ΚΥΡΙΑΡΧΟΥΝΤΑ ΜΕΤΡΑ ΓΙΑ ΥΠΟΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΝΙΚΟΣ ΔΑΦΝΗΣ

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Οκτωβριος 2002

.

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Οκτώβριο του 2002. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Παπαδημητράκης και Σ. Παπαδοπούλου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ μια οικογένεια πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, όπου (T, d) ένας μετρικός χώρος. Ο τελευταίος όρος χρησιμοποιείται χαλαρά: από την απόσταση d απαιτούμε μόνο τη συμμετρία και την τριγωνική ανισότητα $d(t,s) \leq d(t,u) + d(u,s)$ ή ακόμα και την ασθενέστερη $d(t,s) \leq c\big(d(t,u) + d(u,s)\big)$ για κάθε $t, s, u \in T$, όπου $c \geq 1$ κάποια σταθερά. Λέμε ότι η ανέλιξη $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ είναι υποκανονική αν

$$\mathbb{E}X_t = 0 \tag{1.1}$$

για κάθε $t \in T$, και η απόσταση d συνδέεται με τις μεταβολές της $\mathcal{X}$ ως εξής: Για κάθε $t, s \in T$ και κάθε $u > 0$,

$$P(|X_s - X_t| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{d^2(s,t)}\right). \tag{1.2}$$

Η μέση τιμή της $\sup_{t\in T} X_t$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t := \sup\left\{\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t : F \subseteq T, |F| < +\infty\right\}. \tag{1.3}$$

Το θέμα αυτής της εργασίας είναι η σχέση της $\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$ με τη γεωμετρία του (T, d). Τα πρώτα αποτελέσματα αυτού του είδους αποδείχθηκαν στην ειδική περίπτωση των ανελίξεων του Gauss από τους Sudakov και Dudley. Η μελέτη του προβλήματος στην υποκανονική περίπτωση ολοκληρώθηκε με το «θεώρημα των κυριαρχούντων μέτρων» του Talagrand, το οποίο παρουσιάζουμε αναλυτικά.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τα κλασικά αποτελέσματα για την περίπτωση των ανελίξεων του Gauss. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ μια οικογένεια πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, όπου T ένα μη κενό σύνολο δεικτών. Η ανέλιξη $\mathcal{Z}$ λέγεται ανέλιξη του Gauss αν κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $a_1 Z_{t_1} + \cdots + a_m Z_{t_m}$ των Z_t είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0.

Μπορούμε να βλέπουμε την $\mathcal{Z}$ σαν υποσύνολο του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Γράφουμε B για την ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τον ε-αριθμό εντροπίας της $\mathcal{Z}$ από τη σχέση

$$(1.4) \qquad N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } t_1, \dots, t_N \in T : \mathcal{Z} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (Z_{t_i} + \varepsilon B)\right\}.$$

Αν το τελευταίο σύνολο είναι κενό, θέτουμε $N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \infty$.

Η απόσταση $\|Z_t - Z_s\|_2$ των Z_t, Z_s στον $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ επάγει με φυσιολογικό τρόπο μια απόσταση στο σύνολο δεικτών T. Για κάθε $t, s \in T$ ορίζουμε

$$(1.5) \qquad d(t,s) = \|Z_t - Z_s\|_2.$$

Οι ε-αριθμοί εντροπίας της $\mathcal{Z}$ αντιστοιχούν έτσι στους ε-αριθμούς κάλυψης του (T,d): έχουμε

$$(1.6) \qquad N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = N(T, d, \varepsilon),$$

όπου

$$(1.7) \qquad N(T,d,\varepsilon) := \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } t_1, \dots, t_N \in T : T \subseteq \cup_{i=1}^{N} B(t_i, \varepsilon)\right\}$$

και $B(t, \varepsilon) = \{s \in T : d(t,s) < \varepsilon\}$.

Τα κλασικά φράγματα των Sudakov και Dudley συνδέουν την $\mathbb{E}\sup_{t \in T} Z_t$ με τη μετρική εντροπία του (T,d) και συνοψίζονται στο εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 1 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \in T}$,*

$$(1.8) \qquad c_1 \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\right) \leq \mathbb{E}\sup_{t \in T} Z_t \leq c_2 \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon. \qquad \square$$

Το κάτω φράγμα είναι η ανισότητα του Sudakov και το άνω φράγμα είναι η ανισότητα του Dudley. Η απόδειξη των δύο ανισοτήτων δίνεται στην παράγραφο 2.4. Βασίζεται στο Λήμμα του Slepian, το οποίο παρουσιάζουμε στην παράγραφο 2.3.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε την υποκανονική περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{X} = (X_t)_{t \in T}$ ικανοποιεί τις (1.1) και (1.2). Για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον (T,d) ορίζουμε

$$(1.9) \qquad \gamma_2(T,d,\mu) = \sup_{t \in T} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}\, d\varepsilon,$$

και θέτουμε

$$(1.10) \qquad \gamma_2(T,d) := \inf\{\gamma_2(T,d,\mu) : \mu \text{ Borel μέτρο πιθανότητας στον } (T,d)\}.$$

Το επόμενο θεώρημα εξηγεί τον όρο «κυριαρχούντα μέτρα».

Θεώρημα 2 *Υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (T, d) είναι ένας μετρικός χώρος και $X = (X_t)_{t\in T}$ μια υποκανονική ανέλιξη, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K \cdot \gamma_2(T, d). \qquad \square \tag{1.11}$$

Τέτοιου είδους φράγματα αποδείχθηκαν για πρώτη φορά από τους Preston (σε ειδικές περιπτώσεις) και Fernique. Η παρουσίασή μας στις παραγράφους 3.1 και 3.2 ακολουθεί τον Talagrand.

Στην παράγραφο 3.3 επιστρέφουμε στο πλαίσιο των ανελίξεων του Gauss. Έστω $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ μια ανέλιξη του Gauss και έστω d η απόσταση που επάγει η $\mathcal{Z}$ στο T. Το θεώρημα του Talagrand για τα κυριαρχούντα μέτρα δείχνει ότι το άνω φράγμα του Θεωρήματος 2 είναι βέλτιστο σε αυτήν την περίπτωση.

Θεώρημα 3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $K > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ είναι μια ανέλιξη του Gauss και αν ο (T, d) έχει πεπερασμένη διάμετρο, όπου d είναι η απόσταση που επάγεται από την $\mathcal{Z}$ στο T, τότε*

$$\frac{1}{K}\cdot \gamma_2(T, d) \leq \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K \cdot \gamma_2(T, d). \qquad \square \tag{1.11}$$

Στο Κεφάλαιο 4 εξετάζουμε αναλυτικά την περίπτωση που το ρόλο του (T, d) παίζει ένα ελλειψοειδές E στον ℓ_2: πιο συγκεκριμένα, το E περιγράφεται από την

$$E = \Big\{t = (t_n)_n \in \ell_2 \mid \sum_{n\geq 1} t_n^2/a_n^2 \leq 1\Big\} \tag{1.12}$$

για κάποια φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_n > 0$ με

$$\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty. \tag{1.13}$$

Μελετάμε αναλυτικά την ανέλιξη του Gauss $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in E}$ με

$$X_t = \sum_{n\geq 1} t_n g_n, \tag{1.14}$$

όπου $(g_n)_n$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων $N(0,1)$ τυχαίων μεταβλητών. Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι

$$\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t \simeq \left(\sum_{n\geq 1} a_n^2\right)^{1/2}. \tag{1.15}$$

Αυτό όμως που μας ενδιαφέρει εδώ είναι να συγκρίνουμε τα κλασικά φράγματα των Sudakov και Dudley με το θεώρημα του Talagrand για τα κυριαρχούντα μέτρα (όπως αναφέρει ο ίδιος ο Talagrand, αυτό ακριβώς το παράδειγμα τον βοήθησε να αναπτύξει τις τεχνικές που οδήγησαν στο Θεώρημα 3).

Θεώρημα 4 *Υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $(a_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε*

$$\sum_n a_n^2 < +\infty \tag{1.16}$$

και

$$\int_0^\infty \sqrt{\log N(E,\varepsilon)}d\varepsilon = +\infty, \tag{1.17}$$

όπου E το ελλειψοειδές στον ℓ_2 που ορίζεται από την (1.12). $\square$

Το Θεώρημα 4 δείχνει ότι το φράγμα του Dudley δεν είναι πάντα ακριβές. Χρησιμοποιώντας όμως την τεχνική του Κεφαλαίου 3 μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 5 *Έστω E το ελλειψοειδές στον ℓ_2 που ορίζεται από την* (1.12)*. Τότε,*

$$\int_0^\infty \varepsilon \log N(E,\varepsilon)d\varepsilon \simeq \sum_{n\geq 1} a_n^2. \quad \square \tag{1.18}$$

Αν για $\alpha, \beta > 0$ ορίσουμε

$$R_{\alpha,\beta}(E) = \left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\big(\log N(E,\varepsilon)\big)^{\beta/\alpha}d\varepsilon\right)^{1/\beta}, \tag{1.19}$$

τότε τα Θεωρήματα 4 και 5 δείχνουν ότι για κάθε E έχουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t \simeq R_{2,2}(E), \tag{1.20}$$

ενώ υπάρχουν παραδείγματα ελλειψοειδών E για τα οποία $R_{2,1}(E) = \infty$.

Περνώντας από τη μετρική εντροπία στα κυριαρχούντα μέτρα, για κάθε μετρικό χώρο (T,d) και κάθε $\alpha, \beta > 0$ ορίζουμε

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu) := \sup_{t\in T}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha}d\varepsilon\right)^{1/\beta}, \tag{1.21}$$

και

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d) := \inf_\mu \gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu), \tag{1.22}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω απ' όλα τα Borel μέτρα πιθανότητας στον (T,d). Με το συμβολισμό του Κεφαλαίου 3, $\gamma_{2,1}(T,d) = \gamma_2(T,d)$. Το θεώρημα του Talagrand για τα ελλειψοειδή είναι το εξής.

Θεώρημα 6 *Έστω E το ελλειψοειδές στον ℓ_2 που ορίζεται από την* (1.12)*. Τότε, για κάθε $\alpha > 0$,*

$$\gamma_{\alpha,2}(E) \simeq \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon[\log N(E,\varepsilon)]^{1/\alpha}\right) \leq \sup_{n\geq 1}\left(a_n\cdot n^{1/\alpha}\right), \tag{1.23}$$

όπου οι σταθερές σύγκρισης εξαρτώνται μόνο από το α. □

Στην παράγραφο 4.3 δίνουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 6 σε ένα πρόβλημα για τα εμπειρικά μέτρα στο μοναδιαίο τετράγωνο. Θεωρούμε τυχαία σημεία $X_1, \dots, X_n$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1]^2$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την απόκλιση του εμπειρικού μέτρου $\delta_X = \frac{1}{n}\sum_{i\leq n}\delta_{X_i}$ από το ομοιόμορφο μέτρο του $[0,1]^2$. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$C_n = \sup_{f\in\mathcal{L}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i) - \mathbb{E}f \right|, \tag{1.24}$$

όπου $\mathcal{L}$ είναι η κλάση των 1-Lipschitz συναρτήσεων στο $[0,1]^2$ και $\mathbb{E}f$ είναι η μέση τιμή της f στο $[0,1]^2$. Η τυχαία μεταβλητή C_n δίνει το βέλτιστο άνω φράγμα για το «σφάλμα» που κάνουμε όταν χρησιμοποιούμε το δ_X για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας 1-Lipschitz συνάρτησης στο μοναδιαίο τετράγωνο. Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Talagrand για το ακόλουθο θεώρημα των Ajtai-Komlòs-Tusnàdy.

Θεώρημα 7 *Υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq 2$,*

$$\mathbb{E}C_n \leq K\sqrt{\frac{\log n}{n}}. \quad \square \tag{1.25}$$

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3 στη θεωρία των κυρτών σωμάτων, δίνοντας μια απόδειξη της εκτίμησης του Bourgain για το γνωστό πρόβλημα της σταθεράς ισοτροπίας. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους το 0, και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = L_K^2 \|y\|_2^2 \tag{1.26}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Η σταθερά L_K λέγεται σταθερά ισοτροπίας του K. Ανοιχτή παραμένει η εξής εικασία:

> Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leq C$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K.

Το καλύτερο γνωστό γενικό άνω φράγμα για την L_K έχει δοθεί από τον Bourgain:

Θεώρημα 8 *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει η ανισότητα*

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{1.27}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

Κεφάλαιο 2

Ανελίξεις του Gauss

2.1 Κανονικές τυχαίες μεταβλητές

Η τυπική κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ είναι το Borel μέτρο πιθανότητας γ_n που ορίζεται από την

$$\gamma_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B \exp(-\|x\|_2^2) dx, \tag{2.1.1}$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Μια τυχαία μεταβλητή $N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$ αν $P(N \in B) = \gamma_n(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$ αν $X = \sigma N + m$ για κάποια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή N στο $\mathbb{R}$ και κάποιους $\sigma \geq 0$ και $m \in \mathbb{R}$. Γράφουμε μ για την κατανομή $\mathrm{dist}(X)$ της X (δηλαδή, το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\mu(B) = P(X \in B)$). Τότε ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 2.1.1 *Έστω $X = \sigma N + m$ μια κανονική τ.μ. και έστω $\mu = \mathrm{dist}(X)$. Τότε, η μέση τιμή και η διασπορά της X δίνονται από τις*

$$\mathbb{E}X = m \quad \textit{και} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2. \tag{2.1.2}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η

$$\hat{\mu}(-t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{2.1.3}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Λέμε ότι η X της Πρότασης 2.1.1 είναι μια $N(m,\sigma^2)$ τυχαία μεταβλητή. Αν $\sigma = 0$ τότε $\mu = \delta_m$ (η σημειακή μάζα στο m), ενώ αν $\sigma > 0$ έχουμε

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \tag{2.1.4}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \tag{2.1.5}$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ ή $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ Borel μετρήσιμη.

Πρόταση 2.1.2 *Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχουν $n \times n$ πίνακας A και διάνυσμα $m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN + m), \tag{2.1.6}$$

όπου N τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

(β) *Για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, η τυχαία μεταβλητή*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i \tag{2.1.7}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$.

(γ) *Υπάρχουν $a \in \mathbb{R}^n$ και θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή Q στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X\rangle}) = e^{i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}Q(y)} \tag{2.1.8}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. □

Έστω ότι οι ισοδύναμες συνθήκες (α)-(γ) ισχύουν για το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Θεωρούμε τον πίνακα $\Gamma = (\gamma_{ij})$ των συνδιακυμάνσεων

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}\big([X_i - \mathbb{E}X_i] \cdot [X_j - \mathbb{E}X_j]\big), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.1.9}$$

Τότε, με το συμβολισμό της Πρότασης 2.1.2, ισχύουν τα εξής:

1. $m = \mathbb{E}X$.
2. $\mathbb{E}(Y) = \langle t, m\rangle$, όπου $t = (t_1, \ldots, t_n)$.
3. $\mathbb{V}(Y) = \|A^* t\|_2^2$.
4. $AA^* = \Gamma$.
5. $a = m$.

6. $Q(y) = \langle \Gamma y, y\rangle = \mathbb{V}(\langle y, X\rangle)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα αντιστροφής για το μετασχηματισμό Fourier. *Αν $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y,z\rangle} dy \tag{2.1.10}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, η (2.1.10) ισχύει σε κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ στο οποίο η f είναι συνεχής. □

Υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι κανονικά κατανεμημένο στον $\mathbb{R}^n$, και ότι $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Αν ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Γ είναι αντιστρέψιμος, τότε από το θεώρημα αντιστροφής παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 2.1.3 *Αν $\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN)$, τότε το X έχει πυκνότητα που δίνεται από την*

$$g(z) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, z\rangle - \langle \Gamma y, y\rangle/2) dy, \tag{2.1.11}$$

όπου $\Gamma = AA^*$ ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των X_i. □

2.2 Ανελίξεις του Gauss

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ μια οικογένεια πραγματικών τυχαίων μεταβλητών με δείκτες από ένα σύνολο T. Λέμε ότι η $\mathcal{Z}$ είναι **ανέλιξη του Gauss** αν κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $a_1 Z_{t_1} + \cdots + a_m Z_{t_m}$ των Z_t είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0.

Παραδείγματα. (α) Έστω $g_1, \ldots, g_N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $g_i \sim N(0,1)$. Η $\mathcal{Z} = \{g_1, \ldots, g_N\}$ είναι ανέλιξη του Gauss, αφού για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_N$ ισχύει

$$a_1 g_1 + \cdots + a_N g_N \sim N(0, (a_1^2 + \cdots + a_N^2)^{1/2}).$$

(β) Έστω $g_1, \ldots, g_N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $g_i \sim N(0,1)$ και έστω $T \subseteq \mathbb{R}^N$. Συμβολίζουμε με $\{e_1, \ldots, e_N\}$ τη συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z_t ως εξής:

$$Z_t = \Big\langle t, \sum_{i=1}^N g_i e_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^N t_i g_i. \tag{2.2.1}$$

Κάθε Z_t είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0, και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$a_1 Z_{t_1} + \cdots + a_k Z_{t_k} = Z_{a_1 t_1 + \cdots + a_k t_k} \tag{2.2.2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_k \in T$. Άρα, η $\mathcal{Z}$ είναι ανέλιξη του Gauss.

Αν $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \in T}$ είναι μια ανέλιξη του Gauss, μπορούμε να βλέπουμε την $\mathcal{Z}$ σαν υποσύνολο του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Γράφουμε B για την ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τον ε-**αριθμό εντροπίας της** $\mathcal{Z}$ από τη σχέση

$$N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } t_1, \ldots, t_N \in T : \mathcal{Z} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(Z_{t_i} + \varepsilon B)\right\}. \tag{2.2.3}$$

Αν το τελευταίο σύνολο είναι κενό, θέτουμε $N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \infty$.

Η απόσταση $\|Z_t - Z_s\|_2$ των Z_t, Z_s στον $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ επάγει με φυσιολογικό τρόπο μια απόσταση στο σύνολο δεικτών T. Για κάθε $t, s \in T$ ορίζουμε

$$d(t,s) = \|Z_t - Z_s\|_2. \tag{2.2.4}$$

Οι ε-αριθμοί εντροπίας της $\mathcal{Z}$ αντιστοιχούν έτσι στους ε-**αριθμούς κάλυψης** του (T, d): έχουμε

$$N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = N(T, d, \varepsilon), \tag{2.2.5}$$

όπου

$$N(T, d, \varepsilon) := \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } t_1, \ldots, t_N \in T : T \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(t_i, \varepsilon)\right\} \tag{2.2.6}$$

και $B(t, \varepsilon) = \{s \in T : d(t,s) < \varepsilon\}$.

Ορισμός. Έστω $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \in T}$ ανέλιξη του Gauss. Το βασικό πρόβλημα αυτής της εργασίας είναι να δοθούν ακριβή φράγματα για τη **μέση τιμή της** $\sup_{t \in T} Z_t$

$$\mathbb{E}\sup_{t \in T} Z_t := \sup\left\{\mathbb{E}\sup_{t \in F} Z_t : F \subseteq T, |F| < +\infty\right\} \tag{2.2.7}$$

μέσω της γεωμετρίας του (T, d).

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αποδείξουμε τα κλασικά φράγματα των Sudakov και Dudley, τα οποία συνοψίζονται στο εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \in T}$,*

$$c_1 \sup_{\varepsilon > 0}\left(\varepsilon\sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})}\right) \leq \mathbb{E}\sup_{t \in T} Z_t \leq c_2 \int_0^\infty \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})}\, d\varepsilon. \tag{2.2.8}$$

Το κάτω φράγμα είναι η ανισότητα του Sudakov και το άνω φράγμα είναι η ανισότητα του Dudley. Η απόδειξη των δύο ανισοτήτων βασίζεται στο Λήμμα του

Slepian, το οποίο θα παρουσιάσουμε στην επόμενη υποπαράγραφο, και στο πρώτο από τα βασικά μας παραδείγματα, το οποίο αναπτύσσουμε λεπτομερώς στη συνέχεια.

Ας θεωρήσουμε την ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = \{g_1, \ldots, g_N\}$ του Παραδείγματος (α). Η ανεξαρτησία των g_i και ένας απλός υπολογισμός δείχνουν ότι

$$\|g_i - g_j\|_2^2 = \mathbb{E}(g_i - g_j)^2 = \mathbb{E}g_i^2 + \mathbb{E}g_j^2 - 2\mathbb{E}g_i \cdot \mathbb{E}g_j = 2$$

αν $i \neq j$, άρα

$$N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \varepsilon > \sqrt{2} \\ N & , \text{αν } 0 < \varepsilon \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Άρα,

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})} \right) = \sqrt{2}\sqrt{\log N} = \int_0^\infty \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})} d\varepsilon. \tag{2.2.9}$$

Η Πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι το Θεώρημα 2.2.1 ισχύει σε αυτήν την περίπτωση, και η ισότητα (2.2.9) δείχνει ότι τα δύο φράγματα είναι κατά κάποιον τρόπο βέλτιστα: οι τρεις ποσότητες στην (2.2.8) είναι ίσες αν αγνοήσουμε απόλυτες θετικές σταθερές.

Πρόταση 2.2.1 *Έστω $g_1, \ldots, g_N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $g_i \sim N(0,1)$. Τότε,*

$$c_1 \sqrt{\log N} \leq \mathbb{E} \max_{i \leq N} g_i \leq c_2 \sqrt{\log N}, \tag{2.2.10}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Έστω $q \geq 1$. Από την ανισότητα του Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max_{i \leq N} g_i &\leq \mathbb{E} \max_{i \leq N} |g_i| \leq \mathbb{E}\Big(\sum_{i \leq N} |g_i|^q \Big)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{i \leq N} \mathbb{E}|g_i|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Η ροπή τάξης q της g υπολογίζεται ακριβώς:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|g|^q &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^q e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (2y)^{\frac{q-1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{q+1}{2} \right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\max_{i\le N} g_i \le \left(N\frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\right)^{1/q} \le c\sqrt{q}N^{1/q}. \tag{2.2.11}$$

Αν επιλέξουμε $q \sim \log N$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\max_{i\le N} g_i \le c_2\sqrt{\log N}, \tag{2.2.12}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει (αρκετά μικρή) απόλυτη σταθερά $\alpha > 0$ και υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε: αν $g \sim N(0,1)$ και $N \ge n_0$, τότε

$$P(g > \alpha\sqrt{\log N}) \ge \frac{1}{N}. \tag{2.2.13}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(g > \alpha\sqrt{\log N}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log N}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \\ &\ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log N}}^{2\alpha\sqrt{\log N}} e^{-x^2/2}dx \\ &= \frac{\alpha\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\alpha^2\log N} \\ &= \frac{\alpha\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}}N^{-2\alpha^2} \ge \frac{1}{N} \end{aligned}$$

αν, για παράδειγμα, $\alpha = 1/2$ και το n_0 επιλεγεί κατάλληλα. Τότε, για κάθε $N \ge n_0$ έχουμε

$$P\left(\max_{i\le N} g_i \le \alpha\sqrt{\log N}\right) = \left[P(g \le \alpha\sqrt{\log N})\right]^N \le \left(1-\frac{1}{N}\right)^N \le \frac{1}{e}, \tag{2.2.14}$$

άρα, από την ανισότητα του Markov παίρνουμε

$$\mathbb{E}\max_{i\le N} g_i \ge \frac{1}{2}\sqrt{\log N}\cdot P\left(\max_{i\le N} g_i \ge \frac{1}{2}\sqrt{\log N}\right) \ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\sqrt{\log N} \tag{2.2.15}$$

αν $N \ge n_0$. Είναι τώρα φανερό ότι αν επιλέξουμε κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, πετυχαίνουμε την

$$c_1\sqrt{\log N} \le \mathbb{E}\max_{i\le N} g_i \tag{2.2.16}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 Το Λήμμα του Slepian

Το Λήμμα του Slepian δίνει ένα κριτήριο σύγκρισης για n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δύο n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον Ω και έχουν μέση τιμή 0. Υποθέτουμε ότι*

$$\begin{aligned} \int_\Omega X_i^2 d\mu &= \int_\Omega Y_i^2 d\mu \\ \int_\Omega X_i X_j d\mu &\geq \int_\Omega Y_i Y_j d\mu \end{aligned}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\int_\Omega \max_{i \leq n} X_i d\mu \leq \int_\Omega \max_{i \leq n} Y_i d\mu. \tag{2.3.1}$$

Απόδειξη: Όπως είδαμε στην Παράγραφο 2.1, αν $Z = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ είναι μια n-άδα κανονικών τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή 0, τότε ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\Gamma = (\gamma_{ij})$, όπου $\gamma_{ij} = \int Z_i Z_j dP$, είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας: δηλαδή, $\langle \Gamma x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα, κάθε θετικά ημιορισμένος ορισμένος πίνακας Γ ορίζει μια n-άδα $Z = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ που έχει τον Γ σαν πίνακα συνδιακυμάνσεων. Η πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος Z δίνεται από την

$$g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Gamma)^{-1/2} \exp\big(- \langle \Gamma^{-1} z, z \rangle / 2 \big), \tag{2.3.2}$$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση του Z είναι η

$$\hat{g}(y) = \exp\big(- \langle \Gamma y, y \rangle / 2 \big). \tag{2.3.3}$$

Από το θεώρημα αντιστροφής, έχουμε

$$g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big(i\langle y, z \rangle - \langle \Gamma y, y \rangle / 2 \big) dy \tag{2.3.4}$$

για κάθε $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Παραγωγίζοντας ως προς γ_{ij} παίρνουμε την ταυτότητα

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} \tag{2.3.5}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Σταθεροποιούμε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\Gamma \mid t_1, \ldots, t_n) := G(\Gamma)$ με

$$G(\Gamma) := P\left(\cap_{j=1}^n \{ \omega \in \Omega \mid Z_j(\omega) < t_j \} \right) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz \tag{2.3.6}$$

σαν συνάρτηση του Γ (παραλείπουμε τα $t_1, \ldots, t_n$ για ευκολία στο συμβολισμό). Από την (2.3.5) βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{ij}} = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz \tag{2.3.7}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ισούται με ένα ολοκλήρωμα της g ως προς τις $(m-2)$-μεταβλητές z_k, $k \neq i, j$. Για παράδειγμα,

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{12}} = \int_{-\infty}^{t_3} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} g(t_1, t_2, z_3, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz_n \ldots dz_3. \tag{2.3.8}$$

Άρα,

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{ij}} \geq 0 \tag{2.3.9}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max_{i \leq n} Z_i &= \int_\Omega \big(\max_{i \leq n} Z_i\big)^+ d\mu - \int_\Omega \big(\max_{i \leq n} Z_i\big)^- d\mu \\ &= \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i > t\big) dt - \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i < -t\big) dt \\ &= \int_0^\infty [1 - P\big(\max_{i \leq n} Z_i < t\big)] dt - \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i < -t\big) dt \\ &= \int_0^\infty (1 - G(\Gamma \mid t, \ldots, t)) dt - \int_0^\infty G(\Gamma \mid -t, \ldots, -t) dt. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τις n-άδες $X = (X_1, \ldots, X_n)$ και $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ του Θεωρήματος, και γράφουμε Γ_X και Γ_Y για τους αντίστοιχους πίνακες συνδιακυμάνσεων. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι Γ_X και Γ_Y είναι θετικά ορισμένοι (αλλιώς, προσεγγίζουμε τις X και Y με n-άδες X_ε και Y_ε που έχουν αυτήν την ιδιότητα, και μετά περνάμε στο όριο).

Για κάθε $\theta \in [0, 1]$ θέτουμε

$$\Gamma(\theta) = \theta \Gamma_X + (1 - \theta) \Gamma_Y. \tag{2.3.10}$$

Με αυτόν τον ορισμό έχουμε $\Gamma(0) = \Gamma_Y$ και $\Gamma(1) = \Gamma_X$. Κάθε $\Gamma(\theta)$ είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Αν ορίσουμε

$$T(\theta) = G(\Gamma(\theta)), \tag{2.3.11}$$

τότε

$$T'(\theta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \frac{d\gamma_{ij}(\theta)}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \big(\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(Y_i Y_j)\big) \\ &= \sum_{i\neq j} \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \big(\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(Y_i Y_j)\big) \end{aligned}$$

γιατί $\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}Y_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Από την (2.3.9) και τη δεύτερη υπόθεσή μας, έπεται ότι

$$T'(\theta) \geq 0, \tag{2.3.12}$$

άρα

$$G(\Gamma_X) = G(\Gamma(1)) \geq G(\Gamma(0)) = G(\Gamma_Y). \tag{2.3.13}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i &= \int_0^\infty (1 - G(\Gamma_X \mid t, \ldots, t))dt - \int_0^\infty G(\Gamma_X \mid -t, \ldots, -t)dt \\ &\leq \int_0^\infty (1 - G(\Gamma_Y \mid t, \ldots, t))dt - \int_0^\infty G(\Gamma_Y \mid -t, \ldots, -t)dt \\ &= \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \end{aligned}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα, αν θεωρήσουμε $t \geq 0$ και εφαρμόσουμε την (2.3.13) για τις n-άδες $(t, \ldots, t)$ και $(-t, \ldots, -t)$. Για την ακρίβεια, η (2.3.13) δίνει πολύ ισχυρότερη πληροφορία για την κατανομή των X και Y. $\square$

Θα χρειαστούμε επίσης την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Slepian.

Θεώρημα 2.3.2 *Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δύο n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον Ω και έχουν μέση τιμή 0. Υποθέτουμε ότι*

$$\|X_i - X_j\|_2 \leq \|Y_i - Y_j\|_2 \tag{2.3.14}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i \leq 2\mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \tag{2.3.15}$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε $X_i' = X_i - X_1$ και $Y_i' = Y_i - Y_1$, τότε η (2.3.14) εξακολουθεί να ισχύει, και

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i' = \mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i \quad , \quad \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i' = \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \tag{2.3.16}$$

Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $X_1 = Y_1 = 0$. Τότε, από την (2.3.14) παίρνουμε

$$\|X_i\|_2 \leq \|Y_i\|_2 \tag{2.3.17}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Θεωρούμε μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή g, ανεξάρτητη από τις X_i, Y_i, στον Ω, και θέτουμε

$$\begin{aligned} C &= \max_{i\leq n} \|Y_i\|_2 \\ \tilde{X}_i &= X_i + C \cdot g \\ \tilde{Y}_i &= Y_i + \left(C^2 - \|Y_i\|_2^2 + \|X_i\|_2^2\right)^{1/2} g = Y_i + b_i \cdot g. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $C^2 - \|Y_i\|_2^2 + \|X_i\|_2^2 \geq 0$, άρα ο b_i ορίζεται καλά. Από την (2.3.17) έπεται ότι

$$b_i \leq C. \tag{2.3.18}$$

Από τον τρόπο ορισμού των $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ έχουμε

$$\|\tilde{X}_i - \tilde{X}_j\|_2 = \|X_i - X_j\|_2 \tag{2.3.19}$$

και
(2.3.20)

$$\|\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j\|_2 = \|(Y_i - Y_j) + g(b_i - b_j)\|_2 = \left(\|Y_i - Y_j\|_2^2 + |b_i - b_j|^2\right)^{1/2} \geq \|Y_i - Y_j\|_2,$$

άρα

$$\|\tilde{X}_i - \tilde{X}_j\|_2 \leq \|\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j\|_2 \tag{2.3.21}$$

για κάθε $i, j = 1, \dots, n$. Επίσης,

$$\|\tilde{X}_i\|_2^2 = \|X_i\|_2^2 + C^2 = \|Y_i\|_2^2 + b_i^2 = \|\tilde{Y}_i\|_2^2. \tag{2.3.22}$$

Από τις (2.3.21) και (2.3.22) είναι φανερό ότι οι n-άδες $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ και $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.1. Άρα,

$$\mathbb{E} \max_{i\leq n} \tilde{X}_i \leq \mathbb{E} \max_{i\leq n} \tilde{Y}_i. \tag{2.3.23}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E} \max_{i\leq n} \tilde{X}_i = \mathbb{E}\left(\max_{i\leq n} X_i + C \cdot g\right) = \mathbb{E} \max_{i\leq n} X_i \tag{2.3.24}$$

και, λόγω της (2.3.18),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max_{i\leq n} \tilde{Y}_i &\leq \mathbb{E} \max_{i\leq n} (Y_i + b_i \cdot g^+) \\ &\leq \mathbb{E} \max_{i\leq n} Y_i + C \cdot \mathbb{E} g^+. \end{aligned}$$

Όμως, απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\mathbb{E} Y_i^+ = \|Y_i\|_2 \cdot \mathbb{E} g^+$, άρα

$$C = \max_{i\leq n} \|Y_i\|_2 = \max_{i\leq n} \frac{\mathbb{E} Y_i^+}{\mathbb{E} g^+} \leq \frac{\mathbb{E} \max_{i\leq n} Y_i^+}{\mathbb{E} g^+} = \frac{\mathbb{E} \max_{i\leq n} Y_i}{\mathbb{E} g^+}$$

γιατί $\max_{i\le n} Y_i^+ = \max_{i\le n} Y_i$ αφού $Y_1 \equiv 0$. Άρα,

$$C \cdot \mathbb{E}g^+ \le \mathbb{E}\max_{i\le n} Y_i,$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}\max_{i\le n} \tilde{Y}_i \le 2\mathbb{E}\max_{i\le n} Y_i. \tag{2.3.25}$$

Από τις (2.3.23), (2.3.24) και (2.3.25) έπεται το συμπέρασμα. □

2.4 Η ανισότητα του Sudakov και η ανισότητα του Dudley

Η ανισότητα του Sudakov είναι η αριστερή ανισότητα του Θεωρήματος 2.2.1.

Θεώρημα 2.4.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$,*

$$c_1 \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon\sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})}\right) \le \mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t. \tag{2.4.1}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στην αριστερή ανισότητα του επόμενου Λήμματος (η δεξιά ανισότητα θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της ανισότητας του Dudley).

Λήμμα 2.4.1 *Έστω $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ μια ανέλιξη του Gauss. Θέτουμε*

$$A = \min_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 \ \ \text{και} \ \ B = \max_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2. \tag{2.4.2}$$

Τότε,

$$\frac{c_1}{2\sqrt{2}} A\sqrt{\log n} \le \mathbb{E}\max_{i\le n} Z_i \le c_2\sqrt{2}B\sqrt{\log n}, \tag{2.4.3}$$

όπου c_1, c_2 οι σταθερές της Πρότασης 2.2.1.

Απόδειξη: Θεωρούμε ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές $g_1, \ldots, g_n$ (ανεξάρτητες από την Z) και θέτουμε

$$X_i = \frac{g_i}{\sqrt{2}} \min_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 = \frac{Ag_i}{\sqrt{2}} \tag{2.4.4}$$

και

$$Y_i = \frac{g_i}{\sqrt{2}} \max_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 = \frac{Bg_i}{\sqrt{2}}. \tag{2.4.5}$$

Τότε, για κάθε $i \neq j$ έχουμε

$$\|X_i - X_j\|_2 = \min_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 \leq \max_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 = \|Y_i - Y_j\|_2. \tag{2.4.6}$$

Από το Θεώρημα 2.3.2,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i \leq \mathbb{E}\max_{i\leq n} Z_i \leq 2\mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \tag{2.4.7}$$

Από την Πρόταση 2.2.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \min_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 \cdot \mathbb{E}\max_{i\leq n} g_i \\ &\geq \frac{c_1 A}{2\sqrt{2}} \sqrt{\log n} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i &= \frac{2}{\sqrt{2}} \max_{i\neq j} \|Z_i - Z_j\|_2 \cdot \mathbb{E}\max_{i\leq n} g_i \\ &\leq c_2\sqrt{2}B\sqrt{\log n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1: Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε υποσύνολο $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ του $\mathcal{Z}$ το οποίο είναι μεγιστικό ως προς την απαίτηση

$$\|Z_i - Z_j\|_2 \geq \varepsilon \tag{2.4.8}$$

αν $i \neq j$. (Όπως θα φανεί από την απόδειξη, αν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο τότε τα δύο μέλη της ανισότητας απειρίζονται). Τότε,

$$\mathcal{Z} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (Z_i + \varepsilon B), \tag{2.4.9}$$

άρα $N_\varepsilon(\mathcal{Z}) \leq n$. Από την (2.4.8) και από το Λήμμα 2.4.1,

$$\frac{c_1}{2\sqrt{2}}\varepsilon\sqrt{\log n} \leq \mathbb{E}\max_{i\leq n} Z_i \leq \mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t, \tag{2.4.10}$$

άρα

$$\varepsilon\sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{c_1}\mathbb{E}\max_{t\in T} Z_t \tag{2.4.11}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. □

Γεωμετρική εφαρμογή - αριθμοί κάλυψης κυρτού σώματος: Έστω T ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Οι αριθμοί κάλυψης $N(T, \varepsilon B_2^n)$ του T ορίζονται από την

$$N(T, \varepsilon B_2^n) := \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } t_1, \ldots, t_N \in T : T \subseteq \cup_{i=1}^{N} (t_i + \varepsilon B_2^n)\right\}, \tag{2.4.12}$$

όπου B_2^n είναι η ανοικτή Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα (β), αν $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $g_i \sim N(0,1)$ και αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε η $\mathcal{Z} = \{Z_t \mid t \in T\}$ με

$$Z_t = \langle t, \sum_{i=1}^n g_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n t_i g_i \tag{2.4.13}$$

είναι ανέλιξη του Gauss, και

$$N(T, \varepsilon B_2^n) = N_\varepsilon(\mathcal{Z}). \tag{2.4.14}$$

Από την ανισότητα του Sudakov έπεται ότι

$$\log N(T, \varepsilon B_2^n) \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \sup_{t \in T} \langle t, \sum_{i=1}^n g_i e_i \rangle. \tag{2.4.15}$$

Η τελευταία μέση τιμή έχει πολύ συγκεκριμένη γεωμετρική ερμηνεία: ορίζουμε το **πλάτος** του T στη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος θ μέσω της

$$w(T, \theta) = \max_{t \in T} \langle t, \theta \rangle \tag{2.4.16}$$

και το **μέσο πλάτος** του T από τη σχέση

$$w(T) = \int_{S^{n-1}} w(T, \theta) \sigma(d\theta) \tag{2.4.17}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Τότε, ισχύει το εξής.

Λήμμα 2.4.2 *Για κάθε κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} \langle t, \sum_{i=1}^n g_i e_i \rangle = c_n w(T), \tag{2.4.18}$$

όπου c_n σταθερά που εξαρτάται από τη διάσταση n, με $c_n \simeq \sqrt{n}$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t \in T} \langle t, \sum_{i=1}^n g_i e_i \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{t \in T} \langle t, x \rangle e^{-|x|^2/2} dx \\
&= \frac{n|B_2^n|}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \max_{t \in T} \langle t, \theta \rangle u^n e^{-u^2/2} du \sigma(d\theta) \\
&= \frac{n}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/2} du \cdot \int_{S^{n-1}} \max_{t \in T} \langle t, \theta \rangle \sigma(d\theta) \\
&= \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot w(T) \\
&= c_n w(T),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες και το γεγονός ότι $|B_2^n| = \pi^{n/2}/\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)$.
$\square$

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.4.2 και της (2.4.15) είναι η ανισότητα του Sudakov για τους αριθμούς κάλυψης ενός κυρτού σώματος.

Θεώρημα 2.4.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: αν T είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$N(K,\varepsilon B_2^n) \leq \exp\left(\frac{Cnw^2(T)}{\varepsilon^2}\right) \tag{2.4.19}$$

για κάθε $\varepsilon>0$. $\square$

Η ανισότητα του Dudley είναι η δεξιά ανισότητα του Θεωρήματος 2.2.1.

Θεώρημα 2.4.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_2>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z}=(Z_t)_{t\in T}$,*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t \leq c_2\int_0^\infty \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z})}d\varepsilon. \tag{2.4.20}$$

Απόδειξη: Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του T και έστω $\delta>1$. Ορίζουμε

$$D=\max_{i,j\in F}\|Z_i-Z_j\|_2, \tag{2.4.21}$$

και, για κάθε $n\geq 0$, θέτουμε

$$\varepsilon_n=\delta\frac{D}{2^n} \quad \text{και} \quad N_n=N_{\varepsilon_n}(\mathcal{Z}_F), \tag{2.4.22}$$

όπου $\mathcal{Z}_F=\{Z_t \mid t\in F\}$.

Από τον ορισμό του N_n, μπορούμε να βρούμε $F_n\subseteq F$ με $|F_n|=N_n$, τέτοια ώστε

$$\mathcal{Z}_F\subseteq\bigcup_{t\in F_n}(Z_t+\varepsilon_n B). \tag{2.4.23}$$

Ειδικότερα, μπορούμε να πάρουμε $F_0=\{t_0\}$ για τυχόν $t_0\in F$.

Έστω $s\in F$. Για κάθε $n\geq 0$ υπάρχει $t_n(s)\in F_n$:

$$\|Z_s-Z_{t_n(s)}\|_2<\varepsilon_n. \tag{2.4.24}$$

Τότε, για κάθε $s\in F$ και κάθε $n\geq 1$ έχουμε

$$\|Z_{t_n(s)}-Z_{t_{n-1}(s)}\|_2 \leq \|Z_{t_n(s)}-Z_s\|_2+\|Z_s-Z_{t_{n-1}(s)}\|_2<2\varepsilon_{n-1}, \tag{2.4.25}$$

και, αφού το F είναι πεπερασμένο,

$$Z_s = Z_{t_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{t_n(s)} - Z_{t_{n-1}(s)}). \tag{2.4.26}$$

(Παρατηρήστε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι πεπερασμένο: τελικά, $Z_{t_n(s)} = Z_s$). Έπεται ότι

$$\max_{s\in F} Z_s \leq Z_{t_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{s\in F} (Z_{t_n(s)} - Z_{t_{n-1}(s)}), \tag{2.4.27}$$

άρα

$$\mathbb{E}\left(\max_{s\in F} Z_s\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\max_{s\in F} (Z_{t_n(s)} - Z_{t_{n-1}(s)})\right). \tag{2.4.28}$$

Από τη δεξιά ανισότητα του Λήμματος 2.4.1 παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\max_{s\in F} (Z_{t_n(s)} - Z_{t_{n-1}(s)})\right) \leq 4\sqrt{2} c_2 \varepsilon_{n-1} \sqrt{\log(N_n N_{n-1})} \leq C \varepsilon_{n-1} \sqrt{\log N_n}, \tag{2.4.29}$$

αφού η (N_n) είναι αύξουσα, και το σύνολο $\{Z_{t_n(s)} - Z_{t_{n-1}(s)} \mid s \in F\}$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του $|F_n| \cdot |F_{n-1}| = N_n N_{n-1}$ και διάμετρο (στον $L^2(\Omega)$) φραγμένη από $4\varepsilon_{n-1}$, λόγω της (2.4.25).

Επιστρέφοντας στην (2.4.28), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max_{s\in F} Z_s &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n-1} \sqrt{\log N_{\varepsilon_n}(\mathcal{Z}_F)} \\ &\leq 4C \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon_{n+1}}^{\varepsilon_n} \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z}_F)} d\varepsilon \\ &\leq 4C \int_0^{\infty} \sqrt{\log N_\varepsilon(\mathcal{Z}_F)} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\varepsilon \mapsto N_\varepsilon(\mathcal{Z}_F)$ είναι φθίνουσα, και την $\varepsilon_{n-1} = 4(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, παρατηρούμε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $F \subseteq T$, ισχύει η ανισότητα

$$N_\varepsilon(\mathcal{Z}_F) \leq N_{\varepsilon/2}(\mathcal{Z}). \tag{2.4.30}$$

Πράγματι, αν $\mathcal{Z} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (Z_{t_j} + (\varepsilon/2)B)$, θεωρούμε το

$$A_F = \{j \leq N \mid [Z_{t_j} + (\varepsilon/2)B] \cap \mathcal{Z}_F \neq \emptyset\}, \tag{2.4.31}$$

για κάθε $j \in A_F$ επιλέγουμε τυχόν $s_j \in F$ με $\|Z_{s_j} - Z_{t_j}\|_2 \leq \varepsilon/2$, και, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, ελέγχουμε εύκολα ότι $\mathcal{Z}_F \subseteq \bigcup_{j\in A_F} (Z_{s_j} + \varepsilon B)$.

Από την (2.4.30) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}\max_{s\in F} Z_s \leq 4C\int_0^{\infty}\sqrt{\log N_{\varepsilon/2}(\mathcal{Z})}d\varepsilon = 8C\int_0^{\infty}\sqrt{\log N_{\varepsilon}(\mathcal{Z})}d\varepsilon, \tag{2.4.32}$$

και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης, βάσει του ορισμού της $\mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t$. $\square$

Αναφορές: Για τις βασικές ιδιότητες των κανονικών τυχαίων μεταβλητών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο του Stromberg [Str]. Οι ανισότητες των Sudakov και Dudley αποδείχτηκαν γύρω στα 1970: βλέπε [Du 1,2] και [Su]. Το Λήμμα του Slepian [Sle] είναι προγενέστερο. Στις παραγράφους 2.2-2.4 ακολουθούμε σε γενικές γραμμές το βιβλίο του Pisier ([Pi], Κεφάλαιο 5).

Κεφάλαιο 3

Κυριαρχούντα μέτρα

3.1 Υποκανονικές ανελίξεις: διαδοχικές προσεγγίσεις

Έστω (T,d) ένας μετρικός χώρος. Λέμε ότι η ανέλιξη $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ είναι **υποκανονική** αν η απόσταση d φράσσει τις μεταβολές της $\mathcal{X}$ ως εξής: Για κάθε $t,s \in T$ και κάθε $u > 0$,

$$P(|X_s - X_t| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{d^2(s,t)}\right). \tag{3.1.1}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\mathbb{E}X_t = 0, \qquad t \in T. \tag{3.1.2}$$

Όπως στο Κεφάλαιο 2, ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή της $\sup_{t\in T} X_t$, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t := \sup\left\{\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t : F \subseteq T, |F| < +\infty\right\}. \tag{3.1.3}$$

Σταθεροποιούμε $t_0 \in T$ και, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του T που περιέχει το t_0, ορίζουμε $Y_F = \sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0})$. Τότε $Y_F \geq 0$ και, λόγω της (3.1.2), έχουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t = \mathbb{E}\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) = \mathbb{E}Y_F. \tag{3.1.4}$$

Αφού $Y_F \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}Y_F = \int_0^\infty P(Y_F \geq u)\, du, \tag{3.1.5}$$

άρα χρειαζόμαστε φράγματα για πιθανότητες της μορφής

$$P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq u\right), \qquad u > 0. \tag{3.1.6}$$

Η πρώτη πρόταση που θα αποδείξουμε δίνει ένα πολύ γενικό σχήμα «διαδοχικής προσέγγισης» των X_t από τα στοιχεία μιας ακολουθίας υποσυνόλων του $\{X_t : t \in F\}$. Αυτή η ιδέα εμφανίστηκε ήδη στην απόδειξη της ανισότητας του Dudley για τις ανελίξεις του Gauss.

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του T και $t_0 \in F$. Έστω $r \geq 2$ και i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(F) \leq 2r^{-i}$. Ορίζουμε $\Pi_i = \{t_0\}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά $\Pi_j \subseteq F$, $j \geq i$ και συναρτήσεις $\pi_j : F \to \Pi_j$ που ικανοποιούν τα εξής:*

1. *Για κάθε $t \in F$ υπάρχει $j_0 = j_0(t) \geq i$ τέτοιος ώστε: για κάθε $j \geq j_0$,*

$$\pi_j(t) = t. \tag{$*$}$$

2. *Για κάθε $t \in F$ και για κάθε $j > i$,*

$$d(\pi_j(t), \pi_{j-1}(t)) \leq 2r^{-j+1}. \tag{$**$}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K(r)\sum_{j\geq i} r^{-j}\sqrt{\log|\Pi_j|}, \tag{3.1.7}$$

όπου $K(r)$ θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το r.

Απόδειξη: Αν $t \in T$ και $\varepsilon > 0$, με $B(t,\varepsilon)$ συμβολίζουμε την ανοικτή μπάλα με κέντρο t και ακτίνα ε. Για κάθε $j > i$ ορίζουμε

$$M_j = \{(\pi_j(t), \pi_{j-1}(t)) \mid t \in F\}. \tag{3.1.8}$$

Παρατηρήστε ότι η $(**)$ εξασφαλίζει το εξής:

«Αν $(s_1, s_2) \in M_j$ τότε $d(s_1, s_2) \leq 2r^{-j+1}$».

Έστω $(\alpha_j)_{j>i}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τους οποίους θα επιλέξουμε αργότερα. Θέτουμε

$$S = \sum_{j>i}\alpha_j. \tag{3.1.9}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.1.1), για κάθε $u > 0$ παίρνουμε

$$P\left(\sup_{t\in F}(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)}) \geq u\alpha_j\right) \;=\; P\left(\bigcup_{t\in F}\{X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)} \geq u\alpha_j\}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\bigcup_{(s_1,s_2)\in M_j}\{X_{s_1}-X_{s_2}\geq u\alpha_j\}\right)\\
&\leq \sum_{(s_1,s_2)\in M_j} P\left(\{X_{s_1}-X_{s_2}\geq u\alpha_j\}\right)\\
&\leq 2|M_j|\exp\left(-\frac{\alpha_j^2u^2}{(2r^{-j+1})^2}\right).
\end{aligned}$$

Από την $(*)$ και την υπόθεση ότι $\Pi_i=\{t_0\}$, μπορούμε να γράψουμε

$$X_t - X_{t_0} = \sum_{j>i}(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)}) \tag{3.1.10}$$

για κάθε $t\in F$. Στην πραγματικότητα, το άθροισμα αυτό είναι πεπερασμένο: έχουμε $X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)} = 0$ αν $j > j_0(t)$. Από την (3.1.9) και την (3.1.10) έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0})\geq uS\right) &\leq P\left(\bigcup_{j>i}\{\sup_{t\in F}(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)})\geq u\alpha_j\}\right)\\
&\leq \sum_{j>i}P\left(\sup_{t\in F}(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)})\geq u\alpha_j\right).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε δείξει ότι

$$P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0})\geq uS\right)\leq \sum_{j>i}2|M_j|\exp\left(-\frac{\alpha_j^2u^2}{(2r^{-j+1})^2}\right). \tag{3.1.11}$$

Επιλέγουμε τώρα τα α_j: για κάθε $j>i$ ορίζουμε

$$\alpha_j := 2r^{-j+1}\big(\log(2^{j-i}|M_j|)\big)^{1/2}. \tag{3.1.12}$$

Παρατηρήστε ότι η επιλογή των α_j είναι ανεξάρτητη από το $u>0$ και ότι το δεξιό μέλος της (3.1.11) είναι τώρα ίσο με

$$\Delta := \sum_{j>i}2|M_j|(2^{j-i}|M_j|)^{-u^2}. \tag{3.1.13}$$

Όταν $u\geq 1$, έχουμε

$$\Delta \leq \sum_{j>i}2(2^{j-i})^{-u^2} = 2\cdot 2^{-u^2}\frac{1}{1-2^{-u^2}}\leq 4\cdot 2^{-u^2}. \tag{3.1.14}$$

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι για κάθε $u\geq 1$ ισχύει η ανισότητα

$$P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0})\geq uS\right)\leq 4\cdot 2^{-u^2}. \tag{3.1.15}$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t &= \mathbb{E}\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \\
&= S\int_0^\infty P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&= S\int_0^1 P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&\quad + S\int_1^\infty P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&\leq S + 4S\int_1^\infty 2^{-u^2} du \\
&= c\cdot S,
\end{aligned}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Επιστρέφουμε στον ορισμό του S: ξεκινώντας από την (3.1.12), και χρησιμοποιώντας την $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για $a, b > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j>i} 2r^{-j+1}\left(\log(2^{j-i}|\Pi_j|\cdot|\Pi_{j-1}|)\right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j>i} 2r^{-j+1}\left(\sqrt{j-i}\sqrt{\log 2} + \sqrt{\log|\Pi_j|} + \sqrt{\log|\Pi_{j-1}|}\right) \\
&\leq K_1(r)\left(r^{-i} + \sum_{j\geq i} r^{-j}\sqrt{\log|\Pi_j|}\right).
\end{aligned}$$

Για να καταλήξουμε στην (3.1.7), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$r^{-i} \leq K_2(r) r^{-i-2}\sqrt{\log|\Pi_{i+2}|}. \tag{3.1.16}$$

Παρατηρήστε ότι $|\Pi_{i+3}| \geq 2$: Αν ήταν $\Pi_{i+3} = \{s\}$, από την $(**)$ θα είχαμε

$$d(t,s) \leq \sum_{j>i+3} d(\pi_j(t), \pi_{j-1}(t)) \leq \sum_{j>i+3} 2r^{-j+1} = \frac{2}{r-1}r^{-i-2} \leq r^{-i-1},$$

δηλαδή

$$\mathrm{diam}(F) \leq 2r^{-i-1}, \tag{3.1.17}$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό του i. Άρα,

$$r^{-i-3}\sqrt{\log|\Pi_{i+3}|} \geq (\sqrt{\log 2}r^{-3})r^{-i} =: (1/K_2(r))r^{-i},$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.1.16). Έπεται ότι

$$S \leq K(r)\sum_{j\geq i} r^{-j}\sqrt{\log|\Pi_j|}, \tag{3.1.18}$$

και το Θεώρημα έχει αποδειχθεί. □

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.1 είναι το φράγμα του Dudley για υποκανονικές ανελίξεις. Για κάθε $F \subseteq T$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τον αριθμό κάλυψης

$$N(F,d,\varepsilon) = \min\left\{N \in \mathbb{N} \mid \exists t_1,\ldots,t_N \in F : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(t_i,\varepsilon)\right\}. \tag{3.1.19}$$

(αν το σύνολο στην (3.1.19) είναι κενό, ορίζουμε $N(F,d,\varepsilon) = +\infty$). Παρατηρούμε ότι

$$N(F,d,2\varepsilon) \leq N(T,d,\varepsilon) \tag{3.1.20}$$

για κάθε $F \subseteq T$ και $\varepsilon > 0$: πράγματι, αν $T \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(t_j,\varepsilon)$, θεωρούμε το $A_F = \{j \leq N \mid B(t_j,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset\}$, επιλέγουμε τυχόν $s_j \in B(t_j,\varepsilon)$, $j \in A_F$ και, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, ελέγχουμε εύκολα ότι $F \subseteq \bigcup_{j\in A_F} B(s_j,2\varepsilon)$.

Το φράγμα του Dudley χρησιμοποιεί τους αριθμούς κάλυψης $N(T,d,\varepsilon)$ ως μέτρο για την $\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$:

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ υποκανονική ανέλιξη με $\mathbb{E}X_t = 0$, $t \in T$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K\int_0^{\infty} \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon,$$

όπου $K > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $t_0 \in T$ και θεωρούμε τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο F του T με $t_0 \in F$. Έστω $r \geq 2$ και i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(F) \leq 2r^{-i}$. Ορίζουμε $\Pi_i = \{t_0\}$ και για κάθε $j > i$ θεωρούμε $\Pi_j \subseteq F$ με $N_j := |\Pi_j| = N(F,d,r^{-j})$ τέτοιο ώστε

$$F \subseteq \bigcup_{s\in\Pi_j} B(s,r^{-j}). \tag{3.1.21}$$

Τότε, για κάθε $j \geq i$ και κάθε $t \in F$ υπάρχει $\pi_j(t) \in \Pi_j$ τέτοιο ώστε

$$d(t,\pi_j(t)) \leq r^{-j}. \tag{3.1.22}$$

Ορίζουμε έτσι συναρτήσεις $\pi_j : F \to \Pi_j$, $j > i$. Από την (3.1.22) ελέγχουμε εύκολα ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1. Άρα,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K(r)\sum_{j\geq i} r^{-j}\sqrt{\log N(F,d,r^{-j})}. \tag{3.1.23}$$

Παρατηρώντας ότι

$$r^{-j}\sqrt{\log N(F,d,r^{-j})} \leq \frac{r}{r-1}\int_{r^{-j-1}}^{r^{-j}} \sqrt{\log N(F,d,\varepsilon)}d\varepsilon \tag{3.1.24}$$

για κάθε $j \geq i$ και χρησιμοποιώντας την (3.1.20), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t &\leq K(r)\int_0^\infty \sqrt{\log N(F,d,\varepsilon)}d\varepsilon \\ &\leq K(r)\int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon/2)}d\varepsilon \\ &= 2K(r)\int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}d\varepsilon\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της $\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$ έπεται το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα σύνολα Π_j και οι απεικονίσεις π_j ορίζονται με πιο συστηματικό τρόπο: τελείως χοντρικά, ζητάμε από δύο σημεία του F που «προσεγγίζονται» από το ίδιο σημείο του Π_j, να προσεγγίζονται από το ίδιο σημείο του Π_{j-1} (βλέπε τις συνθήκες 3 και 4 παρακάτω).

Θεώρημα 3.1.3 *Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του T με $t_0 \in F$. Έστω $r \geq 2$ και i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(F) \leq 2r^{-i}$. Ορίζουμε $\Pi_i = \{t_0\}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά $\Pi_j \subseteq F$, $j \geq i$ και συναρτήσεις $\pi_j : F \to \Pi_j$ που ικανοποιούν τα εξής:*

1. *Για κάθε $t \in F$ υπάρχει $j_0 = j_0(t) \geq i$ τέτοιος ώστε: για κάθε $j \geq j_0$,*

$$\pi_j(t) = t. \tag{1}$$

2. *Για κάθε $t \in F$ και για κάθε $j > i$,*

$$d(\pi_j(t), \pi_{j-1}(t)) \leq 2r^{-j+1}. \tag{2}$$

3. *Για κάθε $v \in \Pi_j$ και για κάθε $j \geq i$,*

$$\pi_j(v) = v. \tag{3}$$

4. *Για κάθε $s, t \in F$ και για κάθε $j > i$,*

$$\pi_j(t) = \pi_j(s) \Longrightarrow \pi_{j-1}(t) = \pi_{j-1}(s). \tag{4}$$

Τότε, για κάθε μέτρο πιθανότητας μ στον (F,d) ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K \sup_{t\in F}\sum_{j\geq i} r^{-j+1}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)}, \tag{3.1.25}$$

όπου $K > 0$ απόλυτη σταθερά, και $a/0 := \infty$.

Παρατηρήσεις: (α) Αν υπάρχει $t \in F$ τέτοιο ώστε $\mu(\{t\}) = 0$, τότε το Θεώρημα ισχύει ούτως ή άλλως: συμφωνήσαμε ότι $1/0 = \infty$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\mu(\{t\}) > 0$ για κάθε $t \in F$.

(β) Από τη συνθήκη (3), για κάθε $t \in F$ και για κάθε $j > i$ έχουμε $\pi_j(t) = \pi_j(\pi_j(t))$. Άρα, η συνθήκη (4) μας δίνει

$$\pi_{j-1}(t) = \pi_{j-1}(\pi_j(t)). \tag{3.1.26}$$

Τότε, από τη συνθήκη (2) βλέπουμε ότι

$$d(\pi_j(t), \pi_{j-1}(\pi_j(t))) \leq 2r^{-j+1} \tag{3.1.27}$$

για κάθε $t \in F$ και κάθε $j > i$. Κάθε $v \in \Pi_j$ γράφεται στη μορφή $\pi_j(t)$ (με $t = v$!), οπότε η (3.1.27) έχει σαν συνέπεια το εξής:

Ισχυρισμός: *Για κάθε $j > i$ και για κάθε $v \in \Pi_j$,*

$$d(v, \pi_{j-1}(v)) \leq \frac{2}{r^{j-1}}. \tag{3.1.28}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3: Για κάθε $j \geq i$ ορίζουμε $\alpha_j : \Pi_j \to [0, +\infty)$ με

$$\alpha_j(v) = \frac{2}{r^{j-1}} \sqrt{\log\left(\frac{2 \cdot 2^{j-i}}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)} \tag{3.1.29}$$

και θέτουμε

$$S := \sup_{t \in F} \sum_{j > i} \alpha_j(\pi_j(t)). \tag{3.1.30}$$

Από τη συνθήκη (1), την (3.1.26) και την υπόθεση ότι $\Pi_i = \{t_0\}$, μπορούμε να γράφουμε

$$X_t - X_{t_0} = \sum_{j>i} (X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(t)}) = \sum_{j>i} (X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(\pi_j(t))}) \tag{3.1.31}$$

για κάθε $t \in F$. Άρα,

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t \in F} (X_t - X_{t_0}) \geq uS\right) &= P\left(\sup_{t \in F} \sum_{j>i} \left(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(\pi_j(t))}\right)\right. \\ &\qquad \left. \geq \sup_{s \in F} u \sum_{j>i} \alpha_j(\pi_j(s))\right) \\ &\leq P\left(\bigcup_{t \in F} \left\{ \sum_{j>i} \left(X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(\pi_j(t))}\right)\right.\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \left.\left. \geq \sum_{j>i} u\alpha_j(\pi_j(t)) \right\}\right) \\
\leq\ & P\left(\bigcup_{j>i} \bigcup_{t\in F} \{X_{\pi_j(t)} - X_{\pi_{j-1}(\pi_j(t))} \geq u\alpha_j(\pi_j(t))\} \right) \\
\leq\ & \sum_{j>i} P\left(\bigcup_{v\in\Pi_j} \{X_v - X_{\pi_{j-1}(v)} \geq u\alpha_j(v)\} \right) \\
\leq\ & \sum_{j>i} \sum_{v\in\Pi_j} P\left(X_v - X_{\pi_{j-1}(v)} \geq u\alpha_j(v)\right) \\
\leq\ & \sum_{j>i} \sum_{v\in\Pi_j} 2\exp\left(-\frac{u^2\alpha_j^2(v)}{d^2(v,\pi_{j-1}(v))} \right) \\
\leq\ & \sum_{j>i} \sum_{v\in\Pi_j} 2\exp\left(-\frac{u^2\alpha_j^2(v)}{(2r^{-j+1})^2} \right)
\end{aligned}
$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε την (3.1.28).
Από τον τρόπο ορισμού του $\alpha_j(v)$, για κάθε $u \geq 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
2\exp\left(-\frac{u^2\alpha_j^2(v)}{(2r^{-j+1})^2} \right) &= 2\left[\exp\left(-\frac{\alpha_j^2(v)}{(2r^{-j+1})^2} \right) \right]^{u^2} \\
&= 2\left(\frac{\mu(\{v\})}{2\cdot 2^{j-i}} \right)^{u^2} \\
&\leq 2^{1-u^2} \frac{\mu(\{v\})}{2^{j-i}}.
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, και παίρνοντας υπόψιν την $\sum_{v\in\Pi_j} \mu(\{v\}) \leq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS \right) &\leq \sum_{j>i} \sum_{v\in\Pi_j} 2^{1-u^2} \frac{\mu(\{v\})}{2^{j-i}} \\
&= 2^{1-u^2} \sum_{j>i} \frac{1}{2^{j-i}} \sum_{v\in\Pi_j} \mu(\{v\}) \\
&\leq 2^{1-u^2} \sum_{j>i} \frac{1}{2^{j-i}} \\
&= 2^{1-u^2}
\end{aligned}
$$

για κάθε $u \geq 1$. Τώρα, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1, γράφουμε

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t = \mathbb{E}\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0})
$$

$$
\begin{aligned}
&= S\int_0^\infty P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&= S\int_0^1 P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&\quad + S\int_1^\infty P\left(\sup_{t\in F}(X_t - X_{t_0}) \geq uS\right)\, du \\
&\leq S + 2S\int_1^\infty 2^{-u^2} du \\
&= c\cdot S,
\end{aligned}
$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Από την (3.1.30) και την $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για $a, b > 0$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t &\leq c\cdot \sup_{t\in F}\sum_{j>i}\alpha_j(\pi_j(t)) \\
&\leq c\cdot\sup_{t\in F}\left(\sum_{j>i}\sqrt{\log 2}\frac{\sqrt{j-i}}{r^{j-1}} + \sum_{j>i}\frac{1}{r^{j-1}}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)}\right) \\
&\leq K_1\cdot\sup_{t\in F}\left(\frac{1}{r^{i-1}} + \sum_{j>i}\frac{1}{r^{j-1}}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)}\right)
\end{aligned}
$$

όπου $K_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Από την $\pi_i(t) = t_0$ και την $\mu(\{t_0\}) \leq 1$, έχουμε

$$
\frac{1}{r^{i-1}} \leq K_2\frac{1}{r^{i-1}}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{t_0\})}\right)}, \tag{3.1.32}
$$

όπου $K_2 \geq 1$ απόλυτη σταθερά. Συνεπώς,

$$
\frac{1}{r^{i-1}} + \sum_{j>i}\frac{1}{r^{j-1}}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)} \leq K_2\sum_{j\geq i}\frac{1}{r^{j-1}}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)} \tag{3.1.33}
$$

απ' όπου παίρνουμε την

$$
\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K\sup_{t\in F}\sum_{j\geq i} r^{-j+1}\sqrt{\log\left(\frac{2}{\mu(\{\pi_j(t)\})}\right)}. \qquad \square \tag{3.1.34}
$$

Οι συναρτήσεις π_j του προηγούμενου θεωρήματος ορίζουν φυσιολογικές διαμερίσεις $\mathcal{A}_j$ του F. Αν ορίσουμε $A_v = \{t \in F : \pi_j(t) = v\}$, τότε η $\mathcal{A}_j = (A_v)_{v\in\Pi_j}$ είναι διαμέριση του F. Οδηγούμαστε έτσι στη διατύπωση του εξής θεωρήματος.

Θεώρημα 3.1.4 *Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του T με $t_0 \in F$. Έστω $r \geq 2$ και i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(F) \leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{A}_j)_{j>i}$ είναι μια αύξουσα (με την έννοια της εκλέπτυνσης) ακολουθία διαμερίσεων του F με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\mathcal{A}_i = \{F\}$.

2. Για κάθε $j > i$ *και για κάθε* $A \in \mathcal{A}_j$,

$$\mathrm{diam}(A) \leq 2r^{-j}.$$

Τότε, για κάθε μέτρο πιθανότητας μ *στο* F,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K(r)\cdot \sup_{t\in F}\sum_{j>i}\frac{1}{r^j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)}, \tag{3.1.35}$$

όπου $K(r) > 0$ *σταθερά που εξαρτάται μόνο από το* r, *και* $A_j(t)$ *είναι εκείνο το* $A \in \mathcal{A}_j$ *το οποίο περιέχει το* t.

Απόδειξη: Για κάθε $j > i$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}_j$ επιλέγουμε $x_A \in A$. Ορίζουμε

$$\Pi_j = \{x_A :\ A \in \mathcal{A}_j\}, \tag{3.1.36}$$

και $\pi_j : F \to \Pi_j$ με

$$\pi_j(t) = x_{A_j(t)}. \tag{3.1.37}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{j>i}\sum_{A\in\mathcal{A}_j} 2^{-j+i}\mu(A) = \sum_{j>i} 2^{-j+i}\sum_{A\in\mathcal{A}_j}\mu(A) \leq \sum_{j>i} 2^{-j+i} = 1, \tag{3.1.38}$$

μπορούμε να ορίσουμε μέτρο πιθανότητας ν στο F με την ιδιοτητα: για κάθε $j > i$ και κάθε $A \in \mathcal{A}_j$,

$$\nu(\{x_A\}) \geq \frac{1}{2^{j-i}}\mu(A). \tag{3.1.39}$$

Πράγματι, αν θέσουμε

$$\mu_1(\{x\}) = \sum_{j>i}\ \sum_{\{A\in\mathcal{A}_j : x = x_A\}} 2^{-j+i}\mu(A) \tag{3.1.40}$$

για $x \in F$, η (3.1.38) δείχνει ότι $\mu_1(T) \leq 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο $\rho \geq 1$ παίρνουμε το ν.

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.1.3, οπότε ελέγχουμε πρώτα ότι οι συναρτήσεις π_j ικανοποιούν τις υποθέσεις του:

(α) Έστω $t \in F$. Υπάρχει $j_0 = j_0(t)$ τέτοιος ώστε: για κάθε $j \geq j_0$,

$$\frac{2}{r^j} < \min\{d(t,s) : s \in F\backslash\{t\}\}. \tag{3.1.41}$$

Έστω $j \geq j_0(t)$. Αφού $\mathrm{diam}(A_j(t)) \leq 2r^{-j}$, έχουμε $A_j(t) = \{t\}$. Έπεται ότι $x_{A_j(t)} = t$, δηλαδή $\pi_j(t) = t$.

(β) Από τον ορισμό των π_j, για κάθε $t \in F$ και για κάθε $j > i$ έχουμε

$$d(\pi_j(t), \pi_{j-1}(t)) = d(x_{A_j(t)}, x_{A_{j-1}(t)}) \leq \mathrm{diam}(A_{j-1}(t)) \leq \frac{2}{r^{j-1}}. \tag{3.1.42}$$

(γ) Αν $v \in \Pi_j$, τότε $v = x_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}_j$. Τότε, $A_j(v) = A$ άρα

$$\pi_j(v) = x_{A_j(v)} = x_A = v. \tag{3.1.43}$$

(δ) Έστω $t, s \in F$ με $\pi_j(t) = \pi_j(s)$. Τότε, υπάρχει $A \in \mathcal{A}_j$ τέτοιο ώστε $t, s \in A$. Αφού η $\mathcal{A}_j$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{A}_{j-1}$, υπάρχει $A' \in \mathcal{A}_{j-1}$ τέτοιο ώστε $t, s \in A'$. Συνεπώς,

$$\pi_{j-1}(t) = \pi_{j-1}(s) = x_{A'}. \tag{3.1.44}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.3 για το ν, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t &\leq K \cdot \sup_{t\in F} \sum_{j\geq i} r^{-j+1} \sqrt{\log\left(\frac{2}{\nu(\{\pi_j(t)\})}\right)} \\
&= K \cdot \sup_{t\in F} \sum_{j\geq i} r^{-j+1} \sqrt{\log\left(\frac{2}{\nu(\{x_{A_j(t)}\})}\right)} \\
&\leq K \cdot \sup_{t\in F} \sum_{j\geq i} r^{-j+1} \sqrt{\log\left(\frac{2^{j-i+1}}{\mu(A_j(t))}\right)} \\
&\leq K(r) \left(\frac{1}{r^i} + \sup_{t\in F} \sum_{j\geq i} r^{-j+1} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)}\right),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τις

$$\sqrt{\log\left(\frac{2^{j-i+1}}{\mu(A_j(t))}\right)} \leq \sqrt{\log 2}\sqrt{j-i+1} + \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)} \tag{3.1.45}$$

και

$$\sum_{j\geq i} \frac{\sqrt{j-i+1}}{r^{j-1}} = r^{-i+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{r^k} = K(r) \cdot \frac{1}{r^i}. \tag{3.1.46}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{r^i} \leq K(r) \cdot \sup_{t\in F} \sum_{j\geq i} r^{-j+1} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)}. \tag{3.1.47}$$

Παρατηρούμε ότι $|\mathcal{A}_{i+1}| \geq 2$. Διότι, αν $|\mathcal{A}_{i+1}| = 1$, τότε θα είχαμε $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i = \{T\}$ και η συνθήκη (2) θα έδινε $\mathrm{diam}(T) \leq 2/r^{i+1}$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του i. Αφού λοιπόν $|\mathcal{A}_{i+1}| \geq 2$, υπάρχει $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ με $\mu(A) \leq 1/2$. Αν επιλέξουμε τυχόν $t_* \in A$, τότε

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\log 2}}{r^i} &\leq r^{-i}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_{i+1}(t_*))}\right)} \\ &\leq \sum_{j\geq i} r^{-j+1}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t_*))}\right)} \\ &\leq \sup_{t\in F}\sum_{j\geq i} r^{-j+1}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)}.\end{aligned}$$

Με αυτήν την παρατήρηση, έχουμε το ζητούμενο. □

3.2 Κυριαρχούντα μέτρα για υποκανονικές ανελίξεις

Έστω (T,d) ένας μετρικός χώρος και $X=(X_t)_{t\in T}$ μια υποκανονική ανέλιξη. Δηλαδή,

$$\mathbb{E}X_t = 0 \tag{3.2.1}$$

για κάθε $t \in T$, και

$$P(|X_s - X_t| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{d^2(s,t)}\right) \tag{3.2.2}$$

για κάθε $t,s \in T$ και κάθε $u>0$. Για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον (T,d) ορίζουμε

$$\gamma_2(T,d,\mu) = \sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon. \tag{3.2.3}$$

Τέλος, θέτουμε

$$\gamma_2(T,d) := \inf\{\gamma_2(T,d,\mu) : \mu \text{ Borel μέτρο πιθανότητας στον } (T,d)\}. \tag{3.2.4}$$

Τα επόμενα δύο Λήμματα δίνουν κάποιες βασικές (και χρήσιμες) ιδιότητες της ποσότητας $\gamma_2(T,d)$.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω (T,d) και (F,ρ) δύο μετρικοί χώροι. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συστολή g που απεικονίζει τον (T,d) επί του (F,ρ). Τότε,*

$$\gamma_2(F,\rho) \leq \gamma_2(T,d). \tag{3.2.5}$$

Απόδειξη: Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T, d). Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας σ στον (F, ρ) που ορίζεται από την

$$\sigma(A) = \mu(g^{-1}(A)). \tag{3.2.6}$$

Αφού η g είναι συστολή, για κάθε $t \in T$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε $B(t, \varepsilon) \subseteq g^{-1}(B(g(t), \varepsilon))$. Άρα,

$$\mu(B(t, \varepsilon)) \leq \mu(g^{-1}(B(g(t), \varepsilon)) = \sigma(B(g(t), \varepsilon)). \tag{3.2.7}$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η g είναι επί, γράφουμε

$$\begin{aligned} \gamma_2(F, \rho, \sigma) &= \sup_{t \in F} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\sigma(B(t, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon \\ &= \sup_{t \in T} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\sigma(B(g(t), \varepsilon))}\right)} d\varepsilon \\ &\leq \sup_{t \in T} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon \\ &= \gamma_2(T, d, \mu), \end{aligned}$$

άρα

$$\gamma_2(F, \rho) \leq \gamma_2(F, \rho, \sigma) \leq \gamma_2(T, d, \mu). \tag{3.2.8}$$

Αφού το μ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 3.2.2 *Έστω (T, d) μετρικός χώρος και F μη κενό υποσύνολο του T. Τότε,*

$$\gamma_2(F, d) \leq 2\gamma_2(T, d). \tag{3.2.9}$$

Απόδειξη: Έστω $\delta > 1$. Μπορούμε να ορίσουμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : T \to F$ έτσι ώστε

$$d(t, g(t)) \leq \delta \inf\{d(t, s) \mid s \in F\}. \tag{3.2.10}$$

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T, d). Θεωρούμε το Borel μέτρο πιθανότητας σ στον (F, d) που ορίζεται από την $\sigma(A) = \mu(g^{-1}(A))$.

Έστω $x \in F$ και $t \in B(x, \varepsilon)$. Τότε, $d(t, F) \leq d(t, x)$, άρα $d(t, g(t)) \leq \delta d(t, x)$. Επομένως, $d(x, g(t)) \leq d(x, t) + d(t, g(t)) \leq (1 + \delta)d(x, t) < (1 + \delta)\varepsilon$. Δηλαδή,

$$B_T(x, \varepsilon) \subseteq g^{-1}(B_F(x, (1 + \delta)\varepsilon)). \tag{3.2.11}$$

Άρα,

$$\mu(B_T(x, \varepsilon)) \leq \mu(g^{-1}(B_F(x, (1 + \delta)\varepsilon))) = \sigma(B_F(x, (1 + \delta)\varepsilon)). \tag{3.2.12}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\gamma_2(F,d,\sigma) &= \sup_{x\in F}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\sigma(B_F(x,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon \\
&\le \sup_{x\in F}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B_T(x,\varepsilon/(1+\delta)))}\right)}d\varepsilon \\
&\le (1+\delta)\sup_{x\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B_T(x,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon \\
&= (1+\delta)\gamma_2(T,d,\mu).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\gamma_2(F,d) \le \gamma_2(F,d,\sigma) \le (1+\delta)\gamma_2(T,d,\mu). \tag{3.2.13}$$

Αφού το μ και το $\delta > 1$ ήταν τυχόντα, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 3.2.1 *Υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (T,d) είναι ένας μετρικός χώρος και $X = (X_t)_{t\in T}$ μια υποκανονική ανέλιξη, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \le K\cdot \gamma_2(T,d). \tag{3.2.14}$$

Από τον ορισμό του $\gamma_2(T,d)$, για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \le K\cdot \sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon \tag{3.2.15}$$

για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον (T,d).

Πρόταση 3.2.1 *Έστω μ Borel μέτρο πιθανότητας στον (T,d). Υποθέτουμε ότι*

$$S := \sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon < +\infty, \tag{3.2.16}$$

θεωρούμε $r > 8$ και ορίζουμε $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, με

$$\varphi_j(t) = \sup\left\{\int_0^{r^{-j}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon \;:\; u\in T, d(t,u) < 2r^{-j}\right\}. \tag{3.2.17}$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\theta(n) = \frac{1}{r^2}\sqrt{\log n}. \tag{3.2.18}$$

Τότε, για κάθε $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η εξής συνεπαγωγή: αν τα $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ έχουν την ιδιότητα

$$\forall p, q \leq n \text{ με } p \neq q \text{ ισχύει } d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}, \tag{3.2.19}$$

τότε

$$\varphi_j(s) \geq r^{-j}\theta(n) + \min_{l \leq n} \varphi_{j+2}(t_l). \tag{3.2.20}$$

Απόδειξη: Έστω $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ που ικανοποιούν την (3.2.19). Για κάθε $l \leq n$ θεωρούμε τυχόν $s_l \in B(t_l, 2r^{-j-2})$. Τότε,

$$d(s, s_l) \leq d(s, t_l) + d(t_l, s_l) < r^{-j} + 2r^{-j-2} < 2r^{-j} \tag{3.2.21}$$

και αν $l \neq l'$, τότε

$$d(s_l, s_{l'}) \geq d(t_l, t_{l'}) - d(t_l, s_l) - d(t_{l'}, s_{l'}) \geq r^{-j-1} - 4r^{-j-2} > 4r^{-j-2}. \tag{3.2.22}$$

Άρα, οι μπάλες $B(s_l, 2r^{-j-2})$ είναι ξένες ανά δύο. Αφού το μ είναι μέτρο πιθανότητας, υπάρχει $m \leq n$ τέτοιος ώστε

$$\mu(B(s_m, 2r^{-j-2})) \leq 1/n. \tag{3.2.23}$$

Από την (3.2.21) έχουμε $s_m \in B(s, 2r^{-j})$. Χρησιμοποιώντας και την (3.2.23) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\varphi_j(s) &\geq \int_0^{r^{-j}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(s_m, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon \\
&\geq \int_0^{r^{-j-2}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(s_m, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon + \int_{r^{-j-2}}^{2r^{-j-2}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(s_m, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon \\
&\geq \int_0^{r^{-j-2}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(s_m, \varepsilon))}\right)} d\varepsilon + r^{-j-2}\sqrt{\log n}.
\end{aligned}$$

Αφού το $s_m \in B(t_m, 2r^{-j-2})$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi_j(s) \geq r^{-j-2}\sqrt{\log n} + \varphi_{j+2}(t_m) \geq r^{-j}\theta(n) + \min_{l \leq n} \varphi_{j+2}(t_l), \tag{3.2.24}$$

από τον ορισμό της θ. □

Παρατηρούμε ότι, για τις φ_j της Πρότασης 3.2.1,

$$S = \sup_{t \in T} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(t). \tag{3.2.25}$$

Άρα, η Πρόταση 3.2.1 μας εξασφαλίζει ότι: αν (T, d) είναι ένας μετρικός χώρος και μ είναι ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T, d) που ικανοποιεί την (3.2.16), τότε για $r > 8$ υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$ με

$$S := \sup_{t \in T} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(t) < +\infty \tag{3.2.26}$$

και $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ με

$$\lim_{n\to+\infty} \theta(n) = +\infty, \tag{3.2.27}$$

που ικανοποιούν το εξής: Αν $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$ και $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ με $p \neq q \Longrightarrow d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}$, τότε

$$\varphi_j(s) \geq r^{-\beta j}\theta(n) + \min_{l\leq n} \varphi_{j+2}(t_l), \tag{3.2.28}$$

(με $\beta = 1$). Στη συνέχεια θα έχουμε στο μυαλό μας τις φ_j και θ της Πρότασης 3.2.1. Αυτό όμως που θα χρησιμοποιήσουμε (ως ένα σημείο) είναι απλώς η ύπαρξη συναρτήσεων φ_j και θ που ικανοποιούν τις (3.2.26)-(3.2.28) για κάποιον $\beta > 0$.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω (T, d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο και $r \geq 2$, $\beta > 0$. Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$ με $S := \sup_{t\in T}\sup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(t) < +\infty$ και $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ με $\lim_{n\to+\infty} \theta(n) = +\infty$, που ικανοποιούν το εξής: Αν $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$ και $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ με $p \neq q \Longrightarrow d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}$, τότε*

$$\varphi_j(s) \geq r^{-\beta j}\theta(n) + \min_{l\leq n} \varphi_{j+2}(t_l).$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T και απεικονίσεις $\ell_j : \mathcal{A}_j \to \mathbb{N}$, που ικανοποιούν τα εξής:

1. Αν $j > i$ και $A \in \mathcal{A}_j$, τότε

$$\mathrm{diam}(A) \leq 2r^{-j}. \tag{3.2.29}$$

2. Αν $j \geq i$ και A, B είναι στοιχεία της διαμέρισης $\mathcal{A}_{j+1}$ τα οποία περιέχονται στο ίδιο στοιχείο της διαμέρισης $\mathcal{A}_j$, τότε

$$\ell_{j+1}(A) \neq \ell_{j+1}(B). \tag{3.2.30}$$

3. Για κάθε $t \in T$,

$$\sum_{j\geq i} r^{-\beta j}\theta(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))) \leq 4S, \tag{3.2.31}$$

όπου $A_{j+1}(t)$ είναι το στοιχείο της $\mathcal{A}_{j+1}$ στο οποίο ανήκει το t.

Απόδειξη: Μαζί με κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}_j$, $j > i$, θα ορίσουμε και ένα διακεκριμένο σημείο $u_j(A) \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $t \in A$,

$$d(t, u_j(A)) \leq r^{-j}. \tag{3.2.32}$$

Από την (3.2.32) θα ικανοποιείται προφανώς η (3.2.29), οπότε θα μένει να εξασφαλίσουμε μόνο τις (3.2.30) και (3.2.31). Η κατασκευή θα γίνει επαγωγικά ως προς $j \geq i$.

Για $j = i$ θέτουμε $\mathcal{A}_i = \{T\}$, $\ell_i(T) = 1$ και επιλέγουμε $u_i(T) \in T$ τέτοιο ώστε

$$\varphi_{i+2}(u_i(T)) \geq \sup_{t\in T} \varphi_{i+2}(t) - \frac{S}{2}. \tag{3.2.33}$$

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί η διαμέριση $\mathcal{A}_j$, οι φυσικοί $\ell_j(A)$ και τα σημεία $u_j(A)$, $A \in \mathcal{A}_j$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (3.2.30)-(3.2.32).

Για να ορίσουμε την $\mathcal{A}_{j+1}$, αρκεί να ορίσουμε κατάλληλη διαμέριση κάθε στοιχείου A της $\mathcal{A}_j$. Αυτό θα γίνει μέσω ενός επιχειρήματος «εξάντλησης»:

Έστω $A \in \mathcal{A}_j$. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε $t_1 \in A$ τέτοιο ώστε

$$\varphi_{j+2}(t_1) \geq \sup_{t\in A} \varphi_{j+2}(t) - \frac{1}{2^{j-i}}\frac{S}{2}. \tag{3.2.34}$$

Θεωρούμε σαν πρώτο κομμάτι του A το $D_1 := A \cap B(t_1, r^{-j-1})$ και θέτουμε $u_{j+1}(D_1) = t_1$, $\ell_{j+1}(D_1) = 1$.

Κατόπιν, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αντικαθιστώντας το A με το $A \setminus D_1$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντλήσουμε το A. Ακριβέστερα: ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει κατάλληλα $t_1, \ldots, t_{p-1} \in A$ (και τα αντίστοιχα D_i, $u_{j+1}(D_i)$, $\ell_{j+1}(D_i)$). Βρίσκουμε $t_p \in A \setminus \bigcup_{s<p} B(t_s, r^{-j-1})$ τέτοιο ώστε

$$\varphi_{j+2}(t_p) \geq \sup \left\{\varphi_{j+2}(t) : t \in A \setminus \bigcup_{s<p} B(t_s, r^{-j-1})\right\} - \frac{1}{2^{j-i}}\frac{S}{2}, \tag{3.2.35}$$

και θέτουμε

$$D_p = \left(A \setminus \bigcup_{s<p} B(t_s, r^{-j-1})\right) \cap B(t_p, r^{-j-1}). \tag{3.2.36}$$

Τέλος, ορίζουμε

$$u_{j+1}(D_p) = t_p \quad \text{και} \quad \ell_{j+1}(D_p) = p. \tag{3.2.37}$$

Παρατήρηση: Αυτή η κατασκευή σταματάει μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων (εξαντλείται το A). Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $A \in \mathcal{A}_j$ έχουν γίνει m βήματα. Για κάθε $p \neq q$ στο $\{1, \ldots, m\}$ έχουμε $d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}$, άρα

$$\varphi_j(u_j(A)) \geq r^{-\beta j}\theta(m) + \min_{l\leq m} \varphi_{j+2}(t_l), \tag{3.2.38}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\theta(m) \leq r^{\beta j}\varphi_j(u_j(A)). \tag{3.2.39}$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} \theta(n) = +\infty$, το m πρέπει να μένει φραγμένο (από κάποια ποσότητα που εξαρτάται από το $u_j(A)$ και το β). $\square$

Από τον τρόπο κατασκευής, τα σύνολα D_p είναι ξένα και ικανοποιείται η (3.2.30). Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και η (3.2.31): παρατηρούμε, όπως και πριν, ότι για κάθε p έχουμε $d(u_j(A), t_p) \leq r^{-j}$ και ότι αν $s \neq q$ στο $\{1, \ldots, p\}$ τότε $d(t_s, t_q) \geq r^{-j-1}$. Άρα,

$$\varphi_j(u_j(A)) \geq r^{-\beta j}\theta(p) + \min_{l \leq p} \varphi_{j+2}(t_l). \tag{3.2.40}$$

Επίσης,

$$t_p \in A \setminus \bigcup_{l<p} B(t_l, r^{-j-1}). \tag{3.2.41}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.2.35) και την $A \setminus \bigcup_{l<p} B(t_l, r^{-j-1}) \subseteq A \setminus \bigcup_{l'<l} B(t_{l'}, r^{-j-1})$, $l \leq p$, παίρνουμε

$$\varphi_{j+2}(t_l) \geq \varphi_{j+2}(t_p) - \frac{1}{2^{j-i}} \frac{S}{2} \tag{3.2.42}$$

για κάθε $l < p$. Από την (3.2.40) έπεται ότι

$$\varphi_j(u_j(A)) \geq r^{-\beta j}\theta(p) + \varphi_{j+2}(t_p) - \frac{1}{2^{j-i}} \frac{S}{2}. \tag{3.2.43}$$

Για το τυχόν $t \in D_p$ έχουμε $A = A_j(t)$, $D_p = A_{j+1}(t)$ και $\ell_{j+1}(A_{j+1}(t)) = \ell_{j+1}(D_p) = p$. Άρα, η (3.2.43) γράφεται στη μορφή

$$\varphi_j(u_j(A_j(t)))) \geq r^{-\beta j}\theta(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))) + \varphi_{j+2}(t_p) - \frac{1}{2^{j-i}} \frac{S}{2}. \tag{3.2.44}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$u_{j+2}(A_{j+2}(t)) \in A_{j+2}(t) \subseteq A_{j+1}(t) = D_p \subseteq A \setminus \bigcup_{l<p} B(t_l, r^{-j-1}),$$

οπότε,

$$\varphi_{j+2}(t_p) \geq \varphi_{j+2}(u_{j+2}(A_{j+2}(t))) - \frac{1}{2^{j-i}} \frac{S}{2}. \tag{3.2.45}$$

Από τις (3.2.44) και (3.2.45) βλέπουμε ότι

$$\varphi_j(u_j(A_j(t)))) \geq \varphi_{j+2}(u_{j+2}(A_{j+2}(t))) + r^{-\beta j}\theta(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))) - \frac{S}{2^{j-i}}. \tag{3.2.46}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες (3.2.46) για $j \geq i$ συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $t \in T$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq i} r^{-\beta j}\theta(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))) &\leq 2S + \varphi_i(u_i(A_i(t))) + \varphi_{i+1}(u_{i+1}(A_{i+1}(t))) \\ &\leq 4S, \end{aligned}$$

αφού $S = \sup_{t \in T} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(t)$. Έχουμε λοιπόν δείξει την (3.2.31). □

Μια ισοδύναμη διατύπωση της Πρότασης 3.2.2 είναι η εξής.

Πρόταση 3.2.3 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο και $r\geq 2$, $\beta>0$. Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T)\leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\psi_j : T\to\mathbb{R}^+$ με $S:=\sup_{t\in T}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j(t)<+\infty$ και $\theta:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ με $\lim_{n\to+\infty}\theta(n)=+\infty$, που ικανοποιούν το εξής: Αν $s\in T$, $j\in\mathbb{Z}$ και $t_1,\dots,t_n\in B(s,r^{-j})$ με $p\neq q\Longrightarrow d(t_p,t_q)\geq r^{-j-1}$, τότε*

$$\max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l)\geq r^{-\beta j}\theta(n)+\psi_j(s). \tag{3.2.47}$$

Τότε, ισχύει το συμπέρασμα της Πρότασης 3.2.2.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2.2 για τις $\varphi_j(t)=S-\psi_j(t)$. □

Η επόμενη Πρόταση συσχετίζει το συμπέρασμα της Πρότασης 3.2.2 με τα κυριαρχούντα μέτρα.

Πρόταση 3.2.4 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο και έστω $r\geq 2$ και $\alpha,\beta>0$. Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T)\leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ είναι η αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων του T που δίνει η Πρόταση 3.2.2. Ειδικότερα, $\mathrm{diam}(A)\leq 2r^{-j}$ αν $A\in\mathcal{A}_j$, και σε κάθε $A\in\mathcal{A}_j$, $j\geq i$, αντιστοιχεί ένας αριθμός $\ell_j(A)\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε: αν τα $A,B\in\mathcal{A}_{j+1}$ με $A\neq B$ περιέχονται στο ίδιο στοιχείο της $\mathcal{A}_j$, τότε*

$$\ell_{j+1}(A)\neq\ell_{j+1}(B). \tag{3.2.48}$$

Τότε, υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον (T,d) τέτοιο ώστε

$$\sup_{t\in T}\sum_{j>i}r^{-\beta j}\big(\log\frac{1}{\nu(A_j(t))}\big)^{1/\alpha}\leq K(\alpha,\beta,r)\big(r^{-\beta i}+\sup_{t\in T}\sum_{j>i}r^{-\beta j}(\log\ell_j(A_j(t)))^{1/\alpha}\big), \tag{3.2.49}$$

όπου $K(\alpha,\beta,r)>0$ σταθερά που εξαρτάται από τα α, β και r.

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση που ο (T,d) είναι πεπερασμένος. Ορίζουμε επαγωγικά αριθμούς $w_j(A)$ για κάθε $j\geq i$ και $A\in\mathcal{A}_j$. Για $j=i$ θέτουμε $w_i(T)=1$.

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί οι αριθμοί $w_{j-1}(A)$, $A\in\mathcal{A}_{j-1}$. Για κάθε $B\in\mathcal{A}_j$, θέτουμε

$$w_j(B)=\frac{1}{4\ell_j(B)^2}w_{j-1}(A), \tag{3.2.50}$$

όπου A είναι το στοιχείο της $\mathcal{A}_{j-1}$ το οποίο περιέχει το B. Αθροίζοντας τις (3.2.50) και χρησιμοποιώντας την (3.2.48) και την $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\leq 2$, βλέπουμε ότι

$$\sum_{B\in\mathcal{A}_j,B\subseteq A}w_j(B)\leq\frac{w_{j-1}(A)}{2}. \tag{3.2.51}$$

Από τη σχέση αυτή, με επαγωγή ως προς j, δείχνουμε ότι

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_j} w_j(A) \leq \frac{1}{2^{j-i}}. \tag{3.2.52}$$

[Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_j} w_j(A) = \sum_{A\in\mathcal{A}_{j-1}} \sum_{B\in\mathcal{A}_j, B\subseteq A} w_j(B) \leq \frac{1}{2}\sum_{A\in\mathcal{A}_{j-1}} w_{j-1}(A) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{j-i-1}} = \frac{1}{2^{j-i}}$$

αν προχωρήσουμε με επαγωγή.] Από την (3.2.52) έπεται ότι

$$\sum_{j>i}\sum_{A\in\mathcal{A}_j} w_j(A) = a \leq 1. \tag{3.2.53}$$

Συνεπώς, υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον (T,d) με την εξής ιδιότητα: για κάθε $j>i$ και κάθε $A\in\mathcal{A}_j$,

$$\nu(A) \geq w_j(A). \tag{3.2.54}$$

Αν $A\in\bigcup_{j\geq i}\mathcal{A}_j$ και k είναι ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο $A\in\mathcal{A}_k$, ορίζουμε

$$\nu(A) = \frac{1}{a}\sum_{j\geq k}\sum_{\{B\in\mathcal{A}_j : B\subseteq A\}} w_j(B). \tag{3.2.55}$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν $t\in T$. Από τις (3.2.50) έχουμε ότι

$$w_j(A_j(t)) = \frac{1}{4^{j-i}}\prod_{i<k\leq j}\ell_k(A_k(t))^{-2}, \tag{3.2.56}$$

άρα

$$\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right) \leq \log\left(\frac{1}{w_j(A_j(t))}\right) \leq \log 4\cdot(j-i) + 2\sum_{i<k\leq j}\log\big(\ell_k(A_k(t))\big). \tag{3.2.57}$$

Αν $\alpha\geq 1$, χρησιμοποιώντας την $(x+y)^{1/\alpha}\leq x^{1/\alpha}+y^{1/\alpha}$ παίρνουμε

$$\left(\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)\right)^{1/\alpha} \leq K(j-i)^{1/\alpha} + 2^{1/\alpha}\sum_{i<k\leq j}\big(\log\big(\ell_k(A_k(t))\big)\big)^{1/\alpha}. \tag{3.2.58}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\sum_{j>i} r^{-\beta j}\left(\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)\right)^{1/\alpha} &\leq K\sum_{j>i} r^{-\beta j}(j-i)^{1/\alpha}\\ &\quad + K(\alpha)\sum_{j>i}\sum_{i<k\leq j} r^{-\beta j}\big(\log\big(\ell_k(A_k(t))\big)\big)^{1/\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K\sum_{j>i} r^{-\beta j}(j-i)^{1/\alpha} \\
&\quad + K(\alpha)\sum_{k>i}\big\{\sum_{j\geq k} r^{-\beta j}\big\}\left(\log\left(\ell_k(A_k(t))\right)\right)^{1/\alpha} \\
&\leq Kr^{-\beta i}\left(\sum_{n\geq 1} r^{-\beta n} n^{1/\alpha}\right) \\
&\quad + K(\alpha)\sum_{k>i} r^{-\beta k}\big\{\sum_{n\geq 0} r^{-\beta n}\big\}\left(\log\left(\ell_k(A_k(t))\right)\right)^{1/\alpha} \\
&\leq K(r,\alpha)\big(r^{-\beta i} + \sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-\beta j}\left(\log \ell_j(A_j(t))\right)^{1/\alpha}\big)
\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $K(r,\alpha)>0$.

Αν $0<\alpha<1$, η συνάρτηση $x\mapsto x^{1/\alpha}$ είναι κυρτή, οπότε για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $y_k, a_k\geq 0$ με $\sum a_k = 1$ έχουμε

$$\left(\sum a_k y_k\right)^{1/\alpha} \leq \sum a_k y_k^{1/\alpha}. \tag{3.2.59}$$

Παίρνοντας $a_k = r^{\beta(k-j)\alpha/2}/\sum_{l\geq 1} r^{-\beta l\alpha/2}$ και θέτοντας $x_k=\log(\ell(A_k(t)))$, $y_k = x_k/a_k$, βλέπουμε ότι

$$\left(\sum_{i<k\leq j} x_k\right)^{1/\alpha} \leq \sum_{i<k\leq j} a_k^{1-1/\alpha} x_k^{1/\alpha}. \tag{3.2.60}$$

Με απλές πράξεις, από την (3.2.57) παίρνουμε

$$\big(\log\frac{1}{\nu(A_j(t))}\big)^{1/\alpha} \leq K(\alpha,\beta,r)\big[(j-i)^{1/\alpha} + \sum_{i<k\leq j} r^{\beta(j-k)/2}\big(\log(\ell_k(A_k(t)))\big)^{1/\alpha}\big]. \tag{3.2.61}$$

Κατόπιν, δουλεύουμε όπως στην περίπτωση $\alpha\geq 1$. $\square$

Σημείωση: Σε όλες τις εφαρμογές, μπορεί κανείς να υποθέσει ότι ο (T,d) είναι πεπερασμένος. Για το λόγο αυτό ακολουθούμε την παρουσίαση του Talagrand στο [T2]. Η απόδειξη της Πρότασης 3.2.4 που δόθηκε παραπάνω δουλεύει στην περίπτωση που η απόσταση d ικανοποιεί την $d(t,s)\leq \max\{d(t,u),d(u,s)\}$ για κάθε $t,u,s\in T$ - τότε λέμε ότι ο (T,d) είναι «ultrametric». Η βασική ιδιότητα των ultrametric χώρων είναι ότι δύο μπάλες με την ίδια ακτίνα συμπίπτουν ή είναι ξένες. Σε αυτή την περίπτωση, η ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)$ της Πρότασης 3.2.2 αποτελείται από ξένες μπάλες των οποίων οι διάμετροι τείνουν στο 0 καθώς $j\to\infty$. Τότε, το μέτρο ν που ορίστηκε από την (3.2.55) στην άλγεβρα $\bigcup_{j\geq i}\mathcal{A}_j$, επεκτείνεται χωρίς πρόβλημα στην Borel σ-άλγεβρα του (T,d). Η γενική περίπτωση καλύπτεται στο βιβλίο των Ledoux και Talagrand.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο, και έστω $r \geq 2$. Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$ με $S := \sup_{t\in T}\sup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(t) < +\infty$ που ικανοποιούν το εξής: Αν $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$ και $t_1,\dots,t_n \in B(s,r^{-j})$ με $p \neq q \Longrightarrow d(t_p,t_q) \geq r^{-j-1}$, τότε*

$$\varphi_j(s) \geq r^{-j-2}\sqrt{\log n} + \min_{l\leq n} \varphi_{j+2}(t_l).$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T με την ιδιότητα $\mathrm{diam}(A) \leq 2r^{-j}$ αν $A \in \mathcal{A}_j$, και μέτρο πιθανότητας ν στον (T,d), τέτοια ώστε

$$\sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)} \leq K(r)\cdot S, \tag{3.2.62}$$

όπου $K(r) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το r, και $A_j(t)$ το στοιχείο της $\mathcal{A}_j$ στο οποίο ανήκει το t.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)$ και τις απεικονίσεις $\ell_j : \mathcal{A}_j \to \mathbb{N}$ που μας δίνει η Πρόταση 3.2.2. Τότε,

$$\sup_{t\in T}\sum_{j\geq i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))\right)} \leq 4S. \tag{3.2.63}$$

Επίσης, οι ℓ_j ικανοποιούν την (3.2.48), οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.2.4 μπορούμε να βρούμε μέτρο πιθανότητας ν στον (T,d) τέτοιο ώστε

(3.2.64)

$$\sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)} \leq K(r)\left(r^{-i} + \sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\ell_j(A_j(t))\right)}\right).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)} &\leq K(r)\left(r^{-i} + \sup_{t\in T}\sum_{j\geq i} \frac{r^{-j}}{r}\sqrt{\log\left(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))\right)}\right)\\ &\leq K_1(r)\cdot(r^{-i}+S).\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι $r^{-i} \leq K_2(r)S$. Από τον ορισμό του i, υπάρχουν $t \neq s$ στον T με $t \in B(s,r^{-i})$ και $d(s,t) \geq r^{-i-1}$. Από την υπόθεση του Θεωρήματος, έχουμε

$$S \geq \varphi_i(s) \geq r^{-i}\sqrt{\log 2}, \tag{3.2.65}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το Θεώρημα 3.2.1 στην περίπτωση που ο (T,d) είναι πεπερασμένος μετρικός χώρος.

Θεώρημα 3.2.3 *Υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (T, d) είναι ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος και $X = (X_t)_{t\in T}$ μια υποκανονική ανέλιξη, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K \cdot \gamma_2(T, d). \tag{3.2.66}$$

Απόδειξη: Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον (T, d), με

$$S := \sup_{t\in T} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)} d\varepsilon < +\infty. \tag{3.2.67}$$

Σταθεροποιούμε $r > 8$ και ορίζουμε $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, με

$$\varphi_j(t) = \sup\left\{ \int_0^{r^{-j}} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)} d\varepsilon \; : \; u \in T, d(t,u) \leq 2r^{-j} \right\}. \tag{3.2.68}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sup_{t\in T} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(t) = S. \tag{3.2.69}$$

Αν $\theta(n) = \frac{1}{r^2}\sqrt{\log n}$, η Πρόταση 3.2.1 δείχνει ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.2. Άρα, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.4, και μέτρο πιθανότητας ν στον (T, d), τέτοια ώστε

$$\sup_{t\in T} \sum_{j>i} r^{-j} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)} \leq K(r) \cdot S, \tag{3.2.70}$$

όπου $K(r) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το r, και $A_j(t)$ το στοιχείο της $\mathcal{A}_j$ στο οποίο ανήκει το t. Από το Θεώρημα 3.1.4 έχουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K_1(r) \cdot \sup_{t\in T} \sum_{j>i} \frac{1}{r^j} \sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)}. \tag{3.2.71}$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.70) και (3.2.71) παίρνουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K_2(r) \cdot S, \tag{3.2.72}$$

και η (3.2.67) ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1: Από το Λήμμα 3.2.2, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του T,

$$\gamma_2(F, d) \leq 2\gamma_2(T, d). \tag{3.2.73}$$

Από το Θεώρημα 3.2.3, για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq T$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t \leq K \cdot \gamma_2(F,d) \leq 2K \cdot \gamma_2(T,d), \tag{3.2.74}$$

όπου $K > 0$ απόλυτη σταθερά. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t := \sup\left\{\mathbb{E}\sup_{t\in F} X_t : F \subseteq T, |F| < +\infty\right\} \leq 2K \cdot \gamma_2(T,d). \quad \square \tag{3.2.75}$$

3.3 Ανελίξεις του Gauss: το κάτω φράγμα

Σε αυτή την παράγραφο επιστρέφουμε στο πλαίσιο των ανελίξεων του Gauss. Έστω (T,d) μετρικός χώρος, και έστω $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ μια ανέλιξη του Gauss με την ιδιότητα

$$\|X_t - X_s\|_2 = d(t,s) \tag{3.3.1}$$

για κάθε $t, s \in T$. Το Θεώρημα του Talagrand για τα κυριαρχούντα μέτρα είναι το εξής.

Θεώρημα 3.3.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $K > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (T,d) είναι ένας μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο, και αν $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in T}$ είναι μια ανέλιξη του Gauss που ικανοποιεί την (3.3.1), τότε*

$$\frac{1}{K} \cdot \gamma_2(T,d) \leq \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K \cdot \gamma_2(T,d). \tag{3.3.2}$$

Η δεξιά ανισότητα είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.2.1 για τις υποκανονικές ανελίξεις. Για την αριστερή ανισότητα, αρκεί να δείξουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 3.3.1 *Έστω $r > 2$ και έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$. Αν ο r είναι αρκετά μεγάλος, τότε οι συναρτήσεις $\varphi_j : T \to \mathbb{R}^+$, $j \geq i$, με*

$$\varphi_j(t) := \mathbb{E}\sup\{X_u \mid u \in B(t, 2r^{-j})\} \tag{3.3.3}$$

ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: αν $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ και $t_p \neq t_q \implies d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}$, τότε

$$\varphi_j(s) \geq r^{-j}\frac{1}{K(r)}\sqrt{\log n} + \min_{l\leq n} \varphi_{j+2}(t_l), \tag{3.3.4}$$

όπου $K(r) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το r.

Για την απόδειξη της Πρότασης 3.3.1, θα χρειαστούμε κάποια Λήμματα. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov.

Λήμμα 3.3.1 *Αν τα $t_1, \ldots, t_n \in T$ ικανοποιούν την $l \neq l' \Longrightarrow d(t_l, t_{l'}) \geq \alpha$, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{l\leq n} X_{t_l} \geq \frac{1}{K_1}\alpha\sqrt{\log n}, \tag{3.3.5}$$

όπου $K_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Άμεσο, από το Λήμμα 2.4.1 και την (3.3.1). □

Το δεύτερο Λήμμα είναι μια πολύ σημαντική συνέπεια της ισοπεριμετρικής ανισότητας στο χώρο του Gauss.

Λήμμα 3.3.2 *Έστω $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in S}$ μια πεπερασμένη ανέλιξη του Gauss. Ορίζουμε*

$$\sigma := \sup_{t\in S} \|Z_t\|_2. \tag{3.3.6}$$

Τότε, για κάθε $u > 0$ έχουμε

$$P\left(\left|\sup_{t\in S} Z_t - \mathbb{E}\sup_{t\in S} Z_t\right| \geq K_2\sigma u\right) \leq 2e^{-u^2}, \tag{3.3.7}$$

όπου $K_2 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S = \{1, \ldots, n\}$. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $G = (Z_1, \ldots, Z_n)$ στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $n \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε $\mathrm{dist}(G) = \mathrm{dist}(AN)$, όπου N τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \max_{i\leq n}\langle Ax, e_i\rangle, \tag{3.3.8}$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$P\left(\max_{i\leq n} Z_i \in B\right) = P\left(\max_{i\leq n}(AN)_i \in B\right) = \gamma_n(\{x : F(x) \in B\}). \tag{3.3.9}$$

Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &\leq \max_{i\leq n} |\langle A(x-y), e_i\rangle| \\
&\leq \max_{i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}\cdot(x_j - y_j)| \\
&\leq \max_{i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \|x-y\|_2 \\
&= \max_{i\leq n} \left(\mathbb{E}Z_i^2\right)^{1/2} \|x-y\|_2 \\
&= \sigma\cdot\|x-y\|_2,
\end{aligned}$$

δηλαδή, η F είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά σ. Από την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss, για κάθε $u > 0$ έχουμε

$$\gamma_n\left(x \mid \left|F(x) - \int F\right| \geq K_2\sigma u\right) \leq 2e^{-u^2}, \tag{3.3.10}$$

όπου $K_2 > 0$ απόλυτη σταθερά. Από την (3.3.9) έπεται το συμπέρασμα. □

Λήμμα 3.3.3 *Έστω $\sigma > 0$ και $t_1, \ldots, t_n \in T$. Υποθέτουμε ότι αν $l, l' \leq n$ και $l \neq l'$, τότε $d(t_l, t_{l'}) \geq \alpha$. Για κάθε $l \leq n$ θεωρούμε τυχόν σύνολο $A_l \subseteq B(t_l, \sigma)$, και θέτουμε*

$$A := \bigcup_{l \leq n} A_l. \tag{3.3.11}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}\sup_{t \in A} X_t \geq \frac{\alpha}{K_1}\sqrt{\log n} - \sigma K_3\sqrt{\log n} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}\sup_{t \in A_l} X_t, \tag{3.3.12}$$

όπου $K_1, K_3 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Για κάθε $l \leq n$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y_l := \sup_{t \in A_l}(X_t - X_{t_l}) = \sup_{t \in A_l} X_t - X_{t_l} \geq 0. \tag{3.3.13}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.2 για την $(X_t - X_{t_l})_{t \in A_l}$, έχουμε

$$P\left(\left|\sup_{t \in A_l}(X_t - X_{t_l}) - \mathbb{E}\sup_{t \in A_l}(X_t - X_{t_l})\right| \geq K_2\sigma u\right) \leq 2e^{-u^2}, \tag{3.3.14}$$

για κάθε $u > 0$, δηλαδή

$$P\left(\left|Y_l - \mathbb{E}Y_l\right| \geq K_2\sigma u\right) \leq 2e^{-u^2} \tag{3.3.15}$$

για κάθε $u > 0$. Αν ορίσουμε

$$h := \max_{l \leq n}|Y_l - \mathbb{E}Y_l|, \tag{3.3.16}$$

τότε

$$P(h \geq K_2\sigma u) = P\left(\max_{l \leq n}|Y_l - \mathbb{E}Y_l| \geq K_2\sigma u\right) \leq 2ne^{-u^2}. \tag{3.3.17}$$

Η (3.3.17) και απλές πράξεις δείχνουν ότι

$$\mathbb{E}h = \int_0^\infty P(h \geq s)ds \leq K_3\sigma\sqrt{\log n}, \tag{3.3.18}$$

όπου $K_3 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Για κάθε $l \leq n$ έχουμε $h \geq |Y_l - \mathbb{E}Y_l|$, άρα

$$Y_l \geq \mathbb{E}Y_l - h \geq \min_{l \leq n} \mathbb{E}Y_l - h, \tag{3.3.19}$$

οπότε,

$$\sup_{t \in A_l} X_t = X_{t_l} + Y_l \geq X_{t_l} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}Y_l - h. \tag{3.3.20}$$

Έπεται ότι

$$\sup_{t \in A} X_t \geq \max_{l \leq n} X_{t_l} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}Y_l - h, \tag{3.3.21}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{t \in A} X_t &\geq \mathbb{E}\max_{l \leq n} X_{t_l} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in A_l} X_t - X_{t_l}\right) - \mathbb{E}h \\ &= \mathbb{E}\max_{l \leq n} X_{t_l} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}\sup_{t \in A_l} X_t - \mathbb{E}h. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 3.3.1 και την (3.3.18). □

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.1: Έστω $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, και έστω $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ που ικανοποιούν την $t_l \neq t_{l'} \Longrightarrow d(t_l, t_{l'}) \geq r^{-j-1}$.

Για κάθε $l \leq n$ θεωρούμε το σύνολο $A_l = B(t_l, 2r^{-j-2})$. Παρατηρήστε ότι

$$A := \bigcup_{l \leq n} A_l \subseteq B(s, 2r^{-j}). \tag{3.3.22}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.3 με $\alpha = r^{-j-1}$ και $\sigma = 2r^{-j-2}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{t \in B(s, 2r^{-j})} X_t &\geq \mathbb{E}\sup_{t \in A} X_t \\ &\geq \frac{r^{-j-1}}{K_1}\sqrt{\log n} - 2r^{-j-2}K_3\sqrt{\log n} + \min_{l \leq n} \mathbb{E}\sup_{t \in B(t_l, 2r^{-j-2})} X_t, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\varphi_j(s) \geq \left(\frac{1}{K_1 r} - \frac{2K_3}{r^2}\right) r^{-j}\sqrt{\log n} + \min_{l \leq n} \varphi_{j+2}(t_l). \tag{3.3.23}$$

Αν $r \geq 4K_3 \cdot K_1$, η (3.3.23) παίρνει τη μορφή

$$\varphi_j(s) \geq \frac{1}{2K_1 r} r^{-j}\sqrt{\log n} + \min_{l \leq n} \varphi_{j+2}(t_l), \tag{3.3.24}$$

δηλαδή έχουμε το συμπέρασμα της Πρότασης, με $K(r) = 2K_1 r$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1: Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t = S := \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{t\in T}\varphi_j(t), \tag{3.3.25}$$

όπου

$$\varphi_j(t) := \mathbb{E}\sup\{X_u \mid u \in B(t, 2r^{-j})\}. \tag{3.3.26}$$

Αν $S < \infty$, η Πρόταση 3.3.1 μας εξασφαλίζει ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.2. Άρα, υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον T και υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ διαμερίσεων του T με $\mathrm{diam}(A) \leq 2r^{-j}$ για κάθε $j \geq i$ και $A \in \mathcal{A}_j$, έτσι ώστε

$$\sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)} \leq K(r)\cdot S, \tag{3.3.27}$$

όπου $A_j(t)$ το στοιχείο της $\mathcal{A}_j$ το οποίο περιέχει το t. Όμως, για κάθε $t \in T$ και $j \geq i$ έχουμε

$$A_j(t) \subseteq B(t, 2r^{-j}), \tag{3.3.28}$$

άρα

$$\sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,2r^{-j}))}\right)} \leq \sup_{t\in T}\sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(A_j(t))}\right)}, \tag{3.3.29}$$

και απλή σύγκριση ολοκληρώματος-αθροίσματος δείχνει ότο

$$K_1(r)\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon \leq \sum_{j>i} r^{-j}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,2r^{-j}))}\right)}. \tag{3.3.30}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$K_2(r)\cdot\gamma_2(T,d,\mu) \leq S = \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t, \tag{3.3.31}$$

άρα

$$K_2(r)\cdot\gamma_2(T,d) \leq S = \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t. \qquad \square \tag{3.3.32}$$

Τα Θεωρήματα 3.2.1 και 3.3.1 συνδυάζονται ως εξής: Έστω $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ μια ανέλιξη του Gauss στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Θεωρούμε την απόσταση

$$d(t,s) = \|Z_t - Z_s\|_2. \tag{3.3.33}$$

στον T και υποθέτουμε ότι ο (T,d) έχει πεπερασμένη διάμετρο. Αν υποθέσουμε ότι $(X_t)_{t\in T}$ είναι μια δεύτερη ανέλιξη σε κάποιον άλλο χώρο πιθανότητας $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, η οποία είναι υποκανονική ως προς την d, τότε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K_1 \cdot \gamma_2(T,d) \tag{3.3.34}$$

από το Θεώρημα 3.2.3, και

$$\gamma_2(T,d) \leq K_2 \cdot \mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t \tag{3.3.35}$$

από το Θεώρημα 3.3.1, όπου $K_1, K_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. Έχουμε λοιπόν το εξής θεώρημα σύγκρισης.

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο. Αν η $(X_t)_{t\in T}$ είναι υποκανονική ως προς την d και η $(Z_t)_{t\in T}$ είναι ανέλιξη του Gauss «συμβιβαστή» με την d, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leq K \cdot \mathbb{E}\sup_{t\in T} Z_t, \tag{3.3.36}$$

όπου $K > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Αναφορές: Στο Κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε την εργασία [T2] του Talagrand. Το Θεώρημα 3.2.1 έχει σαν αφετηρία του τις εργασίες [Pr 1,2] και ουσιαστικά αποδείχτηκε από τον Fernique [Fer]. Η παρουσίαση εδώ είναι διαφορετική: ο Talagrand απέδειξε τα Θεωρήματα 3.3.1 και 3.3.2 στο [T1], και ανέπτυξε τεχνικές που εφαρμόζονται και στην περίπτωση των υποκανονικών ανελίξεων. Με αυτόν τον τρόπο, η απόδειξη των Θεωρημάτων 3.2.1 και 3.3.1 γίνεται ενιαία.

Για την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss και την ανισότητα (3.3.10) παραπέμπουμε στα βιβλία των Ledoux [Led] και Ledoux-Talagrand [LT].

Κεφάλαιο 4

Κυριαρχούντα μέτρα σε ελλειψοειδή

4.1 Το Θεώρημα των κυριαρχούντων μέτρων για ελλειψοειδή

Έστω (a_n) μια φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με

$$\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty. \tag{4.1.1}$$

Θεωρούμε το ελλειψοειδές E στον ℓ_2 που περιγράφεται από την

$$E = \left\{ t = (t_n)_n \in \ell_2 \mid \sum_{n\geq 1} t_n^2/a_n^2 \leq 1 \right\} \tag{4.1.2}$$

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να μελετήσουμε αναλυτικά την ανέλιξη του Gauss $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in E}$ με

$$X_t = \sum_{n\geq 1} t_n g_n, \tag{4.1.3}$$

όπου $(g_n)_n$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων $N(0,1)$ τυχαίων μεταβλητών.

Ο υπολογισμός της $\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t$ δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Πρόταση 4.1.1 *Αν E είναι το ελλειψοειδές της (4.1.2) και $X_t = \sum_{n\geq 1} t_n g_n$, $t \in E$, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t \simeq \left(\sum_{n\geq 1} a_n^2 \right)^{1/2}. \tag{4.1.4}$$

Απόδειξη: Έστω $(e_n)_n$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του ℓ_2. Παρατηρούμε ότι

$$\sup_{t\in E} X_t = \sup_{t\in E} \big\langle \sum_{n\geq 1}(t_n/a_n)e_n, \sum_{n\geq 1} a_n g_n e_n \big\rangle = \left(\sum_{n\geq 1} a_n^2 g_n^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.5}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} a_n^2 g_n^2\right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E}\big(\sum_{n\geq 1} a_n^2 g_n^2\big)\right)^{1/2} = \left(\sum_{n\geq 1} a_n^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.6}$$

Από την άλλη πλευρά, η (4.1.5) δείχνει ότι

$$\sup_{t\in E} X_t \geq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 g_n^2\right)^{1/2} \tag{4.1.7}$$

για κάθε $N\in\mathbb{N}$, οπότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t &\geq \mathbb{E}\left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_n=\pm 1}\big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n a_n g_n\big|^2\right)^{1/2}\\ &\geq \mathbb{E}\left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_n=\pm 1}\big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n a_n g_n\big|\right)\\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\cdot \mathbb{E}|g|,\end{aligned}$$

αφού η $\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n g_n$ έχει την ίδια κατανομή με την $\big(\sum_{n=1}^N a_n^2\big)^{1/2}\cdot |g|$ για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_n=\pm 1$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\mathbb{E}|g| = \sqrt{2/\pi}$, και αφήνοντας το $N\to\infty$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left(\sum_{n\geq 1} a_n^2\right)^{1/2}. \qquad \square \tag{4.1.8}$$

Όπως δείχνει η Πρόταση 4.1.1, ο υπολογισμός της $\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t$ είναι εύκολος. Αυτό όμως που θέλουμε να συζητήσουμε είναι η ακρίβεια των διαφόρων φραγμάτων που συζητήσαμε στα δύο προηγούμενα Κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε από την ανισότητα του Dudley.

Έστω E το ελλειψοειδές της (4.1.2). Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$I_k := \{n\in\mathbb{N} : 2^{-k}\leq a_n < 2^{-k+1}\} \tag{4.1.9}$$

και

$$J_k := \{n \in \mathbb{N} : 2^{-k} \leq a_n\} = \bigcup_{l \leq k} I_k. \tag{4.1.10}$$

Τέλος, θέτουμε

$$n_k = |I_k| \quad \text{και} \quad m_k = |J_k| = \sum_{l \leq k} n_k. \tag{4.1.11}$$

Από την υπόθεση έχουμε $a_n \to 0$, άρα $n_k, m_k < \infty$. Με $N(E, t)$ συμβολίζουμε τον αριθμό κάλυψης του E από μπάλες του ℓ_2 ακτίνας $t > 0$.

Λήμμα 4.1.1 *Για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$,

$$N(E, 2^{-k-1}) \geq 2^{m_k}. \tag{4.1.12}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το χώρο H_k των ακολουθιών $(t_n)_{n \in J_k}$ με την ℓ_2-νόρμα, και την προβολή $P : \ell_2 \to H_k$ με

$$P((t_n)_{n \geq 1}) = (t_n)_{n \in J_k}. \tag{4.1.13}$$

Αν $E \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(t^i, 2^{-k-1})$, τότε προφανώς $P(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(P(t^i), 2^{-k-1})$. Άρα,

$$N(E, 2^{-k-1}) \geq N(P(E), 2^{-k-1}). \tag{4.1.14}$$

Επίσης, αν συμβολίσουμε με B την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα του H_k, παρατηρούμε ότι

$$2^{-k} B \subseteq P(E). \tag{4.1.15}$$

[Πράγματι: αν $s = (s_n)_{n \in J_k} \in 2^{-k} B$, μπορούμε να ορίσουμε $t = (t_n)_{n \geq 1}$ με $t_n = s_n$ αν $n \in J_k$ και $t_n = 0$ αν $n \notin J_k$. Τότε,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t_n^2}{a_n^2} = \sum_{n \in J_k} \frac{t_n^2}{a_n^2} \leq 2^{2k} \sum_{n \in J_k} s_n^2 \leq 1, \tag{4.1.16}$$

δηλαδή $t \in E$, και $P(t) = s$.]

Από την (4.1.15) παίρνουμε

$$N(P(E), 2^{-k-1}) \geq N(2^{-k} B, 2^{-k-1}) = N(B, 1/2). \tag{4.1.17}$$

Αν $N = N(B, 1/2)$, υπάρχουν $t^1, \ldots, t^N \in H_k$ με $B \subseteq \bigcup_{i \leq N}(t^i + (1/2)B)$. Άρα, $|B| \leq N \cdot |(1/2)B|$. Έπεται ότι

$$N \geq 2^{|J_k|} = 2^{m_k}. \tag{4.1.18}$$

Από τις (4.1.14), (4.1.17) και (4.1.18) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Από το Λήμμα 4.1.1, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$2^{-k}\sqrt{\log N(E, 2^{-k-1})} \geq \sqrt{\log 2} \cdot 2^{-k}\sqrt{m_k} \geq \sqrt{\log 2} \cdot 2^{-k}\sqrt{n_k}. \tag{4.1.19}$$

Άρα,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}\sqrt{n_k} \leq c_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}\sqrt{\log N(E, 2^{-k-1})} \leq c_2 \int_0^\infty \sqrt{\log N(E,\varepsilon)}d\varepsilon. \tag{4.1.20}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{n\geq 1} a_n^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{-k+1})^2 n_k = 4\sum_{n\geq 1} 2^{-2k} n_k. \tag{4.1.21}$$

Οι δύο αυτές ανισότητες μας υποδεικνύουν την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.1.2 *Υπάρχει ακολουθία $(a_n)_n$ θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε*

$$\sum_n a_n^2 < +\infty \tag{4.1.22}$$

και

$$\int_0^\infty \sqrt{\log N(E,\varepsilon)}d\varepsilon = +\infty, \tag{4.1.23}$$

όπου E το ελλειψοειδές στον ℓ_2 που ορίζεται από την (4.1.2).

Απόδειξη: Αρκεί να επιλέξουμε $n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιους ώστε

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} n_k < +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}\sqrt{n_k} = +\infty, \tag{4.1.24}$$

και να ορίσουμε τους $a_n > 0$ έτσι ώστε η (4.1.21) να γίνει «ισότητα» (για κάθε k παίρνουμε n_k όρους της $(a_n)_n$ ίσους με 2^{-k}). □

Βλέπουμε λοιπόν ότι το φράγμα του Dudley δεν είναι ακριβές (ακόμα κι αν περιοριστούμε στην πολύ φυσιολογική κλάση παραδειγμάτων που μελετάμε εδώ). Θα δώσουμε ένα άλλο φράγμα «τύπου Dudley» που δίνει πάντα την ακριβή τάξη μεγέθους της $\mathbb{E}\sup_{t\in E} X_t$.

Λήμμα 4.1.2 *Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\log N(E, 2^{-k+1}) \leq c\sum_{l\leq k} (k-l+3)n_l. \tag{4.1.25}$$

Απόδειξη: Για το τυχόν $t = (t_n)_n \in E$ έχουμε

$$\sum_{n \notin J_k} t_n^2 = \sum_{n \notin J_k} a_n^2 \frac{t_n^2}{a_n^2} \leq 2^{-2k} \sum_{n \notin J_k} \frac{t_n^2}{a_n^2} \leq 2^{-2k}. \tag{4.1.26}$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$E' = \{t = (t_n)_{n \in J_k} \in H_k \mid \sum_{n \in J_k} \frac{t_n^2}{a_n^2} \leq 1\}, \tag{4.1.27}$$

τότε

$$N(E, 2^{-k+1}) \leq N(E', 2^{-k}). \tag{4.1.28}$$

[Πράγματι: έστω $t^1, \ldots, t^N \in H_k$ με $E' \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(t^i, 2^{-k})$. Για κάθε $t \in E$ θεωρούμε την προβολή $P(t)$ του t στον H_k. Τότε $P(t) \in E'$, άρα υπάρχει $i = i(t) \leq N$ τέτοιος ώστε $\|P(t) - t^i\|_2 \leq 2^{-k}$. Από την (4.1.26),

$$\|t - t^i\|_2 \leq \|t - P(t)\|_2 + \|P(t) - t^i\|_2 \leq 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}, \tag{4.1.29}$$

δηλαδή, $E \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(t^i, 2^{-k+1})$.]

Για να εκτιμήσουμε τον $N(E', 2^{-k})$, θεωρούμε $Z \subseteq E'$ μεγιστικό ως προς την

$$t \neq s \in Z \Longrightarrow \|s - t\|_2 \geq 2^{-k}. \tag{4.1.30}$$

Τότε,

$$N(E', 2^{-k}) \leq |Z|. \tag{4.1.31}$$

Επίσης, οι μπάλες $B(t, 2^{-k-1})$, $t \in Z$ έχουν ξένα εσωτερικά και περιέχονται στο $E' + 2^{-k-1}B$, όπου B η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα του H_k. Συνεπώς,

$$|Z| \cdot |2^{-k-1}B| \leq |E' + 2^{-k-1}B|. \tag{4.1.32}$$

Παρατηρούμε ότι $2^{-k}B \subseteq E'$: αν $\left(\sum_{n \in J_k} t_n^2\right)^{1/2} \leq 2^{-k}$, τότε

$$\left(\sum_{n \in J_k} \frac{t_n^2}{a_n^2}\right)^{1/2} \leq 2^k \left(\sum_{n \in J_k} t_n^2\right)^{1/2} \leq 1, \tag{4.1.33}$$

άρα $t = (t_n)_{n \in J_k} \in E'$. Έπεται ότι

$$|Z| \cdot |B| \leq 2^{(k+1)m_k} \cdot |2E'| = 2^{(k+2)m_k} \cdot |E'|. \tag{4.1.34}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $E' = T(B)$ όπου $T : H_k \to H_k$ ο διαγώνιος τελεστής με $T(e_n) = a_n e_n$, $n \in J_k$. Άρα,

$$|E'| = |B| \cdot \prod_{n \in J_k} a_n \leq |B| \cdot \prod_{l \leq k} 2^{(-l+1)n_l}. \tag{4.1.35}$$

Συνδυάζοντας τις (4.1.34) και (4.1.35) καταλήγουμε στην

$$|Z| \leq 2^{(k+2)m_k} \prod_{l\leq k} 2^{(-l+1)n_l} = \prod_{l\leq k} 2^{(k-l+3)n_l}. \tag{4.1.36}$$

Από τις (4.1.28) και (4.1.31) έχουμε το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω E το ελλειψοειδές στον ℓ_2 που ορίζεται από την* (4.1.2). *Τότε,*

$$\int_0^\infty \varepsilon \log N(E,\varepsilon) d\varepsilon \simeq \sum_{n\geq 1} a_n^2. \tag{4.1.37}$$

Απόδειξη: Εύκολα δείχνουμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $K_1, K_2 > 0$ τέτοιες ώστε

$$K_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} \log N(E, 2^{-k-1}) \leq \int_0^\infty \varepsilon \log N(E,\varepsilon) d\varepsilon \leq K_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} \log N(E, 2^{-k}). \tag{4.1.38}$$

Από το Λήμμα 4.1.2,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} \log N(E, 2^{-k}) &\leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\leq k+1} 2^{-2k}(k-l+4)n_l \\
&= c \sum_{l\in\mathbb{Z}} n_l \left(\sum_{k>l} 2^{-2k}(k-l+4) \right) \\
&= c \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-2l} n_l \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s+4}{2^{2s}} \right) \\
&\leq c_1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-2l} n_l \\
&\leq c_3 \sum_{n\geq 1} a_n^2.
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 4.1.1,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} \log N(E, 2^{-k-1}) &\geq c_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k} m_k = c_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\leq k} 2^{-2k} n_l \\
&= c_4 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\geq l} 2^{-2k} \right) n_l \geq c_5 \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-2l} n_l \\
&\geq c_6 \sum_{n\geq 1} a_n^2.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες με την (4.1.38) παίρνουμε την (4.1.37). □

Παρατήρηση: Για $\alpha, \beta > 0$ ορίζουμε

$$R_{\alpha,\beta}(E) = \left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1} \big(\log N(E,\varepsilon) \big)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \right)^{1/\beta}. \tag{4.1.39}$$

Παρατηρήστε ότι

$$R_{2,1}(E) = \int_0^\infty \sqrt{\log N(E,\varepsilon)}\, d\varepsilon \tag{4.1.40}$$

ενώ

$$R_{2,2}(E) = \left(\int_0^\infty \varepsilon \log N(E,\varepsilon) d\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{4.1.41}$$

Με αυτό το συμβολισμό, τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου δείχνουν ότι για κάθε E έχουμε

$$\mathbb{E} \sup_{t \in E} X_t \simeq R_{2,2}(E), \tag{4.1.42}$$

ενώ υπάρχουν παραδείγματα ελλειψοειδών E για τα οποία $R_{2,1}(E) = \infty$.

4.2 Το Θεώρημα του ελλειψοειδούς

Έστω (T,d) μετρικός χώρος. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ορίζουμε

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu) := \sup_{t \in T} \left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))} \right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \right)^{1/\beta}, \tag{4.2.1}$$

και

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d) := \inf_\mu \gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu), \tag{4.2.2}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω απ' όλα τα Borel μέτρα πιθανότητας στον (T,d). Παρατηρήστε ότι, με το συμβολισμό του προηγούμενου Κεφαλαίου,

$$\gamma_{2,1}(T,d) = \gamma_2(T,d). \tag{4.2.3}$$

Οι παρακάτω ιδιότητες της $\gamma_{\alpha,\beta}(T,d)$ προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος και $\alpha, \beta > 0$. Τότε,*

$$\mathrm{diam}(T) \leq K(\alpha,\beta) \gamma_{\alpha,\beta}(T,d), \tag{4.2.4}$$

όπου $K(\alpha,\beta) > 0$ σταθερά που εξαρτάται από τα α, β.

Απόδειξη: Θέτουμε $D := \mathrm{diam}(T)$ και θεωρούμε $u, v \in T$ με $d(u,v) \geq 2D/3$. Τότε, οι μπάλες $B(u, D/3)$ και $B(v, D/3)$ είναι ξένες. Αν μ είναι ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T, d), έχουμε

$$\min\{\mu(B(u,D/3)), \mu(B(v,D/3))\} \leq 1/2, \tag{4.2.5}$$

δηλαδή υπάρχει $w \in T$ (κάποιο από τα u, v) τέτοιο ώστε

$$\log \frac{1}{\mu(B(w,\varepsilon))} \geq \log 2 \tag{4.2.6}$$

για κάθε $\varepsilon \in [0, D/3]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sup_{t\in T}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} &\geq \left(\int_0^{D/3} \varepsilon^{\beta-1}(\log 2)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} \\ &= (\log 2)^{1/\alpha}\beta^{-1/\beta}\frac{D}{3}, \end{aligned}$$

και αφού το μ ήταν τυχόν, παίρνουμε την (4.2.4). □

Λήμμα 4.2.2 *Έστω (T_1, d_1), (T_2, d_2) μετρικοί χώροι και $\alpha, \beta > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M > 0$ και $\phi : T_1 \to T_2$ Borel μετρήσιμη και επί συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq M d_1(x,y) \tag{4.2.7}$$

για κάθε $x, y \in T_1$. Τότε,

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T_2, d_2) \leq M \cdot \gamma_{\alpha,\beta}(T_1, d_1). \tag{4.2.8}$$

Απόδειξη: Γράφουμε B_i για την ανοιχτή μπάλα ως προς d_i, $i = 1, 2$. Από την (4.2.7) έχουμε

$$B_1(x, \varepsilon/M) \subseteq \phi^{-1}(B_2(\phi(x), \varepsilon)) \tag{4.2.9}$$

για κάθε $x \in T_1$ και $\varepsilon > 0$. Αν λοιπόν ορίσουμε το μέτρο $\phi(\mu)$ στον (T_2, d_2) με $\phi(\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$, το $\phi(\mu)$ είναι Borel μέτρο πιθανότητας και

$$\mu\big(B_1(x, \varepsilon/M)\big) \leq \phi(\mu)\big((B_2(\phi(x), \varepsilon))\big) \tag{4.2.10}$$

για κάθε $x \in T_1$ και $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την (4.2.10) και το γεγονός ότι η ϕ είναι επί του T_2, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T_2, d_2, \phi(\mu)) \leq M \cdot \gamma_{\alpha,\beta}(T_1, d_1, \mu), \tag{4.2.11}$$

και αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Λήμμα 4.2.3 *Έστω (T,d) μετρικός χώρος και F μη κενό υποσύνολο του T. Τότε,*

$$\gamma_{\alpha,\beta}(F,d) \leq 2\gamma_{\alpha,\beta}(T,d). \tag{4.2.12}$$

Απόδειξη: Έστω $\delta > 1$. Μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : T \to F$ έτσι ώστε

$$d(t,g(t)) \leq \delta \inf\{d(t,s) \mid s \in F\}. \tag{4.2.13}$$

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T,d). Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας σ στον (F,d) που ορίζεται από την $\sigma(A) = \mu(g^{-1}(A))$.

Έστω $x \in F$ και $t \in B(x,\varepsilon)$. Τότε, $d(t,F) \leq d(t,x)$, άρα $d(t,g(t)) \leq \delta d(t,x)$. Επομένως, $d(x,g(t)) \leq d(x,t) + d(t,g(t)) \leq (1+\delta)d(x,t) < (1+\delta)\varepsilon$. Δηλαδή,

$$B_T(x,\varepsilon) \subseteq g^{-1}(B_F(x,(1+\delta)\varepsilon)). \tag{4.2.14}$$

Άρα,

$$\mu(B_T(x,\varepsilon)) \leq \mu(g^{-1}(B_F(x,(1+\delta)\varepsilon))) = \sigma(B_F(x,(1+\delta)\varepsilon)). \tag{4.2.15}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha,\beta}(F,d,\sigma) &= \sup_{x\in F}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\sigma(B_F(x,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} \\
&\leq \sup_{x\in F}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B_T(x,\varepsilon/(1+\delta)))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} \\
&\leq (1+\delta)\sup_{x\in T}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B_T(x,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} \\
&= (1+\delta)\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\gamma_{\alpha,\beta}(F,d) \leq \gamma_{\alpha,\beta}(F,d,\sigma) \leq (1+\delta)\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu). \tag{4.2.16}$$

Αφού το μ και το $\delta > 1$ ήταν τυχόντα, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2.4 *Έστω $\left((T_i,d_i)\right)_{i=1}^k$ ακολουθία μετρικών χώρων. Θεωρούμε το μετρικό χώρο $T = \otimes_{i\leq k} T_i$ και τις αποστάσεις*

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k d_i^2(x_i,y_i)\right)^{1/2} \tag{4.2.17}$$

και

$$\delta(x,y) = \sum_{i=1}^k d_i(x_i,y_i), \tag{4.2.18}$$

όπου $x = (x_i)$, $y = (y_i)$. *Για κάθε* $i \leq k$ *θεωρούμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας* μ_i *στον* (T_i, d_i), *και ορίζουμε* $\mu = \otimes \mu_i$ *το μέτρο γινόμενο στον* (T, d). *Αν* $\alpha, \beta > 0$ *και* $\beta \geq \alpha$, *τότε*

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T, d, \mu) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i, d_i, \mu_i)^{2\alpha/(\alpha+2)} \right)^{1/2+1/\alpha} \tag{4.2.19}$$

και

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T, \delta, \mu) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i, d_i, \mu_i)^{\alpha/(\alpha+1)} \right)^{1+1/\alpha} \tag{4.2.20}$$

ενώ αν $\beta \leq \alpha$, *τότε*

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T, d, \mu) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i, d_i, \mu_i)^{2\beta/(\beta+2)} \right)^{1/2+1/\beta} \tag{4.2.21}$$

και

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T, \delta, \mu) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i, d_i, \mu_i)^{\beta/(\beta+1)} \right)^{1+1/\beta}. \tag{4.2.22}$$

Απόδειξη: Έστω $x_i \in T_i$ και $x = (x_1, \ldots, x_k) \in T$. Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\eta_1, \ldots, \eta_k$ με $\eta_1^2 + \cdots + \eta_k^2 = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει το εξής: αν $y_i \in T_i$ με $d_i(x_i, y_i) < \eta_i \varepsilon$ και αν θέσουμε $y = (y_1, \ldots, y_k)$, τότε

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2(x_i, y_i) \right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2 \varepsilon^2 \right)^{1/2} = \varepsilon. \tag{4.2.23}$$

Επομένως,

$$\otimes_{i \leq k} B_i(x_i, \eta_i \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon). \tag{4.2.24}$$

Έπεται ότι

$$\log \frac{1}{\mu(B(x, \varepsilon))} \leq \sum_{i=1}^{k} \log \frac{1}{\mu_i(B_i(x_i, \eta_i \varepsilon))}. \tag{4.2.25}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\beta/\alpha \geq 1$. Από την ανισότητα του Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\infty} \varepsilon^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{\mu(B(x, \varepsilon))} \right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \right)^{\alpha/\beta} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \left(\int_0^{\infty} \varepsilon^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{\mu(B_i(x_i, \eta_i \varepsilon))} \right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \right)^{\alpha/\beta}. \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Κάνοντας κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής στο δεξιό μέλος και παίρνοντας supremum ως προς $x_i \in T_i$, βλέπουμε ότι

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu)^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{k} \eta_i^{-\alpha} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i,d_i,\mu_i)^{\alpha}. \tag{4.2.27}$$

Ελαχιστοποιώντας το δεξιό μέλος κάτω από τη συνθήκη $\eta_1^2 + \cdots + \eta_k^2 = 1$ παίρνουμε την (4.2.19).

Έστω τώρα ότι $\beta/\alpha \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την $(s_1 + \cdots + s_k)^{\beta/\alpha} \leq s_1^{\beta/\alpha} + \cdots + s_k^{\beta/\alpha}$, από την (4.2.25) παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{\mu(B(x,\varepsilon))} \right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{k} \int_0^{\infty} \varepsilon^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{\mu(B_i(x_i,\eta_i\varepsilon))} \right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon. \tag{4.2.28}$$

Κάνοντας κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής στο δεξιό μέλος και παίρνοντας supremum ως προς $x_i \in T_i$, βλέπουμε ότι

$$\gamma_{\alpha,\beta}(T,d,\mu)^{\beta} \leq \sum_{i=1}^{k} \eta_i^{-\beta} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i,d_i,\mu_i)^{\beta}. \tag{4.2.29}$$

Ελαχιστοποιώντας το δεξιό μέλος κάτω από τη συνθήκη $\eta_1^2 + \cdots + \eta_k^2 = 1$ παίρνουμε την (4.2.21).

Για την απόδειξη των (4.2.20) και (4.2.22) παρατηρούμε ότι αν τα $x = (x_i)$ και $y = (y_i)$ ικανοποιούν τις $d_i(x_i, y_i) < \eta_i \varepsilon$ για κάποιους $\eta_i > 0$ με $\sum_{i=1}^{k} \eta_i = 1$, τότε

$$\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i) < \sum_{i=1}^{k} \eta_i \varepsilon = \varepsilon.$$

Κατόπιν, δουλεύουμε όπως στην περίπτωση της d και ελαχιστοποιούμε τα φράγματά μας ως προς η_i. □

Πόρισμα 4.2.1 *Έστω H χώρος Hilbert και $T_1, \ldots, T_k \subset H$, $i = 1, \ldots, k$. Θέτουμε*

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{k} T_i = \{x_1 + \cdots + x_k : x_i \in T_i\}. \tag{4.2.30}$$

Τότε,

$$\gamma_{\alpha,\beta}(\Sigma) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i)^{\rho} \right)^{1/\rho}, \tag{4.2.31}$$

όπου $\rho = \max\{\frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{\beta}{\beta+1}\}$.

Απόδειξη: Η απεικόνιση $A : (T, \delta) = \otimes T_i \to \Sigma$ με $A(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + \cdots + x_k$ είναι 1-Lipschitz και επί. Από τα Λήμματα 4.2.2 και 4.2.4,

$$\gamma_{\alpha,\beta}(\Sigma) \leq \gamma_{\alpha,\beta}(T, \delta) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,\beta}(T_i, \mu_i)^\rho \right)^{1/\rho} \tag{4.2.32}$$

για κάθε επιλογή Borel μέτρων πιθανότητας μ_i στον T_i, $i = 1, \ldots, k$. Παίρνοντας infimum ως προς μ_i στο δεξιό μέλος, παίρνουμε την (4.2.31). □

Θα δώσουμε φράγματα για την ποσότητα $\gamma_{\alpha,2}(E, \|\cdot\|_2)$, όπου E το ελλειψοειδές της (4.1.2). Η μέθοδος δουλεύει σε ένα κάπως γενικότερο πλαίσιο, αυτό των 2-κυρτών νορμών.

Ορισμός: Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X λέγεται 2-κυρτή αν υπάρχει σταθερά $\gamma > 0$ που ικανοποιεί το εξής: αν $x, y \in X$ και $\|x\|, \|y\| \leq 1$, τότε

$$\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \gamma \|x-y\|^2. \tag{4.2.33}$$

Παρατηρήστε ότι, αν

$$\|t\|_E = \left(\sum_{n \geq 1} t_n^2 / a_n^2 \right)^{1/2}, \tag{4.2.34}$$

τότε η $\|\cdot\|_E$ είναι 2-κυρτή: από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, αν $\|t\|_E, \|s\|_E \leq 1$, τότε

$$\|t+s\|_E^2 = 2\|t\|_E^2 + 2\|s\|_E^2 - \|t-s\|_E^2 \leq 4 \left(1 - \frac{\|t-s\|_E^2}{4} \right), \tag{4.2.35}$$

άρα

$$\|t+s\|_E \leq 2 \left(1 - \frac{\|t-s\|_E^2}{4} \right)^{1/2} \leq 2 \left(1 - \frac{1}{8} \|t-s\|_E^2 \right). \tag{4.2.36}$$

Θεώρημα 4.2.1 *Υποθέτουμε ότι T είναι η μοναδιαία μπάλα για μια 2-κυρτή νόρμα $\|\cdot\|$ (με σταθερά γ) στο χώρο X. Βλέπουμε το T σαν μετρικό χώρο με μια απόσταση d που επάγεται από κάποια άλλη νόρμα $\|\cdot\|_1$ στον X. Τότε, για κάθε $\alpha > 0$,*

$$\gamma_{\alpha,2}(T, d) \leq K(\alpha, \gamma) \cdot \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon [\log N(T, d, \varepsilon)]^{1/\alpha} \right). \tag{4.2.37}$$

Το Θεώρημα 4.2.1 συμπληρώνεται από την εξής Πρόταση.

Πρόταση 4.2.1 *Έστω (T, d) μετρικός χώρος και $\alpha, \beta > 0$. Τότε,*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon [\log N(T, d, \varepsilon)]^{1/\alpha} \right) \leq K(\beta) \cdot \gamma_{\alpha,\beta}(T, d). \tag{4.2.38}$$

Απόδειξη: Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον (T,d). Θεωρούμε τυχόν $\eta > 0$ και $\{t_1, \dots, t_N\}$ μεγιστικό υποσύνολο του T ως προς την $d(t_l, t_s) \geq 2\eta$. Τότε,

$$N(T,d,2\eta) \leq N. \tag{4.2.39}$$

Επίσης, οι $B(t_s, \eta)$ είναι ξένες, και αφού το μ είναι μέτρο πιθανότητας, υπάρχει $l \leq N$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\mu(B(t_l,\eta))} \geq N. \tag{4.2.40}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B(t_l,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon &\geq \int_0^\eta \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B(t_l,\eta))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon \\
&\geq (\log N)^{\beta/\alpha}\int_0^\eta \varepsilon^{\beta-1}d\varepsilon \\
&\geq \frac{1}{\beta 2^\beta}(2\eta)^\beta(\log N(T,d,2\eta))^{\beta/\alpha}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sup_{t\in T}\left(\int_0^\infty \varepsilon^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)^{\beta/\alpha} d\varepsilon\right)^{1/\beta} \geq \frac{1}{2\beta^{1/\beta}}(2\eta)(\log N(T,d,2\eta))^{1/\alpha}. \tag{4.2.41}$$

Αφού τα μ και $\eta > 0$ ήταν τυχόντα, έπεται το ζητούμενο. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.2.3, την οποία υπενθυμίζουμε:

Λήμμα 4.2.5 (Πρόταση 3.2.3) *Έστω (T,d) μετρικός χώρος με πεπερασμένη διάμετρο και $r \geq 2$, $\beta > 0$. Έστω i ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\psi_j : T \to \mathbb{R}^+$ με $S := \sup_{t\in T}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j(t) < +\infty$ και $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ με $\lim_{n\to+\infty}\theta(n) = +\infty$, που ικανοποιούν το εξής: Αν $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$ και $t_1, \dots, t_n \in B(s, r^{-j})$ με $p \neq q \Longrightarrow d(t_p,t_q) \geq r^{-j-1}$, τότε*

$$\max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l) \geq r^{-\beta j}\theta(n) + \psi_j(s). \tag{4.2.42}$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T και απεικονίσεις $\ell_j : \mathcal{A}_j \to \mathbb{N}$, που ικανοποιούν τα εξής:

1. *Αν $j > i$ και $A \in \mathcal{A}_j$, τότε*

$$\mathrm{diam}(A) \leq 2r^{-j}. \tag{4.2.43}$$

2. *Αν $j \geq i$ και A, B είναι στοιχεία της διαμέρισης $\mathcal{A}_{j+1}$ τα οποία περιέχονται στο ίδιο στοιχείο της διαμέρισης $\mathcal{A}_j$, τότε*

$$\ell_{j+1}(A) \neq \ell_{j+1}(B). \tag{4.2.44}$$

3. *Για κάθε* $t \in T$,

$$\sum_{j \geq i} r^{-\beta j} \theta(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t))) \leq 4S, \tag{4.2.45}$$

όπου $A_{j+1}(t)$ *το στοιχείο της* $\mathcal{A}_{j+1}$ *στο οποίο ανήκει το* t. □

Οι συναρτήσεις $\psi_j : T \to \mathbb{R}^+$ που θα χρησιμοποιήσουμε για το Θεώρημα 4.2.1 ορίζονται από την

$$\psi_j(t) := \inf\{\|v\| : v \in T \ \text{ και } \ \|v - t\|_1 < 2r^{-j})\}. \tag{4.2.46}$$

Παρατηρήστε ότι $\psi_j(t) \leq \|t\| \leq 1$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ και $t \in T$, άρα

$$S := \sup_{t \in T} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(t) \leq 1 < +\infty. \tag{4.2.47}$$

Ορισμός: Για κάθε $n \geq 2$ θέτουμε
(4.2.48)

$$A_n := \{\varepsilon > 0 : \text{ υπάρχουν } t_1, \ldots, t_n \in T \text{ τ.ω. } 1 \leq l < s \leq n \Longrightarrow \|t_l - t_s\|_1 > \varepsilon\},$$

και

$$\varepsilon(n) = \sup A_n. \tag{4.2.49}$$

Τα παρακάτω έπονται άμεσα από τον ορισμό:

1. $A_n = (0, \varepsilon(n))$.
2. Αν $\varepsilon < \varepsilon(n)/2$, τότε $N(T, d, \varepsilon) \geq n$: υπάρχουν $t_1, \ldots, t_n \in T$ που ανά δύο απέχουν περισσότερο από 2ε. Αν θεωρήσουμε μια κάλυψη του T με μπάλες ακτίνας ε, κάθε μπάλα περιέχει το πολύ ένα από τα t_i.
3. Αν $\varepsilon > \varepsilon(n)$, τότε $N(T, d, \varepsilon) \leq n$: ο αριθμός κάλυψης $N(T, d, \varepsilon)$ είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο ενός maximal συνόλου σημείων $t_1, \ldots, t_m$ με την ιδιότητα $\|t_l - t_s\|_1 \geq \varepsilon$, ο οποίος φράσσεται από n αφού $\varepsilon > \varepsilon(n)$.

Το βασικό σημείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 είναι να δείξουμε ότι οι ψ_j που ορίσαμε ικανοποιούν την (4.2.42) για κατάλληλη συνάρτηση $\theta(n)$.

Λήμμα 4.2.6 *Υποθέτουμε ότι* $r = 8$. *Θεωρούμε* $s \in T$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ *και* $t_1, \ldots, t_n \in B(s, r^{-j})$ *με* $p \neq q \Longrightarrow d(t_p, t_q) \geq r^{-j-1}$ *(όπου* $d(t, s) = \|t - s\|_1$*). Τότε,*

$$\max_{l \leq n} \psi_{j+2}(t_l) \geq \frac{\gamma r^{-2j}}{(2r\varepsilon(n))^2} + \psi_j(s). \tag{4.2.50}$$

Απόδειξη: Έστω $u > \max_{l \leq n} \psi_{j+2}(t_l)$. Τότε, για κάθε $l \leq n$ μπορούμε να βρούμε $w_l \in uT$ τέτοιο ώστε

$$d(w_l, t_l) \leq 2r^{-j-2}. \tag{4.2.51}$$

Από την τριγωνική ανισότητα, αν $l < q \leq n$ παίρνουμε

$$d(w_l, w_q) \geq d(t_l, t_q) - 4r^{-j-2} \geq r^{-j-1} - 4r^{-j-2} = r^{-j-1}/2 \tag{4.2.52}$$

και

$$d(s, w_l) \leq d(s, t_l) + d(t_l, w_l) \leq r^{-j} + 2r^{-j-2} \leq 2r^{-j}. \tag{4.2.53}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της 2-κυρτής νόρμας για τα $x = w_l/u$ και $y = w_s/u$, βλέπουμε ότι

$$\frac{\|w_l + w_q\|}{2} \leq u\left(1 - \frac{\gamma}{u^2}\|w_l - w_q\|^2\right). \tag{4.2.54}$$

Γράφουμε V για τη μοναδιαία μπάλα της $\|\cdot\|_1$. Από την (4.2.53) έχουμε $w_l \in s+2r^{-j}V$ για κάθε $l \leq n$. Αφού το V είναι κυρτό, έπεται ότι $(w_l+w_q)/2 \in s+2r^{-j}V$, δηλαδή

$$d\left(s, \frac{w_l + w_q}{2}\right) \leq 2r^{-j}, \tag{4.2.55}$$

άρα

$$\psi_j(s) \leq \left\|\frac{w_l + w_q}{2}\right\|. \tag{4.2.56}$$

Θέτουμε $R^2 := \frac{u}{\gamma}(u - \psi_j(s))$. Από την (4.2.54),

$$\|w_l - w_q\|^2 \leq \frac{u}{\gamma}\left(u - \left\|\frac{w_l + w_q}{2}\right\|\right) \leq \frac{u}{\gamma}(u - \psi_j(s)) = R^2. \tag{4.2.57}$$

Ορίζουμε $x_l = (w_l - w_1)/R$, $l \leq n$. Από την (4.2.57) έχουμε $x_l \in T$, ενώ από την (4.2.52) έχουμε ότι

$$d(x_l, x_q) = \left\|\frac{w_l - w_q}{R}\right\|_1 = \frac{d(w_l, w_q)}{R} \geq \frac{r^{-j}}{2R} \tag{4.2.58}$$

για κάθε $1 \leq l < q \leq n$. Από τον ορισμό του $\varepsilon(n)$ πρέπει να ικανοποιείται η $r^{-j-1}/(2R) < \varepsilon(n)$. Δηλαδή,

$$\gamma\left(\frac{r^{-j-1}}{2\varepsilon(n)}\right)^2 \leq u(u - \psi_j(s)) \tag{4.2.59}$$

για κάθε $u > \max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l)$. Συνεπώς,

(4.2.60)

$$\gamma\left(\frac{r^{-j-1}}{2\varepsilon(n)}\right)^2 \leq \max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l)\left(\max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l) - \psi_j(s)\right) \leq \max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l) - \psi_j(s),$$

αφού $\max_{l\leq n}\psi_{j+2}(t_l) \leq 1$. □

Άμεση εφαρμογή των Λημμάτων 4.2.5 και 4.2.6 είναι η εξής Πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 *Υποθέτουμε ότι T είναι η μοναδιαία μπάλα για μια 2-κυρτή νόρμα $\|\cdot\|$ (με σταθερά γ) στο χώρο X. Βλέπουμε το T σαν μετρικό χώρο με μια απόσταση d που επάγεται από κάποια άλλη νόρμα $\|\cdot\|_1$ στον X, υποθέτουμε ότι ο (T,d) έχει πεπερασμένη διάμετρο, και συμβολίζουμε με i το μεγαλύτερο ακέραιο για τον οποίο* $\mathrm{diam}(T) \leq 2r^{-i}$, *όπου $r=8$. Τότε, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T και απεικονίσεις $\ell_j : \mathcal{A}_j \to \mathbb{N}$, που ικανοποιούν τις* (4.2.43), (4.2.44) *και την*

$$\sum_{j\geq i} \frac{r^{-2j}}{\varepsilon(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t)))^2} \leq \frac{16r^2}{\gamma} \tag{4.2.61}$$

για κάθε $t\in T$, όπου $A_{j+1}(t)$ το στοιχείο της $\mathcal{A}_{j+1}$ στο οποίο ανήκει το t. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1: Θέτουμε

$$M := \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon[\log N(T,d,\varepsilon)]^{1/\alpha}\right). \tag{4.2.62}$$

Αν $M=+\infty$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αλλιώς, από τον ορισμό του $\varepsilon(n)$ έχουμε

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon(n)}{2} \implies \varepsilon(\log n)^{1/\alpha} \leq \varepsilon[\log N(T,d,\varepsilon)]^{1/\alpha} \leq M, \tag{4.2.63}$$

δηλαδή,

$$(\log n)^{2/\alpha} \leq \frac{4M^2}{\varepsilon^2(n)}. \tag{4.2.64}$$

Από την Πρόταση 4.2.2 μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_j)_{j\geq i}$ του T και απεικονίσεις $\ell_j : \mathcal{A}_j \to \mathbb{N}$, που ικανοποιούν τις (4.2.43), (4.2.44) και την

$$\sum_{j\geq i} r^{-2j} \left(\log(\ell_{j+1}(A_{j+1}(t)))\right)^{2/\alpha} \leq \frac{64M^2r^2}{\gamma} \tag{4.2.65}$$

για κάθε $t\in T$. Από την Πρόταση 3.2.4 μπορούμε να βρούμε μέτρο πιθανότητας ν στον (T,d) τέτοιο ώστε

$$\sup_{t\in T}\sum_{j\geq i} r^{-2j}\left(\log\frac{1}{\nu(A_j(T))}\right)^{2/\alpha} \leq K(\alpha)\left(r^{-2i} + \sup_{t\in T}\sum_{j\geq i} r^{-2j}\log(\ell_j(A_j(t)))\right)^{2/\alpha}. \tag{4.2.66}$$

Ο όρος r^{-2i} απορροφάται στο άθροισμα, και η (4.2.65) δίνει

$$\sup_{t\in T}\sum_{j\geq i} r^{-2j}\left(\log\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)^{2/\alpha} \leq K(\alpha,\gamma)M^2. \tag{4.2.67}$$

Από τον ορισμό του $\gamma_{\alpha,2}(T,d,\nu)$, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $t\in T$,

$$K(\alpha)\int_0^\infty \varepsilon\left(\log\frac{1}{\nu(B(t,\varepsilon))}\right)^{2/\alpha}d\varepsilon \;\leq\; \sum_{j\geq i} r^{-2j}\left(\log\frac{1}{\nu(B(t,2r^{-j}))}\right)^{2/\alpha} \;\leq\; \sum_{j\geq i} r^{-2j}\left(\log\frac{1}{\nu(A_j(t))}\right)^{2/\alpha}. \qquad \square$$

Σαν πόρισμα του Θεωρήματος 4.2.1 παίρνουμε το θεώρημα του ελλειψοειδούς.

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω $\alpha>0$ και (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\sum_{n\geq 1} a_n^2<\infty$. Αν $E=\left\{t=(t_n)\in \ell_2 : \sum_{n\geq 1} t_n^2/a_n^2\leq 1\right\}$, τότε*

$$\gamma_{\alpha,2}(E,d)\leq K(\alpha)\cdot\sup_{n\geq 1}\left(a_n\cdot n^{1/\alpha}\right), \tag{4.2.68}$$

όπου d η μετρική του ℓ_2, και $K(\alpha)>0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.2.1 για την 2-κυρτή νόρμα $\|\cdot\|=\|\cdot\|_E$ που έχει μοναδιαία μπάλα το E, ενώ σαν $\|\cdot\|_1$ παίρνουμε τη νόρμα του ℓ_2. Θέτουμε

$$B=\sup_{n\geq 1}\left(a_n\cdot n^{1/\alpha}\right), \tag{4.2.69}$$

όποτε, για κάθε $n\geq 1$ έχουμε

$$a_n\leq Bn^{-1/\alpha}. \tag{4.2.70}$$

Ειδικότερα, για κάθε $n\in I_k$ έχουμε $2^{-k}\leq a_n\leq B/n^{1/\alpha}$, άρα

$$2^{-k}\leq B/(\max_{n\in I_k} n^{1/\alpha})\leq B/n_k^{1/\alpha}, \tag{4.2.71}$$

όπου $n_k=|I_k|$. Δηλαδή,

$$n_k\leq 2^{\alpha k}B^{\alpha} \tag{4.2.72}$$

για κάθε k. Από το Λήμμα 4.1.2 έχουμε

$$\left(\log N(E,2^{-k+1})\right)^{1/\alpha}\leq c^{1/\alpha}\cdot B\left(\sum_{l\leq k}(k-l+3)2^{\alpha l}\right)^{1/\alpha}\leq K(\alpha)\cdot 2^k B, \tag{4.2.73}$$

άρα, για κάθε k,

$$2^{-k}\log N(E,2^{-k+1})^{1/\alpha}\leq K(\alpha)\cdot B. \tag{4.2.74}$$

Έπεται ότι

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\left(\log N(E,\varepsilon)\right)^{1/\alpha}\leq K(\alpha)\cdot B, \tag{4.2.75}$$

και το Θεώρημα 4.2.1 δείχνει ότι

$$\gamma_{\alpha,2}(E,d)\leq K(\alpha)\cdot B. \qquad \square \tag{4.2.76}$$

4.3 Εμπειρικά μέτρα στο μοναδιαίο τετράγωνο

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαία σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1]^2$. Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτή την παράγραφο είναι η απόκλιση C_n του εμπειρικού μέτρου $\delta_X = \frac{1}{n}\sum_{i\leq n}\delta_{X_i}$ από το ομοιόμορφο μέτρο του $[0,1]^2$, την οποία ορίζουμε ως εξής:

$$C_n = \sup_{f\in\mathcal{L}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i) - \mathbb{E}f \right|, \tag{4.3.1}$$

όπου $\mathcal{L}$ είναι η κλάση των 1-Lipschitz συναρτήσεων στο $[0,1]^2$ και $\mathbb{E}f$ είναι η μέση τιμή της f στο $[0,1]^2$. Η τυχαία μεταβλητή C_n δίνει το βέλτιστο άνω φράγμα για το «σφάλμα» που κάνουμε όταν χρησιμοποιούμε το δ_X για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας 1-Lipschitz συνάρτησης στο μοναδιαίο τετράγωνο. Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δώσουμε την απόδειξη του Talagrand για το ακόλουθο Θεώρημα των Ajtai-Komlòs-Tusnàdy.

Θεώρημα 4.3.1 *Υπάρχει σταθερά $K>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n\geq 2$,*

$$\mathbb{E}C_n \leq K\sqrt{\frac{\log n}{n}} \tag{4.3.2}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.2.2. Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$C_n = \sup_{f\in\mathcal{L}_0} \left| \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i) - \mathbb{E}f \right| = \sup_{f\in\mathcal{L}_0} \left| \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i) \right|, \tag{4.3.3}$$

όπου

$$\mathcal{L}_0 = \{f\in\mathcal{L} : \mathbb{E}f = 0\}. \tag{4.3.4}$$

[Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $f\in\mathcal{L}$, τότε $f-\mathbb{E}f\in\mathcal{L}_0$.]

Βήμα 1: Θεωρούμε μια ακολουθία $(\varepsilon_i)_{i\leq n}$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli που παίρνουν τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$. Ορίζουμε

$$D_n := \sup_{f\in\mathcal{L}_0} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i \right|. \tag{4.3.5}$$

Λήμμα 4.3.1 *Ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}C_n \leq \frac{2}{n}\mathbb{E}D_n. \tag{4.3.6}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε μια δεύτερη ακολουθία $X_1', \ldots, X_n'$ τυχαίων σημείων που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το $[0,1]^2$, και είναι ανεξάρτητα από τα X_i και τις ε_i. Συμβολίζουμε με $\mathbb{E}'$ τη μέση τιμή ως προς X_i' (για σταθερά X_i, ε_i). Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{E}'(f(X_i')) = \mathbb{E}f = 0 \tag{4.3.7}$$

για κάθε $f \in \mathcal{L}_0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n f(X_i)\right| &= \sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n (f(X_i) - \mathbb{E}'(f(X_i')))\right| \\ &\leq \mathbb{E}'\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n (f(X_i) - f(X_i'))\right|, \end{aligned}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}C_n \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n (f(X_i) - f(X_i'))\right|. \tag{4.3.8}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για σταθερή επιλογή προσήμων $\eta_1, \ldots, \eta_n$, όλες οι τυχαίες μεταβλητές

$$\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n \eta_i(f(X_i) - f(X_i'))\right|$$

έχουν την ίδια κατανομή. Άρα, παίρνοντας πρώτα μέση τιμή ως προς ε_i και μετά ως προς X_i, X_i', από την (4.3.8) έχουμε

$$\mathbb{E}C_n \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(f(X_i) - f(X_i'))\right|. \tag{4.3.9}$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται το ζητούμενο. □

Βήμα 2: Θεωρούμε την ανέλιξη $\mathcal{X} = (X_f)_{f\in\mathcal{L}_0}$, όπου

$$X_f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i). \tag{4.3.10}$$

Από το Βήμα 1, μας ενδιαφέρει κατ' αρχήν να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in\mathcal{L}_0}|X_f| = \frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in\mathcal{L}_0} X_f, \tag{4.3.11}$$

αφού $f \in \mathcal{L}_0 \Leftrightarrow -f \in \mathcal{L}_0$ (με $\mathbb{E}_\varepsilon$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή ως προς ε_i - για σταθερά x_i).

Λήμμα 4.3.2 *Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Για κάθε $u > 0$,*

$$P\left(\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \Big|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\Big| \geq u\right) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{2\sum_{i\leq n} a_i^2}\right). \tag{4.3.12}$$

Απόδειξη: Αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρές, έχουμε

$$\mathbb{E}\exp(\lambda\varepsilon_i) = \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \leq \exp(\lambda^2/2) \tag{4.3.13}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(2n)! \geq 2^n n!$). Άρα,

$$\mathbb{E}\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\exp\left(\lambda\varepsilon_i a_i\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right). \tag{4.3.14}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \geq u\right) \leq e^{-\lambda u}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \tag{4.3.15}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Ελαχιστοποιώντας το δεξιό μέλος ως προς $\lambda > 0$, παίρνουμε

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \geq u\right) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2\sum_{i\leq n} a_i^2}\right). \tag{4.3.16}$$

και το ζητούμενο προκύπτει λόγω συμμετρίας. □

Αν θεωρήσουμε την τυχαία απόσταση d_X στην κλάση $\mathcal{L}_0$, που ορίζεται από την

$$d_X^2(f,g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(X_i) - g(X_i))^2, \tag{4.3.17}$$

τότε από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε: για σταθερά $X_1, \ldots, X_n \in [0,1]^2$,

$$P(\varepsilon : |X_f - X_g| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{2nd_X^2(f,g)}\right) \tag{4.3.18}$$

για κάθε $u > 0$, δηλαδή οι $\varepsilon \mapsto \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f(X_i)$, $f \in \mathcal{L}_0$ σχηματίζουν υποκανονική ανέλιξη ως προς την $\sqrt{n}d_X$.

Πρόταση 4.3.1 *Υπάρχει τυχαία μεταβλητή $R := R(X_1, \ldots, X_n)$ με $\mathbb{E}R \leq K$, τέτοια ώστε: για κάθε $f, g \in \mathcal{L}_0$ και $X = (X_1, \ldots, X_n)$,*

$$d_X(f,g) \leq R(X)\cdot\left(\|f-g\|_2 + \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \tag{4.3.19}$$

όπου $K > 0$ απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 4.3.3 *Υπάρχει τυχαία μεταβλητή* $R = R(X_1, \ldots, X_n)$ *με* $\mathbb{E}R \leq K$*, η οποία ικανοποιεί το εξής: για κάθε ορθογώνιο* $A \subseteq [0,1]^2$ *με πλευρές παράλληλες στους άξονες,*

$$|\{i \leq n : X_i \in A\}| \leq R(X)n\big(|A| + (\log n)/n\big). \tag{4.3.20}$$

Ειδικότερα, αν $|A| \geq \log n/n$*, τότε*

$$|\{i \leq n : X_i \in A\}| \leq 2R(X)n|A|. \tag{4.3.21}$$

Απόδειξη: Έστω l_0 ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $2^{-l_0} \geq \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}$. Για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ με $-l_0 \leq l \leq l_0$, θεωρούμε την κανονική διαμέριση P_l του $[0,1]^2$ σε ορθογώνια με ακμές $2^{-l-l_0}, 2^{l-l_0}$.

Από τη στοιχειώδη ανισότητα $e^x \leq 1 + (e-1)x \leq 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$, βλέπουμε ότι αν Z είναι μια τυχαία μεταβλητή με $0 \leq Z \leq 1$, τότε

$$\mathbb{E}(\exp Z) \leq 1 + 2\mathbb{E}Z \leq \exp(2\mathbb{E}Z). \tag{4.3.22}$$

Έστω A υποορθογώνιο του $[0,1]^2$. Αν θέσουμε $Z_i = \chi_A(X_i)$, τότε

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i \leq n} Z_i\right)\right) = \prod_{i \leq n} \mathbb{E}(\exp Z_i) \leq \exp(2n|A|). \tag{4.3.23}$$

Επομένως, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$P\left(\sum_{i \leq n} Z_i \geq t\right) \leq \exp(2n|A| - t), \tag{4.3.24}$$

δηλαδή, για κάθε $t > 0$,

$$P(|\{i \leq n : X_i \in A\}| \geq 2n|A| + t) \leq e^{-t}. \tag{4.3.25}$$

Κάθε διαμέριση P_l αποτελείται από 2^{2l_0} ορθογώνια, άρα έχουμε $(2l_0+1)2^{2l_0} \leq Kn$ ορθογώνια στην $\bigcup_{|l| \leq l_0} P_l$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$R_1 = \max\{|\{i \leq n : X_i \in A\}| : A \in P_l, -l_0 \leq l \leq l_0\}. \tag{4.3.26}$$

Από την (4.3.25),

$$P(R_1 \geq 2n2^{-2l_0} + t) \leq 2ne^{-t}. \tag{4.3.27}$$

Από τον ορισμό του l_0 έχουμε $n2^{-2l_0} \leq c\log n$, οπότε η (4.3.27) μας δίνει

$$\mathbb{E}R_1 \leq K \log n. \tag{4.3.28}$$

Έστω A ένα υποορθογώνιο του $[0,1]^2$ με πλευρές a,b. Θεωρούμε το μικρότερο $l \geq -l_0$ για τον οποίο $a \leq 2^{-l-l_0}$. Τότε, $2^{-l-l_0} \leq 2a$ για κάθε $l > -l_0$, άρα, σε κάθε περίπτωση, $2^{-l-l_0} \leq 2a + 2^{-2l_0}$. Μπορούμε να καλύψουμε το A χρησιμοποιώντας το πολύ $2b2^{l-l_0}+4$ ορθογώνια της P_l. Άρα, το A περιέχει το πολύ $R_1(2b2^{-l+l_0}+4)$ σημεία X_i. Αφού $b \leq 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} R_1(2b2^{-l+l_0}+4) &= R_1 2^{l_0}(2b2^{-l-l_0} + 4\cdot 2^{-2l_0}) \\ &\leq R_1 2^{2l_0}(4ab + 6\cdot 2^{-2l_0}) \\ &\leq K\frac{R_1}{\log n} n\left(|A| + \frac{\log n}{n}\right). \end{aligned}$$

Παίρνοντας $R = KR_1/\log n$ έχουμε τον ισχυρισμό του Λήμματος. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 4.3.1: Έστω $h = f - g$. Με το συμβολισμό της απόδειξης του Λήμματος 4.3.3, θέτουμε $P = P_0$. Κάθε $A \in P$ περιέχει το πολύ $2nR2^{-2l_0}$ σημεία X_i, άρα

$$\sum_{i=1}^{n} h(X_i)^2 \leq 2^{-2l_0+1} Rn \sum_{A\in P} \|h\|_{\infty,A}^2, \tag{4.3.29}$$

όπου

$$\|h\|_{\infty,A} = \sup\{|h(x)| : x \in A\}. \tag{4.3.30}$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $F_P : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$F_P(u) = m_A(h) := \frac{1}{|A|}\int_A h(u)du \tag{4.3.31}$$

αν $u \in A \in P$. Αφού η h είναι 2-Lipschitz και κάθε $A \in P$ έχει διάμετρο το πολύ ίση με 2^{-l_0}, έχουμε

$$\|h\|_{\infty,A} \leq |m_A(h)| + c2^{l_0}. \tag{4.3.32}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} h(X_i)^2\right)^{1/2} &\leq \sqrt{Rn}\left(\left(\sum_{A\in P} 2^{-2l_0+1} m_A^2(h)\right)^{1/2} + c2^{-l_0}\right) \\ &= \sqrt{Rn}\left(\|F_P\|_2 + c2^{-l_0}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $c2^{-l_0} \leq K\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}$ και $\|F_P\|_2 \leq \|h\|_2$. Άρα,

$$d_X(f,g) \leq C\sqrt{R}\cdot\left(\|f-g\|_2 + (\log n/n)^{1/2}\right), \tag{4.3.33}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Αφού $\mathbb{E}(C\sqrt{R}) \leq K$, έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 4.3.2 *Υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq 2$,*

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}D_n \leq K\sqrt{\frac{\log n}{n}}. \tag{4.3.34}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα υποσύνολο Z της $\mathcal{L}_0$, μεγιστικό ως προς την

$$f \neq g \in Z \Longrightarrow \|f-g\|_2 \geq \sqrt{\frac{\log n}{n}}. \tag{4.3.35}$$

Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{L}_0$ υπάρχει $g \in Z$ με $\|f-g\|_2 \leq \sqrt{\log n/n}$. Από την Πρόταση 4.3.1 έχουμε

$$d_X(f,g) \leq 2R(X)\sqrt{\log n/n}, \tag{4.3.36}$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(f(X_i)-g(X_i))\Big| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |f(X_i)-g(X_i)| \\ &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |f(X_i)-g(X_i)|^2\right)^{1/2} \\ &= d_X(f,g) \\ &\leq 2R(X)\sqrt{\log n/n}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{1}{n}\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)\Big| \leq 2R(X)\sqrt{\frac{\log n}{n}} + \frac{1}{n}\sup_{f\in Z}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)\Big|. \tag{4.3.37}$$

Αν λοιπόν δείξουμε ότι, για κάθε $X_1,\dots,X_n$,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in Z}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)\Big| \leq K_1 R(X)\sqrt{\frac{\log n}{n}}, \tag{4.3.38}$$

τότε παίρνοντας μέση τιμή ως προς $X_1,\dots,X_n$ και ε στην (4.3.37) και χρησιμοποιώντας τις (4.3.38) και $\mathbb{E}R \leq K$ θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\mathbb{E}D_n &= \mathbb{E}_X\mathbb{E}_\varepsilon \frac{1}{n}\sup_{f\in\mathcal{L}_0}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)\Big| \\ &\leq 2\mathbb{E}R(X)\sqrt{\frac{\log n}{n}} + \mathbb{E}_X\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in Z}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)\Big| \\ &\leq 2K\sqrt{\frac{\log n}{n}} + K_1K\sqrt{\frac{\log n}{n}} \\ &= K_2\sqrt{\frac{\log n}{n}} \end{aligned}$$

όπου $K_2 = (2 + K_1)K$, δηλαδή το Θεώρημα 4.3.2.

Μένει λοιπόν να δείξουμε την (4.3.38) για κάποια απόλυτη σταθερά $K_1 > 0$. Έστω $X_1, \ldots, X_n \in [0,1]^2$ και έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο Z. Για κάθε $f \in \mathcal{L}_0$ ορίζουμε

$$I(f) = \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B_X(f,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon, \tag{4.3.39}$$

όπου $B_X(f,\varepsilon)$ είναι η ανοιχτή μπάλα (με κέντρο f και ακτίνα ε) ως προς την $\sqrt{n}d_X$. Από την Πρόταση 4.3.1 και την (4.3.35), αν $f, g \in Z$ έχουμε $\sqrt{n}d_X(f,g) \leq 2R\sqrt{n}\|f-g\|_2$, άρα

$$B_X(f,\varepsilon) \cap Z \supseteq B(f, \varepsilon/2R\sqrt{n}) \cap Z, \tag{4.3.40}$$

όπου η δεύτερη μπάλα είναι με την L^2-απόσταση. Παίρνοντας υπόψιν και το γεγονός ότι $\mathrm{diam}(\mathcal{L}_0) \leq 2\sqrt{2}$ (αν $f, g \in \mathcal{L}_0$, τότε η $f-g$ είναι 2-Lipschitz και μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα σημείο του μοναδιαίου τετραγώνου αφού $\mathbb{E}(f-g) = 0$), βλέπουμε ότι

$$I(f) \leq \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon/2R\sqrt{n}))}\right)}d\varepsilon = 2R\sqrt{n}\int_0^3 \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon. \tag{4.3.41}$$

Ορίζουμε $a_n = \sqrt{\log n/n}$. Από την (4.3.35), αν $f \in Z$ και $\varepsilon < a_n$ τότε $B(f,\varepsilon) = \{f\}$. Άρα,

$$\frac{I(f)}{2R\sqrt{n}} \leq a_n\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu\{f\}}\right)} + \int_{a_n}^3 \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon. \tag{4.3.42}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^3 \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon &\leq \left(\int_{a_n}^3 \frac{1}{\varepsilon}d\varepsilon\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty \varepsilon\cdot\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)d\varepsilon\right)^{1/2} \\
&\leq K_3\sqrt{\log n}\cdot\left(\int_0^\infty \varepsilon\cdot\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)d\varepsilon\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{a_n} \varepsilon\cdot\log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))}\right)d\varepsilon\right)^{1/2} &\geq \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(\{f\})}\right)}\left(\int_0^{a_n}\varepsilon d\varepsilon\right)^{1/2} \\
&\geq \frac{1}{K_4}a_n\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(\{f\})}\right)},
\end{aligned}$$

άρα

$$I(f) \leq K_5 R(X)\sqrt{n\log n}J(f), \tag{4.3.43}$$

όπου

$$J(f) = \left(\int_0^\infty \varepsilon \cdot \log\left(\frac{1}{\mu(B(f,\varepsilon))} \right) d\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{4.3.44}$$

Αφού οι $\varepsilon \mapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i)$, $f \in Z$ σχηματίζουν υποκανονική ανέλιξη ως προς την $\sqrt{n} d_X$, το Θεώρημα 3.2.1 μας εξασφαλίζει ότι

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in Z} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i) \right| \leq \frac{K_6}{n} \sup_{f\in Z} I(f). \tag{4.3.45}$$

Από την (4.3.43) έπεται ότι

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in Z} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i) \right| \leq K_7 R(X) \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \cdot \sup_{f\in Z} J(f). \tag{4.3.46}$$

Όμως,

$$\inf_\mu \sup_{f\in Z} J(f) = \gamma_{2,2}(Z), \tag{4.3.47}$$

και, αφού η (4.3.46) ισχύει για κάθε μέτρο πιθανότητας μ στο Z, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f\in Z} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i) \right| \leq K_7 R(X) \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \cdot \gamma_{2,2}(Z). \tag{4.3.48}$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $\gamma_{2,2}(\mathcal{L}_0) < \infty$ (από το Λήμμα 4.2.3 έχουμε $\gamma_{2,2}(Z) \leq c\gamma_{2,2}(\mathcal{L}_0)$). Θα δείξουμε κάτι γενικότερο:

Πρόταση 4.3.2 *Έστω $M > 0$ και*

$$\mathcal{C}_M = \left\{ f : [0,1]^2 \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty \leq M, \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_2 \leq M, \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_2 \leq M \right\}. \tag{4.3.49}$$

Τότε,

$$\gamma_{2,2}(\mathcal{C}_M) < K \cdot M. \tag{4.3.50}$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M = 1$: εύκολα ελέγχουμε ότι $\gamma_{2,2}(\mathcal{C}_M) = M \cdot \gamma_{2,2}(\mathcal{C}_1)$. Γράφουμε λοιπόν $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $\gamma_{2,2}(\mathcal{C}) < +\infty$.

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{C}$ περιέχεται σε κατάλληλο ελλειψοειδές, για το οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.2.2. Για κάθε συνάρτηση $f \in L^2([0,1]^2)$ ορίζουμε

$$a_{n,m}(f) = \int_{[0,1]^2} f(x,y) \exp(2i\pi(nx+my)) dxdy. \tag{4.3.51}$$

Τότε,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}(f)|^2. \tag{4.3.52}$$

Αν θεωρήσουμε το μιγαδικό χώρο Hilbert H των ακολουθιών $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ με νόρμα την

$$\|(a_{n,m})\|_H = \left(\sum_{n,m} |a_{n,m}|^2\right)^{1/2} \tag{4.3.53}$$

και την απεικόνιση $S : L^2([0,1]^2) \to H$ με $S(f) = (a_{n,m}(f))_{n,m\in\mathbb{Z}}$, η (4.3.52) ξαναγράφεται στη μορφή $\|f\|_2 = \|S(f)\|_H$. Από το Λήμμα 4.2.2 αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_{2,2}(S(\mathcal{C})) < +\infty$.

Θεωρούμε τους υποχώρους

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a_{n,m}) : a_{n,m} = 0 \text{ αν δεν ισχύουν οι } |n| \geq 1, |n| \geq |m|\} \\ F_2 &= \{(a_{n,m}) : a_{n,m} = 0 \text{ αν δεν ισχύει } |m| > |n|\} \\ F_3 &= \{(a_{n,m}) : \forall (n,m) \neq (0,0), a_{n,m} = 0\}. \end{aligned}$$

Τότε,

$$S(\mathcal{C}) \subseteq T_1 + T_2 + T_3, \tag{4.3.54}$$

όπου

$$T_i = P_{F_i}(S(\mathcal{C})), \quad i = 1,2,3 \tag{4.3.55}$$

η προβολή του $S(\mathcal{C})$ στον F_i. Από το Πόρισμα 4.2.1, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\gamma_{2,2}(T_i) < +\infty, \qquad i = 1,2,3. \tag{4.3.56}$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση του T_1 (για το T_2 δουλεύουμε τελείως ανάλογα). Θέτουμε

$$A = \{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : |n| \geq 1, |n| \geq |m|\}. \tag{4.3.57}$$

Αν $(n,m) \in A$ και $f \in \mathcal{C}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη ως προς x βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{n,m}(f) &= \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 (f(1,y) - f(0,y))e^{2\pi i m y}dy \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i n}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)e^{2\pi i(nx+my)}dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{n}b_m(g) - \frac{1}{n}a_{n,m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right), \end{aligned}$$

όπου $g(y) = f(1,y) - f(0,y)$ και

$$b_m(g) = \int_0^1 g(y)e^{2\pi i m y}dy. \tag{4.3.58}$$

Επομένως,

$$T_1 \subseteq \frac{1}{2\pi i}(T_4 + T_5), \tag{4.3.59}$$

όπου

$$T_4 = \big\{\big(\frac{1}{n}b_m(g)\big)_{(n,m)\in A} : \|g\|_\infty \leq 2\big\} \tag{4.3.60}$$

και

$$T_5 = \big\{\big(\frac{1}{n}a_{n,m}(h)\big)_{(n,m)\in A} : \|h\|_2 \leq 1\big\}. \tag{4.3.61}$$

Από το Λήμμα 4.2.2 και το Πόρισμα 4.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\gamma_{2,2}(T_i) < +\infty, \qquad i = 4, 5. \tag{4.3.62}$$

Για το T_4: θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E_1 = \left\{(b_m)_{m\in\mathbb{Z}^*} : \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} m b_m^2 \leq 4\right\}. \tag{4.3.63}$$

Από το θεώρημα του ελλειψοειδούς έχουμε

$$\gamma_{2,2}(E_1) \leq K_1 \cdot \sup_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2\sqrt{m}}(2m)^{1/2} \leq K_2, \tag{4.3.64}$$

όπου $K_1, K_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \ell_2(\mathbb{Z}^*) \to \ell_2(A)$ με

$$(b_m)_{m\in\mathbb{Z}^*} \mapsto \left(\frac{\sqrt{m}}{n}b_m\right)_{(n,m)\in A}. \tag{4.3.65}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\sum_{(n,m)\in A} \frac{m}{n^2} = 4\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 4\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{K_3}{m} = K_4, \tag{4.3.66}$$

βλέπουμε ότι

$$\|F((b_m)) - F((b'_m))\|_2 \leq K_4\|(b_m) - (b'_m)\|_2 \tag{4.3.67}$$

για κάθε $(b_m), (b'_m) \in \ell_2(\mathbb{Z}^*)$. Από το Λήμμα 4.2.2,

$$\gamma_{2,2}(F(E_1)) \leq K_4 \cdot \gamma_{2,2}(E_1) \leq K_5. \tag{4.3.68}$$

Θα δείξουμε ότι

$$T_4 \subseteq F(E_1). \tag{4.3.69}$$

Πράγματι, αν $\|g\|_\infty \leq 2$ έχουμε $\|g\|_2 \leq 2$, οπότε από την ανισότητα του Bessel έχουμε

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} |b_m(g)|^2 \leq \|g\|_2^2 \leq 4, \tag{4.3.70}$$

το οποίο δείχνει ότι $\big(\frac{1}{\sqrt{m}}b_m(g)\big) \in E_1$. Τότε, για κάθε $\big(\frac{1}{n}b_m(g)\big)_{(n,m)\in A} \in T_4$ έχουμε ότι

$$\big(\frac{1}{n}b_m(g)\big)_{(n,m)\in A} = \big(\frac{\sqrt{m}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}b_m(g)\big)_{(n,m)\in A} = F\big(\frac{1}{\sqrt{m}}b_m(g)\big) \in F(E_1). \tag{4.3.71}$$

Από τις (4.3.68), (4.3.69) και το Λήμμα 4.2.3, συμπεραίνουμε ότι

$$\gamma_{2,2}(T_4) < +\infty. \tag{4.3.72}$$

Για το T_5: Αν $\|h\|_2 \leq 1$, τότε

$$\sum_{(n,m)\in A} |a_{n,m}(h)|^2 \leq \|h\|_2^2 \leq 1, \tag{4.3.73}$$

άρα το T_5 περιέχεται στο ελλειψοειδές

$$E_2 := \Big\{(a_{n,m})_{(n,m)\in A} : \sum_{(n,m)\in A} n^2|a_{n,m}|^2 \leq 1\Big\}. \tag{4.3.74}$$

Μετράμε το πλήθος των $(n,m) \in A$ για τα οποία $n \leq k$. Είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{k}\sum_{-n}^{n} 1 = \sum_{n=1}^{k}(2n+1) < (k+1)^2 < 4k^2. \tag{4.3.75}$$

Αν λοιπόν πάρουμε τους συντελεστές b_k του E_2 σε φθίνουσα διάταξη, έχουμε $b_k \leq K_6/\sqrt{k}$, δηλαδή

$$\gamma_{2,2}(E_2) \leq K_7 \tag{4.3.76}$$

από το θεώρημα του ελλειψοειδούς. Από το Λήμμα 4.2.3 έπεται ότι

$$\gamma_{2,2}(T_5) \leq 2K_7, \tag{4.3.77}$$

και από την (4.3.59),

$$\gamma_{2,2}(T_1) < +\infty. \tag{4.3.78}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\gamma_{2,2}(T_2) < +\infty$. Για το T_3 παρατηρούμε ότι είναι ισομετρικό με υποσύνολο του $[-1,1]$ (αν $f \in \mathcal{C}$, τότε $|a_{0,0}(f)| \leq 1$). Άρα, $\gamma_{2,2}(T_3) \leq 2\gamma_{2,2}([-1,1]) < +\infty$ (αρκεί να κάνουμε τον υπολογισμό για το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue).

Έχουμε λοιπόν αποδείξει την (4.3.56), και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. □

Αναφορές: Σε αυτό το Κεφάλαιο ακολουθούμε τις εργασίες [T2] και [T3] του Talagrand.

Κεφάλαιο 5

Το φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά

5.1 Ισοτροπικά κυρτά σώματα

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δώσουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.2 στη θεωρία των κυρτών σωμάτων: το φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το 0. Δηλαδή,

$$\int_K x_i dx = 0, \tag{5.1.1}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ο γραμμικός τελεστής $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$M(y) = \int_K \langle x, y \rangle x dx \tag{5.1.2}$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο πίνακας $M(K)$ με

$$[M(K)]_{ij} = \langle Me_i, e_j \rangle = \int_K x_i x_j dx \tag{5.1.3}$$

που αντιστοιχεί στον M λέγεται πίνακας αδρανείας του K. Ο M έχει τετραγωνική ρίζα: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος S τέτοιος ώστε $M = S^2$. Θεωρούμε τη γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Το $\tilde{K}$ έχει κέντρο βάρους το 0, και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{K}} \langle x, y \rangle^2 dx &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y \rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y \rangle^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |\text{det}S|^{-1}\langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y\rangle \\ &= |\text{det}S|^{-1}\langle MS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\text{det}S|^{-1}\|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Ορισμός. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους το 0, και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = A\|y\|_2^2 \tag{5.1.4}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $A > 0$ σταθερά. Άμεσες συνέπειες της (5.1.4) είναι οι

$$\int_K x_i^2 dx = A, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.1.5}$$

και

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = nA. \tag{5.1.6}$$

Όπως είδαμε, κάθε κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα που είναι ισοτροπική. Αρκεί να πάρουμε το $\tilde{K}$ όπως παραπάνω, και να κανονικοποιήσουμε τον όγκο του.

Λήμμα 5.1.1 *Το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A αν και μόνο αν*

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = A \cdot (\text{tr}T) \tag{5.1.7}$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A. Εφαρμόζοντας την (5.1.4) πρώτα με $\theta = e_j$ και μετά με $\theta = (e_i + e_j)/\sqrt{2}$, βλέπουμε ότι

$$\int_K x_i x_j dx = A \cdot \delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.1.8}$$

Αν $T = (t_{ij})$, τότε

$$\begin{aligned} \int_K \langle x, Tx\rangle dx &= \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \int_K x_i x_j dx = \sum_{i,j=1}^n A \cdot t_{ij}\delta_{ij} \\ &= A \cdot \sum_{i=1}^n t_{ii} = A \cdot (\text{tr}T). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η (5.1.7) και την εφαρμόσουμε για τον $Tx = \langle x, \theta\rangle\theta$, $\theta \in S^{n-1}$, παίρνουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx = A \cdot (\text{tr}T) = A \cdot \|\theta\|_2^2 = A. \qquad \square \tag{5.1.9}$$

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι μέσα στη γραμμική κλάση ενός κυρτού σώματος με κέντρο βάρους το 0 υπάρχει ουσιαστικά ένα ισοτροπικό σώμα, το οποίο χαρακτηρίζεται ως λύση ενός προβλήματος ελαχίστου.

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν*

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \tag{5.1.10}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει ισοτροπική γραμμική εικόνα. Επιπλέον, η ισοτροπική αυτή εικόνα είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A. Έστω $T \in SL(n)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx &= \int_K \|Tx\|_2^2 dx = \int_K \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= A \cdot \mathrm{tr}(T^*T) \geq nA = \int_K \|x\|_2^2 dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στη μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geq n[\det(T^*T)]^{1/n} \tag{5.1.11}$$

(το ίχνος είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα το γινόμενό τους, και στη συγκεκριμένη περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί). Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $T^*T = I$, δηλαδή αν $T \in O(n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το K είναι λύση του προβλήματος ελαχίστου (τέτοιες λύσεις υπάρχουν: κάθε ισοτροπική θέση του K είναι όπως είδαμε μια τέτοια λύση). Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε ο $(I + \varepsilon T)/[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Άρα,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_K \frac{\|x + \varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n}} dx. \tag{5.1.12}$$

Παρατηρούμε οτι $\|x + \varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O(\varepsilon^2)$ και

$$[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2) \tag{5.1.13}$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Συνεπώς, η (5.1.12) παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \varepsilon\int_K \langle x, Tx\rangle dx + O(\varepsilon^2), \tag{5.1.14}$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$ καταλήγουμε στην

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_K \langle x, Tx\rangle dx. \tag{5.1.15}$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για τον $-T$, και λόγω γραμμικότητας παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx \tag{5.1.16}$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 5.1.1, το K είναι ισοτροπικό με σταθερά $A = \frac{1}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx$.

Τέλος, αν έχουμε δύο ισοτροπικές θέσεις K, K' του ίδιου σώματος, τότε η μία είναι ορθογώνια εικόνα της άλλης. Για να το δούμε, παρατηρούμε ότι αν $K' = TK$, τότε ισχύει ισότητα στην

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx, \tag{5.1.17}$$

δηλαδή έχουμε ισότητα στην (5.1.11). Αυτό σημαίνει ότι $T^*T = I$, δηλαδή $T \in O(n)$. □

Το Θεώρημα 5.1.1 (πιο συγκεκριμένα, η μοναδικότητα της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) εξασφαλίζει οτι η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}\|x\|_2^2 dx \ \Big|\ T \in GL(n)\right\} \tag{5.1.18}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2. \tag{5.1.19}$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας της γραμμικής κλάσης του K.

Η συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x \mapsto \langle x, \theta\rangle$ πάνω στο K περιγράφεται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.1.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και αν $\theta \in \mathbb{R}^n$, τότε γιά κάθε $p > 1$ ισχύει η αντίστροφη ανισότητα Hölder*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq cp\int_K |\langle x, \theta\rangle| dx. \tag{5.1.20}$$

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το Λήμμα του Borell που είναι εφαρμογή της ανισότητας Brunn-Minkowski:

Λήμμα 5.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Υποθέτουμε ότι A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K \cap A| = \theta > \frac{1}{2}$. Τότε, γιά κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$|(\mathbb{R}^n \setminus tA) \cap K| \leq \theta\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{5.1.21}$$

Απόδειξη: Ελέγχουμε πρώτα ότι γιά κάθε $t > 1$

$$\mathbb{R}^n \setminus A \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tA) + \frac{t-1}{t+1}A. \tag{5.1.22}$$

[Αν όχι, τότε υπάρχει $a \in A$ που γράφεται στη μορφή

$$a = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1 \tag{5.1.23}$$

γιά κάποια $a_1 \in A$ και $y \notin tA$. Τότε,

$$\frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A, \tag{5.1.24}$$

από την κυρτότητα και τη συμμετρία του A. Όμως τότε $y \in tA$, το οποίο είναι άτοπο.]
Χρησιμοποιώντας την (5.1.22) και την κυρτότητα του K, βλέπουμε ότι

$$(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap K \supseteq \frac{2}{t+1}[(\mathbb{R}^n \setminus tA) \cap K] + \frac{t-1}{t+1}(A \cap K). \tag{5.1.25}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski,

$$|(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap K| \geq |(\mathbb{R}^n \setminus tA) \cap K|^{\frac{2}{t+1}} |A \cap K|^{\frac{t-1}{t+1}}. \tag{5.1.26}$$

Όμως $|A \cap K| = \theta$ και $|(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap K| = 1 - \theta$, απ' όπου παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη της Πρότασης 5.1.1: Θέτουμε

$$I = \int_K |\langle x, \theta\rangle| dx, \tag{5.1.27}$$

και ορίζουμε

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, \theta\rangle| \leq 3I\}. \tag{5.1.28}$$

Το A είναι συμμετρικό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$|A \cap K| \geq 2/3. \tag{5.1.29}$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in K : |\langle x, \theta\rangle| > t\} = K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)$, και γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx &= \int_0^{3I} pt^{p-1} |K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)| dt \\ &\quad + \int_{3I}^{\infty} pt^{p-1} |K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)| dt. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα φράσσεται από

$$\int_0^{3I} pt^{p-1} dt = (3I)^p, \tag{5.1.30}$$

ενώ γιά το δεύτερο κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = 3Is$ και χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Borell:

$$\begin{aligned}\int_{3I}^{\infty} pt^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)|dt &= (3I)^p \int_1^{\infty} ps^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus sA)|ds \\ &\leq (3I)^p \int_1^{\infty} ps^{p-1}2^{-s/2}ds.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και εκτιμώντας το τελευταίο ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx \leq (3I)^p \big[1 + (c_1 p)^p\big] \tag{5.1.31}$$

γιά κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, απ'οπου έπεται ότι

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq cpI = cp \int_K |\langle x, \theta\rangle| dx. \quad \square \tag{5.1.32}$$

Πόρισμα 5.1.1 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $p > 1$,*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq cpL_K, \tag{5.1.33}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. $\square$

Η ανισότητα της Πρότασης 5.1.1 διατυπώνεται στην εξής ισοδύναμη μορφή:

Πρόταση 5.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\int_K \exp(|\langle x, \theta\rangle|/AI(K, \theta))dx \leq 2, \tag{5.1.34}$$

όπου $A > 0$ απόλυτη σταθερά και $I(K, \theta) = \int_K |\langle x, \theta\rangle| dx$.

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε το ολοκλήρωμα και επιλέγουμε τη σταθερά A στο τέλος. Από την Πρόταση 5.1.1 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_K \exp(|\langle x, \theta\rangle|/AI(K, \theta))dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_K \frac{|\langle x, \theta\rangle|^k}{A^k I(K, \theta)^k} dx \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{ckI(K, \theta)}{AI(K, \theta)}\right)^k \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ck}{A(k!)^{1/k}}\right)^k \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2,\end{aligned}$$

αν επιλέξουμε $A = 3ec$. □

Ορισμός. Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $f : K \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Η Orlicz νόρμα $\|f\|_{L^{\psi_\alpha}}$, $\alpha \geq 1$ της f ορίζεται από την

$$\|f\|_{L^{\psi_\alpha}} = \inf\{\lambda > 0 \mid \int_K \exp((|f(x)|/\lambda)^\alpha)dx \leq 2\}. \tag{5.1.35}$$

Με τον παραπάνω ορισμό, αυτό που ισχυρίζεται η Πρόταση 5.1.2 είναι ότι:

> Υπάρχει απόλυτη σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 και κάθε $\theta \in S^{n-1}$ η συνάρτηση $f(x) = \langle x, \theta\rangle / I(K, \theta)$ στο K έχει Orlicz νόρμα $\|f\|_{L^{\psi_1}} \leq A$.

5.2 Άνω φράγμα για τη σταθερά ισοτροπίας

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει διατυπώθηκε από τον Bourgain:

> **Εικασία**: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0.*

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στον Bourgain.

Θεώρημα 5.2.1 *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, ισχύει η ανισότητα*

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{5.2.1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει η ανισότητα του Pisier.

Λήμμα 5.2.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$. Υπάρχουν: ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ με $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 1$ τέτοιοι ώστε*

$$\mathbb{E}\sup_{x\in K}\Big\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i v_i\Big\rangle \leq c_1 n\log n, \tag{5.2.2}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά και $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. □

Σημείωση: Σύμφωνα με το Λήμμα 2.4.2, η ανισότητα του Pisier ισχυρίζεται ότι υπάρχει γραμμική εικόνα TK του K με $|TK| = |K| = 1$ και

$$w(TK) \leq c_1'\sqrt{n}\log n. \tag{5.2.3}$$

(αρκεί να ορίσουμε $T = S^*$ όπου $S(e_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$). Αντίστροφα, αν υπάρχει $T \in SL(n)$ ώστε να ισχύει η (5.2.3), μπορούμε να γράψουμε $T = VDU$, όπου $V, U \in O(n)$ και $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ με $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Τότε, αν θέσουμε $v_i = U^* e_i$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{x \in K} \big\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i v_i \big\rangle &= \mathbb{E} \sup_{x \in K} \big\langle x, U^* D \big(\sum_{i=1}^n g_i e_i \big) \big\rangle \\
&= \mathbb{E} \sup_{x \in K} \big\langle DUx, \sum_{i=1}^n g_i e_i \big\rangle \\
&= \mathbb{E} \sup_{x \in K} \big\langle Tx, V \big(\sum_{i=1}^n g_i e_i \big) \big\rangle \\
&= \mathbb{E} \sup_{x \in TK} \big\langle x, \sum_{i=1}^n g_i e_i \big\rangle \\
&\simeq \sqrt{n} w(TK) \leq c_1 n \log n.
\end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1: Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Θεωρούμε $v_1, \ldots, v_n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ με $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 1$, όπως στο Λήμμα 5.2.1. Αφού

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = nL_K^2, \tag{5.2.4}$$

αν ορίσουμε

$$K_r = \{x \in K : \|x\|_2 \leq r\sqrt{n} L_K\}, \tag{5.2.5}$$

η ανισότητα του Markov δείχνει ότι

$$|K_r| \geq 1 - r^{-2}. \tag{5.2.6}$$

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{K_r} \langle x, \theta \rangle^2 dx &= \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx - \int_{K \setminus K_r} \langle x, \theta \rangle^2 dx \\
&\geq L_K^2 - |K \setminus K_r|^{1/2} \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^4 dx \right)^{1/2} \\
&\geq L_K^2 - r^{-1} (4c)^2 L_K^2,
\end{aligned}$$

όπου $c > 0$ η σταθερά της Πρότασης 5.1.1. Αν επιλέξουμε $r = 32c^2$, έχουμε

$$\int_{K_r} \langle x, \theta \rangle^2 dx \geq \frac{L_K^2}{2} \tag{5.2.7}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αφού $|K_r| \geq 1 - r^{-2}$, υπάρχει $1 \leq \rho^n \leq (1 - r^{-2})^{-1}$ τέτοιος ώστε: για το $W = \rho K_r$ να έχουμε $|W| = 1$ και

$$\int_W \langle x, \theta \rangle^2 dx = \rho^{n+2} \int_{K_r} \langle x, \theta \rangle^2 dx \geq \frac{L_K^2}{2} \tag{5.2.8}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Θεωρούμε τον $D \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ με $Dv_i = \lambda_i v_i$, και ορίζουμε

(5.2.9)
$$I := \int_W \sup_{y\in K} \langle y, \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, v_i\rangle v_i\rangle dx = \int_W \sup_{y\in K} \langle y, Dx\rangle dx = \int_W \sup_{y\in DK} \langle y, x\rangle dx.$$

Για κάθε $x \in W$ έχουμε $x/\rho \in K$, άρα

$$I \geq \frac{1}{\rho}\int_W \langle x, Dx\rangle dx = \frac{1}{\rho}\int_W \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, v_i\rangle^2\right) dx \geq \frac{L_K^2}{2\rho}\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \frac{nL_K^2}{2\rho}. \tag{5.2.10}$$

Παρατηρούμε ότι

$$|\langle y, x\rangle| \leq \rho r\sqrt{n} L_K \|y\|_2 \tag{5.2.11}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και $x \in W$. Επίσης,

$$I(W,\theta) = \int_W |\langle x, \theta\rangle| dx \leq \rho^{n+1} L_K \tag{5.2.12}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από την (5.2.11) και την Πρόταση 5.1.2, υπάρχει απόλυτη σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_W \exp\left(\frac{\langle y, x\rangle^2}{A\rho^{2n+1} r\sqrt{n} L_K^2 \|y\|_2^2}\right) dx \leq \int_W \exp\left(\frac{|\langle y, x\rangle|}{A\rho^{2n} L_K \|y\|_2}\right) dx \leq 2 \tag{5.2.13}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$|\{x \in W : |\langle y, x\rangle| \geq B\sqrt[4]{n} L_K t\}| \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{\|y\|_2^2}\right) \tag{5.2.14}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $B = \sqrt{A\rho^{2n+1} r}$. Αν θεωρήσουμε την ανέλιξη $\mathcal{X} = (X_y)_{y\in DK}$, $X_y : W \to \mathbb{R}$ με

$$X_y(x) = \frac{\langle y, x\rangle}{B\sqrt[4]{n} L_K}, \tag{5.2.15}$$

τότε, για κάθε $y, z \in DK$ και $t > 0$,

(5.2.16)
$$P(|X_y - X_z| \geq t) \leq |\{x \in W : |\langle y - z, x\rangle| \geq B\sqrt[4]{n} L_K t\}| \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{\|y - z\|_2^2}\right),$$

δηλαδή η $\mathcal{X}$ είναι υποκανονική (ως προς την Ευκλείδεια απόσταση στο DK - η σταθερά 2 στην (5.2.14) δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα που αποδείξαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια).

Θεωρούμε τη συνήθη ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = (Z_y)_{y\in DK}$ με

$$Z_y(\omega) = \langle y, \sum_{i=1}^n g_i(\omega) v_i\rangle. \tag{5.2.17}$$

Οι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Z}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.2. Άρα,

$$\begin{aligned} I &= B\sqrt[4]{n}L_K \cdot \int_W \sup_{y\in DK} X_y(x)dx \\ &\leq KB\sqrt[4]{n}L_K \cdot \mathbb{E}\sup_{y\in DK} \big\langle y, \sum_{i=1}^n g_i v_i \big\rangle \\ &= KB\sqrt[4]{n}L_K \cdot \mathbb{E}\sup_{x\in K} \big\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i v_i \big\rangle. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 5.2.1, παίρνουμε

(5.2.18) $$I \leq c_1 KB\sqrt[4]{n}L_K \cdot n\log n.$$

Τέλος, η (5.2.10) μας δίνει

(5.2.19) $$nL_K^2 \leq (2c_1\rho KB)n^{5/4}\log n \cdot L_K,$$

δηλαδή

(5.2.20) $$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n,$$

όπου $c = 2c_1\rho KB = 2c_1\rho K\sqrt{A\rho^{2n+1}r}$ θετική απόλυτη σταθερά. $\square$

Αναφορές: Στην παράγραφο 5.1 δίνουμε μόνο εκείνες τις ιδιότητες των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων που απαιτούνται για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο άρθρο επισκόπησης [MP]. Η απόδειξη της ανισότητας του Pisier (Λήμμα 5.2.1) βρίσκεται, για παράδειγμα, στο Κεφάλαιο 2 του βιβλίου του Pisier [Pi]. Η απόδειξη που δίνουμε για το Θεώρημα 5.2.1 ακολουθεί την αρχική απόδειξη του Bourgain στο [Bou]. Η χρήση του Θεωρήματος 3.3.2 του Talagrand απλοποιεί το επιχείρημα και βελτιώνει την τελική εκτίμηση κατά ένα λογαριθμικό ως προς τη διάσταση παράγοντα. Επίσης, δεν απαιτείται η συμμετρία του ισοτροπικού σώματος K ως προς την αρχή των αξόνων (αρκεί να υποθέσουμε ότι έχει κέντρο βάρους το 0).

Βιβλιογραφία

[Bou] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[Du1] R. Dudley, *The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes*, J. Funct. Anal. **1** (1967), 290-330.

[Du2] R. Dudley, *Sample functions of the Gaussian process*, Ann. Probab. **1** (1973), 66-103.

[Fer] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, Lecture Notes in Mathematics **480** (1975), 1-96.

[Led] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[MP] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[Pi] G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Pr1] C. Preston, *Banach spaces arising from some integral inequalities*, Indiana Math. J. **20** (1971), 997-1015.

[Pr2] C. Preston, *Continuity properties of some Gaussian processes*, Ann. Math. Statist. **43** (1972), 285-292.

[Sle] D. Slepian, *The one-sided barrier problem for Gaussian noise*, Bell. System Tech. J. **41** (1962), 463-501.

[Str] K. R. Stromberg, *Probability for analysts*, Chapman & Hall Probability Series (1994).

[Su] V. N. Sudakov, *Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces*, Soviet Nath. Dokl. **12** (1971), 412-415.

[T1] M. Talagrand, *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math. **159** (1987), 99-147.

[T2] M. Talagrand, *Majorizing measures: the generic chaining*, Ann. Probab. **24** (1996), 1049-1103.

[T3] M. Talagrand, *Matching theorems and empirical discrepancy computations using majorizing measures*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 455-537.