Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Μαθηματικά και Εφαρμογές τους"

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

Μεταπτυχιακή εργασία της
Δέσποινας Χριστοφόρου

Επιβλέπων Καθηγητής
Χρήστος Κουρουνιώτης

Ηράκλειο, Απρίλιος 2009

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» και υπεβλήθη το Μάη του 2009.

Η τριμελής συμβουλευτική επιτροπή αποτελείται από τους:

1. Κουρουνιώτη Χρήστο (επιβλέπων)
2. Ναρδή Έλενα
3. Πάμφιλο Πάρη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χρήστο Κουρουνιώτη, για την καθοδήγηση και τη βοήθειά του στην εκπόνηση της εργασίας αυτής. Τα τελευταία χρόνια των σπουδών μου και ιδιαίτερα κατά την παρακολούθηση του μεταπτυχιακού μαθήματος «*Σύγχρονες τάσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών*» γνώρισα κοντά του τον κλάδο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Πολλές ευχαριστίες χρωστώ στην καθηγήτρια κ. Έλενα Ναρδή που με την καθοδήγησή της, τις υποδείξεις και τις διορθώσεις της, έκανε την ιδέα πραγματικότητα και η εργασία απέκτησε «σάρκα» και «οστά».

Ακόμα, οφείλω ευχαριστίες στον καθηγητή μου κ. Πάρη Πάμφιλο γιατί έμαθα κοντά του, κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως κατά την παρακολούθηση των μεταπτυχιακών μαθημάτων «*Η Ανάλυση στην Εκπαίδευση*» και «*Η Γεωμετρία στην Εκπαίδευση*», να αξιοποιώ τις Νέες Τεχνολογίες και ιδιαίτερα το πρόγραμμα, που κατασκεύασε ο ίδιος, EucliDraw στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Επίσης ευχαριστώ τη συνάδελφο Μαθηματικό και Πληροφορικό κ. Ελευθερία Χατζογιαννάκη για την άριστη και δημιουργική συνεργασία που είχαμε κατά την πραγματοποίηση της εφαρμογής αυτής στο εργαστήριο, καθώς επίσης και για τις συμβουλές. Χωρίς τη βοήθεια της όλα θα ήταν πολύ πιο δύσκολα.

Ευχαριστώ επίσης το Σχολικό Σύμβουλο των μαθηματικών, κ. Ιωάννη Κανέλλο, που ενώ χρειαζόταν κάθε φορά 4 ώρες ταξίδι για να έρθει στο Σχολείο μας, ερχόταν πάντα να παρακολουθήσει αυτή τη σειρά μαθημάτων και να μας δώσει χρήσιμες συμβουλές.

Ακόμα, ευχαριστώ το Διευθυντή του Σχολείου κ. Νίκο Τζώρτζη που μας βοήθησε σε ό,τι χρειαστήκαμε για να εξοπλίσουμε το εργαστήριο με τα απαραίτητα μέσα και για το χρόνο που αφιέρωνε τα απογεύματα κάθε φορά που του ζητούσαμε να μας παρέχει το εργαστήριο για τις σχετικές πρόβες.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου που ήταν δίπλα μου σε κάθε βήμα της ζωής μου και το σύζυγό μου Γιώργο για την υποστήριξη και την απεριόριστη κατανόηση του που μου ήταν αναγκαία ειδικά τους τελευταίους μήνες της συγγραφής. Τον ευχαριστώ επίσης για τις ιδέες και τις συμβουλές που μου προσέφερε ως μαθηματικός.

Τέλος, θέλω να αναφερθώ συγκεκριμένα στη δασκάλα μου μαθηματικό κ. Ειρήνη Μπιζά που μου στάθηκε σαν φύλακας άγγελος από το 1999, που τη γνώρισα στο Λύκειο όπου φοιτούσα στη Β΄ τάξη, μέχρι και σήμερα. Με τη βοήθειά της, κατά τα τελευταία χρόνια των σπουδών μου στο Λύκειο, πραγματοποίησα το στόχο μου να περάσω στο Τμήμα Μαθηματικών. Στάθηκε δίπλα μου ως μαθηματικός και ως άνθρωπος κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Πανεπιστήμιο σε ό,τι την χρειάστηκα· Ήταν δίπλα μου και με βοήθησε στην εκπλήρωση του παιδικού μου στόχου να διοριστώ και να διδάξω κι εγώ με τη σειρά μου Μαθηματικά και τώρα είναι πάλι δίπλα μου, με στηρίζει και με βοηθά στην εκπόνηση της εργασίας αυτής.
Ειρήνη σε ευχαριστώ πολύ για όλα. Το ελάχιστο που μπορώ να κάνω είναι να σου αφιερώσω την εργασία αυτή.

Στη δασκάλα μου μαθηματικό Ειρήνη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες γίνονται όλο και περισσότερες έρευνες που αφορούν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται τις περισσότερες φορές σε εμπόδια επιστημολογικής, γνωστικής, μεταγνωστικής και διδακτικής φύσης, σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές.

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Η πρώτη φορά που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις συναρτήσεις είναι στη Β΄ Γυμνασίου και έκτοτε τις χρησιμοποιούν μέχρι να ολοκληρώσουν τις σπουδές τους στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Συνεπώς μια λανθασμένη εντύπωση για την έννοια αυτή θα μεταφερθεί στις επόμενες τάξεις και τότε ο μαθητής θα βρεθεί σε αδιέξοδο, αφού αυτά που θα μαθαίνει δε θα ταιριάζουν με αυτά που ήδη ξέρει.

Στην εργασία αυτή δε θα ασχοληθούμε μόνο με την καταγραφή αυτών των δυσκολιών, αλλά θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική διδασκαλία των συναρτήσεων στη Β΄ Γυμνασίου, στο εργαστήριο Πληροφορικής, με χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Πήγαμε στο εργαστήριο, εφαρμόσαμε αυτή τη διδασκαλία σε ένα τμήμα της Β΄ τάξης και τώρα θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τι κάναμε, γιατί το κάναμε και πώς επέδρασε αυτό στους μαθητές.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να τονίσω ότι το τμήμα στο οποίο εφαρμόστηκε η διδασκαλία αυτή ήταν ένα από τα «δύσκολα» τμήματα. Δηλαδή ένα τμήμα με ζωηρούς μαθητές όπου πλειοψηφούσαν κατά πολύ τα αγόρια, οι περισσότεροι μαθητές παρουσίαζαν πολλά κενά και έδειχναν αδιάφοροι για το μάθημα. Με αυτούς τους μαθητές και με την καθηγήτρια της Πληροφορικής πήγαμε στο εργαστήριο και κάναμε κάτι διαφορετικό από τα συνηθισμένα. Αυτό ήταν και το κίνητρό μας. Θέλαμε να κάνουμε κάτι διαφορετικό το οποίο όμως να έχει συγκεκριμένη στόχευση. Για εμάς ήταν και μια πρόκληση. Θέλαμε να καταφέρουμε να κάνουμε τους μαθητές να ενδιαφερθούν για το μάθημα, να αποκτήσουν έναν ενεργό ρόλο μέσα στην τάξη, να μάθουν νέα πράγματα και να τα μάθουν όσο καλύτερα γίνεται, αλλά ταυτόχρονα να το διασκεδάσουν, αφού η ενασχόληση με τους υπολογιστές αρέσει στους περισσότερους, αν όχι σε όλους, τους μαθητές. Θέλαμε να ενεργοποιήσουμε όλους τους μαθητές και να τους βάλουμε στη διαδικασία της ανακάλυψης της νέας γνώσης.

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν το EucliDraw, ένα πρόγραμμα Δυναμικής Γεωμετρίας με το οποίο οπτικοποιήσαμε όλα εκείνα που θέλαμε να πούμε. Σχεδιάσαμε κατάλληλες δραστηριότητες και χάρη στη δυναμικότητά του οι μαθητές πειραματίζονταν, μετασχημάτιζαν τα σχήματα χωρίς να χάνονται οι ιδιότητές τους και συνεπώς ανακάλυπταν. Ανακάλυπταν τη νέα γνώση, δεν την έπαιρναν έτοιμη από εμάς.

Στην εργασία αρχικά παρουσιάζουμε αυτά που έχουν καταγράψει οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και αφορούν σε ζητήματα μάθησης των συναρτήσεων, όπως είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτής της ηλικίας, σε ζητήματα διδασκαλίας της συνάρτησης με χρήση νέων τεχνολογιών, σε ζητήματα διδασκαλίας των Μαθηματικών μέσω νέων τεχνολογιών και σε παράγοντες συναισθηματικούς που επιδρούν στη μάθηση των Μαθηματικών. Αυτά αποτελούν το δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, η οποία αναπτύσσεται σε έξι κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε όλα όσα κάναμε στο εργαστήριο και την τάξη. Καταρχάς αναφέρουμε τους στόχους που θέλαμε να πετύχουμε με την εφαρμογή αυτή, στη συνέχεια παρουσιάζουμε όλα όσα κάναμε ανά διδακτική ώρα και εξηγούμε το λόγο για τον οποίο έγιναν με αυτό τον τρόπο και στο τέλος την αξιολογούμε.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε και αναλύουμε όλα τα δεδομένα. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από τα φύλλα εργασίας, από την υλοποίηση της διδασκαλίας και τέλος τα αποτελέσματα από το διαγώνισμα που έγραψαν οι μαθητές και από το ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν στο τέλος της εφαρμογής.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάμε και συγκρίνουμε τα ευρήματά μας με αυτά των ερευνών που έχουν γίνει διεθνώς. Επίσης ασχολούμαστε με τις δυσκολίες που συναντήσαμε στην πραγματοποίηση της εφαρμογής και παρουσιάζουμε όλα εκείνα που θα αλλάζαμε αν το ξανακάναμε.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια ερωτήματα και κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα σε μεγαλύτερες τάξεις. Επίσης γράφουμε και κάποιες χρήσιμες συμβουλές για όσους επιχειρήσουν την εφαρμογή αυτή.

Κεφάλαιο 2

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αυτά που έχουν καταγράψει οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και αφορούν σε ζητήματα μάθησης των συναρτήσεων, όπως είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτής της ηλικίας, σε ζητήματα διδασκαλίας της συνάρτησης με χρήση νέων τεχνολογιών, σε ζητήματα διδασκαλίας των Μαθηματικών με χρήση νέων τεχνολογιών και σε παράγοντες συναισθηματικούς που επιδρούν στη μάθηση των Μαθηματικών.

2.1. Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι ένα θέμα που συγκεντρώνει την προσοχή των εκπαιδευτικών αλλά και της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας γενικότερα (Tall, 1991, Dubinsky & Harel, 1992, Sierpinska, 1992). Ένας παράγοντας που επηρεάζει ιδιαίτερα τη μάθηση των συναρτήσεων είναι οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασής τους (Hitt, 1998, Kaldrimidou & Ikonomou, 1998, Sierpinska, 1992). Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης: ο αναλυτικός, ο αριθμητικός και ο γραφικός. Ο αναλυτικός επιτυγχάνεται μέσω του τύπου της συνάρτησης, ο αριθμητικός μέσω του πίνακα τιμών και ο γραφικός μέσω της γραφικής παράστασης. Κάθε διαφορετικός τρόπος αναπαράστασης δίνει πληροφορίες για μερικές πλευρές της, αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει πλήρως. Αντίθετα, αλληλοσυμπληρώνονται αφού κάθε μια έκφραση παρουσιάζει και άλλη πλευρά της έννοιας (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998, Gagatsis & Shiakalli, 2004). Συνεπώς, η κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί από μόνη της ως γενικό σύμβολο της έννοιας της συνάρτησης και επομένως δεν αντιπροσωπεύει την έννοια της συνάρτησης, αλλά όλες μαζί συμβάλλουν στη συνολική εννοιολογική αντίληψη της έννοιας αυτής.

Οι μαθητές δυσκολεύονται να συσχετίσουν τις διαφορετικές αυτές αναπαραστάσεις (Duval, 2002, Gagatsis & Shiakalli, 2004) και να περάσουν από τον ένα τρόπο αναπαράστασης στον άλλο, που είναι ύψιστης σπουδαιότητας ικανότητα για τη μάθηση της έννοιας της συνάρτησης, καθώς επίσης και για την επίλυση προβλημάτων (Hitt, 1998, Even, 1998). Σύμφωνα με τον Duval (2002), οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης αποτελούν αυτόνομα και διαχωρισμένα (compartmentalized) μαθηματικά αντικείμενα. Η έλλειψη ελαστικότητας στο χειρισμό των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης αποτελούν ενδείξεις για το φαινόμενο διαχωρισμού που χαρακτηρίζει τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης της συνάρτησης στην εννοιολογική αντίληψη της συνάρτησης που έχουν οι μαθητές. Αυτή αναδείχθηκε από τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν την ομοιότητα μεταξύ ερωτήσεων σε διαφορετικά αναπαραστατικά πλαίσια (Hitt, 1998) ή στη σύνδεση των διαφόρων μορφών αναπαράστασης της συνάρτησης (Elia κ.α., 2007).

Οι μαθητές δυσκολεύονται επίσης να μεταφράσουν τη γραφική παράσταση και να χειριστούν επιδέξια τα σύμβολα που σχετίζονται με τη συνάρτηση όπως $f(x)$, $x \rightarrow y$, $\sin(x + t)$ (Sierpinska, 1992). Σύμφωνα με τη Sierpinska (1992), πολλές από τις δυσκολίες αυτές οφείλονται στις πολλές προαπαιτούμενες μαθηματικές έννοιες και μαθηματικά εργαλεία (μεταβολή, σχέση, μεταβλητή, γενίκευση αριθμών, αναλυτικά και αναπαραστατικά εργαλεία περιγραφής, εξάρτηση και αίτιο) και τις παρανοήσεις ή μη σωστές εννοιολογικές αντιλήψεις που έχουν ήδη οι μαθητές.

Μια άλλη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης προέρχεται από τη διπλή φύση της. Η συνάρτηση μπορεί να γίνει αντιληπτή με δύο διαφορετικούς τρόπους: δομικά ως ένα αντικείμενο και συγκεκριμένα ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη και λειτουργικά ως μια υπολογιστική διαδικασία κατά την οποία δίνοντας τιμή σε μία μεταβλητή (x) εξάγεται η τιμή μιας ποσότητας που εξαρτάται από τη μεταβλητή αυτή ($f(x)$). Αυτοί οι δύο διαφορετικοί τρόποι κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης θα έπρεπε να αλληλοσυμπληρώνονται και να αποτελούν μια συνδεδεμένη μονάδα, όπως οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος (Sfard, 1991). Οι Gray και Tall (1994) επισημαίνουν ότι η σημειογραφία της συνάρτησης, για παράδειγμα $f(x) = 2x + 3$ μας λέει δύο πράγματα την ίδια στιγμή. Πρώτον, πώς να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης για συγκεκριμένες τιμές του ορίσματος (η διαδικασία) και δεύτερον συμπυκνώνει όλη την έννοια της συνάρτησης για κάθε δοσμένη τιμή του ορίσματος (το αντικείμενο).

Η Sierpinska (1992) αναφέρει ότι ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τη μάθηση των συναρτήσεων είναι η γλώσσα που χρησιμοποιείται. Το σύμβολο *f*(x) χρησιμοποιείται για να περιγράψει το όνομα της συνάρτησης, αλλά και την τιμή της συνάρτησης με αποτέλεσμα να μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σε μη εξοικειωμένους με αυτή την έννοια μαθητές.

Στην εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τους όρους *εννοιακός ορισμός* (*concept definition*) και *εννοιακή εικόνα* (*concept image*) (Vinner, 1983) και για αυτό θα δώσουμε πρώτα τους ορισμούς αυτών των όρων.

Εννοιακή Εικόνα (*Concept Image*)

Εννοιακή εικόνα είναι το σύνολο των νοερών αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια που μελετάται κάθε φορά. Η *εννοιακή εικόνα* αναπτύσσεται σταδιακά με τα χρόνια από τις εμπειρίες που έχει το άτομο και από τα ερεθίσματα που δέχεται. Πολλές φορές υπάρχουν συγκρούσεις κατά τη διάρκεια ανάπτυξης της εννοιακής εικόνας λόγω διαφορετικών ερεθισμάτων. Για παράδειγμα, συνήθως συναντάμε την έννοια της αφαίρεσης ως μια διαδικασία που σχετίζεται με τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Σε αυτήν τη βαθμίδα τα παιδιά παρατηρούν ότι η αφαίρεση ενός αριθμού από έναν αρχικό αριθμό μειώνει πάντα τον αρχικό αριθμό. Όταν λοιπόν σε υψηλότερη βαθμίδα δουν κάτι διαφορετικό, τότε αυτό θα τους δημιουργήσει εσωτερικές συγκρούσεις. Βέβαια αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβεί αφού ο εγκέφαλος λειτουργεί διαφορετικά. Αφήνει τις νέες πληροφορίες να εισάγονται και εμποδίζει τους νευρώνες να ανακαλέσουν πληροφορίες που έχουν πολύ καιρό να χρησιμοποιηθούν. Έτσι με τον καιρό αναπτύσσεται η *εννοιακή εικόνα* χωρίς απαραίτητα να προκληθούν εσωτερικές συγκρούσεις. Ως αποτέλεσμα η *εννοιακή εικόνα* μπορεί να περιλαμβάνει αντιφατικές μεταξύ τους νοερές αναπαραστάσεις (Tall & Vinner, 1981).

Εννοιακός Ορισμός (*Concept Definition*)

Εννοιακός ορισμός είναι το σχήμα από λέξεις που χρησιμοποιείται για να δώσει τον ορισμό της έννοιας που μελετάται. Ο *προσωπικός εννοιακός ορισμός*, που μπορεί να διαφέρει από τον *τυπικό εννοιακό ορισμό*, είναι η εκδοχή του μαθητή για τον ορισμό της έννοιας που μελετάται. Ο *εννοιακός ορισμός* είναι μέρος της *εννοιακής εικόνας* και μερικές φορές μπορεί να είναι κενός ή ουσιαστικά να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, ο *εννοιακός ορισμός* της συνάρτησης μπορεί να είναι «Μια σχέση μεταξύ δύο συνόλων Α και Β όπου κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β». Αλλά άτομα τα οποία έχουν διδαχθεί συναρτήσεις μπορεί να θυμούνται ή να μη θυμούνται τον *εννοιακό ορισμό* της συνάρτησης και η *εννοιακή εικόνα* τους μπορεί να περιέχει πολλές άλλες απόψεις, όπως ότι η συνάρτηση δίνεται από έναν κανόνα ή από έναν τύπο, ή ίσως ότι αρκετοί διαφορετικοί τύποι (κλάδοι) μπορεί να χρησιμοποιούνται στα διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού Α. Μπορούν να υπάρχουν κι άλλες απόψεις, όπως ότι η συνάρτηση είναι μια μηχανή που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο α του Α στο f (α) του Β, ή μια γραφική παράσταση, ή ένας πίνακας τιμών.

2.2. Διδασκαλία των Μαθηματικών με χρήση νέων τεχνολογιών

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας έχει επηρεάσει σημαντικά το εκπαιδευτικό σύστημα πολλών ευρωπαϊκών χωρών. Στη χώρα μας βλέπουμε αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα όπου συνιστάται η χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στις οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών τόσο του Γυμνασίου (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, 2007) όσο και του Λυκείου (Οδηγίες Π.Ι., 2007) προτείνεται η χρήση προγραμμάτων όπως το Cabri II, το The Geometer's Sketchpad, το Graphmatica ή το Function Probe και η ενασχόληση με δραστηριότητες που θα καταστήσουν πιο ενεργητικό το ρόλο του μαθητή μέσα στην τάξη και θα διαφοροποιηθεί η διδασκαλία από το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο.

Στο παραδοσιακό μοντέλο (*) ο δάσκαλος των Μαθηματικών αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας τεχνικής, ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση και ασκήσεις και προβλήματα για εφαρμογή. Το κέντρο βάρους εστιάζεται στην απόκτηση εκείνων ακριβώς των δεξιοτήτων που παρουσιάζει ο δάσκαλος στην τάξη, στην ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων. Το μοντέλο λειτουργεί κάτω από την ακόλουθη υπόθεση: Το σύνολο των τεχνικών που διαθέτουν οι μαθητές για να λύνουν ασκήσεις είναι το σώμα των γνώσεων που πρέπει να κατέχουν. Επομένως, η ευχέρεια στις τεχνικές αυτές εκφράζει το αν οι μαθητές έχουν μάθει τα Μαθηματικά ή όχι. Στο μοντέλο αυτό η γνώση είναι προσωπική υπόθεση του κάθε μαθητή, ο οποίος εργάζεται μόνος του, και είναι ανεξάρτητη από αυτόν. Δηλαδή, ο μαθητής και η γνώση είναι δύο «πράγματα» ξεχωριστά, επομένως ο μαθητής δεν μπορεί να την επηρεάσει, το μόνο που του απομένει είναι να τη μάθει. Τέλος, το πρόβλημα και ιδιαίτερα η Λύση Προβλήματος, που αποτελεί την ουσία της Μαθηματικής γνώσης, στο μοντέλο αυτό έχει ένα συγκεκριμένο και περιορισμένο χαρακτήρα, αποτελεί κριτήριο μάθησης: «Σου διδάσκω για παράδειγμα έναν αλγόριθμο και μετά, προκειμένου να διαπιστώσω αν τον έμαθες, θα πρέπει να είσαι ικανός να λύσεις μερικές ή και όλες τις ασκήσεις και τα προβλήματα που βρίσκονται στο τέλος κάθε ενότητας ή κεφαλαίου».

Έχει διαπιστωθεί (*) ότι η μακρόχρονη «θητεία» στην παραδοσιακή διδασκαλία προκαλεί την ανάπτυξη των ακόλουθων στάσεων και πεποιθήσεων στους μαθητές:

• Όλα τα προβλήματα μπορούν να λυθούν το πολύ σε δέκα λεπτά. Αν δεν μπορέσεις να λύσεις ένα πρόβλημα σε δέκα λεπτά, τότε δεν μπορείς να το λύσεις, επομένως πάψε να ασχολείσαι με αυτό.

• Μετά από χρόνια απομνημόνευσης αλγορίθμων, κανόνων και τύπων, οι μαθητές θεωρούν τους εαυτούς τους ως παθητικούς δέκτες γνώσεων, που άλλοι πολύ πιο έξυπνοι από αυτούς τις έχουν ανακαλύψει.

• Για πολλούς μαθητές, ιδιαίτερα όταν ασχολούνται με τη Θεωρητική Γεωμετρία, η απόδειξη δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία «τελετουργική» δραστηριότητα που έχει σκοπό να επιβεβαιώσει αυτό που ήδη είναι γνωστό χιλιάδες χρόνια πριν!

• Τα Μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τον πραγματικό κόσμο.

(*: Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008.)

Ο Τουμάσης (2008) σημειώνει ότι η έρευνα έχει να δώσει ελπιδοφόρα σημάδια για το μέλλον της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Όταν η τεχνολογία ενσωματώνεται στη διδακτική πράξη, τόσο το περιεχόμενο όσο και η παιδαγωγική του μαθήματος των Μαθηματικών υφίστανται αλλαγές, οι οποίες μπορούν να συμβάλλουν στη βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας.

Στην Αυστραλία, τη Β. Αμερική και αρκετές χώρες της Ευρώπης, όπου για πάνω από μια δεκαετία οι υπολογιστές έχουν χρησιμοποιηθεί υποστηρικτικά στην εκπαίδευση των Μαθηματικών (Vale & Leder, 2004), όσον αφορά το γνωστικό τομέα, οι έρευνες δείχνουν ότι η κατάλληλη χρήση των προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας από εκπαιδευμένους εκπαιδευτικούς, με προσεκτικά διαλεγμένες δραστηριότητες, δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν εικασίες, να κάνουν λάθη, να αναστοχαστούν, να μεταφράσουν σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, και να δώσουν προσωρινές μαθηματικές εξηγήσεις, βοηθάει τελικά τους μαθητές να κατακτήσουν την έννοια της απόδειξης (Hanna, 2000).

Η έρευνα σχετικά με τη χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών έχει καταλήξει στα εξής γενικά συμπεράσματα (Leinhart, Zaslavsky & Stein, 1990, McCoy, 1991, Kaput & Thompson, 1994, Becker, Ravitz & Wong, 1999). Κάτω από ορισμένες συνθήκες:

- Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης και συγκεκριμένης επεξεργασίας τους.
- Οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν μια καλύτερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά, ενώ αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες.
- Η διδασκαλία που υποβοηθείται από υπολογιστή είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην άνοδο της επίδοσης ιδιαίτερα των αδύνατων και των πολύ καλών μαθητών.
- Οι μαθητές ολοκληρώνουν την ύλη ταχύτερα με χρήση υπολογιστή απ' ό,τι στην παραδοσιακή διδασκαλία.
- Η διδασκαλία με χρήση Η/Υ συμβάλλει στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Πέρα όμως από τη βελτίωση στο γνωστικό τομέα, οι νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση (Μπαραλός – Πολιτίδου, 2008) κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα:

- Να αυξήσουν και να αλλάξουν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπιδρούν και συνεργάζονται μεταξύ τους και με τους καθηγητές τους.

- Να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της αυτονομίας και την αύξηση του εύρους, του βάθους, της συνθετότητας και της πρωτοτυπίας της σκέψης και της παραγωγής τους.
- Να επιτρέψουν στους μαθητές να αναλάβουν μεγαλύτερη ευθύνη στη μάθηση μέσα σε διδακτικές αίθουσες περισσότερο μαθητοκεντρικές και μαθητοελεγχόμενες.
- Να επιτρέψουν στους μαθητές να συμμετέχουν σε περισσότερο διαφοροποιημένες διδακτικές δραστηριότητες, οι οποίες να ταιριάζουν στα ενδιαφέροντα, τις ανάγκες και τις δυνατότητές τους.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας που έκαναν οι Μπαραλός – Πολιτίδου (2008), σχετικά με τη χρήση υπολογιστών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, φαίνεται ότι βελτιώνονται οι στάσεις των μαθητών σε όλους τους τομείς που ερευνήθηκαν (στην συμπεριφορική εμπλοκή, στη συναισθηματική εμπλοκή, στην αυτοπεποίθηση στους υπολογιστές, στην αυτοπεποίθηση στα Μαθηματικά και στη χρήση υπολογιστών στα Μαθηματικά). Η βελτίωση αυτή ήταν ουσιαστικά σημαντική σε τρεις από τους πέντε αυτούς τομείς (τους τρεις τελευταίους).

2.3. Συναισθηματικοί παράγοντες που επιδρούν στη μάθηση των Μαθηματικών

Η μελέτη θεμάτων του συναισθηματικού τομέα και της σχέσης τους με τα Μαθηματικά έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες (Shoenfeld 1989, McLeod 1992, Philippou & Christou 2000, Goldin 2002, Hannula 2002). Στο συναισθηματικό τομέα εντάσσεται ό,τι έχει σχέση με πράγματα που νιώθουμε (affections), όπως είναι η χαρά, η ευχαρίστηση, η ευαρέσκεια, η αποδοχή, ο φόβος, η απαρέσκεια, η απόρριψη, η οργή, η λύπη, κ.λπ. Στην αρχή το ενδιαφέρον εστιαζόταν στο άγχος και τη φοβία, στη συνέχεια μετατοπίστηκε στις στάσεις και πρόσφατα εστιάζεται στις πεποιθήσεις και τις αξίες (Φιλίππου 2007).

Η προσπάθεια ταξινόμησης των εννοιών του συναισθηματικού τομέα κατέληξε σε τέσσερις βασικές συνιστώσες: τις συγκινήσεις (emotions), τις στάσεις (attitudes), τις πεποιθήσεις (beliefs) και τις αξίες (values). Όπως σημειώνει ο Φιλίππου (2007), οι συγκινήσεις αναφέρονται σε έντονα φορτισμένες καταστάσεις, όπου το άτομο ανησυχεί, ιδρώνει, έχει ταχυπαλμία, κ.λ.π. ή αντίθετα αναπηδά από χαρά. Έχουν μεγάλη ένταση, μειωμένη γνωστική συνιστώσα και μικρή διάρκεια. Οι στάσεις είναι οι τάσεις του υποκειμένου να ανταποκρίνεται περίπου ομοιόμορφα, ευμενώς ή δυσμενώς, έναντι συγκεκριμένων γεγονότων, ατόμων, φορέων ή αντικειμένων (μαθημάτων). Έχουν μέτρια ένταση, ισόρροπη αναλογία γνωστικής και συναισθηματικής συνιστώσας και σχετική μονιμότητα. Τα πιστεύω ή οι πεποιθήσεις είναι οι υποκειμενικές γνώσεις, θεωρίες και αντιλήψεις ενός ατόμου. Περιέχουν αυξημένη γνωστική συνιστώσα, δύσκολα αλλάζουν και είναι υποκειμενικές, με την έννοια ότι το άτομο δεν μπορεί να πείσει με αποδεκτά κριτήρια για το αληθές μιας πεποίθησής του. Αν μπορεί να το πράξει, τότε δεν πρόκειται για πεποίθηση αλλά για γνώση. Οι αξίες προσδιορίζουν το ευρύτερο σύστημα ιδεών και πεποιθήσεων του ατόμου και έχουν να κάνουν με αξιολογήσεις βασικών πτυχών της κοινωνικής και της πολιτισμικής του ζωής. Το σύστημα αξιών διαμορφώνεται μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο και είναι αποτέλεσμα της ιστορικής πορείας μιας κοινωνίας.

Για τις έννοιες αυτές υπάρχουν πολλές απόψεις. Σύμφωνα με τον Goldin (1999), πεποίθηση μπορεί να είναι η πολλαπλά κωδικοποιημένη γνωστική μορφή στην οποία το υποκείμενο αποδίδει μια υψηλή αξία. Σύμφωνα με τον Cooney (1999), πεποίθηση είναι ένα σύνολο από προδιαθέσεις για να κάνει κανείς διάφορα πράγματα κάτω από ποικίλες περιστάσεις. Σύμφωνα με τον McLeod (1992), οι στάσεις αναφέρονται σε συναισθηματικές αντιδράσεις και περιλαμβάνουν θετικά και αρνητικά αισθήματα μέτριας έντασης, αισθητής σταθερότητας και μπορεί να εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα της αυτοματοποίησης μιας επαναλαμβανόμενης συναισθηματικής αντίδρασης στα Μαθηματικά ή σαν αποτέλεσμα της εναρμόνισης μιας ήδη υπάρχουσας στάσης σε ένα νέο αλλά σχετικό έργο.

Σύμφωνα με τον Hannula (2002), η στάση δεν μπορεί να ιδωθεί σαν μια μοναχική ψυχολογική κατασκευή, αλλά σαν μια κατηγορία συμπεριφορών, η οποία προκύπτει από διαφορετικές εκτιμώμενες διαδικασίες. Οι μαθητές μπορεί να εκφράζουν την αγάπη τους ή όχι για τα Μαθηματικά λόγω των συναισθημάτων που αυτά τους προκαλούν, των προσδοκιών ή των αξιών (των μαθητών). Κατά τον Hannula οι στάσεις μπορεί να αλλάξουν κάτω από κατάλληλες συνθήκες.

Η κινητοποίηση (motivation) των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη είναι ένα σημαντικό θέμα που απασχολεί ερευνητές της μαθηματικής κοινότητας αλλά και εκπαιδευτικούς (Hannula 2006, Τουμάσης 1999). Σύμφωνα με τον Hannula (2006), η κινητοποίηση είναι η τάση να κάνεις κάποια πράγματα και να αποφεύγεις να κάνεις κάποια άλλα. Η κινητοποίηση των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη επηρεάζεται από τα συναισθήματά τους απέναντι στα Μαθηματικά. Για να καταλάβουμε τη συμπεριφορά των μαθητών πρέπει να γνωρίζουμε τα κίνητρά τους. Η κινητοποίηση για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να οφείλεται στη σπουδαιότητα του προβλήματος, στην επιμονή του μαθητή, ή στη θλίψη και το θυμό σε περίπτωση αποτυχίας. Τα συναισθήματα είναι άμεσα συνδεδεμένα με την κινητοποίηση, και μπορεί να είναι θετικά: χαρά, ανακούφιση, ενδιαφέρον, ή αρνητικά: θυμός, θλίψη, αγανάκτηση.

Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση κινήτρων μάθησης στα Μαθηματικά παίζει και ο δάσκαλος (Τουμάσης 1999). Σύμφωνα με τον Τουμάση (1999) κάποια κοινά χαρακτηριστικά που καθορίζουν τους αποτελεσματικούς δασκάλους, δηλαδή αυτούς που έχουν την ικανότητα να παροτρύνουν τους μαθητές τους και να προκαλούν το ενδιαφέρον τους για μάθηση είναι:

1. Είναι ενθουσιώδεις: Φροντίζουν να δίνουν αξία σε αυτά που διδάσκουν και με παραδείγματα, να αποδεικνύουν στους μαθητές τους πόσο χρήσιμα είναι. Είναι πειστικοί, ενεργητικοί και παθιασμένοι μέσα στην τάξη με αυτό που κάνουν και με αυτό που διδάσκουν, παρασύροντας και τους μαθητές τους στην περιπέτεια της μάθησης.
2. Είναι καλοί μάνατζερ: Ελέγχουν την τάξη, σχεδιάζουν δραστηριότητες και διατηρούν αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι μαθητές αισθάνονται ασφάλεια, εργάζονται πειθαρχημένα και συγκεντρώνονται στο στόχο.
3. Παρέχουν διορθωτική ανατροφοδότηση στους μαθητές τους: Εντοπίζουν τα λάθη των μαθητών τους και τους προσφέρουν κάθε δυνατή βοήθεια προκειμένου να τα διορθώσουν. Οι μαθητές τους είναι πεπεισμένοι ότι οι δάσκαλοί τους προσπαθούν με κάθε τρόπο να τους βοηθήσουν να βελτιωθούν.
4. Προσφέρουν πολλές ευκαιρίες για αξιολόγηση και απονέμουν δίκαιη βαθμολογία: Οι μαθητές είναι σίγουροι ότι δεν πρόκειται να αιφνιδιαστούν και γνωρίζουν πολύ καλά τα κριτήρια βαθμολογίας. Γνωρίζουν επίσης πώς να προετοιμαστούν και έχουν αρκετές ευκαιρίες προκειμένου να δείξουν τις γνώσεις και τις ικανότητες που κατέχουν.

5. Προκαλούν και παρακινούν τους μαθητές: Βρίσκουν τρόπους να κάνουν το μάθημα ενδιαφέρον και να αξιοποιούν τις δυνατότητες των μαθητών τους στο μέγιστο βαθμό.
6. Ενθαρρύνουν τους μαθητές: Διατυπώνουν σχόλια, είτε προφορικά είτε γραπτά, τα οποία δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιλαμβάνονται ότι η μάθηση είναι το αποτέλεσμα των προσπαθειών τους και ότι είναι οι ίδιοι υπεύθυνοι για την απόκτηση της γνώσης.
7. Δείχνουν ευαισθησία και κατανόηση: Οι αποτελεσματικοί δάσκαλοι δείχνουν ενδιαφέρον για τις απόψεις των μαθητών τους και ευαισθησία για τις ανάγκες και τα προβλήματά τους.
8. Δίνουν αξία στην πραγματική γνώση και όχι μόνο στη βαθμολογία: Με τη στάση και τη συμπεριφορά τους μέσα στην τάξη, όσο και με το διδακτικό τους στυλ, περνάνε το μήνυμα ότι αυτό που αξίζει είναι η μάθηση αυτή καθ’ αυτή και η προσπάθεια για την απόκτησή της. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι οι δάσκαλοι αυτοί δε θα τους υποτιμήσουν ή θα τους απορρίψουν ως άτομα επειδή οι βαθμοί τους ή οι επιδόσεις τους είναι μικρότερες από κάποιων άλλων.

2.4. Η διδασκαλία της συνάρτησης με χρήση νέων τεχνολογιών

Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της συνάρτησης προτείνεται από ερευνητές και παιδαγωγούς (Abu-Naja, 2008, Lagrange, 2005, Faclade, Laborte & Mariotti, 2007, Τουμάσης & Αρβανίτης, 2008). Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της συνάρτησης στη Β΄ Γυμνασίου προτείνεται και από τους συγγραφείς του Βιβλίου του Εκπαιδευτικού (Βλάμος κ.α. 2007, σελ. 33). Εκεί σημειώνεται ότι η διερεύνηση του ρόλου του α, στη συνάρτηση ψ = αx, μπορεί να επιτευχθεί με σαφήνεια με διαδραστικές δραστηριότητες διερευνητικής μορφής στο εργαστήριο υπολογιστών με τη βοήθεια των ειδικών προγραμμάτων (Geometer's Sketchpad – Graphmatica – Function Probe κ.τ.λ.).

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτών των προγραμμάτων είναι η δυναμικότητά τους. Αυτό σημαίνει ότι ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να μετασχηματίζει με το ποντίκι τα σχήματα που δημιουργεί, ενώ διατηρούνται οι γεωμετρικές σχέσεις και οι ιδιότητες της κατασκευής. Έτσι κάθε κατασκευή οδηγεί με φυσικό τρόπο σε γενικεύσεις, καθώς είναι δυνατόν να παρατηρηθούν ποια χαρακτηριστικά μεταβάλλονται και ποια διατηρούνται αμετάβλητα. Για παράδειγμα, σε δραστηριότητα για τη συνάρτηση ψ = αx, οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν το α και να παρατηρούν τι συμβαίνει όταν αυτό είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν χωρίς να χάνονται οι ιδιότητες της κατασκευής. Η ευθεία θα παραμείνει ευθεία για τις διάφορες τιμές του α.

Ο υπολογιστής μας εφοδιάζει με ένα νέο περιβάλλον για τη διερεύνηση της έννοιας της συνάρτησης. Ο Cuoco (1994) ανακάλυψε ότι η προσέγγιση της συνάρτησης μέσω προγραμματισμού στη γλώσσα Logo προσφέρει σημαντικά διαφορετική βαθιά γνώση σε σχέση με την παραδοσιακή προσέγγιση. Όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν χαρτί και μολύβι για τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων, τότε βλέπουν τις συναρτήσεις σαν γεωμετρικά σχήματα και όχι σαν μια διαδικασία με είσοδο x και έξοδο ψ. Από την άλλη, ο προγραμματισμός στη γλώσσα Logo όχι μόνο κάνει εμφανή τη σχέση εισόδου – εξόδου στους μαθητές, αλλά τους κάνει ικανούς να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως ένα αυθύπαρκτο αντικείμενο. Όμοια αποτελέσματα έχουν βρεθεί και από τη χρήση άλλων γλωσσών προγραμματισμού όπως η BASIC, η ISETL (Li & Tall 1993, Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992).

Αυτό δείχνει ότι η παραδοσιακή προσέγγιση της συνάρτησης με έναν τύπο και τη γραφική παράστασή της, είναι γνωστικά διαφορετική από τη προσέγγιση της συνάρτησης με συνολοθεωρητικό τρόπο και διαφορετική από την προσέγγισή της ως μια διαδικασία και ως ένα αντικείμενο (Tall, 1997).

Σύμφωνα με τους Goldenberg, Lewis & O'Keefe (1992), όταν ο υπολογιστής χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τη συνάρτηση, τότε αυτό γίνεται συνήθως γραφικά και ο τρόπος με τον οποίο το γράφημα σχεδιάζεται σαν μια καμπύλη μπορεί να προκαλέσει την εντύπωση στους μαθητές ότι πρόκειται για ένα ενιαίο αντικείμενο. Κάποια προγράμματα, όπως το RandomGrapher (Goldenberg κ.α., 1992), σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση ως συλλογή σημείων της μορφής (x, f(x)), που με κατάλληλες δραστηριότητες κάνει φανερή τη δράση της συνάρτησης να αντιστοιχίζει το x στο f(x).

Σύμφωνα με τους Ferrara, Pratt & Robutti (2006), υπάρχει ομοφωνία ότι η χρήση νέων τεχνολογιών μπορεί να καταστήσει προνομιακές κάποιες μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης εστιάζοντας την προσοχή σε συγκεκριμένες από αυτές τις όψεις (την αναλυτική, τη γραφική και την αριθμητική). Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν με διαισθητικό τρόπο τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης για να κατανοήσουν καλύτερα την αναλυτική αναπαράσταση παρά το αντίστροφο. Υπάρχουν επίσης ενδείξεις ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη διαισθητική προσέγγιση των μαθητών, ώστε να κατανοήσουν και να συνδέσουν τις τρεις όψεις της συνάρτησης. Έχουν γίνει σημαντικές ερευνητικές προσπάθειες να αξιοποιηθούν οι δυνατότητες της τεχνολογίας να προσφέρει πολλαπλά συνδεόμενες αναπαραστάσεις και υπάρχουν ενδείξεις ότι η σύνδεση των αναπαραστάσεων επί της οθόνης μπορεί να υποστηρίξει να γίνουν τέτοιες νοητικές συνδέσεις. Οι ίδιοι τονίζουν ότι η έρευνα της μάθησης με τέτοια εργαλεία δεν μπορεί να αγνοεί το σχεδιασμό αυτών των εργαλείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεθοδολογία

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε όλα όσα κάναμε στο εργαστήριο και την τάξη. Καταρχάς αναφέρουμε τους στόχους που θέλαμε να πετύχουμε με την εφαρμογή αυτή, τους συμμετέχοντες της εφαρμογής και το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήσαμε. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε όλα όσα κάναμε ανά διδακτική ώρα (μάθημα) και εξηγούμε το λόγο για τον οποίο έγιναν με αυτό τον τρόπο, και στο τέλος αξιολογούμε την εφαρμογή. Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε είναι γνωστή στις κοινωνικές επιστήμες ως Έρευνα Δράσης (Action Research, π.χ. Elliott, 1991) και αποτελείται από τέσσερα στάδια: σύλληψη του προβλήματος και σχεδιασμός, εφαρμογή, αξιολόγηση δράσης.

3.1. Σύλληψη του προβλήματος

Η έννοια της συνάρτησης είναι ένα θέμα θεμελιώδους σημασίας στη μαθηματική εκπαίδευση και συγκεντρώνει την προσοχή των εκπαιδευτικών αλλά και της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας γενικότερα εδώ και δεκαετίες (Tall, 1991, Dubinsky & Harel, 1992, Sierpinska, 1992, Vinner & Dreyfus, 1989, Sfard, 1992, Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Η κατανόηση της έννοιας αυτής, αλλά και των Μαθηματικών γενικότερα, επηρεάζεται τόσο από γνωστικούς, όσο και από συναισθηματικούς παράγοντες (Hannula, 2002). Οι γνωστικοί παράγοντες (θα αποτελούν την Α ομάδα στην εργασία) που επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση της έννοιας αυτής, ενώ οι συναισθηματικοί παράγοντες (θα αποτελούν τη Β ομάδα στην εργασία) σχετίζονται με τη στάση (θετική ή αρνητική) των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Στις έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με τους γνωστικούς παράγοντες, που επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, έχουν καταγραφεί οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας αυτής και είναι:

1. Η αδυναμία αντίληψης της συνάρτησης ως μια έννοια με πολλές όψεις-αναπαραστάσεις. Συχνά η συνάρτηση αντιμετωπίζεται αποκλειστικά ως ένας τύπος ή ως ένα γράφημα ή ως ένας πίνακας τιμών (Vinner & Dreyfus, 1989, Dubinsky κ.α., 1992, Sajka, 2003, Elia κ.α., 2006).
2. Η αδυναμία σύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης και της μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (Sierpinska, 1992, Gagatsis & Shiakalli, 2004).

3. Η δυσκολία να μεταφράσουν τη γραφική παράσταση και να χειριστούν επιδέξια τα σύμβολα που σχετίζονται με τη συνάρτηση (Sierpinska, 1992).
4. Η αδυναμία γεφύρωσης της αναλυτικής και της γραφικής αναπαράστασης της συνάρτησης (Sfard, 1992)
5. Η αδυναμία διάκρισης των άγνωστων ποσοτήτων από τις μεταβλητές και των μεταβλητών από τις σταθερές (Sajka, 2003).

Στις έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με τους συναισθηματικούς παράγοντες, που επηρεάζουν την κατανόηση των Μαθηματικών, καταγράφηκαν οι αρνητικές συγκινησιακές καταστάσεις, όπως θλίψη, φόβος, άγχος, θυμός, απέχθεια, που βιώνουν σε μεγάλο βαθμό (οι μαθητές) καθώς ασχολούνται με τα Μαθηματικά (McLeod, 1992).

Ο Hannula (2006) σημειώνει ότι η κινητοποίηση των μαθητών μέσα στη σχολική τάξη επηρεάζεται από τα συναισθήματα τους απέναντι στα Μαθηματικά. Εξηγεί ότι κινητοποίηση είναι η τάση να κάνεις κάποια πράγματα και να αποφεύγεις να κάνεις κάποια άλλα. Για να καταλάβουμε τη συμπεριφορά των μαθητών πρέπει να γνωρίζουμε τα κίνητρά τους. Η κινητοποίηση για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να οφείλεται στη σπουδαιότητα του προβλήματος, στην επιμονή του μαθητή, ή στη θλίψη και το θυμό σε περίπτωση αποτυχίας. Τα συναισθήματα είναι άμεσα συνδεδεμένα με την κινητοποίηση, και μπορεί να είναι θετικά: χαρά, ανακούφιση, ενδιαφέρον, ή αρνητικά:

θυμός, θλίψη, αγανάκτηση. Κατά τον Hannula (2002) οι στάσεις των μαθητών μπορεί να αλλάξουν κάτω από κατάλληλες συνθήκες.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση που αφορά στην εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης μέσα στα πλαίσια μαθημάτων στηριζόμενων και στην τεχνολογία με στόχο να ξεπεραστούν οι γνωστικές δυσκολίες, που αναφέραμε παραπάνω, αλλά και να βελτιώσουμε τη σχέση των μαθητών με τα Μαθηματικά.

3.2. Σχεδιασμός της διδακτική εφαρμογής σε μαθητές της Β΄ Γυμνασίου

Η διδακτική εφαρμογή πραγματοποιήθηκε τη σχολική χρονιά 2007 – 2008 σε ένα τμήμα της Β΄ Γυμνασίου που αποτελούνταν από 22 μαθητές (15 αγόρια και 7 κορίτσια).

3.2.1. Σχεδιασμός διδασκαλίας – Πλαίσιο εφαρμογής

Η διδασκαλία λάμβανε χώρο άλλοτε στο εργαστήριο της Πληροφορικής και άλλοτε στην τάξη, ανάλογα με το αντικείμενο μελέτης. Τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διδασκαλία στην τάξη ήταν ο πίνακας, τα φύλλα εργασίας και το σχολικό βιβλίο, ενώ κατά τη διδασκαλία στο εργαστήριο χρησιμοποιήθηκαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, εφοδιασμένοι με το πρόγραμμα Δυναμικής Γεωμετρίας EucliDraw 2.2.7, ο προβολέας, τα φύλλα εργασίας και ο πίνακας. Το βιβλίο που χρησιμοποιήθηκε είναι τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ του ΟΕΒΔ (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007) και το κεφάλαιο στο οποίο αναφερόμαστε είναι το τρίτο με τίτλο *Συναρτήσεις*. Η σειρά με την οποία διδάχθηκαν οι παράγραφοι του κεφαλαίου αυτού είναι διαφορετική από αυτήν που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο και ο λόγος για τον οποίο έγινε αυτό θα αναλυθεί παρακάτω.

3.2.2. Παρουσίαση του περιεχομένου του 3ου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου

Το 3ο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου (Βλάμος κ.α., 2007, σελ. 55 – 82) αποτελείται από πέντε (5) παραγράφους για τη διδασκαλία των συναρτήσεων και είναι:

1. Η έννοια της συνάρτησης
2. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης
3. Η συνάρτηση $\psi = \alpha x$
4. Η συνάρτηση $\psi = \alpha x + \beta$
5. Η συνάρτηση $\psi = \alpha/x$ – Η υπερβολή

1. Στην πρώτη παράγραφο δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης, παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων ο τρόπος με τον οποίο εκφράζουμε ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου και ο τρόπος με τον οποίο συμπληρώνουμε τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.
2. Στη δεύτερη παράγραφο μελετώνται οι καρτεσιανές συντεταγμένες, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου και ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του. Παρουσιάζεται επίσης ο τρόπος εύρεσης των συντεταγμένων του συμμετρικού ενός σημείου, ως προς τους άξονες και ως προς την αρχή των αξόνων και ο τρόπος υπολογισμού της απόστασης μεταξύ δύο σημείων με γνωστές συντεταγμένες. Ακολουθεί η σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

3. Στην τρίτη παράγραφο συναντάμε τα ανάλογα ποσά, γίνεται η σύνδεσή τους με τη συνάρτηση με τύπο ψ = αx και τη γραφική παράσταση αυτής. Η παράγραφος ολοκληρώνεται με την κλίση της ευθείας με εξίσωση ψ = αx.
4. Στην τέταρτη παράγραφο παρουσιάζεται η συνάρτηση με τύπο ψ = αx + β. Η παράγραφος ξεκινά με τη σχεδίαση της ευθείας με εξίσωση ψ = αx + β και ολοκληρώνεται με τη σύγκριση αυτής της ευθείας, για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής β, και της ευθείας με εξίσωση ψ = αx.
5. Τέλος η πέμπτη παράγραφος αφορά στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και την υπερβολή και δίνει έμφαση στις συμμετρίες που παρουσιάζουν οι κλάδοι της γραφικής παράστασής της.

Όπως ανέφερα παραπάνω, η σειρά με την οποία διδάχθηκαν οι παράγραφοι του κεφαλαίου αυτού είναι διαφορετική από αυτήν που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο. Συγκεκριμένα, μετά τη διδασκαλία της παραγράφου 3.1 για την έννοια της συνάρτησης, δεν προχωρήσαμε στην παράγραφο 3.2, αλλά μελετήσαμε τα ανάλογα ποσά και τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών. Έπειτα, στο επόμενο μάθημα, προχωρήσαμε στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και τη σχέση που συνδέει τις τιμές των αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στη συνέχεια, αφού οι μαθητές θυμήθηκαν αυτές τις έννοιες, που τις είχαν πρωτοσυναντήσει στο Δημοτικό και είχαν επαναλάβει στην Α΄ τάξη Γυμνασίου, προχωρήσαμε στην παράγραφο 3.2 για τις καρτεσιανές συντεταγμένες και τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Αυτή η αλλαγή έγινε για να έχουμε ολοκληρώσει τη διδασκαλία της θεωρίας των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να μπορούμε στη συνέχεια στο εργαστήριο να μελετήσουμε συνολικά τις γραφικές παραστάσεις χωρίς διακοπή. Επίσης στη διδασκαλία δώσαμε έμφαση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, που παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό της, κάτι που δεν αναφέρει καθόλου το σχολικό βιβλίο. Αυτό έγινε από τη μια για να μη δημιουργηθεί η εντύπωση ότι ασχολούμαστε πάντα με τους πραγματικούς αριθμούς ή τους ακέραιους ή κάποιο άλλο σύνολο αριθμών και από την άλλη για να δουν οι μαθητές πως αλλάζει η γραφική παράσταση ανάλογα με το πεδίο ορισμού.

3.2.3 Στόχος της εφαρμογής

Γενικός σκοπός μας με την εφαρμογή αυτή είναι η διδασκαλία των συναρτήσεων με τρόπο τέτοιο ώστε να μην υπάρξουν οι παραπάνω γνωστικές δυσκολίες, αλλά και η ενίσχυση της σχέσης των παιδιών με τα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1, με την εφαρμογή αυτή επιδιώκουμε οι μαθητές:

	Στόχος	**Παράγραφος στην οποία αναφέρεται**
Α1.	Να αποκτήσουν μια πλήρη εικόνα της έννοιας της συνάρτησης.	
Α2.	Να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.	3.1
Α3.	Να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας	3.1

	συνάρτησης.	
Α4.	Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν μόνοι τους έναν τρόπο για τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο.	3.2
Α5.	Να βρίσκουν ένα σημείο, όταν δίνονται οι συντεταγμένες του και το αντίστροφο.	3.2
Α6.	Να υπολογίζουν την απόσταση ενός σημείου από τους άξονες x΄x και ψ΄ψ.	3.2
Α7.	Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν μόνοι τους τρόπο για να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων.	3.2
Α8.	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών.	3.2
Α9.	Να βρίσκουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης.	3.2
Α10.	Να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.	3.2
Α11.	Να διακρίνουν τη σωστή γραφική παράσταση μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων, που έχουν τον ίδιο τύπο και διαφορετικό πεδίο ορισμού, όταν τους δίνεται το πεδίο ορισμού.	3.2
Α12.	Να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών.	3.3
Α13.	Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τον ρόλο του α στη	3.3

	συνάρτηση με τύπο ψ = αx.	
Α14.	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τύπο της μορφής ψ = αx.	3.3
Α15.	Να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν γνωρίζουν την κλίση της.	3.3
Α16.	Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τον ρόλο του β στη συνάρτηση με τύπο ψ = αx + β.	3.4
Α17.	Να περιγράφουν τις αλλαγές που θα προκύψουν στο γράφημα μιας συνάρτησης, με τύπο της μορφής ψ = αx + β, όταν αλλάξει η τιμή των α, β.	3.4
Α18.	Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τη σχέση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων της μορφής ψ = αx και ψ = αx + β για την ίδια τιμή του α.	3.4
Α19.	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τύπο της μορφής ψ = αx + β.	3.4
Α20.	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τύπο της μορφής ψ = αx + β, όταν τους δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο ψ = αx για την ίδια τιμή του α, αλλά και το αντίστροφο.	3.4
Α21.	Να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.	3.5
Α22.	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση	3.5

	της συνάρτησης με τύπο $\psi = \frac{\alpha}{x}$.	
Α23.	Να γνωρίζουν το ρόλο του α για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $\psi = \frac{\alpha}{x}$.	3.5
Οι στόχοι Α 2, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23 προκύπτουν από το Βιβλίο του Εκπαιδευτικού (Βλάμος κ.α., 2007).		

Πίνακας 3.1: Στόχοι της εφαρμογής

Επίσης με την εφαρμογή αυτή επιδιώκουμε να αλλάξουμε τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, επιδιώκουμε:

Β1. Να κάνουμε πιο ενεργό το ρόλο των μαθητών μέσα στην τάξη μέσω της συμμετοχής τους.

Β2. Να προκαλέσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών με δραστηριότητες που θα τους εντυπωσιάσουν.

Β3. Να βοηθήσουμε τους μαθητές που έχουν αποστασιοποιηθεί από το μάθημα για παράδειγμα λόγω κάποιων άσχημων εμπειριών με τα Μαθηματικά να τα απομυθοποιήσουν και να τους ενθαρρύνουμε να ασχοληθούν ξανά χωρίς το φόβο της αποτυχίας.

Β4. Οι μαθητές να δουν ότι και οι ίδιοι μπορούν να ανακαλύψουν κάτι νέο στα Μαθηματικά και ότι αυτό δεν είναι υπόθεση μόνο των προικισμένων στα Μαθηματικά.

Β5. Οι μαθητές να δουν ότι κάνοντας Μαθηματικά μπορούν να διασκεδάσουν και να ξεφύγουν από την αντίληψη ότι είναι ένα βαρετό και δύσκολο μάθημα που δεν το καταλαβαίνει κανείς.

Β6. Οι μαθητές να δουν ότι τα Μαθηματικά συνδέονται και με άλλους τομείς, όπως η Πληροφορική.

Β7. Να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να δουλεύουν συλλογικά με σκοπό την επίτευξη ενός στόχου.

Τους στόχους αυτούς επιδιώκουμε να πετύχουμε με την υλοποίηση της κάθε δραστηριότητας σε κάθε εργαστηριακό μάθημα στο εργαστήριο Πληροφορικής.

3.2.4 Οι συμμετέχοντες

Η διδακτική εφαρμογή πραγματοποιήθηκε κατά το μήνα Μάρτιο της σχολικής χρονιάς 2007 – 2008 σε ένα τμήμα της Β΄ τάξης ενός Γυμνασίου της Κρήτης. Το τμήμα αποτελούνταν από 15 μαθητές και 7 μαθήτριες, από τους οποίους 1 μαθητής και 4 μαθήτριες είναι αλλοδαποί. Όλοι γνώριζαν ικανοποιητικά την ελληνική γλώσσα, οπότε δεν είχαμε πρόβλημα επικοινωνίας. Στο τμήμα υπήρχαν λίγοι μαθητές με ευχέρεια στα Μαθηματικά, ενώ οι περισσότεροι είχαν πολλές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Λίγοι από αυτούς έδειχναν ενδιαφέρον για το μάθημα, ενώ οι περισσότεροι ήταν αδιάφοροι και υπήρχαν και κάποιοι μαθητές που εκδήλωναν αρνητική στάση για το μάθημα (αλλά και για τα άλλα μαθήματα).

Επιλέχθηκε το συγκεκριμένο τμήμα γιατί αφενός ήταν το μοναδικό στο οποίο δίδασκα εγώ τα Μαθηματικά και συνεπώς γνώριζα τους μαθητές και αφετέρου γιατί θέλαμε να δούμε τι αποτελέσματα θα φέρει μια τέτοια διδακτική εφαρμογή σε ένα «δύσκολο» τμήμα και πόσο πολύ μπορεί να αλλάξει η στάση τέτοιων μαθητών για το μάθημα των Μαθηματικών.

Στην εφαρμογή αυτή συνεργαστήκαμε με την καθηγήτρια Πληροφορικής του σχολείου. Η Πληροφορικός είχε τον έλεγχο και το συντονισμό της τάξης, ώστε ολόκληρο το τμήμα να συμβαδίζει με αυτά που κάναμε. Η Πληροφορικός είχε επίσης τον έλεγχο του εργαστηρίου και ήταν υπεύθυνη για τη σωστή λειτουργία όλων των μηχανημάτων (Η/Υ των μαθητών, κεντρικού υπολογιστή, προβολέα), την εγκατάσταση του προγράμματος σε όλους τους υπολογιστές και τον έλεγχο της σωστής λειτουργίας του. Επίσης, ήταν υπεύθυνη για τη διδασκαλία των εντολών του προγράμματος στους μαθητές και την παροχή επεξηγήσεων σε αυτούς, όποτε αυτό ήταν απαραίτητο, αφού είναι η πλέον κατάλληλη για να μάθει στους μαθητές πώς να χειρίζονται ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή με το γρηγορότερο και αποδοτικότερο τρόπο. Εκτός αυτών όμως, η Πληροφορικός βοηθούσε τους μαθητές και τους έλυνε απορίες και στα Μαθηματικά αφού έχει και πτυχίο Μαθηματικών.

3.2.5 Το ηλεκτρονικό περιβάλλον

Το λογισμικό με το οποίο δημιουργήσαμε εργαλεία για τη διδασκαλία της συνάρτησης είναι το διερευνητικό λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας EucliDraw. Το EucliDraw είναι ένα υπολογιστικό σύστημα κατασκευής και άμεσου χειρισμού γραφικών αναπαραστάσεων γεωμετρικών αντικειμένων. Η αρχιτεκτονική του στηρίζεται στη φιλοσοφία της

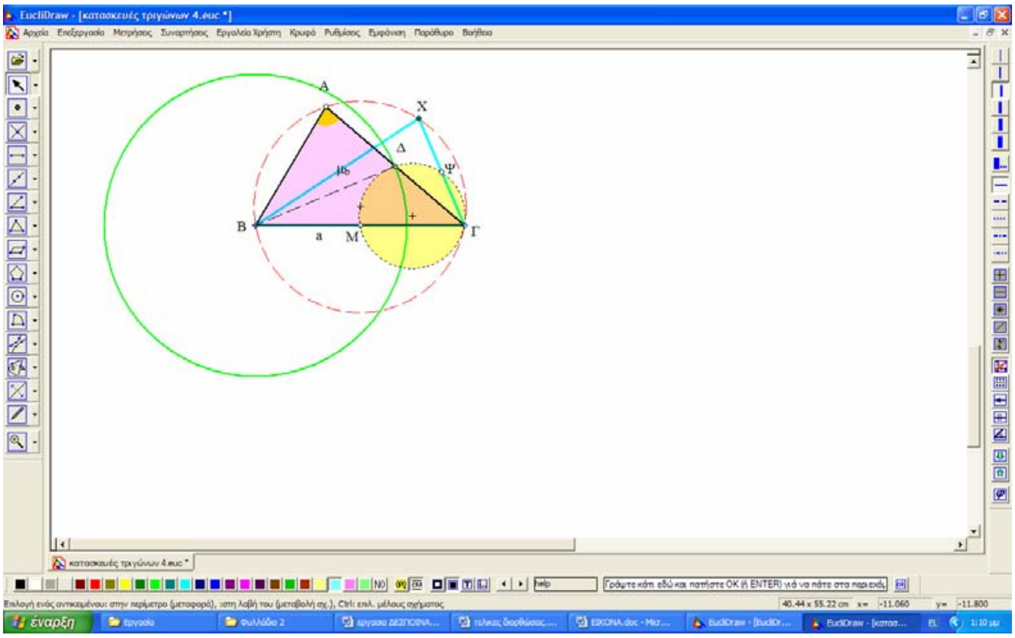
Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αντανακλά την πρόθεση του αρχιτέκτονα δημιουργού του, Πάρη Πάμφιλου, για εμπλοκή «σ' αυτό το θαυμάσιο παιχνίδι που τυποποιήθηκε από τον Ευκλείδη».

Πρόκειται για ένα πρόγραμμα κατασκευής σχημάτων, που επιτρέπει τη δυναμική μεταβολή τους καθώς ο χρήστης αλλάζει διάφορες παραμέτρους.

Το πρόγραμμα ξεκίνησε με το όνομα Isoptikon© στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Η πρώτη έκδοση αυτού δημοσιεύθηκε το 1999, σε ελεύθερη διάθεση και κυκλοφόρησε εκτεταμένα στο διαδίκτυο. Το EucliDraw©, εν συντομία EUC, είναι μια εξέλιξη του Isoptikon©. Διαφέρει όμως απ' αυτό σε πολλά σημεία. Η λειτουργικότητα του έχει επεκταθεί σημαντικά και τώρα, μεταξύ άλλων, καλύπτει: στοιχειώδη σχήματα, όπως ευθείες, κύκλους, τρίγωνα, κλπ., αλλά και πιο σύνθετα, όπως κωνικές τομές, συναρτήσεις, παραμετρικές καμπύλες, γεωμετρικούς τόπους, περιβάλλουσες.

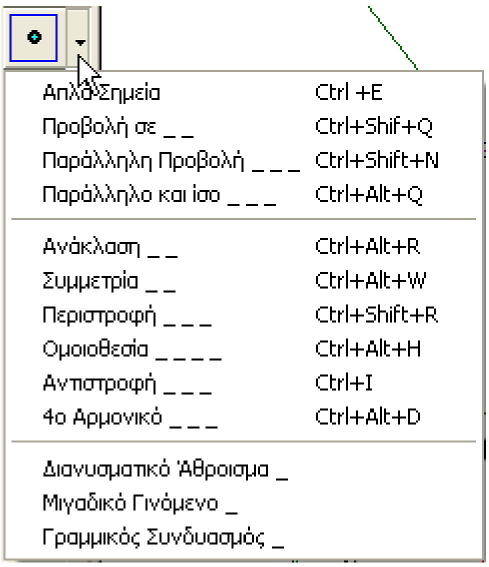
Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στους μετασχηματισμούς, καθώς και στην επεκτασιμότητα, μέσω εργαλείων οριζόμενων από το χρήστη. Γι' αυτό το σκοπό έχει ενσωματωθεί στο πρόγραμμα μια ειδική γλώσσα και ένα αντίστοιχο περιβάλλον προγραμματισμού και κατασκευής σχημάτων μέσω σκριπτ. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται από το EucliDraw, ονομάστηκε *EUCLA* και είναι μια παραλλαγή της γλώσσας προγραμματισμού C. Όλα τα σχήματα έχουν δυνατότητα *δυναμικής* *αλλαγής*, πράγμα που οδηγεί σε ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις και ανακάλυψη νέων ιδιοτήτων.

Στην Εικόνα 3.0.1 βλέπουμε το περιβάλλον σχεδίασης του προγράμματος. Στα αριστερά υπάρχει η κύρια λωρίδα εργαλείων. Αυτή περιέχει ένα κουμπί για κάθε κύριο εργαλείο του προγράμματος. Τα κύρια εργαλεία κατασκευάζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα όπως: σημεία, ευθείες, τρίγωνα, κύκλους κτλ.



Εικόνα 3.0.1. Το περιβάλλον Σχεδίασης

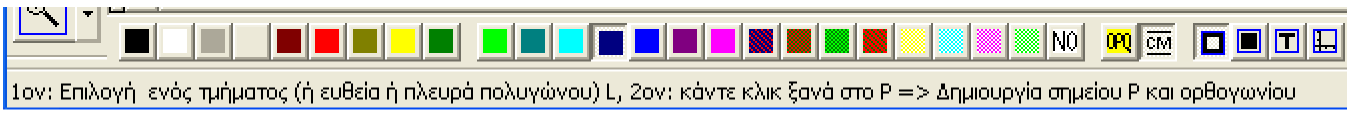
Δίπλα σε κάθε κουμπί υπάρχει ένα μικρό βέλος μέσω του οποίου εμφανίζεται ένα μενού με πρόσθετα εργαλεία σχετιζόμενα με το κύριο εργαλείο του κουμπιού. Για παράδειγμα, η επόμενη Εικόνα 3.0.2 περιέχει το μενού με τα δευτερεύοντα εργαλεία για τα σημεία.



Εικόνα 3.0.2. Μενού δευτερευόντων εργαλείων

Κάθε λήμμα αυτού του μενού ορίζει ένα εργαλείο, το οποίο κατασκευάζει ένα σημείο σύμφωνα με μία σαφώς καθορισμένη συνταγή.

Στο κάτω μέρος της οθόνης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.0.1, εμφανίζεται η λωρίδα κατάστασης. Αυτή περιέχει βοηθητικές υποδείξεις, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.0.3, για το παρόν ενεργό εργαλείο στο σχεδιαστικό περιβάλλον. Είναι ένα πολύ χρήσιμο βοήθημα που συχνά επαρκεί πλήρως για την επιτυχή χρήση του εργαλείου. Υπάρχει επίσης η λωρίδα χρώματος και δεξιά από τα χρώματα υπάρχουν τα πλήκτρα που καθορίζουν πού θα επιδρά αυτή η αλλαγή. Αυτή μπορεί να επιδρά στα περιγράμματα των αντικειμένων, στο εσωτερικό των αντικειμένων, στο χρώμα των γραμμάτων στα κουτιά κειμένου ή τέλος μπορεί να επιδρά στους άξονες/πλέγμα.



Εικόνα 3.0.3 Λωρίδα χρώματος και λωρίδα κατάστασης

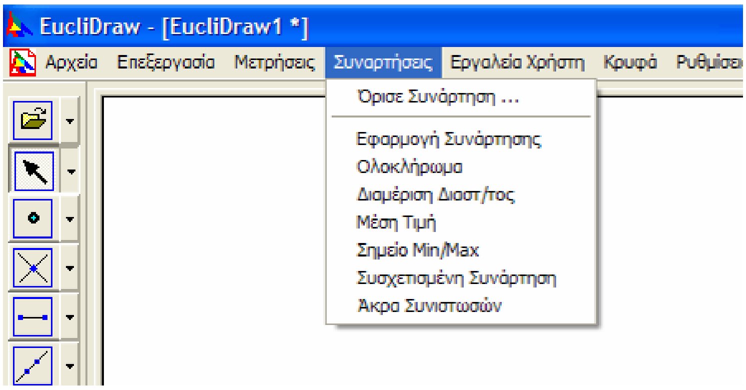
Στα δεξιά της οθόνης (δες Εικόνα 3.0.1) εμφανίζεται η λωρίδα πάχους/στιλ γραμμών και πράξεων. Τα πρώτα επτά κουμπιά, αυτής της λωρίδας είναι εκείνα με τα οποία μπορούμε να ορίσουμε το πάχος των ευθειών και των περιγραμμάτων των σχημάτων. Τα πάχη είναι διαδοχικά, 1, 2, 3, 4 ,5 και 6. Το $7^{ο}$ κουμπί, εμφανίζει ένα διάλογο, μέσω του οποίου μπορούμε να ορίσουμε μια αυθαίρετη (μεταξύ 1 και 255), τιμή για το πάχος της πέννας.

Τα επόμενα πέντε κουμπιά ορίζουν το στιλ της γραμμής. Παρατηρήστε ωστόσο, ότι οι διακεκομμένες γραμμές, μπορούν να έχουν πλάτος 1 εικονοστοιχείο (pixel) μόνο. Έτσι, πιέζοντας κάποιο απ' αυτά τα πλήκτρα στιλ, αλλάζετε επίσης το πλάτος γραμμής σε ένα εικονοστοιχείο.

Τα επόμενα πέντε κουμπιά ορίζουν τα εργαλεία των αριθμητικών πράξεων και συγκεκριμένα της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμου, της διαίρεσης και του ποσοστού επί τοις εκατό. Αριθμητικές πράξεις μπορούν να γίνουν μεταξύ δύο αντικειμένων-αριθμών. Το αποτέλεσμα είναι ένα άλλο αντικείμενο-αριθμός.

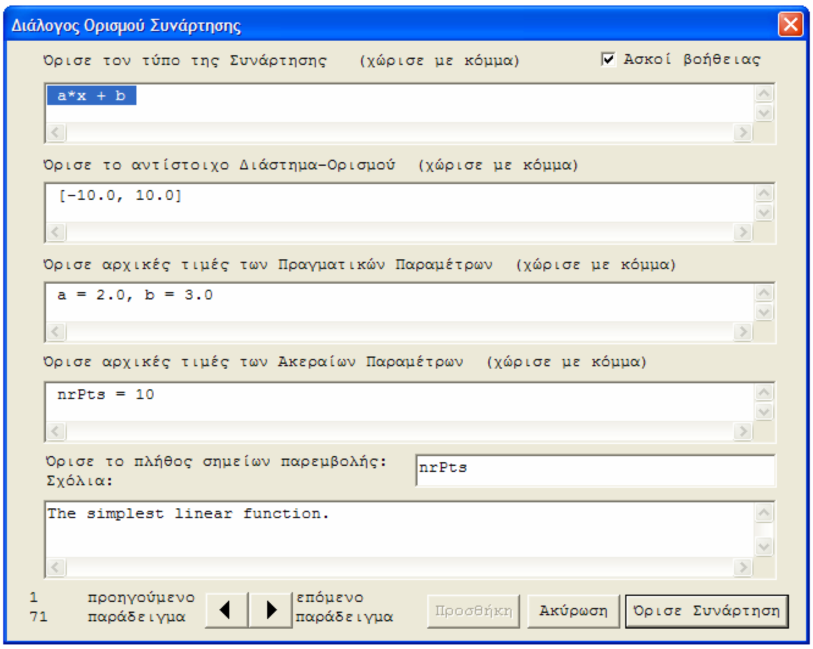
Τα επόμενα κουμπιά κάνουν τα παρακάτω:

Το 1^{o} εμφανίζει - αποκρύπτει τους άξονες. Το 2^{o} εμφανίζει αποκρύπτει το πλέγμα. Το 3^{o} επιλέγει το εργαλείο Βελών, για να ορίσουμε κεφαλές βελών σε ευθείες και τόξα. Το 4^{o} επιλέγει το εργαλείο μαρκαρίσματος πλευράς για να ορίσουμε σημάδια σε πλευρές/ευθείες. Το 5^{o} επιλέγει το εργαλείο μαρκαρίσματος τόξων για να ορίσουμε σημάδια σε γωνίες. Το 6^{o} κάνει ένα επιλεγμένο αντικείμενο πρώτο στον κατάλογο αντικειμένων του εγγράφου. Το 7^{o} κάνει ένα επιλεγμένο αντικείμενο τελευταίο στον κατάλογο αντικειμένων του εγγράφου. Το 8^{o} είναι διακόπτης αλλαγής γραμματοσειράς σε μαθηματικά σύμβολα.



Εικόνα 3.0.5. Ορισμός συνάρτησης

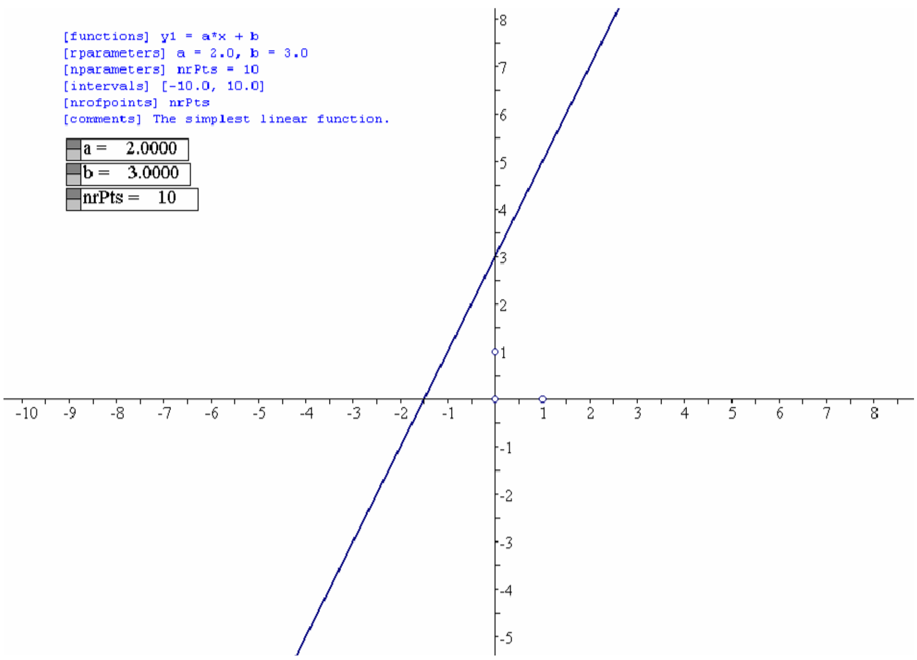
Εκτός από τις παραπάνω εντολές υπάρχουν και άλλες που βρίσκονται στην οριζόντια λωρίδα μενού στο πάνω μέρος της οθόνης (δες Εικόνα 3.0.4). Εκεί υπάρχει και ο διάλογος ορισμού συναρτήσεων (δες Εικόνα 3.0.5 και 3.0.6) με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση για να μας την σχεδιάσει.



Εικόνα 3.0.6. Ο διάλογος ορισμού συνάρτησης

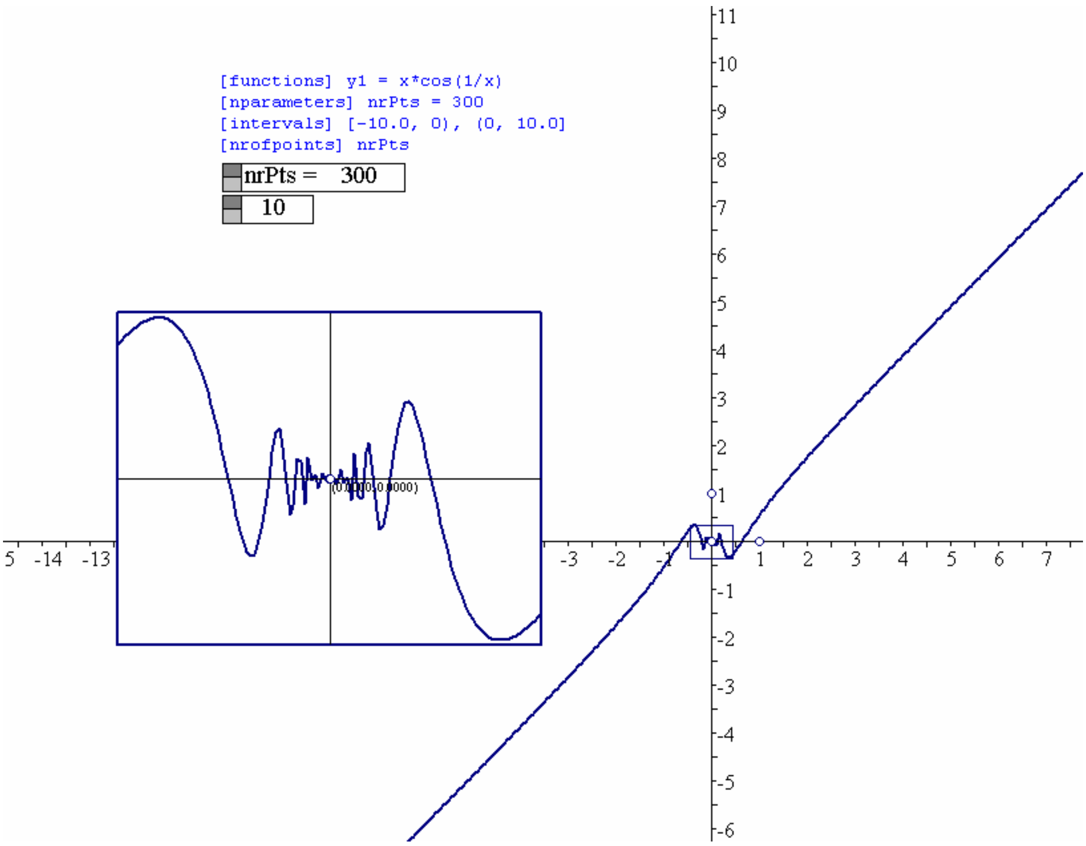
Στο πρώτο πεδίο του διαλόγου ορισμού συνάρτησης γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης όπως ακριβώς και σε μια γλώσσα προγραμματισμού. Στο δεύτερο πεδίο γράφουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στο τρίτο πεδίο δίνουμε τις αρχικές τιμές των παραμέτρων, αν υπάρχουν παράμετροι, τις οποίες μπορούμε να μεταβάλλουμε μετά τη σχεδίαση του γραφήματος. Στο τέταρτο πεδίο γράφουμε το πλήθος των σημείων παρεμβολής που θέλουμε να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή της γραφικής παράστασης. Όσο περισσότερα είναι τα σημεία παρεμβολής, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Τέλος, πατώντας το κουμπί του διαλόγου «Όρισε συνάρτηση», εγκαταλείπεται ο διάλογος και εμφανίζεται στην οθόνη η γραφική παράσταση της συνάρτησης, ένας πίνακας με τα δεδομένα (τύπος συνάρτησης, αρχικές τιμές παραμέτρων κ.α.) που γράψαμε στο διάλογο και ένας πίνακας με τα στοιχεία που μπορούμε να μεταβάλλουμε (τιμές παραμέτρων, πλήθος σημείων παρεμβολής κ.α.). Η παρακάτω Εικόνα 3.0.7 δείχνει ένα τυπικό παράδειγμα:



Εικόνα 3.0.7. Παράδειγμα σχεδίασης γραφικής παράστασης συνάρτησης

Μια άλλη εντολή που χρησιμοποιούμε στην εργασία είναι η μεγέθυνση σε ορθογώνιο. Η εντολή αυτή βρίσκεται στην κύρια λωρίδα εργαλείων στο τελευταίο κουμπί. Στη μεγέθυνση σε ορθογώνιο επιλέγουμε το σημείο γύρω από το οποίο θέλουμε να μεγεθύνουμε και το συντελεστή μεγέθυνσης. Τέλος, με το σύρσιμο του ποντικιού δημιουργούμε το ορθογώνιο στο οποίο θα εμφανίζεται η μεγεθυμένη εικόνα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.0.8 παρακάτω.



Εικόνα 3.0.8. Χρήση του ορθογωνίου μεγέθυνσης

Επίσης, για την ευκολότερη χρήση του προγράμματος υπάρχει η Βοήθεια Χρήστη, όπου εξηγούνται αναλυτικά όλα όσα χρειάζεται κανείς για να χρησιμοποιήσει τα εργαλεία που θέλει.

3.3 Υλοποίηση της εφαρμογής

Η διδασκαλία του κεφαλαίου ολοκληρώθηκε σε δεκαπέντε (15) μαθήματα, που το κάθε μάθημα αντιστοιχεί σε μία διδακτική ώρα, από τα οποία τα έξι (6) πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής και τα υπόλοιπα εννιά (9) πραγματοποιήθηκαν στην τάξη. Αναλυτικά έγιναν τα εξής:

1ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Δόθηκε προς επίλυση στους μαθητές το πρώτο πρόβλημα του Φύλλου Εργασίας 1 (δες Παράρτημα Α) για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης, το οποίο περιέγραφε δύο ανάλογα ποσά. Στο πρώτο ερώτημα τους δόθηκε η τιμή του ενός ποσού και τους ζητήθηκε η τιμή του άλλου, όπου χρειαζόταν η πράξη του πολλαπλασιασμού για να το υπολογίσουν. Στο δεύτερο ερώτημα τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών με αυτά τα ποσά, στο τρίτο ερώτημα τους ζητήθηκε να εκφράσουν το ένα ποσό ως συνάρτηση του άλλου και στο τέταρτο ερώτημα τους δόθηκε η τιμή του ενός ποσού και τους ζητήθηκε να βρουν τη τιμή του άλλου, όπου χρειαζόταν η πράξη της διαίρεσης για να το υπολογίσουν.
Στόχος σε αυτό το μάθημα είναι οι μαθητές να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου (Στόχος Α2 του Πίνακα 3.1).

Ακολούθησε συζήτηση σχετικά με αυτήν την αντιστοίχιση αριθμών και ο ορισμός της συνάρτησης. Έπειτα μελετήσαμε το δεύτερο πρόβλημα του ίδιου Φύλλου Εργασίας του οποίου το περιεχόμενο ήταν όμοιο με του πρώτου προβλήματος. Η σημαντική διαφορά είναι ότι το πεδίο ορισμού αλλά και το σύνολο τιμών της συνάρτησης, που περιγράφεται στο δεύτερο πρόβλημα, είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ στο πρώτο πρόβλημα είναι μόνο οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τις οδηγίες του Βιβλίου του Εκπαιδευτικού (Βλάμος κ.α., 2007). Ωστόσο χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά προβλήματα από αυτά του σχολικού βιβλίου, διότι σε αυτά περιγράφονται συνεχώς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Έχουμε προβλήματα σχετικά με χρήματα, κιλά, μήκη πλευρών, εμβαδόν επίπεδων σχημάτων, ταχύτητα, απόσταση και ημέρες με κίνδυνο να δημιουργούνται λανθασμένες εντυπώσεις για το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων.

2ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Δόθηκε προς επίλυση στους μαθητές το πρόβλημα 3 του Φύλλου Εργασίας 1, που περιείχε ένα διάλογο μεταξύ δύο ανθρώπων. Το πρόβλημα αποτελούνταν από τρία ερωτήματα και τα ποσά που περιγράφονταν δεν ήταν ανάλογα. Στο πρώτο ερώτημα τους ζητήθηκε να εκφράσουν ένα μέγεθος ψ ως συνάρτηση ενός άλλου x από τα δεδομένα του προβλήματος. Στο δεύτερο ερώτημα τους ζητήθηκε να υπολογίσουν την τιμή του μεγέθους ψ και τους δίνονταν η τιμή του x, ενώ στο τρίτο ερώτημα τους δόθηκε η τιμή του μεγέθους ψ και τους ζητήθηκε να βρουν την τιμή του μεγέθους x.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου (Στόχος Α2), αλλά και να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης (Στόχος Α3).

<u>3ο Μάθημα</u>: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Αρχίσαμε με μια επανάληψη της έννοιας της συνάρτησης. Στη συνέχεια, η συνάρτηση παρουσιάστηκε ως μια μηχανή εισόδου-εξόδου (Tall, McGowen & DeMarois, 2000), όπου της δίνεις τιμές από ένα σύνολο, σου υπολογίζει με βάση τον κανόνα που της έχεις ορίσει και έπειτα σου δίνει το αποτέλεσμα. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα άλλο σύνολο. Με αυτή την αναπαράσταση της συνάρτησης ως μηχανής εισόδου-εξόδου οπτικοποιούμε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, αλλά και τη διεργασία.

Έπειτα συζητήσαμε τη λειτουργία της μηχανής μέσα από συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης και δώσαμε έμφαση στην αντιστοιχία τιμών που προκύπτει ύστερα από τη δράση της μηχανής.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν το ερώτημα Ε του προβλήματος 2 του Φύλλου Εργασίας 1, το οποίο είχε δοθεί ως άσκηση για το σπίτι, αφού δεν είχαμε προλάβει να το λύσουμε μέσα στην τάξη. Συνεχίσαμε με το πρόβλημα 1 του Φύλλου Εργασίας 2 (δες Παράρτημα Α), όπου παρουσιάζονται δύο ανάλογα ποσά. Αφού οι μαθητές δούλεψαν τα ερωτήματα Α και Β, ολοκληρώσαμε το μάθημα κάνοντας μια επανάληψη στα ανάλογα ποσά, που τα είχαν διδαχθεί στην προηγούμενη τάξη, αλλά και στο δημοτικό. Δόθηκε ο ορισμός των ανάλογων ποσών και συζητήθηκε αν διάφορα ποσά είναι ανάλογα ή όχι, όπως το ύψος με το βάρος ενός ανθρώπου.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών (Στόχος Α12).

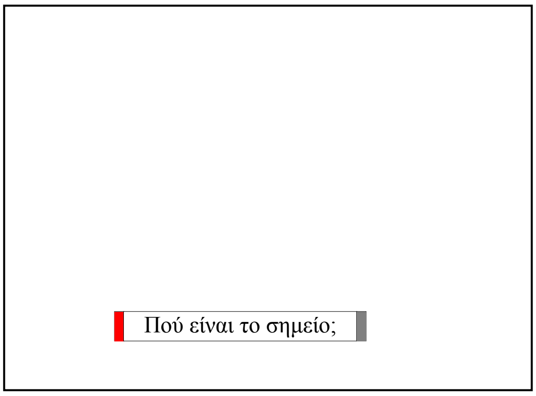
4ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Είδαμε από το πρόβλημα 1 του Φύλλου Εργασίας 2 ότι δύο ποσά x και ψ, που είναι ανάλογα, έχουν σταθερό λόγο. Δηλαδή $\frac{\psi}{x}$ = α και τότε η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά ποσά είναι ψ = αx. Άρα μια συνάρτηση με τύπο της μορφής ψ = αx συνδέει ανάλογα ποσά.

Στη συνέχεια μελετήσαμε το πρόβλημα 2 του Φύλλου Εργασίας 2, όπου παρουσιάζονται δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά και θυμηθήκαμε τον ορισμό των αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Τέλος, επιλύσαμε την άσκηση 2 του Φύλλου Εργασίας 2 για εξάσκηση.

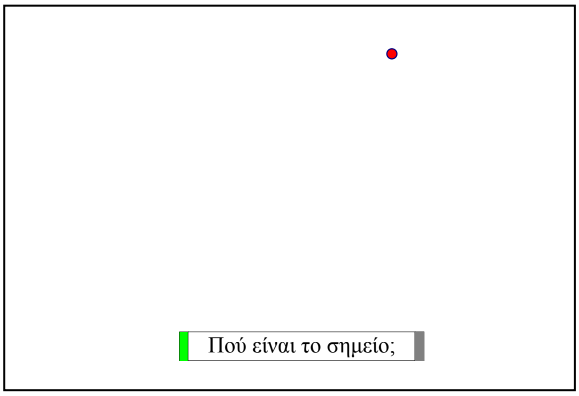
Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών (στόχος Α12), αλλά και δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών (Στόχος Α21).

Όλα τα μαθήματα που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο έγιναν σε συνεργασία με την Πληροφορικό. Οι μαθητές στο εργαστήριο κάθονταν ανά δύο ή ανά τρεις σε κάθε υπολογιστή μαζί με τους φίλους τους. Επίσης, ο κεντρικός υπολογιστής που χειριζόμουν άλλοτε εγώ και άλλοτε η Πληροφορικός ήταν συνδεδεμένος με τον προβολέα.

5ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής με χρήση του κεντρικού υπολογιστή που χειριζόμουν εγώ. Ξεκινήσαμε με μια δραστηριότητα (δες στόχους Β1, ... , Β7) με χρήση προβολέα για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την ακριβή θέση ενός σημείου στο επίπεδο χρειαζόμαστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (Στόχος Α4). Για το λόγο αυτό ανοίξαμε το αρχείο του EucliDraw «*Πού είναι το σημείο.euc*», όπου υπάρχει ένα σημείο στο λευκό σχεδιαστικό φύλλο και το κοντρόλ απόκρυψης όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1.



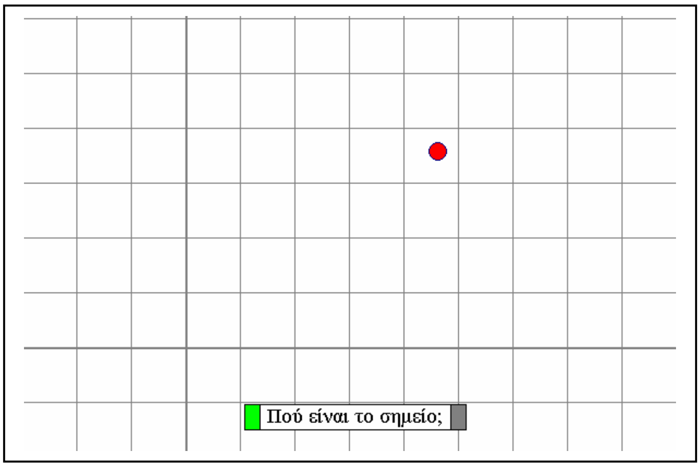
Εικόνα 3.1. Κοντρόλ απόκρυψης



Εικόνα 3.2. Η θέση του σημείου

Ζητήθηκε λοιπόν από τους μισούς μαθητές να κλείσουν τα μάτια τους και από τους άλλους μισούς να παρατηρήσουν τη θέση του σημείου που θα εμφανιζόταν στην οθόνη με την ενεργοποίηση του κοντρόλ, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2.

Αφού οι μισοί μαθητές παρατήρησαν προσεκτικά κλήθηκαν τα περιγράψουν στους συμμαθητές τους την ακριβή θέση εκείνου του σημείου. Το αποτέλεσμα ήταν να μην μπορούν να περιγράψουν με ακρίβεια τη θέση, παρά μονάχα με προσέγγιση. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους ίδιους μαθητές να κλείσουν τα μάτια τους και από τους άλλους να κοιτάξουν ξανά τη θέση του σημείου, αφού τώρα πια υπάρχει πλέγμα στο σχεδιαστικό φύλλο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3.



Εικόνα 3.3. Το σημείο σε πλέγμα

Τότε οι μαθητές αισθάνθηκαν αμέσως έτοιμοι να απαντήσουν ότι το σημείο βρισκόταν στο πέμπτο κουτάκι αριστερά και στο τρίτο κουτάκι κάτω από την πάνω δεξιά γωνία της οθόνης. Η δραστηριότητα όμως δεν τελείωσε εκεί, το επόμενο βήμα ήταν να κουνήσουμε με τις μπάρες ολόκληρο το σχεδιαστικό φύλλο με αποτέλεσμα το σημείο να αλλάζει συνεχώς θέση και η απάντησή τους να είναι συνεχώς λανθασμένη. Τότε καταλήξαμε στο ότι χρειαζόμαστε ένα σταθερό σημείο βάσει του οποίου θα οριστεί το αρχικό. Αυτό το σημείο το ονομάσαμε αρχή (origin) και το συμβολίσαμε με το γράμμα Ο. Και για να γίνει πιο εύκολη η περιγραφή της θέσης βάλαμε και τους άξονες x΄x και ψ΄ψ και τους αριθμήσαμε. Έπειτα δώσαμε τους ορισμούς που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο της τετμημένης, της τεταγμένης, της συντεταγμένης, του συστήματος ορθογωνίων αξόνων, του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και των τεταρτημόριων.

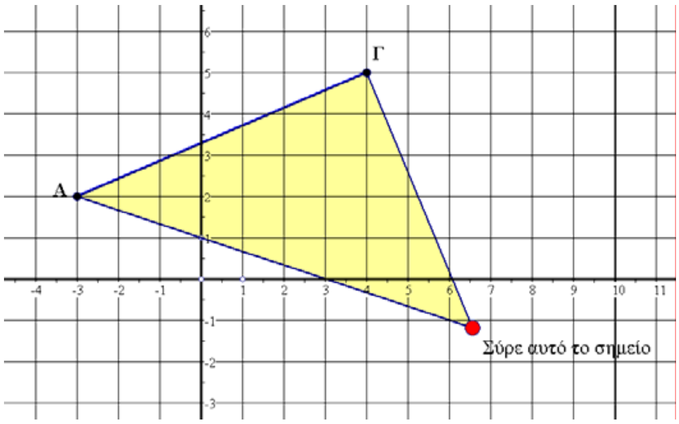
Στη συνέχεια χωρίσαμε τους μαθητές σε 4 ομάδες με κριτήριο τη θέση που κάθονται, δηλαδή οι 5 διπλανοί αποτελούσαν μια ομάδα και τους ζητήσαμε να επιλέξουν ένα από τα χρώματα πράσινο, κόκκινο, κίτρινο και μπλε και τους δώσαμε την κάρτα με το αντίστοιχο χρώμα. Τους μοιράσαμε το Φύλλο Εργασίας 3 (δες Παράρτημα Α) και τους ζητήσαμε να βρουν τις συντεταγμένες εκείνων των σημείων που έχουν το ίδιο χρώμα με την κάρτα της ομάδας τους και να συμπληρώσουν τον πίνακα της άσκησης 1. Ύστερα από κάθε ομάδα επιλέξαμε ένα μαθητή για να μας παρουσιάσει τα αποτελέσματα που βρήκε η ομάδα. Το μάθημα ολοκληρώθηκε με την επίλυση από τους μαθητές της άσκησης 2 του Φύλλου Εργασίας 3, όπου έπρεπε να σχεδιάσουν σε μιλιμετρέ χαρτί ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και να τοποθετήσουν μερικά σημεία με δοθείσες συντεταγμένες.

Στόχος επίσης του μαθήματος αυτού ήταν οι μαθητές να βρίσκουν ένα σημείο, όταν δίνονται οι συντεταγμένες του (Στόχος Α5).

6ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Σε αυτό το μάθημα οι μαθητές ήρθαν πρώτη φορά σε επαφή με το περιβάλλον του προγράμματος. Η Πληροφορικός βοήθησε τους μαθητές να ανοίξουν το πρόγραμμα και τους εξήγησε τις εντολές για τη σχεδίαση αξόνων, πλέγματος και τοποθέτησης σημείων. Τους εξήγησε επίσης πώς μπορούν να αλλάξουν τις ρυθμίσεις του πλέγματος ώστε να καταλάβουν τη λογική του παραθύρου ρυθμίσεων. Στη συνέχεια τους ζητήσαμε να ανοίξουν το αρχείο του EucliDraw «*Βρείτε τις αποστάσεις* *μεταξύ των σημείων.euc*», που βρισκόταν στην επιφάνεια εργασίας κάθε υπολογιστή, και να υπολογίσουν την απόσταση σημείου από τους άξονες και την απόσταση δύο σημείων όταν έχουν την ίδια τετμημένη ή την ίδια τεταγμένη (Στόχος Α6).

Είχε σχεδιαστεί δραστηριότητα για τον υπολογισμό της απόστασης δύο τυχαίων σημείων, αλλά λόγω έλλειψης χρόνου δεν πραγματοποιήθηκε καθόλου. Στη δραστηριότητα (δες στόχους Β1, ... , Β7) αυτή στόχος ήταν να ανακαλύψουν οι μαθητές τον τύπο για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο σημείων (Στόχος Α7).

Εδώ τα σημεία αυτά είναι τα Α και Γ. Οπότε ψάχνουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Για να γίνει αυτό πρέπει να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα να είναι η ΑΓ. Τότε τα μήκη των κάθετων πλευρών είναι εύκολο να βρεθούν, αφού οι κορυφές έχουν ή την ίδια τετμημένη ή την ίδια τεταγμένη και για το μήκος της υποτείνουσας απαιτείται η εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος.



Εικόνα 3.4. Υπολογισμός του μήκους του τμήματος ΑΓ

Στο σχεδιαστικό φύλλο υπήρχαν τα σημεία Α και Γ και οι μαθητές έπρεπε να σύρουν με το ποντίκι το κόκκινο σημείο ώστε να βρουν την κατάλληλη θέση για να σχηματιστεί ορθογώνιο τρίγωνο. Είχε σχεδιαστεί επίσης και το Φύλλο Εργασίας 4 (δες Παράρτημα Α) για την εξάσκηση στον υπολογισμό της απόσταση δύο σημείων με χρήση του τύπου, που ούτε αυτό έγινε.

7ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Ξεκινήσαμε για εξάσκηση με την άσκηση 1 του σχολικού βιβλίου (Βλάμος κ.α., 2007) στη σελίδα 66 όπου το ζητούμενο ήταν να βρεθούν οι συντεταγμένες δοθέντων σημείων σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Έπειτα μοιράσαμε το Φύλλο Εργασίας 5 (δες Παράρτημα Α) και από αυτό λύσαμε τα ερωτήματα a, b, c, d, f, g και h της άσκησης 1. Σε αυτό το μάθημα στόχος είναι οι μαθητές να γνωρίσουν τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (Στόχος Α8) και πως αυτή εξαρτάται όχι μόνο από τον τύπο της συνάρτησης αλλά και από το πεδίο ορισμού της(Στόχος Α11).

Στο πρώτο ερώτημα υπάρχει μια αριθμογραμμή όπου είναι σημειωμένοι οι ακέραιοι αριθμοί από το -4 έως και το 5 και ζητείται να κυκλώσουν τους ακέραιους αριθμούς που είναι από το -3 έως και το 3.

Στο δεύτερο ερώτημα ζητείται να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών για τη συνάρτηση με τύπο $ψ = x^2$. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα πρέπει να γράψουν τους αριθμούς x που βρήκαν στο πρώτο ερώτημα. Στη δεύτερη σειρά πρέπει να υπολογίσουν την τιμή της συνάρτησης ψ για τους παραπάνω αριθμούς x και στην τρίτη σειρά πρέπει να γράψουν τις συντεταγμένες (x, ψ) των σημείων που προκύπτουν από τις δύο πρώτες σειρές του πίνακα.

Στο τρίτο ερώτημα ζητείται να τοποθετήσουν τα σημεία, που βρήκαν στο προηγούμενο ερώτημα, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που υπάρχει ήδη σχεδιασμένο πάνω στο Φύλλο Εργασίας.

Στο τέταρτο ερώτημα πρέπει να γράψουν ότι το σύνολο των σημείων που σχεδίασαν στο παραπάνω ερώτημα ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $ψ = x^2$ και πεδίο ορισμού το σύνολο που αποτελείται από τους ακέραιους αριθμούς από το -4 έως και το 5.

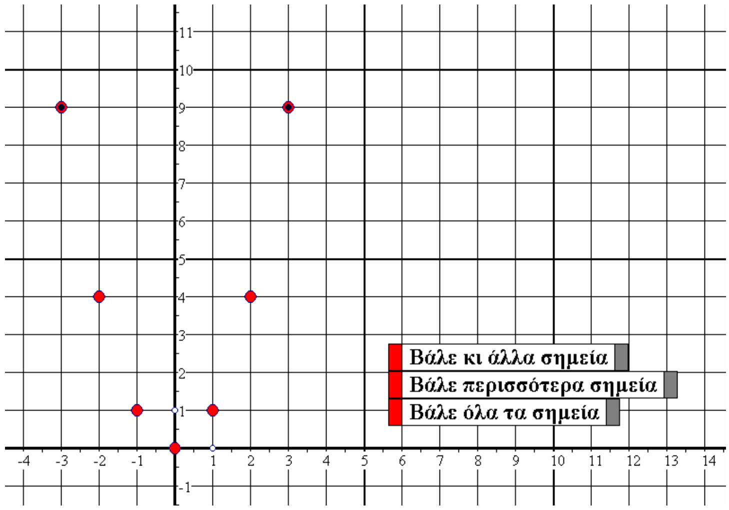
Στο πέμπτο ερώτημα υπάρχει ένας πίνακας τιμών και ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και πρέπει να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία με τη διαφορά ότι εδώ ο πίνακας περιέχει περισσότερα σημεία. Εδώ θέλουμε να καταλάβουν οι μαθητές ότι όσο περισσότερα σημεία βάζουμε στον πίνακα, τόσο περισσότερα σημεία αποτελούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στόχος επίσης της άσκησης αυτής είναι οι μαθητές να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών (Στόχος Α8).

Στο έκτο ερώτημα ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις διαφορές της νέας γραφικής παράστασης από την προηγούμενη με στόχο να δουν ότι συναρτήσεις με ίδιο τύπο μπορούν να έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις, αν το πεδίο ορισμού τους είναι διαφορετικό (Στόχος Α11 του Πίνακα 3.1).

Στο έβδομο ερώτημα ζητείται να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης όταν το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί από το -3 έως και το 3 και στο όγδοο ερώτημα να συγκρίνουν τις γραφικές παραστάσεις που έχουν σχεδιάσει.

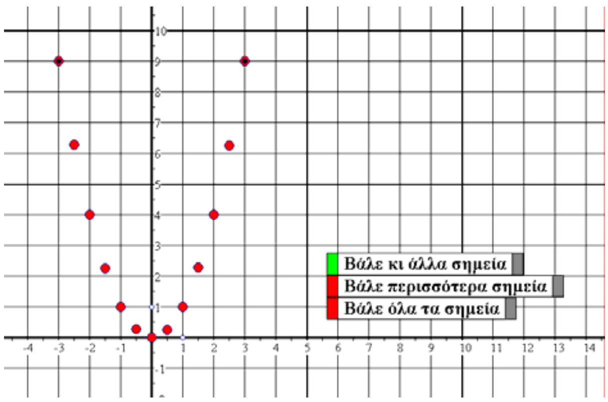
Στόχος είναι να συμπεράνουν ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μια συνεχόμενη καμπύλη στην περίπτωση μόνο που το πεδίο ορισμού είναι κάποιο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Η διδασκαλία δεν έγινε σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο διότι σε αυτό ζητείται από τους μαθητές να ενώσουν με γραμμές τα σημεία που θα βρουν και με αυτό τον τρόπο μπορεί να τους δημιουργηθεί η εντύπωση ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μια συνεχόμενη καμπύλη και να μην αναγνωρίζουν ως γραφική παράσταση ένα σύνολο από σημεία όπως αυτά που σχεδίασαν στα πρώτα ερωτήματα. Γι αυτό το λόγο αναφερθήκαμε και μάλιστα δώσαμε έμφαση στο Πεδίο Ορισμού (ενώ δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο) ώστε να καταλάβουν ότι το γράφημα μιας συνάρτησης εξαρτάται και από το Πεδίο Ορισμού και να αποφευχθούν ενδεχόμενες συγχύσεις στο μέλλον.

8ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Αρχικά προέβαλα το αρχείο του EucliDraw «*Γραφική παράσταση.euc*» όπου υπήρχαν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που μελετήσαμε στο προηγούμενο μάθημα, όπως στην Εικόνα 3.5.

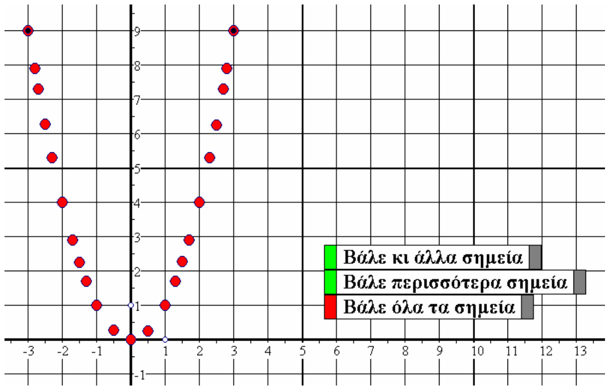


Εικόνα 3.5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 με Πεδίο Ορισμού το {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

Εκεί πατώντας τις εντολές «*Βάλε κι άλλα σημεία*», «Βάλε περισσότερα σημεία» και «*Βάλε όλα τα σημεία*» είδαμε πώς αλλάζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 ανάλογα με το πεδίο ορισμού, όπως στις Εικόνες 3.6, 3.7 και 3.8.



Εικόνα 3.6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 με Πεδίο Ορισμού το
{-3, -2,5 , -2 , -1,5 , -1 , -0,5 , 0 , 0,5 , 1 , 1,5 , 2 , 2,5 , 3}

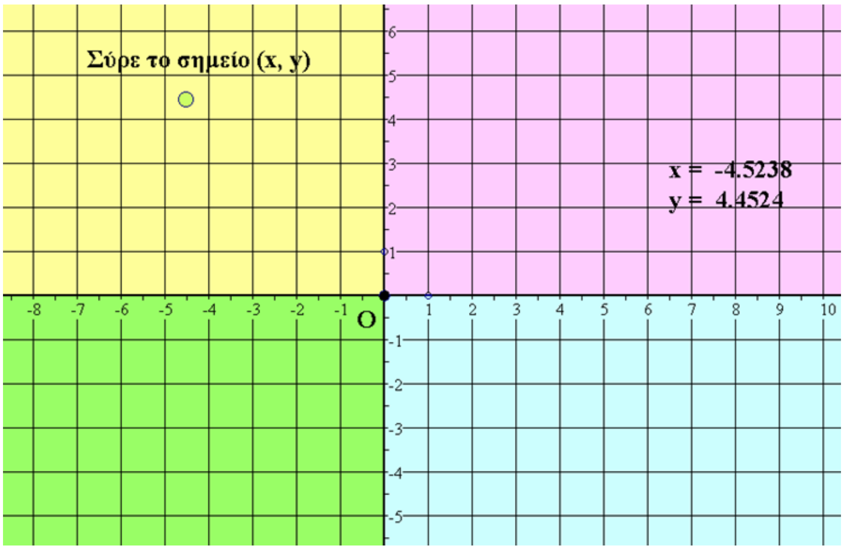


Εικόνα 3.7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 με άλλο Πεδίο Ορισμού

Εικόνα 3.8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 με Πεδίο Ορισμού το [-3, 3]

Αυτή η δραστηριότητα έγινε για να ξαναδούν οι μαθητές αυτά που μελετήσαμε στο προηγούμενο μάθημα σχετικά με το γράφημα συναρτήσεων, που έχουν τον ίδιο τύπο αλλά διαφορετικό πεδίο ορισμού, και να τους έρθει πιο φυσιολογικά ότι η γραφική παράσταση μπορεί να είναι μια συνεχόμενη καμπύλη όταν το πεδίο ορισμού είναι ένα διάστημα του **R**.

Ύστερα, ανοίξαμε το αρχείο «*Συντεταγμένες σημείου.euc*» όπου υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχουν χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα τα 4 τεταρτημόρια όπως στην Εικόνα 3.9.



Εικόνα 3.9. Το πρόσημο των συντεταγμένων του σημείου ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται

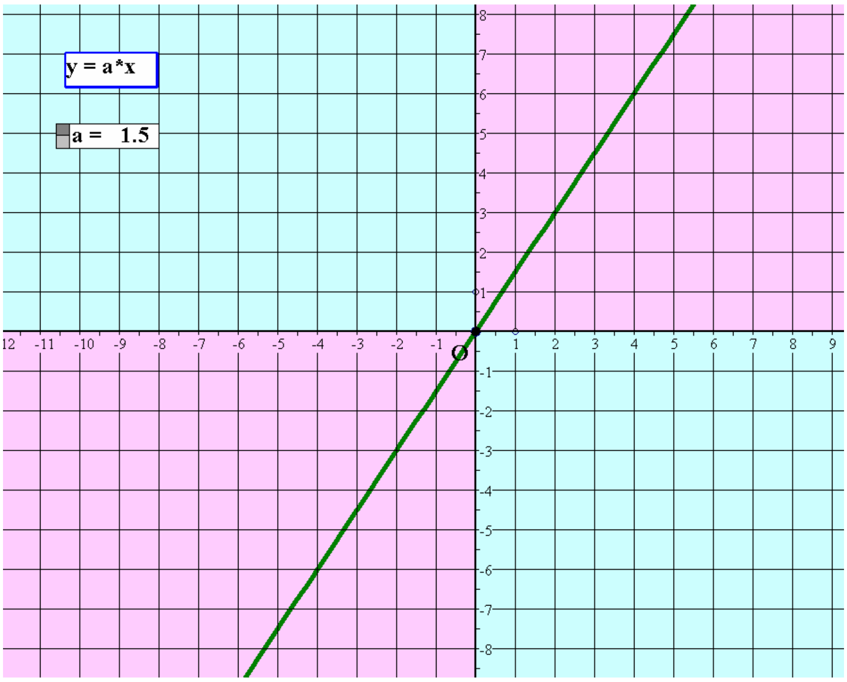
Υπάρχει επίσης ένα σημείο (δες Εικόνα 3.9), που μπορούμε να το σύρουμε με το πάτημα και σύρσιμο του ποντικιού, του οποίου οι καρτεσιανές συντεταγμένες υπολογίζονται απευθείας για την κάθε θέση στην οποία βρίσκεται το σημείο και φαίνονται στο σχεδιαστικό φύλλο.

Σε αυτήν τη δραστηριότητα ζητάμε από τους μαθητές να ανακαλύψουν αυτό που συμβαίνει με το πρόσημο των συντεταγμένων για την κάθε θέση στην οποία μπορεί να βρίσκεται το σημείο. Χρησιμοποιήσαμε τη συγκεκριμένη δραστηριότητα γιατί όλοι οι μαθητές εύκολα και γρήγορα μπορούν να πειραματιστούν και να ανακαλύψουν τον κανόνα που ισχύει για το πρόσημο των συντεταγμένων ενός σημείου σε κάθε τεταρτημόριο. Δεν απαιτεί προηγούμενες γνώσεις παρά μονάχα κίνηση του ποντικιού και παρατήρηση. Επίσης κρατά όλους τους μαθητές σε εγρήγορση και δεν τους αφήνει να βαρεθούν χάρη στην οπτικοποίηση και την κίνηση του αντικειμένου. Πολλοί μαθητές θα είχαν εγκαταλείψει την προσπάθεια αν τους δίναμε να τοποθετήσουν 10-15 σημεία με δοθείσες συντεταγμένες ώστε να ανακαλύψουν αυτόν τον κανόνα και θα χάναμε πολύ περισσότερο χρόνο (δες επίσης στόχους Β1, … ,Β7).

Στη συνέχεια, αφού γνωρίσαμε τα τεταρτημόρια, τα ορίσαμε και μοιράσαμε την άσκηση 1 του Φύλλου Εργασίας 5. Στην άσκηση αυτή υπάρχει ένας πίνακας με δύο ανάλογα ποσά x, ψ που πρέπει να συμπληρωθεί και τα σημεία που θα προκύψουν πρέπει να τοποθετηθούν σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ώστε να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία.

9<u>ο</u> Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Αρχικά λύσαμε την άσκηση 2 του Φύλλου Εργασίας 5 όπου ζητείται να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $ψ = 3x$ και $ψ = -\frac{1}{2}x$ και να βρουν το λόγο $\frac{ψ}{x}$ σε κάθε περίπτωση, ώστε να παρατηρήσουν ότι ο λόγος $\frac{ψ}{x}$ ισούται με τον συντελεστή του x στον τύπο της κάθε συνάρτησης. Άρα το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση $ψ = αx$ για την οποία μελετάμε στη συνέχεια το ρόλο του α με τη βοήθεια της δραστηριότητας 1 του ίδιου Φύλλου Εργασίας 5 και του αρχείου του EucliDraw «*Ο ρόλος του α.euc*».

Σε αυτό το αρχείο υπάρχει σχεδιασμένη μια ευθεία με εξίσωση $ψ = αx$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.10, για την οποία μπορούμε να αλλάζουμε την τιμή του α με το πάτημα του ποντικιού και να την βλέπουμε να περιστρέφεται.

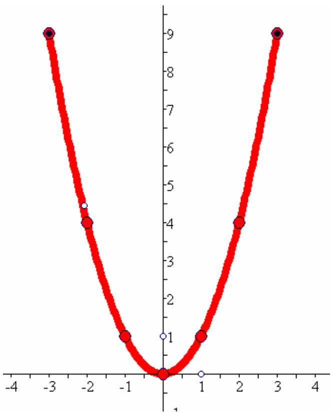


Εικόνα 3.10. Η ευθεία περιστρέφεται όσο αλλάζεις το α με το πάτημα του ποντικιού πάνω στο γκρι κουτάκι

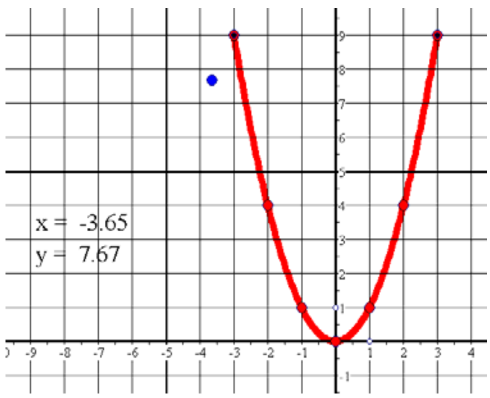
Με αυτή τη δραστηριότητα θέλουμε αφενός να ανακαλύψουν οι μαθητές το ρόλο του α (Στόχος Α13), δηλαδή ότι το α καθορίζει την κλίση της ευθείας και αφετέρου να παρατηρήσουν ότι η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο όταν το α είναι θετικό, ενώ βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο όταν το α είναι αρνητικό. Η δραστηριότητα αυτή πραγματοποιείται επίσης για να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι όταν το α είναι ίσο με το μηδέν τότε η ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα x΄x, ενώ όταν το α μεγαλώνει απεριόριστα τότε η ευθεία τείνει να ταυτιστεί με τον άξονα ψ΄ψ (Στόχος Α13 του Πίνακα 3.1). Όλα τα παραπάνω μπορούν να τα δουν όλοι οι μαθητές ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στα Μαθηματικά.

Και μάλιστα μπορούν να τα δουν με πολύ γρήγορο τρόπο, απλά πατώντας το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Αν επιχειρούσαμε να σχεδιάσουμε μερικές ευθείες στον πίνακα ή στο χαρτί για να βγάλουμε αυτά τα συμπεράσματα θα είχαμε προβλήματα όπως ο χρόνος και η μη ενασχόληση όλων των μαθητών (δες επίσης στόχους Β1, ..., Β7).

10º Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Ξεκινήσαμε ανοίγοντας πάλι το αρχείο του EucliDraw «*Γραφική παράσταση.euc*» και το προβάλαμε στον πίνακα. Εκεί υπήρχε σχεδιασμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = x^2 με πεδίο ορισμού το διάστημα [-3, 3]. Τοποθετήσαμε ένα σημείο πάνω στη γραφική παράσταση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.11, και ζητήσαμε από τους μαθητές να βρουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες αυτού του σημείου (Στόχος Α9).



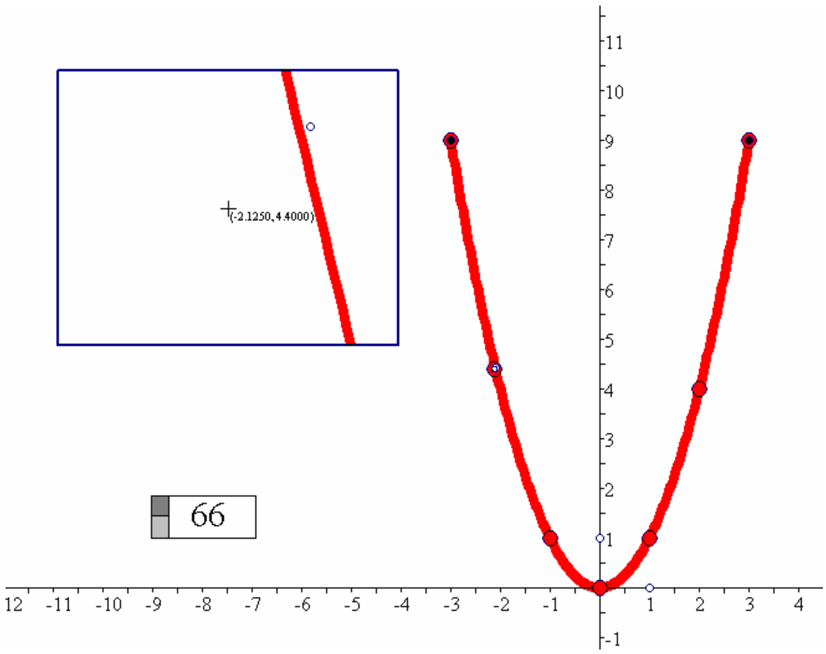
Εικόνα 3.11 Εύρεση κατά προσέγγιση συντεταγμένων σημείου



Εικόνα 3.12 Ανήκει το σημείο πάνω στη γραφ. παράσταση;

Έπειτα, σύροντας το μπλε σημείο που φαίνεται στην Εικόνα 3.12, ζητήσαμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν και να αποφανθούν για το πότε το σημείο αυτό βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τότε, ένας μαθητής σηκώθηκε, ήρθε στον κεντρικό υπολογιστή που χειριζόμουν και έσυρε το σημείο μέχρι να φαίνεται ότι βρίσκεται πάνω στο γράφημα. Αμέσως, όλοι συμφώνησαν ότι όντως το σημείο βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση.

Τότε μεγεθύναμε την περιοχή γύρω από το σημείο όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.13 και κάποιοι μαθητές είπαν ότι το σημείο μπορεί να μην είναι πάνω στο γράφημα.



Εικόνα 3.13. Μεγέθυνση 66 φορές

Τότε, αφού τους εξήγησα ότι μπορώ να βελτιώσω τη θέση του σημείου και να μεγεθύνω κι άλλο την εικόνα για να ελέγξω αν το σημείο είναι πάνω στο γράφημα, και αυτό να το κάνω συνεχώς, συμπέραναν ότι πρέπει να βρούμε έναν άλλο τρόπο για να ελέγξουμε αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Τότε, τους εξήγησα ότι για να ανήκει ένα σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να επαληθεύουν την εξίσωση της καμπύλης και είδαμε μερικά παραδείγματα (Στόχος Α9, δες επίσης στόχους Β1, ..., Β7).

Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων όπως η ψ = 2x, αφού πρώτα μας περιγράψουν τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν (Στόχος Α14 του Πίνακα 3.1). Ζητήθηκε ακόμα από τους μαθητές να μας πουν ποιο θα είναι το γράφημα της συνάρτησης αυτής προτού το σχεδιάσουν και με αφορμή την απάντηση ενός μαθητή που είπε ότι θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και την ένσταση ενός άλλου που είπε ότι θα είναι μια ευθεία, ξεκινήσαμε μια συζήτηση για να θυμηθούν ότι το γράφημα θα είναι διαφορετικό αν αλλάξουμε το πεδίο ορισμού.

Είχαμε πει σε παλαιότερο μάθημα και το είχαμε δει και σε δραστηριότητα ότι αν το πεδίο ορισμού είναι ένα διάστημα του **R** τότε η γραφική παράσταση θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, ενώ αν το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών τότε η γραφική παράσταση θα είναι μια ευθεία. Είπαμε επίσης ότι αν το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο των ακέραιων αριθμών τότε το γράφημα θα αποτελείται από κουκίδες και εκεί φάνηκε η αδυναμία των περισσότερων μαθητών να διακρίνουν τους ακέραιους από τους πραγματικούς αριθμούς. Ένας μαθητής μας είπε ότι ο αριθμός -3 είναι ακέραιος, αλλά όχι πραγματικός.

Αφού συζητήσαμε τα σύνολα των αριθμών επαναλάβαμε το ερώτημα α της άσκησης 2 του Φύλλου Εργασίας 5, δίνοντας έμφαση στο πλήθος των σημείων που χρειαζόμαστε για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης όταν ξέρουμε ότι θα είναι μια ευθεία.

Τέλος τους ζητήθηκε να βρουν σε ποια περίπτωση το γράφημα της συνάρτησης που μελετήσαμε θα ήταν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α(1, 3) και Β(2, 6) με σκοπό να μπορούν από το γράφημα της συνάρτησης να βρίσκουν το πεδίο ορισμού της.

11ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Σε αυτό το μάθημα στόχος ήταν να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης ανάλογα με το πεδίο ορισμού της και ο εντοπισμός της μορφής του γραφήματος προτού το σχεδιάσουν. Για το σκοπό αυτό ζητήσαμε από τους μαθητές να επιλέξουν μια συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της και να σχεδιάσουν το γράφημά της και αυτό επαναλήφθηκε αρκετές φορές (Στόχος Α14 του Πίνακα 3.1).

12ο Μάθημα: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Αρχικά επαναλάβαμε τα ερωτήματα b, c, d, e και f της άσκησης 2 του Φύλλου Εργασίας 5 για να θυμηθούν την κλίση της ευθείας που είχαμε δει σε προηγούμενο μάθημα και συνεχίσαμε με τη δραστηριότητα 1 όπου εξετάσαμε τη θέση μιας ευθείας ανάλογα με τον συντελεστή α του x στην εξίσωση της ψ = αx. Συνεχίσαμε με το ερώτημα α της άσκησης 3 όπου δίνονται οι εξισώσεις κάποιων ευθειών και ζητείται να βρουν την κλίση τους.

<u>13ο Μάθημα</u>: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Σε αυτό το μάθημα επιλύσαμε αρχικά το ερώτημα b της άσκησης 3 όπου σε τετραγωνισμένο χαρτί δίνονται σχεδιασμένες τρεις ευθείες και ζητείται η κλίση των ευθειών αυτών (Στόχος Α15). Συνεχίσαμε με το ερώτημα a της άσκησης 1 του Φύλλου Εργασίας 6 (δες Παράρτημα Α), όπου υπάρχουν οι συναρτήσεις με τύπο ψ = 1,2x και ψ = 1,2x+4 και ζητείται να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών για κάθε συνάρτηση και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα. Με αυτή την άσκηση επιδιώκουμε οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι οι τιμές της δεύτερης συνάρτησης είναι κατά 4 μονάδες μεγαλύτερες από τις τιμές της πρώτης, δηλαδή όσο και ο σταθερός αριθμός στη δεύτερη συνάρτηση και να συμπεράνουν ότι αντίστοιχη σχέση θα έχουν και τα γραφήματα των δύο συναρτήσεων (Στόχος Α16).

<u>14ο Μάθημα</u>: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Σε αυτό το μάθημα επιλύσαμε τα ερωτήματα b και c της άσκησης 1 του Φύλλου Εργασίας 6 όπου αρχικά ζητείται να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της ψ = 1,2x και της ψ = 1,2x+4. Με αυτή την άσκηση επιδιώκουμε αφενός οι μαθητές να επαληθεύσουν ότι δύο εξισώσεις ευθειών με ίδιο συντελεστή του x παριστάνουν ευθείες με ίδια κλίση και αφετέρου ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις διαφέρουν κατά 4 μονάδες στον κατακόρυφο άξονα, δηλαδή όσο ο σταθερός όρος. Και τέλος στο ερώτημα d ζητείται η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της ψ = 1,2x – 3 χωρίς τη δημιουργία πίνακα τιμών για να εφαρμόσουν αυτό που μόλις έμαθαν (Στόχοι Α17, Α18, Α19, Α20).

<u>15ο Μάθημα</u>: Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην τάξη. Σε αυτό το μάθημα επιλύσαμε ασκήσεις για να εφαρμόσουν αυτό που έμαθαν στο προηγούμενο μάθημα και προχωρήσαμε στην Υπερβολή και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά για τα οποία είχαμε μιλήσει και στα πρώτα μαθήματα. Σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $ψ = \frac{1}{x}$, $ψ = \frac{3}{x}$ και $ψ = \frac{-2}{x}$ για να μάθουν να τις σχεδιάζουν και για να ανακαλύψουν το ρόλο του α στη συνάρτηση $ψ = \frac{α}{x}$ (Στόχοι Α22, Α23). Για την υπερβολή είχαμε σχεδιάσει δραστηριότητα στο πρόγραμμα, αλλά λόγω πίεσης χρόνου δεν καταφέραμε να δούμε.

Ακολούθησαν δύο επαναληπτικά μαθήματα και στη συνέχεια οι μαθητές έγραψαν το διαγώνισμα και συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο με τις εντυπώσεις τους από τη διδασκαλία αυτή.

3.4 Αξιολόγηση της εφαρμογής

Ύστερα από την πραγματοποίηση της εφαρμογής ακολούθησε η αξιολόγησή σε δύο τομείς, το γνωστικό τομέα και το συναισθηματικό τομέα. Στο γνωστικό τομέα θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές απέκτησαν τις γνώσεις που επιδιώκαμε και που αναφέρουμε ως Στόχους Α στον Πίνακα 3.1 και η αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών έγινε μέσω του διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β). Στον συναισθηματικό τομέα θέλουμε να ελέγξουμε αν η στάση των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους άλλαξε, δηλαδή θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι Στόχοι Β του Πίνακα 3.2. Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή των στάσεων των μαθητών ήταν :

- Ερωτηματολόγιο (δες Παράρτημα Γ) στάσεων με ερωτήσεις κλειστού τύπου (ποσοτική έρευνα)
- Παρατήρηση μέσα στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, ερωτηματολόγιο (δες Παράρτημα Γ) με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου και ομαδική συνέντευξη (ποιοτική έρευνα)

3.4.1 Το Διαγώνισμα

Το διαγώνισμα (δες Παράρτημα Β) πραγματοποιήθηκε σε δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες, χωρίς οι μαθητές να βγουν διάλειμμα και αποτελείται από 3 θέματα, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 3.3.

<table>
<tr><td>Θέματα</td><td colspan="4">Ερωτήματα</td></tr>
<tr><td>$1^{ο}$
(8,5 μονάδες)</td><td>1.A
(3 μονάδες)</td><td>1.B
(2,5 μονάδες)</td><td>1.Γ
(3 μονάδες)</td><td>1.Δ
(Δε βαθμολογείται)</td></tr>
<tr><td>$2^{ο}$
(8,5 μονάδες)</td><td colspan="3">2.A (6,5 μονάδες)
Υποερωτήματα
2.A.0 (3 μον.)   2.A.1 (2 μον.)   2.A.2 (0,5 μον.)   2.A.3 (1 μον.)</td><td>2.B
(2 μονάδες)</td></tr>
<tr><td>$3^{ο}$
(3 μονάδες)</td><td colspan="2">3.A
(2 μονάδες)</td><td colspan="2">3.B
(1 μονάδα)</td></tr>
</table>

Πίνακας 3.3. Δομή Διαγωνίσματος και βαθμολογία

Το $1^{ο}$ θέμα χωρίζεται σε τέσσερα ερωτήματα τα 1.A, 1.B, 1.Γ και 1.Δ, το $2^{ο}$ θέμα αποτελείται από δύο ερωτήματα 2.A και 2.B, όπου το 2.A ερώτημα αποτελείται από τέσσερα υποερωτήματα τα 2.A.0, 2.A.1, 2.A.2 και 2.A.3. Το $3^{ο}$ θέμα αποτελείται από δύο ερωτήματα τα 3.A και 3.B.

Το $1^{ο}$ θέμα αποτελείται από 4 ερωτήματα τα 1.A, 1.B, 1.Γ και 1.Δ. Στο 1.A ερώτημα δίνεται ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε τετραγωνισμένο χαρτί στο οποίο υπάρχουν τοποθετημένα τρία σημεία με ακέραιες συντεταγμένες και ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις συντεταγμένες τους. Αυτό είναι το πρώτο ερώτημα στο διαγώνισμα για να ενθαρρύνουμε τους μαθητές, αφού αυτό είναι μάλλον εύκολο για όλους. Με αυτό το ερώτημα θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Δε ζητήθηκε να τοποθετήσουν τα σημεία όταν τους δίνουμε τις συντεταγμένες τους, αφού ο έλεγχος αυτής της γνώσης θα γίνει σε επόμενο ερώτημα. Το ερώτημα βαθμολογείται με 3 μονάδες στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, δηλαδή μία μονάδα για κάθε σημείο.

Στο 1.Β ερώτημα ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών της συνάρτησης ψ = 2x+1 για μερικές θετικές ακέραιες τιμές του x και μια αρνητική τιμή. Επιλέχθηκαν η συγκεκριμένη συνάρτηση και οι αντίστοιχες τιμές του x, λόγω των εύκολων πράξεων που απαιτούν. Το ερώτημα βαθμολογείται με 2,5 μονάδες στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, δηλαδή 0,5 για κάθε σωστή απάντηση.

Στο 1.Γ ερώτημα ζητείται η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της παραπάνω συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που ήδη υπάρχει από το Α ερώτημα. Το ερώτημα βαθμολογείται με 3 μονάδες, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3.

Τέλος, στο 1.Δ ερώτημα ζητείται από τους μαθητές να γράψουν πώς θα εξηγούσαν σε ένα φίλο τους ή μια φίλη τους τι είναι η συνάρτηση. Τους ζητείται να γράψουν όλα όσα θα έλεγαν ώστε ο φίλος τους να καταλάβει. Με το ερώτημα αυτό επιδιώκουμε οι μαθητές να γράψουν όσα περισσότερα ξέρουν για τη συνάρτηση και διατυπώνεται με αυτό τον τρόπο ώστε οι μαθητές να αποβάλλουν το άγχος που τους δημιουργεί η διατύπωση με ακρίβεια ενός μαθηματικού ορισμού και να γράψουν αυθόρμητα αυτά που πραγματικά ξέρουν. Η ερώτηση αυτή δε βαθμολογείται, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3. Οι μαθητές ενημερώθηκαν για τη μη βαθμολόγηση του συγκεκριμένου ερωτήματος αμέσως μετά την εξέταση και όχι πριν από αυτήν, γιατί κάτι τέτοιο ίσως να επηρέαζε τη στάση τους απέναντι σε αυτό το ερώτημα.

Το 2ο θέμα αποτελείται από δύο ερωτήματα 2.Α και 2.Β, όπου το 2.Α ερώτημα αποτελείται από τέσσερα υποερωτήματα: τα 2.Α.0, 2.Α.1, 2.Α.2 και 2.Α.3. Στο 2.Α.0 υποερώτημα του ερωτήματος 2.Α δίνεται μια γραφική παράσταση σε τετραγωνισμένο χαρτί και ένας πίνακας τιμών με έξι τιμές για το x, όπου πρέπει να συμπληρωθεί με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης. Το ερώτημα βαθμολογείται με 3 μονάδες, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, δηλαδή 0,5 για κάθε σωστή απάντηση.

Στο 2.Α.1 υποερώτημα του ερωτήματος 2.Α ζητείται από τους μαθητές να αποφασίσουν αν τα ποσά x και ψ του προηγούμενου υποερωτήματος 2.Α.0 είναι ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Αυτό το ερώτημα επιλέχθηκε γιατί η απάντησή του είναι σύντομη και η αιτιολόγησή του μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους. Η αιτιολόγηση μπορεί να γίνει είτε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών και της ιδιότητας των αντιστρόφως ανάλογων ποσών που έχουν σταθερό γινόμενο, είτε απευθείας μέσω της γραφικής παράστασης, που τους δίνεται, και είναι ο θετικός κλάδος της υπερβολής. Η αιτιολόγηση ζητείται για να αποφευχθούν οι τυχαίες απαντήσεις, αλλά και για να γράψουν οι μαθητές με ποιον από τους δύο τρόπους σκέφτηκαν και απάντησαν. Το υποερώτημα αυτό βαθμολογείται με 2 μονάδες, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, και συγκεκριμένα μία μονάδα για τη σωστή επιλογή και μία μονάδα για την αιτιολόγηση.

Στο 2.Α.2 υποερώτημα ζητείται να εκφράσουν το ψ ως συνάρτηση του x και το ερώτημα βαθμολογείται με 0,5 μονάδες, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3.

Στο 2.Α.3 υποερώτημα ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν αν ένα σημείο με δοθείσες συντεταγμένες βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση δοθείσας συνάρτησης. Μάλιστα η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι η ίδια με αυτήν που μελετήσαμε στα προηγούμενα υποερωτήματα. Αυτή η άσκηση επιλέχθηκε γιατί μπορεί να απαντηθεί γρήγορα, αν γίνει αντιληπτό ότι μιλάμε για την ίδια συνάρτηση. Επίσης τα νούμερα είναι τέτοια ώστε να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι είναι πιο εύκολο να δοκιμάσουν αν οι αριθμοί x, ψ έχουν σταθερό γινόμενο, παρά να κάνουν τη διαίρεση. Το υποερώτημα αυτό βαθμολογείται με 1 μονάδα στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3.

Στο 2.Β ερώτημα υπάρχει σχεδιασμένη μια ευθεία που διέρχεται από το Ο(0, 0) και το 1^{ο} και 3^{ο} τεταρτημόριο και είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της οποίας ζητείται ο τύπος. Για αυτό τους δίνονται τρεις διαφορετικοί τύποι συναρτήσεων και ζητείται να επιλέξουν το σωστό και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στον πρώτο τύπο ο συντελεστής του x είναι αρνητικός, οπότε πρέπει να τον απορρίψουν αφού η ευθεία διέρχεται από το 1^{ο} και 3^{ο} τεταρτημόριο. Ο τρίτος τύπος έχει θετικό συντελεστή του x αλλά έχει σταθερό όρο +1, οπότε πρέπει να τον απορρίψουν αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς πρέπει να επιλέξουν το δεύτερο τύπο. Το ερώτημα αυτό επιλέχθηκε γιατί οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν και να κρίνουν με βάση τις γνώσεις τους σε δύο ζητήματα για να απαντήσουν σωστά. Πρέπει να ελέγξουν την κλίση της ευθείας, αλλά και τα διερχόμενα σημεία πάνω στον άξονα ψ΄ψ. Επίσης πρέπει να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και συνεπώς πρέπει να περιγράψουν όλα όσα αναφέραμε προηγουμένως για να απορρίψουν τις λανθασμένες απαντήσεις και να επιλέξουν τη σωστή. Το ερώτημα αυτό βαθμολογείται με 2 μονάδες στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, και συγκεκριμένα μία μονάδα για τη σωστή επιλογή και άλλη μία για τη σωστή αιτιολόγηση.

Το 3ο θέμα αποτελείται από δύο ερωτήματα τα 3.Α και 3.Β. Στο 3.Α ερώτημα δίνονται σχεδιασμένες τρεις παράλληλες ευθείες που είναι γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων. Για τη μια από τις ευθείες αυτές δίνεται ο τύπος της συνάρτησης από την οποία έχει προκύψει αυτό το γράφημα και ζητείται να βρουν τις άλλες δύο συναρτήσεις και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Και αυτό το θέμα έχει τεθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να απαντηθεί γρήγορα, ενώ ταυτόχρονα απαιτεί παρατήρηση και κριτική σκέψη. Εδώ πάλι χρειάζεται ο συνδυασμός γνώσεων και όχι απλώς η εφαρμογή των κανόνων. Πρέπει να συνδυάσουν το γεγονός ότι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση και συνεπώς ίδιο συντελεστή του x και επίσης πρέπει να δουν τα διερχόμενα σημεία πάνω στον άξονα ψ΄ψ. Το ερώτημα βαθμολογείται με 2 μονάδες στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, και συγκεκριμένα μία μονάδα για την εύρεση των δύο τύπων και άλλη μία για την αιτιολόγηση των δύο απαντήσεων.

Στο 3.Β ερώτημα υπάρχει μια γραφική παράσταση, που υποτίθεται ότι έχει σχεδιάσει ένας συμμαθητής τους, και ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν αν αυτή η γραφική παράσταση μπορεί να είναι της συνάρτησης με τύπο ψ = x+1 και πεδίο ορισμού όλους τους ακέραιους αριθμούς μεταξύ του -4 και του 2 και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Η γραφική παράσταση που τους δίνεται είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (-4, -3) και (2, 3). Το ερώτημα είναι διατυπωμένο με αυτό τον τρόπο για να προσπαθήσουν οι μαθητές να θυμηθούν όλα όσα έχουμε πει για τις διαφορές που έχουν οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με ίδιο τύπο και διαφορετικό πεδίο ορισμού και να κρίνουν αν αυτό που βλέπουν είναι το σωστό. Αν τους είχε ζητηθεί απλώς η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της ίδιας συνάρτησης, τότε θα έχουν να σκεφτούν πολύ λιγότερα πράγματα, αφού τους ζητείται κάτι πολύ συγκεκριμένο. Ενώ τώρα πρέπει να ελέγξουν οτιδήποτε θεωρούν οι ίδιοι ότι θα μπορούσε να έχει γίνει λάθος και συνεπώς να φέρνουν στη μνήμη τους, να συνδυάσουν και να ελέγξουν περισσότερα δεδομένα. Το ερώτημα βαθμολογείται με 1 μονάδα στις 20, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3.

3.4.2 Το Ερωτηματολόγιο

Το Ερωτηματολόγιο (δες Παράρτημα Γ) μοιράστηκε προς συμπλήρωση στον κάθε μαθητή αμέσως μετά την ολοκλήρωση του Διαγωνίσματος. Το Ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο, αφορά στα μαθήματα που έγιναν στο εργαστήριο Πληροφορικής και αποτελείται από επτά ερωτήσεις: τις Ε1, Ε.2, Ε.3, Ε.4, Ε.5, Ε.6 και Ε.7. Τέσσερις από αυτές τις ερωτήσεις (οι Ε.1, Ε.2, Ε.3 και Ε.4) είναι κλειστού τύπου, όπου οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν την απάντηση που τους εκφράζει περισσότερο και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και οι άλλες τρεις ερωτήσεις (οι Ε.5, Ε.6 και Ε.7) είναι ανοιχτού τύπου.

Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις ζητάμε την άποψη του μαθητή για αυτά τα μαθήματα. Αναλυτικά, στην πρώτη ερώτηση Ε.1 θέλουμε να μάθουμε αν άρεσαν στο μαθητή τα μαθήματα αυτά και οι επιλογές για απάντηση είναι Α: Μου άρεσαν πολύ, Β: Μου άρεσαν λίγο, Γ: Δε μου άρεσαν και τόσο και Δ: Δε μου άρεσαν καθόλου.

Στη δεύτερη ερώτηση Ε.2 θέλουμε να μάθουμε αν αυτά τα μαθήματα φάνηκαν ενδιαφέροντα στους μαθητές και οι επιλογές για απάντηση είναι Α: Μου φάνηκαν πολύ ενδιαφέροντα, Β: Μου φάνηκαν ενδιαφέροντα, Γ: Δε μου φάνηκαν και τόσο ενδιαφέροντα και Δ: Δε μου φάνηκαν καθόλου ενδιαφέροντα.

Στην τρίτη ερώτηση Ε.3 θέλουμε να μάθουμε αν αυτά τα μαθήματα βοήθησαν τους μαθητές να συμμετέχουν περισσότερο στο μάθημα και οι επιλογές για απάντηση είναι Α: Με βοήθησαν να συμμετέχω περισσότερο στο μάθημα, Β: Με βοήθησαν να συμμετέχω στο μάθημα, Γ: Δε με βοήθησαν και τόσο να συμμετέχω στο μάθημα και Δ: Δε με βοήθησαν καθόλου να συμμετέχω στο μάθημα.

Στην τέταρτη ερώτηση Ε.4 θέλουμε να μάθουμε αν αρέσει στους μαθητές να δουλεύουν σε ομάδα και οι επιλογές για απάντηση είναι Α: Μου αρέσει πολύ να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου, Β: Μου αρέσει να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου, Γ: Δε μου αρέσει και τόσο να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου και Δ: Δε μου αρέσει καθόλου να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου.

Στην πέμπτη ερώτηση Ε.5 ζητάμε από τους μαθητές να γράψουν τι τους άρεσε περισσότερο στα μαθήματα αυτά, ενώ στην έκτη ερώτηση Ε.6 τι τους άρεσε λιγότερο και στην έβδομη ερώτηση Ε.7 να γράψουν αν έχουν κάποιο άλλο σχόλιο για αυτά τα μαθήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β) και αυτά του Ερωτηματολογίου (δες Παράρτημα Γ). Θα αναφέρουμε επίσης κάποιες παρατηρήσεις που αφορούν στην αλλαγή συμπεριφοράς των μαθητών κατά τη διάρκεια αυτών των μαθημάτων στο εργαστήριο.

Για την προστασία των προσωπικών δεδομένων των μαθητών θα χρησιμοποιούμε τα ονόματα ΜΑ1, Μ2, ... , Μ22, στην παρουσίαση των απαντήσεων, τα οποία επιλέχθηκαν τυχαία και δεν είναι με αλφαβητική ή κάποια άλλη σειρά. Με Μ θα συμβολίζουμε τους μαθητές και με ΜΑ τις μαθήτριες. Να τονίσουμε επίσης ότι για την πραγματοποίηση της έρευνας και την ηχογράφηση των μαθημάτων πήραμε την άδεια του Διευθυντή του Σχολείου αλλά και των ίδιων των μαθητών.

4.2. Αποτελέσματα Διαγωνίσματος

Στον Πίνακα 4.1 φαίνονται τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 1.Α του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β), όπου ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

Ερώτημα 1.Α	Α(3, 1)	Β(-2, 5)	Γ(0, -4)
Ποσοστό Επιτυχίας	72,72	77,27	50

Πίνακας 4.1. Επίδοση μαθητών στο ερώτημα 1.Α

Από τον Πίνακα 4.1 παρατηρούμε ότι οι επιδόσεις των μαθητών είναι καλύτερες όταν το σημείο δεν έχει καμία από τις συντεταγμένες του μηδέν.

Δύο μαθητές [9,09%] (ΜΑ19 και ΜΑ17), από αυτούς που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, έγραψαν τις συντεταγμένες με ανάποδη σειρά σε κάποια από τα τρία σημεία, δηλαδή έγραψαν πρώτα την τεταγμένη και ύστερα την τετμημένη.
Ένας μαθητής (4,54%) [ΜΑ14] έγραψε ανάποδα τις συντεταγμένες και στα τρία σημεία.

Ένας μαθητής (4,54%) [ΜΑ15]έγραψε:

Α = (3), Β = (- 2), Γ = (-4),

δηλαδή στα δύο πρώτα σημεία βλέπουμε ότι έγραψε μόνο την τετμημένη, ενώ στο τρίτο σημείο έγραψε μόνο την τεταγμένη. Μάλλον για το σημείο Γ δε μπορούσε να βρει την τετμημένη, που ήταν μηδέν, και για αυτό έγραψε μόνο την τεταγμένη.

Τρεις μαθητές [13,64%] (ΜΑ1, ΜΑ10 και ΜΑ13), που βρήκαν σωστά τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β, έγραψαν για το σημείο Γ αντίστοιχα:

Γ = (0, 4), Γ = (0, 4), Γ(0, 4)

δηλαδή έκαναν λάθος στο πρόσημο της τεταγμένης.

Επίσης παρατηρείται συχνά οι μαθητές να χρησιμοποιούν το σύμβολο ''='' μετά το γράμμα του σημείου και πριν τις συντεταγμένες του, όπως και οι δύο από τους τρεις παραπάνω μαθητές. Συγκεκριμένα αυτό το συναντήσαμε σε 13 από τα 22 γραπτά, δηλαδή στο 59,09% των γραπτών.

Τρεις μαθητές [13,64%] (ΜΑ4, ΜΑ14 και Μ20) δεν μπορούσαν να βρουν ότι η τεταγμένη του σημείου Γ είναι μηδέν και έγραψαν ότι είναι -1.

Δύο μαθητές [9,09%] (Μ6 και ΜΑ8) έγραψαν ότι η τετμημένη του σημείου Γ είναι μηδέν, αλλά δεν μπόρεσαν να βρουν την τεταγμένη του. Ο ένας από αυτούς (ΜΑ8) έγραψε:

Γ =(0 .

και δεν το συνέχισε, ενώ ο άλλος μαθητής (Μ6) έγραψε:

Γ = (0

και ακολούθησαν πολλές μουτζούρες.

Δύο μαθητές (ΜΑ12 και Μ9) δεν απάντησαν καθόλου στο ερώτημα αυτό.

Στον Πίνακα 4.2 φαίνονται τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 1.Β του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β), όπου ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών για τη συνάρτηση με τύπο ψ = 2x + 1.

Στην πρώτη σειρά του Πίνακα 4.2 βλέπουμε την πρώτη σειρά του πίνακα τιμών και στη δεύτερη σειρά το ποσοστό επιτυχίας.

x	1	3	6	0	- 2
Ποσοστό Επιτυχίας	77,27	77,27	81,81	68,18	45,45

Πίνακας 4.2. Επίδοση μαθητών στο ερώτημα 1.Β

Από τον Πίνακα 4.2 παρατηρούμε ότι οι επιδόσεις των μαθητών είναι καλύτερες όταν το x είναι θετικό, πέφτουν στο 68,18% όταν το x είναι ίσο με το μηδέν και λιγότεροι από τους μισούς απαντάνε σωστά όταν το x είναι αρνητικό.

Όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν τον πίνακα. Από αυτούς το 40,9% συμπλήρωσε σωστά όλο τον πίνακα, ενώ το 13,63% συμπλήρωσε λάθος όλο τον πίνακα.

Στον Πίνακα 4.3 φαίνονται τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 1.Γ του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β), όπου ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο ψ = 2x + 1 στο σύστημα αξόνων που τους δίνεται στο ερώτημα 1.Α.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή Γραφική παράσταση	18,18
Άλλη ευθεία	36,36

Κάτι άλλο (όχι ευθεία)	36,36
Καμία γραφική παράσταση	9,1

Πίνακας 4.3. Επίδοση μαθητών στο ερώτημα 1.Γ

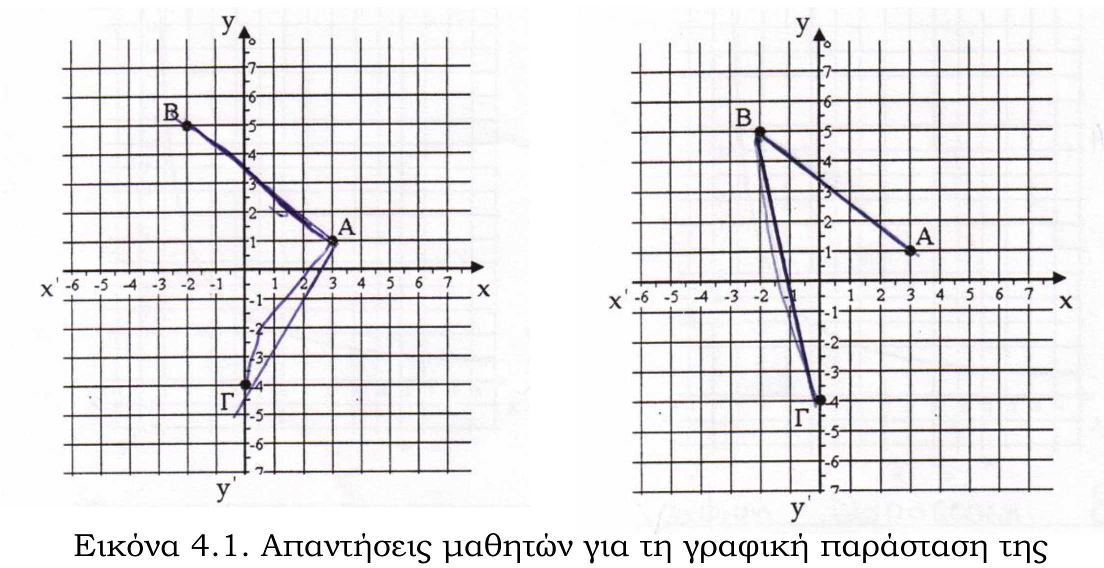
Από τον Πίνακα 4.3 παρατηρούμε ότι οι μαθητές δεν τα πήγαν καλά σε αυτό το ερώτημα.

Όλοι οι μαθητές (18,18%), που σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση, είδαν ότι η συνάρτηση αυτού του ερωτήματος είναι ίδια με εκείνη του προηγούμενου και για αυτό δεν έφτιαξαν νέο πίνακα τιμών, αλλά χρησιμοποίησαν τις ήδη υπολογισμένες τιμές του πίνακα τιμών του ερωτήματος 1.Β.

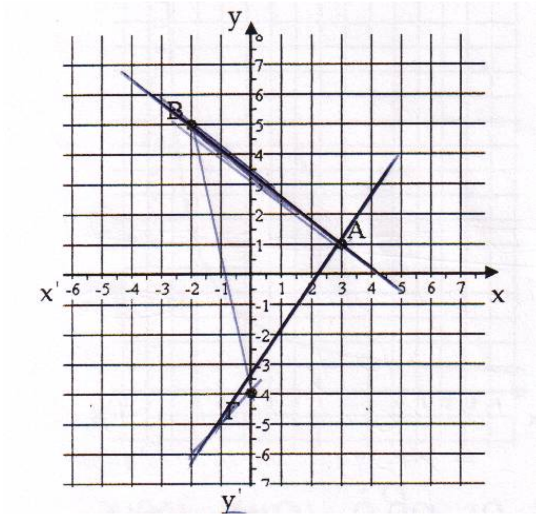
Οχτώ μαθητές (36,36%) σχεδίασαν μια ευθεία διαφορετική από τη σωστή. Από αυτούς τους οχτώ, τρεις μαθητές (Μ2, Μ7 και ΜΑ8) σχεδίασαν μια άσχετη τυχαία ευθεία. Δύο από τους υπόλοιπους πέντε μαθητές (ΜΑ13 και Μ22) σχεδίασαν την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β του 1.Α ερωτήματος. Ένας μαθητής (Μ21) σχεδίασε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α του 1.Α ερωτήματος και ένα ακόμη σημείο από το νέο πίνακα τιμών που έφτιαξε. Το πρώτο σημείο αυτού του νέου πίνακα τιμών είναι ίδιο με το πρώτο σημείο του πίνακα τιμών του ερωτήματος 1.Α. Τα υπόλοιπα τρία σημεία φαίνεται να τα έχει συμπληρώσει, κατά προσέγγιση, με βάση την ευθεία που έχει σχεδιάσει. Οι υπόλοιποι δύο μαθητές (Μ6 και ΜΑ15) σχεδίασαν μια ευθεία με βάση κάποια σημεία από τον πίνακα τιμών που είχαν συμπληρώσει στο ερώτημα 1.Β.

Οχτώ μαθητές (36,36%) σχεδίασαν κάτι άλλο και όχι ευθεία, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3. Πέντε από αυτούς τους μαθητές τοποθέτησαν σημεία στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Δύο από αυτούς τους μαθητές (ΜΑ14 και Μ19) τοποθέτησαν μερικά άσχετα σημεία στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Δύο μαθητές (ΜΑ1 και ΜΑ11) τοποθέτησαν τα σημεία που βρήκαν στον πίνακα τιμών, αλλά δε σχεδίασαν την ευθεία. Και ένας μαθητής (ΜΑ16) έφτιαξε νέο πίνακα τιμών για τη συνάρτηση, τον συμπλήρωσε λάθος και έπειτα τοποθέτησε τα σημεία που βρήκε.

Από τους άλλους τρεις μαθητές από τους οχτώ (Μ9, ΜΑ17 και ΜΑ18), ο μαθητής ΜΑ18 σχεδίασε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ και ο μαθητής Μ9 τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Ο μαθητής ΜΑ17 έφερε τις ευθείες που διέρχονται από τα σημεία Α και Β η μία και Α και Γ η άλλη, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2 .



Εικόνα 4.1. Απαντήσεις μαθητών για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο ψ = 2x + 1



Εικόνα 4.2. Απάντηση μαθητή για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο ψ = 2x + 1

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι οι μαθητές μπερδεύτηκαν με τα σημεία που υπήρχαν ήδη σχεδιασμένα στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

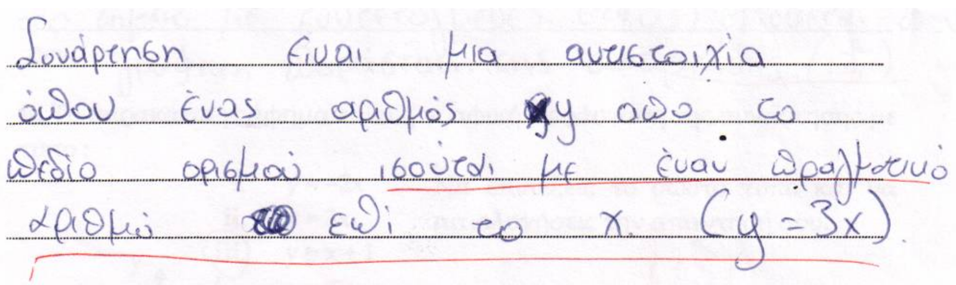
Στον Πίνακα 4.4 βλέπουμε τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 1.Δ του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β), όπου τους ζητείται να γράψουν όλα όσα θα έλεγαν σε ένα φίλο τους, ώστε αυτός να καταλάβει τι είναι η συνάρτηση. Στον Πίνακα αυτό δε λαμβάνουμε υπόψη αν απάντησαν σωστά ή λάθος.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Αντιστοιχία	54,53
Μηχανή	9,1
Γραφική παράσταση	4,55
Τύπος	4,55

Πίνακας Τιμών	0
Κάτι άλλο	4,55
Καμία	22,72

Πίνακας 4.4. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη συνάρτηση

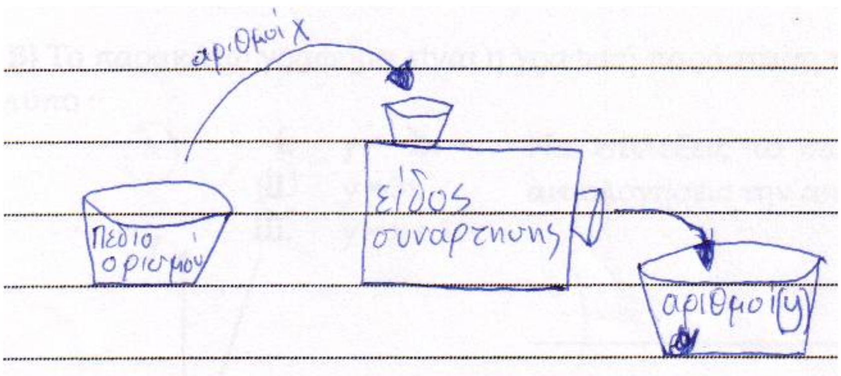
Από τον Πίνακα 4.4 βλέπουμε ότι ένα πολύ μεγάλο μέρος των μαθητών, το 54,53%, αντιλαμβάνεται τη συνάρτηση ως μια αντιστοιχία και σαν απάντηση στο ερώτημα έδωσαν τον ορισμό της συνάρτησης. Στην ερώτηση αυτή όμως δε ζητείται ο ορισμός της συνάρτησης, αλλά ζητείται να γράψουν με δικά τους λόγια όσα ξέρουν για την έννοια. Ζητείται δηλαδή μια πλήρης περιγραφή της εικόνας της έννοιας της συνάρτησης (concept image). Εδώ παρατηρούμε την τάση των περισσότερων μαθητών να αναφερθούν σε μια αντιστοιχία. Ένας μαθητής (ΜΑ18) μάλιστα που περιέγραψε τη συνάρτηση ως ένα τύπο ξεκίνησε την περιγραφή του γράφοντας ότι «*συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία...*» και συνέχισε γράφοντας για το τύπο της συνάρτησης. Συγκεκριμένα έγραψε ότι:


Συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία
όπου ένας αριθμός y από το
πεδίο αριθμού ισούται με έναν πραγματικό
αριθμό επί το x. (y = 3x)

Εδώ ο μαθητής δηλώνει ότι συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία, αλλά αυτό που περιγράφει παρακάτω υποδηλώνει ότι ο μαθητής αντιλαμβάνεται τη συνάρτηση ως ένα τύπο και μάλιστα συγκεκριμένης μορφής, της ψ = αx. Αυτός ο μαθητής στο προηγούμενο ερώτημα δεν κατάφερε να σχεδιάσει σωστά τη γραφική παράσταση, αλλά σχεδίασε μια τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στην Εικόνα 4.1 (δεξιά).

Αυτή η τάση των μαθητών να αναφερθούν στην αντιστοιχία πρέπει να οφείλεται από τη μια στη μη κατανόηση του ερωτήματος και από την άλλη στην ανάγκη τους να γράψουν κάτι που πιστεύουν ότι είναι σίγουρα σωστό. Είχαμε τονίσει στο μάθημα τον ορισμό της συνάρτησης και τους έμεινε έντονα στη μνήμη η λέξη αντιστοιχία με αποτέλεσμα να θέλουν να τη χρησιμοποιήσουν στην περιγραφή τους.

Την πιο σωστή απάντηση στο ερώτημα έδωσαν δύο μαθητές (9,1%) ο Μ20 και ο ΜΑ11. Ο μαθητής Μ20 σχεδίασε αυτό που φαίνεται στην Εικόνα 4.3



Εικόνα 4.3. Σχέδιο μαθητή για την περιγραφή της συνάρτησης

Αυτός ο μαθητής περιγράφει τη συνάρτηση σαν μια μηχανή εισόδου – εξόδου, όπου οι αριθμοί x του Πεδίου Ορισμού μπαίνουν στη μηχανή, γίνονται κάποιες πράξεις ανάλογα με το «είδος» της συνάρτησης (τύπος της συνάρτησης), δίνουν ένα αποτέλεσμα και αυτό το συμβολίζουμε με ψ. Σαν μηχανή εισόδου – εξόδου είχαμε παρουσιάσει τη συνάρτηση στο

3ο μάθημα. Με αυτή τη μηχανή εισόδου – εξόδου μπορεί να γίνει αντιληπτή η διπλή φύση της συνάρτησης, δηλαδή αντικείμενο - διαδικασία αλλά και να γίνουν ευκολότερα αντιληπτοί οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασής της (Tall, McGowen, DeMarois, 2000). Ο μαθητής αυτός είχε απαντήσει σωστά στα προηγούμενα ερωτήματα, εκτός από τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Ο μαθητής ΜΑ11 πρώτα διατύπωσε τον ορισμό της συνάρτησης και στη συνέχεια σχεδίασε μια μηχανή παρόμοια με αυτή του μαθητή Μ20.

Ένας μαθητής (4,55%) έγραψε ότι:

«*η συνάρτηση είναι μια πράξη που βρίσκεις τη γραφική παράσταση*».

Αυτός ο μαθητής (Μ22) φαίνεται να αντιλαμβάνεται τη συνάρτηση ως μια ενέργεια, μια διαδικασία με σκοπό να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση. Δηλαδή, το κυρίαρχο για αυτόν είναι η γραφική παράσταση και όλα τα υπόλοιπα (τύπος, πράξεις, πίνακας τιμών) συντελούν στο να επιτευχθεί ο στόχος.

Ο ίδιος μαθητής δεν κατάφερε να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1.Γ παρόλο που είχε βρει σωστά τρία σημεία της ευθείας στο ερώτημα 1.Β, αλλά ένωσε τα σημεία Α και Β που υπήρχαν ήδη στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Από τον Πίνακα 4.4 βλέπουμε επίσης ότι το 22,72% των μαθητών δεν έδωσαν κάποια απάντηση. Αυτοί είναι πέντε μαθητές (ΜΑ10, ΜΑ12, ΜΑ14, ΜΑ17, ΜΑ19) που δεν τα πήγαν καλά ούτε στα προηγούμενα ερωτήματα.

Από το 54,53% των μαθητών που αναφέρθηκαν σε μια αντιστοιχία στην περιγραφή τους το 61,54% διατύπωσε σωστά τον ορισμό. Σαν σωστή απάντηση για τον ορισμό της συνάρτησης θεωρούμε την παρακάτω και οτιδήποτε πολύ κοντά σε αυτό:

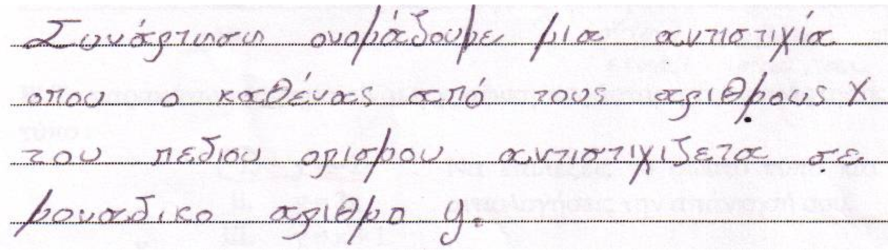
«*Συνάρτηση ονομάζουμε μια αντιστοιχία όπου κάθε αριθμός του Πεδίου Ορισμού αντιστοιχίζεται σε μοναδικό αριθμό*».

Στον Πίνακα 4.5 φαίνεται το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών που έδωσαν είτε σωστό ορισμό της συνάρτησης είτε σωστή απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	50
Λάθος/Ελλιπής	27,27
Καμία	22,73

Πίνακας 4.4. Επίδοση μαθητών

Από τον Πίνακα 4.4 βλέπουμε ότι το 50% των μαθητών έγραψε κάτι που ήταν γενικά σωστό για τη συνάρτηση. Το ποσοστό αυτό είναι ιδιαίτερα χαμηλό αν σκεφτούμε ότι μόνο δύο μαθητές έδωσαν απάντηση σχετική με την ερώτηση. Παρακάτω παραθέτουμε μια από τις απαντήσεις των μαθητών:


Συνάρτηση ονομάζουμε μια αντιστοιχία
οπου ο καθένας από τους αριθμους x
του πεδιου ορισμου αντιστοιχιζεται σε
μοναδικο αριθμο y.

Στον Πίνακα 4.6 φαίνονται τα αποτελέσματα από τις επιδόσεις των μαθητών στο ερώτημα 2.Α.0, όπου δίνεται μια γραφική παράσταση και ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	86,36
Μερικώς σωστή	4,54
Λάθος	9,1

Πίνακας 4.6. Επιδόσεις μαθητών στο ερώτημα 2.Α.0

Από τον Πίνακα 4.6 βλέπουμε ότι οι μαθητές τα πήγαν πολύ καλά σε αυτό το ερώτημα, αφού το 86,36% των μαθητών συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα τιμών. Ένας μαθητής (4,54%) έκανε δύο λάθη στη συμπλήρωση του πίνακα τιμών. Από τους δύο μαθητές (ΜΑ14 και ΜΑ19), που απάντησαν εντελώς λάθος στο ερώτημα αυτό, ο μαθητής ΜΑ14 συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών υπολογίζοντας το διπλάσιο κάθε αριθμού, ενώ ο μαθητής ΜΑ19 συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών τοποθετώντας στη θέση του ψ τον ίδιο αριθμό με το x. Ο μαθητής ΜΑ14 αφενός δεν κατάλαβε τι του ζητήθηκε και αφετέρου επηρεάστηκε από τα πρώτα μαθήματα στα οποία είχαμε μελετήσει μεταξύ άλλων και τη συνάρτηση με τύπο ψ = 2x και θεώρησε μάλλον ότι σε όλες τις συναρτήσεις έχουμε τον ίδιο τύπο. Ο μαθητής ΜΑ19 φαίνεται να μην κατάλαβε τι του ζητείται.

Στον Πίνακα 4.7 βλέπουμε τις επιδόσεις των μαθητών στο ερώτημα 2.Α.1, όπου ζητείται από τους μαθητές να επιλέξουν αν τα ποσά x και ψ είναι ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	36,36
Λάθος	63,64

Πίνακας 4.7. Επιδόσεις μαθητών στο ερώτημα 2.Α.1

Από τον Πίνακα 4.7 βλέπουμε ότι ένα μικρό μέρος των μαθητών (36,36%) απάντησε σωστά στο ερώτημα, ενώ οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν ότι τα ποσά x και ψ είναι ανάλογα ή τίποτα από τα δύο. Από το 63,64% των μαθητών που απάντησαν λάθος, το μεγαλύτερο μέρος απάντησε ότι τα ποσά είναι ανάλογα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.8.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Ανάλογα	36,36
Αντιστρόφως Ανάλογα	36,36
Τίποτα από τα δύο	27,28

Πίνακας 4.8. Απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 2.Α.1

Στον Πίνακα 4.8 βλέπουμε ότι τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν ότι τα ποσά είναι ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα είναι ίσα και ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι πολύ λίγοι (ΜΑ11, Μ5 και Μ20) από τους μαθητές που απάντησαν σωστά μπόρεσαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, ενώ δύο μαθητές (ΜΑ1 και ΜΑ4) από αυτούς, που απάντησαν ότι τα ποσά είναι ανάλογα, έδωσαν σωστή απάντηση αιτιολογώντας γιατί τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Για παράδειγμα ο μαθητής ΜΑ1 απάντησε ότι τα ποσά είναι ανάλογα και αιτιολόγησε γράφωντας «*Γιατί αν τα πολλαπλασιάσεις ο αριθμός είναι σταθερός και κάνει 12*».

Οι μαθητές που απάντησαν ότι τα ποσά είναι ανάλογα και δεν το αιτιολόγησαν φαίνεται να απάντησαν τυχαία και η επιλογή τους ήταν τα ανάλογα ποσά μάλλον γιατί τις περισσότερες φορές συναντούσαν ανάλογα ποσά στις ασκήσεις τους. Από όλα αυτά φαίνεται ξεκάθαρα η δυσκολία των μαθητών να μεταφράσουν τη γραφική παράσταση και να βγάλουν συμπέρασμα για το αν τα ποσά είναι ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα από τα δύο. Ακόμα και μαθητές που συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα τιμών απάντησαν ότι τα ποσά είναι ανάλογα. Δηλαδή ούτε βλέποντας τον πίνακα τιμών ήταν σε θέση να απαντήσουν σωστά. Ωστόσο σε ασκήσεις στην τάξη όπου τους δίνονταν διάφοροι πίνακες τιμών και τους ζητούνταν να βρουν αν οι πίνακες αντιστοιχούσαν σε ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα ή τίποτα οι μαθητές απαντούσαν τις περισσότερες φορές σωστά. Αυτό ίσως συνέβαινε επειδή σύγκριναν μεταξύ τους τους πίνακες τιμών και έβλεπαν ξεκάθαρα τις διαφορές.

Ο μαθητής Μ5 που απάντησε και αιτιολόγησε σωστά έγραψε ότι: «*Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί η γραφική παράσταση είναι καμπύλη (υπερβολή)*».

Αυτή η απάντηση είναι σωστή όταν δίνεται από μαθητή της Β΄ Γυμνασίου αλλά γενικότερα είναι λάθος, αφού η υπερβολή δεν περιγράφει πάντα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και εδώ μπορεί να υπάρξει σύγχυση στο μέλλον. Οι άλλοι δύο μαθητές (ΜΑ11 και Μ20), που απάντησαν και αιτιολόγησαν σωστά, έγραψαν ότι: «*Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί όσο το ένα πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό το άλλο διαιρείται με αυτόν*». Βλέπουμε λοιπόν ότι ο μαθητής Μ5 απάντησε σωστά κρίνοντας από τη γραφική παράσταση, ενώ οι άλλοι δύο ο ΜΑ11 και ο Μ20 κρίνοντας από την αριθμητική σχέση που έχουν οι αριθμοί x και ψ.

Στον Πίνακα 4.9 βλέπουμε το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά στο ερώτημα (2.Α.2).

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	9,09
Λάθος	54,55
Καμία	36,36

Πίνακας 4.9. Επίδοση μαθητών στο ερώτημα 2.Α.2

Δύο μαθητές [9,09] (ο ΜΑ3 και ο Μ5) απάντησαν σωστά σε αυτό το ερώτημα. Ο μαθητής Μ5 είχε απαντήσει σωστά και στα προηγούμενα σχετικά ερωτήματα, ενώ ο μαθητής ΜΑ3, παρόλο που είχε απαντήσει ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, δε μπόρεσε να αιτιολογήσει σωστά και έγραψε ότι: «*Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα επειδή όσο και να πολλαπλασιάζεται το x, το ψ δεν επηρεάζεται από αυτό όπως γίνεται στα ανάλογα ποσά*».

Στον Πίνακα 4.10 βλέπουμε το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών στο ερώτημα 2.Α.3, όπου τους ζητείται να ελέγξουν αν το σημείο με συντεταγμένες (24, 0,5) βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $ψ = \frac{12}{x}$.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	31,82
Λάθος	36,36
Ελλιπής	13,64
Καμία	18,18

Πίνακας 4.10. Επίδοση μαθητών στο ερώτημα 2.Α.3

Στον Πίνακα 4.10 βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος (36,36%) των μαθητών δεν απάντησαν σωστά στο ερώτημα 2.Α.3, ένα αρκετά μεγάλο μέρος των μαθητών (31,82%) απάντησαν σωστά, το 13,64% των μαθητών απάντησαν ότι το σημείο βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της δοσμένης συνάρτησης, αλλά δεν αιτιολόγησαν την απάντησή τους, και το 18,18% των μαθητών δεν απάντησαν καθόλου στο ερώτημα. Βλέποντας την επίδοση των μαθητών σε ολόκληρο το ερώτημα 2.Α συμπεραίνουμε ότι υπήρχε μεγάλη δυσκολία στα ερωτήματα 2.Α.1, 2.Α.2 και 2.Α.3, ενώ στο ερώτημα 2.Α.0 οι μαθητές δε δυσκολεύτηκαν και το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ υψηλό.

Στον Πίνακα 4.11 βλέπουμε την επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 2.Β, όπου τους δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης και τους ζητείται να επιλέξουν τον τύπο της συνάρτησης από την οποία έχει προκύψει αυτό το γράφημα.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	40,91
Λάθος	59,09

Πίνακας 4.11. Επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 2.Β

Στον Πίνακα 4.12 βλέπουμε τις απαντήσεις των μαθητών στο ίδιο ερώτημα.

Απάντηση	**Ποσοστό**
ψ = - 2x	9,09
ψ = 3x	40,91
ψ = x + 1	50

Πίνακας 4.12. Απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα 2.Β

Από τον Πίνακα 4.11 βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (59,09%) απάντησε λανθασμένα. Από τον Πίνακα 4.12 βλέπουμε ότι ένα πολύ μικρό μέρος (9,09%) των μαθητών απάντησε ότι η δοθείσα γραφική παράσταση έχει προκύψει από τη συνάρτηση με τύπο ψ = -2x. Την απάντηση αυτή έδωσαν δύο μαθητές ο Μ6 και ο Μ21. Ο Μ6 δεν αιτιολόγησε την απάντησή του, ενώ ο Μ21 έγραψε ότι: «*είναι η ψ = -2x γιατί η ψ = 3x και η ψ = x + 1 δεν περνάνε από την αρχή των αξόνων*».

Εννέα μαθητές (40,91%) έδωσαν τη σωστή απάντηση. Από αυτούς τους μαθητές, ένας, ο Μ5, αιτιολόγησε σωστά την απάντησή του, ενώ άλλοι δύο μαθητές, ο ΜΑ13 και ο ΜΑ3, αιτιολόγησαν ελλιπώς. Ο μαθητής Μ5 έγραψε: «*Ο σωστός τύπος είναι το ψ = 3x γιατί περνάει από το Ο άρα δεν είναι ο ψ = x + 1 και επειδή βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο άρα δεν είναι το ψ = -2x*». Ο μαθητής ΜΑ3 που αιτιολόγησε ελλιπώς την απάντησή του έγραψε: «δεν είναι ο ψ = -2x και *είναι ο ψ = 3x επειδή όταν η κλίση είναι θετική τότε η ευθεία θα βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο*». Ο μαθητής ΜΑ13 που αιτιολόγησε ελλιπώς την απάντησή του έγραψε: «*Η σωστή απάντηση είναι ψ = 3x επειδή η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων και άρα δεν είναι ο τύπος ψ = x + 1*».

Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 4.12 οι μισοί μαθητές (11) απάντησαν ότι ο σωστός τύπος είναι ο ψ = x + 1. Από τους 11 αυτούς μαθητές οι 4 δεν αιτιολόγησαν την απάντησή τους, ενώ κάποιοι από τους υπόλοιπους αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι η ευθεία περνά από το 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Στις απαντήσεις βλέπουμε ότι πολλοί μαθητές αναφέρθηκαν στα τεταρτημόρια από τα οποία διέρχεται η ευθεία και αυτό σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στη μελέτη των μαθητών μέσω της σχετικής δραστηριότητας στο EucliDraw, ότι ανάλογα με το α αλλάζει η κλίση της ευθείας με εξίσωση ψ = αx.

Στον Πίνακα 4.13 βλέπουμε την επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 3.Α. Εκεί δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες, δίνεται ο τύπος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη μια από αυτές τις ευθείες και ζητείται από τους μαθητές να βρουν τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στην καθεμία από τις άλλες ευθείες.

Απάντηση	**Ποσοστό**
Σωστή	22,73
Λάθος	36,36
Ελλιπής	13,64
Καμία	27,27

Πίνακας 4.13. Επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 3.Α

Σε αυτό το ερώτημα λίγοι μαθητές (22,73%, 5 μαθητές) απάντησαν σωστά και από αυτούς τους πέντε μαθητές μόνο τρεις κατάφεραν να αιτιολογήσουν πλήρως την απάντησή τους. Δηλαδή σωστή απάντηση και σωστή αιτιολόγηση έδωσε μόνο το 13,64% των μαθητών.

Στον Πίνακα 4.14 φαίνεται η επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 3.Β. Σε αυτό το ερώτημα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν αν αυτή η γραφική παράσταση αντιστοιχεί στον τύπο και το πεδίο ορισμού που τους δίνεται.

Απάντηση	Ποσοστό
Σωστή	13,64
Λάθος	72,72
Καμία	13,64

Πίνακας 4.15. Επίδοση των μαθητών στο ερώτημα 3.Β

Στο ερώτημα αυτό μονάχα το 13,64% έδωσε σωστή απάντηση. Αυτοί οι μαθητές εντόπισαν ότι το λάθος οφείλεται στο πεδίο ορισμού και αιτιολόγησαν σωστά την απάντησή τους. Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (72,72%) απάντησε ότι η γραφική παράσταση είναι σωστή. Από αυτούς τους μαθητές αρκετοί ήταν εκείνοι που αιτιολόγησαν την απάντησή τους κατασκευάζοντας έναν πίνακα τιμών και ελέγχοντας αν τα σημεία που βρήκαν ταιριάζουν με τη σχεδιασμένη γραφική παράσταση, μη δίνοντας σημασία στο πεδίο ορισμού.

Ο μαθητής Μ5 που απάντησε σωστά σε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα, εδώ έκανε λάθος και έγραψε τα εξής: «*Η γραφική παράσταση είναι σωστή γιατί συμφωνεί με τον τύπο ψ = x + 1 και δεν περνάει τα όρια των αριθμών του πεδίου ορισμού*».

Παρόλο που το σχολικό βιβλίο δεν αναφέρεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης θεωρούμε ότι είναι πολύ σημαντικό να διδαχθεί γιατί πρώτον μια συνάρτηση προσδιορίζεται από τον τύπο και το πεδίο ορισμού της και όχι μόνο από τον τύπο της και δεύτερον γιατί μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στο μέλλον και να θεωρούν οι μαθητές ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εκτείνεται απεριόριστα δεξιά και αριστερά.

Βλέπουμε επίσης συχνά σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, που παρακολουθούν τη Θετική ή την Τεχνολογική Κατεύθυνση, να κάνουν λάθη όταν ερωτηθούν για τον αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες, επειδή δε μελετούν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Αυτό είναι πολύ πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι στη Β΄ Γυμνασίου, που οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις συναρτήσεις, δε γίνεται καμία αναφορά στο πεδίο ορισμού. Αυτό είναι ένα θέμα που πρέπει να ερευνηθεί.

Στον Πίνακα 4.16 βλέπουμε τις μονάδες που συγκέντρωσαν οι μαθητές στο διαγώνισμα. Το αριστερό άκρο το υπολογίζουμε στην προηγούμενη κλάση, ενώ το δεξί στην ίδια.

Μονάδες	0-3	3-8,5	8,5-11,5	11,5-15	15-17	17-19	19-20
Πλήθος μαθητών	2	9	6	2	2	1	0
Ποσοστό	9,09	40,91	27,27	9,09	9,09	4,55	0

Πίνακας 4.16. Βαθμολογία που συγκέντρωσαν οι μαθητές στο διαγώνισμα

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι το 50% των μαθητών συγκέντρωσε βαθμολογία από 0 έως 8,5 μονάδες, ενώ μόνο το 9,09% βαθμολογία από 0 έως 3 μονάδες. Οι περισσότεροι μαθητές από αυτούς συνήθως δεν έγραφαν τίποτα στα τεστ και τα διαγωνίσματα, αλλά έδιναν λευκή κόλλα. Επομένως σε αυτό το διαγώνισμα τα πήγαν καλύτερα και κατάφεραν να διαχειριστούν με επιτυχία κάποια ερωτήματα.

Έξι επιπλέον μαθητές συγκέντρωσαν βαθμολογία από 8,5 έως 11,5. Εδώ είναι πολύ σημαντικό ότι κάποιοι από αυτούς τους μαθητές συνήθιζαν να γράφουν κάτω από 5 στα Μαθηματικά, ενώ τώρα το ξεπέρασαν αρκετά.

Τέλος, πέντε μαθητές συγκέντρωσαν βαθμολογία από 11,5 έως 19, από τους οποίους δύο πήραν από 15 έως 17 και ένας μαθητής πήρε βαθμό από 17 έως 19. Αυτά τα αποτελέσματα των πέντε μαθητών είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα προηγούμενων εξετάσεων.

Από τα αποτελέσματα του διαγωνίσματος, βλέπουμε ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση άλλαξε η επίδοση όλων των μαθητών, αλλά κυρίως των αδύνατων. Δεν υπήρχε μαθητής που να έδωσε λευκή κόλλα. Όλοι ασχολήθηκαν επιτυχώς έστω και με ένα ερώτημα. Έγινε προσπάθεια από όλους τους μαθητές. Οι μέτριοι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με προηγούμενα τεστ και διαγωνίσματα και οι καλοί μαθητές συγκέντρωσαν περίπου την ίδια βαθμολογία με αυτή που συγκέντρωναν πάντα.

4.3. Αποτελέσματα Ερωτηματολογίου

Στον πίνακα 4.17 φαίνονται τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο (δες Παράρτημα Γ), που μοιράστηκε προς συμπλήρωση μετά την ολοκλήρωση του Διαγωνίσματος (δες Παράρτημα Β), σχετικά με τις εντυπώσεις τους για τα μαθήματα στο εργαστήριο Πληροφορικής. Να σημειώσουμε ότι τα ερωτηματολόγια ήταν ανώνυμα ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να γράψουν την αλήθεια και να αναφέρουν πιο άνετα κάποιο αρνητικό σχόλιο αν υπάρχει, χωρίς να φοβούνται μη τυχόν και το δω εγώ που ήμουν η καθηγήτριά τους.

Ερώτηση	**Επιλογή**	**Ποσοστό**
Ε.1	Α	86,36
	Β	13,64
	Γ	0
	Δ	0
Ε.2	Α	40,9
	Β	59,1
	Γ	0
	Δ	0
Ε.3	Α	72,72
	Β	18,18
(Ένας μαθητής δεν απάντησε)	Γ	4,55
	Δ	0
Ε.4	Α	59,1
	Β	40,9
	Γ	0
	Δ	0

Πίνακας 4.17 . Απαντήσεις των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο

Από τον Πίνακα 4.17, βλέπουμε ότι στην ερώτηση Ε.1 το 86,36% των μαθητών απάντησε ότι του άρεσαν πολύ τα μαθήματα στο εργαστήριο, ενώ στο 13,64% άρεσαν λίγο. Δεν υπήρχε μαθητής που να απάντησε ότι δεν του άρεσαν και τόσο ή που να απάντησε ότι δεν του άρεσαν καθόλου. Στην αιτιολόγηση της απάντησής τους, κάποιοι μαθητές από αυτούς που απάντησαν ότι τους άρεσαν πολύ αυτά τα μαθήματα, έγραψαν τα παρακάτω:

<u>Μου άρεσαν πολύ γιατί</u>:

- *«Είναι πιο διασκεδαστικά από την τάξη και έτσι χρησιμοποιούμε και τους υπολογιστές»*
- *«Είχαν πολλά ενδιαφέροντα πράγματα και δεν ήταν και βαρετά»*
- *«Μου αρέσουν οι υπολογιστές»*
- *«Ήταν πιο ευχάριστο το μάθημα»*
- *«Ήμασταν ήσυχοι και το μάθημα γινόταν πιο ενδιαφέρον»*
- *«Επειδή το μάθημα έγινε πιο ενδιαφέρον με τους υπολογιστές και αλλάξαμε και περιβάλλον»*
- *«Επειδή είχαμε συνδυάσει την Πληροφορική με τα Μαθηματικά και ήταν μια πολύ ωραία εμπειρία»*
- *«Γιατί οι συναρτήσεις ήταν πολύ εύκολο μάθημα»*
- *«Με βοήθησαν πολύ»*

Κάποιοι μαθητές από αυτούς που απάντησαν ότι τους άρεσαν λίγο αυτά τα μαθήματα, έγραψαν τα παρακάτω:

<u>Μου άρεσαν λίγο γιατί</u>:

- *«Ήταν λίγο βαρετά γιατί δε χρησιμοποιήσαμε πολύ τους υπολογιστές»*

- *«Δουλεύαμε όλοι στην τάξη»*

Στην ερώτηση Ε.2 βλέπουμε ότι το 40,9% των μαθητών απάντησε ότι τα μαθήματα αυτά του φάνηκαν πολύ ενδιαφέροντα. Το μεγαλύτερο όμως μέρος των μαθητών (59,1%) απάντησε ότι τα μαθήματα αυτά του φάνηκαν ενδιαφέροντα. Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες από τις απαντήσεις που έγραψαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

<u>Τα μαθήματα αυτά μου φάνηκαν πολύ ενδιαφέροντα γιατί</u>:

- *«Δεν ήταν όπως τα συνηθισμένα μαθήματα στην τάξη»*
- *«Επειδή ανακαλύψαμε ένα νέο και πιο ενδιαφέρον τρόπο μάθησης των Μαθηματικών»*
- *«Γιατί είναι ωραίο να κάνεις Μαθηματικά στον υπολογιστή»*
- *«Συμμετείχα στο μάθημα»*
- *«Γιατί δεν ήταν δύσκολα όπως στα κανονικά Μαθηματικά»*
- *«Γιατί κάλυψα πολλά κενά»*
- *«Γιατί κατάλαβα πολλά πράγματα σχετικά με το μάθημα»*
- *«Γιατί κάναμε πολύ ωραίες ασκήσεις»*

<u>Τα μαθήματα μου φάνηκαν ενδιαφέροντα γιατί</u>:

- *«Γιατί ασχοληθήκαμε με τους υπολογιστές»*
- *«Τα καταλαβαίνω πιο καλά»*
- *«Ήταν η πρώτη φορά και μου άρεσε»*
- *«Μπορούσαμε να κάνουμε γραφικές παραστάσεις στον υπολογιστή και όχι σε ένα τετράδιο όπως συνήθως»*

- *«Επειδή μάθαμε να κάνουμε συναρτήσεις στον υπολογιστή»*

Στην ερώτηση Ε.3, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 4.17, οι περισσότεροι μαθητές (72,72%) απάντησαν ότι τα μαθήματα αυτά τους βοήθησαν να συμμετέχουν περισσότερο στο μάθημα. Λιγότεροι μαθητές (18,18%) απάντησαν ότι τα μαθήματα αυτά τους βοήθησαν να συμμετέχουν στο μάθημα, ένας μαθητής (4,55%) απάντησε ότι τα μαθήματα αυτά δε βοήθησαν και τόσο να συμμετέχει στο μάθημα και ένας μαθητής δεν απάντησε καθόλου σε αυτήν την ερώτηση. Παραθέτουμε κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών.

<u>Τα μαθήματα αυτά με βοήθησαν να συμμετέχω περισσότερο στο μάθημα γιατί</u>:

- *«Επειδή τώρα μου φαίνονται πιο εύκολα από όσο ήταν πριν»*
- *«Επειδή καταλάβαινα καλύτερα το μάθημα κι έτσι μπορούσα να απαντήσω στις ερωτήσεις της καθηγήτριας»*
- *«Γιατί πρόσεχα πιο πολύ»*
- *«Γιατί έμαθα πιο πολλά πράγματα στα Μαθηματικά»*
- *«Γιατί μου άρεσαν περισσότερο αυτά τα μαθήματα»*
- *«Ξεφύγαμε από το συνηθισμένο μάθημα στην τάξη και ήταν πιο ενδιαφέρον το μάθημα στο εργαστήριο»*
- *«Γιατί μου αρέσει να είμαι στο εργαστήριο»*
- *«Κάναμε ησυχία και τα ακούγαμε όλα»*

<u>Τα μαθήματα αυτά με βοήθησαν να συμμετέχω στο μάθημα γιατί</u>:

- *«Επειδή το μάθημα ήταν ευκολότερο»*

- *«Γιατί η καθηγήτρια με βοήθησε πάρα πολύ»*

Ο μαθητής που απάντησε ότι δε τον βοήθησαν και τόσο να συμμετέχει στο μάθημα δεν αιτιολόγησε την απάντησή του.

Στην ερώτηση Ε.4, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 4.17, οι περισσότεροι μαθητές (59,1%) απάντησαν ότι τους αρέσει πολύ να δουλεύουν σε ομάδες με συμμαθητές τους. Λιγότεροι μαθητές (40,9%) απάντησαν ότι τους αρέσει να δουλεύουν σε ομάδα με συμμαθητές τους και δεν υπήρχε μαθητής που να απάντησε ότι δεν του αρέσει και τόσο ή δεν του αρέσει καθόλου να δουλεύει σε ομάδα με συμμαθητές του. Παραθέτουμε κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών.

<u>Μου αρέσει πολύ να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου γιατί</u>:

- *«Έτσι νομίζω ότι μπορούμε να κάνουμε πιο πολλά»*
- *«Είναι καλύτερα και πιο ενδιαφέρον»*
- *«Έτσι αν έχω απορίες θα μπορώ να τις λύσω και μου αρέσει πολύ η συνεργασία»*
- *«Γιατί μπορώ να πω στους συμμαθητές μου αν κάτι είναι σωστό ή λάθος»*
- *«Γιατί όποιος δεν ήξερε κάτι τον βοηθούσε ο συμμαθητής του»*
- *«Είναι πιο διασκεδαστικό»*

<u>Μου αρέσει να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου γιατί</u>:

- *«Επειδή ως ομάδα βοηθάμε ο ένας τον άλλο περισσότερο και τα καταλαβαίνουμε περισσότερο»*
- *«Γιατί με κάνει να συμμετέχω περισσότερο στο μάθημα»*

- *«Γιατί υπάρχει συνεργασία»*

Στην ερώτηση Ε.5 ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τι τους άρεσε περισσότερο στα μαθήματα αυτά. Κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών είναι οι παρακάτω:

- *« Ότι χρησιμοποιούσαμε τους υπολογιστές»*
- *«Ότι χρησιμοποιούσαμε τους υπολογιστές και έτσι το μάθημα έγινε πιο ενδιαφέρον»*
- *«Ότι συνεργαζόμασταν με τους συμμαθητές μου»*
- *«Ότι δεν ήταν δύσκολα και ήμασταν και σε ομάδες»*
- *«Ότι συμμετείχε όλη η τάξη στο μάθημα»*
- *«Ήταν κάτι καινούριο, μια ωραία εμπειρία»*
- *«Αυτό το είδος μάθησης»*

Στην ερώτηση Ε.6 ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τι τους άρεσε λιγότερο στα μαθήματα αυτά. Παραθέτουμε κάποιες από τις απαντήσεις τους:

- *«Ότι κάναμε λίγες ώρες»*
- *«Δεν υπάρχει κάτι που να μην μου άρεσε»*

Στην ερώτηση Ε.7 ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν αν έχουν κάποιο σχόλιο για τα μαθήματα αυτά. Κάποιες από τις απαντήσεις τους είναι οι παρακάτω:

- *«Ελπίζω να το ξανακάνουμε»*
- *«Θα μου άρεσε να συνεχίζαμε να κάνουμε μάθημα στο εργαστήριο»*

- *«Όλα ήταν καλά και εύκολα»*
- *«Τα μαθήματα αυτά ήταν καλύτερα από τα μαθήματα μέσα στην τάξη»*
- *«Όλα ήταν πολύ ωραία»*

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι στη συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών άρεσε πολύ αυτή η σειρά μαθημάτων. Ο σημαντικότερος λόγος ήταν ότι τους αρέσει να χρησιμοποιούν τον ηλεκτρνικό υπολογιστή. Έτσι το μάθημα τους φάνηκε πιο ενδιαφέρον σε σχέση με αυτό που γίνεται στην τάξη. Τους περισσότερους μαθητές τους βοήθησε να συμμετέχουν περισσότερο στο μάθημα. Το γεγονός ότι δούλευαν σε ομάδες άρεσε στους περισσότερους μαθητές και μάλιστα κάποιους τους βοήθησε να συμμετέχουν περισσότερο στο μάθημα αφού αν δεν καταλάβαιναν κάτι τους το εξηγούσαν τα άλλα μέλη της ομάδας τους. Πολλοί μαθητές δήλωσαν ότι θα ήθελαν να κάνουν κι άλλα μαθήματα στο εργαστήριο και τέλος δεν υπήρξε κάποιο αρνητικό σχόλιο για τα μαθήματα αυτά.

Τα ίδια συμπεράσματα βγήκαν και από την ομαδική συνέντευξη που πήραμε από τους μαθητές. Έδειξαν ενθουσιασμένοι και δήλωσαν ότι ήθελαν να συνεχίσουμε τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο εργαστήριο.

4.4. Γενικές παρατηρήσεις

Η σημαντική αλλαγή που παρατηρήθηκε στα μαθήματα στο εργαστήριο ήταν η αλλαγή στη συμπεριφορά των μαθητών. Όπως αναφέρουμε και στο κεφάλαιο 1, το τμήμα αυτό ήταν ένα δύσκολο τμήμα αφού υπήρχαν αρκετοί ζωηροί μαθητές και υπήρχαν και κάποιοι μαθητές με αρνητική στάση προς το μάθημα. Στα μαθήματα στο εργαστήριο αυτοί οι μαθητές έπαψαν να ενοχλούν και μάλιστα έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το μάθημα.

Ταυτόχρονα, επειδή οι δραστηριότητες στον υπολογιστή δεν απαιτούσαν προηγούμενες γνώσεις, αλλά μονάχα παρατήρηση και σκέψη, όλοι οι μαθητές άρχισαν να παρακολουθούν το μάθημα. Από τη μία λοιπόν όλοι παρακαλουθούσαν το μάθημα, από την άλλη δεν υπήρχε κάποιος να αποσπάσει την προσοχή των υπολοίπων και το μάθημα άρχισε να κυλάει πολύ πιο ομαλά. Οι μαθητές άρχισαν να δουλεύουν σαν ομάδα με σκοπό να ανακαλύψουν αυτό το νέο που ψάχναμε μέσω των δραστηριοτήτων και όχι σαν ξεχωριστές μονάδες. Έτσι όλοι οι μαθητές δούλευαν, συμμετείχαν στο μάθημα και μάλιστα έδειξαν και ενθουσιασμένοι από αυτό. Στις δραστηριότητες με τη χρήση του EucliDraw οι μαθητές ενθουσιάζονταν που έβλεπαν ζωντανά όλα όσα λέγαμε.

Η Πληροφορικός προσθέτει σε αυτά ότι κεντρίσαμε το ενδιαφέρον των παιδιών, επειδή κάναμε κάτι διαφορετικό και ουσιαστικό, με αποτέλεσμα να έχουμε θετικά αποτελέσματα.

Για παράδειγμα στη δραστηριότητα, με την οποία θέλαμε να ανακαλύψουν οι μαθητές τι συμβαίνει με το πρόσημο των συντεταγμένων ενός σημείου στο κάθε τεταρτημόριο, οι μαθητές πραγματικά διασκέδαζαν. Έβλεπαν τη δραστηριότητα αυτή, αλλά και τις άλλες σαν παιχνίδι, αφού μπορούσαν να κουνήσουν να σχήματα και να ανακαλύψουν πράγματα. Αυτός ο ενθουσιασμός υπήρχε όμως και στην επίλυση ασκήσεων ύστερα από τις δραστηριότητες. Για παράδειγμα στο 5ο μάθημα, που ήταν το πρώτο που γινόταν στο εργαστήριο, μετά τη δραστηριότητα σχετικά με τις καρτεσιανές συντεταγμένες οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερο ζήλο στην επίλυση των ασκήσεων του 3ου Φύλλου Εργασίας (δες Παράρτημα Α). Ακόμα και μαθητές που δε συμμετείχαν πολύ στο μάθημα παλαιότερα, τώρα είχαν περισσότερη άνεση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Με τη διδακτική εφαρμογή που περιγράφουμε στα παραπάνω κεφάλαια, στόχος μας ήταν από τη μία να διδάξουμε τις συναρτήσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που υπάρχουν στην κατανόηση της έννοιας αυτής και που αναφέρουμε στο κεφάλαιο 2 και από την άλλη να ενεργοποιήσουμε τους μαθητές και να τους κάνουμε να ενδιαφερθούν για το μάθημα.

Ολοκληρώνοντας την εφαρμογή αυτή και αναλύοντας τα αποτελέσματά της, βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα αυτής της σειράς μαθημάτων ήταν τα παρακάτω, από τα οποία τα 5, 6, 8 συμπίπτουν με αυτά των ερευνών των Leinhart, Zaslavsky & Stein, 1990, McCoy, 1991, Kaput & Thompson, 1994, Becker, Ravitz & Wong, 1999, Μπαραλός – Πολιτίδου, 2008.

1. Η εργασία σε ομάδες βοήθησε ιδιαίτερα τους αδύνατους μαθητές να παρακολουθήσουν το μάθημα αφού τις απορίες τους έλυναν τα άλλα μέλη της ομάδας τους κι έτσι μπορούσαν κι αυτοί να συμμετέχουν περισσότερο στο μάθημα.
2. Η αύξηση της συμμετοχής των μαθητών στο μάθημα έκανε και τους υπόλοιπους μαθητές να θέλουν να συμμετέχουν περισσότερο με αποτέλεσμα το μάθημα να γίνεται πιο ενδιαφέρον για όλους και η απόκτηση της νέας γνώσης υπόθεση όλων των μαθητών.

3. Η παρουσίαση της νέας έννοιας με σειρά ευαισθητοποιημένη ως προς τις δυσκολίες και τις ανάγκες των μαθητών βοήθησε στην κατανόηση της νέας γνώσης και την αύξηση της αυτοπεποίθησης των μαθητών για τις μαθηματικές τους ικανότητες.
4. Η παρουσία της Πληροφορικού βοήθησε στην καλύτερη επικοινωνία και συνεννόηση όλων μέσα στην τάξη. Ήταν συνεχώς σε επαφή με τους μαθητές και τους βοηθούσε με αποτέλεσμα οι ίδιοι να αισθάνονται περισσότερη σιγουριά για αυτά που κάνουν, δεν αποθαρρύνονταν αφού τα λάθη τους λύνονταν άμεσα και όσοι τελείωναν πιο γρήγορα δε βαριόντουσαν αφού τους εξηγούσε πώς να πάνε παρακάτω. Επίσης μέσω της Πληροφορικού ήμουν κι εγώ σε επαφή με τους μαθητές περισσότερο απ' ότι συνήθως αφού συζητάγαμε τις δυσκολίες των μαθητών και πράτταμε ανάλογα.
5. Η χρησιμοποίηση των υπολογιστών στη διδασκαλία/εκμάθηση των Μαθηματικών έκανε τους μαθητές να διαμορφώσουν μια καλύτερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά, ενώ αύξησε την αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες.
6. Η διδασκαλία με χρήση Η/Υ συνέβαλε στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που έδειχναν παθητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.
7. Η πραγματοποίηση όλου αυτού του εγχειρήματος έκανε τους μαθητές να αισθανθούν διαφορετικοί, μοναδικοί και προσπάθησαν με τη σειρά τους να δείξουν τον καλύτερό τους εαυτό.
8. Άλλαξε η σχέση τους με εμάς τους καθηγητές. Μας ένιωσαν πιο κοντά τους αφού ο ρόλος μας ήταν πιο πολύ βοηθητικός και

καθοδηγητικός και όχι όπως έχουν συνηθίσει με την κατά μέτωπο διδασκαλία.

Βλέποντας όλη την εφαρμογή στο σύνολό της, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε όλα όσα θα κάναμε διαφορετικά αν επαναλαμβάναμε αυτή τη διδακτική παρέμβαση.

Καταρχάς, από το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στη χρήση του προγράμματος, όταν τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα αντικείμενο, την επόμενη φορά θα φροντίζαμε να έχουν προηγηθεί κάποια μαθήματα στο εργαστήριο με σκοπό την εκμάθηση των βασικών εντολών του προγράμματος.

Δεύτερον, επειδή είχαμε ετοιμάσει περισσότερες δραστηριότητες μα δεν προλάβαμε να τις δούμε, θα αυξάναμε τις ώρες διδασκαλίας στο εργαστήριο ώστε οι μαθητές να ασχοληθούν με περισσότερες δραστηριότητες.

Τρίτον θα χωρίζαμε τις ομάδες ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών ώστε να είναι μεικτές για να μπορούν να βοηθηθούν όλοι στο έπακρο και όχι ανάλογα μόνο με τις φιλίες τους.

Τέταρτον θα κατασκευάζαμε προβλήματα στο EucliDraw στα οποία θα έπρεπε και οι ίδιοι οι μαθητές να κατασκευάσουν κάποια απλά αντικείμενα για να βιώσουν και οι ίδιοι πιο ενεργά με τη συμμετοχή τους την κατασκευή της νέας γνώσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Επίλογος

Από την εφαρμογή αυτής της διδακτικής παρέμβασης στη διδασκαλία των συναρτήσεων βγάλαμε χρήσιμα συμπεράσματα τόσο για τις αλλαγές που επιφέρει μια τέτοια σειρά μαθημάτων (με χρήση υπολογιστών, ύπαρξη ομάδων εργασίας και συμμετοχή όλων των μαθητών, ύπαρξη δεύτερου καθηγητή στην τάξη, παρουσίαση της νέας γνώσης με τρόπο που λαμβάνει υπόψη τις δυσκολίες και τις ανάγκες των μαθητών) στη διδασκαλία των Μαθηματικών στις επιδόσεις των μαθητών, όσο και στη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Ενδιαφέρον θα ήταν να δούμε τι επιπτώσεις θα έχει μια τέτοια διδακτική παρέμβαση σην επίδοση των μαθητών, αλλά και τη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά, αν αυτή εφαρμοστεί σε ολόκληρη την ύλη κάποιας τάξης και όχι μόνο σε ένα κεφάλαιο όπως στην παρούσα εργασία. Δηλαδή, η διδασκαλία των Μαθηματικών τόσο στην Άλγεβρα, όσο και στη Γεωμετρία να πραγματοποιηθεί όπως σε αυτή τη σειρά μαθημάτων κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης χρονιάς και να μελετηθούν ύστερα τα αποτελέσματά της.

Κλείνοντας πρέπει να τονίσουμε για να το γνωρίζουν όσοι επιχειρήσουν να επαναλάβουν μια τέτοια διδακτική παρέμβαση ότι αυτό που έχει μεγάλη σημασία στην επιτυχία της υλοποίησης της εφαρμογής είναι, πρώτον, η συνεργασία δύο καθηγητών μέσα στο εργαστήριο, του καθηγητή Μαθηματικών και του καθηγητή Πληροφορικής. Ενδεχομένως να είναι απαραίτητη η ύπαρξη και δεύτερου Μαθηματικού μέσα στο εργαστήριο, ώστε να μπορούν ταυτόχρονα να βοηθούν τους μαθητές. Δεύτερον, η δημιουργία ομάδων εργασίας ώστε οι μαθητές να συνεργάζονται και να αλληλεπιδρούν με τους συμμαθητές τους προκειμένου να αυξάνεται η συμμετοχή όλων στο μάθημα και να ενεργοποιούνται όλοι οι μαθητές και τέλος η παρουσίαση της νέας γνώσης με τρόπο που να υπολογίζει και να δίνει ιδιαίτερη σημασία στις δυσκολίες και τις ανάγκες των μαθητών.

Επίσης, από την εμπειρία που κατακτήσαμε κατά την υλοποίηση της εφαρμογής αυτής καταλήξαμε στο γεγονός ότι η εκμάθηση των εντολών του προγράμματος είναι αδύνατο να γίνει την ίδια ώρα με τη μελέτη και παρουσίαση των νέων μαθηματικών εννοιών. Αυτή πρέπει να έχει προηγηθεί ώστε οι μαθητές να αισθάνονται εξοικειωμένοι με το περιβάλλον και να μπορούν με περισσότερη αυτοπεποίθηση να δουλέψουν στους υπολογιστές.

Ελπίζουμε με την εργασία αυτή να βάλαμε κι εμείς ένα λιθαράκι σε όλο αυτό το οικοδόμημα που ονομάζεται Διδασκαλία των Μαθηματικών και να δώσαμε ιδέες σε άλλους εκπαιδευτικούς να επιχειρήσουν κάτι αντίστοιχο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 – 6

Φύλλο Εργασίας 1

Πρόβλημα 1

Ένας έμπορος αγοράζει προϊόντα και τα πουλά στη διπλάσια τιμή από αυτήν που τα αγοράζει.

A) Πόσο θα πουλήσει ένα προϊόν που το αγόρασε 1 €;

B) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Τιμή αγοράς	1 €	3 €	7 €	17,50 €	20,25 €
Τιμή Πώλησης					

C) Ο έμπορος αγοράζει ένα προϊόν και πληρώνει **x** €. Ποια θα είναι η τιμή πώλησης **y**, αυτού του προϊόντος;

D) Πόσα χρήματα κοστίζει στον έμπορο ένα προϊόν που το πουλά 17 €;

Πρόβλημα 2

Ένα περίεργο κομπιουτεράκι μπορεί να κάνει μόνο του το εξής: Αν γράψουμε έναν αριθμό στην οθόνη του, τότε τον πολλαπλασιάζει επί 3, έπειτα από αυτό που βρίσκει αφαιρεί 4 και μας εμφανίζει το αποτέλεσμα στην οθόνη.

A) Τι αποτέλεσμα θα μας δώσει αν γράψουμε στην οθόνη του το 3;

B) Τι αποτέλεσμα θα μας δώσει αν γράψουμε στην οθόνη του **x**;

C) Να εκφράσετε τον αριθμό **y** που μας δίνει το κομπιουτεράκι, ως συνάρτηση του αριθμού **x** που του δίνουμε.

D) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση που βρήκατε:

E)

x: (Τιμή που του δίνω)	- 2	$-\sqrt{3}$	0	1	2,5	$\frac{10}{3}$
y: (Τιμή που μου δίνει)						

F) Αν μας δώσει αποτέλεσμα 20, μπορείτε να βρείτε τον αριθμό που του δώσαμε;

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Πέτρος είναι υπέρβαρος και πρέπει να αδυνατίσει για να μην αντιμετωπίσει προβλήματα υγείας. Πηγαίνει στο διαιτολόγο και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Δ: *κ. Πέτρο ανεβείτε στη ζυγαριά σας παρακαλώ*

Ο κ. Πέτρος ανεβαίνει στη ζυγαριά και αυτή δείχνει 95 κιλά.

κ.Π: *Πρέπει να χάσω πολλά κιλά γιατρέ;*

Δ: *Δεν μπορώ να σας πω ακόμα κ. Πέτρο γιατί δεν γνωρίζω το ύψος σας*

κ.Π: *Είμαι 1 μέτρο και 80 εκατοστά*

Ο διαιτολόγος κάνει κάποιους υπολογισμούς και απαντά...

Δ: *κ. Πέτρο για να αποκτήσετε το «ιδανικό» βάρος, πρέπει να χάσετε 23 κιλά*

Ο κ. Πέτρος τον κοιτάζει με απορία…

κ.Π: *Πώς το υπολογίσατε γιατρέ;*

Δ: *Είναι απλό: Πρώτα υπολογίζεις το ύψος σε εκατοστά, έπειτα από αυτό αφαιρείς 100 και αυτό που βρίσκεις το πολλαπλασιάζεις επί 0,90. Το αποτέλεσμα είναι το «ιδανικό» βάρος ενός άνδρα.*

a) Να εκφράσετε το «ιδανικό» βάρος **y** ενός άνδρα, ως συνάρτηση του ύψους του **x** (το ύψος μετρημένο σε εκατοστά).

b) Να κάνετε πίνακα τιμών για τη συνάρτηση που βρήκατε και να υπολογίσετε το ιδανικό βάρος των ανδρών με ύψη:

1,75m, 1,80m, 1,85m, 1,90m

c) Το βάρος ενός άνδρα είναι 90 kg. Αν γνωρίζετε ότι έχει «ιδανικό» βάρος, μπορείτε να βρείτε το ύψος του;

Φύλλο Εργασίας 2

Πρόβλημα 1

Ένας έμπορος υποδημάτων θέλει να ανακαινίσει το μαγαζί του και για να πουλήσει γρήγορα όλα του τα εμπορεύματα, κάνει έκπτωση 50% σε όλα τα είδη.

E) Να εκφράσετε την νέα τιμή πώλησης **y** των προϊόντων του, ως συνάρτηση της παλιάς τιμής πώλησης **x**.

F) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της παραπάνω συνάρτησης και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x:	10 €	20 €	28 €	30 €	56 €
y:					
Λόγος: $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$					

Τι παρατηρείτε;

Πρόβλημα 2

Η απόσταση **s** μεταξύ του Αγίου Νικολάου και του Ηρακλείου είναι 60 χιλιόμετρα. Αν ένα αυτοκίνητο ξεκινήσει από τον Άγιο Νικόλαο, πόσο χρόνο **t** θα χρειαστεί για να φτάσει στο Ηράκλειο αν κινείται με την παρακάτω ταχύτητα **v**;

A) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

v: (Ταχύτητα)	30	60	120
t: (Χρόνος)			
v·t:			

B) Τι παριστάνει το γινόμενο **v·t**;

C) Εκφράστε την ταχύτητα **v** ως συνάρτηση του χρόνου **t** που χρειάζεται το αυτοκίνητο για να διανύσει την απόσταση των 60 χιλιομέτρων.

Άσκηση 1

Ο παρακάτω πίνακας είναι ο πίνακας τιμών της συνάρτησης με τύπο **y** = 3·**x** – 4 που είχαμε δει στο παράδειγμα 2, του φύλλου εργασίας 1, με το περίεργο κομπιουτεράκι.

Ελέγξτε αν τα ποσά **x** και **y** είναι ανάλογα:

x: (Τιμή που του δίνω)	1	2	$\frac{10}{3}$	- 2
y: (Τιμή που μου δίνει)	- 1	2	6	- 10
Λόγος: $\frac{y}{x}$				

Συμπέρασμα:

Άσκηση 2

Γνωρίζοντας ότι τα ποσά **x** και **y** είναι ανάλογα:

a) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών:

b) Εκφράστε το **y** ως συνάρτηση του **x.**

x	1	2	5		
y		6		21	30

Άσκηση 3

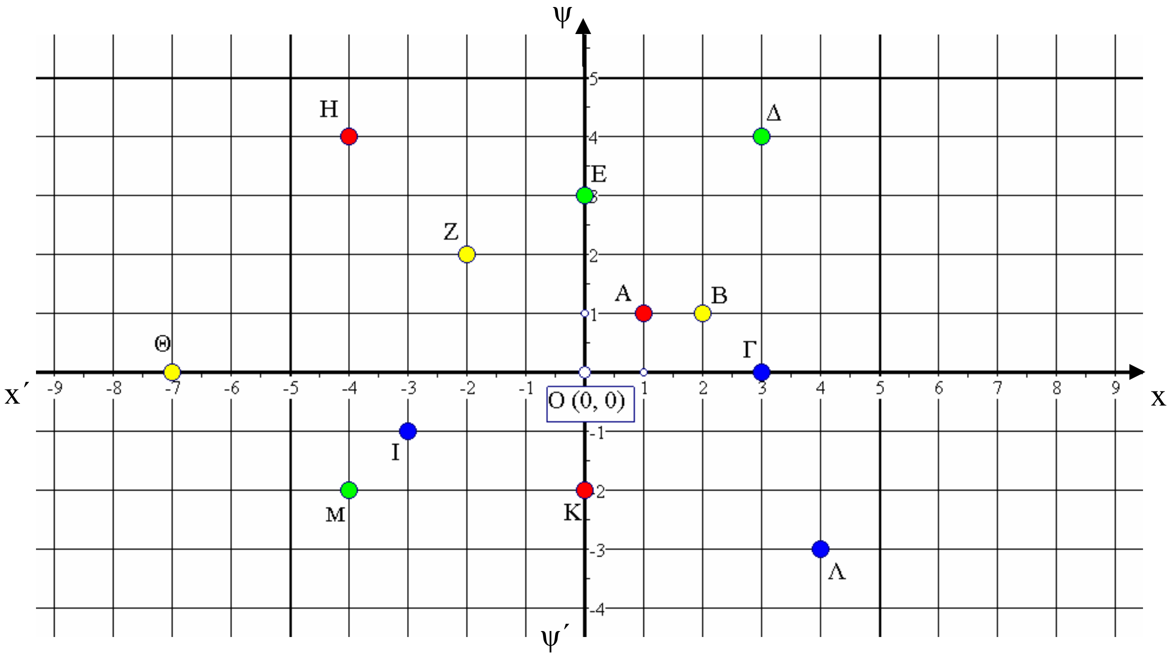
Γνωρίζοντας ότι τα ποσά **x** και **y** είναι αντιστρόφως ανάλογα:

a) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών:

b) Εκφράστε το **y** ως συνάρτηση του **x.**

x	1	2	3	4	6	12
y			4			

Φύλλο Εργασίας 3



Άσκηση 1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις θέσεις των 12 κουκίδων.

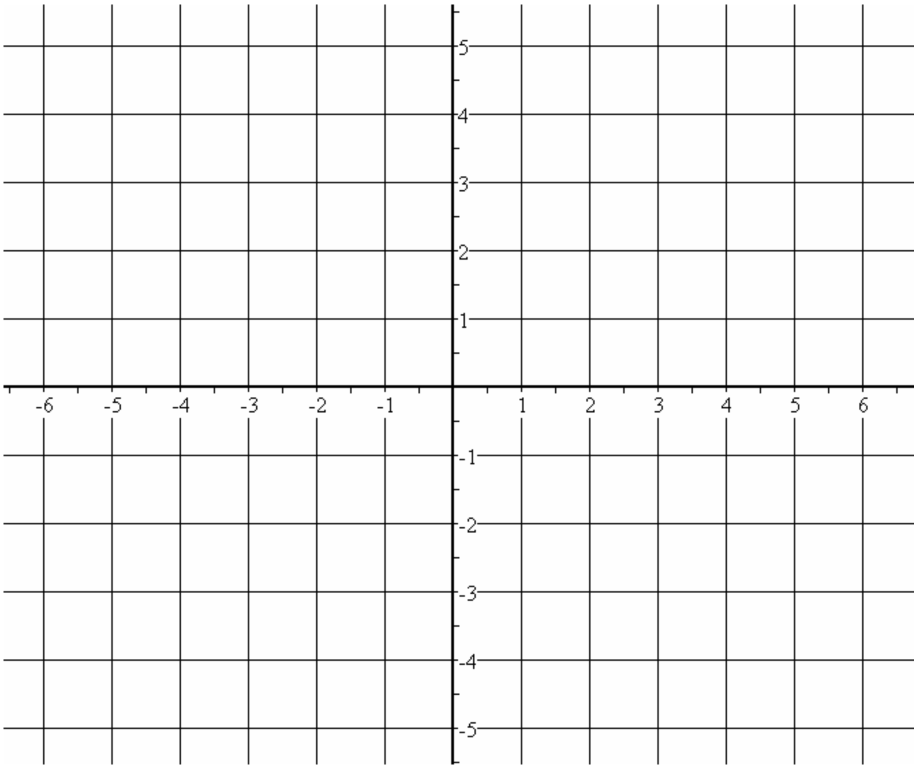
Κουκίδα	Τετμημένη x	Τεταγμένη ψ	Συντεταγμένες (x, ψ)
Α			
Β			
Γ			
Δ			
Ε			
Ζ			
Η			
Θ			
Ι			
Κ			
Λ			
Μ			

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε τους άξονες x′x και y′y σε μιλιμετρέ χαρτί και να τοποθετήσετε τα παρακάτω σημεία:

Α(0, 3)	Γ(- 4, - 2.7)	Ε(- 4.1, 0)
Β(- 1.3, 2.4)	Δ(3.5, 0)	Ζ(2, - 4)

Φύλλο Εργασίας 4



1. Να τοποθετήσετε ανά ζεύγη τα σημεία στο παραπάνω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και να βρείτε τις μεταξύ τους αποστάσεις:

a) Α(1, 2) και Β(5, 2)

Απόσταση ΑΒ =

b) Γ(1, - 1) και Δ(5, - 1)

Απόσταση ΓΔ =

c) Ε(- 1, 4) και Ζ(2, 4)

Απόσταση ΕΖ =

d) Η(- 3, 2) και Θ(- 3, - 4)

Απόσταση ΗΘ =

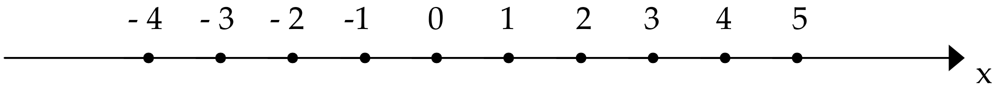
e) Ο(0, 0) και Κ(3, 4)

Απόσταση ΟΚ =

Φύλλο Εργασίας 5

Άσκηση 1

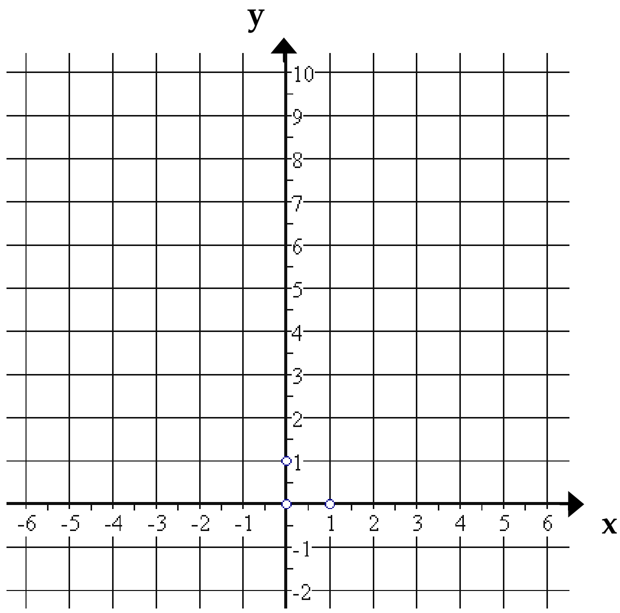
a) Κυκλώστε εκείνους τους αριθμούς **x**, που είναι **ακέραιοι** και είναι από το – 3 (μαζί με αυτό) έως και το 3.



b) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών για τη συνάρτηση με τύπο **y = x²**, όπου στην πρώτη σειρά θα τοποθετήσετε τους αριθμούς **x** που βρήκατε παραπάνω.

x							
y							
Σημείο: (x, y)							

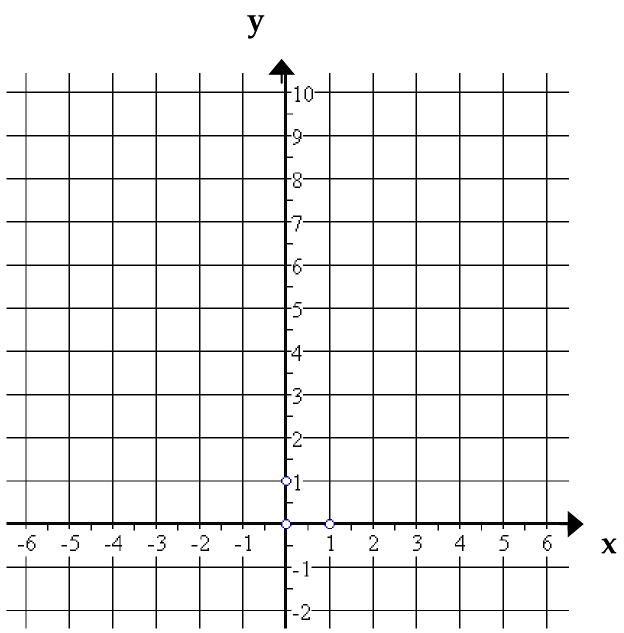
c) Τοποθετήστε τα σημεία **(x, y)** που βρήκατε, στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων:



d) Πώς λέγεται το σύνολο όλων εκείνων των σημείων **(x, y)**, που σχεδιάσατε, για τα οποία ισχύει **y = x²**;

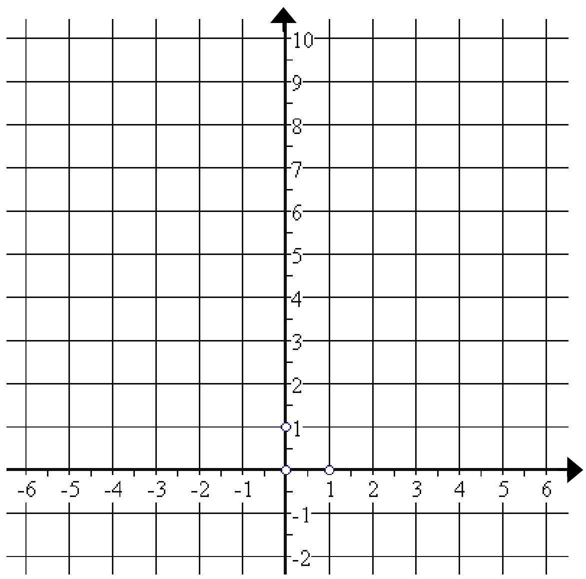
e) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα b και c για τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	- 3	- 2,5	- 2	- 1,5	- 1	0	1	1,5	2	2,5	3
y											
Σημείο: (x, y)											



f) Ποια είναι τώρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης; Τι παρατηρείτε;

g) Ποια θα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης **$y = x^2$**, αν ο x είναι πραγματικός αριθμός μεταξύ του – 3 και του 3;



h) Τι διαφορά παρουσιάζουν οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις;

Άσκηση 1

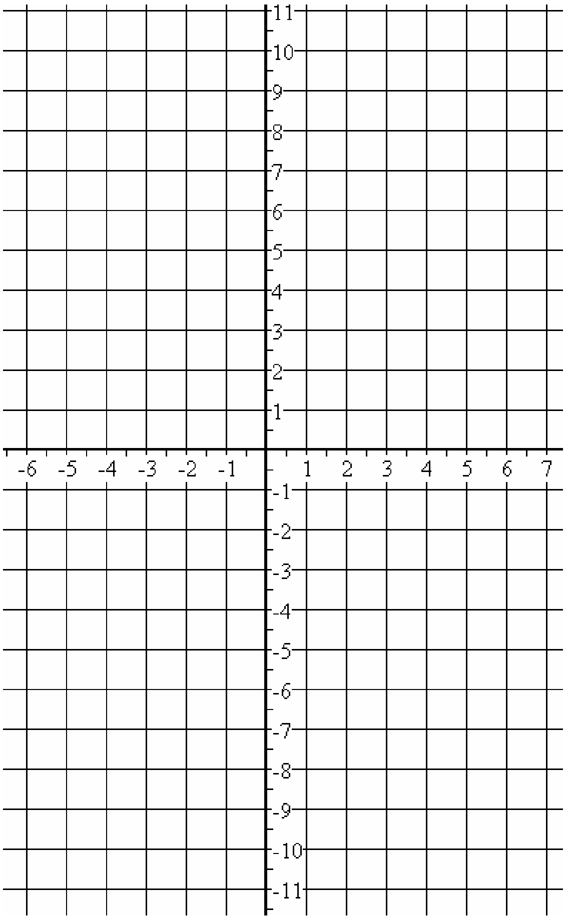
Τα ποσά **x** και **y** του παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα. Συμπληρώστε τον πίνακα.

x	- 4	- 3	- 2	- 1	1	2	3	4	5
y							6		
Λόγος $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$							2		
Σημείο **(x, y)**							(3, 6)		

G) Τι ισχύει για τον λόγο $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$;

H) Εκφράστε τις τιμές του ποσού **y**, ως συνάρτηση των τιμών του ποσού **x**.

I) Τοποθετήστε τα σημεία που βρήκατε στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων:

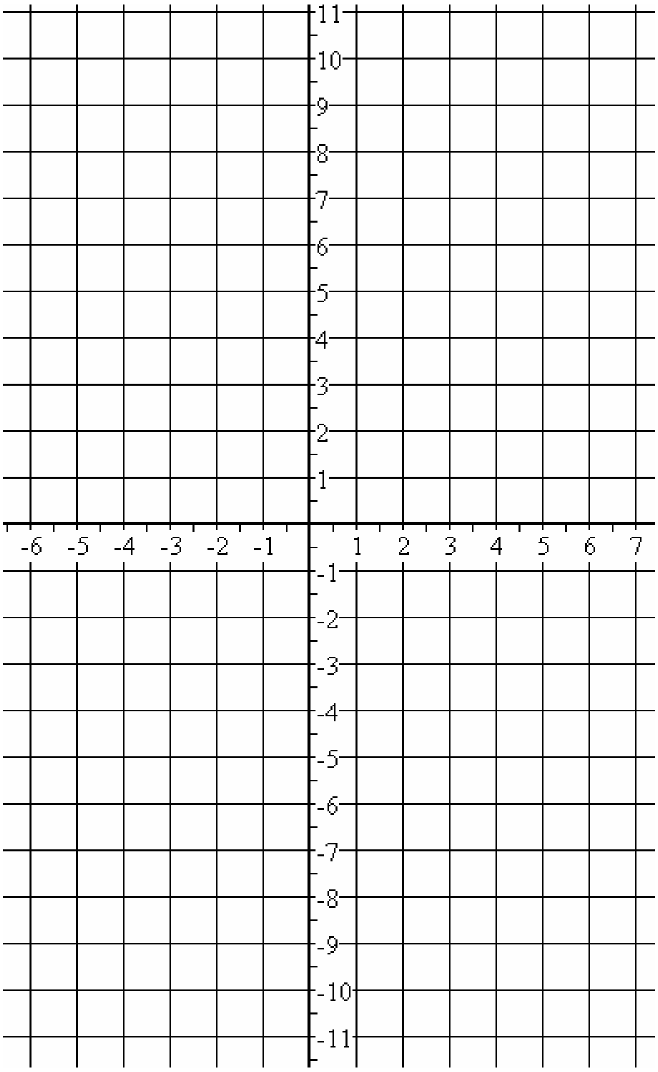


J) Πού βρίσκονται τα σημεία αυτά;

K) Ποια θα είναι η γραφική παράσταση, αν ο x είναι πραγματικός αριθμός μεταξύ του – 4 και του 5;

Άσκηση 2

a) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.



$$\mathbf{y = 3x}$$

b) Ποιός είναι ο λόγος $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$;

....

c) Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

$$\mathbf{y} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}$$

d) Ποιός είναι ο λόγος $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$;

e) Πώς είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τύπο:

$$\mathbf{y = \alpha x}$$

f) Ποιός είναι ο λόγος $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ αυτής;

Δραστηριότητα 1

Ανοίξτε το αρχείο «***Ο ρόλος του α***» του EucliDraw. Κάντε κλικ πάνω στο γκρι σκούρο ή γκρι ανοιχτό κουτάκι και παρατηρήστε την ευθεία.

a) Τι συμβαίνει όταν το *α* είναι θετικό;

b) Τι συμβαίνει όταν το *α* είναι αρνητικό;

c) Τι συμβαίνει όταν το *α* είναι μηδέν;

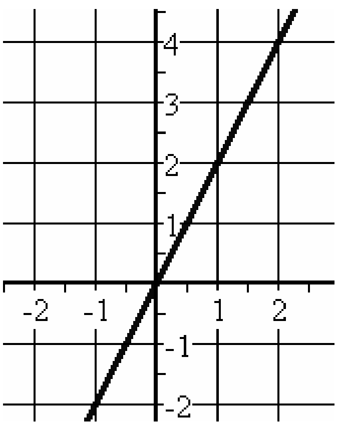
d) Πώς θα λέμε τον αριθμό *α* για μια ευθεία με εξίσωση **y = *α*x;**

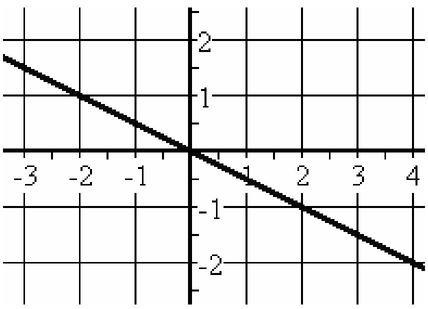
Άσκηση 3

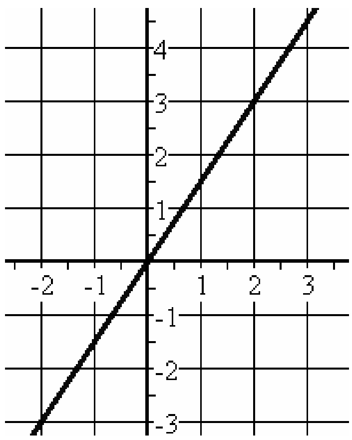
a) Να βρείτε την κλίση *α* των ευθειών με εξισώσεις:

y = 1,2·x **y = – 4·x** **y = x**

b) Να βρείτε την κλίση *α* των παρακάτω ευθειών και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της καθεμίας.







Φύλλο Εργασίας 6

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους **y = 1,2x** και **y = 1,2x + 4**.

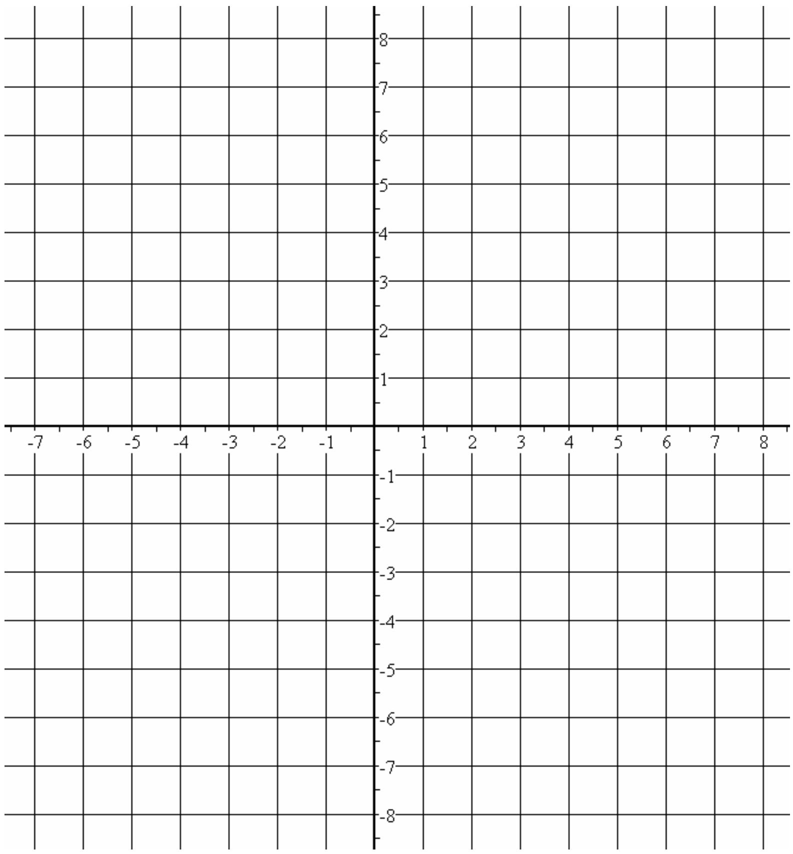
i) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών για τις παραπάνω συναρτήσεις:

x							
y Για την y = 1,2x							
y Για την y = 1,2 x + 4							

Τι σχέση έχουν οι τιμές του y της τρίτης σειράς του πίνακα με αυτές του y της δεύτερης σειράς του πίνακα;

---

j) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της **y = 1,2x** και με τη βοήθεια αυτής σχεδιάστε στη συνέχεια τη γραφική παράσταση της **y = 1,2x + 4.**



k) Τι σχέση έχουν οι δύο γραφικές παραστάσεις; Έχουν την ίδια κλίση;

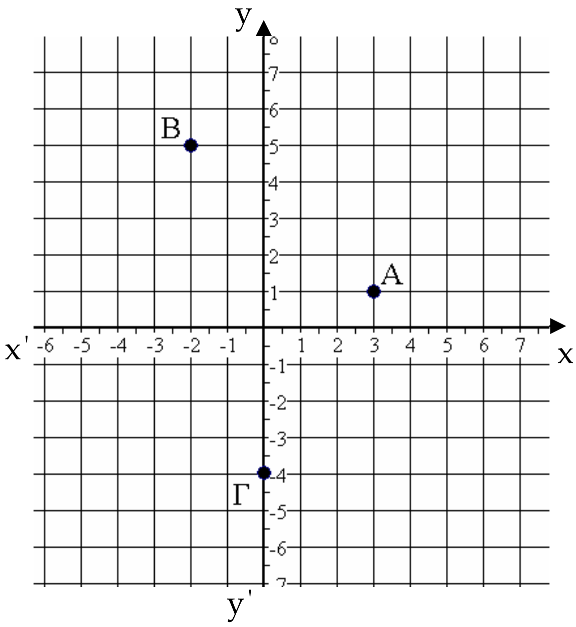
l) Ποια θα είναι η γραφική παράσταση της **y = 1,2x – 3**;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο



Α) Να βρεις τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

Β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

y = 2x + 1.

Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1	3	6	0	–2
y					

Γ) Να κάνεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο **y = 2x + 1** στο σύστημα αξόνων που βρίσκεται παραπάνω.

Δ) Θέλεις να εξηγήσεις σε ένα φίλο ή μια φίλη σου τι είναι η **συνάρτηση**. Γράψε παρακάτω όλα όσα θα έλεγες ώστε να καταλάβει.

....

....

....

....

....

....

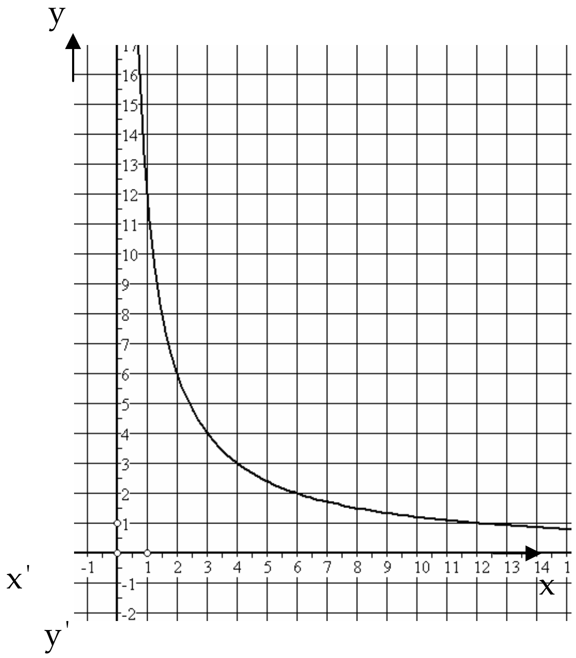
....

....

....

Θέμα 2ο

Α) Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί.



x	2	3	4	6	1	12
y						

1. Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσεις.

   Τα ποσά x και y είναι:
   i. Ανάλογα
   ii. Αντιστρόφως ανάλογα
   iii. Τίποτα από τα δύο

   Γιατί; ....

....

2. Να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x.

....

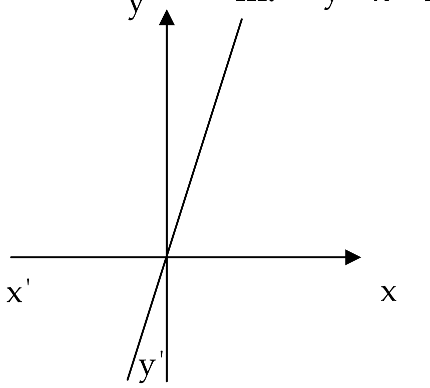
3. Να ελέγξεις αν το σημείο με συντεταγμένες (24, 0,5) βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $\psi = \frac{12}{x}$.

....

Β) Το παρακάτω γράφημα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο :

i. y = –2x
ii. y = 3x
iii. y = x + 1

Να επιλέξεις το σωστό τύπο και να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.



....

....

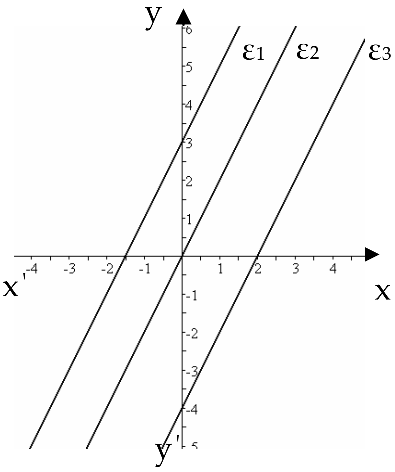
....

....

Θέμα 3ο

Α) Οι ευθείες του διπλανού σχήματος είναι παράλληλες. Αν η ευθεία $ε_1$ είναι το γράφημα της συνάρτησης **y = 2x + 3**, να βρεις τις συναρτήσεις των οποίων το γράφημα είναι οι άλλες δύο ευθείες.

Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.



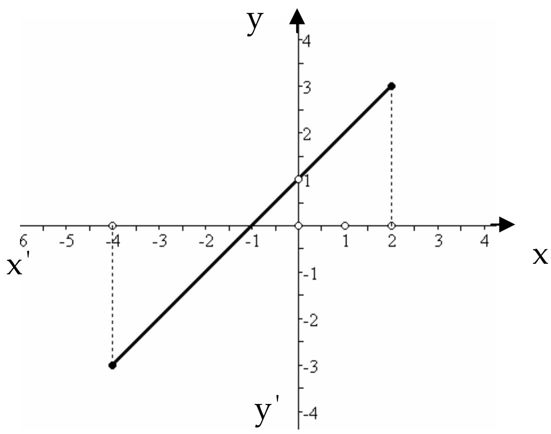
....

....

....

....

Β) Ζητήθηκε από ένα συμμαθητή σου της Β' Γυμνασίου να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο **y = x + 1** και Πεδίο Ορισμού όλους τους ακέραιους αριθμούς μεταξύ του –4 και του 2. Εκείνος σχεδίασε την παρακάτω γραφική παράσταση. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.



....

....

....

....

....

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις

Τις τελευταίες εβδομάδες κάναμε μαθήματα στο εργαστήριο.
Ποια είναι η άποψή σου για αυτά τα μαθήματα;

1) Α. Μου άρεσαν πολύ
Β. Μου άρεσαν λίγο
Γ. Δε μου άρεσαν και τόσο
Δ. Δε μου άρεσαν καθόλου

Γιατί;

2) Α. Μου φάνηκαν πολύ ενδιαφέροντα
Β. Μου φάνηκαν ενδιαφέροντα
Γ. Δε μου φάνηκαν και τόσο ενδιαφέροντα
Δ. Δε μου φάνηκαν καθόλου ενδιαφέροντα

Γιατί;

3) Α. Με βοήθησαν να συμμετέχω περισσότερο στο μάθημα
Β. Με βοήθησαν να συμμετέχω στο μάθημα
Γ. Δε με βοήθησαν και τόσο να συμμετέχω στο μάθημα
Δ. Δε με βοήθησαν καθόλου να συμμετέχω στο μάθημα

Γιατί;

4) Α. Μου αρέσει πολύ να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου
Β. Μου αρέσει να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου
Γ. Δε μου αρέσει και τόσο να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου
Δ. Δε μου αρέσει καθόλου να δουλεύω σε ομάδα με συμμαθητές μου

Γιατί;

5) Τι σου άρεσε περισσότερο στα μαθήματα αυτά;

6) Τι σου άρεσε λιγότερο στα μαθήματα αυτά;

7) Γράψε, αν έχεις, κάποιο άλλο σχόλιο για τα μαθήματα αυτά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Abu-Naja, M. (2008). The effect of graphic calculators on Negev Arab pupils' learning of the concept of families of functions. *Research in Mathematics Education, 10(2),* 183 – 202.

Becker, H., Ravitz, J., Wong Y. (1999). Teacher and teacher directed student use of computers and software. *Teaching, Learning and Computing* :1998 National survey, Report 3, University of California and University of Minnesota.

Breidenbach, D. E., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247 – 285.

Cooney, T. J. (1999). Examining what we believe about beliefs, In E. Pehkonen and G. Torner (Eds), Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics, *Proceedings of the workshop in Oberwolfach,* pp. 18 – 23.

Cuoco, A. A. (1994). Multiple Representations for Functions, in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MAA Notes 33, (pp. 121 – 140). Washington DC: MAA.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85 – 106). United States: The Mathematical Association of America.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2)*, 1 – 16.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 5, 533-556.

Elliot, J. (1991). Action Research for Educational Change, *Buckingham: Open University*

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 105 – 121.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti M.A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 317 – 333.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calculus. In A. Gutierrez, P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 237 – 273.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. Educational Psychology, 24(5), 645 – 657.

Goldenberg, P., Lewis, P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In G, Harrel & E. Dubinsky (eds.), *The Concept of*

Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25, 235 – 260. Washington, DC 20036, MAA.

Goldin, G. A. (1999). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In E. Pehkonen and G. Torner (Eds), Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics, *Proceedings of the workshop in Oberwolfach,* pp. 37 – 42.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In G. Leader, E. Pehkonnen, G. Toerner (Eds.), *Belief: A hidden variable in mathematics education?* (59 – 72). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25/2, 116 – 140.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5 – 23.

Hannula, S. M. (2002). Attitude towards Mathematics: Emotions, Expectations and Values. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 25 – 46.

Hannula, S. M. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165 – 178.

Hitt F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123 – 134.

Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and Metacognitive Factors Involved in the Learning of Mathematics: The Case of Graphic Representations of Functions. In H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi & A. Sierpinska (Eds), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271 – 288). Reston, Virginia: NCTM.

Kaput, J. & Thompson P. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 674 – 684.

Lagrange, J.B. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10, 143 – 189.*

Leinhart, G., Zaslavsky O., Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: asks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1 – 64.

Li, L. & Tall, D. O. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Tsukuba, Japan, 2, 41 – 48.

McCoy L. (1991). The effect of geometry tool software on high school geometry achievement. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 10(3), 51 – 57.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*, New York Macmillan, pp. 575 – 596.

Philippou, G. N. & Christou, C. (2000). Teachers' conceptions of Mathematics and Students' Achievement: A cross-cultural study based on results from the TIMSS. *Studies in Educational Evaluation*, 25, 4, 379 – 398.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229 – 254.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22, 1 – 36.*

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59 – 84). United States: The Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25 – 58). United States: The Mathematical Association of America.

Shoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education* 1989, Vol. 20, No. 4, 338 – 355.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12,151 – 169.

Tall, D. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. *Proceedings of PME 15*, Assisi, 1, 104 – 111.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, 289 – 325, Dordrecht: Kluwer (1997).

Tall D., M. McGowen M., DeMarois P., (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, Proceedings of PME-NA, 1, 247-254.

Vale, C., Leder, G. (2004). Student views of computer-based mathematics in the middle years: Does gender make a difference? *Educational Studies in Mathematics.* 56, 287-312.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14(3), 293 – 305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), 356 – 366.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, ΟΕΒΔ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). Βιβλίο Επαιδευτικού, Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, ΟΕΒΔ.

Μπαραλός, Γ. & Πολιτίδου, Ε. (2008). Οι στάσεις των μαθητών και μαθητριών της Α΄ Γυμνασίου για τη χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Πρακτικά 25ου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε. σελ. 739 – 752.

Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008, ΟΕΒΔ.

Τουμάσης, Μπ. (1999). Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών, Κωστόγιαννος, Αθήνα.

Τουμάσης, Μπ., Αρβανίτης, Τ. (2008). Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ, Σαββάλας, Αθήνα.

Φιλίππου, Γ. (2007). Στάσεις, πεποιθήσεις και μάθηση των Μαθηματικών. Πρακτικά 2ου Συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ. σελ. 66-92.