα δηλ.
για x1, ..., xn ισχύει οτι λ1x1 + ... + λnxn = 0 με
λ1 = ... = λn = 0 τότε και τα xi | 1 ≤ i ≤ n, περιττοί
δηλ x1, ..., x2n-1

λ1x1 + λ3x3 + ... + λ2n-1 = 0
Αφού τα λ1x1 + ... + λnxn = 0 είναι γραμμ. ανεξάρτητα
=> λ1 = λ2 = λ3 = ... = λn = 0
Άρα λ1 = λ3 = λ5 = ... = λ2n-1 = 0

Άρα αφού οι συντελεστές των x1, x3, x5, ..., x2n-1
είναι 0 τότε τα x1, x3, x5, ..., x2n-1 είναι
γραμμ. ανεξάρτητα

Εικόνα 13: Λύση της φοιτήτριας Α3 στο ερώτημα β'

Εκτός από την κατανόηση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας, οι φοιτητές για να απαντήσουν σωστά έπρεπε να έχουν αναπτύξει και άλλες δεξιότητες που σχετίζονται με την κατασκευή των αποδείξεων. Για παράδειγμα, η φοιτήτρια Α5 ενώ αποδίδει σωστά τη συνθήκη για να είναι τα $\{x_1, \cdots, x_n\}$ γραμμικά ανεξάρτητα, δεν μπορεί να την χρησιμοποιήσει για να αποδείξει ότι το σύνολο των x_i για περιττό i είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο. Συγκεκριμένα, παρόλο που χρησιμοποιεί σωστά το σύμβολο της απλής συνεπαγωγής που εδώ έχει την έννοια του «μόνον όταν», στη συνέχεια δεν χρησιμοποιεί σωστά τη δομή της απόδειξης αφού ξεκινάει με την πρόταση «Πρέπει να αποδείξω ότι $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$» (Εικόνα 14). Η αποτυχία της στο ερώτημα ίσως να οφείλεται σε προβλήματα λογικής. Από τη στιγμή που στην διατύπωση του προβλήματος η φοιτήτρια εκφράζει τη συνθήκη ως μια συνεπαγωγή, για την απόδειξή της θα μπορούσε να δεχθεί ότι ισχύει η υπόθεση της συνθήκης και να καταλήξει στο συμπέρασμα της συνθήκης.

β') $\{x_1, \ldots, x_n\}$ γραμμικά ανεξάρτητα

Αφου τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

~~Θα~~ ισχύει $\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ (*)

Αρα πρέπει να αποδείξω ότι

$c_1 \cdot x_1 + c_3 \cdot x_3 + c_5 \cdot x_5 + \cdots\cdots C_{n-1} X_{n-1} = 0$

Αφου όμως τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμ. ανεξ. τότε απο (*)

τα $c_1 = c_3 = c_5 = c_{n-1} = 0$.

Αρα τα διανύσματα $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n, i$ περιττός$\}$ είναι

επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Εικόνα 14: Λύση της φοιτήτριας Α5 στο ερώτημα β'

5.1.3 Εξέταση στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι (Σεπτέμβριος 2004)

Η επόμενη εξέταση στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας Ι ήταν τον Σεπτέμβριο του 2004. Ομοίως, και σε αυτή την εξέταση υπήρχε ένα θέμα που αφορούσε στη γραμμική ανεξαρτησία, συγκεκριμένα το δεύτερο ερώτημα του θέματος Α.

α'. Πότε ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο;

β'. Δείξτε οτι εάν τα διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

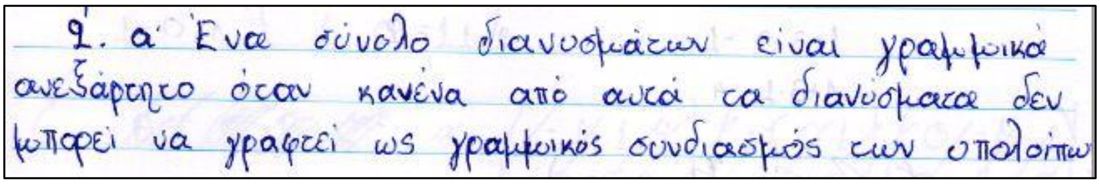
Εικόνα 15

Στο ερώτημα *(α')* ζητείται η απόδοση του ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας όπως είχε ζητηθεί και στην εξέταση του Ιανουαρίου του 2004. Από την άλλη στο ερώτημα *(β')* δίνονται κάποια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και ζητείται από τους φοιτητές να αποδείξουν ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο από γραμμικούς συνδυασμούς των προηγούμενων διανυσμάτων είναι πάλι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα εκτός από την κατανόηση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας, και την κατάκτηση του τυπικού κόσμου όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, απαιτούνται και ικανότητες στη μαθηματική λογική και στον χειρισμό συμβόλων.

Οι απαντήσεις των φοιτητών

Ερώτημα (α')

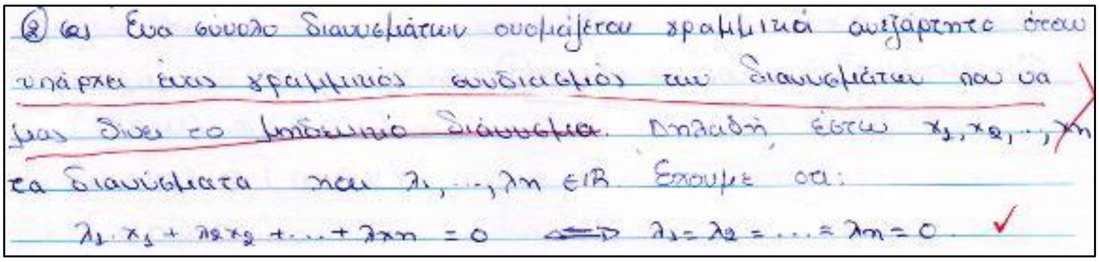
Στην εξέταση αυτή συμμετείχαν συνολικά 44 φοιτητές και απάντησαν σωστά σε αυτό το ερώτημα οι 35 από αυτούς. Το πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι 10 από τους φοιτητές ήταν να προσδιορίσουν πως συνδέονται οι σχέσεις $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$ και $c_1 = \cdots = c_n = 0$, αφού αντί για το «μόνον όταν» ανάμεσα στις σχέσεις ανέφεραν «με», «για», «και» και άλλα. Αυτό το λάθος ήταν εμπόδιο και στη απόδοσή τους στο *(β')* ερώτημα της ίδιας άσκησης. Όπως και στην εξέταση του Ιανουαρίου, έτσι και εδώ η πλειοψηφία των φοιτητών που απάντησαν στο ερώτημα αυτό προσπάθησε να αποδώσει τον τυπικό ορισμό της γραμμική ανεξαρτησίας. Εξαίρεση αποτέλεσε η απάντηση του φοιτητή Α8 (Εικόνα 16) που απάντησε σωστά χωρίς να παρουσιάσει τον τυπικό ορισμό. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ίδιος φοιτητής στην εξέταση του Ιανουαρίου στην ίδια ερώτηση έδωσε σωστά τον τυπικό ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας, ενώ σε καμία από τις δύο εξετάσεις δεν απάντησε στα ερωτήματα *(β)'* του ίδιου θέματος.


1. α' Ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητο όταν κανένα από αυτά τα διανύσματα δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπω

Εικόνα 16: Λύση του φοιτητή Α8 στο ερώτημα α'

Νωρίτερα αναφέρθηκε ότι θα μελετηθούν μόνο τα γραπτά των φοιτητών που απάντησαν και στο (β') ερώτημα και μάλιστα με την χρήση του ίδιου ορισμού που οι ίδιοι ανέφεραν στο (α') ερώτημα ώστε να αποφευχθούν γραπτά όπου οι φοιτητές αποστήθισαν τον ορισμό και τον απέδωσαν χωρίς να καταλαβαίνουν τι γράφουν. Ο λόγος που συμπεριλήφθηκε το γραπτό του φοιτητή Α8 είναι επειδή πουθενά στα συγγράμματα δεν φαίνεται ο ορισμός αυτούσιος όπως τον αναφέρει στην απάντησή του. Από την απάντηση που έδωσε ο φοιτητής Α8 φαίνεται η κατάκτηση της *διαδικασίας* του τυπικού κόσμου, αφού μπορεί να συνδέσει τις έννοιες γραμμικός συνδυασμός και γραμμική ανεξαρτησία, ενώ από την απάντηση απουσιάζουν τα *αντικείμενα*.

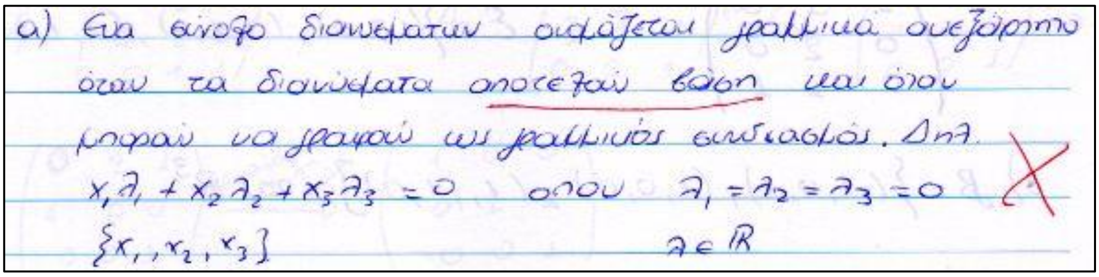
Η κατάκτηση της *διαδικασίας* του τυπικού κόσμου δεν ήταν εύκολη αφού κάποιοι φοιτητές παρουσίασαν σωστά το *αντικείμενο* του τυπικού κόσμου αλλά απέτυχαν στο να συνδέσουν την έννοια του γραμμικού συνδυασμού με την γραμμική ανεξαρτησία. Για παράδειγμα, η φοιτήτρια Α38 που ενώ ανέφερε σωστά το $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, απέτυχε στο να ερμηνεύσει αυτή τη σχέση. Συγκεκριμένα έγραψε ότι «ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που να μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα». (Εικόνα 17)


(2) α) Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν υπάρχει ένας γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων που να μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα. Δηλαδή, έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τα διανύσματα και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι:

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda x_n = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

Εικόνα 17: Λύση της φοιτήτριας Α38 στο ερώτημα α'

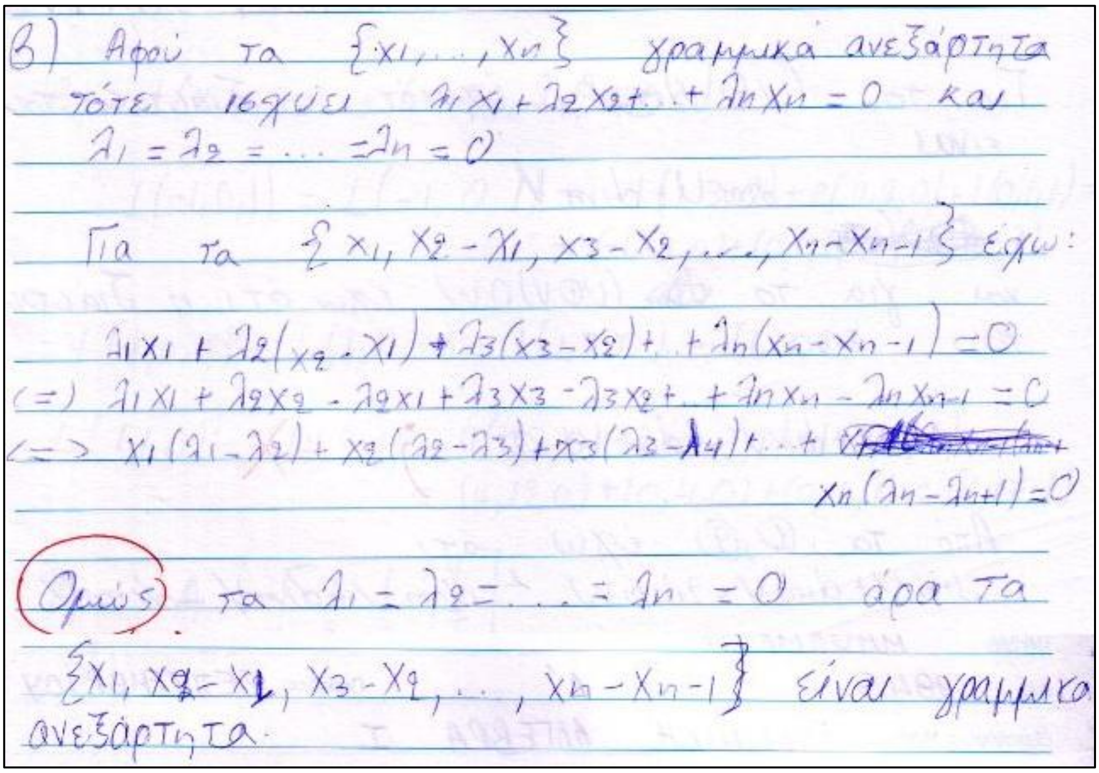
Σε αυτή την εξέταση δύο από τους φοιτητές προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση, προσπάθησαν να συνδέσουν την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας με την βάση ενός διανυσματικού χώρου, αφού άλλωστε η βάση του διανυσματικού χώρου συνδέεται άμεσα με την γραμμική ανεξαρτησία. Για παράδειγμα, η φοιτήτρια Α27 αποτυγχάνει στη κατάκτηση της *διαδικασίας* του τυπικού κόσμου όπου γίνεται η σύνδεση των εννοιών αυτών. Συγκεκριμένα αναφέρει στην απάντησή της «…ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν τα διανύσματα αποτελούν βάση και όταν μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός». (Εικόνα 18) Στη συνέχεια της απάντησής της κάνει κι άλλο λάθος αφού αναφέρει λανθασμένα «όπου» αντί για «μόνον όταν». Η παρανόηση αυτή του τυπικού ορισμού είχε επιπτώσεις και στην επίδοσή της στο *(β΄)* ερώτημα, όπου και εκεί επανέλαβε τον λανθασμένο ορισμό που έδωσε στο ερώτημα *(α΄)* και δεν κατάφερε να αποδείξει το ζητούμενο.


α) Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν τα διανύσματα αποτελούν βάση και όταν μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός. Δηλ.
$x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = 0$ όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Εικόνα 18: Λύση της φοιτήτριας Α27 στο ερώτημα α΄

Ερώτημα (β΄)

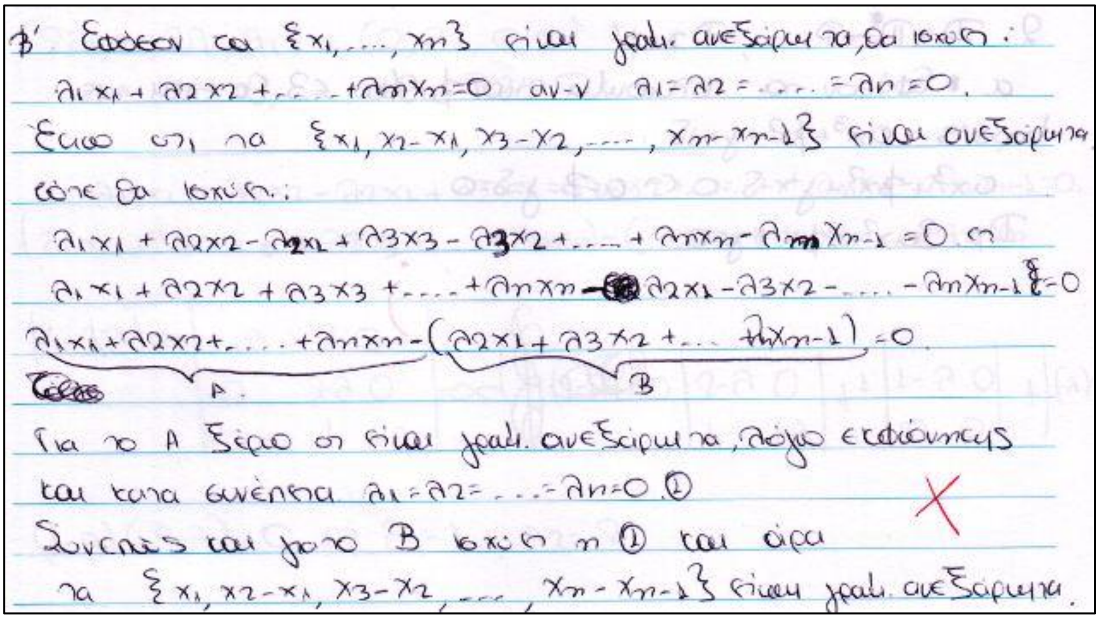
Με το δεύτερο ερώτημα ασχολήθηκαν οι 34 από τους 44 φοιτητές που συμμετείχαν στην εξέταση και από αυτούς παρουσίασαν σωστά την λύση μόνο οι 10. Εκτός από την ελλιπή κατανόηση του τυπικού ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας, υπήρχαν πολλά προβλήματα στον σωστό χειρισμό των συμβόλων όπως και στην εκτέλεση των πράξεων. Ο φοιτητής Α34 αρχικά προσπάθησε να αναφέρει τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας, κάτι που δεν έκανε με απόλυτη επιτυχία αφού δεν αναφέρει το «μόνο όταν» ανάμεσα στις σχέσεις $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ (Εικόνα 19).


β) Αφού τα $\{x_1, \dots, x_n\}$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε ισχύει $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
Για τα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ έχω:
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_2) + \dots + \lambda_n(x_n - x_{n-1}) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_3 - \lambda_3 x_2 + \dots + \lambda_n x_n - \lambda_n x_{n-1} = 0$
$\Leftrightarrow x_1(\lambda_1 - \lambda_2) + x_2(\lambda_2 - \lambda_3) + x_3(\lambda_3 - \lambda_4) + \dots + x_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$
Όμως τα $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ άρα τα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εικόνα 19: Λύση του φοιτητή Α34 στο ερώτημα β΄

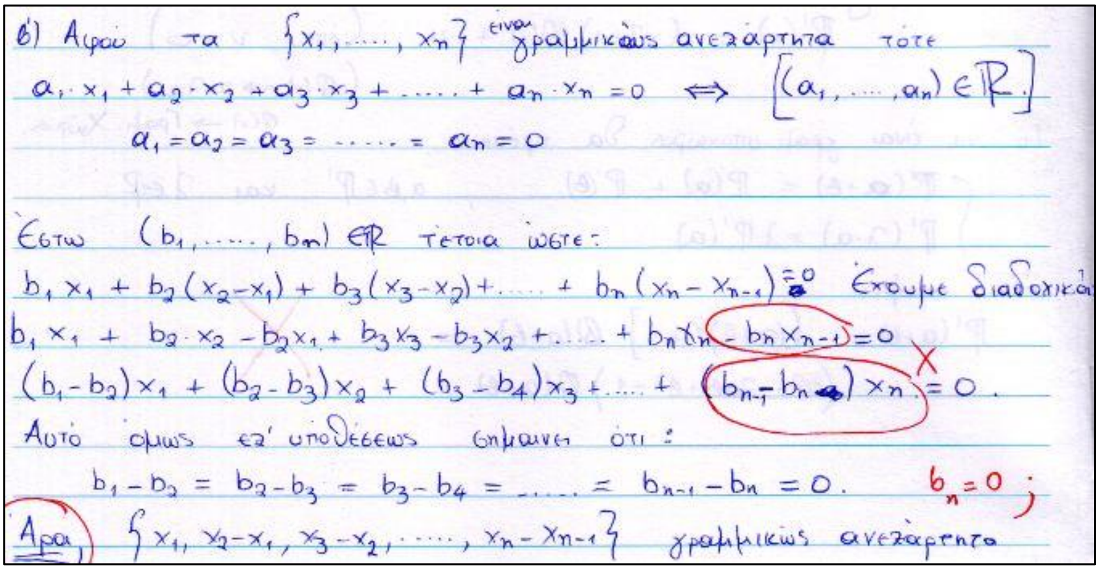
Η αδυναμία της κατανόησης του τυπικού ορισμού είχε σαν επίπτωση να μην καταφέρει να λύσει την άσκηση σωστά αφού, όπως φαίνεται και από την εικόνα 15, ο φοιτητής Α34 αντιμετώπισε προβλήματα στο να προσδιορίσει τι πρέπει να αποδείξει. Το πρόβλημα που φαίνεται να αντιμετωπίζει ο φοιτητής είναι στην κατάκτηση του *αντικειμένου* του συμβολικού κόσμου αφού δεν κατάφερε να δει τα διανύσματα $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ως σύνολο και να χρησιμοποιήσει σωστά την ιδιότητά τους.

Από την άλλη, η φοιτήτρια Α22 και ο φοιτητής Α32 φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στον χειρισμό των συμβόλων και στις πράξεις. Συγκεκριμένα, η φοιτήτρια Α22 αναφέρει σωστά τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας και κάνει σωστά τις πράξεις αλλά στη συνέχεια, αδυνατεί να φέρει την σχέση στη σωστή μορφή και καταλήγει σε λανθασμένο συμπέρασμα. Πιο συγκεκριμένα, καταλήγει σε μια σχέση που την ονομάζει $A - B = 0$ και θέτει ξεχωριστά τα A και B ίσα με το μηδέν (Εικόνα 20). Ο φοιτητής Α32 κάνει λάθος στην αρίθμηση με αποτέλεσμα να καταλήξει σε μια σχέση που δεν μπορεί να χειριστεί (Εικόνα 21).


β' Εφόσον τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα, θα ισχύει:
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ αν-ν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Έστω ότι τα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ είναι ανεξάρτητα
τότε θα ισχύει:
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_3 - \lambda_3 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n - \lambda_n x_{n-1} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n - \{\lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2 - \ldots - \lambda_n x_{n-1}\} = 0$
$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}_{A} - \underbrace{(\lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 + \ldots \lambda_n x_{n-1})}_{B} = 0$.
Για το A ξέρω ότι είναι γραμ. ανεξάρτητα, λόγω εκφώνησης
και κατά συνέπεια $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (1)
Συνεπώς και για το B ισχύει η (1) και άρα
τα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

Εικόνα 20: Λύση της φοιτήτριας Α22 στο ερώτημα β'

Το πρόβλημα εδώ δεν είναι τόσο ένα πρόβλημα της Γραμμικής Άλγεβρας αφού οι δυσκολίες σχετίζονται με τις προηγούμενες γνώσεις των φοιτητών. Τέτοιου είδους δυσκολίες αντιμετώπισαν οι 20 από τους 34 φοιτητές που ασχολήθηκαν με αυτό το ερώτημα, πράγμα που ίσως να φανερώνει ότι οι φοιτητές δεν είχαν τις προαπαιτούμενες γνώσεις ή δεν είχαν ακόμη αναπτύξει τις δεξιότητες που απαιτούνται για να ασχοληθούν με το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα από τον Dorier για να πετύχει κάποιος στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας απαιτούνται ικανότητες στο κομμάτι της μαθηματικής λογικής (Dorier, 2000).



β) Αφού τα $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n = 0 \iff [(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}]$

$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$

Έστω $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$b_1 x_1 + b_2 (x_2 - x_1) + b_3 (x_3 - x_2) + \dots + b_n (x_n - x_{n-1}) = 0$ Έχουμε διαδοχικά

$b_1 x_1 + b_2 \cdot x_2 - b_2 x_1 + b_3 x_3 - b_3 x_2 + \dots + b_n x_n - b_n x_{n-1} = 0$

$(b_1 - b_2) x_1 + (b_2 - b_3) x_2 + (b_3 - b_4) x_3 + \dots + (b_{n-1} - b_n) x_n = 0$.

Αυτό όμως εξ' υποθέσεως σημαίνει ότι:

$b_1 - b_2 = b_2 - b_3 = b_3 - b_4 = \dots = b_{n-1} - b_n = 0$. $b_n = 0$;

Άρα $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα

Εικόνα 21: Λύση του φοιτητή Α32 στο ερώτημα β’

5.2 Υπόχωρος

Η έννοια του υπόχωρου είναι θεμελιώδης για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Με τον όρο υπόχωρος αναφερόμαστε σε ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου που όμως πληροί κάποιες προϋποθέσεις: όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων του υπόχωρου παραμένουν στον υπόχωρο, γι’ αυτό τον λόγο, η έννοια αυτή συνδέεται άμεσα με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού. Οι φοιτητές προκειμένου να κατακτήσουν την έννοια του υπόχωρου πρέπει να έχουν κατακτήσει αυτή την έννοια πρώτα. Από την άλλη, η έννοια της παραγωγής διανυσματικού χώρου έπεται της έννοιας του υπόχωρου, αφού αυτό που παράγεται είναι ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου στον οποίο υποθέτουμε οτι βρίσκονται τα παράγοντα διανύσματα.

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ο ορισμός του υπόχωρου παρουσιάζεται σαν μια διαδικασία που αποτελείται από δύο βήματα (απόδειξη κλειστότητας ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό), και συνήθως όταν ζητείται από τους φοιτητές να αποδώσουν τον ορισμό, μπορούν να το κάνουν με μεγάλη ευκολία χωρίς απαραίτητα να έχουν κατακτήσει την έννοια. Προβλήματα παρουσιάζονται όταν πρέπει να εφαρμόσουν τον ορισμό σε ασκήσεις και μάλιστα με διανυσματικούς χώρους που δεν είναι εξοικειωμένοι (όπως στο παρακάτω ερώτημα).

Η έννοια του υπόχωρου εισάγεται στον σωματοποιημένο κόσμο. Το ερώτημα που θα εξεταστεί παρακάτω, όπως δόθηκε στην εξέταση του Σεπτεμβρίου, όμως, δεν σχετίζεται με τη εξέλιξη της έννοιας σε αυτόν τον κόσμο, και έτσι δεν μπορούν να εξάχθουν συμπεράσματα για τις σκέψεις των φοιτητών σχετικά τις σωματοποιημένες πτυχές του υπόχωρου.

5.2.1 Εξέταση στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι (Σεπτέμβριος 2004)

Στις εξετάσεις του Ιουνίου του 2003 στο μάθημα της Εισαγωγής στη Γραμμική Άλγεβρα και του Ιανουαρίου του 2004 στο μάθημα τις Γραμμικής Άλγεβρας Ι δεν υπήρχε κάποιο θέμα που να αφορούσε στον τυπικό ορισμό του υπόχωρου, ενώ στην εξέταση του Σεπτεμβρίου του 2004 το σχετικό θέμα ήταν το πρώτο ερώτημα του θέματος Α. (Εικόνα 22)

1. (3) Δείξτε οτι το σύνολο των πολυωνύμων που διαιρούνται με το x^2+1 είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου $\mathbf{P}$ όλων των πολυωνύμων.

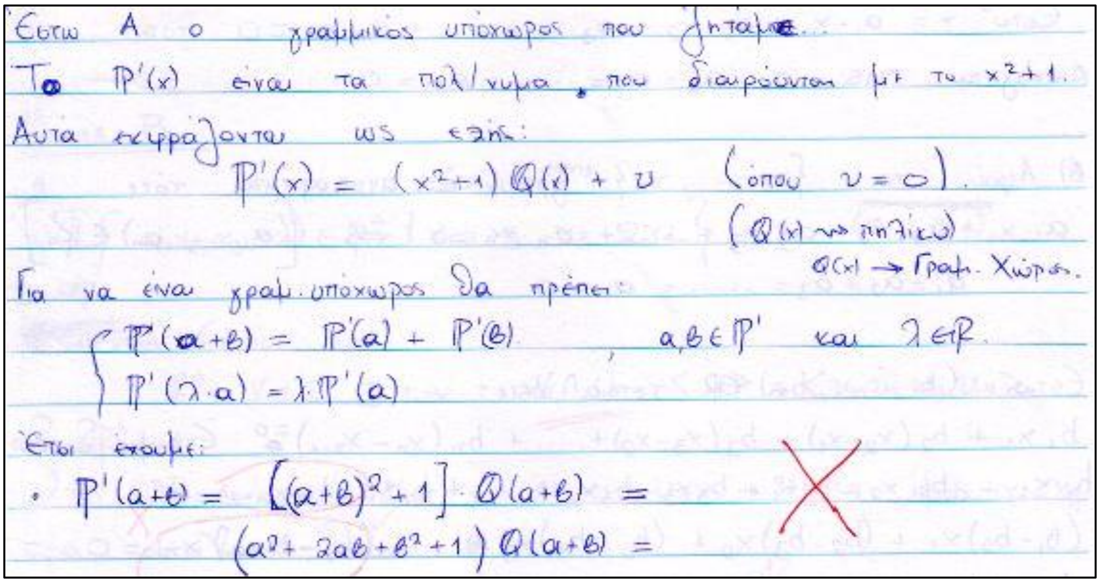
Εικόνα 22

Σε αυτό το θέμα οι φοιτητές για να απαντήσουν πρέπει να έχουν κατανοήσει τον τυπικό ορισμό του υπόχωρου και να είναι εξοικειωμένοι με πράξεις στον χώρο των πολυωνύμων. Από τους 44 φοιτητές που συμμετείχαν στην εξέταση μόνο οι 13 ασχολήθηκαν με το θέμα και από αυτούς οι 3 απάντησαν σωστά, γεγονός που ίσως φανερώνει ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες είτε με την κατανόηση της έννοιας του υπόχωρου είτε με την χρήση των πολυνύμων είτε, πιθανόν, και με τα δύο . Τέτοιου είδους δυσκολίες φαίνονται στην απάντηση που δόθηκε από την φοιτήτρια Α39 (Εικόνα 23). Η φοιτήτρια αυτή, όπως φαίνεται και στην εικόνα 22 όπου παρουσιάζεται τμήμα της απάντησής της, ενώ επιλέγει σωστά τα στοιχεία του $\mathbb{P}$, όταν προσπαθεί να δείξει την κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό, αντί να πολλαπλασιάσει το στοιχείο του $\mathbb{P}$ με ένα αριθμό, πολλαπλασιάζει δύο στοιχεία του $\mathbb{P}$ μεταξύ τους. Η φοιτήτρια φαίνεται να μην έχει κατανοήσει τον τυπικό ορισμό αφού αποτυγχάνει στην *πράξη* του τυπικού κόσμου.

Άρα έστω $(x^2+1)(\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_{1_k}x + \alpha_{0_k})$ και
$(x^2+1)(\alpha_\lambda x^\lambda + \alpha_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + \dots + \alpha_{1_\lambda}x + \alpha_{0_\lambda})$
Προσθέτοντας τα παραπάνω έχω:
$(x^2+1)\left[\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_{1_k}x + \alpha_{0_k} + \alpha_\lambda x^\lambda + \alpha_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + \dots + \alpha_{1_\lambda}x + \alpha_{0_\lambda}\right]$
Άρα το πολυώνυμο που προέκυψε διαιρείται επίσης με το x^2+1
και το πλήθος των όρων του ισούται με άθροισμα των πληθών (οπότε είναι μεγαλύτερο)
των όρων των αρχικών πολυωνύμων (εκτός αν κάποιες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται)
Αντίστοιχα για τον πολ/σμό έχω:
$(x^2+1)^2\left[\alpha_k x^k \; \alpha_\lambda x^\lambda + \alpha_k x^k \alpha_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + \alpha_k x^k \alpha_{1_\lambda} x + \alpha_k x^k \alpha_{0_\lambda} + \right.$
$\left. + \dots + \alpha_{0_k}\alpha_\lambda x^\lambda + \dots + \alpha_{0_k}\alpha_{0_\lambda}\right]$
Άρα και πάλι προκύπτει πολυώνυμο το οποίο διαιρείται επίσης με το
x^2+1 και έχει $k\cdot\lambda$ όρους.

Εικόνα 23: Τμήμα της λύσης φοιτήτριας Α39

Ένα άλλο λάθος που έκαναν κάποιοι φοιτητές, όπως και ο φοιτητής Α32 (Εικόνα 24) ήταν ότι δεν κατάφεραν να προσδιορίσουν σωστά τα στοιχεία του χώρου των πολυωνύμων. Αυτό το λάθος σχετίζεται περισσότερο με παρανοήσεις σχετικά με την έννοια του διανυσματικού χώρου και όχι τόσο με την αδυναμία κατανόησης του ορισμού του υπόχωρου. Στη διδασκαλία η έννοια του διανυσματικού χώρου προηγείται της έννοιας του υπόχωρου. Αν οι φοιτητές δεν κατανοήσουν τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου, δυσκολεύονται με την έννοια του υπόχωρου.



Έστω A ο γραμμικός υπόχωρος που ζητάμε.

Τα $\mathbb{P}'(x)$ είναι τα πολ/νυμα που διαιρούνται με το x^2+1.

Αυτά εκφράζονται ως εξής:

$$\mathbb{P}'(x) = (x^2+1)\,Q(x) + \upsilon \quad (\text{όπου } \upsilon = 0).$$

$(Q(x) \rightsquigarrow \text{πηλίκο})$

$Q(x) \to$ Γραμ. Χώρος.

Για να είναι γραμ. υπόχωρος θα πρέπει:

$$\begin{cases} \mathbb{P}'(a+b) = \mathbb{P}'(a) + \mathbb{P}'(b), & a,b \in \mathbb{P}' \text{ και } \lambda \in \mathbb{R} \\ \mathbb{P}'(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \mathbb{P}'(a) \end{cases}$$

Έτσι έχουμε:

$$\cdot\ \mathbb{P}'(a+b) = [(a+b)^2+1]\,Q(a+b) = (a^2+2ab+b^2+1)\,Q(a+b) =$$

Εικόνα 24: Λύση του φοιτητή Α32

5.3 Βάση υπόχωρου

Η έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου είναι θεμελιώδης για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και περιγράφει ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν τον διανυσματικό χώρο. Η έννοια αυτή συνδέεται άμεσα με τις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας και την παραγωγή χώρου και έμμεσα με τις έννοιες του γραμμικού συνδυασμού και των διανυσμάτων. Οι φοιτητές για να κατακτήσουν την έννοια της βάσης πρέπει να κατανοήσουν τον τρόπο που συνδέονται οι παραπάνω έννοιες. Αυτή η σύνδεση δεν είναι πάντα εύκολη καθώς πολλοί φοιτητές αντιμετωπίζουν προβλήματα και στην κατάκτηση των επιμέρους εννοιών όπως για παράδειγμα αναφέρθηκαν και νωρίτερα τα προβλήματα που παρουσιάζονται με την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Η έννοιας της παραγωγής χώρου δυσκολεύει επίσης τους φοιτητές. Η έννοια αυτή συνδέεται άμεσα με την έννοια του γραμμικού συνδυασμού, αφού, ο διανυσματικός χώρος παράγεται από το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών ενός συνόλου διανυσμάτων. Η άμεση σύνδεση φαίνεται από την παρουσίαση της έννοιας στον σωματοποιημένο κόσμο που αναφέρεται ότι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ ορίζουν ένα επίπεδο. Αν οι φοιτητές δεν κατακτήσουν την έννοια του γραμμικού συνδυασμού τότε αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την έννοια της παραγωγής χώρου.

Ένα από τα συνήθη ερωτήματα που καλούνται να απαντήσουν οι φοιτητές και αφορά στην παραγωγή χώρου είναι αν ένα δοσμένο διάνυσμα ανήκει στον χώρο που παράγει ένα σύνολο άλλων διανυσμάτων. Οι φοιτητές αντιμετωπίζουν αυτό το ερώτημα με έννοιες του συμβολικού κόσμου και συνήθως με αναπαραστάσεις με πίνακες.

5.3.1 Εξέταση στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι (Ιανουάριος 2004)

Στη εξέταση του μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι υπήρχε το παρακάτω θέμα:

1. (7) Δίδεται ο υπόχωρος $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2,\ x_3 = x_4\}$ και το διάνυσμα $u = (1, 0, 0, 1)$. Βρείτε υπόχωρο $U \subset \mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε

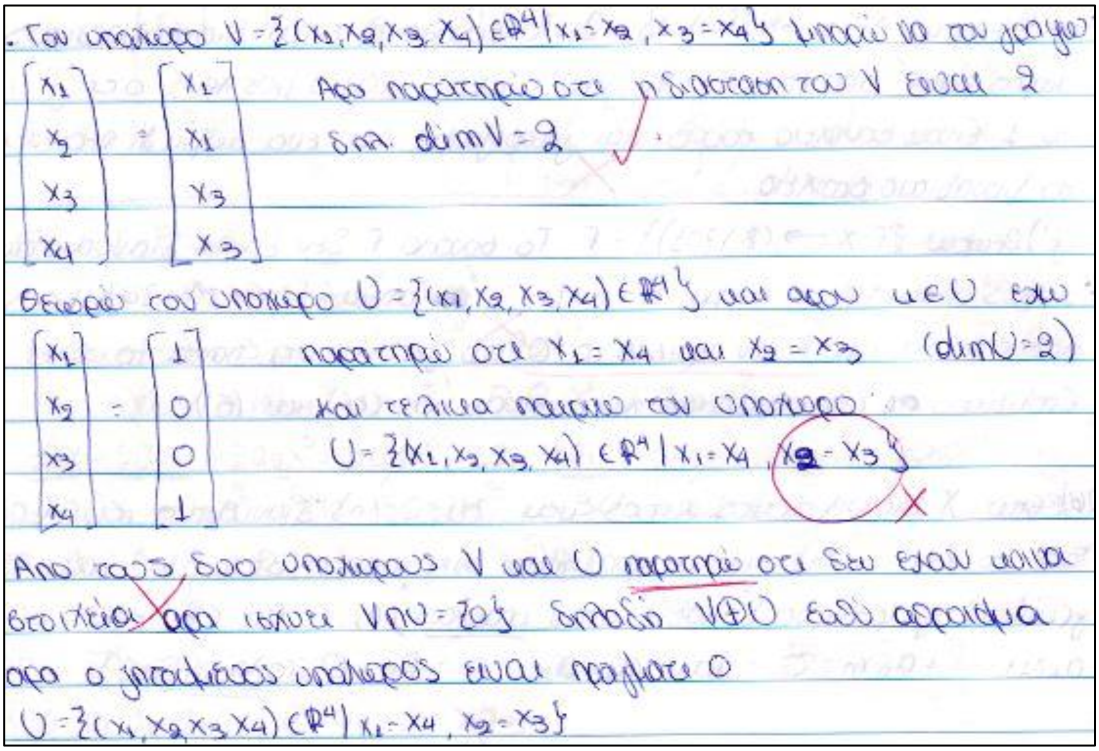
$$u \in U \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^4 = V \oplus U\,.$$

Εικόνα 25

Στην άσκηση αυτή ζητείται από τους φοιτητές προκειμένου να προσδιορίσουν τον υπόχωρο U, να βρουν μια βάση του. Το θέμα αυτό εμπλέκει εκτός από την έννοια της βάσης και την έννοια της διάστασης. Προκειμένου να απαντήσουν σωστά οι φοιτητές πρέπει να έχουν κατακτήσει τα *αντικείμενα* του σωματοποιημένου κόσμου στην εξέλιξη της έννοιας του υπόχωρου, αφού πρέπει να καταλαβαίνουν ότι ο χώρος που παράγεται από n διανύσματα $span\,\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ είναι ο υπόχωρος που προκύπτει από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Στη συνέχεια, θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν την διάσταση του V και να ερμηνεύσουν σωστά την σχέση $V \oplus U$ ώστε να προσδιορίσουν την διάσταση του U. Τέλος, έχοντας κατακτήσει το *αντικείμενο* του συμβολικού κόσμου, και γνωρίζοντας τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, πρέπει να βρουν μια βάση του U η οποία συμπεριλάμβανει το διάνυσμα u που δίνεται από την εκφώνηση και αφού ερμηνεύσουν σωστά την σχέση $V \oplus U$, να εξασφαλήσουν ότι $V \cap U = \{0\}$.

Οι απαντήσεις των φοιτητών

Αυτό το θέμα δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους φοιτητές αφού με αυτό ασχολήθηκαν οι 31 από τούς 69 και απάντησαν σωστά απάντησαν μόνον οι 3 από αυτούς. Ένα από τα συχνά λάθη ήταν η επιλογή διανύσματος ως βάση του U. Για παράδειγμα, η φοιτήτρια Α7, υπολόγισε σωστά την διάσταση των V και U και ανέφερε ότι $V \cap U = \{0\}$. Στη συνέχεια, όμως για να δικαιολογήσει ότι το δοσμένο u ανήκει στο U προτείνει $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_4, x_2 = x_3\}$ χωρίς να παρατηρήσει ότι ο υπόχωρος που παράγεται έχει μη μηδενική τομή με το V (Εικόνα 26). Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα δεν είναι στην κατανόηση της έννοιας της βάσης, αλλά της παραγωγής του υπόχωρου. Η φοιτήτρια αντιμετώπισε προβλήματα στην *διαδικασία* του τυπικού κόσμου αφού παρόλο που αναφέρει «Από τους δύο υπόχωρους V και U παρατηρώ ότι δεν έχουν κοινά στοιχεία» δεν το αποδεικνύει συνδέοντας την έννοια της βάσης με την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.


$\cdot$ Τον υποχωρο $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$ μπορω να τον γραψω

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$ Αρα παρατηρω οτι η διασταση του V ειναι 2 δηλ. $\dim V = 2$

Θεωρω τον υποχωρο $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\}$ και αφου $u \in U$ εχω

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ παρατηρω οτι $x_1 = x_4$ και $x_2 = x_3$ $(\dim U = 2)$
και τελικα παιρνω τον υποχωρο
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, x_2 = x_3\}$

Απο τους δυο υποχωρους V και U παρατηρω οτι δεν εχουν κοινα στοιχεια αρα ισχυει $V \cap U = \{0\}$ δηλαδη $V \oplus U$ ευθυ αθροισμα αρα ο ζητουμενος υποχωρος ειναι παραπανω ο
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, x_2 = x_3\}$

Εικόνα 26: Λύση της φοιτήτριας Α7

Από την άλλη, μια πολύ σωστή προσέγγιση ήταν της φοιτήτριας Α1 (Εικόνα 27Εικόνα 27). Όπως φαίνεται και στην εικόνα 26, όπου διευκρινίζει ότι «τα διανύσματα του V θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε σχέση με τον U» και έτσι επεξηγεί γιατί η βάση του U πρέπει να έχει δύο διανύσματα για να παράγει μαζί το V τον $\mathbb{R}^4$. Με αυτόν τον τρόπο δείχνει ότι έχει κατανοήσει την *διαδικασία* του τυπικού κόσμου της βάσης. Τέλος, αναφέρει ότι για να ανήκει το u στο U θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης, με αυτόν τον τρόπο φανερώνεται ότι έχει κατακτήσει την *διαδικασία* του τυπικού κόσμου αφού χειρίζεται σωστά τις έννοιες βάση, υπόχωρος και *span*.

1. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=x_2,\ x_3=x_4\}$ δηλ. $V=\{(x_1,x_1,x_3,x_3)\in\mathbb{R}^4\}$

Οπότε τα στοιχεία του V μπορούν να γραφτούν ως:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1\\x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

άρα μία βάση του V είναι $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Επειδή $u\in U$ δηλ. $(1,0,0,1)\in U$ και για να ορίζεται το $V\oplus U$ όπου θα πρέπει να μας δίνει το $\mathbb{R}^4$ συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα του V θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε σχέση με του U (και έτσι θα σχηματίζεται ο $\mathbb{R}^4$)

Άρα $U=\{(u_1,u_2,u_3,u_4)\in\mathbb{R}^4 / u_2=u_3=0\}$

(Επειδή $V\cap U=\{0\}$ ορίζεται το $V\oplus U$)

άρα $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\0\\0\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u_4$

και επαληθεύσαμε ότι $u\in U$: $u=(1,0,0,1)=1\cdot(1,0,0,0)+1(0,0,0,1)$

Εικόνα 27: Λύση της φοιτήτριας Α1

5.3.2 Εξέταση στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι (Σεπτέμβριος 2004)

Στην εξέταση του Σεπτεμβρίου οι φοιτητές εξετάστηκαν σε παρόμοιο θέμα με τον Ιανουάριο μόνο που αυτή τη φορά είχε δύο ερωτήματα. Πρόκειται για το $1^{\text{ο}}$ ερώτημα του θέματος Β.

1. (8) Δίδεται ο υπόχωρος $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=x_3,\ x_3=2x_4\}$ και το διάνυσμα $u=(2,2,2,1)$, και αναζητούμε υπόχωρο $U\subset\mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{R}^4=V+U \quad \text{και} \quad V\cap U=\langle u\rangle.$$

α'. Τί διάσταση πρέπει να έχει ο U;

β'. Βρείτε μία βάση για έναν τέτοιο χώρο U.

Εικόνα 28

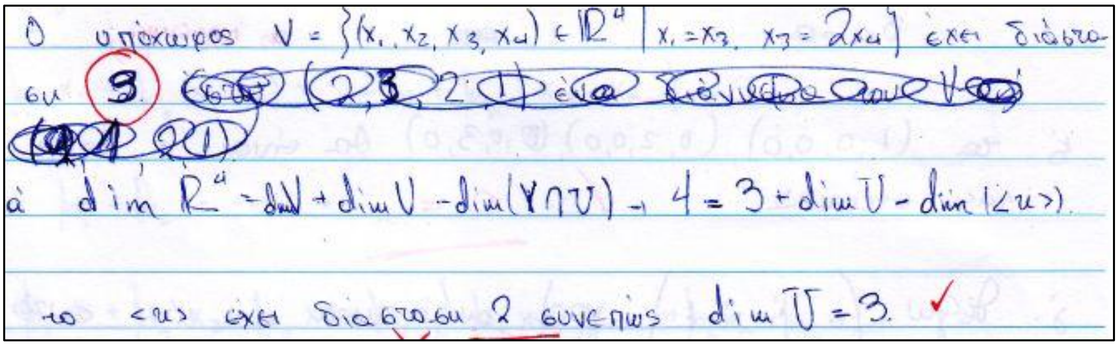
Το θέμα αυτό θυμίζει αρκετά το θέμα που εξετάστηκε παραπάνω της προηγούμενης εξέτασης μόνο που τώρα το άθροισμα των V και U δεν είναι ευθύ. Όπως και στο προηγούμενο θέμα οι φοιτητές πρέπει να προσδιορίσουν μια βάση του U, μόνο που τώρα υπάρχουν δύο ερωτήματα: στο ερώτημα *(α')* οι φοιτητές πρέπει να υπολογίσουν την διάσταση του U ενώ στο ερώτημα *(β')* να βρουν μια βάση του.

Οι απαντήσεις των φοιτητών

Ερώτημα (α')

Το ερώτημα *(α')* απάντησαν 26 από τους 44 φοιτητές που συμμετείχαν στην εξέταση, ενώ σωστή απάντηση έδωσαν μόνο οι 8. Η πλειοψηφία των φοιτητών απάντησε στο ερώτημα χρησιμοποιώντας την σχέση $\dim(U) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(V) + \dim(U \cap V)$. Για να απαντήσουν σωστά οι φοιτητές σε αυτό το ερώτημα έπρεπε να υπολογίσουν τα $\dim(V)$, $\dim(\mathbb{R}^4)$ και $\dim(U \cap V)$.

Παρόλο που από την εκφώνηση δίνεται ότι $V \cap U = \langle u \rangle$, πολλοί απάντησαν ότι $\dim(U \cap V) = 0$. Ένα αξιοσημείωτο λάθος ήταν της φοιτήτριας Α21 (Εικόνα 29). Όπως φαίνεται και στην εικόνα 28 η φοιτήτρια ανέφερε ότι το $\dim(\langle u \rangle) = 2$. Το λάθος αυτό συνδέεται με την κακή κατανόηση της έννοιας της διάστασης που συνδέεται άμεσα με τις έννοιες βάση και υπόχωρος και έμμεσα με τα έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

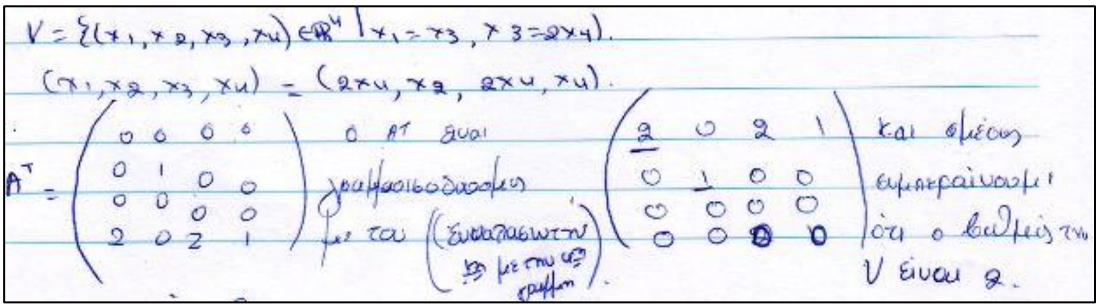

Ο υπόχωρος $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3,\ x_3 = 2x_4\}$ έχει διάσταση 3

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U) \to 4 = 3 + \dim U - \dim(\langle u \rangle)$

το $\langle u \rangle$ έχει διάσταση 2 συνεπώς $\dim U = 3$.

Εικόνα 29: Λύση της φοιτήτριας Α21

Μια διαφορετική επίλυση παρουσίασε η φοιτήτρια Α38. Παρόλο που δεν υπολόγισε το $\dim(U)$, υπολόγισε σωστά το $\dim(V)$ κάνοντας απαλοιφή Gauss και βρίσκοντας μια βάση του V. Η επίλυση αυτή είναι του συμβολικού κόσμου της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας. Αφού εντόπισε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, ανέφερε ότι αποτελούν βάση, κατακτώντας την *πράξη* του συμβολικού κόσμου της βάσης. (Εικόνα 30)

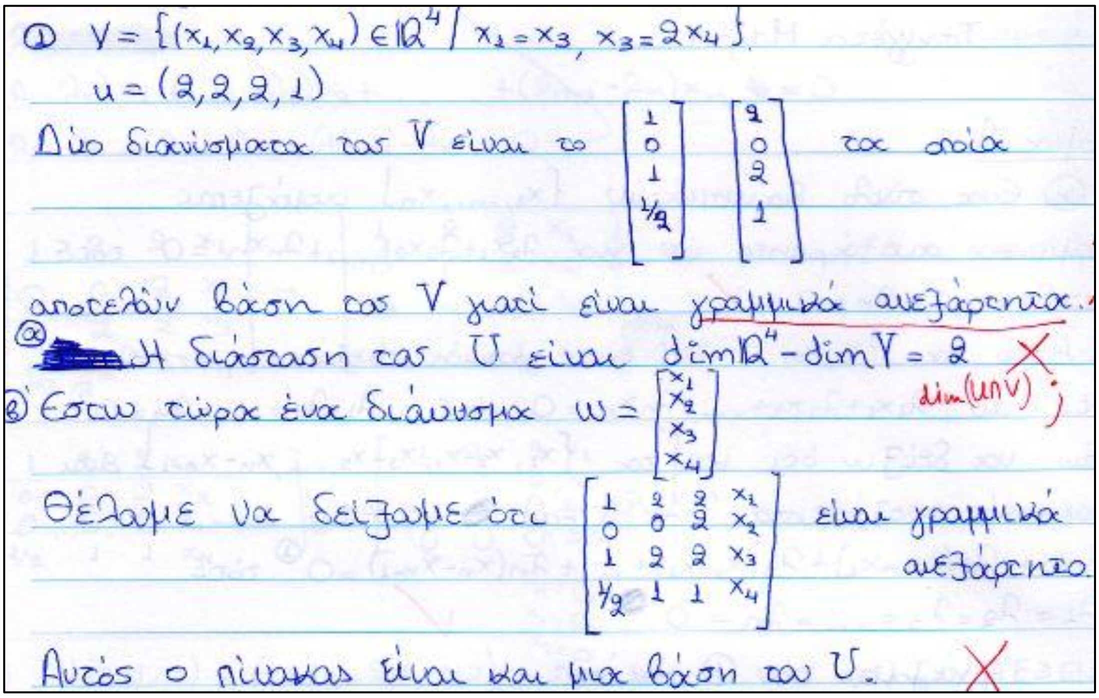

$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3,\ x_3 = 2x_4\}$.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_4, x_2, 2x_4, x_4)$.

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ο A^T είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον (συναφόμενο με την ... γραμμή) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και αφού συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός του V είναι 2.

Εικόνα 30: Λύση της φοιτήτριας Α38 στο ερώτημα *α'*

Ένα άλλο λάθος ήταν λόγω παρανοήσεων της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας. Η φοιτήτρια Α25, που εκτός από την λανθασμένη διατύπωση της σχέσης $\dim(U) = \dim(U \cup V) - \dim(V) + \dim(\mathbb{R}^4)$, αγνοώντας το δεδομένο από την εκφώνηση $V \cap U = \langle u \rangle$, προκειμένου να αιτιολογήσει ότι $\dim(V) = 2$, επιλέγει δύο στοιχεία του V που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μετά την επιλογή αναφέρει ότι αποτελούν βάση γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από την αιτιολόγηση φαίνεται ότι η φοιτήτρια ξέρει τον ορισμό της βάσης, αλλά δυσκολεύεται να δει πότε δυο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και φυσικά αυτό έχει επιπτώσεις στην κατανόηση εννοιών όπως της βάσης και της διάστασης. (Εικόνα 31)


① $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1=x_3,\ x_3=2x_4\}$

$u=(2,2,2,1)$

Δύο διανύσματα του V είναι τα $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1/2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1\end{bmatrix}$ τα οποία αποτελούν βάση του V γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

② Η διάσταση του U είναι $\dim\mathbb{R}^4-\dim V=2$ $\dim(U\cap V)$;

③ Έστω τώρα ένα διάνυσμα $w=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

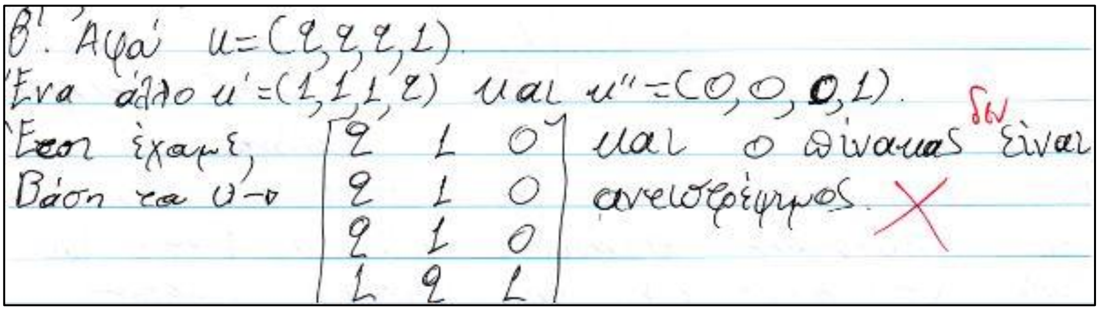
Θέλουμε να δείξουμε ότι $\begin{bmatrix}1&2&2&x_1\\0&0&2&x_2\\1&2&2&x_3\\1/2&1&1&x_4\end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αυτός ο πίνακας είναι και μια βάση του U.

Εικόνα 31: Λύση της φοιτήτριας Α25 στο ερώτημα *α′*

Ερώτημα (β')

Στο δεύτερο ερώτημα κανένας δεν απάντησε σωστά παρόλο που ασχολήθηκαν 18 φοιτητές. Το ερώτημα αυτό συνδέεται άμεσα με το ερώτημα *α′* καθώς αν κάποιος φοιτητής δεν υπολόγισε σωστά την διάσταση του U δεν θα μπορούσε να προσδιορίσει σωστά μια βάση του.


β'. Αφού $u=(2,2,2,1)$.

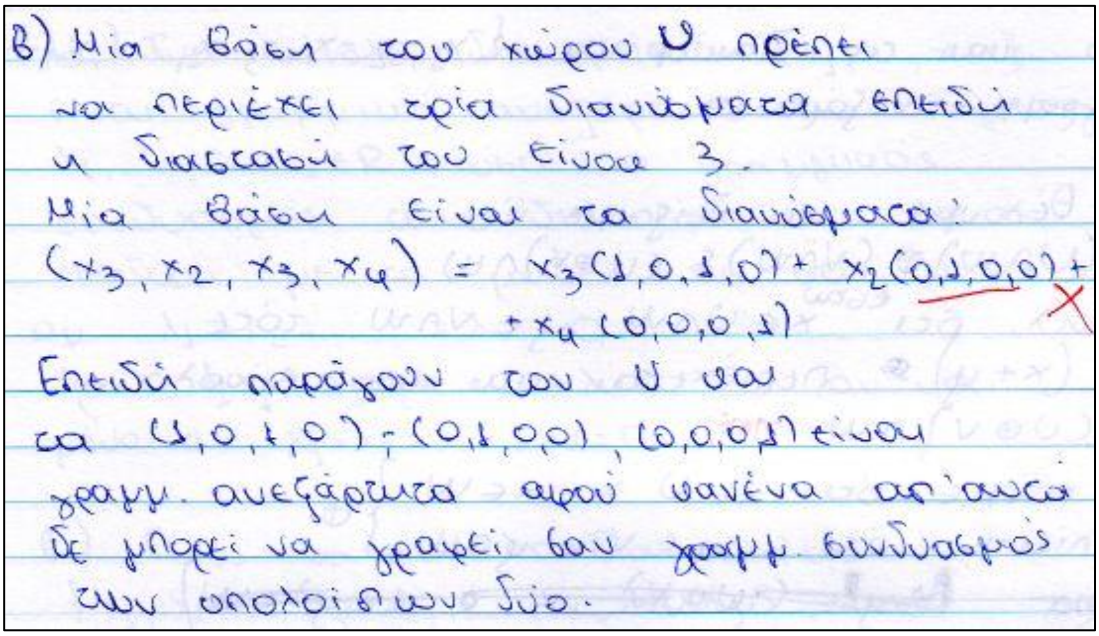
Ένα άλλο $u'=(1,1,1,2)$ και $u''=(0,0,0,1)$.

Έτσι έχουμε Βάση του U-ν $\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$ και ο πίνακας δεν είναι ανειστρέψιμος.

Εικόνα 32: Λύση του φοιτητή Α15 στο ερώτημα *β′*

Σε αυτή την περίπτωση σωστή απάντηση αναμενόταν μόνο από τους 8 που απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα, αν και από αυτούς τους 8 οι 5 ασχολήθηκαν με το ερώτημα β'. Για παράδειγμα, ο φοιτητής Α15 παρόλο που συμπεριλαμβάνει το u στην βάση του U, επιλέγει διανύσματα που είναι γραμμικά εξαρτημένα (Εικόνα 32).

Ο ίδιος για να αιτιολογήσει την επιλογή του, ότι δηλαδή τα διανύσματα που επέλεξε είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αναφέρει ότι ο πίνακας 4×3 που παρουσιάζει είναι αντιστρέψιμος. Με αυτή του την αιτιολόγηση αποκαλύπτονται παρανοήσεις όσον αφορά στην αντιστροφή πινάκων.

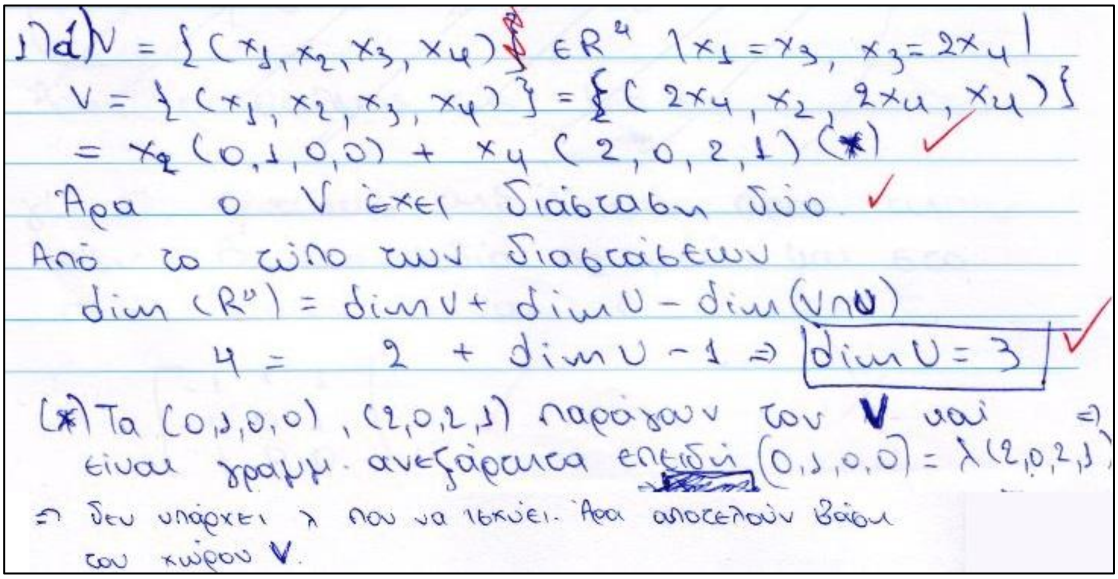


β) Μια βάση του χώρου U πρέπει
να περιέχει τρία διανύσματα επειδή
η διασταση του είναι 3.
Μια βάση είναι τα διανύσματα:
$(x_3, x_2, x_3, x_4) = x_3(1,0,1,0) + x_2(0,1,0,0) +$
$+ x_4(0,0,0,1)$
Επειδή παράγουν τον U και
τα $(1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)$ είναι
γραμμ. ανεξάρτητα αφού κανένα απ' αυτά
δε μπορεί να γραφεί σαν γραμμ. συνδυασμός
των υπολοίπων δύο.

Εικόνα 33: Λύση του φοιτητή Α37 στο ερώτημα β'

Από την άλλη, ο φοιτητής Α37, απάντησε ορθά στο ερώτημα α' βρίσκοντας την διάσταση του U και αναφέρει πολύ σωστά ότι «μια βάση του χώρου U πρέπει να περιέχει τρία διανύσματα επειδή η διάστασή του είναι 3» (Εικόνα 33). Στη συνέχεια όμως, τα διανύσματα που επέλεξε για βάση του U δεν έχουν ως μοναδική τομή με το V το u, για την ακρίβεια επέλεξε και το $(0,1,0,0)$ ενώ στο προηγούμενο ερώτημα το είχε συμπεριλάβει στη βάση του V (Εικόνα 34).

Για τα διανύσματα που προτείνει για βάση του U αναφέρει αυστηρά ότι πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα «είναι γραμμ. ανεξάρτητα αφού κανένα απ' αυτά δε μπορεί να γραφεί σαν γραμμ. συνδυασμός των υπολοίπων δύο». Ακόμη αναφέρει ότι «… παράγουν τον U» χωρίς όμως να το αιτιολογεί ή να αναφέρει κάτι για την τομή των U και V. Στην περίπτωση αυτή ο φοιτητής φαίνεται να έχει κατανοήσει τον τυπικό ορισμό τις βάσης αφού αναφέρει ότι τα διανύσματα που επέλεξε πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να παράγουν το χώρο. Η παρανόηση εδώ εντοπίζεται στην έννοια του υπόχωρου αφού ο φοιτητής δεν κατάφερε να ξεχωρίσει τα στοιχεία που ανήκουν στο Vαπο τα στοιχεία που ανήκουν στο U και να προσδιορίσει τα στοιχεία της τομής τους. Το πρόβλημα εδώ αφορά σε ελλιπείς γνώσεις στη θεωρία συνόλων.


1) α) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3,\ x_3 = 2x_4\}$

$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\} = \{(2x_4, x_2, 2x_4, x_4)\}$

$= x_2(0,1,0,0) + x_4(2,0,2,1)$ (*)

Άρα ο V έχει διάσταση δύο.

Από το τύπο των διαστάσεων

$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U)$

$4 = 2 + \dim U - 1 \Rightarrow \boxed{\dim U = 3}$

(*) Τα $(0,1,0,0)$, $(2,0,2,1)$ παράγουν τον V και $\Rightarrow$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα επειδή $(0,1,0,0) = \lambda(2,0,2,1)$ $\Rightarrow$ δεν υπάρχει λ που να ισχύει. Άρα αποτελούν βάση του χώρου V.

Εικόνα 34: Λύση του φοιτητή A37 στο ερώτημα *α΄*

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Νωρίτερα κατά την επισκόπηση στο τρόπο που οι φοιτητές αντιμετωπίζουν τη γραμμική άλγεβρα, αναφέρθηκε ότι, το μάθημα αυτό εκτός από τις θεωρητικές γνώσεις που προσφέρει, αποτελείται και από υπολογιστικά μέρη. Γι αυτό τον λόγο, οι ασκήσεις που οι φοιτητές έμαθαν να αντιμετωπίζουν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου είχαν ως σκοπό να τους βοηθήσουν να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες της θεωρίας («τυπικές ασκήσεις») και να τους διδάξουν συγκεκριμένες μεθοδολογίες, τις οποίες καλούνται να μιμηθούν προκειμένου να αντιμετωπίσουν συγκεκριμένα πλαίσια («υπολογιστικές ασκήσεις»). Για να ανταποκριθούν στην δεύτερη κατηγορία ασκήσεων δεν είναι απαραίτητο να έχουν κατανοήσει πλήρως το θεωρητικό κομμάτι με το οποίο συνδέεται η άσκηση. Για παράδειγμα, οι φοιτητές έχουν μάθει να αντιμετωπίζουν ασκήσεις που καλούνται να βρουν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσμα ενός δοσμένου πίνακα χωρίς να χρειάζεται να ξέρουν πως να αναπαραστήσουν ένα ιδιοδιάνυσμα γραφικά.

ΘΕΜΑ Δ. (22) 1. Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

α΄. (4) Βρείτε τις ιδιοτιμές του A.

β΄. (5) Για κάθε ιδιοτιμή, βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα του A.

γ΄. (5) Βρείτε βάση ως προς την οποία ο πίνακας του A είναι διαγώνιος.

Εικόνα 35

Στα θέματα των τελικών εξετάσεων υπήρχαν τόσο «τυπικές» όσο και «υπολογιστικές ασκήσεις». Το ερώτημα σε αυτή την περίπτωση είναι αν όντως οι φοιτητές για να πετύχουν στο μάθημα αρκεί να ανταποκριθούν με επιτυχία σε μια μόνο από τις δύο κατηγορίες ασκήσεων (Dorier, 2000). Μια γενική εικόνα των γραπτών δείχνει ότι οι φοιτητές τείνουν να προτιμούν τις ασκήσεις που μπορούν να αντιμετωπίσουν μιμούμενοι κάποιες μεθοδολογίες, ενώ αποφεύγουν αυτές που για να απαντήσουν πρέπει να έχουν κατανοήσει τις βασικές έννοιες της θεωρίας. Για παράδειγμα, αυτή η τάση των φοιτητών επαληθεύθηκε και στην εξέταση του Ιανουαρίου του 2004. Στην εξέταση αυτή υπήρχαν δύο θέματα εκ των οποίων το ένα μελετήθηκε στο 5^{ο} κεφάλαιο και αφορούσε στην εύρεση ενός υπόχωρου (Θέμα Β, άσκηση 1 - η εκφώνηση φαίνεται στην εικόνα**) ενώ στην άσκηση 1 του θέματος Δ τα δύο πρώτα ερωτήματα αφορούσαν στην εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός δοσμένου πίνακα (Εικόνα 35). Σύμφωνα με τον διαχωρισμό της Stewart, η άσκηση 1 του θέματος Β είναι «τυπική» ενώ η άσκηση 1 του θέματος Δ είναι «υπολογιστική» (Stewart, 2008). Τα δύο θέματα αυτά ήταν σχεδόν ισότιμα στην βαθμολογία, αφού το άριστα για την άσκηση 1 του θέματος Β ήταν το 7 ενώ τα δύο πρώτα ερωτήματα της άσκησης 1 του θέματος Δ ήταν 4 και 5 αντίστοιχα. Στην συγκεκριμένη εξέταση το άριστα ήταν το 70 (με 11 μονάδες bonus) και για την τελική βαθμολογία συνυπολογιζόταν η επίδοση των φοιτητών σε ασκήσεις που παρέδιδαν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου όπου βαθμολογούνταν με άριστα το 30.

Στην εξέταση συμμετείχαν συνολικά 69 φοιτητές και μόνο 22 από αυτούς συγκέντρωσαν αρκετά υψηλή βαθμολογία ώστε να πετύχουν στο μάθημα. Όσον αφορά στην άσκηση 1 του θέματος Β μόνο οι 31 από τους 69 παρουσίασαν κάποια λύση (σωστή ή λανθασμένη) και από αυτούς οι 14 πέτυχαν στο μάθημα. Σε αυτό το θέμα ήταν λίγοι οι φοιτητές που έδωσαν σωστή απάντηση, συγκεκριμένα, από τους 69 φοιτητές μόνο 3. Από την άλλη, με την άσκηση 1 του θέματος Δ ασχολήθηκαν οι 45 από τους 69 φοιτητές επιβεβαιώνοντας την προτίμηση των φοιτητών στις «υπολογιστικές ασκήσεις». Από τους 22 που πέτυχαν στο μάθημα όλοι παρουσίασαν λύση για το συγκεκριμένο θέμα, με 18 φοιτητές να δίνουν σωστή απάντηση στο ερώτημα (α) που αφορούσε στην εύρεση ιδιοτιμών και 8 στο ερώτημα (β) που αφορούσε στην εύρεση ιδιοδιανυσμάτων.

Η απάντηση στο ερώτημα αν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου οι φοιτητές μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν τόσο «τυπικές» όσο και «υπολογιστικές ασκήσεις» είναι μάλλον αρνητική αφού, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, φαίνεται να μην είναι εξοικειωμένοι και με τις δύο όψεις της γραμμικής άλγεβρας: το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών στην τελική εξέτασε απέφυγε να απαντήσει ή απάντησε λανθασμένα σε ένα ερώτημα που αφορούσε μια βασική έννοια της θεωρίας, τον υπόχωρο.

Όλες οι λύσεις στις «υπολογιστικές ασκήσεις» είναι του συμβολικού κόσμου. Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, οι φοιτητές μπορούν να οδηγηθούν σε σωστές λύσεις ακολουθώντας έναν άκαμπτο αλγόριθμο χωρίς να κατανοούν την φυσική σημασία της διαδικασίας αυτής. Μάλιστα όπως αναφέρθηκε και παραπάνω οι φοιτητές νιώθουν ιδιαίτερα «άνετα» με τέτοιου είδους ασκήσεις. Εκτός όμως από αυτές που απαιτούν λύσεις μόνο του συμβολικού κόσμου, τόσο κατά την διάρκεια του εξαμήνου όσο και κατά τις τελικές εξετάσεις, οι φοιτητές καλούνται να αντιμετωπίσουν περιπτώσεις ασκήσεων που ενώ έχουν την δυνατότητα (και τις γνώσεις) να τις λύσουν εναλλακτικά με προσεγγίσεις του σωματοποιημένου ή του τυπικού κόσμου, δεν το κάνουν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου τύπου άσκησης από αυτές που μελετήθηκαν στο 5^{ο} κεφάλαιο, ήταν οι ασκήσεις που αφορούν στη γραμμική ανεξαρτησία. Οι περισσότεροι φοιτητές έχουν συνδέσει την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας με πίνακες που πρέπει να φέρουν σε κλιμακωτή μορφή. Ακόμη και στο μάθημα Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα προτείνεται αυτός ο τρόπος προσέγγισης από το βιβλίο. Οι φοιτητές όμως είχαν τις γνώσεις να προσεγγίσουν διαφορετικά την άσκηση, κάτι που λίγοι από αυτούς προσπάθησαν.

Για παράδειγμα ο φοιτητής Α2 (Εικόνα 7) που συμμετείχε στην εξέταση και το γραπτό του μελετήθηκε στο 5^{ο} κεφάλαιο, αρχικά προσπάθησε να παρουσιάσει μια λύση του συμβολικού κόσμου αλλά δεν τα κατάφερε και η λύση του τελικά ήταν του σωματοποιημένου κόσμου. Εδώ, ο συγκεκριμένος φοιτητής, παρόλο που είχε τις γνώσεις για να λύσει την άσκηση με έννοιες του σωματοποιημένου κόσμου, μία άσκηση που εμπλέκει την γραμμική ανεξαρτησία και εξάρτηση, ωθείται να την προσεγγίσει με έννοιες του συμβολικού κόσμου και συγκεκριμένα με πίνακες.

Στη συγκεκριμένη εξέταση του μαθήματος Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα το θέμα που αφορούσε στην γραμμική ανεξαρτησία δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους φοιτητές (Ιούνιος 2003, Θέμα 2, άσκηση 2). Η πλειοψηφία των φοιτητών προκειμένου να αποδείξει την γραμμική ανεξαρτησία, προτίμησε λύσεις του συμβολικού κόσμου: φτιάχνοντας έναν πίνακα τον οποίο είτε έφεραν σε κλιμακωτή μορφή, είτε υπολόγισαν την ορίζουσά του είτε βρήκαν τον μηδενοχώρο του.

Οι φοιτητές φαίνεται να «νιώθουν πιο άνετα» με τις συμβολικές προσεγγίσεις παρά με τις προσεγγίσεις του σωματοποιημένου και του τυπικού κόσμου. Αυτή η προτίμησή τους είναι αναμενόμενη αφού στις περισσότερες από τις ασκήσεις που λύνονται στα εργαστήρια παρουσιάζονται λύσεις του συμβολικού κόσμου, έτσι οι φοιτητές στις τελικές εξετάσεις «αντιγράφουν» τις λύσεις που έχουν δει ότι τους οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα.

Ένα ακόμη ερώτημα που τέθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι κατά πόσο οι νέοι όροι και το νέο λεξιλόγιο που καλούνται οι φοιτητές να χειριστούν στα πλαίσια της γραμμικής άλγεβρας αποτελεί εμπόδιο στην εκμάθησή της. Αυτού του είδους οι δυσκολίες, εμπίπτουν σε μια γενικότερη κατηγορία λαθών που ο Dorier αναφέρει ως «δυσκολίες με τον φορμαλισμό». Πρόκειται για αυτές που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να χειριστούν νέες λέξεις, σύμβολα, ορισμούς και θεωρήματα (όπως αναφέρθηκε και στο 3ο κεφάλαιο). Αυτού του είδους τα προβλήματα οδηγούν σε παρανοήσεις. Τέτοιου είδους παρανοήσεις παρατηρήθηκαν σε πολλά από τα γραπτά που μελετήθηκαν στο 5$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ήταν το γραπτό της φοιτήτριας Α10 που όπως φαίνεται και στην εικόνα 10, όταν της ζητήθηκε να αναφέρει τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας, απάντησε: «ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός που να είναι 0. Με όλους τους συντελεστές των διανυσμάτων ίσους με 0. π.χ. έστω $\{x_1, \cdots, x_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα πρέπει $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ και $c_1 = \cdots = c_n = 0$». Στη απάντησή της φαίνεται η κακή χρήση των συμβόλων της άλγεβρας και η λανθασμένη σύνδεση των εννοιών γραμμική ανεξαρτησία και γραμμικός συνδυασμός. (Εικόνα 10)

Οι φοιτητές φαίνεται να αντιμετώπισαν αρκετά προβλήματα με τις τυπικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας. Μια πιθανή αιτία αυτού του εμποδίου ίσως είναι η κακή σύνδεση των εννοιών μεταξύ τους που τους οδήγησε τόσο σε λάθη λόγω του φορμαλισμού όσο και σε αποφυγή των «τυπικών ασκήσεων» (οι φοιτητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τυπικές έννοιες χωρίς πρώτα να τις έχουν συνδέσει με την διαισθητική τους αντίληψη). Αυτά τα εμπόδια μόνο οι διδάσκοντες κατά τη διάρκεια του εξαμήνου είναι σε θέση να τους βοηθήσουν να τα ξεπεράσουν. Πολύ σημαντικός παράγοντας είναι η επιλογή των ασκήσεων που παρουσιάζονται στους φοιτητές κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Επιλέγοντας κατάλληλες ασκήσεις που να αποσκοπούν στην αποτίμηση του επιπέδου κατανόησης των εννοιών σε κάθε φάση, οι διδάσκοντες θα είναι σε θέση να παρέμβουν σε περίπτωση παρανοήσεων. Αυτό βέβαια προϋποθέτει ότι ο αριθμός των φοιτητών στην τάξη θα επιτρέπει τέτοιου είδους παρεμβάσεις. Από την άλλη, επιλέγοντας περισσότερες «υπολογιστικές ασκήσεις», οι φοιτητές εξοικειώνονται με λύσεις του συμβολικού κόσμου, όμως έτσι έχουν λιγότερη επαφή με έναν πιο «τυπικό» τρόπο σκέψης που είναι ουσιαστικός παράγοντας για την εκμάθηση της γραμμικής άλγεβρας.

Τέλος, μια ακόμη παράμετρος που αναφέρεται σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι επηρεάζει στην εκμάθηση της γραμμικής άλγεβρας, σύμφωνα με τον Dorier, είναι οι προηγούμενες ικανότητες των φοιτητών στη λογική και στην χρήση ποσοδεικτών. Για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας δεν υπήρχαν στοιχεία ώστε να αξιολογηθεί το υπόβαθρο των φοιτητών, αλλά θα μπορούσε να αποτελέσει να μελετηθεί η συσχέτιση αυτή σε μια μελλοντική εργασία.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

[1] Aydin, S. (2009) The factors effecting teaching linear algebra. World Conference on Educational Sciences 2009. Procedia Social and Behavioral Sciences 1 pp. 1549–1553.

[2] Britton, S. & Henderson, J. (2009) Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(7), pp. 963-974.

[3] Carlson, D. (1997) Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes Vol. 24, pp. 29-40. Washington: Mathematical Association of America.

[4] Chandler, F. & Taylor, D. (2008) Constructivist learning in undergraduate linear algebra, Primus 18(3), pp. 299–303.

[5] Day, J. & Kalman, D. (1999) Teaching Linear Algebra: What are the Questions? Retrieved from http://pcmi.ias.edu/1998/1998-questions2.pdf.

[6] De Vries, D., & Arnon, I. (2004) Solution-what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, Vol. 2, pp. 55-62. Received from http://emis.um.ac.ir/proceedings/PME28/RR/RR211_Arnon.pdf.

[7] Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (1999) Teaching and learning linear algebra in first year of French science university. Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education Vol. 1, pp. 103-112. Publishing House: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck.

[8] Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000) The Obstacle of Formalism in Linear Algebra, in J. L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, pp. 85–124.

[9] Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001) Research into the teaching and learning of linear algebra. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study pp. 255-273. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[10] Dorier J. L. (2002) Teaching Linear Algebra at University. Proceedings of the ICM, Beijing 2002 Vol. 3, pp. 875—884. Received from http://arxiv.org/pdf/math.HO/0305018.pdf.

[11] Dubinsky, E. & Mcdonald, M. (2001) APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study pp. 273-280. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Received from http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf.

[12] Gray, E. & Tall, D. (1991) Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. Proceedings of PME 15, Assisi, Vol. 2 pp. 72–79.

[13] Hillel, J. (2000) Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), The Teaching of Linear Algebra in Question pp. 191-207. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[14] Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010 or 2009??) Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications 432 pp. 2112–2124.

[15] Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Okta, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Manuscript. Received from: http://annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf.

[16]Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2007) Embodied, symbolic and formal aspects of basic linear algebra concepts. Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, Korea, 4, pp. 201-208 Received from ftp://134.76.12.5/pub/EMIS/proceedings/PME31/4/200.pdf.

[17]Stewart, S. (2008) Understanding linear algebra concepts through the embodied symbolic and formal worlds of mathematical thinking, unpublished doctoral thesis, Auckland University, 2008.

[18] Stewart, S. & Thomas, M.O.J. (2009) A framework for mathematical thinking: the case of linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 40(7), pp. 951-961.

[19]Stewart, S. & Thomas, M. (2009) Linear Algebra Snapshots through APOS and Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking. Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Vol. 2 Palmerston North, NZ: MERGA. Received from http://www.merga.net.au/documents/Stewart_RP09.pdf.

[20] Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41, pp. 173-188.

[21] Tall, D. O. (1999) Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israell, pp. 111-118. Received from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999c-apos-in-amt-pme.pdf.

[22] Tall, D. O. (2004) The three worlds of mathematics. For the Learning of Mathematics, 23(3), pp.29–33.

[23] Tall, D. O. (2011) How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics. Received from http://www.davidtall.com/ at 27/7/2011. Published by Cambridge University Press at September 2013. ISBN: 9781107668546.

[24]Wawro, M., Sweeney, G. F. & Rabin J. M. (2011) Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. Educational Studies in Mathematics, 78(1), pp. 1-19. Springer Science&Business Media B.V. 2011.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

[1] Strang, G. (1995) Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (2003) Απόδοση στα Ελληνικά: Πάρις Πάμφιλος

[2] Κουρουνιώτης, Χ. (2011) Σημειώσεις μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι", βασισμένες στο βιβλίο του G. Strang. Διατίθενται ηλεκτρονικά: http://www.math.uoc.gr/~chrisk/LinAlgI-Notes.pdf
[3] Κουρουνιώτης, Χ. (2010) Σημειώσεις μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ". Διατίθενται ηλεκτρονικά: http://www.math.uoc.gr/~chrisk/LinAlgII-Notes.pdf
[4] Παπαμαστοράκης, Ε. (2010) Διδακτική των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Περίοδος Ιουνίου 2003**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

M112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 60.

ΘΕΜΑ 1 (15)

1. (9)
   Γράψτε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 2 \end{array}$$

   σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας πίνακες, και εφαρμόστε συστηματικά, καταγράφοντας κάθε βήμα, τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το λύσετε.

2. (6)
   Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να υπολογίσετε, εάν υπάρχει, τον αντίστροφο του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

1

ΘΕΜΑ 2 (20)

1. (7)
Χρησιμοποιήστε απαλοιφή Gauss για να παραγοντοποιήσετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ως γινόμενο $A = LU$, όπου U είναι σε κλιμακωτή μορφή και L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

2. (5)
Δίδονται τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 0)$ και $v_2 = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε διανύσματα
α′) v_3 τέτοιο ώστε $\{v_1, v_2, v_3\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
β′) v_4 τέτοιο ώστε $\{v_1, v_2, v_4\}$ να είναι γραμμικά εξαρτημένο, αλλά $\{v_2, v_4\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. (8)
Βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου και μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα A του ερωτήματος 1.

ΘΕΜΑ 3 (20)

1. (7)
Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss.

2. (6)
Βρείτε τον πίνακα συμπαραγόντων, το συζυγή και τον αντίστροφο του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. (7)
Εάν A και S είναι $n \times n$ πίνακες, και S είναι αντιστρέψιμος, αποδείξτε οτι

$$\det(SAS^{-1}) = \det A.$$

ΘΕΜΑ 4 (20)

1. (7)
   Βρείτε, εάν υπάρχει, γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει το (1, 0) στο (3, 2, 1), το (0, 1) στο (1, 1, 2) και το (1, −1) στο (2, 1, 0). Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. (5)
   Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. (8)
   Ποιές ιδιότητες χαρακτηρίζουν την ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ σε έναν υπόχωρο V; Επαληθεύστε οτι ο πολλαπλασιασμός με τον πίνακα $A(A^TA)^{-1}A^T$ ορίζει την ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο ο οποίος έχει ως βάση τις στήλες του πίνακα A.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Περίοδος Ιανουαρίου 2004**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

Μ113 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε, και τα θέματα.
4. Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70.

ΘΕΜΑ Α. (15)

1. (6) Δίδεται ένα σύνολο X, και $a \in X$. Ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις κατά σημείο. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

α′. $\{f : X \to \mathbb{K} \mid f(a) = 0\}$

β′. $\{f : X \to \mathbb{K} \mid f(a) = 1\}$

γ′. $\{f : X \to (\mathbb{K} \setminus \{0\})\}$.

2. (9)

α′. Πότε ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο;

β′. Δείξτε ότι εαν τα διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \text{ περιττός }\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ Β. (22)

1. (7) Δίδεται ο υπόχωρος $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2,\ x_3 = x_4\}$ και το διάνυσμα $u = (1, 0, 0, 1)$. Βρείτε υπόχωρο $U \subset \mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε

$$u \in U \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^4 = V \oplus U\,.$$

2. Στο χώρο $\mathbb{P}_3$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3, θεωρείστε τον γραμμικό τελεστή $L : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ο οποίος απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ στο πολυώνυμο

$$Lp(x) = (2x-3)p(x) - 2a_3 x^4 + 3a_2 x^2 .$$

α′. (5) Βρείτε μια βάση για τον πυρήνα της L.

β′. (5) Βρείτε μια βάση για την εικόνα της L.

γ′. (5) Βρείτε μια βάση για το χώρο πηλίκο $\mathbb{P}_3 / \ker L$.

ΘΕΜΑ Γ. (22)

1. (4)

α′. Δώστε τον ορισμό του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $L : U \to V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ του U και $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ του V.

β′. Δώστε τον ορισμό του πίνακα αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ στη βάση $\mathcal{B}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

2. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x, y, z) = (y + 3z,\, 2x + 3y + z,\, 3z) .$$

α′. (5) Βρείτε τον πίνακα της L ως προς την κανονική βάση $\mathcal{E}$ του $\mathbb{R}^3$.

β′. (6) Δίδεται η βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την βάση $\mathcal{E}$ στη βάση $\mathcal{B}$.

γ′. (7) Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών.

ΘΕΜΑ Δ. (22) 1. Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

α′. (4) Βρείτε τις ιδιοτιμές του A.

β′. (5) Για κάθε ιδιοτιμή, βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα του A.

γ′. (5) Βρείτε βάση ως προς την οποία ο πίνακας του A είναι διαγώνιος.

2. Στο χώρο $\mathbb{P}_1$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 1 με πραγματικούς συντελεστές ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt .$$

α′. (3) Υπολογίστε τα εσωτερικά γινόμενα $\langle x^i, x^j \rangle$ για $i, j = 0, 1$, όπου $\{x^0, x^1\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{P}_1$.

β′. (5) Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram–Schmidt για να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{P}_1$ ως προς το δοθέν εσωτερικό γινόμενο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Περίοδος Σεπτεμβρίου 2004
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

Μ113 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε, και τα θέματα.
4. Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70.

ΘΕΜΑ Α. (15)
1. (3) Δείξτε οτι το σύνολο των πολυωνύμων που διαιρούνται με το x^2+1 είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου $\mathbb{P}$ όλων των πολυωνύμων.
2. (6)

α'. Πότε ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο;

β'. Δείξτε οτι εάν τα διανύσματα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα $\{x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_n-x_{n-1}\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

3. (6) Υποθέστε οτι U, V, W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου X, και οτι $U\cap V=\{0\}$. Δείξτε οτι

$$(U\cap W)\oplus(V\cap W)\subseteq(U\oplus V)\cap W\,.$$

ΘΕΜΑ Β. (20)
1. (8) Δίδεται ο υπόχωρος $V=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4\,|\,x_1=x_3,\ x_3=2x_4\}$ και το διάνυσμα $u=(2, 2, 2, 1)$, και αναζητούμε υπόχωρο $U\subset\mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{R}^4=V+U \quad \text{και} \quad V\cap U=\langle u\rangle\,.$$

α'. Τί διάσταση πρέπει να έχει ο U;

β′. Βρείτε μία βάση για έναν τέτοιο χώρο U.

2. Στο χώρο $\mathbb{P}_3$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3, θεωρείστε το γραμμικό τελεστή $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ο οποίος απεικονίζει ένα πολυώνυμο στην παράγωγό του, $Dp = p'$.

α′. (4) Βρείτε μία βάση του $\mathbb{P}_3$, και προσδιορίστε τον πίνακα του D ως προς αυτήν τη βάση.

β′. (4) Βρείτε βάσεις του πυρήνα και της εικόνας του D.

γ′. (4) Βρείτε μία βάση για το χώρο πηλίκο $\mathbb{P}_3 / \ker D$.

ΘΕΜΑ Γ. (20)

1. (4)

α′. Δώστε τον ορισμό του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $L : U \to V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ του U και $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ του V.

β′. Δώστε τον ορισμό του πίνακα αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ στη βάση $\mathcal{B}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

2. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x, y, z) = (x + 3y, 2y, y + z).$$

α′. (2) Βρείτε τον πίνακα της L ως προς την κανονική βάση $\mathcal{E}$ του $\mathbb{R}^3$.

β′. (5) Δίδεται η βάση $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{E}$ στη βάση $\mathcal{B}$.

γ′. (5) Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών.

δ′. (4) Ποιά είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή της απεικόνισης L;

ΘΕΜΑ Δ. (20)

1.

α′. (2) Δώστε τον ορισμό της ιδιοτιμής ενός γραμμικού τελεστή $L : V \to V$.

β′. (4) Δείξτε οτι η μοναδική ιδιοτιμή του τελεστή παραγώγισης στο χώρο όλων των πολυωνύμων, $D : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, είναι η τιμή 0.

γ′. (4) Βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή D.

2. (10) Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση

$$\{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 3, 7/8)\}.$$