ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ. ΚΑΘΟΛΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ, ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΡΙΑ ΕΥΘΥΜΙΟΥ του Παναγιώτη

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΟΥΡΟΥΝΙΩΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ – 2011

UNIVERSITY OF CRETE

SCHOOL OF SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER THESIS

LEARNING DISABILITIES AND ALGEBRA. UNIVERSAL DESIGN OF INSTRUCTION IN UPPER HIGH SCHOOL, USING STRUCTURED WORKSHEETS

MARIA EFTHYMIOU Panagiotis

SUPERVISOR: CHRISTOS KOUROUNIOTIS

IRAKLIO – 2011

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών Μαθηματικών και Εφαρμογών τους, στην κατεύθυνση Μαθηματικά για την Εκπαίδευση, τον Ιούνιο του 2011.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Χ. Κουρουνιώτης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

- Χ. Κουρουνιώτης
- Δ. Πόταρη
- Ι. Αντωνιάδης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας γύρω από τις Μαθησιακές Δυσκολίες και το συσχετισμό των χαρακτηριστικών της αντίστοιχης ομάδας μαθητών με τη διδασκαλία της Άλγεβρας. Παρουσιάζονται αρχικά οι κύριες προτεινόμενες μέθοδοι και διδακτικές τεχνικές αντιμετώπισης, η επιλογή των οποίων γίνεται με γνώμονα τη δυνατότητα εφαρμογής από εκπαιδευτικό γενικής αγωγής στη βαθμίδα του Λυκείου. Στη συνέχεια σχεδιάζεται η διδασκαλία ενός κεφαλαίου Άλγεβρας επιπέδου Λυκείου, με στόχο να ενσωματωθούν σε αυτήν κατά το δυνατόν περισσότερες από τις προτεινόμενες προσαρμογές. Υποτίθεται εξ αρχής ότι στην τάξη για την οποία σχεδιάζεται η διδασκαλία, υπάρχουν μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε συγκεκριμένες δεξιότητες, που οι έρευνες σχετίζουν με την μαθηματική επίδοση. Με αυτή την υπόθεση, επιλέγεται ο σχεδιασμός της διδασκαλίας να γίνει στα πλαίσια μιας πρωτοβάθμιας πρόληψης, η οποία επικεντρώνεται στον καθολικό σχεδιασμό της διδασκαλίας, απευθύνεται σε όλους τους μαθητές, αλλά διαχειρίζεται αρχές που διέπουν τις ανάγκες του ειδικού μαθητικού πληθυσμού της τάξης. Πρακτικό παράγωγο της παρούσας μελέτης αποτελεί μια ολοκληρωμένη σειρά δομημένων φύλλων εργασίας, η μορφή των οποίων καθορίζεται από το είδος των δυσκολιών που εμφανίζουν κάποιοι από τους μαθητές. Καταδεικνύεται έτσι ο τρόπος, με τον οποίο η σύσταση της εκάστοτε τάξης, οι δυνατότητες αλλά και οι αδυναμίες των μαθητών που την αποτελούν, καθορίζουν και την προσέγγιση της διδασκαλίας.

ABSTRACT

The present work is a study of the existing literature about Learning Disabilities and the correlation of the respective group of students' characteristics to the teaching of Algebra. Originally, are presented the main, proposed teaching methods and techniques, the choice of which is driven by the possibility of application at the upper high school level, by a general educator. Next, is designed the teaching of an upper high school Algebra chapter, with the purpose to integrate as many as possible of the proposed adjustments. It is assumed at the outset that the class, for which the specific teaching is designed, contains students with Learning Disabilities, who have difficulties in specific skills, which investigations relate to math performance. With this assumption, the design of instruction is selected to be based on the principles of a primary prevention, which focuses on universal design of instruction, open to all students, but which also manages the rules governing the needs of the special student population of the class. The practical product of the present study is a complete series of structured worksheets, the format of which is determined by the type of difficulties that face some of the students. It is thus demonstrated the way, that the composition of each class, the possibilities and weaknesses of students forming it, define the approach of teaching.

Λέξεις Κλειδιά

Άλγεβρα, Λύκειο, διδακτική Μαθηματικών, Μαθησιακές Δυσκολίες, Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά, μέθοδοι διδασκαλίας, τεχνικές διδασκαλίας, προσαρμογή διδασκαλίας, φύλλα εργασίας, πρωτοβάθμια πρόληψη

Algebra, upper high school, Mathematics education, Learning Disabilities, Learning Disabilities in Mathematics, teaching methods, teaching strategies, teaching adjustments, worksheets, first – degree prevention

<u>**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**</u>

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη γενική τάξη του Λυκείου ένας καθηγητής Μαθηματικών είναι πολύ πιθανόν να κληθεί να διδάξει σε μαθητές που δυσκολεύονται στα Μαθηματικά, εξαιτίας ποικίλων παραγόντων (γνωστικών, ψυχοκινητικών, συναισθηματικών, περιβαλλοντικών, αισθητηριακών κ.τ.λ.), οι οποίοι σε πολλές περιπτώσεις επηρεάζουν την επίδοση, αλλά και τη γενικότερη εικόνα των μαθητών αυτών στο μάθημα των Μαθηματικών.

Κάποιοι ερευνητές εξετάζουν χωριστά παράγοντες όπως την κοινωνική τάξη και το περιβάλλον, τις διαφορές των δύο φύλων, το άγχος, τη στάση προς το γνωστικό αντικείμενο, τον εκάστοτε εκπαιδευτικό (Αγαλιώτης, 2000), ενώ άλλοι εξετάζουν ως διακριτό τον παράγοντα των (Ειδικών) Μαθησιακών Δυσκολιών, διαφόρων τύπων και μορφών.

Έρευνες δείχνουν ότι περίπου το 10% του μαθητικού πληθυσμού, ανήκει στην κατηγορία μαθητών με ΜΔ διαφόρων τύπων, ποσοστό που καθιστά το φαινόμενο πολύ πιο σύνηθες, από ότι ίσως περιμένει κάποιος μη ειδικός του χώρου. Αν σε αυτό το ποσοστό προσθέσουμε και εκείνο των μαθητών, οι οποίοι παρουσιάζουν χαμηλές επιδόσεις, χωρίς απαραίτητα να χρήζουν «επίσημα» ειδικής εκπαιδευτικής αντιμετώπισης, τότε, αν μη τι άλλο, τα αποτελέσματα θα πρέπει να μας πείθουν, ώστε να λάβουμε υπόψη και αυτό το μέρος της τάξης κατά το σχεδιασμό και την εφαρμογή της διδασκαλίας μας. Το σύνηθες του φαινομένου καθιστά απαραίτητη την κατάλληλη προσαρμογή της διδασκαλίας (ως προς το στυλ, τα μέσα, το ρυθμό κ.α.), ώστε να επωφελούνται από αυτήν όλοι οι μαθητές και όχι μόνο όσοι, ούτως ή άλλως δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες.

Είναι γεγονός, από την άλλη, ότι οι καθηγητές μέσης εκπαίδευσης στη χώρα μας, κατά πλειοψηφία, δεν έχουν εκπαιδευτεί επαρκώς (τις περισσότερες φορές καθόλου) στην αντιμετώπιση μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στα γενικά σχολεία. Αρκεί μια ματιά στους οδηγούς σπουδών των επονομαζόμενων «καθηγητικών» σχολών (όπως των τμημάτων Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας, Βιολογίας, Ελληνικής Φιλολογίας) για να διαπιστωθεί ότι ελάχιστα είναι τα μαθήματα που μπορεί να παρακολουθήσει ένας μέλλων καθηγητής και τα οποία να του παρέχουν εφόδια, ώστε να ανταπεξέλθει ικανοποιητικά σε αντίστοιχες περιπτώσεις.

Από τη μία λοιπόν, το φαινόμενο των μαθητών με κάποιου τύπου ΜΔ μέσα στην κοινή τάξη του Λυκείου είναι αδιαμφισβήτητα υπαρκτό και *«η επιστημονική έρευνα έχει κάνει σημαντική πρόοδο, σχετικά τόσο με την ανίχνευση όσο και με τη διάγνωση και την επιτυχή υποστήριξη των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες»*, από την άλλη *«αυτή η πρόοδος δεν έχει τροποποιήσει σημαντικά την εκπαιδευτική πρακτική»* (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Η παραπάνω διαπίστωση αποτέλεσε αφετηρία για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας. Γενικότερος στόχος της είναι να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν περισσότερα από τα δεδομένα που χρειάζεται να γνωρίζει ένας εκπαιδευτικός – μαθηματικός, ο οποίος θα κληθεί να σχεδιάσει και να διδάξει το μάθημα της Άλγεβρας, σε μαθητές Λυκείου με δυσκολίες στη μάθηση, οι οποίες επηρεάζουν την επίδοσή τους στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

Η αφορμή δόθηκε, όταν η συγγραφέας, ως εκπαιδευτικός δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του ΚΕΔΔΥ Νομού Ηρακλείου, κλήθηκε να υποστηρίξει μαθησιακά, μαθητή με δυσλεξία, ο οποίος φοιτά σε κοινή τάξη Γενικού Λυκείου του νομού και ο οποίος παρουσιάζει ιδιαίτερα χαμηλές επιδόσεις στο μάθημα της Άλγεβρας, για τουλάχιστον δύο διαδοχικά σχολικά έτη. Η νοημοσύνη του εκτιμήθηκε στα ανώτερα φυσιολογικά επίπεδα, σύμφωνα με τους ψυχομετρικούς ελέγχους που διενεργήθηκαν στα πλαίσια της αξιολόγησής του στην εν λόγω υπηρεσία, γεγονός που δε «δικαιολογεί» τη χαμηλή επίδοσή του.

Η αναζήτηση μεθόδων και τεχνικών διδασκαλίας για τη συγκεκριμένη περίπτωση μαθητή, οδήγησε στο σχηματισμό μιας γενικότερης εικόνας των σύγχρονων αντιλήψεων, σε σχέση με την ποικιλία των δυσκολιών, που πιθανόν να έχουν ως αποτέλεσμα χαμηλές επιδόσεις στο αντικείμενο των Μαθηματικών, καθώς επίσης και των επικρατέστερων προτεινόμενων τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών, στα πλαίσια της κοινής τάξης.

Στη συνέχεια, έγινε μια προσπάθεια εφαρμογής των όσων μελετήθηκαν στην πράξη, μέσω του σχεδιασμού φύλλων εργασίας, τα οποία ενσωματώνουν όσο το δυνατόν περισσότερα από τα στοιχεία που προτείνονται στη σχετική βιβλιογραφία και τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια, τμηματικά, ή να αποτελέσουν οδηγό για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας αλγεβρικών εννοιών, σε μαθητές με αντίστοιχες δυσκολίες.

Αρχικά, κατά το στάδιο της μελέτης της σχετικής βιβλιογραφίας, παρατηρήθηκε πως, ενώ οι έρευνες, το υλικό και οι προτάσεις που αφορούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι πολυπληθή και ποικίλα, για το επίπεδο του Γυμνασίου περιορίζονται αρκετά, ενώ υπάρχει ουσιαστική έλλειψη για την επόμενη βαθμίδα, αυτή του Λυκείου. Η παρατήρηση αυτή κατέστησε πρόκληση για τη συγγραφέα, την ανάπτυξη μιας πρότασης με παράλληλη προσπάθεια προσαρμογής και εφαρμογής των θεωρητικών προσεγγίσεων που μελετήθηκαν, σε ένα μάθημα Άλγεβρας επιπέδου Λυκείου.

Απώτερος στόχος είναι η κατάδειξη του γεγονότος ότι η αντιμετώπιση, ως ένα βαθμό, είναι δυνατή στα πλαίσια της κοινής τάξης, με κατάλληλες προσαρμογές της διδασκαλίας από εκπαιδευτικούς γενικής αγωγής. Άλλωστε, *«το κλειδί για την επιτυχημένη στροφή προς την εκπαιδευτική αντιμετώπιση δεν είναι η ύπαρξη της εκπαιδευτικής έρευνας, αλλά η διάχυση των αποτελεσμάτων της στους εκπαιδευτικούς και η αλλαγή των αντιλήψεων και καθημερινών διδακτικών πρακτικών τους.»* (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1. ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία αύξηση του ενδιαφέροντος των εκπαιδευτικών όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης, για τα προβλήματα μάθησης που αντιμετωπίζουν κάποιοι μαθητές στο σχολείο, καθώς επίσης και μια ανησυχία για τα μεγάλα ποσοστά σχολικής αποτυχίας (Παντελιάδου, 2004). Αυτή η αύξηση ενδιαφέροντος και η ανησυχία, έχει οδηγήσει σε μια προσπάθεια περιγραφής, ερμηνείας και αναζήτησης λύσεων. Κατά την προσπάθεια αυτή, σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται καταχρηστικά όροι, όπως αυτός των «Μαθησιακών Δυσκολιών», γεγονός, το οποίο μπορεί τελικά να οδηγήσει σε ευρύτερη σύγχυση (Παντελιάδου, 2004).

Οι λόγοι της ελαστικής και με μεγάλη ευκολία χρήσης του όρου ποικίλουν. Από τη μία, οι γονείς προτιμούν να οικειοποιηθούν τον όρο «Μαθησιακές Δυσκολίες» για να περιγράψουν προβλήματα στη μάθηση που μπορεί να οφείλονται σε άλλους παράγοντες (όπως π.χ. τη νοητική υστέρηση, κοινωνικά ή οικογενειακά προβλήματα, τη διαφορετική μητρική γλώσσα, τα προβλήματα κοινωνικής προσαρμογής), αφού με τον τρόπο αυτό ο μαθητής δεν επιβαρύνεται κοινωνικά και επιπλέον εξασφαλίζεται η δυνατότητα παροχής ειδικής εκπαιδευτικής αντιμετώπισης. Για τον ίδιο λόγο και για να διευκολύνουν την επικοινωνία τους με τους γονείς, προτιμούν να κάνουν χρήση του συγκεκριμένου όρου και οι εκπαιδευτικοί. Εξ' άλλου, σχολείο και οικογένεια «απαλλάσσονται» από ευθύνες, αφού ο όρος υπονοεί ότι το πρόβλημα είναι ενδογενές στο μαθητή (Παντελιάδου, 2004).

Από την άλλη, η ποικιλία όρων, θεωριών και επεξηγηματικών μοντέλων για τις ίδιες λειτουργίες και καταστάσεις, είναι φυσικό να προκαλεί σύγχυση και δικαίως: το ίδιο το φαινόμενο είναι τόσο πολύπλοκο, ώστε οι ίδιοι οι ερευνητές του χώρου δεν έχουν δώσει ακόμα οριστικές απαντήσεις σε πολλά ζητήματα (Αγαλιώτης, 2000).

Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο της παρούσας μελέτης, θα γίνει αρχικά μια προσπάθεια αποσαφήνισης των μέχρι τώρα γνωστών δεδομένων γύρω από τις Μαθησιακές Δυσκολίες. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη παράγραφο, θα παρουσιαστεί ένας από τους πλέον διαδεδομένους διεθνώς ορισμούς του όρου «Μαθησιακές Δυσκολίες», ο οποίος έχει επικρατήσει και στον ελληνικό χώρο, καθώς επίσης και οι διακριτές κατηγορίες «Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών», σύμφωνα με τα διαγνωστικά εγχειρίδια ICD-10 και DSM-IV-TR. Στη δεύτερη παράγραφο, γίνεται μια προσπάθεια οργάνωσης των χαρακτηριστικών που παρουσιάζουν οι μαθητές, οι οποίοι εμπίπτουν στις παραπάνω κατηγορίες, βάσει των πιθανών υπαρχόντων δυσλειτουργιών. Στο σημείο αυτό, γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στα γνωστικά χαρακτηριστικά, τα οποία καταδεικνύονται από σχετικές έρευνες, ως υπεύθυνα για δυσκολίες, ειδικότερα στον τομέα των Μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία, το ενδιαφέρον στρέφεται στους τρόπους με τους οποίους κάποια χαρακτηριστικά των μαθητών με ΜΔ επηρεάζουν την πρόοδό τους στα Μαθηματικά (και ειδικότερα στην Άλγεβρα), ανεξαρτήτως πιθανών συνυπαρχουσών δυσκολιών σε άλλα σχολικά αντικείμενα. Για το λόγο αυτό, θα παρουσιαστούν στην τρίτη παράγραφο του κεφαλαίου, κάποιες ενδιαφέρουσες πληροφορίες περί των χαρακτηριστικών μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) στα Μαθηματικά, δηλαδή την κατηγορία μαθητών με τις περισσότερο έντονες δυσκολίες στον τομέα που μελετάται. Τέλος, συνοψίζονται οι ειδικότερες δυσκολίες που φαίνεται να αντιμετωπίζουν μαθητές με ΜΔ στον τομέα της Άλγεβρας, οι οποίες σχετίζονται περισσότερο με τη φύση του ίδιου του αντικειμένου και οι οποίες θα αποτελέσουν οδηγό, για τον μετέπειτα σχεδιασμό της διδασκαλίας.

1.1. Μαθησιακές Δυσκολίες: Ορισμός και Τύποι αυτών

Ο όρος Μαθησιακές Δυσκολίες (ΜΔ) έχει χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους και έχουν δοθεί αρκετοί διαφορετικοί ορισμοί, από τις αρχές της δεκαετίας του '60, όταν χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Samuel Kirk (1962), μέχρι σήμερα. Στοιχείο ενδεικτικό της πληθώρας των σχετικών ορισμών, είναι ότι έχει αναπτυχθεί μια κατηγοριοποίηση αυτών των ίδιων σε ιατροκεντρικούς, παιδαγωγικοκεντρικούς και λειτουργικούς, ενώ η προσπάθεια βελτίωσης αυτών δεν έχει ακόμα ολοκληρωθεί (Τζουριάδου & Μπάρμπας, 2009).

Είναι σημαντικό, πάντως, να γίνει κατανοητό, πως ο όρος ΜΔ αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών αναγκών και δεν μπορούν να θεωρηθούν όλοι οι τύποι προβλημάτων στη μάθηση απαραιτήτως ΜΔ. Επειδή τα παιδιά παρουσιάζουν φυσικές διαφορές στο ρυθμό ανάπτυξης συγκεκριμένων δεξιοτήτων, μερικές φορές μια καθυστέρηση στην ωρίμανση μπορεί να μοιάζει με μαθησιακή δυσκολία (Αγαλιώτης, 2000). Για να γίνει, όμως, διάγνωση ΜΔ πρέπει να πληρούνται συγκεκριμένα κριτήρια.

Κάποια από τα κοινά στοιχεία μεταξύ όλων των ορισμών που έχουν αναπτυχθεί για να προσδιορίσουν τον όρο «Μαθησιακές Δυσκολίες» είναι α) η ανισομέρεια μεταξύ των ικανοτήτων και β) η ασυμβατότητα μεταξύ ικανοτήτων και επίδοσης. Οι δυσκολίες ενός μαθητή με ΜΔ δεν μπορεί να εκτείνονται σε όλες τις ικανότητες, αφού τότε ο μαθητής θα ενέπιπτε στην κατηγορία της νοητικής καθυστέρησης. Έτσι, τα άτομα με ΜΔ θεωρείται ότι έχουν γενική νοητική λειτουργία εντός των φυσιολογικών ορίων, με εσωτερικές διακυμάνσεις μεταξύ των γνωστικών τους λειτουργιών. Επίσης, η σχολική τους επίδοση είναι κατώτερη από το αναμενόμενο, σε σχέση με την ηλικία και το νοητικό τους δυναμικό (Τζουριάδου & Μπάρμπας, 2009).

Αναλυτικότερα, οι ΜΔ αναφέρονται σε περιπτώσεις ατόμων, των οποίων η νοημοσύνη, το οικογενειακό περιβάλλον, οι ευκαιρίες σχολικής μάθησης κ.α., δε «δικαιολογούν» τη συστηματική αποτυχία τους σε ορισμένα σχολικά αντικείμενα. Αιτίες της χαμηλής επίδοσης ή της αποτυχίας των ατόμων αυτών στα συγκεκριμένα αντικείμενα, θεωρούνται κάποιες *«θεμελιώδεις δυσλειτουργίες ή διαφορές του γνωστικού τους μηχανισμού ή του κεντρικού νευρικού συστήματος»,* ανάλογα με την ειδικότητα του εκάστοτε ερευνητή (Αγαλιώτης, 2000).

Ένας από τους πιο αποδεκτούς επιστημονικά ορισμούς, ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως και στην Ελλάδα (Παντελιάδου, 2004, Παντελιάδου & Μπότσας, 2007, Τζουριάδου & Μπάρμπας, 2009, Αγαλιώτης, 2000, Κοσυφόγλου, 2006, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο) και κατά τα γνώμη της συγγραφέως, είναι ενδεικτικός και αρκετά σαφής και κατανοητός, ώστε να εξυπηρετεί τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, είναι αυτός στον οποίο κατέληξε, έπειτα από εξαετή μελέτη, το National Joint Committee of Learning Disabilities (NJCLD) των Η.Π.Α. και αναφέρει τα εξής:

«Οι Μαθησιακές Δυσκολίες(Learning Disabilities) είναι ένας γενικός όρος που αναφέρεται σε μια ανομοιογενή ομάδα διαταραχών, οι οποίες εκδηλώνονται με σημαντικές δυσκολίες στην πρόσκτηση και χρήση ικανοτήτων ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης, γραφής, συλλογισμού ή μαθηματικών ικανοτήτων.

Οι διαταραχές αυτές είναι εγγενείς στο άτομο, αποδίδονται σε δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος και μπορεί να υπάρχουν σε όλη τη διάρκεια της ζωής. Προβλήματα σε συμπεριφορές αυτοελέγχου, κοινωνικής αντίληψης και κοινωνικής αλληλεπίδρασης μπορεί να συνυπάρχουν με τις Μαθησιακές Δυσκολίες, αλλά δεν συνιστούν από μόνα τους Μαθησιακές Δυσκολίες.

Αν και οι Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να εμφανίζονται μαζί με άλλες καταστάσεις μειονεξίας (π.χ. αισθητηριακή βλάβη, νοητική καθυστέρηση, σοβαρή συναισθηματική διαταραχή) ή με εξωτερικές επιδράσεις, όπως οι πολιτισμικές *διαφορές, η ανεπαρκής ή ακατάλληλη διδασκαλία, δεν είναι το άμεσο αποτέλεσμα αυτών των καταστάσεων ή επιδράσεων»* (Hammill, 1990).

Μια προσεκτική μελέτη του ορισμού, αλλά και της διεθνούς επιστημονικής βιβλιογραφίας γύρω από το θέμα, καταρρίπτει κάποιους από τους μύθους που έχουν αναπτυχθεί και έχουν οδηγήσει σε γενικότερη σύγχυση των ενδιαφερομένων (μαθητών, γονέων και εκπαιδευτικών), κυρίως λόγω ελλιπούς ενημέρωσής των (Παντελιάδου, 2004).

Ενδεικτικά, αναφέρονται στον Πίνακα 1 κάποιοι από τους περισσότερο διαδεδομένους τέτοιους μύθους, καθώς επίσης και οι ανασκευές των.

Μύθος	**Ανασκευή**
Οι ΜΔ δεν αποτελούν ειδική εκπαιδευτική ανάγκη.	Οι ΜΔ είναι πραγματικές και δεν αποτελούν δημιούργημα των επιστημόνων. Πρόσφατες έρευνες ανέδειξαν και νευρολογικής φύσης διαφορές στη λειτουργία του εγκεφάλου των ατόμων με ΜΔ.
Οι μαθητές με ΜΔ έχουν χαμηλή νοημοσύνη.	Εξ' ορισμού οι μαθητές με ΜΔ έχουν τουλάχιστον «φυσιολογική» νοημοσύνη. Κάποια από τα παιδιά αυτά έχουν υψηλή νοημοσύνη, ενώ άλλα βρίσκονται στο κατώτερο όριο του «φυσιολογικού».
Οι μαθητές με ΜΔ δεν μπορούν να μάθουν.	Οι μαθητές με ΜΔ όπως έχει δείξει η διδακτική πρακτική μπορούν όχι μόνο να μάθουν, αλλά και να προχωρήσουν σε ακαδημαϊκές σπουδές. Μόνο προαπαιτούμενο, είναι να εκπαιδευθούν με βάση τις ιδιαίτερες ανάγκες τους, ώστε να παρακάμψουν προβλήματα που αντιμετωπίζουν.
Οι ΜΔ είναι αποτέλεσμα ανεπαρκούς διδασκαλίας.	Οι ΜΔ είναι πρόβλημα που υπάρχει κατά τη γέννηση του ανθρώπου. Δεν μπορεί να δημιουργηθεί από την ακατάλληλη διδασκαλία. Είναι όμως δυνατό, η κατάλληλη προσαρμογή της διδασκαλίας να διευκολύνει τη μάθηση και να αξιοποιήσει τις δυνατότητες του μαθητή με ΜΔ.
Οι μαθητές με ΜΔ είναι απλά τεμπέληδες.	Η εικόνα του μαθητή με ΜΔ που είναι ανενεργός και τεμπέλης δεν είναι ακριβής. Τα παιδιά αυτά χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να ολοκληρώσουν εργασίες. Επίσης, στην προσπάθειά τους να

	αποφύγουν μια νέα αποτυχία, δεν εμπλέκονται εύκολα σε ακαδημαϊκά έργα.
Οι μαθητές με ΜΔ αντιμετωπίζουν προβλήματα μόνο στα μαθήματα του σχολείου.	Τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα αναδεικνύουν την ύπαρξη σημαντικών κοινωνικο – συναισθηματικών προβλημάτων στους μαθητές με ΜΔ που είτε προκαλούνται από την επαναλαμβανόμενη αποτυχία είτε από προβλήματα σε γνωστικές λειτουργίες.
Οι ΜΔ ξεπερνιούνται με τον καιρό.	Οι ΜΔ είναι δια βίου πρόβλημα. Εμφανίζονται με διαφορετικό τρόπο και ένταση σε κάθε ηλικία, όμως δεν εξαφανίζονται με το χρόνο.
Οι ΜΔ θεραπεύονται.	Οι ΜΔ αποτελούν διαρκή και μόνιμη συνθήκη. Υπάρχουν προγράμματα που διευκολύνουν και βελτιώνουν τη μάθηση αυτών των μαθητών. Παρ' όλα αυτά οι διάφορες μέθοδοι θεραπείας που προτάθηκαν κατά καιρούς, στερούνται ερευνητικής τεκμηρίωσης.

Πίνακας 1: Μύθοι για τις ΜΔ και ανασκευή αυτών (πηγή: Παντελιάδου & Μπότσας, 2007)

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που προκύπτει από τον ορισμό, είναι ότι οι ΜΔ είναι δυνατόν να εμφανίζονται σε ποικίλους συνδυασμούς, με διάφορες μορφές και μπορεί να επηρεάζουν την επίδοση σε έναν ή περισσότερους τομείς της μάθησης. Οι προσπάθειες κατηγοριοποίησης όλων των ειδών ΜΔ, είναι διαρκής, όμως μέχρι σήμερα δεν υπάρχει μια καθολικά αποδεκτή διάκριση αυτών.

Μία από τις πιθανές κατηγοριοποιήσεις των ΜΔ, είναι αυτή που προτείνεται από την τελευταία έκδοση, του 2007, της Παγκόσμιας Οργάνωσης Υγείας (World Health Organization) στο εργαλείο ταξινόμησης διαταραχών ICD – 10, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως και στη χώρα μας κατά τη διάγνωση. Σε αυτό, οι ΜΔ οι οποίες δεν οφείλονται σε κάποιο επίκτητο εγκεφαλικό τραύμα ή ασθένεια, εντάσσονται στην ευρύτερη κατηγορία αναπτυξιακών διαταραχών, ονομάζονται «Ειδικές Αναπτυξιακές Διαταραχές Σχολικών Δεξιοτήτων» και διακρίνονται σε διαταραχές στην ανάγνωση, το συλλαβισμό, τις αριθμητικές δεξιότητες, μεικτούς τύπους διαταραχών, άλλους τύπους διαταραχών σχολικών δεξιοτήτων, απροσδιόριστες ειδικές διαταραχές σχολικών δεξιοτήτων. Αναλυτικότερα:

Ειδική Διαταραχή στην Ανάγνωση: Περιλαμβάνει τις ειδικές αναπτυξιακές διαταραχές σε αναγνωστικές δυσκολίες, όπως η αναπτυξιακή δυσλεξία. Το κυρίαρχο χαρακτηριστικό αυτής της κατηγορίας, είναι μια σημαντική βλάβη, συγκεκριμένα στην ανάπτυξη αναγνωστικών δεξιοτήτων, που δεν οφείλεται σε γενικευμένη νοητική καθυστέρηση ή σε ελλιπή διδασκαλία. Οι ικανότητες αναγνωστικής κατανόησης, αναγνωστικής διάκρισης λέξεων, «φωναχτής» ανάγνωσης και εκτέλεσης εργασιών που απαιτούν ανάγνωση, μπορεί όλες να επηρεαστούν.

Οι δυσκολίες στο συλλαβισμό συνήθως συνδέονται με την ειδική διαταραχή στην ανάγνωση και συχνά παραμένουν και στην ενήλικη ζωή, ακόμα και όταν έχει επιτευχθεί κάποια πρόοδος στην ικανότητα ανάγνωσης.

Οι ειδικές αναπτυξιακές διαταραχές στην ανάγνωση, πολύ συχνά ακολουθούν ένα ιστορικό διαταραχών στο λόγο, ή στην ανάπτυξη του λόγου.

Συχνός είναι και ο συσχετισμός τους με συναισθηματικές διαταραχές ή διαταραχές συμπεριφοράς, κατά τη σχολική περίοδο.

Ειδική Διαταραχή στον Συλλαβισμό: Κυρίαρχο χαρακτηριστικό εδώ είναι μια σημαντική βλάβη, συγκεκριμένα στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συλλαβισμού, απούσας της ειδικής διαταραχής στην ανάγνωση, που δεν οφείλεται σε γενικευμένη νοητική καθυστέρηση ή σε ελλιπή διδασκαλία. Επηρεάζονται οι ικανότητες τόσο του συλλαβισμού των λέξεων προφορικά, όσο και της ορθογραφίας αυτών.

Ειδική Διαταραχή στις Αριθμητικές Δεξιότητες: Περιλαμβάνει διαταραχές, όπως η αναπτυξιακή δυσαριθμησία. Αναφέρεται σε μια ειδική βλάβη σε αριθμητικές δεξιότητες, που δεν οφείλεται σε γενικευμένη νοητική καθυστέρηση ή σε ελλιπή διδασκαλία και η οποία αφορά περισσότερο σε κατάκτηση των βασικών υπολογιστικών μηχανισμών της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, παρά σε κατάκτηση περισσότερο αφηρημένων μαθηματικών δεξιοτήτων που απαιτούνται στην άλγεβρα, την τριγωνομετρία, τη γεωμετρία ή τον απειροστικό λογισμό (calculus).

Μεικτή Διαταραχή στις Σχολικές Δεξιότητες: Σε αυτόν τον τύπο διαταραχών, παρατηρείται βλάβη ταυτόχρονα σε αριθμητικές δεξιότητες και σε δεξιότητες είτε ανάγνωσης, είτε συλλαβισμού, η οποία όμως δεν οφείλεται σε γενικευμένη νοητική καθυστέρηση ή σε ελλιπή διδασκαλία.

Άλλες Διαταραχές στις Σχολικές Δεξιότητες: Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνεται η ειδική αναπτυξιακή διαταραχή στη γραπτή έκφραση.

Διαταραχές στις Σχολικές Δεξιότητες, απροσδιόριστες: Περιλαμβάνει διαταραχές στην ανάπτυξη σχολικών δεξιοτήτων, οι οποίες δεν εμπίπτουν ακριβώς σε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες, αλλά δεν οφείλονται σε γενικευμένη νοητική καθυστέρηση ή σε ελλιπή διδασκαλία.

Από την άλλη, η Αμερικανική Ψυχιατρική Ένωση, στην τελευταία έκδοση του αντίστοιχου εργαλείου ταξινόμησης διαταραχών, το 2000, το DSM-IV-RT, το οποίο επίσης χρησιμοποιείται ευρέως και στον ελλαδικό χώρο, ονομάζει τις ΜΔ «Μαθησιακές Διαταραχές» και τις διακρίνει σε διαταραχή στην Ανάγνωση, διαταραχή στα Μαθηματικά, διαταραχή στη Γραπτή Έκφραση, Μαθησιακές Διαταραχές, μη προσδιοριζόμενες διαφορετικά. Αναλυτικότερα, οι παραπάνω κατηγορίες διακρίνονται σύμφωνα με τις ακόλουθες αρχές:

Διαταραχή στην Ανάγνωση: Το βασικό χαρακτηριστικό της Διαταραχής στην Ανάγνωση, είναι το σημαντικό έλλειμμα στην αναγνωστική ακρίβεια, την ταχύτητα ή την κατανόηση, σε σχέση με τα αναμενόμενα για την ηλικία, τη νοημοσύνη, και την παρεχόμενη εκπαίδευση. Η διαταραχή στην ανάγνωση επηρεάζει σημαντικά τη σχολική επίδοση και καθημερινές δραστηριότητες που απαιτούν αναγνωστικές δεξιότητες. Δεν είναι αποτέλεσμα αισθητηριακής βλάβης (π.χ. μειωμένης όρασης). Η διαταραχή στην ανάγνωση, η οποία έχει επίσης ονομαστεί δυσλεξία, χαρακτηρίζεται από παραποιήσεις, αντικαταστάσεις, ή παραλείψεις στην «φωναχτή» ανάγνωση, ενώ και η σιωπηλή αλλά και η «φωναχτή» ανάγνωση χαρακτηρίζονται από μειωμένη ταχύτητα και λάθη στην κατανόηση.

Διαταραχή στα Μαθηματικά: Το βασικό χαρακτηριστικό της Διαταραχής στα Μαθηματικά είναι το σημαντικό έλλειμμα σε μαθηματικούς υπολογισμούς ή μαθηματικό συλλογισμό, σε σχέση με τα αναμενόμενα για την ηλικία, τη νοημοσύνη, και την παρεχόμενη εκπαίδευση. Η διαταραχή στα μαθηματικά επηρεάζει σημαντικά τη σχολική επίδοση και καθημερινές δραστηριότητες που απαιτούν μαθηματικές δεξιότητες. Δεν είναι αποτέλεσμα αισθητηριακής βλάβης. Η διαταραχή στα μαθηματικά, μπορεί να επηρεάζει ποικίλες δεξιότητες, συμπεριλαμβανομένων των «γλωσσικών» δεξιοτήτων (π.χ. την κατανόηση και τον ονοματισμό μαθηματικών όρων, πράξεων ή εννοιών και την αποκωδικοποίηση των γραπτών προβλημάτων σε μαθηματικό συμβολισμό), των «αντιληπτικών» δεξιοτήτων (π.χ. την αναγνώριση ή ανάγνωση των συμβόλων αριθμών ή προσήμων και την ομαδοποίηση αντικειμένων), των δεξιοτήτων «προσοχής» (π.χ. την ορθή αντιγραφή αριθμών ή σχημάτων, την μνήμη επιστροφής κρατούμενων ή δανεικών και την παρατήρηση των συμβόλων των πράξεων) και των «μαθηματικών» δεξιοτήτων (π.χ. την τήρηση ακολουθίας μαθηματικών βημάτων, τη μέτρηση αντικειμένων, την εκμάθηση πινάκων πολλαπλασιασμού).

Διαταραχή στη Γραπτή Έκφραση: Το βασικό χαρακτηριστικό της Διαταραχής στη Γραπτή Έκφραση είναι το σημαντικό έλλειμμα σε δεξιότητες γραφής, σε σχέση με τα αναμενόμενα για την ηλικία, τη νοημοσύνη, και την παρεχόμενη εκπαίδευση. Η διαταραχή στη γραπτή έκφραση επηρεάζει σημαντικά τη σχολική επίδοση και καθημερινές δραστηριότητες που απαιτούν δεξιότητες γραφής. Δεν είναι αποτέλεσμα αισθητηριακής βλάβης. Υπάρχει ένας συνδυασμός δυσκολιών στην ικανότητα σύνθεσης γραπτού κειμένου, οι οποίες δυσκολίες εκφράζονται με λάθη στη γραμματική ή τη στίξη μέσα στις προτάσεις, με φτωχή οργάνωση σε παραγράφους, με πολλαπλά λάθη ορθογραφίας και ιδιαίτερα «άσχημο» γραφικό χαρακτήρα. Η διάγνωση συνήθως δε δίνεται αν υπάρχουν μόνο ορθογραφικά λάθη ή άσχημος γραφικός χαρακτήρας, ενώ απουσιάζουν άλλες δυσκολίες στη γραπτή έκφραση. Σε σχέση με τις υπόλοιπες Διαταραχές στη Μάθηση, λιγότερα είναι γνωστά για τη διαταραχή της Γραπτής Έκφρασης, ιδιαίτερα όταν εμφανίζεται ανεξάρτητα από τη διαταραχή στην ανάγνωση. Εκτός από τεστ ορθογραφίας, τα σταθμισμένα τεστ σε αυτόν τον τομέα είναι λιγότερο αναπτυγμένα από τα τεστ σε δεξιότητες ανάγνωσης ή μαθηματικών και η εκτίμηση της διαταραχής σε γραφικές δεξιότητες πιθανόν να απαιτήσει μια σύγκριση μεταξύ εκτενών δειγμάτων σχολικής γραφής με την αναμενόμενη επίδοση, σε σχέση με την ηλικία και το δείκτη νοημοσύνης. Δοκιμασίες αντιγραφής, υπαγόρευσης και αυθόρμητης γραφής πιθανόν να είναι όλες απαραίτητες για την εδραίωση της ύπαρξης και της έντασης αυτής της διαταραχής.

Μαθησιακές Δυσκολίες, μη προσδιοριζόμενες διαφορετικά: Αυτή η κατηγορία διαταραχών μάθησης περιλαμβάνει εκείνες τις διαταραχές, που δεν πληρούν τα κριτήρια για κάποια Ειδική Μαθησιακή Διαταραχή. Μπορεί να περιέχει προβλήματα και στους τρεις τομείς (ανάγνωση, γραπτή έκφραση και μαθηματικά), ο συνδυασμός των οποίων επηρεάζει σημαντικά τη σχολική επίδοση, αν και η επίδοση σε τεστ που μετρούν τις δεξιότητες του ατόμου δεν είναι σημαντικά χαμηλότερα των αναμενόμενων, δεδομένης της ηλικίας, της νοημοσύνης και της παρεχόμενης εκπαίδευσης.

Οι διαφορές που παρατηρούνται στην κατηγοριοποίηση των ΜΔ από τα δύο πλέον διαδεδομένα διαγνωστικά εγχειρίδια παγκοσμίως, καθώς και η ύπαρξη επιπλέον όρων που έχουν επικρατήσει για να περιγράψουν ειδικές μορφές αυτών (π.χ. δυσορθογραφία, δυσγραφία, αλεξία, υπερλεξία κ.α.), είναι φυσικό να δυσχεραίνουν την κατανόηση του φαινομένου.

Στη συνέχεια, προς αποφυγή παρανοήσεων, θα χρησιμοποιείται ο όρος Μαθησιακές Δυσκολίες (ΜΔ), ο οποίος έχει επικρατήσει στον ελλαδικό χώρο, για να περιγράψει τις διαταραχές σε σχολικές δεξιότητες, όπως αυτές ορίζονται από το NJCLD, ενώ οι δυσκολίες, οι οποίες αναφέρονται σε κάποια συγκεκριμένη σχολική δεξιότητα, θα αναφέρονται ως Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) στη συγκεκριμένη δεξιότητα.

Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό, τα ακριβή ποσοστά εμφάνισης των ΜΔ γενικά, αλλά και των ΕΜΔ σε συγκεκριμένες δεξιότητες, δεν είναι δυνατό να παρουσιαστούν με αυστηρότητα, αφού αυτά εξαρτώνται άμεσα από τον ορισμό και από την κατηγοριοποίηση που χρησιμοποιεί ο κάθε ερευνητής, καθώς επίσης και ανάλογα με την ειδικότητά του.

Με ποιον τρόπο θα μπορούσε όμως, ένας ορισμός ή μια κατηγοριοποίηση των δυσκολιών, ανάλογα με τους σχολικούς τομείς που επηρεάζουν, να βοηθήσει έναν εκπαιδευτικό στην πράξη; Πως θα μπορούσε, για παράδειγμα, ένας μαθηματικός να προσαρμόσει τη διδασκαλία του, ώστε να προσφέρει όσο το δυνατόν περισσότερες ευκαιρίες στη μάθηση, σε έναν μαθητή για τον οποίο απλά γνωρίζει ότι παρουσιάζει ΕΜΔ σε κάποιον από τους παραπάνω τομείς; Κάτι τέτοιο, μάλλον θα απαιτούσε από τον εκπαιδευτικό βαθύτερη γνώση του φαινομένου, καθώς επίσης και των γνωστικών δυσλειτουργιών του ίδιου του μαθητή, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τις δυσκολίες του.

Μία προσπάθεια παρουσίασης των περισσότερο συνηθισμένων δυσλειτουργιών μεταξύ ατόμων με ΜΔ, γίνεται στην επόμενη παράγραφο. Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως κάθε άτομο με ΜΔ μπορεί να εμφανίζει μερικά, ή όλα από τα χαρακτηριστικά αυτά, καθένα από τα οποία σε διαφορετική πιθανόν ένταση.

1.2. Χαρακτηριστικά των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες

Μία προσπάθεια κατηγοριοποίησης των δυσλειτουργιών που φαίνεται να σχετίζονται με την εμφάνιση ΜΔ, γίνεται τα τελευταία χρόνια από τους ερευνητές που ασχολούνται με το σύνθετο αυτό ζήτημα. Ο στόχος φαίνεται να είναι πάντα ο ίδιος: η βαθύτερη και πιο ουσιαστική κατανόηση του φαινομένου.

Πολύ συχνά αναφέρονται σε σχετικές μελέτες χαρακτηριστικά των ατόμων με ΜΔ, όπως η μειωμένη ανάπτυξη κινήτρων, οι δυσκολίες στη συμπεριφορά, τις κοινωνικές σχέσεις και τη συναισθηματική εξέλιξη, (Αγαλιώτης, 2000, Παντελιάδου & Μπότσας, 2007, Geary, 2010). Τα χαρακτηριστικά αυτά, αν και συνδέονται στενά με την ύπαρξη ΜΔ, φαίνεται να είναι απόρροια αυτών και όχι συστατικό τους στοιχείο (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Παντελιάδου & Μπότσας, 2007, Geary, 2010). Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη και αυτές οι παράμετροι κατά την προσπάθεια προσαρμογής της διδασκαλίας, ώστε να εξυπηρετεί όσο το δυνατόν περισσότερο τις ανάγκες μαθητών με ΜΔ. Στην παρούσα εργασία πάντως, το βάρος δίνεται περισσότερο στις πιθανές γνωστικές δυσλειτουργίες των μαθητών και στον τρόπο αντιμετώπισης αυτών, στα πλαίσια μιας κοινής τάξης Λυκείου.

Μία ενδεικτική κατηγοριοποίηση των ελλειμμάτων των μαθητών με ΜΔ ως προς τη γνωστική τους ανάπτυξη και τις γνωστικές τους λειτουργίες, είναι η διάκρισή τους σε τομείς όπως η αντίληψη, η μνήμη, η προσοχή και η συγκέντρωση, η μεταγνώση, η αυτορρύθμιση και η γλώσσα (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007). Στον επόμενο πίνακα αναφέρονται επιγραμματικά οι δυσλειτουργίες αυτές, κατηγοριοποιημένες στους παραπάνω τομείς. Στη συνέχεια, αυτές περιγράφονται και αναλύονται, με μια ιδιαίτερη έμφαση στις επιδράσεις τους σε μαθηματικές διεργασίες.

<table>
<tr><td rowspan="3">Αντίληψη</td><td>Οπτική αντίληψη</td><td>• οπτική αντίληψη σχέσεων στο χώρο
o οπτική ολοκλήρωση
o οπτική διάκριση μορφής-πλαισίου
• οπτική διάκριση
• οπτική μνήμη
• οπτική ακολουθία</td></tr>
<tr><td>Ακουστική αντίληψη</td><td>• ακουστική διάκριση
• ακουστική μνήμη
• ακουστική ακολουθία</td></tr>
<tr><td colspan="2">• χωροχρονική οργάνωση</td></tr>
<tr><td>Μνήμη</td><td colspan="2">• μακροπρόθεσμη μνήμη
• βραχυπρόθεσμη μνήμη
• εργαζόμενη μνήμη</td></tr>
<tr><td>Προσοχή</td><td colspan="2">• συντηρούμενη προσοχή
• επιλεκτική προσοχή</td></tr>
<tr><td>Μεταγνώση</td><td colspan="2">• αναγνώριση των απαιτήσεων του έργου και του σχεδιασμού του
• επιλογή και εφαρμογή στρατηγικών
• παρακολούθηση και ρύθμιση της απόδοσης στο έργο
• αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του γνωστικού έργου</td></tr>
<tr><td>Αυτορρύθμιση</td><td colspan="2">• στοχοθεσία
• στρατηγικές σχεδιασμού, οργάνωσης, κωδικοποίησης και αποθήκευσης πληροφοριών
• έλεγχος των γνωστικών λειτουργιών και του θυμικού
• διαχείριση χρόνου
• αυτό-κινητοποίηση
• αξιολόγηση
• αναστοχασμός</td></tr>
<tr><td>Γλώσσα</td><td colspan="2">• προσληπτικός λόγος
• εκφραστικός λόγος
• φωνολογική επίγνωση
• αυτόματη ονομασία οπτικών συμβόλων</td></tr>
</table>

Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά των ατόμων με ΜΔ

1.2.1. *Αντίληψη*

«Αντίληψη είναι η ικανότητα του εγκεφάλου να λαμβάνει πληροφορίες – ερεθίσματα από το περιβάλλον, να τις ερμηνεύει, να τις οργανώνει, να τις αποθηκεύει και να τις χρησιμοποιεί κατάλληλα όταν χρειάζεται» (Hunt & Marshal, 2005).

Ειδικά για τους μαθητές με ΜΔ, οι αντιληπτικές λειτουργίες που φαίνεται να είναι περισσότερο ελλειμματικές, είναι εκείνες της επεξεργασίας οπτικών και ακουστικών ερεθισμάτων, καθώς επίσης και της χωροχρονικής οργάνωσης, αν και είναι σαφές από τον ορισμό των ΜΔ, ότι τα ελλείμματα αυτά δεν αποτελούν άμεσο αποτέλεσμα κάποιας αισθητηριακής βλάβης (όρασης ή ακοής στην προκειμένη περίπτωση).

Οπτική Αντίληψη: Στις δυσκολίες που παρουσιάζονται ως προς την οπτική αντίληψη, συγκαταλέγονται τα προβλήματα στην αντίληψη σχέσεων στο χώρο, στην οπτική διάκριση (οπτική ολοκλήρωση, οπτική διάκριση μορφής-πλαισίου), στην οπτική μνήμη και στην οπτική ακολουθία.

Αντίληψη σχέσεων στο χώρο: Τα άτομα με ελλειμματική αντίληψη των σχέσεων του χώρου μπορεί να παρουσιάζουν δυσκολίες στην οπτική αντίληψη αντικειμένων του χώρου, στη διάκριση δεξιού-αριστερού, στη διάκριση κατεύθυνσης, στην εκτίμηση απόστασης και ταχύτητας. Επίσης, μπορεί να εκδηλώσουν αδυναμίες στην κατασκευή και ερμηνεία χαρτών, διαγραμμάτων και πινάκων.

Οπτική διάκριση: Είναι η ικανότητα διάκρισης των αντικειμένων, με βάση κάποια χαρακτηριστικά τους. Αδυναμίες στην οπτική διάκριση ενδέχεται να επηρεάζουν τη διάκριση σχημάτων, χαρακτήρων ή λεπτομερειών αντικειμένων. Δυσκολία επίσης μπορεί να υπάρχει στον τομέα της οπτικής ολοκλήρωσης, δηλαδή στην αναγνώριση συμβόλων ή αντικειμένων από κάποιο μέρος τους, με αποτέλεσμα τα άτομα να δυσκολεύονται σε μαθηματικές έννοιες αφαιρετικού επιπέδου (Bley & Thornton, 1995). Η δυσκολία αυτή στην αφηρημένη σκέψη μπορεί να εκφράζεται με προβλήματα στην επισήμανση και διάκριση προτύπων, σχέσεων, γενικών χαρακτηριστικών και δομών οργάνωσης, σε πλαίσια συστημάτων, όπως το σύστημα των αριθμών. Επίσης, ενδέχεται να προκαλέσει δυσκολίες στη σύνδεση όρων με το περιεχόμενο και τις συμβολικές τους αναπαραστάσεις. Ένα άλλο είδος δυσκολιών που ενδέχεται να προκύψει από προβλήματα στην οπτική διάκριση και το οποίο σχετίζεται στενά με δυσκολίες στα μαθηματικά, είναι η οπτική <u>αντίληψη μορφής - πλαισίου</u>. Άτομα με δυσκολίες σε αυτόν το τομέα δεν μπορούν να επικεντρώσουν την προσοχή τους αποκλειστικά σε ένα συγκεκριμένο ερέθισμα, όταν αυτό παρουσιάζεται μέσα στα πλαίσια πολλών παρόμοιων ερεθισμάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να δυσκολεύονται να χειριστούν πληροφορίες που περιλαμβάνονται σε μια σελίδα γεμάτη με ασκήσεις και προβλήματα. Η παραπάνω δυσκολία μπορεί να εκφράζεται με ποικίλους τρόπους, όπως «χάσιμο» του σημείου στο οποίο εργάζονται, πέρασμα από άσκηση σε άσκηση χωρίς την ολοκλήρωση της επίλυσης κ.α. (Αγαλιώτης, 2000).

<u>Οπτική μνήμη:</u> Ελλείμματα στην οπτική μνήμη συνεπάγονται δυσκολίες στην αποθήκευση αλλά και ανάκληση πληροφοριών που προσλαμβάνονται οπτικά, τόσο ως προς την ακρίβεια όσο και ως προς την ταχύτητα αποθήκευσης και ανάκλησης.

<u>Οπτική ακολουθία:</u> Εμπεριέχει την λειτουργία αντίληψης ακολουθιών αντικειμένων, συμβόλων ή καταστάσεων, οι οποίες παρουσιάζονται οπτικά. Άτομα με δυσκολίες σε αυτόν τον τομέα δυσκολεύονται να επιλέξουν ένα κομμάτι που λείπει από μια σειρά συμβόλων, όπως τα γράμματα και οι αριθμοί, με αποτέλεσμα να αντιμεταθέτουν συχνά τα γράμματα των λέξεων ή τα ψηφία πολυψήφιων αριθμών (Bley & Thornton, 1995).

<u>Ακουστική Αντίληψη:</u> Στις δυσκολίες που παρουσιάζονται ως προς την ακουστική αντίληψη, συγκαταλέγονται τα προβλήματα στην ακουστική διάκριση (π.χ. διάκριση συγγενών ακουστικά φθόγγων όπως β-δ, φ-θ), την ακουστική μνήμη (αποθήκευση και ανάκληση πληροφοριών που προσλαμβάνονται ακουστικά) και την ακουστική ακολουθία (αντίληψη ακολουθιών ήχων). Οι πιο πρόσφατες έρευνες, πάντως τείνουν να υποστηρίξουν πως το φωνολογικό έλλειμμα των ατόμων με ΜΔ (βλ. 1.2.6. «Γλώσσα») είναι περισσότερο υπεύθυνο για τις δυσλειτουργίες που παλαιότερα αποδίδονταν σε έλλειμμα ακουστικής αντίληψης (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

<u>Χωροχρονική οργάνωση:</u> Δυσκολίες στην οργάνωση του χώρου και του χρόνου επηρεάζουν μαθηματικές λειτουργίες, όπως η εκτέλεση πράξεων και η επίλυση προβλημάτων, οι οποίες απαιτούν σειρές ενεργειών στο χώρο και το χρόνο και καλό χειρισμό εννοιών όπως: πάνω, κάτω, αριστερά, δεξιά, εμπρός, πίσω, πριν, μετά (Αγαλιώτης, 2000). Οι μαθητές με δυσκολίες στην οργάνωση του χώρου και του χρόνου μπορεί κατά τη διάρκεια μαθηματικών υπολογισμών να τοποθετήσουν αριθμούς σε λάθος στήλη, να μεταφέρουν λάθος ψηφίο στην επόμενη στήλη, ή να μην τηρούν τη σωστή ακολουθία ενεργειών κατά την εφαρμογή των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2000). Κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων μπορεί να δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τα απαιτούμενα βήματα στη σωστή σειρά, παρά το γεγονός ότι μπορεί να έχουν αναπτύξει σωστή στρατηγική επίλυσης του προβλήματος.

1.2.2. <u>Μνήμη</u>

«Μνήμη είναι η ικανότητα να κωδικοποιεί κάποιος, να επεξεργάζεται και να ανακαλεί πληροφορίες στις οποίες κάποια στιγμή είχε εκτεθεί» (Swanson, Cooney & McNamara, 2004).

Ένα από τα πιο πρόσφατα προτεινόμενα μοντέλα του μηχανισμού της μνήμης, διακρίνουν αυτή σε τρεις επιμέρους λειτουργίες, σχετικά ανεξάρτητες μεταξύ τους: τη βραχύχρονη μνήμη, τη μακρόχρονη μνήμη και τη μνήμη εργασίας (Sousa, 2001).

Συνοπτικά, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, οι πληροφορίες που φτάνουν στα αισθητηριακά όργανα, παραμένουν εκεί για ελάχιστο χρονικό διάστημα. Στη συνέχεια, κάποιες από αυτές ισχυροποιούνται, με τη συμβολή της λειτουργίας της προσοχής και «προχωρούν» στη βραχύχρονη μνήμη. Στο σημείο αυτό, κάποιο μέρος της πληροφορίας αποθηκεύεται για σύντομο χρονικό διάστημα και γίνεται η πρώτη επεξεργασία του, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική της εσωτερικής επανάληψης, που ισχυροποιεί την πληροφορία και επιμηκύνει το δυνατό χρόνο παραμονής της στη βραχύχρονη μνήμη. Η ποσότητα της πληροφορίας που μπορεί να αποθηκευτεί στη βραχύχρονη μνήμη είναι περιορισμένη.

Για να «προχωρήσουν» στη μακρόχρονη μνήμη, οι πληροφορίες που διατηρήθηκαν επεξεργάζονται και ενσωματώνονται στην ήδη υπάρχουσα γνώση είτε συμπληρώνοντάς τη, είτε καταργώντας την, εφόσον θεωρήθηκε λανθασμένη. Για την οργάνωση των πληροφοριών στη μακρόχρονη μνήμη και τη μεγιστοποίηση της χωρητικότητάς της (η οποία θεωρείται απεριόριστη), γίνεται χρήση οργανωτικών στρατηγικών.

Στο τελευταίο μέρος του μνημονικού μηχανισμού, το οποίο θεωρείται και ο πυρήνας του, τη μνήμη εργασίας, οι ήδη αποθηκευμένες πληροφορίες ανακαλούνται και παραμένουν ενεργές, ενώ ταυτόχρονα επεξεργάζονται και ενσωματώνονται νέες πληροφορίες.

Όσο αφορά στους μαθητές με ΜΔ, οι δυσκολίες τους στη βραχύχρονη και τη μακρόχρονη μνήμη φαίνεται να σχετίζονται με την αναποτελεσματική γλωσσική επεξεργασία σε έργα που την απαιτούν, την περιορισμένη χωρητικότητα της βραχύχρονης μνήμης, καθώς επίσης και τις φτωχές στρατηγικές εσωτερικής επανάληψης και οργάνωσης των πληροφοριών (Sousa, 2001). Τις παραπάνω δυσκολίες επιτείνουν η έλλειψη στρατηγικών αυτοελέγχου, η μειωμένη ικανότητα κινητοποίησης της αποθήκευσης ή της ανάκλησης, καθώς και η λιγότερο εξαντλητική αναζήτηση της πληροφορίας.

Τα προβλήματα βραχυπρόθεσμης μνήμης, πιθανόν να δυσκολεύουν τα παιδιά ακόμα και σε σχετικά απλά έργα, όπως η αντιγραφή ασκήσεων από τον πίνακα, ή ακόμη η εύρεση ενός αποτελέσματος με αριθμομηχανή.

Από την άλλη, τα προβλήματα μακροπρόθεσμης μνήμης έχουν ως αποτέλεσμα έναν πολύ αργό ρυθμό προόδου του μαθητή, ειδικότερα σε θέματα όπως η αυτοματοποιημένη χρήση των βασικών αριθμητικών δεδομένων, ή η τήρηση αλγορίθμων, παρά στην κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών (Αγαλιώτης, 2000, Impecoven-Lind & Foegen, 2010). Επίσης, αποτέλεσμα δυσκολιών στη μακρόχρονη μνήμη μπορεί να αποτελέσει η συχνή αποτυχία του μαθητή σε επαναληπτικά μαθήματα και εξετάσεις ή στην χρήση παλαιότερων γνώσεων με στόχο τη σύνθεση νέας (Αγαλιώτης, 2000, Impecoven-Lind & Foegen, 2010).

Στην εργαζόμενη μνήμη φαίνεται να υπάρχουν τα μεγαλύτερα και σημαντικότερα προβλήματα στο μνημονικό μηχανισμό των μαθητών με ΜΔ, οι οποίοι έχουν γενικά μικρότερη ικανότητα εργαζόμενης μνήμης. Η δυσκολία τους αυτή δεν εντοπίζεται μόνο στο πεδίο που έχουν τη μαθησιακή δυσκολία (ανάγνωση, γραφή ή μαθηματικά), αλλά φαίνεται να είναι γενικευμένη (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Ειδικότερα στον τομέα των μαθηματικών, τα ελλείμματα στη μνήμη εργασίας φαίνεται να είναι από τα χαρακτηριστικά που εμφανίζονται σταθερά σε σχετικές έρευνες, ως υπεύθυνα για αρκετές από τις δυσκολίες των μαθητών

(Geary, 2004, 2010). Τα προβλήματα που μπορεί να εμφανιστούν ποικίλουν μεταξύ διαφόρων ειδών λαθών κατά την εκτέλεση υπολογισμών, την τήρηση αλγορίθμων, αλλά και κατά την επίλυση προβλημάτων. Ο καθοριστικός ρόλος και οι επιπτώσεις των ελλειμμάτων στη μνήμη εργασίας, σε σχέση με την επίδοση στα Μαθηματικά, συζητάται εκτενέστερα στην επόμενη παράγραφο, περί ΕΜΔ στα Μαθηματικά.

1.2.3. Προσοχή

«Προσοχή είναι η ικανότητα του ατόμου να επικεντρώνεται στην πληροφορία και στο γνωστικό έργο που έχει μπροστά του, αγνοώντας δευτερεύοντα και άσχετα στοιχεία και ερεθίσματα» (Hunt & Marshall, 2005).

Ο παραπάνω ορισμός της «προσοχής» περιγράφει τη διεργασία που κάποιοι άλλοι επιστήμονες αναφέρουν ως «επιλεκτική προσοχή», σε αντίθεση με τον όρο «συντηρούμενη προσοχή», ο οποίος αναφέρεται στη διατήρηση της προσοχής αυτής στο χρόνο (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Τα προβλήματα προσοχής σε μαθητές με ΜΔ είναι συχνά και έντονα. Μάλιστα, πρόσφατες έρευνες αποκαλύπτουν μια στενή γονιδιακή σχέση της ΕΜΔ στην ανάγνωση (δυσλεξίας) με τη Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής - Υπερκινητικότητας (ΔΕΠ-Υ), η οποία εξηγεί σε κάποιο βαθμό τα ποσοστά συννοσυρότητας των δύο διαταραχών (Germanò, Gagliano & Curatolo, 2010).

Οι δυσκολίες στη συγκέντρωση των μαθητών με ΜΔ φαίνεται να σχετίζονται με την αργή επεξεργασία των πληροφοριών, την έλλειψη και την ανεπαρκή εφαρμογή στρατηγικών, καθώς επίσης και την έλλειψη κινήτρων (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007). Οι δυσκολίες στη συντηρούμενη προσοχή μπορεί να σχετίζονται και με τις δυσκολίες λεπτής κινητικότητας και οπτικοκινητικού συντονισμού, οι οποίες αυξάνουν τον απαιτούμενο χρόνο για την ολοκλήρωση των γραπτών εργασιών.

Η προσοχή αλληλεπιδρά έντονα με τη μνημονική ικανότητα και μαζί επηρεάζουν σημαντικά την επίδοση σε όλα τα ακαδημαϊκά έργα. Ειδικότερα στα Μαθηματικά, μαθητές με προβλήματα προσοχής μπορεί να δυσκολεύονται στην επιλογή των χρήσιμων δεδομένων, σε λεκτικά προβλήματα, πιθανότατα λόγω της μειωμένης ικανότητας να εμποδίσουν τις άσχετες πληροφορίες από το να «υπερχειλίσουν» τα γνωστικά τους συστήματα. Επίσης, μπορεί να δυσκολεύονται στη χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, στην τήρηση ακολουθιών, ή και στο να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία που περιλαμβάνει μοντελοποίηση της διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό, λόγω της δυσκολίας να ολοκληρώσουν κάθε βήμα χωριστά πριν προχωρήσουν στο επόμενο (Gagnon & Maccini, 2001, 2007, Geary, 2004, Impecoven-Lind & Foegen, 2010).

1.2.4. Μεταγνώση

«Μεταγνώση είναι η γνώση για τις γνωστικές λειτουργίες του ατόμου, η ενεργητική παρακολούθησή τους από τον ίδιο, καθώς και οι διορθωτικές ενέργειες στις οποίες προβαίνει όταν αντιμετωπίζει προβλήματα σε αυτές» (Flavell, 1979, Wong, 1991).

Τα κυριότερα προβλήματα που εμφανίζονται σε μαθητές με ΜΔ, σχετικά με τον τομέα της μεταγνώσης, αναφέρονται στη συνέχεια.

Αναγνώριση των απαιτήσεων του έργου και σχεδιασμός του: Οι μαθητές με ΜΔ γενικά δυσκολεύονται να προσδιορίσουν τις απαιτήσεις του έργου με το οποίο εμπλέκονται. Ως αποτέλεσμα, μπορεί να κάνουν λανθασμένες επιλογές, ή να το επεξεργάζονται με άκαμπτο και πολλές φορές τυχαίο τρόπο, που τους οδηγεί συχνά σε αποτυχία.

Οι αδυναμίες των μαθητών με ΜΔ στον σχεδιασμό ενός γνωστικού έργου πριν την εμπλοκή τους με αυτό, δεν τους επιτρέπει να το παρακολουθούν ενεργά και να το ρυθμίζουν ανάλογα.

Επιλογή και εφαρμογή στρατηγικών: Οι μεταγνωστικές στρατηγικές αναφέρονται στα κριτήρια επιλογής, στον έλεγχο και στην αναθεώρηση των γνωστικών στρατηγικών, τη μεταφορά της μάθησης από τη μια κατάσταση στην άλλη, τη γενίκευση (Αγαλιώτης, 2000).

Οι μαθητές με ΜΔ αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα στην εφαρμογή και χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών, δηλαδή ενεργειών και τεχνικών, που βοηθούν το άτομο να φέρει σε πέρας ένα γνωστικό έργο.

Τα προβλήματα αυτά οφείλονται στο γεγονός πως, αν και αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των στρατηγικών, δεν γνωρίζουν πού, πώς και γιατί να τις χρησιμοποιήσουν. Επιπλέον, το ρεπερτόριο στρατηγικών τους είναι περιορισμένο και συνήθως περιλαμβάνει στρατηγικές επιφανειακής επεξεργασίας που δεν αντιστοιχούν στην ηλικία και τις γνωστικές τους εμπειρίες. Τέλος, λόγω της μειωμένης μεταγνωστικής τους γνώσης, ακόμα και τις στρατηγικές εκείνες, τις οποίες γνωρίζουν, δεν είναι συνήθως σε θέση να τις χρησιμοποιήσουν με ευέλικτο τρόπο.

Παρακολούθηση και ρύθμιση της επίδοσης: Ένας ακόμα σημαντικός τομέας της μεταγνώσης, στον οποίο υπολείπονται οι μαθητές με ΜΔ, είναι αυτός της παρακολούθησης της πορείας μιας γνωστικής λειτουργίας, της ικανότητας ελέγχου αυτής από το ίδιο το άτομο και της κατάλληλης, διορθωτικής ρύθμισης της απόδοσης στο έργο, στην περίπτωση που παρουσιαστεί κάποιο πρόβλημα (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Οι δυσκολίες τους μπορεί να σχετίζονται με λανθασμένη αρχική κατανόηση των απαιτήσεων του δεδομένου έργου, με χρήση αναποτελεσματικών κριτηρίων ορθότητας της εργασίας τους, ή με αποτυχία κατά την εφαρμογή διορθωτικών στρατηγικών. Έτσι, μπορεί να οδηγηθούν είτε στο να μην αντιληφθούν κάποιο πιθανό πρόβλημα που θα προκύψει, είτε ακόμα στο να αντιληφθούν το πρόβλημα, αλλά λόγω ακατάλληλων διορθωτικών στρατηγικών να μην είναι σε θέση να το λύσουν. Στην τελευταία περίπτωση ενδέχεται να συνεχίσουν το έργο, χωρίς περεταίρω προσπάθεια επεξεργασίας του προβλήματος, ή ακόμα και σε περίπτωση που προσπαθήσουν να διορθώσουν το πρόβλημα, να οδηγηθούν σε αποτυχία, κατά την προσπάθειά τους αυτή.

Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων: Κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μιας γνωστικής λειτουργίας, οι μαθητές επαναξιολογούν τους αρχικούς στόχους και εξάγουν συμπεράσματα για τις διαδικασίες που ακολούθησαν. Ελέγχουν την εγκυρότητα και τη χρησιμότητα των πληροφοριών που αποκτήθηκαν και κρίνουν το κατά πόσο αυτές πρέπει να γενικευθούν.

Στην περίπτωση μαθητών με ΜΔ, η επιφανειακή επεξεργασία του γνωστικού έργου, ή η μη ολοκλήρωσή του, οδηγούν σε σημαντικά προβλήματα στο στάδιο της αξιολόγησης. Δεν αναλύουν περεταίρω τα αποτελέσματα του έργου και δεν αναστοχάζονται (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

1.2.5. Αυτορρύθμιση

«Αυτορρύθμιση είναι η διαδικασία με την οποία οι μαθητές ενεργοποιούν και διατηρούν γνωστικές λειτουργίες, συμπεριφορές και συναισθήματα που είναι συστηματικά προσανατολισμένα στην επίτευξη των στόχων τους (Schunk & Zimmerman, 1994). *Αναφέρεται στο βαθμό που τα άτομα είναι ενεργοί συμμέτοχοι της ίδιας της δικής τους μαθησιακής διαδικασίας ως προς τη μεταγνώση, τις πεποιθήσεις κινήτρων και τη συμπεριφορά.»*

Η αυτορρύθμιση, κατά τη μαθησιακή διαδικασία, εμπεριέχει λειτουργίες όπως η στοχοθεσία, οι στρατηγικές σχεδιασμού, οργάνωσης, κωδικοποίησης και αποθήκευσης πληροφοριών, η αυτοπαρακολούθηση και ο αυτοέλεγχος των γνωστικών λειτουργιών και του θυμικού, η αυτοδιαχείριση του χρόνου, η ανάπτυξη αυτό-κινητοποίησης (αυτό-αποτελεσματικότητα, προσδοκίες αποτελέσματος, εσωτερικό ενδιαφέρον και προσανατολισμός στον στόχο), η αυτοαξιολόγηση και ο αναστοχασμός (Παντελιάδου &Μπότσας, 2007).

Η δυσκολία αυτορρύθμισης της μαθησιακής συμπεριφοράς, που παρουσιάζουν οι μαθητές με ΜΔ, τους οδηγεί σε συχνές αποτυχίες, ενώ δημιουργεί περαιτέρω προβλήματα, μη επιτρέποντάς τους να λειτουργήσουν ανεξάρτητα και ενεργά κατά τη διαδικασία της μάθησης.

1.2.6. <u>Γλώσσα</u>

Υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός μαθητών με ΜΔ, οι οποίοι φαίνεται να αντιμετωπίζουν συνολικά προβλήματα γλωσσικής επεξεργασίας (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007). Ένας τρόπος κατηγοριοποίησης των αδυναμιών που μπορεί να εμφανιστούν σε σχέση με την επεξεργασία του λόγου, είναι σε δυσκολίες πρόσληψης ή έκφρασης αυτού.

Ειδικότερα για τους μαθητές με δυσκολίες προσληπτικού λόγου, η μαθηματική τους επίδοση μπορεί να επηρεάζεται από αδυναμίες στη σύνδεση μαθηματικών όρων με το περιεχόμενό τους, διάκριση των μαθηματικών όρων από την αντίστοιχη χρήση τους στον καθημερινό λόγο, ενώ οι δυσκολίες εκφραστικού λόγου δεν επιτρέπουν στο μαθητή να εκφράσει μέσω του λεκτικού κώδικα αυτό που κατανοεί (Αγαλιώτης, 2000). Ο ρόλος της γλώσσας στη μάθηση των Μαθηματικών, σχετίζεται επίσης με τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν μαθηματικές έννοιες και μπορεί να επηρεάζει την επίδοση σε υπολογισμούς, λεκτικά προβλήματα, οργάνωση των δεδομένων που αποθηκεύονται και ανακαλούνται από τη μνήμη. Επιπροσθέτως, οι απαιτήσεις στη γλωσσική επεξεργασία που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, αυξάνονται όσο οι μαθητές φοιτούν σε μεγαλύτερη τάξη (Impecoven-Lind & Foegen, 2010).

Από την άλλη, οι μαθητές με ΜΔ στο γραπτό λόγο (ανάγνωση και γραφή), κατηγοριοποιούνται σε τρεις ομάδες, ανάλογα με το είδος του ελλείμματος που κυριαρχεί, ως προς την επεξεργασία της γλώσσας: α) τους μαθητές με φτωχή φωνολογική επίγνωση, δηλαδή δυσκολία στην αναγνώριση των διακριτών μερών του προφορικού λόγου και στην ικανότητα χειρισμού αυτών των φωνολογικών μερών, β) τους μαθητές με χαμηλή ταχύτητα ονομασίας οπτικών συμβόλων, όπως τα γράμματα, οι αριθμοί, τα σχήματα και γ) τους μαθητές με διπλό έλλειμμα, δηλαδή τους μαθητές εκείνους στους οποίους τα δύο παραπάνω ελλείμματα συνυπάρχουν και λειτουργούν ανεξάρτητα (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Όπως φαίνεται από την παραπάνω ανάλυση, το πλήθος των πιθανών δυσλειτουργιών, που μπορεί να εμφανίζονται σε μαθητές με ΜΔ είναι τέτοιο, ώστε μια πλήρης περιγραφή αυτών και των επιπτώσεών τους στις επιδόσεις τους σε σχολικά έργα γενικότερα, θα ήταν εκτός του θέματος της συγκεκριμένης εργασίας, η οποία πραγματεύεται το αντικείμενο των Μαθηματικών. Είναι πάντως ήδη φανερό, το εύρος και η ποικιλομορφία των προβλημάτων που μπορεί να αντιμετωπίζει ένας μαθητής με ΜΔ στο γνωστικό αντικείμενο που ενδιαφέρει τη μελέτη αυτή.

Επιπλέον, ένα μέρος του μαθητικού πληθυσμού της συγκεκριμένης κατηγορίας, αντιμετωπίζει ακόμα σοβαρότερες δυσκολίες με το μάθημα των Μαθηματικών. Το κομμάτι αυτό του μαθητικού πληθυσμού, δηλαδή οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, είναι το θέμα της επόμενης παραγράφου.

1.3. Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά

Για τους μαθητές με ΜΔ διαφόρων τύπων, το πρόβλημα με το μάθημα των Μαθηματικών είναι ευρύ και σημαντικό, όπως δείχνουν οι σχετικές έρευνες (Fuchs & Fuchs, 2001). Μάλιστα, τα πιο πρόσφατα δεδομένα αναφέρουν ποσοστά μαθητών με ΕΜΔ στα Μαθηματικά περίπου στο 7%, ενώ τα ποσοστά μαθητών με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά (συμπεριλαμβανομένων και των ΕΜΔ σε αυτόν τον τομέα), ανέρχεται στο 10%, επί του γενικού μαθητικού πληθυσμού (Geary, 2010)[1]. Τα παραπάνω ποσοστά δε συσχετίζονται με πιθανές συνυπάρχουσες δυσκολίες σε άλλα αντικείμενα, όπως για παράδειγμα στην ανάγνωση.

Η ίδια η φύση των Μαθηματικών πιθανόν να αποτελεί αιτία των μεγάλων ποσοστών αποτυχίας των μαθητών στο συγκεκριμένο σχολικό αντικείμενο: από τη μία απαιτείται από αυτούς η κατάκτηση και εφαρμογή μεγάλης ποικιλίας εννοιών, ενώ από την άλλη η μαθηματική γνώση είναι αθροιστική, δηλαδή η κατάκτηση νέων γνώσεων απαιτεί εις βάθος κατανόηση προηγούμενων εννοιών και δεξιοτήτων (Montague, 2007). Μάλιστα, μία από τις σημαντικές διαφορές των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, σε σχέση με τις ΕΜΔ στην Ανάγνωση, είναι ότι οι πρώτες πιθανόν να γίνονται ακόμα πιο έντονες, όσο ο μαθητής μεγαλώνει. Η

[1] Τα ποσοστά αυτά προκύπτουν, αν μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά θεωρηθούν εκείνοι, των οποίων τα αποτελέσματα σε δοκιμασίες στα Μαθηματικά που περιλαμβάνονται σε ψυχομετρικούς ελέγχους, τους κατατάσσουν στο 10ο εκατοστημόριο επίδοσης μεταξύ συνομηλίκων, για δύο ή και περισσότερα συναπτά έτη. Μαθητές χαμηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά, είναι εκείνοι των οποίων τα αντίστοιχα αποτελέσματα τους κατατάσσουν στο 25ο εκατοστημόριο επίδοσης μεταξύ συνομηλίκων, για δύο ή και περισσότερα συναπτά έτη. Δηλαδή, στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται οι μαθητές που επιτυγχάνουν επίδοση μικρότερη από την επίδοση του 90% των συνομηλίκων τους, ενώ στη δεύτερη, εκείνοι που επιτυγχάνουν επίδοση μικρότερη από την επίδοση του 75% των συνομηλίκων τους στην ίδια δοκιμασία και των οποίων οι χαμηλές επιδόσεις επιμένουν στο χρόνο. Μέση φυσιολογική επίδοση θεωρείται το 50ο εκατοστημόριο. Και στις δύο περιπτώσεις μαθητών, ο γενικός δείκτης νοημοσύνης θεωρείται ότι είναι τουλάχιστον στα κατώτερα φυσιολογικά επίπεδα, δηλαδή τουλάχιστον 85 (Geary, 2010).

διαφορά αυτή φαίνεται να οφείλεται στην παραπάνω διαπίστωση (Montague, 2007).

Επιπλέον, όπως ήδη προέκυψε από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, συγκεκριμένες κατηγορίες δυσκολιών, οι οποίες πιθανόν να εμφανίζονται και σε μαθητές με άλλου είδους ΜΔ, εκτός από τις ΕΜΔ στα Μαθηματικά, φαίνεται να ασκούν ιδιαίτερα αρνητική επίδραση στη μαθηματική συμπεριφορά και επίδοση.

Από την άλλη, το ίδιο το φαινόμενο των ΕΜΔ στα Μαθηματικά είναι αρκετά πολύπλοκο. Όπως και τα υπόλοιπα είδη ΜΔ, οι ΕΜΔ στα Μαθηματικά μπορεί να εμφανίζονται με ποικίλες μορφές, σε διάφορους συνδυασμούς και μπορεί να επηρεάζουν την επίδοση με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (Αγαλιώτης, 2000).

Σε αυτήν την παράγραφο, θα γίνει μια προσπάθεια σύνοψης των τελευταίων ερευνητικών δεδομένων σχετικά με τα χαρακτηριστικά εκείνα των μαθητών με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, τα οποία φαίνεται να είναι κυρίαρχης σημασίας για την εμφάνιση του φαινομένου. Επίσης, θα παρουσιαστεί η πιο πρόσφατη προσπάθεια κατηγοριοποίησης των τύπων ΕΜΔ στα Μαθηματικά από τον Geary (Geary, 2010). Τέλος, θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε δύο διακριτές περιπτώσεις ΕΜΔ στα Μαθηματικά, οι οποίες συζητώνται ευρέως στους σχετικούς ερευνητικούς χώρους, τη δυσαριθμησία και τις Μη Λεκτικές Μαθησιακές Δυσκολίες.

1.3.1. *Χαρακτηριστικά των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών στα Μαθηματικά*

Σε μια πρόσφατη προσπάθεια κατάρτισης ενός γνωστικού προφίλ των μαθητών που ανήκουν στην κατηγορία των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, αναλύεται από τον Geary (Geary, 2010), η σχέση των δυσκολιών τους με τους γενικότερους τομείς της νοημοσύνης, της μνήμης εργασίας, και της ταχύτητας επεξεργασίας, αλλά και τους ειδικότερους τομείς των αριθμών, της αρίθμησης και της αριθμητικής. Όσον αφορά τους πρώτους τρεις, γενικότερους γνωστικούς τομείς, αναφέρονται επιγραμματικά τα εξής:

Νοημοσύνη: Όσον αφορά στον πρώτο παράγοντα, τη νοημοσύνη, μια σύνοψη των αποτελεσμάτων σχετικών ερευνών, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν και φαίνεται να συνδέεται με κάποιον ασαφή μέχρι στιγμής τρόπο (οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά τείνουν να έχουν νοημοσύνη στα χαμηλά φυσιολογικά επίπεδα, 90-95), δε φαίνεται να είναι κυρίαρχης σημασίας για τις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών αυτής της κατηγορίας.

Μνήμη Εργασίας: Η σχέση μεταξύ της μνήμης εργασίας και της επίδοσης στα μαθηματικά, αλλά και σε συγκεκριμένες μαθηματικές γνωστικές διεργασίες είναι σαφώς εδραιωμένη πλέον, στους χώρους των ερευνητών του θέματος (Αγαλιώτης, 2000, Geary, 2004, Impecoven-Lind & Foegen 2010). Μάλιστα, αναλύοντας το μηχανισμό της μνήμης εργασίας σε τρία επιμέρους συστήματα, έχει επιτευχθεί η συσχέτιση αυτών με συγκεκριμένες μαθηματικές διεργασίες, αν και μέχρι σήμερα δεν έχει ολοκληρωθεί η έρευνα σε αυτόν τον τομέα.

Όπως αναφέρθηκε ήδη (βλ. 1.2.2. Μνήμη), η μνήμη εργασίας είναι η ικανότητα διατήρησης ενεργών κάποιων νοητικών αναπαραστάσεων, ενώ ταυτόχρονα το άτομο εκτελεί άλλες νοητικές διεργασίες. Τα τρία επιμέρους συστήματα που αναφέρονται ως κεντρικής σημασίας για το επίπεδο της μνήμης εργασίας είναι:

Κεντρική εκτελεστική λειτουργία (central executive): Αποτελεί το σύστημα το οποίο ελέγχει την αναπαράσταση των πληροφοριών, ενώ η ίδια ελέγχεται από την προσοχή. Όσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα της κεντρικής εκτελεστικής λειτουργίας, τόσο υψηλότερες είναι οι επιδόσεις σε μετρήσεις γενικής μαθηματικής επίδοσης.

Φωνολογική επανάληψη (phonological loop): Αποτελεί το ένα από τα δύο βασικά συστήματα αναπαράστασης των πληροφοριών. Μπορεί να περιγραφεί ως η διαρκής εσωτερική επανάληψη λεκτικά μιας πληροφορίας, μέχρι τη στιγμή που θα χρειαστεί να γίνει χρήση της. Φαίνεται να είναι σημαντική σε διεργασίες που απαιτούν χειρισμό αριθμών, όπως στην αρίθμηση, στην επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων και πιθανόν να σχετίζεται με την ανάκληση αριθμητικών δεδομένων.

Οπτικοχωρική πρόχειρη σημείωση (visuospatial sketch pad): Αποτελεί το δεύτερο βασικό σύστημα αναπαράστασης των πληροφοριών. Μοιάζει με τη φωνολογική επανάληψη, αλλά σε αυτήν την περίπτωση, η διατήρηση της πληροφορίας επιτυγχάνεται με νοερή σχηματική της αναπαράσταση. Φαίνεται να εμπλέκεται σε ευρύτερο αριθμό μαθηματικών τομέων από ότι η φωνολογική επανάληψη, αλλά δεν έχουν διευκρινιστεί ακόμα κάποια σημεία στον ακριβή τρόπο επίδρασης αυτού του συστήματος.

Ταχύτητα Επεξεργασίας: Σχετικά με τον τρίτο παράγοντα, την ταχύτητα επεξεργασίας, αυτή φαίνεται να είναι περισσότερο καθοριστικής σημασίας από τη νοημοσύνη, όμως η σχέση της με τη μνήμη εργασίας περιπλέκει τα αποτελέσματα των ερευνών. Από τη μία, δυσκολίες στη μνήμη εργασίας μπορεί να επιφέρουν μειωμένες ταχύτητες αντίδρασης σε συγκεκριμένες δοκιμασίες και επομένως χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας. Από την άλλη, χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας, όπως αργοί ρυθμοί λήψης αποφάσεων και γνωστικής επεξεργασίας των πληροφοριών μπορεί να μειώσει την ικανότητα της κεντρικής εκτελεστικής λειτουργίας, άρα και την ικανότητα στη μνήμη εργασίας.

Για τους μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, πάντως, οι χαμηλές ταχύτητες επεξεργασίας των πληροφοριών φαίνεται να λειτουργούν σε κάποιους τομείς ανεξάρτητα της νοημοσύνης και της μνήμης εργασίας και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις αποτελούν διακριτό και ίσως και καλύτερο στοιχείο πρόβλεψης των χαμηλών επιδόσεων. Από την άλλη, σύμφωνα με πρόσφατη έρευνα (Geary, 2010), αν και η χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας των πληροφοριών είναι συνήθης μεταξύ μαθητών με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, καταδεικνύεται ως κάποια μορφή αναπτυξιακής καθυστέρησης, παρά ως επίμονο και μόνιμο έλλειμμα των παιδιών αυτής της κατηγορίας.

Σχετικά τώρα με τους τρεις ειδικότερους τομείς, των αριθμών, της αρίθμησης και της αριθμητικής, αναφέρονται τα παρακάτω ευρήματα:

Αριθμοί: Στον τομέα αυτό, οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, μπορεί να παρουσιάζουν ελλείμματα που προκύπτουν από αδυναμίες σε δύο θεμελιώδη συστήματα αίσθησης των αριθμών. Το πρώτο σύστημα περιλαμβάνει την αναπαράσταση και έμμεση κατανόηση της ακριβούς ποσότητας μικρής συλλογής αντικειμένων και συμβόλων. Το δεύτερο σύστημα αναφέρεται στην αναπαράσταση μιας προσέγγισης του μεγέθους μεγαλύτερων ποσοτήτων. Οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά φαίνεται να υπολείπονται περισσότερο στο δεύτερο σύστημα, αυτό της προσέγγισης του μεγέθους, σε σχέση με τους συνομηλίκους τους τυπικής ανάπτυξης.

Αρίθμηση: Οι έρευνες στον τομέα αυτό έχουν επικεντρωθεί στην ικανότητα παιδιών του δημοτικού σχολείου να διακρίνουν «εσφαλμένες» μετρήσεις αντικειμένων. Τα αποτελέσματα είναι μεικτά, όμως το έλλειμμα που φαίνεται να εμφανίζεται σταθερά σε μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, είναι στην μη-αναγνώριση του λάθους στη μέτρηση, όταν αυτό συνέβη στην αρχή της αρίθμησης (π.χ. διπλή αρίθμηση του πρώτου αντικειμένου, ή παράλειψη της αρίθμησης κάποιου από τα αρχικά αντικείμενα). Η συχνότητα με την οποία οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά φαίνεται να «ξεχνάνε» τις εσφαλμένες αριθμήσεις, πιθανόν να δημιουργήσει προβλήματα κατά τη χρήση της αρίθμησης για επίλυση αριθμητικών προβλημάτων.

Αριθμητική: Η χρήση της αρίθμησης έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αναπαραστάσεων βασικών αριθμητικών δεδομένων στη μακρόχρονη μνήμη. Αυτά τα δεδομένα, κατά τη διάρκεια αριθμητικών προβλημάτων, ανακαλούνται είτε άμεσα, είτε με χρήση της διάσπασης του προβλήματος σε επιμέρους, τα οποία μπορούν να απαντηθούν με την ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων που έχουν αποθηκευτεί. Οι μαθητές με ΕΜΔ στα Μαθηματικά φαίνεται ότι χρησιμοποιούν τις παραπάνω μεθόδους, όπως και οι συνομήλικοί τους, τυπικής ανάπτυξης. Παρουσιάζουν όμως δυσκολίες σε δύο τομείς, οι οποίες τους οδηγούν σε συχνά λάθη κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων.

Η πρώτη δυσκολία εντοπίζεται στην εκτέλεση διαδικασιών, όπως αλγορίθμων, όπου παρατηρούνται πολύ συχνά λάθη. Μάλιστα, ακόμα και στις περιπτώσεις μαθητών που τα λάθη τους δεν είναι συχνά, παρατηρείται χρήση αναπτυξιακά ανώριμων στρατηγικών, όπως η χρήση των δακτύλων.

Η δεύτερη δυσκολία σχετίζεται με την αναπαράσταση των βασικών αριθμητικών δεδομένων στη μακρόχρονη μνήμη και την ανάκληση αυτών. Τρεις διαφορετικοί μηχανισμοί, οι οποίοι ευθύνονται για αυτές τις δυσκολίες έχουν προταθεί κατά το παρελθόν. Ο πρώτος συνίσταται στην δυσκολία σχηματισμού λεκτικής αναπαράστασης των δεδομένων στη μακρόχρονη μνήμη, ο δεύτερος στην ικανότητα προσέγγισης μεγεθών (ο οποίος αναφέρθηκε ήδη) και ο τρίτος στην ικανότητα παρεμπόδισης άσχετων συνδέσεων από την είσοδό τους στη μνήμη εργασίας, κατά τη διάρκεια της ανάκλησης των δεδομένων από τη μακρόχρονη μνήμη. Ο τελευταίος μηχανισμός, ο οποίος συνδέεται και με τη λειτουργία της μνήμης εργασίας, αναφέρεται ως καθοριστικής σημασίας σε πολλές περιπτώσεις.

Όσον αφορά στην κατάρτιση μιας κατηγοριοποίησης των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, αξιόλογες προσπάθειες (Αγαλιώτης, 2000) έχουν ξεκινήσει από τον ίδιο ερευνητή από το 1994 (Geary, 1994), με τελευταία συμπλήρωση των αποτελεσμάτων και ενσωμάτωση των πιο πρόσφατων δεδομένων μια δεκαετία αργότερα, το 2004 (Geary, 2004). Στην προσπάθεια αυτή σκιαγραφούνται τρεις τύποι ΕΜΔ στα Μαθηματικά, ως προς τα γνωστικά, αναπτυξιακά, νευρο-ψυχολογικά και γενετικά χαρακτηριστικά των ατόμων που υπάγονται σε καθένα από αυτούς, ενώ μελετάται χωριστά η σχέση καθενός από τους τρεις τύπους με τις ΕΜΔ στην Ανάγνωση. Όπως σημειώνει ο ίδιος ο ερευνητής, η κατηγοριοποίηση που προτείνει είναι μια προσπάθεια ταξινόμησης των μέχρι στιγμής διαγνωστικών ευρημάτων κατά τη διερεύνηση του φαινομένου. Μονιμότερες και ακριβέστερες προσεγγίσεις των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, απαιτούν σύμφωνα με τον ίδιο περισσότερη έρευνα, προκειμένου να διαλευκανθούν πλήρως οι σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων που εμπλέκονται (Geary, 1994, 2004).

Στον επόμενο πίνακα, αναφέρονται οι τρεις προτεινόμενοι υπο-τύποι ΕΜΔ στα Μαθηματικά, όπως αυτοί παρουσιάστηκαν αρχικά το 1994 και διαμορφώθηκαν έπειτα από προσθήκες νέων δεδομένων το 2004. Αναφέρονται επίσης επιγραμματικά τα γνωστικά και αναπτυξιακά χαρακτηριστικά που τους διακρίνουν, καθώς επίσης και η σχέση που φαίνεται να έχουν με ΕΜΔ στην Ανάγνωση. Τα χαρακτηριστικά στον νευρο-ψυχολογικό και γενετικό τομέα παραλείφθηκαν σκόπιμα, καθώς κρίθηκε ότι εμπίπτουν σε αντικείμενα που απέχουν από το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας.

1ος Τύπος: Βασική δυσκολία στη χρήση διαδικασιών (όπως στρατηγικών και αλγορίθμων)		
Γνωστικά χαρακτηριστικά: Σχετικά συχνή χρήση αναπτυξιακά ανώριμων διαδικασιών (π.χ. χρονοβόρων στρατηγικών μέτρησης) Συχνά λάθη κατά την εκτέλεση διαδικασιών Φτωχή κατανόηση των εννοιών που υπόκεινται της χρήσης των διαδικασιών Δυσκολίες στην τήρηση της ακολουθίας πολλαπλών βημάτων σε σύνθετες διαδικασίες	**Αναπτυξιακά χαρακτηριστικά:** Φαίνεται σε πολλές περιπτώσεις να εκφράζει μια καθυστέρηση στην ανάπτυξη. (Η επίδοση είναι όμοια με την επίδοση μικρότερων παιδιών τυπικής ανάπτυξης και βελτιώνεται από τάξη σε τάξη).	**Σχέση με αναγνωστικές ΜΔ:** Ασαφής
2ος Τύπος: Βασική δυσκολία στη σημασιολογική μνήμη		
Γνωστικά χαρακτηριστικά: Δυσκολίες στην ανάκληση μαθηματικών δεδομένων (τα δεδομένα δύσκολα απομνημονεύονται και συνήθως υπολογίζονται με βοηθήματα). Συχνά λάθη στα δεδομένα που ανακαλούνται Τα λάθη ανάκλησης στην αριθμητική είναι συχνά σχετικά με τους αριθμούς που περιέχονται στο πρόβλημα Η ταχύτητα ανάκλησης είναι μη συστηματική	**Αναπτυξιακά χαρακτηριστικά:** Φαίνεται να εκφράζει μια διαφοροποίηση στην ανάπτυξη. (Η επίδοση είναι ποιοτικά διαφορετική από αυτή των παιδιών τυπικής ανάπτυξης και υπάρχει μικρή βελτίωση από τάξη σε τάξη).	**Σχέση με αναγνωστικές ΜΔ:** Φαίνεται να συνυπάρχει με αναγνωστικές δυσκολίες στη φωνολογική επίγνωση
3ος Τύπος: Βασική δυσκολία στην οπτικο-χωρική αντίληψη		
Γνωστικά χαρακτηριστικά: Δυσκολίες σε χωρική αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων και άλλων ειδών μαθηματικών πληροφοριών και σχέσεων, όπως η τοποθέτηση αριθμών σε στήλες ή ο χειρισμός πολυψήφιων αριθμών που αποτελούνται από τα ίδια ψηφία Συχνή παρανόηση χωρικά αναπαριστώμενων πληροφοριών	**Αναπτυξιακά χαρακτηριστικά:** Ασαφή	**Σχέση με αναγνωστικές ΜΔ:** Δε φαίνεται να σχετίζεται

Πίνακας 3: Τύποι ΜΔ στα Μαθηματικά (πηγή: Geary, 2004)

Παρά τις σχετικές προσπάθειες, πάντως, μέχρι σήμερα δεν έχει γίνει δυνατή η κατάρτιση ενός λεπτομερειακού και γενικά αποδεκτού καταλόγου γνωστικών και άλλων χαρακτηριστικών της συγκεκριμένης ομάδας του μαθητικού πληθυσμού, που να μπορεί να υποστηριχθεί ότι ισχύει για όλα τα μέλη της.

Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι λίγες είναι οι εργασίες, οι οποίες επικεντρώνονται σε παρεμβάσεις αποτελεσματικές για τα διάφορα είδη ΕΜΔ στα Μαθηματικά. Αυτό το ερευνητικό «κενό» μπορεί να συνδεθεί με βεβαιότητα και με το ευρέως αναγνωρισμένο γεγονός, ότι οι ΕΜΔ στα Μαθηματικά έχουν μελετηθεί κατά πολύ λιγότερο από άλλους τομείς ΜΔ, ιδιαίτερα τις ΕΜΔ στην Ανάγνωση (Ives & Hoy, 2003).

Η υπάρχουσα γνώση, πάντως, επιτρέπει κάποιες τεκμηριωμένες διδακτικές επιλογές, αφού έχουν γίνει προσπάθειες να μελετηθεί ο τρόπος, με τον οποίο διάφορα χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στις έρευνες με σχετική σταθερότητα, επηρεάζουν τη μαθησιακή ικανότητα των παιδιών με ΕΜΔ στα Μαθηματικά, σε διάφορους γνωστικούς τομείς (Αγαλιώτης, 2000).

1.3.2. Δυσαριθμησία

Μία από τις περισσότερο γνωστές μορφές ΕΜΔ στα Μαθηματικά, αποτελεί η ΕΜΔ στην Αριθμητική, η δυσαριθμησία, μια πάθηση η οποία μπορεί να εμφανιστεί ως αναπτυξιακή διαταραχή ή να είναι επίκτητη, αποτέλεσμα βλάβης του δεξιού ημισφαιρίου του εγκεφάλου. Μάλιστα το φαινόμενο της επίκτητης δυσαριθμησίας, έχει συνεισφέρει αρκετά στη μελέτη των δυσλειτουργιών του εγκεφάλου που σχετίζονται με μαθηματικές διεργασίες και κατ’ επέκταση με τις ΕΜΔ στα Μαθηματικά (Geary, 2010).

Τα άτομα με δυσαριθμησία παρουσιάζουν πολύ συγκεκριμένες ελλείψεις στους αριθμούς, την αρίθμηση ή την αριθμητική, οι οποίες θεωρείται ότι οφείλονται σε διαταραχή νευρολογικής φύσης (Geary, 2010).

Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί ότι η δυσαριθμησία (όπως και η δυσλεξία) είναι σύνδρομο, δηλαδή σύνολο χαρακτηριστικών που συνυπάρχουν. Επομένως, για να καταταχθεί ένα άτομο στη σχετική κατηγορία, δεν αρκεί να ανιχνευθεί μία μόνο από τις δυσκολίες που περιλαμβάνονται στις περιγραφές του όρου. (Αγαλιώτης, 2000).

Οι δυσκολίες των ατόμων με δυσαριθμησία σε συγκεκριμένες μαθηματικές λειτουργίες, έχουν ως άμεσο αποτέλεσμα την ιδιαίτερα χαμηλή τους επίδοση στα σχολικά μαθηματικά και εντάσσουν συνήθως τα άτομα αυτά στην κατηγορία ατόμων με ΕΜΔ στα Μαθηματικά (Geary, 2010). Η δυσαριθμησία, δηλαδή, αποτελεί υποκατηγορία των ΕΜΔ στα Μαθηματικά και δεν ταυτίζεται με αυτές.

1.3.3. Μη Λεκτικές Μαθησιακές Δυσκολίες

Ο όρος Μη Λεκτικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΜΛΜΔ), υπάρχει στη βιβλιογραφία από τις αρχές μελέτης του φαινομένου των ΜΔ. Αρχικά αναφερόταν στους μαθητές εκείνους, οι οποίοι, αν και είχαν φυσιολογική γενική νοημοσύνη, παρουσίαζαν σημαντική απόκλιση στη λεκτική και στην πρακτική νοημοσύνη τους, με τη δεύτερη να βρίσκεται σε αρκετά χαμηλότερα επίπεδα, ενώ η πρώτη δε φαινόταν να παρουσιάζει δυσκολίες. Στην πορεία, οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το φαινόμενο των ΜΔ, εστίασαν περισσότερο στις συγκεκριμένες γνωστικές λειτουργίες που παρουσιάζονταν αδύναμες στην εκάστοτε περίπτωση, με αποτέλεσμα ένας τόσο γενικός όρος, όπως οι ΜΛΜΔ, να παραμεριστεί για κάποιο διάστημα.

Η επαναφορά του όρου πραγματοποιήθηκε λόγω παρατηρήσεων κατά τη διάρκεια σειράς μελετών από τον Rourke και τους συνεργάτες του. Αρχικός στόχος της έρευνάς τους ήταν να επισημάνουν συγκεκριμένα πρότυπα εγκεφαλικής οργάνωσης και λειτουργίας σε παιδιά με ΕΜΔ και χαμηλή επίδοση στην αριθμητική, καθώς επίσης και σύνδεσης των προτύπων αυτών με συγκεκριμένο μαθησιακό προφίλ (Αγαλιώτης, 2000). Για το σκοπό αυτό, αφού εξέτασαν τις διαφορές μεταξύ μαθητών που είχαν όμοιες δυσκολίες στα Μαθηματικά, αλλά οι ικανότητες ανάγνωσης και ορθογραφίας ήταν ποικίλες, περιέγραψαν κάποια πρότυπα μαθηματικών λαθών στην ομάδα μαθητών με δυσκολίες μόνο στον τομέα των Μαθηματικών (Donaldson & Zager, 2010).

Το προφίλ αυτής της ομάδας μαθητών συνδέθηκε με συγκεκριμένο νευρολογικό σύνδρομο, αποτέλεσμα βλάβης στη λευκή ουσία του δεξιού ημισφαιρίου του εγκεφάλου, το οποίο ονομάστηκε «σύνδρομο των Μη Λεκτικών Μαθησιακών Δυσκολιών» (ΜΛΜΔ) (Αγαλιώτης, 2000). Γίνεται ήδη προφανές από τα παραπάνω, ότι οι ΕΜΔ στα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα περισσότερο εξέχοντα χαρακτηριστικά των ΜΛΜΔ (Donaldson & Zager, 2010).Το σύνδρομο θεωρείται ότι μπορεί να έχει αναπτυξιακή, αλλά και επίκτητη μορφή και επηρεάζει:

<u>Την κινητικότητα:</u> Σε αυτήν την κατηγορία μπορεί να εμφανίζονται δυσκολίες συντονισμού, προβλήματα ισορροπίας, δυσκολίες στις λεπτές κινήσεις, σε γραφοκινητικές δεξιότητες, με αποτέλεσμα κακογραμμένους και δυσδιάκριτους αριθμούς, που οδηγούν σε σύγχυση και λάθη (Αγαλιώτης, 2000, Donaldson & Zager, 2010).

<u>Την οπτικό - χωρική οργάνωση:</u> Περιλαμβάνονται δυσκολίες στην αντίληψη σχέσεων στο χώρο, καθώς επίσης και στην οπτική ανάκληση. Αποτέλεσμα των δυσκολιών αυτών στη μαθηματική συμπεριφορά, αποτελούν λάθη όπως τοποθέτηση αριθμών σε λάθος στήλη, λάθη στην κατεύθυνση εκτέλεσης της πράξης, σύγχυση συμβόλων πράξεων, παράλειψη υποδιαστολής,

δυσκολία στην τήρηση βημάτων αλγορίθμου (Αγαλιώτης, 2000, Donaldson & Zager, 2010).

Την κοινωνική προσαρμογή: Οι μαθητές με ΜΛΜΔ συχνά έχουν δυσκολίες στην κοινωνική τους αντίληψη και κρίση, παρουσιάζουν δυσκολίες με την αξιοποίηση μη λεκτικών κωδίκων, όπως η γλώσσα του σώματος και οι αλληλεπιδράσεις τους τείνουν να χαρακτηριστούν από υψηλά επίπεδα επαναλαμβανόμενων λεκτικών συζητήσεων (Αγαλιώτης, 2000). Έχουν καταγραφεί επίσης προβλήματα προσαρμογής σε νέες καταστάσεις, καθώς επίσης και ελλείμματα στην κατανόηση αφηρημένων πληροφοριών. Σαν αποτέλεσμα, παρουσιάζονται δυσκολίες επίλυσης νέων προβλημάτων και δυσκολίες στο σχηματισμό νέων εννοιών (Donaldson & Zager, 2010).

Αυτά τα ελλείμματα υπονομεύουν ουσιωδώς τις δυνατότητες των μαθητών να κατακτήσουν νέες δεξιότητες και έννοιες στα Μαθηματικά. Ιδιαίτερα η δυσκολία κατανόησης αφηρημένων πληροφοριών, πιθανόν να επηρεάζει την κατάκτηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένης της αριθμητικής, της θεσιακής αξίας των ψηφίων και της εκτίμησης (Donaldson & Zager, 2010).

Οι μαθηματικές προκλήσεις των ΜΛΜΔ απαιτούν επίμονη και συνειδητή επίγνωση από το μέρος του εκπαιδευτικού, αλλά είναι υποκείμενες σε παρεμβάσεις, με χρήση γνωστικών στρατηγικών μάθησης (cognitive strategies) (Donaldson & Zager, 2010), οι οποίες θα μελετηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.4. Μαθησιακές Δυσκολίες και Άλγεβρα

Ειδικότερα στον τομέα της Άλγεβρας, μια προσπάθεια καταγραφής των κυρίαρχων ελλειμμάτων που εμφανίζονται σε παιδιά με ΜΔ (συμπεριλαμβανομένων των ΕΜΔ στα Μαθηματικά), παρουσιάστηκε πρόσφατα από τις Impecoven-Lind και Foegen (2010). Τα ελλείμματα αυτά κατηγοριοποιούνται στους τομείς των απαιτούμενων γνωστικών διεργασιών, του απαιτούμενου γνωστικού υποβάθρου και των συγκεκριμένων αλγεβρικών εννοιών που φαίνεται να προβληματίζουν τους μαθητές με ΜΔ.

<table>
<tr><td>Γνωστικές διεργασίες</td><td colspan="2">• Προσοχή
• Μνήμη
• Γλώσσα
• Μεταγνώση</td></tr>
<tr><td>Υπόβαθρο ως προς το περιεχόμενο</td><td>• Ακέραιοι αριθμοί
• Κλάσματα
• Συγκεκριμένες περιοχές της γεωμετρίας</td><td>• Ονομαστική γνώση
• Διαδικαστική γνώση
• Εννοιολογική γνώση</td></tr>
<tr><td>Συγκεκριμένες αλγεβρικές έννοιες</td><td colspan="2">• Μεταβλητές – έννοια
• Μεταβλητές – χειρισμός
• Συμβολισμοί και συμβάσεις</td></tr>
</table>

Πίνακας 4: Κατηγορίες δυσκολιών στην Άλγεβρα (πηγή: Impecoven-Lind & Foegen, 2010)

α) Στην πρώτη κατηγορία, αυτή των απαιτούμενων γνωστικών διεργασιών, περιλαμβάνονται οι δυσκολίες στην προσοχή, τη μνήμη, τη γλώσσα και τη μεταγνώση, τα χαρακτηριστικά των οποίων, καθώς και οι επιπτώσεις των στις μαθηματικές και ειδικότερα στις αλγεβρικές διεργασίες, αναλύθηκαν ήδη εκτενώς σε προηγούμενη παράγραφο (βλ. §1.2.).

β) Στη δεύτερη κατηγορία, αυτή του υποβάθρου ως προς το περιεχόμενο, προτείνονται τρεις συγκεκριμένες περιοχές, τις οποίες οι μαθητές θεωρείται ότι πρέπει να έχουν κατακτήσει πλήρως, πριν την ενασχόλησή τους με μαθήματα Άλγεβρας. Κατάκτηση των περιοχών αυτών, εννοείται η γνώση σε τρία επίπεδα:

Σε επίπεδο ονομαστικής γνώσης (declarative knowledge), δηλαδή οι πληροφορίες να ανακαλούνται από τη μνήμη χωρίς δισταγμό, με άνεση και αυτοματοποιημένα

Σε επίπεδο γνώσης διαδικασιών (procedural knowledge), δηλαδή οι μαθητές να γνωρίζουν το πώς να επιτύχουν κάτι, όπως να λύσουν προβλήματα, εντός του συγκεκριμένου πεδίου δεξιοτήτων

Σε επίπεδο εννοιολογικής γνώσης (conceptual knowledge), δηλαδή οι έννοιες να έχουν αναπαρασταθεί νοητικά, ώστε να επιτρέπεται η γενική γνώση και κατανόηση

Οι συγκεκριμένες περιοχές, οι οποίες αναφέρονται ως προαπαιτούμενες για την ενασχόληση με την Άλγεβρα, είναι:

Ακέραιοι αριθμοί: Προϋποτίθεται άνεση στο χειρισμό αυτών, η οποία περιλαμβάνει τη γνώση της θεσιακής αξίας των ψηφίων, της σύνθεσης και αποσύνθεσης αυτών, των βασικών πράξεων, της αντιμεταθετικής, προσεταιριστικής και επιμεριστικής ιδιότητας.

Οι μαθητές με ΜΔ δυσκολεύονται να αποκτήσουν άνεση στο χειρισμό ακεραίων, γεγονός που γίνεται από πολύ νωρίς εμφανές, από τις δυσκολίες τους στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μέτρησης (Geary, 2004).

Κλάσματα: Προϋποτίθεται άνεση τόσο στις πράξεις μεταξύ κλασμάτων, όσο και στην έννοια του κλάσματος. Περιλαμβάνονται δεξιότητες όπως η τοποθέτηση κλάσματος σε άξονα, η εκτίμηση μεγέθους, η αναπαράσταση και σύγκριση κλασμάτων, δεκαδικών αριθμών και ποσοστών.

Τα κλάσματα, οι δεκαδικοί αριθμοί και τα ποσοστά αποτελούν πρόκληση για πολλούς μαθητές, ανεξαρτήτως της ύπαρξης ΜΔ, ενώ οι δυσκολίες τους σε αυτούς τους τομείς συχνά επιμένουν κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και μετά την ενηλικίωσή τους. Δυσκολίες στη μνήμη εργασίας, καθώς και στη σχέση μέρους – όλου, πιθανόν να επιβαρύνουν ακόμα περισσότερο την ανάπτυξη των δεξιοτήτων σε αυτόν τον τομέα, των οποίων η έλλειψη μπορεί να οδηγήσει με τη σειρά της σε δυσκολίες κατάκτησης και άλλων σχετικών εννοιών, όπως οι αναλογίες.

<u>Γεωμετρία:</u> Προϋποτίθεται άνεση σε συγκεκριμένες περιοχές, όπως την ομοιότητα τριγώνων, την αξιοποίηση ιδιοτήτων και τη χρήση τύπων για τον υπολογισμό της περιμέτρου, της επιφάνειας και του όγκου δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.

Η κατάκτηση γεωμετρικών δεξιοτήτων, αποτελεί επίσης πρόκληση για πολλούς μαθητές, με ή χωρίς ΜΔ. Για παράδειγμα, έννοιες, όπως η ομοιότητα τριγώνων, οι οποίες σχετίζονται με την κατανόηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας, δυσκολεύουν αρκετά τους μαθητές και στον τομέα της Άλγεβρας αλλά και σε αυτόν της Γεωμετρίας.

γ) Στην τρίτη κατηγορία πιθανών ελλειμμάτων, που υπονομεύουν την κατάκτηση αλγεβρικών δεξιοτήτων, συγκαταλέγονται συγκεκριμένες αλγεβρικές έννοιες, οι οποίες βάσει ερευνών, αποτελούν τις περισσότερο προβληματικές, αφού φαίνεται να σχετίζονται με τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών.

<u>Έννοια της μεταβλητής:</u> Έπειτα από ερμηνεία των περισσότερο συνηθισμένων λαθών των μαθητών σε διάφορες περιοχές της Άλγεβρας, οι

ερευνητές καταλήγουν πως πολλά από αυτά οφείλονται σε λανθασμένη νοηματοδότηση των μεταβλητών, οι οποίες αναπαρίστανται ως γράμματα. Παρατηρήθηκε πως, όταν στην ανατιθέμενη εργασία εμπλέκονταν μεταβλητές, πολλοί μαθητές, για να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους, ανέπτυσσαν στρατηγικές, όπως την προσπάθεια αγνόησής αυτών, ή την προσπάθεια να «μαντέψουν» την τιμή αυτών. Συνήθως, αντιμετωπίζουν τη μεταβλητή ως ένα συγκεκριμένο άγνωστο αριθμό, μην αναγνωρίζοντας ότι μπορεί να αναπαριστά μια σειρά από τιμές, ή μια σχέση μεταξύ μεταβαλλόμενων αριθμών.

Χειρισμός μεταβλητών: Σε ένα δεύτερο επίπεδο, παρατηρήθηκε πως αρκετά από τα λάθη των μαθητών, σχετίζονταν με το χειρισμό μεταβλητών, οι οποίες αναπαρίσταντο με γράμματα. Τα λάθη αυτά φαίνεται να συνδέονται με την εκτέλεση πράξεων με χρήση άτυπων, διαισθητικών μεθόδων και όχι με τις τυπικές μεθόδους, που είναι αναγκαίες για την επίλυση ανώτερου επιπέδου αλγεβρικών προβλημάτων.

Συμβολισμοί και συμβάσεις της Άλγεβρας: Πολλά από τα λάθη των μαθητών, φαίνεται να συνδέονται με συγκεκριμένους συμβολισμούς και συμβάσεις που γίνονται κατά την έκφραση «αλγεβρικών προτάσεων». Για παράδειγμα, συχνά δεν κατανοούν το τι αντιπροσωπεύουν οι συντελεστές, ή το πώς να εργαστούν με αρνητικούς αριθμούς, εφαρμόζουν λανθασμένα την επιμεριστική ιδιότητα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να παρερμηνεύσουν σύμβολα, όπως αυτό της ισότητας.

2. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

Γνωρίζοντας αδρά τα χαρακτηριστικά των μαθητών με ΜΔ, το επόμενο ζητούμενο τον εκπαιδευτικό είναι το πώς μπορεί να αξιοποιήσει αυτή του τη γνώση, ώστε να προσφέρει στους μαθητές του κατά το δυνατόν περισσότερες ευκαιρίες στη μάθηση. Κατά πόσο μπορεί να «παρακάμψει» τις αδυναμίες τους και να εκμεταλλευτεί τα «δυνατά σημεία» τους, ώστε να δημιουργήσει ένα περιβάλλον μάθησης το οποίο θα τους επιτρέψει να αναδείξουν τις πραγματικές δυνατότητές τους. Αναζητά, λοιπόν, κατάλληλες μεθόδους και στρατηγικές διδασκαλίας, οι οποίες ενδείκνυνται, ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση σύστασης της τάξης, αλλά και με το αντικείμενο, το οποίο καλείται να διδάξει.

Όσο αφορά στο αντικείμενο που ενδιαφέρει την παρούσα μελέτη, την Άλγεβρα, αξίζει να σημειωθεί πως οι μέθοδοι και οι στρατηγικές που προτείνονται από τις υπάρχουσες μελέτες, στην συντριπτική τους πλειοψηφία σχετίζονται με την έννοια του αριθμού και της αρίθμησης. Τα τελευταία χρόνια η βιβλιογραφία έχει εμπλουτιστεί σημαντικά από προτάσεις για την αντιμετώπιση δυσκολιών κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007), όμως και σε αυτόν τον τομέα, οι περισσότερες προτάσεις αναφέρονται σε επίπεδο προβλημάτων αριθμητικής (Ives & Hoy, 2003). Γενικότερα, μια αδρή μελέτη του πλήθους των εργασιών που αφορούν στην εκπαιδευτική αντιμετώπιση ΜΔ στα Μαθηματικά, αποκαλύπτει την μειωμένη ενασχόληση των ερευνητών με τα θέματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σε σχέση με αυτά της πρωτοβάθμιας. Επιπλέον, ακόμα και οι μελέτες που εστιάζουν στην εφαρμογή συγκεκριμένων μεθόδων και στρατηγικών στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αναφέρονται συνήθως σε ηλικίες μαθητών και συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής, τα οποία καθιστούν σαφές το ότι πρόκειται για τη βαθμίδα του Γυμνασίου, στην οποία πραγματοποιείται η ουσιαστική μετάβαση από αριθμητικές σε αλγεβρικές διεργασίες. Οι μέθοδοι αυτές δε φαίνεται να επιδέχονται άμεσης εφαρμογής σε σημαντικούς τομείς της λυκειακής Άλγεβρας (Ives & Hoy, 2003), η οποία εστιάζει στην θεωρητική προσέγγιση του αντικειμένου και την καλλιέργεια της «μαθηματικής σκέψης» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007).

Προκύπτουν λοιπόν τα εξής εύλογα ερωτήματα: Πώς μπορούν οι υπάρχουσες γνώσεις να βελτιώσουν τη διδασκαλία της Άλγεβρας σε μαθητές με ΜΔ επιπέδου Λυκείου; Τι είδους προσεγγίσεις της διδασκαλίας βοηθούν τους μαθητές με ΜΔ να αναπτύξουν μαθηματικές δεξιότητες υψηλότερου επιπέδου; Σύμφωνα με τους Hoy και Ives (Ives & Hoy, 2003), ακόμα και ακαδημαϊκού επιπέδου κείμενα για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, τα οποία μελετούν τις προσεγγίσεις παρέμβασης για μαθητές με ΜΔ, δεν αναφέρουν καν αυτές τις «μαθηματικές δεξιότητες υψηλότερου επιπέδου», πόσο μάλλον συστάσεις για τη διδασκαλία τους.

Σε αυτό το δεύτερο κεφάλαιο, θα γίνει μια προσπάθεια παρουσίασης κάποιων από τις προτεινόμενες μεθόδους και τεχνικές διδασκαλίας, οι οποίες σύμφωνα με τις (λιγοστές) σχετικές έρευνες, αλλά και την κρίση της συγγραφέως, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν είτε αυτούσιες, είτε έπειτα από κατάλληλη προσαρμογή τους, σε ένα μάθημα Άλγεβρας Λυκείου.

Βέβαια, κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη από τους εκπαιδευτικούς, ορισμένες γενικότερες, βασικές αρχές αποτελεσματικής διδασκαλίας, οι οποίες αναφέρονται ως βοηθητικές για τους μαθητές με ΜΔ διαφόρων ηλικιών. Οι αρχές αυτές είναι καλό να διέπουν το σύνολο της διδασκαλίας και να ενσωματώνωνται σε αυτήν όσο το δυνατόν περισσότερο. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα σχετικών μελετών, κάποιες τέτοιες αποτελεσματικές εκπαιδευτικές διδακτικές πρακτικές στα Μαθηματικά, για μαθητές με ΜΔ, περιλαμβάνουν παραλλαγές των γενικών αρχών που παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα (Gagnon & Maccini, 2001, Mercer & Miller 1992).

- Ξεκάθαροι στόχοι
- Ισχυρό σύστημα κινήτρων
- Συχνές ανασκοπήσεις
- Συγκεκριμένες ερωτήσεις
- Διαρκής έλεγχος της προόδου των μαθητών
- Παροχή καθοδηγούμενης και ανεξάρτητης εξάσκησης
- Αναλυτική (διορθωτική και θετική) ανατροφοδότηση
- Διδασκαλία προαπαιτούμενων δεξιοτήτων, ορισμών και στρατηγικών
- Χρήση οργανωτών
- Ενσωμάτωση οπτικών μέσων – συγκεκριμένου υλικού
- Εκπαίδευση στην εννοιολογική γνώση

Πίνακας 5: Βασικές αρχές αποτελεσματικής διδασκαλίας

Ειδικότερα, πάντως, για τους τομείς της οργάνωσης, της κατανόησης και της αυτορρύθμισης, οι οποίοι αναφέρθηκαν ήδη ως βαρύνουσας σημασίας για τις περιπτώσεις μαθητών με ΜΔ, προτείνονται από τη σχετική βιβλιογραφία πιο συγκεκριμένες τεχνικές διδασκαλίας , «βοηθήματα» για τον εκπαιδευτικό. Στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου, αναφέρονται επιλεκτικά κάποιες από αυτές. Η επιλογή των παρουσιαζόμενων τεχνικών έγινε από τη συγγραφέα, με κριτήριο την δυνατότητα χρήσης αυτών σε ένα μάθημα Άλγεβρας Λυκείου. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στη χρήση της κλιμακωτής διδακτικής ακολουθίας (βλ. §2.1.2.), αν και φαίνεται δύσκολη η ενσωμάτωσή της αυτούσια, όπως προτείνεται από τους ίδιους τους ερευνητές, στην περίπτωση του Λυκείου, ωστόσο κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστεί, για να γίνει στη συνέχεια προσαρμογή της στην περίπτωση διδασκαλίας περισσότερο αφηρημένων εννοιών και διαδικασιών.

Στη συνέχεια αναφέρονται επιγραμματικά κάποιες από τις προτεινόμενες μεθόδους διδασκαλίας, η αναφορά στις οποίες κρίθηκε αναγκαία για τρεις λόγους: Πρώτον, ο κάθε εκπαιδευτικός είναι προτιμότερο να έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τη μέθοδο που «ταιριάζει» περισσότερο, τόσο στο προσωπικό του στυλ διδασκαλίας, όσο και στο προσωπικό στυλ μάθησης των μαθητών του. Δεύτερον, ανάλογα με τις δυνατότητες της τάξης, να μπορεί να επιλέξει την εφαρμογή εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας, όπως τις διάφορες μορφές της διδασκαλίας μέσω συνομηλίκων, εκμεταλλευόμενος κατά το δυνατόν περισσότερες από τις δυνατότητες που του προσφέρει κάθε μια από αυτές. Ο τρίτος λόγος και περισσότερο ουσιαστικός, κατά τη γνώμη της συγγραφέως, είναι ο εμπλουτισμός του διδακτικού ρεπερτορίου του εκάστοτε εκπαιδευτικού, ο οποίος μπορεί να προσαρμόσει ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης και του αντικειμένου, τον τρόπο διδασκαλίας του, βασιζόμενος στις αρχές κάποιας από τις αναφερόμενες μεθόδους, χωρίς κατ’ ανάγκη να ακολουθεί πιστά το θεωρητικό της μοντέλο.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται επιγραμματικά τα στάδια πρόληψης – παρέμβασης, σε επίπεδο τάξης, όπως αυτά έχουν διαμορφωθεί από τις σχετικές έρευνες. Στην ενότητα αυτή μελετώνται οι γενικότεροι τρόποι παρέμβασης, που μπορούν να εφαρμοστούν, ανάλογα με τη σοβαρότητα των δυσκολιών των μαθητών, καθώς επίσης και κάποιες βασικές αρχές, τις οποίες οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν κατά νου, κατά την εφαρμογή αυτών.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως, ενώ τα εμπειρικά στοιχεία για όλες τις τεχνικές που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο έχουν δείξει να είναι γενικά αποτελεσματικές, οι περισσότερες σχετικές μελέτες δεν κάνουν διάκριση μεταξύ των συμμετεχόντων, με βάση τις ενδοατομικές διαφορές τους σε λεκτικές και χωρικές δεξιότητες. Η αλληλεπίδραση, δηλαδή, ικανοτήτων - αντιμετώπισης δεν έχει διερευνηθεί ακόμα σε ικανοποιητικό βαθμό (Ives & Hoy, 2003).

Μια τέτοιου είδους διερεύνηση θα ήταν ουσιαστικής σημασίας, αφού μαθητές με διαφορετικού τύπου αδυναμίες, χρήζουν διαφορετικής προσέγγισης της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό. Για παράδειγμα, θα ήταν χρήσιμο στον εκπαιδευτικό να γνωρίζει πως οι μαθητές με δυσκολίες που σχετίζονται με τη γλώσσα και ελλείμματα ανάγνωσης, επωφελούνται περισσότερο από εκπαιδευτικές προσεγγίσεις που βασίζονται στη χρήση των περισσότερο αναπτυγμένων οπτικο - χωρικών και οπτικο - αντιληπτικών δεξιοτήτων τους, όπως π.χ. συμβαίνει με τη διδακτική ακολουθία CRA. Από την άλλη, οι μαθητές με μη - λεκτικού τύπου μαθηματικές δυσκολίες θα επωφελούνταν περισσότερο από λεκτικές - προφορικές προσεγγίσεις, όπως τη λεκτική αποστήθιση, την άμεση διδασκαλία, τη λεκτική διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών (Ives & Hoy, 2003).

2.1. Τεχνικές Διδασκαλίας

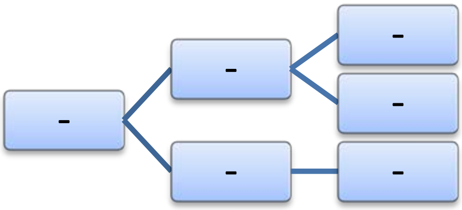
2.1.1. *Γραφικοί Οργανωτές*

Οι γραφικοί οργανωτές (ΓΟ) είναι οπτικά «εργαλεία», οπτικές και γραφικές αναπαραστάσεις, όπως τα διαγράμματα και οι πίνακες, που απεικονίζουν γεγονότα, ιδέες, έννοιες και τις σχέσεις μεταξύ αυτών. Μερικές φορές αναφέρονται και ως εννοιολογικοί χάρτες, γνωστικοί χάρτες, γνωστικοί οργανωτές, εννοιολογικά διαγράμματα κτλ. Η χρήση των κατά τη διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει με ποικίλους τρόπους τη διαδικασία της μάθησης, ανάλογα με το είδος του οργανωτή, με τον επιλεγμένο τρόπο εισαγωγής του από τον εκπαιδευτικό, με το είδος των πληροφοριών που περιέχει.

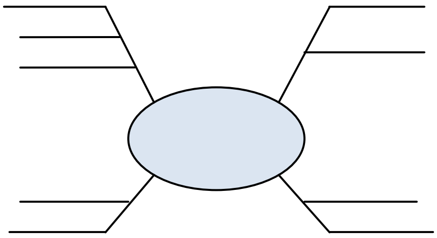
Οι ΓΟ μπορεί να εμφανίζονται με πολλές διαφορετικές μορφές, κάθε μία από τις οποίες κατάλληλη για την οργάνωση συγκεκριμένου είδους πληροφοριών, π.χ. ένα «αραχνοειδές διάγραμμα» είναι περισσότερο κατάλληλο για την οργάνωση πληροφοριών που δεν είναι απόλυτα ιεραρχημένες, σε σχέση με ένα «δικτυακό δέντρο» (βλ. εικ. 1, 2). Επίσης, οι ΓΟ μπορεί να παρουσιάζονται πριν (προ - οργανωτές) ή και μετά (μετα - οργανωτές) από την επεξεργασία του υλικού προς μάθηση, ωφελώντας με τον τρόπο αυτό τη διαδικασία της μάθησης σε διαφορετικά επίπεδα κάθε φορά. Ένας προ-οργανωτής, για παράδειγμα, μπορεί να συνεισφέρει στην επίγνωση εκ των προτέρων, από μέρους του μαθητή, των ειδικότερων στόχων του μαθήματος, ενώ ένας μετα-οργανωτής, στη συσχέτιση των μαθημένων γνώσεων και την οργάνωσή τους σε σχήματα, που προωθούν την αποθήκευσή τους με τάξη στη μακρόχρονη μνήμη.

Η επιλογή των οργανωτών, ο τρόπος χρήσης των, καθώς επίσης και το χρονικό σημείο εισαγωγής των, μπορεί να γίνεται από τον εκπαιδευτικό, με βάση το ρεπερτόριο στρατηγικών που γνωρίζει ο ίδιος και αποφασίζοντας κάθε φορά ποιοι είναι εκείνοι οι οργανωτές, που είναι καταλληλότεροι για την εκάστοτε εργασία.

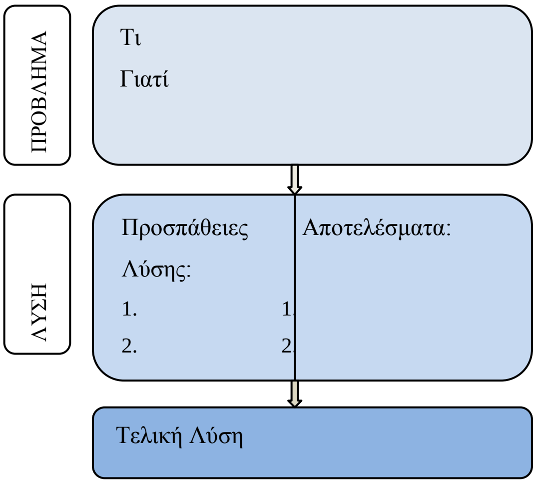
Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ΓΟ, από τη μεγάλη γκάμα τους (Hall & Strangman, 2002), φαίνονται στις επόμενες εικόνες:



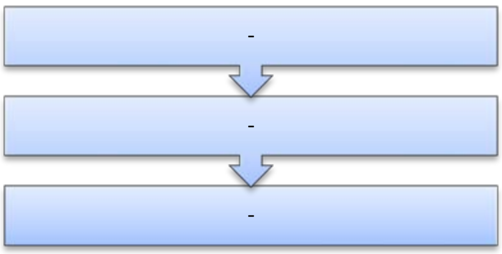
Εικόνα 1: Δικτυακά δέντρα (network trees) - βοηθούν στην ιεραρχημένη αναπαράσταση εννοιών-πληροφοριών



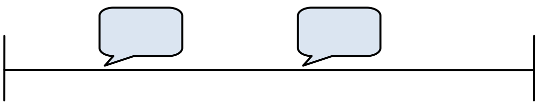
Εικόνα 2: Αραχνοειδείς χάρτες (spider maps) - βοηθούν στην οργάνωση εννοιών, οι οποίες δεν είναι απόλυτα ιεραρχημένες



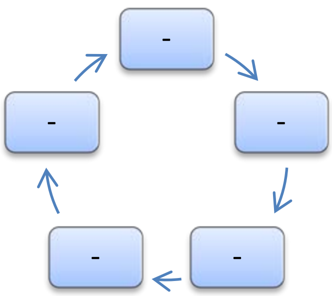
Εικόνα 3: Οργανωτές Προβλήματος-Λύσης - βοηθούν στη σύγκριση διαφορετικών λύσεων σε κάποιο πρόβλημα



Εικόνα 4: Αλυσίδες ακολουθίας γεγονότων: οργανώνουν γεγονότα, ως προς τη σειρά εμφάνισής τους



Εικόνα 5: Συνεχείς άξονες - βοηθούν στην οργάνωση εννοιών, ως προς μια διάσταση της μορφής λίγο-πολύ, χαμηλά-ψηλά, κτλ.



Εικόνα 6: Κυκλικοί χάρτες - βοηθούν στην οργάνωση ακολουθίας γεγονότων, η οποία δεν έχει σαφή αρχή και τέλος

Κατά την ενσωμάτωση ΓΟ στη διδασκαλία κάποιου αντικειμένου, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει κατά νου πως ο ΓΟ μπορεί να αποτελέσει συστατικό στοιχείο αποτελεσματικής διδασκαλίας, αλλά σε καμία περίπτωση υποκατάστατο της ίδιας της διδασκαλίας. Επίσης, αν και ένας ΓΟ μπορεί να αποτελέσει μορφή οπτικού μνημονικού βοηθήματος, ο κύριος στόχος του είναι να αναδείξει τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του, παρά τα ίδια τα στοιχεία. Έπεται από την τελευταία σημείωση, ότι η ενσωμάτωση ενός οργανωτή προϋποθέτει από μέρους του εκπαιδευτικού προσεκτικό σχεδιασμό, ο οποίος γίνεται βάσει των επόμενων αρχών (Ives & Hoy, 2003):

- Οι σχεδιαζόμενοι οργανωτές πρέπει να σχετίζονται σαφώς με τις σχέσεις που θα διδαχτούν
- Οι σημαντικές σχέσεις και έννοιες πρέπει να συνδέονται άμεσα με τον οργανωτή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (απλή παρουσίαση του οργανωτή στους μαθητές, χωρίς τη σχετική σύνδεση δεν αρκεί)
- Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξασφαλίσουν ότι πράγματι εστιάζουν στην εννοιολογική γνώση των παρουσιαζόμενων (μέσω του ΓΟ) στοιχείων, παρά στις ικανότητες των μαθητών απλά να τηρούν αλγορίθμους και να ανασύρουν από τη μνήμη τους γεγονότα

Τα οφέλη των ΓΟ έχουν υποστηριχθεί από πολυάριθμες έρευνες που αφορούν σε μαθητές με και χωρίς ΜΔ, σε βαθμίδες από το νηπιαγωγείο έως και την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αν και οι περισσότερες τέτοιες έρευνες αφορούν στη βελτίωση της κατανόησης κειμένου, τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών για τα Μαθηματικά είναι εξίσου σημαντικά. Επιπλέον, αντίθετα με άλλες τεχνικές διδασκαλίας, όπως το χειρισμό συγκεκριμένου υλικού, ή τη δημιουργία σχημάτων για την επίλυση προβλημάτων, οι οποίες έχουν δημιουργήσει προβληματισμούς σχετικά με τη δυνατότητα άμεσης εφαρμογής τους σε συγκεκριμένους τομείς της Άλγεβρας, οι ΓΟ διαφόρων τύπων έχουν υποστηριχθεί ως βοηθητικοί και για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών ανώτερου επιπέδου (Ives & Hoy, 2003).

Ενώ η κατάκτηση βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων συχνά περιλαμβάνει την αποστήθιση γεγονότων, οι υψηλότερου επιπέδου δεξιότητες σχετίζονται περισσότερο με έννοιες, πρότυπα και διαδικασίες. Έτσι, κυρίαρχος στόχος σε υψηλότερου επιπέδου μαθηματικά δεν είναι η απλή απομνημόνευση στοιχείων όπως αριθμών, εκφράσεων και εξισώσεων, αλλά οι μαθητές να κατανοούν και να αναγνωρίζουν τα πρότυπα που συνδέουν αυτά τα στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι η επιλεγόμενη γραφική παρουσίαση, η χωρική τοποθέτηση των παρουσιαζόμενων μαθηματικών στοιχείων, πρέπει να υποστηρίζει τις ίδιες τις πληροφορίες που πρέπει να μαθευτούν. Μια τέτοια δυνατότητα παρέχει η χρήση ΓΟ, όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω, με έμφαση στις σχέσεις μεταξύ των εμπλεκομένων πληροφοριών, παρά στην απομνημόνευση αυτών.

Μία άλλη μορφή εισαγωγής ΓΟ στη μάθηση Μαθηματικών ανώτερου επιπέδου, είναι η άμεση διδασκαλία κατασκευής και χρήσης ΓΟ από τους ίδιους τους μαθητές, ως γνωστική στρατηγική αυτοοργάνωσης, όταν κάτι τέτοιο κρίνεται βοηθητικό για την επίτευξη κάποιου συγκεκριμένου διδακτικού στόχου. Σε αυτή τη μορφή τους, οι ΓΟ βοηθούν στην οργάνωση και μετατροπή των πληροφοριών, εμπλέκοντας επιπλέον τους ίδιους τους μαθητές κατά την αναπαράσταση των εννοιών και των συνδέσεων μεταξύ τους. Η ανάπτυξη μιας τέτοιας δεξιότητα προωθεί την εις βάθος μάθηση, η οποία χαρακτηρίζεται από την δημιουργία, εκ μέρους του μαθητή, προσωπικής ερμηνείας των εννοιών που παρουσιάζονται (συνδέοντας τη νέα γνώση με τη ήδη κατακτημένη) και από την ικανότητα να γενικεύσει, να χρησιμοποιήσει τη νέα γνώση με αποδοτικούς τρόπους (Tan, Dawson & Venville, 2008).

Σχετικά τώρα με τους μαθητές με ΜΔ, όπως παρατηρήθηκε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, αρκετοί από αυτούς αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην απομνημόνευση ή επαναφορά πληροφοριών από τη μνήμη, στην εργαζόμενη μνήμη, ελλείμματα σχετικά με τη μαθηματική γλώσσα, δυσκολίες στην οργάνωση των πληροφοριών (Geary, 2004, Geary, 2010). Οι ΓΟ βοηθούν στην τοποθέτηση των πληροφοριών με τάξη, ισχυροποιώντας τις συνδέσεις μεταξύ τους και με τον τρόπο αυτό επιτρέπουν στους μαθητές να «παρακάμψουν» σε ένα βαθμό τις παραπάνω δυσκολίες τους.

Επίσης, οι ΓΟ στηρίζονται στις οπτικο-χωρικές δεξιότητες περισσότερο από τις συμβατικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας. Έτσι, ειδικά για την ομάδα εκείνη των μαθητών, η οποία εμφανίζει ασθενείς λεκτικές δεξιότητες, σε σχέση με περισσότερο αναπτυγμένες χωρικές και μη-λεκτικές δεξιότητες συλλογισμού (π.χ. υπο-τύπος 2 στην κατηγοριοποίηση του Geary, των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, βλ. Πίνακας 3, σελ 37), οι προσεγγίσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών που επωφελούνται από τα «δυνατά» τους σημεία, όπως η προσέγγιση με χρήση ΓΟ, μπορεί να βελτιώσουν την ακαδημαϊκή τους πρόοδο στα Μαθηματικά.

2.1.2. *Κλιμακωτή διδακτική ακολουθία CRA*

Η τεχνική της κλιμακωτής διδακτικής ακολουθίας CRA (ή CSA) περιλαμβάνει μια διαδικασία διδασκαλίας τριών βημάτων, κατά την οποία οι μαθητές αρχικά διδάσκονται σε συγκεκριμένο (**C**oncrete) επίπεδο, προχωρούν σε ένα στάδιο αναπαράστασης ή ημι-συγκεκριμένο στάδιο (**R**epresentational ή **S**emi-concrete) και ολοκληρώνουν με τον αφηρημένο συμβολισμό (**A**bstract).

Πρόκειται για μια πολύ - αισθητηριακή προσέγγιση στη μάθηση, κατά το πρώτο στάδιο της οποίας, το συγκεκριμένο, τα μέσα που χρησιμοποιούνται συνήθως περιλαμβάνουν φυσικά - απτικά μέσα, κατά το ημι - συγκεκριμένο στάδιο χρησιμοποιούνται σχέδια, εικόνες και άλλα οπτικά μέσα, ενώ στο αφηρημένο στάδιο οι μαθητές χρησιμοποιούν το μαθηματικό συμβολισμό, δηλ. αριθμούς, σύμβολα, μεταβλητές (Strickland & Maccini, 2010).

Η χρήση συγκεκριμένων μέσων και οπτικών αναπαραστάσεων είναι μια διδακτική τεχνική που συστήνεται για διάφορες ηλικιακές ομάδες και διάφορους τομείς των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της Άλγεβρας, αφού αναπτύσσει την εννοιολογική κατανόηση, η οποία είναι απαραίτητη για την επιτυχία στο συμβολικό ή αφηρημένο επίπεδο. Μια αλληλουχία διδασκαλίας της μορφής Συγκεκριμένο – Αναπαριστώμενο – Αφηρημένο υποστηρίζει την κατανόηση των υποκείμενων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, πριν την εκμάθηση των κανόνων.

Η χρήση της προσέγγισης CRA, όπως και των απτικών μέσων ενδείκνυται ισχυρά για διδασκαλία βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως τις αριθμητικές πράξεις, τη θεσιακή αξία των αριθμητικών ψηφίων, τα κλάσματα, τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και τομείς της γεωμετρίας (Miller & Mercer, 1993). Επίσης, αυτή η διδακτική αλληλουχία βημάτων μπορεί να ενσωματωθεί με επιτυχία στην ευθεία μέθοδο διδασκαλίας, ή σε μια στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, τα βήματα της οποίας ωθούν τους μαθητές να ακολουθήσουν την κλιμακούμενη αλληλουχία. Στην περίπτωση επίλυσης λεκτικών προβλημάτων, για παράδειγμα, στην οποία έχει υποστηριχθεί από πολυάριθμες έρευνες η αποτελεσματικότητα χρήσης της στρατηγικής CRA, απαραίτητη προϋπόθεση για να προχωρήσουν οι μαθητές στο δεύτερο στάδιο, είναι να λύσουν επιτυχώς τα προβλήματα με χρήση φυσικών αντικειμένων. Στη συνέχεια, προϋποτίθεται η επίλυση προβλημάτων με χρήση οπτικών αναπαραστάσεων, πριν προχωρήσουν στο αφηρημένο στάδιο της λύσης του προβλήματος, με τη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού. Ένα παράδειγμα τέτοιας στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων αποτελεί η στρατηγική STAR, η οποία αναφέρεται αναλυτικότερα στην επόμενη παράγραφο.

Για τους μαθητές με ΜΔ που σχετίζονται με ελλείμματα στη γλώσσα και την ανάγνωση, οι σχετικές μελέτες υποστηρίζουν ότι θα επωφελούνταν περισσότερο από διδακτικές προσεγγίσεις που στηρίζονται σε αξιοποίηση των οπτικο-χωρικών και οπτικο-αντιληπτικών δεξιοτήτων τους. Μία τέτοια διδακτική προσέγγιση αποτελεί η διδακτική ακολουθία CRA (Miller & Mercer, 1993). Επίσης, η χρήση συγκεκριμένων μέσων και αντικειμένων που ο μαθητής μπορεί να αγγίξει, δύναται να λειτουργήσει ως αντιστάθμισμα στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κάποιοι μαθητές με την αφηρημένη, σύνθετη και διαισθητική φύση της Άλγεβρας. Λειτουργεί έτσι, ως εναλλακτικό μέσο ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόησης και της ευχέρειας στις διαδικασίες.

Αξίζει να σημειωθεί, πως οι έρευνες που καταλήγουν στην αποτελεσματικότητα της συγκεκριμένης διδακτικής προσέγγισης, υποστηρίζουν τα οφέλη της τόσο για μαθητές με ΜΔ, όσο και για τους υπόλοιπους μαθητές. Παρόλα αυτά, υπάρχουν σημαντικοί θεωρητικοί, αλλά και πρακτικοί περιορισμοί στη χρήση της.

Για να είναι αποτελεσματική η διδακτική προσέγγιση CRA, η παρουσίαση των μέσων πρέπει να γίνεται με προσοχή, ώστε να συνδέονται στενά με την υποκείμενη αφηρημένη έννοια. Κάτι τέτοιο είναι σημαντικό, διότι τα υλικά δε φέρουν αυτόματα και μαθηματική έννοια για τους μαθητές (Miller & Mercer, 1993).

Ένας πρόσθετος περιορισμός της δυνατότητας εφαρμογής της CRA είναι ότι στα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συχνά περιλαμβάνονται έννοιες, που δεν προσφέρονται άμεσα για συγκεκριμένη αναπαράσταση, όπως για παράδειγμα η έννοια της συνάρτησης του ημιτόνου (Ives & Hoy, 2003). Για τις έννοιες αυτές, είναι δύσκολο να σκεφτεί κανείς σχετικά, συγκεκριμένα φυσικά μέσα και οπτικές αναπαραστάσεις, τα οποία θα αποκαλύπτουν το νόημα της έννοιας. Έτσι, ενώ η εφαρμογή της CRA ενδείκνυται για τις βασικές μαθηματικές δεξιότητες, για το επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης υπάρχουν πολύ λίγα στοιχεία για τη χρήση ή την αποτελεσματικότητά της στους μαθητές (Ives & Hoy, 2003). Μάλιστα, σε βιβλιογραφική μελέτη τους, οι Maccini και Hughes (2000) δεν βρήκαν εργασίες που να επικυρώνουν τη χρήση της CRA για τη διδασκαλία της Άλγεβρας σε δευτεροβάθμιο επίπεδο, εκτός από την επίλυση λεκτικών προβλημάτων.

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η άμεση ενσωμάτωση της διδακτικής προσέγγισης CRA, είναι δύσκολο να επιτευχθεί σε ένα μάθημα Άλγεβρας Λυκείου. Παρόλα αυτά, η παρουσίασή της στα πλαίσια της παρούσας εργασίας κρίθηκε σκόπιμη για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι να γίνει σαφές πως για ορισμένες τεχνικές διδασκαλίας, οι οποίες υποστηρίζονται με σθένος από αρκετούς ερευνητές ως αποτελεσματικές για τη διδασκαλία της Άλγεβρας, στην πράξη η αποτελεσματικότητά τους περιορίζεται αρκετά σε βασικές μαθηματικές δεξιότητες, παρά σε δεξιότητες ανώτερου επιπέδου. Ο δεύτερος λόγος είναι να παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο, ακόμα και τέτοιου είδους τεχνικές, οι οποίες αυτούσια είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν στο Λύκειο, μπορεί να χρησιμεύσουν στον εκάστοτε εκπαιδευτικό, προσφέροντάς του τη δυνατότητα εναλλακτικής οπτικής της προσέγγισης της διδασκαλίας. Στο δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας για παράδειγμα, κατά το σχεδιασμό των φύλλων εργασίας, χρησιμοποιείται μια διδακτική ακολουθία τριών βημάτων εμπνευσμένη από την ακολουθία CRA, η οποία όμως απέχει πολύ από το να θεωρηθεί άμεση εφαρμογή της.

2.1.3. <u>Διδασκαλία γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών</u>

Οι γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές είναι είδη στρατηγικών μάθησης, στρατηγικών δηλαδή που χρησιμοποιούνται από τους ίδιους τους μαθητές, με στόχο την πρόοδό τους σε γνωστικό και μεταγνωστικό επίπεδο (Tan, Dawson & Venville, 2008).

Παραδείγματα γνωστικών στρατηγικών είναι οι στρατηγικές κατανόησης (φωναχτή ανάγνωση, υπογράμμιση σημείων του κειμένου κ.α.), οι στρατηγικές επεξεργασίας (παράφραση, περίληψη, δημιουργία αναλογιών, παραγωγή σημειώσεων κ.α.) και οι στρατηγικές οργάνωσης (επιλογή της κύριας ιδέας, σχεδιασμός γραφικών οργανωτών κ.α.).

Οι μεταγνωστικές στρατηγικές περιλαμβάνουν στρατηγικές μάθησης που χρησιμεύουν στη διατήρηση του ελέγχου της προόδου, από μέρους του μαθητή, κατά τη διάρκεια μιας εργασίας, όπως κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και αναφέρονται τόσο στη σκέψη, όσο και στις φυσικές ενέργειες που πρέπει να πραγματοποιηθούν.

Οι αυτορρυθμιζόμενοι μαθητές χρησιμοποιούν ποικιλία γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών για την ολοκλήρωση διαφορετικών εργασιών, τις οποίες δεν έχουν απαραίτητα διδαχτεί (Tan, Dawson & Venville, 2008). Για τους μαθητές με ΜΔ όμως, για τους οποίους η αυτορρύθμιση σε διάφορα επίπεδα αποτελεί πολύ συχνά μέρος της δυσκολίας τους (βλ. §1.2.5, σελ. 27), η άμεση διδασκαλία τέτοιων στρατηγικών φαίνεται να είναι αρκετά βοηθητική σε ποικίλους τομείς, μεταξύ αυτών και ο τομέας των Μαθηματικών και ειδικότερα της Άλγεβρας. Οι στρατηγικές δηλαδή, που γράφονται και διδάσκονται, είναι απλά τυποποιημένες εκδοχές των στρατηγικών που οι μαθητές υψηλών επιδόσεων χρησιμοποιούν καθημερινά.

Η χρήση καλά σχεδιασμένων στρατηγικών προσφέρει στους μαθητές με ΜΔ ένα αποτελεσματικό τρόπο να κατακτήσουν, να αποθηκεύσουν και να εκφράσουν πληροφορίες και δεξιότητες (Miller & Mercer, 1993). Τους διευκολύνει να ανασύρουν από τη μνήμη τους προηγούμενα αποθηκευμένες γνώσεις, διαδικασία στην οποία συχνά αυτοί υπολείπονται και η οποία επηρεάζει αρνητικά την ικανότητά τους να εκφράσουν με ακρίβεια αυτό που γνωρίζουν.

Βασικός στόχος της διδασκαλίας συγκεκριμένων στρατηγικών είναι να βοηθήσει μαθητές που εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την εκπαιδευτική καθοδήγηση, να ανεξαρτητοποιηθούν σταδιακά. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί πως η διδασκόμενες στρατηγικές δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να θεωρηθούν υποκατάστατα της εννοιολογικής κατανόησης, αλλά θα πρέπει να διδάσκονται μετά την διδασκαλία των εννοιών.

Για να είναι μια στρατηγική αποτελεσματική, θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από ακριβή αναπαράσταση της εργασίας, την οποία περιγράφει, αλλά και εύκολη απομνημόνευσή της. Για το λόγο αυτό, η διδασκαλία στρατηγικών συνοδεύεται πολύ συχνά από μνημονικά βοηθήματα, όπως ακρωνύμια, ρίμες, φράσεις κτλ., τα οποία χρησιμεύουν για την επισήμανση των κύριων βημάτων της στρατηγικής. Είναι σημαντικό να γίνει σαφές ότι οι γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, όπως και κάθε άλλη διδασκόμενη δεξιότητα, εξαρτώνται από τον τρόπο διδασκαλίας. Ιδιαίτερα για τους μαθητές με ΜΔ, οι στρατηγικές θα πρέπει να διδάσκονται με χρήση της άμεσης μεθόδου διδασκαλίας και όχι απλά να τους παρέχεται ένα γραπτό αντίγραφό της. Η ρητή μοντελοποίηση της στρατηγικής από μέρους του εκπαιδευτικού είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές θα κατανοήσουν τους σκοπούς της, πώς να τη χρησιμοποιήσουν και υπό ποιες συνθήκες θα πρέπει να χρησιμοποιείται. Ένα ακόμα σημαντικό συστατικό της διδασκαλίας στρατηγικών είναι η παροχή ευκαιριών πρακτικής άσκησης σε αυτές.

Κάποιες από τις στρατηγικές που έχουν συζητηθεί εκτενέστερα, ως αποτελεσματικές για την εκπαίδευση μαθητών με ΜΔ, είναι αυτές που σχετίζονται με την οργάνωση και την αυτορρύθμιση των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων, αλλά και με την ίδια τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Η διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών σε μαθητές με ΜΔ, ενδείκνυται από πολλούς ερευνητές για τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης λεκτικών προβλημάτων, αφού τους παρέχει μία σαφή δομή αντιμετώπισής των (Impecoven-Lind & Foegen, 2010, Montague & Dietz, 2009, Montague, Applegate & Marquard, 1993). Παραδείγματα τέτοιων αποτελούν οι στρατηγικές STAR (Maccini & Hughes, 2000), *Solve it!* (Montague, 1996) και DRAW (Mercer & Miller, 1993).

Η στρατηγική μπορεί να περιλαμβάνει βήματα, τόσο για την ερμηνεία της λεκτικής περιγραφής του προβλήματος με χρήση σημειώσεων, σχημάτων κτλ., όσο και για την επίλυση αυτού, αναφέροντας τις εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν για να οδηγηθεί ο μαθητής στη λύση.

Διδάσκει στους μαθητές την αυτό-ερώτηση, που τους βοηθά να χρησιμοποιούν συγκεκριμένες διαδικασίες, δεξιότητες και συμπεριφορές. Οι μαθητές διδάσκονται τις σωστές ερωτήσεις και τους παρέχεται εξάσκηση στο να κάνουν αυτές τις ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων. Στοχεύουν στην ανάπτυξη της ικανότητας αυτοκαθοδήγησης, κατά την εφαρμογή της οποίας κάποιοι μαθητές με ΜΔ δυσκολεύονται, διότι είτε δεν έχουν εξασκηθεί στο να περιγράφουν με λέξεις το τι κάνουν, ή δυσκολεύονται στη μνήμη και τήρηση ακολουθιών από συμπεριφορές ή ενέργειες (Montague, 2007).

Κατά την εφαρμογή της στρατηγικής μπορεί να αποδειχτούν χρήσιμες οπτικές ενδείξεις – παροτρύνσεις, όπως κάρτες ή πίνακες, οι οποίες θυμίζουν στους μαθητές να αναρωτηθούν μια σειρά από ερωτήματα, όπως «Ποιο είναι το ζητούμενο;» ή «Έχω ελέγξει αν είναι λογική η απάντησή μου;». Οι ερωτήσεις αυτές μπορεί να ταξινομηθούν σε «σημειωματάρια στρατηγικών», οργανωμένα με βάση τις μαθηματικές έννοιες ή δεξιότητες. Η τήρηση ενός «σημειωματάριου στρατηγικών» ενδέχεται να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές όταν εργάζονται ανεξάρτητα στην τάξη ή στο σπίτι. Με τον τρόπο αυτό, όταν έρχονται αντιμέτωποι με την επίλυση ενός προβλήματος, μπορούν να εφαρμόσουν την κατάλληλη στρατηγική, ώστε αντί να βασίζονται στον εκπαιδευτικό για βοήθεια, να βοηθούν οι ίδιοι τον εαυτό τους. Μια τέτοια πρακτική είναι χρήσιμη για τους μαθητές με ΜΔ, οι οποίοι σταδιακά με τη συνεχή πρακτική της στρατηγικής την εσωτερικεύουν. Βέβαια, κάποιοι μαθητές μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιούν το «σημειωματάριο στρατηγικών» τους για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα εξαιτίας σημαντικών προβλημάτων μνήμης.

Επιπλέον, για την επίλυση προβλημάτων μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμη η παροχή στους μαθητές δομημένων φύλλων εργασίας, τα οποία περιλαμβάνουν περιληπτικά τα βήματα που πρέπει να πραγματοποιηθούν, με ειδικό χώρο στον οποίο οι μαθητές σημειώνουν τα βήματα που ολοκλήρωσαν. Αυτά τα δομημένα φύλλα εργασίας μπορεί να συνοδεύουν μια συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, περιλαμβάνοντας τα βήματα αυτής της στρατηγικής. Η παραπάνω τεχνική προσφέρεται για την ανάπτυξη της αυτορρύθμισης, δεξιότητα στην οποία πολλοί μαθητές με ΜΔ υπολείπονται σε σχέση με τους συνομηλίκους τους (Montague, 2007).

Για παράδειγμα, ο Hutchinson (1993) χρησιμοποίησε μια γνωστική προσέγγιση, η οποία περιελάμβανε αυτό-ερωτήσεις για την αναπαράσταση και επίλυση του προβλήματος, καθώς επίσης και δομημένα φύλλα εργασίας, στα οποία οι μαθητές καλούνταν να γράψουν τη λύση (Πίνακες 6, 7 και 8).

Αυτό-ερώτησεις για την αναπαράσταση Λεκτικών Αλγεβρικών Προβλημάτων
1. Έχω διαβάσει και έχω καταλάβει την κάθε πρόταση; Υπάρχουν λέξεις των οποίων το νόημα δεν κατανοώ και πρέπει να το ρωτήσω;
2. Έχω τη συνολική εικόνα του προβλήματος, μια αναπαράσταση;
3. Έχω γράψει την αναπαράστασή μου στο φύλλο εργασίας; (στόχος, άγνωστος, γνωστά, τύπος προβλήματος, εξίσωση)
4. Τι πρέπει να ψάξω σε ένα άλλο πρόβλημα για να αποφασίσω αν είναι του ίδιου τύπου με το συγκεκριμένο;

Πίνακας 6: Αυτό-ερωτήσεις της στρατηγικής Hutchinson - 1 (πηγή: Montague 2007)

Αυτό-ερωτήσεις για την επίλυση Λεκτικών Αλγεβρικών Προβλημάτων
1. Έχω γράψει μια εξίσωση;
2. Έχω αναπτύξει τους όρους;
3. Έχω γράψει τα βήματα της λύσης μου στο φύλλο εργασίας; (αναγωγή ομοίων όρων, απομόνωση αγνώστου, λύση ως προς τους αγνώστους, έλεγχος της λύσης για συμφωνία με το στόχο, υπογράμμιση της απάντησης)
4. Τι πρέπει να ψάξω σε ένα άλλο πρόβλημα για να αποφασίσω αν είναι του ίδου τύπου με το συγκεκριμένο;

Πίνακας 7: Αυτό-ερωτήσεις της στρατηγικής Hutchinson - 2 (πηγή: Montague 2007)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΛΥΣΗ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
Στόχος…………………………………………………………………………………………….
Τι δε γνωρίζω……………………………………………………………………………………..
Τι γνωρίζω…………………………………………………………………………………………
Μπορώ να πω/γράψω το πρόβλημα με δικά μου λόγια. Να κάνω μια εικόνα.
Είδος προβλήματος………………………………………………………………………………
Εξίσωση……………………………………………………………………………………………
Επίλυση εξίσωσης:
Απάντηση…………………………………………………………………………………………..
Σύγκριση με το στόχο…………………………………………………………………………….
Έλεγχος:

Πίνακας 8: Δομημένο φύλλο εργασίας της στρατηγικής Hutchinson (πηγή: Montague 2007)

Στη στρατηγική *Solve it!*, οι μαθητές διδάσκονται να αυτό-παροτρύνονται, να αυτό-ρωτώνται κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων, όπως φαίνεται στον Πίνακας 9 . Κατά τη διάρκεια επίλυσης, μπορούν να διαγράφουν το βήμα που ολοκληρώθηκε κάθε φορά.

Στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων	
Ανάγνωση (για κατανόηση)	**Λέω:** Διαβάζω το πρόβλημα. Αν δεν καταλαβαίνω το διαβάζω ξανά **Ρωτάω:** Διάβασα και κατάλαβα το πρόβλημα; **Ελέγχω:** Αν κατανόησα όσο λύνω το πρόβλημα
Παράφραση (με δικά μου λόγια)	**Λέω:** Υπογραμμίζω τις σημαντικές πληροφορίες. Λέω το πρόβλημα με δικά μου λόγια **Ρωτάω:** Υπογράμμισα τις σημαντικές πληροφορίες; Τι γνωρίζω; Τι ψάχνω; **Ελέγχω:** Ότι οι πληροφορίες ταιριάζουν με την ερώτηση
Οπτικοποίηση (μια εικόνα ή ένα διάγραμμα)	**Λέω:** Κάνω ένα σκίτσο ή ένα διάγραμμα. Δείχνω τις σχέσεις ανάμεσα στα μέρη του προβλήματος **Ρωτάω:** Ταιριάζει η εικόνα στο πρόβλημα; Έδειξα τις σχέσεις; **Ελέγχω:** Την εικόνα σε σχέση με τις πληροφορίες του προβλήματος
Υπόθεση (ένα σχέδιο επίλυσης του προβλήματος)	**Λέω:** Αποφασίζω πόσα βήματα και πράξεις χρειάζονται. Γράφω τα σύμβολα των πράξεων **Ρωτάω:** Αν… τι θα πάρω; Αν κάνω… τι θα πρέπει να κάνω μετά; Πόσα βήματα χρειάζονται; **Ελέγχω:** Ότι το σχέδιο έχει νόημα
Εκτίμηση (πρόβλεψη της απάντησης)	**Λέω:** Στρογγυλοποιώ τους αριθμούς, κάνω τις πράξεις με το μυαλό και γράφω την εκτίμησή μου **Ρωτάω:** Στρογγυλοποίησα και προς τα πάνω και προς τα κάτω; Έγραψα την εκτίμηση; **Ελέγχω:** Ότι χρησιμοποίησα τις σημαντικές πληροφορίες
Υπολογισμός (κάνω τις πράξεις)	**Λέω:** Κάνω τις πράξεις στη σωστή σειρά **Ρωτάω:** Ταιριάζει η απάντηση με την εκτίμησή μου; Έχει νόημα η απάντησή μου; Είναι οι υποδιαστολές στη σωστή θέση; **Ελέγχω:** Ότι όλες οι πράξεις έγιναν με τη σωστή σειρά
Έλεγχος (βεβαιώνομαι ότι όλα είναι εντάξει)	**Λέω:** Ελέγχω το σχέδιο για να βεβαιωθώ ότι είναι σωστό. Ελέγχω τις πράξεις. **Ρωτάω:** Έλεγξα κάθε βήμα; Έλεγξα τι πράξεις; Είναι η απάντηση σωστή; **Ελέγχω:** ότι όλα έγιναν σωστά. Αν όχι γυρίζω πίσω. Ζητάω βοήθεια αν τη χρειάζομαι

Πίνακας 9: Στρατηγική *Solve it!* (πηγή: Montague 2007)

Στη στρατηγική STAR, αναπτύσσεται επίσης η αυτο-καθοδήγηση και επιπλέον, τα βήματα προσδιορίζονται από ένα μνημονικό βοήθημα με τη μορφή ακρωνυμίου. Παράλληλα, ενσωματώνεται η τεχνική CRA στο δεύτερο βήμα, αυτό της αναπαράστασης του προβλήματος, όπως φαίνεται στον Πίνακας 10.

S = Search the word problem «Ψάχνω» το λεκτικό πρόβλημα (Διαβάζω, ρωτάω τον εαυτό μου ερωτήσεις όπως «Ποια στοιχεία γνωρίζω;», «Τι πρέπει να βρω;», γράφω τα στοιχεία)
T = Translate the words into an equation in picture form Μεταφράζω τις λέξεις σε εξίσωση στη μορφή μιας εικόνας (Διαλέγω μεταβλητή, αναγνωρίζω τις πράξεις, αναπαριστώ το πρόβλημα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες – ημισυγκεκριμένες – αφηρημένες αναπαραστάσεις)
A = Answer the problem using cues and a work mat. Απαντάω το πρόβλημα χρησιμοποιώντας προτροπές και ένα σχέδιο εργασίας
R = Review the solution Ελέγχω την λύση (Ξαναδιαβάζω το πρόβλημα, κάνω την ερώτηση «Έχει νόημα η απάντηση;», ελέγχω την απάντηση)

Πίνακας 10: Στρατηγική STAR (πηγή: Montague 2007)

Ένα δεύτερο μοντέλο στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων, το οποίο στρέφεται προς την κατεύθυνση ανάπτυξης οπτικής αναπαράστασης του προβλήματος, προτάθηκε από την Jitendra και τους συνεργάτες της και περιγράφεται από τους Xin, Jitendra & Deatline-Buchman (2005), κατά την εφαρμογή του στα πλαίσια έρευνας σε μαθητές ΜΔ. Η κεντρική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι ότι οι μαθητές αναπτύσσουν σχήματα για την επίλυση συγκεκριμένων τύπων προβλημάτων. Χρησιμοποιούν ένα διάγραμμα για την αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος και στη συνέχεια αναγνωρίζουν τον τύπο προβλήματος, το οποίο αναπαριστά το συγκεκριμένο διάγραμμα. Κάθε διδασκόμενο διάγραμμα αποτελείται από μερικά γεωμετρικά σχήματα και λίγα λόγια. Τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν ώστε να υποδεικνύουν συγκεκριμένους χώρους για την εισαγωγή δεδομένων από το πρόβλημα, και να απεικονίζουν με τον τρόπο αυτό τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων, εικόνα που προσδιορίζει ποιες ενέργειες πρέπει να πραγματοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα.

Η διδασκαλία αυτής της στρατηγικής επικεντρώνεται στην αναγνώριση της δομής των συγκεκριμένων τύπων προβλημάτων και γίνεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις στρατηγικών, με τη μέθοδο της άμεσης διδασκαλίας.

Το στοιχείο της αυτορρύθμισης εντάσσεται και σε αυτό το μοντέλο, μέσω μιας λίστας τεσσάρων βημάτων, στην οποία οι μαθητές σημειώνουν τα βήματα που ολοκληρώθηκαν, όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

1. Διαβάζω για να κατανοήσω
2. Αναγνωρίζω τον τύπο του προβλήματος και χρησιμοποιώ ένα διάγραμμα για να αναπαραστήσω το πρόβλημα
3. Μετατρέπω το διάγραμμα σε μαθηματική πρόταση και λύνω το πρόβλημα
4. Γυρίζω πίσω για να ελέγξω

Πίνακας 11: Λίστα αυτορρύθμισης στρατηγικής Jitendra (πηγή: Xin, Jitendra & Deatline-Buchman 2005)

Πάντως, κατά τη μετάβαση από τις βασικές αριθμητικές δεξιότητες και την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων προς τα Μαθηματικά υψηλότερου επιπέδου, οι οπτικο - χωρικές προσεγγίσεις απουσιάζουν σε μεγάλο βαθμό από τη σχετική βιβλιογραφία για μαθητές με ΜΔ. Στρατηγικές όπως η STAR και η *Solve it!* στηρίζονται σε σημαντικό βαθμό σε λεκτικά μνημονικά βοηθήματα για την υπενθύμιση των βημάτων, σε λεκτικό σχεδιασμό του προβλήματος από μέρους των μαθητών, σε γραπτές οδηγίες, όλα από τα οποία εξαρτώνται από τις λεκτικές ικανότητες των μαθητών (Ives & Hoy, 2003).

Αντίθετα, τα μαθηματικά κείμενα συνήθως ενθαρρύνουν τη χρήση διαγραμμάτων, ως μια τεχνική για την επίλυση προβλημάτων, προσέγγιση η οποία ευνοεί τους μαθητές με ισχυρότερες οπτικές δεξιότητες. Ωστόσο, οι εμπειρικές έρευνες που επικεντρώνονται σε αυτή την κατεύθυνση είναι αρκετά περιορισμένες και δεν έχει αποδειχτεί μέχρι σήμερα μια σαφής σχέση μεταξύ της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και της χρήσης οπτικο-χωρικών αναπαραστάσεων (Ives & Hoy, 2003).

Το δεύτερο μοντέλο στρατηγικής, αυτό της προσέγγισης μέσω σχημάτων του προβλήματος, φαίνεται να κινείται προς την κατεύθυνση της ανάδειξης αναπτυγμένων οπτικο-χωρικών δεξιοτήτων των μαθητών, όμως και αυτό είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί αυτούσια σε περιπτώσεις αλγεβρικών προβλημάτων ανώτερου επιπέδου, τα οποία δεν μπορεί να κατηγοριοποιηθούν εύκολα σε τύπους σχημάτων, όπως αυτά που ερευνήθηκαν από τους δημιουργούς της στρατηγικής.

Σε κάθε περίπτωση, γνώση των αρχών που διέπουν τις παραπάνω στρατηγικές, προσφέρουν στον εκπαιδευτικό τη δυνατότητα διαφορετικής «οπτικής» και επομένως διαφορετικής προσέγγισης της διδασκαλίας σε μαθητές με ΜΔ, η οποία θα πρέπει να περιλαμβάνει στοιχεία που τους βοηθούν στον τομέα της αυτό-οργάνωσης, της αυτορρύθμισης και της τήρησης ακολουθιών λογικών βημάτων, για την επίτευξη της ολοκλήρωσης σύνθετων αλγεβρικών εργασιών.

2.2. Μέθοδοι διδασκαλίας

2.2.1. <u>*Άμεση και έμμεση διδασκαλία*</u>

Άμεση (direct instruction) ονομάζεται μία μέθοδος συστηματικής διδασκαλίας, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός επιδεικνύει το πώς εκτελούνται οι εργασίες, παροτρύνει και καθοδηγεί το μαθητή και ενισχύει τις σωστές αντιδράσεις. Η άμεση διδασκαλία στηρίζεται σε αξιολόγηση με βάση τη διδακτέα ύλη, για τον προσδιορισμό των δεξιοτήτων που πρέπει να διδαχθούν. Οι ακριβείς απαντήσεις επιβραβεύονται, οι ανακριβείς απαντήσεις ανακατευθύνονται, με έμφαση στις στρατηγικές μάθησης υπολογισμών ή επίλυσης προβλημάτων του ίδιου του μαθητή.

Η άμεση διδασκαλία στηρίζεται στις αρχές της συμπεριφοριστικής προσέγγισης και έχει ήδη υποστηριχθεί εμπειρικά επί 40 χρόνια, ως αποτελεσματική μέθοδος διδασκαλίας μαθητών με ΜΔ (Rosenshine & Stevens, 1986), αλλά και γενικότερα των ατόμων με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες.

Η μέθοδος της άμεσης διδασκαλίας έχει αποδειχτεί αποτελεσματική σε μαθητές με ΜΔ, ιδιαίτερα στην εκμάθηση και γενίκευση συγκεκριμένων στρατηγικών μάθησης οι οποίες εφαρμόζονται και στον ειδικότερο τομέα των Μαθηματικών (Mercer & Miller, 1992). Επίσης, μελέτες παρεμβάσεων σε μαθητές με ΜΔ, αποκαλύπτουν ότι οι προσεγγίσεις που περιελάμβαναν άμεση διδασκαλία και/ή διδασκαλία στρατηγικών είχαν γενικά θετικότερα αποτελέσματα από εκείνες που δεν περιείχαν αυτά τα στοιχεία.

Στις αρχές της άμεσης διδασκαλίας στηρίζεται η διδασκαλία συγκεκριμένων γνωστικών στρατηγικών, όπως αυτές περιγράφηκαν παραπάνω.

Για παράδειγμα, κατά την επίλυση προβλημάτων, πολλοί μαθητές με ΜΔ, δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν ή να οπτικοποιήσουν μία κατάσταση που παρουσιάζεται σε ένα πρόβλημα και να βρουν τη λύση. Έτσι, ο εκπαιδευτικός πρέπει να διδάξει και την αναπαράσταση του προβλήματος (δηλ. την ενσωμάτωση των πληροφοριών ενός λεκτικού προβλήματος σε μία οπτική αναπαράσταση), αλλά και την επίλυση του προβλήματος (δηλ. τον τρόπο εφαρμογής κατάλληλων διαδικασιών για να καταλήξει κανείς στη λύση).

Για να διευκολυνθούν και η αναπαράσταση του προβλήματος, αλλά και η επίλυση, παρέχονται στους μαθητές ερωτήσεις ή παρότρυνση σε κάρτες ή δομημένα φύλλα εργασίας. Για παράδειγμα, η παρότρυνση «Ζωγράφισε μια αναπαράσταση του προβλήματος», ωθεί τους μαθητές να αναγνωρίσουν και να αναπαραστήσουν το πρόβλημα. Ομοίως, οι ερωτήσεις «Έχει νόημα η απάντηση;» και «Γιατί;», ωθούν τους μαθητές να ελέγξουν τις απαντήσεις τους.

Αντίθετα με την άμεση διδασκαλία, η έμμεση διδασκαλία (indirect instruction), είναι κυρίως μαθητο-κεντρική, αν και τα δύο είδη διδασκαλίας μπορούν να συμπληρώσουν το ένα το άλλο.

Η έμμεση διδασκαλία (indirect instruction) απαιτεί υψηλά επίπεδα εμπλοκής των μαθητών μέσω της παρατήρησης, της ανακάλυψης, της εξαγωγής συμπερασμάτων από τα δεδομένα, του σχηματισμού υποθέσεων. Χρησιμοποιεί προς όφελος της μάθησης το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών, ενώ συχνά τους παροτρύνει να παράγουν εναλλακτικές λύσεις ή να επιλύσουν προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μελέτης κάποιου φαινομένου.

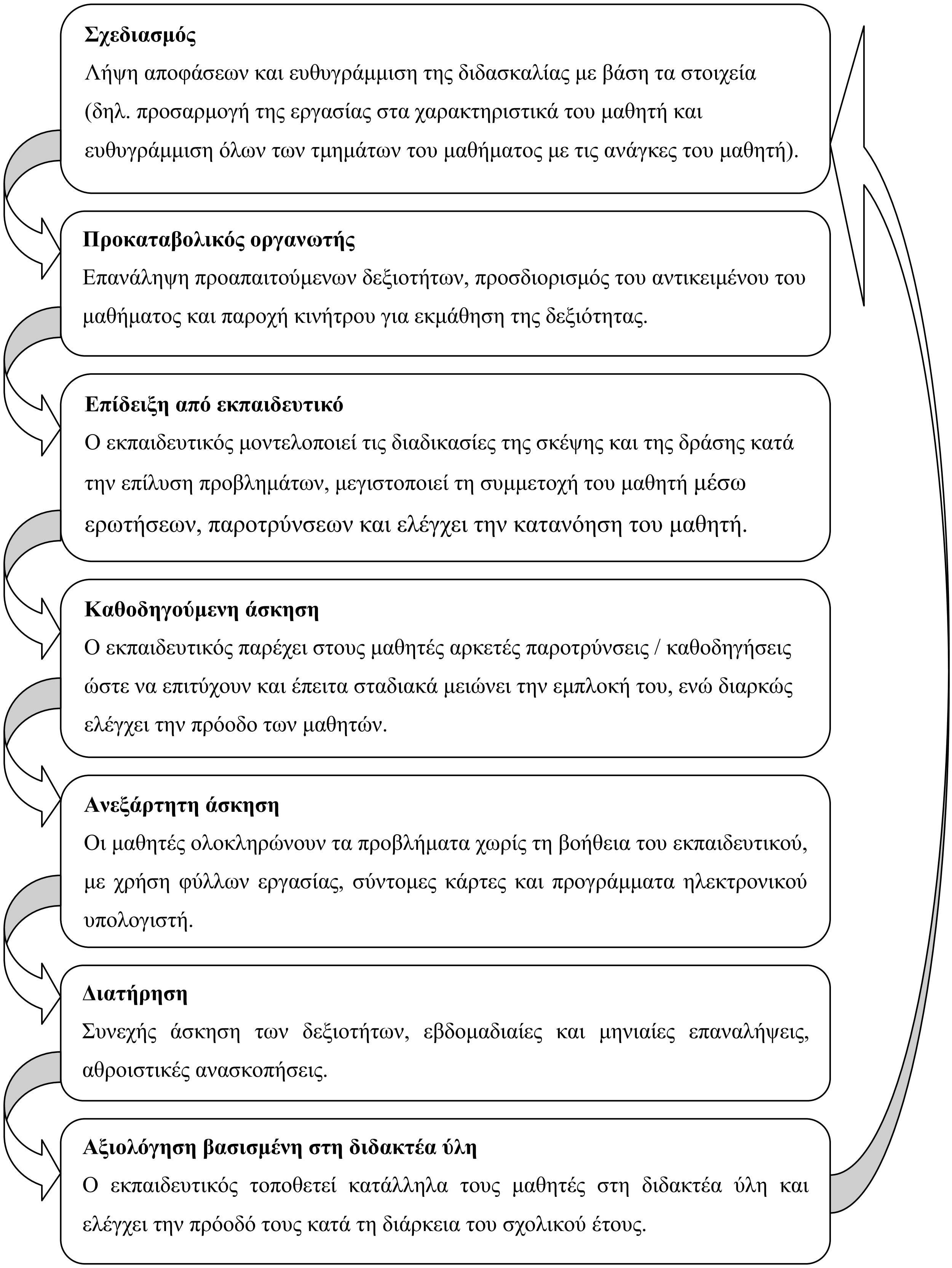
Κατά την έμμεση διδασκαλία, ο ρόλος του εκπαιδευτικού μπορεί να είναι αυτός του ενισχυτή, του υποστηρικτή, ή του ατόμου που λειτουργεί ως πηγή στοιχείων και ανατροφοδότησης. Ο εκπαιδευτικός ρυθμίζει το περιβάλλον της μάθησης, παρέχει ευκαιρίες για την εμπλοκή των μαθητών, και όταν το κρίνει κατάλληλο παρέχει ανατροφοδότηση στους μαθητές, ενώ εκείνοι πραγματοποιούν την αναζήτησή τους.

2.2.2. Ευθεία διδασκαλία

Η ευθεία (explicit) διδασκαλία είναι μια μέθοδος διδασκαλίας κατευθυνόμενης από τον εκπαιδευτικό (Maccini, Strickland, Gagnon & Malmgren 2008), η οποία περιλαμβάνει ένα σύνολο διαδικασιών σχεδιασμού και παρουσίασης, που προκύπτουν από τις έρευνες για αποτελεσματική διδασκαλία, αλλά και από την ανάλυση συμπεριφοράς (Hall, 2002). Συμπεριλαμβάνει τα στοιχεία της άμεσης διδασκαλίας, αλλά είναι ουσιαστικά η μέθοδος που επιτρέπει την διδασκαλία γνωστικών στρατηγικών (Montague, 2007). Η διδασκαλία γνωστικών στρατηγικών εφαρμόζει αρχές που προκύπτουν από τις έρευνες σχετικά με τη μνήμη και τη λεκτική αυτό-διδασκαλία και μαζί με την άμεση διδασκαλία θεωρούνται οι πιο ισχυρές μέθοδοι παρέμβασης σε μαθητές με ΜΔ (Montague, 2007).

Η ευθεία διδασκαλία ενσωματώνει τις εξής εκπαιδευτικές λειτουργίες: Ένα προκαταβολικό οργανωτή, επίδειξη από τον εκπαιδευτικό, καθοδηγούμενη άσκηση, ανεξάρτητη άσκηση, συνολική άσκηση και αξιολόγηση με βάση τη διδακτέα ύλη για παροχή στοιχείων που οδηγούν στον σχεδιασμό της διδασκαλίας.

Σχηματικά, ο «κύκλος της ευθείας διδασκαλίας» φαίνεται στην επόμενη εικόνα:



Εικόνα 5: Ο κύκλος της ευθείας διδασκαλίας (πηγή: Maccini, Strickland, Gagnon & Malmgren, 2008)

Έρευνες σε παρεμβάσεις, βασισμένες στην ευθεία διδασκαλία, δείχνουν ότι οι επιδράσεις της «εκπαίδευσης στη μετατόπιση», δηλ. της παρουσίασης ενός νέου προβλήματος ως μιας ακολουθίας βημάτων, φαίνεται όχι μόνο να βοηθά στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών, αλλά η βελτίωση αυτή να έχει και διάρκεια.

Η εκπαίδευση στη μετατόπιση είναι παρόμοια με την ανάλυση έργου (task analysis), κατά την οποία μια πολύπλοκη εργασία διδάσκεται ως μια ακολουθία διαδοχικών εργασιών – στόχων. Η κατάκτηση των επιμέρους εργασιών – στόχων μετατοπίζεται στη συνέχεια σε ολοκλήρωση της πολύπλοκης εργασίας.

Η παραπάνω διαπίστωση είναι αρκετά ενδιαφέρουσα, δεδομένου ότι πολλοί μαθητές με ΜΔ δυσκολεύονται να γενικεύσουν τη μαθημένη γνώση σε νέες καταστάσεις (Cagnon & Maccini 2001).

Έχει επικρατήσει η άποψη ότι η διδασκαλία με χρήση της ευθείας μεθόδου είναι περισσότερο ωφέλιμη για μαθητές χαμηλών επιδόσεων και μαθητές ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών. Τα αποτελέσματα εκτεταμένων ερευνών, όμως, υποδεικνύουν ότι μία σωστά σχεδιασμένη και καλά οργανωμένη διδασκαλία, καθώς επίσης και η ευθεία διδασκαλία δεξιοτήτων, μπορεί να ωφελήσει όλους τους μαθητές (Hall, 2002).

2.2.3. Διδασκαλία μέσω συνομηλίκων

Η διδασκαλία μέσω συνομηλίκων είναι η μέθοδος κατά την οποία οι μαθητές αναλαμβάνουν με κάποιο τρόπο το ρόλο του εκπαιδευτικού. Αποτελεί μια μέθοδο που εφαρμόζεται αρκετά χρόνια στο χώρο της ειδικής αγωγής και προτείνεται και για το χώρο της γενικής αγωγής.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές μπορεί να αναλάβουν τη διδασκαλία συμμαθητών τους με τις εξής μορφές:

(α) Ένας μαθητής, ο οποίος έχει κατακτήσει ήδη μία δεξιότητα, αναλαμβάνει να διδάξει ένα συμμαθητή του που υστερεί στη συγκεκριμένη δεξιότητα

(β) Σε δυάδες μαθητών, ο ρόλος του εκπαιδευτικού εναλλάσσεται, ώστε οι μαθητές να δίνουν, αλλά και να δέχονται βοήθεια, ανάλογα με τη δραστηριότητα

(γ) Ένας μαθητής ή μια ομάδα μαθητών, αναλαμβάνει να παρουσιάσει μέρος της διδασκαλίας σε όλη την τάξη

Ειδικότερα, για τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω συνομηλίκων, έρευνες έχουν δείξει ότι ομάδες μαθητών με ΜΔ παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις από αντίστοιχες ομάδες ελέγχου, στις οποίες η διδασκαλία έγινε από εκπαιδευτικούς (Calhoon & Fuchs, 2003).

Από την άλλη, όταν η έρευνα περιορίζεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η οποία ενδιαφέρει την παρούσα μελέτη, τα αποτελέσματα είναι αντικρουόμενα. Για παράδειγμα, τα αποτελέσματα εφαρμογής μιας μορφής διδασκαλίας από συνομηλίκους σε δυάδες (Peer Assisted Learning Strategies - PALS), που πραγματοποιήθηκε από τους Calhoon, Fuchs, ήταν ενθαρρυντικά σε σχέση με την επίδοση των μαθητών με ΜΔ σε υπολογισμούς και σε εμπέδωση – εξάσκηση συγκεκριμένων αλγορίθμων, αλλά απογοητευτικά σε σχέση με την εκμάθηση νέων εννοιών και εφαρμογών αυτών (Calhoon & Fuchs, 2003). Οι ίδιοι ερευνητές πιθανολογούν ότι τα ελλείμματα των μαθητών με ΜΔ σε γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές (βλ. §2.1.3, σελ. 59), στην ικανότητα γενίκευσης και στις ικανότητες μνήμης και ανάκλησης πληροφοριών, ικανότητες που απαιτούνται για την κατανόηση και εκμάθηση μαθηματικών εννοιών και εφαρμογών, καθιστούν προτιμότερη την άμεση διδασκαλία αυτών, στα πλαίσια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

2.3. Πρόληψη και εκπαιδευτικές παρεμβάσεις

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια συζήτηση μεταξύ ερευνητών, ως προς το καταλληλότερο είδος αντιμετώπισης και το βαθμό παρέμβασης, σε μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε κάποιο αντικείμενο και ειδικότερα στο αντικείμενο που μας ενδιαφέρει στη συγκεκριμένη μελέτη, τα Μαθηματικά. Εκτός από την παρέμβαση, στις σχετικές συζητήσεις γίνεται συχνά η χρήση του όρου πρόληψη, ενώ παράλληλα επιχειρείται μια κατηγοριοποίηση των τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών κάποιων μαθητών, μέσα ή έξω από την κοινή τάξη.

Μία από τις πιθανές κατηγοριοποιήσεις, η οποία εμπεριέχει σε μεγάλο βαθμό τις γενικότερες αρχές πρόληψης και παρέμβασης που επικρατούν τα τελευταία χρόνια στο χώρο, θα παρουσιαστεί ενδεικτικά σε αυτό το κεφάλαιο, όπως περιγράφεται από τους Fuchs & Fuchs (2001).

Αρχικά, διακρίνουν την πρόληψη σε τρία επίπεδα: πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα οι βασικές αρχές του κάθε επιπέδου, καθώς και κάποιοι ενδεικτικοί τρόποι εφαρμογής τους.

2.3.1. <u>Πρωτοβάθμια πρόληψη – καθολικός σχεδιασμός της διδασκαλίας</u>

Η πρωτοβάθμια πρόληψη επικεντρώνεται στον καθολικό σχεδιασμό της διδασκαλίας, απευθύνεται σε όλους τους μαθητές, αλλά διαχειρίζεται αρχές που διέπουν τις ανάγκες του ειδικού μαθητικού πληθυσμού.

Στηρίζεται στην αρχή ότι μπορεί, ως κάποιο βαθμό, ένας εκπαιδευτικός να σχεδιάσει τη διδασκαλία του προσαρμόζοντάς την στις ιδιαιτερότητες των μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες και παράλληλα, από την προσαρμογή αυτή να επωφεληθούν και άλλοι μαθητές. Με τον τρόπο αυτό, η πρωτοβάθμια πρόληψη μπορεί να ενταχθεί στα πλαίσια της γενικής εκπαίδευσης, χωρίς να απαιτείται εξειδικευμένος χώρος ή υλικό, ώστε να βοηθηθούν τα άτομα με κάποιου τύπου διαταραχή που επηρεάζει την επίδοσή τους στο συγκεκριμένο αντικείμενο, παράλληλα να επωφεληθούν τα άτομα με χαμηλές επιδόσεις (χωρίς απαραίτητα κάποια διαταραχή), ενώ δεν βλάπτονται οι μαθητές μέτριων ή καλών επιδόσεων.

Στόχος της πρωτοβάθμιας πρόληψης είναι να εμποδίσει την εξέλιξη των διαταραχών που πιθανόν να παρουσιάζει κάποιος μαθητής (ή περισσότεροι), στα πλαίσια πάντα της γενικής εκπαίδευσης.

Στην πράξη, η πρωτοβάθμια πρόληψη μπορεί να εφαρμοστεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών, μέσω συγκεκριμένων διδακτικών μεθόδων, οι οποίες είναι απαραίτητο να πληρούν τεκμηριωμένα, βάσει σχετικών ερευνών, τρία κριτήρια:

- Είναι αποτελεσματικές, ειδικότερα για τα Μαθηματικά
- Είναι βοηθητικές για μαθητές με ΜΔ,
- Είναι κατάλληλες να εφαρμοστούν στα πλαίσια ενός καθολικού σχεδιασμού της διδασκαλίας. (Έχει παρατηρηθεί από σχετικές έρευνες ότι είναι κατάλληλες και για μαθητές χωρίς ΜΔ και παράλληλα είναι εφικτή η χρήση τους στο χώρο της γενικής εκπαίδευσης).

Κάποιες τέτοιες διδακτικές μέθοδοι είναι:

- Γρήγοροι ρυθμοί, εναλλασσόμενες εκπαιδευτικές δραστηριότητες, υψηλά επίπεδα εμπλοκής των μαθητών
- Παροχή κινήτρων για υψηλές επιδόσεις
- Μέθοδοι προσωπικής λεκτικής διατύπωσης (self-verbalization)
- Φυσικές ή οπτικές αναπαραστάσεις εννοιών και καταστάσεων

2.3.2. *Δευτεροβάθμια πρόληψη*

Σε περιπτώσεις που η πρωτοβάθμια πρόληψη δεν είναι αρκετή για τη βελτίωση των δεξιοτήτων των μαθητών που παρουσιάζουν κάποια δυσκολία, προσφέρεται η δευτεροβάθμια πρόληψη. Είναι ταυτόσημη με την παρέμβαση προ-παραπομπής (pre-referral intervention) που συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία περί ειδικής αγωγής και εκπαίδευσης. Στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας πρόληψης, η διδασκαλία τροποποιείται βάσει τριών αρχών:

- Πρέπει να είναι εφικτή η ενσωμάτωση των μετατροπών στην φυσιολογική διδακτική ρουτίνα, από τον εκπαιδευτικό γενικής αγωγής
- Οι μετατροπές δεν πρέπει να είναι διασπαστικές για τον μαθητή – στόχο
- Οι μετατροπές δεν πρέπει να είναι ενοχλητικές για τους υπόλοιπους μαθητές

Στόχος της δευτεροβάθμιας πρόληψης είναι να αναστείλει τη σοβαρότητα της διαταραχής ή να αναστρέψει την πορεία της,

- χωρίς «ηρωική» δράση του εκπαιδευτικού γενικής αγωγής, ο οποίος είναι υπεύθυνος για μεγάλο αριθμό μαθητών
- με την ελάχιστη δυνατή παρέμβαση στο μαθητή – στόχο
- με την ελάχιστη δυνατή ενόχληση στους υπόλοιπους μαθητές

Βέβαια, σε αυτό το επίπεδο πρόληψης, ο εκπαιδευτικός καλό θα ήταν να έχει επιπλέον συμβουλευτική στήριξη από ειδικούς, όπως κάποιον εκπαιδευτικό ειδικής αγωγής (ο οποίος πιθανόν να υπάρχει στο σχολείο σε κάποιο τμήμα ένταξης), ή κάποιον ψυχολόγο (αν διαθέτει το σχολείο), ή να έχει συνεργασία με άλλους συναδέλφους.

2.3.3. *Τριτοβάθμια πρόληψη – παρέμβαση*

Σε περιπτώσεις διαταραχών που αντιστέκονται σε χαμηλά επίπεδα πρόληψης και απαιτούν περισσότερο δραστικές πρακτικές, ώστε να αποτραπούν σοβαρές επιπλοκές στη μάθηση, χρησιμοποιείται η τριτοβάθμια πρόληψη, η οποία είναι συνώνυμη με την παρέμβαση. Η παρέμβαση απαιτεί εντατική και εξατομικευμένη παρακολούθηση, εξειδικευμένο υλικό και πηγές και συνήθως παρέχεται από εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής.

Η τριτοβάθμια πρόληψη διακρίνεται από την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια, μέσω τριών διδακτικών αρχών:

- Επικεντρώνεται στο συγκεκριμένο μαθητή, ως μοναδικό παράγοντα λήψεων αποφάσεων για τη διδασκαλία
- Η διδασκαλία είναι εντατική
- Άμεση δόμηση της διδασκαλίας με βάση την εκμάθηση δεξιοτήτων

Η πρώτη από τις τρεις αρχές, δηλαδή η λήψη διδακτικών αποφάσεων με βάση το συγκεκριμένο μαθητή, είναι πιθανότατα το χαρακτηριστικό μιας επιτυχημένης παρέμβασης. Απαιτεί υψηλές προσδοκίες μάθησης και καθηγητές που διαθέτουν κρίση σχετικά με την αποτελεσματικότητα μιας διδακτικής μεθόδου, σε σχέση με το μαθητή. Απαιτεί επίσης από τον εκπαιδευτικό να διαχειριστεί σημαντικές τροποποιήσεις και επανασχεδιασμούς της διδασκαλίας του, ανάλογα με τις προόδους του μαθητή. Τέλος, απαιτεί γνώσεις πολλαπλών τρόπων προσαρμογής της ύλης, των διδακτικών μεθόδων και παροχής κινήτρων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 – ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην πρώτη ενότητα στόχος ήταν να παρουσιαστούν όσο το δυνατόν περισσότερα από τα δεδομένα που χρειάζεται να γνωρίζει ένας μαθηματικός - εκπαιδευτικός της γενικής μέσης εκπαίδευσης, ο οποίος πιθανόν να χρειαστεί να διδάξει το μάθημα της Άλγεβρας σε τάξεις που περιέχουν, εκτός άλλων, και μαθητές με ΜΔ, οι οποίες δυσχεραίνουν τη μάθηση του αντικειμένου.

Στη δεύτερη ενότητα, στόχος είναι να αναπτυχθεί μια πρόταση προσαρμογής της διδασκαλίας της Άλγεβρας στο επίπεδο του Λυκείου, η οποία, κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας θα ενσωματώνει αρχές και τεχνικές που προτείνονται στη σχετική βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση κάποιων από αυτά τα χαρακτηριστικά των μαθητών.

Αναλυτικότερα, στο δεύτερο μέρος της παρούσας μελέτης, παρουσιάζονται ενδεικτικά τρόποι εφαρμογής των διδακτικών μεθόδων κα στρατηγικών, που προτείνονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία, μέσω του σχεδιασμού ενός συνόλου φύλλων εργασίας, τα οποία καλύπτουν πλήρως το κεφάλαιο 2 του σχολικού εγχειριδίου Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου «Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις». Το συγκεκριμένο μάθημα διδάσκεται ως μάθημα γενικής παιδείας, δηλαδή το παρακολουθούν υποχρεωτικά όλοι οι μαθητές, ανεξαρτήτως της επιλεγόμενης κατεύθυνσης.

Τα προτεινόμενα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν με βάση τις θεωρητικές προσεγγίσεις που μελετήθηκαν στο προηγούμενο μέρος, με στόχο να εφαρμοστούν σε ένα μάθημα πρωτοβάθμιας πρόληψης (όπως αυτή ορίζεται από τους Fuchs & Fuchs, 2001). Έτσι, ο τρόπος παρουσίασης της ύλης είναι προσαρμοσμένος ώστε να καλύπτει τις ανάγκες, από τη μία της γενικής τάξης και από την άλλη των μαθητών που πιθανόν να υπάρχουν μέσα σε αυτήν και να παρουσιάζουν κάποιου τύπου δυσκολίες στα Μαθηματικά.

3. ΑΦΕΤΗΡΙΑ – ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

3.1. Υποθέσεις σχετικά με τη σύσταση της τάξης

Τα προτεινόμενα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν να εφαρμοστούν από εκπαιδευτικούς της γενικής παιδείας, οι οποίοι θα διδάξουν Άλγεβρα σε γενική τάξη Λυκείου. Έτσι, η παρουσίαση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, ακολουθεί το αναλυτικό πρόγραμμα και απευθύνεται σε συνηθισμένες τάξεις. Σε τάξεις δηλαδή, που ποικίλουν ως προς τη σύσταση, με κριτήρια όπως το βαθμό ενδιαφέροντος των μαθητών, το γνωστικό τους επίπεδο, το φύλο, το βαθμό δυσκολιών τους, την κοινωνική τάξη από την οποία προέρχονται.

Το σημείο στο οποίο η συγκεκριμένη πρόταση διαφοροποιείται, είναι ότι υποθέτει, εκτός άλλων και την ύπαρξη μαθητικού πληθυσμού με κάποιου είδους ΜΔ, οι οποίες επηρεάζουν την επίδοσή τους και στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Με βάση την παραπάνω υπόθεση, ενσωματώνει αρχές διδακτικών μεθόδων και διδακτικές τεχνικές, οι οποίες προτείνονται ως βοηθητικές από τη βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτού του τμήματος της τάξης, χωρίς παράλληλα να βλάπτεται το υπόλοιπό της.

Επειδή οι πηγές των δυσκολιών στο αντικείμενο της Άλγεβρας ποικίλουν μεταξύ των μαθητών και επειδή διαφορετικού τύπου δυσκολίες απαιτούν διαφορετική αντιμετώπιση, δεν είναι δυνατόν μία και μόνο πρόταση να καλύπτει όλων των ειδών τις πιθανές εκπαιδευτικές ανάγκες. Για το λόγο αυτό, θα υποτεθεί στη συνέχεια ότι οι μαθητές με ανάγκη ειδικής προσαρμογής της διδασκαλίας, που υπάρχουν στην τάξη στην οποία απευθύνεται η πρόταση, παρουσιάζουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Μια τέτοια υπόθεση βέβαια, δε σημαίνει ότι μόνο για τέτοιου είδους μαθητές μπορεί να εφαρμοστεί πρωτοβάθμια πρόληψη. Αντιθέτως, δείχνει στην πράξη το πώς, ανάλογα με την περίπτωση των αναγκών, μπορεί ο εκπαιδευτικός να επιλέγει τις εκάστοτε κατάλληλες μεθόδους και στρατηγικές και να τις ενσωματώνει στη συνέχεια στο γενικό σχεδιασμό της διδασκαλίας του.

Για τις ανάγκες ανάπτυξης της πρότασης, υποτίθεται ότι στην τάξη στην οποία απευθύνεται υπάρχουν μαθητές με δυσκολίες στη μνήμη, σε λεκτικές και μεταγνωστικές δεξιότητες. Οι λόγοι επιλογής των χαρακτηριστικών αυτών, επεξηγούνται στη συνέχεια.

- **<u>ασθενής μνήμης (βραχύχρονη, μακρόχρονη, μνήμη εργασίας)</u>**

Έχει ήδη συζητηθεί, στο πρώτο μέρος της εργασίας, η ισχυρή σχέση της επίδοσης στα Μαθηματικά με τη λειτουργία του μνημονικού μηχανισμού. Μάλιστα, οι περισσότερες μελέτες καταδεικνύουν την ασθενή μνήμη εργασίας, ως σταθερά εμφανιζόμενο χαρακτηριστικό των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά, γεγονός που θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη από τους εκπαιδευτικούς, κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας.

- **<u>ασθενείς λεκτικές δεξιότητες /ισχυρές οπτικο – χωρικές δεξιότητες</u>**

Όπως συζητήθηκε νωρίτερα, η γνώση εκ μέρους του εκπαιδευτικού, των ενδοατομικών διαφορών των μαθητών σε λεκτικές και οπτικο-χωρικές δεξιότητες, του παρέχει τη δυνατότητα να προσεγγίζει τη διδασκαλία, βασιζόμενος στις δεξιότητες εκείνες που παρουσιάζονται ισχυρότερες και παρακάμπτωντας, στο βαθμό που είναι δυνατό, τις αδυναμίες τους.

Εξάλλου, η «κατάταξη» των μαθητών – στόχων σε έναν εκ των δύο τύπων δυσκολιών (υψηλότερες λεκτικές – χαμηλότερες οπτικο-χωρικές δεξιότητες, ή χαμηλότερες λεκτικές – υψηλότερες οπτικο-χωρικές δεξιότητες) είναι ουσιαστικής σημασίας, αφού από την κατηγοριοποίηση των ΕΜΔ στα Μαθηματικά, προκύπτει ότι μαθητές και των δύο τύπων μπορεί να παρουσιάσουν σοβαρές δυσκολίες στο αντικείμενο.

• **<u>Δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες</u>**

Ένα επίσης σύνηθες χαρακτηριστικό των μαθητών με ΜΔ, αποτελούν οι δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες, οι οποίες επηρεάζουν την επίδοση σε διάφορους τομείς με ποικίλους τρόπους. Η επιλογή και εφαρμογή των εκάστοτε κατάλληλων γνωστικών στρατηγικών, η μεταφορά της μάθησης από τη μία κατάσταση στην άλλη και η γενίκευση, χαρακτηριστικά τα οποία επισημαίνονται ως αδυναμίες των μαθητών με ΜΔ, αποτελούν ουσιαστικά ζητούμενα για τη βαθμίδα του Λυκείου.

3.2. Επιλογή της διδακτέας ύλης

Στο επόμενο στάδιο, επιλέχθηκε να διδαχτεί το κεφάλαιο 2 περί πολυωνύμων, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο της Άλγεβρας Β' Λυκείου και ακολουθώντας την ύλη που προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας.

Η επιλογή του κεφαλαίου έγινε με κριτήριο τη χρησιμότητα του περιεχομένου του σε τρία επίπεδα:

<u>Α) Σε σχέση με το περιεχόμενο του μαθήματος σε προηγούμενες τάξεις:</u>

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο προσφέρεται για διερεύνηση, εκ μέρους του καθηγητή, των πιθανών ελλείψεων των μαθητών από προηγούμενες τάξεις, αφού μέσα σε αυτό εμφανίζονται έννοιες και μέθοδοι που έχουν διδαχτεί ήδη όπως η επίλυση εξισώσεων, η πρωτοβάθμια και η δευτεροβάθμια εξίσωση και ανίσωση, ο χειρισμός αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές, η παραγοντοποίηση κ.α.

Επίσης, λόγω της διαρκούς χρήσης αυτών των προηγούμενων γνώσεων, προσφέρεται για την κάλυψη των πιθανών «κενών» των μαθητών, μέσω της συνεχούς εφαρμογής τους.

<u>Β) Σε σχέση με το περιεχόμενο του μαθήματος στη συγκεκριμένη τάξη:</u>

Η δομή του σχολικού εγχειριδίου της Άλγεβρας στη Β΄ Λυκείου, καθιστά το κάθε κεφάλαιο κατά κάποιο τρόπο ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Έτσι, ο σχεδιασμός της διδασκαλίας ενός από τα κεφάλαια που περιλαμβάνονται, εξυπηρετεί του στόχους της παρούσας εργασίας, ως προς τη συνοχή και το μέγεθος.

Επιπλέον, η δομή του ίδιου του κεφαλαίου είναι αρκετά σαφής, με αρχή – μέση και τέλος, σύμφωνα με τη γνώμη της συγγραφέως.

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου κατά κάποιο τρόπο «συνδέει» διάσπαρτες μαθηματικές γνώσεις προηγούμενων ετών, για την επίτευξη συγκεκριμένου στόχου, ο οποίος τίθεται εξαρχής (επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων). Έτσι, τα Μαθηματικά αποκτούν νόημα και οι προηγούμενες γνώσεις λόγο ύπαρξης.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, γίνεται επίσης γενίκευση ήδη γνωστών εννοιών και ζητείται από τους μαθητές ουσιαστική χρήση της αφηρημένης σκέψης, ζητούμενο που αναφέρεται ευθέως στο Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (ΕΠΠΣ), ως πρωταρχικής σημασίας σε αυτήν τη βαθμίδα. Η αφηρημένη σκέψη είναι ταυτόχρονα μία από τις αδυναμίες αρκετών μαθητών με ΜΔ, γεγονός που αποτελεί πρόκληση, κατά το εγχείρημα της προσαρμογής της διδασκαλίας, ώστε να καλύπτει τις ανάγκες αυτής της κατηγορίας μαθητών.

<u>Γ) Σε σχέση με το περιεχόμενο του μαθήματος στην επόμενη τάξη:</u>

Οι γνώσεις που θα αποκτηθούν από το κεφάλαιο αυτό, είναι προαπαιτούμενες για τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, τα οποία θα διδαχτούν όλοι οι μαθητές στη Γ' Λυκείου, ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης που θα επιλέξουν (π.χ. για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων με στόχο την εύρεση ορίων, την εύρεση ριζών πολυωνύμων με στόχο την εύρεση ακρότατων συνάρτησης, το χειρισμό παραστάσεων με μεταβλητές γενικότερα κατά την εύρεση παραγώγων συναρτήσεων κ.α.).

Επίσης, παρουσιάζεται η έννοια του πολυωνύμου, ως συνάρτησης μιας μεταβλητής και αποδεικνύονται θεωρήματα για αυτήν τη συνάρτηση, χωρίς να εμπλέκεται κάθε φορά ο ακριβής τύπος της. Έτσι, οι τεχνικές και οι τρόποι προσέγγισης που θα αναπτυχθούν, θα μπορούν να εφαρμοστούν στο μέλλον σε απόδειξη θεωρημάτων που περιέχουν και άλλου είδους συναρτήσεις.

3.3. Στόχοι και οδηγίες από το Υπουργείο Παιδείας

Οι στόχοι που προτείνει το ΕΠΠΣ των Μαθηματικών για το επιλεγμένο κεφάλαιο είναι οι εξής:

Στόχοι	**Περιεχόμενα**
Με κατάλληλες δραστηριότητες οι μαθητές αναμένεται να καταστούν ικανοί να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις και εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.	Θα οριστούν η πολυωνυμική συνάρτηση και οι πράξεις με πολυωνυμικές συναρτήσεις. Για τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων θα χρησιμοποιηθούν μέθοδοι και κριτήρια εύρεσης πιθανών ριζών.

Οι επιπλέον οδηγίες (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007) που παρέχονται στους εκπαιδευτικούς ως προς την οργάνωση, τη δομή, αλλά και τους επιμέρους στόχους αναφέρουν για το κεφάλαιο:

- *Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.* (Στο εβδομαδιαίο πρόγραμμα του σχολείου, διατίθενται 2 διδακτικές ώρες για το συγκεκριμένο μάθημα).

- *Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνονται και συμπληρώνονται όσα έχουν διδαχθεί μέχρι τώρα οι μαθητές σχετικά με τα πολυώνυμα και τις πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.*
- *Επιχειρείται μια πρώτη παρουσίαση του προσδιορισμού ρίζας μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με προσέγγιση.* (Επισημαίνεται ότι η συγκεκριμένη παράγραφος έχει αφαιρεθεί από τη διδακτέα ύλη για το σχολικό έτος 2009 – 2010, κατά το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάπτυξη της πρότασης).
- *Για να επιτευχθεί ο στόχος της ολοκλήρωσης της ύλης **δεν είναι σκόπιμη** η επέκταση σε δύσκολες ασκήσεις θεωρίας πολυωνύμων και σε μορφές εξισώσεων που άλλοτε αποτελούσαν ενότητες της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών (π.χ. αντίστροφες εξισώσεις, διτετράγωνες, με ριζικά) και οι οποίες σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις δεν αποτελούν πια κύρια ύλη του μαθήματος.*

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

§	***Ώρες***	***Στόχοι***
2.1	*2*	***i)*** *Να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε μια αλγεβρική παράσταση της πραγματικής μεταβλητής x, είναι πολυώνυμο και να διακρίνουν τα στοιχεία του:* ***όροι, συντελεστές, σταθερός όρος*** *και* ***βαθμός****.*
		ii) *Να καταλάβουν τις έννοιες: σταθερό πολυώνυμο – μηδενικό πολυώνυμο - ίσα πολυώνυμα - αριθμητική τιμή πολυωνύμου -ρίζα πολυωνύμου.*
		iii) *Να μπορούν να αντιδιαστέλλουν τις έννοιες:* *α) Μηδενικό πολυώνυμο -Τιμή πολυωνύμου ίση με το μηδέν.* *β) Ίσα πολυώνυμα - Πολυώνυμα ίσα για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.*
		iv) *Να μπορούν να προσθέτουν, να αφαιρούν και να*

		πολλαπλασιάζουν πολυώνυμα.
2.2	*6*	***i)*** *Να κατανοήσουν την αλγοριθμική διαίρεση πολυωνύμων με πρότυπο την αλγοριθμική διαίρεση μεταξύ θετικών ακεραίων.*
		ii) *Να μπορούν να κάνουν τη διαίρεση πολυωνύμων και να γράφουν την ταυτότητα της διαίρεσης.*
		iii) *Να κατανοήσουν γιατί κάθε πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με* $x-\rho$ *παίρνει τη μορφή:* $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$ *και να μπορούν με βάση την ταυτότητα αυτή:* *α)Να υπολογίζουν το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x− ρ)* *β)Να αποδεικνύουν ότι:* $P(\rho)=0 \Rightarrow P(x)=(x-\rho)\pi(x)$
		iv) *Να μπορούν να κάνουν χρήση του σχήματος Horner για τον υπολογισμό των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (μέθοδος προσαρμόσιμη σε υπολογιστή) καθώς και του πηλίκου και του υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμου με πρωτοβάθμιο παράγοντα.*
2.3	*3*	***i)*** *Να εμπεδώσουν τον τρόπο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού* $\nu \geq 2$ *με παραγοντοποίηση, που ήδη έχουν διδαχθεί*
		ii) *Να κατανοήσουν το θεώρημα των ακέραιων ριζών και τη σχετική απόδειξη.*
		iii) *Να εφαρμόζουν το προηγούμενο θεώρημα στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (ανισώσεων) με ακεραίους συντελεστές.*
2.4	*1*	*Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις, των οποίων η επίλυση ανάγεται στη επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων γνωστής μορφής.*

4. ΓΕΝΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η αρχική προσαρμογή που παρουσιάζεται στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου, είναι αυτή του καταμερισμού της διδακτέας ύλης ανά ωριαίο μάθημα. Παράλληλα, οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος που προτείνεται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο αναλύονται σε επιμέρους, ενώ προστίθενται επιπλέον στόχοι, που εξυπηρετούν τις εξειδικευμένες ανάγκες των μαθητών με ΜΔ της τάξης. Τέλος, προσαρμόζεται η σειρά επίτευξης αυτών των στόχων, όπου κρίνεται απαραίτητο, σε κάθε περίπτωση χωρίς να απλοποιούνται ή να παραλείπονται κάποιοι από αυτούς, αφού όπως προειπώθηκε, η προτεινόμενη διδασκαλία απευθύνεται σε συνηθισμένες τάξεις και δεν θα πρέπει να επηρεάζει αρνητικά την πρόοδο των υπολοίπων μαθητών.

Κατά τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, δεν ήταν δυνατή η εφαρμογή της πρότασης που περιγράφεται σε πραγματική τάξη. Έτσι, ο πλήρης σχεδιασμός της διδασκαλίας γίνεται εκ των προτέρων, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξ ολοκλήρου κάποια από τις προτεινόμενες μεθόδους διδασκαλίας, αφού δεν είναι δυνατός ο ανασχεδιασμός, με βάση την παρατήρηση και τα αποτελέσματα της εφαρμογής στους ίδιους τους μαθητές. Αντί αυτού, επιλέγονται από τις προτεινόμενες μεθόδους διδασκαλίας κάποιες βασικές αρχές, οι οποίες ενσωματώνονται στην παρουσίαση των εννοιών και των εφαρμογών αυτών, κατά περίπτωση. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μαθηματική γνώση παρέχεται μέσω της άμεσης και της ευθείας διδασκαλίας, οι οποίες αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως οι περισσότερο ενδεδειγμένες μέθοδοι για μαθητές με ΜΔ. Όπου κρίθηκε εφικτό, πάντως, ενσωματώθηκαν ενδεικτικά κάποια στοιχεία έμμεσης διδασκαλίας, καθώς επίσης και στοιχεία της διδασκαλίας μέσω συνομηλίκων.

Το κύριο μέσο που χρησιμοποιείται για να επιτευχθούν οι επιλεγμένοι στόχοι είναι δομημένα φύλλα εργασίας, τα οποία αποτελούν ένα από τα περισσότερο διαδεδομένα μέσα κατά την εφαρμογή άμεσης και ευθείας διδασκαλίας. Οι πληροφορίες είναι οργανωμένες από τον εκπαιδευτικό με τρόπο, ώστε μετά τη συμπλήρωσή του, το κάθε φύλλο εργασίας να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την ανεξάρτητη μελέτη στο σπίτι. Για τον ίδιο λόγο περιλαμβάνονται σημειώσεις του μαθήματος, κατά την τήρηση των οποίων οι μαθητές με ΜΔ πιθανόν να δυσκολεύονται. Οι εκάστοτε συνθήκες της τάξης μπορούν να προσδιορίσουν τον τρόπο χρήσης των προτεινόμενων φύλλων εργασίας, τα οποία είναι πιθανόν να ενταχθούν στα πλαίσια μετωπικής διδασκαλίας, ή οι μαθητές μπορούν να εργάζονται ανεξάρτητα, ανά ζεύγη, ή σε ομάδες με την παράλληλη εποπτεία και καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.

Από τις διαθέσιμες τεχνικές διδασκαλίας, επιλέγονται εκείνες οι οποίες φαίνεται να εξυπηρετούν περισσότερο τις ανάγκες των μαθητών της τάξης, που παρουσιάζουν τις υποτιθέμενες δυσκολίες. Η επιλογή γίνεται με προσοχή, ώστε η εφαρμογή των τεχνικών αυτών να μην εμποδίζει με κάποιο τρόπο τη μάθηση των υπολοίπων μαθητών, ή εάν είναι δυνατόν, να βοηθά και κάποιους από αυτούς. Στο υποθετικό σενάριο τάξης για το οποίο σχεδιάστηκε η πρόταση, οι βασικές αρχές αποτελεσματικής διδασκαλίας, οι οποίες κρίθηκε ότι πρέπει να ληφθούν υπόψη, οι τεχνικές που φαίνονται περισσότερο κατάλληλες και οι τρόποι με τους οποίους ενσωματώνονται στη διδασκαλία, αναλύονται στις επόμενες τρεις παραγράφους του κεφαλαίου. Η παρουσίασή των γίνεται με βάση το σημείο στο οποίο ενσωματώνονται και τη δυσκολία, στην αντιμετώπιση της οποίας εξυπηρετούν, αν και σε αρκετές περιπτώσεις κάποια τεχνική πιθανόν να είναι βοηθητική για περισσότερα από ένα είδη δυσκολιών.

4.1. Αντιμετώπιση δυσκολιών

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων στη μνήμη, τη γλώσσα και τις μεταγνωστικές δεξιότητες ενσωματώνεται σε όλα τα φύλλα εργασίας ποικιλία βοηθημάτων και τεχνικών, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό.

4.1.1. Προ-οργανωτής

Σε κάθε φύλλο εργασίας δίνεται ένας σαφής και σύντομος τίτλος, ο οποίος εμφανίζεται με τρόπο που ο μαθητής να μπορεί να τον εντοπίσει άμεσα (μεγάλα και έντονα γράμμα, ιδιαίτερο χρωματισμό). Σε περιπτώσεις που το μάθημα περιέχει περισσότερες από μία υποενότητες και αντικείμενα προς μάθηση, ο τίτλος του φύλλου εργασίας ακολουθείται από ένα «χάρτη» των περιεχομένων του, ο οποίος παρουσιάζεται μέσω ενός γραφικού οργανωτή, σε μορφή κατάλληλη για να περιγράψει τα εκάστοτε στοιχεία.

Ένας γενικός τίτλος και ένας γραφικός οργανωτής στην αρχή κάθε φύλλου εργασίας, βοηθούν τους μαθητές με προβλήματα μνήμης να οργανώσουν τις πληροφορίες που εμφανίζονται, παρέχει τις συνδέσεις μεταξύ των εννοιών, τις οποίες δυσκολεύονται να δημιουργήσουν μόνοι τους (δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες) και με τον τρόπο αυτό διευκολύνουν την αποθήκευσή τους στη μακρόχρονη μνήμη. Ταυτόχρονα, σε περιπτώσεις επαναλήψεων, ο συνδυασμός αυτών μπορεί να αποτελέσει ένα «χάρτη» ολόκληρου του κεφαλαίου, επιπλέον βοήθημα για τη μακρόχρονη μνήμη.

Ακόμα, με τον τρόπο αυτό γίνονται σαφείς οι στόχοι και τα περιεχόμενα του συγκεκριμένου μαθήματος, ώστε οι μαθητές να γνωρίζουν τι αναμένεται, τις νέες έννοιες, τις μεθόδους και τις περισσότερο χρήσιμες πληροφορίες (σύμφωνα με τη γνώμη του εκπαιδευτικού) που αναφέρονται σε αυτό, κάτι που υποστηρίζεται ως μία από τις γενικές αρχές αποτελεσματικής διδασκαλίας.

Σε κάθε φύλλο εργασίας, η μορφή του προ-οργανωτή είναι επιλεγμένη με τρόπο ώστε να βασίζεται περισσότερο σε οπτικο-χωρικές αντιληπτικές ικανότητες, περιέχει κατά το δυνατόν λιγότερες λέξεις και περισσότερες εικόνες, τα μεγέθη, χρώματα και σχήματα των οποίων είναι επιλεγμένα προσεκτικά, ώστε να κάνουν ξεκάθαρο το στόχο και τις συνδέσεις μεταξύ των στοιχείων του οργανωτή.

4.1.2. Παρουσίαση Φύλλων Εργασίας

Η παρουσίαση όλων των φύλλων εργασίας γίνεται με παρόμοιο τρόπο, λαμβάνοντας υπόψη πως κάποιοι από τους μαθητές προτιμούν την οπτική δίοδο πρόσληψης των πληροφοριών. Εμφανίζονται σταθερά σχήματα σηματοδότησης διαφορετικών ενεργειών, καθώς επίσης και πλαίσια ειδικής μορφής για τα διαφορετικά είδη πληροφοριών που πρέπει να απομνημονευθούν (ορισμοί, θεωρήματα, αποδείξεις). Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται υπογράμμιση, χρωματισμός, έντονα και μεγάλα γράμματα για την εμφανιζόμενη ορολογία, η οποία παρουσιάζεται περιγραφικά, χωρίς αυστηρό ορισμό. Επίσης, για την διευκόλυνση μαθητών με δυσκολίες σε λεκτικές δεξιότητες, χρησιμοποιούνται έντονα γράμματα για λέξεις ή φράσεις οι οποίες περιέχονται σε κείμενα μεγάλου σχετικά μεγέθους, ώστε να μπορεί να εξαχθεί το περιεχόμενο του κειμένου σε αδρές γραμμές. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι κατά το δυνατόν απλή και οι προτάσεις κατά την περιγραφή κάποιου φαινομένου σύντομες.

Επίσης, ενσωματώνονται εικονίδια και λέξεις – κλειδιά (όπως «θυμάμαι», ◈, 🖭, ✐) για τον προσδιορισμό συγκεκριμένου είδους εργασιών κάθε φορά.

Σε διάφορα σημεία των φύλλων εργασίας, όποτε κρίνεται από τον εκπαιδευτικό ότι οι παρεχόμενες πληροφορίες είναι αρκετές σε πλήθος και μπορούν να οργανωθούν καλύτερα σε ένα σχήμα, παρέχεται κάποιο είδος οργανωτή, ανάλογα με το είδος των εμπλεκόμενων εννοιών και του σκοπού που εξυπηρετεί ο συγκεκριμένος οργανωτής.

Η δομή του εσωτερικού των ενοτήτων είναι παρόμοια σε όλα τα φύλλα εργασίας, με ερωτήσεις, παροτρύνσεις, σύντομες και σαφείς ερωτήσεις αρχικά, παροχή καθοδηγούμενης εξάσκησης εφαρμογής των νέων γνώσεων, ενώ σταδιακά η εξάσκηση γίνεται περισσότερο ανεξάρτητη. Επιπλέον, οι ασκήσεις που προτείνονται για ανεξάρτητη εξάσκηση είναι προσεκτικά επιλεγμένες, ώστε να μην παρουσιάζονται σε αυτές φαινόμενα, τα οποία δεν έχουν μελετηθεί κατά τη διδασκαλία.

4.1.3. Κλιμακωτή Διδακτική Ακολουθία

Αν και έγινε ιδιαίτερη προσπάθεια να ανακαλυφθούν τρόποι ενσωμάτωσης της κλιμακωτής διδακτικής ακολουθίας CRA, όπως προτείνεται από τη βιβλιογραφία, αυτή δεν είχε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Ειδικά για το πρώτο στάδιο, το συγκεκριμένο, η διδακτέα ύλη φαίνεται να μη διευκολύνει τη χρήση του. Αν και ο τίτλος του κεφαλαίου είναι «Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις», θεωρείται ότι οι μαθητές έχουν ήδη διδαχτεί την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων και μάλιστα ξεκινώντας από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού σχολείου, αλλά και δευτεροβάθμιων στο Γυμνάσιο και στην προηγούμενη τάξη του Λυκείου.

Από την άλλη, για μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αφηρημένη σκέψη, χαρακτηριστικό στόχο των Μαθηματικών στη βαθμίδα του Λυκείου, η λογική της κλιμάκωσης της διδακτικής ακολουθίας, όπως γίνεται κατανοητή από τη συγγραφέα, θα μπορούσε να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη και αποτελεσματική. Έναν τρόπο παρουσίασης των νέων γνώσεων (όπως ορισμών, θεωρημάτων και εφαρμογών αυτών, μεθόδους επίλυσης προβλημάτων), σύμφωνα με αυτή τη λογική, θα μπορούσε να αποτελέσει η εισαγωγή αυτών μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, με πραγματικούς αριθμούς στη θέση των παραμέτρων, ενώ η διδακτική ακολουθία συγκεκριμένο – αναπαριστώμενο – αφηρημένο, θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την ακολουθία ειδικό – σύνηθες – γενικό. Με αυτό το σκεπτικό, επιχειρείται σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας, σε πρώτο στάδιο (ειδικό) η μελέτη συγκεκριμένων παραδειγμάτων, σε δεύτερο στάδιο (σύνηθες) η γενίκευση αυτών σε συνηθισμένες σχετικές καταστάσεις, ενώ στο τρίτο και τελευταίο στάδιο (γενικό) παρουσιάζονται οι αυστηροί ορισμοί και οι αυστηρές διατυπώσεις των θεωρημάτων, στις οποίες περιλαμβάνονται και οι «ακραίες» και λιγότερο συνηθισμένες περιπτώσεις.

4.1.4. Διδασκαλία Στρατηγικών

Η ενσωμάτωση διδασκαλίας συγκεκριμένων, προσχεδιασμένων γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών γίνεται με ποικίλους τρόπους και σε διάφορα σημεία της διδασκαλίας.

Παράδειγμα στρατηγικής που παρουσιάζεται από το πρώτο φύλλο εργασίας και η χρήση της διατηρείται μέχρι τέλους, αποτελεί ένα πλαίσιο σημειώσεων έπειτα από κάθε νέο ορισμό. Ζητείται από τους μαθητές να παρατηρήσουν και να σημειώσουν σε αυτό τις λεπτομέρειες του ορισμού, που κατά την πρώτη προσέγγιση δεν είχαν αξιολογήσει. Ο τρόπος συμπλήρωσης του πλαισίου διδάσκεται με άμεσο τρόπο, ενώ η χρήση του ενισχύεται από προτροπές, οι οποίες σταδιακά γίνονται συντομότερες. Απώτερος στόχος είναι τελικά οι μαθητές να αναστοχάζονται έπειτα από την ανάγνωση ενός νέου ορισμού, ανεξάρτητα από εκπαιδευτική προτροπή.

Μία δεύτερη διδασκόμενη γνωστική στρατηγική, αποτελεί η παρουσίαση μικρού μεγέθους πινάκων συχνής ανασκόπησης των νέων εννοιών και των συμπερασμάτων που προέκυψαν. Σε αυτούς περιέχονται οι έννοιες που εμφανίστηκαν μέχρι το συγκεκριμένο σημείο, για να συμπληρωθούν με λίγες λέξεις, ή ένα παράδειγμα που θα θυμίζει στους μαθητές σε τι αντιστοιχούν. Στόχος, πέρα από την ενίσχυση της κατανόησης και της μνήμης αυτών (ελλείμματα βραχύχρονης μνήμης και πιθανόν προσοχής), είναι και η μελλοντική ανεξαρτητοποίηση των μαθητών, οι οποίοι παρακινούνται να ενισχύουν οι ίδιοι την κατανόησή τους με τον παραπάνω τρόπο.

Τέλος, παρουσιάζονται αρκετές στρατηγικές αυτορρύθμισης κατά τη διάρκεια σύνθετων εργασιών, με πολλαπλά λογικά βήματα (π.χ. για επίλυση σύνθετων προβλημάτων, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων, για την επίλυση ρητών εξισώσεων και ανισώσεων κ.α.). Κατά τη διδασκαλία αυτών εμπεριέχονται τρόποι αναγνώρισης των απαιτήσεων του έργου, επιλογή της κατάλληλης από τις γνωστές στρατηγικές, παρακολούθησης του έργου και ελέγχου των αποτελεσμάτων, τρόποι δηλαδή ενίσχυσης των μεταγνωστικών δεξιοτήτων στις οποίες υποτέθηκε ότι παρουσιάζουν δυσκολίες κάποιοι εκ των μαθητών. Παρέχονται επίσης μνημονικά βοηθήματα (λέξεις – κλειδιά, φράσεις) για την επιπλέον ενίσχυση της απομνημόνευσης των παραπάνω στρατηγικών.

4.1.5. Ανασκοπήσεις

Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες στη βραχυπρόθεσμη μνήμη, κατά την εισαγωγή νέων εννοιών, γίνονται συχνές αναφορές στις βασικές πληροφορίες που πρέπει να απομνημονευθούν, παρουσίαση αυτών με αρκετούς εναλλακτικούς τρόπους και μέσα από σχετικά παραδείγματα, ώστε να αυξηθούν οι πιθανότητες πρόσληψης των απαιτούμενων πληροφοριών από τους μαθητές. Συχνά, έπειτα από την παρουσίαση μιας ομάδας νέων εννοιών, παρέχεται κάποιος σχετικός πίνακας σύντομης ανασκόπησης, ως περεταίρω βοήθεια σε μαθητές με ασθενή βραχυπρόθεσμη μνήμη ή δυσκολίες στη διατήρηση της προσοχής, η οποία όπως σημειώθηκε στο θεωρητικό μέρος, αλληλεπιδρά με τη μνήμη.

Επίσης, για την αντιμετώπιση των ίδιων δυσκολιών, οι έννοιες παρουσιάζονται όσο το δυνατόν με μεγαλύτερη συχνότητα, μέσα από απλές ερωτήσεις υπενθύμισης – ελέγχου για παλαιότερες έννοιες (δομημένες σε πίνακες με ήδη γνωστούς από προηγούμενες τάξεις όρους, για τη συμπλήρωση των οποίων θα πρέπει να ανακαλέσουν τις αντίστοιχες έννοιες), επαναληπτικές ασκήσεις σε παλαιότερες γνώσεις (όπως π.χ. για την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού) και ερωτήσεις ελέγχου, για τον έλεγχο της κατανόησης και της διατήρησης της προσοχής, καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας του κεφαλαίου.

Στο τέλος κάθε φύλλου εργασίας, προτείνεται ένας ακόμα πίνακας σύνοψης όλου του περιεχομένου του, βοήθημα για τη μακροπρόθεσμη μνήμη, το οποίο παρουσιάζεται με τη μορφή μετα-οργανωτή και αναλύεται στη συνέχεια.

Για την αποφυγή πολλών διαφορετικών οδηγιών, οι οποίες πιθανόν να δυσκολέψουν τη χρήση των φύλλων εργασίας, επιλέχτηκε οι «ερωτήσεις υπενθύμισης – ελέγχου», οι «πίνακες συχνής ανασκόπησης», όπως και οι «πίνακες σύνοψης», να εμφανίζονται προς τους μαθητές με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και με την ένδειξη «ΘΥΜΑΜΑΙ», η οποία προσδιορίζει τον κύριο στόχο και των δύο στρατηγικών: την ενίσχυση της μνήμης, άλλοτε βραχύχρονης και άλλοτε μακρόχρονης.

4.1.6. Μετα-οργανωτής

Μνημονικό βοήθημα για μαθητές με δυσκολίες στη μακροπρόθεσμη μνήμη, θα μπορούσε να αποτελέσει ένας πίνακας τριών στηλών (μετα-οργανωτής) στο τέλος κάθε φύλλου εργασίας. Στην πρώτη στήλη του, ο καθηγητής σημειώνει εκ των πρότερων τις πληροφορίες που πρέπει να απομνημονευθούν και οι μαθητές συμπληρώνουν κάποιες λέξεις, παραδείγματα, ή οτιδήποτε άλλο τους βοηθά να απομνημονεύσουν την πληροφορία, επιλέγοντας κάποια από τα στοιχεία που παρουσιάστηκαν από τον εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Με τον τρόπο αυτό γίνεται σεβαστό το προσωπικό στυλ μάθησης του κάθε μαθητή χωριστά (αρχές διαφοροποιημένης διδασκαλίας), αλλά παράλληλα αποφεύγονται οι παρανοήσεις, αφού η κάθε πληροφορία έχει παρουσιαστεί με πολλαπλούς τρόπους, από τους οποίους ο μαθητής επιλέγει αυτόν που κατανοεί περισσότερο και «ταιριάζει» στον τρόπο σκέψης του.

Απώτερος στόχος και σε αυτή τη διδασκόμενη στρατηγική είναι η τελική ανεξάρτητη εργασία των μαθητών με τον προτεινόμενο τρόπο, μετά το πέρας της διδασκαλίας.

4.2. Σχεδιάγραμμα διδασκαλίας

Η πρόταση περιλαμβάνει ένα σχέδιο διδασκαλίας του κεφαλαίου σε 12 διδακτικές ώρες, όπως προβλέπεται από το ΕΠΠΣ Μαθηματικών, μέσω κάτάλληλα σχεδιασμένων φύλλων εργασίας, τα οποία θα απευθύνονται στη γενική τάξη.

Για το λόγο αυτό, δεν παραλείπονται μέρη της ύλης, ούτε απλοποιούνται οι προτεινόμενοι στόχοι. Απλά, ενσωματώνονται αρχές και τεχνικές, οι οποίες προτείνονται για τη βελτίωση της παρεχόμενης διδασκαλίας σε μαθητές με δυσκολίες στο αντικείμενο, χωρίς ταυτόχρονα να βλάπτονται οι υπόλοιποι μαθητές. Με βάση αυτές τις αρχές, κατά την εφαρμογή επιλέχθηκε να τροποποιηθεί σε κάποιο βαθμό η σειρά παρουσίασης των νέων εννοιών και των μεθόδων επίλυσης σχετικών προβλημάτων. Επίσης, επιλέχθηκε να γίνει μικρή διαφοροποίηση, ως προς τις διδακτικές ώρες που αφιερώνονται σε κάθε στόχο.

Οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτές τις τροποποιήσεις, θα αναλυθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο, όπου χρειάζεται (σύμφωνα πάντα με την άποψη της συγγραφέως) να συμβεί κάτι τέτοιο.

Έπειτα από τις προαναφερθείσες τροποποιήσεις, αλλά με βάση κυρίως τις οδηγίες που παρέχει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στους εκπαιδευτικούς, οι ενότητες που διδάσκονται και οι στόχοι που τίθενται σε κάθε ωριαίο μάθημα φαίνονται στη συνέχεια:

<u>Μάθημα 1: Εισαγωγή στην έννοια του πολυωνύμου – στοιχεία πολυωνύμου</u>

§2.1

- Να αναγνωρίζουν πότε μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο.
- Να αναγνωρίζουν πότε μια αλγεβρική παράσταση είναι πολυώνυμο.
- Να διακρίνουν τα στοιχεία του πολυωνύμου: όροι, συντελεστές, σταθερός όρος.

- Να μπορούν να αναγνωρίζουν ποια στοιχεία του πολυωνύμου εννοούνται κατά τη γραφή του και μπορούν να παραλειφθούν.
- Να καταλάβουν τις έννοιες: σταθερό πολυώνυμο, μηδενικό πολυώνυμο.
- Να διακρίνουν το βαθμό μη σταθερών, σταθερών πολυωνύμων και του μηδενικού πολυωνύμου.

Μάθημα 2: Εισαγωγή στην έννοια του πολυωνύμου – αριθμητική τιμή πολυωνύμου

§2.1

- Να μπορούν να γράψουν ένα πολυώνυμο στην κανονική του μορφή.
- Να μπορούν να αναγνωρίζουν τα στοιχεία ενός πολυωνύμου, όταν αυτό δεν είναι στην κανονική του μορφή.
- Να γνωρίσουν τους συνήθεις συμβολισμούς για πολυώνυμα.
- Να διακρίνουν πότε ένα σύμβολο είναι παράμετρος και πότε μεταβλητή του πολυωνύμου.
- Να κατανοήσουν την έννοια της αριθμητικής τιμής πολυωνύμου και να είναι σε θέση να υπολογίζουν αριθμητικές τιμές δεδομένου πολυωνύμου για συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής.
- Να κατανοήσουν την έννοια της ρίζας πολυωνύμου.
- Να μπορούν να αντιδιαστέλλουν τις έννοιες: Μηδενικό πολυώνυμο – Τιμή πολυωνύμου ίση με το μηδέν.
- Να κατανοήσουν γιατί τα μη μηδενικά, σταθερά πολυώνυμα δεν έχουν ρίζες.

Μάθημα 3: Ίσα πολυώνυμα – Εισαγωγή στην πολυωνυμική εξίσωση

§2.1 και §2.3.

- Να κατανοήσουν τον ορισμό των ίσων πολυωνύμων.
- Να μπορούν να αντιδιαστέλλουν τις έννοιες: ίσα πολυώνυμα – πολυώνυμα ίσα για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.
- Να κατανοήσουν ποια είδη εξισώσεων λέγονται πολυωνυμικές εξισώσεις.
- Να αναγνωρίζουν το βαθμό μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.
- Να θυμηθούν την έννοια της λύσης μιας εξίσωσης και κατ' επέκταση, μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.
- Να αναγνωρίζουν ισοδύναμες μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων και να μπορούν να μετατρέπουν μια εξίσωση σε ισοδύναμη, επιθυμητής μορφής.
- Να θυμηθούν τη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων 1ου βαθμού.
- Να θυμηθούν τη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων 2ου βαθμού.

Μάθημα 4: Εκμάθηση στρατηγικής επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων – Εμπέδωση της έννοιας του πολυωνύμου και των στοιχείων του

§2.1

- Να μάθουν να εφαρμόζουν μια στρατηγική επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων συγκεκριμένης μορφής.
- Να εμπεδώσουν τις έννοιες που διδάχτηκαν μέχρι στιγμής.

Μάθημα 5: Πράξεις πολυωνύμων

§2.1

- Να μπορούν να προσθέτουν πολυώνυμα.
- Να μπορούν να αφαιρούν πολυώνυμα.
- Να κατανοήσουν την έννοια του αντίθετου πολυωνύμου.
- Να αναγνωρίζουν το βαθμό του αθροίσματος και της διαφοράς πολυωνύμων.
- Να μπορούν να πολλαπλασιάζουν πολυώνυμα.
- Να αναγνωρίζουν το βαθμό γινομένου πολυωνύμων
- Να θυμηθούν την έννοια της παραγοντοποίησης ενός πολυωνύμου

Μάθημα 6: Πολυωνυμικές εξισώσεις απλής μορφής

§2.3

- Να κατανοήσουν τη μέθοδο επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων της μορφής: (γινόμενο πολυωνύμων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού)=0
- Να κατανοήσουν τη χρησιμότητα της παραγοντοποίησης πολυωνύμων

Μάθημα 7: Διαίρεση πολυωνύμων – χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων με στόχο την παραγοντοποίηση πολυωνύμων

§2.2

- Να κατανοήσουν την αλγοριθμική διαίρεση πολυωνύμων με πρότυπο την αλγοριθμική διαίρεση μεταξύ θετικών ακεραίων.
- Να μπορούν να κάνουν τη διαίρεση πολυωνύμων.
- Να μπορούν να γράφουν την ταυτότητα της διαίρεσης.
- Να μπορούν να κάνουν παραγοντοποίηση πολυωνύμων με χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων

<u>Μάθημα 8: Θεωρήματα διαίρεσης με πολυώνυμο της μορφής x-α</u>

- Να κατανοήσουν γιατί κάθε πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-$ α παίρνει τη μορφή: $P(x)=(x-\alpha)\pi(x)+P(\alpha)$
- Να μπορούν με βάση την ταυτότητα αυτή να υπολογίζουν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha)$
- Να μπορούν με βάση την ταυτότητα αυτή να αποδεικνύουν ότι: $P(\alpha)=0 \Rightarrow P(x)=(x-\alpha)\pi(x)$

<u>Μάθημα 9: Σχήμα Horner – Θεώρημα ακεραίων ριζών – Εφαρμογή αυτών για επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων</u>

- Να μπορούν να κάνουν χρήση του σχήματος Horner για τον υπολογισμό των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, καθώς και του πηλίκου και του υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμου με πρωτοβάθμιο διαιρέτη.
- Να κατανοήσουν το θεώρημα των ακέραιων ριζών και τη σχετική απόδειξη.
- Να εφαρμόζουν το προηγούμενο θεώρημα στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με ακεραίους συντελεστές.
- Να εμπεδώσουν τον τρόπο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού $\nu \geq 2$ με παραγοντοποίηση, που ήδη έχουν διδαχθεί

<u>Μάθημα 10: Επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων</u>

- Να θυμηθούν τη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών ανισώσεων 1ου βαθμού

- Να θυμηθούν τη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού
- Να μάθουν να εφαρμόζουν μια στρατηγική επίλυσης πολυωνυμικών ανισώσεων τυχαίου βαθμού

<u>Μάθημα 11: Αναγωγή εξισώσεων και ανισώσεων σε πολυωνυμικές</u>

§2.4

- Να μπορούν να επιλύουν ρητές εξισώσεις και ανισώσεις, των οποίων η επίλυση ανάγεται στη επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων γνωστής μορφής, χρησιμοποιώντας κατάλληλη στρατηγική.
- Να μπορούν να επιλύουν άρρητες εξισώσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες, των οποίων η επίλυση ανάγεται στη επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων γνωστής μορφής, χρησιμοποιώντας κατάλληλη στρατηγική.

<u>Μάθημα 12: Επανάληψη</u>

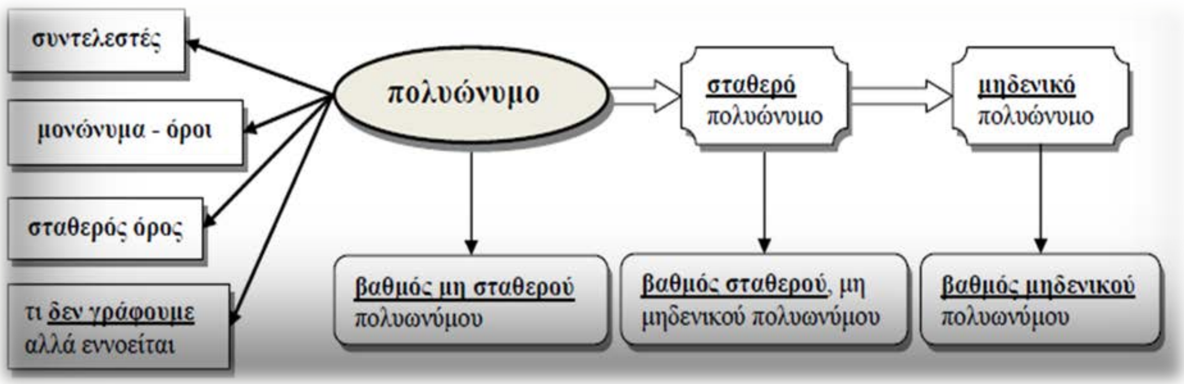
- Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις διαφόρων μορφών, επιλέγοντας κατά περίπτωση τις κατάλληλες μεθόδους.

5. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

5.1. *Μάθημα 1ο*

Στο πρώτο μάθημα γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια του πολυωνύμου και των στοιχείων του.

Ο προ-οργανωτής του φύλλου εργασίας είναι ένας συνδυασμός αραχνοειδούς διαγράμματος και αλυσίδας, στο κέντρο του οποίου βρίσκεται η βασική έννοια του πολυωνύμου και γύρω της περιστρέφονται οι λέξεις που προσδιορίζουν ένα πολυώνυμο (όπως όροι, συντελεστές), αλλά και ειδικές μορφές του (όπως μηδενικό πολυώνυμο, σταθερό πολυώνυμο).



Εικόνα 6: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 1

Η πρώτη έννοια που παρουσιάζεται είναι αυτή του ίδιου του πολυωνύμου, αντίθετα με τη σειρά παρουσίασης στο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο παρουσιάζει αρχικά τον ορισμό του μονωνύμου. Η επιλογή αυτή έγινε με γνώμονα τη σαφήνεια του στόχου του μαθήματος, τη σύνδεση αυτού με το στόχο του κεφαλαίου, αλλά και την ίδια τη λογική της διδακτικής προσέγγισης: παρουσίασης αρχικά του πολυωνύμου, ως μίας αυτόνομης μαθηματικής οντότητας, μέσα από την «εικόνα» του και στη συνέχεια «αποδόμηση» αυτής της εικόνας στα συστατικά της στοιχεία.

Η πρώτη παρουσίαση της «εικόνας» του πολυωνύμου γίνεται μέσω ενός πίνακα, στην πρώτη γραμμή του οποίου υπάρχουν κατά φθίνουσα σειρά οι δυνάμεις της μεταβλητής. Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν μοτίβα κατά τη συμπλήρωση των στηλών και έπειτα των γραμμών του πίνακα. Τους ζητείται να συμπληρώσουν τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα με αυτό που διαισθητικά κατανόησαν ως πολυώνυμο.

Στη συνέχεια δίνεται και ο αυστηρός ορισμός και παρουσιάζεται για πρώτη φορά μια γνωστική στρατηγική: αυτή της παρατήρησης και σημείωσης των λεπτομερειών του ορισμού, που κατά την πρώτη προσέγγιση δεν είχαν αξιολογήσει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αναμένεται να σημειώσουν στον πίνακα πληροφορίες όπως το είδος του αριθμού που μπορεί να είναι δύναμη της μεταβλητής, ή συντελεστής αυτής, χωρίς ακόμα να έχει δοθεί ορισμός για τις έννοιες βαθμός και συντελεστής.

Έπειτα από την παρουσίαση του αυστηρού ορισμού του πολυωνύμου, δίνεται ως μια σύντομη παρατήρηση – υπενθύμιση μια περιγραφή της ίδιας της έννοιας του ορισμού, η χρησιμότητα ύπαρξης ορισμών και δηλώνεται άμεσα από τον εκπαιδευτικό το τι ακριβώς αναμένει από τους μαθητές του, όταν συναντήσουν κάποιον ορισμό. Επίσης, τους επισημαίνεται πως ο κενός χώρος που εμφανίστηκε έπειτα από τον προηγούμενο ορισμό, για να συμπληρώσουν με λεπτομέρειες που θέλουν να θυμούνται, θα ακολουθεί στο εξής κάθε ορισμό που αναφέρεται.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται για πρώτη φορά η χρήση του πίνακα «υπενθύμισης – ελέγχου». Στο συγκεκριμένο σημείο στον πίνακα αναγράφονται οι λέξεις «φυσικός αριθμός» και «πραγματικός αριθμός» και από τους μαθητές αναμένεται να γράψουν κάποια παραδείγματα. Εδώ ο εκπαιδευτικός ή κάποιος συμμαθητής, αν τη συγκεκριμένη στιγμή δουλεύουν σε ομάδες, μπορεί να υπενθυμίσει τις έννοιες.

Αμέσως μετά, παρουσιάζεται μια δεύτερη γνωστική στρατηγική: αυτή της συχνής ανασκόπησης των νέων εννοιών και των συμπερασμάτων, ώστε να ενισχυθεί η κατανόηση, αλλά και η μνήμη αυτών (ελλείμματα βραχύχρονης μνήμης και πιθανόν προσοχής). Δίνονται μικρού μεγέθους πίνακες, με τις έννοιες που εμφανίστηκαν μέχρι αυτό το σημείο, για να συμπληρωθούν με λίγες λέξεις, ή ένα παράδειγμα που θα θυμίζει στους μαθητές σε τι αντιστοιχούν.

Επίσης αναφέρεται άμεσα από τον εκπαιδευτικό το τι αναμένεται από τους μαθητές, όταν συναντούν πίνακες αυτού του είδους. Στο δεύτερο μέρος του φύλλου εργασίας, παρουσιάζονται ανά ενότητες, ένα – ένα τα στοιχεία του πολυωνύμου με την ακόλουθη λογική: αρχικά, μέσα από τον πίνακα της πρώτης σελίδας γίνεται μια διαισθητική προσέγγιση, στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν τα στοιχεία αυτά σε πολυώνυμα διαφόρων περιπτώσεων και να συμπληρώσουν πίνακες με στόχο τη βαθύτερη κατανόηση, ακολουθεί ο αυστηρός ορισμός, ο πίνακας αυτοελέγχου και κάθε ενότητα «κλείνει» με τον πίνακα υπενθύμισης, στον οποίο σύμφωνα με το προσωπικό τους στυλ μάθησης σημειώνουν βοηθητικά κάποιες λέξεις της επιλογής τους για να ενισχύσουν τη μνήμη τους.

Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται οι έννοιες «μονώνυμο», «όροι πολυωνύμου» και «σταθερός όρος πολυωνύμου».

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ο συντελεστής πολυωνύμου, καθώς επίσης και οι περιπτώσεις, που ανάλογα με τον συντελεστή, κάποιος όρος μπορεί να παραλειφθεί ή να μην εμφανίζεται ευθέως ο ίδιος ο συντελεστής. Τονίζεται ότι η ενδιάμεση πράξη που εννοείται είναι ο πολλαπλασιασμός, οι ιδιότητες του οποίου επιτρέπουν την απλοποίηση του τρόπου γραφής σε ορισμένες περιπτώσεις. Μέσα από ένα πίνακα, στον οποίο οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τους όρους που λείπουν, γίνεται κατανοητό πως οι όροι του πολυωνύμου που δεν εμφανίζονται υπάρχουν στην πραγματικότητα, απλά έχουν παραλειφθεί για λόγους συντομίας (εναλλακτικός ορισμός του πολυωνύμου, ως μια διατεταγμένη ν-άδα όρων), ενώ με ένα πίνακα στον οποίο οι μαθητές συμπληρώνουν όλους τους όρους που εννοούνται, ανακαλύπτουν το πόσο βοηθητική μπορεί να αποδειχτεί η παράλειψη των ευκόλως εννοουμένων.

Στην τελευταία ενότητα παρουσιάζεται η έννοια του βαθμού πολυωνύμου, οι ειδικές περιπτώσεις του σταθερού πολυωνύμου και του μηδενικού πολυωνύμου, καθώς επίσης και οι βαθμοί αυτών. Στο σημείο αυτό εμφανίζονται ερωτήσεις, οι οποίες σκοπό έχουν να ενισχύσουν την κατανόηση των όρων, αλλά και να αναπτύξουν μεταγνωστικές δεξιότητες στους μαθητές. Για παράδειγμα, στην ερώτηση *«ποιος είναι ο βαθμός ενός σταθερού πολυωνύμου»*, οι μαθητές αναμένεται να κάνουν διάκριση μεταξύ μηδενικού ή μη μηδενικού πολυωνύμου.

Οι ασκήσεις που επιλέχθηκαν για εργασία μετά το τέλος του μαθήματος, δεν αντλήθηκαν από τις αντίστοιχες της πρώτης παραγράφου του σχολικού εγχειριδίου, αφού αυτές περιέχουν έννοιες που δεν έχουν αναφερθεί ακόμα. Επίσης, επιλέγεται να μην απαιτείται από τους μαθητές λεκτική ανάπτυξη κάποιου θέματος, τα μέρη της κάθε άσκησης είναι σύντομα και αυτό που απαιτείται για την ολοκλήρωσή τους είναι κατά το δυνατόν σαφές. (Μικρά – σαφή βήματα).

Οι πρώτες δύο ασκήσεις ζητούν από τους μαθητές να αναγνωρίσουν, μεταξύ διαφόρων παραστάσεων, τα μονώνυμα και τα πολυώνυμα. Μοιάζει με την άσκηση 1^{A} , §2.1. του σχολικού εγχειριδίου, όμως αποφεύχθηκαν οι παραστάσεις που περιέχουν παραμέτρους, οι οποίες θα αναλυθούν στο επόμενο μάθημα ιδιαιτέρως. Οι μαθητές θα πρέπει να διακρίνουν τα πολυώνυμα ανάμεσα σε αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν τη μεταβλητή σε αρνητικές ή μη ακέραιες δυνάμεις, ενώ οι συντελεστές μπορεί να εμφανίζονται σε υπόρριζα ή κλασματική μορφή.

Στην τρίτη άσκηση, δίνονται συγκεκριμένα πολυώνυμα, για τα οποία οι μαθητές συμπληρώνουν ένα πίνακα με τα στοιχεία που έχουν διδαχτεί μέχρι αυτό το σημείο (βαθμός, σταθερός όρος, όροι, συντελεστές).

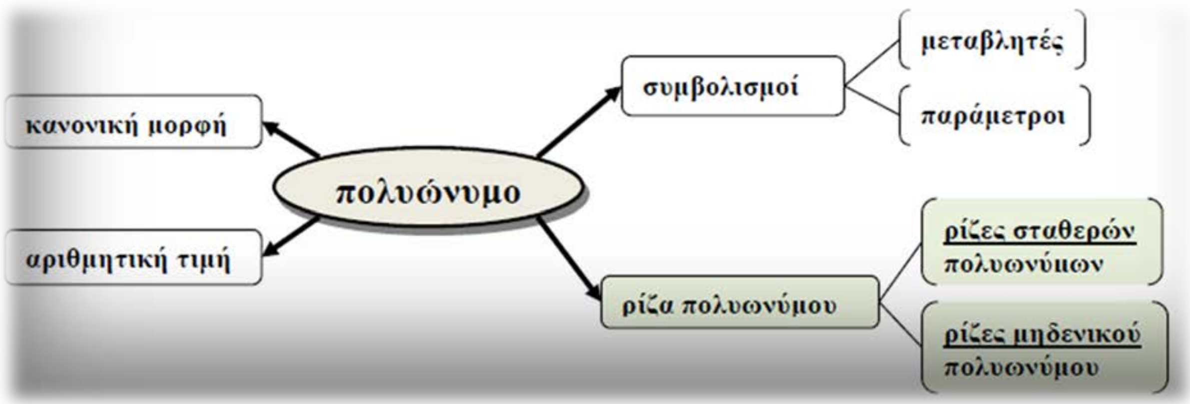
Την τέταρτη και τελευταία άσκηση αποτελεί ένας πίνακας που περιλαμβάνει όλες τις νέες έννοιες που παρουσιάστηκαν. Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν στη δεύτερη στήλη του πίνακα λέξεις-κλειδιά της επιλογής τους, οι οποίες θα τους υπενθυμίζουν το περιεχόμενο της αντίστοιχης έννοιας. Οι λέξεις αυτές αναφέρεται ότι μπορεί να αντληθούν από τους αντίστοιχους «πίνακες υπενθύμισης» στο εσωτερικό του φύλλου εργασίας, οι οποίοι συμπληρώθηκαν με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Στην τρίτη στήλη του πίνακα συμπληρώνουν μία ένδειξη για το βαθμό κατανόησης της έννοιας.

Ο πίνακας αυτός μπορεί να λειτουργήσει βοηθητικά σε τρία επίπεδα. Αρχικά, χρησιμεύει κατά τη διάρκεια της μελέτης του μαθήματος, αφού επισημαίνουν τα σημεία που δεν κατανόησαν, ώστε είτε να προσπαθήσουν περισσότερο είτε να ζητήσουν βοήθεια. Επίσης, μπορεί να χρησιμεύσει για την κατανόηση του μαθήματος, ως μετα-οργανωτής, ο σχεδιασμός του οποίου εμπλέκει τους ίδιους τους μαθητές. Τέλος, μπορεί να χρησιμεύσει κατά την επανάληψη, ως σύντομος χάρτης του φύλλου εργασίας. Αποτελεί μία τρίτη γνωστική στρατηγική, η οποία θα πρέπει να διδαχτεί άμεσα στους μαθητές.

5.2. Μάθημα 2ο

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, η κυρίαρχη έννοια είναι επίσης το πολυώνυμο. Για το λόγο αυτό, στον προ-οργανωτή, ο οποίος είναι και σε αυτήν την περίπτωση ένα αραχνοειδές διάγραμμά, η λέξη «πολυώνυμο» κατέχει την κεντρική θέση. Οι σχετικές έννοιες που θα παρουσιαστούν είναι η κανονική μορφή του πολυωνύμου, η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου, η ρίζα πολυωνύμου, ενώ θα γίνει ιδιαίτερη μελέτη σχετικά με τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται για τα πολυώνυμα, την έννοια της μεταβλητής και της παραμέτρου.

Στην πρώτη ενότητα, στόχος είναι να γίνει σαφές το γεγονός ότι ο τρόπος γραφής ενός πολυωνύμου μπορεί να ποικίλει. Στο προηγούμενο μάθημα, όλα τα πολυώνυμα που εμφανίστηκαν ήταν σε κανονική μορφή, χωρίς να έχει γίνει ιδιαίτερη αναφορά στον επιλεγμένο τρόπο γραφής.



Εικόνα 7: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 2

Η πρώτη επισήμανση λοιπόν, αυτού του φύλλου εργασίας είναι ότι *«μπορεί ένα πολυώνυμο να εμφανιστεί και «ανακατεμένο»»*. Η λέξη επιλέχτηκε με τρόπο ώστε από τη μία να προκαλέσει «χαμόγελα» και από την άλλη να δημιουργήσει τη νοερή εικόνα μιας συλλογής αντικειμένων (στην περίπτωση αυτή των όρων του πολυωνύμου), τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν στο χώρο με τυχαίο τρόπο. Ενισχύεται έτσι η εννοιολογική γνώση των μαθητών, αφού συνειδητοποιούν πως τα δομικά στοιχεία του πολυωνύμου είναι εκείνα που το καθορίζουν, χωρίς να ενδιαφέρει ο τρόπος γραφής των, η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα σύμβολα. Για την επιπλέον ενίσχυση της κατανόησης, ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα πίνακα (παρόμοιο με αυτόν της άσκησης 3 του προηγούμενου φύλλου εργασίας) με τα στοιχεία του πολυωνύμου που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο μάθημα, για ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο, το οποίο εμφανίζεται σε αυτή την «ανακατεμένη» μορφή. Ταυτόχρονος στόχος της συμπλήρωσης του πίνακα είναι η υπενθύμιση, αμέσως μόλις αρχίζει το νέο μάθημα, όλων των βασικών σημείων της προηγούμενης διδακτικής ώρας.

Στη συνέχεια εμφανίζεται ο όρος «κανονική μορφή», ως μία από τις πιθανές μορφές εμφάνισης ενός πολυωνύμου, η οποία διαφέρει μόνο στο γεγονός ότι μπορεί να *«είναι πολύ βολική κάποιες φορές»*. Η αναφορά σε αυτήν είναι ιδιαίτερα σύντομη, ακριβώς για να μη δοθεί η εντύπωση ότι αποτελεί ουσιαστική διαφοροποίηση του τρόπου γραφής. Η άσκηση στη μεταγραφή πολυωνύμων από «ανακατεμένη» σε κανονική μορφή, γίνεται σύντομα, μέσα από ένα πίνακα με τέσσερα παραδείγματα. Το τελευταίο από τα παραδείγματα είναι ένα μονώνυμο, η γραφή του οποίου προφανώς δεν αλλάζει. Δεν αναφέρεται λεκτικά αυτή η διαπίστωση, όμως αναμένεται από τους μαθητές ότι κατά τη συμπλήρωση του πίνακα θα παρατηρήσουν την αδυναμία γραφής του διαφορετικά.

Η πρώτη ενότητα «κλείνει» με το πλαίσιο «υπενθύμισης» της νέας έννοιας, αυτής της κανονικής μορφής πολυωνύμου.

Ακολουθεί η δεύτερη ενότητα, με τίτλο «Μεταβλητές». Η μεταβλητή έχει χρησιμοποιηθεί ήδη από τους μαθητές ευρέως, από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου, όμως είναι από τις έννοιες εκείνες οι οποίες εμφανίζονται σταθερά ως δυσκολία των μαθητών, με ΜΔ ή χωρίς. Για το λόγο αυτό, αλλά και εξαιτίας της ιδιαίτερης σημασίας της κατανόησης και του ορθού χειρισμού των μεταβλητών για το συγκεκριμένο κεφάλαιο, κρίθηκε αναγκαία η ιδιαίτερη αναφορά σε αυτές.

Αρχικά παρουσιάζεται η χρησιμότητα της ικανότητας «μετάφρασης» μιας κατάστασης στη «μαθηματική γλώσσα». Δίνεται ένας άτυπος ορισμός του τι σημαίνει αυτή η μετάφραση, μέρος του οποίου αποτελεί η χρήση συμβόλων για τους άγνωστους αριθμούς. Δίνονται παραδείγματα συμβόλων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, κυρίως εικόνων, τις οποίες στην πράξη το πιθανότερο είναι ότι δεν έχουν συναντήσει οι μαθητές μέσα σε αλγεβρικά προβλήματα, ενώ τονίζεται η σημασία του να γίνει σαφές το τι συμβολίζει καθένα από αυτά. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα παράδειγμα «μετάφρασης σε μαθηματικά» μιας φράσης με τρεις διαφορετικούς τρόπους, ένας από τους οποίους περιέχει εικόνες στη θέση των μεταβλητών, ενώ στους άλλους δύο χρησιμοποιούνται μικρά γράμματα. Αμέσως μετά, ζητείται από τους μαθητές να επαναλάβουν τη διαδικασία που μόλις διδάχτηκε και η οποία τους προτείνεται ως μία βοηθητική τεχνική για την αποκωδικοποίηση μαθηματικού κειμένου, για μια παρόμοια φράση. Η συγκεκριμένη φράση επιλέχτηκε μέσα από τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο για το μάθημα επιλογής «Στοιχεία Αστρονομίας και Διαστημικής» Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου (κεφ. 3: «Το ηλιακό σύστημα»).

Ακολουθεί ένας επίσης άτυπος ορισμός για την έννοια της μεταβλητής, διατυπωμένος με όσο το δυνατόν απλούστερο και κατανοητό τρόπο και στη συνέχεια γίνεται σαφές ότι τα περισσότερο συνηθισμένα σύμβολα για μεταβλητές είναι πεζά γράμματα, όπως το x.

Τέλος, γίνεται η σύνδεση της έννοιας της μεταβλητής με το κύριο θέμα του φύλλου εργασίας, το πολυώνυμο. Αξίζει να σημειωθεί πως μέχρι στιγμής, τα πολυώνυμα έχουν παρουσιαστεί (όπως και στο σχολικό εγχειρίδιο), ως συλλογές μονωνύμων, τα οποία με τη σειρά τους παρουσιάζονται ως συλλογές συμβόλων, χωρίς να γίνεται προσπάθεια αποσαφήνισης του ρόλου του κάθε συμβόλου που εμφανίζεται. Αν και ένας από τους βασικούς στόχους που προτείνει από το Π.Ι. είναι να παρουσιαστεί το πολυώνυμο ως συνάρτηση μιας μεταβλητής, δε γίνεται πουθενά σαφές το πώς μπορεί να θεωρηθεί ως τέτοια. Δεν αναφέρεται πουθενά η βασική έννοια, η οποία χαρακτηρίζει μια συνάρτηση, αυτή της αντιστοίχισης μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων. Επίσης, δεν αναφέρεται πουθενά ευθέως η χρήση της μεταβλητής ως βοηθήματος για την σύντομη περιγραφή της λειτουργίας μιας πολυωνυμικής συνάρτησης. Αντί αυτού, το πολυώνυμο παρουσιάζεται ως μία ακολουθία συμβόλων, για την οποία οι μαθητές θα πρέπει, χρησιμοποιώντας τις (επίσης αμφιβόλου επιπέδου κατανόησης) προηγούμενες εμπειρίες τους με συναρτήσεις, να εξάγουν το συμπέρασμα ότι πρόκειται για κάποιου είδους ασαφούς τύπου συνάρτησης.

Τελευταία επισήμανση της ενότητας είναι ότι *«κάθε πολυώνυμο αναγκαστικά περιέχει μεταβλητή»*, η οποία συμβολίζεται με κάποιο πεζό γράμμα και παρουσιάζεται ο τρόπος γραφής του πολυωνύμου. Η επισήμανση αυτή αποτελεί και το συνδετικό κρίκο μεταξύ αυτής και της επόμενης ενότητας, περί αριθμητικής τιμής πολυωνύμου, μέσω της νύξης περί της σιωπηλής ύπαρξης της δυνατότητας αντικατάστασης ενός από τα σύμβολα με συγκεκριμένο αριθμό.

Για την κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής τιμής πολυωνύμου, η προσέγγιση που επιλέχτηκε είναι, όπως και για τις περισσότερες έννοιες, αρχικά μέσω παραδειγμάτων. Δίνονται συγκεκριμένα πολυώνυμα και με την καθοδήγηση μέσω γραπτών οδηγιών, οι μαθητές αντικαθιστούν τις μεταβλητές με δοσμένους αριθμούς κάθε φορά. Εκτελούν τις πράξεις για να καταλήξουν σε ένα νέο πραγματικό αριθμό, ο οποίος ονομάζεται άτυπα αριθμητική τιμή, χωρίς να δίνεται κάποιος ακριβής ορισμός. Τονίζεται άμεσα, ότι κατά την αντικατάσταση οι μαθητές πρέπει να έχουν υπόψη πως δεν εμφανίζεται το σύμβολο του πολλαπλασιασμού, ο οποίος εννοείται (σύνηθες λάθος μαθητών με ΜΔ ή χωρίς) και ότι η αντικατάσταση τη μεταβλητής με αρνητικό αριθμό απαιτεί και την εισαγωγή παρενθέσεων.

Στη συνέχεια εμφανίζεται ένας πίνακας – γραφικός οργανωτής, ο οποίος έχει στόχο τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της αντιστοιχίας μεταξύ της τιμής της μεταβλητής και της αριθμητικής τιμής του πολυωνύμου. Έχει δηλαδή ως «σιωπηλό» στόχο τη σύνδεση της έννοιας του πολυωνύμου με αυτήν της συνάρτησης μιας μεταβλητής. Δίνεται αρχικά ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο, ονοματισμένο «P(x)», με δοσμένο τύπο. Ο πίνακας αποτελείται από τρεις στήλες. Σε κάθε γραμμή, υποδεικνύεται μία τιμή για τη μεταβλητή και οι μαθητές καλούνται να κάνουν τις πράξεις για να καταλήξουν στην αντίστοιχη αριθμητική τιμή του πολυωνύμου. Στην τελευταία θέση της κάθε γραμμής, επιχειρείται η σύνδεση αλλά και διάκριση των δύο εννοιών μέσω της συμπλήρωσης μιας σύντομης δήλωσης της μορφής *«Η τιμή του P(x) για* $x = \cdots$ *είναι το……».*

Η έννοια της ρίζας πολυωνύμου, εμφανίζεται ως ειδική περίπτωση, τιμής της μεταβλητής για αριθμητική τιμή πολυωνύμου ίση με το 0 και ζητείται από τους μαθητές να ανακαλύψουν στον προηγούμενο πίνακα ρίζες του πολυωνύμου μεταξύ των περιπτώσεων που υπολόγισαν.

Η διάκριση της ρίζας πολυωνύμου με την τετραγωνική ρίζα αριθμού επιχειρείται άμεσα μέσα από σχετική παρατήρηση. Αν και για τον εκπαιδευτικό μια τέτοια διάκριση είναι προφανής και πολλές φορές θεωρείται ότι δεν είναι απαραίτητη η άμεση αναφορά σε αυτήν, πολλοί από τους μαθητές δυσκολεύονται από το γεγονός ότι η ίδια λέξη χρησιμοποιείται ταυτόχρονα για να εκφράσει δύο διαφορετικές έννοιες. Ιδιαίτερα οι μαθητές με δυσκολίες στην αντίληψη και επεξεργασία του λόγου, πιθανόν να χρειάζονται άμεση αποσαφήνιση των δύο περιπτώσεων χρήσης της ίδιας λέξης.

Έπειτα από μελέτη των εννοιών της αριθμητικής τιμής και της ρίζας πολυωνύμου μέσα από παραδείγματα, παρουσιάζονται οι αυστηροί ορισμοί του σχολικού εγχειριδίου, οι οποίοι ακολουθούνται από τα γνώριμα πλαίσια σημειώσεων από μέρους των μαθητών και από τον πίνακα σύντομης επισκόπησης.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα, το οποίο καθοδηγεί τους μαθητές να ανακαλύψουν αν δοσμένοι αριθμοί είναι ρίζες ενός συγκεκριμένου πολυωνύμου, με στόχο την ακόμα βαθύτερη κατανόηση της έννοιας, η οποία αποτελεί και μία από τις σημαντικότερες και συχνότερα εμφανιζόμενες σε όλο το κεφάλαιο. Γίνεται μια προσπάθεια μοντελοποίησης της εργασίας από τον εκπαιδευτικό, στην περίπτωση που οι μαθητές δεν καταφέρουν να απαντήσουν ανεξάρτητοι στην πρώτη ερώτηση και ακολουθούν δύο ακόμα ερωτήσεις, της ίδιας μορφής, ώστε να επαναλάβουν τη διαδικασία για να την εμπεδώσουν.

Στην τέταρτη ενότητα γίνεται περεταίρω συζήτηση για την έννοια της αριθμητικής τιμής πολυωνύμου, μέσα από την εξέταση ειδικών περιπτώσεων πολυωνύμων. Δίνεται ένα σταθερό πολυώνυμο και ακολουθούν δύο ερωτήσεις «υπενθύμισης – ελέγχου», σχετικά με την ήδη διδαχθείσα, από το προηγούμενο μάθημα, έννοια. Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα πίνακα με αριθμητικές τιμές του συγκεκριμένου πολυωνύμου για διάφορες τιμές της μεταβλητής. Στο σημείο αυτό η μέθοδος της διδασκαλίας εμπεριέχει στοιχεία έμμεσης διδασκαλίας, αφού οι μαθητές πρέπει να παρατηρήσουν και να ανακαλύψουν το λόγο επιλογής του ονόματος τέτοιου είδους πολυωνύμων, το γεγονός ότι αν το πολυώνυμο δεν είναι το μηδενικό δεν μπορεί να έχει καμία ρίζα, ενώ αν είναι το μηδενικό, όλοι οι αριθμοί θα είναι ρίζες του.

Ακολουθεί το γνωστό πλαίσιο επισκόπησης, το οποίο συμπυκνώνει τις παραπάνω ανακαλύψεις των μαθητών.

Η τελευταία ενότητα του φύλλου εργασίας κάνει λόγο για την έννοια της παραμέτρου, έννοια η οποία αν και δεν έχει οριστεί ευθέως σε κανένα σημείο της ύλης, εμφανίζεται διαρκώς σε εναλλασσόμενους ρόλους, με αυτήν της μεταβλητής ήδη από προηγούμενες τάξεις. Σημειώνεται πως μια σαφής διάκριση των δύο δεν είναι πάντοτε εφικτή, αλλά στην περίπτωση των πολυωνύμων που μας ενδιαφέρουν, μπορεί να πραγματοποιηθεί απλά, με παρατήρηση του ονόματος του πολυωνύμου. Ακολουθούν δύο παραδείγματα πολυωνύμων με παραμέτρους, στα οποία οι μαθητές πρέπει να ακολουθήσουν τις υποδείξεις για να ανακαλύψουν τα βασικά στοιχεία των (βαθμός, συντελεστές κτλ.). Στο σημείο αυτό, λόγω της ούτως ή άλλως ασαφούς σχέσης μεταξύ παραμέτρων και μεταβλητών, επιλέχτηκε να μη δοθεί πλαίσιο υπενθύμισης για τις δύο έννοιες, αφού η συμπλήρωση τέτοιου θα αποτελούσε δύσκολη υπόθεση ακόμα και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς.

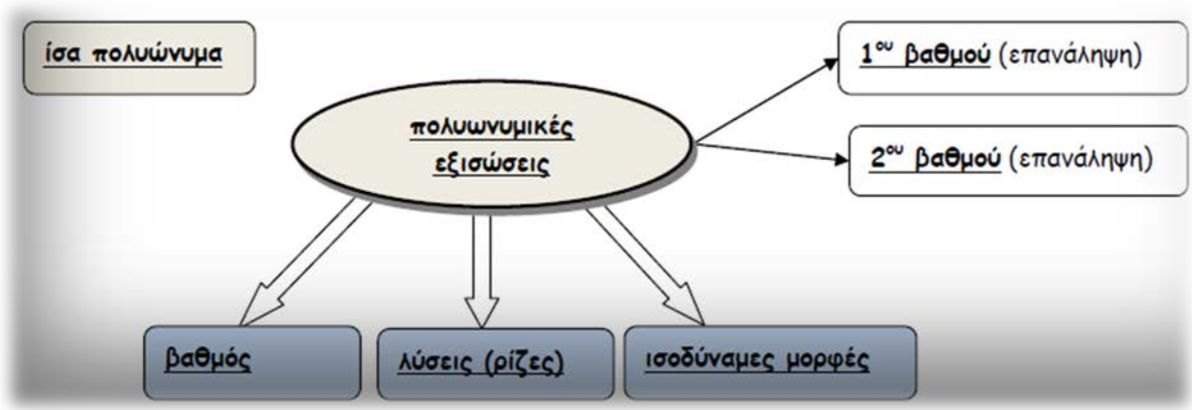
Οι ασκήσεις για ανεξάρτητη εργασία που προτείνονται, αποτελούνται από εφαρμογές των όσων διδάχτηκαν, με τη σειρά που παρουσιάστηκαν στο φύλλο εργασίας, ώστε οι μαθητές να μπορούν να ασκηθούν παράλληλα με τη μελέτη της κάθε έννοιας, αλλά και να ακολουθήσουν τις υποδείξεις του εκπαιδευτικού που υπάρχουν γραπτές στο εσωτερικό του φύλλου εργασίας για να τις ολοκληρώσουν.

5.3. *Μάθημα 3^{o}*

Στο τρίτο φύλλο εργασίας ολοκληρώνεται η μελέτη της έννοιας του πολυωνύμου, μέσα από την παρουσίαση του ορισμού των ίσων πολυωνύμων και γίνεται η πρώτη εισαγωγή στην έννοια της πολυωνυμικής εξίσωσης. Στο σημείο αυτό διαφοροποιείται αρκετά η σειρά με την οποία διδάσκεται η ύλη, σε σχέση με την προτεινόμενη από το Π.Ι. Η διαφοροποίηση αυτή πραγματοποιήθηκε, ώστε να γίνει όσο το δυνατόν νωρίτερα γνωστός στους μαθητές ο απώτερος στόχος του κεφαλαίου, να δοθεί κάποιο νόημα στις εργασίες που θα ακολουθήσουν, αλλά και να γίνει άμεσα η σύνδεση του κεφαλαίου με παλαιότερες γνώσεις, όπως την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού. Με τον τρόπο αυτό οι παλαιότερες και οι νέες γνώσεις θα οργανωθούν σε ένα ενιαίο σχήμα, το οποίο θα βοηθήσει στην οργάνωση και τη δυνατότητα αποθήκευσης της νέας γνώσης στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Μια τέτοια σύνδεση δεν ήταν δυνατή εξαρχής, αφού προϋπέθετε τη γνώση της ορολογίας του πολυωνύμου που παρουσιάστηκε στα πρώτα δύο φύλλα εργασίας.

Ο προ-οργανωτής του μαθήματος αποτελείται από δύο μέρη, ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το πρώτο περιέχει τον ορισμό των ίσων πολυωνύμων και το δεύτερο την κεντρική ιδέα «πολυωνυμική εξίσωση», η οποία παραπέμπει σε δύο ειδών επιμέρους πληροφορίες: τα στοιχεία μιας πολυωνυμικής εξίσωσης (βαθμός, λύσεις, ισοδύναμες μορφές) και τις ήδη γνωστές πολυωνυμικές εξισώσεις ($1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού). Η διάκριση μεταξύ των δύο ειδών πληροφοριών γίνεται σαφής από την επιλογή διαφορετικών χρωματισμών και σχημάτων.

Στο πρώτο μέρος, αναφέρεται άτυπα το πότε δύο πολυώνυμα λέγονται ίσα. Δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στο γεγονός ότι οι εξεταζόμενοι ως προς την ισότητα συντελεστές πρέπει να αντιστοιχούν σε όρους ίδιου βαθμού, κάτι το οποίο οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν μέσα από μία άσκηση. Τους δίνονται συγκεκριμένοι συντελεστές, με τους οποίους πρέπει να κατασκευάσουν πολυώνυμα άνισα.



Εικόνα 8: Προ-οργανωτής του φύλλου εργασίας 3

Ακολουθεί ο αυστηρός ορισμός, με επεξηγήσεις και αποστάσεις ανάμεσα στις υποθέσεις που πρέπει να ελέγχονται, ώστε να γίνεται πιο εύκολα η απομνημόνευσή του ως εικόνας. Ακολουθεί το γνωστό πλαίσιο σημειώσεων του μαθητή.

Η εμπέδωση της έννοιας, καθώς και του τρόπου εργασίας σε σχετικές ασκήσεις (οι οποίες είναι πολυπληθείς στο σχολικό εγχειρίδιο), γίνεται μέσα από ένα παράδειγμα με αρκετά επιμέρους ερωτήματα, τα οποία καθοδηγούν το μαθητή να ανακαλύψει τα συλλογιστικά βήματα που θα τον οδηγήσουν στην απάντηση. Δίνονται δύο πολυώνυμα, τα οποία περιέχουν παραμέτρους και ζητείται από το μαθητή να αποφασίσει τις προϋποθέσεις, για να είναι αυτά ίσα. Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να επισημάνουν τη μεταβλητή και τις παραμέτρους των δύο πολυωνύμων και στη συνέχεια να γράψουν τις δύο υποθέσεις που αναφέρονται στον ορισμό. Ακολουθεί ο έλεγχος της αλήθειας των δύο προτάσεων. Προτείνεται στους μαθητές να ελέγχουν γενικά πρώτα τη δεύτερη από αυτές (με τη σειρά που αναγράφονται στον ορισμό του βιβλίου), διότι ο έλεγχος της πρώτης μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις, χωρίς να διευκρινίζεται ποιες είναι αυτές. Το σκεπτικό είναι να παρακαμφθεί σε πρώτη φάση ο έλεγχος του βαθμού των πολυωνύμων, ο οποίος θα περιλαμβάνει αναγκαστικά πολλαπλές περιπτώσεις για τους μεγιστοβάθμιους όρους, σε περίπτωση που και αυτοί περιέχουν την παράμετρο. Στη συνέχεια, για τον έλεγχο της ισότητας των αντίστοιχων συντελεστών, προτείνεται ένας γραφικός οργανωτής σε μορφή πίνακα, στον οποίο οι μαθητές τοποθετούν τα δύο πολυώνυμα, αντιστοιχίζοντας τους όρους ίδιου βαθμού. Από τον οργανωτή προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις για τους συντελεστές που πρέπει να ισχύουν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δε χρειάζεται επίλυση συστήματος εξισώσεων για να δοθεί η απάντηση, οπότε ζητείται αμέσως από τους μαθητές να συμπληρώσουν τους αριθμούς που επιτρέπονται για τις παραμέτρους μ και λ. Ακολουθεί η άμεση ανάλυση του λογικού συλλογισμού που οδηγεί στην τελική απάντηση, ανάλογα με τα αποτελέσματα του ελέγχου της δεύτερης πρότασης. Περιγράφεται ουσιαστικά με απλές λέξεις ο λογικός συλλογισμός:

$$(\text{x} \wedge \text{y αληθές}) \Leftrightarrow (\text{x αληθές}) \wedge (\text{y αληθές}) \Leftrightarrow [(\text{x ψευδές}) \vee (\text{y ψευδές})]^{C}$$

Τέλος, μετά την ολοκλήρωση του παραδείγματος, παρουσιάζεται ο πίνακας ανασκόπησης για την έννοια των ίσων πολυωνύμων.

Η δεύτερη ενότητα ξεκινά με την έννοια της εξίσωσης γενικότερα, έννοια που έχει μελετηθεί από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου και επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο, για συγκεκριμένες μορφές εξισώσεων κάθε φορά. Από τη στιγμή που στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται γενίκευση των όσων έχουν μάθει οι μαθητές στο παρελθόν περί πολυωνυμικών εξισώσεων, κρίθηκε σκόπιμο να αναφερθεί έμμεσα το γεγονός ότι μια εξίσωση δεν είναι απαραιτήτως πολυωνυμική. Από την άλλη, αναφέρεται άμεσα ο στόχος, η λύση της εξίσωσης. Ο ορισμός της πολυωνυμικής εξίσωσης δίνεται αρχικά μέσα από μία ευκολομνημόνευτη εικόνα, χωρίς αυστηρή διατύπωση. Αμέσως μετά, δίνονται παραδείγματα πολυωνυμικών εξισώσεων, των οποίων οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν το αντίστοιχο πολυώνυμο. Στη συνέχεια τους ζητείται να κατασκευάσουν οι ίδιοι μια πολυωνυμική εξίσωση, χωρίς να προστίθεται κάποιος περιορισμός, ώστε από τη μία να ανακαλέσουν την έννοια του πολυωνύμου και από την άλλη να ισχυροποιηθεί η κατανόηση της έννοιας της πολυωνυμικής εξίσωσης.

Ακολουθούν τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν μια πολυωνυμική εξίσωση, ο βαθμός και οι ρίζες, η παρουσίαση των οποίων γίνεται μέσα από τις αντίστοιχες, ήδη κατακτημένες έννοιες για το πολυώνυμο. Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η μνήμη των δύο εννοιών που έχουν διδαχτεί σε προηγούμενο μάθημα, ενώ ταυτόχρονα συνδέονται οι νέες έννοιες με τις παλαιότερες, ώστε να διευκολυνθεί η μνήμη αυτών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι αυστηροί ορισμοί για την πολυωνυμική εξίσωση και τις ρίζες της (πάντα με το αντίστοιχο πλαίσιο σημειώσεων) και τελικά ο πίνακας ανασκόπησης της ενότητας.

Ακολουθεί μία ακόμα αποσαφήνιση των λόγω για τους οποίους εργαζόμαστε με τον δεδομένο τρόπο, κατά τη διάρκεια επίλυσης εξισώσεων. Η δικαιολόγηση περιλαμβάνει υπενθυμίσεις σχετικά με τις ισοδύναμες μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων, μέσα από ημιτελή παραδείγματα εξισώσεων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού, τα οποία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν. Αναφέρεται ευθέως πως, αν και μια εξίσωση μπορεί να μη δοθεί στη μορφή «πολυώνυμο = 0», αυτή μπορεί να ονομαστεί πολυωνυμική, αν με κάποιον από τους αποδεκτούς τρόπους, μετατρέπεται σε κάποια ισοδύναμη εξίσωση αυτής της μορφής. Οι αποδεκτοί τρόποι υπενθυμίζονται με σαφή και άμεσο τρόπο στη συνέχεια. Η συγκεκριμένη διαπίστωση δεν αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο, όμως κρίθηκε αναγκαίο να αναφερθεί προς χάριν αυστηρότητας, αλλά και για τη διασφάλιση του ότι οι μαθητές κατανοούν πως μια εξίσωση εμπίπτει στην κατηγορία που μελετάται, ακόμα και αν εκ πρώτης όψεως δεν πληροί τις υποθέσεις του ορισμού.

Στην τελευταία ενότητα αυτού του φύλλου εργασίας γίνεται μια σύντομη επανάληψη των μεθόδων επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, αφού πρώτα γίνεται σαφές μέσα από τη συμπλήρωση ημιτελών καθοδηγητικών προτάσεων, πως αυτές αποτελούν ειδικές μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων. Και στις δύο περιπτώσεις βαθμών, παρέχονται στους μαθητές οπτικά βοηθήματα, προς ενίσχυση της μνήμης των σχετικών τύπων. Η ενίσχυση της μακροπρόθεσμης μνήμης συμπληρώνεται με λίγες, ενδεικτικές, σχετικές, επαναληπτικές ασκήσεις σε κάθε περίπτωση. Επίσης, για την περίπτωση της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού, παρέχεται ένας γραφικός οργανωτής προς συμπλήρωση, κατά την επίλυση της εξίσωσης. Ο στόχος του συγκεκριμένου οργανωτή είναι να καθοδηγεί το μαθητή κατά τη διάρκεια της εργασίας του και να τον βοηθά στην αυτορρύθμισή του, παρέχοντας επιπλέον μία ερώτηση ελέγχου των αποτελεσμάτων του.

Οι ασκήσεις αυτού του φύλλου εργασίας περιλαμβάνουν τον πίνακα ανασκόπησης, ο οποίος είναι πλέον γνωστός στους μαθητές, καθώς επίσης και επαναληπτικές ασκήσεις στην επίλυση εξισώσεων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού, η άνεση στο χειρισμό των οποίων είναι καθοριστικής σημασίας όχι μόνο για την παρακολούθηση και κατανόηση του υπόλοιπου κεφαλαίου, αλλά και για τη δυνατότητα ολοκλήρωσης όλων των σχετικών εργασιών.

5.4. Μάθημα 4^{ο}

Το τέταρτο φύλλο εργασίας περιλαμβάνει τη διδασκαλία μιας στρατηγικής για την επίλυση ασκήσεων, οι οποίες συχνά προβληματίζουν, όχι μόνο τους μαθητές με ΜΔ, αλλά και αρκετούς από τους υπόλοιπους. Επιλέχτηκε το μάθημα αυτό να αφιερωθεί αποκλειστικά στην επίλυση ασκήσεων, από τη μία για να γίνει εφαρμογή των όσων έχουν διδαχτεί μέχρι αυτό το σημείο (ορισμών και εννοιών) με στόχο τη βαθύτερη κατανόησή των και από την άλλη, για να δοθεί στους μαθητές με δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες ένα «εργαλείο», το οποίο θα τους βοηθήσει κατά την επίλυση ασκήσεων να αυτορρυθμίζονται και να ολοκληρώνουν το έργο τους.

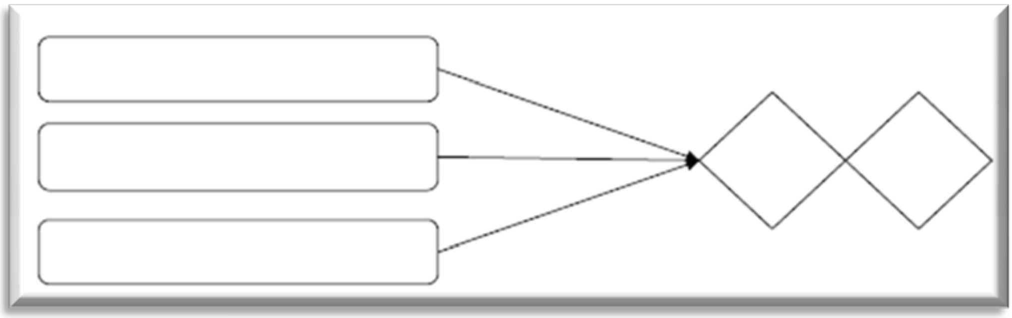
Επειδή το περιεχόμενο του μαθήματος περιορίζεται σε αυτό το θέμα, δεν υπάρχει προ-οργανωτής του φύλλου εργασίας, αλλά μόνο ο τίτλος, ο οποίος κάνει σαφές το τι θα ακολουθήσει.

Ακολουθεί η δικαιολόγηση της χρησιμότητας μιας τέτοιας στρατηγικής, καθώς και οι περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί, με απλή γλώσσα.

Η εισαγωγή στη διδασκαλία της συγκεκριμένης στρατηγικής γίνεται μέσα από ένα παράδειγμα τυπικής άσκησης του σχολικού εγχειριδίου. Η λύση της άσκησης γίνεται βήμα – βήμα, διακρίνεται σε τρία βασικά μέρη: «πριν», «λύση» και «μετά», ενώ σε κάθε βήμα επεξηγείται αναλυτικά το τι αναμένεται από τους μαθητές και στη συνέχεια καθοδηγούνται να εφαρμόσουν τις οδηγίες εργασίας.

Η δομή της στρατηγικής περιλαμβάνει διάκριση της προεργασίας και του τελικού ελέγχου της απάντησης από το κυρίως μέρος της λύσης, ακριβώς για να βοηθήσει στην ορθή κατανόηση της εκφώνησης και στην αυτοδιόρθωση, σημεία στα οποία οι μαθητές με ΜΔ παρουσιάζουν συχνά αδυναμίες. Η κατασκευή της βασίστηκε στη μεθοδολογία της ανάλυσης έργου, έχοντας πάντα υπόψη το συγκεκριμένο είδος ασκήσεων, το οποίο εμφανίζεται πολύ συχνά στο σχολικό εγχειρίδιο, από την αρχή του κεφαλαίου περί πολυωνύμων.

Κατά την προεργασία, συστήνεται η κατασκευή ενός σχήματος – γραφικού οργανωτή από του ίδιους τους μαθητές, ως βοήθημα παράκαμψης των δυσκολιών σε λεκτικές δεξιότητες και ανάδειξης της ισχυρότερής τους οπτικής αντίληψης, αφού πρώτα τους έχουν δοθεί μέσα από το παράδειγμα οδηγίες για το πώς θα διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα της άσκησης και πώς θα κατασκευάζουν το σχήμα. Οι οδηγίες που δίνονται βασίζονται στην παραδοχή ότι κάποιοι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες σε λεκτικές δεξιότητες, με αποτέλεσμα να έχουν αδυναμία στην ορθή αποκωδικοποίηση της μαθηματικής γλώσσας. Προτείνονται λέξεις – κλειδιά που θα τους βοηθήσουν σε αυτή την αποκωδικοποίηση, ενώ παράλληλα γίνεται χρήση της τεχνικής της «μετάφρασης σε μαθηματική γλώσσα», η οποία διδάχτηκε στα πλαίσια του δεύτερου φύλλου εργασίας. Επίσης, υπενθυμίζεται με έμφαση ότι για την πλήρη κατανόηση του προβλήματος, οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν τους σχετικούς ορισμούς για τις λέξεις που εμφανίζονται. Στο σημείο αυτό λήφθηκε σοβαρά υπόψη πως η χρήση συγκεκριμένων λέξεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται και στην καθημερινότητα, πολλές φορές αποκωδικοποιούνται από τους μαθητές με αυτόν τον «μη αυστηρά μαθηματικό» τρόπο, με αποτέλεσμα την εσφαλμένη κατανόηση των δεδομένων και των ζητούμενων του εκάστοτε προβλήματος. Με τη σαφή παρότρυνση να θυμηθούν και να χρησιμοποιήσουν τους αυστηρούς ορισμούς κατά τη «μετάφραση» των λέξεων σε μαθηματικά, επιχειρείται η ελαχιστοποίηση τέτοιου είδους παρανοήσεων.



Εικόνα 9: Σχήμα που προτείνεται κατά την προεργασία επίλυσης ασκήσεων, κενό

Στο δεύτερο μέρος της στρατηγικής, τη λύση, προτείνεται η εργασία σε βήματα, σε καθένα από τα οποία οι μαθητές εξάγουν συμπεράσματα από ζεύγη δεδομένων του προβλήματος, της επιλογής τους. Προτρέπονται να διαγράφουν τα δεδομένα που χρησιμοποιούν από το σχήμα που έχουν κατασκευάσει στο προηγούμενο μέρος και να ονομάζουν τις σχέσεις που προκύπτουν. Με τον τρόπο αυτό ρυθμίζεται η εργασία, ώστε να μην επαναλαμβάνονται μέρη της και ώστε να έχουν οι μαθητές διαρκώς την «εικόνα» του σημείου στο οποίο βρίσκονται, τι έχει ολοκληρωθεί και τι απομένει να γίνει.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος, προτείνεται ο έλεγχος της ορθότητας της απάντησης, μέσω αντικατάστασης του αγνώστου με τις τιμές που προέκυψαν ως λύσεις σε όλες τις εμφανιζόμενες σχέσεις και ελέγχου της αλήθειας αυτών των σχέσεων (οι οποίες πλέον είναι σχέσεις κυρίως μεταξύ πραγματικών αριθμών). Μέσω αυτού του βήματος υπενθυμίζεται στους μαθητές η σπουδαιότητα του αυτοελέγχου, ενώ παράλληλα διδάσκεται άμεσα σε εκείνους που αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε τέτοιου είδους μεταγνωστικές δεξιότητες, ένας τρόπος αυτοελέγχου.

ΠΡΙΝ	1)Υπογραμμίζουμε	• τις φράσεις με λέξεις όπως **«ποιος, πότε»**	
		• τις **σχέσεις** που εμφανίζονται	
		• τους **αριθμούς** που εμφανίζονται.	
	2) Θυμόμαστε τους ορισμούς για τις λέξεις που εμφανίζονται και αν μπορούμε «μεταφράζουμε σε μαθηματικά» τις αντίστοιχες φράσεις.		
	3) Φτιάχνουμε ένα σχήμα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα.		
ΛΥΣΗ	1) Διαλέγουμε δύο δεδομένα και ελέγχουμε τι θα συμβεί αν ισχύουν ταυτόχρονα και τα δύο.		
	2) Τα διαγράφουμε στο σχήμα και ονομάζουμε αυτό που θα προκύψει (σχέση 1).		
	3) Διαλέγουμε άλλο ένα από τα δεδομένα, το διαγράφουμε και ελέγχουμε τι θα συμβεί αν ισχύει ταυτόχρονα με τη (σχέση 1).		
	4) Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να χρησιμοποιήσουμε όλα τα δεδομένα.		
	5) Καταλήγουμε σε εξισώσεις με αγνώστους τα ζητούμενα του προβλήματος και τις λύνουμε.		
ΜΕΤΑ	Αντικαθιστούμε τους αριθμούς που βρήκαμε για τα ζητούμενα σε όλες τις σχέσεις που εμφανίστηκαν και ελέγχουμε αν αυτές ισχύουν.		

Εικόνα 10: Παράδειγμα στρατηγικής για την επίλυση αλγεβρικών ασκήσεων, με χρήση σχήματος

Ακολουθεί μια επιγραμματική περιγραφή της στρατηγικής, όπως φαίνεται στην Εικόνα 10, δομημένη σε διακριτά, ξεκάθαρα βήματα, τα οποία έχουν καταγραφεί σε πίνακα. Η τελευταία στήλη του πίνακα παρέχει στους μαθητές χώρο για να σημειώνουν τα βήματα που έχουν ολοκληρώσει κατά την ανεξάρτητη εργασία τους, ενώ τους προτείνεται να διατηρούν ένα αντίγραφο της στρατηγικής κατά την επίλυση ασκήσεων, ως βοήθημα αυτορρύθμισης.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται περισσότερα παραδείγματα ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου, κατά την επίλυση των οποίων οι μαθητές ωθούνται να χρησιμοποιήσουν την προτεινόμενη στρατηγική μέσω καθοδηγητικών ή ημιτελών προτάσεων. Οι ασκήσεις του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας αποτελούνται επίσης από ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, της εξεταζόμενης μορφής. Ένα αντίγραφο της στρατηγικής θα ήταν εύλογο να επιτρέπεται από τον εκπαιδευτικό και κατά την αξιολόγηση των μαθητών, σε περίπτωση που οι ίδιοι το θεωρήσουν βοηθητικό και το επιθυμούν.

Το είδος της προτεινόμενης στρατηγικής εξαρτάται βέβαια από το αντικείμενο, στο οποίο καλείται να χρησιμοποιηθεί, αλλά θα πρέπει να λαμβάνονται σε κάθε περίπτωση σοβαρά υπόψη και τα χαρακτηριστικά των μαθητών στους οποίους απευθύνεται.

Για παράδειγμα, αν οι μαθητές της τάξης δεν παρουσιάζουν δυσκολίες στην αποκωδικοποίηση του λεκτικού μέρους της άσκησης, αλλά υπολείπονται κατά την παρακολούθηση και ρύθμιση του έργου, την προσοχή και τη μνήμη, πιθανόν να αποδεικνύονταν περισσότερο χρηστική μια στρατηγική η οποία θα εστίαζε σε αυτά τα σημεία, παρά στο πρώτο μέρος, της κατασκευής μιας εικόνας του προβλήματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα στρατηγικής φαίνεται στην Εικόνα 11, η οποία παρέχει επίσης ένα μνημονικό βοήθημα των βημάτων της, αλλά και ένα δεύτερο, για την ανάκληση και επιλογή της συγκεκριμένης στρατηγικές σε κατάλληλες περιστάσεις.

Η γλώσσα των βοηθημάτων είναι από μόνη της απλή, ευκολομνημόνευτη και με χιουμοριστικά στοιχεία, ώστε να διευκολύνεται ακόμα περισσότερο η αποθήκευσή της στη μακρόχρονη μνήμη.

Όταν σε μια άσκηση μας ζητάνε να κάνουμε οποιοδήποτε από τα παρακάτω:

- να βρούμε **σε ποιες περιπτώσεις** συμβαίνει «κάτι» ή
- να βρούμε **πότε** συμβαίνει «κάτι» ή
- να **ελέγξουμε αν** συμβαίνει «κάτι», τότε:

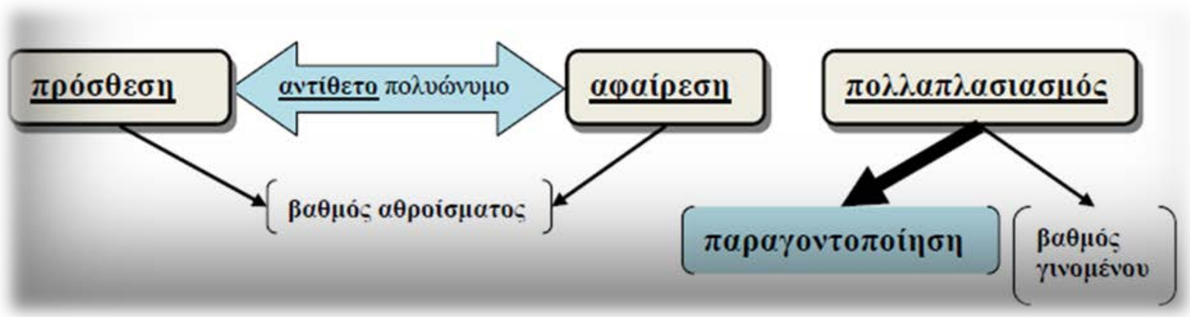
κάτι	1.Βρίσκουμε τι ακριβώς είναι αυτό το **«κάτι»** που πρέπει να συμβαίνει	
ορισμοί	2.Θυμόμαστε τους σχετικούς **ορισμούς**	
σχέσεις	3.Γράφουμε τις **σχέσεις** (ή τη σχέση) που πρέπει να ισχύουν για να συμβαίνει αυτό το «κάτι» (είτε από τα δεδομένα, είτε από τον ορισμό, είτε από γνωστά θεωρήματα)	
άγνωστοι	4.Ελέγχουμε αν αυτές οι σχέσεις περιέχουν **άγνωστες ποσότητες**. • Αν δεν περιέχουν μπορούμε αμέσως να δούμε αν ισχύουν ή όχι • Αν περιέχουν, τότε είναι **εξισώσεις** που πρέπει να λυθούν	
λύνουμε	5.Προσπαθούμε να **λύσουμε** τις εξισώσεις (δηλαδή να βρούμε τους αριθμούς που αν αντικαταστήσουν τις άγνωστες ποσότητες, ισχύουν οι σχέσεις) • Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί, τότε λέμε ότι δεν μπορεί να συμβαίνει το «κάτι». • Αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί, τότε το «κάτι» συμβαίνει	
ελέγχουμε	6.**Ελέγχουμε** αντικαθιστώντας τους αριθμούς που βρήκαμε, αν ισχύει πράγματι το «κάτι»	

- Για να θυμόμαστε τα παραπάνω βήματα πιο εύκολα μπορούμε να σκεφτόμαστε την ερώτηση: **«Τι είναι μια άσκηση στην Άλγεβρα;»**
- Και να δίνουμε την απάντηση: **«Κάτι ορισμοί και σχέσεις με αγνώστους που πρέπει να λύσουμε και να ελέγξουμε»**

Εικόνα 11: Παράδειγμα στρατηγικής για την επίλυση αλγεβρικών ασκήσεων, με μνημονικό βοήθημα

5.5. Μάθημα 5ο

Στο πέμπτο φύλλο εργασίας εξετάζονται οι πράξεις μεταξύ πολυωνύμων, πλην της διαίρεσης, η οποία εξετάζεται στο φύλλο εργασίας 7. Ο προ-οργανωτής σε αυτήν την περίπτωση περιέχει εκτός από τα κυρίαρχα ονόματα των πράξεων, ενδείξεις για τη σχέση μεταξύ πρόσθεσης – αφαίρεσης πολυωνύμων, καθώς επίσης και πληροφορίες όπως το βαθμό αθροίσματος και γινομένου πολυωνύμων και την παραγοντοποίηση πολυωνύμων. Οι λέξεις «αντίθετο» πολυώνυμο και «παραγοντοποίηση», τονίζονται επιπλέον με διαφορετικό, πιο έντονο χρωματισμό, ο οποίος σηματοδοτεί σιωπηλά την ιδιαίτερη σημασία των δύο εννοιών.



Εικόνα 12: Προ-οργανωτής του φύλλου εργασίας 5

Όλοι οι αλγόριθμοι πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, έχουν ήδη διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις, χωρίς όμως να γίνεται λόγος για την έννοια του πολυωνύμου. Επίσης, το άθροισμα και το γινόμενο πολυωνύμων δεν έχει εξεταστεί στο παρελθόν ως αυτόνομη μαθηματική οντότητα, με τα δικά της, ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Για τους δύο παραπάνω λόγους και επειδή η κατανόηση των εξαγόμενων των πράξεων πολυωνύμων ως νέα πολυώνυμα θεωρήθηκε ουσιαστικής σημασίας για την βαθύτερη κατανόηση των όσων έπονται, προτιμήθηκε στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας να μην παρουσιαστούν άλλου είδους νέες γνώσεις. Βέβαια, ο ίδιος ο αλγόριθμος της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παρουσιάζεται περισσότερο για εξάσκηση, παρά ως κάτι νέο, ενώ προτείνονται τρόποι οργάνωσης κατά τη διάρκεια των πράξεων, ως βοήθημα για μαθητές με ΜΔ, οι οποίοι αντιμετωπίζουν προβλήματα κατά την παρακολούθηση της εργασίας τους και την τήρηση ακολουθιών λογικών βημάτων.

Αναλυτικότερα, η πρώτη ενότητα πραγματεύεται την πρόσθεση πολυωνύμων. Γίνεται εξαρχής σαφές με μία σύντομη δήλωση, πως το αντικείμενο που θα μελετηθεί είναι το άθροισμα, ως ένα νέο πολυώνυμο, με δικό του συμβολισμό, παρά η ίδια η διαδικασία της πρόσθεσης. Ακολουθούν παραδείγματα προσθέσεων, στα οποία ενσωματώνεται μία πρόταση γραπτής οργάνωσης, κατά τη διάρκεια της εργασίας. Μέσα από τα παραδείγματα αναδεικνύεται η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, καθώς επίσης και ο πιθανός βαθμός του αθροίσματος, ο οποίος προκύπτει από κατάλληλη επιλογή των παρουσιαζόμενων παραδειγμάτων. Οι μαθητές καταλήγουν στην γενίκευση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν, μέσα από μια ημιτελή πρόταση, σχετικά με το βαθμό του αθροίσματος. Ακολουθεί ο πίνακας σύντομης ανασκόπησης.

Γράφουμε τα πολυώνυμα, το ένα κάτω		3	2	1	0
από το άλλο, βάζοντας τις ίδιες	$P(x)$	$3x^3$	$+2x^2$		
δυνάμεις του x στις ίδιες στήλες	$+Q(x)$				
Κάνουμε πρόσθεση σε κάθε στήλη	+	$7x^3$	$-3x^2$		
Γράφουμε την απάντηση	$P(x) + Q(x) =$				

Εικόνα 13: Οργανωτής για την πρόσθεση πολυωνύμων, ημιτελώς συμπληρωμένος

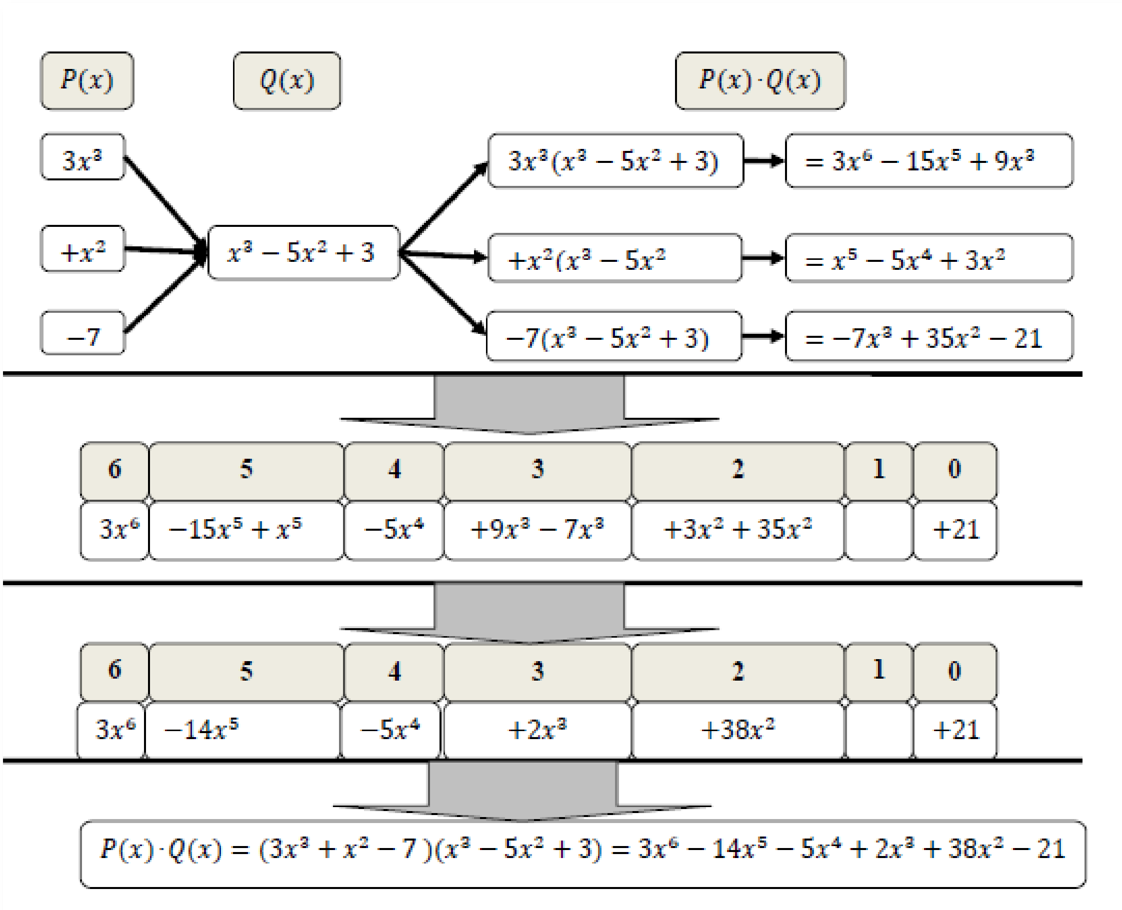
Στη δεύτερη ενότητα, της οποίας το αντικείμενο είναι η αφαίρεση πολυωνύμων, η εισαγωγή αποτελείται ξανά από μια σύντομη δήλωση – ορισμό της διαφοράς. Στα παραδείγματα που ακολουθούν, προτείνεται επίσης ένας τρόπος γραπτής οργάνωσης της εργασίας, στην οποία η προσέγγιση γίνεται μέσω της ήδη γνωστής πρόσθεσης με το αντίθετο πολυώνυμο του αφαιρετέου. Ακολουθεί η γενίκευση της μεθόδου σε απλή γλώσσα και ο σχετικός συμβολισμός: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$. Τέλος περιγράφεται (μη αυστηρά) η έννοια του αντίθετου πολυωνύμου και ζητείται από τους μαθητές να βρουν οι ίδιοι το αντίθετο δοσμένου πολυωνύμου. Ακολουθεί ένα ακόμα παράδειγμα, στο οποίο πλέον έχουν παραλειφθεί οι οδηγίες συμπλήρωσης του οργανωτή. Υπογραμμίζεται η μη ισχύς της αντιμεταθετικής ιδιότητας, μέσα από ερωτήσεις που ωθούν τους μαθητές να την ανακαλύψουν, ενώ ταυτόχρονα γίνεται ο παραλληλισμός με τη διαφορά πραγματικών αριθμών. Ο πιθανός βαθμός της διαφοράς πολυωνύμων βρίσκεται από τους μαθητές, με την υπενθύμιση ότι αποτελεί στην πραγματικότητα άθροισμα του ενός πολυωνύμου με το αντίθετο του δεύτερου, η οποία τους παραπέμπει έμμεσα να ανακαλέσουν το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το άθροισμα. Και αυτή η ενότητα κλείνει με το δικό της πίνακα σύντομης ανασκόπησης.

	4	3	2	1	0
$Q(x)$					
$-P(x)$					
+					
$Q(x) - P(x) =$					

Εικόνα 14: Οργανωτής για την αφαίρεση πολυωνύμων, κενός

Ακολουθεί η τρίτη ενότητα, σχετική με τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Το γινόμενο πολυωνύμων παρουσιάζεται ξανά ως ένα νέο πολυώνυμο, το οποίο προκύπτει από την αντίστοιχη πράξη μεταξύ των παραγόντων. Υπενθυμίζεται ο κανόνας που έχει ήδη διδαχτεί σε προηγούμενη τάξη περί πολλαπλασιασμού παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές, με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας και αναγωγή ομοίων όρων και ακολουθούν παραδείγματα πολλαπλασιασμού πολυωνύμων με έναν ή δύο όρους το καθένα. Τέλος, υπενθυμίζεται μέσω μιας ημιτελούς πρότασης, το γεγονός ότι όταν οι παράγοντες είναι σε παρένθεση το σύμβολο του πολλαπλασιασμού συνήθως παραλείπεται.

Για τον πολλαπλασιασμό μεγαλύτερων σε αριθμό όρων πολυωνύμων, προτείνεται όπως και στις προηγούμενες ενότητες ένας οργανωτής, ο οποίος αυτή τη φορά διαιρείται σε τέσσερα διακριτά βήματα.



Εικόνα 15: Οργανωτής τεσσάρων βημάτων για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων, πλήρως συμπληρωμένος

Αρχικά προτείνεται η κάθετη τοποθέτηση του ενός παράγοντα, ώστε να γίνουν στο πρώτο βήμα πολλαπλασιασμοί μεταξύ ολόκληρου του δεύτερου παράγοντα με ένα μόνο όρο τη φορά. Τα επιμέρους γινόμενα συμπληρώνουν τόσες γραμμές, όσες οι όροι του πρώτου παράγοντα. Στο δεύτερο βήμα προστίθενται τα επιμέρους αποτελέσματα όλων των γραμμών, στο τρίτο γίνεται η αναγωγή των όμοιων όρων, ενώ στο τέταρτο και τελευταίο βήμα γράφεται η πλήρης απάντηση, δηλαδή το πολυώνυμο – γινόμενο στην ανηγμένη μορφή του. Τα παραπάνω βήματα εξηγούνται με σύντομες και απλές προτάσεις σε ένα πίνακα, ο οποίος ακολουθεί το παράδειγμα συμπλήρωσης του οργανωτή.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να εκτελέσουν τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων του προηγούμενου παραδείγματος, αντιστρέφοντας τη σειρά, αφού πρώτα απαντήσουν σε ερωτήσεις που τους ωθούν να προβλέψουν το βαθμό του γινομένου, αλλά και το ίδιο το αποτέλεσμα. Οι μαθητές στο σημείο αυτό καλούνται να αναγνωρίσουν τα πολυώνυμα του προηγούμενου παραδείγματος και να δώσουν την απάντηση που έχει ήδη υπολογιστεί. Οι ερωτήσεις αυτές προωθούν μεταγνωστικές δεξιότητες όπως την αναγνώριση του έργου και το σχεδιασμό του, πριν την εκτέλεση, στις οποίες έχει υποτεθεί ότι παρουσιάζουν αδυναμίες κάποιοι από τους μαθητές τις τάξης. Ακολουθεί η αναλυτική εκτέλεση της πράξης, όχι μόνο για άσκηση στον προτεινόμενο οργανωτή, αλλά και για επαλήθευση της ορθότητας των απαντήσεών τους στις προηγηθείσες ερωτήσεις. Έπειτα, αναφέρεται με άμεσο τρόπο το γεγονός της ισχύος της αντιμεταθετικής ιδιότητας και στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού.

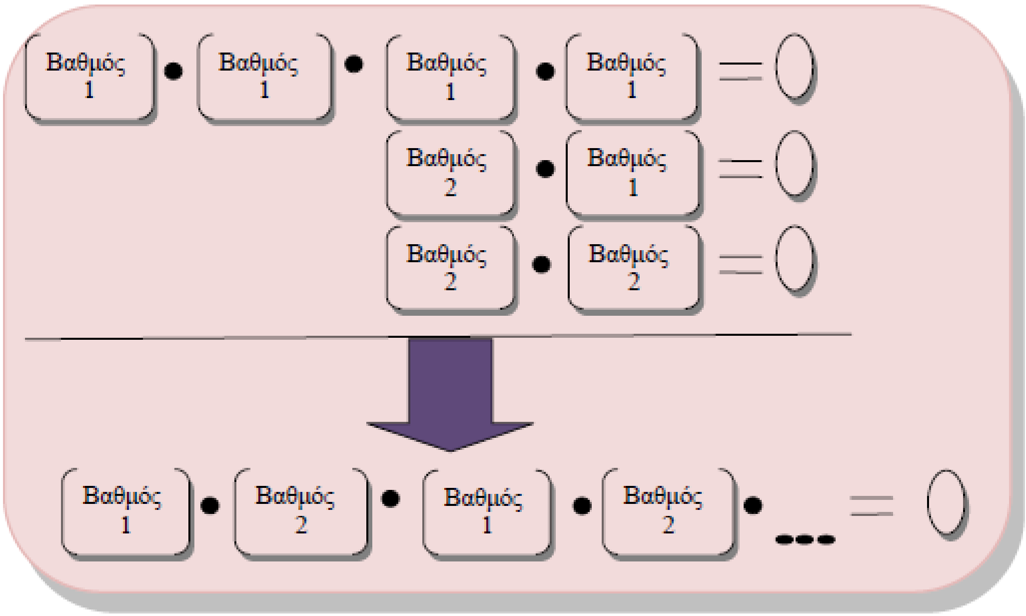
Έπεται ένα ακόμα παράδειγμα πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, πριν την εκτέλεση του οποίου οι μαθητές πρέπει να «μαντέψουν» το βαθμό του γινομένου. Έπειτα, αναφέρεται επίσης με άμεσο τρόπο το γεγονός ότι ο βαθμός του γινομένου ισούται με το άθροισμα των βαθμών των παραγόντων, πληροφορία η οποία θεωρείται σημαντική για τα επόμενα μαθήματα που στηρίζονται στη γραφή των πολυωνύμων ως γινομένων παραγόντων μικρότερου βαθμού από τον αρχικό. Μία εισαγωγή στη μετέπειτα χρήση του πολλαπλασιασμού γίνεται μέσω μιας παρατήρησης, η οποία ακολουθείται από ένα παράδειγμα γραφής δοσμένου πολυωνύμου σε μορφή γινομένου. Η μετατροπή από μορφή σε μορφή βασίζεται στη γνώση εκ των προτέρων του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγονται συγχύσεις και παρανοήσεις που μπορεί να σχετίζονται με ελλείψεις των μαθητών σε τεχνικές όπως αυτή της εξαγωγής κοινού παράγοντα. Ακολουθεί ένα ακόμα παράδειγμα, το οποίο οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν, με τη βοήθεια παροτρύνσεων, ακολουθώντας τα βήματα που εκτελέστηκαν πριν. Τέλος, ονομάζεται η διαδικασία της παραγοντοποίησης πολυωνύμου και νοηματοδοτείται, ως διαδικασία «ανάποδη» του πολλαπλασιασμού. Η ετυμολογία της ίδιας της λέξης, χρησιμοποιείται ως μνημονικό βοήθημα, με τη δήλωση ότι «μετατρέπει το πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων». Η χρήση της ετυμολογίας των μαθηματικών όρων ως μνημονικά βοηθήματα, μπορεί να γίνεται από κάποιους μαθητές αυθόρμητα, όμως απαιτεί ευχέρεια σε λεκτικές δεξιότητες, αλλά και αναπτυγμένες μεταγνωστικές δεξιότητες, στις οποίες υποτέθηκε ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης τάξης υπολείπονται.

Το φύλλο εργασίας ολοκληρώνεται με τον πίνακα σύντομης ανασκόπησης της τελευταίας ενότητας και μια «συνολική» άσκηση, κατά την οποία οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν παραστάσεις που περιέχουν όλες τις παραπάνω πράξεις μεταξύ πολυωνύμων. Η άσκηση αυτή παρουσιάζεται όπως ακριβώς η αντίστοιχη του σχολικού εγχειριδίου, με παροχή χώρου για την εργασία των μαθητών.

Οι ασκήσεις για ανεξάρτητη μελέτη που προτείνονται περιλαμβάνουν το γνωστό πίνακα ανασκόπησης, μία άσκηση παρόμοια με την τελευταία του φύλλου εργασίας, η οποία διαφέρει από αυτή μόνο στα αριθμητικά δεδομένα, καθώς επίσης και μια άσκηση περισσότερο σύνθετη: δίνονται δύο πολυώνυμα των οποίων οι συντελεστές περιέχουν παραμέτρους και ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν τη διαφορά των δύο και να τη γράψουν στην κανονική της μορφή. Με την άσκηση αυτή επιχειρείται να γίνει επανάληψη των εννοιών της παραμέτρου και της κανονικής μορφής πολυωνύμου και ταυτόχρονα να εφαρμοστεί ο οργανωτής για την αφαίρεση πολυωνύμων. Στην περίπτωση αυτή βέβαια, οι όροι προς πρόσθεση θα περιέχουν παραμέτρους, οι οποίες πιθανόν να προκαλέσουν σύγχυση ως προς τον τρόπο αντιμετώπισης. Η σύγχυση στον τρόπο χειρισμού των παραμέτρων στη συγκεκριμένη άσκηση είναι αναμενόμενη και θα πρέπει να εξεταστεί αναλυτικά από τον εκπαιδευτικό πριν την εισαγωγή στο επόμενο φύλλο εργασίας, ώστε να διαλευκανθούν όλες οι πιθανές παρανοήσεις των μαθητών.

5.6. *Μάθημα 6ο*

Σε αυτό το φύλλο εργασίας παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων, οι οποίες δίνονται σε μορφή γινομένου παραγόντων πρώτου και δεύτερου βαθμού.



Εικόνα 16: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 6

Πριν την εισαγωγή στην πρώτη ενότητα, υπενθυμίζεται, υπό μορφήν παρατήρησης, η ιδιότητα που καθιστά τους πραγματικούς αριθμούς ακέραια περιοχή, αρχικά μέσα από δύο παραδείγματα ισοτήτων γινομένου φυσικών αριθμών με το μηδέν και στη συνέχεια, μέσα από την ήδη γνωστή γενική πρόταση με μεταβλητές «Αν $x \cdot y = 0$, τότε αναγκαστικά $x = 0$ ή $y = 0$». Η πρόταση επαναλαμβάνεται με λέξεις: «Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι 0, τότε αναγκαστικά ένας από τους δύο αριθμούς, ή και οι δύο, πρέπει να είναι 0». Στο σημείο αυτό, ο κατά τη μαθηματική λογική πλεονασμός: «ή και οι δύο», περιλαμβάνεται στην πρόταση, διότι κρίθηκε προτιμότερο να γίνει πλήρως κατανοητή, με όλες τις υποπεριπτώσεις της από τους μαθητές, ακόμα και με μικρή «έκπτωση» ως προς την αυστηρότητα. Τέλος, δηλώνεται ευθέως πως η παραπάνω πρόταση θα αποτελέσει οδηγό στη συνέχεια του φύλλου εργασίας, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

Στην πρώτη επιμέρους ενότητα εξετάζεται η περίπτωση εξισώσεων με το πρώτο μέλος γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και το δεύτερο ίσο με μηδέν. Και σε αυτή την περίπτωση, οι μαθητές καλούνται μέσα από παραδείγματα, με τη βοήθεια καθοδηγητικών ερωτήσεων και ημιτελών προτάσεων, να εξάγουν συμπεράσματα, τα οποία στη συνέχεια θα γενικεύσουν.

Η εξίσωση του πρώτου παραδείγματος περιέχει το γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων της απλής μορφής $x - \alpha$. Οι μαθητές αρχικά πρέπει να αναγνωρίσουν σε αυτήν μια πολυωνυμική εξίσωση, βρίσκοντας με πράξεις το «κρυμμένο πολυώνυμο» και μετέπειτα το βαθμό του (από την ανηγμένη του μορφή). Αφού αναγνωρίσουν το τριώνυμο, καλούνται να θυμηθούν τους τύπους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και να λύσουν την εξίσωση που προέκυψε από τις πράξεις. Στο δεύτερο στάδιο, χρησιμοποιείται η παρατήρηση της εισαγωγής για την ανάδειξη ενός δεύτερου, συντομότερου τρόπου επίλυσης της ίδιας εξίσωσης. Στόχος είναι να κατανοήσουν οι μαθητές πως η εκτέλεση των πράξεων δεν οδηγεί πάντα σε απλούστευση της λύσης, το αντίθετο μάλιστα στην περίπτωση που το πρώτο μέλος είναι ήδη γραμμένο με τη μορφή γινομένου. Τους ζητείται να αντικαταστήσουν τον άγνωστο με τον αριθμό 10 και να εκτελέσουν τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις μόνο. Η μη αλήθεια της ισότητας που προκύπτει: $8 \cdot 2 = 0$, καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο προέκυψε, είναι τα δύο στοιχεία που αναμένεται να οδηγήσουν τους μαθητές στην εύρεση ενός αριθμού, αντί του 10, που θα επαληθεύει την εξίσωση. Υπενθυμίζεται ξανά η χρησιμότητα της εισαγωγικής παρατήρησης και προτρέπονται να τη λάβουν υπόψη κατά την αναζήτηση ενός τέτοιου αριθμού. Αφού επιλέξουν κάποιον, προτρέπονται να «δοκιμάσουν» την ορθότητα της απάντησής τους αντικαθιστώντας τον στην εξίσωση και κάνοντας τις πράξεις, τεχνική αυτοελέγχου που ήδη διδάχτηκε στο φύλλο εργασίας 4. Όταν καταλήξουν στην εύρεση μιας λύσης, τότε η εύρεση της δεύτερης θα πρέπει να είναι σύντομη, με τη χρήση μόνο των συμπερασμάτων της έως τώρα εργασίας τους και χωρίς να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία εξαρχής, ούτως ώστε να ωθηθούν προς τη σχετική γενίκευση.

Στο δεύτερο παράδειγμα, η παραπάνω διαδικασία αρχίζει να μοντελοποιείται, απαλασσόμενη από τις παρατηρήσεις που παρεμβάλλονταν στο προηγούμενο και με τη χρήση μόνο προτροπών με μικρότερα γράμματα, κάτω ή δίπλα από τις καθοδηγητικές ερωτήσεις. Για την εύρεση του βαθμού της εξίσωσης προτείνεται να θυμηθούν οι μαθητές τι γνωρίζουν για το βαθμό γινομένου πολυωνύμων, ώστε να μη χρειαστεί να εκτελέσουν τις πράξεις. Σε αυτή την περίπτωση, οι παράγοντες δεν είναι πλέον μονικά πολυώνυμα, γεγονός που πιθανόν να απαιτήσει γραπτή επίλυση των επιμέρους πρωτοβάθμιων εξισώσεων από κάποιους μαθητές. Για το λόγο αυτό παρέχεται επιπλέον χώρος στα αντίστοιχα πλαίσια προς συμπλήρωση. Στο τρίτο πλέον παράδειγμα, οι προτροπές παραλείπονται. Ακολουθεί η επισήμανση ότι ενώ όλα τα παραδείγματα ήταν εξισώσεις βαθμού 2, προτιμήθηκε η χρήση της παρατήρησης, αντί του γνωστού τρόπου λύσης, διαδικασία που μπορεί να γενικευτεί και για γινόμενα περισσότερων πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Στο τέταρτο παράδειγμα παρουσιάζεται μια εξίσωση με τρεις πρωτοβάθμιους παράγοντες στο πρώτο μέλος, ενώ οι προτροπές από τον εκπαιδευτικό μειώνονται. Στο πέμπτο και τελευταίο παράδειγμα της ενότητας, οι παράγοντες είναι πλέον 6 και οι μαθητές καλούνται να βρουν τις λύσεις της εξίσωσης, χωρίς καθοδήγηση αυτή τη φορά. Η χρησιμότητα της μεθόδου επισημαίνεται από τους μαθητές, μέσα από την απάντηση στην ερώτηση *«Θα προτιμούσατε να σας δινόταν το πολυώνυμο του πρώτου μέλους στην κανονική του μορφή;»*, η οποία τους ωθεί να αξιολογήσουν τη διαδικασία που διδάχτηκε, δεξιότητα στην οποία υποτέθηκε ότι υστερεί μέρος της τάξης.

Στη δεύτερη ενότητα του έκτου φύλλου εργασίας μελετάται η περίπτωση εξίσωσης με πρώτο μέλος γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα. Οι καθοδήγηση παραμένει στην ίδια μορφή με αυτή των προηγούμενων παραδειγμάτων, λιτή αλλά ουσιαστική και ο παρεχόμενος χώρος ανάλογος των αναμενόμενων απαντήσεων. Στην εξίσωση αυτή παρουσιάζεται για πρώτη φορά ένας παράγοντας μηδενικού βαθμού (ο αριθμός 3), ο οποίος δεν αναφέρεται ευθέως σε κανένα σημείο, αλλά επιλέχτηκε να εμφανιστεί σκόπιμα. Σε περίπτωση που κάποιος από τους μαθητές παρατηρηθεί ότι δυσκολεύεται με την παρουσία του συγκεκριμένου παράγοντα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να τον επιβραβεύσει για την εύστοχη παρατήρηση: ότι δηλαδή ο παράγοντας αυτός δεν έχει βαθμό μεταξύ των 1 και 2 και να εξηγήσει το λόγο για τον οποίο αυτός δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη λύση της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας την εισαγωγική παρατήρηση του φύλλου εργασίας. Επίσης, μπορεί να γενικεύσει, εξηγώντας με άμεσο τρόπο γιατί ένας παράγοντας – πραγματικός αριθμός δεν επηρεάζει την επίλυση εξισώσεων με το πρώτο μέρος γινόμενο οσωνδήποτε παραγόντων, οποιουδήποτε βαθμού.

Στο επόμενο παράδειγμα, παρουσιάζεται επίσης εσκεμμένα ο παράγοντας – 1. Η συζήτηση γύρω από αυτόν θα πρέπει να σχετιστεί με την προηγούμενη περίπτωση, θετικού παράγοντα μηδενικού βαθμού και να δηλωθεί ρητά από τον εκπαιδευτικό πως στην περίπτωση που εμφανίζεται απλά ένα –, εννοείται ο αριθμός – 1. Στο ίδιο παράδειγμα, ο δευτεροβάθμιος παράγοντας είναι της μορφής διαφοράς τετραγώνων, γεγονός που σε περίπτωση που παρατηρηθεί από τους ίδιους τους μαθητές, μπορεί να οδηγήσει στην υπενθύμιση εναλλακτικού χειρισμού του συγκεκριμένου είδους εξίσωσης. Στην παρούσα φάση πάντως, ενδιαφέρει περισσότερο να γνωρίζουν οι μαθητές έναν τρόπο λύσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ώστε να μπορούν να ολοκληρώσουν τις ανατιθέμενες εργασίες. Οι διαφορετικές προσεγγίσεις επιβραβεύονται, αλλά δεν επιβάλλονται σε καμία περίπτωση και στους υπόλοιπους μαθητές.

Η τρίτη ενότητα ασχολείται με την επίλυση εξισώσεων με το πρώτο μέλος γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων, με καθοδήγηση στο ίδιο μοτίβο με προηγουμένως. Εμφανίζονται ξανά οι περιπτώσεις του παράγοντα – 1 και της διαφοράς τετραγώνων, ώστε να εξασφαλιστεί πως ακόμα και οι μαθητές που χρειάστηκαν βοήθεια στην πρώτη εμφάνισή των, κατανόησαν τον τρόπο χειρισμού των και μπορούν να τον εφαρμόσουν ανεξάρτητα.

Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα η μέθοδος γενικεύεται σε εξισώσεις με παράγοντες πρωτοβάθμιους ή δευτεροβάθμιους, σε οποιαδήποτε σειρά και σε οποιοδήποτε πλήθος. Δεν παρέχεται πλέον καθοδήγηση, παρά μόνο αν ζητηθεί από κάποιον μαθητή, αφού αναμένεται ότι ακόμα και σε περίπτωση που χρειαστεί μπορούν οι μαθητές να συμβουλευτούν τα βήματα που ακολούθησαν στις προηγούμενες περιπτώσεις. Εμφανίζονται για πρώτη φορά άρρητοι όροι κάποιων πρωτοβάθμιων παραγόντων, οι οποίοι συζητώνται σε περίπτωση που χρειαστεί. Ο αναστοχασμός προωθείται με τον τρόπο της πρώτης ενότητας, μέσα από την ερώτηση: *«Θα προτιμούσατε να σας δινόταν το πολυώνυμο του πρώτου μέλους στην κανονική του μορφή;»*.

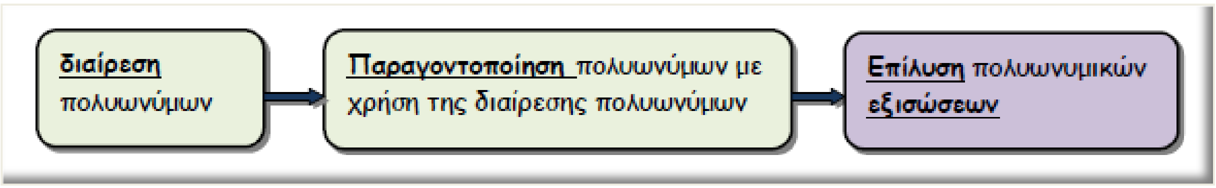
Το φύλλο εργασίας «κλείνει» με ένα συμπέρασμα, δύο επιμέρους προτάσεων. Η πρώτη χρησιμεύει ως ενθάρρυνση των μαθητών – πίστη από μέρους του εκπαιδευτικού στις δυνατότητές των, ενώ η δεύτερη συνοψίζει το στόχο ολόκληρου του κεφαλαίου και τη μέθοδο εργασίας κατά την ενασχόληση με αυτό: *«προσπάθεια μετατροπής των εμφανιζόμενων εξισώσεων, στη μορφή (γινόμενο παραγόντων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού)=0, η οποία πλέον είναι γνωστή»*.

Ακολουθεί μια σημείωση, σχετικά με την ύπαρξη ή μη τύπων για την επίλυση εξισώσεων βαθμών μεγαλύτερων του 2 και ένα ιστορικό σημείωμα με τίτλο *«Μια μαθηματική ιστορία»*, η οποία αναφέρεται κυρίως στη γνωστή διαμάχη γύρω από την ανακάλυψη των τύπων για την κυβική, αλλά και την τεταρτοβάθμια εξίσωση. Γίνεται επίσης μια νύξη για τις περιπτώσεις βαθμών μεγαλύτερων ή ίσων με 5. Το κείμενο συντάχθηκε από τη συγγραφέα, με παραστατικό και σε ορισμένα σημεία ελαφρώς χιουμοριστικό ύφος, με στόχο να προκαλέσει το ενδιαφέρον και τη συζήτηση μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το περιεχόμενό του αναφέρεται σε μεγάλο βαθμό και στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του κεφαλαίου, στο σχολικό εγχειρίδιο. Επίσης, αν ο εκπαιδευτικός κρίνει ότι υπάρχει το χρονικό περιθώριο και η διάθεση από μέρους των παιδιών, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για δραματοποίηση.

Οι ασκήσεις που προτείνονται σε αυτό το μάθημα περιλαμβάνουν το γνωστό πίνακα ανασκόπησης, στον οποίο οι μαθητές σημειώνουν ότι πιστεύουν ότι θα τους χρειαστεί να θυμούνται σχετικά με την επίλυση εξισώσεων της μορφής που μελετήθηκε, ένα πίνακα με τέσσερις τέτοιες εξισώσεις, τις οποίες πρέπει να λύσουν για να τον συμπληρώσουν και μια τρίτη άσκηση, η οποία τους ζητά να βρουν πληροφορίες για τους Abel και Galois. Οι πληροφορίες που θα συλλέξουν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε για περεταίρω συζήτηση (έπειτα από αυτή που προηγήθηκε με αφορμή το ιστορικό σημείωμα), είτε για την εκπόνηση κάποιας ομαδικής εργασίας, προωθώντας σε κάθε περίπτωση *«την αναγνώριση των μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας»* (Tzanakis, Arcavi, 2000).

5.7. Μάθημα 7ο

Στο έβδομο φύλλο εργασίας διδάσκεται ο μηχανισμός της διαίρεσης πολυωνύμων, κίνητρο για την εκμάθηση του οποίου θα αποτελέσει η χρήση του κατά την παραγοντοποίηση πολυωνύμων και τελικά κατά την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων, γεγονός που φαίνεται και στον σχετικό προ-οργανωτή.



Εικόνα 17: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 7

Ακολουθεί η λεκτική περιγραφή της σημαντικότητας της διαίρεσης πολυωνύμων και ο παραλληλισμός του μηχανισμού της με αυτόν της διαίρεσης μεταξύ φυσικών αριθμών.

Ο ίδιος ο μηχανισμός παρουσιάζεται μέσα από ένα παράδειγμα. Ακολουθεί η περιγραφή του σε ένα πίνακα, ο οποίος περιέχει δύο στήλες. Στην πρώτη αναγράφεται ο γενικός τρόπος σκέψης, ενώ στη δεύτερη, δίπλα σε κάθε βήμα αναγράφεται η εφαρμογή του στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Στο σημείο αυτό, καλό θα είναι να γίνει επιπλέον επίδειξη των βημάτων του αλγορίθμου από τον εκπαιδευτικό στον πίνακα. Στη συνέχεια δίνονται τέσσερις διαιρέσεις προς συμπλήρωση από τους μαθητές, για να τους δοθεί η ευκαιρία να εμπεδώσουν την διδαχθείσα τεχνική, αλλά και να διαλευκάνουν τυχούσες απορίες τους, συμβουλευόμενοι πάντα τον πίνακα με τις σχετικές οδηγίες και το παράδειγμα. Αναμένεται να συναντήσουν δυσκολίες αρκετοί μαθητές, με ΜΔ ή χωρίς, αφού ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι αρκετά πολύπλοκος και παρουσιάζεται για πρώτη φορά. Ακόμα και ο παραλληλισμός του με αυτόν της διαίρεσης φυσικών δεν εξασφαλίζει την εκμάθηση, ιδιαίτερα από τη στιγμή που ακόμα και ο δεύτερος αποτελεί «αχίλλειο πτέρνα» για τους μαθητές με ΜΔ. Σε αυτό το σημείο οι μαθητές δουλεύουν ανεξάρτητα και η καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό πρέπει να είναι διαρκής, είτε σε ατομική βάση, είτε προς ολόκληρη την τάξη. Αργότερα θα δοθούν και άλλα παραδείγματα διαιρέσεων, ώστε να ασκηθούν κατά το δυνατόν περισσότερο, μέχρι την κατάκτηση του μηχανισμού.

Μετά την ολοκλήρωση κάθε διαίρεσης, με βοήθεια ή χωρίς, ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα πίνακα με το όνομα κάθε πολυωνύμου που εμφανίστηκε (δ, Δ, π, υ) και την ταυτότητα της σχετικής διαίρεσης. Η ταυτότητα συμπληρώνεται κατ’ αναλογία με αυτήν των φυσικών, ενώ το σχετικό θεώρημα παρουσιάζεται αμέσως μετά, σε ειδικό πλαίσιο. Επισημαίνεται το γεγονός πως κάθε θεώρημα θα πρέπει να συνοδεύεται από την απόδειξή του, όμως για το συγκεκριμένο θεώρημα η απόδειξη τυχαίνει να είναι αρκετά σύνθετη και επομένως δε θα τους παρουσιαστεί. Όπως και για την περίπτωση ορισμών, έτσι και για τα θεωρήματα, οι μαθητές καλούνται να μάθουν, αλλά και να κατανοήσουν σε βάθος το περιεχόμενο, συμπληρώνοντας επιπλέον το αντίστοιχο πλαίσιο σημειώσεων.

Στη δεύτερη ενότητα υλοποιείται η «υπόσχεση» του εκπαιδευτικού, ότι η διαίρεση θα μελετηθεί με στόχο την παραγοντοποίηση πολυωνύμων και κατ' επέκτασιν την επίλυση εξισώσεων. Αν και το συγκεκριμένο μάθημα θα μπορούσε να αφιερωθεί εξ ολοκλήρου στην εκμάθηση του αλγορίθμου της διαίρεσης, προτιμήθηκε να γίνει όσο το δυνατόν πιο γρήγορα η σύνδεση με την πρακτική χρησιμότητά του, ώστε να διατηρηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Η άσκηση στην εφαρμογή του αλγορίθμου θα γίνει ούτως ή άλλως μέσα από τη χρήση του, κατά την επίλυση εξισώσεων.

Και σε αυτή την ενότητα η εισαγωγή στην διδακτέα τεχνική γίνεται μέσα από τη μελέτη της αντίστοιχης διαδικασίας με φυσικούς αριθμούς. Έπειτα από την εκτέλεση της διαίρεσης των φυσικών 129 : 4, οι μαθητές γράφουν την ταυτότητα της διαίρεσης και απαντούν σε μια σειρά από ερωτήματα που προκύπτουν από τη γραφή του 129 ως $32 \cdot 4 + 1$, «ξεχνώντας» την ίδια τη διαίρεση από την οποία προέκυψε η συγκεκριμένη γραφή. Στη συνέχεια, γίνονται τα ίδια ερωτήματα για την περίπτωση $128 = 32 \cdot 4$, χωρίς να εμφανίζεται η σχετική διαίρεση. Το ζητούμενο είναι οι μαθητές να μπορούν, μελετώντας την ταυτότητα κάποιας διαίρεσης να εντοπίσουν τον(τους) διαιρέτη(ες) και το υπόλοιπο, ακόμα και στην περίπτωση που αυτό είναι μηδέν και δεν εμφανίζεται. Κατά συνέπεια, να αναγνωρίζουν στη γραφή ενός αριθμού σαν γινόμενο την εννοούμενη διαίρεση, από την οποία προέκυψε η συγκεκριμένη γραφή, συμπληρώνοντας νοερά την «εικόνα» της ταυτότητας με υπόλοιπο το μηδέν. Αργότερα, τα ίδια ερωτήματα επαναλαμβάνονται για σχέσεις μεταξύ πολυωνύμων αυτή τη φορά. Για παράδειγμα, για το πολυώνυμο $Q(x) = (x-2)(x+5)+6$, οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν στη γραφή την ταυτότητα της διαίρεσης $Q(x) : (x-2)$ και μετέπειτα της διαίρεσης $Q(x) : (x-5)$ για να αποφανθούν ότι και στις δύο περιπτώσεις το υπόλοιπο είναι το σταθερό πολυώνυμο 6. Αντίστοιχα, για το $P(x) = (x-2)(x+5)$

πρέπει να αναγνωρίσουν την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$ και μετέπειτα της διαίρεσης $P(x) : (x-5)$ για να αποφανθούν ότι και στις δύο περιπτώσεις το υπόλοιπο είναι 0. Με τη συγκεκριμένη δικαιολόγηση, ότι δηλαδή πίσω από τη γραφή ενός πολυωνύμου σαν γινόμενο «κρύβεται» μια διαίρεση, πιστεύεται ότι η ανάγκη για διαίρεση γίνεται πια ορατή και στους ίδιους τους μαθητές, οι οποίοι ήδη από το προηγούμενο φύλλο εργασίας έχουν διαπιστώσει τη σημασία της γραφής ενός πολυωνύμου σαν γινόμενο για την επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης.

Η διαδικασία του πρώτου παραδείγματος αρχίζει να αντιστρέφεται σταδιακά, με τη χρήση ξανά της περίπτωσης των φυσικών 128 και 4. Το ζητούμενο τώρα είναι να παραγοντοποιηθεί το 128. Δηλώνεται ότι *«με κάποιο τρόπο βρίσκουμε ότι διαιρείται ακριβώς με το 4»*,γίνεται η σχετική διαίρεση, γράφεται η ταυτότητά της και τελικά το 128 γράφεται σαν γινόμενο: $128 = 32 \cdot 4$. Τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας αριθμούνται, για να χρησιμοποιηθούν αυτούσια, ως στρατηγική και στην περίπτωση πολυωνύμων που θα ακολουθήσει. Ειδικά για το πρώτο βήμα, αυτό της εύρεσης ενός πρώτου διαιρέτη, λόγω της παρουσίασης των σχετικών θεωρημάτων σε επόμενο φύλλο εργασίας, προτιμήθηκε να δίνεται ως επιπλέον πληροφορία σε κάθε σχετική άσκηση αυτού του μαθήματος. Το σκεπτικό για την επιλογή της αλλαγής της σειράς των διδακτικών στόχων στο σημείο αυτό ήταν το εξής:

1ον: Όπως αναφέρθηκε ήδη, θεωρήθηκε προτιμότερο να συναντήσουν οι μαθητές κατά το δυνατόν νωρίτερα εφαρμογές των όσων παρουσιάζονται, για την επίτευξη του στόχου του κεφαλαίου, δηλαδή την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων. Παρέχοντας απλά όγκο πληροφοριών και αλγορίθμων, οι οποίοι δεν έχουν εφαρμογή παρά μόνο στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, ο εκπαιδευτικός συναντά δυσκολίες στη διατήρηση του ενδιαφέροντος. Για τον ίδιο λόγο οι μαθητές με προβλήματα μνήμης δυσκολεύονται να συνδέσουν μεταξύ τους τις παρεχόμενες πληροφορίες, να τις οργανώσουν σε ένα νοερό σχήμα και συνεπώς να τις αποθηκεύσουν. Η προτεινόμενη παρουσίαση πιστεύεται από τη συγγραφέα ότι βοηθά τους μαθητές να κάνουν αυτές ακριβώς τις συνδέσεις.

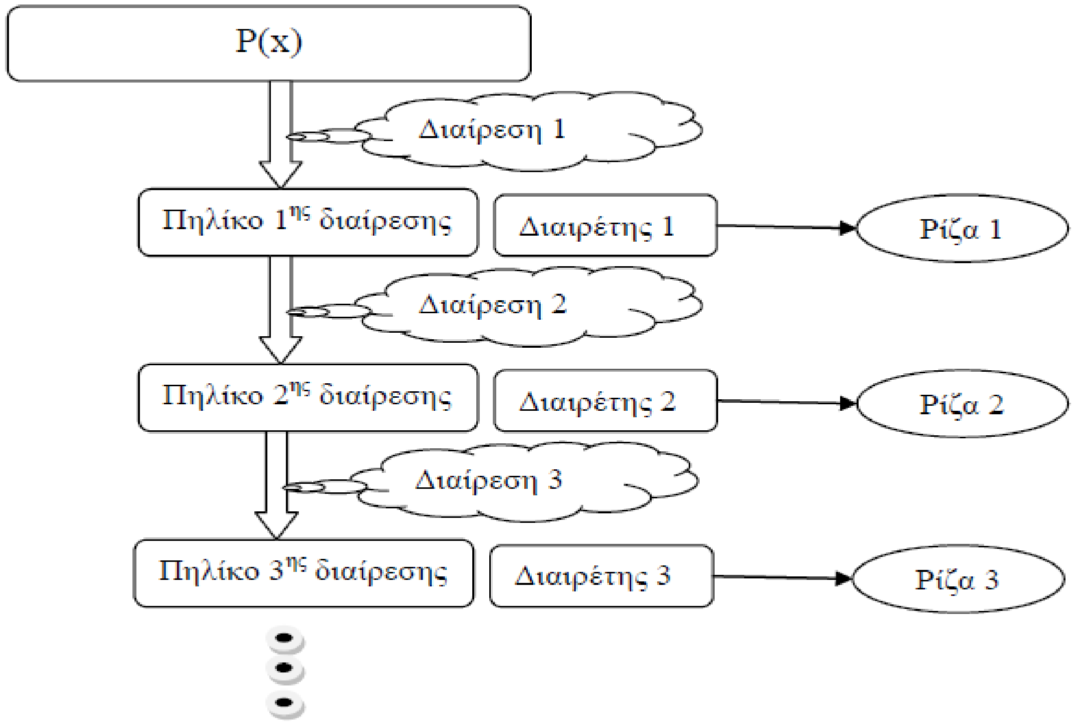
2ον: Η δυσκολία της εύρεσης ενός διαιρέτη είναι το σημείο που καθιστά αδύνατη την γενίκευση της παρουσιαζόμενης μεθόδου επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν πρώτα τη λογική της μεθόδου για να εντοπίσουν στη συνέχεια αυτή την αδυναμία της. Ιδιαίτερα για τους μαθητές με δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες (δυσκολίες στην αναγνώριση του έργου και στον σχεδιασμό του), θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν περισσότερο σαφές ότι η δυσκολία στο πρώτο βήμα είναι αυτή που θα καθορίσει και το βαθμό δυσκολίας επίλυσης μιας συγκεκριμένης πολυωνυμικής εξίσωσης.

Συνεχίζοντας στο φύλλο εργασίας 7, το συμπέρασμα από το παράδειγμα φυσικών αριθμών συνοψίζεται στην πρόταση: *«Αν* $\upsilon = 0$*, τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται* $\Delta = \delta \cdot \pi$ *και μου δίνει ένα τρόπο να κάνω γινόμενο τον Δ».* Ακολουθεί ένας πίνακας υπενθύμισης – ελέγχου, με τη σχετική ορολογία «τέλεια διαίρεση», «διαιρεί», «διαιρείται», «παράγοντας» κτλ. με κενά τα οποία οι μαθητές συμπληρώνουν.

Ακολουθεί η ίδια διαδικασία με πολυώνυμα αυτή τη φορά. Το συμπέρασμα, καθώς επίσης και ο πίνακας που έπεται είναι στην ίδια μορφή με την περίπτωση φυσικών αριθμών, ώστε οι μαθητές να διευκολυνθούν στην κατανόηση και τη συμπλήρωση των κενών πλαισίων, μέσω του παραλληλισμού.

Το παράδειγμα συνεχίζεται για την υλοποίηση του κύριου στόχου: την επίλυση της αντίστοιχης πολυωνυμικής εξίσωσης, η οποία πλέον είναι στη μορφή που οι μαθητές γνωρίζουν να χειριστούν από το προηγούμενο φύλλο εργασίας. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται επιπλέον ο στόχος της υπενθύμισης των όσων παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο μάθημα, αλλά και αυτός της άμεσης σύνδεσής τους με την ύλη που παρουσιάζεται στο συγκεκριμένο σημείο. Η εμπέδωση όλων των παραπάνω και η ισχυροποίηση αυτής της σύνδεσης επιτυγχάνεται με δύο ακόμα παραδείγματα, στο ίδιο μοτίβο, τα οποία πλέον παρουσιάζονται χωρίς να διακόπτονται από παρατηρήσεις και τα οποία δίνονται αμέσως ως πολυωνυμικές εξισώσεις προς επίλυση. Η καθοδήγηση διατηρείται, καθώς πιστεύεται πως η όλη διαδικασία περιέχει αρκετά λογικά βήματα και πιθανόν οι μαθητές (ιδιαίτερα εκείνοι με δυσκολίες αυτορρύθμισης – παρακολούθησης του έργου) να δυσκολεύονται στην ολοκλήρωσή της. Επιπλέον, με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η διαρκής άσκηση στον αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων.

Ακολουθεί ένας πίνακας – οργανωτής της στρατηγικής που ενσωματώθηκε σιωπηλά στα παραπάνω παραδείγματα, τον οποίο οι μαθητές θα μπορούν να χρησιμοποιήσουν τόσο για την περεταίρω κατανόηση, όσο και για την ανεξάρτητη εργασία τους. Επίσης, η κατανόηση της στρατηγικής ενισχύεται ακόμα περισσότερο από μια οπτική της αναπαράσταση. Η αναπαράσταση αυτή δε θα χρησιμοποιηθεί ακόμα ως οργανωτής κατά τη διάρκεια επίλυσης εξισώσεων, αφού θα αναμορφωθεί, για να συμπεριλάβει τελικά και τις τεχνικές εύρεσης ριζών που προτείνονται από τα θεωρήματα του επόμενου φύλλου εργασίας.

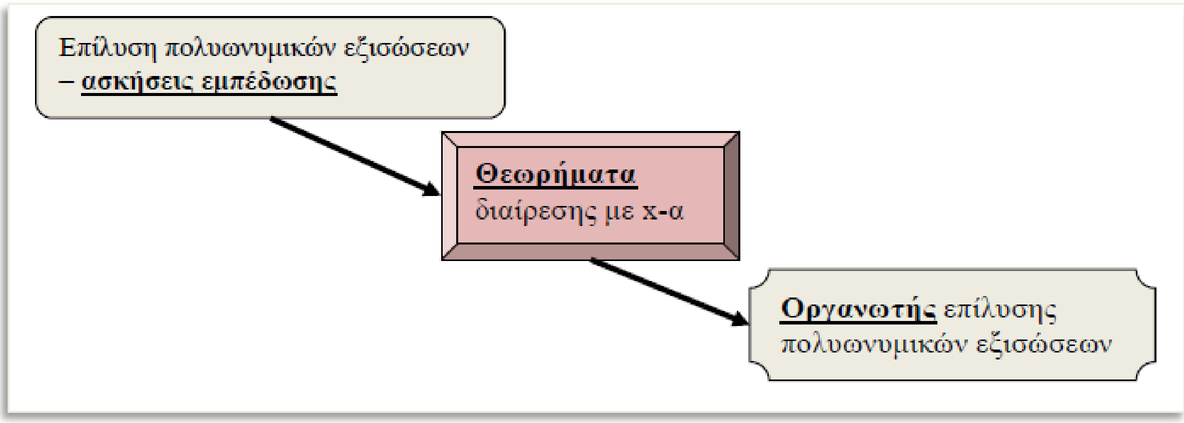


Εικόνα 18: Οπτική αναπαράσταση στρατηγικής του φύλλου εργασίας 7

Οι προτεινόμενες ασκήσεις περιλαμβάνουν, εκτός από τον πίνακα ανασκόπησης, τέσσερις διαιρέσεις πολυωνύμων, καθώς και μια επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης. Για την τελευταία άσκηση, οι μαθητές μπορούν να συμβουλεύονται τα παραδείγματα που συμπληρώθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής ώρας με τις προτροπές που τα συνόδευαν, αλλά και τον τελικό πίνακα με τη στρατηγική.

5.8. Μάθημα 8ο

Το φύλλο εργασίας 8 χαρακτηρίζεται από τον γενικό τίτλο «θεωρήματα διαίρεσης με $x - \alpha$», ενώ ο προ-οργανωτής που ακολουθεί υποδηλώνει πως, αν και το κυρίως θέμα θα είναι πράγματι τα αναφερόμενα θεωρήματα, στην πραγματικότητα πριν και μετά από αυτό θα συζητηθούν θέματα σχετικά με την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων και πάλι. Υπονοείται από τα βέλη του οργανωτή πως και τα τρία ζητήματα που θα εμφανιστούν συνδέονται με κάποιον, ασαφή προς το παρόν τρόπο.

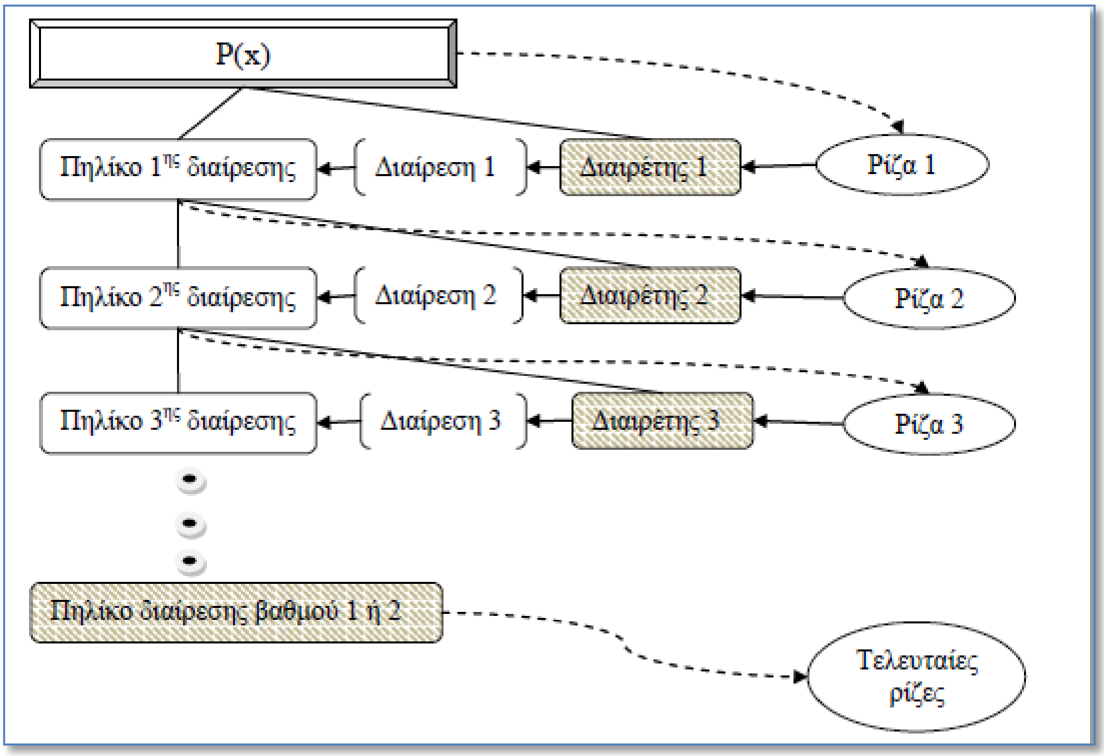


Εικόνα 19: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 8

Στην πρώτη ενότητα του μαθήματος παρουσιάζονται τρία παραδείγματα πολυωνυμικών εξισώσεων και ζητείται από τους μαθητές να τις λύσουν, ακολουθώντας τις οδηγίες. Αυτές κινούνται στο ίδιο μοτίβο με τις οδηγίες του προηγούμενου μαθήματος, όμως οι διαιρέτες που θα χρειαστούν δίνονται εξαρχής. Επίσης, τα περισσότερα από τα παραδείγματα αυτή τη φορά απαιτούν δύο διαδοχικές διαιρέσεις και επομένως περισσότερα λογικά βήματα συνολικά (σε αντίθεση με το μόλις ένα τέτοιο παράδειγμα του προηγούμενου φύλλου εργασίας).

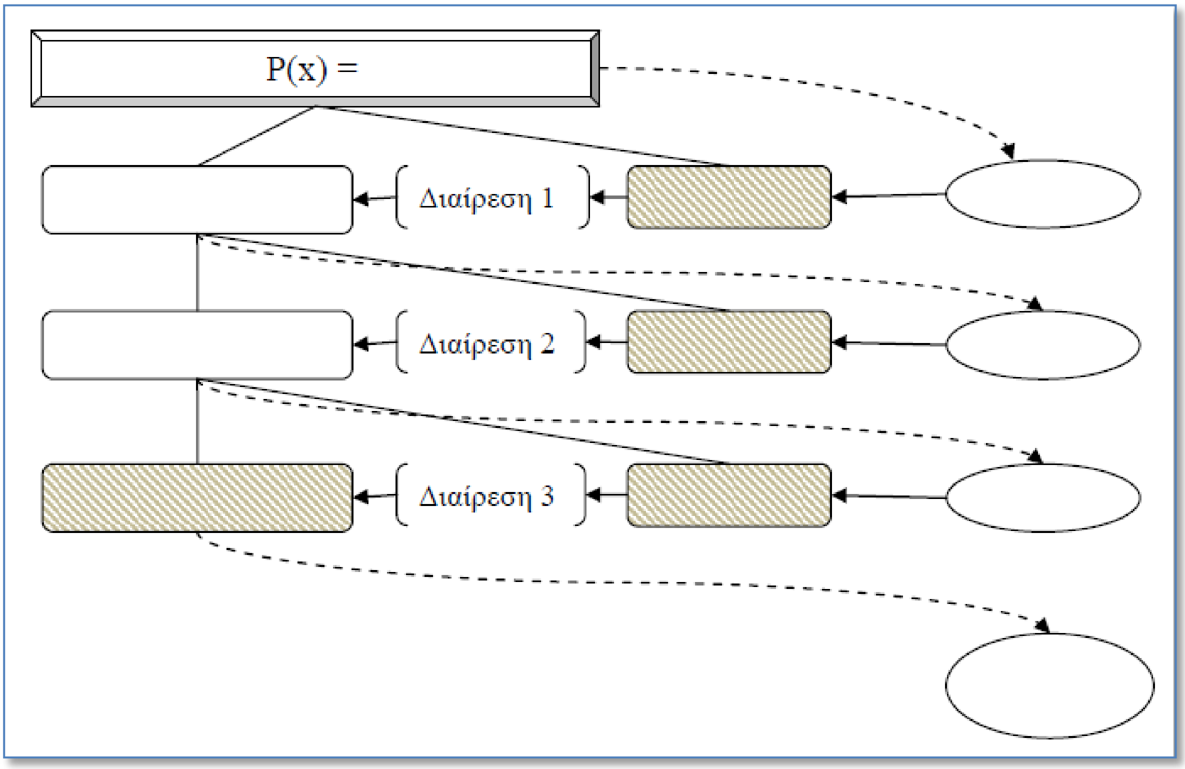
Η σύνδεση με την επόμενη ενότητα γίνεται με μία άσκηση, στην οποία οι μαθητές καλούνται να ανατρέξουν στα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων για να συμπληρώσουν ένα πίνακα. Τα στοιχεία που πρέπει να αναζητήσουν είναι οι διαιρέτες, τα υπόλοιπα των διαιρέσεων, οι ρίζες των διαιρετών και οι ρίζες του αρχικού πολυωνύμου P(x). Στη συνέχεια θα πρέπει να αναγνωρίσουν την κοινή μορφή των διαιρετών $x-\alpha$, το γεγονός ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης που τους ζητήθηκε να εκτελέσουν είναι σε κάθε περίπτωση 0, καθώς επίσης και το γεγονός ότι η ρίζα α του διαιρέτη είναι σε κάθε περίπτωση ρίζα και του αρχικού πολυωνύμου. Ο στόχος της συγκεκριμένης άσκησης είναι να βοηθήσει τους μαθητές που δεν παρατήρησαν αυθόρμητα τα κοινά στοιχεία στην επίλυση και των τριών εξισώσεων (όπως αναμένεται και από τους μαθητές με δυσκολίες σε μεταγνωστικές δεξιότητες), ώστε να προκύψει περισσότερο φυσικά η σχέση μεταξύ της επιλογής των διαιρετών της μορφής $x-\alpha$ και της εύρεσης της ρίζας α ενός πολυωνύμου.

Αμέσως μετά την άσκηση, γενικεύεται η διαπίστωση που προέκυψε από τα παραδείγματα: *«αν διαιρέσουμε κάποιο πολυώνυμο με κάποιο άλλο της μορφής x-α και βρούμε υπόλοιπο 0, τότε το α είναι ρίζα του P(x)»*. Στη συνέχεια δηλώνεται πως ισχύει και το αντίστροφο, ενώ παράλληλα με την εξήγηση δίνεται και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί το γεγονός αυτό: «*αν μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να βρούμε έστω και μία ρίζα του αρχικού πολυωνύμου, ας πούμε τον αριθμό α, και κάνουμε τη διαίρεση με το x-α, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι 0, το πολυώνυμο θα γίνει γινόμενο, οπότε και η αρχική εξίσωση θα γίνει πιο εύκολη*» .Στην πραγματικότητα διατυπώνεται το ίδιο το θεώρημα διαίρεσης με x-α και ο τρόπος που θα χρησιμοποιηθεί, χωρίς ακόμα να εμφανίζεται η αυστηρή του διατύπωση. Ακολουθεί η παρατήρηση ότι πλέον το πρώτο βήμα της στρατηγικής επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων (το δύσκολο δηλαδή) δεν είναι να βρούμε διαιρέτη του πολυωνύμου, αλλά έστω και μία ρίζα του. Στο σημείο αυτό προτείνεται ένας οργανωτής της εργασίας κατά την επίλυση, με οδηγίες για τον τρόπο συμπλήρωσης και χρήσης του.



Εικόνα 20: Οργανωτής επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων με υποδείξεις για τη συμπλήρωση

Τα διακεκομμένα βέλη του οργανωτή υπενθυμίζουν στους μαθητές τη σειρά των βημάτων, με την οποία πρέπει να εργαστούν. Κάθε πολυώνυμο συνδέεται με απλή γραμμή με τους παράγοντές του, όπως αυτοί προέκυψαν από τις αντίστοιχες διαιρέσεις και τελικά οι παράγοντες του P(x), που είναι 1ου ή 2ου βαθμού γραμμοσκιάζονται. Από κάθε βήμα προκύπτει ένας παράγοντας του αρχικού πολυωνύμου, εκτός από το τελευταίο βήμα, στο οποίο και τα δύο νέα πολυώνυμα θα αποτελέσουν παράγοντες της τελικής γραφής του P(x), ως γινομένου. Οι ρίζες που προκύπτουν από κάθε βήμα σημειώνονται σε ειδικό πλαίσιο, διαφορετικού σχήματος από τα υπόλοιπα, ενώ τα σημεία στα οποία γίνονται οι διαιρέσεις σημειώνονται σε μια παρένθεση, εκτός πλαισίου, ώστε οι μαθητές να θυμούνται να την εκτελέσουν, χωρίς να χρειάζεται να σημειώσουν κάτι στην αντίστοιχη θέση.



Εικόνα 21: Οργανωτής επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων κενός

Αν και η παρουσίαση των δύο θεωρημάτων δεν συνδέεται άμεσα με τις συνέπειές τους στην επίλυση εξισώσεων, κατά τη σειρά που ακολουθείται από το σχολικό εγχειρίδιο, η προτεινόμενη διδακτική ακολουθία στην παρούσα μελέτη, είναι να γίνουν αρχικά δοκιμές με αριθμούς που δε θα απαιτήσουν σύνθετες πράξεις. Αυτοί ονομάζονται «εύκολοι» αριθμοί και προτείνονται οι 0, ±1, ±2. Ακόμα δεν έχει παρουσιαστεί το θεώρημα ακεραίων ριζών, το οποίο προσφέρει μια εναλλακτική μέθοδο αναζήτησης ριζών, όμως με τις δοκιμές συγκεκριμένων αριθμών πιστεύεται ότι οι μαθητές θα μπορέσουν να κατανοήσουν καλύτερα τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν, καθώς επίσης και τον τρόπο εφαρμογής των κατά την επίλυση εξισώσεων. Επίσης, θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν τον οργανωτή που προτάθηκε , ώστε να διαπιστώσουν οι ίδιοι τη χρησιμότητά του. Άλλωστε, ακόμα και με τη χρήση του συγκεκριμένου θεωρήματος, τελικά οι πιθανές ρίζες θα χρειαστεί να δοκιμαστούν.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού 4, το οποίο συνοδεύεται από τον οργανωτή, με κενά προς συμπλήρωση και καθοδηγητικές ερωτήσεις – παροτρύνσεις.

Στη συνέχεια, και αφού πιστεύεται ότι οι μαθητές πλέον έχουν κατανοήσει σε βάθος το περιεχόμενο των θεωρημάτων, παρουσιάζονται οι αυστηρές διατυπώσεις τους, ακολουθούμενες από τις σχετικές αποδείξεις. Το πρώτο θεώρημα ονομάζεται «θεώρημα υπολοίπου διαίρεσης με $x-\alpha$», συνοδεύεται από το γνωστό πλαίσιο σημειώσεων και μια παρατήρηση – επεξήγηση της διευκόλυνσης που παρέχει: να υπολογίζεται το υπόλοιπο μιας διαίρεσης, χωρίς την εκτέλεση της ίδιας της διαίρεσης. Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται ακριβώς σε αυτή την διευκόλυνση. Οι μαθητές υπολογίζουν το υπόλοιπο δύο διαιρέσεων ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου, κάνοντας τις σχετικές αντικαταστάσεις. Η απόδειξη του θεωρήματος παρουσιάζεται σε δύο μέρη: τη «σκέψη» και τη «γραφή». Κρίθηκε απαραίτητο να εμφανίζεται η δικαιολόγηση του πως προκύπτουν τα βήματα της απόδειξης, καθώς η γραφή της είναι ιδιαίτερα σύντομη. Επίσης, η συνήθεια των μαθηματικών να «καλογυαλίζουν» τα κείμενά τους και να τα παρουσιάζουν με κατά το δυνατόν «κομψότερο» τρόπο, στην ουσία στερεί το ίδιο το κείμενο από τη λογική ακολουθία βημάτων που οδήγησαν τελικά σε αυτό (Tzanakis, Arcavi, 2000). Έτσι, μια παρουσίαση της σκέψης πριν την αυστηρή διατύπωση, βοηθά τους μαθητές από τη μία να κατανοήσουν την απόδειξη και από την άλλη να συνειδητοποιήσουν ότι ο τρόπος εργασίας πολλές φορές δεν εμφανίζεται στο τελικό μαθηματικό κείμενο.

Ακολουθούν δύο ακόμα παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος και επαναλαμβάνεται για μία ακόμα φορά η γενική διαπίστωση, με ένα ακόμα διαφορετικό τρόπο. Από τη στιγμή που η συγκεκριμένη διαπίστωση αποτελεί το «κλειδί» για την κατανόηση του τρόπου εργασίας σε ολόκληρο το κεφάλαιο, θεωρήθηκε σκόπιμο να προσεγγιστεί ποικιλοτρόπως λεκτικά, αλλά και να επαναληφθεί αρκετές φορές, ώστε να διευκολύνει τους μαθητές με δυσκολίες σε λεκτικές δεξιότητες και μνήμης αντίστοιχα.

Έπεται το δεύτερο θεώρημα, το οποίο ονομάζεται «θεώρημα διαίρεσης με $x - \alpha$», με το αντίστοιχο πλαίσιο σημειώσεων και ένα πλαίσιο υπενθύμισης – ελέγχου που περιέχει τα σύμβολα της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας, με τις αντίστοιχες λέξεις που χρησιμοποιούνται συνήθως σε μαθηματικά κείμενα για να τα υποδηλώσουν. Αν και οι λέξεις αυτές έχουν εμφανιστεί στο παρελθόν (ιδιαίτερα στο μάθημα της Γεωμετρίας), η άμεση συσχέτισή τους με το μαθηματικό σύμβολο που υποδηλώνουν, βοηθά τους μαθητές που δεν έχουν ακόμα κατανοήσει αυτή τη συσχέτιση να «μεταφράσουν σε μαθηματικά» το περιεχόμενο του παραπάνω θεωρήματος, ενώ παράλληλα τους διευκρινίζει το ρόλο των συγκεκριμένων φράσεων, ο οποίος διαφοροποιείται από αυτήν του καθημερινού λόγου, όταν εμφανίζονται μέσα σε μαθηματικές προτάσεις.

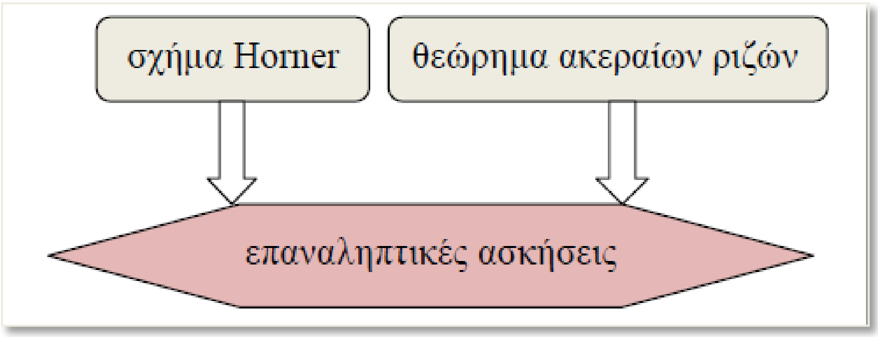
Η απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος εμπεριέχει ξανά τον τρόπο σκέψης, όμως αυτή τη φορά η παρουσίαση γίνεται σε τέσσερα μέρη, κυρίως λόγω της έκτασής της.

Το φύλλο εργασίας ολοκληρώνεται με μία άσκηση του σχολικού εγχειριδίου, της μορφής για την οποία διδάχτηκε η στρατηγική του τέταρτου μαθήματος, η οποία απαιτεί τη χρήση του θεωρήματος στο μέρος της προεργασίας.

Οι ασκήσεις που προτείνονται για ανεξάρτητη εργασίας περιέχουν, πέρα από το γνωστό πίνακα ανασκόπησης, την επίλυση μιας εξίσωσης τετάρτου βαθμού, μια απλή εφαρμογή του πρώτου θεωρήματος για την εύρεση υπολοίπου διαίρεσης και τέλος μια άσκηση – εφαρμογή του δεύτερου θεωρήματος. Οι δύο τελευταίες ασκήσεις παρουσιάζονται αυτούσια, όπως στο σχολικό εγχειρίδιο.

5.9. *Μάθημα 9^{o}*

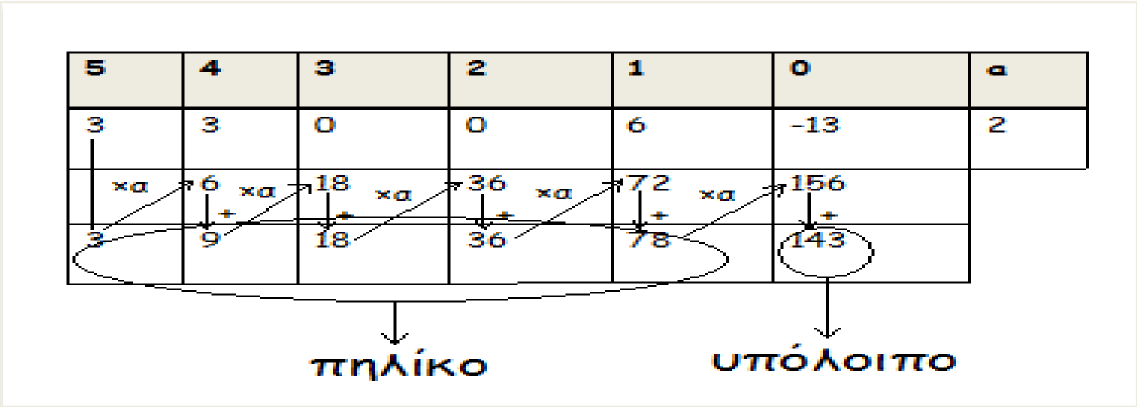
Με το φύλλο εργασίας 9 ολοκληρώνεται η παρουσίαση των πληροφοριών περί επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Τα δύο εναπομείναντα δεδομένα που περιέχει είναι η μέθοδος διαίρεσης με το σχήμα Horner και το θεώρημα ακεραίων ριζών. Όπως φαίνεται και στον σχετικό προ-οργανωτή, το μάθημα θα ολοκληρωθεί με επαναληπτικές ασκήσεις.



Εικόνα 22: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 9

Η εισαγωγή στη μέθοδο Horner γίνεται με τη δικαιολόγηση της ανάγκης χρήσης μιας ταχύτερης μεθόδου για τον τύπο διαιρέσεων που εμφανίζονται κατά κόρον στο κεφάλαιο, με διαιρέτες της μορφής $x - \alpha$. Γίνεται πάντως σαφές πως η γνωστή μέθοδος διαίρεσης είναι αποδεκτή σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα διαίρεσης, την οποία οι μαθητές εκτελούν με τον γνωστό τρόπο και σε επόμενο επίπεδο αποτελεί το μοντέλο, με τη χρήση του οποίου επεξηγούνται τα βήματα της νέας μεθόδου. Η επεξήγηση αυτή γίνεται με δύο τρόπους: οπτικά και λεκτικά, σε κάθε περίπτωση με κατά το δυνατόν αποφυγή των περιττών πληροφοριών.

Ακολουθούν τρία ακόμα παραδείγματα, στα οποία οι μαθητές θα πρέπει να ακολουθήσουν μόνοι τους τα βήματα του αλγορίθμου και να αποφανθούν για το πηλίκο και το υπόλοιπο των αντίστοιχων διαιρέσεων. Επιλέγεται να μη δοθεί περισσότερη έμφαση σε αυτή τη μέθοδο και οι μαθητές να επιλέξουν εκείνη που ταιριάζει περισσότερο στον προσωπικό τους τρόπο εργασίας.



Εικόνα 23: Οπτική περιγραφή του σχήματος Horner

1η γραμμή:	**δυνάμεις του x**
2η γραμμή:	**συντελεστές του** $P(x)$ (μαζί με τα μηδενικά)
3η και 4η γραμμή:	Ο πρώτος συντελεστής «κατεβαίνει» στην τελευταία γραμμή όπως είναι.
	Στη συνέχεια ακολουθούμε τα «βελάκια»: □ Διαγώνια (↗) κάνουμε **πολλαπλασιασμό με το α** □ Κάθετα (↓) κάνουμε **πρόσθεση**
Αποτέλεσμα διαίρεσης:	Το βρίσκουμε στην **τελευταία γραμμή (4η)** □ **Μέχρι το προτελευταίο** κουτάκι είναι οι συντελεστές του **πηλίκου**. □ Στο **τελευταίο** κουτάκι μας είναι το **υπόλοιπο**.

Εικόνα 24: Λεκτική περιγραφή του σχήματος Horner

Στη δεύτερη ενότητα του μαθήματος ζητείται αρχικά από τους μαθητές να επιλύσουν μία εξίσωση τρίτου βαθμού, ώστε να θυμηθούν τον τρόπο εργασίας του προηγούμενου φύλλου εργασίας, με δοκιμές των αριθμών 0, ±1, ±2. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το θεώρημα ακεραίων ριζών, ως ανάγκη μείωσης του πλήθους των πιθανών ακεραίων προς δοκιμή, χωρίς την αυστηρή του διατύπωση ακόμα. Ακολουθούν δύο εξισώσεις, τις οποίες οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν, με τη βοήθεια του οργανωτή και παροτρύνσεων, στις οποίες ενσωματώνεται η χρήση του νέου θεωρήματος. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η εμπέδωση των μέχρι τώρα μαθημένων τεχνικών, η κατανόηση της νέας γνώσης και η ταυτόχρονη σύνδεσή της με την παλιά, ώστε να διευκολυνθεί η απομνημόνευση.

Έπεται η τυπική μορφή του θεωρήματος, με το πλαίσιο σημειώσεων και την απόδειξη, παρουσιαζόμενη με τον ίδιο τρόπο: σκέψη και γραφή. Στη συνέχεια εμφανίζεται μια παρατήρηση, σχετικά με την περίπτωση $\rho = 0$, η οποία συμπληρώνεται από τους μαθητές με παροτρύνσεις και καθοδηγητικές ερωτήσεις όπως: *«Αντικαταστήστε στην εξίσωση του θεωρήματος το x με το 0. Τι προκύπτει;»*.

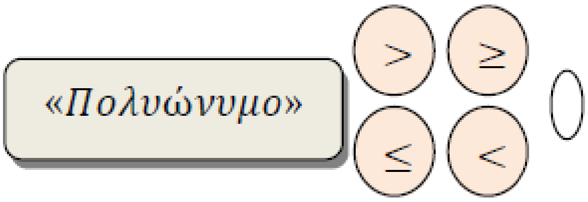
Η επόμενη παρατήρηση έχει να κάνει με το σύνηθες λάθος των μαθητών να θεωρούν ότι, αν δεν προκύπτουν ακέραιες ρίζες έπειτα από την δοκιμή όλων των πιθανών, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες γενικά. Η παρατήρηση αυτή σχετίζεται για ακόμα μία φορά με την αδυναμία επίλυσης όλων των ειδών πολυωνυμικών εξισώσεων, η οποία μέσα από τη συνεχή επανάληψη αναμένεται να έχει πλέον εμπεδωθεί από τους μαθητές.

Το φύλλο εργασίας ολοκληρώνεται με τρία ακόμα παραδείγματα πολυωνυμικών εξισώσεων, για την επίλυση των οποίων οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν όλα όσα έχουν μάθει μέχρι αυτό το σημείο. Παρεμβάλλεται ένας πίνακας ανασκόπησης των απαιτούμενων βημάτων, ενώ στο τελευταίο παράδειγμα η καθοδήγηση έχει πλήρως εξαλειφθεί.

Οι προτεινόμενες ασκήσεις περιλαμβάνουν διαιρέσεις με τη βοήθεια του σχήματος Horner, για τις οποίες θα πρέπει να γραφούν και οι αντίστοιχες ταυτότητες και πολυωνυμικές εξισώσεις, για την επίλυση των οποίων απαιτείται εφαρμογή όλων των παραπάνω. Στον πίνακα ανασκόπησης περιλαμβάνεται εκτός από τις νέες γνώσεις περί σχήματος Horner και θεωρήματος ακεραίων ριζών, μία λίστα με τα βήματα για την επίλυση εξισώσεων. Οι μαθητές στο σημείο αυτό αναμένεται να τα σημειώσουν είτε σχηματικά, είτε λεκτικά, επιλέγοντας ανάμεσα στις μορφές που παρουσιάστηκαν από τον εκπαιδευτικό εκείνη που τους διευκολύνει περισσότερο στη μνήμη και την αυτό-οργάνωση, εμπλουτίζοντας τα πιθανόν με δικές τους σημειώσεις. Άλλωστε, οι εφαρμογές που έχουν συναντήσει πλέον είναι αρκετές, ώστε να έχουν καταλήξει σε μία κατανοητή στους ίδιους μέθοδο.

5.10. Μάθημα $10^{ο}$

Στο επόμενο φύλλο εργασίας, το κυρίως θέμα αφορά στην επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται παραδείγματα ανισώσεων $1^{ου}$ βαθμού, μεθόδους για την επίλυση των οποίων οι μαθητές ήδη γνωρίζουν από προηγούμενη τάξη, ως επανάληψη, αλλά και για έναν επιπλέον λόγο: θα παρουσιαστεί αργότερα μια στρατηγική αυτορρύθμισης κατά τη διάρκεια ανισώσεων μεγαλύτερου βαθμού, τα βήματα της οποίας εμφανίζονται αρχικά ως παροτρύνσεις σε αυτή την απλή περίπτωση, με στόχο τη βαθύτερη κατανόηση.



Εικόνα 25: Οπτική περιγραφή της μορφής των πολυωνυμικών ανισώσεων

Μέσα από δύο απλά παραδείγματα, οι μαθητές καθοδηγούνται να «ξεχάσουν» προσωρινά το σύμβολο της ανισότητας και να ασχοληθούν με τις ρίζες του αντίστοιχου πολυωνύμου, να εφαρμόσουν δηλαδή τα όσα διδάχτηκαν περί επίλυσης εξισώσεων, καθώς επίσης και τον γραφικό οργανωτή της επίλυσης εξισώσεων. Επίσης, υπενθυμίζεται ο τρόπος συμπλήρωσης ενός πίνακα, όπως αυτός διδάχτηκε στην Α΄ Λυκείου και ο οποίος αργότερα θα ενσωματωθεί στον γενικό πίνακα επίλυσης ανισώσεων μεγαλύτερου βαθμού. Ο γενικός πίνακας είναι επίσης γνωστός από την Α΄ τάξη, όμως σε αυτό το σημείο γίνεται η ουσιαστική σύνδεση αυτής της παλαιάς γνώσης με τη νέα και η γενίκευσή της, γεγονός που κρίθηκε ότι θα πρέπει να επισημανθεί ιδιαίτερα από το διδάσκοντα. Παράλληλα υπενθυμίζεται ο τρόπος εύρεσης του διαστήματος – λύσης της ανίσωσης.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα – υπενθύμιση της περίπτωσης ανίσωσης 2^{ου} βαθμού, με τις παροτρύνσεις να μετατρέπονται σταδιακά και να συμπυκνώνονται σε μικρότερες προτάσεις, αλλά τη μέθοδο και τη λογική αλληλουχία των βημάτων να παραμένει στο ίδιο μοτίβο.

Στην τρίτη και τελευταία ενότητα του μαθήματος παρουσιάζεται η γενική περίπτωση, σύγκρισης πολυωνύμου οποιουδήποτε βαθμού με το 0. Μέσα από ένα ακόμη παράδειγμα παρουσιάζεται η τελική μορφή της προτεινόμενης στρατηγικής αυτορρύθμισης και ακολουθεί ένας πίνακας με τα βήματά της, με μία επιπλέον στήλη για τη σημείωση όσων από αυτά ολοκληρώνονται κατά τη διάρκεια της εργασίας από τους ίδιους τους μαθητές. Στην πρώτη στήλη του πίνακα της στρατηγικής, προτείνονται λέξεις – κλειδιά για την διευκόλυνση της απομνημόνευσης των βημάτων.

Στο τρίτο και τέταρτο βήμα της στρατηγικής, οι μαθητές παραπέμπονται σε κατασκευή του ήδη διδαχθέντος γραφικού οργανωτή για την επίλυση της αντίστοιχης πολυωνυμικής εξίσωσης.

Ακολουθούν τρία ακόμη παραδείγματα ανισώσεων τετάρτου βαθμού, με τις προτροπές να εξαλείφονται και να παραμένουν στη θέση τους οι λέξεις – κλειδιά των βημάτων της στρατηγικής, καθώς επίσης και κενοί οργανωτές προς συμπλήρωση, για την επίλυση των εξισώσεων και κενοί πίνακες για την εύρεση προσήμων και τελικά των ζητούμενων διαστημάτων.

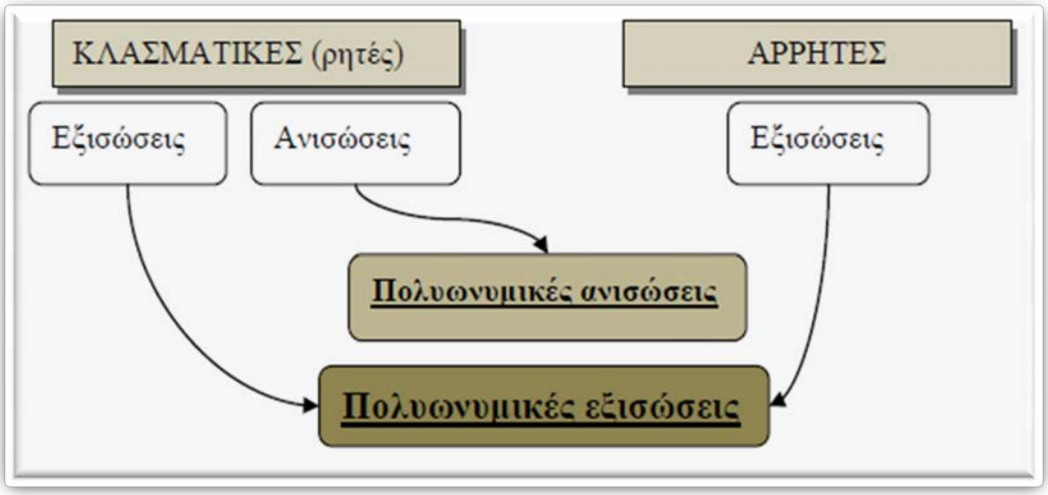
Οι ασκήσεις που προτείνονται στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας, αποτελούνται από τον πίνακα ανασκόπησης, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα βήματα της διδαχθείσας στρατηγικής, καθώς επίσης και τρεις ανισώσεις προς πλήρη επίλυση, οι οποίες βρίσκονται στο αντίστοιχο σημείο του σχολικού εγχειριδίου.

Βήμα 1^{ο}: **Μορφή**	Μετατρέπουμε την ανίσωση στη μορφή: Πολυώνυμο του x $\left\{\begin{matrix} > \\ < \\ \leq \\ \geq \end{matrix}\right\}$ 0	
Βήμα 2^{ο}: **Ονομάζουμε**	Ονομάζουμε το πολυώνυμο του πρώτου μέρους P(x).	
Βήμα 3^{ο}: **Παραγοντοποιούμε**	Παραγοντοποιούμε το P(x).	
Βήμα 4^{ο}: **Εξίσωση**	Γράφουμε την αντίστοιχη **πολυωνυμική εξίσωση** και τη **λύνουμε**.	
Βήμα 5^{ο}: **Πίνακας**	Συμπληρώνουμε τον **πίνακα.** □ Με διαφορετική γραμμή για κάθε παράγοντα που βρήκαμε για το P(x). Βάζοντας όλες τις **ρίζες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη**. □ Στην **τελευταία γραμμή** σημειώνουμε τις ρίζες του P(x) και το πρόσημο σε κάθε διάστημα (από τους κανόνες των προσήμων).	
Βήμα 6^{ο}: **Λύση**	Επιλέγουμε τις **τιμές που επαληθεύουν** την ανίσωση	

Εικόνα 26: Στρατηγική αυτορρύθμισης κατά την επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων

5.11. *Μάθημα 11^{ο}*

Το τελευταίο φύλλο εργασίας καλύπτει το εναπομείναν μέρος της ύλης του κεφαλαίου, σχετικά με εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές και συγκεκριμένα περιπτώσεις ρητών και άρρητων τέτοιων. Αν και στο σχολικό εγχειρίδιο δίνονται παραδείγματα μόνο περιπτώσεων εξισώσεων, το γεγονός ότι ζητείται η επίλυση ανισώσεων σε ασκήσεις, οδήγησε στη διαμόρφωση της δομής του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας, όπως φαίνεται στο σχετικό προ-οργανωτή.



Εικόνα 27: Προ-οργανωτής φύλλου εργασίας 11

Είναι χαρακτηριστικό ότι στη συγκεκριμένη παράγραφο του βιβλίου εμφανίζονται μόνο παραδείγματα, χωρίς να γενικεύεται σε κάποιο σημείο η γνώση που αποκτάται από τη μελέτη αυτών. Είναι λοιπόν εύλογο, οι μαθητές (ειδικότερα εκείνοι με δυσκολίες γενίκευσης) να περιμένουν αντίστοιχες ασκήσεις προς λύση έπειτα από τη μελέτη αυτών των συγκεκριμένων, απλών παραδειγμάτων, κάτι το οποίο δε συμβαίνει. Μάλιστα, σε ασκήσεις της Β΄ ομάδας του εγχειριδίου, προτείνονται και άρρητες ανισώσεις, οι οποίες περιέχουν παραμέτρους και των οποίων η λύση απαιτεί σαφέστατα περισσότερο σύνθετη σκέψη και μέθοδο χειρισμού των εμφανιζόμενων υποπεριπτώσεων. Επιλέχτηκε στο παρόν φύλλο εργασίας να παρουσιαστούν δομημένες, γενικές στρατηγικές για την επίλυση ρητών περιπτώσεων εξισώσεων και ανισώσεων, ακολουθούμενες από αντίστοιχα παραδείγματα εφαρμογής, καθώς και μια παρόμοια στρατηγική για την επίλυση εξισώσεων, που περιλαμβάνουν έως δύο ριζικά (και μάλιστα τετραγωνικά). Οι περιπτώσεις μεγαλύτερης τάξης ριζικών, πολλαπλών (το ένα μέσα στο άλλο), περισσότερων σε πλήθος, καθώς και οι περιπτώσεις αντίστοιχων ανισώσεων δεν παρουσιάζονται αναλυτικά, καθώς κρίθηκε ότι η δομή του ίδιου του σχολικού εγχειριδίου, το οποίο αποτελεί και οδηγό για τη διδασκαλία, είναι τέτοια ώστε να μη δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία αυτών. Άλλωστε, οι οδηγίες που παρέχονται στους εκπαιδευτικούς από το Π.Ι., καθιστούν σαφές ότι: «*Για να επιτευχθεί ο στόχος της ολοκλήρωσης της ύλης* ***δεν είναι σκόπιμη*** *η επέκταση σε δύσκολες ασκήσεις θεωρίας πολυωνύμων και σε μορφές εξισώσεων που άλλοτε αποτελούσαν ενότητες της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών (π.χ. αντίστροφες εξισώσεις, διτετράγωνες,* ***με ριζικά****) και οι οποίες σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις δεν αποτελούν πια κύρια ύλη του μαθήματος*», (βλ. §3.3, σελ. 84).

Έπειτα από τη λήψη των παραπάνω αποφάσεων, η εισαγωγή στο φύλλο εργασίας γίνεται με τη διευκρίνιση ότι οι περιπτώσεις εξισώσεων και ανισώσεων που ακολουθούν δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά μπορούν να αναχθούν σε τέτοιες και επεξηγείται ο όρος «αναγωγή» για τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Στην πρώτη ενότητα, στην οποία παρουσιάζονται οι περιπτώσεις ρητών (ή κλασματικών) ανισώσεων και εξισώσεων, γίνεται αμέσως σαφής ο τρόπος αναγνώρισης των παραπάνω περιπτώσεων, ώστε να διευκολυνθούν οι μαθητές με μεταγνωστικές δυσκολίες στην αναγνώριση του έργου, το σχεδιασμό του και την επιλογή κατάλληλων στρατηγικών. Ακολουθεί η προτεινόμενη στρατηγική, η οποία είναι κοινή για ανισώσεις και εξισώσεις έως και το τέταρτο βήμα. Στο σημείο αυτό διαφοροποιείται η μέθοδος, αφού στη μία περίπτωση (των εξισώσεων) το πέμπτο βήμα περιλαμβάνει τη λύση της εξίσωσης, ενώ στη δεύτερη (των ανισώσεων), παρεμβάλλεται ένα βήμα για την κατασκευή του σχετικού πίνακα προσήμων, πριν το τελικό στάδιο της λύσης.

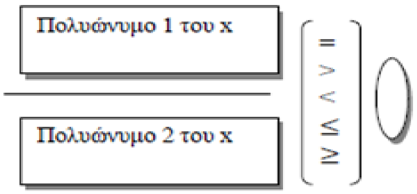
Κατά το σχεδιασμό της στρατηγικής λήφθηκε σοβαρά υπόψη η αντίστοιχη στρατηγική για πολυωνυμικές ανισώσεις, που διδάχτηκε ήδη στο προηγούμενο μάθημα. Τα βήματα της νέας στρατηγικής ορίζονται από τις ίδιες λέξεις – κλειδιά με την προηγούμενη, αλλάζει όμως το περιεχόμενο αυτών.

	<u>ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>	<u>ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ</u>	
1^{ο} βήμα: **Μορφή**	Μετατρέπουμε την παράσταση στη **μορφή**: $\dfrac{\boxed{\text{Πολυώνυμο 1 του x}}}{\boxed{\text{Πολυώνυμο 2 του x}}} \left\{ = \; > \; < \; \leq \; \geq \right\} 0$ □ Μεταφέροντας όλους τους όρους στο **πρώτο μέλος** με προσθέσεις και αφαιρέσεις □ Κάνοντας τα κλάσματα στο πρώτο μέλος **ομώνυμα** και προσθέτοντάς τα		
2^{ο} βήμα: **Ονομάζουμε**	**Ονομάζουμε** όλο το κλάσμα Q(x), το πολυώνυμο του αριθμητή A(x) και το πολυώνυμο του παρονομαστή Π(x)		
3^{ο} βήμα: **Παραγοντοποιούμε**	**Παραγοντοποιούμε** χωριστά τοA(x) και το Π(x) . ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Δεν απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες!!!		
4^{ο} βήμα: **Εξισώσεις**	**Λύνουμε** χωριστά τις **εξισώσεις** A(x)=0 και Π(x)=0. Οι ρίζες του Π(x) είναι οι τιμές που δεν μπορεί να πάρει ο άγνωστος, αφού μηδενίζουν τον παρονομαστή. Είναι δηλαδή οι **περιορισμοί** μας.		
5^{ο} βήμα: **Λύση εξίσωσης** ή **Πίνακας Ανίσωσης**	**Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης** είναι οι ρίζες του A(x), εκτός από τις ρίζες του Π(x), δηλαδή τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.	Κατασκευάζουμε **πίνακα** με όλους τους παράγοντες και του αριθμητή και του παρονομαστή. Στην **τελευταία γραμμή** του πίνακα, που περιέχει τις τιμές για το Q(x), σημειώνουμε □ τις ρίζες του A(x) με 0. □ τις ρίζες του Π(x) με το //.	
6^{ο} βήμα: **Λύση Ανίσωσης**		Επιλέγουμε τις **τιμές που επαληθεύουν** την ανίσωση	

Εικόνα 28: Στρατηγική αυτορρύθμισης κατά την επίλυση κλασματικών εξισώσεων και ανισώσεων

Για παράδειγμα, στο πρώτο βήμα, το οποίο χαρακτηρίζεται από τη λέξη – κλειδί «Μορφή», ενώ στην περίπτωση των πολυωνυμικών ανισώσεων οι μαθητές θα πρέπει με κατάλληλους μετασχηματισμούς να φέρουν την ανίσωση στη μορφή:

στην ρητή περίπτωση, θα πρέπει να τη φέρουν στη μορφή:



Η διάκριση του περιεχομένου του κάθε βήματος, ορίζεται σαφώς από την περίπτωση για την οποία χρησιμοποιείται η στρατηγική, όπως φαίνεται παραπάνω, ώστε να μην υπάρξουν συγχύσεις μεταξύ των δύο. Παράλληλα, με τη χρήση των ίδιων λέξεων – κλειδιών και διαφοροποίηση μόνο του περιεχομένου, διευκολύνονται οι μαθητές με προβλήματα μνήμης, αφού με τον τρόπο αυτό χρειάζεται η απομνημόνευση ενός αντί για δύο ακολουθιών λογικών βημάτων. Τέλος, με τη συγκεκριμένη επιλογή, δίνεται περισσότερο βάρος στην κατανόηση του τρόπου σκέψης και στη γενίκευση αυτού σε περιπτώσεις που πιθανόν να προκύψουν και να μην εντάσσονται ακριβώς σε κάποια από αυτές που μελετώνται διεξοδικά.

Στο τρίτο βήμα της στρατηγικής και αφού έχει πραγματοποιηθεί η παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή, τονίζεται με την ένδειξη «ΠΡΟΣΟΧΗ!!!» (η οποία χρησιμοποιείται από την αρχή της διδασκαλία του κεφαλαίου για σημαντικές παρατηρήσεις) ότι δεν θα πρέπει να γίνεται απλοποίηση των κοινών παραγόντων αυτών. Η παραπάνω παρατήρηση γίνεται για να «προλάβει» την πιθανή παράβλεψη των σημείων στα οποία δεν ορίζεται η ρητή παράσταση και τα οποία οι μαθητές καλούνται να επισημάνουν στο επόμενο βήμα. Όπως έχει αναφερθεί στην πρώτη ενότητα, ένα από τα χαρακτηριστικά των μαθητών με ΜΔ είναι η έντονη παρορμητικότητα, η οποία πιθανόν να τους οδηγήσει σε μια τέτοια απλοποίηση (μια «κίνηση» που γίνεται κάποιες φορές αυθόρμητα έπειτα από τη συνεχή χρήση της).

Ακολουθούν δύο παραδείγματα ρητών εξισώσεων, τις οποίες οι μαθητές καλούνται να λύσουν ακολουθώντας τα βήματα της στρατηγικής που παρουσιάστηκε. Ο χώρος της σελίδας δομείται με τρόπο, ο οποίος από τη μία διακρίνει το πλαίσιο στο οποίο πρέπει να εκτελεστεί το κάθε βήμα, ενώ από την άλλη μέσα στο πλαίσιο του κάθε βήματος διακρίνονται τα μέρη στα οποία θα πρέπει να εκτελεστεί κάθε εργασία που περιλαμβάνει αυτό. Η προτεινόμενη δόμηση του χώρου εργασίας, πιθανόν να βοηθήσει ακόμα περισσότερο τους μαθητές με δυσκολίες σε λεκτικές δεξιότητες, αλλά ισχυρές οπτικο-χωρικές δεξιότητες, να κατανοήσουν και να απομνημονεύσουν τον τρόπο εργασίας στις παρουσιαζόμενες περιπτώσεις, ενώ παράλληλα οργανώνει την διαδικασία επίλυσης σε σαφώς ορισμένα υπο-βήματα. Έτσι τονώνονται με ένα ακόμα τρόπο οι μεταγνωστικές δεξιότητες παρακολούθησης του έργου και αυτορρύθμισης. Μακροπρόθεσμος στόχος είναι οι μαθητές με κάποια από τις παραπάνω δυσκολίες, να διδαχτούν, ώστε να χρησιμοποιούν στο μέλλον ανεξάρτητα την παραπάνω δόμηση του χώρου.

Στη συνέχεια δίνονται προς επίλυση δύο ρητές περιπτώσεις ανισώσεων, οι οποίες έχουν επιλεγεί με τρόπο, ώστε να τονίζεται η συσχέτιση αυτών με την περίπτωση εξισώσεων (η ρητή παράσταση που προκύπτει έπειτα από μετασχηματισμούς, ταυτίζεται με την παράσταση ενός εκ των δύο προηγούμενων περιπτώσεων εξισώσεων). Ταυτόχρονα, διευκολύνεται η ροή του μαθήματος, αφού οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων, εξοικονομώντας χρόνο που αλλιώς θα διατίθετο σε ήδη μαθημένες διαδικασίες κατά το μεγαλύτερο μέρος, παρά στην άσκηση στην εφαρμογή της νέας γνώσης.

Ακολουθεί η ενότητα περί άρρητων εξισώσεων, στην οποία αμέσως γίνεται σαφές ότι θα παρουσιαστούν μόνο δύο ειδικές περιπτώσεις, από τις πολυάριθμες που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία. Αμέσως μετά παρουσιάζεται η αντίστοιχη στρατηγική επίλυσης, η οποία διαφέρει εξαρχής από τις προηγούμενες δύο.

Βήμα 1^{ο}: **Περιορισμοί**	Θυμόμαστε ότι οι **υπόρριζες ποσότητες** πρέπει να είναι πάντα $\geq$**0** και βάζουμε από την αρχή τους αντίστοιχους περιορισμούς. Αν αυτοί είναι περισσότεροι από ένας, τότε βρίσκουμε το επιτρεπτό διάστημα που προκύπτει από όλους.	
Βήμα 2^{ο}: **Απομόνωση ρίζας**	**Απομονώνουμε** στο πρώτο μέλος **μόνο μία τετραγωνική ρίζα.**	
Βήμα 3^{ο}: **Περιπτώσεις**	Τώρα το **πρώτο μέλος**, που περιέχει τη μία ρίζα μόνο, είναι **πάντα** $\geq$0. Ελέγχουμε τις περιπτώσεις για το πρόσημο του δεύτερου μέλους. □ Αν αυτό είναι <0, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. □ Αν αυτό είναι $\geq$0, τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα. ΠΡΟΣΟΧΗ! Στο σημείο αυτό βάλαμε άλλον ένα περιορισμό. Τον συγκρίνουμε με τους περιορισμούς που μπήκαν αρχικά.	
Βήμα 4^{ο}: **Τετράγωνα**	Υψώνουμε στο **τετράγωνο** και τα δύο μέλη της εξίσωσης και κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε.	
Βήμα 5^{ο}: **Ξανά;**	**Αν υπάρχει ακόμα 1 ρίζα** επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2,3,4	
Βήμα 6^{ο}: **Λύση**	**Λύνουμε την πολυωνυμική** εξίσωση που προέκυψε	
Βήμα 7^{ο}: **Έλεγχος**	Ελέγχουμε τις λύσεις που βρήκαμε □ με **αντικατάσταση** □ συγκρίνοντας με όλους τους **περιορισμούς**	

Εικόνα 29: Στρατηγική αυτορρύθμισης κατά την επίλυση άρρητων εξισώσεων

Η στρατηγική συνοδεύεται από τρία παραδείγματα μέσα από το σχολικό εγχειρίδιο. Μάλιστα, το πρώτο από αυτά είναι παράδειγμα στο ίδιο το σχολικό εγχειρίδιο και ο τρόπος επίλυσης που παρουσιάζεται διαφοροποιείται, ώστε να συμφωνεί με τη γενικότερη μέθοδο που προτείνεται. Συγκεκριμένα, στο σχολικό εγχειρίδιο δεν αναφέρεται μελέτη για το πρόσημο του μέλους που δεν περιέχει ριζικό, αλλά απόρριψη κάποιων από τις λύσεις στο τέλος, έπειτα από αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση. Στην προτεινόμενη μέθοδο του φύλλου εργασίας, από την άλλη, κρίθηκε σκόπιμη μια τέτοια μελέτη περιπτώσεων, αφού θεωρήθηκε πως αυτή βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση των σχέσεων που οδηγούν στην απόρριψη μιας λύσης της εξίσωσης. Διατηρείται βέβαια το βήμα της αντικατάστασης των λύσεων στην αρχική εξίσωση, αυτό όμως πλέον γίνεται στα πλαίσια του αυτοελέγχου και όχι με τη μορφή που προτείνεται στο βιβλίο μαθητή.

5.12. Μάθημα 12^{o}

Η 12^{η} και τελευταία ώρα που διατίθεται σε αυτό το κεφάλαιο, μπορεί να αφιερωθεί σε ένα κριτήριο αξιολόγησης, ή στην επανάληψη όσων διδάχτηκαν οι μαθητές μέχρι στιγμής.

Στην παρούσα πρόταση προτιμήθηκε η επανάληψη, η οποία θα στηρίζεται σε μία ολιστική προσέγγιση του κεφαλαίου. Σε αυτό το ωριαίο μάθημα, ο στόχος είναι να μπορούν οι μαθητές μετά το πέρας του να λύνουν εξισώσεις και ανισώσεις (πολυωνυμικές ή που ανάγονται σε πολυωνυμικές) διαφόρων βαθμών και μορφών, επιλέγοντας κάθε φορά τις μεθόδους που διδάχτηκαν και θεωρούν οι ίδιοι κατάλληλες για να τους οδηγήσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Η εφαρμογή επιλέχθηκε να γίνει μέσα από μία διασκεδαστική δραστηριότητα, στην οποία θα συμμετέχει όλη η τάξη σε ομάδες: ένα παιχνίδι BINGO.

Κατά το πρώτο στάδιο, ο εκπαιδευτικός προετοιμάζει αριθμημένες κάρτες BINGO, οι οποίες περιέχουν, αντί για αριθμούς, εξισώσεις και ανισώσεις όλων των ειδών που διδάχτηκαν στα προηγούμενα μαθήματα. Επίσης, σημειώνει τις λύσεις κάθε κάρτας, ώστε να μπορεί ο ίδιος, αλλά και όποιος μαθητής το επιθυμεί να εξακριβώσει με ευκολία και σε σύντομο χρόνο, αν οι απαντήσεις που έδωσε είναι οι σωστές. Τέλος, κατασκευάζει κλήρους, οι οποίοι περιέχουν ένα από τα γράμματα της λέξης «BINGO» σε συνδυασμό με μία από τις λύσεις των εξισώσεων και των ανισώσεων που αναγράφονται στις κάρτες, αρκετές φορές την κάθε μία, φροντίζοντας να είναι το παιχνίδι όσο το δυνατόν περισσότερο «δίκαιο». Για να είναι δυνατό να βρεθεί νικητής στο διαθέσιμο χρόνο, θα πρέπει όλες οι λύσεις όλων των καρτών να είναι περιορισμένες σε πλήθος.

Ενημερώνει τους μαθητές εκ των προτέρων για το περιεχόμενο του επόμενου μαθήματος και τους δίνει γραπτά τους κανόνες του παιχνιδιού, καθώς και το «βραβείο» και τον τρόπο βαθμολόγησης των ομάδων, αλλά και του κάθε μαθητή χωριστά. Με τον τρόπο αυτό, οργανώνει προκαταβολικά το μάθημα, δίνει στους μαθητές χρόνο προετοιμασίας, ενώ ταυτόχρονα ενισχύει το κίνητρό τους για επανάληψη των δεξιοτήτων του κεφαλαίου.

Στο επόμενο στάδιο, οι μαθητές χωρίζονται σε μικτές, ως προς τις επιδόσεις, ομάδες των 5-6 ατόμων και ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει τη δραστηριότητα στην τάξη. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής: Ο εκπαιδευτικός κρατά τις κάρτες BINGO με την όψη προς τα κάτω και κάθε ομάδα διαλέγει στην τύχη μία κάρτα. Οι μαθητές σημειώνουν τα ονόματά τους στην πίσω όψη της κάρτας. Όταν όλες οι ομάδες διαλέξουν την κάρτα τους, τους δίνεται χρόνος 15 λεπτών, μέσα στον οποίο πρέπει να λύσουν όλες τις αναγραφόμενες εξισώσεις και ανισώσεις. Στο σημείο αυτό προτείνεται από τον εκπαιδευτικό να αναλάβει κάθε μέλος της ομάδας συγκεκριμένο πλήθος ασκήσεων, λόγω του περιορισμένου χρόνου, είτε ανά στήλη στην κάρτα, είτε ανάλογα με το είδος της άσκησης (για παράδειγμα μπορεί ένας μαθητής να αναλάβει να λύσει όλες τις ανισώσεις, ή όλες τις πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ανάλογα με το τι κρίνει ο ίδιος και η ομάδα του ότι είναι σε θέση να ολοκληρώσει με επιτυχία).

Μετά το πέρας των 15 λεπτών, ένας εκπρόσωπος από μια ομάδα τραβά ένα κλήρο, ανακοινώνει στην τάξη τη στήλη και τον αριθμό που αναγράφεται και ο εκπαιδευτικός τα σημειώνει στον πίνακα (π.χ. G – 1/2). Οι ομάδες ελέγχουν αν έχουν τη συγκεκριμένη λύση σε αυτή τη στήλη (π.χ. στη στήλη κάτω από το γράμμα G, τη λύση -1/2) και σημειώνουν το κελί, ακόμα και αν οι λύσεις αυτού του κελιού είναι περισσότερες. Το κεντρικό κελί της κάρτας, στο οποίο αναγράφεται η λέξη BINGO, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «μπαλαντέρ».

Μόλις μία ομάδα συμπληρώσει μια πεντάδα κελιών οριζόντια, κάθετα ή διαγώνια, πρέπει να φωνάξει τη λέξη «BINGO». Ένας εκπρόσωπος της ομάδας λέει τον αριθμό κάρτας καθώς και τους συνδυασμούς στηλών-λύσεων που σημείωσε η ομάδα στον εκπαιδευτικό, ο οποίος ελέγχει στις σημειώσεις του την ορθότητα των λύσεων. Αν υπάρχει κάποιο λάθος, τότε το παιχνίδι συνεχίζεται κανονικά και η ομάδα αυτή πρέπει να διορθώσει το λάθος της (της υποδεικνύεται μόνο το κελί στο οποίο υπάρχει το λάθος). Αν δεν υπάρχει κάποιο λάθος, η ομάδα αυτή είναι η νικήτρια και κερδίζει κάποιο έπαθλο. Αν μια δεύτερη ομάδα συμπληρώσει ταυτόχρονα μια νικητήρια πεντάδα, τότε κερδίζει αυτή η οποία φώναξε πρώτη τη λέξη «BINGO».

Το έπαθλο πρέπει να έχει προσυμφωνηθεί μεταξύ μαθητών – εκπαιδευτικού και μπορεί να σχετίζεται με τα ενδιαφέροντα των μαθητών (π.χ. ένα μουσικό CD της επιλογής τους) ή με τον βαθμό τους στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία αποτέλεσε μια μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας γύρω από τις ΜΔ και το συσχετισμό των χαρακτηριστικών της αντίστοιχης ομάδας μαθητών με τη διδασκαλία της Άλγεβρας. Αρχικά επιχειρήθηκε ο προσδιορισμός των προσαρμογών και των διδακτικών επιλογών, στις οποίες είναι δυνατόν να προβεί ένας εκπαιδευτικός Μαθηματικών γενικής αγωγής, στη βαθμίδα του Λυκείου, με στόχο την αντιμετώπιση ΜΔ που πιθανόν να εμφανίζεται σε τμήμα της γενικής τάξης. Στη συνέχεια, έχοντας πάντα κατά νου τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη θεωρητική προσέγγιση του θέματος, σχεδιάστηκε η διδασκαλία Άλγεβρας επιπέδου Λυκείου, με στόχο να ενσωματωθούν σε αυτήν κατά το δυνατόν περισσότερες από τις προτεινόμενες προσαρμογές.

Ένα από τα πρώτα ζητήματα που προέκυψαν από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, είναι η καταχρηστική χρήση του όρου των ΜΔ, η οποία πολλές φορές οδηγεί σε σύγχυση τους εμπλεκόμενους (εκπαιδευτικούς, γονείς, αλλά και τους ίδιους τους μαθητές). Για το λόγο αυτό έγινε προσπάθεια διασαφήνισης του όρου και της σχετικής ορολογίας, ενώ μελετήθηκαν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών αυτής της κατηγορίας, τα οποία φαίνεται να σχετίζονται ειδικότερα με την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων.

Όσο αφορά στην ανάπτυξη μεθόδων και στρατηγικών διδασκαλίας, για την αντιμετώπιση των δυσκολιών στα Μαθηματικά, μαθητών με ΜΔ, προκύπτει από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας σημαντικό έλλειμμα ερευνών και προτάσεων για τη βαθμίδα του Λυκείου (ή για ηλικίες μαθητών 15 – 18), σε σχέση με τις προηγούμενες βαθμίδες και τους μικρότερους ηλικιακά μαθητές.
Πιθανόν το «κενό» αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτό το επίπεδο οι μαθηματικές γνώσεις που οι μαθητές καλούνται να κατακτήσουν, βρίσκονται κατά κύριο λόγο στη σφαίρα της αφηρημένης σκέψης και απαιτούν από αυτούς να αναπτύξουν μεταγνωστικές στρατηγικές ανώτερου επιπέδου, διαδικασία που

για τους μαθητές με ΜΔ, συγκαταλέγεται ούτως ή άλλως στις αδυναμίες τους. Μια άλλη πιθανότητα είναι ότι οι έρευνες στη βαθμίδα του Λυκείου, απαιτούν από τους ίδιους τους ερευνητές βαθύτερη γνώση των εμπλεκομένων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, γνώση που δύσκολα υπάρχει εκτός των «ειδικών» του αντικειμένου, δηλαδή των ίδιων των καθηγητών Μαθηματικών. Έτσι, όσο αυτοί οι ίδιοι δεν επιλέγουν να στρέψουν τις έρευνές τους στη «δύσκολη» περίπτωση, διδασκαλίας σε μαθητές με ΜΔ στο Λύκειο, είναι λογικό εκείνοι που ασχολούνται με το θέμα των ΜΔ (κυρίως ψυχολόγοι και εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης), να μην έχουν εκ των πραγμάτων τη δυνατότητα εμβάθυνσης στις σύνθετες απαιτήσεις των Μαθηματικών αυτού του επιπέδου, και κατά συνέπεια στις μεθόδους αντιμετώπισης των δυσκολιών των μαθητών με ΜΔ.

Πάντως, μια προσεκτική μελέτη των υπαρχουσών προτεινόμενων μεθόδων, φαίνεται να διαμορφώνει μία γενική στάση για την προσέγγιση των μαθητών αυτής της κατηγορίας, γεγονός που αποτέλεσε και τη βάση της προσπάθειας που γίνεται στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

Ένα δεύτερο στοιχείο που καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη μορφή της προτεινόμενης εφαρμογής, είναι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις πρόσφατες θεωρήσεις, ως προς το καταλληλότερο είδος αντιμετώπισης και το βαθμό παρέμβασης, σε μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε κάποιο σχολικό αντικείμενο. Επιλέγεται ο σχεδιασμός της διδασκαλίας του δεύτερου μέρους της εργασίας να γίνει στα πλαίσια μιας πρωτοβάθμιας πρόληψης, η οποία επικεντρώνεται στον ενιαίο σχεδιασμό της διδασκαλίας, απευθύνεται σε όλους τους μαθητές, αλλά διαχειρίζεται αρχές που διέπουν τις ανάγκες του ειδικού μαθητικού πληθυσμού της τάξης. Η επιλογή αυτή γίνεται ουσιαστικά για να καταδείξει το πώς, ακόμα και εκπαιδευτικοί γενικής αγωγής, έχουν τη δυνατότητα διευκόλυνσης αυτής της κατηγορίας μαθητών, χωρίς απαραίτητα η παρέμβαση να απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις, εξατομίκευση της διδασκαλίας ή απομάκρυνση του μαθητή – στόχου από το σύνολο της τάξης.

Στο δεύτερο μέρος, υποτίθεται εξ αρχής ότι στην τάξη για την οποία σχεδιάζεται η διδασκαλία, υπάρχουν μαθητές με ΜΔ, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε συγκεκριμένες δεξιότητες που οι έρευνες σχετίζουν με την μαθηματική επίδοση. Η παρέμβαση δηλαδή σχεδιάστηκε με την υπόθεση ότι οι μαθητές με ΜΔ της τάξης στην οποία απευθύνεται παρουσιάζουν συγκεκριμένες δυσκολίες σε επιλεγμένες δεξιότητες. Έτσι, τα πρακτικά παράγωγα (φύλλα εργασίας) της παρούσας εργασίας υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς. Μια τέτοια υπόθεση βέβαια, δε σημαίνει ότι οι προτεινόμενες προσαρμογές μπορούν να εφαρμοστούν μόνο για τέτοιου είδους μαθητές. Αντιθέτως, ουσιαστικός στόχος αυτής της διάκρισης είναι να δείξει στην πράξη το πώς, ανάλογα με την περίπτωση των αναγκών, μπορεί ο εκπαιδευτικός να επιλέγει τις εκάστοτε κατάλληλες μεθόδους και στρατηγικές και να τις ενσωματώνει στη συνέχεια στο γενικό σχεδιασμό της διδασκαλίας του. Καταδεικνύει δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο η σύσταση της εκάστοτε τάξης, οι δυνατότητες αλλά και οι αδυναμίες των μαθητών που την αποτελούν, καθορίζουν και την προσέγγιση της διδασκαλίας. Η τελευταία άλλωστε αποτελεί μία από τις βασικές αρχές της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, σύμφωνα με την οποία ο σχεδιασμός της διδασκαλίας βασίζεται σε δύο κύριους άξονες, ένας εκ των οποίον είναι ο ίδιος ο μαθητής (ο δεύτερος είναι το αναλυτικό πρόγραμμα) (Παντελιάδου, 2008).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική βιβλιογραφία

Αγαλιώτης Ι. (2000). *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά: Αιτιολογία, Αξιολόγηση, Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Εκδόσεις «Ελληνικά Γράμματα»

Κοσυφόγλου Α. (2006). *Δυσλεξία και Μαθηματικά*. Διπλωματική Εργασία. Ανάκτηση από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kosifologou.pdf

Μπάρμπας Γ. (2004). *Προβλήματα στη σχολική μάθηση: Μαθηματικά. Στο «*Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση». Παντελιάδου Σ., Πατσιοδήμου Α., Μπότσας Γ. (επιμ.), σελ. 72-78

Μπότσας Γ. (2008). *Ενίσχυση των γνωστικών και συναισθηματικών χαρακτηριστικών των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες*. Στο «Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες». Παντελιάδου Σ., Αντωνίου Φ. (επιμ.) σελ. 18-31

Μπότσας Γ. & Παντελιάδου Σ. (2007). *Χαρακτηριστικά παιδιών και εφήβων με Μαθησιακές Δυσκολίες*. Στο «Μαθησιακές Δυσκολίες: Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά». Παντελιάδου Σ., Μπότσας Γ. (επιμ.) σελ. 21-41

Μπότσας Γ. & Παντελιάδου Σ. (2004). *Χαρακτηριστικά των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες*. Στο «Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση». Παντελιάδου Σ., Πατσιοδήμου Α., Μπότσας Γ. (επιμ.), σελ. 31-52

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. *Προσαρμογές Αναλυτικών Προγραμμάτων για μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες – Θεωρητικό Πλαίσιο*. Ανάκτηση στις 4/1/2011 από http://www.pi-schools.gr/special_education_new/index_gr.htm

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου*. Ανάκτηση στις 1/7/2010 από http://www.pi-schools.gr/lessons/ mathematics/odigies_did_math_lyk.pdf

Παντελιάδου Σ. (2008). *Διαφοροποιημένη Διδασκαλία*. Στο «Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με Μαθησιακές δυσκολίες». Παντελιάδου Σ., Αντωνίου Φ. (επιμ.) σελ. 7-17

Παντελιάδου Σ. & Πατσιοδήμου Α. (2007). *Προβλήματα στη σχολική μάθηση*. Στο «Μαθησιακές Δυσκολίες: Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά». Παντελιάδου Σ. Μπότσας Γ. (επιμ.) σελ. 42-52

Παντελιάδου Σ. (2004). *Ορισμός και περιεχόμενο των Μαθησιακών Δυσκολιών*. Στο «Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στη δευτεροβάθμια Εκπαίδευση». Παντελιάδου Σ., Πατσιοδήμου Α., Μπότσας Γ. (επιμ.), σελ.20-29

Τζουριάδου Μ. & Μπάρμπας Γ. (2003). *Δυσλεξία: Επιστημονικές αντιφάσεις και παιδαγωγικά αδιέξοδα.* Στο «Ψυχολογία και Εκπαίδευση». Ευκλείδη Α., Τζουριάδου Μ., Λεονταρή Α. (επιμ.), Τόμος 1. Εκδόσεις «Ελληνικά Γράμματα»

Τζουριάδου Μ. & Μπάρμπας Γ. (2009). *Μαθησιακές Δυσκολίες: Γνωστικές Προσεγγίσεις*. Εισήγηση από επιμορφωτικό σεμινάριο. Ανάκτηση από http://amea-edu.blogspot.com/2009/03/blog-post.html

Υπουργείο Παιδείας (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (ΕΠΠΣ).

<u>**Ξενόγλωσση βιβλιογραφία**</u>

American Psychiatric Association (2000). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders, 4th ed., text rev.(DSM-IV-TR).* Washington, DC

Bley N. S. & Thornton C. A. (1995). *Teaching mathematics to the learning disabled.* (3rd ed.). Autsin, TX: Pro-ed.

Calhoon M. B. & Fuchs L. S. (2003). *The effects of peer-assisted learning strategies and curriculum-based measurement on the mathematics performance of secondary students with disabilities.* Remedial and Special Education, 24, σελ. 235-245

Donaldson J. B. & Zager D. (2010). *Mathematics interventions for students with High Functioning Autism / Asperger's Syndrome.* Teaching Exceptional Children, 42(6), σελ. 40-46

Flavell J. H. (1979). *Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive – development inquiry*. American Psychologist, 34, σελ. 906-911

Fuchs L.S. & Fuchs D. (2001). *Principles for the Prevention and Intervention of Mathematics Difficulties.* Learning Disabilities Research & Practice 16(2), σελ. 85-95

Gagnon J. C. & Maccini P. (2007). *Teacher reported use empirically validated and standards-based instructional approach in secondary mathematics.* Remedial & Special Education, 28, 43-56

Gagnon J. C. & Maccini P. (2001). *Preparing Students with Disabilities for Algebra.* Teaching Exceptional Children 34(1), σελ. 8-15

Geary D. C. (2010). *Mathematical learning disabilities*. In J. Holmes (Ed.), Advances in Child Development and Behavior, 38, σελ. 45-77. San Diego, CA: Academic Press.

Geary D. C. (2004). *Mathematics and Learning Disabilities.* Journal of Learning Disabilities, 37(1), January/February 2004, σελ. 4-15

Geary D. C. (1994). *Children's Mathematical Development*. Washington DC: American Psychological Association.

Germanò E. , Gagliano A. & Curatolo P. (2010). *Comorbidity of ADHD and Dyslexia*. Developmental Neuropsychology, 35(5), σελ. 475-493

Hall T. (2002). *Explicit instruction. Effective classroom Practices Report.* Wakefield, MA: National Center on Accessing the General Curriculum. Ανάκτηση στις 13/2/2011 από http://aim.cast.org/learn/historyarchive/backgroundpapers/explicit_instruction

Hall T. & Strangman N. (2002). *Graphic organizers.* Wakefield, MA: National Center on Accessing the General Curriculum. Ανάκτηση στις 13/2/2011 από http://aim.cast.org/learn/historyarchive/backgroundpapers/graphic_organizers

Hammill D. D. (1990). *On defining learning disabilities: An emerging consensus.* Journal of Learning Disabilities, 23, 74 – 84

Hunt N. & Marshall K. (2005). *Exceptional children and youth*. (4th ed.) Boston, MA: Houghton Mifflin.

Hutchinson N. L. (1993). *Students with disabilities and mathematics education Reform – Let the dialogue begin.* Remedial and Special Education, 14(6), σελ. 20-23

Impecoven-Lind L.S. & Foegen A. (2010). *Teaching Algebra to Students with Learning Disabilities.* Intervention in School and Clinic, 46(1), σελ. 31-37

Ives B. (2007). *Graphic organizers applied to secondary algebra instruction for students with learning disabilities.* Learning Disabilities Research & Practice, 22(2), σελ. 110-118

Ives B. & Hoy C. (2003). *Graphic Organizers Applied to Higher-Level Secondary Mathematics.* Learning Disabilities Research & Practice, *18*(1), σελ. 36–51

Kirk S. A. (1962). *Educating exceptional children*. Boston: Houghton Mifflin.

Maccini P., Strickland T., Gagnon J. C. & Malmgren K. (2008). *Accessing the general education curriculum for secondary students with high-incidence disabilities.* Focus on Exceptional Children, 40(8), σελ. 1-32

Maccini P. & Gagnon. J. C. (2000). *Best practices for teaching mathematics to secondary students with special needs: Implications from teacher perceptions and a review of the literature.* Focus on Exceptional Children, 32(5), σελ. 1-22

Maccini P. & Hughes C. A. (2000). *Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities.* Learning Disabilities Research & Practice, 15, σελ. 10-21

Mercer C. & Miller S. (1992). *Teaching students with learning problems in maths to acquire, understand, and apply basic maths facts,* Remedial and Special Education, 13(3), σελ. 19-35

Miller S. P. & Mercer C. D. (1993). *Using a graduated word problem sequence to promote problem-solving skills.* Learning Disabilities Research & Practice, 8, σελ. 169-174

Miller S. P. & Mercer C. D. (1993). *Using data to learn about concrete-semiconcrete-abstract instruction for students with mathematics disabilities.* Learning Disabilities Research & Practice, 8, σελ. 89-96

Miller S. P., Mercer C. D. & Dillon A. S. (1992). *CSA: Acquiring and retaining math skills*. Intervention in School and Clinic, 28, σελ. 105-110

Montague M. & Dietz S. (2009). *Evaluating the evidence base for cognitive strategy instruction and mathematical problem solving.* Exceptional Children, 75(5), σελ. 285-302

Montague M. (2007). *Self-regulation and Mathematics Instruction.* Learning Disabilities Research and Practice, 22(1), σελ. 75-83

Montague M. (2005). *Instruction for mathematical problem-solving: A summary of the April 28, 2005 teleconference for the district to district information sharing Community*. Office of Special Education Programs:

Ideas That Work.

Montague M. (2003). *Solve It! A Practical Approach to Teaching Mathematical Problem Solving Skills.* Reston, VA: Exceptional Innovations.

Montague M., Applegate B. &Marquard K. (1993). *Cognitive strategy instruction and mathematical problem-solving performance of students with learning disabilities.* Learning Disabilities Research and Practice, 29, σελ. 251-261

Montague M. (1996). *Assessing Mathematical Problem Solving.* Learning Disabilities Research & Practice, 11(4), σελ. 238-248

Rosenshine B. & Stevens R. (1986). *Teaching functions.* In M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (3 rd ed.), σελ. 376-391. New York: Macmillan

Rourke B. P. & Tsatsanis K. D. (1996). *Syndrome of nonverbal learning disabilities: Psycholinguistic assets and deficits.* Topics in Language Disorders, 16, σελ. 30-44

Rourke B. P., Strang J. D. (1983). *Subtypes of reading and arithmetical disabilities: A neuropsychological analysis.* In M. Rutter (ed.), Developmental neuropsychiatry New York: Guilford Press, σελ. 473-488

Schunk D. H. & Zimmerman B. (1994). *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sousa D. (2001). *How the special needs brain learns.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Strickland T.K. & Maccini P. (2010). *Strategies for Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities: Making Research to Practice Connections.* Intervention in School and Clinic, 46(1), σελ. 38-45

Tan K., Dawson V. & Venville G. (2008). *Use of cognitive organisers as a self regulated learning strategy*. Issues in Educational Research, 18(2), σελ.183-207

Tzanakis C. & Arcavi A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey*. In J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), History in Mathematics Education: The ICMI Study, (σελ. 201 – 240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wong B. Y. L. (1991). *The relevance of metacognition to learning disabilities*. In B. Y. L. Wong (ed.) Learning about learning disabilities, σελ. 231-258. San Diego, CA: Academic Press.

World Health Organization. (2007). *ICD-10*. Ανάκτηση στις 4/1/2011από http://apps.who.int/classifications/apps/icd/icd10online/

Xin Y. P., Jitendra A. K. & Deatline-Buchman A. (2005). *Effects of Mathematical Word Problem–Solving Instruction on Middle School Students with Learning Problems.* The Journal of Special Education, 39(3), σελ. 181-192

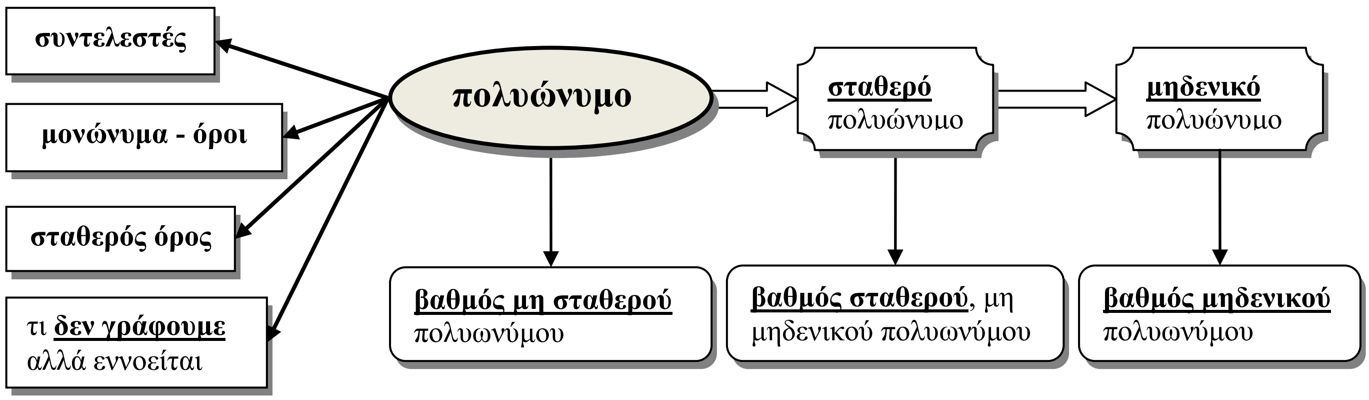
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Φύλλο εργασίας 1

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

Τι είναι τα πολυώνυμα - Ορισμοί



1. *Τι είναι τα πολυώνυμα;*

Ας δούμε τον παρακάτω πίνακα:

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	----
						$1{,}8$
					$2x$	$+\frac{3}{5}$
				$4{,}2x^2$	$+1x$	$+0$
			$\frac{6}{7}x^3$	$+0x^2$	$-1{,}5x$	$+80$

- Τι παρατηρείτε στην **τελευταία στήλη;** Με τι την συμπληρώσαμε;

• Τι παρατηρείτε στην **προτελευταία στήλη**; Με τι την συμπληρώσαμε;

• Μπορείτε να βρείτε ένα κανόνα για το πώς συμπληρώνουμε την **κάθε στήλη**;

• Μπορείτε να βρείτε ένα κανόνα για το πώς συμπληρώνουμε την **κάθε γραμμή**;

Αν ακολουθήσουμε τον παραπάνω κανόνα, τότε κάθε γραμμή του πίνακα σχηματίζει ένα **ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ**.

• Μπορείτε να συμπληρώσετε την επόμενη γραμμή του πίνακα με ένα ακόμα πολυώνυμο;

• Μπορείτε να συμπληρώσετε όλες τις γραμμές του πίνακα με πολυώνυμα;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής

$$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός
και $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πιστεύετε ότι πρέπει να σημειώσετε για να τη θυμάστε;

◈ *Ο **<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>** είναι μια ΣΥΜΦΩΝΙΑ για το όνομα που θα χρησιμοποιούμε για μια έννοια, ώστε να μιλάμε όλοι για το ίδιο ακριβώς πράγμα, χωρίς αμφιβολία, ακόμα και αν δεν έχουμε συναντηθεί ποτέ.*

◈ *Στη συνέχεια, όταν κάτι είναι ορισμός, τότε στο φύλλο εργασίας θα αναφέρεται η λέξη* ***ΟΡΙΣΜΟΣ****, που θα σημαίνει ότι πρέπει να θυμόμαστε* ***και τις λεπτομέρειες****, για να είμαστε σίγουροι ότι μιλάμε για το ίδιο πράγμα όλοι.*

◈ *Κάτω από κάθε ορισμό θα υπάρχει ένα κενό πλαίσιο για να σημειώνετε όποια λεπτομέρεια πιστεύετε ότι είναι ιδιαίτερα σημαντική, για να τη θυμάστε.*

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	

◈ *Στη συνέχεια, όταν στην αρχή κάποιου πίνακα του φύλλου εργασίας υπάρχει η λέξη* **ΘΥΜΑΜΑΙ**, *θα γράφουμε λίγες λέξεις ή ένα παράδειγμα για να μας θυμίζουν τι είναι αυτό που είναι γραμμένο στον πίνακα .*

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ	

2. ***<u>Ποια είναι τα χαρακτηριστικά ενός πολυωνύμου; Από τι αποτελείται;</u>***

Η παράσταση που υπάρχει μέσα σε κάθε κουτάκι του πίνακα της πρώτης σελίδας λέγεται **<u>ΜΟΝΩΝΥΜΟ</u>**.

- Μπορείτε να βρείτε τα μονώνυμα της τέταρτης γραμμής του πίνακα;

Τα μονώνυμα που χρησιμοποιούμε για να φτιάξουμε ένα πολυώνυμο λέγονται **ΟΡΟΙ** του πολυωνύμου αυτού.

• Ποιοι είναι οι όροι του πολυωνύμου στην δεύτερη γραμμή του πίνακα;

◈ *Δηλαδή, οι όροι του πολυωνύμου είναι τα μονώνυμα που διαλέξαμε για να φτιάξουμε αυτό το συγκεκριμένο πολυώνυμο.*

Ο όρος του πολυωνύμου που δεν περιέχει καθόλου x, λέγεται **ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΟΡΟΣ** του πολυωνύμου.

• Σε ποια στήλη του πίνακα βρίσκονται οι σταθεροί όροι των πολυωνύμων;

• Μπορείτε να βρείτε τον σταθερό όρο του πολυωνύμου της πέμπτης γραμμής του πίνακα;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **μονώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής $\mathbf{\alpha x^{\nu}}$,

όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

Επίσης, μονώνυμο λέγεται και κάθε πραγματικός αριθμός **α.**

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πρέπει να σημειώσετε για να τη θυμάστε;

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	
ΘΕΤΙΚΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	
ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το $\boldsymbol{\alpha_0}$ λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου

$$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}.$$

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πρέπει να σημειώσετε;

• Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα μονώνυμο είναι ταυτόχρονα και πολυώνυμο;

• Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένας πραγματικός αριθμός είναι ένα πολυώνυμο;

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	
ΟΡΟΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	
ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΟΡΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	

Οι αριθμοί που συμπληρώνουμε σε κάθε στήλη του πίνακα, μπροστά από τις δυνάμεις του x, λέγονται **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ** των πολυωνύμων.

❖ *Οι συντελεστές περιλαμβάνουν **και το πρόσημο** (+ ή -) που υπάρχει μπροστά τους. Δηλαδή μπορεί να είναι και θετικοί και αρνητικοί, αλλά και 0.*

- Μεταξύ του αριθμού (δηλαδή του συντελεστή) και της δύναμης του x, εννοείται ότι έχουμε πράξη τον:

- Μπορείτε να βρείτε τους συντελεστές του πολυωνύμου της τρίτης γραμμής του πίνακα;

- Στο ίδιο πολυώνυμο, ποιος είναι ο συντελεστής του x^2;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συντελεστές του πολυωνύμου $\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}$ λέγονται οι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0}$.

- Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πρέπει να σημειώσετε;

Παρατηρούμε ότι στο πολυώνυμο της τρίτης γραμμής του πίνακα ένας από τους συντελεστές είναι το 1 και στο πολυώνυμο της τέταρτης γραμμής ένας από τους συντελεστές είναι το 0.

- Μπορείτε να ξαναγράψετε αυτά τα δύο πολυώνυμα πιο σύντομα, έχοντας τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στο μυαλό σας;

Πολυώνυμο 3ης γραμμής	
Πολυώνυμο 4ης γραμμής	

Αν τα καταφέρατε να συμπληρώσετε τα κενά ΜΠΡΑΒΟ!!!

Αν δεν τα καταφέρατε, διαβάστε παρακάτω τον κανόνα και ξαναπροσπαθήστε…

❖ *Όταν λείπει ο συντελεστής μπροστά από μια δύναμη του x, εννοείται ότι είναι το 1, αλλά για συντομία δεν τον γράφουμε.*

❖ *Όταν δεν εμφανίζεται καθόλου μια δύναμη του x, τυχαίνει ο συντελεστής της να είναι το 0, αλλά για συντομία παραλείπεται όλος ο όρος.*

• Στα παρακάτω πολυώνυμα τι μπορεί να παραλειφθεί επειδή εννοείται; Γράψτε στο κουτάκι δίπλα σε κάθε πολυώνυμο, το ίδιο πολυώνυμο αλλά παραλείποντας όσο περισσότερα μπορείτε!

ΠΙΟ ΣΥΝΤΟΜΑ

$\frac{1}{3}x^5 + 0x^4 - 1x^3 - 0,4x^2 + 0x - 1$	
$0x^8 - 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 - 30x^3 - 10x^2 + 1x - 0$	
$0,01x^{10} + 0x^9 - 1x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 4x^4 +$ $+1x^3 + 0x^2 + 19x + 0$	

• Στα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε να εντοπίσετε τι έχει παραλειφθεί, αλλά εννοείται; Γράψτε στο κουτάκι δίπλα σε κάθε πολυώνυμο, το ίδιο πολυώνυμο αλλά χωρίς να παραλείψετε τίποτα!

ΤΙ ΛΕΙΠΕΙ;;;

$5x^3 - 4x^2 + 2$	
$15x^5 - 32x^3 + x$	
$x^4 - x^3 + 2x + 1$	
$\frac{2}{3}x^{15} + 4x^{10} + 21$	

⌘**ΘΥΜΑΜΑΙ**

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	
ΔΕΝ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΑΛΛΑ ΕΝΝΟΟΥΝΤΑΙ	

Η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **ΒΑΘΜΟΣ** του πολυωνύμου.

Αν δεν εμφανίζεται καθόλου το x (δηλαδή αν έχουμε μόνο τον σταθερό όρο), τότε το πολυώνυμο λέγεται **ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ** και ***ο βαθμός του είναι το 0***. (0 σημαίνει ότι δεν υπάρχει δύναμη του x)

- Στον πίνακα στην αρχή του φύλλου εργασίας, ποιος είναι ο βαθμός του κάθε πολυωνύμου;

	ΒΑΘΜΟΣ		ΒΑΘΜΟΣ
Πολυώνυμο 1ης γραμμής		Πολυώνυμο 5ης γραμμής	
Πολυώνυμο 2ης γραμμής		Πολυώνυμο 6ης γραμμής	
Πολυώνυμο 3ης γραμμής		Πολυώνυμο 7ης γραμμής	
Πολυώνυμο 4ης γραμμής			

Υπάρχει μόνο μία εξαίρεση στον προηγούμενο κανόνα: Όταν το πολυώνυμο έχει μόνο σταθερό όρο (δηλαδή είναι σταθερό πολυώνυμο) και αυτός τύχει να είναι το 0.

Αυτό το πολυώνυμο το λέμε **ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ** και ***ο βαθμός του δεν ορίζεται***.

❖ *Δηλαδή, αν μας ρωτήσουν ποιος είναι ο **βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου**, εμείς θα απαντήσουμε ότι **δεν υπάρχει**.*

- Βρείτε τους βαθμούς και των επόμενων πολυωνύμων:

	ΒΑΘΜΟΣ		ΒΑΘΜΟΣ
$\mathbf{5x^3 - 4x^2 + 2}$		$\mathbf{x^4 - x^3 + 2x + 1}$	
$\mathbf{15x^3 - 32x^3 + x}$		$\mathbf{5x}$	
$\mathbf{32x^5}$		$\mathbf{5}$	
$\mathbf{0}$		$\mathbf{\frac{2}{3}x^{15} + 4x^{10} + 21}$	

ΟΡΙΣΜΟΣ

Βαθμός ενός μη μηδενικού πολυωνύμου λέγεται η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται στην παράσταση με συντελεστή διαφορετικό από το 0.

- Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πρέπει να σημειώσετε;

- Ποιος είναι ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Σταθερό πολυώνυμο λέγεται ένα πολυώνυμο της μορφής $\boldsymbol{\alpha_0}$, δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός**.**

- Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στον ορισμό που πρέπει να σημειώσετε;

- Ποιος είναι ο βαθμός ενός σταθερού πολυωνύμου;

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΒΑΘΜΟΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	
ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ	
ΒΑΘΜΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	
ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ	
ΒΑΘΜΟΣ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	

✐ **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1) Ποια από τα παρακάτω είναι **μονώνυμα** σύμφωνα με τον ορισμό; Βάλτε τα σε **κύκλο**.

$\boldsymbol{8x^3}$	$\boldsymbol{5x^4}$	$\boldsymbol{\sqrt{4,42}x^2}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{24}{8+\sqrt{35}}x^4}$
$\boldsymbol{-8,4}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\pi x}$	$\boldsymbol{5x^{-2}}$	$\boldsymbol{\sqrt[5]{8}\ \frac{3}{x}}$

2) Ποια από τα παρακάτω είναι **πολυώνυμα** σύμφωνα με τον ορισμό; Βάλτε τα σε **κύκλο.**

$\boldsymbol{5x^3-4x^2+2}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}x^4+5}$	$\boldsymbol{x^{-4}+x^{-1}+3}$
$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\sqrt{3x^2+2x+1}}$	$\boldsymbol{15x^{68}+32x^{45}+21x}$
$\boldsymbol{-42x^5-3x^2+x}$	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{x}}{22}}$	$\boldsymbol{\frac{35}{5\mathrm{x}^2+2}}$

3) Μπορείτε να συμπληρώσετε τον πίνακα για τα παρακάτω πολυώνυμα;

Πολυώνυμο	**Βαθμός**	**Σταθερός όρος**	**Όροι του πολυωνύμου**	**Συντελεστής του x**	**Συντελεστής του x^2**
$\boldsymbol{0,15x^{34}+3,2x^5+2x}$					
$\boldsymbol{x^{68}+x^2+21x-1}$					
$\boldsymbol{\frac{4}{7}x^3-x^2-x+\frac{5}{3}}$					
$\boldsymbol{-2x^6+x^5-2x}$					

4) Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα. Για τη δεύτερη στήλη μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όσα είχατε γράψει πριν, όμως **ΠΡΟΣΟΧΗ!!!** Συμπληρώστε και τις λεπτομέρειες που υπήρχαν στους ορισμούς, αλλά δεν τις είχατε παρατηρήσει αρχικά! Στην τρίτη στήλη του πίνακα βάλτε ένα ☺ για ότι καταλάβατε και ένα ☹ για ότι δεν καταλάβατε.

⌘ΘΥΜΑΜΑΙ ☺☹

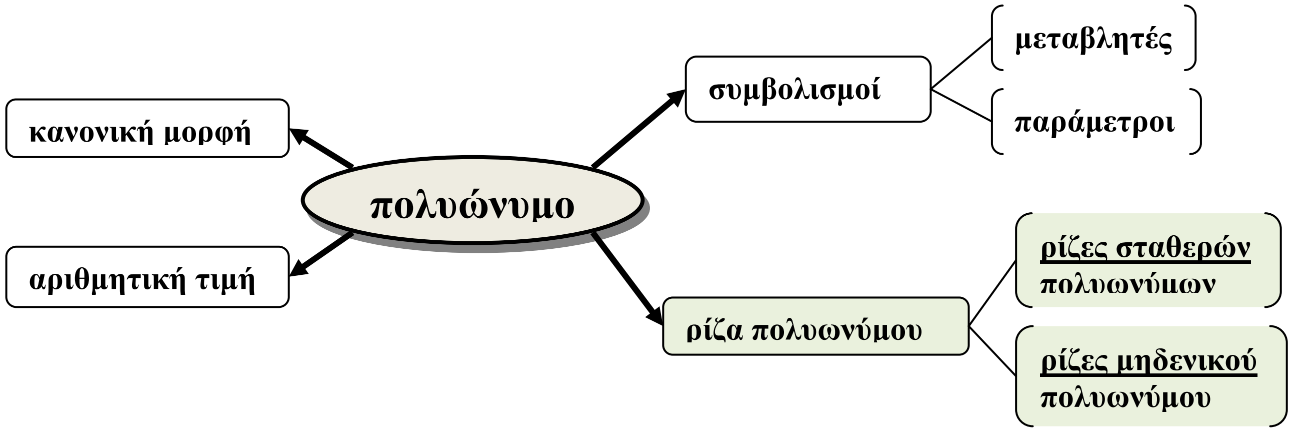
Πολυώνυμο		
Μονώνυμο		
Όροι πολυωνύμου		
Σταθερός όρος πολυωνύμου		
Συντελεστές πολυωνύμου		
Τι δεν γράφουμε αλλά εννοείται		
Σταθερό πολυώνυμο		
Μηδενικό πολυώνυμο		
Βαθμός μη μηδενικού πολυωνύμου		
Βαθμός σταθερού πολυωνύμου		
Βαθμός μηδενικού πολυωνύμου		

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 2</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Περισσότεροι ορισμοί για τα πολυώνυμα</u>



1. ***<u>Κανονική μορφή πολυωνύμου</u>***

Μπορεί ένα πολυώνυμο να το δούμε και «ανακατεμένο»!!! Δηλαδή, να μην είναι όλοι οι όροι του πολυωνύμου στη σειρά, ανάλογα με το ποια δύναμη του x είναι μεγαλύτερη. Τότε μπορούμε να βρούμε όλα όσα είπαμε στο προηγούμενο μάθημα, χωρίς να βάλουμε αναγκαστικά τους όρους στη σειρά.

- Μπορείτε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γι αυτό το «ανακατεμένο» πολυώνυμο;

$$\mathbf{21 - 4x^{10} - \frac{1}{3}x^{15} + 4x^{32}}$$

Βαθμός	**Όροι του πολυωνύμου**	**Σταθερός όρος**	**Συντελεστής του x**	**Συντελεστής του x^{32}**	**Συντελεστής του x^{12}**

Αν θέλουμε, πάντως, μπορούμε να βάλουμε όλους τους όρους του πολυωνύμου στη σειρά, από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη δύναμη.

Αυτός ο τρόπος να γράψουμε το πολυώνυμο λέγεται **<u>ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</u>** του πολυωνύμου και είναι πολύ βολική κάποιες φορές.

- Μπορείτε να γράψετε τα παρακάτω πολυώνυμα στην κανονική τους μορφή;

«ΑΝΑΚΑΤΕΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ»	ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ
$\mathbf{21 - 4x^{10} - \frac{1}{3}x^{15} + 4x^{32}}$	
$\mathbf{1 + 4x^{12} + \frac{2}{3}x^{15}}$	
$\mathbf{2x + x^3 + x^4 - 1}$	
$\mathbf{32x^5}$	

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	

2. ***<u>Μεταβλητές</u>***

Στην καθημερινότητα μπορεί να παρουσιαστεί μια κατάσταση, από την οποία θέλουμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Πολλές φορές, όταν εμπλέκονται αριθμοί, μας διευκολύνει να «μεταφράσουμε σε μαθηματικά» την κατάσταση, για να μπορέσουμε να την επεξεργαστούμε καλύτερα.

Με τη βοήθεια των συμβόλων, μπορούμε να «μεταφράζουμε σε μαθηματικά» καταστάσεις, για να καταφέρουμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα, ακόμα κι αν δε γνωρίζουμε όλους τους αριθμούς που εμπλέκονται.

Για να «μεταφράσουμε σε μαθηματικά» μια κατάσταση, προσπαθούμε να τη γράψουμε χωρίς λόγια, χρησιμοποιώντας μόνο:

□ τους αριθμούς που δίνονται

□ τις πράξεις που εννοούνται

□ τα σύμβολα σύγκρισης που εννοούνται (όπως =, >, <)

□ σύμβολα για τις ποσότητες που δε γνωρίζουμε

Για τις ποσότητες που δε γνωρίζουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε σύμβολο μας αρέσει (□ ⬭ △ ☆ ♡ ή κάποια γράμματα), αλλά σε κάθε περίπτωση, πρέπει να είναι σαφές ποια είναι η ποσότητα που «κρύβεται» πίσω από το κάθε σύμβολο.

Για παράδειγμα, η φράση:

«Τα αγόρια και τα κορίτσια της τάξης είναι συνολικά 25.»

μπορεί να «μεταφραστεί σε μαθηματικά» ως εξής:

$\# + \square = 25$, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο # για τα αγόρια

και το σύμβολο □ για τα κορίτσια

ή

$\alpha + \kappa = 25$, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο α για τα αγόρια

και το σύμβολο κ για τα κορίτσια

ή

$x + y = 25$, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο x για τα αγόρια

και το σύμβολο y για τα κορίτσια

• «Μεταφράστε σε μαθηματικά» τη φράση: ***«Η μάζα της Γης είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του Ερμή και τη μάζα του Άρη μαζί.»***

<u>ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ</u> λέμε το σύμβολο που χρησιμοποιούμε αντί για κάποιον αριθμό, όταν δεν τον γνωρίζουμε και όταν ο αριθμός αυτός μπορεί να μεταβάλλεται (δηλ. να αλλάζει).

Συνήθως η μεταβλητή είναι ένα **μικρό γράμμα**, όποιο θέλουμε κάθε φορά.
Πιο συνηθισμένο γράμμα για να συμβολίζουμε μεταβλητές είναι το x, όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα, όπως y, t, z, α, β, γ, κ, λ και γενικά, όποιο μας βολεύει ή όποιο μας αρέσει περισσότερο.

Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα είχαν μέσα τους δυνάμεις του x. Αυτό **το x ήταν η μεταβλητή των πολυωνύμων** μας.

Κάθε πολυώνυμο αναγκαστικά περιέχει μεταβλητή.

Ακόμα και αν τύχει όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων της μεταβλητής να είναι 0, αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει μεταβλητή. Απλά έχουν παραλειφθεί οι όροι που την περιέχουν, για συντομία.

Στο εξής θα ονομάζουμε για συντομία τα πολυώνυμα που εμφανίζονται με ένα **κεφαλαίο γράμμα** (συνήθως P, Q, F, G, αλλά γενικά βάζουμε ένα κεφαλαίο γράμμα που μας αρέσει).

Το μικρό γράμμα που θα διαλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε για τη μεταβλητή θα το γράφουμε σε μια παρένθεση δίπλα στο όνομα του πολυωνύμου.

π.χ. P(x), Q(x), F(y), G (t)

3. ***Αριθμητική τιμή πολυωνύμου***

Ας δούμε το πολυώνυμο: $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$

Όπως είπαμε, το x που εμφανίζεται είναι η μεταβλητή του πολυωνύμου. Δηλαδή, είναι ένα σύμβολο που μπαίνει στη θέση ενός άγνωστου αριθμού, που μπορεί να αλλάζει.

Τι θα γινόταν, αν στη θέση της μεταβλητής βάλουμε ένα συγκεκριμένο αριθμό;
Ας θεωρήσουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι το 3. Αν στη θέση του x βάλω τον αριθμό 3, τότε μπορώ να γράψω

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 2 \cdot 3 - 3$$

Αν συνεχίσω κάνοντας τις πράξεις, τότε

$P(3) =$ | |

Δηλαδή, αν στο πολυώνυμο αντικαταστήσω το x με ένα συγκεκριμένο αριθμό και κάνω τις πράξεις, προκύπτει ένας νέος αριθμός.

Ο αριθμός 48 που προέκυψε από την αντικατάσταση του x με το 3, λέγεται **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ** του P(x) για x=3.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι στη θέση του x βάζουμε τον αριθμό -3. Τότε

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3$$

$=$

Ο αριθμός 54 που προέκυψε από την αντικατάσταση του x με το -3, λέγεται **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ** του P(x) για $x = -3$.

Δηλαδή, αν σε ένα πολυώνυμο αντικαταστήσω το x με κάποιον αριθμό α και κάνω τις πράξεις, προκύπτει ένας νέος αριθμός, που λέγεται **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ** (ή απλά **ΤΙΜΗ**) **του πολυωνύμου για x = α.**

◈***ΠΡΟΣΟΧΗ!!!*** *Όταν αντικαθιστούμε το x με κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, θυμόμαστε ότι πρέπει να βάλουμε* ***και το σύμβολο του πολλαπλασιασμού****, όπου εννοείται.*

◈***ΠΡΟΣΟΧΗ!!!*** *Όταν αντικαθιστούμε το x με κάποιον* ***αρνητικό αριθμό****, θυμόμαστε να βάλουμε τον αριθμό μαζί με το πρόσημό του* ***σε παρένθεση****.*

• Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, βρίσκοντας τις τιμές του P(x) για τον αριθμό που δίνεται κάθε φορά στην πρώτη στήλη, όπου $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$.

για $x = 1$	$P(1) =$	Η τιμή του P(x) για $x = 1$ είναι το……
για $x = 2$	$P(2) =$	Η τιμή του P(x) για $x = 2$ είναι το……
για $x = 0$	$P(0) =$	Η τιμή του P(x) για $x = 0$ είναι το……
για $x = -1$	$P(-1) =$	Η τιμή του P(x) για $x = -1$ είναι το…...
για $x = -2$	$P(-2) =$	Η τιμή του P(x) για $x = -2$ είναι το…..
για $x = -3$	$P(-3) =$	Η τιμή του P(x) για $x = -3$ είναι το….

Αν η τιμή που θα προκύψει από την αντικατάσταση τύχει να είναι το 0, τότε ο αριθμός που αντικατέστησε το x στο πολυώνυμο λέγεται **ΡΙΖΑ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ.**

◈***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>*** *Η **ρίζα ενός πολυωνύμου** είναι κάτι το τελείως διαφορετικό από την **τετραγωνική ρίζα** ενός αριθμού!!!*

Μπορείτε να βρείτε μια ρίζα του παραπάνω πολυωνύμου P(x);

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν σε ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$,

αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ,

τότε ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει,

δηλαδή ο $P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$,

λέγεται **<u>αριθμητική τιμή</u>** (ή απλά **<u>τιμή</u>**) **του πολυωνύμου για x = ρ.**

• Υπάρχει στον ορισμό κάποια λεπτομέρεια που πρέπει να σημειώσετε;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν η τιμή ενός πολυωνύμου P(x), για κάποιον αριθμό ρ γίνεται 0,

δηλ. $P(\rho) = 0$,

τότε το ρ θα λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου.**

• Υπάρχει στον ορισμό κάποια λεπτομέρεια που πρέπει να σημειώσετε;

ΘΥΜΑΜΑΙ

(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ) ΤΙΜΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	
ΡΙΖΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$

• Είναι ο αριθμός 1 ρίζα του P(x);

Αν καταφέρατε να απαντήσετε ΜΠΡΑΒΟ!!! Συνεχίστε στο Παράδειγμα 2.

Αν δεν τα καταφέρατε, διαβάστε τις παρακάτω οδηγίες και ξαναπροσπαθήστε.

❖ *Για να είναι το 1 ρίζα του P(x), πρέπει όταν το βάζουμε στη θέση του x να έχουμε P(1)=0. Αντικαθιστούμε λοιπόν το x με το 1.*

❖ *Αν πράγματι το αποτέλεσμα από τις πράξεις είναι 0, δηλαδή $P(1) = 0$, τότε απαντάμε «ΝΑΙ, το 1 είναι ρίζα του P(x)».*

❖ *Αν το αποτέλεσμα είναι ένας οποιοσδήποτε άλλος αριθμός, τότε απαντάμε «ΟΧΙ, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x)».*

• Τώρα για το ίδιο πολυώνυμο, το $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$, εξετάστε αν ο αριθμός -1 είναι ρίζα του.

• Για το ίδιο πολυώνυμο, εξετάστε αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του.

4. *(Αριθμητική) τιμή πολυωνύμου – Ειδικές περιπτώσεις*

Ας θεωρήσουμε τώρα το πολυώνυμο $Q(x) = 5$

- Θυμάστε πως λέγονται αυτού του είδους τα πολυώνυμα;
- Θυμάστε ποιος είναι ο βαθμός των πολυωνύμων αυτού του είδους;
- Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα για το $Q(x) = 5$

$Q(1) =$	$Q(0) =$	$Q(-2) =$
$Q(2) =$	$Q(-1) =$	$Q(-3) =$

- Τι παρατηρείτε;

- Για ποιο λόγο ονομάζονται έτσι αυτού του είδους τα πολυώνυμα;

- Μπορείτε να βρείτε μια ρίζα του $Q(x) = 5$;
- Μπορείτε να βρείτε μια ρίζα του $F(x) = 5000$;
- Πόσες είναι οι ρίζες των **σταθερών μη μηδενικών** πολυωνύμων;

*Υπάρχει ένα μόνο σταθερό πολυώνυμο, του οποίου **όλοι οι αριθμοί είναι ρίζες**.*

Δηλαδή $P(\rho) = 0$, όποιος αριθμός και αν είναι το ρ, που θα μπει στη θέση του x.

Αυτό το πολυώνυμο είναι το ______ πολυώνυμο, δηλαδή το $P(x) =$ ___

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΡΙΖΕΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	
ΡΙΖΕΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	

5. ***Παράμετροι***

Η **<u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ</u>** είναι ένα σύμβολο που χρησιμοποιούμε αντί για κάποιον αριθμό, όταν δεν τον γνωρίζουμε, όπως και η μεταβλητή. Η διαφορά είναι ότι οι παράμετροι θεωρούμε ότι δε μεταβάλλονται, δηλαδή, πίσω τους θεωρούμε ότι κρύβεται ένας συγκεκριμένος αριθμός κάθε φορά. Συνήθως, οι παράμετροι είναι και αυτές μικρά γράμματα.

Πώς θα αναγνωρίζουμε ποιο σύμβολο είναι μεταβλητή και ποιο παράμετρος, σε κάθε περίπτωση, όμως; Είναι δύσκολο να πούμε ένα γενικό κανόνα, γιατί ανάλογα με το τι θέλουμε να κάνουμε, το ίδιο σύμβολο μπορεί να το χρησιμοποιούμε για μεταβλητή ή για παράμετρο.

Σε κάποιες περιπτώσεις όμως, μπορούμε εύκολα να ξεχωρίζουμε τι είναι το κάθε σύμβολο που συναντάμε.

Για παράδειγμα, **στα πολυώνυμα** η ονομασία του κάθε πολυωνύμου δείχνει ποια είναι η μεταβλητή. Έτσι ξέρουμε πως οποιοδήποτε άλλο σύμβολο εμφανιστεί θα είναι παράμετρος.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Να βρεθεί ο βαθμός και ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x) = 5x + \lambda^2$.

Ξέρουμε ότι βαθμός του πολυωνύμου είναι η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεταβλητή.

Εδώ όμως υπάρχουν δύο διαφορετικά σύμβολα: το x και το λ.

Ποιο είναι η μεταβλητή;

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το πολυώνυμο λέγεται P(x). Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή είναι το x.

Άρα ο βαθμός του πολυωνύμου είναι η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται.

Δηλαδή, βαθμός του $P(x) = 5x + \lambda^2$ είναι το 1.

Ο σταθερός όρος του $P(x)$ είναι αυτός που δεν περιέχει τη μεταβλητή.

Δηλαδή, σταθερός όρος του $P(x) = 5x + \lambda^2$ είναι το λ^2.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Για το πολυώνυμο $P(\lambda) = 5x + \lambda^2$, να βρεθούν:

α. ο βαθμός

β. ο σταθερός όρος

γ. ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου και

δ. ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου

Εδώ η ονομασία του πολυωνύμου μας δείχνει ότι μεταβλητή είναι το $\square$

Η μεγαλύτερη δύναμη της μεταβλητής που εμφανίζεται είναι ο αριθμός $\square$

α. Άρα ο βαθμός του $P(\lambda) = 5x + \lambda^2$ είναι το $\square$

β. Ο σταθερός όρος του $P(\lambda) = 5x + \lambda^2$ είναι το $\square$

γ. Ο πρωτοβάθμιος όρος του $P(\lambda) = 5x + \lambda^2$ είναι το $\square$

Άρα ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου είναι το $\square$

δ. Ο δευτεροβάθμιος όρος του $P(\lambda) = 5x + \lambda^2$ είναι το $\square$

Άρα ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι το $\square$

✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, όπως στο προηγούμενο φύλλο εργασίας.

ΘΥΜΑΜΑΙ

		☺ ☹
Κανονική μορφή πολυωνύμου		
Μεταβλητή		
Γράμματα που χρησιμοποιούμε για μεταβλητές		
Γράμματα που χρησιμοποιούμε για το όνομα πολυωνύμων		
Πώς συμβολίζουμε τα πολυώνυμα;		
Τιμή πολυωνύμου		
Ρίζα πολυωνύμου		
Ρίζες σταθερών, μη μηδενικών πολυωνύμων		
Ρίζες του μηδενικού πολυωνύμου		
Παράμετροι στα πολυώνυμα		

2) «Μεταφράστε σε μαθηματικά» την παρακάτω κατάσταση:

«Οι ασκήσεις που λύνει κάθε μέρα ένας μαθητής στην Άλγεβρα είναι 2 περισσότερες από όσες λύνει στη Γεωμετρία. Ο ίδιος μαθητής λύνει κάθε μέρα στη Γεωμετρία 1 άσκηση περισσότερη από όσες λύνει στη Φυσική.»

3) Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας, όπως στο παράδειγμα της πρώτης γραμμής. (ασκ. 5[Α], § 2.1.)

Πολυώνυμο	**Βαθμός**	**Τιμή για x=0**	**Τιμή για x=1**	**Τιμή για x=-1**	**Τιμή για x=2**	**Τιμή για x=-2**	**Ρίζες που βρήκα μέχρι τώρα**
$F(x) = x^2 - 1$	2	-1	0	0	3	3	1, -1
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$							
$Q(x) = -x^4 + 1$							
$S(x) = 10.000$							
$R(x) = 0$							

4) Βάλτε σε κύκλο όποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x;
(Δηλαδή, με μεταβλητή το x) (ασκ. 1[Α], §2.1.)

$1 - x^3$ $\qquad$ $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$

$x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $x^4 - 2x^{\frac{1}{3}} + 4x - 1$

5) Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 - 3\mu x^2 + 2\lambda x + k$

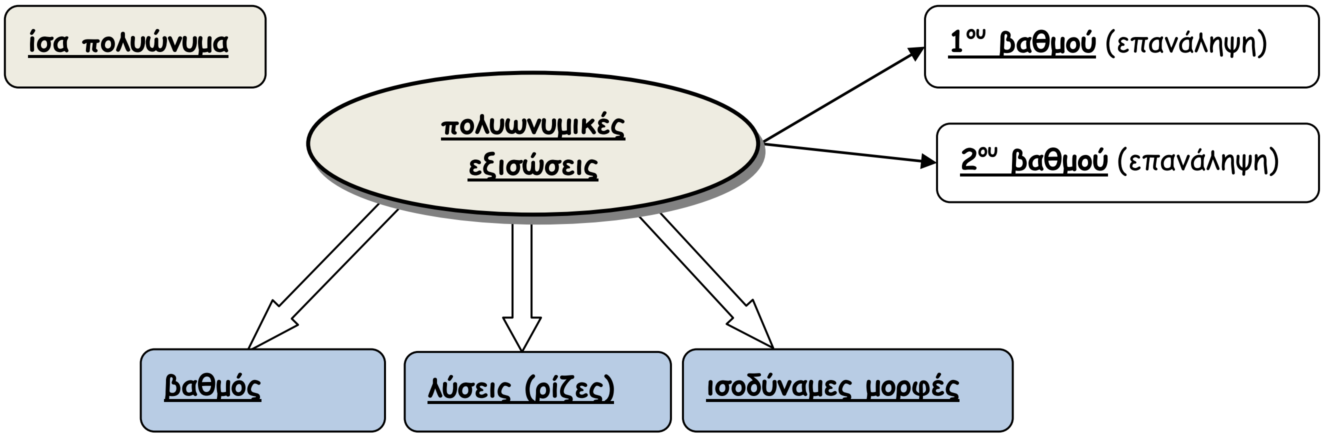
- Ποια είναι η μεταβλητή και ποιες οι παράμετροι του πολυωνύμου;
- Τι πρέπει να ισχύει για να είναι το $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο;
- Τι πρέπει να ισχύει για να είναι το $P(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο;

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 3</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Ίσα πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>



1. *<u>Ίσα πολυώνυμα</u>*

Αν **ο βαθμός** δύο πολυωνύμων είναι ο ίδιος **και όλοι τους οι συντελεστές** είναι οι ίδιοι, τότε αυτά τα πολυώνυμα δε διαφέρουν σε τίποτα!!! εκτός ίσως από τα σύμβολα που διαλέξαμε. Αυτά τα πολυώνυμα τα λέμε **<u>ΙΣΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ</u>.**

- Μπορείτε να αναφέρετε δύο πολυώνυμα με τον ίδιο βαθμό και συντελεστές τους αριθμούς 4, 12, 0, 1, τα οποία όμως να μην είναι ίσα;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο πολυώνυμα

$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}$ και $\boldsymbol{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + \beta x + \beta_0}$

Θα λέγονται **ίσα** αν

$\mu = \nu$ *(δηλαδή έχουν τον ίδιο βαθμό)* και

$\boldsymbol{\alpha_\kappa = \beta_\kappa}$ για όλα τα κ, *(δηλαδή όλοι οι **αντίστοιχοι** συντελεστές είναι ίσοι)*

- Υπάρχει στον ορισμό κάποια λεπτομέρεια που πρέπει να σημειώσετε;

Παράδειγμα

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = \mu x^2 + 4x - \lambda^2$ και $Q(x) = \lambda x - 16$. Τι πρέπει να συμβαίνει για να είναι ίσα αυτά τα δύο πολυώνυμα;

Η μεταβλητή του P είναι το: ☐ Η μεταβλητή του Q είναι το: ☐

Άρα οι παράμετροι είναι τα: ☐

Ο ορισμός λέει ότι για να είναι ίσα τα πολυώνυμα πρέπει:

(i)
(ii)

❖*Συνήθως ελέγχω **πρώτα το (ii),** γιατί διαφορετικά μπορεί να καταλήξω σε κάτι πολύ πιο σύνθετο!!!*

Για να μην μπερδευτούμε όταν ελέγχουμε το (ii) μπορούμε να φτιάξουμε ένα πίνακα και να γράψουμε τα δύο πολυώνυμα το ένα κάτω από το άλλο, προσέχοντας να μπούνε στην ίδια στήλη οι ίδιες δυνάμεις της μεταβλητής.

	x^2	x	--
$P(x)$			
$Q(x)$			

Άρα, για να είναι ίσοι οι αντίστοιχοι συντελεστές και να ισχύει το (ii) πρέπει:

☐ και ☐ και ☐

Τελικά, για να ισχύει το (ii) πρέπει:

$\mu =$ ☐ και $\lambda =$ ☐

Αν δεν ισχύει το (ii), *τότε τα πολυώνυμα* ***δεν είναι ίσα*** *σίγουρα. Άρα* ***δε χρειάζεται να ελέγξω και το (i).***

Αν ισχύει το (ii), είναι εύκολο να ελέγξω αν ισχύει και το (i).

Αν ισχύει το (ii), δηλαδή αν $\mu =$ ☐ και $\lambda =$ ☐ τότε ισχύει και το (i);

Τελικά, τα πολυώνυμα θα είναι ίσα, μόνο αν ☐

⌘ΘΥΜΑΜΑΙ

ΙΣΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ	

2. ***Πολυωνυμικές εξισώσεις (τι είναι)***

Θυμόμαστε ότι **ΕΞΙΣΩΣΗ** είναι μια ισότητα μαθηματικών παραστάσεων, που μπορεί να περιέχει και άγνωστες ποσότητες. Συνήθως, όταν μας δίνεται μια εξίσωση, στόχος μας είναι να βρούμε αυτές τις άγνωστες ποσότητες, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση.

Ένας από τους λόγους για τους οποίους εξετάζουμε τα πολυώνυμα είναι για να καταφέρουμε να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις.

Οι **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ** είναι ειδικές μορφές εξισώσεων. Είναι οι εξισώσεις της μορφής:

Πολυώνυμο = 0

Παράδειγμα

- Οι παρακάτω είναι πολυωνυμικές εξισώσεις. Μπορείτε να βρείτε το αντίστοιχο πολυώνυμο;

$5x + 7 = 0$	P(x)=
$3x^2 + 8x + 4 = 0$	Q(x)=
$3x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = 0$	S(x)=

- Μπορείτε να κατασκευάσετε κι εσείς μια πολυωνυμική εξίσωση;

- Ποιο είναι το αντίστοιχο πολυώνυμο;

3. ***Βαθμός πολυωνυμικής εξίσωσης***

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του πολυωνύμου που υπάρχει κάθε φορά στο πρώτο μέλος, αλλάζουν και τα χαρακτηριστικά της αντίστοιχης πολυωνυμικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, αν το πολυώνυμο του πρώτου μέλους έχει βαθμό 1, τότε θα λέμε ότι και η αντίστοιχη εξίσωση έχει βαθμό 1.

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε την εξίσωση $5x + 7 = 0$.

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι το πολυώνυμο $P(x) = 5x + 7$.

Άρα η εξίσωση είναι πολυωνυμική.

Αυτό το πολυώνυμο είναι βαθμού 1.

Άρα και η εξίσωση $5x + 7 = 0$ είναι βαθμού 1.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το βαθμό οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης. Ο **ΒΑΘΜΟΣ** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι ο ίδιος με το βαθμό του πολυωνύμου του πρώτου μέλους.

- Βρείτε τον βαθμό (του πολυωνύμου και της εξίσωσης) στις παρακάτω περιπτώσεις:

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΟΣ
$3x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = 0$		
$3x^2 + 8x + 4 = 0$		
$-15x^6 - 2x^2 - 5x = 0$		
$-x = 0$		

4. ***Λύσεις (ρίζες) πολυωνυμικής εξίσωσης***

Όταν λύνουμε μια εξίσωση, ψάχνουμε να βρούμε τους αριθμούς, που αν αντικαταστήσουν τα σύμβολα που υπάρχουν μέσα της, τότε η ισότητα που θα προκύψει ισχύει.

Παράδειγμα

θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $2x = 10$.

Αν βάλουμε το $\boxed{\quad}$ στη θέση του x, προκύπτει η ισότητα $\boxed{\qquad}$ η οποία ισχύει.

Υπάρχει άλλος τέτοιος αριθμός; $\boxed{\qquad}$

Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης $2x = 10$ είναι το $\boxed{\quad}$

Ακριβώς το ίδιο κάνουμε και όταν λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις γενικότερα. Δηλαδή, ψάχνουμε να βρούμε τους αριθμούς που αν αντικαταστήσουν τη μεταβλητή του πολυωνύμου στο πρώτο μέρος, τότε η ισότητα που προκύπτει ισχύει.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το πολυώνυμο: $P(x) = 2x - 4$

Η αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση είναι η: $P(x) = 0$

Δηλαδή, η: $2x - 4 = 0$

Μπορείτε να βρείτε μια λύση της αντίστοιχης πολυωνυμικής εξίσωσης $2x - 4 = 0$; (δηλαδή, ένα αριθμό που αν μπει στη θέση του x, να προκύπτει μια ισότητα που ισχύει) $\boxed{\quad}$

Άρα ο αριθμός $\boxed{\quad}$ είναι λύση της εξίσωσης $2x - 4 = 0$, δηλαδή της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Μπορείτε να βρείτε μια ρίζα του πολυωνύμου P(x); $\boxed{\quad}$

(Δοκιμάστε να αντικαταστήσετε το x με διάφορους αριθμούς, μέχρι να προκύψει η τιμή 0)

Τελικά, ο αριθμός $\boxed{\quad}$ είναι ρίζα του $P(x)$ <u>**και ταυτόχρονα**</u> λύση της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 5x - 15$.

Μπορείτε να βρείτε μια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; $\boxed{}$

Η αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση είναι η $P(x) = 0$, δηλαδή η : $\boxed{}$

Μία λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\boxed{}$

Δηλαδή, γι αυτόν τον αριθμό $P(\boxed{}) = 0$.

Επομένως, ο αριθμός $\boxed{}$ είναι ταυτόχρονα ρίζα του $P(x)$ και λύση της $P(x) = 0$.

❖*Δηλαδή, όταν η εξίσωση είναι πολυωνυμική, τότε οι **ΛΥΣΕΙΣ** της είναι οι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνύμου και μπορούμε, αντί για λύσεις της πολυωνυμικής εξίσωσης να λέμε **ΡΙΖΕΣ** της πολυωνυμικής εξίσωσης, εννοώντας ακριβώς το ίδιο.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,\ \ \alpha_\nu \neq 0}$$

• Υπάρχει στον ορισμό κάποια λεπτομέρεια που πρέπει να σημειώσετε;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ρίζα (ή λύση) της πολυωνυμικής εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,}$

ονομάζεται κάθε ρίζα του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(x)} = \boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,}$

δηλαδή κάθε αριθμός ρ, για τον οποίο ισχύει $\boldsymbol{P(\rho) = 0}$

• Υπάρχει στον ορισμό κάποια λεπτομέρεια που δεν είχατε προσέξει μέχρι τώρα;

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	
ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	

5. ***Ισοδύναμες μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων***

Μπορεί κάποια εξίσωση να μην είναι στη μορφή ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ = 0, αλλά να μπορούμε εύκολα να τη μετατρέψουμε σε αυτή τη μορφή.

Παραδείγματα

Η εξίσωση $5x = -7$ μπορεί να μετατραπεί στη μορφή $5x + 7 = 0$

Η εξίσωση $5x - 3x = 10$ μπορεί να μετατραπεί στη μορφή $2x - 10 = 0$

Η εξίσωση $2x - 4 = -x + 3$ μπορεί να μετατραπεί στη μορφή $3x - 7 = 0$

Η εξίσωση $2x \cdot 5x - 2 = -x + 3$ μπορεί να μετατραπεί στη μορφή $10x^2 + x - 5 = 0$

Μετατρέψτε τις επόμενες εξισώσεις στη μορφή ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ=0

$2x \cdot x - 2 = 4x$	
$-2 = 3x^3 \cdot 4x^6 - x + 3$	
$5x - 2 = 2x^2 - 2$	
$x^2 \cdot 3x + x - 2 = -x$	

Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις, η μορφή στην οποία τις μετατρέψαμε είναι **<u>ισοδύναμη</u>** με την αρχική!!!

<u>Υπενθύμιση:</u>

Δύο εξισώσεις λέγονται **<u>ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ</u>**, όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

<u>Παράδειγμα 1</u>

- Η εξίσωση $x = 8 - 3$ έχει λύση τον αριθμό $\boxed{}$ Έχει άλλη λύση; $\boxed{}$

- Η εξίσωση $2x = 10$ έχει λύση τον αριθμό $\boxed{}$ Έχει άλλη λύση; $\boxed{}$

Αφού και οι δύο εξισώσεις έχουν για λύση μόνο τον αριθμό $\boxed{}$, θα είναι ισοδύναμες.

❖ *Για να ελέγξουμε αν μια εξίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ=0*

- □ *μεταφέρουμε όλους τους όρους που εμφανίζονται στο πρώτο μέλος της ισότητας (έτσι στο δεύτερο μέλος μένει μόνο το 0)*
- □ *κάνουμε τις πράξεις (με αριθμούς αλλά και σύμβολα)*
- □ *Αν το πρώτο μέλος που θα προκύψει μετά τις πράξεις είναι πολυώνυμο, μπορούμε αν θέλουμε, **να βάλουμε τις δυνάμεις του x στη σειρά**, από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη για να είναι το πολυώνυμο στην κανονική μορφή.*

Στη συνέχεια, όταν συναντάμε ***«μια εξίσωση που μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ=0»,*** θα τη λέμε και αυτή πολυωνυμική εξίσωση, για συντομία.

6. ***Πολυωνυμικές εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού (επανάληψη)***

Σκεφτείτε ένα πολυώνυμο βαθμού 1: P(x)=

Γράψτε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση:

Η εξίσωση που γράψατε είναι βαθμού :

Μπορείτε να λύσετε την παραπάνω εξίσωση;

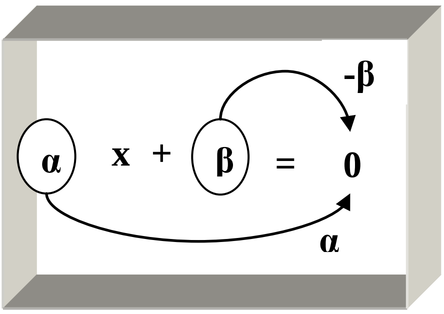
Η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός:

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού 1 είναι οι εξισώσεις της μορφής $P(x) = 0$, στις οποίες το $P(x)$ είναι βαθμού 1.

Επομένως, οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού 1, είναι οι γνωστές μας εξισώσεις της μορφής: $\boxed{\alpha x + \beta = 0,\ \ \alpha \neq 0}$

Θυμόμαστε ότι αυτές οι εξισώσεις έχουν πάντα μια λύση, την: $\boxed{x = \frac{-\beta}{\alpha}}$

Ή σχηματικά:



- Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις, αφού πρώτα τις μετατρέψετε σε πολυωνυμικές βαθμού 1.

$3x + 2 = -5x - 50$
$\frac{1}{2}x - (3x - x) = 12$

7. ***Πολυωνυμικές εξισώσεις 2ου βαθμού (επανάληψη)***

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού 2 είναι οι εξισώσεις της μορφής $P(x) = 0$, στις οποίες το $P(x)$ είναι βαθμού 2. Άρα, οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού 2, είναι οι γνωστές μας εξισώσεις της μορφής:

$$\boxed{ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0}$$

❖ *Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα μπορούμε να λύσουμε* ***οποιαδήποτε*** *πολυωνυμική εξίσωση βαθμού 2.*

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$		
Πρόσημο του Δ	**Πλήθος πραγματικών λύσεων (ριζών του τριωνύμου)**	**Λύσεις (ρίζες του τριωνύμου)**
$\boldsymbol{\Delta} > 0$	**2 (Δύο πραγματικές ρίζες άνισες)**	$\boldsymbol{x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	**1 (Μια διπλή πραγματική ρίζα)**	$\boldsymbol{x = -\frac{\beta}{2\alpha}}$
$\boldsymbol{\Delta} < 0$	**0 (Καμία πραγματική ρίζα)**	---

◈ *Τα πολυώνυμα βαθμού 2, λέγονται αλλιώς και* ***<u>ΤΡΙΩΝΥΜΑ</u>***.

- Λύστε την παρακάτω εξίσωση βαθμού 2, ακολουθώντας τις οδηγίες και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο πίνακα για τους τύπους που δε θυμάστε.

Αρχική εξίσωση: $x^2 - 3x = \frac{3}{4}x + 1$				
Τη γράφω στην κανονική μορφή:				
α=	β=	γ=	Δ=	Πλήθος λύσεων (ριζών):
Υπολογίζω τις λύσεις (ρίζες):				
Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:				
Επαλήθευση:				

- Τώρα σκεφτείτε μια δική σας πολυωνυμική εξίσωση βαθμού 2 και λύστε τη!!!

<table>
<tr><td colspan="5">Αρχική εξίσωση:</td></tr>
<tr><td>α=</td><td>β=</td><td>γ=</td><td>Δ=</td><td>Πλήθος λύσεων (ριζών):</td></tr>
<tr><td colspan="5">Υπολογίζω τις λύσεις (ρίζες):

</td></tr>
<tr><td colspan="5">Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Επαλήθευση:</td></tr>
</table>

◈*Σε αυτό το κεφάλαιο θα μάθουμε να λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις και μεγαλύτερου βαθμού από 2. Όμως,* ***δε θα μάθουμε να λύνουμε όλα τα είδη πολυωνυμικών εξισώσεων!*** *Δεν υπάρχει τύπος για όλους τους βαθμούς πολυωνυμικών εξισώσεων. Άλλωστε, έχει αποδειχτεί ότι* ***τέτοιος τύπος δεν πρόκειται να βρεθεί ποτέ!!!***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

☺ ☹

ΘΥΜΑΜΑΙ

ίσα πολυώνυμα		
πολυωνυμικές εξισώσεις (τι είναι)		
βαθμός πολυωνυμικής εξίσωσης		
λύσεις (ρίζες) πολυωνυμικής εξίσωσης		
ισοδύναμες μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων		
πολυωνυμικές εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού		
πολυωνυμικές εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού		

2) Να λυθούν οι παρακάτω πολυωνυμικές εξισώσεις.

i. $3x - 15 = 1 + x$

ii. $\frac{x-2}{3} = \frac{2x-1}{7}$

iii. $\frac{x+6}{4} - \frac{x-8}{6} = 2x - 1$

iv. $4 = -8x - 3x^2$

v. $2x^2 + 50 = -20x$

vi. $x^2 - 6x + 8 = -2$

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 4</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Στρατηγική για τη λύση ασκήσεων</u>

Πολλές από τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου έχουν παρόμοια μορφή: Μας δίνονται κάποια δεδομένα και μας ζητείται να βρούμε σε ποιες περιπτώσεις ισχύει μια συγκεκριμένη σχέση, αν κάνουμε κάποιες επιπλέον υποθέσεις.

Σε αυτές τις ασκήσεις πολλές φορές είναι δύσκολο να διακρίνουμε τα δεδομένα και τις υποθέσεις από τα ζητούμενα.

Επίσης, επειδή οι σχέσεις που εμφανίζονται είναι πολλές, όσο λύνουμε την άσκηση μπορεί να μπερδευτούμε και να ξεχάσουμε σε ποιο σημείο βρισκόμαστε και ποιος είναι ο τελικός μας στόχος.

Σε αυτό το φύλλο εργασίας θα δούμε μια στρατηγική για να λύνουμε τέτοιου είδους ασκήσεις. Όταν την εφαρμόζουμε είναι πιο εύκολο να θυμόμαστε κάθε φορά τι γνωρίζουμε και ποιος είναι ο στόχος μας. Επίσης, μας βοηθάει να θυμηθούμε σε ποιο σημείο της άσκησης βρισκόμαστε, σε περίπτωση που μπερδευτούμε.

<u>Παράδειγμα 1</u> (παράδειγμα 2, §2.2.)

Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + 3x + a^2 - 1$ για $x = -1$ είναι ίση με 1;

Λύση

ΠΡΙΝ: Πριν αρχίσουμε να λύνουμε την άσκηση πρέπει να την κατανοήσουμε και να σιγουρευτούμε για το ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα.

1) **Υπογραμμίζουμε στην εκφώνηση όσες φράσεις περιέχουν λέξεις όπως «ποιος, πότε, ελέγξτε αν, βρείτε» κτλ.** Αυτά θα είναι τα ζητούμενα της άσκησης.

2) Υπογραμμίζουμε τις σχέσεις και τους αριθμούς που εμφανίζονται. Αυτά είναι τα δεδομένα της άσκησης.

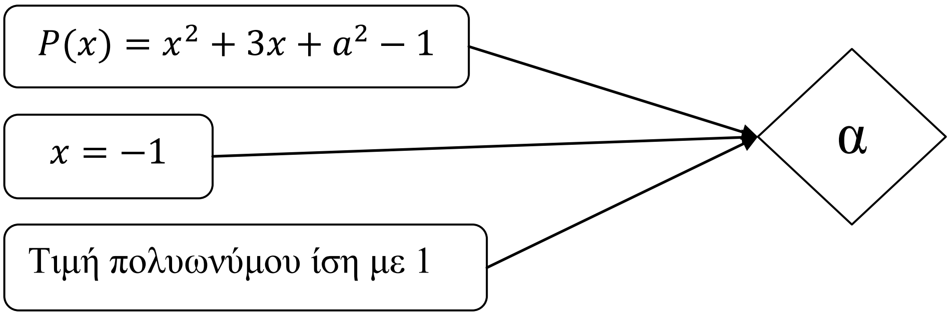
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μετά την υπογράμμιση θα έχουμε το εξής:

«Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + 3x + a^2 - 1$ *για* $x = -1$ *είναι ίση με 1;»*

3) Προσπαθούμε να καταλάβουμε σε τι αντιστοιχεί ο κάθε αριθμός, ψάχνοντας τις λέξεις του προβλήματος. Θυμόμαστε τους ορισμούς και τα θεωρήματα για τις λέξεις που εμφανίζονται.

Για παράδειγμα, «ίση με 1», εννοείται ότι είναι «η τιμή του πολυωνύμου». Θυμόμαστε τον ορισμό για την τιμή πολυωνύμου: είναι η τιμή που προκύπτει μετά την αντικατάσταση του x από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.

4) Συμπληρώνουμε ένα σχήμα με όσα υπογραμμίσαμε, όπως το παρακάτω:



ΛΥΣΗ:

1) Διαλέγουμε δύο από τα δεδομένα. Τα διαγράφουμε στο σχήμα μας.

Τι συμβαίνει αν ισχύουν και τα δύο; Ονομάζουμε αυτό που προκύπτει (σχέση 1).

Στο παράδειγμα αν διαλέξουμε τα: $P(x) = x^2 + 3x + a^2 - 1$ και $x = -1$.

Αντικαθιστούμε το x με το ίσο του, δηλαδή με το -1.

Προκύπτει το εξής:

P($\boxed{}$) = $\boxed{}$

Κάνουμε τις πράξεις, οπότε:

P($\boxed{}$) = $\boxed{}$ (σχέση 1)

2) Τώρα θεωρούμε ότι ισχύει και το τρίτο δεδομένο. Το διαγράφουμε κι αυτό στο σχήμα μας.

Τι συμβαίνει αν ισχύει το τρίτο δεδομένο ταυτόχρονα με τη (σχέση 1);

Στο παράδειγμα, το τρίτο δεδομένο είναι «Τιμή πολυωνύμου ίση με 1». Για να ισχύουν ταυτόχρονα το τρίτο δεδομένο και η (σχέση 1) πρέπει:

$\boxed{}$ = $\boxed{1}$

3) Κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε στην τελευταία σχέση και προκύπτει μια εξίσωση με άγνωστο αυτό που ψάχναμε αρχικά.

Στο παράδειγμα, προκύπτει η εξίσωση:

$\boxed{ = }$

3) Λύνουμε την εξίσωση για να βρούμε το αρχικό ζητούμενο του προβλήματος. Αν η εξίσωση που προκύπτει δεν έχει λύση, τότε λέμε ότι αυτό που μας ζητάει η άσκηση, δεν μπορεί να συμβαίνει.

Στο παράδειγμα:

Άρα α= ή α=

<u>ΜΕΤΑ:</u>

1) Ελέγχουμε. Αντικαθιστούμε τους αριθμούς που βρήκαμε για τον άγνωστο, σε όλες τις σχέσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημα και κάνουμε πράξεις. Ισχύουν όλες οι ισότητες;

Στο παράδειγμα:

Για $\alpha = 2$, προκύπτουν οι σχέσεις:

Για $\alpha = -2$, προκύπτουν οι σχέσεις:

Στρατηγική επίλυσης Ασκήσεων

Το παρακάτω σχήμα, μπορείτε να το έχετε σε φωτοτυπία κάθε φορά που λύνετε μια παρόμοια άσκηση και να σημειώνετε στα κενά κουτάκια τα βήματα που ολοκληρώσατε. Θα σας βοηθήσει να θυμάστε τι έχετε ήδη κάνει και τι σας μένει ακόμα.

<table>
<tr><td rowspan="5">ΠΡΙΝ</td><td rowspan="3">1)Υπογραμμίζουμε</td><td>• τις φράσεις με λέξεις όπως «ποιος, πότε»</td><td></td></tr>
<tr><td>• τις σχέσεις που εμφανίζονται</td><td></td></tr>
<tr><td>• τους αριθμούς που εμφανίζονται.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Θυμόμαστε τους ορισμούς για τις λέξεις που εμφανίζονται και αν μπορούμε «μεταφράζουμε σε μαθηματικά» τις αντίστοιχες φράσεις.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Φτιάχνουμε ένα σχήμα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">ΛΥΣΗ</td><td colspan="2">1) Διαλέγουμε δύο δεδομένα και ελέγχουμε τι θα συμβεί αν ισχύουν ταυτόχρονα και τα δύο.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Τα διαγράφουμε στο σχήμα και ονομάζουμε αυτό που θα προκύψει (σχέση 1).</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Διαλέγουμε άλλο ένα από τα δεδομένα, το διαγράφουμε και ελέγχουμε τι θα συμβεί αν ισχύει ταυτόχρονα με τη (σχέση 1).</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">4) Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να χρησιμοποιήσουμε όλα τα δεδομένα.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">5) Καταλήγουμε σε εξισώσεις με αγνώστους τα ζητούμενα του προβλήματος και τις λύνουμε.</td><td></td></tr>
<tr><td>ΜΕΤΑ</td><td colspan="2">Αντικαθιστούμε τους αριθμούς που βρήκαμε για τα ζητούμενα σε όλες τις σχέσεις που εμφανίστηκαν και ελέγχουμε αν αυτές ισχύουν.</td><td></td></tr>
</table>

<u>Παράδειγμα 2</u>

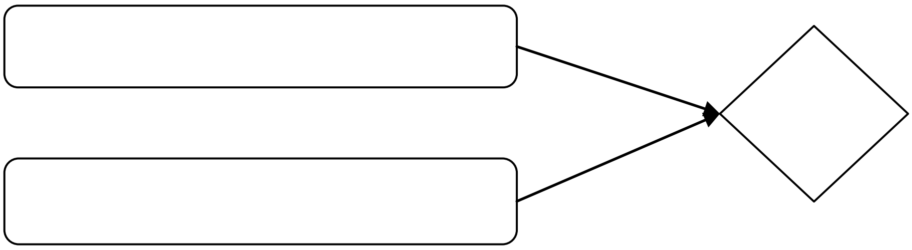
Να βρείτε για ποιες τιμές του k, το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k$. (ασκ. 6^{A}, §2.1)

<u>ΠΡΙΝ:</u> 1) <u>Υπογραμμίστε</u> φράσεις, σχέσεις και αριθμούς.

2) Θυμηθείτε τον <u>ορισμό</u> της λέξης «ρίζα» και μεταφράστε σε μαθηματικά τη φράση *«το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$»*

2) Συμπληρώστε το παρακάτω σχήμα



<u>ΛΥΣΗ:</u> 1) Τι θα συμβεί αν ισχύουν <u>ταυτόχρονα</u> και τα δύο δεδομένα; Διαγράψτε τα. (Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το $P(2)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $P(x)$)

2) Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 1)

3) Η (σχέση 1) είναι εξίσωση με άγνωστο το k. Λύστε τη και βρείτε το k.

<u>ΜΕΤΑ:</u> Αντικαταστήστε με τον αριθμό που βρήκατε για το k και ελέγξτε.

<u>Παράδειγμα 3</u> (ασκ. 2^{B} , §2.1.)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + ax^2 + \beta\chi - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3.

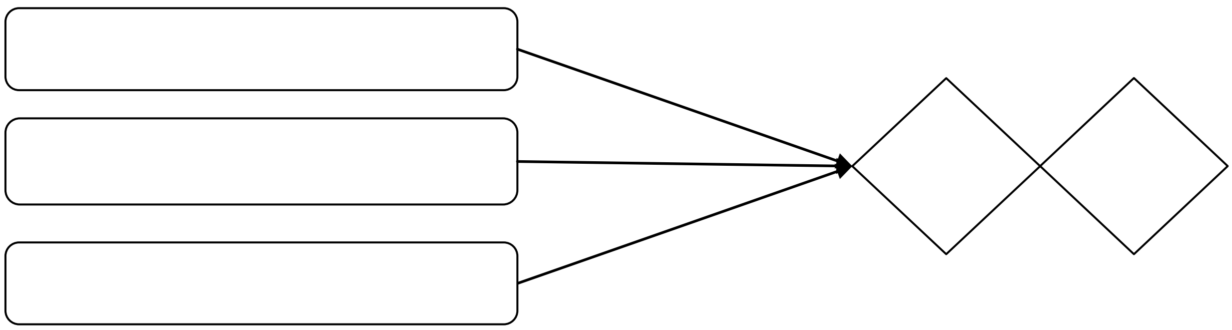
<u>ΠΡΙΝ:</u> 1) <u>Υπογραμμίστε</u> φράσεις, σχέσεις και αριθμούς.

2) Θυμηθείτε τον <u>ορισμό</u> της λέξης «ρίζα» και μεταφράστε σε μαθηματικά τις φράσεις:

«το -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$»

«το 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$»

3) Συμπληρώστε το παρακάτω σχήμα



<u>ΛΥΣΗ:</u> 1) Τι θα συμβεί αν ισχύουν <u>ταυτόχρονα δύο</u> από τα δεδομένα; Διαλέξτε δύο και διαγράψτε τα.

(Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το $P(-2)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $P(x)$. Μετά, στην εξίσωση που προκύπτει μεταφέρετε στο πρώτο μέλος μόνο τους όρους που περιέχουν το α και στο δεύτερο όλους τους υπόλοιπους.)

Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 1)

2) Τι θα συμβεί αν ισχύει ταυτόχρονα και το τρίτο δεδομένο; Διαγράψτε το.

(Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το $P(3)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $P(x)$. Μετά αντικαταστήστε το α με το ίσο του από τη σχέση 1.)

Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 2)

3) Αν ακολουθήσατε τις υποδείξεις, η (σχέση 2) είναι εξίσωση με άγνωστο το β. Λύστε τη και βρείτε το β.

4) Αντικαταστήστε το β με τον αριθμό που βρήκατε στη σχέση 1. Θα προκύψει εξίσωση με άγνωστο το α. Λύστε τη και βρείτε το α.

ΜΕΤΑ: Αντικαταστήστε με τους αριθμούς που βρήκατε για τα α και β και ελέγξτε.

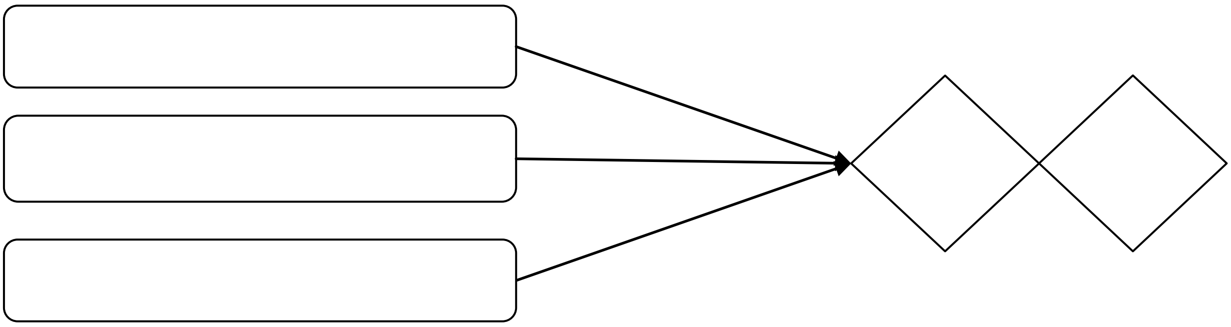
<u>Παράδειγμα 4</u> (ασκ. 3Β, παρ.2.1.)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu\chi + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

<u>ΠΡΙΝ:</u> 1) <u>Υπογραμμίστε</u> φράσεις, σχέσεις και αριθμούς.

2) Θυμηθείτε τον <u>ορισμό</u> της λέξης «ρίζα» και μεταφράστε σε μαθηματικά τη φράση: *«το $P(x)$ έχει ρίζα το1»*

2) Συμπληρώστε το παρακάτω σχήμα



<u>ΛΥΣΗ:</u> 1) Τι θα συμβεί αν ισχύουν <u>ταυτόχρονα δύο</u> από τα δεδομένα; Διαλέξτε δύο και διαγράψτε τα.

(Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το $P(1)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $P(x)$. Ποια είναι η τιμή του $P(1)$; Μετά, στην εξίσωση που προκύπτει μεταφέρετε στο πρώτο μέλος μόνο τους όρους που περιέχουν το λ και στο δεύτερο όλους τους υπόλοιπους.)

Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 1)

2) Τι θα συμβεί αν ισχύει ταυτόχρονα και το τρίτο δεδομένο; Διαγράψτε το.

(Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το $P(-2)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $P(x)$. Ποια είναι η τιμή του $P(-2)$; Μετά αντικαταστήστε το λ με το ίσο του από τη σχέση 1.)

Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 2)

3) Αν ακολουθήσατε τις υποδείξεις, η (σχέση 2) είναι εξίσωση με άγνωστο το μ. Λύστε τη και βρείτε το μ.

4) Αντικαταστήστε το μ με τον αριθμό που βρήκατε στη σχέση 1. Θα προκύψει εξίσωση με άγνωστο το λ. Λύστε τη και βρείτε το λ.

ΜΕΤΑ: Αντικαταστήστε με τους αριθμούς που βρήκατε για τα λ και μ και ελέγξτε.

<u>Παράδειγμα 5</u> (ασκ. 4^{A}, παρ.2.1)

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, συμβαίνει τα πολυώνυμα

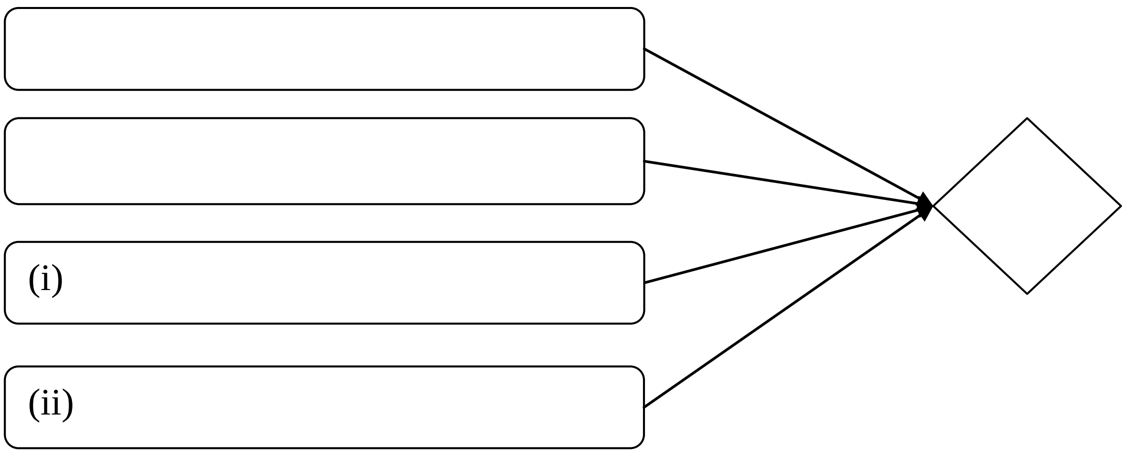
$P(x) = (a^2 - 3a)x^3 + x^2 + a$ και $Q(x) = -2x^3 + a^2x^2 + (a^3 - 1)x + 1$ να είναι ίσα.

<u>ΠΡΙΝ:</u> 1) <u>Υπογραμμίστε</u> φράσεις, σχέσεις και αριθμούς.

2) Θυμηθείτε τον <u>ορισμό</u> των «ίσων πολυωνύμων». Για να είναι τα πολυώνυμα ίσα, ο ορισμός λέει ότι πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

i)
ii)

2) Συμπληρώστε το παρακάτω σχήμα. Αντί για τη φράση «ίσα», συμπληρώστε στα δεδομένα τη «μετάφραση σε μαθηματικά» που προκύπτει από τον ορισμό, δηλαδή τις σχέσεις (i) και (ii).



<u>ΛΥΣΗ:</u> 1) Τι θα συμβεί αν ισχύουν <u>ταυτόχρονα δύο</u> από τα δεδομένα;

Παρατηρούμε ότι τα πρώτα δύο δεδομένα (δηλαδή οι τύποι για τα $P(x)$ και $Q(x)$) μπορούν να συμβούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Επομένως, τα διαγράφουμε και προχωράμε στο επόμενο βήμα: Επιλέγουμε και το επόμενο δεδομένο και ελέγχουμε τι θα συμβεί αν ισχύουν και τα τρία ταυτόχρονα.

◈ **<u>Για να ελέγξουμε αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα:</u>**

*Συνήθως ελέγχουμε **πρώτα το (ii),** γιατί διαφορετικά μπορεί να καταλήξουμε σε κάτι πολύ πιο σύνθετο!!!*

□ *Αν ισχύει το (ii), είναι εύκολο να ελέγξουμε αν ισχύει και το (i).*

□ ***Αν δεν ισχύει το (ii),** τότε τα πολυώνυμα **δεν είναι ίσα** σίγουρα. Άρα **δε χρειάζεται να ελέγξουμε και το (i).***

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, καλό θα είναι να επιλέξουμε το δεδομένο (ii) πρώτα. Το διαγράφουμε.

Τι θα συμβεί αν ισχύουν ταυτόχρονα οι τύποι των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ και το δεδομένο (ii);

Εδώ προκύπτουν τέσσερις σχέσεις, όχι μόνο μία.

Ονομάστε τες (σχέση 1), (σχέση 2), (σχέση 3) και (σχέση 4).

2) Υπάρχει κάτι επιπλέον που πρέπει να ελέγξουμε, αν ισχύει ταυτόχρονα και το τέταρτο δεδομένο, δηλαδή το δεδομένο (i); Διαγράψτε το.

3) Αν ακολουθήσατε τις υποδείξεις, οι σχέσεις 1, 2, 3, 4 είναι εξισώσεις με άγνωστο το α. Λύστε την καθεμία χωριστά.

(σχέση 1)	(σχέση 2)	(σχέση 3)	(σχέση 4)

Για να συμβαίνουν ταυτόχρονα όλες οι παραπάνω σχέσεις, πρέπει α=

ΜΕΤΑ: Αντικαταστήστε το α με τον αριθμό που βρήκατε και ελέγξτε.

✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις, χρησιμοποιώντας το σχήμα της σελίδας 5, για να σημειώνετε τα βήματα που έχετε ολοκληρώσει.

1. Για ποιες τιμές των λ, μ συμβαίνει τα πολυώνυμα $P(x) = 5x + \lambda^2$ και $Q(x) = \mu x + 1$ να είναι ίσα;

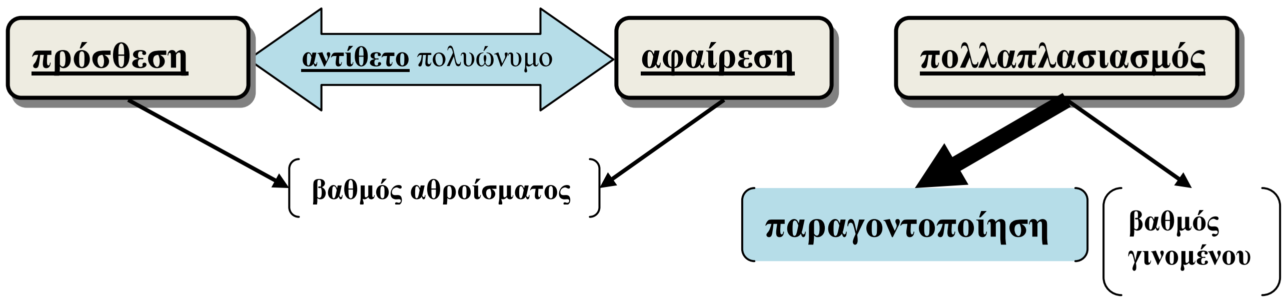
2. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = 5x^2 + 3ax + a^2 - 2$ για $x = -1$ είναι ίση με 1; (ασκ. 7^{A}, παρ.2.1.)

Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Φύλλο εργασίας 5

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

Πρόσθεση – Αφαίρεση – Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων



1. ***Πρόσθεση πολυωνύμων***

Το **ΑΘΡΟΙΣΜΑ** των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ θα είναι ένα νέο πολυώνυμο, που θα το συμβολίζουμε $P(x) + Q(x)$.

Παράδειγμα 1

- Ας προσθέσουμε τα πολυώνυμα $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ και $Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3$ (Συμπληρώστε τα κενά του πίνακα, σύμφωνα με τις οδηγίες)

		3	2	1	0
Γράφουμε τα πολυώνυμα, το ένα κάτω από το άλλο, βάζοντας τις ίδιες δυνάμεις του x στις ίδιες στήλες	$P(x)$	$3x^3$	$+2x^2$		
	$+Q(x)$				
Κάνουμε πρόσθεση σε κάθε στήλη	+	$7x^3$	$-3x^2$		

Γράφουμε την απάντηση $P(x) + Q(x) =$

Παράδειγμα 2

- Προσθέστε τώρα τα πολυώνυμα $P(x) = -15x^6 - 8x^2 - 5x$ και $Q(x) = 4x^2 - 3{,}2x + 3$.

		6	5	4	3	2	1	0
Γράφουμε τα πολυώνυμα,	$P(x)$							
το ένα κάτω από το άλλο	$+Q(x)$							
Προσθέτουμε κάθε στήλη								

Γράφουμε την απάντηση $P(x) + Q(x) =$

<u>Παράδειγμα 3</u>

- Βρείτε το $Q(x) +\ P(x)$ για τα ίδια πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

- Τι παρατηρείτε;

◈ *Όπως και στην πρόσθεση πραγματικών αριθμών,* ***δεν έχει σημασία η σειρά*** *με την οποία προσθέτουμε τα πολυώνυμα, δηλ. το $P(x) + Q(x)$ είναι το ίδιο με το $Q(x) + P(x)$.*

- Ποιοί ήταν οι βαθμοί των $P(x), Q(x)$ στο προηγούμενο παράδειγμα;

Βαθμός $P(x) =$ βαθμός $Q(x) =$

- Ποιος ήταν ο βαθμός του αθροίσματος $P(x) + Q(x)$;

Βαθμός $P(x) + Q(x) =$

<u>Παράδειγμα 4</u>

- Βρείτε τώρα το άθροισμα των πολυωνύμων: $P(x) = -x^6 + x^2 - \ 5x$ και $Q(x) = x^6 + x^4$

- Ποιοί ήταν οι βαθμοί των $P(x), Q(x)$ στο προηγούμενο παράδειγμα;

Βαθμός $P(x) =$ ______ βαθμός $Q(x) =$ ______

- Ποιος είναι ο βαθμός του αθροίσματος $P(x) + Q(x)$;

Βαθμός $P(x) + Q(x) =$ ______

Παράδειγμα 5

- Βρείτε το άθροισμα των πολυωνύμων $P(x) = -x^6 + x^2 - 5x$ και $Q(x) = x^6 - x^2$.

- Ποιοί ήταν οι βαθμοί των $P(x), Q(x)$ στο προηγούμενο παράδειγμα;

Βαθμός $P(x) =$ ______ βαθμός $Q(x) =$ ______

- Ποιος είναι ο βαθμός του αθροίσματος $P(x) + Q(x)$;

Βαθμός $P(x) + Q(x) =$ ______

- Τελικά, ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων είναι ______ από το μεγαλύτερο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	
ΒΑΘΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	

2. ***Αφαίρεση πολυωνύμων***

Η **ΔΙΑΦΟΡΑ** των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ θα είναι ένα νέο πολυώνυμο, που θα το συμβολίζουμε $P(x) - Q(x)$.

Παράδειγμα 6

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 20x^4 - 5x^3$ και $Q(x) = 14x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$.

• Να βρείτε τη διαφορά $P(x) - Q(x)$. (Συμπληρώστε τα κενά, ακολουθώντας τις οδηγίες)

		4	3	2	1	0
Γράφουμε τα πολυώνυμα, το ένα κάτω από το άλλο, βάζοντας **τις ίδιες δυνάμεις** του x στις **ίδιες στήλες**.	$P(x)$	$20x^4$	$-5x^3$			
Προσέχουμε να αλλάξουμε τα **πρόσημα** των συντελεστών **του δεύτερου**	$-Q(x)$	$-14x^4$			$+x$	
Κάνουμε πρόσθεση σε κάθε στήλη	+		$-8x^3$			
Γράφουμε την απάντηση	$P(x) - Q(x) =$					

❖*Δηλαδή, για να βρω το $P(x) - Q(x)$,* ***προσθέτω*** *το $P(x)$ με το αντίθετο του $Q(x)$.* Με σύμβολα, $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$.

❖*Το* ***ΑΝΤΙΘΕΤΟ*** *πολυώνυμο του $Q(x)$ είναι το ίδιο με το $Q(x)$, αλλά όλοι οι συντελεστές έχουν τα* ***αντίθετα πρόσημα****. Το συμβολίζουμε $-Q(x)$.*

π.χ. αν $Q(x) = 14x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$, τότε το αντίθετο είναι το

$-Q(x) =$ | |
|---|

Παράδειγμα 7

- Για τα ίδια πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ βρείτε τη διαφορά $Q(x) - P(x)$.

	4	3	2	1	0
$Q(x)$					
$-P(x)$					
$+$					
$Q(x) - P(x) =$					

Είναι το ίδιο με το $P(x) - Q(x)$;

❖*Όπως και στην αφαίρεση πραγματικών αριθμών, **έχει σημασία η σειρά** με την οποία αφαιρούμε τα πολυώνυμα, δηλ. το $P(x) - Q(x)$ είναι διαφορετικό από το $Q(x) - P(x)$.*

Παράδειγμα 8

- Για τα $P(x) = 8x^4 - 2x^2 - 5x + 7$ και $Q(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3$, βρείτε το $Q(x) - P(x)$.

Είδαμε ότι **η αφαίρεση** δύο πολυωνύμων είναι στην πραγματικότητα **μια πρόσθεση** του πρώτου με το αντίθετο του δεύτερου πολυωνύμου.

- Άρα η διαφορά δύο πολυωνύμων έχει βαθμό

από το μεγαλύτερο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

ΘΥΜΑΜΑΙ

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	
ΑΝΤΙΘΕΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ	
ΒΑΘΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	

3. ***Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων***

Το **ΓΙΝΟΜΕΝΟ** των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ θα είναι ένα νέο πολυώνυμο, που θα το συμβολίζουμε $P(x) \cdot Q(x)$.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, δηλαδή, για να βρούμε ποιο ακριβώς είναι αυτό το νέο πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$, **αντικαθιστούμε** τα ονόματα των δύο πολυωνύμων με τα ίδια τα πολυώνυμα και πολλαπλασιάζουμε τις παραστάσεις που προκύπτουν,

- □ εφαρμόζοντας την **επιμεριστική ιδιότητα** προσεκτικά, και
- □ κάνοντας στο τέλος **αναγωγή ομοίων όρων.**

- Θυμηθείτε πώς πολλαπλασιάζουμε παραστάσεις που περιέχουν άγνωστες ποσότητες, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

$-8(5x^2+3)=$
$20x^4(x^3-5x^2+3)=$
$(7x-15)x^2=$
$(-x+3)(-x^2+2)=$

• Όταν **μπροστά από μία παρένθεση** υπάρχουν κάποιες ποσότητες (με μεταβλητές ή χωρίς), αλλά **δεν υπάρχει σύμβολο πράξης**, εννοείται ότι έχουμε πράξη τον:

<u>Παράδειγμα 9</u>

Θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε τα $P(x) = 3x^3 + x^2 - 7$ και $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 3$.

Για να μειώσουμε την πιθανότητα να κάνουμε κάποιο λάθος στις πράξεις, ή να ξεχάσουμε κάποιο όρο, μπορούμε να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό ως εξής:

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)\cdot Q(x)$	
$3x^3$	$x^3 - 5x^2 + 3$	$3x^3(x^3 - 5x^2 + 3)$	$= 3x^6 - 15x^5 + 9x^3$
$+x^2$		$+x^2(x^3 - 5x^2$	$= x^5 - 5x^4 + 3x^2$
-7		$-7(x^3 - 5x^2 + 3)$	$= -7x^3 + 35x^2 - 21$

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$3x^6$	$-15x^5 + x^5$	$-5x^4$	$+9x^3 - 7x^3$	$+3x^2 + 35x^2$		$+21$

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$3x^6$	$-14x^5$	$-5x^4$	$+2x^3$	$+38x^2$		$+21$

$$P(x)\cdot Q(x) = (3x^3 + x^2 - 7\,)(x^3 - 5x^2 + 3) = 3x^6 - 14x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 38x^2 - 21$$

1.	Γράφουμε τα **ονόματα** των πολυωνύμων
2.	**Αντικαθιστούμε** με τα ίδια τα πολυώνυμα, αλλά γράφουμε **το πρώτο** πολυώνυμο **κάθετα**
3.	Κάνουμε την **πράξη σε κάθε γραμμή**
4.	**«Μαζεύουμε» τα όμοια** μονώνυμα, από το μεγαλύτερο στο μικρότερο βαθμό
5.	Κάνουμε τις **πράξεις**
6.	Γράφουμε το **αποτέλεσμα**

Παράδειγμα 10

• Μπορείτε τώρα να υπολογίσετε το γινόμενο $Q(x)\cdot P(x)$ για τα ίδια πολυώνυμα $P(x) = 3x^3+x^2-7$ και $Q(x) = x^3-5x^2+3$;

• Ποιο περιμένετε να είναι το γινόμενο πριν κάνετε τις πράξεις;

• Ποιος περιμένετε να είναι ο βαθμός του γινομένου;

• Υπολογίστε το:

❖ *Όπως και στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών, **δεν έχει σημασία η σειρά** με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα πολυώνυμα, δηλ. το $P(x)\cdot Q(x)$είναι το ίδιο με το $Q(x)\cdot P(x)$.*

Παράδειγμα 11

Τώρα θεωρούμε τα πολυώνυμα $Q(x) = -15x^6-2x^2-5x$ και $P(x) = 4x^2-3$

• Ποιος περιμένετε να είναι ο βαθμός του γινομένου $Q(x)\cdot P(x)$;

• Υπολογίστε το γινόμενο:

❖ *Το γινόμενο δύο πολυωνύμων είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό* ***το άθροισμα των βαθμών*** *των αρχικών πολυωνύμων.*

❖ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!** *Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων για να γράψουμε ένα πολυώνυμο με ένα διαφορετικό τρόπο, σαν γινόμενο, κάνοντας την ανάποδη διαδικασία.*

Παράδειγμα

επειδή $x^2\,(7x-15) = 7x^3 - 15x^2$,

μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $P(x) = 7x^3 - 15x^2$

με τη μορφή $P(x) = x^2\,(7x-15)$

• Με τον ίδιο τρόπο, επειδή $(-x+3)(-x^2+2) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$,

μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

με τη μορφή $P(x) = \boxed{}$

Θυμηθείτε ότι αυτή η διαδικασία (δηλαδή η «ανάποδη» του πολλαπλασιασμού) λέγεται **ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**, αφού γράφουμε το πολυώνυμο σαν γινόμενο πολλών παραγόντων.

Η παραγοντοποίηση πολυωνύμων είναι πολύ χρήσιμη, όταν θέλουμε να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις. Τον τρόπο που θα τη χρησιμοποιήσουμε θα τον δούμε αναλυτικά στο επόμενο μάθημα.

✠ΘΥΜΑΜΑΙ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	
ΒΑΘΜΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	
ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	

<u>Άσκηση</u> (ασκ. 1^{A}, §2.1.)

- Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

$P(x) + Q(x) =$
$2P(x) - 3Q(x) =$
$P(x) \cdot Q(x) =$
$[P(x)]^2 =$

<u>✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

⌘ΘΥΜΑΜΑΙ ☺ ☹

Πρόσθεση πολυωνύμων		
Βαθμός αθροίσματος πολυωνύμων		
Αφαίρεση πολυωνύμων		
Βαθμός διαφοράς πολυωνύμων		
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων		
Βαθμός γινομένου πολυωνύμων		
Παραγοντοποίηση πολυωνύμων		

2) Για τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ και $Q(x) = 20x^4 - 5x^3$, να βρεθούν τα:
   i. $7P(x) + 2Q(x)$
   ii. $4P(x) - Q(x)$
   iii. $2P(x) \cdot Q(x)$

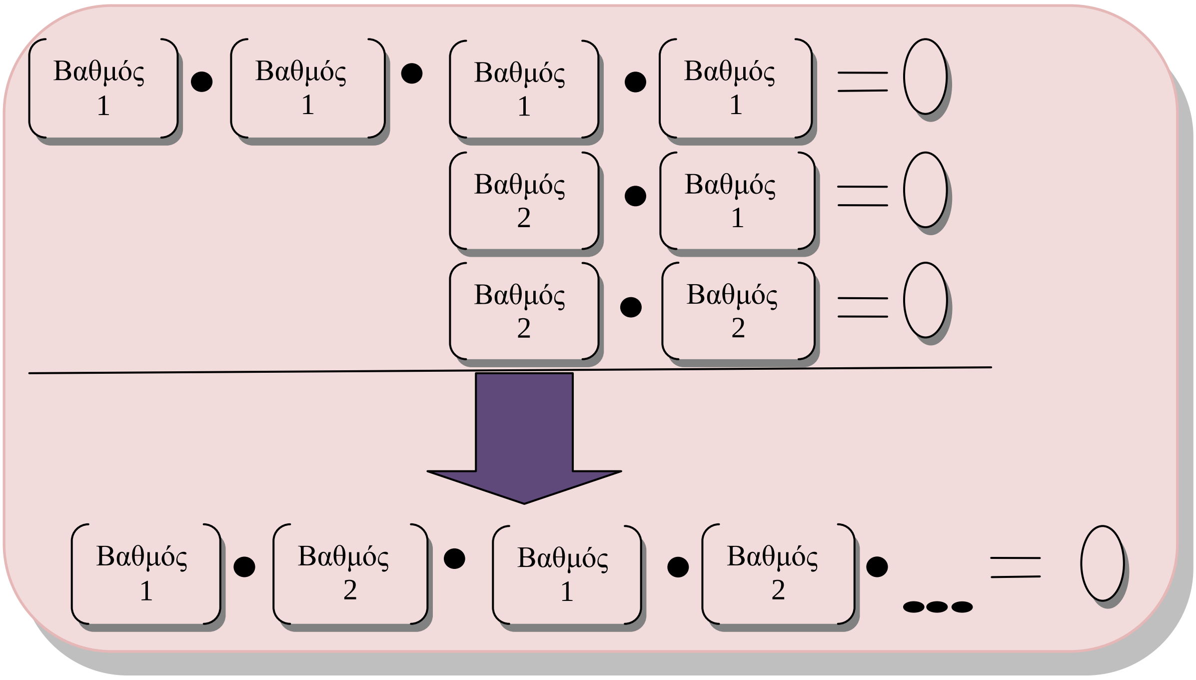
3) Να γράψετε στην κανονική μορφή το πολυώνυμο $A(x) = P(x) - Q(x)$, όπου $P(x) = (a^2 - 3)x^3 + (\beta - 2)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + a$
   και $Q(x) = 2x^3 + ax^2 + 9x + \gamma$

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>
<u>Φύλλο εργασίας 6</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων της μορφής:</u>

$\{$γινόμενο πολυωνύμων 1ου και 2ου βαθμού$\} = 0$



• Συμπληρώστε τα κενά:

$5 \cdot \square = 0$ $\qquad\qquad$ $\square \cdot 35 = 0$

Αν $x \cdot y = 0$, τότε αναγκαστικά $x = \square$ ή $y = \square$

◈ <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!</u> *Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι 0, τότε αναγκαστικά ένας από τους δύο αριθμούς, ή και οι δύο, πρέπει να είναι* $\square$.

Αυτή την απλή παρατήρηση, θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις!!!

1. ***(Πολυώνυμο βαθμού 1) × (Πολυώνυμο βαθμού 1) ×… = 0***

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε την εξίσωση $(x-2)(x-8)=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιο είναι το «κρυμμένο» πολυώνυμο;
- Ποιος είναι ο βαθμός *(του πολυωνύμου και της εξίσωσης);*
- Γνωρίζετε να λύνετε πολυωνυμικές εξισώσεις αυτού του βαθμού;
- Αν ναι, λύστε τη:
- Ποιες είναι οι ρίζες *(του πολυωνύμου και της εξίσωσης);*

Ας ξαναδούμε τώρα την ίδια εξίσωση $(x-2)(x-8)=0$ με ένα άλλο τρόπο:

- Αντικαταστήστε το x με τον αριθμό 10 χωρίς να κάνετε καθόλου πράξεις:
- Τώρα κάνετε μόνο τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις:
- Η ισότητα που προκύπτει ισχύει;
- Βρείτε έναν αριθμό, που αν αντικαταστήσετε με αυτόν το x, να προκύψει μια ισότητα που να ισχύει (χρησιμοποιήστε την παρατήρηση στη αρχή του φύλλου εργασίας):
- Κάντε τις πράξεις για να βεβαιωθείτε ότι ισχύει η ισότητα:
- Μπορείτε να βρείτε άλλο τέτοιο αριθμό;
- Τελικά, ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε την εξίσωση $(2x+1)(3x-2)=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της; *(Προσπαθήστε να τον βρείτε χωρίς να κάνετε τις πράξεις. Θυμηθείτε τι γνωρίζετε για το βαθμό γινομένου)*
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα μπει στη θέση του x, ώστε να ισχύει η ισότητα; ή

(χρησιμοποιήστε την παρατήρηση στην αρχή του φύλλου εργασίας)

- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προέκυψαν; και
- Ποιοι αριθμοί μπορούν να αντικαταστήσουν το x και να ισχύει η αρχική ισότητα;

(Λύστε τις εξισώσεις που προέκυψαν στο προηγούμενο βήμα) και

- Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης; και
- Ελέγξτε

(Γράψτε την ισότητα δύο φορές, αντικαθιστώντας κάθε φορά το x με έναν από τους αριθμούς που βρήκατε και ελέγξτε αν ισχύει)

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε την $(-x+1)(-2x+3)=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της εξίσωσης;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα μπει στη θέση του x, ώστε να ισχύει η ισότητα; ή
- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προέκυψαν; και
- Ποιες είναι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων; και
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης; και
- Ελέγξτε

◈ <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!</u> *Οι παραπάνω ήταν όλες πολυωνυμικές εξισώσεις **βαθμού 2**, αλλά το πολυώνυμο ήταν στη μορφή **γινομένου δύο παραγόντων βαθμού 1**.*

*Για να τις λύσουμε προτιμήσαμε να λύσουμε τις **δύο εξισώσεις βαθμού 1** που προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση στην αρχή του φύλλου εργασίας. Οι λύσεις αυτών των δύο εξισώσεων ήταν και **οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης**. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με εξισώσεις που το πρώτο μέρος είναι γινόμενο **περισσότερων από δύο** πολυωνύμων πρώτου βαθμού.*

<u>Παράδειγμα 4</u>

Θεωρούμε την $(2x-3)(-x-1)(x-\frac{7}{2})=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα μπει στη θέση του x, ώστε να ισχύει η ισότητα;
- Ποιες είναι οι λύσεις των εξισώσεων που προκύπτουν;
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;
- Ελέγξτε

- Είστε έτοιμοι να λύσετε χωρίς πράξεις («**<u>με το μάτι</u>**») την παρακάτω εξίσωση;;;

<u>Παράδειγμα 5</u>

Θεωρούμε την $(x-3)(-x+1)(x-\frac{7}{2})(x-1)(-x-2)(x+45)=0$

- Ποιες είναι οι λύσεις της;
- Τι βαθμού είναι η παραπάνω εξίσωση;
- Θα προτιμούσατε να σας δινόταν το πολυώνυμο του πρώτου μέλους στην κανονική του μορφή;

2. ***(Πολυώνυμο βαθμού 1) × (Πολυώνυμο βαθμού 2) = 0***

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε την $3(2x+1)(x^2+1)=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα αντικαταστήσει το x για να είναι αληθινή η ισότητα; ή
- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προκύπτουν; και
- Λύστε τις δύο εξισώσεις χωριστά.
- Ποιες είναι οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων;
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;
- Ελέγξτε

Παράδειγμα 7

Θεωρούμε την $-(2x+1)(x^2-1)=0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα αντικαταστήσει το x για να είναι αληθινή η ισότητα; ή
- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προκύπτουν; και
- Λύστε τις δύο εξισώσεις χωριστά.
- Ποιες είναι οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων;
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;
- Ελέγξτε

3. *(Πολυώνυμο βαθμού 2) × (Πολυώνυμο βαθμού 2) = 0*

Παράδειγμα 9

Θεωρούμε την $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4) = 0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα αντικαταστήσει το x για να είναι αληθινή η ισότητα; ή
- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προκύπτουν; και
- Λύστε τις δύο εξισώσεις χωριστά.
- Ποιες είναι οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων;
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;
- Ελέγξτε

Παράδειγμα 10

Θεωρούμε την $-(6x^2 - 5)(x^2 + 2x - 3) = 0$

- Είναι πολυωνυμική εξίσωση;
- Ποιος είναι ο βαθμός της;
- Τι πρέπει να ισχύει για τον αριθμό που θα αντικαταστήσει το x για να είναι αληθινή η ισότητα; ή
- Τι βαθμού είναι οι εξισώσεις που προκύπτουν; και
- Λύστε τις δύο εξισώσεις χωριστά.
- Ποιες είναι οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων;
- Ποιες είναι οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης;
- Ελέγξτε

4. ***<u>Γινόμενο πολυωνύμων 1ου ή 2ου βαθμού = 0</u>***

<u>Παράδειγμα 11</u>

Θεωρούμε την $5\left(x-\sqrt{2}\right)(3x^2+9x+6)\left(3x-\sqrt{5}\right)(x^2-3x+2)=0.$

- Λύστε την εξίσωση!!!

- Τι βαθμού ήταν η παραπάνω εξίσωση;
- Θα προτιμούσατε να σας δινόταν το πολυώνυμο του πρώτου μέρους στην κανονική του μορφή;

<u>◈ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u>

4) Αν σας δοθεί μια πολυωνυμική εξίσωση της μορφής

$$(\boldsymbol{\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ \pi o\lambda\upsilon\omega\nu\acute{\upsilon}\mu\omega\nu\ 1o\upsilon}\text{ ή }\boldsymbol{2o\upsilon\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon}})\ =\ \mathbf{0}$$

ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΤΗ ΛΥΣΕΤΕ!!!

5) Στόχος του κεφαλαίου είναι να μας μάθει μεθόδους επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων γενικά. Αφού γνωρίζουμε να λύνουμε εξισώσεις που είναι στη μορφή

$$(\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ \pi o\lambda\upsilon\omega\nu\acute{\upsilon}\mu\omega\nu\ 1o\upsilon\text{ ή }2o\upsilon\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon})\ =\ 0$$

*θα προσπαθούμε από εδώ και πέρα **<u>να μετατρέπουμε τις εξισώσεις</u>** που εμφανίζονται **<u>σε αυτή τη μορφή</u>**.*

Σημείωση: Έχουμε μάθει τους τύπους για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μόνο 1ου και 2ου βαθμού. Έχουν βρεθεί τύποι και για τις εξισώσεις **3ου και 4ου βαθμού**, όμως είναι αρκετά **πολύπλοκοι** (δείτε το κείμενο που ακολουθεί). Έτσι θα προσπαθούμε στις ασκήσεις **να εμφανίζονται μόνο οι βαθμοί 1 και 2** στα γινόμενα, για να μπορούμε να τις λύνουμε.

Αργότερα αποδείχτηκε ότι για πολυώνυμα με βαθμούς **από 5 και πάνω δεν υπάρχουν τέτοιοι τύποι** (όχι απλά δεν έχουν βρεθεί, αλλά δεν πρόκειται να βρεθούν ποτέ, γιατί κάτι τέτοιο είναι αδύνατο). Επομένως, οι μέθοδοι που μαθαίνουμε δεν μπορούν να λύσουν όλα τα είδη εξισώσεων!!!

5. *Μία «μαθηματική» ιστορία*

Ο Scipio Del Ferro (1465-1526) υπήρξε πρόεδρος του τμήματος Αριθμητικής και Γεωμετρίας στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια. Στον Del Ferro αποδίδεται η επίλυση κυβικών εξισώσεων αλγεβρικά, αλλά η πλήρης αλήθεια είναι κάπως πιο πολύπλοκη. Πιστεύεται ότι ο Del Ferro μπορούσε να λύσει μόνο ειδικές περιπτώσεις κυβικών εξισώσεων: αυτές της μορφής $x^3 + mx = n$. (Στην πραγματικότητα αυτό είναι το μόνο που απαιτείται, αφού αν μας δώσουν μια οποιαδήποτε κυβική εξίσωση μπορούμε να την αναγάγουμε στην παραπάνω μορφή.)

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Del Ferro έλυσε την εξίσωση αυτή γύρω στα 1515 αλλά κράτησε τη δουλειά του μυστική μέχρι λίγο πριν το θάνατό του, το 1526, όταν αποκάλυψε τη μέθοδό του στο μαθητή του, Antonio Fior.

Ο Fior ήταν μέτριος μαθηματικός και πολύ λιγότερο καλός στο να κρατάει μυστικά από τον Del Ferro. Σύντομα άρχισαν να διαδίδονται φήμες στην Μπολόνια ότι η κυβική εξίσωση είχε επιλυθεί.

Ο Niccolo Fontana, γνωστός ως Tartaglia (που σημαίνει «τραυλός», παρατσούκλι που του είχε δοθεί γιατί είχε κομμένη γλώσσα από μικρή ηλικία), ωθούμενος από τις φήμες, κατάφερε να λύσει κυβικές εξισώσεις της μορφής $x^3 + mx^2 = n$ και δεν κράτησε μυστική την ανακάλυψή του.

Ο Fior προκάλεσε τον Tartaglia σε δημόσιους αγώνες. Οι κανόνες ήταν ότι ο καθένας έπρεπε να δώσει στον άλλο 30 προβλήματα με περιθώριο 40 ή 50 ημερών για να τα λύσει. Ο νικητής ήταν αυτός που θα έλυνε τα περισσότερα, αλλά υπήρχε και ένα μικρό έπαθλο για κάθε πρόβλημα χωριστά.

Ο Tartaglia έλυσε όλα τα προβλήματα του Fior μέσα σε δύο ώρες, αφού όλα ήταν της μορφής $x^3 + mx = n$, (πίστευε ότι ο Tartaglia δεν θα μπορούσε να τα λύσει) και ανακηρύχθηκε νικητής. 8 μέρες πριν την παράδοση των απαντήσεων, οTartaglia βρήκε και τη γενική μέθοδο για όλους τους τύπους τριτοβάθμιας.

Τα νέα της νίκης του Tartaglia έφτασαν στον Girolamo Cardano στο Μιλάνο, που ετοιμαζόταν να εκδώσει το βιβλίο του *Practica Arithmeticae* (1539). O Cardano κάλεσε τον Tartaglia να τον επισκεφτεί και, έπειτα από πολλή προσπάθεια, τον έπεισε να του εμπιστευτεί το μυστικό της λύσης του για την κυβική εξίσωση. Αυτό το έκανε ο Tartaglia, αφού έβαλε τον Cardano να υποσχεθεί ότι θα κρατήσει το μυστικό μέχρι να το εκδώσει ο ίδιος. Ο Cardano δεν κράτησε την υπόσχεσή του. Το 1545 εξέδωσε το *Ars Magna,* την πρώτη Λατινική μελέτη πάνω στην Άλγεβρα.

Αφού ο Tartaglia έδειξε στον Cardano πώς να λύσει κυβικές εξισώσεις, ο Cardano ενθάρρυνε τον μαθητή του, Ludovico Ferrari, να εξετάσει τις τεταρτοβάθμιες εξισώσεις. Ο Ferrari κατάφερε να λύσει την τεταρτοβάθμια με ίσως την πιο κομψή από όλες τις μεθόδους που είχαν βρεθεί για τη λύση τέτοιου τύπου προβλήματος. Ο Cardano δημοσίευσε και τις 20 περιπτώσεις τεταρτοβάθμιας στο *Ars Magna*.

Έπειτα από το *Ars Magna* του Cardano, πολλοί μαθηματικοί συνεισέφεραν στην επίλυση της κυβικής και της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Τελικά, το 1824, ο νορβηγός Niels H.Abel, απέδειξε σε ηλικία 22 ετών, ότι δεν υπάρχει τύπος που να λύνει τη γενική εξίσωση 5^ου^ βαθμού. Λίγο αργότερα (το 1832), ο Γάλλος μαθηματικός Evariste Galois, ο οποίος πέθανε σε μια μονομαχία σε ηλικία 21 ετών, το βράδυ πριν το θάνατό του έγραψε ένα χειρόγραφο. Μέσα σε αυτό έδωσε τις συνθήκες, ώστε μια εξίσωση να μπορεί να λυθεί μέσω ενός τύπου, που περιέχει τους συντελεστές της.

✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ

☺ ☹

Εξισώσεις της μορφής (γινόμενο πολυωνύμων 1ου ή 2ου βαθμού) $= 0$		

2) Να βρείτε για τις παρακάτω πολυωνυμικές εξισώσεις το βαθμό, ποιες είναι οι πραγματικές λύσεις τους και τον αριθμό των πραγματικών λύσεων:

Πολυωνυμική εξίσωση	Βαθμός	Λύσεις	Πλήθος λύσεων
$x^2(3x^2-6)=0$			
$(x+5)(x^2-5x+6)=0$			
$5(x^2+15)(2x^2-10)=0$			
$x(3x^2-6x)=0$			

3) Βρείτε περισσότερες πληροφορίες για τους μαθηματικούς Abel και Galois που αναφέρονται στο τέλος του παραπάνω κειμένου, ανατρέχοντας σε όποια πηγή επιλέξετε (αρκεί να την αναφέρετε). Οι πληροφορίες που θα συλλέξετε θα συζητηθούν στο τέλος του επόμενου μαθήματος.

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 7</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Διαίρεση και παραγοντοποίηση πολυωνύμων</u>

<u>διαίρεση</u> πολυωνύμων →	**<u>Παραγοντοποίηση</u>** πολυωνύμων με χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων →	**<u>Επίλυση</u>** πολυωνυμικών **<u>εξισώσεων</u>**

1. ***<u>Διαίρεση πολυωνύμων</u>***

Είδαμε ότι αν θέλουμε να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις, είναι πιο εύκολο όταν το πολυώνυμο του πρώτου μέλους της εξίσωσης είναι **στη μορφή γινομένου**.
Αν δεν είναι όμως τι κάνουμε;

Ένας τρόπος **να το μετατρέψουμε εμείς σε γινόμενο**, είναι με τη χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων. Για να μάθουμε αυτόν τον τρόπο όμως, πρέπει πρώτα να μάθουμε να κάνουμε διαίρεση!!!

Η διαίρεση πολυωνύμων μοιάζει πολύ με τη διαίρεση φυσικών αριθμών. Θυμόμαστε ότι στη διαίρεση φυσικών ο πρώτος αριθμός λέγεται **<u>ΔΙΑΙΡΕΤΕΟΣ</u>** και συμβολίζεται με Δ και ο δεύτερος **<u>ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ</u>** και συμβολίζεται με δ. Το ίδιο συμβαίνει και με η διαίρεση πολυωνύμων.

<u>Παράδειγμα 1</u>

- Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου $Δ(x) = 8x^4 + 2x^2 - 3x - 1$ με το $δ(x) = 2x^2 + x$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
8x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 3x - 1 & & & 2x^2 + x \\
\cline{4-4}
-8x^4 - 4x^3 & & & 4x^2 - 2x + 2 \\
\cline{1-1}
-4x^3 & +2x^2 - 3x - 1 & & \\
4x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{1-3}
 & 4x^2 \quad -3x - 1 & & \\
 & -4x^2 - 2x & & \\
\cline{2-3}
 & -5x - 1 & & \\
\end{array}
$$

Διαιρετέος Δ(x)
Διαιρέτης δ(x)
Πηλίκο π(x)
Υπόλοιπο υ(x)

ΓΕΝΙΚΑ	ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Γράφουμε τα πολυώνυμα σε ένα **σχήμα**, όπως το σχήμα της κάθετης διαίρεσης ακεραίων.	
Αν λείπει κάποιος όρος από τον διαιρετέο τον συμπληρώνω με συντελεστή το 0.	Εδώ πρέπει να συμπληρώσουμε τον όρο που περιέχει το x^3
«Πόσες φορές χωράει το δ στο Δ;» Εξετάζουμε και στα δύο πολυώνυμα μόνο τους όρους **με το μεγαλύτερο βαθμό**.	«Πόσες φορές χωράει το $2x^2$ στο $8x^4$;» ή αλλιώς «Με τι πρέπει να πολλαπλασιάσω το $2x^2$ για να γίνει $8x^4$;»
Γράφω την απάντηση στη θέση του πηλίκου	Η απάντηση είναι $4x^2$, αφού $4x^2 \cdot 2x^2 = 8x^4$
Πολλαπλασιάζω αυτό που βρήκα με ολόκληρο το διαιρέτη και γράφω το αποτέλεσμα κάτω από το διαιρετέο	Εδώ πολλαπλασιάζω το $4x^2$ με το $2x^2 + x$ και βρίσκω $8x^4 + 4x^3$
Κάνω **αφαίρεση** πολυωνύμων	Αλλάζω τα πρόσημα για να βρω το αντίθετο $-8x^4 - 4x^3$ και προσθέτω
«Κατεβάζω» και τους υπόλοιπους όρους του διαιρετέου και κάνω τα ίδια βήματα	Εξετάζω πόσες φορές χωράει το $2x^2$ στο $-4x^3 + 2x^2 - 3x - 1\ldots$
Συνεχίζω έτσι, μέχρι ο βαθμός του υπολοίπου να είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη	Εδώ το $-5x - 1$ έχει βαθμό 1, δηλ. μικρότερο από το βαθμό του $2x^2 + x$ που είναι 2, οπότε δε χωράει άλλες φορές

<u>Παράδειγμα 2</u>

- Κάντε τη διαίρεση πολυωνύμων $P(x)$: $Q(x)$, όπου $P(x) = 3x^2 + 5x$ και $Q(x) = -x$

Δ(x)	δ(x)	π(x)	υ(x)	Ταυτότητα της διαίρεσης

<u>Παράδειγμα 3</u>

- Κάντε τη διαίρεση των πολυωνύμων $P(x) = x^4 + 2x - 1$ και $Q(x) = x^2 - x$.

Δ(x)	δ(x)	π(x)	υ(x)	Ταυτότητα της διαίρεσης

Παράδειγμα 4

- Κάντε τη διαίρεση των $P(x) = \frac{2}{3}x^8 + 4x^6 - 2x - 1$ και $Q(x) = \ x^8 - 5x$.

Δ(x)	δ(x)	π(x)	υ(x)	Ταυτότητα της διαίρεσης

Παράδειγμα 5

- Κάντε τη διαίρεση των $\Delta(x) = \ 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 2$ και $\delta(x) = x - 1$.

Δ(x)	δ(x)	π(x)	υ(x)	Ταυτότητα της διαίρεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ (ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\boldsymbol{\delta(x) \neq 0}$,

υπάρχουν δύο **μοναδικά** πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{\Delta\ (x) = \delta\ (x) \cdot\ \pi\ (x) + \upsilon(x)}$$

όπου το $\upsilon(x)$ είναι:

□ είτε **το μηδενικό πολυώνυμο**,

□ είτε **έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\boldsymbol{\delta(x)}$**.

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στο παραπάνω θεώρημα που πρέπει να σημειώσετε;

❖*Στη συνέχεια, όταν θα συναντάμε κάποιο θεώρημα, θα υπάρχει με έντονα γράμματα η λέξη **ΘΕΩΡΗΜΑ** και η λέξη **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**, που θα μας θυμίζουν ότι πρέπει να μάθουμε, αλλά και να καταλάβουμε τις λεπτομέρειες που αναφέρονται.*

❖ *Η απόδειξη του θεωρήματος για την ταυτότητα της διαίρεσης είναι αρκετά δύσκολη και δε θα τη δούμε σε αυτό το μάθημα. Υπάρχει όμως, όπως και για όλα τα θεωρήματα.*

2. *Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων*

Παράδειγμα 1

- Κάνετε τη διαίρεση 129 : 4

Γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$\begin{array}{r|l} 129 & 4 \\ \hline & \end{array}$$

$$\boldsymbol{\Delta} \quad = \quad \boldsymbol{\delta} \quad \cdot \quad \boldsymbol{\pi} \quad + \quad \boldsymbol{\upsilon}$$

Ανάποδα:

- Αν μου πουν ότι: $129 = 32 \cdot 4 + 1$
- Μπορώ να πω αμέσως ότι: το υπόλοιπο της διαίρεσης του 129 με το 4 είναι 1.
- Ακόμα, μπορώ να πω με τον ίδιο τρόπο ότι: το υπόλοιπο της διαίρεσης του 129 με το 32 είναι
- Αν ξέρω ότι: $128 = 32 \cdot 4$
- Μπορώ να πω ότι: το υπόλοιπο της διαίρεσης του 128 με το 4 είναι
- Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να πω ότι: το υπόλοιπο της διαίρεσης του 128 με το 32 είναι

Ας κάνουμε κάτι αντίστοιχο με πολυώνυμα:

- Αν μου πουν ότι: $Q(x) = (x-2)(x+5) + 6$
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x-2$ είναι:
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x+5$ είναι:
- Αν μου πουν ότι: $P(x) = (x-2)(x+5)$
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι:
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+5$ είναι:

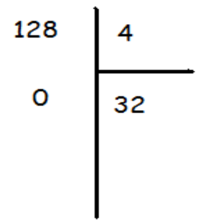
Μάθαμε ότι για να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 2, ένας τρόπος είναι να μετατρέψουμε το πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού.

Ένας τρόπος για να καταφέρουμε να κάνουμε την **<u>παραγοντοποίηση</u>** είναι να χρησιμοποιήσουμε τη **διαίρεση πολυωνύμων**, όπως ακριβώς χρησιμοποιούμε τη διαίρεση αριθμών.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το 128.

1. Με κάποιο τρόπο βρίσκουμε ότι διαιρείται ακριβώς με το 4.
2. Κάνουμε τη διαίρεση και βρίσκουμε πηλίκο 32 και υπόλοιπο 0.
3. Γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης: $128 = 32 \cdot 4 + 0$
4. Γράφουμε τον αριθμό σαν γινόμενο: $128 = 32 \cdot 4$



◈**<u>Συμπέρασμα:</u>** *Αν $\upsilon = 0$, τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται* **<u>$\Delta = \delta \cdot \pi$</u>** *και μου δίνει ένα τρόπο να* ***κάνω γινόμενο τον Δ*** *(διαιρετέο).*

⌘**<u>ΘΥΜΑΜΑΙ</u>**

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο ακεραίων είναι 0, τότε η διαίρεση λέγεται

Επίσης, αν το υ=0, **μπορούμε να πούμε ότι:**

Γενικά	Στο παράδειγμα
Ο δεύτερος αριθμός **<u>διαιρεί</u>** τον πρώτο	Το 4 διαιρεί το 128
Ο δεύτερος αριθμός είναι **<u>παράγοντας</u>** του πρώτου	
Ο δεύτερος αριθμός είναι **<u>διαιρέτης</u>** του πρώτου	
Ο πρώτος αριθμός **<u>διαιρείται με τον</u>** δεύτερο	

Κάντε τώρα το ίδιο με πολυώνυμα:

<u>Παράδειγμα 3</u>

Να παραγοντοποιήσετε το $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 31x - 12$.

1. Βρίσκουμε με κάποιο τρόπο ότι διαιρείται ακριβώς με το $x - 3$
2. Κάντε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 3$:
3. Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης:
4. Γράψτε το P(x) σαν γινόμενο πολυωνύμων: $P(x) =$

❖**<u>Συμπέρασμα:</u>** *Αν $\upsilon(x) = 0$, τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται*

<u>$\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)}$</u> *και μου δίνει ένα τρόπο να κάνω **γινόμενο** το πολυώνυμο* $\Delta(x)$.

Όπως και στη διαίρεση φυσικών, έτσι και στη διαίρεση πολυωνύμων:

• Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι 0,

τότε η διαίρεση λέγεται:

Επίσης, αν το $\upsilon(x) = 0$, μπορούμε να πούμε ότι:

Γενικά	Στο παράδειγμα
Το δεύτερο πολυώνυμο **<u>διαιρεί</u>** το πρώτο	Το x-3 διαιρεί το P(x)
Το δεύτερο πολυώνυμο είναι **<u>παράγοντας</u>** του πρώτου	
Το δεύτερο πολυώνυμο είναι **<u>διαιρέτης</u>** του πρώτου	
Το πρώτο πολυώνυμο **<u>διαιρείται με το</u>** δεύτερο	

3. ***<u>Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων</u>***

<u>Παράδειγμα 3 (συνέχεια)</u>

Τώρα που παραγοντοποιήσατε το P(x), μπορείτε να λύσετε και την αντίστοιχη εξίσωση.

• Ο βαθμός του P(x) είναι:	• Οι βαθμοί των παραγόντων που εμφανίζονται είναι:
	και

• Λύστε την πολυωνυμική εξίσωση P(x)=0, όπως μάθαμε στο προηγούμενο μάθημα.

• Οι λύσεις της εξίσωσης P(x)=0 είναι:

<u>Παράδειγμα 4</u>

Λύστε την εξίσωση $P(x) = 0$, όπου $P(x) = x^3 - 6x^2 - 19x + 24$.

• Τι βαθμού είναι το P(x);	
• Γνωρίζετε κάποιον τύπο για να λύνετε εξισώσεις αυτού του βαθμού;	
• Για ποιους βαθμούς εξισώσεων γνωρίζετε τύπους;	
• Αφού δε γνωρίζετε κάποιον τύπο για να λύσετε τη συγκεκριμένη εξίσωση, τι άλλο μπορείτε να κάνετε;	
• Βρίσκουμε με κάποιον τρόπο ότι διαιρείται ακριβώς με το $x - 1$	

• Κάντε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-1$:
• Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης:
• Γράψτε το P(x) σαν γινόμενο πολυωνύμων: $P(x) =$

• Τώρα μπορείτε να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

Παράδειγμα 5

Λύστε την εξίσωση $2x^4 - x^3 - 2x^2 + x = 0$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x$

• Το $P(x)$ είναι βαθμού:	
• Για να λυθεί η εξίσωση πρέπει να κάνετε:	
Βρίσκουμε με κάποιον τρόπο ότι το $P(x)$ διαιρείται ακριβώς με το x	
• Κάντε τη διαίρεση του $P(x)$ με το x:	

• Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης:	
• Γράψτε το P(x) σαν γινόμενο πολυωνύμων: $P(x) =$	
• Οι βαθμοί των παραγόντων είναι:	και
• Μπορείτε να λύσετε την αρχική εξίσωση;	
• Ποιος παράγοντας έχει βαθμό που «δε βολεύει» για να λυθεί η εξίσωση;	

Πρέπει να ξανακάνετε μια διαίρεση.

• Διαιρέστε αυτόν τον παράγοντα με το $x + 1$.
• Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης:
• Ο παράγοντας που «δε βόλευε» μπορεί να γραφεί ως εξής:
• Άρα το P(x) γράφεται σαν γινόμενο παραγόντων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού ως εξής: $P(x) =$

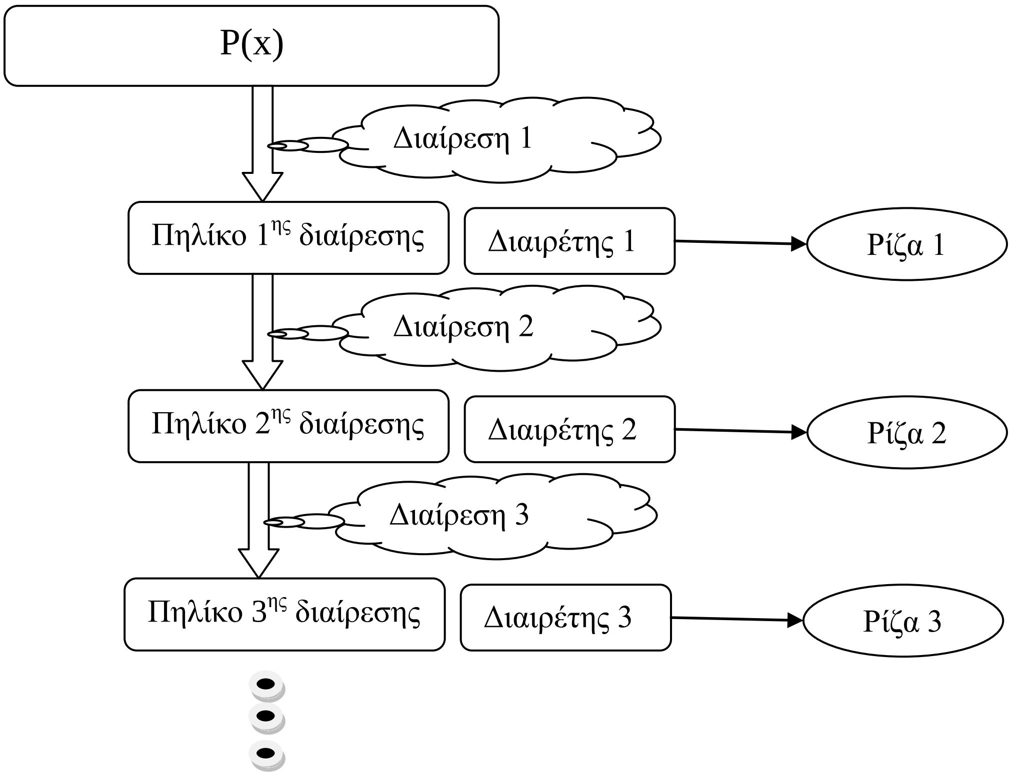
• Τώρα λύστε την εξίσωση P(x)=0

• Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

Άρα, για να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση P(x)=0 βαθμού μεγαλύτερου του 2:

Βρίσκουμε **ένα πολυώνυμο που διαιρεί** ακριβώς το P(x).	
Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης μας δίνει ένα τρόπο να γράψουμε **το P(x) σαν γινόμενο παραγόντων** με μικρότερους βαθμούς.	
Αν κάποιος παράγοντας έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2, τον **παραγοντοποιούμε διαρκώς** με διαιρέσεις, μέχρι να γίνουν όλοι οι παράγοντες βαθμού 1 και 2.	
Μόλις τα καταφέρουμε, βρίσκουμε τις **ρίζες του κάθε παράγοντα χωριστά**.	
Όλες οι ρίζες, όλων των παραγόντων, είναι και **οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης** P(x)=0.	
Ελέγχουμε για πιθανά λάθη, αντικαθιστώντας μία – μία τις λύσεις που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση και κάνοντας τις πράξεις	

Σχηματικά:



__**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!**__ *Το δύσκολο στη μέθοδο αυτή, είναι να βρούμε **με ποιο πολυώνυμο πρέπει να διαιρέσουμε** κάθε φορά!!! Δηλαδή να κάνουμε το πρώτο βήμα. Κάποιους τρόπους για να το καταφέρουμε θα δούμε στο επόμενο μάθημα.*

✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ ☺ ☹

Διαίρεση πολυωνύμων		
Παραγοντοποίηση πολυωνύμων με χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων		
Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων		

2) Να κάνετε τις επόμενες **διαιρέσεις** πολυωνύμων και για καθεμία από αυτές να βρείτε τον **διαιρετέο**, το **διαιρέτη**, το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο**. Στο τέλος να γράψετε την **ταυτότητα της διαίρεσης**.

   i. $\Delta(x) = x^5 + 7x - 1$ και $\delta(x) = x^4 + 4x^3 - x + 2$
   ii. $\Delta(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1$ και $\delta(x) = x^2 - 2x + 3$
   iii. $\Delta(x) = x^6 - 2x$ και $\delta(x) = x^3 + 1$
   iv. $\Delta(x) = 3x^4 + 40x^3 + 12x^2 - 10x + 2039$ και $\delta(x) = x + 13$

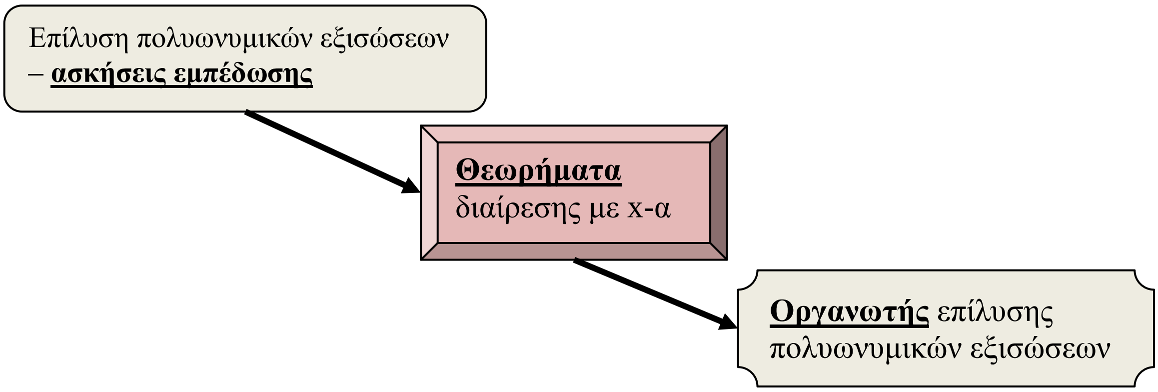
3) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$, όπου $P(x) = 2x^3 + 13x^2 - 67x + 30$ αν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 3$.

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 8</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Θεωρήματα διαίρεσης με x-α</u>



<u>*1. Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων – ασκήσεις εμπέδωσης*</u>

<u>Παράδειγμα 1</u>

Λύστε την εξίσωση $P(x) = 0$, όπου $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$, αν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 4$.

Διαίρεση:
$P(x) =$
Ρίζες του κάθε παράγοντα χωριστά:
Λύσεις της $P(x) = 0$:
Έλεγχος:

Παράδειγμα 2

Λύστε την εξίσωση $P(x) = 0$, όπου $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, αν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x + 1$ και με το $x + 2$.

Διαίρεση:
$P(x) =$
Παράγοντας που πρέπει να παραγοντοποιηθεί ξανά:
Διαίρεση:
Ο παράγοντας αυτός ως γινόμενο:
$P(x) =$
Ρίζες του κάθε παράγοντα χωριστά:
Λύσεις της $P(x) = 0$
Έλεγχος:

Παράδειγμα 3

Λύστε την εξίσωση $P(x) = 0$, όπου $P(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$, αν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 4$ και με το $x + 2$.

Διαίρεση:
$P(x) =$
Παράγοντας που πρέπει να παραγοντοποιηθεί ξανά:
Διαίρεση:
Ο παράγοντας αυτός ως γινόμενο:
$P(x) =$
Ρίζες του κάθε παράγοντα χωριστά:
Λύσεις της $P(x) = 0$
Έλεγχος:

2. Θεωρήματα διαίρεσης με x − α

Άσκηση

i. Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα με **τους διαιρέτες** και **τα υπόλοιπα** των διαιρέσεων στα παραπάνω παραδείγματα.

ii. Αυτοί οι **διαιρέτες** είναι και οι ίδιοι πολυώνυμα. Βρείτε τις **ρίζες** τους.

iii. Στη συνέχεια συμπληρώστε τις **ρίζες του αρχικού πολυωνύμου** P(x) σε κάθε περίπτωση (τις βρήκατε όταν λύσατε την εξίσωση P(x)=0):

	διαιρέτης	υπόλοιπο	ρίζα διαιρέτη	ρίζες του P(x)
Παράδειγμα 1				
Παράδειγμα 2 (1η διαίρεση)				
Παράδειγμα 2 (2η διαίρεση)				
Παράδειγμα 3 (1η διαίρεση)				
Παράδειγμα 3 (2η διαίρεση)				
Τι μορφής είναι ο διαιρέτης σε όλα τα παραδείγματα;				
Ποιο ήταν το υπόλοιπο της διαίρεσης σε όλα τα παραδείγματα;				
Η ρίζα του διαιρέτη είναι και ρίζα του P(x) σε όλα τα παραδείγματα;				

Ισχύει και γενικά!!! Δηλαδή, αν διαιρέσουμε κάποιο πολυώνυμο με κάποιο άλλο της μορφής x-α και βρούμε υπόλοιπο 0, τότε το α είναι ρίζα του P(x).

Ισχύει και το αντίστροφο!!! Δηλαδή, **αν μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να βρούμε έστω και μία ρίζα** του αρχικού πολυωνύμου, ας πούμε τον αριθμό α, και κάνουμε τη **διαίρεση με το x-α**, τότε **το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι 0** το πολυώνυμο θα γίνει γινόμενο, οπότε και η αρχική εξίσωση θα γίνει πιο εύκολη.

◈ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!

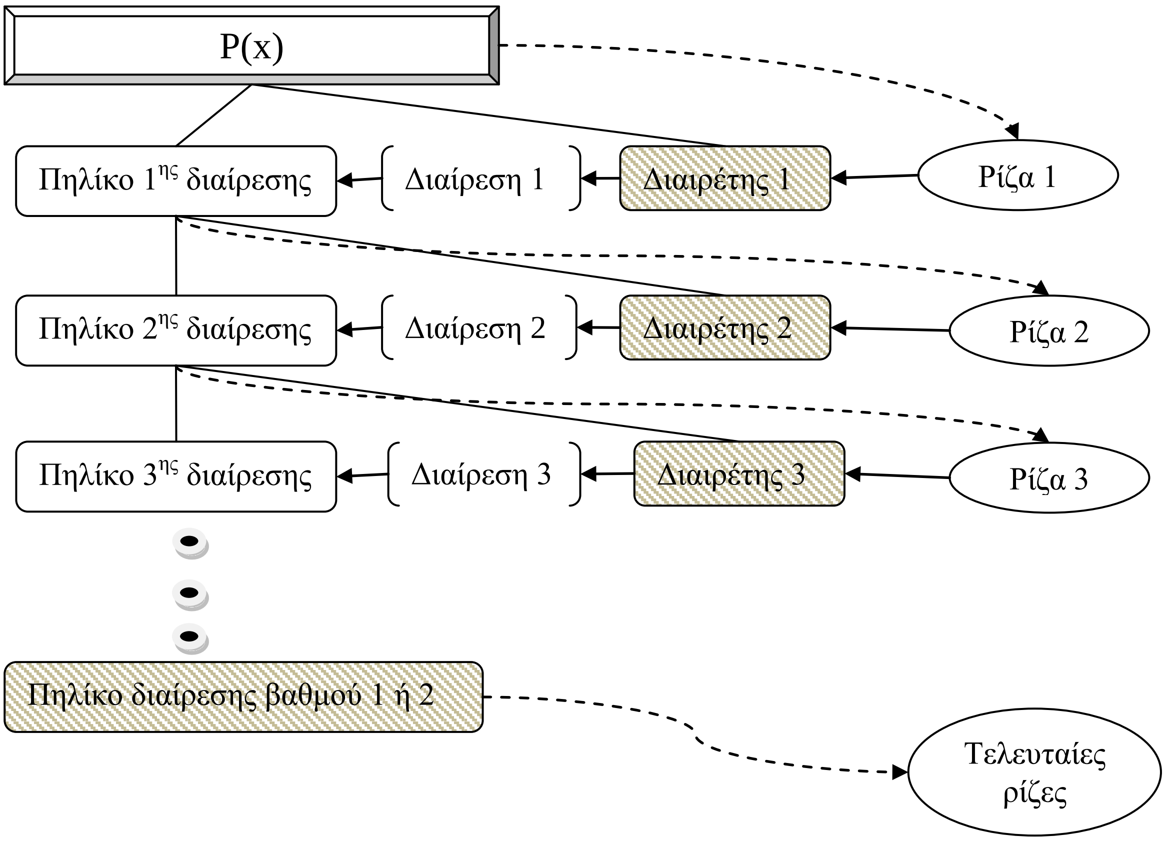
□ *Μέχρι τώρα, το δύσκολο ήταν να βρούμε **με ποιο πολυώνυμο πρέπει να διαιρέσουμε.***

□ *Τώρα ξέρουμε ότι αν βρούμε μια **ρίζα α** του πολυωνύμου,*

*θα **διαιρέσουμε με το x-α.***

□ ***Το δύσκολο** τώρα πια, είναι **να βρούμε μια ρίζα α** του αρχικού πολυωνύμου, για να κάνουμε τη **διαίρεση με το x-α.***

Έτσι, το σχήμα στο τέλος του προηγούμενου φύλλου εργασίας μπορεί να αλλάξει, για να φαίνεται και η σειρά με την οποία κάνουμε κάθε βήμα. Το σχήμα αυτό μπορείτε να το σχεδιάζετε κάθε φορά που λύνετε μια πολυωνυμική εξίσωση, συμπληρώνοντας στα πλαίσια τα στοιχεία της συγκεκριμένης άσκησης κάθε φορά.



□ Τα **βέλη** μας δείχνουν τη **σειρά** που πρέπει να γίνουν τα βήματα.

□ Οι **ρίζες του P(x)** θα είναι τελικά όλες οι ρίζες που βρήκαμε (**στους κύκλους**).

□ Για να γράψουμε το **P(x) σαν γινόμενο** με παράγοντες πολυώνυμα 1ου και 2ου βαθμού, σημειώνουμε τον **διαιρέτη** που βρήκαμε σε κάθε βήμα. Στο **τελευταίο βήμα** σημειώνουμε **και το πηλίκο** της διαίρεσης.

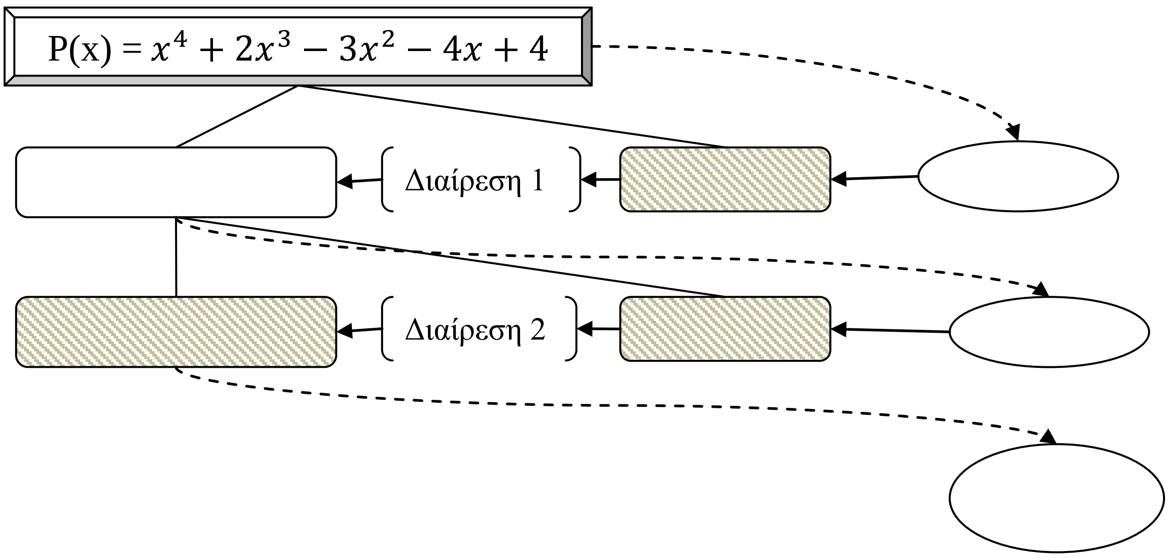
◈ *Ένας τρόπος να ξεκινήσουμε, είναι* ***<u>να δοκιμάσουμε</u>*** *στην αρχή κάποιους «εύκολους αριθμούς». Αν η αντίστοιχη τιμή του πολυωνύμου είναι 0, τότε είμαστε* ***τυχεροί*** *και ο αριθμός που δοκιμάσαμε είναι ρίζα. Μπορούμε να αρχίσουμε να διαιρούμε.*

«Εύκολοι αριθμοί» : $0,\ 1, -1,\ 2, -2$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Να λυθεί η εξίσωση $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$

Συμπληρώστε τα κενά στον οργανωτή με τα στοιχεία που θα βρείτε.



Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$		
Δοκιμάζουμε τους «εύκολους αριθμούς» και βρίσκουμε ότι μια ρίζα του $P(x)$ είναι το:		
Ο 1ος διαιρέτης θα είναι το:		
Διαίρεση 1:		
Το πηλίκο είναι βαθμού:		Πρέπει να ξαναγίνει μια διαίρεση.

Δοκιμάζουμε ξανά τους «εύκολους αριθμούς» και βρίσκουμε ότι μια ρίζα του πηλίκου είναι το:	

Διαίρεση 2:		
Το πηλίκο είναι βαθμού:		Σταματάμε εδώ!
Ρίζες του 2ου πηλίκου:		
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$		
Λύσεις της $P(x) = 0$ *(όλες οι ρίζες στο σχήμα):*		
Έλεγχος:		

Η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω στηρίζεται σε δύο απλά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (υπόλοιπου διαίρεσης με x-α)

> Το **υπόλοιπο** της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\boldsymbol{x-\alpha}$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \alpha$. Είναι δηλαδή $\underline{\boldsymbol{\upsilon = P(\alpha)}}$**.**

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στο παραπάνω θεώρημα που πρέπει να σημειώσετε;

◈**<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!</u>** *Το θεώρημα αυτό, μας δίνει ένα εύκολο τρόπο να υπολογίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με κάποιο πολυώνυμο της μορφής x-α,* ***<u>χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση</u>****!!!*

<u>Παράδειγμα 5</u>

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ με το $x - 2$

είναι το $P(2) =$ ☐

ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$

είναι το $P(1) =$ ☐

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΣΚΕΨΗ		
Το θεώρημα μας λέει κάτι για το υπόλοιπο μιας διαίρεσης. Ποια είναι αυτή η διαίρεση;		
Αφού δε γνωρίζουμε ποιο ακριβώς είναι το πολυώνυμο P(x), η μόνη σχέση που μπορούμε να γράψουμε είναι η ταυτότητα της διαίρεσης.		
Στην περίπτωσή μας ποια είναι τα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$;	$\Delta(x) =$	$\delta(x) =$
Ξαναγράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης, αντικαθιστώντας τα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με τα ίσα τους.		
Επειδή το x-α είναι βαθμού 1, το υπόλοιπο θα πρέπει να είναι ακόμα μικρότερου βαθμού, επομένως δε θα περιέχει x. Θα είναι δηλαδή ένας αριθμός που μπορούμε να τον ονομάσουμε απλά υ. Πως γράφεται τώρα η ταυτότητα της διαίρεσης;		
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $P(\alpha) = \upsilon$. Σκεφτόμαστε να αντικαταστήσουμε στην ταυτότητα το x με α, για να εμφανιστεί το P(α).		

Κάνουμε τώρα όσες πράξεις μπορούμε, μέχρι να καταλήξουμε στο ζητούμενο.	
ΓΡΑΦΟΥΜΕ	
Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha)$ είναι: $P(x)=(x-\alpha)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$. Επειδή το x-α είναι βαθμού 1, το υπόλοιπο θα πρέπει να είναι σταθερό πολυώνυμο. Έτσι, η ταυτότητα ξαναγράφεται: $P(x)=(x-\alpha)\cdot\pi(x)+\upsilon$. Θέτουμε $x=\alpha$ και η τελευταία σχέση γίνεται: $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot\pi(\alpha)+\upsilon$, δηλαδή $P(\alpha)=\upsilon$.	

Παράδειγμα 6

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=-x^3+75x+250$ με το $x-10$

είναι το $P(10)=$ ______

Άρα το 10 είναι ______ του P(x)

Η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

(ονομάστε το πηλίκο π(x), μην κάνετε τη διαίρεση για να το βρείτε)

Άρα το P(x) γράφεται σαν γινόμενο, με τον ένα παράγοντα να είναι το: ______

Παράδειγμα 7

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^5-1$ με το $x-1$

είναι το $P(1)=$ ______

Άρα το 1 είναι ______ του P(x)

Η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

(ονομάστε το πηλίκο π(x), μην κάνετε τη διαίρεση για να το βρείτε)

Άρα το P(x) γράφεται σαν γινόμενο, με τον ένα παράγοντα να είναι το: ______

◈**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!** *Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα (όπως φαίνεται και στα παραδείγματα 6 και 7) αν για κάποιο α βρω ότι* $\boldsymbol{P(\alpha) = 0}$*, τότε η* ***διαίρεση με το*** $\boldsymbol{x - \alpha}$ *θα δίνει* ***υπόλοιπο 0****.*

Αυτό σημαίνει ότι ***η ταυτότητα της διαίρεσης*** *θα μας δίνει ένα τρόπο να κάνουμε* ***γινόμενο το*** $\boldsymbol{P(x)}$ *και μάλιστα ο* ***ένας παράγοντας*** *θα είναι το* $\boldsymbol{x - \alpha}$*.*

Αναλυτικότερα, αυτή η παρατήρηση φαίνεται και στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διαίρεσης με x-α)

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα το** $\boldsymbol{x - \alpha}$ αν και μόνο αν το **α είναι ρίζα** του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $\boldsymbol{P(\alpha) = 0}$.

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στο παραπάνω θεώρημα που πρέπει να σημειώσετε;

ΘΥΜΑΜΑΙ

$\Rightarrow$	**Συνεπάγεται, επομένως, άρα, οπότε, αν… τότε**
$\Leftrightarrow$	**Ισοδύναμα, είναι ισοδύναμο με, αν και μόνο αν, τότε και μόνο τότε, αν.. τότε… και αντίστροφα**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

<u>Σκέψη:</u> *Διακρίνουμε, πρώτα απ’ όλα, τις προτάσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ισοδύναμες. Είναι εύκολο να το κάνουμε, γιατί χωρίζονται μεταξύ τους με τις λέξεις «αν και μόνο αν»*

Πρόταση 1:	Πρόταση 2:	Πρόταση 3:
Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \alpha$	το α είναι ρίζα του $P(x)$	$P(\alpha) = 0$

Σκέψη: *Παρατηρώ ότι οι προτάσεις 2 και 3 είναι ισοδύναμες, αφού ο ορισμός της ρίζας πολυωνύμου λέει ακριβώς αυτό (ότι δηλαδή το α ονομάζεται ρίζα του* $P(x)$*, αν* $P(\alpha) = 0$*)*
Οι προτάσεις 2 και 3 είναι ισοδύναμες από τον ορισμό της ρίζας πολυωνύμου.
Σκέψη: *Άρα μου μένει να αποδείξω ότι είναι ισοδύναμες οι προτάσεις 1 και 3.*
Υποθέτω ότι ισχύει η πρόταση 1, ότι δηλαδή το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \alpha$.   Άρα, θα υπάρχει κάποιο πολυώνυμο π(x), ώστε το $P(x)$ να γράφεται σαν γινόμενο: $P(x) = \pi(x)(x - \alpha)$
Σκέψη: *Θέλουμε να αποδείξουμε ότι* $P(\alpha) = 0$*, οπότε πρέπει να εμφανιστεί το* $P(\alpha)$*. Για να το κάνουμε αυτό, σκεφτόμαστε να αντικαταστήσουμε το x με α.*
Θέτουμε $x = \alpha$ και η τελευταία σχέση γράφεται: $P(\alpha) = \pi(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$, δηλαδή ισχύει η πρόταση 3
Αντίστροφα, υποθέτω ότι ισχύει η πρόταση 3, ότι δηλαδή $P(\alpha) = 0$.   Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x)\colon(x - \alpha)$ γράφεται $P(x) = (x - \alpha)\pi(x) + \upsilon$.   Από το θεώρημα για το υπόλοιπο της διαίρεσης με $x - \alpha$, το υπόλοιπο είναι ίσο με το $P(\alpha)$, άρα $\upsilon = P(\alpha) = 0$. Άρα η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται $P(x) = (x - \alpha)\pi(x)$, δηλαδή το $P(x)$ γράφεται σαν γινόμενο με τον ένα παράγοντα ίσο με το $x - \alpha$. Επομένως ισχύει η πρόταση 1.
Τελικά οι δύο προτάσεις θα είναι ισοδύναμες.

Εφαρμόστε τώρα το παραπάνω θεώρημα για να λύσετε την άσκηση που ακολουθεί.

Παράδειγμα 8 (ασκ. 3^{A}, §2.2.)

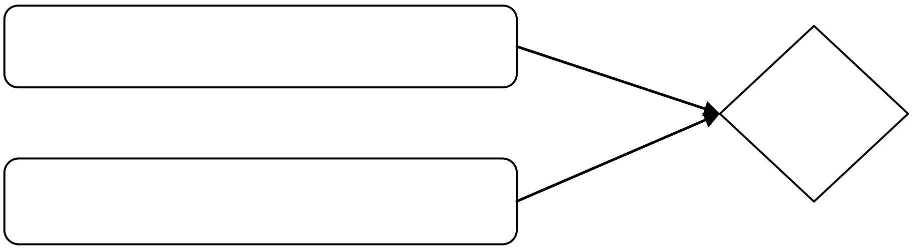
Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

ΠΡΙΝ: 1) Υπογραμμίστε φράσεις, σχέσεις και αριθμούς.

2) Θυμηθείτε το θεώρημα για παράγοντες της μορφής $x - \alpha$ και μεταφράστε

σε μαθηματικά τη φράση *«το x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου* $g(x)$*»*

3) Συμπληρώστε το παρακάτω σχήμα



<u>ΛΥΣΗ:</u>

1) Τι θα συμβεί αν ισχύουν <u>ταυτόχρονα</u> και τα δύο δεδομένα; Διαγράψτε τα.

(Υπόδειξη: Βρείτε το $g(1)$ με αντικατάσταση στον τύπο του $g(x)$)

2) Ονομάστε τη σχέση που βρήκατε (σχέση 1)

3) Η (σχέση 1) είναι εξίσωση με άγνωστο το k. Λύστε τη και βρείτε το k.

<u>ΜΕΤΑ:</u> Αντικαταστήστε με τον αριθμό που βρήκατε για το k και ελέγξτε.

✎ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ ☹ ☺

Παραγοντοποίηση πολυωνύμων		
Σε ποιες περιπτώσεις κάνουμε παραγοντοποίηση πολυωνύμων;		
Πότε χρειάζεται και άλλη παραγοντοποίηση πολυωνύμων;		
«εύκολοι αριθμοί»		
Θεώρημα υπολοίπου διαίρεσης με x-α		
Θεώρημα διαίρεσης με x-α		

2) Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$

3) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2$ με το $x + 1$. (ασκ.2[Α], §2.2.)

4) Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής x-α που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του P(x). (ασκ. 6[Α], §2.2.)

    i. $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$ με το $x + 3$.

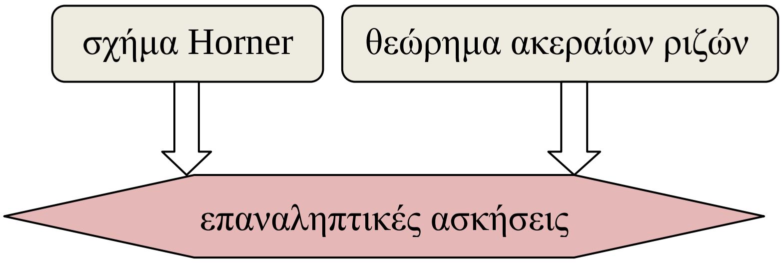
    ii. $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$ με το $x - \frac{1}{4}$

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 9</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Σχήμα Horner – Θεώρημα ακεραίων ριζών</u>



1. <u>*Σχήμα Horner*</u>

Την προηγούμενη φορά, είδαμε ότι για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του 2, **διαιρούμε με πολυώνυμα της μορφής x-α**, μέχρι να τη φέρουμε σε μια μορφή που να μπορούμε να λύσουμε πιο εύκολα.

Αφού διαιρούμε τόσο συχνά με πολυώνυμα της μορφής x-α, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε ένα πιο γρήγορο τρόπο να κάνουμε τέτοιου είδους διαιρέσεις (Μπορούμε όμως πάντα να κάνουμε τη διαίρεση και με τον τρόπο που μάθαμε ήδη).

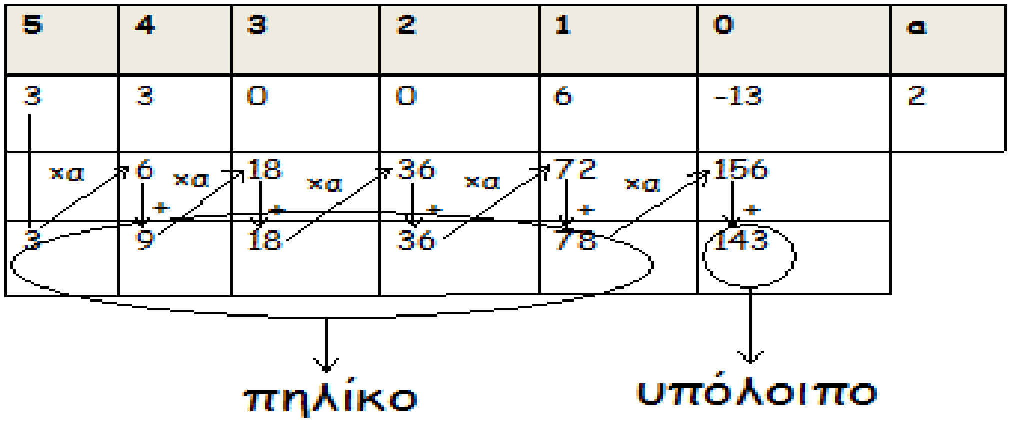
Ένας τέτοιος τρόπος «γρήγορης διαίρεσης» με πολυώνυμα της μορφής x-α είναι το **<u>ΣΧΗΜΑ HORNER</u>**. Ας το δούμε όμως αναλυτικά:

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θέλουμε να διαιρέσουμε το πολυώνυμο $P(x) = 3x^5 + 3x^4 + 6x - 13$ με το $x - 2$.

Κάντε πρώτα τη διαίρεση με το γνωστό τρόπο:

Ας δούμε τώρα την ίδια διαίρεση με το σχήμα Horner:



1η γραμμή:	**δυνάμεις του x**
2η γραμμή:	**συντελεστές του $P(x)$** (μαζί με τα μηδενικά)
3η και 4η γραμμή:	Ο πρώτος συντελεστής «κατεβαίνει» στην τελευταία γραμμή όπως είναι.
	Στη συνέχεια ακολουθούμε τα «βελάκια»: □ Διαγώνια (↗) κάνουμε **πολλαπλασιασμό με το α** □ Κάθετα (↓) κάνουμε **πρόσθεση**
Αποτέλεσμα διαίρεσης:	Το βρίσκουμε στην **τελευταία γραμμή (4η)** □ **Μέχρι το προτελευταίο** κουτάκι είναι οι συντελεστές του **πηλίκου.** □ Στο **τελευταίο** κουτάκι μας είναι το **υπόλοιπο**.

Σε αυτήν τη διαίρεση, το πηλίκο είναι: $\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$, ενώ το υπόλοιπο είναι: $\upsilon = 143$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!</u>

*1. Όταν θέλω να γράψω **το πηλίκο**, θυμάμαι οτι **ο βαθμός του είναι κατά 1 μικρότερος** από το βαθμό του διαιρετέου Δ.*

*2. Επίσης, θυμόμαστε ότι το υπόλοιπο έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη. Αφού το **σχήμα Horner** λειτουργεί **μόνο όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής x-α**, δηλαδή πρώτου βαθμού, **το υπόλοιπο στα σχήματα Horner θα είναι πάντα σταθερό** πολυώνυμο (δηλαδή, απλός αριθμός).*

Παράδειγμα 2

Να γίνει η διαίρεση του $P(x) = -x^3 + 75x - 250$ με το $x + 10$. (ασκ.4[A], παρ.2.2.,(i))

Παρατηρούμε ότι ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - a$, με $\boxed{a =}$

Θα κάνουμε σχήμα Horner για τη διαίρεση:

3	2	1	0	α

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι:	$\pi(x) =$
και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:	$\upsilon =$

Παράδειγμα 3

Να γίνει η διαίρεση του $P(x) = -3x^4$ με το $x - 2$. (ασκ.4[A], παρ.2.2.,(iv))

Παρατηρούμε ότι ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - a$, με $\boxed{a =}$

Θα κάνουμε σχήμα Horner για τη διαίρεση:

4	3	2	1	0	α

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι:	$\pi(x) =$
και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:	$\upsilon =$

Παράδειγμα 4

Για να διαιρέσουμε το $P(x) = 4x^3 + 16x^2 - 23x - 15$ με το $x + \frac{1}{2}$. (ασκ.4[A], παρ.2.2.,(v))

Παρατηρούμε ότι ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - \alpha$ με $\boxed{\alpha = \quad}$

Θα κάνουμε σχήμα Horner για τη διαίρεση:

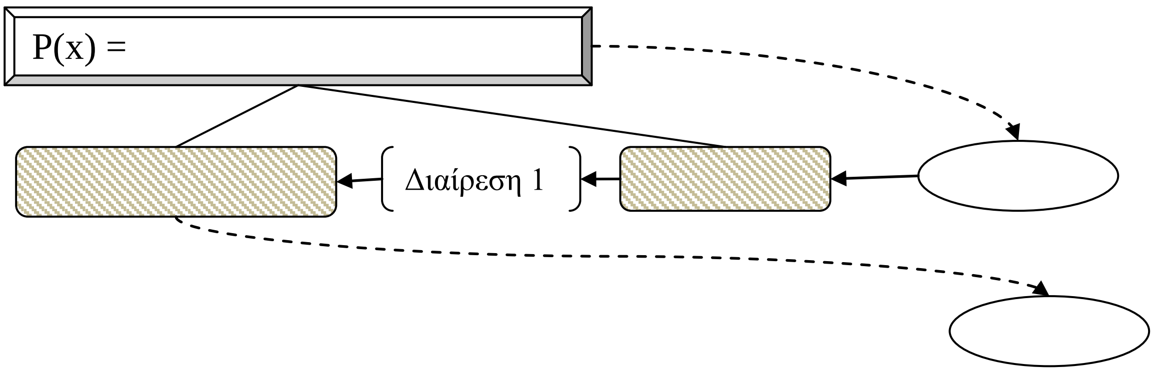
Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι:	$\pi(x) =$
και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:	$\upsilon =$

2. ***Θεώρημα ακεραίων ριζών***

Ας θυμηθούμε πώς μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις στο προηγούμενο μάθημα:

Παράδειγμα 5

Λύστε την εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0.$



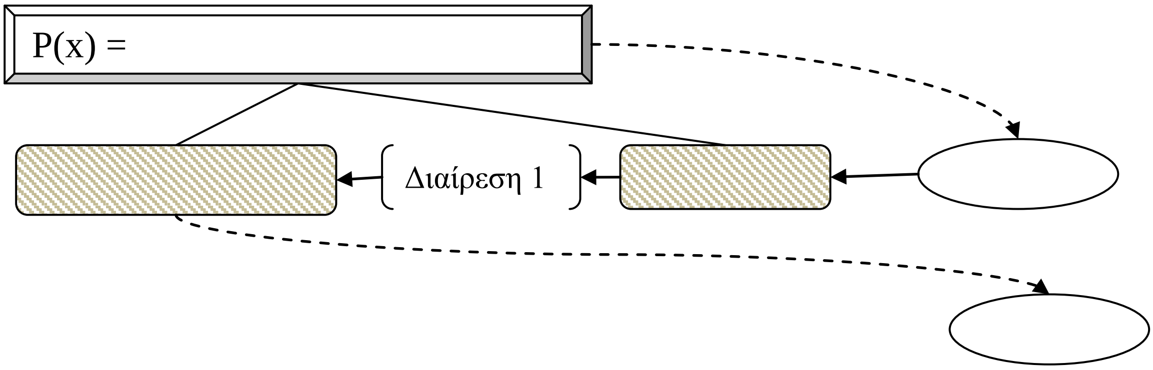
Το $P(x)$ είναι βαθμού:	
Για να λυθεί η εξίσωση πρέπει να κάνουμε:	

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι μια ρίζα του $P(x)$είναι το:	α=
Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-\alpha$. (Ας το κάνουμε με σχήμα Horner, αφού μόλις το μάθαμε)	
Το πηλίκο είναι βαθμού:	
Οι ρίζες του πηλίκου είναι:	
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$	
Οι λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι:	
Έλεγχος:	

Για να μη δοκιμάζουμε αριθμούς στην τύχη στο πρώτο βήμα, εφαρμόζουμε (αν γίνεται) το **ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ**, το οποίο μας λέει **ποιοι ακέραιοι** αριθμοί μπορεί να είναι **ρίζες** του πολυωνύμου μας, αν **όλοι οι συντελεστές** του είναι **ακέραιοι:** **<u>το 0 ή αυτοί που διαιρούν ακριβώς το σταθερό όρο!!!</u>**

Παράδειγμα 6

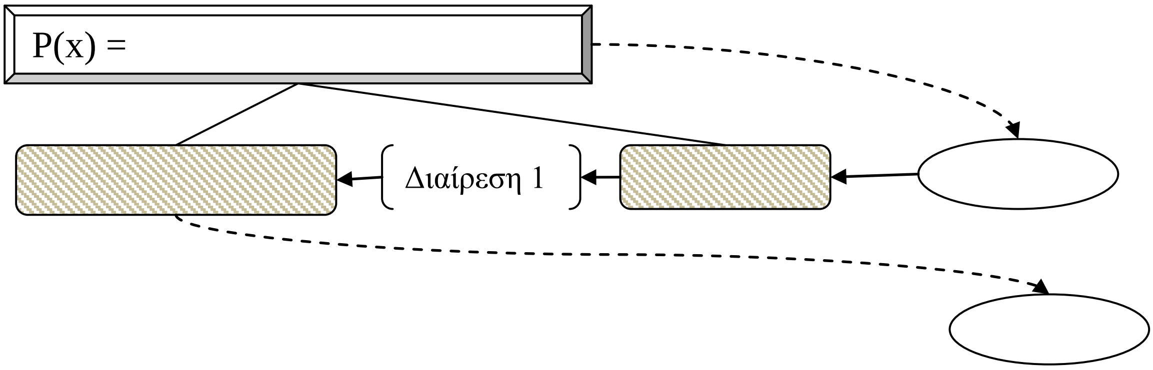
Λύστε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$. (ασκ.1^{A}, παρ.2.3.,(vi))



Το $P(x)$ είναι βαθμού:	
Για να λυθεί η εξίσωση πρέπει να κάνουμε:	
Το θεώρημα ακεραίων ριζών μας λέει ότι: οι **<u>πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$</u>** είναι το 0 ή οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι:	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
Δοκιμάζοντας αυτούς τους αριθμούς, βρίσκουμε ότι μια ρίζα του $P(x)$ είναι το:	$\alpha =$
Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x - \alpha$. (Ας το κάνουμε με σχήμα Horner, αφού μόλις το μάθαμε)	
Το πηλίκο είναι βαθμού:	
Οι ρίζες του πηλίκου είναι:	
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$	
Οι λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι:	
Έλεγχος:	

Παράδειγμα 7

Λύστε την εξίσωση $x^3+2x^2-9x-18=0$. (ασκ.1[A], παρ.2.3.,(ii))



Το $P(x)$ είναι βαθμού:	
Για να λυθεί η εξίσωση πρέπει να κάνουμε:	
Το θεώρημα ακεραίων ριζών μας λέει ότι: οι **πιθανές ακέραιες ρίζες του $\boldsymbol{P(x)}$** είναι το 0 ή οι διαιρέτες του -18, δηλαδή οι:	
Δοκιμάζοντας αυτούς τους αριθμούς, βρίσκουμε ότι μια ρίζα του $P(x)$ είναι το:	$\alpha =$
Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-\alpha$. (Ας το κάνουμε με σχήμα Horner, αφού μόλις το μάθαμε)	
Το πηλίκο είναι βαθμού:	
Οι ρίζες του πηλίκου είναι:	
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$	
Οι λύσεις της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι:	
Έλεγχος:	

Ας δούμε τώρα τι ακριβώς λέει το θεώρημα Ακεραίων Ριζών που χρησιμοποιήσαμε και την απόδειξή του:

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακεραίων ριζών)

Θεωρούμε την πολυωνυμική εξίσωση

$$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0.}$$

Αν (i) **όλοι οι συντελεστές** είναι **ακέραιοι** και

(ii) ο **ακέραιος** $\boldsymbol{\rho \neq 0}$ είναι **ρίζα** της εξίσωσης,

τότε ο ρ είναι **διαιρέτης του σταθερού όρου** $\boldsymbol{\alpha_0}$.

• Υπάρχει κάποια λεπτομέρεια στο παραπάνω θεώρημα που πρέπει να σημειώσετε;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

<u>Σκέψη:</u> *Υποθέτουμε ότι ισχύουν όλα όσα έχει στις υποθέσεις του το θεώρημα, δηλαδή ότι* □ *όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι,* □ *ότι $\rho \neq 0$,* □ *ότι το ρ είναι ακέραιος και* □ *ότι το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.* *Θα αποδείξουμε ότι τότε ισχύει και το συμπέρασμα του θεωρήματος, δηλαδή ότι το ρ διαιρεί το σταθερό όρο.*
Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, αν αντικαταστήσουμε το x με ρ, η ισότητα που θα προκύψει πρέπει να ισχύει.
Κάνοντας αντικατάσταση έχουμε: $\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$

Σκέψη: *Θα κρατήσουμε στο πρώτο μέλος μόνο το* α_0*, αφού αυτό είναι ο σταθερός όρος που μας ενδιαφέρει*
Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα: $\alpha_0 = -\alpha_\nu \rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \cdots - \alpha_1 \rho$
Σκέψη: *Τώρα στο δεύτερο μέλος έχουμε κοινό παράγοντα το ρ.*
Ισοδύναμα: $\alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1)$
Σκέψη: *Έτσι, όμως, έχουμε γράψει το* α_0 *σαν γινόμενο του ρ επί κάποιον άλλο αριθμό (αυτόν μέσα στην παρένθεση).* *Επίσης, αυτός ο αριθμός μέσα στην παρένθεση προκύπτει από πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις μεταξύ των* $\rho,\ \alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_1$ *που είναι ακέραιοι. Άρα και αυτός ο αριθμός θα είναι ακέραιος.*
Ο αριθμός $-\alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1$ είναι ακέραιος, αφού προκύπτει από πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις μεταξύ των ακεραίων $\rho,\ \alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_1$. Επομένως, το α_0 γράφεται σαν γινόμενο δύο ακεραίων, ο ένας από τους οποίους είναι το ρ. Άρα το ρ διαιρεί το α_0.

<u>Παρατήρηση</u>

Το θεώρημα υποθέτει ότι το ρ δεν είναι 0. Αν ήταν τι θα συνέβαινε;

- Αντικαταστήστε στην εξίσωση του θεωρήματος το x με το 0. Τι προκύπτει;

- Γιατί πιστεύετε ότι εξετάζουμε χωριστά αυτή την περίπτωση;

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Αν δοκιμάσουμε όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες, αλλά καμία δε μηδενίζει το πολυώνυμο, αυτό ***<u>δε σημαίνει ότι το πολυώνυμο δεν έχει ρίζες!!!</u>*** *Απλά σίγουρα,* ***<u>δεν έχει ακέραιες</u>*** *ρίζες!!! Θα μπορούσε βέβαια να μην έχει* ***καθόλου ρίζες****, αλλά θα μπορούσε και να έχει για ρίζα* ***ένα κλάσμα****, ή μία* ***τετραγωνική ρίζα*** *κτλ.*

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να βρούμε ρίζες του πολυωνύμου με κάποιο άλλο τρόπο. π.χ. να αρχίσουμε να δοκιμάζουμε κλάσματα στην τύχη!!! Αυτό, όπως καταλαβαίνετε, όμως, μπορεί να μας πάρει ΠΟΛΥ ΚΑΙΡΟ και πάλι να μην τα καταφέρουμε.

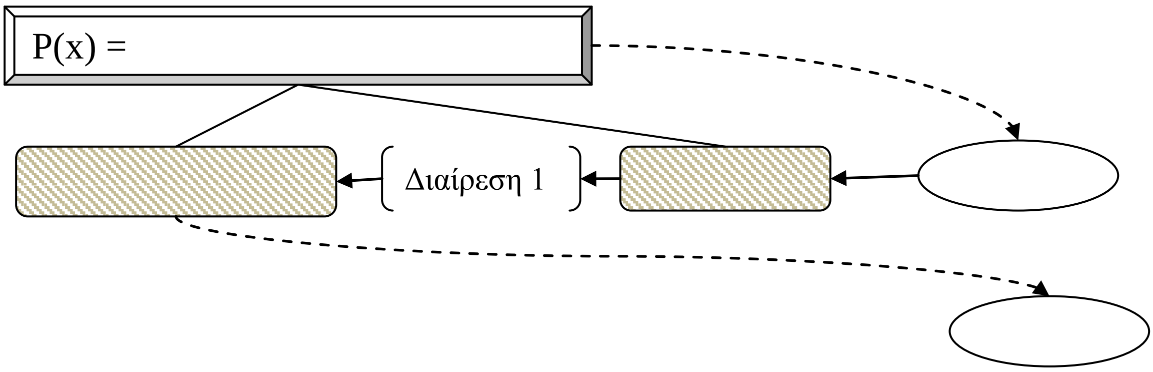
*Ακριβώς αυτός είναι και ο λόγος που είπαμε (φύλλα εργασίας 3 και 5) ότι σε αυτό το κεφάλαιο **θα μάθουμε να λύνουμε μόνο συγκεκριμένο είδος πολυωνυμικών εξισώσεων** και όχι όλες!!!*

3. <u>*Επαναληπτικές ασκήσεις*</u>

Στο σημείο αυτό έχουμε ήδη δει όλα όσα χρειαζόμαστε, για να λύσουμε ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ!!! Ας λύσουμε μερικές.

<u>Παράδειγμα 8</u>

Λύστε την εξίσωση $x^3 + x^2 - 2 = 0$ (ασκ.1[A], παρ.2.3.,(v))

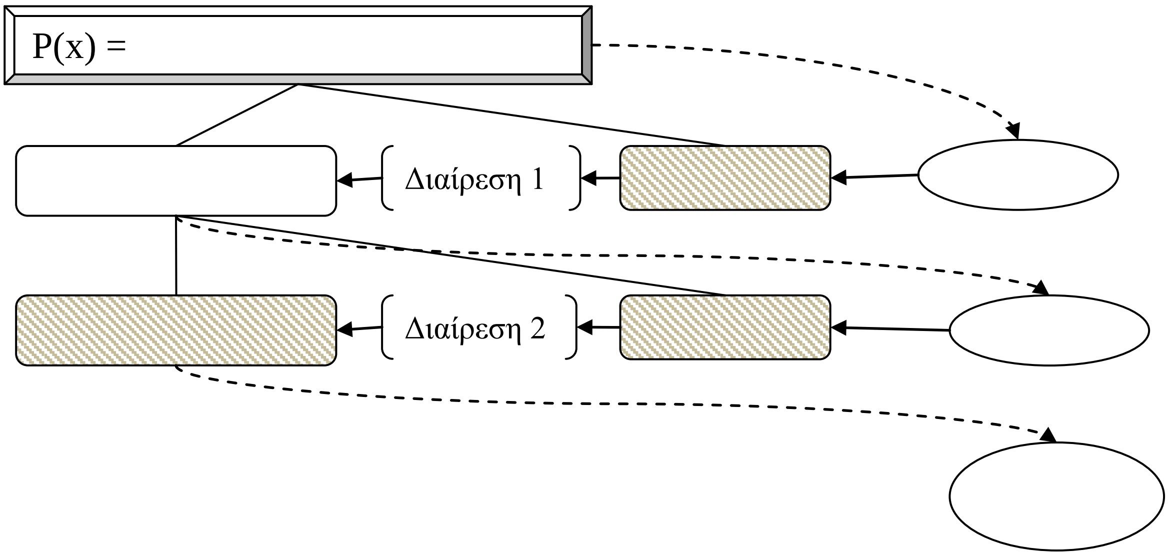


Βαθμός:	
Πιθανές ακέραιες ρίζες:	
Μία ρίζα είναι το:	$\alpha =$
Θα διαιρέσουμε με το:	
Διαίρεση:	

Πηλίκο:
Ρίζες πηλίκου:
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$
Λύσεις εξίσωσης:
Έλεγχος:

Παράδειγμα 9

Λύστε την εξίσωση $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$ (ασκ.1[A], παρ.2.3.,(x))

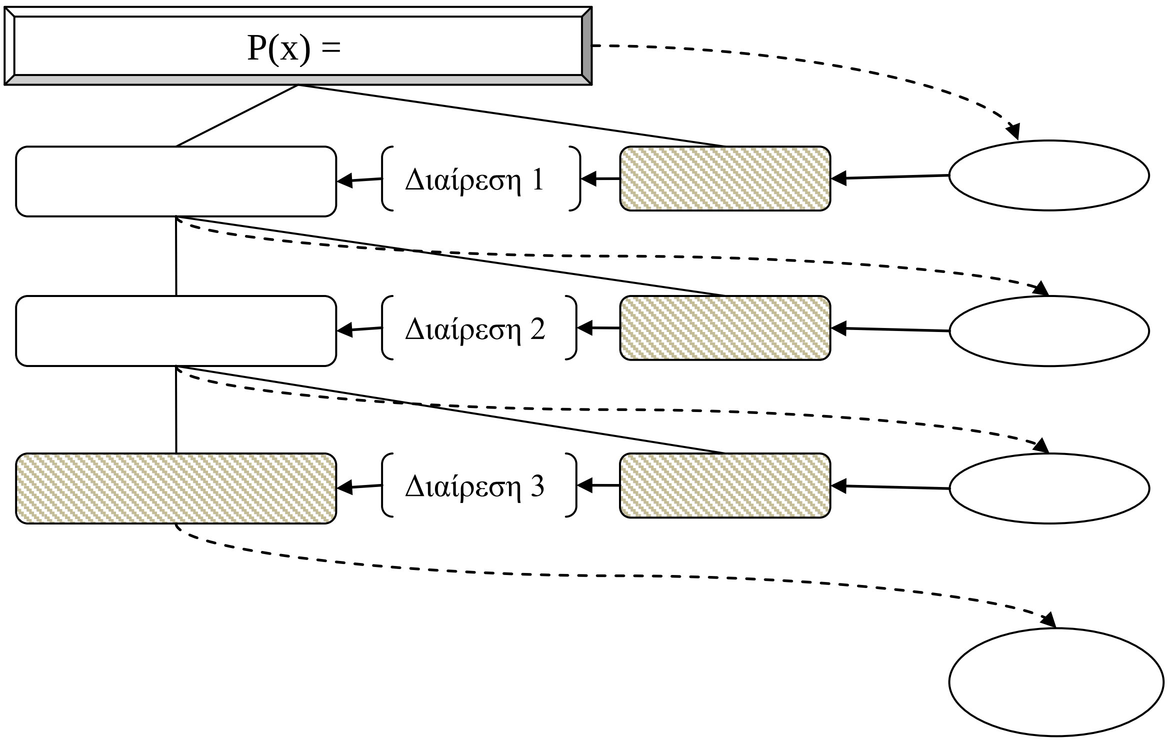


Βαθμός:
Πιθανές ακέραιες ρίζες:
Μία ρίζα είναι το:

Διαίρεση 1:
Πηλίκο 1:
Πιθανές ακέραιες ρίζες του πηλίκου 1:
Μία ρίζα είναι το:
Διαίρεση 2:
Πηλίκο 2:
Ρίζες πηλίκου 2:
Το $P(x)$ σαν γινόμενο: $P(x) =$
Λύσεις εξίσωσης:
Έλεγχος:

Παράδειγμα 10

Λύστε την εξίσωση $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$ (ασκ.1[A], παρ.2.3.,(iii))



✎ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ

☺ ☹

σχήμα Horner		
θεώρημα ακεραίων ριζών		
Βήματα επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων		

2) Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις με χρήση του σχήματος Horner. Στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της κάθε διαίρεσης.

   i. $(x^3+512):(\mathrm{x}+8)$ (ασκ.4^A, §2.2.,(ii))

   ii. $(4x^3+16x^2-23x-15):(\mathrm{x}+\frac{1}{2})$ (ασκ.4^A, §2.2.,(v))

   iii. $(3x^2-2ax-8a^2):(\mathrm{x}-2\alpha)$ (ασκ.10^A, §2.2.,(i))

3) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

   i. $x^3+8=7(x^2+5x+6)+9x^2-36$ (ασκ.1^A, §2.3.,(ix))

   ii. $3x^3+8x^2-15x+4=0$ (ασκ.2^A, §2.3.,(ii))

<u>Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>

<u>Φύλλο εργασίας 10</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>Πολυωνυμικές ανισώσεις</u>

Αν και ο τίτλος του κεφαλαίου είναι «Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ», οι ίδιες μέθοδοι που μάθαμε για την επίλυση εξισώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

Τι είναι όμως πολυωνυμική ανίσωση; Είναι μια ανισότητα της μορφής:

$$«Πολυώνυμο» \quad > \quad \geq \quad \leq \quad < \quad 0$$

Όπως και για τις εξισώσεις, θα προσπαθούμε να μετατρέπουμε το πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 και 2. Αυτό γιατί τέτοιου είδους ανισώσεις γνωρίζουμε ήδη να λύνουμε. Ας θυμηθούμε αυτές τις απλές περιπτώσεις ανισώσεων:

1. ***<u>Ανισώσεις 1^ου^ βαθμού</u>***

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση $2x > 1$.

• «Μεταφέρουμε» **όλους τους όρους στο 1^ο^ μέλος** και αφήνουμε στο 2^ο^ μέλος μόνο το 0.

• Προκύπτει η ανίσωση:

• «Ξεχνάμε» το σύμβολο της ανισότητας και **βρίσκουμε τη ρίζα** του πολυωνύμου, λύνοντας μια ΕΞΙΣΩΣΗ, όπως έχουμε μάθει.

• Προκύπτει η εξίσωση:

•Λύστε την εξίσωση:

• Κατασκευάζουμε ένα πίνακα, όπως αυτόν που μάθαμε στην Α' Λυκείου:

1.Στην 1η γραμμή γράφουμε τη ρίζα που βρήκαμε και τα $\pm\infty$:

2.Συμπληρώνουμε τη 2η γραμμή του πίνακα ως εξής:

□ Στο πρώτο κουτάκι γράφουμε το πολυώνυμο της ανίσωσης.

□ Κάτω από τη ρίζα του πολυωνύμου βάζουμε την τιμή 0.

□ Στα άλλα δύο κουτάκια βάζουμε + ή –

Ανάλογα με τις τιμές που παίρνει το πολυώνυμο σε αυτά τα διαστήματα. Αυτό μπορούμε να το βρούμε δοκιμάζοντας ένα αριθμό μικρότερο του ½ (π.χ. το 0) και ένα μεγαλύτερο του ½ (π.χ. το 1).

Πολυώνυμο	Τιμές του πολυωνύμου					
	$-\infty$	(0)	$\frac{1}{2}$		(1)	$+\infty$
$2x-1$		$-$	0		+	

• «Ξαναθυμόμαστε» το σύμβολο της ανίσωσης. Θέλαμε να λύσουμε την ανίσωση:

• Κοιτάζουμε στον πίνακα. Πότε οι τιμές του πολυωνύμου είναι >0;;;

Χρωματίστε το κομμάτι του πίνακα που μας ενδιαφέρει.

• Γράψτε το διάστημα που χρωματίσατε με σύμβολα:

• Τελικά λύσεις της ανίσωσης είναι τα: $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Λύστε την ανίσωση $-2-5x \leq 7$.

• Μετατρέπουμε την ανίσωση στη μορφή «$\pi o\lambda\upsilon\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o$» ≤ 0.

• Προκύπτει η ανίσωση:

• «Ξεχνάμε» το σύμβολο της ανισότητας και **βρίσκουμε τη ρίζα** του πολυωνύμου.

• Προκύπτει η εξίσωση:

•Λύστε την εξίσωση:

• Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Πολυώνυμο	Τιμές του πολυωνύμου
	$-\infty$ $+\infty$
	0

• «Ξαναθυμόμαστε» το σύμβολο της ανίσωσης. Θέλαμε να λύσουμε την ανίσωση:

• Πότε οι τιμές του πολυωνύμου είναι ≤0;;; Χρωματίστε το κομμάτι του πίνακα που μας ενδιαφέρει.

• Γράψτε το διάστημα που χρωματίσατε με σύμβολα:

• Τελικά λύσεις της ανίσωσης είναι τα: $x \in$

2. ***Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού***

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο λύνουμε και ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να θυμηθούμε τον τρόπο.

Παράδειγμα 3

Λύστε την ανίσωση $x^2 < -2x + 4$.

- Μετατρέπουμε την ανίσωση στη μορφή «$πολυώνυμο$» < 0.

- «Ξεχνάμε» το σύμβολο της ανισότητας και **βρίσκουμε τις ρίζες** του πολυωνύμου.
- Προκύπτει η εξίσωση:
- Λύστε την εξίσωση:

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα (τώρα οι **ρίζες είναι δύο**, άρα σημειώνουμε δύο τιμές του πολυωνύμου με τιμή 0 και ψάχνουμε το **πρόσημο για τρία** κουτάκια):

Πολυώνυμο	Τιμές του πολυωνύμου			
	$-\infty$			$+\infty$
		0	0	

- «Ξαναθυμόμαστε» το σύμβολο της ανίσωσης. Θέλαμε να λύσουμε την ανίσωση:

- Πότε οι τιμές του πολυωνύμου είναι <0;;; Χρωματίστε το κομμάτι του πίνακα που μας ενδιαφέρει.
- Τελικά λύσεις της ανίσωσης είναι τα: $x \in$

Παράδειγμα 4

Λύστε την ανίσωση $x^2 + 4 \geq 2x$.

- Μετατρέπουμε την ανίσωση στη μορφή «$\pi o\lambda\upsilon\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o$» ≥ 0.

- «Ξεχνάμε» το σύμβολο της ανισότητας και **βρίσκουμε τις ρίζες** του πολυωνύμου.
- Προκύπτει η εξίσωση:
- Λύστε την εξίσωση:

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα. Τώρα **δεν υπάρχουν ρίζες**, άρα ψάχνουμε το πρόσημο για ένα μόνο κουτάκι:

Πολυώνυμο	Τιμές του πολυωνύμου
	$-\infty$ $+\infty$

- «Ξαναθυμόμαστε» το σύμβολο της ανίσωσης. Θέλαμε να λύσουμε την ανίσωση:

- Πότε οι τιμές του πολυωνύμου είναι ≥0;;; Χρωματίστε το κομμάτι του πίνακα που μας ενδιαφέρει.
- Τελικά λύσεις της ανίσωσης είναι τα: $x \in$

3. Ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2

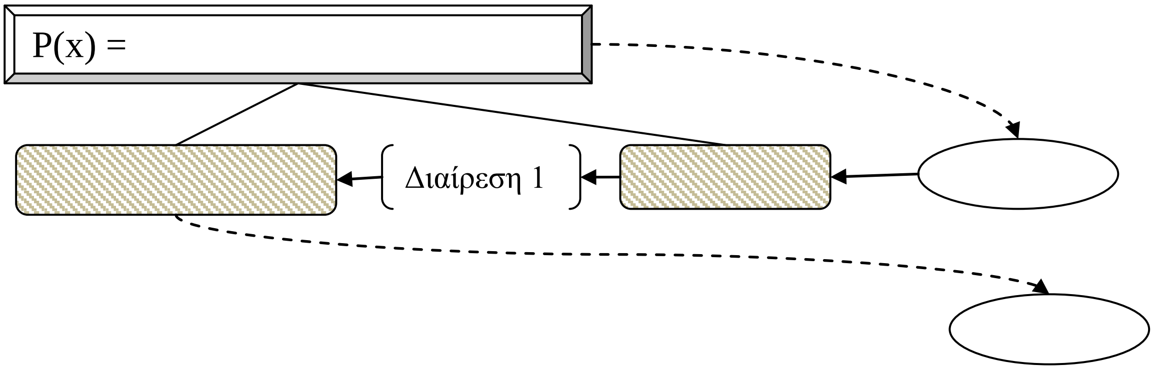
Παράδειγμα 5

Να λυθεί η ανίσωση $x^3 + 2x - 3 \geq 0$.

Η ανίσωση είναι ήδη στη μορφή «πολυώνυμο» ≥ 0, οπότε περνάμε στο $2^{ο}$ βήμα.

- «Ξεχνάμε» το σύμβολο της ανισότητας και **βρίσκουμε τις ρίζες** του πολυωνύμου.

• Προκύπτει η εξίσωση:	
•Είναι βαθμού:	
•Για να τη λύσουμε πρέπει να κάνουμε:	



• Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι:	
• Με δοκιμές βρίσκουμε μια ρίζα, την:	
• Διαιρούμε με το πολυώνυμο:	

- Διαίρεση:

• Ταυτότητα της διαίρεσης:	
• Το πηλίκο είναι βαθμού:	
• Ρίζες του πηλίκου:	
• Ρίζες της εξίσωσης:	

• Κατασκευάζουμε τον πίνακα. Τώρα, για **κάθε παράγοντα** του πολυωνύμου θα έχουμε **διαφορετική γραμμή**. Θα τη συμπληρώσουμε «ξεχνώντας» τις υπόλοιπες κάθε φορά. **<u>Προσοχή στη σειρά των ριζών</u>**!!! Πρέπει να είναι από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη!

Πολυώνυμο	Τιμές του πολυωνύμου
	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	0
x^2+x+3	
P(x)	0

Για το **αρχικό πολυώνυμο** θα κατασκευάσουμε **μια γραμμή στο τέλος** του πίνακα. Για να τη συμπληρώσουμε, θυμόμαστε:

□ Αν κάποιος παράγοντας είναι 0, τότε είναι 0 και το αρχικό πολυώνυμο. Άρα όλες οι ρίζες όλων των παραγόντων είναι ρίζες και του αρχικού.

□ Τους κανόνες του πολλαπλασιασμού ακεραίων:

$+\cdot+=+$
$-\cdot-=+$
$+\cdot-=-$

• «Ξαναθυμόμαστε» το σύμβολο της ανίσωσης. Θέλαμε να λύσουμε την ανίσωση:

• Πότε οι τιμές **του αρχικού πολυωνύμου** είναι ≥0;;; Χρωματίστε το κομμάτι του πίνακα που μας ενδιαφέρει (μόνο στην τελευταία γραμμή).

• Τελικά λύσεις της ανίσωσης είναι τα: $x \in$

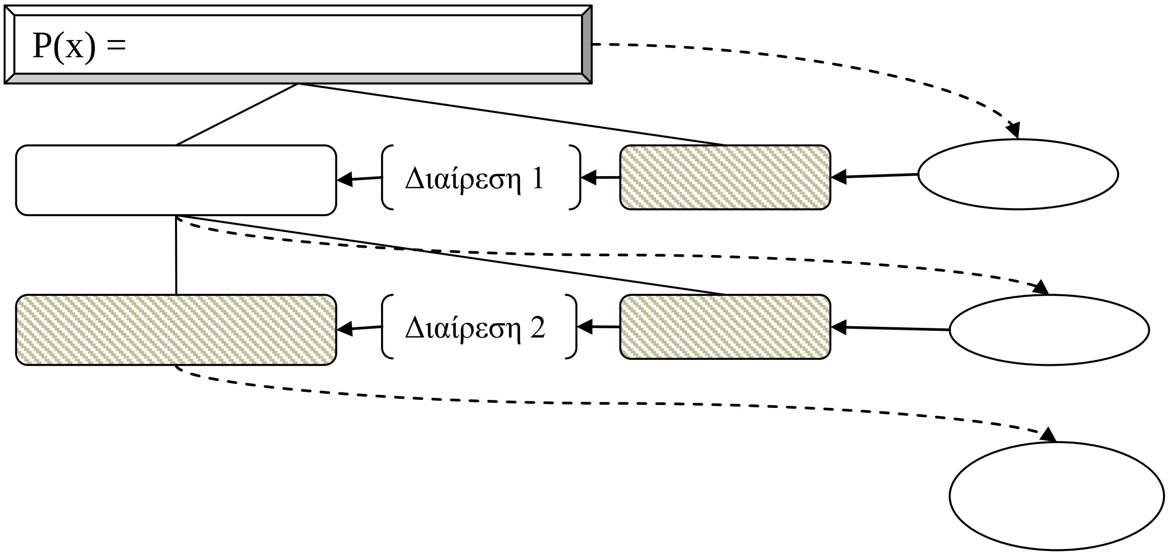
Άρα, για να λύσουμε μια ανίσωση βαθμού μεγαλύτερου του 2 εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1^{ο}: **Μορφή**	Μετατρέπουμε την ανίσωση στη μορφή: Πολυώνυμο του x $\left(> \;\; < \;\; \leq \;\; \geq \right)$	
Βήμα 2^{ο}: **Ονομάζουμε**	Ονομάζουμε το πολυώνυμο του πρώτου μέρους P(x).	
Βήμα 3^{ο}: **Παραγοντοποιούμε**	Παραγοντοποιούμε το P(x).	
Βήμα 4^{ο}: **Εξίσωση**	Γράφουμε την αντίστοιχη **πολυωνυμική εξίσωση** και τη **λύνουμε**.	
Βήμα 5^{ο}: **Πίνακας**	Συμπληρώνουμε τον **πίνακα.** □ Με διαφορετική γραμμή για κάθε παράγοντα που βρήκαμε για το P(x). Βάζοντας όλες τις **ρίζες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη**. □ Στην **τελευταία γραμμή** σημειώνουμε τις ρίζες του P(x) και το πρόσημο σε κάθε διάστημα (από τους κανόνες των προσήμων).	
Βήμα 6^{ο}: **Λύση**	Επιλέγουμε τις **τιμές που επαληθεύουν** την ανίσωση	

<u>Παράδειγμα 6</u>

Να λυθεί η ανίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

Βήμα 1^{ο}: **Μορφή**	Η ανίσωση είναι ήδη στη μορφή «πολυώνυμο»< 0.	
Βήμα 2^{ο} **Ονομάζουμε**	Ονομάζουμε το πολυώνυμο του πρώτου μέρους P(x). P(x)=	
Βήμα 3^{ο}: **Παραγοντοποιούμε**	Παραγοντοποιούμε το P(x).	

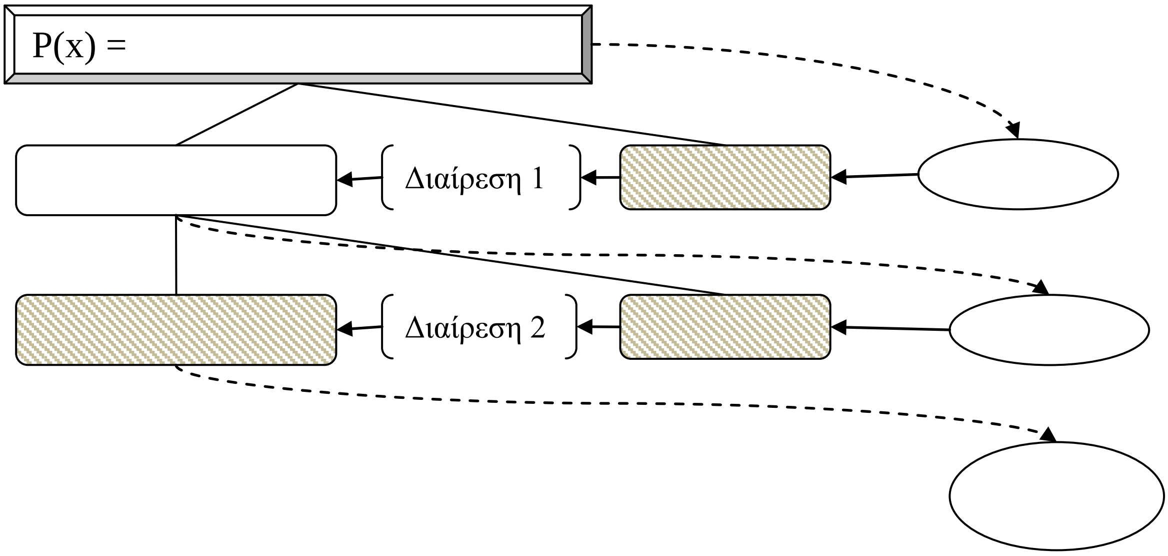

P(x) =
Διαίρεση 1
Διαίρεση 2

<table>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 4^ο: Εξίσωση</td><td>Γράφουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση και τη λύνουμε.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 5^ο: Πίνακας</td><td>Συμπληρώνουμε τον πίνακα.
<table>
<tr><td>Πολυώνυμο</td><td>Τιμές του πολυωνύμου</td></tr>
<tr><td></td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P(x)</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 6^ο: Λύση</td><td>Επιλέγουμε τις τιμές που επαληθεύουν την αρχική ανίσωση</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

<u>Παράδειγμα 7</u>

Να λυθεί η ανίσωση $x^4 > 16$.

<table>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 1^ο: Μορφή</td><td>Γράφουμε την ανίσωση στη μορφή «πολυώνυμο»>0</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 2^ο
Ονομάζουμε</td><td>Ονομάζουμε το πολυώνυμο του πρώτου μέρους P(x).</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>P(x)=</td></tr>
<tr><td>Βήμα 3^ο:
Παραγοντοποιούμε</td><td>Παραγοντοποιούμε το P(x).</td><td></td></tr>
</table>

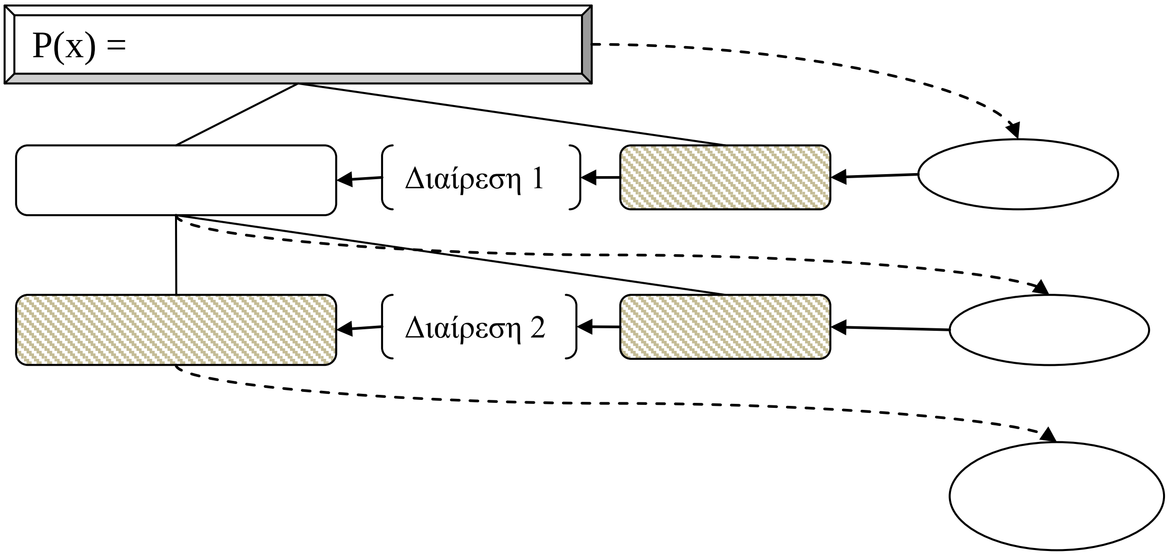

P(x) =
Διαίρεση 1
Διαίρεση 2

<table>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 4^ο: Εξίσωση</td><td>Γράφουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση και τη λύνουμε.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 5^ο: Πίνακας</td><td>Συμπληρώνουμε τον πίνακα.
<table>
<tr><td>Πολυώνυμο</td><td>Τιμές του πολυωνύμου</td></tr>
<tr><td></td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P(x)</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Βήμα 6^ο: Λύση</td><td>Επιλέγουμε τις τιμές που επαληθεύουν την αρχική ανίσωση</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

<u>Παράδειγμα 8</u>

Να λυθεί η ανίσωση $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\leq 0$. (ασκ. 4^A (ii), §2.3)

<table>
<tr><td>Βήμα 1^ο: Μορφή</td><td>Η ανίσωση είναι ήδη στη μορφή «πολυώνυμο»<0.</td><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 2^ο
Ονομάζουμε</td><td>P(x)=</td><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 3^ο:
Παραγοντοποιούμε</td><td></td><td></td></tr>
</table>


P(x) =
Διαίρεση 1
Διαίρεση 2

<table>
<tr><td>Βήμα 4^{ο}: Εξίσωση</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 5^{ο}: Πίνακας</td><td>Συμπληρώνουμε τον πίνακα.
<table>
<tr><td>Πολυώνυμο</td><td>Τιμές του πολυωνύμου</td></tr>
<tr><td></td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P(x)</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 6^{ο}: Λύση</td><td></td><td></td></tr>
</table>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ (Βήματα επίλυσης πολυωνυμικών ανισώσεων)

Βήμα 1^{o}: **Μορφή**		
Βήμα 2^{o}: **Ονομάζουμε**		
Βήμα 3^{o}: **Παραγοντοποιούμε**		
Βήμα 4^{o}: **Εξίσωση**		
Βήμα 5^{o}: **Πίνακας**		
Βήμα 6^{o}: **Λύση**		

2) Λύστε τις παρακάτω πολυωνυμικές ανισώσεις (ασκ. 4^{A} , §2.3):

   i. $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$

   ii. $x^3 - 3x + 2 < 0$

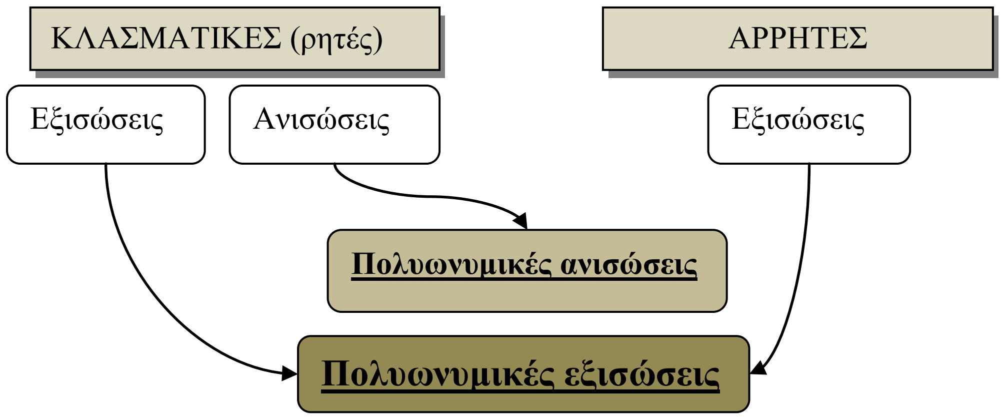
   iii. $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0$

<u>**Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις**</u>

<u>**Φύλλο εργασίας 11**</u>

Στο μάθημα αυτό θα δούμε:

<u>**Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές**</u>



Οι τεχνικές που έχουμε μάθει μέχρι τώρα μπορεί να χρησιμεύσουν και για την επίλυση **άλλων ειδών εξισώσεων και ανισώσεων**, που αν και **δεν είναι πολυωνυμικές**, μπορούμε να τις **ΑΝΑΓΑΓΟΥΜΕ σε πολυωνυμικές**.

Δηλαδή, να αρχίσουμε να τις λύνουμε και **μετά από κάποιο σημείο** να αρκεί **να λύσουμε μια πολυωνυμική** εξίσωση ή ανίσωση για να ολοκληρώσουμε τη λύση της αρχικής.

1. <u>***Κλασματικές (ρητές) εξισώσεις και ανισώσεις***</u>

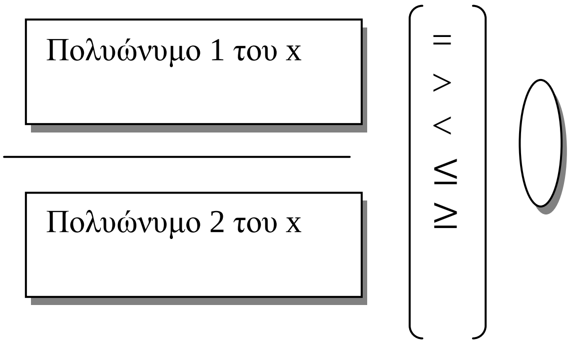
Η πρώτη περίπτωση εξισώσεων και ανισώσεων που θα δούμε λέγονται ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ή ΡΗΤΕΣ, επειδή ακριβώς περιέχουν κλάσματα (δηλαδή ρητές παραστάσεις) και μάλιστα ο <u>**άγνωστος**</u> βρίσκεται και <u>**στον παρονομαστή**</u>.

Για να λύσουμε ρητές εξισώσεις ή ανισώσεις:

	<u>ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>	**<u>ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ</u>**	
1^{o} βήμα: **Μορφή**	Μετατρέπουμε την παράσταση στη **μορφή**: $\dfrac{\boxed{\text{Πολυώνυμο 1 του x}}}{\boxed{\text{Πολυώνυμο 2 του x}}} \quad \left\{ =,\ >,\ <,\ \leq,\ \geq \right\} \quad \bigcirc$ □ Μεταφέροντας όλους τους όρους στο **πρώτο μέλος** με προσθέσεις και αφαιρέσεις □ Κάνοντας τα κλάσματα στο πρώτο μέλος **ομώνυμα** και προσθέτοντάς τα		
2^{o} βήμα: **Ονομάζουμε**	**Ονομάζουμε** όλο το κλάσμα Q(x), το πολυώνυμο του αριθμητή Α(x) και το πολυώνυμο του παρονομαστή Π(x)		
3^{o} βήμα: **Παραγοντοποιούμε**	**Παραγοντοποιούμε** χωριστά τοΑ(x) και το Π(x) . ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Δεν απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες!!!		
4^{o} βήμα: **Εξισώσεις**	**Λύνουμε** χωριστά τις **εξισώσεις** Α(x)=0 και Π(x)=0. Οι ρίζες του Π(x) είναι οι τιμές που δεν μπορεί να πάρει ο άγνωστος, αφού μηδενίζουν τον παρονομαστή. Είναι δηλαδή οι **περιορισμοί** μας.		
5^{o} βήμα: **Λύση εξίσωσης** ή **Πίνακας Ανίσωσης**	Οι **λύσεις της αρχικής εξίσωσης** είναι οι ρίζες του Α(x), εκτός από τις ρίζες του Π(x), δηλαδή τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.	Κατασκευάζουμε **πίνακα** με όλους τους παράγοντες και του αριθμητή και του παρονομαστή. Στην **τελευταία γραμμή** του πίνακα, που περιέχει τις τιμές για το Q(x), σημειώνουμε □ τις ρίζες του Α(x) με 0. □ τις ρίζες του Π(x) με το //.	
6^{o} βήμα: **Λύση Ανίσωσης**		Επιλέγουμε τις **τιμές που επαληθεύουν** την ανίσωση	

<u>Παράδειγμα 1</u>(παράδειγμα 1, §2.4)

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x(2x-1)}$

1ο βήμα	Μετατρέπουμε την παράσταση στη **μορφή**:  □ Μεταφέροντας όλους τους όρους στο **πρώτο μέλος** με προσθέσεις και αφαιρέσεις □ Κάνοντας τα κλάσματα στο πρώτο μέλος **ομώνυμα** και προσθέτοντάς τα	
2ο βήμα	**Ονομάζουμε** όλο το κλάσμα Q(x), το πολυώνυμο του αριθμητή Α(x) και το πολυώνυμο του παρονομαστή Π(x)	
	Q(x)=	
	A(x)=	
	Π(x)=	

<table>
<tr><td rowspan="2">3^{ο} βήμα</td><td colspan="2">Παραγοντοποιούμε χωριστά τοA(x) και το Π(x)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>A(x)</td><td>Π(x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4^{ο} βήμα</td><td colspan="2">Λύνουμε χωριστά τις εξισώσεις A(x)=0 και Π(x)=0. Οι ρίζες του Π(x) είναι οι τιμές που δεν μπορεί να πάρει ο άγνωστος, αφού μηδενίζουν τον παρονομαστή. Είναι δηλαδή οι περιορισμοί μας.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>A(x)=0</td><td>Π(x)=0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5^{ο} βήμα</td><td colspan="2">Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι ρίζες του A(x), εκτός από τις ρίζες του Π(x), δηλαδή τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Λύσεις της Q(x)=0:</td></tr>
</table>

<u>Παράδειγμα 2</u>(ασκ. 1^{A}(ii), §2.4)

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$

<table>
<tr><td rowspan="2">1ο
βήμα</td><td>Μετατρέπουμε την παράσταση στη μορφή:

$\dfrac{\boxed{\text{Πολυώνυμο 1 του x}}}{\boxed{\text{Πολυώνυμο 2 του x}}} \quad \left(= \;\; > \;\; < \;\; \leq \;\; \geq \right) \quad \bigcirc$

□ Μεταφέροντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος με προσθέσεις και αφαιρέσεις
□ Κάνοντας τα κλάσματα στο πρώτο μέλος ομώνυμα και προσθέτοντάς τα</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2ο
βήμα</td><td>Q(x)=</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>A(x)=</td></tr>
<tr><td>Π(x)=</td></tr>
</table>

3^{ο} βήμα	**Παραγοντοποιούμε** χωριστά τοA(x) και το Π(x)		
	A(x)	Π(x)	
4^{ο} βήμα	A(x)=0	Π(x)=0	
5^{ο} βήμα	Λύσεις της Q(x)=0:		

Παράδειγμα 3(ασκ. 2^A, §2.4)

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

(παρατηρήστε την ομοιότητα με το παράδειγμα 1 πριν αρχίσετε να τη λύνετε!!!)

<table>
<tr><td>1^ο βήμα
Μορφή</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2^ο βήμα
Ονομάζουμε</td><td colspan="2">Q(x)=</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Α(x)=</td></tr>
<tr><td colspan="2">Π(x)=</td></tr>
<tr><td>3^ο βήμα
Παραγοντοποίηση</td><td>Α(x)=</td><td>Π(x)=</td><td></td></tr>
<tr><td>4^ο βήμα
Ρίζες</td><td>Α(x)=0</td><td>Π(x)=0</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">5^ο βήμα
Πίνακας</td><td colspan="2">Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων με όλους τους παράγοντες και του αριθμητή και του παρονομαστή.
Στην τελευταία γραμμή του πίνακα, που περιέχει τις τιμές για το Q(x), σημειώνουμε
□ τις ρίζες του Α(x) με την τιμή 0.
□ τις ρίζες του Π(x) με το σύμβολο //.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">6^ο βήμα
Λύσεις ανίσωσης</td><td colspan="2">Επιλέγουμε τις τιμές που επαληθεύουν την ανίσωση</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

<u>Παράδειγμα 4</u>(ασκ. 2^{A}, §2.4)

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x^2}{x-1}+\frac{2}{x+1}<\frac{4}{x^2-1}$

(παρατηρήστε την ομοιότητα με το παράδειγμα 2 πριν αρχίσετε να τη λύνετε!!!)

1^{o} βήμα **Μορφή**			
2^{o} βήμα **Ονομάζουμε**	Q(x)=		
	Α(x)=		
	Π(x)=		
3^{o} βήμα **Παραγοντοποίηση**	Α(x)=	Π(x)=	
4^{o} βήμα **Ρίζες**	Α(x)=0	Π(x)=0	
5^{o} βήμα **Πίνακας**			
6^{o} βήμα **Λύσεις ανίσωσης**			

2. <u>*Άρρητες εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές*</u>

Στην περίπτωση που η εξίσωση που μας δίνεται δεν είναι ούτε πολυωνυμική ούτε ρητή, τότε λέγεται ΑΡΡΗΤΗ.

Γενικά, είναι δύσκολο να λύσουμε άρρητες εξισώσεις, θα δούμε όμως μια μέθοδο για να λύνουμε κάποιες περιπτώσεις, που μπορούν να αναχθούν σε πολυωνυμικές. Αυτές είναι οι περιπτώσεις, που ο άγνωστος εμφανίζεται κάτω από **μία ή δύο τετραγωνικές ρίζες**.

Βήμα 1^{o}: **Περιορισμοί**	Θυμόμαστε ότι οι **υπόρριζες ποσότητες** πρέπει να είναι πάντα **≥0** και βάζουμε από την αρχή τους αντίστοιχους περιορισμούς. Αν αυτοί είναι περισσότεροι από ένας, τότε βρίσκουμε το επιτρεπτό διάστημα που προκύπτει από όλους.	
Βήμα 2^{o}: **Απομόνωση ρίζας**	**Απομονώνουμε** στο πρώτο μέλος **μόνο μία τετραγωνική ρίζα.**	
Βήμα 3^{o}: **Περιπτώσεις**	Τώρα το **πρώτο μέλος**, που περιέχει τη μία ρίζα μόνο, είναι **πάντα ≥0**. Ελέγχουμε τις περιπτώσεις για το πρόσημο του δεύτερου μέλους. □ Αν αυτό είναι <0, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. □ Αν αυτό είναι ≥0, τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα. ΠΡΟΣΟΧΗ! Στο σημείο αυτό βάλαμε άλλον ένα περιορισμό. Τον συγκρίνουμε με τους περιορισμούς που μπήκαν αρχικά.	
Βήμα 4^{o}: **Τετράγωνα**	Υψώνουμε στο **τετράγωνο** και τα δύο μέλη της εξίσωσης και κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε.	
Βήμα 5^{o}: **Ξανά;**	**Αν υπάρχει ακόμα 1 ρίζα** επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2,3,4	
Βήμα 6^{o}: **Λύση**	**Λύνουμε την πολυωνυμική** εξίσωση που προέκυψε	
Βήμα 7^{o}: **Έλεγχος**	Ελέγχουμε τις λύσεις που βρήκαμε □ με **αντικατάσταση** □ συγκρίνοντας με όλους τους **περιορισμούς**	

<u>Παράδειγμα 5</u> (παράδειγμα 2, §2.4)

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x} = x - 2$

(Συμπληρώστε τα κενά του πίνακα)

Βήμα 1^o: **Περιορισμοί**	Πρέπει:	
Βήμα 2^o: **Απομόνωση ρίζας**	Η τετραγωνική ρίζα που εμφανίζεται είναι ήδη απομονωμένη στο πρώτο μέλος.	
Βήμα 3^o: **Περιπτώσεις**	□ Αν αυτό $x - 2 < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.	
	□	
	Επίσης, $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ Άρα το αποδεκτό διάστημα για τις λύσεις είναι το:	
Βήμα 4^o: **Τετράγωνα**		
Βήμα 5^o: **Ξανά;**	Δεν υπάρχει δεύτερη τετραγωνική ρίζα, οπότε δε χρειάζεται αυτό το βήμα.	
Βήμα 6^o: **Λύση**	**Λύνουμε την πολυωνυμική** εξίσωση που προέκυψε:	
Βήμα 7^o: **Έλεγχος**	□ **αντικατάσταση**	
	□ **περιορισμοί**	

Παράδειγμα 6 (ασκ. 4^{A} (ii), §2.4)

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3x-2}=4$

Βήμα 1ο: **Περιορισμοί**	Πρέπει:	
Βήμα 2ο: **Απομόνωση ρίζας**	Η τετραγωνική ρίζα που εμφανίζεται είναι ήδη απομονωμένη στο πρώτο μέλος.	
Βήμα 3ο: **Περιπτώσεις**	Το δεύτερο μέλος είναι 4>0. Άρα δε χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις.	
Βήμα 4ο: **Τετράγωνα**		
Βήμα 5ο: **Ξανά;**	Δεν υπάρχει δεύτερη τετραγωνική ρίζα, οπότε δε χρειάζεται αυτό το βήμα.	
Βήμα 6ο: **Λύση**	**Λύνουμε την πολυωνυμική** εξίσωση που προέκυψε:	
Βήμα 7ο: **Έλεγχος**	□ **αντικατάσταση**	
	□ **περιορισμοί**	
	Τελικά οι αποδεκτές λύσεις είναι:	

Παράδειγμα 7 (ασκ. $4^{\text{Α}}$ (v), §2.4)

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$

Βήμα $1^{\text{ο}}$: **Περιορισμοί**	Πρέπει:	
	Τελικά αποδεκτό διάστημα για τις λύσεις είναι το:	
Βήμα $2^{\text{ο}}$: **Απομόνωση ρίζας**	Η μία τετραγωνική ρίζα που εμφανίζεται είναι ήδη απομονωμένη στο πρώτο μέλος.	
Βήμα $3^{\text{ο}}$: **Περιπτώσεις**	Το δεύτερο μέλος είναι το $\sqrt{10-x}+1$. Ποιο είναι το πρόσημό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.	
Βήμα $4^{\text{ο}}$: **Τετράγωνα**		

<table>
<tr><td rowspan="5">Βήμα 5^{o}:
Ξανά;</td><td>Βήμα 2^{o}:
Απομόνωση ρίζας</td><td></td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Βήμα 3^{o}:
Περιπτώσεις</td><td>□ Αν $4 - x < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.</td></tr>
<tr><td>□</td></tr>
<tr><td>Επίσης,

Άρα το αποδεκτό διάστημα για τις λύσεις είναι το:</td></tr>
<tr><td>Βήμα 4^{o}:
Τετράγωνα</td><td></td></tr>
<tr><td>Βήμα 6^{o}:
Λύση</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Βήμα 7^{o}:
Έλεγχος</td><td colspan="2">□ **αντικατάσταση**</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">□ **περιορισμοί**</td></tr>
<tr><td colspan="2">Τελικά οι αποδεκτές λύσεις είναι:</td></tr>
</table>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

ΘΥΜΑΜΑΙ

Κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις (τι είναι)		
Κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις (βήματα επίλυσης)		
Άρρητες εξισώσεις (τι είναι)		
Άρρητες εξισώσεις (βήματα επίλυσης)		

2) Λύστε τις παρακάτω κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις:

i. $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$ (ασκ. 1^{A} (i), §2.4)

ii. $\frac{x-1}{x^3-3x+2} - \frac{2x-2}{x^2-1} = \frac{3(x-1)}{x^3-2x^2-x+2}$

iii. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} \geq \frac{x}{2}$

3) Λύστε τις παρακάτω άρρητες εξισώσεις:

i. $\sqrt{5x-1} = -4$ (ασκ. 4^{A} (iii), §2.4)

ii. $\sqrt{x+3} = x+1$ (ασκ. 1^{A} (iv), §2.4)

iii. $\sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10$ (ασκ. 1^{A} (vi), §2.4)

B	I	N	G	O
$5x-1>0$	$(3x^2-27)(4x^2+2x+1)=0$	$4x^2+2x=1$	$3x(x+4)(2x+1)=0$	$(x-1)(2x+1)=0$
$x^3-4x^2-x+4=0$	$(x-\sqrt{2})(x-5)=0$	$32x<8$	$(3x^2+4)(4x^2-1)\leq 0$	$x^3-6x^2-19x+24\geq 0$
$5x^2+x-1=0$	$x^6-2x<0$	BINGO	$x^2=8x-1$	$x+1=0$
$(x^2+1)(x^2-2x-1)\leq 0$	$4x^2-2x+1=0$	$(\chi-1)(2x+1)=0$	$2x^4-x^3-2x^2+x=0$	$(x^2-1)(2x+1)<0$
$(x+4)(x+1)=0$	$2x^4-3x^3+5x^2-7x+1\geq 0$	$(x^2-2)(2x+4)=0$	$4x-\frac{1}{2}>0$	$2x=-4x^2+1$

Αριθμός Κάρτας: 1

(Πίσω όψη κάρτας)

Μαθητές Ομάδας

Μαθητής 1:	
Μαθητής 2:	
Μαθητής 3:	
Μαθητής 4:	
Μαθητής 5:	

Αριθμός Κάρτας: 1