Πανεπιστημιο Κρητης

Σχολη Θετικων & Τεχνολογικων Επιστημων

Τμημα Μαθηματικων

Μεταπτυχιακή εργασία

Αποσβεση Κυκλικων Μεσων Μετασχηματισμου Fourier Μετρων

Χρήστος Χατζηφούντας του Εμμανουήλ

Εποπτεύων καθηγητής: Μιχάλης Παπαδημητράκης

ΗΡΑΚΛΕΙΟ — 2009

University of Crete

School of Sciences & Engineering

Department of Mathematics

Master Thesis

Decay of Circular Means of Fourier Transform of Measures

Christos Emmanouil Chatzifountas

Supervisor: Michael Papadimitrakis

HERAKLION — 2009

Την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν:

- Παπαδημητράκης Μιχάλης, αναπληρωτής καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης, εποπτεύων καθηγητής.
- Κολουντζάκης Μιχάλης, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- Θεμιστοκλής Μήτσης, επίκουρος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Εισαγωγη

Από την θεωρία μέτρου γνωρίζουμε το θεώρημα του Steinhaus για μια ιδιότητα των σύνολων θετικού μέτρου: αν το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει θετικό μέτρο τότε το $A - A$ περιέχει μια περιοχή του μηδενός . Παρόλο που το θεώρημα αυτό είναι σχετικά απλό στην διατύπωση και την απόδειξη του, η γενίκευση του στις ανώτερες διαστάσεις έχει αποδειχτεί ένα από τα πιο σύγχρονα και δύσκολα προβλήματα της γεωμετρικής θεωρίας μέτρου, το λεγόμενο "Falconer's distance set conjecture" το οποίο διατυπώνεται ως εξής. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αν το A έχει διάσταση Hausdorff μεγαλύτερη της μονάδας τότε τό σύνολο αποστάσεων του, $\Delta A = \{|x-y| : x \in A, y \in A\}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Ο Pertti Mattila πρώτος χρησιμοποίησε προχωρημένες τεχνικές αρμονικής ανάλυσης και γεωμετρικής θεωρίας μέτρου για την επίλυση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα ξεκίνησε από την εξής παρατήρηση. Έστω ένα μέτρο μ με φορέα που περιέχεται στο A, και $\nu_\mu(B)$ η προώθηση αυτού του μέτρου: $\nu_\mu(B) = \mu \times \mu\{(x,y) : |x-y| \in B\}, B \subset \mathbb{R},$ B Borel σύνολο. Τότε αν ο μετασχηματισμός Fourier του ν_μ είναι στον L_2 συνεπάγεται ότι $|\Delta(E)| > 0$. Η τεχνική που ανέπτυξε ο Mattila περιέχει εκτιμήσεις σφαιρικών μέσων μετασχηματισμού Fourier μέτρων. Το θεώρημα που θα αναλυθεί παρακάτω δίνει εκτίμηση κυκλικών μέσων μετασχηματισμού Fourier μέτρων, οφείλεται στον Thomas Wolff και είναι το καλύτερο αποτέλεσμα για την "distance set conjecture" στο επίπεδο, που υπάρχει μέχρι σήμερα.

Abstract

From measure theory we know the Steinhaus theorem for a property all sets with positive lebesgue measure have: if $A \subseteq \mathbb{R}$ with positive measure then the set $A - A$ contains a neighborhood centered on 0. In spite of the theorem being relative easy to prove, it's analog in greater dimensions consists one of the most difficult and modern problems in geometric measure theory, the well-known "Falconer's distance set conjecture" which is formulated as follows. Let A be a subset of $\mathbb{R}^2$. If A has Hausdorff dimension greater than 1, then it's distance set, $\Delta A = \{|x-y| : x \in A, y \in A\}$ has positive Lebesgue measure. Pertti Mattila first used advanced harmonic analysis and geometric measure theory techniques in order to solve the problem. More specific he started from the following observation. Let μ be a measure supported in A and $\nu_\mu(B)$ it's push-forward measure, supported in $|\Delta A|$: $\nu_\mu(B) = \mu \times \mu \left\{(x,y) : |x-y| \in B\right\}, B \subset \mathbb{R},\ B$ Borel set. Then if the Fourier transform of ν_μ is an L^2 function, $|\Delta(E)|$ must have positive Lebesgue measure. The technique developed by Mattila involves estimating spherical averages of Fourier transform of measures. Here we will analyze a theorem which gives an estimate for circular averages of Fourier transform of measures, is due to Thomas Wolff and so far is the best known result for the "distance set conjecture in the plane".

Το θεωρημα και η αποδειξη του

Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας πως συνδέονται οι κυκλικοί μέσοι με την εικασία των distance set. Γι' αυτό το σκοπό θεωρούνται γνωστά τα παρακάτω

(I) Η διάσταση Hausdorff ενός συμπαγούς συνόλου E συμπίπτει με τον αριθμό

$$\sup\{a : \text{ υπάρχει μέτρο πιθανότητας } \mu \text{ πάνω απο το } E \text{ με } I_\alpha(\mu) < +\infty\}$$

(II)

$$\int\int |x-y|^{-\alpha} d\mu(x) d\mu(y) = c_\alpha \int |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\xi|^{\alpha-n} d\,\xi$$

(III) Αν σ_R είναι το επιφανειακό μέτρο πάνω στον κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα R τότε

$$\widehat{\sigma_R} = 2(R|x|)^{\frac{1}{2}} \cos\bigl(2\pi(R|x| - \frac{1}{8})\bigr) + \Omega_R(x)$$

Όπου $\Omega_R(x) = \mathcal{O}\bigl((R|x|)^{-\frac{3}{2}}\bigr)$ για $R|x| > 1$ και $\Omega_R(x) = \mathcal{O}\bigl((R|x|)^{-\frac{1}{2}}\bigr)$ για $R|x| < 1$

(IV) Αν $\widehat{\mu} \in L^2$ τότε $\mu = f dx$ για κάποια $f \in L^2$

Έστω σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^2$, με $\dim_{\mathcal{H}} E = \alpha$. Από το (I), υπάρχει κάποιο μέτρο πιθανότητας μ στο E και πεπερασμένη α-διαστατη ενέργεια. Θεωρούμε $d\nu_\mu$ την προώθηση του μ στο σύνολο των αποστάσεων του E, το $\Delta E = \{|x-y| : x, y \in E\}$. Δηλαδή

$$d\nu_\mu(t) = |x-y| d\mu(x) d\mu(y), \quad (t = |x-y|)$$

Το ν_μ έχει φορέα το ΔE και $I_\alpha(\mu) = \int t^{-\alpha}\, d\nu_\mu$. Αν δείξουμε ότι $\widehat{\nu_\mu} \in L^2$ τότε από το (IV) υπάρχει $f \in L_2$ με $d\nu_\mu(t) = f dt$ και επειδή $I_\alpha(\mu) > 0$ έχουμε ότι $|\Delta E| > 0$. Για τεχνικούς λόγους θα χρησιμοποιήσουμε το μέτρο $\nu = d\nu(t) = e^{i\frac{\pi}{4}} t^{-\frac{1}{2}} d\nu_\mu(t) + e^{-i\frac{\pi}{4}} |t|^{-\frac{1}{2}} d\nu_\mu(-t)$ το οποίο έχει φορέα το $\Delta E \cup -\Delta E$.

Λήμμα. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(1) $\widehat{\nu} \in L_2(\mathbb{R})$,

(2) *Ισχύει ότι*

$$\int_{R=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right) \right|^2 d\,\theta \right)^2 R\, dR \leq \infty$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(k) &= e^{i\frac{\pi}{4}} \int |x-y|^{-\frac{1}{2}} e^{-2i\pi k|x-y|}\, d\mu(x) d\,\mu(y) + e^{-i\frac{\pi}{4}} \int |x-y|^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi k|x-y|}\, d\mu(x) d\,\mu(y) \\ &= 2\int |x-y|^{-\frac{1}{2}} \cos(2\pi(k|x-y| - \frac{1}{8})) d\mu(x)\, d\mu(y) \end{aligned}$$

Από την άλλη, για $k > 0$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(ke^{i\theta}\right)\right|^2 d\,\theta &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\sigma_k} * \mu \, d\mu \\
&= 2k^{-\frac{1}{2}} \iint |x-y|^{-\frac{1}{2}} cos(2\pi k|x-y| - \frac{1}{8}) \, d\mu(x) \, d\mu(y) + \iint \Omega(k|x-y|) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&= 2k^{-\frac{1}{2}} \iint |x-y|^{-\frac{1}{2}} cos(2\pi k|x-y| - \frac{1}{8}) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&+ \mathcal{O}\left(\iint_{k|x-y|>1} (k|x-y|)^{-\frac{3}{2}} \, d\mu(x) \, d\mu(y) \right) \\
&+ \mathcal{O}\left(\iint_{k|x-y|\leq 1} (k|x-y|)^{-\frac{1}{2}} \, d\mu(x) \, d\mu(y) \right) \\
&= 2k^{-\frac{1}{2}} \iint |x-y|^{-\frac{1}{2}} cos(2\pi k|x-y| - \frac{1}{8}) \, d\mu(x) \, d\mu(y) + \mathcal{O}\left(\iint (k|x-y|)^{-\alpha} \, d\mu(x) \, d\mu(y) \right)
\end{aligned}
$$

Γεια κάθε $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Άρα

$$
\widehat{\nu}(k) = |k|^{\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(ke^{i\theta}\right)\right|^2 d\,\theta + \mathcal{O}\big(|k|^{\frac{1}{2}-\alpha} I_\alpha(\mu)\big)
$$

Ο δεύτερος όρος είναι στον $L^2_{\{|k|>1\}}$. Επειδή πάντα $\widehat{\nu} \in L^2[-1,1]$ τελικά καταλήγουμε ότι $\widehat{\nu}(k)$ είναι L_2 αν και μόνο αν το $|k|^{\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(ke^{i\theta}\right)\right|^2 d\,\theta$ είναι L_2. □

Πρόταση. *Έστω $\alpha > 1$ τέτοιο ώστε, αν μ είναι μέτρο με συμπαγή φορέα και πεπερασμένη α-διάστατη ενέργεια να ισχύει*

$$
\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\mu}(Re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq C_\mu R^{\alpha-2}
$$

Τότε κάθε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με διάσταση μεγαλύτερη του α έχει distance set θετικού μέτρου Lebesque

Απόδειξη. Έστω E συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με $\dim E > \alpha$. Από το (I) υπάρχει μέτρο μ με φορέα το E και $I_\alpha(\mu) < \infty$. Από το (II) έχουμε

$$
\int_{R=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\,\theta \right)^2 R \, dR \leq C_\mu \int_{R=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 R^{\alpha-2} R \, dR d\,\theta \leq C_{\alpha,\mu} I_\alpha(\mu) \leq +\infty
$$

Και χρησιμοποιώντας το λήμμα 1 προκύπτει ότι το $\Delta E \cup -\Delta E$ έχει θετικό μέτρο Lebesque και άρα το ίδιο και το ΔE □

Θεώρημα. *Έστω $\alpha \in (0,2)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια σταθερά C_ϵ τέτοια ώστε το παρακάτω να είναι αληθές. Αν μ ένα θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^2$ με φορέα που περιέχεται στο μοναδιαίο δίσκο και α - διάστατη ενέργεια*

$$I_\alpha(\mu) \stackrel{def}{=} \iint \frac{1}{|x-y|^\alpha}\, d\mu(x)d\mu(y) = 1,$$

τότε για κάθε $R \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2\, d\theta \leq C_\epsilon R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}.$$

Το θεώρημα αυτό δίνει την Distance set conjecture για $\alpha > \frac{4}{3}$. Πράγματι για κάθε $\epsilon > 0$ και $\alpha = \frac{4}{3} + \epsilon$ έχουμε $R^{\epsilon - \frac{\alpha}{2}} = R^{\alpha - 2}$ το οποίο συνεπάγεται την ισχύ της εικασίας από την προηγούμενη πρόταση.

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιούνται πολλά στοιχειώδη γεωμετρικά επιχειρήματα, καθώς και βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier . Στην αρχή θα παρουσιάσουμε κάποιες προτάσεις και λήμματα που θα χρειαστούν στην πορεία, έπειτα θα αναπτύξουμε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες και θα ολοκληρώσουμε με το κυρίως μέρος της απόδειξης. Στα παρακάτω όταν λέμε ότι δύο ορθογώνια έχουν πλευρές παράλληλες, εννοούμε ότι οι μεγάλες τους πλευρές είναι παράλληλες και οι μικρές τους πλευρές επίσης παράλληλες. Επίσης ο άξονας ενός ορθογωνίου θα είναι εκείνος που είναι παράλληλος στις μεγάλες πλευρές του. Όταν λέμε γωνία δύο ορθογωνίων εννοούμε την γωνία των αξόνων τους. Αν ρ είναι ένα ορθογώνιο τότε δυικό ορθογώνιο είναι κάθε ορθογώνιο που έχει άξονα κάθετο στον άξονα του ρ, μήκος ίσο με το αντίστροφο του πλάτους του ρ και πλάτος αντίστροφο του μήκους του ρ.

Πρόταση 1. *Έστω μια σταθερά C και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ από ορθογώνια με μήκος μεταξύ l και Cl και πλάτος μεταξύ w και Cw για τα οποία ισχύει ότι αν $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$ τότε $R_1 \subset CR_2$. Αν ο πληθάριθμος της $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτερος από μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από την C τότε υπάρχουν $R, R' \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $R \subset 2R'$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα ορθογώνιο R_0 στην $\mathcal{A}$ και παίρνουμε το NR_0 ορθογώνιο με μήκος $\leq C^2 l$ και πλάτος $\leq C^2 w$ έτσι ώστε να περιέχει όλα τα υπόλοιπα ορθογώνια της $\mathcal{A}$. Έπειτα για κάθε $R \in \mathcal{A}$ παίρνουμε το $\frac{1}{N}R$. Αν όλα τα $\frac{1}{N}R$ είναι ξένα μεταξύ τους τότε $(\#\mathcal{A})\frac{lw}{N^2} \leq C^4 lw$. Έστω $p = C^{\frac{1}{N}}$. Διαμερίζουμε το $[l, Cl]$ στα διαστήματα $[l, pl], [pl, p^2 l], \ldots, [p^{N-1}l, p^N l]$ και το $[w, Cw]$ στα διαστήματα $[w, pw], [pw, p^2 w], \ldots, [p^{N-1}w, p^N w]$. Αν $\#\mathcal{A} \geq (N+1)(N+1)N^2 C^4$ τότε υπάρχουν δύο ορθογώνια R_1, R_2 στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε τα $\frac{1}{N}R_1$, $\frac{1}{N}R_2$ να έχουν μη κενή τομή, τα μήκη τους να ανήκουν στο ίδιο διάστημα $[p^{k-1}l, p^k l]$ και τα πλάτη τους να ανήκουν στο ίδιο διάστημα $[p^{k-1}w, p^k w]$. Αν l_1, l_2 είναι τα μήκη των R_1, R_2 και w_1, w_2 τα πλάτη τους, τότε $l_2 \leq pl_1$ και $w_2 \leq pw_1$. Έστω ϕ η γωνία των R_1, R_2. Θα αποδείξουμε ότι εαν ο N είναι μεγαλύτερος από μια σταθερά που εξαρτάται από το C, τότε $R_1 \subseteq 2R_2$.

Από υπόθεση $R_2 \subset CR_1$ και άρα $l_2 \sin\phi \leq w_1$. Συνεπάγεται ότι

$$\sin\phi \leq C^2 \tfrac{w}{l}$$

Ορίζουμε $T_1 = \frac{1}{N}R_1$ και $T_2 = \frac{1}{N}R_2$. Για να ισχύει $R_2 \subset 2R_1$ αρκεί $NT_2 \subset 2NT_1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το κέντρο του T_1 είναι η αρχή των αξόνων. Έστω $A = (A_x, A_y)$ το κέντρο του T_2 και $B = (B_x, B_y)$ ένα τυχαίο σημείο του. Θέλουμε $A + N(B - A) \in 2NT_1$ και βλέπουμε ότι αρκεί να ισχύουν οι

ι) $|A_x + N(B_x - A_x)| \leq l_1$,

ιι) $|A_y + N(B_y - A_y)| \leq w_1$.

Για το ι) έχουμε :

$$A_x \leq \frac{\text{μήκος } (T_1)}{2} + \frac{\text{διαγώνιος } (T_2)}{2} = \frac{l_1 + \sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N} \leq \frac{l_1 + \sqrt{2}l_2}{2N} \leq \frac{1 + \sqrt{2}p}{2N} l_1$$

$$|B_x - A_x| \leq \frac{\text{διαγώνιος } (T_2)}{2} = \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l_2}{N} \leq \frac{p}{\sqrt{2}N} l_1$$

Άρα, ισχύει το ι) αρκεί να ισχύει

$$\frac{1 + \sqrt{2}C^{\frac{1}{N}}}{2N} + \frac{C^{\frac{1}{N}}}{\sqrt{2}} \leq 1$$

το οποίο ισχύει αν το N είναι μεγαλύτερο από κάποια σταθερά που εξαρτάται μόνο απο την C.

Για το ιι), αν θ είναι η γωνία της διαγωνίου και του μεγάλου άξονα του R_2, τότε

$$\begin{aligned}
|A_y| &\leq \frac{\text{πλάτος } (T_1)}{2} + \frac{\text{διαγώνιος } (T_2)}{2}\sin(\theta + \phi) = \frac{w_1}{2N} + \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N}\sin(\theta + \phi) \\
&\leq \frac{w_1}{2N} + \frac{\sqrt{2}l_2}{2N}\sin\phi + \frac{\sqrt{2}l_2}{2N}\sin\theta \\
&\leq \frac{w_1}{2N} + \frac{w_2}{\sqrt{2}N} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}C^2\frac{l_2 w}{N^2 l} \\
&\leq \frac{w_1}{2N} + \frac{w_2}{N\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}C^3\frac{w}{N^2} = \left(\frac{1}{2N} + \frac{\pi C^3}{2\sqrt{2}N^2}\right)w_1 + \frac{w_2}{N\sqrt{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2N} + \frac{\pi C^3}{2\sqrt{2}N^2}\right)w_1 + \frac{pw_1}{N\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$|B_y - A_y| \leq \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N}\sin(\phi + \theta) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{C^3}{N^2}w_1 + \frac{pw_1}{N\sqrt{2}}$$

Τελικά για να ισχύει το ιι) είναι αρκετό να ισχύει

$$w_1\left(\frac{1}{2N} + \frac{\pi C^3}{2N^2\sqrt{2}}\right) + \frac{pw_1}{N\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{C^3}{N}w_1 + \frac{pw_1}{\sqrt{2}} \leq w_1$$

ή απλούστερα

$$\frac{1}{2N}+\frac{\pi C^3}{2\sqrt{2}N^2}+\frac{C^{\frac{1}{N}}}{N\sqrt{2}}+\frac{\pi C^3}{2N\sqrt{2}}+\frac{C^{\frac{1}{N}}}{\sqrt{2}}\le 1$$

το οποίο είναι εφικτό αν ο N είναι μεγαλύτερος από μια σταθερά που εξαρτάται από το C. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω ϵ και t με $\epsilon < C$ και C μια σταθερά. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια από ορθογώνια με μήκη ανάμεσα σε t και Ct και πλάτη ανάμεσα σε ϵt και $2\epsilon t$ και αν για κάθε $T\in\mathcal{F}$ και για κάθε $\rho > 2\epsilon$ κανένα ορθογώνιο που έχει τον ίδιο άξονα και κέντρο με το T και πλάτος ρt δεν περιέχει πάνω από $m\frac{\rho}{\epsilon}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$, τότε*

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}}\chi_T\right\|_2^2\le Cm\log\tfrac{1}{\epsilon}\sum_{T\in\mathcal{F}}|T|$$

Απόδειξη. Διαμερίζουμε το διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ σε τόξα $[0,\epsilon]$, $[\epsilon,2\epsilon]$, ... , $\left[2^{N-1}\epsilon,\frac{\pi}{2}\right]$ με $2^{N-1}\epsilon<\frac{\pi}{2}\le 2^N\epsilon$ και σταθεροποιούμε ένα ορθογώνιο $T_i\in\mathcal{F}$. Αν κάποιο ορθογώνιο $T_j\in\mathcal{F}$ τέμνει το T_i με γωνία αξόνων ω τότε η τομή τους σχηματίζει ένα παραλληλόγραμμο με εμβαδόν

$$|T_i\cap T_j|=\frac{\text{πλάτος}\,(T_i)\,\text{πλάτος}\,(T_j)}{\sin\omega}$$

Χρησιμοποιώντας ότι το πλάτος είναι μικρότερο από $2\epsilon t$ και ότι $\omega\frac{2}{\pi}\le\sin\omega\le\omega$:

$$|T_i\cap T_j|\le C\frac{\epsilon^2t^2}{\omega}\quad .$$

Ισχύει ότι :

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}}\mathcal{X}_T\right\|_2^2=\int\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}\mathcal{X}_{T_i}\cdot\mathcal{X}_{T_j}=\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}\int\mathcal{X}_{T_i\cap T_j}=\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}|T_i\cap T_j|$$

$$\le\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{N}C\frac{\epsilon^2t^2}{\omega}\#\left\{T_j:\text{το }T_j\text{ τέμνει το }T_i\text{ σε γωνία }\omega: 2^{k-1}\epsilon\le\omega\le 2^k\epsilon\right\}+\right.$$

$$\left.+\,C\epsilon t^2\#\left\{T_j:\ \text{το }T_j\text{ τέμνει το }T_i\text{ σε γωνία }\omega:0\le\omega\le\epsilon\right\}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $N\le C\log\frac{1}{\epsilon}$. Τέλος όλα τα ορθογώνια που τέμνουν ένα σταθεροποιημένο T_i με γωνία ω βρίσκονται σε ένα ορθογώνιο με το ίδιο κέντρο και άξονα με το T_i και πλάτος $\le 2\epsilon t+2Ct\omega=(2\epsilon+2C\omega)t$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση, το πλήθος τους είναι το πολύ $m\frac{2\epsilon+2C\omega}{\epsilon}\le C\frac{m\omega}{\epsilon}$. Άρα

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}}\mathcal{X}_T\right\|_2^2\le C\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{C\log\frac{1}{\epsilon}}\frac{\epsilon^2t^2}{\omega}\cdot\frac{m\omega}{\epsilon}+\epsilon t^2\frac{m\epsilon}{\epsilon}\right)$$

$$\le Cm\log\frac{1}{\epsilon}\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\epsilon t^2\le Cm\log\frac{1}{\epsilon}\sum_{T\in\mathcal{F}}|T|\,.$$

$\square$

Λήμμα 1. *Έστω C μια σταθερά αρκετά μεγάλη και Q ένα τετράγωνο στο επίπεδο με πλευρά C. Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια ορθογωνίων με πλάτος $\delta = R^{-\frac{1}{2}}$, μήκος 1 και πληθάριθμο $\#\mathcal{F} = \delta^{-100}$ τα οποία περιέχονται στο Q. Αν υποθέσουμε ότι δύο ορθογώνια της οικογένειας $\mathcal{F}$ τέμνονται σχηματίζουν γωνία τουλάχιστον δ, τότε μπορούμε να διαμερίσουμε την $\mathcal{F}$ σε το πολύ $C\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^2$ υποοικογένειες $\mathcal{F}_{ij}$ έτσι ώστε για κάθε i και j να υπάρχουν αριθμοί $p = p(j)$ και $\theta = \theta(i) \geq \delta$ και μια οικογένεια από ορθογώνια $\mathcal{G}_{ij} = \{\tau_k\}$ με μήκος ανάμεσα σε 1 και C και πλάτος ανάμεσα σε θ και 2θ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω.*

1. *Αν $T \in \mathcal{F}_{ij}$ τότε υπάρχει $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ με $T \subseteq \tau_k$*
2. *Αν $T \in \mathcal{F}$ τότε το T περιέχεται σε φραγμένο αριθμό από τ_k, $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$*
3. *Κάθε $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ περιέχει περίπου $p\frac{\theta}{\delta}$ ορθογώνια T από την οικογένεια $\mathcal{F}$.*
4. $\|\sum_{\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}}\chi_{\tau_k}\|_2^2 \leq C\log\frac{1}{\delta}\sum_{\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}}|\tau_k|$
5. $\|\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}}\chi_T\|_2^2 \leq Cp\log\frac{1}{\delta}\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}}|T|$

Απόδειξη. Για κάθε ορθογώνιο $T \in \mathcal{F}$ ορίζουμε Π_T να είναι εκείνο το ορθογώνιο με το ίδιο κέντρο και πλευρές παράλληλες στο T το οποίο να μεγιστοποιεί την ποσότητα

$$d(\Pi) = \delta\frac{\#\big(\{T' \in \mathcal{F} :\ T' \subseteq \Pi\}\big)}{|\Pi|}.$$

Από τον τρόπο κατασκευής του Π_T ισχύουν τα

I. Το Π_T περιέχει το T και το πολύ να περιέχει όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ που βρίσκονται στο τετράγωνο Q πλευράς C. Άρα $1 \leq$ μήκος του $\Pi_T \leq 2\sqrt{2}C = C$ και $\delta \leq$ πλάτος του $\Pi_T \leq 2\sqrt{2}C = C$

II. $\delta^{-1} \leq d(\Pi_T) \leq \delta\frac{\#\mathcal{F}}{|T|} = \delta^{-100}$.

Διαμερίζουμε την $\mathcal{F}$ ως έξής. Αν το πλάτος του Π_T το πούμε θ_T τότε για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$ και για κάποιο $j \in \mathbb{Z}$ έχουμε $2^{-i-1} < \theta_T \leq 2^{-i}$ και $2^j < d(\Pi_T) \leq 2^{j+1}$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_{ij} := \big\{T \in \mathcal{F} : \theta_T \in (2^{-i-1}, 2^{-i}]$ και $d(\Pi_T) \in (2^j, 2^{j+i}]\big\}$, $p = 2^j$ και $\theta = C_1 2^{-i-1}$, όπου C_1 μια σταθερά η οποία θα καθοριστεί αργότερα. Παρατηρούμε ότι $\#i \leq C\log\frac{1}{\delta}$, $\#j \leq C\log\frac{1}{\delta}$ οπότε $(\#i)(\#j) \leq C\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^2$

Για κάθε i, j θεωρούμε ένα μεγιστικό υποσύνολο $\mathcal{G}^*_{ij}$ του $\mathcal{F}_{ij}$ τέτοιο ώστε αν $T_1, T_2 \in \mathcal{G}^*_{ij}$ να συνεπάγεται ότι Π_{T_1} $2\Pi_{T_2}$. Ορίζω $\mathcal{G}_{ij} := \{C_1\Pi_T,\, T \in \mathcal{G}^*_{ij}\}$

Για να δείξουμε το 1 θεωρούμε $T \in \mathcal{F}_{ij}$. Αν $C_1\Pi_T \in \mathcal{G}_{ij}$ τότε $T \subseteq C_1\Pi_T$ και έχουμε τελειώσει. Αν $C_1\Pi_T \notin \mathcal{G}_{ij}$, υπάρχει κάποιο T_1 με $C_1\Pi_{T_1} \in \mathcal{G}_{ij}$ και $\Pi_T \subseteq 2\Pi_{T_1}$ ή $\Pi_{T_1} \subseteq 2\Pi_T$. Αν ισχύει το πρώτο έχουμε τελειώσει. Στην περίπτωση που ισχύει το δεύτερο, παρατηρούμε ότι τα Π_{T_1}, Π_T έχουν συγκρίσιμα πλάτη και μήκη διότι τα πλάτη τους κυμαίνονται από $C_1 2^{-i-1}$ έως $C_1 2^{-i}$ ενώ τα μήκη από 1 εώς C. Συμπεραίνουμε ότι για κατάλληλα μεγάλη σταθερά C_1 πετυχαίνουμε να ισχύει $T \subseteq \Pi_T \subseteq C_1 \Pi_{T_1}$.

Για το 2, έστω δύο τυχαία $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ που περιέχουν το ίδιο $T \in \mathcal{F}$. Επειδή έχουν συγκρίσιμες διαστάσεις το ένα περιέχεται σε κατάλληλη παραμόρφωση του άλλου. Αν λάβουμε υπόψη ότι κανένα τ_k δεν περιέχεται στο διπλάσιο κάποιου αλλου τότε από την Πρόταση 1, ο πληθάριθμος ενός τέτοιου συνόλου είναι φραγμένος.

Για το 3, έστω ένα $\tau_k = C_1 \Pi_T \in \mathcal{G}_{ij}$ και τα αντίστοιχα Π_T και T. Τότε εξ' ορισμού $d(\Pi_T) = \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \Pi_T\}}{|\Pi_T|}$ οπότε

$$p = 2^j \leq \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \Pi_T\}}{\theta_T} \leq \delta C_1 \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \Pi_T\}}{\theta}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Pi_T \subseteq \tau_k = C_1 \Pi_T$ βρίσκουμε ότι

$$\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \tau_k\} \gtrsim p \frac{\theta}{\delta}$$

Από την άλλη, το Π_T μεγιστοποιεί την συνάρτηση d οπότε $d(\tau_k) = \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \tau_k\}}{|\tau_k|} \leq d(\Pi_T) \leq 2p$.
Άρα

$$\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subseteq \tau_k\} \lesssim p \frac{|\tau_k|}{\delta} \lesssim p \frac{\theta}{\delta}.$$

Έστω ένα $\tau_k = C_1 \Pi_T \in \mathcal{G}_{ij}$ και R ένα ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες στο τ_k, ίδιο κέντρο, φραγμένο μήκος και πλάτος ρ. Αν το R περιέχει n $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ τότε από τις 2 και 3 θα περιέχει τουλάχιστον $Cnp\frac{\theta}{\delta}$ ορθογώνια T από την $\mathcal{F}$. Από την μεγιστική ιδιότητα του Π_T, ισχύει ότι $d(R) \leq d(\Pi_T)$ οπότε $\delta \frac{np\frac{\theta}{\delta}}{\rho} \lesssim \delta \frac{p\frac{\theta}{\delta}}{\theta}$ και άρα

$$n \leq C \frac{\rho}{\theta}$$

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2 στην οικογένεια $\mathcal{G}_{ij}$ με $m = C$, $t = 1$, $\epsilon = \theta$ και αποδεικνύουμε το 4.

Έστω $T \in \mathcal{F}_{ij}$ και Π ορθογώνιο με ίδιο άξονα και κέντρο με το T και πλάτος ρ. Έστω ότι το Π περιέχει n στοιχεία της $\mathcal{F}$. Επειδή όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$, είναι μέσα στο τετράγωνο Q, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μήκος$(\Pi) \leq C$. Τότε $d(\Pi) \leq d(\Pi_T)$, οπότε $\delta \frac{n}{|\Pi|} \leq p$ και άρα

$$n \leq p \frac{|\Pi|}{\delta} \leq \frac{Cp\rho}{\delta}.$$

Εφαρμόζουμε την πρόταση 2 με $m = Cp$, $t = 1$, $\epsilon = \delta$ και αποδεικνύουμε το 5 $\square$

Για κάθε ορθογώνιο T στον R^2 ορίζουμε Γ_T ως τον αφινικό μετασχηματισμό που στέλνει το T στο μοναδιαίο τετράγωνο. Αν επιπλέον $\phi^{(k)}(x) = \min\{\|x\|^{-k}, 1\}$, όπου k φυσικός, τότε ορίζουμε $\phi_T^{(k)} = \phi^{(k)} \circ \Gamma_T$.

Με τον συμβολισμό του Λήμματος 1, διαιρούμε τον μοναδιαίο κύκλο σε τόξα β που το καθένα έχει μήκος περίπου $\delta = R^{-\frac{1}{2}}$ καθώς και σε τόξα Θ με μήκος περίπου θ, έτσι ώστε κάθε τόξο β να περιέχεται σε κάποιο τόξο Θ. Για κάθε $\mathcal{F}_{ij}$, $\mathcal{G}_{ij}$ του Λήμματος 1 θεωρούμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις

$$\psi_\beta^{(k)} = \sum_{\substack{T\in\mathcal{F}_{ij},\\ \text{γωνία του } T \\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \phi_T^{(k)},$$

$$\psi_\Theta^{(k)} = \sum_{\substack{\tau\in\mathcal{G}_{ij},\\ \text{γωνία του } \tau \\ \text{περιέχεται στο } \Theta}} \phi_\tau^{(k)}.$$

Οι $\psi_\beta^{(k)}$ και $\psi_\Theta^{(k)}$ αντιστοιχούν σε συγκεκριμένο ζευγάρι $\mathcal{F}_{ij},\ \mathcal{G}_{ij}$.

Λήμμα 2. *Έστω φυσικός $k \geq 2$ και ζεύγος $\mathcal{F}_{ij},\ \mathcal{G}_{ij}$. Για τις συναρτήσεις $\psi_\beta^{(k)},\ \psi_\Theta^{(k)}$ ισχύουν*

$$\left\|\sum_\beta \psi_\beta^{(k)}\right\|_2^2 \leq C(k)p\log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|,$$

$$\left\|\sum_\Theta \psi_\Theta^{(k)}\right\|_2^2 \leq C(k)\log R \sum_{\tau\in\mathcal{G}_{ij}} |\tau|.$$

Απόδειξη. Για κάθε $A \geq 1$ και κάθε T στην $\mathcal{F}_{ij}$ και τ στην $\mathcal{G}_{ij}$, τα ορθογώνια AT και $A\tau$ έχουν πλάτη από $A\delta$ έως $2A\delta$ και από $CA\theta$ έως $2CA\theta$ αντίστοιχα και μήκη από CA μέχρι $C'A$. Έστω $T \in \mathcal{F}_{ij}$. Από την απόδειξη του 5 του λήμματος 1 γνωρίζουμε ότι κάθε ορθογώνιο Π με ίδιο άξονα και κέντρο με το T και πλάτος ρ περιέχει λιγότερα από $\frac{Cp\rho}{\delta}$ ορθογώνια T', όπου $T' \in \mathcal{F}$. Με ένα απλό γεωμετρικό επιχείρημα είναι φανερό ότι κάθε ορθογώνιο Π με ίδιο άξονα και κέντρο με το AT και πλάτος $A\rho$ περιέχει λιγότερο από $\frac{CpA\rho}{\delta}$ ορθογώνια AT', όπου $T' \in \mathcal{F}$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2 με $m = CpA$, $t = CA$, $\epsilon = \delta$ βρίσκουμε ότι

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} \chi_{AT}\right\|_2^2 \leq CAp\log\frac{1}{\delta}\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |AT| = CA^3p\log\frac{1}{\delta}\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|.$$

Ομοίως

$$\left\|\sum_{\tau\in\mathcal{G}_{ij}} \chi_{A\tau}\right\|_2^2 \lesssim A^3\log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|.$$

Θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση $B_T = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m T}$. Θα δείξουμε ότι $\phi_T^{(k)} \lesssim B_T$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\phi_T^{(k)} \circ \Gamma_T^{-1} \lesssim B_T \circ \Gamma_T^{-1}$, όπου ο Γ_T^{-1} είναι ο αφινικος μετασχηματισμός που στέλνει το Q στο T. Με άλλα λόγια θα δουλέψουμε με το Q στην θέση του T.

Έστω $x \in \mathbb{R}^2$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2^{-km} \geq \phi^{(k)}(x) \geq 2^{-(m-1)k}$ και άρα αν $\|x\| \in [2^m, 2^{m+1}]$, τότε $\phi^{(k)}(x) \leq 2^{-km}\chi_{2^{m+1}Q}(x) = 2^k 2^{(-m-1)k}\chi_{2^{m+1}Q}(x)$. Τέλος για όλα τα $x \in \mathbb{R}^2$

$$\phi^{(k)}(x) \leq 2^k \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m Q}(x).$$

Άρα

$$\phi_T^{(k)} \leq 2^k B_T.$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{\beta} \psi_\beta^{(k)}\right\|_2^2 &= \left\|\sum_{\beta} \sum_{\substack{T\in\mathcal{F}_{ij},\\ \text{γωνία του } T\\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \phi_T^{(k)}\right\|_2^2 \leq 4^k \left\|\sum_{\beta} \sum_{\substack{T\in\mathcal{F}_{ij},\\ \text{γωνία του } T\\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m T}\right\|_2^2 \\
&= 4^k \left\|\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m T}\right\|_2^2 = 4^k \left\|\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} 2^{-km}\chi_{2^m T}\right\|_2^2 \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} 4^k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km} \left\|\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} \chi_{2^m T}\right\|_2\right)^2 \\
&\leq 4^k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km} \left(2^{3m} p \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^k p \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T| \left(\sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km} 2^{\frac{3}{2}m}\right)^2 \\
&= C(k) p \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη ανισότητα

□

Έστω A_R ο δακτύλιος $A_R = \{\xi : \ R-1 \leq \|\xi\| \leq R+1\}$ και έστω μια διαμέριση του σε ξένα τμήματα δακτυλίου β με κυκλικό μήκος περίπου $\delta = \frac{1}{\sqrt{R}}$, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα β είναι της μορφής

$$\left\{\xi \ : \|\xi\| \in [R-1, R+1], \frac{\xi}{\|\xi\|} \in \gamma\right\}$$

με γ να είναι τόξο του μοναδιαίου κύκλου με μήκος περίπου $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Έπειτα θεωρούμε την διόγκωση του κατά C και την συμβολίζουμε με $C\beta$ δηλαδή κάθε $C\beta$ είναι της μορφής

$$C\beta = \left\{\xi \ : \|\xi\| \in [R-C, R+C], \frac{\xi}{\|\xi\|} \in \gamma'\right\}$$

όπου $\gamma' = C\gamma$ αν Cμήκος$(\gamma) \leq 2\pi$ ή $\gamma' = 2\pi$ αλλιώς. Έστω f μια συνάρτηση με την ιδιότητα $f = \sum_\beta f_\beta$ όπου όλες οι f_β έχουν φορέα το $C\beta$ και έστω $G_\beta = \widehat{f_\beta}$. Έστω Θ μια άλλη διαμέριση του δακτυλίου A_R σε τμήματα δακτυλίου τέτοια ώστε κάθε β να περιέχεται σε ένα Θ. Ορίζουμε

$$Sf = \left(\sum_\beta |G_\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad S_\theta f = \left(\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subseteq\Theta} G_\beta\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

Λήμμα 3. $\|S_\theta f\|_4 \leq C\|Sf\|_4$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ανισότητα έχει αποδειχθεί όταν η f έχει φορέα σε ένα ¨περίπου¨ ογδοημόριο του κύκλου. Τότε ορίζουμε τις

$$f_\beta^{(i)} = \begin{cases} f_\beta & \text{αν το } \beta \text{ περιέχεται στο } i \text{ ογδοημόριο} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ορίζουμε επίσης

$$f^{(i)} = \sum_\beta f_\beta^{(i)}$$

Παρατηρούμε ότι $f_\beta = \sum_i f_\beta^{(i)}$ και $f = \sum_i f^{(i)}$. Τότε

$$\begin{aligned} S_\theta f = S_\theta\left(\sum_i f^{(i)}\right) &= \left(\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subseteq\Theta}\sum_i G_\beta^{(i)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_\Theta \left|\sum_i\sum_{\beta\subseteq\Theta} G_\beta^{(i)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{Minkoswki}}{\leq} \sum_i \left(\sum_\Theta\left|\sum_{\beta\subseteq\Theta} G_\beta^{(i)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_i S_\theta f^{(i)} \end{aligned}$$

Από τριγωνική ανισότητα :

$$\begin{aligned} \|S_\theta f\|_4 \leq \sum_i \|S_\theta f^{(i)}\|_4 \leq C\sum_i \|Sf^{(i)}\|_4 &= \sum_i \left(\int\left(\sum_\beta |G_\beta^{(i)}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \left(\int\sum_i\left(\sum_\beta |G_\beta^{(i)}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \left(\int\left(\sum_i\sum_\beta |G_\beta^{(i)}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Θέτουμε $h_{ij} = \sum_\beta f_\beta^{(i)} * \widetilde{f_\beta^{(j)}}$ και $h = \sum_\beta f_\beta * \widetilde{f}_\beta$. Παρατηρούμε ότι $h_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ Τότε

$$\sum_\beta |G_\beta^{(i)}|^2 = \sum_\beta \widehat{f_\beta^{(i)}}\overline{\widehat{f_\beta^{(i)}}} = \left(\sum_\beta f_\beta^{(i)} * \widetilde{f_\beta^{(i)}}\right)^{\widehat{}} = \widehat{h_{ii}}$$

και

$$\sum_\beta |G_\beta|^2 = \sum_\beta \widehat{f}_\beta\overline{\widehat{f}_\beta} = \left(\sum_\beta f_\beta * \widetilde{f}_\beta\right)^{\widehat{}} = \widehat{h}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|S_\theta f\|_4 &= \left(\int \left|\sum_i \widehat{h_{ii}}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\overset{\text{Plancherel}}{=} \left(\int \left|\sum_i h_{ii}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int \left|\sum_{i,j} h_{i,j}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{4}} \overset{\text{Plancherel}}{=} \left(\int \left|\widehat{h}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η f έχει φορέα το πρώτο ογδοημόριο.

$$\begin{aligned}\|S_\theta f\|_4^4 &= \left\|\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subseteq\Theta} G_\beta\right|^2\right\|_2^2 \overset{Plancherel}{=} \left\|\sum_\Theta \sum_{\beta,\beta_1\subseteq\Theta} \widehat{G_\beta} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}}\right\|_2^2 \\ &= \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\beta,\beta_1\subseteq\Theta_1} \sum_{\beta_2,\beta_3\subseteq\Theta_2} \widehat{G_\beta} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widehat{G_{\beta_2}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}(0) \\ &= \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\beta,\beta_1\subseteq\Theta_1} \sum_{\beta_2,\beta_3\subseteq\Theta_2} \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right) * \left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right)(0) \\ &= \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \int \sum_{\substack{\beta\subseteq\Theta_1\\ \beta_2\subseteq\Theta_2}} \sum_{\substack{\beta_1\subseteq\Theta_1\\ \beta_3\subseteq\Theta_2}} \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right)\left(\overline{\widehat{G_{\beta_1}} * \widehat{G_{\beta_3}}}\right) = \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \int \left|\sum_{\substack{\beta\subseteq\Theta_1\\ \beta_2\subseteq\Theta_2}} \widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right|^2.\end{aligned}$$

Όμως $\widehat{G_\beta} = \widehat{\widehat{f_\beta}} = \widetilde{f_\beta}$ και η κάθε f_β έχει φορέα το $C\beta$, οπότε κάθε $f_{\beta_i} * f_{\beta_j}$ έχει φορέα το $C\beta_i + C\beta_j$. Τώρα κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ βρίσκεται σε ένα φραγμένο πλήθος από τέτοια σύνολα. Αν $k = k(C)$ το πλήθος αυτό τότε

$$\sum_{\Theta_1,\Theta_2} \int \left| \sum_{\substack{\beta \subseteq \Theta_1 \\ \beta_2 \subseteq \Theta_2}} \widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}} \right|^2 \overset{H\ddot{o}lder}{\leq} k \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\substack{\beta \subseteq \Theta_1 \\ \beta_2 \subseteq \Theta_2}} \int \left| \widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}} \right|^2$$

$$\overset{Plancherel}{=} k \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\substack{\beta \subseteq \Theta_1 \\ \beta_2 \subseteq \Theta_2}} \int |G_\beta G_{\beta_2}|^2 \ .$$

Τέλος

$$\|S_\theta f\|_4^4 \lesssim \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\substack{\beta \subseteq \Theta_1 \\ \beta_2 \subseteq \Theta_2}} \int |G_\beta G_{\beta_2}|^2 = \|Sf\|_4^4$$

□

Το παρακάτω λήμμα είναι μια ειδική μορφή της αρχής της αβεβαιότητας

Λήμμα 4. *Έστω $\phi = \phi^{(M)} = \min\{1, \|x\|^{-M}\}$ και έστω G μια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{G}$ έχει φορέα σε ένα ορθογώνιο ρ. Τότε για κάθε ορθογώνιο σ, δυϊκό του ρ, ισχύει*

$$\left\| \frac{G}{\phi_\sigma} \right\|_\infty^2 \leq C_M |\rho| \left\| \frac{G}{\phi_\sigma^2} \right\|_2^2,$$

όπου $\phi_\sigma = \phi \circ \Gamma_\sigma$ και Γ_σ ο αφινικός μετασχηματισμός που στέλνει το σ στο μοναδιαίο τετράγωνο Q.

Απόδειξη.
Θα κάνουμε πρώτα την απόδειξη για $\sigma = \rho = Q$. Έστω k μια συνάρτηση Schwarz τέτοια ώστε $\hat{k}(x) = 1$ όταν $x \in Q$. Τότε $\widehat{k * G} = \hat{k}\hat{G} = \hat{G}$ διότι εκεί που η $\hat{G}$ δεν είναι μηδέν η $\hat{k}$ είναι 1. Συνεπάγεται $k * G = G$ για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\left\| \frac{G}{\phi} \right\|_\infty = \left\| \int \max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} \frac{G}{\phi^2}(y)\, dy \right\|_\infty$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \max\left\{1, \|x\|^M\right\} |k(x-y)| \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} &\leq C_M (1+\|x\|)^M (1+\|y\|)^{-2M} |k(x-y)| \\ &\leq C_M (1+\|x-y\|)^M (1+\|y\|)^{-M} |k(x-y)| \\ &\leq C_M (1+\|y\|)^{-M}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\left\| \frac{G}{\phi} \right\|_\infty \leq C_M \int (1+\|y\|)^{-M} \left| \frac{G}{\phi^2}(y) \right| dy \leq C_M \left\| \frac{G}{\phi^2} \right\|_2$$

Θα περάσουμε στην γενική περίπτωση τώρα. Έστω ένα ορθογώνιο ρ με κέντρο κ και ένα δυϊκό σ με κέντρο λ. Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που στέλνει το Q στο $\rho - \kappa$ τότε T^{-t} είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που στέλνει το Q στο $\sigma - \lambda$. Έστω $\widehat{G}$ με φορέα το ρ. Τότε

$$\left\| \frac{G}{\phi_\sigma} \right\|_\infty = |\det T| \left\| \frac{|\det T|^{-1} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi + \lambda)}{\phi_\sigma(T^{-t}\xi + \lambda)} \right\|_\infty .$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\left(|\det T|^{-1} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi + \lambda)\right)\widehat{} &= \int |\det T|^{-1} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi + \lambda)\, d\xi \\
&= \int |detT|^{-1} e^{-2\pi i \left(xT^tT^{-t}\xi + \kappa T^{-t}\xi\right)} G(T^{-t}\xi + \lambda)\, d\xi \\
&= \int |\det T|^{-1} e^{-2\pi i (Tx+\kappa)T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi + \lambda)\, d\xi \\
&= \int e^{-2\pi i (Tx+\kappa)\xi} G(\xi + \lambda)\, d\xi = e^{2\pi i (Tx+\kappa)\lambda} \widehat{G}(Tx + \kappa)
\end{aligned}$$

Επειδή $\phi_\sigma(T^{-t}x + \lambda) = \phi(x)$ και η $|\det T|^{-1} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}x} G(T^{-t}x + \lambda)$ έχει μετασχηματισμό Fourier ο οποίος έχει φορέα το Q, από την ειδική περίπτωση συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{G}{\phi_\sigma} \right\|_\infty =& |\det T| \left\| \frac{|\det T|^{-1} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}x} G(T^{-t}x + \lambda)}{\phi_\sigma(T^{-t}x + \lambda)} \right\|_\infty \\
& C_M|\rho| \left\| \frac{|\det T|^{-1} e^{-2\pi i \kappa T^{-t}x} G(T^{-t}x + \lambda)}{{\phi_\sigma}^2(T^{-t}x + \lambda)} \right\|_2 \\
& \leq C_M|\rho|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{G}{{\phi_\sigma}^2} \right\|_2
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 5. *Έστω μ ένα μέτρο του οποίου ο φορέας περιέχεται στον μοναδιαίο δίσκο και με α-διαστατη ενέργεια $I_\alpha(\mu) = 1$. Τότε για κάθε $R \geq 2$ μπορούμε να διαμερίσουμε το μ σε ένα άθροισμα μέτρων μ_j με πλήθος $\leq C \log R$ για τα οποία ισχύει:*

$$\mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) \sup_x \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \lesssim 1.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in D(0;1)$ έχουμε ότι $D(0;1) \subseteq D(x;2)$ και άρα

$$\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu\big(D(x;r)\big)}{r^\alpha} \geq \frac{\mu\big(D(x;2)\big)}{2^a} \geq \frac{\mu\ \big(\ D(0;1)\ \big)}{2^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\mu\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Από την άλλη μεριά

$$\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu\big(D(x;r)\big)}{r^\alpha} \leq \frac{\mu\big(\mathbb{R}^2\big)}{R^{-\alpha}} = \mu\big(\mathbb{R}^2\big) R^\alpha$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_j = \left\{ x : \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \in \Big[2^{j-1}\mu\big(\mathbb{R}^2\big), 2^j\mu\big(\mathbb{R}^2\big)\Big) \right\}$$

Ορίζουμε μ_j να είναι ο περιορισμός του μ στο E_j και παρατηρούμε ότι το πλήθος των j για τα οποία το E_j δεν είναι κενό είναι $C \log R$. Ισχύει ότι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \lesssim 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Πράγματι αν $x \in E_j$ είναι προφανές ότι

$$\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \leq 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Αν $x \notin E_j$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D(x,r) \cap E_j \neq \emptyset$. Για $y \in D(x,r) \cap E_j$ ισχύει ότι $D(x,r) \subseteq D(y,2r)$ οπότε για $r \geq R^{-1}$

$$\frac{\mu_j\left(D(x,r)\right)}{r^\alpha} \leq 2^a \frac{\mu_j\left(D(y,2r)\right)}{(2r)^\alpha} \leq 2^a \sup_{y \in E_j} \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\left(D(y,r)\right)}{r^\alpha} \leq 2^\alpha 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right)$$

και το ζητούμενο έπεται για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Άρα για να αποδείξουμε το λήμμα μένει να δείξουμε ότι για κάθε j, $\mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) = \mu(E_j) \lesssim \left(2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{-1}$. Για κάθε j ισχύει ότι το E_j είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και κάθε σημείο του είναι κέντρο κάποιου δίσκου $D(x,r)$ έτσι ώστε $\mu\big(D(x,r)\big) \geq 2^{j-1}\mu\big(\mathbb{R}^2\big)r^\alpha$. Από το λήμμα κάλυψης του Besicovitch υπάρχει μια το πολύ αριθμισιμη οικογένεια από τέτοιους δίσκους, $D_n = D_n(x,r)$, που καλύπτουν όλο το E_j και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται σε έναν φραγμένο αριθμό C από αυτούς τους δίσκους. Για κάθε n έχουμε

$$\int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \geq \int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{(2r)^\alpha} = \frac{1}{(2r)^\alpha} \cdot \mu(D_n) \cdot \mu(D_n) \gtrsim \mu(D_n) 2^j \mu\big(\mathbb{R}^2\big).$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right) \mu\left(E_j\right) \leq 2^j \mu\big(\mathbb{R}^2\big) \sum_n \mu(D_n) \lesssim \sum_n \int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_n \chi_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = C I_\alpha(\mu) \end{aligned}$$

. □

Λήμμα 6. *Υποθέτουμε ότι για μέτρο μ με φορέα τον μοναδιαίο δίσκο ισχύει*

$$\frac{1}{R} \int_{A_R} \left|\widehat{\mu}\,(x)\right|^2 \, dx \lesssim B \mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}$$

για κάθε $R \geq 1$.

Τότε ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\big(Re^{i\theta}\big)\right|^2 \, d\theta \leq CB\mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}$$

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση Schwarz k ίση με ένα στον φορέα του μ (τον μοναδιαίο δίσκο).Επειδή $\hat{\mu} = \hat{k} * \hat{\mu}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\hat{k} * \widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\widehat{\mu}(y)\right| dy\right)^2 d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right|^{\frac{1}{2}} |\widehat{\mu}(y)| \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right|^{\frac{1}{2}} dy\right)^2 d\theta \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\mu}(y)|^2 \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy \int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy\, d\theta \\
&\overset{\text{η } \widehat{k} \text{ είναι Schwarz}}{\leq} C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\mu}(y)|^2 dy \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy\, d\theta.
\end{aligned}$$

Αφού η k είναι Schwarz ,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| d\theta &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+|Re^{i\theta}-y|\right)^{102}} \\
&\leq \frac{C}{R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rd\theta}{\left(1+|Re^{i\theta}-y|\right)^{2}} \cdot \frac{1}{\left(1+|R-|y||\right)^{100}} \\
&\leq CR^{-1}\left(1+|R-|y||\right)^{-100}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq C \int_{\mathbb{R}^2} R^{-1}(1+|R-|y||)^{-100} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy$$

Από εκεί και πέρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} R^{-1}(1+|R-|y||)^{-100}|\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy &\leq \frac{1}{R} \sum_{m=\left[-\frac{R}{2}\right]}^{+\infty} \int_{R+2m-1\leq|y|\leq R+2m+1} \frac{1}{(1+|R-|y||)^{100}} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy \\
&\leq \frac{1}{R} \sum_{m=\left[-\frac{R}{2}\right]}^{+\infty} \frac{1}{(1+|m|)^{100}} \int_{R+2m-1\leq|y|\leq R+2m+1} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy \\
&\leq B\mu\left(\mathbb{R}^2\right) \frac{1}{R} \sum_{m=\left[-\frac{R}{2}\right]}^{+\infty} \frac{R+2m}{(1+|m|)^{100}} (R+2m)^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}
\end{aligned}$$

Επιπλέων,

$$\begin{aligned}\sum_{m=\left[-\frac{R}{2}\right]}^{+\infty}\frac{(R+2m)^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}}{(1+|m|)^{100}} &\leq C\sum_{m=\left[-\frac{R}{2}\right]}^{\left[\frac{R}{2}\right]}\frac{R^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}}{(1+|m|)^{100}}+\sum_{m=\left[\frac{R}{2}\right]}^{+\infty}\frac{m^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}}{m^{100}}\\ &= CR^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\sum_{m=0}^{\left[\frac{R}{2}\right]}\frac{1}{(1+m)^{100}}+\sum_{m=\left[\frac{R}{2}\right]}^{+\infty}\frac{1}{m^{99+\frac{\alpha}{2}-\epsilon}}\\ &\leq CR^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}+C\frac{1}{R^{98+\frac{\alpha}{2}-\epsilon}}\\ &\leq CR^{1-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\end{aligned}$$

Τελικά

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}$$

$\square$

Σταθεροποιούμε μια συνάρτηση f με φορέα στον δακτύλιο $A_R=\{\xi:\ R-1\leq|\xi|\leq R+1\}$ και με $\|f\|_{L^2}=1$. Θέτουμε $G=\widehat{f(-x)}$.

Θεωρούμε θετική συνάρτηση Schwarz h και από αυτήν ορίζουμε την Schwarz συνάρτηση

$$H(x)=\frac{h(x)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}h(x+k)}$$

για την οποία ισχύει

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}H(x+m)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\frac{h(x+k)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}h(x+k+m)}=\frac{\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}h(x+m)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}h(x+k)}=1.$$

Θεωρούμε και μια θετική συνάρτηση Schwarz g με $\widehat{g}$ να έχει φορέα στο Q και $\int g=1$ και ορίζουμε την $b=H*g$. Τότε η $\widehat{b}=\widehat{H}\widehat{g}$ έχει φορέα στο Q και

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}b(x+m)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\int H(x+m-y)g(y)\,dy=\int\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}H(x+m-y)g(y)\,dy=\int g(y)\,dy=1$$

Οπότε, αν πλακοστρώσουμε το $\mathbb{R}^2$ με ορθογώνια ρ^* δυϊκά σε δοσμένο ορθογώνιο ρ ισχύει $\sum_{\rho^*}b_{\rho^*}=1$. Έπειτα διαμερίζουμε τον δακτύλιο A_R σε ξένα ανά δύο κυκλικά ορθογώνια β με γωνιακό μήκος περίπου $R^{-\frac{1}{2}}$ τα οποία περιέχονται σε (κανονικά) ορθογώνια ρ_β με διαστάσεις C και $CR^{\frac{1}{2}}$. Θέτουμε $G=\sum_\rho G_\rho$ με $G_\rho=\widehat{\left(\chi_\beta f\right)(-x)}$. Για κάθε $\rho=\rho_\beta$ και για όλα τα ρ^* που είναι δυικά του ρ και πλακοστρώνουν το $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε $G_\rho^{\rho^*}=b_{\rho^*}G_\rho$. Επιπλέον για το κάθε ρ το $\widehat{b_{\rho^*}}$ θα έχει φορέα το ρ που αντιστοιχεί στο εν λόγω β. Αυτό σε συνδυασμό με το Λήμμα 4 μας δίνει :

$$\sum_\rho\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2=\sum_\rho\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2\lesssim\sum_\rho\sum_{\rho^*}|\rho|\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right\|_2^2\lesssim R^{\frac{1}{2}}\sum_\rho\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right\|_2^2$$

Επειδή η b είναι Schwarz και η $\frac{1}{\phi^2}$ έχει πολυωνυμική αύξηση $\|x\|^{2M}$ ισχύει $\left|\frac{b}{\phi^2}\right| \leq C_M$. Άρα για κάθε ρ^* ισχύει

$$\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_\rho^{*2}}\right| \leq C_M.$$

Άρα

$$\sum_{\rho^*}\left\|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}G_\rho\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2}\sum_{\rho^*}\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}G_\rho\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}|G_\rho|^2\sum_{\rho^*}\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right|^2 \leq C_M\int_{\mathbb{R}^2}|G_\rho|^2\sum_{\rho^*}b_{\rho^*} = C_M\|G_\rho\|_2^2.$$

Τελικά

$$\sum_\rho\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2 \leq C_M R^{\frac{1}{2}}\sum_\rho\|G_\rho\|_2^2 = C_M R^{\frac{1}{2}}\sum_\rho\|\widehat{G_\rho}\|_2^2 = C_M R^{\frac{1}{2}}\|\chi_\beta f\|_2^2 \leq C_M R^{\frac{1}{2}}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι

$$\sum_\rho\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2 \leq C_M R^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Από την υπόθεση $B = \sup_x \sup_{r\geq R^{-1}} \frac{\mu(D(x;r))}{r^\alpha}$ προκύπτει αμέσως οτί $\mu\left(\mathbb{R}^2\right) \leq CB$

Αν $\left|\int G\,d\mu\right| \leq \mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-10}$, τότε για κάθε f με φορέα στον A_R και $\|f\|_{L^2} = 1$ συνεπάγεται

$$\left|\int_{A_R}\widehat{\mu}(x)f(-x)\,dx\right| = \left|\int G\,d\mu\right| \leq \mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-10}.$$

Άρα

$$\int_{A_R}|\widehat{\mu}(x)|^2\,dx \leq \mu\left(\mathbb{R}^2\right)^2R^{-20} \leq B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-20}$$

και

$$\frac{1}{R}\int_{A_R}|\widehat{\mu}(x)|^2\,dx \leq B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}.$$

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-10} \leq \left|\int G\,d\mu\right|.$$

Ακόμα από την (1) βλέπουμε ότι

$$G = \sum_\rho\sum_{\rho^*}G_\rho^{\rho^*} = \sum_{\rho,\rho^*:\ \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq C_M R^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*}.$$

Τώρα έχουμε

$$\left|\int\sum_{\rho,\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\leq R^{-100}}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right| = \left|\int\sum_{\rho,\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\leq R^{-100}}\phi_{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right| \leq$$

$$\|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty\int\sum_{\rho,\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\leq R^{-100}}\phi_{\rho^*}\,d\mu \leq \mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-50}$$

Άρα

$$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\, R^{-100}\leq \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq C_M R^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \geq$$

$$\left|\int Gd\mu\right| - \left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\, \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq R^{-100}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \geq \left|\int Gd\mu\right| - \mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-50} \geq$$

$$\left|\int Gd\mu\right| - \left|\int Gd\mu\right| R^{-40} \geq C\left|\int Gd\mu\right|$$

Με τον συνήθη τρόπο, χωρίζουμε τα ρ^* σε $N \leq C\log R$ το πλήθος οικογένειες $\mathcal{F}_i$ διαμερίζοντας το $[R^{-100}, CR^{\frac{1}{4}}]$ σε δυαδικά διαστήματα

$$\mathcal{F}_i = \{\rho^* : 2^{i-1}R^{-100} \leq \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq 2^i R^{-100}\}$$

Επομένως,

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int \sum_{\rho,\rho^*\in\mathcal{F}_i} G_{\rho^*}^{\rho}\right| = \left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\, R^{-100}\leq \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq C_M R^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \geq C\left|\int Gd\mu\right|$$

Άρα υπάρχει ένα i τέτοιο ώστε

$$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| \geq C\frac{1}{N}\left|\int Gd\mu\right| \geq \frac{C}{\log R}\left|\int Gd\mu\right|$$

Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ Τώρα θα περιορίσουμε και άλλο τα ρ^* αντικαθιστώντας την $\mathcal{F}_i$ με μια υποοικογένεια $\mathcal{F}_1$ (που εξαρτάται από το ϵ) της οποίας όλα τα στοιχεία θα βρίσκονται σε ένα σταθεροποιημένο τετράγωνο με πλευρά 10, με το κόστος ότι το $\frac{1}{\log R}$ θα γίνει $R^{-\frac{\epsilon}{2}}$. Πράγματι αν το R είναι αρκετά μεγάλο τότε το τετράγωνο αυτό θα βρίσκεται μέσα στο δίσκο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα $R^{\frac{\epsilon}{5}}$ και άρα

$$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| \leq \left|\int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| + \left|\int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right|$$

Και

$$\left|\int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| = \left|\int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\phi_{\rho^*} d\mu\right| \leq \|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\|_\infty \int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} \phi_{\rho^*} d\mu$$

$$\leq 2^i R^{-100} \int \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} \phi_{\rho^*} d\mu \leq CR^{\frac{1}{4}} \sum_{\substack{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_i,\\ d(\rho^*,0)>R^{\frac{\epsilon}{5}}}} \frac{1}{(d(\rho^*,0))^M}\mu\left(\mathbb{R}^2\right)$$

$$\lesssim R^{\frac{1}{4}}\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\int_{|x|>R^{\frac{\epsilon}{5}}} \frac{1}{|x|^M}\,dx \lesssim \frac{R^{\frac{1}{4}}}{R^{\frac{\epsilon}{5}(M-2)}}\mu\left(\mathbb{R}^2\right) \lesssim \mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-100} \lesssim R^{-90}\left|\int G\,d\mu\right|$$

Για να ισχύει η προτελευταία ανισότητα πρέπει το $M = M(\epsilon)$ να είναι αρκετά μεγάλο. Τώρα ο δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα $R^{\frac{\epsilon}{5}}$ καλύπτεται με το πολύ $N' \leq CR^{\frac{\epsilon}{5}}$ τετράγωνα Q_λ με πλευρά 10 τα οποία εχουν μικρή επικάλυψη έτσι ώστε κάθε $\rho^* \in F_i$ να είναι υποσύνολο κάποιου Q_λ. Τότε

$$\sum_{\lambda=1}^{N'}\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\subseteq\mathcal{Q}_\lambda} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| \geq \left(\frac{C}{\log R} - R^{-90}\right)\left|\int G d\mu\right|$$

Αρα για κάποιο απο τα Q_λ

$$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\subseteq\mathcal{Q}_\lambda} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| \geq CR^{-\frac{\epsilon}{5}}\left|\frac{C}{\log R} - R^{-90}\right|\left|\int G d\mu\right| \geq CR^{-\frac{\epsilon}{2}}\left|\int G\,d\mu\right|$$

Ορίζουμε $\mathcal{F}_1$ να είναι η οικογένεια των ρ^* που ανήκουν στην $\mathcal{F}_i$και είναι υποσύνολα του Q_λ.

Η οικογένεια ορθογωνίων $\mathcal{F}_1$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

- Δύο στοιχεία της ρ_1^*, ρ_2^*, αν είναι δυϊκά στο ίδιο αρχικό ρ θα τέμνονται στο σύνορο τους αφού αποτελούν πλακόστρωση του $\mathbb{R}^2$. Στην αντίθετη περίπτωση η γωνία τους θα είναι ίση με την γωνία των αντιστιχων ρ και κατά συνέπεια, μεγαλύτερη από $CR^{-\frac{1}{2}} = C\delta$.
- Επειδή το εμβαδό κάθε ρ^* είναι $CR^{-\frac{1}{2}}$, για κάθε ρ υπάρχουν $CR^{\frac{1}{2}}$ ορθογώνια $\rho^* \subseteq Q_\lambda$. Άρα $\#\mathcal{F}_1 \leq CR^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}} \leq CR^{50} = C\delta^{-100} = K$
- Το μήκος των στοιχείων της $\mathcal{F}_1$ είναι C και το πλάτος είναι $C\delta$
- Ισχύει $\frac{h}{2} \leq \|\phi_{\rho^*}{}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq h$, για κάθε $\rho^* \in F_1$, όπου $h = 2^i R^{-100}$ και $R^{-100} \leq h \leq CR^{\frac{1}{4}}$.
- Από την (1) συνεπάγεται

$$\sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_1}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2 \leq C_M R^{\frac{1}{2}}$$

και από την $\frac{h}{2} \leq \left\|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\right\|_\infty$ συνεπάγεται ότι $h^2\#\left(\mathcal{F}_1\right) \leq C_M R^{\frac{1}{2}}$

Από το λήμμα 1 μπορούμε να χωρίσουμε την $\mathcal{F}_1$ σε το πολύ $C\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^2$ το πλήθος υποοικογένειες $\mathcal{F}_{ij}$ για τις οποίες να ισχύουν

- Υπάρχουν αριθμοί p και $\theta \geq R^{-\frac{1}{2}}$ και ένα σύνολο $\mathcal{G}_{ij}$ από ορθογώνια τ με μήκος C και πλάτος περίπου θ τέτοια ώστε κάθε $\rho^* \in \mathcal{F}_{ij}$ να περιέχεται σε ένα τουλάχιστον $\tau \in \mathcal{G}_{ij}$
- Κάθε $\tau \in \mathcal{G}_{ij}$ περιέχει περίπου $p\theta\sqrt{R}$ το πλήθος ορθογώνια από την $\mathcal{F}_1$.
- κάθε $\rho^* \in \mathcal{F}_1$ περιέχεται σε το πολύ C το πλήθος $\rho^* \in \mathcal{F}_{ij}$
- $\#\left(\mathcal{G}_{ij}\right) \lesssim \frac{\#\mathcal{F}_1}{p\theta\sqrt{R}} \leq \frac{K}{p\theta\sqrt{R}}$

Επίσης ισχύουν ότι

- $$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_1} G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right| \geq CR^{-\frac{\epsilon}{2}}\left|\int G\,d\mu\right|$$
- αν $\rho^* \in \mathcal{F}_1$, τότε $\left|G_\rho^{\rho^*}\right| \leq h\phi_{\rho^*}$. Αυτό προκύπτει από ότι $\|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq h$

Από την (2) έχουμε ότι

$$\left|\int \sum_{i,j} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_{ij}} G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right| \geq CR^{\frac{-\epsilon}{2}}\left|\int G\,d\mu\right|$$

Άρα υπάρχει κάποιο ζεύγος (i,j) ώστε να είναι

$$\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}_{ij}} G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right| \geq \frac{CR^{-\frac{\epsilon}{2}}\left|\int G\,d\mu\right|}{\#(i,j)} \geq \frac{CR^{-\frac{\epsilon}{2}}\left|\int G\,d\mu\right|}{(\log R)^2} \geq CR^{-\epsilon}\left|\int G\,d\mu\right| \tag{2}$$

Θέτουμε $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{ij}$ και $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{ij}$.

Συνοψίζουμε για την $\mathcal{F}$ και την $\mathcal{G}$

- $\#(\mathcal{G}) \leq C\frac{K}{p\theta\sqrt{R}}$
- κάθε $\tau \in \mathcal{G}$ περιέχει περίπου $p\theta\sqrt{R}$ ορθογώνια από την $\mathcal{F}_1$.
- $\theta \geq R^{-\frac{1}{2}}$
- κάθε $\rho^* \in \mathcal{F}$ περιέχεται σε ένα τουλάχιστον $\tau \in \mathcal{G}$
- $\left|\int \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} d\mu\right| \geq CR^{-\epsilon}\left|G\,d\mu\right|$
- αν $\rho^* \in \mathcal{F}$, τότε $\left|G_\rho^{\rho^*}\right| \leq h\phi_{\rho^*}$
- $h^2\#\left(\mathcal{F}\right) \leq C_M R^{\frac{1}{2}}$

Τωρα διαιρούμε τον μοναδιαίο κύκλο σε τόξα Θ με κυκλικό μήκος περίπου θ έτσι ώστε η ακτινική προβολή καθενός β να περιέχεται σε κάποιο Θ. Για κάθε ρ ορίζουμε $\mathcal{F}(\rho)$ να είναι όλα τα $\rho^* \in \mathcal{F}$ που είναι δυικά στο ρ και $\mathcal{G}(\Theta)$ να είναι όλα τα $\tau \in \mathcal{G}$ των οποίων η γωνία περιέχεται στο $C_1\Theta$ για σταθερά C_1 που θα καθοριστεί σε λίγο. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2 ορίζουμε $\psi_\rho^{(k)} = \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} \phi_{\rho^*}^{(k)}$ και $\Psi_\Theta^{(k)} = \sum_{\tau \in \mathcal{G}(\Theta)} \phi_\tau^{(k)}$. Από το λήμμα 2 έχουμε

(3)
$$\begin{aligned} \left\| \sum_\rho \psi_\rho^{(4)} \right\|_2^2 &\lesssim \#\left(\mathcal{F}\right) pR^{-\frac{1}{2}} \log R \\ \left\| \sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \right\|_2^2 &\lesssim \#\left(\mathcal{F}\right) \frac{R^{-\frac{1}{2}}}{p} \log R \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι επειδή τα $\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)$ το πολύ να εφάπτονται στο σύνορο (αν είναι γειτονικά), $\psi_\rho^{(4)} \leq C$.

Ορίζουμε $H_\rho = \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} G_\rho^{\rho^*}$. Υπενθυμίζουμε ότι $G_\rho^{\rho^*} = b_{\rho^*} \chi_\beta \widehat{f(-x)}$. Ισχύει ότι

$$\widehat{H_\rho} = \widehat{\sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} G_\rho^{\rho^*}} = \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} \widehat{b_{\rho^*}} * \chi_\beta f(x) = \chi_\beta f(x) * \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} \widehat{b_{\rho^*}}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $\beta = \beta(\rho)$ και $supp\ \widehat{b_{\rho^*}} = \rho$, για όλα τα $\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)$. Άρα $supp\ \widehat{H_\rho} = \rho + \beta \subset 2\rho$. Ακόμα θέτουμε $H_\Theta = \sum_{\rho \subset \Theta} H_\rho$, $P = \left(\sum_\Theta |H_\Theta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Όταν γράφουμε $\rho \subseteq \Theta$ εννοούμε ότι το αντίστοιχο $\beta(\rho)$ έχει ακτινική προβολή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, η οποία περιέχεται στο τόξο Θ.

Λήμμα 7.

$$\|P\|_4 \lesssim h(\log R)^{\frac{1}{4}} \left(\#\left(\mathcal{F}\right) pR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Απόδειξη. Για κάθε ρ η $\widehat{H_\rho}$ έχει φορέα το 2ρ. Από το λήμμα 3 έχουμε:

$$\|P\|_4 \lesssim \left\| \left(\sum_\rho |H_\rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_4$$

Απο την άλλη

$$|H_\rho| \leq \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} h\phi_{\rho^*}^{(4)}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \|P\|_4 &\lesssim h \left\| \sum_\rho \left(\sum_{\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)} \phi_{\rho^*}^{(4)} \right)^2 \right\|_2^{\frac{1}{2}} \\ &= h \left\| \sum_\rho \left(\psi_\rho^{(4)}\right)^2 \right\|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim h \left\| \sum_\rho \psi_\rho^{(4)} \right\|_2^{\frac{1}{2}} \lesssim h(\log R)^{\frac{1}{4}} \left(\#(\mathcal{F}) pR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

. $\square$

Θα χρειαστούμε επίσης και την παρακάτω εκτίμηση για το H_Θ. Απο τις ιδιότητες της $\mathcal{F}$ γνωρίζουμε ότι $G_\rho^{\rho^*} \leq h\phi_{\rho^*}^{(M)}$

$$|H_\Theta| \leq \sum_{\rho\subset\Theta} |H_\rho| \leq \sum_{\rho\subset\Theta}\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)} h\phi_{\rho^*}^{(4)}.$$

Έστω $\rho \subseteq \Theta$. Απο την απόδειξη του 2 στο Λήμμα 1, γνωρίζουμε ότι όλα τα τ που περιέχουν το ρ^* έχουν συγκρίσιμη γωνία. Επιλέγουμε C_1 ώστε τ που περιέχουν το ρ^* να ανήκουν στο $\mathcal{G}(\Theta)$.

Ισχύει

$$\sum_{\rho\subset\Theta}\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)} h\phi_{\rho^*}^{(M)} \lesssim h\sum_{\tau\in\mathcal{G}(\Theta)}\sum_{\rho^*\subseteq\tau} \phi_{\rho^*}^{(M)}.$$

Κάθε τ έχει μήκος C και πλάτος $\leq C$. Κάθε ρ^* έχει μήκος 1 και πλάτος $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Επίσης για κάθε ρ τα αντίστοιχα ρ^* είναι ξένα, οπότε το τ περιέχει το πολύ $\sqrt{R}$ ορθογώνια ρ^* που αντιστοιχούν στο ίδιο ρ. Το πλήθος των ρ ειναι το πολύ $\sqrt{R}$, οπότε κάθε τ περιέχει το πολύ CR ορθογώνια ρ^*. Για κάθε $\rho^* \in \mathcal{F}$ ισχύει $\phi_{\rho^*}^{(M)} \leq \phi_\tau^{(M)}$. Άρα

$$|H_\Theta| \leq h\sum_{\tau\in\mathcal{G}(\Theta)}\sum_{\rho^*\subseteq\tau} \phi_{\rho^*}^{(M)} \lesssim hCR\sum_{\tau\in\mathcal{G}(\Theta)} \phi_\tau^{(M)} = hCR\Psi_\Theta^{(M)} \tag{4}$$

Από δω και κάτω είναι το κυρίως μέρος της απόδειξης. Κάθε τετράγωνο πλευράς t που θα ορίσουμε παρακάτω θα είναι ένα τετράγωνο της μορφής $[0,t)\times[0,t)$ μετατοποισμένο κατά κάποιο στοιχείο του $t\mathbb{Z}^2$, οπότε όλα αυτά τα τετράγωνα πλακοστρώνουν το επίπεδο. Παρατηρούμε ότι

$$\phi_\tau^{(4)}(x) \lesssim \left(\frac{max(\theta,|x-y|)}{\theta}\right)^4 \phi_\tau^{(4)}(y)$$

για κάθε x και y, και από αυτό συνεπάγεται

$$\Psi_\Theta^{(4)}(x) \lesssim \left(\frac{max(\theta,|x-y|)}{\theta}\right)^4 \Psi_\Theta^{(4)}(y)$$

Ορίζουμε ένα $A-$τετράγωνο να είναι ένα τετράγωνο Q με πλευρά θ και $max_Q\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \in [A, 2A]$. Από την τελευταία ανισότητα αν Q είναι ένα A-τετράγωνο έχουμε $\min_Q\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \gtrsim \max_Q\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \geq A$. Απο την (3) έχουμε,

$$\begin{aligned}\text{πλήθος Α-τετραγώνων } &= \frac{1}{A^2\theta^2}\sum_{Q:\text{ το } Q \text{ είναι } A-\text{τετράγωνο}}\int_Q A^2 \lesssim \frac{1}{A^2\theta^2}\sum_{Q:\text{ το } Q \text{ είναι } A-\text{τετράγωνο}}\int_Q \left|\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}\right|^2 \\ &\leq \frac{1}{A^2\theta^2}\left\|\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}\right\|_2^2 \leq \frac{1}{A^2\theta^2}\frac{\#\mathcal{F}}{p\sqrt{R}}\log R\end{aligned}$$

Ακόμα αν x, y βρίσκονται σε ενα τετράγωνο Q με πλευρά C ισχύει ότι,

$$\left(\frac{max\{\theta, |x-y|\}}{\theta}\right)^4 \lesssim \left(\frac{C}{R^{-\frac{1}{2}}}\right)^4 = CR^2$$

και άρα $\max_Q \sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \lesssim R^2 \min_Q \sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}$

Αν περιοριστούμε στα A-τετράγωνα που τέμνουν τον φορέα του μ, τότε όλα αυτα βρίσκονται σε ένα μεγάλο τετράγωνο πλευρας C. Σε αυτό το τετράγωνο η $\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}$ είναι φραγμένη, οπότε υπάρχουν το πολύ $C\log R$ αριθμοι $A = 2^j$ για τέτοια 2^j-τετράγωνα. Θα δείξουμε ότι:

$$\left|\int_{E_A} \sum_{\rho^*\in\mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \lesssim \left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}$$

Όπου E_A είναι η ένωση των A-τετραγώνων, που τέμνουν τον φορέα του μ.

Πρόταση 3. *Υπάρχει μια ακτινική συνάρτηση q για την οποία ισχύει $|q(x)| \le C_N(1+|x|)^{-N}$ για κάθε N και έχει και την παρακάτω ιδιότητα. Αν $t = (\theta R)^{-1}, q^t(x) = t^{-2}q(t^{-1}x)$ και $\overline{\mu}$ είναι το απόλυτα συνεχές μέτρο $q^t * \mu$ δηλαδή $\overline{\mu}(A) = \int_A \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x-y)d\mu(y)dx$ με πυκνότητα $\frac{d\overline{\mu}}{dx} = \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x-y)d\mu(y)$, τότε για κάθε Θ και για κάθε τετράγωνο με πλευρά μεγαλύτερη από t*

$$\int_Q |H_\Theta| d\mu \lesssim \sum_{j\ge 0} 2^{-Mj} \int_{2^jQ} |H_\Theta| d\overline{\mu} \tag{5}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ύπαρξη της q ώστε να ικανοποιεί την (5) για τετράγωνα Q με πλευρά t. Έστω $\Lambda \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\phi^{(4)}(x) \le C\sum_{j\ge 0} 2^{-j\Lambda}\chi_{2^jQ}$ και έστω k μια ακτινική Schwarz συνάρτηση με $\widehat{k} = 1$ σε ένα αρκετά μεγάλο δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Αφού το t είναι σταθεροποιημένο ο φορέας της $\widehat{H_\Theta}$ βρίσκεται μέσα σε ένα δίσκο παραμορφωμένο κατα Ct^{-1} για κάποιο C. Ισχύει ότι $\widehat{|H_\Theta|} \le C|\widehat{k^t| \cdot |H_\Theta}|$ και κατά συνέπεια $|H_\Theta| \lesssim |k^t| * |H_\Theta|$ Και

$$\begin{aligned}\int_Q |H_\Theta|\, d\mu \lesssim \int_Q |k^t| * |H_\Theta| &= \int_Q \int_{\mathbb{R}^2} |k^t|(x-y)|H_\Theta|(x)\frac{\phi_Q^{(4)}(y)}{\phi_Q^{(4)}(y)} d\mu(x)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_Q \frac{|k^t|(x-y)}{\phi_Q^{(4)}(y)} d\mu(x)|H_\Theta|(x)\phi_Q^{(4)}(y)\, dy\end{aligned}$$

Ακόμα ισχύει $\frac{1}{\phi_Q^{(4)}(y)} \le C\left(1+t^{-1}\|y-x\|\right)^\Lambda$ οπότε θέτοντας $q(x) = (1+|x|)^\Lambda |k(x)|$ τότε η q εξασθενεί όπως θέλουμε και επιπλέον

$$\int_Q |H_\Theta| d\mu \lesssim \int \phi_Q(y)|H_\Theta|(y)d\overline{\mu}(y) \lesssim \sum_{j\ge 0} 2^{-\Lambda j}\int_{2^jQ} |H_\Theta| d\overline{\mu}$$

με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα, ευκολα αποδεικνύεται η ανισότητα πρώτα για την περίπτωση όπου τα τετράγωνα έχουν πλευρα $2^j t$ με $j > 1$ και έπειτα για την γενική περίπτωση. $\square$

Επίσης ισχύει ότι $\overline{\mu}\left(D_r\right) \lesssim CBr^{\alpha}$, όπου $B = \sup_x \sup_{r\geq R^{-1}} \frac{\mu\left(D(x;r)\right)}{r^{\alpha}}$. Πράγματι

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left(D_r\right) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{D(x_0;r)} q^t(x-y)\,d\mu(y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} q^t(x)\mathcal{X}_{D(x_0-y;r)}(x)\,d\mu(y)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x)\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{X}_{D(x_0-x;r)}(y)\,d\mu(y)\,dx \leq CBr^{\alpha}\end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε και ότι $\overline{\mu}\left(\mathbb{R}^2\right) = C\mu\left(\mathbb{R}^2\right)$. Θα χρειαστούμε, την επόμενη πρόταση

Πρόταση 4.

$$\left\|\frac{d\overline{\mu}}{dx}\right\|_{\infty} \lesssim B(\theta R)^{2-\alpha}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\overline{\mu}}{dx}\right| &\leq \int \left|q^t(x-y)\right|\,d\mu(y) \leq (\theta R)^2\int\left|q\big(\theta R(x-y)\big)\right|\,d\mu(y) \leq C_N(\theta R)^2\int\left|\frac{1}{\left(1+|\theta R(x-y)|\right)^N}\right|\,d\mu(y) \\ &= C_N(\theta R)^2\left[\int_{D(x,\frac{1}{\theta R})}\frac{1}{\left(1+|\theta R(x-y)|\right)^N}\,d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{2^{k-1}}{\theta R}\leq|x-y|\leq\frac{2^k}{\theta R}}\frac{1}{\left(1+|\theta R(x-y)|\right)^N}\,d\mu\right] \\ &\leq C_N(\theta R)^2\left[\int_{D(x,\frac{1}{\theta R})}d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{2^{k-1}}{\theta R}\leq|x-y|\leq\frac{2^k}{\theta R}}\frac{1}{2^{(k-1)N}}\,d\mu\right] \\ &\leq (\theta R)^2\left[B\frac{1}{(\theta R)^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(k-1)N}}\mu\bigg(D\left(x,\tfrac{2^k}{\theta R}\right)\bigg)\right] \leq C_N(\theta R)^2\left[B\frac{1}{(\theta R)^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(k-1)N}}B\frac{2^{k\alpha}}{(\theta R)^{\alpha}}\right] \\ &\leq C_N(\theta R)^2 B(\theta R)^{-\alpha}\left[1+2^N\sum_{k=1}^{+\infty}2^{k(\alpha-N)}\right] \leq C_N B\left(\theta R\right)^{2-\alpha}\end{aligned}$$

$\square$

Έστω Q ένα A-τετράγωνο τότε

$$\left|\int_Q\sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_{\rho}^{\rho^*}\,d\mu\right| \leq \sum_{\Theta}\int_Q|H_{\Theta}|d\mu = \sum_{\Theta:\max_Q\Psi_{\Theta}^{(4)}\geq R^{-\epsilon}}\int_Q|H_{\Theta}|d\mu + \sum_{\Theta:\max_Q\Psi_{\Theta}^{(4)}<R^{-\epsilon}}\int_Q|H_{\Theta}|d\mu$$

Για το δεύτερο όρο από την (4) έχουμε ότι $|H_{\Theta}| \lesssim Rh\Psi_{\Theta}^{(M)} \lesssim Rh\left(\Psi_{\Theta}^{(4)}\right)^{\frac{M}{4}}$ αν έχουμε επιλέξει το M αρκετά μεγάλο παίρνουμε

$$\sum_{\Theta:\max_Q\Psi_{\Theta}^{(4)}<R^{-\epsilon}}\int_Q|H_{\Theta}|d\mu \lesssim \mu(\mathbb{R}^2)hR^{1-\frac{M}{4}\epsilon} \leq \mu(\mathbb{R}^2)R^{-100}.$$

Το πλήθος των Θ στον πρώτο όρο είναι το πολύ $R^{\epsilon}A$ αφου $\Psi_{\Theta}^{(4)} \gtrsim R^{-\epsilon}$ και το άθροισμά τους είναι $\lesssim A$. Από το γεγονός ότι $\theta \geq (R\theta)^{-1}$ και την πρόταση 3 παίρνουμε,

$$\left|\int_{Q} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_{\rho}^{\rho^*}\, d\mu\right| \lesssim \sum_{j\geq 0} 2^{-\Lambda j} \int_{2^j Q} \sum_{\Theta:\max_Q \Psi_{\Theta}^{(4)} \geq R^{-\epsilon}} |H_{\Theta}| d\overline{\mu} + \mu(\mathbb{R}^2)R^{-100}$$

$$\underset{\text{Schwarz}}{\lesssim} (AR^{\epsilon})^{\frac{1}{2}} \sum_{j\geq 0} 2^{-\Lambda j} \int_{2^j Q} P d\overline{\mu} + \mu(\mathbb{R}^2)R^{-100}$$

Θα εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα $|\int_{E_A} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_{\rho}^{\rho^*}\, d\mu|$ αθροίζοντας πάνω από όλα τα A-τετράγωνα. Έστω E_A^j η 2^j παραμόρφωση της ένωσης E_A όλων των A-τετραγώνων. Επειδή υπάρχουν το πολύ R το πλήθος A-τετράγωνα που τέμνουν τον φορέα του μ ο δεύτερος όρος δεν θα δώσει παραπάνω από $\mu(\mathbb{R}^2)R^{-99}$. Από την πρόταση 4 παίρνουμε

$$\left|\int_{E_A} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_{\rho}^{\rho^*}\, d\mu\right| \underset{\text{Holder}}{\lesssim} (AR^{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\, 2\|P\|_4 \sum_{j} 2^{2j} 2^{-\Lambda j} \left\|\frac{d\overline{\mu}}{dx}\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(E_A^j)} + \mu(\mathbb{R}^2)R^{-99}$$

$$\lesssim (AR^{\epsilon})^{\frac{1}{2}} (\log R)^{\frac{1}{4}}\, h\left(\#(\mathcal{F})pR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{j} 2^{(2-\Lambda)j} \mu\left(\mathbb{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} (\theta R)^{\frac{2-a}{4}}\ \overline{\mu}(E_A^j)^{\frac{3}{4}} + \mu(\mathbb{R}^2)R^{-99}$$

Επειδη για κάθε x, $\overline{\mu}\left(D(x;r)\right) \lesssim CBr^{\alpha}$, κάθε τετράγωνο πλευράς θ έχει μέτρο $\overline{\mu}$ το πολύ $B\theta^{\alpha}$. Επίσης δείξαμε ότι το πλήθος των A-τετραγώνων είναι το πολύ $C\frac{\#(\mathcal{F})}{p\sqrt{R}} \log R\theta^{-2}A^{-2}$:

$$\overline{\mu}\left(E_A\right) \lesssim \log R \frac{\#(\mathcal{F})}{p\sqrt{R}} \theta^{-2}A^{-2}B\theta^{\alpha}$$

Ισοδύναμα

$$p \lesssim \#(\mathcal{F})B\theta^{-2}R^{-\frac{1}{2}}A^{-2}\overline{\mu}\left(E_A\right)^{-1}\theta^{\alpha}\log R$$

Ένα παραμορφωμένο κατά 2^j, A-τετράγωνο έχει μέτρο $\overline{\mu}$ το πολύ $CB2^{j\alpha}\theta^{\alpha}$

$$p \lesssim \#\left(\mathcal{F}\right)B\theta^{-2}R^{-\frac{1}{2}}A^{-2}\overline{\mu}\left(E_A^j\right)^{-1} 2^{j\alpha}\theta^{\alpha}\log R$$

Χρησιμοποιώντας και ότι $h \lesssim R^{\frac{1}{4}} \left(\# \left(\mathcal{F}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$ παίρνουμε

$$\left|\int_{E_A} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \lesssim$$

$$(\log R)^{\frac{1}{4}} (AR^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R^{\frac{1}{4}}}{\left(\#(\mathcal{F})\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_j \left(\left(\# \left(\mathcal{F}\right)\right)^2 B\theta^{-2}R^{-1}A^{-2}\overline{\mu}\left(E_A^j\right)^{-1} 2^{j\alpha}\theta^\alpha \log R\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{(2-\Lambda)j} B^{\frac{1}{4}} (\theta R)^{\frac{2-a}{4}}\ \overline{\mu}(E_A^j)^{\frac{3}{4}}$$

$$+\mu(\mathbb{R}^2)R^{-99} = (\log R)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_j 2^{\left(2-\Lambda+\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)j} B^{\frac{1}{2}}\overline{\mu}\left(E_A^j\right)^{\frac{1}{2}} R^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)} + \mu(\mathbb{R}^2)R^{-99} \lesssim$$

$$(\log R)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{\epsilon}{2}} \left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} R^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$$

Τελικά απο την (2) έχουμε

$$\left|\int G\, d\mu\right| \leq CR^\epsilon \left|\int_{E_A} \sum_{\rho,\rho^*:\rho^*\in\mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*}\, d\mu\right| \leq C\left(\log R\right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3\epsilon}{2}} \left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} R^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$$

Αν f είναι συνάρτηση με φορέα το A_R και $\|f\|_{L^2} = 1$ τότε

$$\left|\int_{A_R} \widehat{\mu}(x) f(-x)\, dx\right| = \left|\int G\, d\mu\right| \leq (\log R)^{\frac{1}{2}} \left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{-3\epsilon+1+\alpha}{2}}$$

Άρα

$$\frac{1}{R}\int_{A_R} \left|\widehat{\mu}(x)\right|^2\, dx \leq C_\epsilon B\mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+4\epsilon}$$

.

Το οποίο από το λήμμα 6 μας δίνει

(6) $$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2\, d\theta \leq C_\epsilon B\mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+4\epsilon}$$

.

Αν υποθέσουμε οτι μ είναι ένα μέτρο με φορέα τον μοναδιαίο δίσκο και α-διαστατη ενεργεια 1 τοτε Όπως στο λήμμα 5 μπορούμε να βρούμε μέτρα μ_j με $1 \leq j \lesssim \log R$ τέτοια ώστε $\mu = \sum_j \mu_j$ και

$$\mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) \sup_x \sup_{r\geq R^{-1}} \frac{\mu_j\left(D(x,r)\right)}{r^\alpha} \lesssim 1$$

Για κάθε ένα από αυτα τα μέτρα ισχύει η (6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}_j\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2\, d\theta \leq C_\epsilon \sup_x \sup_{r\geq R^{-1}} \frac{\mu_j\left(D(x,r)\right)}{r^\alpha} \mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+4\epsilon} \lesssim C_\epsilon R^{-\frac{\alpha}{2}+4\epsilon}$$

Τελικά

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_j \widehat{\mu_j}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \lesssim \log R \sum_j \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu_j}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$$
$$\lesssim C_\epsilon \left(\log R\right)^2 R^{-\frac{\alpha}{2}+4\epsilon} \lesssim C_\epsilon R^{-\frac{\alpha}{2}+6\epsilon}$$

Το οποίο δίνει το θεώρημα.

Αναφορές

[1] T. Wolff, *Decay of circular means of Fourier transforms of measures*, Internat. Math. Re. Notices 1999, no. 10, 547-567.

[2] T. Wolff, *Lectures on harmonic analysis*, I. Laba and C. Shubin, eds., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2003).