ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ

ΜΕΣΑ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ Ι. ΜΠΟΥΝΑΚΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά και Εκπαίδευση» και κατατέθηκε τον Σεπτέμβριο του 2004.

Επιβλέπων Καθηγητής ήταν ο κ. Μιχάλης Λάμπρου.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

Χ. Κουρουνιώτης, Μ. Λάμπρου και Π. Πάμφιλος.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ

ΜΕΣΑ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δυο είναι οι κύριοι σκοποί της εργασίας αυτής: ο ένας είναι να γίνει μια σύντομη παρουσίαση των δυόμιση χιλιάδων ετών ιστορίας των κωνικών τομών. Ο άλλος είναι η μελέτη των καμπυλών αυτών, σύμφωνα με την θεωρία και τις μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δηλαδή με την συνθετική λεγόμενη μέθοδο των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών.

Για λόγους πληρότητας της εργασίας θα αναφέρουμε και μερικά στοιχεία από τις σύγχρονες αναλυτικές μεθόδους μελέτης των κωνικών τομών, χωρίς όμως να τα χρησιμοποιήσουμε.

Η μελέτη των κωνικών τομών, όπως είναι γνωστό, γίνεται σήμερα στο Λύκειο και στα Πανεπιστήμια με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Από την εποχή της ανακάλυψης της Γεωμετρίας αυτής από τον Καρτέσιο και τον Fermat, στις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα, όλο και περισσότερο η μελέτη των καμπυλών αυτών, και όχι μόνο, γίνεται με αλγεβρικές και αναλυτικές μεθόδους, με αποτέλεσμα σήμερα να αποτελούν ένα τμήμα της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Έτσι έχει ξεχαστεί τελείως η μελέτη των κωνικών τομών με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που ήταν, άλλωστε, ο πρωταρχικός τρόπος μελέτης τους όταν ανακαλύφτηκαν στην αρχαία Ελλάδα.

Η σύντομη ιστορική αναδρομή που επιχειρούμε, στα πλαίσια των υπαρχόντων ιστορικών πηγών και των δεδομένων χρονικών ορίων, πιστεύουμε ότι υπηρετεί τους εξής στόχους:

I. Να αναδείξει την επιστημονική πορεία και εξέλιξη των κωνικών τομών και να βοηθήσει τους μελλοντικούς μελετητές της ιστορίας τους.

II. Να συνεισφέρει στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία των κωνικών τομών μέσα από την ιστορικομαθηματική τους προσέγγιση.

Εξ' άλλου η παρουσίαση και εν μέρει η αναστήλωση της θεωρίας των κωνικών τομών με καθαρά Ευκλείδειες γεωμετρικές μεθόδους, πιστεύουμε ότι υπηρετεί τους παρακάτω στόχους:

Α. Να αναδείξει το γεγονός ότι η μελέτη των κωνικών τομών είναι φυσική συνέχεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και κυρίως αρχαία Ελληνική πνευματική κατάκτηση και κληρονομιά.

Β. Να παρουσιάσει τις δυνατότητες και την δυναμική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε θέματα που δεν είναι γνωστά στους μαθητές και τους διδάσκοντες στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Γ. Να αναδείξει τις διαχρονικές διδακτικές αξίες των καθαρά γεωμετρικών μεθόδων, οι οποίες χαρακτηρίζονται από έναν λιτό και κομψό παραγωγικό συλλογισμό.

Δ. Ιδιαίτερα στις μέρες μας, που ο αλγεβρικές και αναλυτικές μέθοδοι έχουν σχεδόν κυριαρχήσει σ' όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, είναι επιβεβλημένο να υπάρξει μια ισόρροπη διδασκαλία των Μαθηματικών κλάδων. Από καθαρά επιστημονική άποψη πιστεύουμε ότι και οι Ευκλείδειες μέθοδοι και οι αναλυτικές πρέπει να συνυπάρχουν και κάθε φορά να επιλέγουμε εκείνη που δίνει σύντομη και κομψή λύση στο πρόβλημά μας.
Ειδικά όμως στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πιστεύουμε ότι ο ρόλος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι αναντικατάστατος και θα 'πρεπε να έχει μεγαλύτερη βαρύτητα, απ' ότι έχει σήμερα. Εξ' άλλου, πάρα πολλοί έμπειροι δάσκαλοι, αλλά και πνευματικοί άνθρωποι ανά τους αιώνες, υποστηρίζουν ότι η μελέτη της Γεωμετρίας αποτελεί ένα ισχυρό πεδίο καλλιέργειας και άσκησης της σκέψης των νέων ανθρώπων, ικανό να στηρίξει κάθε μετέπειτα μαθηματική και πνευματική τους μόρφωση. Έτσι π.χ., ο μεγάλος Γερμανός γεωμέτρης J. Steiner (1796-1863) είχε πει ότι,
«οι υπολογισμοί υποκαθιστούν την σκέψη, ενώ η γεωμετρία την διεγείρει».
Ακόμη και αν δεν συμφωνήσουμε απόλυτα μαζί του, γεγονός είναι ότι όλοι οι μεγάλοι θετικοί επιστήμονες και δημιουργοί από το $16^{ο}$ αιώνα και μετά, ξεκίνησαν την μαθηματική τους παιδεία από την Γεωμετρία και κυρίως τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.
Επίσης, πολλοί σύγχρονοι ψυχολόγοι και νευροψυχολόγοι υποστηρίζουν ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος «χωρίζεται» σε δυο τμήματα που αντιστοιχούν σε ένα «αριθμητικό - αναλυτικό» και ένα που σχετίζεται με την αντίληψη του χώρου και των σχημάτων, δηλαδή «γεωμετρικό». Η καλλιέργεια και των δύο είναι καθήκον της Μαθηματικής παιδείας και αποτελεί θεμέλιο της πνευματικής ανάπτυξης.

Η εργασία αυτή είναι εν μέρει μια επιστροφή στις απαρχές των Ελληνικών μαθηματικών, όχι για συναισθηματικούς λόγους, αλλά για καθαρά επιστημονικούς και εκπαιδευτικούς: Πρόθεσή μας είναι να βάλουμε ένα λιθαράκι, συμμετέχοντας στην προσπάθεια της τοποθέτησης των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση της χώρας μας σε δοκιμασμένα και στέρεα θεμέλια.

Θεωρώ καθήκον μου να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. Μιχάλη Λάμπρου, που είχε την αρχική ιδέα και την επίβλεψη της εργασίας αυτής, για το ενδιαφέρον του, τον ακούραστο ζήλο του και την εν γένει βοήθειά του. Επίσης ευχαριστώ τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. Πάρη Πάμφιλο για την προσφορά του σχεδιαστικού (και όχι μόνο) προγράμματος *EucliDraw* με την βοήθεια του οποίου έγιναν τα σχήματα.

Σεπτέμβριος 2004

Δημήτρης Ι. Μπουνάκης

П Е Р І Е Х О М Е Ν А

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΕΛΛΕΙΨΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Κ Ω Ν Ι Κ Ε Σ   Τ Ο Μ Ε Σ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο   Π Ρ Ω Τ Ο

ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ 4^{o} Π.Χ. ΑΙΩΝΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΟΝ 20^{o} ΑΙΩΝΑ Μ.Χ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιστορία των κωνικών τομών χάνεται στα βάθη των αιώνων και η πλήρης παρουσίασή της, είναι έργο επίπονο και δύσκολο, αφού οι πηγές είναι ελάχιστες. Αναλαμβάνοντας όμως το θέμα της μελέτης των κωνικών τομών με Ευκλείδεια μέσα, κρίναμε σκόπιμο να μην το προσπεράσουμε ή να μην του δώσουμε μια απλή επιφανειακή περιγραφή. Γι' αυτό, στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε εν συντομία, αλλά τεκμηριωμένα, τις ουσιαστικότερες πτυχές της, πιστεύοντας ότι συμβάλουμε στην ανάπτυξη και μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών.

Γενικά μπορούμε να διακρίνουμε τρεις σημαντικούς σταθμούς στην ιστορία των κωνικών τομών. Ο πρώτος είναι η ανακάλυψή τους από τον Μέναιχμο, όπως πιστεύουμε, τον 4^{o} αιώνα π.Χ., ο δεύτερος η σε βάθος μελέτη τους από τον Απολλώνιο τον 3^{o} αιώνα π.Χ. και ο τρίτος η μελέτη τους υπό το πρίσμα της Προβολικής Γεωμετρίας τον 17^{o} αιώνα.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού θα αναφερθούμε στις κωνικές τομές κατά την αρχαιότητα, δηλαδή μέχρι τον 10^{o} μ.Χ. αιώνα, ενώ στο δεύτερο θα δούμε πως ξανάρχισε η μελέτη τους στην Δύση από τον 16^{o} μ.Χ. αιώνα και μετά, καθώς και ποιοι επιστήμονες ασχολήθηκαν με αυτές. Ακόμη στο τρίτο μέρος θα δούμε ποιοι έγραψαν βιβλία ή δίδαξαν θέματα κωνικών τομών στην νεώτερη Ελλάδα και τέλος μια σύντομη αναφορά στο περιεχόμενο των βιβλίων κωνικών τομών, τα οποία εκδόθηκαν στην χώρα μας κατά τον 19^{o} και 20^{o} αιώνα.

Α. ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Αφετηρία για την ανακάλυψη και μελέτη των κωνικών τομών, από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, φαίνεται να ήταν ένα από τα τρία περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας. Το πρόβλημα αυτό συνδέθηκε μάλιστα και με ένα μύθο, έναν χρησμό που λέγεται ότι έδωσε το μαντείο των Δελφών στους Δήλιους. Προκειμένου να απαλλαγούν από τον λιμό που τους μάστιζε, έπρεπε να διπλασιάσουν τον βωμό του Δηλίου Απόλλωνα. Έτσι ονομάστηκε και «Δήλιον πρόβλημα»:

Να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, ακμή κύβου ο οποίος να έχει όγκο διπλάσιο του όγκου ενός δοσμένου κύβου,

δηλαδή, με σύγχρονο συμβολισμό, αν α η ακμή του δοσμένου κύβου, ζητείται να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τμήμα x ώστε $x^3 = 2α^3$.

Το αντίστοιχο πρόβλημα στο επίπεδο είναι η κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού δοσμένου τετραγώνου. Ενώ το πρόβλημα αυτό ανάγεται στην κατασκευή μιας μέσης αναλόγου μεταξύ δυο δοθέντων τμημάτων α, β ($α/x = x/β$) και είναι εύκολη (περιγράφεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη Βιβλίο VI, Πρόταση 13, [5], σελ. 446), η προηγούμενη κατασκευή «ταλαιπώρησε» δημιουργικά επί αιώνες τους μαθηματικούς, ώσπου αποδείχθηκε τελικά, το 1837 από τον Pierre Laurent Wantzell (1814-1848) ότι είναι αδύνατη. Το αδύνατο του προβλήματος αυτού, όπως και της τριχοτόμησης μιας γωνίας, αποδεικνύονται με τη χρήση Θεωρίας Galois (βλ. π.χ. [13]).

Σχετικά με το «Δήλιον πρόβλημα», που παρέμενε άλυτο για πολλά χρόνια, ο *Πρόκλος* (450 περίπου μ.Χ., νεοπλατωνικός φιλόσοφος, τελευταίος διευθυντής της Ακαδημίας Πλάτωνος), μας λέει:

> «ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο, ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον ἐτετραγώνισε ..»

(Πρόκλος, *Υπόμνημα στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη,* σελ. 213)

Έτσι φαίνεται ότι πρώτος ο *Ιπποκράτης ο Χίος* (≈430 π.Χ.) έκανε ένα σημαντικό βήμα: διαπίστωσε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να παρεμβληθούν δυο μέσες ανάλογοι μεταξύ των τμημάτων α και 2α, δηλαδή να κατασκευαστούν τμήματα κ, λ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\lambda}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε εύκολα προκύπτει $\kappa^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το ζητούμενο τμήμα είναι το κ.

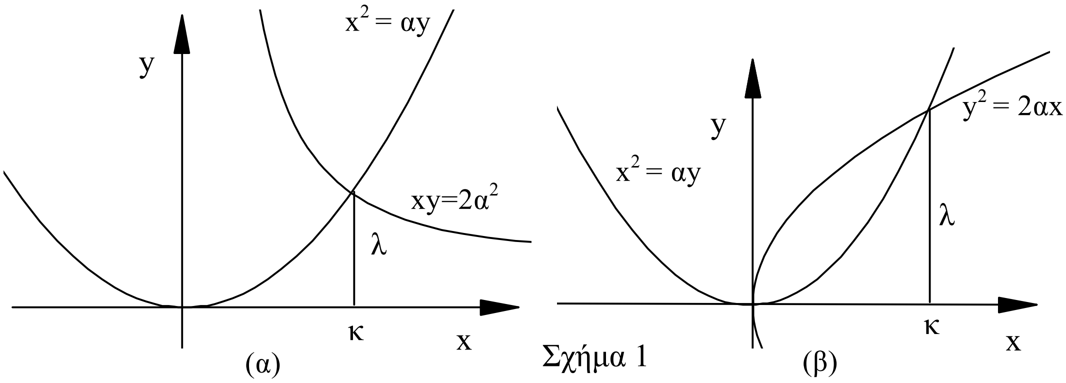
Α1. Μέναιχμος

Μετά την διατύπωση του Ιπποκράτη του Χίου της ισοδύναμης μορφής του «Δηλίου προβλήματος», άρχισαν οι προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών για την κατασκευή δυο μέσων αναλόγων τμημάτων. Ο πρώτος ο οποίος συνέδεσε το πρόβλημα της παρεμβολής δυο μέσων αναλόγων με τις τομές ενός κώνου, φαίνεται ότι ήταν ο γεωμέτρης και αστρονόμος *Μέναιχμος* (περίπου 375-325 π.Χ.), αδελφός του Δεινοστράτου και μαθητής του Πλάτωνα και του Ευδόξου.

Αυτό το συνάγουμε από δυο αναφορές του βυζαντινού μαθηματικού και σχολιαστή Ευτόκιου (6ος αιώνας μ.Χ.) στα σχόλιά του, στο έργο του Αρχιμήδη *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*, σχετικές με το διπλασιασμό του κύβου. Στην πρώτη αναφορά (σελ. 78) περιγράφει και αποδίδει στον Μέναιχμο δυο λύσεις του προβλήματος με την βοήθεια κωνικών τομών. Το σχετικό τμήμα αρχίζει ως εξής:

«Ὡς Μέναιχμος.
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ
τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ..»

Στην μια λύση, σε σύγχρονη ορολογία, ο Μέναιχμος θεώρησε τα τμήματα κ, λ ως συντεταγμένες του σημείου τομής της καμπύλης $x^2 = \alpha y$ (παραβολή) με καμπύλη $xy = 2\alpha^2$ (υπερβολή), (Σχήμα 1(α)), ενώ στην δεύτερη ως συντεταγμένες του σημείου τομής της καμπύλης $y^2 = 2\alpha x$ (παραβολή) με την την καμπύλη $x^2 = \alpha y$ (παραβολή) (Σχήμα 1(β)).



Σχήμα 1

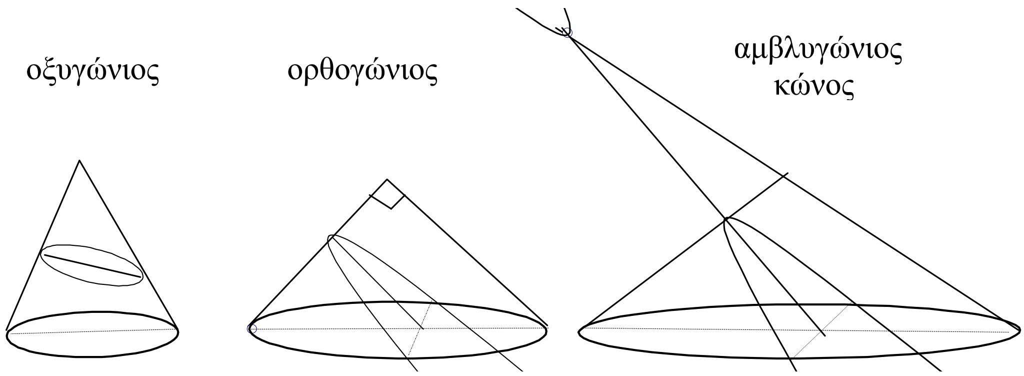
Πραγματικά, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, η παραπάνω σχέση (1) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις $\kappa^2 = \alpha\lambda$, $\lambda^2 = 2\alpha\kappa$ ή με τις σχέσεις $\kappa^2 = \alpha\lambda$, $\kappa\lambda = 2\alpha^2$.

Η δεύτερη αναφορά στον Μέναιχμο, είναι σε μια επιστολή του Ερατοσθένη του Κυρηναίου (275-195 π.Χ., διευθυντή της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας) προς τον βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίο τον Ευεργέτη. Την επιστολή αυτή σώζει ο Ευτόκιος στο έργο του (σελ. 96) που αναφέραμε παραπάνω, στην οποία υπάρχει ένα επίγραμμα όπου μεταξύ άλλων λέει:

«μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων, μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας διζήσῃ, μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο καμπύλον ἐγ γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται…».

Έτσι και η φράση *«μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας»* συνηγορεί στην άποψη ότι *οι τρεις καμπύλες-τομές κώνου ανακαλύφθηκαν από τον Μέναιχμο*, στην προσπάθειά του να βρει τα τμήματα κ, λ.
Η άποψη αυτή είναι επικρατέστερη στη ιστορία των μαθηματικών, αλλά διατυπώνεται τελευταία και η άποψη να ανακαλύφθηκαν οι καμπύλες αυτές πριν τον Μέναιχμο. Επίσης υποστηρίζεται ότι μπορεί να ανακαλύφθηκαν πρώτα ως επίπεδες καμπύλες και μετά να διαπιστώθηκε ότι μπορούν να προκύψουν και ως τομές κώνου (βλέπε π.χ. [22], σελ. 96). Ακόμη ο ιστορικός O. Neugebauer, στο έργο του Apollonius-Stydien (1932), υποστηρίζει ότι οι κωνικές τομές ανακαλύφθηκαν από την μελέτη των ηλιακών ρολογιών.

Αν και δεν είναι με βεβαιότητα γνωστό πώς έφτασε ο Μέναιχμος να συσχετίσει τις καμπύλες που ζητούσε με τις τομές κώνου με επίπεδο, γεγονός είναι ότι αποτέλεσε ένα σπουδαίο επίτευγμα με μεγάλες συνέπειες στην ανάπτυξη των θετικών επιστημών.



Σύμφωνα πάντως με τις πηγές, ο Μέναιχμος θεώρησε τις τομές της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου από ένα επίπεδο που ήταν κάθετο σε μια γενέτειρά του. Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου, οι καμπύλες αυτές είναι διαφορετικές και ονομάζονται αντίστοιχα, οξυγωνίου, ορθογωνίου, και αμβλυγωνίου κώνου τομές.

Τα ονόματα αυτά των κωνικών τομών διατηρήθηκαν για πολλά χρόνια, μέχρι που ο Απολλώνιος (260 π.Χ.-170 π.Χ) όρισε τις ίδιες καμπύλες με έναν κάπως διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) τρόπο και τους έδωσε τα γνωστά σήμερα ονόματα έλλειψη, παραβολή και υπερβολή αντίστοιχα.

Α2. Αρισταίος και Ευκλείδης

Ο πρώτος ο οποίος φέρεται να ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές μετά τον Μέναιχμο, ήταν ο *Αρισταίος ο πρεσβύτερος* (περίπου 320 μ.Χ), ο οποίος έγραψε ένα βιβλίο για τις κωνικές τομές και ως συνέχεια αυτού πέντε βιβλία «Περί στερεών τόπων» που ήταν σχετικά με τις κωνικές τομές. Ο όρος «στερεοί τόποι» χρησι-μοποιείται για να δηλώσει ότι οι κωνικές τομές (που προκύπτουν από τομές στερεών σχημάτων-κώνων) θεωρούνται ως γεωμετρικοί τόποι και βάσει αυτών λύνονται τα λεγόμενα «μη επίπεδα» προβλήματα, π.χ. ο διπλασιασμός του κύβου. Επίπεδα προβλήματα θεωρούνταν αυτά που μπορούν να λυθούν χρησι-μοποιώντας ευθείες και κύκλους (ανάγονται σε εξισώσεις το πολύ δευτέρου βαθμού).
Σχετικά ο Πάππος (περίπου 300 μ.Χ.) στην *Συναγωγή* του, βιβλίο ΙΙΙ, σελ. 54, αναφέρει:

> «…τὰ μὲν οὖν δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας
> δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτο ἂν εἰκότως ἐπίπεδα·
> καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι' ὧν λύεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα
> τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ προβλήματα λύεται
> παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου
> τομῶν ἢ πλειόνων, ταῦτα στερεὰ κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν
> κατασκευὴν ἀναγκαῖόν ἐστι χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων
> ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς…»

Μετά τον Αρισταίο, με τις κωνικές τομές ασχολήθηκε και ο Ευκλείδης, ο οποίος έγραψε τέσσερα σχετικά βιβλία. Τις πληροφορίες αυτές τις έχουμε από τον Πάππο, ο οποίος γράφει σχετικά (*Συναγωγή*, βιβλίο VII, σελ. 672) :

> «…Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀνα-
> πληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ παρέδωκεν η κωνικῶν
> τεύχη. Ἀρισταῖος δέ, ὃς γέγραφε τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀνα-
> διδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς,

ἐκάλει [καὶ οἱ πρὸ ᾿Απολλωνίου] τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν…»

Τα βιβλία αυτά του Αρισταίου και του Ευκλείδη για τις κωνικές τομές δεν σώθηκαν. Ίσως σ' αυτό να συνέβαλε το ότι τα μεταγενέστερα *Κωνικά* του Απολλωνίου ήταν πολύ πληρέστερα από αυτά. Τα βιβλία του Αρισταίου, όπως πιθανολογεί ο ιστορικός T. Heath ([6] τόμος I, σελ. 524), σωζόταν την εποχή του Πάππου, ενώ τα *Κωνικά* του Ευκλείδη, ίσως να είχαν χαθεί από τότε. Ενδείξεις για την ύπαρξη των βιβλίων αυτών έχουμε και από την συχνή αναφορά (μάλλον) σ' αυτά από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), οποίος, όπως θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιεί προτάσεις στις κωνικές τομές χωρίς απόδειξη.

Ο Πάππος αναφέρει ότι ο Ευκλείδης απέδιδε στον Αρισταίο την μελέτη των κωνικών τομών. Λογικό είναι να υποθέσουμε ότι όπως και στην περίπτωση των *Στοιχείων*, ο Ευκλείδης συγκέντρωσε και τακτοποίησε όλα όσα είχαν μέχρι την εποχή του ανακαλυφθεί σχετικά με τις κωνικές τομές.

Ένα άλλο αξιοσημείωτο στοιχείο είναι ότι, ενώ ο Απολλώνιος στα *Κωνικά* του δεν αναφέρεται στην γενική ιδιότητα των κωνικών για την διευθετούσα και την εστία (βλέπε παρακάτω στον Απολλώνιο), στον Ευκλείδη φαίνεται ότι ήταν γνωστή η σχετική ιδιότητα. Αυτός ο οποίος σώζει την πληροφορία για την εστία και διευθετούσα κωνικής είναι ο Πάππος, αποδίδοντάς την στον Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, την αποδεικνύει σε ένα λήμμα του το οποίο έχει ληφθεί από το (χαμένο) έργο του Ευκλείδη *Τόποι προς επιφανείαις*. Η διατύπωσή του είναι η εξής:

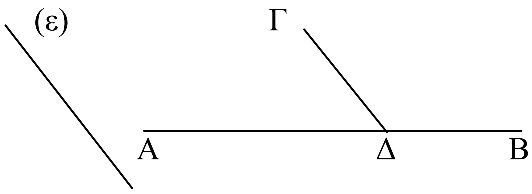
«…ἔστω θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθὲν τὸ Γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διήχθω ἡ ΔΓ, κάθετος ἡ ΔΕ, λόγος δὲ ἔστω τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ· λέγω ὅτι τὸ Δ ἅπτεται κώνου τομῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὁ λόγος ᾖ ἴσος πρὸς ἴσον, παραβολῆς, ἐὰν δὲ ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἐλλείψεως, ἐὰν δὲ μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ὑπερβολῆς…».

(*Συναγωγή*, βιβλίο VII, σελ. l012):

Πάντως την ιδιότητα για εστία-διευθετούσα χρησιμοποιεί ο Διοκλής (180 περίπου π.Χ.) στο έργο του *Περί Πυρείων* (βλέπε Κεφ.1, Α5).

Επίσης ο Πάππος στην *Συναγωγή* του (βιβλίο VII, σελ.1004) παραθέτει την απόδειξη της παρακάτω σημαντικής πρότασης, την οποία αποδίδει στον Ευκλείδη. Η πρόταση αναφέρεται ως ένα ακόμη λήμμα από το έργο του Ευκλείδη *Τόποι προς επιφανείαις*:

«α. Ἐὰν ᾖ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ παρὰ θέσει ἡ ΓΔ, καὶ ᾖ λόγος τοῦ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, τὸ Γ ἅπτεται κωνικῆς γραμμῆς...»



Δηλαδή, αν ΑΒ ένα δοσμένο τμήμα και ΓΔ έχει σταθερή διεύθυνση (π.χ. είναι παράλληλο μια δοθείσα ευθεία (ε)) σ᾽ένα επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Γ με $\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta B}}{\Gamma\Delta^2}=$σταθερό, είναι κωνική τομή.

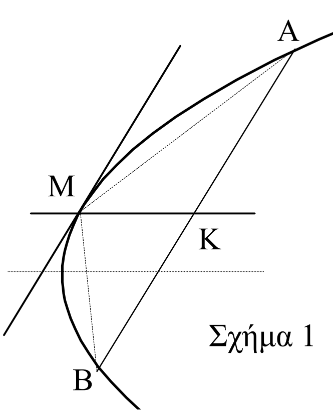
Τέλος να σημειώσουμε ότι η έλλειψη ήταν γνωστή στον Ευκλείδη και ως τομή κυλίνδρου με επίπεδο μη παράλληλο στην βάση του. Στο έργο του *Φαινόμενα* (πρόλογος, γραμμή 56) αναφέρει σχετικά

«…ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὴν βάσιν, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ…»

Ας σημειωθεί ότι ο θυρεός ήταν μια πέτρα σε σχήμα έλλειψης που υπήρχε στην κεντρική είσοδο των σπιτιών των αρχαίων Ελλήνων.

Α3. Αρχιμήδης

Ο μέγιστος των μαθηματικών και μηχανικών της αρχαιότητας Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), αν και δεν φέρεται να έγραψε βιβλίο για τις κωνικές τομές, απέδειξε και χρησιμοποίησε στα έργα του ιδιότητες των κωνικών τομών.
Ο Αρχιμήδης, δείχνει γενικά να έχει βαθιά γνώση των σχετικών θεμάτων. Έτσι π.χ. στο έργο του *Έφοδος* (στην Πρόταση 1, [2], σελ. 399) χρησιμοποιώντας μια σημαντική ιδιότητα της παραβολής (Πρόταση 5 του έργου του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*, [2], τόμος β΄, σελ. 224, βλέπε και Πρόταση 10, Κεφ. 4) ανακαλύπτει, με την μέθοδο των μοχλών, ότι εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΑΜΒ (Σχήμα 1) είναι ίσο με τα 4/3 του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΒ, όπου Μ το σημείο στο οποίο, η παράλληλη από το μέσο Κ του ΑΒ προς τον άξονα



Σχήμα 1

της παραβολής τέμνει την παραβολή.

Ο τρόπος που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης, αναγνωρίζεται από τον ίδιο ότι δεν είναι αυστηρός. Γι' αυτό στο έργο του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής* δίνει δυο αυστηρές αποδείξεις: η μια είναι μηχανική και μοιάζει με αυτήν που χρησιμοποιεί στην *Έφοδο* αλλά χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης την μετατρέπει σε αυστηρή και η άλλη είναι γεωμετρική. Πριν προχωρήσει στην εύρεση του εμβαδού παραθέτει πέντε προτάσεις για την παραβολή, τις οποίες πρόκειται να χρησιμοποιήσει. Οι τρεις πρώτες δίνονται χωρίς απόδειξη, γιατί όπως λέει, *«αποδέδεικται δε ταύτα εν τοις κωνικοίς στοιχείοις»*, εννοώντας μάλλον το βιβλίο των *Κωνικών* του Ευκλείδη ή του Αρισταίου. Αυτό δείχνει ότι οι προτάσεις αυτές ήταν ήδη τότε γνωστές και χρησιμοποιούνταν χωρίς απόδειξη.

Οι συγκεκριμένες τρεις προτάσεις, με την αρίθμηση του Αρχιμήδη στο έργο του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής,* ([2], τόμος β΄, σελ. 221-222), σε ελεύθερη απόδοση, είναι:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Έστω παραβολή ΑΒΓ (όπου ΑΓ είναι χορδή της παραβολής) και ΔΒ παράλληλη στον άξονα της παραβολής (ή η ίδια είναι άξονας). Αν η εφαπτομένη στο Β είναι παράλληλη στην ΑΓ, τότε το Δ είναι μέσο της ΑΓ, και αντίστροφα (Σχήμα 2).

Την πρόταση αυτή χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης και στο έργο του *Περί Οχουμένων β΄* ([2], τόμος β΄, Πρόταση 2, σελ. 297).

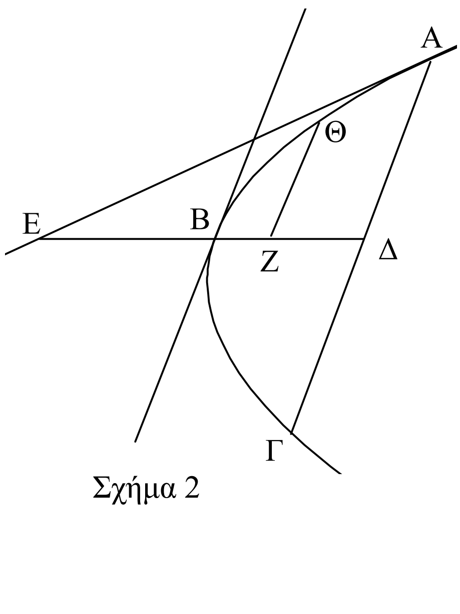
ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Έστω παραβολή ΑΒΓ, Δ σημείο της χορδής ΑΓ και ΔΒ παράλληλη στον άξονα της παραβολής (ή η ίδια είναι άξονας). Αν η εφαπτομένη στο Β είναι παράλληλη στην ΑΓ και η εφαπτομένη στο Α τέμνει την ΔΒ στο Ε, τότε ΒΕ = ΒΔ (Σχήμα 2).

Σημείωση: Αποδείξεις των προτάσεων αυτών δίνουμε στην §4.3, Πόρισμα 7.2 και Πόρισμα 8.1 αντίστοιχα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Έστω παραβολή ΑΒΓ, ΔΒ παράλληλη στον άξονα της παραβολής (ή η ίδια είναι άξονας) και ΑΓ παράλληλη στην εφαπτομένη στο Β. Αν η ΘΖ είναι παράλ-



Σχήμα 2

ληλη στην ΑΓ, τότε $\frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΘΖ}^2}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΖ}}$ (Σχήμα 2).

Στην συνέχεια αναφέρει τις ακόλουθες δυο προτάσεις, τις οποίες αποδεικνύει. Ας δούμε τις προτάσεις αυτές με τις αποδείξεις του Αρχιμήδη από το έργο του *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής,* ([2], τόμος β΄, σελ. 223-227):

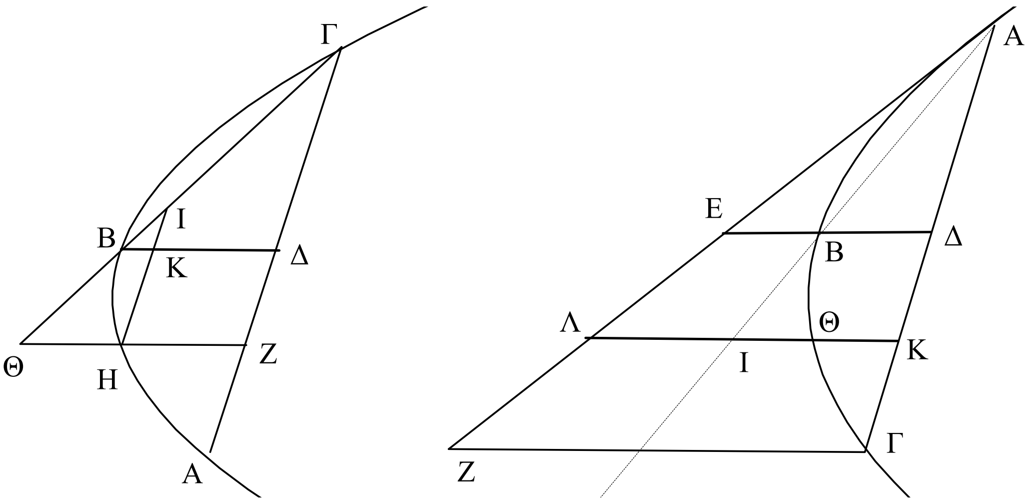
ΠΡΟΤΑΣΗ (*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*, Πρόταση 4, [2] τόμος β΄, σελ. 222)

Έστω παραβολή ΑΒΓ, Δ μέσο του ΑΓ και ΔΒ παράλληλη στον άξονα της παραβολής (ή η ίδια είναι άξονας). Αν ΖΘ παράλληλη στην ΒΔ, τότε

$$\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΘΗ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΖ}} \text{ (ή και } \frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΗΖ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΖ}}\text{)}$$

Απόδειξη (Αρχιμήδη)

Έστω ΗΚ//ΑΓ (Σχήμα 3(α)) που τέμνει την ΒΔ στο Κ και την ΒΓ στο Ι. Από την Πρόταση 3 έχουμε $\frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΗΚ}^2}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΚ}}$ (1). Αλλά ΙΚ//ΔΓ, οπότε $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΚ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΙ}}$ και λόγω των ΒΔ//ΘΖ, ΗΚ//ΔΖ, έχουμε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΗΚ}}=\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΔΖ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΘ}}$. Άρα από την (1) παίρνουμε $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΙ}}=\frac{\text{ΒΓ}^2}{\text{ΒΘ}^2}$ ή $\frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΒΙ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΘ}}=\frac{\text{ΒΘ}+\text{ΒΓ}}{\text{ΒΙ}+\text{ΒΘ}}=\frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΘΙ}}$ (2)



(α) Σχήμα 3 (β)

Αλλά λόγω παραλληλίας είναι $\frac{ΒΓ}{ΒΘ}=\frac{ΓΔ}{ΔΖ}=\frac{ΑΔ}{ΔΖ}$ και $\frac{ΘΓ}{ΘΙ}=\frac{ΘΖ}{ΘΗ}$, οπότε από την (2) έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΔΖ}=\frac{ΘΖ}{ΘΗ}$ (ή και $\frac{ΑΔ}{ΑΖ}=\frac{ΘΖ}{ΗΖ}$), ό.έ.δ.

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*, Πρόταση 5, [2], τόμος β΄, σελ. 224)

Έστω παραβολή ΑΒΓ, ΑΖ η εφαπτομένη στο Α και ΓΖ παράλληλη στον άξονα της παραβολής. Αν η ευθεία ΚΛ είναι παράλληλη στην ΓΖ και τέμνει την παραβολή στο Θ, τότε $\frac{ΘΚ}{ΘΛ}=\frac{ΚΓ}{ΑΚ}$ (ή ΑΚ·ΘΚ = ΘΛ·ΚΓ).

Απόδειξη (Αρχιμήδη)

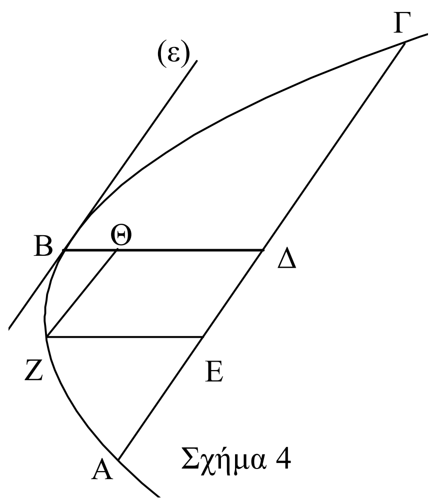
Από το μέσο Δ (Σχήμα 3(β)) της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στην ΓΖ που τέμνει την παραβολή στο Β και την ΑΖ στο Ε. Τότε από την Πρόταση 2 είναι ΒΕ = ΒΔ. Αν η ΑΒ τέμνει την ΚΛ στο Ι, τότε από την Πρόταση 4 έχουμε

$\frac{ΘΚ}{ΙΚ}=\frac{ΚΓ}{ΔΓ}$. Άλλά λόγω του ότι ΕΔ//ΚΛ και ΒΕ = ΒΔ είναι και ΛΙ = ΙΚ, οπότε 2ΙΚ = ΛΚ, ΑΓ = 2ΔΓ, οπότε $\frac{ΘΚ}{ΛΚ}=\frac{ΚΓ}{ΑΓ}$ ή $\frac{ΘΚ}{ΘΛ}=\frac{ΚΓ}{ΑΚ}$. ό.έ.δ.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι Προτάσεις 18, 19 από το ίδιο έργο:

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*, Πρόταση 18, [2], τόμος β΄, σελ. 251)

Έστω ένα τμήμα παραβολής που ορίζεται από μια χορδή της ΑΓ. Αν η παράλληλος από το μέσο Δ του ΑΓ προς την διάμετρο της παραβολής τέμνει την παραβολή στο σημείο Β, τότε, απ' όλα τα σημεία (του τμήματος) της παραβολής αυτής, το Β απέχει περισσότερο από την ΑΓ. (Το Β ο Αρχιμήδης το ονομάζει *κορυφή* του τμήματος).



Σχήμα 4

Απόδειξη (Αρχιμήδη)

Επειδή το Δ είναι το μέσο του ΑΓ και η ΒΔ παράλληλη στην διάμετρο, από την Πρόταση 1 έχουμε ότι η εφαπτομένη στο Β είναι παράλληλη στην ΑΓ. Είναι λοιπόν φανερό ότι το Β απέχει περισσότερο από την

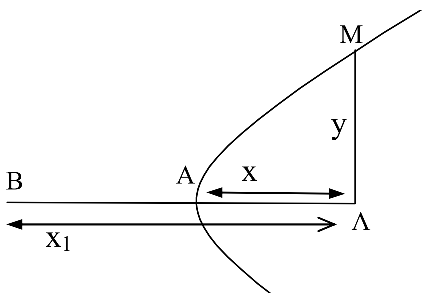
ΑΓ (αφού όλα τα άλλα σημεία της παραβολής βρίσκονται μέσα στην ζώνη των παραλλήλων αυτών).

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*, Πρόταση 19, [2] τόμος β΄, σελ. 252)
Έστω ΑΓ (Σχήμα 4) χορδή παραβολής, Δ το μέσο της ΑΓ και Ε το μέσο του ΑΔ και φέρνουμε την ΕΖ παράλληλη προς στον άξονα της παραβολής. Τότε $ΖΕ = \frac{3}{4} ΒΔ$.
(Υπόδειξη: Φέρνουμε ΖΘ//ΑΓ και χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.)

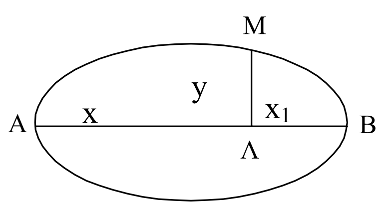
Επίσης στην *Έφοδο*, και με την μέθοδο των μοχλών, ο Αρχιμήδης προσδιόρισε τον όγκο ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, το κέντρο βάρους του καθώς και το κέντρο βάρους ενός υπερβολοειδούς κλπ. Έτσι ο Αρχιμήδης όχι μόνο συνέδεσε την θεωρία των κωνικών τομών με τον Απειροστικό Λογισμό (υπολογισμός εμβαδών κλπ) αλλά βρήκε και ένα σημείο επαφής των θεωριών αυτών με την Φυσική.

Ακόμη στο έργο του *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων* ([5], τόμος α΄), το οποίο μελετά τα σχήματα που προκύπτουν από την περιστροφή κωνικών τομών (παραβολοειδή, υπερβολοειδή (κωνοειδή) και ελλειψοειδή (σφαιροειδή)) βρίσκει το εμβαδόν μιας έλλειψης. Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι, ο λόγος του εμβαδού μιας έλλειψης προς το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο τον μεγάλο της άξονα είναι ίσος με το λόγο του μικρού άξονα προς τον μεγάλο. Από αυτό προκύπτει ότι το εμβαδόν έλλειψης είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με τον γεωμετρικό μέσο των ημιαξόνων της έλλειψης.

Στο ίδιο έργο του ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί ένα είδος συντεταγμένων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί τον μεγάλο άξονα ως μοναδικό «άξονα συντεταγμένων» και καθορίζει την θέση ενός σημείου Μ της κωνικής από μια «τεταγμένη» και δυο «τετμημένες» x, x_1. Πιο συγκεκριμένα:



Σχήμα 5



Αν ΑΒ ο κύριος άξονας της κωνικής και ΜΛ η κάθετη από ένα σημείο Μ της κωνικής στον άξονα αυτό, η κάθετη ΜΛ = y είναι η «τεταγμένη» και οι αποστάσεις ΑΛ = x, ΒΛ = x_1 «τετμημένες». Στην περίπτωση της έλλειψης έχουμε $x + x_1 = 2\alpha$, ο μεγάλος άξονας, ενώ τη περίπτωση της υπερβολής $x_1 = 2\alpha + x$. Έτσι αποδεικνύεται ότι η σχέση $\frac{y^2}{xx_1} = c$, σταθερός, είναι το «σύμπτωμα» της καμπύλης, η συνθήκη δηλαδή που ικανοποιείται από κάθε σημείο της. Η συνθήκη αυτή, αν $c \neq 1$, αντιστοιχεί σε υπερβολή ή έλλειψη. Αν $c = 1$ έχουμε κύκλο. Από τα παραπάνω φαίνεται πόσο κοντά είχαν φτάσει οι αρχαίοι Έλληνες στην Αναλυτική Γεωμετρία, όμως επέμεναν να μελετούν την Γεωμετρία με το συνθετικό πνεύμα, δηλαδή τις μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Να σημειώσουμε ακόμη ότι πιθανώς ο Αρχιμήδης γνώριζε ότι οι κωνικές μπορούν να προκύψουν και από τομή μη ορθού κώνου. Αυτό το πιθανολογούμε από τις προτάσεις 7 και 8 στο *Περί Κωνοειδέων και σφαιροειδέων*, ([2], τόμος α΄, σελ. 267-271) όπου αποδεικνύει ότι, όταν δοθεί μια οξυγωνίου κώνου τομή (έλλειψη), κατασκευάζεται κώνος, που έχει την κορυφή του σε μια δοθείσα ευθεία η οποία διέρχεται από το κέντρο της και επίσης ανήκει σε επίπεδο κάθετο με το επίπεδο της έλλειψης. Μάλιστα εξετάζει χωριστά την περίπτωση η ευθεία να είναι κάθετη στο επίπεδο της έλλειψης, οπότε βέβαια ο κώνος δεν μπορεί να είναι ορθός.

Α4. Απολλώνιος ο Περγαίος

Α4.1. Γενικά

Αποκορύφωμα της θεωρητικής μελέτης των τριών κωνικών τομών κατά την αρχαιότητα, ήταν το έργο *Κωνικά* του Απολλωνίου του Περγαίου. Με τις κωνικές τομές ασχολήθηκαν πολλοί, αλλά ο τελευταίος έμελλε να ταυτίσει για πάντα το όνομά του με αυτές. Ο Απολλώνιος γεννήθηκε στην Ελληνική πόλη Πέργη της Παμφυλίας, κοντά στην σημερινή Αττάλεια της Μικράς Ασίας και σπούδασε στην Αλεξάνδρεια με καθηγητές τους διαδόχους του Ευκλείδη. Έζησε την ένδοξη Αλεξανδρινή εποχή, περίπου το 260-180 π.Χ., δηλαδή ήταν κατά 30 περίπου χρόνια νεώτερος του Αρχιμήδη. Είναι και αυτός ένας από τους μεγάλους Αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς, μετά τον Εύδοξο, τον Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη. Αν και ο Απολλώνιος, όπως αναφέραμε, στηρίχθηκε σε προηγούμενα έργα του Αρισταίου και του Ευκλείδη, σχετικά με τις κωνικές, τα οποία δεν σώθηκαν, το έργο του είναι και θα είναι αιώνια μέγιστο και αξιοθαύμαστο.

Το βάθος της γεωμετρικής σκέψης του, το ευρύ και εξαντλητικό πνεύμα του και η άψογη και χωρίς λάθη διατύπωση των προτάσεών του, εντυπωσιάζει εδώ και 2200 χρόνια, ώστε δίκαια τον αποκαλούσαν «Μέγα Γεωμέτρη». Πράγματι, ο βυζαντινός μαθηματικός και σχολιαστής Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης, ο οποίος εξέδωσε τα *Κωνικά* περίπου το 530 μ.Χ. στη Κωνσταντινούπολη, αναφέρει στα σχόλια του στα *Κωνικά,* ότι ο μαθηματικός Γεμίνος (2ος - 1ος αιώνας π.Χ.) στην ιστορία των Μαθηματικών του, λέει ότι, «*…οι κατ' αυτόν (δηλαδή τον Απολλώνιο) γενόμενοι δια το θαυμάσιον των υπ' αυτού δεδειγμένων κωνικών θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην εκάλουν…*» ([1], τόμος δ΄, σελ. 212).

Ο Απολλώνιος ο οποίος απέκτησε την φήμη του και ως Αστρονόμος, έγραψε πολλά βιβλία, τα περισσότερα από τα οποία χάθηκαν. Ευτυχώς τα *Κωνικά* ήταν ένα από τα λίγα έργα του που διασώθηκαν, αν και όχι ολόκληρο. Επίσης σώθηκε το έργο του *Περί λόγου αποτομής* στα Αραβικά. Ακόμη το έργο του *Εύρεση δύο μέσων αναλόγων*, δηλαδή μια λύση του *Δηλίου* προβλήματος, περιγράφεται από τον Ευτόκιο στα σχόλια του στο *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου* του Αρχιμήδη, ενώ το έργο του *Σύγκριση Δωδεκαέδρου και Εικοσαέδρου* αναφέρεται εκτενώς από τον Υψικλή στο λεγόμενο και 14ο βιβλίο το Ευκλείδη. Τα έργα του Απολλωνίου που δεν σώθηκαν, όπως προκύπτει από διάφορες μαρτυρίες, είναι 18 (βλέπε [1], τόμος α΄, σελίδα 39). Εκτενείς περιγραφές έξι έργων του Απολλωνίου συμπεριέλαβε ο Πάππος στον *Αναλυόμενο Τόπο*, οποίος περιέχεται στο 7ο βιβλίο της *Συναγωγής* του. Τα τρία από τα έργα αυτά ήταν το *Περί Λόγου αποτομής* (2 βιβλία), το *Περί χωρίου αποτομής* (2 βιβλία) και το *Περί διωρισμένης τομής* (2 βιβλία) τα οποία σχετίζονται άμεσα με τα *Κωνικά* ([6], τόμος II, σελ. 217).

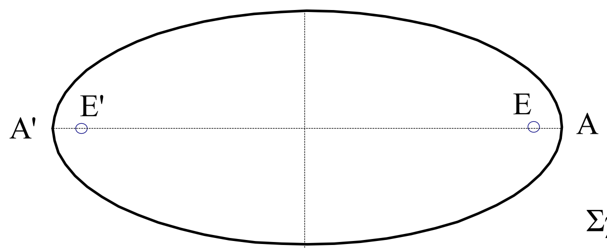
Μια σημαντική καινοτομία του Απολλωνίου ήταν να θεωρήσει τις τρεις κωνικές ως διαφορετικές τομές ενός (μόνο) κυκλικού κώνου, όχι απαραίτητα ορθού, και χωρίς να είναι απαραίτητο το επίπεδο τομής να είναι κάθετο σε μια γενέτειρα του κώνου, όπως συνέβαινε πριν από αυτόν. Έτσι:

- Αν το επίπεδο τομής είναι παράλληλο σε μια γενέτειρα του κώνου, η τομή ονομάζεται παραβολή,
- αν το επίπεδο τομής τέμνει όλες τις γενέτειρες του κώνου, η καμπύλη ονομάζεται έλλειψη (εκτός μιας περίπτωσης που είναι κύκλος), και
- αν το επίπεδο τομής είναι παράλληλο στον άξονα του κώνου ή τέμνει και τον κατακορυφή κώνο, η καμπύλη ονομάζεται υπερβολή.

Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι οι καμπύλες που προκύπτουν από την τομή επιπέδου κάθετου στην γενέτειρα ορθού κυκλικού κώνου (δηλαδή ακολουθώντας τον παλιό ορισμό των κωνικών τομών), είναι οι ίδιες ακριβώς με αυτές που προκύπτουν ακολουθώντας τον δικό του ορισμό (Απολλώνιες τομές).

Με σύγχρονη γλώσσα μπορούμε να πούμε ότι ο Απολλώνιος αντί να θεωρεί την εξίσωση της κωνικής ως προς το ορθογώνιο σύστημα των αξόνων της, την θεωρεί ως προς ένα πλαγιογώνιο σύστημα αξόνων που καθορίζεται από μια διάμετρό της και την εφαπτομένη στο άκρο της.

Προκαλεί πάντως εντύπωση το γεγονός ότι για την διευθετούσα κωνικής δεν κάνει λόγο στο έργο του ο Απολλώνιος, ούτε για την εστία της παραβολής. Οι εστιακές ιδιότητες της έλλειψης και της υπερβολής αναφέρονται στο βιβλίο γ΄, Προτάσεις 45-52, αλλά οι εστίες προκύπτουν διαφορετικά.
Οι εστίες αναφέρονται ως *«... τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ...»*.



Σχήμα 6

Για την έλλειψη π.χ, τα σημεία αυτά, έστω Ε, Ε′ (Σχήμα 6), τα θεωρεί πάνω στον μεγάλο άξονα ΑΑ′ ώστε να ισχύει $EA' \cdot EA = \frac{1}{4} pAA' = E'A' \cdot E'A$,

όπου p η παράμετρος της έλλειψης (βλέπε παρακάτω Α4.3, Κεφ. 1). Ας σημειωθεί ότι πάντοτε κατασκευάζονται δυο τέτοια σημεία γιατί $p < AA'$.
Αυτό ο Απολλώνιος το διατυπώνει λέγοντας ότι, *παραβάλλεται ορθογώνιο και προς τα δυο μέρη του άξονα ίσο με το ένα τέταρτο του "σχήματος"* (δηλαδή του ορθογωνίου που έχει βάση τον άξονα και ύψος την παράμετρο της κωνικής).
Έτσι π.χ. η πρόταση για την ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης και υπερβολής διατυπώνεται στην μορφή,

> *«Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ»* (*Κωνικά,* βιβλίο γ΄, Πρόταση 48)

Α4.2. Τα *Κωνικά* του Απολλωνίου

Το μεγαλειώδες αυτό έργο του Απολλωνίου ήταν χωρισμένο σε 8 βιβλία και περιείχε την γεωμετρική θεωρία των κωνικών τομών με πρωτότυπο τρόπο και με αρκετά μεγάλο πλήθος νέων προτάσεων. Τα πρώτα 7 βιβλία έχουν σωθεί, τα 4 στα Ελληνικά και τα υπόλοιπα 3 στα Αραβικά, ενώ το 8ο χάθηκε.

Η πρώτη έκδοση των *Κωνικών* φαίνεται ότι έγινε από τον βυζαντινό μαθηματικό Ευτόκιο (6^{ος} αιώνας μ.Χ.) ο οποίος τα εξέδωσε στην Κωνσταντινούπολη και έγραψε σχετικά σχόλια (βλ. [1], τόμος δ΄). Ακολούθησαν διάφορες μεταφράσεις στα Λατινικά και Αραβικά στις οποίες θα αναφερθούμε στην Ενότητα Β του κεφαλαίου αυτού.

Ο Απολλώνιος σε αφιέρωσή του προς τον μαθηματικό Εύδημο από την Πέργαμο, η οποία υπάρχει στον πρόλογο του πρώτου βιβλίου των *Κωνικών*, ομιλεί γενικά για το περιεχόμενο των 8 βιβλίων του. Όπως λέει ο ίδιος,

> «... ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα
> τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη,...» (*Κωνικά*, βιβλίο α΄)

δηλαδή τα 4 πρώτα βιβλία αποτελούν μια στοιχειώδη εισαγωγή στις κωνικές τομές, εννοώντας ότι περιέχουν τους ορισμούς των κωνικών τομών και τις βασικές ιδιότητές τους. Τα υπόλοιπα βιβλία περιέχουν περισσότερο εξειδικευμένα θέματα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο Απολλώνιος εξετάζει τις ιδιότητες των κωνικών στην πλέον γενική τους μορφή και με αναφορά και στις τρεις κωνικές ταυτόχρονα, όπου είναι δυνατόν.

Όσον αφορά τώρα την πληροφορία του Πάππου, που είδαμε στην σελίδα 5 (Κεφ. 1, Ενότητα Α2) ότι ο Απολλώνιος συμπλήρωσε τα τέσσερα βιβλία του Ευκλείδη και έφτιαξε τα αντίστοιχα δικά του 8 βιβλία κωνικών, φαίνεται ότι είναι εν μέρει μόνο αληθινή.

Ο T. Heath ([6], τόμος I, σελ. 525) υποστηρίζει ότι η κωνική θεωρία του Ευκλείδη κάλυπτε τα τρία πρώτα βιβλία του Απολλωνίου. Άλλωστε ο Απολλώνιος λέει ότι επεξεργάστηκε τα θέματα των κωνικών τομών γενικότερα σε σχέση με τους προκατόχους του,

> «..τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν
> ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ
> πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ
> τῶν ἄλλων γεγραμμένα,...»
>
> (Απολλωνίου *Κωνικά*, πρόλογος στο βιβλίο α΄, [1], τόμος α΄, σελ. 194)

Όπως όμως λέει στην συνέχεια, διεκδικεί την πρωτοτυπία ορισμένων μόνο προτάσεων σχετικών με το πρόβλημα των «τριών ή τεσσάρων γραμμών» (που δεν είχε ολοκληρώσει ο Ευκλείδης). Επίσης λέει ότι κανείς πριν από αυτόν δεν είχε ασχοληθεί με τα θέματα του δ΄ βιβλίου των *Κωνικών* του.

Η αναλυτική παρουσίαση των *Κωνικών* ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας αυτής, εκτός του ότι θα απαιτούσε την συγγραφή ολόκληρου βιβλίου. Εδώ θα κάνουμε μια εντελώς σύντομη παρουσίαση του έργου αυτού. Πάντως βιβλία σχετικά με τα *Κωνικά* έχουν γραφτεί. Είναι τα (δυσεύρετα) βιβλία του T. Heath: *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections* (1896) και H. G. Zeuthen: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen 1886) συμπληρούμενο από το βιβλίο του O. Neugebauer: *Apollonius- Studien* (1932). Αντί για το πρώτο λάβαμε υπόψη το έργο της *Ιστορίας των Ελληνικών Μαθηματικών* του ίδιου συγγραφέα ([6]), ενώ αναφορές σε σημαντικά θέματα από το δεύτερο βιβλίο υπάρχουν στο [20].

ΒΙΒΛΙΟ 1^{ο}

Το βιβλίο αρχίζει από τον ορισμό ενός διπλού κώνου, ορθού και σκαληνού, με βάση κύκλο και προχωρεί στους τρόπους που προκύπτουν οι τρεις κωνικές τομές από αυτόν. Δίνει τα ονόματα παραβολή, υπερβολή και έλλειψη στις τρεις κωνικές τομές καθώς και το «σύμπτωμα» για κάθε μια (βλέπε σχετικά παρακάτω Ενότητα Α4.3). Ας σημειωθεί ότι ο Απολλώνιος ήταν ο πρώτος που μελέτησε πλήρως τις δυο «αντικείμενες τομές», δηλαδή τους κλάδους που εμείς σήμερα λέμε ότι αποτελούν μαζί μια υπερβολή ([6], τόμος Ι, σελ. 180).
Στην συνέχεια ακολουθούν οι Προτάσεις 17-60 που αναφέρονται στις εφαπτομένες και στις συζυγείς διαμέτρους των κωνικών τομών. Η πρώτη εμφάνιση των αξόνων γίνεται στις Προτάσεις 52-58, όπου αναφέρει τρόπους κατασκευής κωνικών τομών. Το βιβλίο περιέχει συνολικά 60 προτάσεις και 7 πορίσματα
Για το βιβλίο αυτό ο Καρτέσιος τον 17^{ο} αιώνα, θα πει ότι, ο Απολλώνιος «γράφει ό,τι του κατέβει στο μυαλό». Όπως όμως σημειώνει ο ιστορικός Van de Waeden ([20], σελ. 292), ο μελετητής του έργου του Απολλωνίου H. G. Zeuthen στο έργο του που προαναφέραμε, απέδειξε ότι ο Απολλώνιος συμπεριέλαβε στο βιβλίο Ι όσες προτάσεις του ήταν αναγκαίες για ένα συγκεκριμένο σκοπό. Ο σκοπός του, ο οποίος πραγματοποιείται στο τέλος του βιβλίου αυτού, ήταν να αποδείξει ότι οι τομές τις οποίες είχε ορίσει αρχικά μέσω ενός τυχαίου πλάγιου κώνου και τις οποίες είχε χαρακτηρίσει με ένα «σύμπτωμα», είναι οι ίδιες με τις τομές ορθού κώνου, δηλαδή είχαν ίδια με τα παλαιά «συμπτώματα».

ΒΙΒΛΙΟ 2^{ο}

Το δεύτερο βιβλίο αναφέρεται τις ασύμπτωτες της υπερβολής και συνεχίζεται η μελέτη των εφαπτομένων των κωνικών τομών. Το βιβλίο περιέχει συνολικά 53 προτάσεις και προβλήματα.

ΒΙΒΛΙΟ 3ο

Στις πρώτες προτάσεις μελετώνται οι σχέσεις των εμβαδών των τριγώνων και τετραγώνων που σχηματίζονται από τις εφαπτομένες των κωνικών τομών και τις διαμέτρους που άγονται από τα σημεία επαφής. Τα επόμενα θεωρήματα αναφέρονται στα ορθογώνια που σχηματίζονται από τμήματα χορδών κωνικών. Επίσης υπάρχουν προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες του πόλου και των πολικών στις κωνικές τομές και γίνεται λόγος για τις εστιακές ιδιότητες των κωνικών, (χωρίς αναφορά στην διευθετούσα).
Στην Πρόταση 51 αναφέρεται η ιδιότητα της υπερβολής σχετικά με τη σταθερή διαφορά, ενώ στην Πρόταση 52 βρίσκουμε την ανάλογη ιδιότητα της έλλειψης. Ο Απολλώνιος τον πρόλογο του α΄ βιβλίου αναφέρει ότι με τις προτάσεις του γ΄ βιβλίου γίνεται δυνατή η λύση του προβλήματος του «επί τρεις ή τέσσερις ευθείες τόπου» (βλέπε Κεφ.1, Α6). Το βιβλίο περιέχει συνολικά 56 προτάσεις.

ΒΙΒΛΙΟ 4ο

Στο βιβλίο αυτό εξετάζονται προβλήματα σχετικά με το πόσα κοινά σημεία μπορούν να έχουν δυο κωνικές που τέμνονται μεταξύ των ή με κύκλους. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι δυο κωνικές (και η υπερβολή με τους δυο κλάδους) δεν μπορούν να τέμνονται σε περισσότερα από 4 σημεία, ότι μια παραβολή δεν μπορεί να εφάπτεται σε μια άλλη παραβολή σε περισσότερα του ενός σημεία κ.ά. Συνολικά το βιβλίο περιέχει 57 προτάσεις.

ΒΙΒΛΙΟ 5ο

Το πέμπτο βιβλίο είναι το πιο σπουδαίο από τα επτά βιβλία που σώθηκαν, όχι μόνο γιατί είναι εντελώς πρωτότυπο, αλλά και για τον μαθηματικό του πλούτο. Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στην μελέτη μεγίστων και ελαχίστων αποστάσεων από σημεία του άξονα προς τις κωνικές. Ο Απολλώνιος αποδεικνύει ότι η εφαπτομένη της κωνικής στο άκρο ενός μεγίστου ή ελαχίστου τμήματος είναι κάθετη στο τμήμα. Στο βιβλίο βρίσκουμε και στοιχεία από την θεωρία του κέντρου καμπυλότητας μιας καμπύλης καθώς και της θεωρίας της ενειλιγμένης καμπύλης. Περιέχει συνολικά 77 προτάσεις.

ΒΙΒΛΙΟ 6ο

Το έκτο βιβλίο περιέχει 27 προτάσεις και 6 προβλήματα τα οποία αναφέρονται στην ισότητα και ομοιότητα κωνικών τομών ή τμημάτων τους. Επίσης αναφέρεται σε προβλήματα κατασκευών. Έτσι π.χ. μας λέει πως μπορούμε να βρούμε στην επιφάνεια ενός δοσμένου ορθού κώνου μια έλλειψη, παραβολή, υπερβολή η οποία να είναι ίση με μια δοσμένη έλλειψη, παραβολή, υπερβολή αντίστοιχα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το τελευταίο πρόβλημα του βιβλίου, το οποίο ζητά: «Να βρεθεί ορθός κώνος όμοιος με ένα δοσμένο κώνο ο οποίος να δέχεται (ως τομή) δοθείσα έλλειψη».

ΒΙΒΛΙΟ 7ο

Το έβδομο βιβλίο αναφέρεται κυρίως σε θέματα συζυγών διαμέτρων ελλείψεων και υπερβολών. Παραδείγματος χάριν, αποδεικνύεται ότι το άθροισμα (αντίστοιχα η διαφορά) των τετραγώνων δυο οποιωνδήποτε συζυγών διαμέτρων έλλειψης (αντίστοιχα υπερβολής) είναι σταθερό. Επίσης ότι το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τις εφαπτομένες στα άκρα δυο συζυγών διαμέτρων έλλειψης (ή υπερβολής, αλλά στην περίπτωση αυτή η συζυγής διάμετρος βρίσκεται στην συζυγή της υπερβολή) έχει σταθερό εμβαδόν. Περιλαμβάνει συνολικά 51 προτάσεις.

Το όγδοο βιβλίο, όπως αναφέραμε, δεν έχει σωθεί. Ο ίδιος ο Απολλώνιος λέει γι’ αυτό,

> «… τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων….»,
> (*Κωνικά*, πρόλογος βιβλίου α΄),

δηλαδή περιέχει συγκεκριμένα προβλήματα κωνικών. Κατά μαρτυρία του Πάππου (*Συναγωγή* βιβλίο 7, σελ. 682 και [1], τόμος α΄, σελ. 126) περιείχε 100 προτάσεις, αλλά τα λήμματα του Πάππου δεν δίνουν σαφή εικόνα για το περιεχόμενό του. Έγινε προσπάθεια από τον Άγγλο μαθηματικό και αστρονόμο Edmund Halley (1656-1742) να ξαναγραφτεί το βιβλίο αυτό με βάση τις πληροφορίες του Πάππου.

Συνολικά λοιπόν τα *Κωνικά* περιείχαν 487 προτάσεις και προβλήματα (473 προτάσεις, 14 προβλήματα) και 10 πορίσματα.

Λεπτομερέστερη παρουσίαση των *Κωνικών* υπάρχει στο [6], τόμος II, σελ. 168-216).

Θα δούμε τώρα μερικά αποσπάσματα από τα *Κωνικά*, σε ελεύθερη απόδοση.

Α4.3. ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΑ *ΚΩΝΙΚΑ*

Ι. ΑΠΟ ΤΟ 1ο ΒΙΒΛΙΟ.

Ονομασία των κωνικών τομών

Ο Απολλώνιος, όχι μόνο μελέτησε σε βάθος τις κωνικές τομές, αλλά υπήρξε και ο άνθρωπος που τους έδωσε τα ονόματα που χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα, δηλαδή «παραβολή», «έλλειψη» και «υπερβολή». Τα ονόματα αυτά σχετίζονται βέβαια με τις ιδιότητές τους εκφρασμένες με την ορολογία της *παραβολής χωρίων* και περιέχονται στην αρχή του α΄ βιβλίου των *Κωνικών*.

Πριν δούμε όμως πως ο Απολλώνιος όρισε και ονόμασε τις καμπύλες αυτές, ας μας επιτραπεί εδώ να αναφερθούμε σε ένα σχετικό θέμα που υπήρχε πριν τον Απολλώνιο.

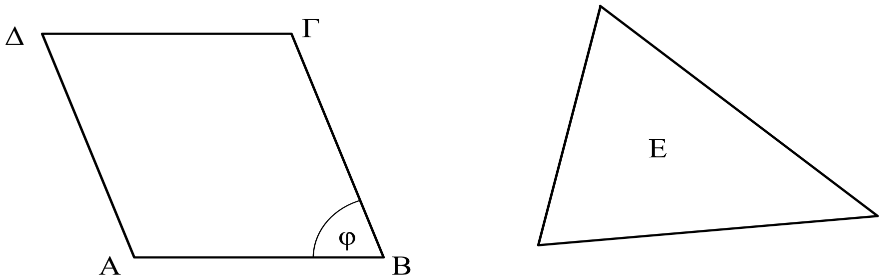
Η παραβολή χωρίων

Ο Πρόκλος, αναφέρει ότι ο Εύδημος ο Ρόδιος (έζησε τον 4ο αιώνα π.Χ. και έγραψε Ιστορία Μαθηματικών) και οι μαθητές του απέδιδαν την «μέθοδο της παραβολής χωρίων» στους Πυθαγόρειους (βλέπε παρακάτω). Τι ήταν όμως η μέθοδος αυτή;

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη υπάρχουν οι παρακάτω τρεις προτάσεις, που αναφέρονται στην μέθοδο αυτή (σε σύγχρονη και ελεύθερη απόδοση):

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Στοιχεία*, Βιβλίο 1, Πρόταση 44, [5], σελ. 195)
Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο που μια του πλευρά να είναι δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και μια γωνία του δοσμένη, το οποίο να έχει εμβαδόν *ίσο* με το εμβαδόν δοσμένου τριγώνου (Σχήμα 1).

Δηλαδή, αν ΑΒ είναι ένα δοσμένο τμήμα, φ μια δοσμένη γωνία και Ε το είναι το εμβαδόν ενός δοσμένου τριγώνου (και γενικά ενός ευθύγραμμου σχήματος), ζητείται να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με μια γωνία του ίση με φ ώστε (ΑΒΓΔ) = Ε.



Σχήμα 1

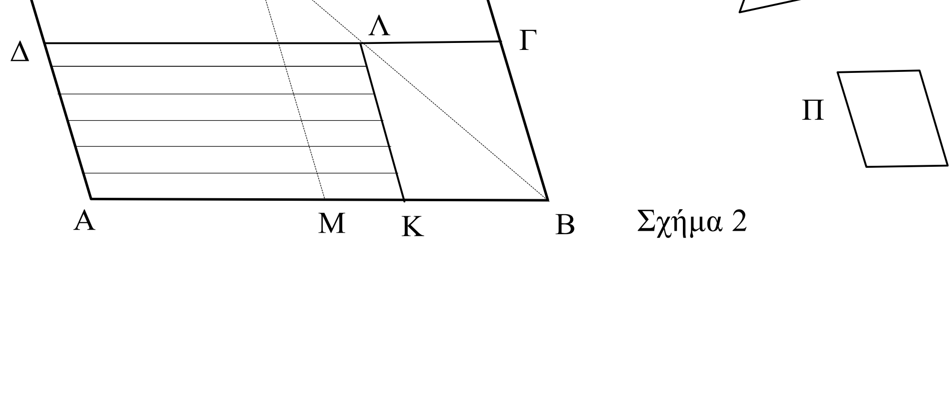
ΠΡΟΤΑΣΗ (*Στοιχεία*, Βιβλίο VI, Πρόταση 28, [5], σελ. 474, [6], τόμος I, σελ. 479)

Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο του οποίου μια πλευρά να είναι πάνω στην ευθεία ενός δοσμένου τμήματος, να είναι ισεμβαδικό με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα, και να έχει εμβαδόν μικρότερο (*ελλείπον*), από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στο δοσμένο τμήμα, κατά το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου το οποίο είναι όμοιο με ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο.

Συγκεκριμένα, ο Ευκλείδης γράφει,

> «Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ
> ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλ-
> ληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον
> εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ
> ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι
> [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν]».

Δηλαδή, αν ΑΒ (Σχήμα 2) είναι ένα δοσμένο τμήμα, Ε το εμβαδόν ενός δοσμένου ευθυγράμμου σχήματος και Π ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο, ζητείται να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ΑΚΛΔ («να παραβληθεί στο τμήμα ΑΒ»), ώστε Ε = (ΑΚΛΔ) = (ΑΒΓΔ) - (ΒΚΛΓ) και με το παραλληλόγραμμο ΒΚΛΓ να είναι όμοιο με το δοσμένο παραλληλόγραμμο Π.

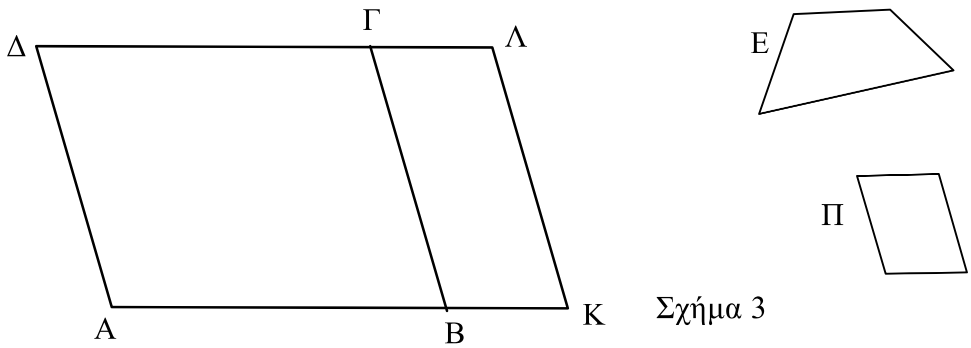


Σχήμα 2

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Στοιχεία*, βιβλίο VI, Πρόταση 29, [5], σελ. 476)
Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο του οποίου μια πλευρά να είναι πάνω στην ευθεία ενός δοσμένου τμήματος, να είναι ισεμβαδικό με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα, και να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο (*υπερβάλλον*) από το εμβαδόν του παραλληλόγραμμο που αντιστοιχεί στο δοσμένο τμήμα, κατά το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου το οποίο είναι όμοιο με ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο.
Συγκεκριμένα, ο Ευκλείδης γράφει,

«Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ
ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει
παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.»

Δηλαδή, αν ΑΒ (Σχήμα 3) είναι το δοσμένο τμήμα, Ε το εμβαδόν ενός δοσμένου ευθυγράμμου σχήματος, και Π ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο, ζητείται να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ΑΚΛΔ («να παραβληθεί στο τμήμα ΑΒ»), ώστε Ε = (ΑΚΛΔ) = (ΑΒΓΔ) + (ΒΚΛΓ), και το παραλληλόγραμμο ΒΚΛΓ να είναι όμοιο με το δοσμένο παραλληλόγραμμο Π.



Σχήμα 3

Στις παραπάνω προτάσεις υπάρχουν αντίστοιχα οι εκφράσεις «ίσο», «ελλείπον», «υπερβάλλον» που παραπέμπουν, στην ονομασία των κωνικών παραβολή, έλλειψη, υπερβολή, αντίστοιχα, έχοντας βέβαια υπόψη τα «συμπτώματα» στα οποία κατάληξε και ερμήνευσε με την γλώσσα της παραβολής των χωρίων ο Απολλώνιος, όπως θα δούμε στην συνέχεια.
Υπάρχει όμως κάτι περισσότερο εδώ. Ο «τετραγωνισμός» των ήδη κατασκευασμένων παραλληλογράμμων οδηγεί στον σχηματισμό παραβολής, έλλειψης και υπερβολής αντίστοιχα (βλ. [1], σελ. 26-37).

Ο Πρόκλος πάντως, είναι κατηγορηματικός ότι τα ονόματα στις κωνικές τομές δόθηκαν από τους μεταγενέστερους, με αφορμή τις προτάσεις αυτές, εννοώντας μάλλον τον Απολλώνιο, αφού πριν απ' αυτόν δεν αναφέρονται τα ονόματα αυτά στις τομές κώνου. Γράφει σχετικά,

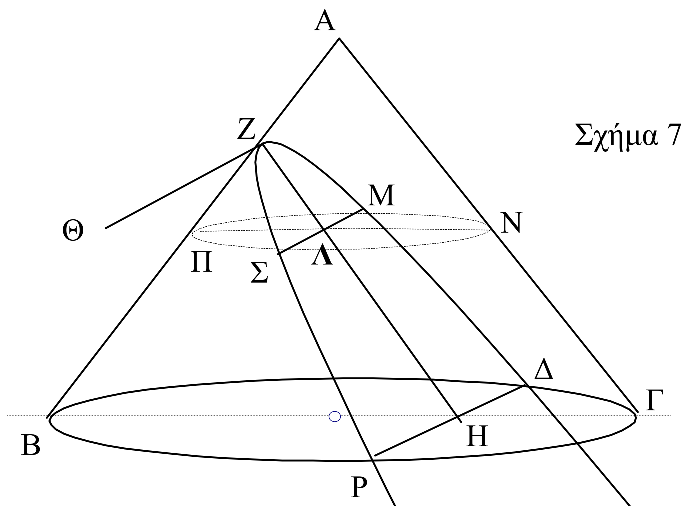
«…Ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν… ὅταν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρατείνῃς, τότε παραβάλλειν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασίν, ὅταν μεῖζον δὲ ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν. καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει…»
(Πρόκλος, *Υπόμνημα στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων*, σελ. 419)

Εξ' άλλου ο ιστορικός Heath, για τις Προτάσεις 44, 28, 29 των *Στοιχείων*, λέει ότι «συνιστούν τη βάση του βιβλίου X των *Στοιχείων* και ολόκληρης της διαπραγμάτευσης των κωνικών από τον Απολλώνιο» ([6], τόμος I, σελ. 478).

Ας δούμε τώρα με συντομία πώς ακριβώς, με σύγχρονους όρους, εργάστηκε ο Απολλώνιος (βλ. [1] τόμος α΄, βιβλίο α', σελ. 231-245).

Ι.1. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Κωνικά,* βιβλίο α΄, Πρόταση 11, [1] τόμος α΄, σελ. 230)
Έστω ένα κώνος (ορθός ή μη) με βάση τον κύκλο (διαμέτρου) ΒΓ (Σχήμα 7) και μια τομή του ΑΒΓ από επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου. Θεωρούμε ένα επίπεδο (S) παράλληλο προς μια μόνο γενέτειρα του κώνου, έστω την ΑΓ, ώστε να τέμνει την ΒΓ κατά ευθεία ΔΡ κάθετη στην ΒΓ (δεν βλάπτεται η γενικότητα, γιατί για οποιαδήποτε επίπεδο τομής (S), μπορούμε να πάρουμε το αξονικό τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε η ΒΓ να είναι κάθετη στην ΔΡ). Το επίπεδο (S) ορίζεται από την κάθετη ΡΔ στη ΒΓ και από την ΗΖ, όπου ΗΖ//ΑΓ. Έτσι ΖΗ είναι η τομή του επιπέδου τομής (S) με το επίπεδο ΑΒΓ και έστω ΔΖΡ η τομή του (S) με την επιφάνεια του κώνου.



Σχήμα 7

Έστω τυχόν σημείο Μ της τομής ΔΖΡ και ΜΛ παράλληλη στην ΔΡ (στο επίπεδο τομής (S)). Από το σημείο Λ (και πάνω στο επίπεδο ΑΒΓ) φέρνουμε ευθεία ΠΛΝ παράλληλη στην ΒΓ, οπότε το επίπεδο των ΜΛ, ΠΜ είναι παράλληλο στην βάση του κώνου, άρα τέμνει τον κώνο κατά κύκλο διαμέτρου ΠΛΝ. Η ΜΛΣ είναι κάθετη στην ΠΝ εφ' όσον οι παράλληλες προς αυτές ΒΓ, ΔΡ είναι κάθετες. Άρα το Λ είναι το μέσο της χορδής ΜΣ, οπότε από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών κύκλου έχουμε $ΜΛ^2 = ΠΛ \cdot ΛΝ$ (1).

Πάνω στο επίπεδο (S) ορίζουμε ένα τμήμα ΖΘ κάθετο στο ΖΗ ώστε

$$\frac{ΘΖ}{ΖΑ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \cdot \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \qquad (2)$$

Αυτό είναι πάντοτε δυνατό αφού τα τμήματα ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ, ΖΑ είναι σταθερά και εξαρτώνται από τον κώνο και το επίπεδο τομής.

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΠΛ έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΠΛ}{ΖΛ}$.

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΠΝ (ΖΛ//ΑΝ) έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΠΝ}{ΠΑ} = \frac{ΛΝ}{ΖΑ}$,

οπότε από την (2) προκύπτει

$$\frac{ΘΖ}{ΖΑ} = \frac{ΠΛ \cdot ΛΝ}{ΖΛ \cdot ΖΑ} \quad \text{ή} \quad ΘΖ \cdot ΖΛ = ΠΛ \cdot ΛΝ$$ και λόγω της (1) παίρνουμε

$$\boxed{ΜΛ^2 = ΖΘ \cdot ΖΛ} \qquad (3)$$

Το σταθερό τμήμα ΖΘ λέγεται *παράμετρος* (latus rectum) της καμπύλης παραβολής. Έτσι το τετράγωνο της ΜΛ («καταγόμενη τεταγμένως») (Σχήμα 7, 8) είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο με βάση την ΖΛ («αποτεμνομένη») και ύψος την σταθερή παράμετρο ΖΘ, δηλαδή με το ορθογώνιο που *παραβάλλεται* στην

ΖΘ. Γι' αυτό τον λόγο η καμπύλη αυτή ονομάσθηκε από τον Απολλώνιο παραβολή (βλέπε γενικό σχόλιο 1, παρακάτω):

> *«Καλείσθω δε η μεν τοιαύτη τομή παραβολή η δε ΖΘ παρ' ήν δύνανται αι καταγόμεναι τεταγμένως επί την ΖΗ διάμετρον, καλείσθω δε και ορθία»*
> (*Κωνικά*, βιβλίο α΄, Πρόταση 11, [1] τόμος α΄, σελ. 234)

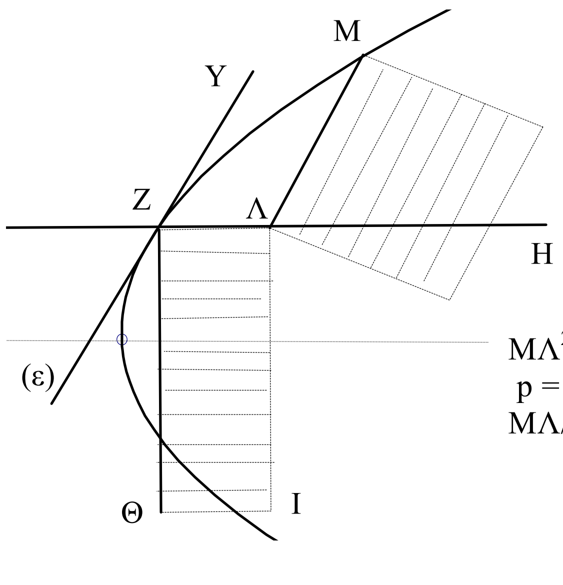
Δηλαδή, ας καλείται μεν η τομή αυτή παραβολή, η δε ΖΘ ας καλείται εκείνη κατά την οποία ρυθμίζεται το τετράγωνο των αγομένων επί την διάμετρο τεταγμένων, ας καλείται δε και ορθία (κάθετος, παράμετρος)

Σχόλια

1. Η ΖΗ δεν είναι πάντα κάθετη στην ΜΛ ή την ΡΔ (Σχήμα 7, 8). Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το επίπεδο ΑΒΓ, που διέρχεται από τον άξονα του κώνου, είναι κάθετο στην βάση του κώνου. Πράγματι, τότε, επειδή ΡΔ κάθετη στην ΒΓ, θα είναι και κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓ, άρα και στην ΖΗ, άρα και στην παράλληλή της ΜΛ. Εύκολα προκύπτει και το αντίστροφο. Μια περίπτωση να συμβεί αυτό είναι ο κώνος να είναι ορθός, μπορεί όμως να είναι και πλάγιος (σκαληνός). Στην περίπτωση αυτή η ΖΗ είναι (εξ' ορισμού) ο άξονας της παραβολής και το Ζ η κορυφή της. Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται και η προ Απολλωνίου, οριζόμενη (ίδια) καμπύλη με το όνομα ορθογωνίου κώνου τομή.

Αν το επίπεδο ΑΒΓ δεν είναι κάθετο στην βάση του κώνου τότε η ΖΗ είναι απλά μια διάμετρος της παραβολής. Βλέπουμε επομένως ότι ο Απολλώνιος εξετάζει την παραβολή με τον γενικότερο τρόπο γέννησής της. Η γενικότητα αυτή δηλώνεται και στο Σχήμα 8.

Σχήμα 8



$ΜΛ^2 = ΖΘ \cdot ΖΛ$
$p = ΖΘ$,
$ΜΛ // (ε)$

2. Το μέσο Λ της ΜΣ, όπου ΜΣ//ΡΔ ανήκει στην ΖΗ. Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε άλλη χορδή παράλληλη στην ΡΔ. Δηλαδή η ΖΗ είναι μια διάμετρος της παραβολής (κατά τον ορισμό του Απολλωνίου). Γενικά λοιπόν η ΖΗ είναι μια διάμετρος της παραβολής και είναι άξονάς της όταν το επίπεδο ΑΒΓ είναι κάθετο στην βάση του κώνου.

3. Η σχέση (3) γράφεται $\boxed{\dfrac{\text{ΜΛ}^2}{\text{ΖΛ}} = \text{ΖΘ} \quad (4)}$

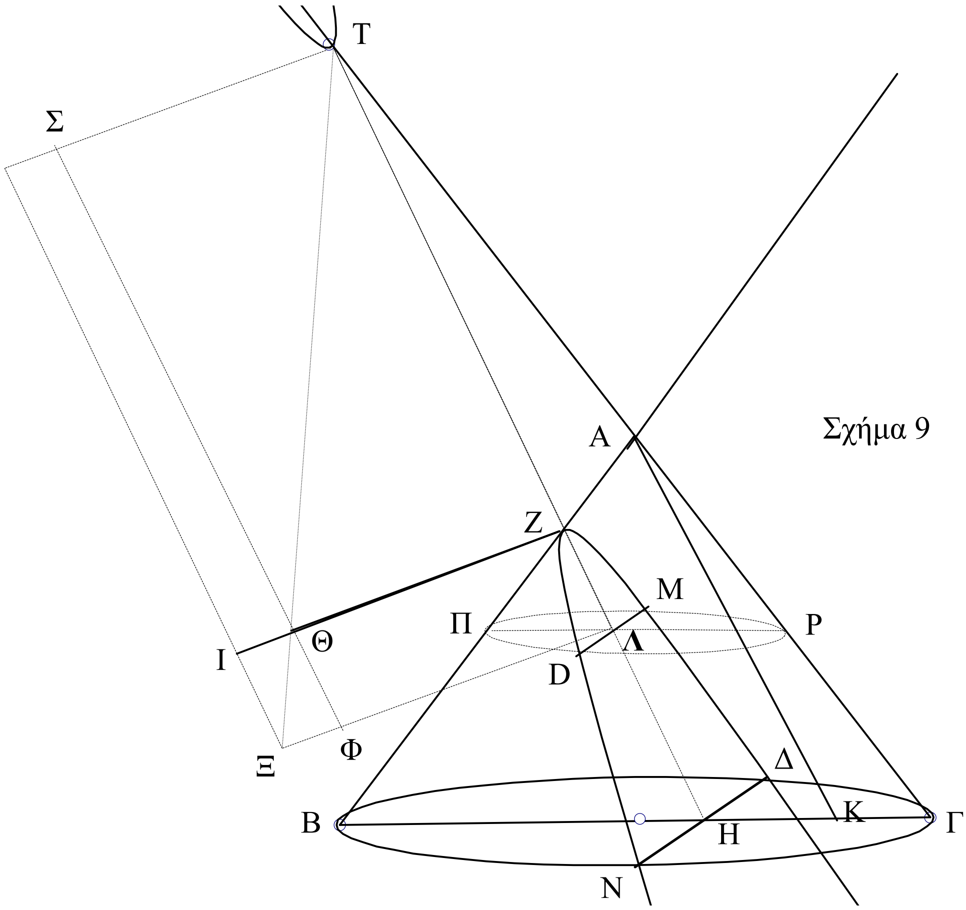
και δηλώνει ότι ο λόγος ΜΛ^2/ΖΛ είναι σταθερός, όπου ΖΗ διάμετρος (όχι πάντα άξονας) της παραβολής, για οποιαδήποτε χορδή ΜΣ που έχει το μέσο της στην ΖΗ. Η σχέση (4) χαρακτηρίζει την παραβολή του Απολλωνίου, δηλαδή ο Απολλώνιος αποδεικνύει και το αντίστροφο: αν ισχύει η (4) τότε το σημείο Μ είναι σημείο της τομής του δοσμένου κώνου με το δοσμένο κατά θέση επίπεδο τομής (S). Η σχέση (4) είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί αναφέρεται γενικά σε μια διάμετρο της παραβολής.

Σημείωση
Αν θέσουμε ΜΛ = y , ΖΛ = x, ΖΘ = 2p, η (4) γράφεται, $y^2 = 2px$, δηλαδή όπως λέμε σήμερα, πρόκειται για την εξίσωση της παραβολής ως προς το (πλαγιογώνιο) σύστημα ΥΖΗ που καθορίζεται από την διάμετρο ΖΗ της παραβολής και την εφαπτομένη της στο Ζ (που αποδεικνύεται παράλληλη στην ΜΛ).

Ι.2. Υ Π Ε Ρ Β Ο Λ Η

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Κωνικά*, βιβλίο α΄, Πρόταση 12, [1] τόμος α΄, σελ. 234)
Έστω ένα κώνος με βάση τον κύκλο (διαμέτρου) ΒΓ (Σχήμα 9) και μια τομή του ΑΒΓ από επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου. Θεωρούμε ένα επίπεδο (S), που τέμνει την γενέτειρα ΑΒ σ' ένα εσωτερικό σημείο Ζ του τμήματος ΑΒ και την αντικείμενη της ημιευθείας ΑΓ σ' ένα σημείο Τ, ώστε να τέμνει το επίπεδο της βάσης του κώνου κατά ευθεία ΝΔ κάθετη στην ΒΓ (δεν βλάπτεται η γενικότητα, βλέπε αντίστοιχη παρατήρηση στην παραβολή).

Έστω ΗΖΤ η τομή του επιπέδου τομής (S) με το επίπεδο ΑΒΓ.



Έστω τυχόν σημείο Μ της τομής του επιπέδου (S) με την επιφάνεια του κώνου και ΜΛ//ΝΔ. Από το σημείο Λ (και πάνω στο επίπεδο ΑΒΓ) φέρνουμε ευθεία ΠΛΡ παράλληλη στην ΒΓ, οπότε το επίπεδο των ευθειών ΜΛ, ΠΡ είναι παράλληλο στην βάση του κώνου, άρα τέμνει τον κώνο κατά κύκλο διαμέτρου ΠΛΡ. Η ΜΛ είναι κάθετη στην ΠΡ εφ' όσον οι παράλληλες προς αυτές, ΔΝ, ΒΓ είναι κάθετες. Άρα το Λ είναι το μέσο της χορδής ΜΛD, οπότε από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών κύκλου έχουμε $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΠΛ}\cdot\text{ΛΡ}$ (1) .

Έστω ΑΚ//ΤΗ (στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ).

Πάνω στο επίπεδο (S) ορίζουμε ένα τμήμα ΖΘ κάθετο στο ΖΗ ώστε

$$\frac{\text{ΖΤ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΑΚ}^2}{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΚΓ}} \qquad (2)$$

Αυτό είναι πάντοτε δυνατό αφού τα τμήματα ΑΚ, ΒΚ, ΚΓ, ΖΘ είναι σταθερά και εξαρτώνται από τον κώνο και το επίπεδο τομής.

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΓ, ΤΗΓ, ΤΛΡ παίρνουμε

$$\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΤΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΤΛ}}{\text{ΛΡ}} \ .$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΒ, ΖΗΒ, ΖΛΠ έχουμε $\frac{ΑΚ}{ΒΚ}=\frac{ΖΗ}{ΗΒ}=\frac{ΖΛ}{ΠΛ}$, οπότε από την (2) προκύπτει

$$\frac{ΖΤ}{ΖΘ}=\frac{ΤΛ\cdot ΖΛ}{ΛΡ\cdot ΠΛ} \quad (3)$$

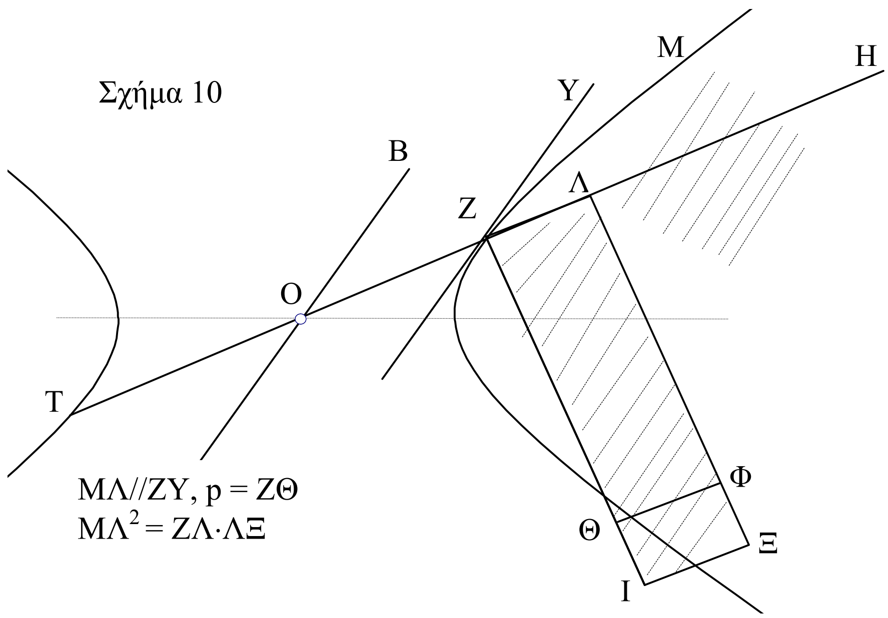
Από το Λ φέρνουμε παράλληλη στην ΖΘ που τέμνει την ΤΘ στο Ξ. Έτσι έχουμε $\frac{ΖΤ}{ΖΘ}=\frac{ΤΛ}{ΛΞ}$ οπότε από την (3) παίρνουμε ΖΛ·ΛΞ = ΛΡ·ΠΛ και λόγω της (1) παίρνουμε

$$\boxed{ΜΛ^2 = ΖΛ\cdot ΛΞ} \quad (4)$$

Επομένως το τετράγωνο πλευράς ΜΛ («καταγόμενη τεταγμένως») είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο (ορθογώνιο) ΖΙΞΛ, που έχει παραβληθεί στην ΖΘ, και είναι μεγαλύτερο (υπερβάλλει, κατά την αρχαία ορολογία) από το ορθογώνιο ΖΘΦΛ που ορίζει η ΖΛ («αποτεμνομένη») και η σταθερή (παράμετρος) ΖΘ, κατά το ορθογώνιο ΙΘΦΞ που είναι όμοιο με το ορθογώνιο ΤΖΘΣ.

Όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο Απολλώνιος, *«καλείσθω δε η μεν τοιαύτη τομή υπερβολή, η δε ΘΖ, παρ' ήν δύνανται αι επί την ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως, καλείσθω δε η αυτή και ορθία, πλαγία δε η ΤΖ»* (*Κωνικά*, βιβλίο α΄, Πρόταση 12, [1] τόμος α΄, σελ. 238).

Σχήμα 10



Σχόλια

1. Για τον Απολλώνιο υπερβολή είναι μόνο η τομή ΔΖΝ (ο ένας κλάδος που λέμε σήμερα). Όμως το επίπεδο τομής (S) τέμνει και τον κατά κορυφή κώνο και ορίζει με αυτόν μια δεύτερη τομή (τον δεύτερο κλάδο που λέμε σήμερα) για την οποία αποδεικνύει ότι είναι επίσης υπερβολή με κορυφή το Τ (Σχήμα 9) και η οποία έχει την ίδια διάμετρο ΤΖ και την ίδια παράμετρο με την πρώτη υπερβολή (Πρόταση 14, βιβλίο α΄). Τις δυο αυτές τομές, που για μας σήμερα αποτελούν μια υπερβολή, τις ονομάζει «αντικείμενες τομές».

2. Η ΜΛ δεν είναι πάντα κάθετη στην ΖΗ (Σχήμα 10). Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το επίπεδο ΑΒΓ (που διέρχεται από τον άξονα του κώνου) είναι κάθετο στο επίπεδο της βάσης του. Πράγματι, τότε επειδή ΝΔ κάθετη στην ΒΓ, θα είναι και κάθετη και στο επίπεδο ΑΒΓ, άρα και στην ΖΗ, άρα και στην παράλληλή της ΜΛD. Αντίστροφα: αν ΝΔ κάθετη στην ΖΗ, τότε επειδή είναι κάθετη και στην ΒΓ, η ΝΔ είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓ, οπότε το επίπεδο της βάσης είναι κάθετο στο ΑΒΓ. Μια περίπτωση να συμβεί αυτό είναι ο κώνος να είναι ορθός, μπορεί όμως να είναι και πλάγιος. Στην περίπτωση αυτή η ΖΗ είναι (εξ' ορισμού) ο κύριος άξονας της υπερβολής και το Ζ κορυφής της (η άλλη κορυφή της είναι το Τ). Εδώ εντάσσεται και η προ Απολλωνίου, οριζόμενη (ίδια) καμπύλη με το όνομα αμβλυγωνίου κώνου τομή.

3. Το μέσο Λ της MD//ΝΔ ανήκει στην ΖΗ, όπως και κάθε άλλης χορδής παράλληλης στην ΝΔ. Δηλαδή η ΖΗ είναι μια διάμετρος της υπερβολής. Όταν λοιπόν το επίπεδο ΑΒΓ δεν είναι κάθετο στην βάση του κώνου, η ΖΗ είναι μια διάμετρος της τομής-υπερβολής και όχι άξονάς της.

4. Επειδή ΛΞ//ΖΘ έχουμε $\frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΤΖ}} = \frac{\text{ΛΞ}}{\text{ΤΛ}}$, οπότε με αντικατάσταση του ΛΞ στην σχέση (4), $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΞ}$, παίρνουμε $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΖΛ}\cdot\text{ΤΛ}\frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΤΖ}}$, άρα ο λόγος

$$\boxed{\frac{\text{ΜΛ}^2}{\text{ΖΛ}\cdot\text{ΤΛ}} = \frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΤΖ}}} \qquad (5)$$

είναι σταθερός. Αυτό ισχύει για μια διάμετρο ΖΗ (όχι πάντα άξονα) της υπερβολής στην οποία ανήκει το μέσο Λ μιας χορδής MD και p = ΖΘ την παράμετρο της υπερβολής. Η σχέση (5) χαρακτηρίζει την υπερβολή του Απολλωνίου, δηλαδή ο Απολλώνιος αποδεικνύει και το αντίστροφο:αν ισχύει η (5) τότε το σημείο Μ είναι σημείο της τομής του δοσμένου κώνου με το δοσμένο κατά θέση επίπεδο τομής. Η σχέση (5) είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί αναφέρεται γενικά σε μια διάμετρο της υπερβολής.

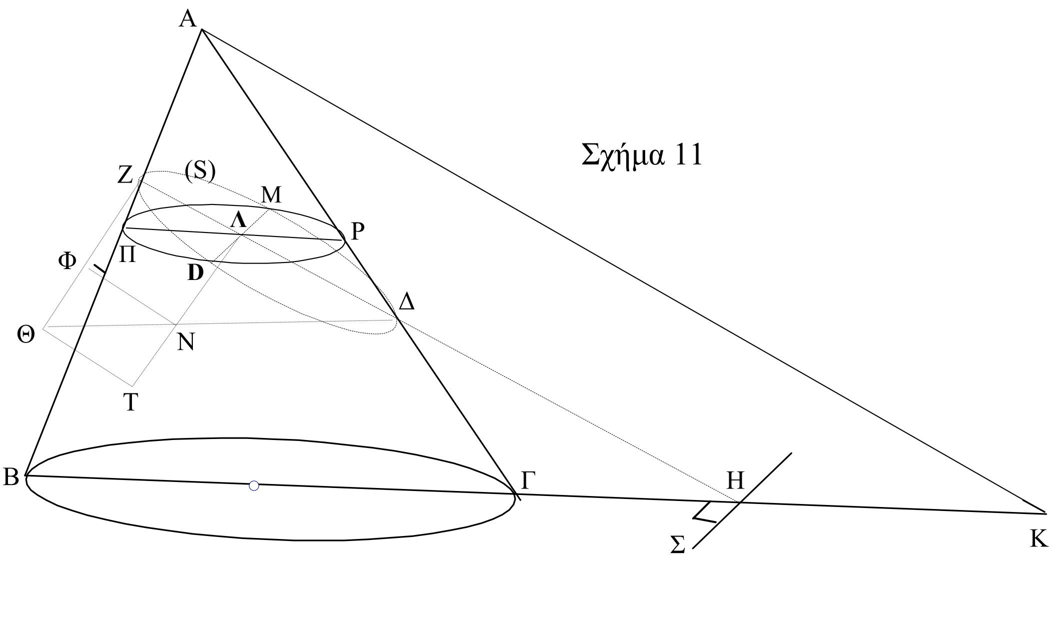
Σημείωση

Αν θέσουμε ΜΛ = y, ΖΛ = x, ΖΘ = p, και ΤΖ = δ η διάμετρος η (5) γράφεται $\frac{y^2}{x(x+\delta)} = \frac{p}{\delta}$ ή $y^2 = \frac{p}{\delta}x^2 + px$, δηλαδή όπως λέμε σήμερα, πρόκειται για την εξίσωση της υπερβολής ως προς το (πλαγιογώνιο) σύστημα ΥΖΗ που καθορίζεται από την διάμετρο ΤΖΗ και την εφαπτομένη στο Ζ (που αποδεικνύεται παράλληλη στην ΜΛ). Η μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο Ο της υπερβολής θα δώσει την γνωστή κανονική εξίσωση της υπερβολής, αναφερόμενη στο σύστημα δυο συζυγών διαμέτρων της.

Ι.3. Ε Λ Λ Ε Ι Ψ Η

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Κωνικά*, βιβλίο α΄, Πρόταση 13, [1] τόμος α΄, σελ. 238)
Έστω ένα κώνος με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΒΓ (Σχήμα 11) και μια τομή του ΑΒΓ από επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου. Θεωρούμε ένα επίπεδο (S) που τέμνει όλες τις γενέτειρες του κώνου, ώστε να τέμνει το επίπεδο της βάσης του κώνου κατά ευθεία ΣΗ κάθετη (δεν βλάπτεται η γενικότητα, βλέπε αντίστοιχη παρατήρηση στην παραβολή) στην ΒΓ. Επίσης η τομή του (S) με τον κώνο να μην είναι «υπεναντία» (βλέπε Σχόλιο 4).

Έστω ΖΔΗ η τομή του επιπέδου τομής (S) με το επίπεδο ΑΒΓ.



Σχήμα 11

Έστω τυχόν σημείο Μ της τομής του επιπέδου (S) με την επιφάνεια του κώνου και ΜΛ//ΣΗ. Από το σημείο Λ (και πάνω στο επίπεδο ΑΒΓ) φέρνουμε ευθεία ΠΛΡ παράλληλη στην ΒΓ, οπότε το επίπεδο των ευθειών ΜΛ, ΠΡ είναι παράλληλο στην βάση του κώνου και άρα τέμνει τον κώνο κατά κύκλο διαμέτρου ΠΛΡ. Η ΜΛD είναι κάθετη στην ΠΡ εφ' όσον οι παράλληλες προς αυτές ΒΓ, ΣΗ είναι κάθετες. Άρα το Λ είναι το μέσο της χορδής ΜD, οπότε από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών κύκλου έχουμε $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΠΛ}\cdot\text{ΛΡ}$ (1) .
Φέρνουμε ΑΚ//ΖΗ. Πάνω στο επίπεδο (S) ορίζουμε ένα τμήμα ΖΘ κάθετο στο ΖΔ ώστε

$$\frac{\text{ΖΔ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΑΚ}^2}{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΚΓ}} \qquad (2)$$

Αυτό είναι πάντοτε δυνατό αφού τα τμήματα ΑΚ, ΒΚ, ΚΓ, ΖΔ είναι σταθερά και εξαρτώνται από τον κώνο (δηλαδή την γωνία της κορυφής του) και την θέση του επιπέδου τομής (S). Από το Λ φέρνουμε ΛΤ//ΖΘ που τέμνει την ΘΔ στο Ν.

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΖΗ, ΖΠΛ έχουμε $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΒΚ}} = \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΒΗ}} = \frac{\text{ΖΛ}}{\text{ΠΛ}}$ (3)

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΓ, ΔΓΗ, ΛΡΔ έχουμε $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΓΗ}} = \frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΛΡ}}$ (4),

οπότε από την (2), λόγω των (3), (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\text{ΖΔ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΔ}}{\text{ΠΛ}\cdot\text{ΛΡ}}.$$

Όμως αφού ΛΝ//ΖΘ έχουμε $\frac{\text{ΖΔ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΛΝ}}$, οπότε $\text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΝ} = \text{ΠΛ}\cdot\text{ΛΡ}$ και λόγω της (1) παίρνουμε

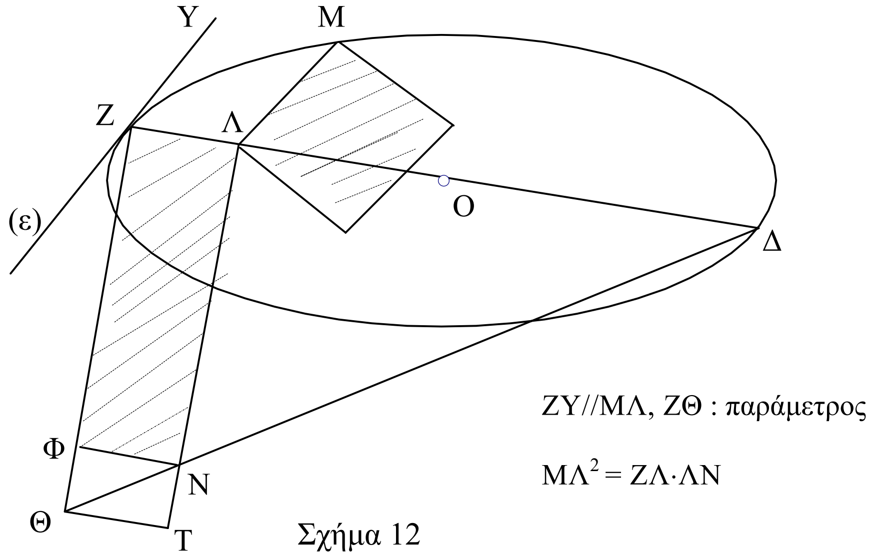
$$\boxed{\text{ΜΛ}^2 = \text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΝ}} \qquad (5)$$

Επομένως το τετράγωνο πλευράς ΜΛ («καταγόμενη τεταγμένως») είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΖΦΝΛ, που έχει παραβληθεί στην (παράμετρο) ΖΘ, και είναι μικρότερο (ελλείπει, κατά την αρχαία ορολογία) από το ορθογώνιο ΖΘΤΛ που ορίζει η ΖΛ («αποτεμνομένη») και η σταθερή (παράμετρος) ΖΘ, κατά το ορθογώνιο ΦΘΤΝ που είναι όμοιο με το ορθογώνιο ΘΖxΖΔ .
Όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο Απολλώνιος,

«καλείσθω δε η μεν τοιαύτη τομή έλλλειψις, η δε ΖΘ, παρ' ήν δύνανται αι κατάγόμεναι επί την ΖΔ τεταγμένως, η δε αυτή και ορθία, πλαγία δε η ΖΔ»

(*Κωνικά*, βιβλίο α΄, Πρόταση 13, [1] τόμος α΄, σελ. 244).

Δηλαδή, ας ονομάζεται η τομή αυτή έλλειψη, η δε ΖΘ ας ονομάζεται εκείνη κατά την οποία δύνανται οι καταγόμενες επί την ΖΔ τεταγμένως (παράμετρος), η ίδια δε ας ονομάζεται και ορθία, η δε ΖΔ ας ονομάζεται πλαγία.



Σχήμα 12

Σχόλια

1. Η ΖΗ δεν είναι πάντα κάθετη στην ΜΛ (Σχήμα 12). Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το επίπεδο τομής ΑΒΓ (που περιέχει τον άξονα του κώνου) είναι κάθετο στην βάση του κώνου. Μια περίπτωση να συμβεί αυτό είναι όταν ο κώνος είναι ορθός, αλλά μπορεί και να είναι πλάγιος (σκαληνός). Πράγματι, αν το επίπεδο ΑΒΓ είναι κάθετο στην βάση του κώνου, τότε επειδή η ΣΗ είναι κάθετη στην ΒΓ, θα είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓ, άρα και στην ΖΗ, και λόγω ΜΛ//ΣΗ, η ΜΛ είναι κάθετη στην ΖΗ. Ισχύει και το αντίστροφο. Στην περίπτωση αυτή η ΖΔ είναι άξονας της έλλειψης και τα Ζ, Δ κορυφές της. Εδώ εντάσσεται και η προ Απολλωνίου, οριζόμενη (ίδια) καμπύλη με το όνομα οξυγωνίου κώνου τομή.

2. Το μέσο Λ της ΜΝ με ΜΝ//ΣΗ ανήκει στην ΖΗ, όπως και κάθε άλλης χορδής παράλληλης στην ΣΗ. Δηλαδή η ΖΗ είναι μια διάμετρος της έλλειψης (σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλωνίου για την διάμετρο κωνικής). Γενικά λοιπόν η ΖΗ είναι μια διάμετρος της έλλειψης και αν η ΜΛ είναι κάθετη στην ΖΔ τότε η ΖΔ είναι άξονας της έλλειψης.

3. Επειδή ΛΝ//ΖΘ έχουμε $\frac{Z\Theta}{Z\Delta}=\frac{\Lambda N}{\Lambda\Delta}$, οπότε αντικατάσταση του ΛΝ στην σχέση $M\Lambda^2 = Z\Lambda\cdot\Lambda N$ παίρνουμε $M\Lambda^2 = Z\Lambda\cdot\Lambda\Delta\frac{Z\Theta}{Z\Delta}$. Άρα ο λόγος

$$\boxed{\frac{M\Lambda^2}{Z\Lambda\cdot\Lambda\Delta}=\frac{Z\Theta}{Z\Delta}} \qquad (6)$$

είναι σταθερός.
Αυτό ισχύει για μια διάμετρο ΖΔ (όχι πάντα άξονα) της έλλειψης στην οποία ανήκει το μέσο Λ μιας χορδής MD με p = ΖΘ την παράμετρο της έλλειψης. Η σχέση (6) χαρακτηρίζει την έλλειψη του Απολλωνίου, δηλαδή ο Απολλώνιος αποδεικνύει και το αντίστροφο: αν ισχύει η (6) τότε το σημείο Μ είναι σημείο της τομής του δοσμένου κώνου με το δοσμένο κατά θέση επίπεδο τομής. Η σχέση (6) είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί αναφέρεται γενικά σε μια διάμετρο της έλλειψης.

Σημείωση
Αν θέσουμε ΜΛ = y , ΖΛ = x, ΖΘ = p, και ΖΔ = δ η διάμετρος, η (6) γράφεται $y^2 = px - \frac{p}{\delta}x^2$, δηλαδή όπως λέμε σήμερα η εξίσωση της έλλειψης ως προς το (πλαγιογώνιο) σύστημα ΥΖΔ που καθορίζεται από την διάμετρο ΖΔ της έλλειψης και την εφαπτομένη στο Ζ (που αποδεικνύεται παράλληλη στην ΜΛ). Η μεταφορά στο κέντρο Ο της έλλειψης θα δώσει την γνωστή κανονική εξίσωση της έλλειψης αναφερόμενη στο σύστημα δυο συζυγών διαμέτρων της.

4. Η τομή του (S) με την κωνική επιφάνεια μπορεί να είναι κύκλος ακόμη και αν το επίπεδο (S) δεν είναι παράλληλο στην βάση του κώνου. Αυτό συμβαίνει γενικά μόνο όταν το επίπεδο ΑΒΓ είναι κάθετο στην βάση του κώνου, το επίπεδο τομής (S) είναι κάθετο στο επίπεδο ΑΒΓ και η γωνία ΑΔΖ είναι ίση με την ΑΒΓ (Σχήμα 11). Την τομή αυτή ο προσεκτικός Απολλώνιος την ονομάζει «υπεναντία» και αποδεικνύει χωριστά (Πρόταση 5, βιβλίο α΄, [1] τόμος α΄, σελ. 211) ότι η τομή είναι κύκλος. Για την περίπτωσή μας, που έχουμε υποθέσει ότι η ΣΗ είναι κάθετη στην ΒΓ, αρκεί το επίπεδο ΑΒΓ να είναι κάθετο στην βάση του κώνου. Πράγματι, τότε η ΜΛ είναι κάθετη στην ΠΡ και ΖΗ, άρα και στο επίπεδο ΑΒΓ, δηλαδή το (S) είναι κάθετο στο επίπεδο ΑΒΓ.

Το ότι η τομή είναι κύκλος μπορούμε να το διαπιστώσουμε και ως εξής: Στην περίπτωση αυτή τα τρίγωνα ΛΡΔ, ΖΛΠ είναι όμοια (η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την ΖΠΛ) οπότε $\frac{ΖΛ}{ΠΛ} = \frac{ΛΡ}{ΛΔ}$ και λόγω των (3), (4) προκύπτει $ΑΚ^2$ = ΒΚ·ΚΓ και λόγω της (2), ΖΘ = ΖΔ. Έτσι από την (6) έχουμε $ΜΛ^2 = ΖΛ\cdot ΛΔ$ με την ΜΛ, ως παράλληλη της ΣΗ, να είναι κάθετη στην ΖΔ, άρα η τομή είναι κύκλος. Η υπεναντία τομή στην περίπτωση ορθού κώνου, είναι παράλληλη στην βάση του, και άρα είναι πάλι κύκλος.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

1. Ο Απολλώνιος, ερμηνεύει τις σχέσεις («συμπτώματα», όπως τα έλεγαν οι αρχαίοι) που έβγαλε από τις τομές κώνου με την ορολογία και διατύπωση των προβλημάτων της *Παραβολής χωρίων* που υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και είδαμε προηγουμένως.

2. Η απόδοση από τον Απολλώνιο σε κάθε μια από τις καμπύλες παραβολή, έλλειψη και υπερβολή των σχέσεων - «συμπωμάτων», $ΜΛ^2 = ΖΘ\cdot ΖΛ$, $ΜΛ^2 = ΖΛ\cdot ΛΞ$, $ΜΛ^2 = ΖΛ\cdot ΛΝ$, στην γενική τους μορφή, έδωσε σ' αυτόν ένα δυναμικό εργαλείο για να ανακαλύψει και να μελετήσει πάρα πολλές ιδιότητες των κωνικών. Οι σχέσεις αυτές δεν προκύπτουν εύκολα, αν ορίσουμε τις κωνικές τομές με τους γνωστούς τρόπους (μέσω του λόγου ή των εστιακών ακτίνων). Ουσιαστικά πρόκειται για τις σημερινές εξισώσεις των καμπυλών αυτών. Αυτό δημιούργησε την υπόνοια ότι ίσως ο Απολλώνιος διέθετε ένα «αλγεβρικό» τρόπο σκέψης, άσχετα αν δεν τον αναφέρει στα βιβλία του. Αυτό υποστηρίζεται π.χ. από τον ιστορικό Van der Waerden στο [17], σελ. 290:

«ο Απολλώνιος είναι ένας δεξιοτέχνης στον χειρισμό της γεωμετρικής άλγεβρας και επίσης ένας δεξιοτέχνης να κρύβει την αυθεντική γραμμή σκέψης του».

3. Οι όροι «αποτεμνομένη» και «καταγόμενη τεταγμένως» που χρησιμοποίησε ο Απολλώνιος μεταφράστηκαν στα Λατινικά abscissa *και* ordinatum applicata (ή ordinata) αντίστοιχα και από αυτούς προήλθαν οι γνωστοί μας όροι «τετμημένη» και «τεταγμένη».

4. Ο Απολλώνιος ουσιαστικά αντικαθιστά το ορθογώνιο σύστημα αξόνων, ως προς το οποίο αναφέρεται η κωνική που προέρχεται από ορθό κώνο, με ένα πλαγιογώνιο σύστημα, που ορίζεται από μια διάμετρο της κωνικής και την εφαπτομένη στο άκρο της.

5. Στην παράγραφο §2.1 θα αποδείξουμε πως από τις Απολλώνιες τομές προκύπτουν οι γνωστές χαρακτηριστικές εστιακές ιδιότητες των κωνικών τομών.

ΙΙ. ΑΠΟ ΤΟ 2^{ο} ΒΙΒΛΙΟ.

Το βιβλίο αρχίζει με προτάσεις σχετικές με τις ασύμπτωτες της υπερβολής ([1], τόμος β΄, βιβλίο β′, Προτάσεις 1, 2, 3, σελ. 3-9)

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (*Κωνικά*, βιβλίο β΄, Πρόταση α΄)
Έστω υπερβολή κέντρου Ο, ένα σημείο της Α και Β το σημείο που η ΟΑ τέμνει τον άλλο κλάδο της υπερβολής. Πάνω στην εφαπτομένη της υπερβολής

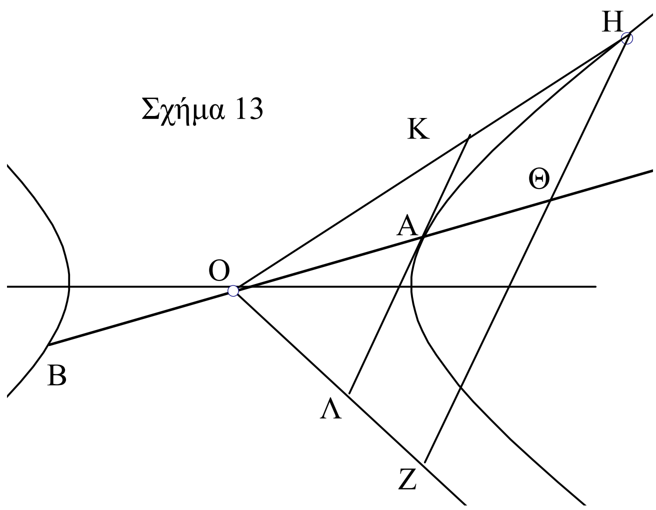
στο Α θεωρούμε τμήματα ΑΚ, ΑΛ με $ΑΚ^2 = ΑΛ^2 = \frac{1}{4}ΑΒ \cdot p$, όπου p η παράμετρος της υπερβολής. Τότε η ευθεία ΟΚ δεν έχει κοινά σημεία με την υπερβολή.

Απόδειξη
Έστω ότι η ευθεία ΟΚ (Σχήμα 13) έχει κοινό σημείο με την υπερβολή το Η. Φέρνουμε από το Η χορδή ΗΖ παράλληλη στην εφαπτομένη ΚΛ που τέμνει την διάμετρο ΟΑ στο σημείο Θ (μέσο της ΗΖ) (βλέπε Πρόταση 10, §5.4). Επειδή ΑΒ = 2ΟΑ και ΗΘ//ΚΑ έχουμε

$$\frac{ΑΒ}{p} = \frac{ΑΒ^2/4}{pΑΒ/4} = \frac{ΟΑ^2}{ΑΚ^2} = \frac{ΟΘ^2}{ΗΘ^2}$$

Αλλά για την υπερβολή ισχύει (βλ. Ενότητα Ι.2 (Α4.3) σχόλιο 4, σχέση (5)) $\frac{ΑΒ}{p} = \frac{ΒΘ \cdot ΑΘ}{ΗΘ^2}$, οπότε $ΟΘ^2 = ΒΘ \cdot ΑΘ$ ή

$\frac{ΟΘ}{ΑΘ} = \frac{ΒΘ}{ΟΘ}$ ή $\frac{ΟΘ - ΑΘ}{ΑΘ} = \frac{ΒΘ - ΟΘ}{ΟΘ}$ ή, λόγω της ΟΑ = ΒΟ, ισχύει ΑΘ = ΟΘ,



Σχήμα 13

άτοπο. Άρα η ΟΚ δεν έχει κοινό σημείο με τον κλάδο αυτό της υπερβολής. Όμοια και η ευθεία ΟΛ δεν έχει κοινό σημείο με την υπερβολή και ο Απολλώνιος καταλήγει *«ασύμπωτοι άρα εισί τη τομή οι ΟΚ, ΟΛ»*, ([1], τόμος β΄, σελ. 4) εννοώντας ότι (κατ' αρχήν) δεν έχουν κοινά σημεία με την υπερβολή, και συνεχίζει με μια θαυμάσια πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (*Κωνικά*, βιβλίο β΄, Πρόταση β΄)
Όπως στην προηγούμενη πρόταση, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει άλλη ασύμπτωτη που να τέμνει την γωνία ΚΟΛ.

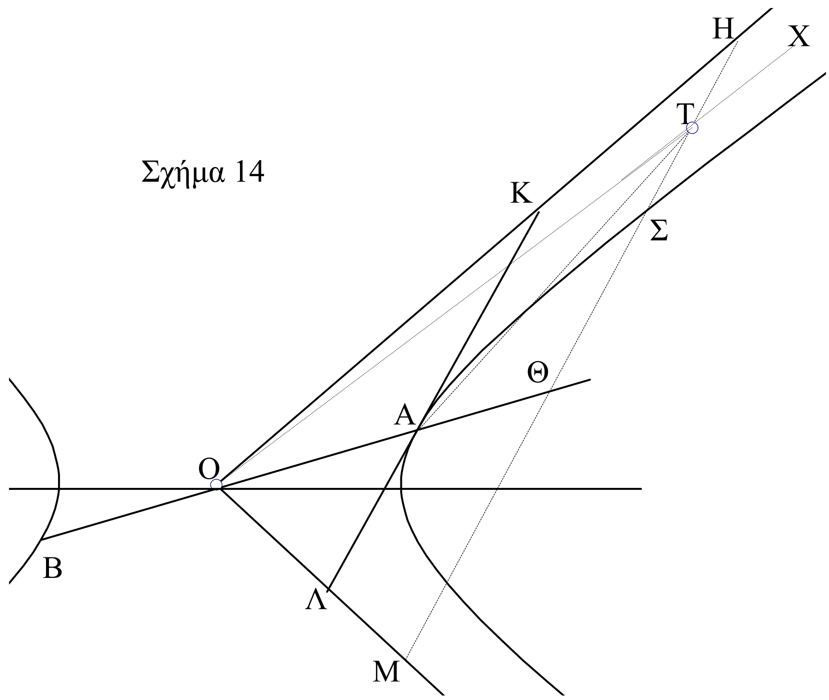
Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει ευθεία ΟΧ (Σχήμα 14) μέσα στην γωνία $\widehat{\text{ΚΟΛ}}$ που δεν τέμνει την υπερβολή, δηλαδή έστω ότι η ΟΧ είναι ασύμπτωτη. Φέρνουμε ΑΤ//ΟΚ (που θα συναντήσει οπωσδήποτε την ΟΧ, έστω στο Τ) και παίρνουμε τμήμα ΚΗ = ΑΤ. Το ΚΗΤΑ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΑΚ = ΗΤ. Έστω ότι η ΗΤ τέμνει την υπερβολή στο Σ, την διάμετρο ΒΑ στο (μέσο της χορδής) Θ και την ευθεία ΟΛ στο Μ.

Επειδή ΑΚ = ΑΛ και ΗΜ//ΚΛ, έχουμε ΗΘ = ΘΜ. Είναι ΗΤ = ΑΚ, οπότε ΣΗ > ΑΚ. Επίσης ΜΣ > ΑΛ, γιατί ΜΘ > ΑΛ (είναι ΜΘ/ΑΛ = ΟΘ/ΟΑ, ΟΘ > ΟΑ). Άρα ΜΣ·ΣΗ > ΑΛ·ΑΚ = ΑΚ^2 (1)

Όπως στην προηγούμενη πρόταση ισχύει $\frac{\text{ΑΒ}}{p} = \frac{\text{ΟΑ}^2}{\text{ΑΚ}^2}$, αλλά $\frac{\text{ΑΒ}}{p} = \frac{\text{ΒΘ}\cdot\text{ΑΘ}}{\text{ΣΘ}^2}$,

οπότε $\frac{\text{ΒΘ}\cdot\text{ΑΘ}}{\text{ΣΘ}^2} = \frac{\text{ΟΑ}^2}{\text{ΑΚ}^2} = \frac{\text{ΟΘ}^2}{\text{ΗΘ}^2}$, αλλά (ΟΒ = ΟΑ) ΒΘ·ΑΘ = $\text{ΟΘ}^2 - \text{ΟΑ}^2$, οπότε



Σχήμα 14

$$\frac{\text{ΟΑ}^2}{\text{ΑΚ}^2} = \frac{\text{ΟΘ}^2 - \text{ΟΑ}^2}{\text{ΣΘ}^2} = \frac{\text{ΟΘ}^2}{\text{ΗΘ}^2} = \frac{\text{ΟΑ}^2}{\text{ΗΘ}^2 - \text{ΣΘ}^2}.$$ Άρα $\text{ΑΚ}^2 = \text{ΗΘ}^2 - \text{ΣΘ}^2$.

Είναι όμως ΜΣ·ΣΗ = (ΗΘ + ΘΣ)(ΗΘ - ΘΣ) = $\text{ΗΘ}^2 - \text{ΣΘ}^2$, άρα

ΜΣ·ΣΗ = ΑΚ^2, που είναι άτοπο λόγω της (1). Άρα κάθε ευθεία ΟΧ μέσα στην γωνία ΚΟΛ τέμνει την υπερβολή («άρα η ΟΤ ασύμπτωτη εστί τη τομή»).

Σχόλιο

Ο Απολλώνιος δεν δίνει ένα ορισμό στις ασύμπτωτες, αλλά με τις δυο αυτές προτάσεις του δίνει το ουσιαστικό περιεχόμενό τους και συνάμα δημιουργεί την υποδομή για τις σχετικές προτάσεις που θα ακολουθήσουν. Έτσι κατ' αρχήν δείχνει πως μπορούν να *κατασκευαστούν* (άρα και υπάρχουν) δυο ευθείες από το κέντρο Ο της υπερβολής που δεν έχουν κοινά σημεία με αυτήν. Ο Απολλώνιος εδώ, όπως και σε πολλά σημεία του έργου του, δεν αναφέρει πώς σκέφτηκε να εργαστεί έτσι, λείπει δηλαδή η ανάλυση του προβλήματος. Αυτό βέβαια το συναντάμε και σε άλλους αρχαίους και μη μαθηματικούς.

Με την Πρόταση 2 αποδεικνύει ότι οι ευθείες αυτές ΟΚ, ΟΛ είναι πιο «κοντά» στην υπερβολή (σχηματίζουν την μικρότερη γωνία), απ' όλες όσες δεν έχουν κοινά σημεία με αυτήν και διέρχονται από το κέντρο της. Ακόμη ότι είναι μοναδικές για την δεδομένη υπερβολή και δεν εξαρτώνται από το σημείο Α της υπερβολής μέσω του οποίου γίνεται η κατασκευή τους.

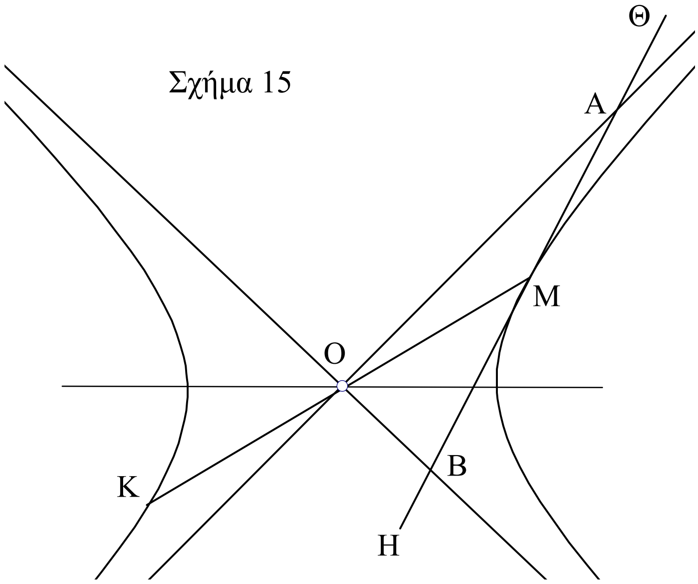
ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (*Κωνικά*, βιβλίο β΄, Πρόταση γ΄)

Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της υπερβολής τέμνει τις ασύμπτωτες (του κλάδου της). Αν τα σημεία τομής είναι τα Α, Β τότε ΜΑ = ΜΒ και $ΜΑ^2 = \frac{1}{2}ΟΜ.p$, όπου Ο το κέντρο της υπερβολής και p η παράμετρός της.

Απόδειξη

Έστω ότι η εφαπτομένη στο Μ (Σχήμα 15) δεν τέμνει τις ασύμπτωτες. Παίρνουμε ΟΜ = ΟΚ, οπότε ΜΚ διάμετρος της υπερβολής.

Σχήμα 15



Πάνω στην εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ παίρνουμε σημεία Θ, Η ώστε $ΜΘ^2 = ΜΗ^2 = \frac{1}{4}ΚΜ\cdot p$. Πρέπει $Α \neq Θ$ και $Η \neq Β$, αφού η εφαπτομένη στο Μ δεν τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε από την Πρόταση 1 έχουμε ότι ΟΘ, ΟΗ είναι ασύμπτωτες της υπερβολής, αλλά και οι ΟΑ, ΟΒ είναι από υπόθεση ασύμπτωτες (Πρόταση 2), άτοπο. Άρα η εφαπτομένη τέμνει τις ασύμπτωτες, έστω στα σημεία Α, Β. Έστω τώρα σημείο Θ στην ΜΑ με $ΜΘ^2 = \frac{1}{4}ΚΜ\cdot p$. Από την Πρόταση 1, η ΟΘ είναι ασύμπτωτη, οπότε (Πρόταση 2) το Θ συμπίπτει με το Α. Άρα $ΜΑ^2 = \frac{1}{4}ΚΜ\cdot p$. Όμοια $ΒΜ^2 = \frac{1}{4}ΚΜ\cdot p$, οπότε ΑΜ = ΒΜ.

III. ΑΠΟ ΤΟ 3ο ΒΙΒΛΙΟ

ΠΡΟΤΑΣΗ 47 (*Κωνικά*, βιβλίο γ΄, Πρόταση 47, [1] τόμος β΄, σελ. 245)
Μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της έλλειψης τέμνει τον μεγάλο άξονα στο σημείο Κ και τις εφαπτομένες στα άκρα Α, Β του μεγάλου άξονα στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Αν Ε, Ζ τα γενόμενα από την παραβολή σημεία (εστίες) και Θ το σημείο τομής των ΓΕ, ΔΖ τότε η ΘΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΓΔ.

(Βλέπε απόδειξη στην Πρόταση 16, Κεφάλαιο 5)

ΠΡΟΤΑΣΗ 51 (Εστιακή ιδιότητα υπερβολής, *Κωνικά*, βιβλίο γ΄, Πρόταση 51, [1], τόμος β΄, σελ. 226)

> «Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτερανοῦν τῶν τομῶν, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.»

Δηλαδή, αν στον άξονα υπερβολής ή των αντικειμένων, παραβληθεί ορθογώνιο ίσο με το ένα τέταρτο του σχήματος (δηλ. ένα τέταρτο κύριου άξονα Χ παράμετρο) υπερβάλλον κατά σχήμα τετράγωνο, και από τα δυο μέρη του άξονα, και από τα γενόμενα από την παραβολή σημεία φέρουμε ευθείες προς οποιοδήποτε σημείο των τομών, η μεγαλύτερη υπερέχει της μικρότερης κατά τον άξονα.

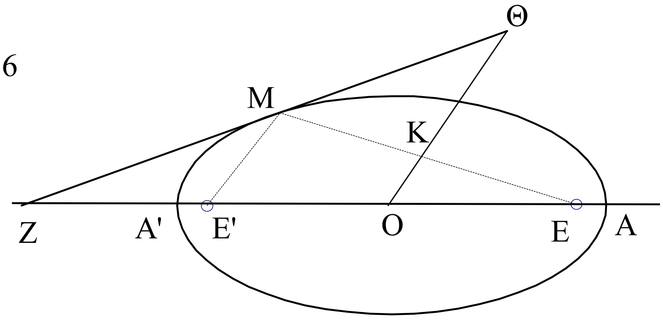
ΠΡΟΤΑΣΗ 52 (Εστιακή ιδιότητα έλλειψης, *Κωνικά*, βιβλίο γ΄, Πρόταση 52, [1], τόμος β΄, σελ. 255)

Αν σε έλλειψη παραβληθεί στον μεγάλο άξονα και προς τα δυο του μέρη ορθογώνιο ίσο με το ένα τέταρτο του σχήματος, «ελλείπον σχήμα τετράγωνον» και από τα γενόμενα από την παραβολή σημεία φέρουμε τμήματα προς την έλλειψη, τότε το άθροισμα τους είναι ίσο με τον άξονα.

Απόδειξη (Απολλωνίου)

Έστω ΑΑ′ (Σχήμα 16) ο μεγάλος άξονας της έλλειψης και σημεία Ε′, Ε ώστε $E'A \cdot E'A' = EA \cdot EA'$ $(= \frac{1}{4} pAA'$, όπου $p = 2\beta^2/\alpha$ η παράμετρος της έλλειψης. Τα σημεία Ε′, Ε - εστίες - είναι αυτά που ονομάζει «τα γενόμενα από την παραβολή»). Έστω Μ σημείο της έλλειψης και η εφαπτομένη στο Μ που τέμνει τον μεγάλο άξονα στο σημείο Ζ. Θα δείξουμε ότι ΜΕ′ + ΜΕ = ΑΑ′. Από κέντρο Ο φέρνουμε ΟΘ//ΜΕ′ που τέμνει την ΜΕ στο Κ. Τότε από την Πρόταση 48 (ανακλαστική ιδιότητα) έχουμε $Z\hat{M}E' = K\hat{M}\Theta$ και λόγω Ε′Μ//ΟΘ το τρίγωνο ΜΚΘ είναι ισοσκελές οπότε ΜΚ = ΚΘ.

Σχήμα 16



Αλλά επειδή Ο μέσο της ΕΕ′ και ΟΘ//ΜΕ′, είναι και ΜΚ = ΚΕ, οπότε ΜΕ = 2ΘΚ και ΜΕ′ = 2ΟΚ. Έτσι έχουμε ΜΕ′ + ΜΕ = 2ΟΘ, αλλά (από Πρόταση 50) ΟΘ = ΟΑ, επομένως ΜΕ′ + ΜΕ = ΑΑ′.

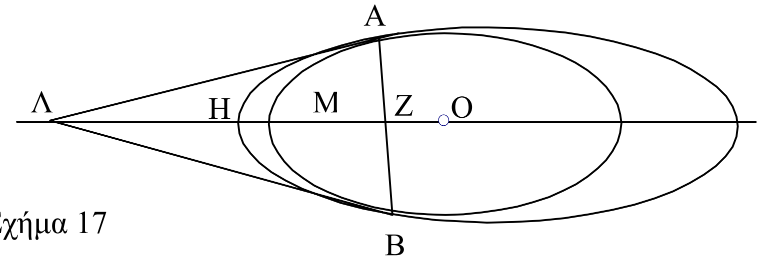
IV. ΑΠΟ ΤΟ 4^{o} ΒΙΒΛΙΟ

ΠΡΟΤΑΣΗ 34 (*Κωνικά*, βιβλίο δ΄, Πρόταση 34, [1], τόμος γ΄, σελ. 54)

Εάν μια έλλειψη εφάπτεται σε δυο σημεία με μια άλλη έλλειψη ή κύκλο που έχει το ίδιο κέντρο με την πρώτη, τότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής θα διέρχεται από το κοινό κέντρο αυτών.

Απόδειξη (Απολλωνίου)

Έστω ότι οι δυο ελλείψεις εφάπτονται μεταξύ των (μόνο) στα σημεία Α, Β (Σχήμα 17) και ας φέρουμε την ΑΒ και έστω ότι οι εφαπτομένες στα σημεία Α, Β τέμνονται στο σημείο Λ.



Σχήμα 17

Έστω Ζ το μέσο της ΑΒ , οπότε η ΛΖ (*Κωνικά* βιβλίο 2, Πρόταση 29, βλέπε και §5.4, Πρόταση 11) είναι διάμετρος των ελλείψεων, άρα διέρχεται από το κέντρο τους Ο. Επομένως θα έχουμε $ΟΛ\cdot ΟΖ = ΟΗ^2$ για την μια έλλειψη και $ΟΛ\cdot ΟΖ = ΟΜ^2$ για την άλλη έλλειψη (*Κωνικά*, βιβλίο 1, Πρόταση 37, βλέπε και §5.4, Πρόταση 12(α))

Άρα ΟΗ = ΟΜ, αδύνατο. Επομένως οι εφαπτόμενες στα σημεία Α, Β είναι παράλληλες, οπότε η ΑΒ είναι διάμετρος (*Κωνικά*, βιβλίο β΄, Πρόταση 27, βλέπε και §5.4, Πόρισμα 10.2).

Α5. Διοκλής

Γύρω στο 1970 ανακαλύφθηκε σε βιβλιοθήκη του Ιράν, το βιβλίο του Διοκλή *Περί Πυρείων* μεταφρασμένο στα Αραβικά. Το έργο αυτό μεταφράστηκε στ' Αγγλικά το 1976 από τον G. J. Toomer ([27]). Ο Διοκλής έζησε μετά τον Αρχιμήδη, περίπου το 180 π.Χ., και στο έργο του αυτό ασχολείται κατ' αρχήν με δυο προβλήματα που αφορούν τα κάτοπτρα ανάφλεξης. Στο υπόλοιπο έργο δίνει λύσεις σε δυο περίφημα προβλήματα, αυτό του διπλασιασμού του κύβου και της διαίρεσης σφαίρας με ένα επίπεδο ώστε οι όγκοι των δυο τμημάτων να έχουν δεδομένο λόγο. Το πρώτο πρόβλημα το αντιμετώπισε με δυο τρόπους: στον πρώτο χρησιμοποιεί την τομή δυο παραβολών, ενώ στον δεύτερο χρησιμοποιεί μια νέα καμπύλη, που ανακάλυψε ο ίδιος, την *κισσοειδή* (βλ.§4.3 Πρόταση 11, σημείωση). Το δεύτερο πρόβλημα το έλυσε με την βοήθεια δυο κωνικών τομών, μιας έλλειψης και μιας ισοσκελούς υπερβολής.

Οι κωνικές στο έργο *Περί Πυρείων*

Σχετικά με τις κωνικές τομές που χρησιμοποιεί ο Διοκλής στο έργο του αυτό, παρατηρούμε τα εξής:

1. Εκτός από την Πρόταση 8, το έργο του Διοκλή είναι γραμμένο σύμφωνα με την προ Απολλώνια παράδοση, παρ' όλο που, όπως υποθέτουμε, έζησε περίπου την ίδια εποχή με τον Απολλώνιο. Ο Διοκλής χρησιμοποιεί τον όρο «τομή ορθογωνίου κώνου» για την παραβολή, αλλά για τις άλλες κωνικές στην Πρόταση 8 χρησιμοποιεί τα ονόματα έλλειψη και υπερβολή αντί των παλαιών ονομάτων που θα περίμενε κανείς.

2. Υποθέτει χωρίς απόδειξη το θεώρημα ότι, η υποκάθετος στην παραβολή είναι σταθερή και ίση με το μισό της παραμέτρου της παραβολής (βλ.§4.3, Πρόταση 5(v)). Αυτό το θεώρημα δεν εμφανίζεται στα *Κωνικά* του Απολλωνίου, αλλά έχουμε μαρτυρίες ότι ήταν ένα θεώρημα στα προ Απολλώνια στοιχεία κωνικών ([27], σελ. 9).

3. Ο Διοκλής χρησιμοποιεί τον όρο «άξονα» μόνο για τον άξονα μιας κωνοειδούς, και ποτέ για τον άξονα μια κωνικής. Για το τελευταίο χρησιμοποιεί τον όρο διχοτόμος που δεν συμφωνεί με την πρακτική ούτε του Αρχιμήδη ούτε του Απολλωνίου.

4. Η εστία της παραβολής

Όπως αναφέραμε (Κεφ.1, [Α2]), ο Απολλώνιος αναφέρεται στις ιδιότητες των εστιών της έλλειψης και της υπερβολής, χωρίς να αναφέρεται πουθενά στην εστία της παραβολής και στην ανακλαστική της ιδιότητα. Πριν την ανακάλυψη του έργου του Διοκλή, ξέραμε ότι η ιδιότητα αυτή είχε χρησιμοποιηθεί στο Bobbio μαθηματικό χειρόγραφο και από τον Ανθέμιο τον Τραλλιανό (6^{ος} αιών. μ.Χ). Όμως τώρα διαπιστώνουμε ότι αυτή η ιδιότητα ανακαλύφθηκε πολύ πιο νωρίς από τον Απολλώνιο, αφού ο Διοκλής μας πληροφορεί ότι το πρόβλημα της κατασκευής ενός κατόπτρου ανάφλεξης που συγκεντρώνει όλες τις ακτίνες σε ένα σημείο, λύθηκε από τον Δοσίθεο.

5. Κατασκευή της παραβολής από την εστία και την διευθετούσα.

Στο *Περί Πυρείων* και στην Πρόταση 4 ([27], σελ. 62) ο Διοκλής λύνει το πρόβλημα κατασκευής ενός κατόπτρου ανάφλεξης που έχει δοσμένο εστιακό μήκος, με μια μέθοδο η οποία απαιτεί το σχεδιασμό παραβολής όταν είναι γνωστή η εστία και η διευθετούσα της. Στην συνέχεια όμως (Πρόταση 5) αποδεικνύει ότι αυτή η καμπύλη που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο είναι πράγματι παραβολή, δηλαδή έχει το «σύμπτωμα» ορισμού της παραβολής ([27], σελ. 17). Μπορούμε έτσι να υποθέσουμε ότι, δεν θα το έκανε αυτό, αν ήταν ήδη γνωστή από τα προηγούμενα χρόνια η ιδιότητα αυτή.

Ίσως λοιπόν ο Διοκλής να ανακάλυψε την ιδιότητα εστίας-διευθετούσας για την παραβολή, αν και όπως αναφέραμε (βλέπε Κεφ.1, Α2), ο Πάππος την αποδίδει στον Ευκλείδη. Εκτός από τον Διοκλή είναι γνωστό ότι και ο Ανθέμιος (6ος αιώνας μ.Χ.) χρησιμοποίησε την ιδιότητα αυτή για την κατασκευή παραβολής ([7]).

Πάντως ένα όργανο για την χάραξη της παραβολής φαίνεται ότι δημιουργήθηκε από τον Μηχανικό Ισίδωρο (6ος αιώνας μ.Χ.) συνεργάτη του Ανθεμίου και δάσκαλο του Ευτοκίου.
Το σχετικό απόσπασμα του Ευτοκίου, από τα σχόλιά του (σελ. 84) στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου του Αρχιμήδη*, είναι το εξής:

> [Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν].

Α6. Πάππος

Μετά τον Απολλώνιο και τον Διοκλή, με τις κωνικές τομές ασχολήθηκε και ο τελευταίος των μεγάλων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (περίπου 300 μ.Χ.). Ο Πάππος, εκτός από τις χρήσιμες πληροφορίες που μας διέσωσε και τα σπουδαία και θαυμαστά αποτελέσματα και θεωρήματα που ανακάλυψε, διακρίθηκε για την συστηματοποίηση και συμπλήρωση της Ελληνικής Γεωμετρίας. Το περίφημο έργο του *Συναγωγή,* που αποτελείται από 8 βιβλία, περιέχει εκτός από διάφορα λήμματα και σχολιασμούς σε έργα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και πολλά νέα θεωρήματα.

Στο 7ο βιβλίο της *Συναγωγής* του και με τον τίτλο *Λήμματα*, διατυπώνει διάφορες βοηθητικές προτάσεις στα *Κωνικά* του Απολλωνίου. Στα *Λήμματα* υπάρχουν πολλές προτάσεις που αφορούν σχέσεις σε όμοια τρίγωνα, καθώς και μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα και παραλληλόγραμμα. Πολλές από τις προτάσεις που βρίσκουμε σήμερα σε βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι δικές του. Ας πάρουμε ένα μικρό δείγμα από αυτές:

1. Λήμμα 1 στο 1ο βιβλίο των *Κωνικών*, (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, σελ. 918, [1], τόμος δ΄, σελ. 120).

Έστω ένας κυκλικός κώνος (ορθός ή πλάγιος). Να βρεθεί ποιο από τα τμήματα που το ένα άκρο τους είναι η κορυφή του κώνου και το άλλο είναι ένα σημείο του κύκλου της βάσης του είναι το μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο.

Ο Πάππος βρίσκει ότι τα τμήματα αυτά ορίζονται από την τομή της επιφάνειας του κώνου με το επίπεδο που ορίζεται, από την κάθετη από την κορυφή του κώνου στο επίπεδο της βάσης του και από το κέντρο του κύκλου βάσης.

2. Λήμμα 2 στο 2ο βιβλίο των *Κωνικών*, (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, [1] τόμος δ΄, σελ. 137).

Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ με $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$ και ΑΒ//ΔΕ, ΒΓ//ΕΖ. Τότε ΑΓ//ΔΖ.

3. Λήμμα 2 στο 5ο βιβλίο των *Κωνικών*, (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, [1], τόμος δ΄, σελ. 159).

Δίδεται γωνία ΒΑΓ και σημείο Δ εντός αυτής. Να γραφεί υπερβολή η οποία να διέρχεται από το σημείο Δ και να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ.

4. Λήμμα 10 στο 6ο βιβλίο των *Κωνικών* (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, σελ. 988, [1], τόμος δ΄, σελ. 192).

> «ι. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα
> τὰς Α Δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γω-
> νίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ ΔΘΕ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν
> ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖῥ ὅτι ὅμοιόν ἐστιν τὸ μὲν
> ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ…»

Δηλαδή: Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν τις γωνίες Α, Δ ορθές και έστω Η σημείο της πλευράς ΒΓ και Θ σημείο της πλευράς ΕΖ. Αν η γωνία ΑΗΒ είναι ίση με την γωνία ΔΘΕ και $\frac{BH}{H\Gamma}=\frac{E\Theta}{\Theta Z}$, τότε το τρίγωνο ΑΒΗ είναι όμοιο με το ΔΕΘ και το ΑΗΓ όμοιο με το ΔΘΖ.

Επίσης στην *Συναγωγή* και στο 8ο βιβλίο της, που αναφέρεται σε θέματα μηχανικής, ασχολείται με το πρόβλημα της εύρεσης κωνικής τομής όταν δίνονται 5 σημεία της και το χρησιμοποιεί στην λύση του εξής απίθανου προβλήματος,

> «…προτεινόμενον ὑπὸ τῶν ἀρχιτεκτόνων. ἀξιοῦσι γὰρ μέρους
> ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου δοθέντος, οὗ μηδὲν μέρος
> ὑγιὲς φυλάσσεται τῶν ἐν ταῖς βάσεσι περιφερειῶν, εὑρεῖν
> τὸ πάχος τοῦ κυλίνδρου,…»
>
> (*Συναγωγή*, βιβλίο 8, ιγ, σελ. 1074)

δηλαδή να βρεθεί το πάχος μιας σπασμένης κυλινδρικής κολώνας, της οποίας έχουμε ένα μόνο τμήμα της! Στο ίδιο βιβλίο περιέχεται επίσης η κατασκευή των κυρίων αξόνων μιας έλλειψης όταν δίνονται δυο συζυγείς διάμετροι, ενώ στο έκτο βιβλίο προσδιορίζει το κέντρο μιας έλλειψης η οποία είναι απεικόνιση υπό προοπτική ενός κύκλου.

Σημαντικός είναι ακόμη ο ενιαίος ορισμός των κωνικών τομών που υπάρχει, όπως αναφέραμε και αλλού (Κεφ.1, Α2), σε ένα λήμμα του στο έργο του Ευκλείδη *Περί τόπων προς επιφάνεια* στην (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, σελ. 1012) :

«Κωνική τομή είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ ενός επιπέδου με την ιδιότητα, ο λόγος των αποστάσεων του σημείου Σ από ένα σταθερό σημείο Ε και μια σταθερή ευθεία (δ) είναι σταθερός και ίσος με ε».

Ο σταθερός λόγος ε λέγεται εκκεντρότητα και στο ερώτημα για ποιες τιμές του ε έχουμε παραβολή, έλλειψη ή υπερβολή, ο Πάππος απαντά:

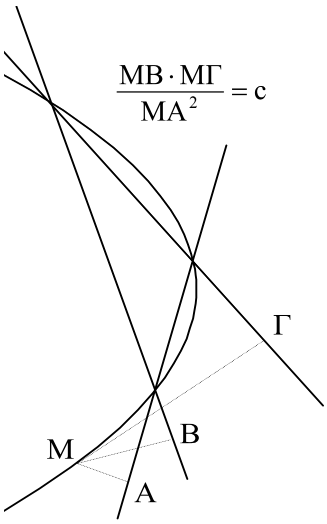
- Παραβολή, αν ε = 1
- Έλλειψη, αν ε < 1 («ελλείπειν»)
- Υπερβολή, αν ε > 1 («υπερβάλλειν»)

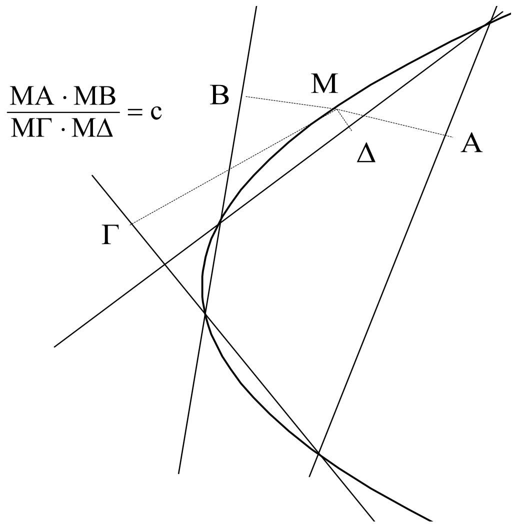
Ακόμη ο Πάππος έδωσε δυο λύσεις στο πρόβλημα της τριχοτόμησης μιας γωνίας στις οποίες χρησιμοποιεί κωνικές τομές, χωρίς να χρησιμοποιεί νεύση («… χωρὶς τῆς νεύσεως, διὰ στερεοῦ τόπου τοιούτου….», *Συναγωγή*, βιβλίο 4, προτάσεις λη΄, μγ΄, σελ. 280, 282, 284).
Στην πρώτη λύση χρησιμοποιεί μια υπερβολή που κατασκευάζεται από τις ασύμπτωτες και ένα σημείο της, ενώ στην δεύτερη χρησιμοποιεί την ιδιότητα εστίας και διευθετούσας μιας υπερβολής (με εκκεντρότητα 2) ([15], σελ. 112 και [6], τόμος Ι, σελ. 299). Επίσης ο Πάππος στη *Συναγωγή*, βιβλίο 4, σελ. 302, με την βοήθεια μιας υπερβολής και μιας παραβολής, δίνει λύση σε ένα πρόβλημα που ο Αρχιμήδης είχε λύσει με νεύση, στο έργο του *Περί Ελίκων*.

Ο Πάππος ασχολήθηκε και με το πρόβλημα των «τριών ή τεσσάρων ευθειών». Για το πρόβλημα αυτό, ο Απολλώνιος αναφέρει ότι δεν είχε πλήρως μελετηθεί στο βιβλίο των *Κωνικών* του Ευκλείδη και ότι ο ίδιος το πέτυχε με την βοήθεια Προτάσεων του γ΄ βιβλίου του.
Το περίφημο αυτό πρόβλημα αναφέρει ο Πάππος στην *Συναγωγή* του:

> «… ἐὰν γάρ, θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό
> τινος [τοῦ αὐτοῦ] σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς
> ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ
> δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
> λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένου
> στερεοῦ τόπου, τουτέστιν μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμ-
> μῶν. καὶ ἐὰν ἐπὶ δ εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν
> εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ
> δύο κατηγμένων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων,
> ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς».
> (*Συναγωγή*, βιβλίο 7, σελ. 678)

Δηλαδή, αν δοθούν τρεις ευθείες σε δεδομένη θέση και από ένα σημείο φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα υπό δεδομένες γωνίες προς τις τρεις αυτές ευθείες, ώστε ο λόγος του γινομένου των δυο από αυτά, προς το τετράγωνο του τρίτου να είναι γνωστός, τότε το σημείο ανήκει σε μια κωνική.
Επίσης αν δοθούν τέσσερις ευθείες, και φέρουμε, υπό δεδομένες γωνίες, τέσσερα τμήματα από ένα σημείο προς τις ευθείες αυτές, ώστε ο λόγος του γινομένου δυο από αυτά, προς το γινόμενο των δυο άλλων να είναι σταθερός, τοτε το σημείο ανήκει σε κωνική. Στο επόμενο σχήμα έχουμε την παράσταση αυτού του θεωρήματος για την ειδική περίπτωση που οι δεδομένες γωνίες είναι ορθές, οπότε τα τμήματα αντιστοιχούν σε αποστάσεις.
Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε, με λίγο διαφορετική μορφή, τον 19$^{\text{ο}}$ αιώνα από τον Chasles (βλέπε Κεφ.1, Β).





Να σημειώσουμε ακόμη ότι ο Πάππος, στην εισαγωγή του 7$^{\text{ου}}$ βιβλίου της *Συναγωγής,* διατυπώνει δεκατρία Λήμματα στο έργο του Ευκλείδη *Πορίσματα* (βλ. [20], σελ. 338-341). Τα λήμματα έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη της Προβολικής Γεωμετρίας τον 17$^{\text{ο}}$ και 18$^{\text{ο}}$ αιώνα, η οποία έδωσε νέα ώθηση στην μελέτη των κωνικών. Μεταξύ άλλων απέδειξε την σταθερότητα του αναρμονικού ή διπλού λόγου δέσμης ευθειών σε μια ειδική περίπτωση (βλέπε παρακάτω Κεφ.1, Ενότητα Β).

Μετά τον Πάππο, με τις κωνικές τομές ασχολήθηκε ο Σερήνος (4$^{\text{ος}}$ αιώνας μ.Χ.) και στην συνέχεια μερικοί Άραβες μαθηματικοί, αλλά τα έργα των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών ξεπεράστηκαν μόνο τον 17$^{\text{ο}}$ αιώνα. Έτσι, μέχρι τον 17$^{\text{ο}}$ αιώνα, που εμφανίσθηκαν μεγάλες μορφές των Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών, έγιναν διάφοροι σχολιασμοί, μεταφράσεις και εκδόσεις των *Κωνικών*, γεγονός που δείχνει την αίγλη που ασκούσαν τα *Κωνικά* στον πνευματικό κόσμο κάθε εποχής. Εκτός από την έκδοση και τα σχόλια του Ευτοκίου που αναφέραμε, σχόλια στα *Κωνικά* έγραψε και η μαθηματικός Υπατία (τέλος 4ου αιώνα μ.Χ.). Η Υπατία, η οποία ήταν κόρη του μαθηματικού Θέωνα του Αλεξανδρινού (που εξέδωσε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη), βρήκε τραγικό θάνατο από τον όχλο το 415 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια. Τα σχόλια της Υπατίας χάθηκαν όπως και τα σχόλια που έγραψε ο Σερήνος για τα *Κωνικά* του Απολλωνίου.

Α7. Σερήνος

Ο μαθηματικός Σερήνος καταγόταν από την Αντινόνεια (ή Αντινοούπολη) της Μέσης Αιγύπτου, πόλη που ιδρύθηκε από τον Αδριανό (117-138 μ.Χ). Έζησε περίπου τον 4ο αιώνα μ.Χ., δηλαδή μεταξύ του Πάππου και του Θέωνα του Αλεξανδρινού ([6], τόμος Ι, σελ. 602, [1], τόμος α΄, σελ. 12).

Εκτός από τα σχόλιά του στα *Κωνικά,* που δεν σώθηκαν, έγραψε δυο πραγματείες: *Περί τομής Κυλίνδρου* και *Περί τομής κώνου*. Τα έργα αυτά μεταφράστηκαν στα Λατινικά από τον Commandinus το 1566. Το πρώτο Ελληνικό κείμενο των έργων αυτών εμφανίζεται μαζί με την έκδοση των *Κωνικών* από τον Halley (Οξφόρδη 1710), ενώ σήμερα έχουμε το στερεότυπο κείμενο που εκδόθηκε από τον Heiberg (1896) ([6], τόμος ΙΙ, σελ. 602). Στο πρώτο έργο του, αφού ορίσει την κυκλική κυλινδρική επιφάνεια, αποδεικνύει ότι η τομή της με επίπεδο που δεν είναι παράλληλο στην βάση της, είναι έλλειψη, την οποία δίνει με το «σύμπτωμα» του Απολλωνίου. (βλέπε ονομασία κωνικών, Κεφ.1, Α4.3). Όπως λέει χαρακτηριστικά,

> «…Τούτων οὕτως ἐχόντων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἡ ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν· ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχεν, ὡς ἐν τοῖς Κωνικοῖς δείκνυται θεωρήμασι..»
> (*Περί τομής κυλίνδρου*, Πρόταση ιζ΄, σελ. 52).

Επίσης λύνει διάφορα σχετικά προβλήματα, π.χ. δοσμένου ενός κώνου (ή ενός κυλίνδρου) και μιας έλλειψης επάνω σ' αυτόν, να βρεθεί κύλινδρος (αντίστοιχα κώνος) που να έχει την ίδια τομή με αυτήν του κώνου (κυλίνδρου).

Στο έργο του *Περί τομής Κώνου*, ο Σερήνος ασχολείται με τα εμβαδά τομών σε ορθούς ή σκαληνούς κώνους που σχηματίζονται από επίπεδα που διέρχονται από την κορυφή του κώνου και είτε περιέχουν είτε όχι τον άξονά του κώνου. Σημαντική είναι η ακόλουθη πρόταση που αποδεικνύει:

Πρόταση νζ΄.

«Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ, τῶν γενομένων τριγώνων τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει, καὶ οὗ τριγώνου μείζων ἡ περίμετρος, καὶ αὐτὸ μεῖζόν ἐστι»

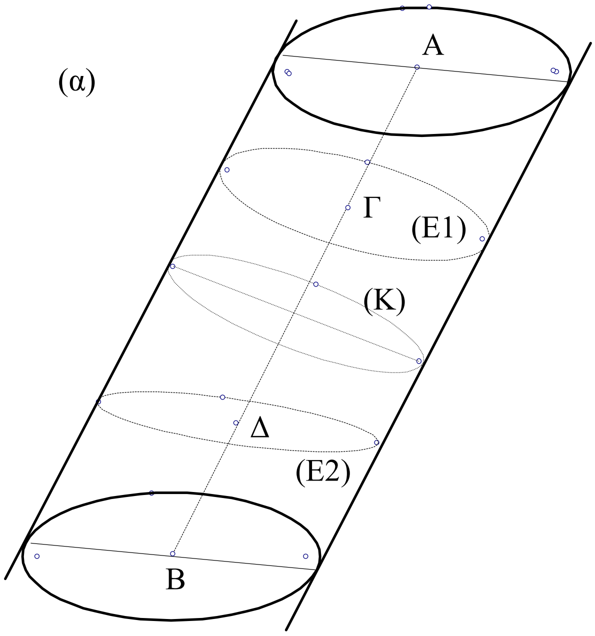
(Σερήνου: *Περί τομής κώνου*, Πρόταση 57, σελ. 268)

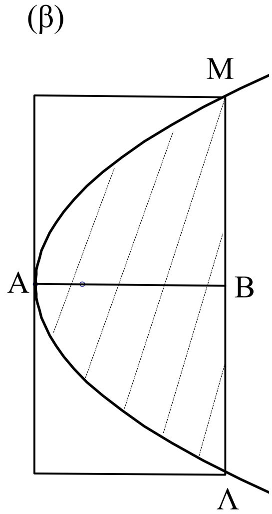
Δηλαδή, το μεγαλύτερο σε (εμβαδόν) αξονικό τρίγωνο σε ένα σκαληνό κώνο έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο και αντίστροφα.

Α8. Οι Άραβες παίρνουν την σκυτάλη - Οι μεταφράσεις των *Κωνικών*.

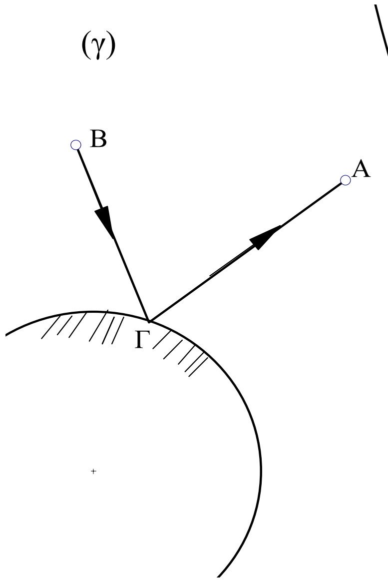
Οι πρώτες μεταφράσεις των *Κωνικών* στα Αραβικά έγιναν από τους Ahmad al-Hasan, Al-Isfahani το 983 μ.Χ. και τον Thabit ibn Qurra (826-901 μ.Χ), οι οποίες πέρα από την ώθηση που έδωσαν στην επιστήμη, συνέβαλαν ώστε να σωθούν τα βιβλία V, VI, VII των *Κωνικών* των οποίων, όπως αναφέραμε, χάθηκε το Ελληνικό πρωτότυπο.

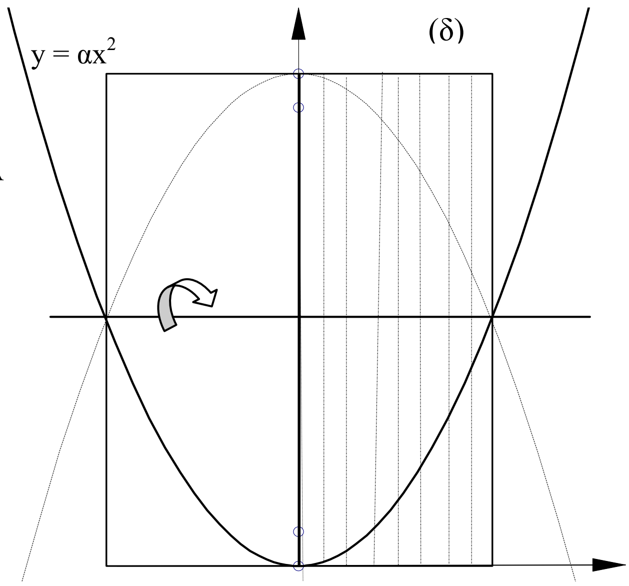
Ο Thabit υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός με ελληνομάθεια που του επέτρεψε να μεταφράσει στα Αραβικά πολλά αρχαία Ελληνικά κείμενα. Σχετικά με τις κωνικές βρήκε το εμβαδόν της έλλειψης ($E = \pi\alpha\beta$) καθώς και το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας που περικλείεται από δυο τομές (Ε1), (Ε2) ενός πλάγιου κυκλικού κυλίνδρου. Οι τομές είναι ελλείψεις και ο Thabit βρήκε ότι η επιφάνεια αυτή είναι ίση με το γινόμενο της απόστασης ΓΔ των κέντρων των δυο ελλείψεων επί την περίμετρο (Κ) της τομής της κυλινδρικής επιφάνειας με ένα επίπεδο κάθετο σ' αυτήν (Σχήμα (α)). Επίσης, χρησιμοποιώντας την μέθοδο εξάντλησης του Αρχιμήδη, βρήκε με διαφορετικό τρόπο από αυτόν του Αρχιμήδη, ότι το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΜΑΛ είναι ίσο με $\frac{2(\mathrm{AB})(\mathrm{M\Lambda})}{3}$ (Σχήμα (β)).





Άλλος σπουδαίος Άραβας φυσικός και μαθηματικός που ασχολήθηκε με θέματα κωνικών τομών ήταν ο Ibn Haitam, γνωστός ως Alhazen (965-1040 μ.Χ). Συνέδεσε το όνομά του με το «Πρόβλημα του Alhazen»:





Αν δοθούν δυο σημεία Α, Β (Σχήμα (γ)) να βρεθεί ένα σημείο Γ πάνω σ' ένα δοθέν κάτοπτρο (κοίλο ή κυρτό) ώστε μια ακτίνα από το Α ανακλώμενη να περάσει από το Β. Το πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολο, ακόμη και για τον κύκλο. Ο Alhazen το έλυσε με την αναγωγή του σε τομή κύκλου και ορθογώνιας υπερβολής. Επίσης, ακολουθώντας την μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη, βρήκε ότι ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από περιστροφή μιας παραβολής περί άξονα κάθετο στον άξονά της, είναι ίσος με τα 8/15 του αντίστοιχου περιγεγραμμένου σ' αυτήν κυλίνδρου (Σχήμα (δ)).

Β. ΟΙ ΚΩΝΙΚΕΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΗ ΑΠΟ ΤΟΝ 16$^{\text{ο}}$ ΑΙΩΝΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑ

Η Δύση μετά από πολλούς αιώνες πνευματικής απραξίας στις θετικές επιστήμες, γνώρισε τις κωνικές τομές και γενικά τα έργα των αρχαίων Ελλήνων, είτε μέσα από τις μεταφράσεις των Ελληνικών πρωτότυπων κειμένων, είτε από τις αραβικές μεταφράσεις των κειμένων αυτών, στην Λατινική γλώσσα.

Ένας από τους πιο σπουδαίους μεταφραστές και εκδότες των κλασικών μαθηματικών χειρογράφων στην Δύση, ήταν ο Γερμανός Αστρονόμος Johannes Muller (ή Regiomontanus) (1436-1476). Μεταξύ άλλων μετάφρασε και εξέδωσε στην Νυρεμβέργη τα έργα του Απολλωνίου και του Αρχιμήδη ([26], σελ. 143).

Το 1501 κυκλοφόρησε στην Βενετία το έργο του George Valla, *De expetendis et fugiendis rebus*, το οποίο είναι ένα είδος εγκυκλοπαίδειας των επτά τεχνών. Στο βιβλίο XIII, Κεφάλαιο III με τίτλο «De conica sectione» υπάρχει μια ιστορική αναδρομή στις κωνικές τομές με αναφορές στους Ευκλείδη, Απολλώνιο και Πάππο καθώς και στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου που λύνεται με αυτές ([10], σελ. 216]. Ένα μέρος του βιβλίου αυτού είναι η λατινική μετάφραση του Ελληνικού κειμένου των *Κωνικών* που έφτασε στην Ιταλία από τον Francois Philephe (1398-1480), γύρω στο 1425, ο οποίος ήταν μαθητής στην Κωνσταντινούπολη και Φλωρεντία του Μανουήλ Χρυσολωρά ([1], τόμος Α΄, σελ. 14). Στην συνέχεια έχουμε την έκδοση του βιβλίου του Johannes Werner (1468-1528), S*uper Vigintiduobus Elementis Conicis*, το 1522 στην Νυρεμβέργη, όπου γίνεται αναφορά στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου με χρήση κωνικών τομών.

Το 1537 δημοσιεύθηκε μια λατινική μετάφραση των τεσσάρων πρώτων βιβλίων των *Κωνικών* του Απολλωνίου (μόνο αυτά ήταν τότε γνωστά) από τον βενετό πατρίκιο G. B. Memo. Η έκδοση έγινε μετά τον θάνατόν του, από τον γιο του που δεν ήξερε Μαθηματικά, με αποτέλεσμα η έκδοση να είναι σχεδόν άχρηστη ([12], τόμος β΄, σελ. 95). Αυτό όμως έδωσε το ερέθισμα σε μεταγενέστερους μαθηματικούς να επιχειρήσουν καλύτερες μεταφράσεις.

Έτσι ο Φραγκίσκος Μαυρόλυκος (1484-1575) θέλησε να ανασυντάξει τα επόμενα δυο βιβλία του Απολλωνίου με βάσει τις πληροφορίες του Πάππου. Ο Μαυρόλυκος γεννήθηκε στην Μεσσήνη της Σικελίας από οικογένεια Κωνστα-

ντινουπολιτών και ήταν σπουδαίος μαθηματικός, αστρονόμος, ποιητής και ιστορικός ([12], τόμος β΄, σελ. 96).
Όταν αργότερα ανακαλύφθηκαν οι Αραβικές μεταφράσεις των δυο αυτών βιβλίων, έγινε φανερό ότι ο Μαυρόλυκος ως προς το βιβλίο V (μέγιστα και ελάχιστα στις κωνικές) είχε μεγάλες διαφορές, ενώ κάπως λιγότερες στο βιβλίο VI (ισότητα και ομοιότητα κωνικών). Από τις μελέτες του στις κωνικές τομές ανακάλυψε ένα νέο τρόπο για την μελέτη τους, να εξετάζει δηλαδή τις καμπύλες αυτές κατ' ευθείαν πάνω στον κώνο. Η μέθοδος αυτή αποτελεί και την πρώτη πρόοδο που έγινε πάνω στις κωνικές τομές από την εποχή του Απολλωνίου ([12], τόμος β΄, σελ. 98).

Ακολουθεί η λατινική μετάφραση των *Κωνικών* του Απολλωνίου από τον Federigo Commandino (Μπολώνια 1566) που περιελάμβανε τα λήμματα του Πάππου και τα σχόλια του Ευτοκίου. Ο Φρειδερίκος Κομμαντίνος (1509-1565) υπήρξε σπουδαία προσωπικότητα της εποχής του. Ανάλωσε την ζωή του σε σχολιασμούς και μεταφράσεις των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών ([12], τόμος Β΄, σελ. 100). Πάντως η πρώτη σπουδαία έκδοση του Ελληνικού κειμένου των 7 βιβλίων των *Κωνικών* έγινε από τον Halley (Οξφόρδη 1710).

Σήμερα το ελληνικό κείμενο των βιβλίων I-IV και τα σχόλια του Ευτοκίου υπάρχουν στην έκδοση του Heiberg (Λειψία 1891-1893) ([12], τόμος γ΄, σελ. 168). Από την έκδοση αυτή είναι η μετάφραση στα Ελληνικά (καθαρεύουσα) και η έκδοση των *Κωνικών*, το 1973, του τελευταίου μεγάλου μελετητή των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών Ευάγγελου Σταμάτη (1898-1990). (Για τον βίο και το έργο του Ευάγγελου Σταμάτη, βλέπε το άρθρο του Γ. Κατσέλη στο τεύχος 26 του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄, 1997-1998, έκδοση Ε.Μ.Ε.).

Τα θέματα των κωνικών τομών και κύρια το έργο του Απολλωνίου, μαζί με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και τα έργα του Αρχιμήδη, κυριαρχούσαν στις μαθηματικές και φυσικές έρευνες και στην διδασκαλία από τον 16^{ο} μέχρι και τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Ιδιαίτερα τον 17^{ο} αιώνα, το ενδιαφέρον για τις κωνικές ήταν μεγάλο στους μαθηματικούς και φυσικούς με συνέπεια να εμφανιστούν νέα αποτελέσματα και νέοι τρόποι μελέτης τους (προβολές, πολικές, μετασχηματισμοί κλπ). Στην συνέχεια η μελέτη και η διδασκαλία των κωνικών τομών στην Ανώτατη Εκπαίδευση παραμερίστηκε, προς όφελος της Παραστατικής και Προβολικής Γεωμετρίας.

Αναφέρουμε κατά χρονολογία γέννησης τους σπουδαιότερους μαθηματικούς και φυσικούς που ασχολήθηκαν λιγότερο ή περισσότερο με τις κωνικές τομές από τον 16^{ο} μέχρι τον 19^{ο} αιώνα και μικρά δείγματα από τα έργα τους.

1. *Galileo Galilei* (1564-1642), Ιταλός.

Περίφημος φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός που συνέδεσε την θεωρία με το πείραμα. Ο Γαλιλαίος, σε σχέση με τις κωνικές τομές απέδειξε ότι η τροχιά ενός βλήματος είναι παραβολή, καθώς και ότι το διάστημα ως συνάρτηση του χρόνου, που διανύει ένα υλικό σημείο που κινείται ελεύθερα σε κεκλιμένο επίπεδο, περιγράφεται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση που αντιστοιχεί σε παραβολή. Επίσης υπέθεσε ότι η καμπύλη που σχηματίζει ένα βαρύ και ομογενές νήμα που κρέμεται σε δυο σημεία είναι παραβολή, όμως ο Huyggens (1629-1695) απέδειξε πειραματικά το 1669 ότι αυτό δεν είναι σωστό και ότι πρόκειται για μια νέα καμπύλη, την οποία ονόμασε αλυσοειδή. Η αλυσοειδής μελετήθηκε κυρίως από τον Jean Bernoulli (1667-1748) το 1691.

2. *Johannes Kepler* (1571-1630), Γερμανός.

Υπήρξε μεγάλος αστρονόμος και στο έργο του *Astronomia Nova* (Νέα Αστρονομία) διατύπωσε τους δυο πρώτους νόμους κίνησης των πλανητών: τον νόμο της *ελλειπτικότητας* των τροχιών τους και τον νόμο της *αναλογίας* των εμβαδών των χωρίων, που διαγράφονται από την επιβατική τους ακτίνα, και των χρόνων περιφοράς τους γύρω από τον ήλιο. Στο έργο του *Harmonica Mundi* (Αρμονία του Κόσμου, 1619) διατυπώνεται ο *τρίτος νόμος*: τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς των πλανητών είναι ανάλογα με τους κύβους των μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών τους. (Η απόδειξη των νόμων αυτών έγινε αργότερα από τον Νεύτωνα). Ήταν ο αυτός που εισήγαγε την λέξη focus (εστία) στις κωνικές τομές ([27], σελ. 15) και προσδιόρισε με προσέγγιση την περίμετρο της έλλειψης με ημιάξονες α, β ως ίση με π(α+β).
Οι νόμοι του Kepler δυνάμωσαν το ενδιαφέρον για τις κωνικές τομές και ήταν ένα ισχυρότατο κίνητρο για να αρχίσει εκ νέου η μελέτη τους.

Κύριο μαθηματικό έργο του Kepler είναι η *Stereometria Doliorum Vinorum* (Στερεομετρία για τα βαρέλια κρασιού) που αποτελεί τη πρώτη εξέλιξη στο σχετικό έργο του Αρχιμήδη *Περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων*. Εκεί μελετώνται τα στερεά σχήματα που δημιουργούνται από την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από μια ευθεία του επιπέδου του ή μιας από τις τρεις κωνικές γύρω από ευθεία παράλληλη προς ένα άξονα της κωνικής. Επίσης υπολογίζει όγκους σχετικών στερεών. Ο Kepler, ενδιαφερόμενος κυρίως για πρακτικούς σκοπούς, δεν ακολουθούσε στις μεθόδους του την, αναγνωρισμένη από τον ίδιο, αυστηρότητα του Αρχιμήδη ([26], σελ. 160).

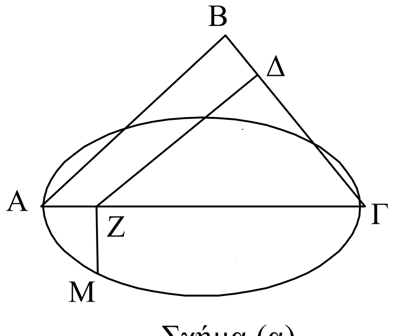
3. *Gregory de Saint Vincent* (1584-1667), Βέλγος.

Το 1647 κυκλοφόρησε το έργο του *Opus quagraturae circuli et sectionum coni* στο οποίο υπάρχει μια πρωτότυπη αναμόρφωση της αρχαίας θεωρίας των κωνικών τομών, ο ορισμός και η μελέτη μιας νέα κατηγορίας καμπυλών τετάρτου βαθμού, οι λεγόμενες *ισχυρές παραβολές*, καθώς και η εισαγωγή μεθόδων μετασχηματισμού επιπέδων σχημάτων ([12], τόμος β΄, σελ. 308). Ας δούμε ένα μετασχηματισμό, όπου ένα τμήμα ΑΓ μετασχηματίζεται σε έλλειψη ([4], σελ. 36-37).

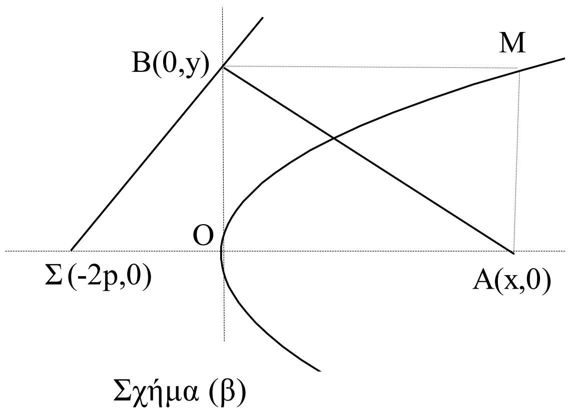
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = β > α = ΒΓ (Σχήμα (α)) και Δ ένα μεταβλητό σημείο της ΒΓ. Φέρνουμε ΔΖ//ΑΒ και ΖΜ κάθετη στην ΑΓ ώστε $ΖΜ^2$ = ΒΔ·ΔΓ. Τότε το σημείο Μ ανήκει σε έλλειψη.
Πράγματι, επειδή ΔΖ//ΑΒ έχουμε,

$$\frac{ΒΔ}{ΑΖ}=\frac{ΔΓ}{ΖΓ}=\frac{ΒΓ}{ΑΓ} \text{ οπότε } \frac{ΒΓ^2}{ΑΓ^2}=\frac{ΒΔ\cdot ΔΓ}{ΑΖ\cdot ΖΓ}=\frac{ΖΜ^2}{ΑΖ\cdot ΖΓ} \text{ , άρα } \frac{ΖΜ^2}{ΑΖ\cdot ΖΓ}=\frac{α^2}{β^2},$$

δηλαδή το σημείο Μ ανήκει σε έλλειψη με μεγάλο άξονα ΑΓ = β και μικρό α = ΒΓ.



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

Δυο άλλους ενδιαφέροντες μετασχηματισμούς γραμμής σε κωνική έχουμε στα παρακάτω προβλήματα.

1. Έστω ένας κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Φέρνουμε από το Α ευθεία που σχηματίζει γωνία 45^{o} με την ΑΒ η οποία τέμνει, την εφαπτομένη του κύκλου στο Β, στο σημείο Γ. Έστω Σ τυχόν σημείο του ΑΒ και η κάθετη στην ΑΒ στο Σ που τέμνει την ΑΓ στο Η και τον κύκλο στο Δ. Πάνω στην ΣΔ παίρνουμε τμήμα ΗΜ = ΣΔ. Τότε προκύπτει ότι $ΗΜ^2$/ΑΗ·ΗΓ = 1/2, δηλαδή το σημείο Μ ανήκει σε μια κωνική. Μάλιστα ο Vincent διαπιστώνει ότι η κωνική αυτή εφάπτεται του κύκλου στο Α, έχει κοινή εφαπτομένη με αυτόν στο Γ και συγχρόνως τέμνει τον κύκλο.

2. Έστω ορθή γωνία ΧΟΥ και μια σταθερή ευθεία ΟΤ. Έστω ακόμη Σ ένα σταθερό σημείο της ΟΤ και Λ ένα μεταβλητό σημείο της ΟΤ. Φέρνουμε ΛΚ και ΣΕ κάθετες στην ΟΧ και παίρνουμε σημείο Μ στην ΛΚ ώστε ΜΕ = ΛΚ. Τότε το Μ ανήκει σε μια κωνική με εστία το Ε και διευθετούσα την ΟΥ.

Ενδιαφέρον είναι και ο τρόπος που κατασκευάζει την παραβολή με παράμετρο p και κορυφή Ο: Από το σημείο Σ(-2p, 0) του άξονα των x (Σχήμα (β)), φέρνει τυχαία ευθεία που τέμνει τον άξονα των y έστω στο σημείο Β(0, y). Στην συνέχεια φέρνει από το Β κάθετη στην ΣΒ που τέμνει τον άξονα των x, έστω στο σημείο Α(x, 0). Τότε οι παράλληλες από τα Α, Β προς τους άξονες τέμνονται στο σημείο Μ το οποίο είναι σημείο της παραβολής, γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΣΒ, με ύψος ΒΟ, έχουμε $ΒΟ^2 = ΣΟ \cdot ΟΑ$ ή $y^2 = 2px$.

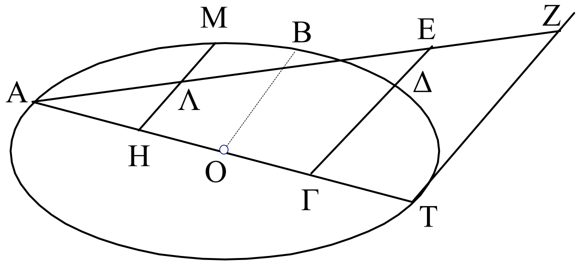
Στον Vincent ακόμη οφείλεται η ανακάλυψη της ιδιότητας της ορθογώνιας υπερβολής (y = 1/x) να περικλείει ίσα εμβαδά μεταξύ των διαστημάτων [α, β] και [λα, λβ], και κατ' επέκταση η ανακάλυψη των φυσικών λογαρίθμων. Επίσης βρήκε ότι η ορθογώνια υπερβολή περικλείει άπειρο εμβαδόν μεταξύ των ασυμπώτων της, ενώ ο όγκος που παράγεται από την περιστροφή της περί τον άξονα των x είναι πεπερασμένος. Ακόμη έδωσε μια νέα απόδειξη της ισότητας δυο τόξων που ανήκουν σε μια παραβολή και μια Αρχιμήδεια έλικα. Από την λέξη «exhaurire» (εξαντλώ) που χρησιμοποιούσε στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, προήλθε η σημερινή ονομασία "method of exhaustion" («μέθοδος της εξάντλησης») του Απειροστικού Λογισμού ([12], σελ. 309).

4. *Claude Mydorge* (1585-1647), Γάλλος.

Έγραψε μια πραγματεία για τις κωνικές τομές το 1631 σε δυο βιβλία (στην δεύτερη έκδοση το 1641 σε τέσσερα), στηριζόμενος στα έργα των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών αλλά έχει κάνει και σημαντικές προσθήκες.

Ας δούμε ένα μικρό δείγμα της εργασίας του Mydorge: Με δεδομένη μια διάμετρο έλλειψης και μια αντίστοιχη τεταγμένη, να κατασκευαστούν διάφορα σημεία της έλλειψης ([4], σελ. 34).
(Λέγοντας αντίστοιχη τεταγμένη εννοεί μια τεταγμένη παράλληλη στην εφαπτομένη στο άκρο της δοσμένης διαμέτρου).
Έστω $ΑΤ = 2α'$ η δοσμένη διάμετρος, $β' = ΟΒ$ αντίστοιχη συζυγής ημιδιάμετρος (δηλαδή με ΟΒ παράλληλη στην εφαπτομένη στο Τ ή στο Α) και ΓΔ η δεδομένη αντίστοιχη τεταγμένη, παράλληλη στην εφαπτομένη στο σημείο Τ. Κατασκευάζουμε κατ' αρχήν ένα σημείο Ε πάνω στην ΓΔ ώστε $ΓΔ^2 = ΓΤ \cdot ΓΕ$. Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην έλλειψη έχουμε $ΓΔ^2 = \frac{β'^2}{α'^2} ΑΓ \cdot ΓΤ$, οπότε

$\Gamma E = \dfrac{\beta'^2}{\alpha'^2} A\Gamma$ (1). Έστω Ζ το σημείο που η ΑΕ τέμνει την εφαπτομένη στο Τ.



Επειδή ΓΔ//ΤΖ έχουμε $\dfrac{TZ}{\Gamma E} = \dfrac{2\alpha'}{A\Gamma}$ (2) και λόγω της (1) παίρνουμε

$$TZ = \Gamma E \frac{2\alpha'}{A\Gamma} = \frac{2\beta'^2}{\alpha'} \quad (3)$$

δηλαδή το ΤΖ είναι η παράμετρος της έλλειψης. Για την εύρεση τώρα διαφόρων σημείων εργαζόμαστε ως εξής: Έστω Η τυχόν σημείο του τμήματος ΑΤ. Φέρνουμε ΗΛ//ΓΔ και παίρνουμε σημείο Μ στην ΗΛ τέτοιο ώστε $HM^2 = TH \cdot H\Lambda$, τότε το Μ είναι σημείο της δοσμένης έλλειψης. Πράγματι, επειδή ΗΛ//ΤΖ έχουμε $\dfrac{H\Lambda}{TZ} = \dfrac{AH}{2\alpha'}$, οπότε, λόγω της (3) έχουμε

$$HM^2 = TH \cdot H\Lambda = TH \cdot TZ \frac{AH}{2\alpha'} = TH \cdot AH \cdot \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} \quad \text{ή} \quad \frac{HM^2}{AH \cdot TH} = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2},$$

άρα το Μ ανήκει στην δοσμένη έλλειψη. Έτσι για κάθε σημείο Η του ΑΤ βρίσκουμε και ένα σημείο του ενός μισού της έλλειψης, οπότε έχουμε και το συμμετρικό του ως προς το Ο.

Γενικά η εργασία του Mydorge αποτελείται από πολλά θεωρήματα, αλλά δεν περιέχει γενικές μεθόδους. Η δουλειά του διαφέρει από αυτήν των Desargues και Pascal που προσπαθούσαν να βγάλουν πολλά αποτελέσματα από ένα θεώρημα. Εκείνο τον καιρό, όπως λέει ο ιστορικός των Μαθηματικών Julian Coolidge, «σκοπός των ασχολουμένων με τις κωνικές ήταν να ξεπεράσουν την αποδεικτική ικανότητα του Απολλωνίου. Συχνά τα κατάφερναν, με την έννοια ότι έβρισκαν κάτι απλούστερο, αλλά σπάνια κατέληγαν σε αποδεικτική δεινότητα που θα μπορούσε να συγκριθεί με αυτήν του Απολλωνίου, π.χ. εκείνη που αφορά την θεωρία των καθέτων στα μέγιστα και ελάχιστα στις κωνικές» ([4], σελ. 35).

5. *Rene Descartes* (Καρτέσιος) (1596-1650).

Με τον Γάλλο φιλόσοφο Καρτέσιο αρχίζει να ραγίζει το φράγμα που έβαζε η γεωμετρία στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Η Άλγεβρα μπαίνει δυναμικά στην υπηρεσία της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα. Το 1637

εκδίδει το μοναδικό μαθηματικό έργο του *La Geometrie* (Γεωμετρία), που έμελλε να συμβάλλει στην δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Δυο ήταν οι μεγάλες συνεισφορές του Καρτέσιου στα Μαθηματικά:
i) Ότι εφάρμοσε με συνέπεια την αναπτυγμένη Άλγεβρα του $16^{ου}$ αιώνα στη Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων με αποτέλεσμα την ανάπτυξη των δυνατοτήτων εφαρμογής της Άλγεβρας, και ii) ότι απέρριψε τους περιορισμούς ομογένειας των προγενεστέρων του. Από τον Καρτέσιο και μετά τα x^2, x^3, xy λογίζονταν πλέον σαν γραμμικά τμήματα ([26], σελ. 166)

Το έργο του *La Geometrie* διαιρείται σε τρία βιβλία. Στο βιβλίο Ι υπάρχουν προβλήματα που λύνονται με κανόνα και διαβήτη καθώς και οι μέθοδοι με τις οποίες ένα γεωμετρικό πρόβλημα μετασχηματίζεται σε αλγεβρικό. Στο βιβλίο ΙΙ χρησιμοποιεί δυο συντεταγμένες και παριστάνει τις καμπύλες με εξισώσεις. Γενικά το συμβολικό σύστημα του Καρτέσιου μοιάζει πολύ με αυτό που χρησιμοποιούμε σήμερα στην άλγεβρα. Πάντως, αν και όπως έγραψε ο Κ. Καραθεοδωρή το 1924 ([23], πρόλογος στον α΄ τόμο), «αι σύγχρονοι μέθοδοι της αναλυτικής γεωμετρίας δεν έχουν παρά ελάχιστα κοινά σημεία μετά της γεωμετρίας του Descartes», η συμβολή του στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα υπήρξε τεράστια.

Ας δούμε, με σύγχρονη απόδοση, ένα μικρό δείγμα από το έργο του Καρτέσιου, που αφορά τον προσεγγιστικό υπολογισμό ριζών (πολυωνυμικών) εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού με την βοήθεια κωνικών ([25], τεύχος 15) σε σύγχρονη απόδοση.

Κατ' αρχήν κάθε εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού, δηλαδή της μορφής
$x^3 + αx^2 + βx + γ = 0$, μπορεί, μέσω της αντικατάστασης $y = x - α/3$, να έρθει στην μορφή

$$y^3 + Ay + B = 0 \quad ή \quad y^4 + Ay^2 + By = 0 \ (y \neq 0).$$

Όμοια η εξίσωση $x^4 + αx^3 + βx^2 + γx + δ = 0$, με την αντικατάσταση $y = x - α/3$, μετατρέπεται στην εξίσωση $y^4 + Ay^2 + By + Γ = 0$.

Άρα κάθε εξίσωση $3^{ου}$ ή $4^{ου}$ βαθμού παίρνει την μορφή

$$x^4 + Ax^2 + Bx + Γ = 0 \ \ (1)$$

Οι ρίζες τώρα της (1) θα βρεθούν προσεγγιστικά ως τετμημένες των σημείων τομής της παραβολής $y = x^2$ και ενός κύκλου $(x - κ)^2 + (y - λ)^2 = R^2$, που θα προσδιοριστεί κατάλληλα.

Αντικαθιστώντας το $y = x^2$ στην εξίσωση $(x - κ)^2 + (y - λ)^2 = R^2$ παίρνουμε

$$x^4 + (1 - 2λ)x^2 - 2κx + κ^2 + λ^2 - R^2 = 0 \ \ (2)$$

Έτσι αν θέσουμε $A = 1 - 2λ$, $B = -2κ$, $Γ = κ^2 + λ^2 - R^2$, υπολογίζουμε

$κ = -\frac{B}{2}$, $λ = \frac{1-A}{2}$, $R^2 = \frac{B^2 + (1-A)^2}{4} - Γ$ και αντί της (1) θα έχουμε να λύσουμε την (2). Αν τώρα ισχύει $B^2 + (1 - A)^2 \geq 4Γ$, η (2) έχει πραγματικές ρίζες και οι ρίζες αυτές αντιστοιχούν στις τετμημένες των σημείων τομής της παραβολής

$y = x^2$ και του κύκλου $\left(x+\frac{B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1-A}{2}\right)^2=\frac{B^2+(1-A)^2}{4}-\Gamma$.

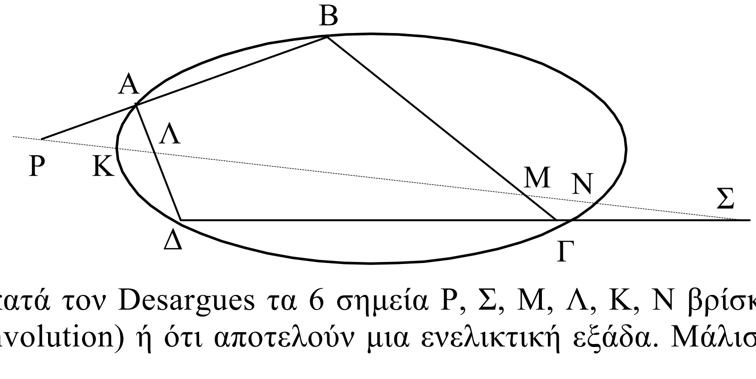
Αν όμως ισχύει $B^2 + (1 - A)^2 < 4\Gamma$ η εξίσωση (1) έχει μόνο μιγαδικές ρίζες και η μέθοδος αποτυγχάνει να τις βρει.

6. *Girard Desargues* (1591-1661), Γάλλος.

Το 1639 δημοσιεύθηκε στο Παρίσι το σπουδαίο έργο του με τίτλο *Brouillon – Projet d' une Atteinte aux Evenemens des Rencontres d' un Cone avec un Plan* (Σχεδίασμα για τα συμβαίνοντα κατά τις συναντήσεις ενός κώνου μ' ένα επίπεδο). Στο έργο του εισάγει νέα ορολογία και αναφέρεται σε θέματα σχετικά με την μέθοδο προοπτικής απεικόνισης αντικειμένων. Το έργο αυτό είχε ξεχαστεί επί πολλά χρόνια, μέχρι που έπεσε στα χέρια του Γάλλου γεωμέτρη Michel Chasles (1793-1890) ένα αντίγραφο της πραγματείας αυτής το οποίο είχε γραφεί από τον μαθητή του Desargues, Philippe de la Hire (1640-1718). Από τότε η συμβολή του αναγνωρίζεται ως μια από τις σπουδαιότερες στην θεμελίωση του νέου κλάδου της συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας, της Γεωμετρίας δηλαδή που είναι απαλλαγμένης μετρικών σχέσεων. Ανακάλυψε διάφορα νέα θεωρήματα στις κωνικές τομές. Εις τον Desargues αποδίδεται και το ομώνυμο θεώρημα των προοπτικών τριγώνων, το οποίο κατέχει κεντρική σημασία, μαζί με το θεώρημα του Πάππου, στην θεμελίωση της Προβολικής Γεωμετρίας.
Επίσης σ' αυτόν αποδίδεται και το θεώρημα της ενέλιξης καθώς και το θεώρημα των έξι 6 σημείων ([4], σελ. 29) το οποίο και αναφέρουμε:

Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο ή σε μια κωνική. Αν μια τυχούσα ευθεία (διατέμνουσα) τέμνει τις απέναντι πλευρές ΑΒ, ΔΓ στα σημεία Ρ, Σ αντίστοιχα, καθώς και τις πλευρές ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Μ, Λ αντίστοιχα, και τον κύκλο στα σημεία Κ, Ν, τότε ισχύει

$$\frac{P M\cdot P\Lambda}{P N\cdot P K}=\frac{\Sigma M\cdot \Sigma\Lambda}{\Sigma N\cdot \Sigma K}$$



Δηλαδή κατά τον Desargues τα 6 σημεία Ρ, Σ, Μ, Λ, Κ, Ν βρίσκονται «εν ενελίξει» (involution) ή ότι αποτελούν μια ενελικτική εξάδα. Μάλιστα η λέξη involution είναι η μοναδική που έμεινε από το νεωτεριστικό λεξιλόγιο που χρησιμοποιούσε ([12], τόμος β΄, σελ. 282).

7. *Pierre de Fermat* (1601-1665), Γάλλος.

Με το έργο του *Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους* (*Ad locos planos et solidos isagoge*) που γράφτηκε πριν το 1637, θεωρείται ισάξιος του Καρτέσιου όσον αφορά την επινόηση της μεθόδου των συντεταγμένων ([12], τόμος β΄, σελ. 256). Πράγματι στην θεωρία του, υιοθετώντας τις αλγεβρικές μεθόδους του Viete, μετέτρεψε ουσιαστικά την Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων σε αλγεβρική μορφή. Ενώ όμως ο Καρτέσιος ξεκινούσε από ένα γεωμετρικό τόπο και έφτανε στην εξίσωσή του, ο Fermat δούλευε αντίστροφα. Έτσι π.χ. ξεκινώντας από την εξίσωση $xy = κ^2$ και χρησιμοποιώντας σιωπηρά θεωρήματα από τα *Κωνικά,* αποδεικνύει ότι παριστάνει υπερβολή. Μετά γενικεύει στην εξίσωση $α^2 + xy = βx + γy$ κλπ. Ο Fermat μαζί με τον Καρτέσιο θεωρούνται οι ιδρυτές της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

8. *Gilles Personnes de Roberval* (1602-1675), Γάλλος.

Υπήρξε μέλος της Ακαδημίας των Παρισίων και ήταν καθαρός γεωμέτρης. Συνέδεσε το όνομα του με την «μέθοδο Roberval» για την κατασκευή εφαπτομένης καμπύλης. Ας σημειωθεί ότι ο Evangelista Torricelli (1608-1647) είχε ανακαλύψει παρόμοια μέθοδο, αλλά μόνο για την παραβολή. Ο Roberval εφάρμοσε την μέθοδό του σ' όλες τις γνωστές τότε καμπύλες (κύκλος παραβολή, έλλειψη, υπερβολή, κογχοειδής, τετραγωνίζουσα και Αρχιμήδεια έλικα, [12], σελ. 312).

9. *John Wallis* (1616 - 1703), Άγγλος

Έγραψε το βιβλίο *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus* (Πραγματεία για τις κωνικές τομές) (1655), το οποίο είναι άμεσα επηρεασμένο από τον Καρτέσιο. Στο πρώτο μέρος οι καμπύλες θεωρούνται στο χώρο με εφαρμογές της αρχής του Cavalieri. Το δεύτερο μέρος του βιβλίου παρουσιάζει ενδιαφέρον αφού οι κωνικές μελετώνται με περιορισμένη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. Ο Wallis στην πραγματικότητα αντικαθιστά με γράμματα τα μήκη του Απολλωνίου και αντί να έχει αναλογίες χειρίζεται εξισώσεις. Τελικά, όπως σημειώνει ο ιστορικός Loria ([12], τόμος β΄, σελ. 335) οι κωνικές τομές του Wallis έχουν μόνο ιστορική αξία την οποία μεγαλώνει το γεγονός ότι για πρώτη φορά εισάγεται το σύμβολο ∞ του απείρου.

10. *Vincenzo Viviani* (1622-1703), Ιταλός,

Ήταν ο τελευταίος μαθητής του Γαλλιλαίου. Ο Viviani, βλέποντας ότι η προσπάθεια του Μαυρόλυκου να αναπαράγει τα υπόλοιπα, εκτός των τεσσάρων πρώτων βιβλίων των *Κωνικών* του Απολλωνίου δεν ήταν καλή, προσπάθησε να τα αναπαραγάγει ο ίδιος. Την εποχή εκείνη ο Καθηγητής του Πανεπιστημίου της Πίζας Gιacommo Alfonso Borelli (1608-1679) βρήκε στην βιβλιοθήκη του μεγάλου δουκάτου της Φλωρεντίας τα βιβλία V,VI,VII του Απολλωνίου στα Αραβικά (το όγδοο δεν υπήρχε) από την αραβική μετάφραση του Al-Isfahani, και τα μετάφρασε στα Λατινικά το 1661 με την βοήθεια του λογίου Abraham Ecchelensis (Αβραάμ του Εχελαίου, από την πόλη της Παλαιστίνης Έχελα). Τελικά φάνηκε ότι το έργο του Viviani είχε περισσότερα ως προς την έκταση (μετά την μελέτη στο επίπεδο μεταβαίνει στο χώρο) αλλά λιγότερα ως προς το βάθος της μελέτης σε σχέση με τα βιβλία V,VI,VII των *Κωνικών* του Απολλωνίου ([12], τόμος β΄, σελ. 199).

11. *Blaise Pascal* (1623- 1662), Γάλλος.

Δημοσίευσε το 1640 ένα φυλλάδιο με τίτλο *Essay poyr les coniques* (Δοκίμιο επί των Κωνικών). Πρόκειται, όπως ο ίδιος αναγνωρίζει, για εφαρμογές σε μεθόδους που είχε επινοήσει ο Desargues. Τα ευνοϊκά σχόλια που δέχτηκε για το έργο του αυτό, τον ενθάρρυναν να το συμπληρώσει και να δημιουργήσει έτσι μια πραγματεία για τις κωνικές τομές, χωρίς όμως να την τελειώσει. Το έργο αυτό, από μια συνοδευτική επιστολή του Leibniz (1676) μαθαίνουμε ότι περιείχε:

1. Γένεση των κωνικών τομών, χορδές και εφαπτόμενες.

II. Μυστικόν εξάγραμμον.

III. Περί των τεσσάρων εφαπτομένων και των ευθειών που ενώνουν τα σημεία επαφής, από όπου προκύπτουν οι ιδιότητες των αρμονικών διαιρέσεων ευθειών.

IV. Προτάσεις μεταξύ τμημάτων οριζομένων από εφαπτόμενες και χορδές.

V. Επαφές κωνικών.

VI. Περί του στερεού τόπου, δηλαδή για το πρόβλημα των τριών ή τεσσάρων ευθειών.

Σύμφωνα με τον Leibniz τα υπόλοιπα κείμενα του Pascal αφορούσαν τον προσδιορισμό μιας κωνικής με δεδομένα μια διάμετρο ή την παράμετρό της και θα έπρεπε σύντομα να δημοσιευθούν, κάτι το οποίο δεν έγινε τελικά.
Έτσι, από το γεωμετρικό αυτό έργο του Pascal, σήμερα υπάρχει μόνο το αρχικό φυλλάδιο που αναφέραμε ([12], τόμος β΄, σελ. 291). Ο Pascal προτιμούσε τις μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και δεν ασχολήθηκε με τις συντεταγμένες του Καρτέσιου και του Fermat.

Συνέδεσε το όνομά του με το θεώρημα Pascal («Μυστικό εξάγραμμο»):

Αν ένα κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ (ή μη κυρτό ΑΓΕΒΖΔ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ή κωνική τομή, και οι απέναντι πλευρές του (ΑΒ, ΔΕ), (ΒΓ, ΕΖ), (ΓΔ, ΖΑ), (αντίστοιχα (ΑΓ, ΒΖ), (ΓΕ, ΖΔ), (ΕΒ, ΔΑ)) τέμνονται, τότε τα σημεία τομής τους είναι συνευθειακά (Σχήμα 1(i)).
Ας δούμε λίγο εκτενέστερα το θέμα αυτό. Το θεώρημα του Pascal εκφράζει την αναγκαία και ικανή σχέση που πρέπει να πληρούν 6 σημεία (που ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά) για να ανήκουν σε μια κωνική, αφού ήταν γνωστό ήδη από τον Απολλώνιο, ότι από 5 σημεία, που δεν βρίσκονται 3 από αυτά στην ίδια ευθεία, διέρχεται μια μόνη κωνική τομή.
Το θεώρημα αυτό είναι γενίκευση του θεωρήματος του Πάππου, που αναφέρεται σε δυο τεμνόμενες ευθείες και τρία σημεία σε κάθε μια, εφόσον οι δυο ευθείες μπορούν να θεωρηθούν, τετριμμένα, ως κωνικές (όταν το επίπεδο τομής περιέχει τον άξονα του κώνου). Το θεώρημα του Pascal χρησιμεύει στη λύση των παρακάτω προβλημάτων ([21], σελ. 273).
Έστω η κωνική τομή η οποία διέρχεται από 5 δοσμένα σημεία:

α. Να κατασκευαστούν διάφορα σημεία της.
β. Να βρεθεί το κέντρο της.
γ. Να βρεθεί η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της .
δ. Να βρεθούν οι άξονές της, κατά θέση και μέγεθος.

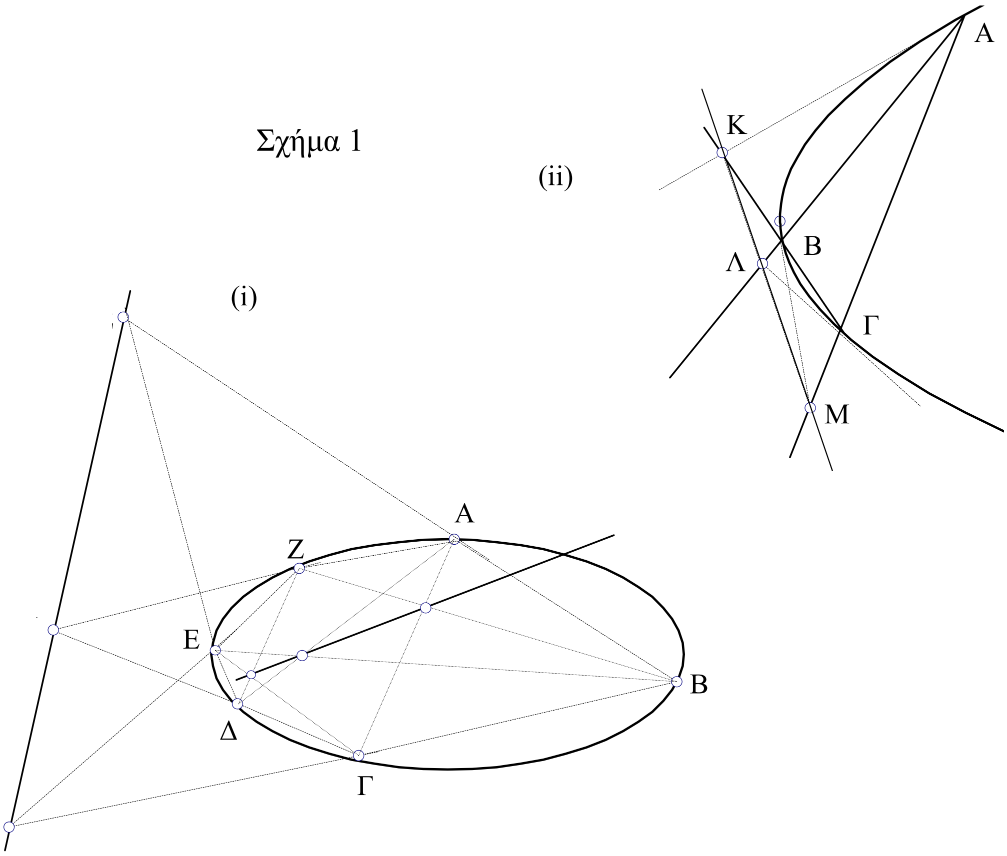
Το θεώρημα του Pascal ισχύει και στις περιπτώσεις που, στα 6 σημεία του, κάποια ζεύγη γειτονικών σημείων συμπίπτουν, οπότε οι αντίστοιχες ευθείες τους θεωρούνται εφαπτομένες της κωνικής. Έτσι έχουμε τα ενδιαφέροντα θεωρήματα:

Α. Αν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κωνική, τότε τα δυο σημεία τομής των απέναντι πλευρών (δηλαδή των ευθειών ΑΒ, ΓΔ, και ΒΓ, ΑΔ) και τα σημεία τομής των εφαπτομένων στις απέναντι κορυφές του (δηλαδή το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία Α, Γ και το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία Β, Δ) είναι συνευθειακά.

Β. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 1(ii)) είναι εγγεγραμμένο σε κωνική, τότε τα σημεία τομής των πλευρών του με τις εφαπτόμενες στις απέναντι κορυφές του είναι σημεία συνευθειακά ([21], σελ. 275).

Γ. Αν τρία σημεία Α, Β, Γ ανήκουν σε μια κωνική, τότε τα σημεία Α, Γ είναι συζυγή αρμονικά των εξής σημείων: το ένα είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Β με την ευθεία ΑΓ και το άλλο είναι το σημείο τομής επίσης της ΑΓ με την ευθεία που διέρχεται από το Β και το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία Α, Γ.

Σχήμα 1



12. *Johan De Witt* (1625-1672).

Ο Johan De Witt ήταν διάσημος Ολλανδός πολιτικός αλλά αγαπούσε πολύ τα μαθηματικά. Το 1659 έγραψε το βιβλίο *Elementa curvarum linearum* (Στοιχεία καμπύλων γραμμών) το οποίο δημοσιεύτηκε από τον F. Van Schooten. Αυτό είναι το μόνο μαθηματικό του έργο, χωρισμένο σε δυο βιβλία και επηρε-ασμένο από τον Καρτέσιο. Το βιβλίο Ι περιέχει μια συνοπτική θεωρία των κωνικών τομών οι οποίες προσεγγίζονται με ένα ασυνήθιστο για την εποχή τρόπο: ως τόποι κινουμένων σημείων. Αυτός ο τρόπος έγινε αργότερα ευρύ-τερα αποδεκτός, μάλιστα ο Νεύτωνας και ο Maclaurin βελτίωσαν την μέθοδο αυτή. Ο Vincent αλλά και ο Descartes είχαν παρόμοιες «κινηματικές» ιδέες αλλά η μέθοδος του De Witt ήταν διαφορετική από αυτούς ([4], σελ. 38). Το βιβλίο Ι αποτελεί ένα προοίμιο για το βιβλίο ΙΙ, όπου μελετώνται οι κωνικές σε σχέση με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις τους ([12], τόμος β΄, σελ. 333).

13. *Philippe de la Hire* (1640-1718), Γάλλος.

Ένας ακόμη μεγάλος συνθετικός γεωμέτρης εμφανίστηκε στον 17^{ο} αιώνα, τον αιώνα τον τόσο πλούσιο σε επιστήμονες με ενδιαφέρον για τις κωνικές τομές. Το 1673 έγραψε ένα έργο σχετικά με τις κωνικές τομές *(Nouvelle methode en geometrie pour les sections et les superficies coniques)* στο οποίο οι καμπύλες αυτές μελετώνται μέσω ενός σημαντικού επίπεδου μετασχηματισμού (ομολογίας) ο οποίος μετατρέπει τον κύκλο σε κωνική.
Έτσι συνάγονται ιδιότητες μιας κωνικής τομής από τις ιδιότητες του κύκλου. Αργότερα ο μετασχηματισμός ομολογία μελετήθηκε και από τον Poncelet ([4], σελ. 41). Επίσης το 1679 δημοσιεύθηκαν τρεις τόμοι με έργα του. Στον πρώτο τόμο μελετώνται οι κωνικές τομές στο επίπεδο με γεωμετρικό τρόπο, με βάση τις εστιακές τους ιδιότητες. Στους άλλους δυο τόμους ασχολείται με γεωμετρικά προβλήματα που οδηγούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ακολουθώντας έτσι τον Descartes, καθώς και με λύσεις εξισώσεων με γραφικές μεθόδους ([12], τόμος β΄, σελ. 337).

Το σπουδαιότερο έργο του La Hire είναι το *Sectiones Conicae* που εκδόθηκε το 1685 και αποτελείται από 9 βιβλία. Το πρώτο περιέχει τον αρμονικό διαχωρισμό ευθείας, την προβολική αναλλοίωτη, την πολική σημείου και σχετικά καλυμμένες τις αρμονικές ιδιότητες του πλήρους τετραπλεύρου και τετρακόρυφου. Στο δεύτερο και τρίτο βιβλίο ο La Hire ασχολείται με τον κώνο, τις Απολλώνιες τομές και τις πολικές ιδιότητες των κωνικών. Το τέταρτο βιβλίο ασχολείται με τις ασύμπτωτες, ενώ το πέμπτο περιέχει μετρικά θεωρήματα για διαμέτρους και παραμέτρους.
Το έκτο διαπραγματεύεται το παλιό θέμα του Απολλωνίου, τις όμοιες κωνικές, ενώ στο 7^{ο} βιβλίο, όπως σημειώνει ο ιστορικός Coolidge, ο de la Hire αναμετριέται άμεσα με τον «μέγα Γεωμέτρη». Βρίσκει πρώτα, όπως αυτός, τα σημεία πάνω στην κωνική που είναι πιο κοντά σε σημεία του άξονα και κατασκευάζει την γενική κάθετο με ορθογώνια υπερβολή.
Στο 8^{ο} βιβλίο υπάρχει το ωραίο θεώρημα: ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται σε μια κωνική είναι ο πρωτεύον κύκλος ή η διευθετούσα αν πρόκειται για παραβολή. Το 9^{ο} βιβλίο περιέχει προβλήματα κατασκευών καθώς και ένα παράρτημα, όπου δείχνει με πόση λεπτομέρεια έχει καλύψει τα αποτελέσματα του Απολλωνίου.

Τελικά, όπως σημειώνει ο Coolidge, μπορούμε να πούμε ότι ο de la Hire έγραψε ένα πολύ καλό βιβλίο, που σε ορισμένα σημεία είναι πιο προωθημένο από τα *Κωνικά* του Απολλωνίου. Η δεξιοτεχνία του στη χρήση της προβολής, της αρμονικής τομής, των πόλων και πολικών αποτελούν σημαντικές προόδους στην Γεωμετρία. Οι παραλείψεις του είναι ελάχιστες, αλλά πολύ χαρακτηριστικές: δεν κάνει καμία αναφορά στο θεώρημα της ενέλιξης του Desargues, ούτε στο πρόβλημα των 4 γραμμών (Απολλώνιος, Πάππος).

Τελικά δεν είναι τόσο πρωτότυπος όσο ο Απολλώνιος, υπολειπόμενος σε πρωτοτυπία και του Desargues ([4], σελ. 44).

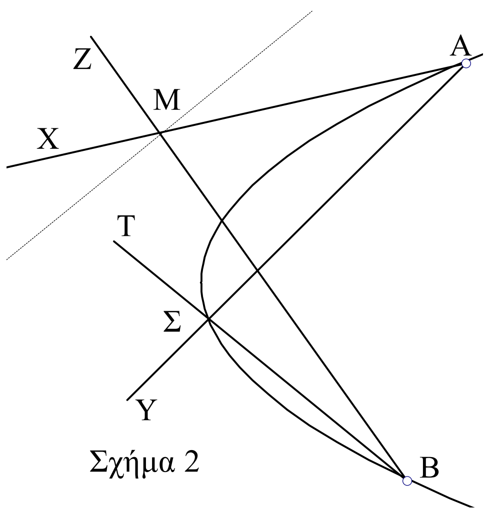
14. *Isaac Newton* (1642-1727), Άγγλος.

Ο Νεύτωνας υπήρξε διάσημος μαθηματικός και φυσικός και μεταξύ των πολλών και ποικίλων θεμάτων που ασχολήθηκε ήταν και οι κωνικές τομές. Ήταν υπέρμαχος των μεθόδων των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών. Στο περίφημο βιβλίο του *Principia* (Αρχές) (1687) ασχολείται μεταξύ των άλλων και με τις κωνικές τομές στα κεφάλαια IV και V. Στο κεφάλαιο IV ασχολείται με την γεωμετρική κατασκευή μιας κωνικής όταν δίνονται οι εστίες της (και ορισμένα άλλα δεδομένα), ενώ στο κεφάλαιο V όταν δίνονται πέντε δεδομένα, σημεία ή εφαπτομένες. Λύνοντας το πρόβλημα κατασκευής κωνικής από 5 δεδομένα σημεία, προσθέτει: «Έτσι δώσαμε λύση στο περίφημο πρόβλημα των τριών ή τεσσάρων ευθειών, που πρώτος άρχισε να μελετά ο Ευκλείδης και έλυσε ο Απολλώνιος, χωρίς την χρήση λογισμού», υπαινιγμός μάλλον για τον Καρτέσιο για τον οποίο λέγεται ότι χρειάσθηκε 6 βδομάδες για να το λύση με την μέθοδο των συντεταγμένων του (12], σελ. 235). Επίσης στον Νεύτωνα οφείλεται η μέθοδος γέννησης κωνικών με περιβάλλουσες ευθείες καθώς και διάφοροι τρόποι γένεσης κωνικών. Σχετική με τις κατασκευές του αυτές είναι και η επόμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

«Αν δυο σταθερές κατά μέτρο γωνίες ΧΑΥ, ΖΒΤ (Σχήμα 2) στέφονται γύρω από τις σταθερές κορυφές των Α, Β, ώστε το σημείο τομής Μ των πλευρών ΑΧ, ΒΖ να κινείται πάνω μια σταθερή ευθεία, τότε η τομή Σ των άλλων πλευρών ΑΥ, ΒΤ γράφει κωνική που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και αντίστροφα: αν το σημείο Σ γράφει κωνική που διέρχεται από τα Α, Β τότε το Μ γράφει ευθεία» (Σχήμα 2).

Μάλιστα έδωσε και μια γενίκευση αυτής της Πρότασης ([12], τόμος β΄, σελ. 384, 387, βλέπε και [20], σελ. 312). Οι κατάσκευές του Νεύτωνα στηρίζονται σε θεωρήματα του Απολλωνίου, στο μεγαλύτερο όμως μέρος τους σε πρωτότυπες δικές του προτάσεις.



Σχήμα 2

15. *De L' Hopital* (1661-1704), Γάλλος.

Ήταν μαθητής του Ιωάννη Bernoulli. Ήταν περισσότερο ένα καλλιεργημένο άτομο, παρά ένας αυτοδύναμος διανοούμενος, που η γνωριμία του με πολλούς μεγάλους επιστήμονες της εποχής του, τον βοήθησε στο έργο του. Για να προπαρασκευάσει τους αναγνώστες του στην κατανόηση του διαφορικού λογισμού (το 1696 είχε γράψει το βιβλίο *Analyse des infiniment petits* (Ανάλυση των Απειροστών)) έγραψε το βιβλίο *Traite analytique des sectionss coniqes* (Αναλυτική πραγματεία των κωνικών τομών) (1707), το οποίο εκδόθηκε πολλές φορές. Στην καρτεσιανή μέθοδο μελέτης που υιοθέτησε, εισήγαγε και άξονες μη ορθογώνιους και για πρώτη φορά τον συμβολισμό +, - για τους άξονες. Επίσης ο de L' Hopital εξετάζει τις κανονικές εξισώσεις των κωνικών τομών και προσπαθεί να βρει κριτήρια αναγνώρισης κάθε καμπύλης από την γενική δευτεροβάθμια εξίσωση, χωρίς όμως να φτάσει στην τελειότητα των σημερινών μας συμπερασμάτων. Το βιβλίο αποτελείται από δέκα κεφάλαια με τους εξής τίτλους: I. Περί της παραβολής. II. Περί της έλλειψης. III. Περί της υπερβολής. IV. Περί των τριών κωνικών τομών. V. Σύγκρισης των τριών κωνικών τομών και των τμημάτων τους. VI. Περί των τριών κωνικών τομών, θεωρουμένων επί στερεού. VII. Περί γεωμετρικών τόπων. VIII. Περί των αορίστων προβλημάτων. IX. Περί της κατακευής των εξισώσεων. X. Περί των ορισμένων προβλημάτων, όπως π.χ. κατασκευή κωνικής όταν δίνεται επαρκής αριθμός σημείων και εφαπτομένων, έρευνα στις κυκλικές τομές κώνου δευτέρου βαθμού, προβλήματα σχετικά με την γέννηση κωνικών κατά Νεύτωνα κ.ά ([12], τόμος β΄, σελ. 443).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η πρόοδος στην Αναλυτική Γεωμετρία ήταν αργή. Ακόμη και το βιβλίο του de L' Hopital ήταν απλά μια μεταγραφή του έργου του Απολλωνίου σε αλγεβρική γλώσσα. Η πρώτη Αναλυτική Γεωμετρία για τις κωνικές τομές που ήταν απόλυτα χειραφετημένη από τον Απολλώνιο, ήταν το έργο του Euler, *Introductio* (Εισαγωγή) που εκδόθηκε το 1748 ([26], σελ. 167).

ΚΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

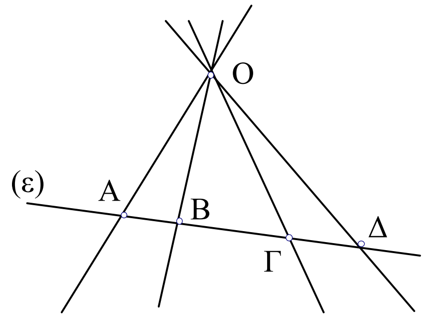
Παράλληλα με την ανάπτυξη της Άλγεβρας τον 17^{o} και 18^{o} αιώνα, έχουμε άνθηση και της Γεωμετρίας. Η άνθηση αυτή έχει τις ρίζες της στην εποχή του Monge και ήταν προς την συνθετική αλλά και την αλγεβρική-αναλυτική κατεύθυνση. Η συνθετική εξελίχθηκε στην Προβολική Γεωμετρία, ενώ η αλγεβρική προς την σύγχρονη Αναλυτική Γεωμετρία. Ας σημειωθεί ότι πολλές προτάσεις από τα έργα του Απολλωνίου και του Πάππου έχουν άμεση σχέση με θέματα της Προβολικής Γεωμετρίας. Η ανάπτυξη της Γεωμετρίας αυτής, με βασικούς μελετητές τους Desargues, Gergonne, Poncelet, Chasles, Steiner και Von Staudt, έδωσε νέα ώθηση στην μελέτη των κωνικών τομών.

Ανακαλύφθηκαν νέες και «βαθιές» ιδιότητες, όπως π.χ. οι λεγόμενες αναρμονικές ιδιότητες των κωνικών. Πριν αναφερθούμε στους κύριους εκπρόσωπους της και σε μερικά από τα θεωρήματά τους, κρίνουμε σκόπιμο να υπενθυμίσουμε μερικούς σχετικούς ορισμούς.

1. Αναρμονικός λόγος τετράδας σημείων.

Έστω τέσσερα (διατεταγμένα) σημεία Α, Β, Γ, Δ σε μια ευθεία (άξονα) (ε). Καλούμε *αναρμονικό λόγο* (ή διπλό λόγο) των σημείων αυτών το λόγο $\frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΔΒ}}{\text{ΓΒ}\cdot\text{ΑΔ}}$ και τον συμβολίζουμε με (ΑΒΓΔ). Με το σύμβολο ΑΓ εννοούμε την αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ (Σχήμα 3).
Αν (ΑΓΒΔ) = -1 τότε λέμε ότι τα σημεία Α, Γ είναι συζυγή αρμονικά των Β, Δ. ή ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ αποτελούν αρμονική τετράδα.

Σχήμα 3



2. Αναρμονικός λόγος τεσσάρων ευθειών.

Έστω μια δέσμη τεσσάρων ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο Ο και μια τυχαία ευθεία (ε) που τις τέμνει στα σημεία Α, Β, Γ, Δ (Σχήμα 3).
Σύμφωνα με ένα Θεώρημα του Πάππου, ο αναρμονικός λόγος (ΑΒΓΔ) είναι σταθερός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την τέμνουσα (ε). Ο λόγος αυτός λέγεται *αναρμονικός λόγος των τεσσάρων ευθειών* ή της δέσμης των ευθειών ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, και συμβολίζεται με (Ο. ΑΒΓΔ).

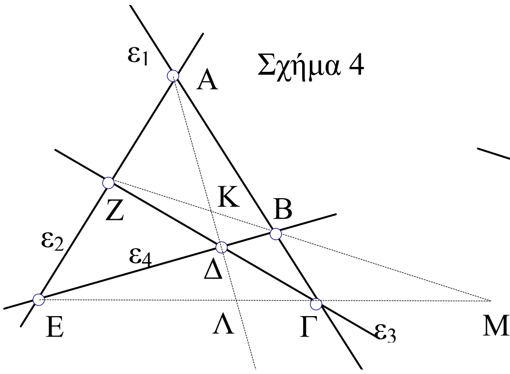
Αποδεικνύεται ότι $(\text{Ο. ΑΒΓΔ}) = \frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΔΒ}}{\text{ΓΒ}\cdot\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ημ}\,\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}\cdot\text{ημ}\,\text{Δ}\hat{\text{Ο}}\text{Β}}{\text{ημ}\,\text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Β}\cdot\text{ημ}\,\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Δ}} = \frac{(\text{ΟΑΓ})(\text{ΟΔΒ})}{(\text{ΟΓΒ})(\text{ΟΑΔ})}$,

όπου (ΟΑΓ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ.

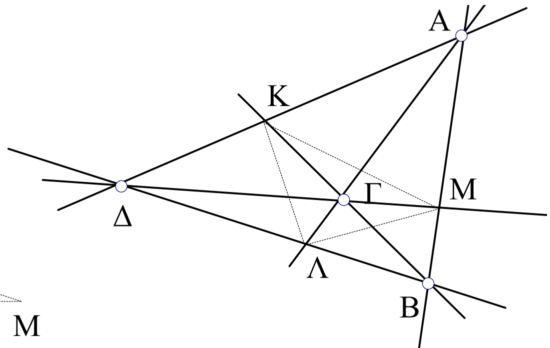
3. Πλήρες τετράπλευρο

Τέσσερις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$ που ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο και κάθε μια τέμνει τις άλλες τρεις, ορίζουν ένα *πλήρες τετράπλευρο*. Τα έξι σημεία τομής τους Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ (Σχήμα 4) λέγονται *κορυφές* του

τετραπλεύρου, ενώ οι ευθείες αποτελούν τις πλευρές του. Δυο κορυφές που δεν βρίσκονται στην ίδια πλευρά λέγονται *αντικείμενες* και μια ευθεία που συνδέει δυο αντικείμενες κορυφές λέγεται *διαγώνιος* του τετραπλεύρου. Οι τρεις διαγώνιοι σχηματίζουν το *διαγώνιο τρίγωνο* ΚΛΜ του πλήρους τετραπλεύρου και κάθε μια τέμνεται από τις άλλες δυο σε σημεία τα οποία είναι συζυγή αρμονικά των άκρων της.
Αν θεωρούμε μόνο τα 4 σημεία τομής των ευθειών ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 με ορισμένη κυκλική διάταξη, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $(\varepsilon_4, \varepsilon_1)$, έστω Α, Ζ, Δ, Β αντίστοιχα, τότε έχουμε το *απλό τετράπλευρο*.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

4. Πλήρες τετρακόρυφο.

Τέσσερα συνεπίπεδα σημεία Α, Β, Γ, Δ που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά (Σχήμα 5) σχηματίζουν ένα *πλήρες τετρακόρυφο*. Τα σημεία αυτά είναι οι *κορυφές* του, ενώ οι έξι ευθείες που τα συνδέουν ανά δυο είναι οι *πλευρές* του. Δυο πλευρές που δεν περνούν από την ίδια κορυφή λέγονται *αντικείμενες*. Οι αντικείμενες πλευρές τεμνόμενες ανά δυο ορίζουν τρία σημεία Κ, Λ, Μ που λέγονται *διαγώνια σημεία* και ορίζουν το *διαγώνιο τρίγωνο* ΚΛΜ.
Αν θεωρούμε μόνο τις τέσσερις ευθείες–πλευρές που ορίζονται από τα 4 σημεία με ορισμένη κυκλική διάταξη ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τότε έχουμε το *απλό τετρακόρυφο.*

Οι δυο ορισμοί είναι δυϊκοί. Το πλήρες τετράπλευρο έχει 4 πλευρές και 6 κορυφές, ενώ το πλήρες τετρακόρυφο 4 κορυφές και 6 πλευρές. Το απλό τετράπλευρο και το απλό τετρακόρυφο είναι ίδια σχήματα, είναι το γνωστό μας (απλό) τετράπλευρο (κυρτό ή μη κυρτό).

5. Πολική Σημείου

Έστω Σ σημείο του επιπέδου μιας κωνικής και μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Σ και τέμνει την κωνική στα σημεία Γ, Δ.

Ονομάζουμε *πολική του σημείου Σ* ως προς την κωνική αυτή, το γεωμετρικό τόπο του σημείου Ρ το οποίο είναι συζυγές αρμονικό του Σ ως προς τα σημεία Γ, Δ. Αποδεικνύεται ότι η πολική του Σ είναι ευθεία και το Σ λέγεται *πόλος* της ευθείας αυτής (Βλ. Σχήμα στην σελ. 114).
Αν το σημείο Σ είναι εκτός της κωνικής και ΣΑ, ΣΒ τα εφαπτόμενα τμήματα προς αυτήν, τότε η ευθεία ΑΒ είναι η πολική του Σ ως προς την κωνική αυτή.
Η θεωρία των πόλων και πολικών είναι ένα ενδιαφέρον κεφάλαιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας και με βάσει αυτή, πολλές ιδιότητες του κύκλου μεταφέρονται στις κωνικές και αντίστροφα (βλέπε π.χ. [14], σελ. 177, [21], σελ. 234-249).

6. Συζυγή σημεία ως προς κωνική.
Είναι δυο σημεία που καθένα ανήκει στην πολική ευθεία του άλλου ως προς την κωνική.

7. Συζυγείς ευθείες ως προς κωνική.
Λέγονται δυο ευθείες όταν ο πόλος κάθε μιας, ως προς την κωνική, ανήκει στην άλλη.

8. Ομογραφία ή προβολικότητα.
Είναι ένας 1-1 μετασχηματισμός του προβολικού επιπέδου και έχει 1 ή 3 σταθερά σημεία. Απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και διατηρεί τον αναρμονικό λόγο.

16. *Joseph-Diaz Gergone* (1771-1859), Γάλλος.

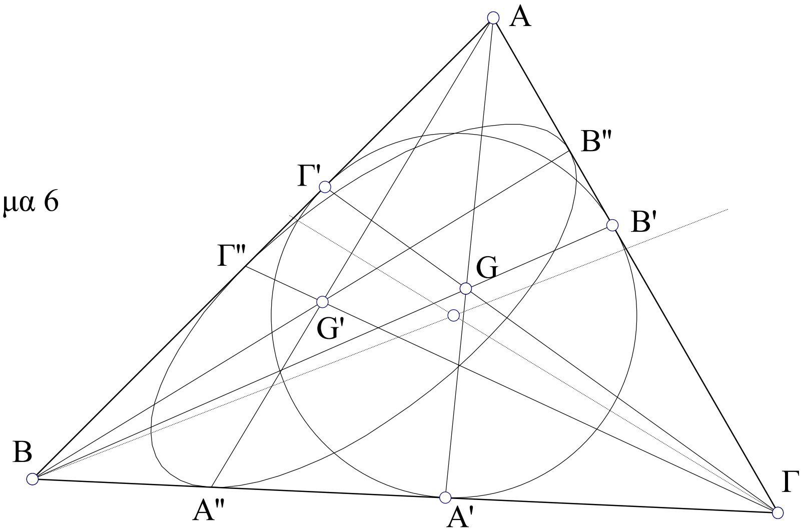
Ο Gergone δημοσίευσε σημαντικές μελέτες στην Προβολική Γεωμετρία. Από τις κύριες συνεισφορές του ήταν η καθιέρωση του όρου «πολική» και της «αρχής του δυϊσμού», ταυτόχρονα με τον Poncelet, στο επίπεδο και στο χώρο ως γενική αρχή. Επίσης έδωσε δυο νέες αποδείξεις στα θεωρήματα Pascal και Brianchon που στηρίζονται στην ιδέα της προβολής κωνικής πάνω σε κύκλο και ανακάλυψε το σπουδαίο θεώρημα:

«Αν έχουμε δυο καμπύλες τάξης p+q και από τα $(p+q)^2$ σημεία τομής τους, τα p(q+p) βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη τάξης p, τότε τα υπόλοιπα q(q+p) σημεία ανήκουν σε μια καμπύλη τάξης q». Από το θεώρημα αυτό προκύπτει το ειδικότερο: «αν ένα 2ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε μια κωνική, τα (υπόλοιπα) ν(ν-2) σημεία τομής των πλευρών του ανήκουν σε μια καμπύλη τάξης ν-2». Για ν = 3 προκύπτει το θεώρημα Pascal ([12], τόμος γ΄, σελ. 264).

Οι μελέτες του δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό *Annales de mathematiques pures et appliqués* (Χρονικά καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών), ([26], σελ. 267). Στους 21 τόμους του πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί δημοσίευσαν άρθρα τους, όπως οι Poncelet, Servois, Bobillier, Steiner, Plócker, Chasles, Brianchon, Dupin, Lame, Galois. Ο ίδιος ο Gergonne δημοσίευσε περίπου 200 άρθρα. Ο Gergonne έδωσε μια κομψή λύση στο πρόβλημα του Απολλωνίου: να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους.

Ο Gergonne συνέδεσε το όνομά του με το λεγόμενο «σημείο Gergonne». Αν έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του εφάπτεται στις πλευρές του στα σημεία Α′, Β′, Γ′, τότε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ (αποδεικνύεται ότι) τέμνονται σε ένα σημείο που λέγεται σημείο Gergonne του τριγώνου ΑΒΓ ή απλά σημείο G.

Σχήμα 6

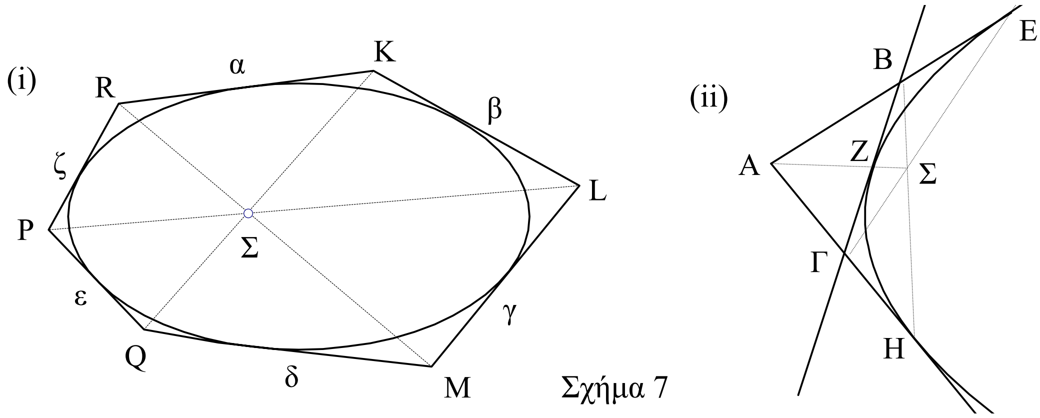


Με το σημείο G ενός τριγώνου συνδέεται και ένα ενδιαφέρον θέμα κωνικών: θεωρούμε μια ομογραφία στο επίπεδο που απεικονίζει τις κορυφές Α, Β, Γ (Σχήμα 6) στον εαυτό τους και το σημείο G σε ένα άλλο (αυθαίρετο) σημείο G′. Τότε η εικόνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, μέσω αυτού του μετασχηματισμού, είναι μια κωνική που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου στα σημεία Α′′, Β′′, Γ′′, στα οποία οι ευθείες που συνδέουν τις κορυφές του τριγώνου με το G′ τέμνουν τις απέναντι πλευρές του. Τα σημεία αυτά είναι οι εικόνες των Α′, Β′, Γ′ αντίστοιχα. Το αντίστροφο του θεωρήματος εκφράζει την *καθολική ιδιότητα του σημείου G*: κάθε κωνική που εφάπτεται στις πλευρές τριγώνου (εγγεγραμμένη) είναι η εικόνα μιας ομογραφίας που αφήνει σταθερές τις κορυφές του τριγώνου και απεικονίζει το σημείο G του τριγώνου σ’ ένα σημείο G′, το οποίο είναι σημείο τομής των ευθειών που ενώνουν τις κορυφές με τα σημεία επαφής των απέναντι πλευρών. (βλ. [29], EUC_Examples /EUC_Transforma-tions/).

17. *Charles-Julien Brianchon* (1783-1864), Γάλλος.

Ο Brianchon, ενώ ήταν φοιτητής το 1806, ανακάλυψε το ομώνυμο θεώρημά του, το οποίο είναι δυϊκό του θεωρήματος Pascal:
Αν τα 6 σημεία του θεωρήματος Pascal θεωρηθούν ως 6 ευθείες α, β, γ, δ, ε, ζ που «ανήκουν» στην κωνική, δηλαδή εφάπτονται αυτής, τότε τα τρία σημεία τομής του θεωρήματος Pascal (που είναι συνευθειακά) «μετατρέπονται» σε τρεις ευθείες που συντρέχουν (Σχήμα 7(i)). Το θεώρημα Brianchon αποδεικνύεται με την θεωρία των *πολικών* ([21], σελ. 275) και χρησιμεύει στην λύση διαφόρων προβλημάτων, όπως π.χ., αν δίνονται 5 εφαπτομένες κωνικής τομής, να βρεθούν διάφορες άλλες εφαπτομένης της. Από το θεώρημα του Brianchon θεωρώντας τις 6 εφαπτομένες να συμπίπτουν ανά δυο, προκύπτει το θεώρημα:

- Αν ένα τρίγωνο είναι περιγεγραμμένο σε κωνική, τότε οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές του με τα σημεία επαφής των εφαπτομένων των απέναντι πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο (Σχήμα 7(ii)).



Σχήμα 7

Ο Brianchon μαζί με τον Gaspard Monge (1746-1818), έγραψαν μια εργασία, που αναφέρεται σε ενδιαφέρουσες ιδιότητες της ορθογώνιας (ισοσκελούς) υπερβολής. Μια από αυτές είναι η εξής: αν μια ισοσκελής υπερβολή είναι περιγεγραμμένη σ' ένα τρίγωνο, τότε το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι σημείο της υπερβολής αυτής. (βλέπε § 6.5, Πρόταση 11(β))

18. *Jean-Victor Poncelet* (1788-1867), Γάλλος.

Εκτός από τις σπουδαίες εργασίες του στην παραστατική γεωμετρία, μέσω του μετασχηματισμού «ομολογία» που όρισε και μελέτησε, ανακάλυψε ενδιαφέρουσες ιδιότητες των κωνικών τομών. Έτσι έδειξε ότι «οι εστίες μιας δευτεροβάθμιας καμπύλης είναι τομές των εφαπτομένων που άγονται προς αυτή από τα *κυκλικά σημεία* (που όρισε ο ίδιος) του επιπέδου της». Επίσης ανακάλυψε ένα σπουδαίο θεώρημα στις κωνικές μέσω του οποίου αποδεικνύεται η ύπαρξη πολυγώνων (πολύγωνα Poncelet) που είναι εγγεγραμμένα σε μια κωνική και περιγεγραμμένα σε μια άλλη ([12], τόμος γ΄, σελ. 268). Ακόμη διατύπωσε το θεώρημα που αναφέρεται στην «κωνική των 11 σημείων». Από το θεώρημα αυτό προκύπτει το περίφημο θεώρημα της *κωνικής των 9 σημείων* του Feuerbach (1800-1834):

«Ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου της ορθογώνιας υπερβολής που διέρχεται από τις κορυφές και το ορθόκεντρο ενός δοσμένου τριγώνου, είναι ένας κύκλος που διέρχεται από τα ίχνη των υψών του, τα μέσα των πλευρών του και τα μέσα των τμημάτων που ενώνουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές του». Τις ιδέες του Poncelet προώθησαν πολλοί Γερμανοί γεωμέτρες όπως, οι Steiner, Mobius, Plucher και Staudt.

19. *Michel Chasles* (1793-1880), Γάλλος.

Ο Chasles υπήρξε μαθητής του Monge και ήταν ο τελευταίος σπουδαίος συνθετικός γεωμέτρης της μεγάλης Γαλλικής σχολής των προβολικών γεωμετρών. Ασχολήθηκε με θέματα της Προβολικής Γεωμετρίας και βοήθησε πολύ στην ανάπτυξή της. Μέσω της θεωρίας των αναρμονικών λόγων και των συζυγών σημείων και ευθειών, ανακάλυψε πολλά νέα θεωρήματα τις κωνικές τομές. Το πλέον σημαντικό είναι το λεγόμενο από μερικούς συγγραφείς,

ΘΕΩΡΗΜΑ Chasles- Steiner

Έστω δυο δέσμες από συνεπίπεδες ευθείες που κάθε μια αποτελείται από 4 ευθείες, οι οποίες βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τους. Αν οι αναρμονικοί λόγοι των δυο δεσμών είναι ίσοι, τότε οι τομές των αντίστοιχων ευθειών είναι σημεία μιας κωνικής που διέρχεται από τα κέντρα των δεσμών.

Το θεώρημα αυτό το ανακάλυψε ο Chasles το 1837, ενώ ο Steiner το είχε δημοσιεύσει το 1832. Όμως ο Chasles το 1828 είχε ανακαλύψει το δυϊκό του ([4], σελ. 56):

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω δυο ευθείες στο ίδιο επίπεδο και τέσσερα σημεία σε κάθε μια ώστε να αντιστοιχούν 1-1 μεταξύ τους. Αν οι αντίστοιχοι αναρμονικοί λόγοι των δυο αυτών τετράδων είναι ίσοι, τότε οι ευθείες που συνδέουν τα αντίστοιχα σημεία είναι εφαπτόμενες σε μια κωνική που εφάπτεται στις δυο δεδομένες ευθείες.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θεώρημα αφορά το πλήρες τετράπλευρο και το απέδειξε με βάση το «θεώρημα ενελίξεως» του Desargues:

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν οι κορυφές ενός πλήρους τετραπλεύρου βρίσκονται σε μια κωνική, τότε ο λόγος του γινομένου των αποστάσεων ενός σημείου της κωνικής από δυο απέναντι πλευρές του, προς το γινόμενο των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις άλλες δυο πλευρές είναι σταθερός.

Το θεώρημα αυτό είναι εν μέρει αντίστροφο του περίφημου αρχαίου προβλήματος, των «τριών ή τεσσάρων ευθειών», για το οποίο όπως είδαμε κάνουν λόγο ο Απολλώνιος και ο Πάππος (βλ. Κεφ. 1, Α6).
Ακόμη ο Chasles συνέδεσε το όνομά του με το λεγόμενο (βλ.[14], σελ. 184)

ΘΕΩΡΗΜΑ Chasles
Αν το τρίγωνο ΑΒΓ και το πολικό του Α′Β′Γ′, ως προς μια κωνική, δεν συμπίπτουν, τότε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται από ένα σημείο Σ , αντίστοιχα τα τρία ζεύγη των πλευρών (ΑΒ, Α′Β′), (ΒΓ Β′Γ′), (ΓΑ, Γ′Α′), τέμνονται πάνω στην πολική του Σ.

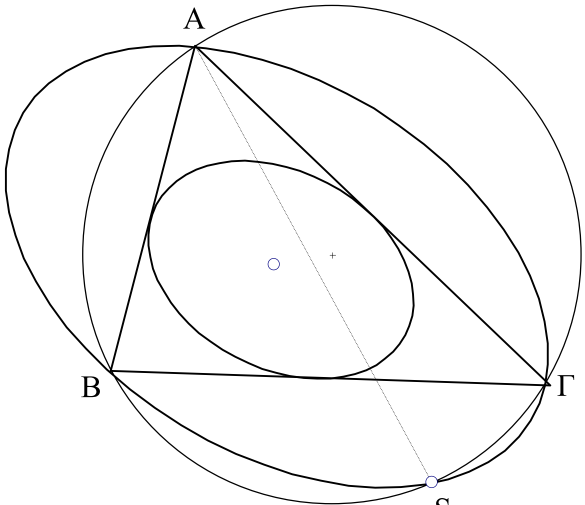
(*Πολικό* ενός τριγώνου ως προς μια κωνική, λέμε το τρίγωνο που έχει πλευρές τις πολικές των κορυφών του ΑΒΓ (και τότε οι κορυφές του είναι οι πόλοι των πλευρών του ΑΒΓ). Αν ένα τρίγωνο συμπίπτει με το πολικό του, ως προς μια κωνική, λέγεται *αυτοπολικό*)

20. *Jacob Steiner* (1796-1863), Γερμανός.

Συνομήλικος σχεδόν του Chasles, όπως και του Von Staudt, ήταν ο μεγάλος Γερμανός και (φανατικά) συνθετικός Γεωμέτρης J. Steiner. Πρόσφερε πολλά στην Προβολική Γεωμετρία και μέσω αυτής στην μελέτη των κωνικών τομών. Μεταξύ άλλων ανακάλυψε την «επιφάνεια του *Steiner*» (ή Ρωμαϊκή επιφάνεια) που έχει πάνω της μια διπλή απειρία κωνικών τομών. Ο *Steiner* θεμελίωσε την Προβολική Γεωμετρία του με απόλυτα συστηματικό τρόπο, περνώντας από την προοπτικότητα στην προβολικότητα και μετά στις κωνικές τομές ([26], σελ. 269). Εκτός από το θεώρημά του που αναφέραμε προηγουμένως (βλ. σελ. 68), ένα άλλο ενδιαφέρον θεώρημά του είναι και το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ
Εάν οι κορυφές δυο τριγώνων βρίσκονται σε μια κωνική τομή, τότε οι πλευρές τους εφάπτονται σε μια κωνική τομή και αντίστροφα.

Με το όνομα του Steiner συνδέονται δυο ελλείψεις και ένα σημείο S. Η μια έλλειψη είναι η περιγεγραμμένη σ' ένα δεδομένο τρίγωνο με το ελάχιστον εμβαδόν (μεταξύ όλων των περιγεγραμμένων ελλείψεων) και η άλλη, η εγγεγραμμένη στο τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν (έξω / έσω έλλειψη του τριγώνου). Και οι δυο έχουν ως κέντρο, το κέντρο βάρους του τριγώνου, είναι ομοιοθετικές μεταξύ τους και η εγγεγραμμένη εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Το *σημείο Steiner*, S, είναι το σημείο της τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με την εξωτερική έλλειψη Steiner (Σχήμα 8).



Σχήμα 8

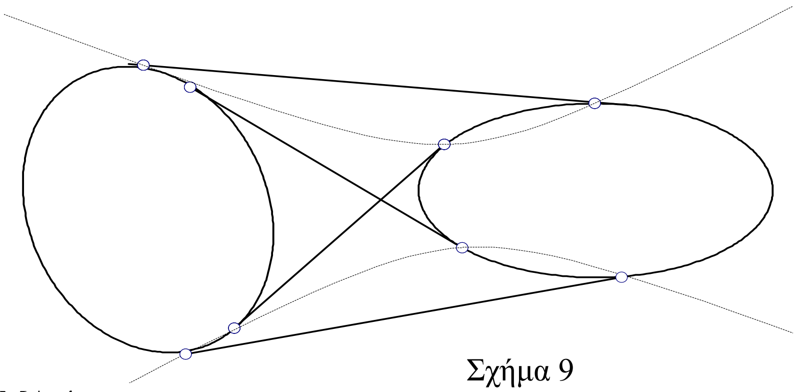
21. *Georg Karl Von Staudt* (1798-1867), Γερμανός.

Ασχολήθηκε σε μεγαλύτερο βάθος με θέματα της Προβολικής Γεωμετρίας και υπήρξε επίλεκτο μέλος της μεγάλης Γερμανικής γεωμετρικής σχολής.
Το έργο του *Geometrie de Lage* (Γεωμετρία της θέσης, 1847) είναι το τελευταίο από τα μεγάλα πρωτοποριακά Γερμανικά έργα της ελεύθερης (από μετρικές σχέσεις) Προβολικής Γεωμετρίας. θεωρείται μαζί με τον Steiner οι εκπρόσωποι της καθαρά συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας, σε αντίθεση με την άλλη κατεύθυνση, την αναλυτική, με αντιπροσώπους τους A. F. Mobius, και J. Plucher. Αναφέρουμε μερικά από τα θεωρήματα του Von Staudt, αλλά όπως σημειώνει ο ιστορικός Coolidge ([4], σελ. 65), ίσως να μην είναι ο πρώτος που τα ανακάλυψε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1
Εάν δυο πλήρη τετρακόρυφα έχουν ίδια διαγώνια σημεία, τότε έχουν ένα ζεύγος κοινών πλευρών είτε οι οκτώ κορυφές τους βρίσκονται σε μια κωνική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2
Αν δυο πλήρη τετράπλευρα έχουν το ίδιο διαγώνιο τρίγωνο, τότε έχουν δυο κοινές πλευρές είτε οι οκτώ πλευρές τους εφάπτονται σε μια κωνική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3
Αν δυο κωνικές έχουν τέσσερις κοινές εφαπτομένες, τα οκτώ σημεία επαφής βρίσκονται σε μια κωνική (Σχήμα 9).



Σχήμα 9

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Αν δυο κωνικές τομές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, οι οκτώ εφαπτομένες τους στα σημεία αυτά εφάπτονται σε μια κωνική.
Η κωνική αυτή λέγεται *κωνική του Salmon*.

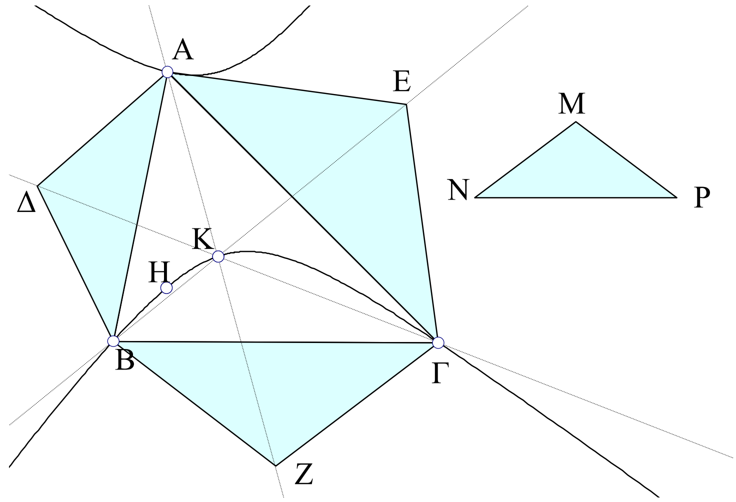
22. *George Salmon* (1819-1904), Ιρλανδός.

Ήταν αλγεβριστής γεωμέτρης και έγραψε πολλά διδακτικά βιβλία Γεωμετρίας που αποτέλεσαν σταθμό στα εκπαίδευση. Όπως λέει χαρακτηριστικά ο ιστορικός D. Stuik ([26], σελ. 284), τα βιβλία αυτά δεν έχουν ξεπεραστεί ούτε και σήμερα. Μεταξύ αυτών και δυο πραγματείες περί κωνικών τομών: *A treatise on conic sections* (1848) και *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections* (1852).

Αξιοσημείωτες κωνικές

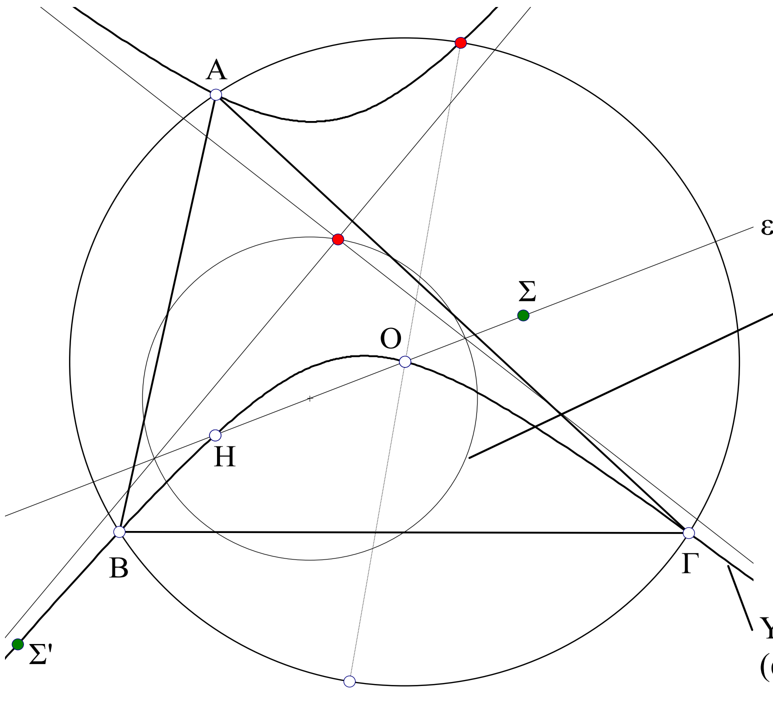
1. Η Υπερβολή του Kiepert (1869).

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα ισοσκελές τρίγωνο MNP (Σχήμα 10). Στις πλευρές του ΑΒΓ σχηματίζουμε ισοσκελή τρίγωνα όμοια με το MNP που οι κορυφές των δεν συμπίπτουν με τις κορυφές του τριγώνου και ομοίως τοποθετημένα. Οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές των ισοσκελών τριγώνων με τις απέναντι κορυφές του τριγώνου αποδεικνύεται ότι τέμνονται σε ένα σημείο Κ. Αν πάρουμε άλλο ισοσκελές τρίγωνο MNP θα βρούμε άλλο σημείο Κ. Έτσι μεταβάλλοντας το MNP παίρνουμε σημεία Κ τα οποία αποδεικνύεται ότι ανήκουν σε μια ορθογώνια υπερβολή, που λέγεται υπερβολή Kiepert του τριγώνου ΑΒΓ. Η υπερβολή αυτή διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και από το ορθόκεντρό του. Μπορεί να προκύψει με αντιστροφή της ευθείας OL (O: κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου, L: σημείο Lemoine του τριγώνου).



Σχήμα 10

Υπερβολή Kiepert
(από το Euclidraw)



Σχήμα 11

Υπερβολή Jerabek
(από το Euclidraw)

2. Η Υπερβολή του Jerabek (1888).

Είναι μια ορθογώνια υπερβολή που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου, το ορθόκεντρο και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του. Επίσης διέρχεται και από το σημείο Lemoine του τριγώνου.

Η υπερβολή Jerabek είναι ο ισογώνιος μετασχηματισμός της ευθείας Euler του τριγώνου. Όταν το σημείο Σ (Σχήμα 11) κινείται πάνω στην ευθεία Euler, το ισογώνιο συζυγές του Σ′ κινείται πάνω στην υπερβολή Jerabek. Το κέντρο της υπερβολής αυτής (και σημείο τομής των ασυμπτώτων της) ανήκει στον κύκλο των εννιά σημείων του Feuerbach (βλ. [28], /EUC_Examples /EUC_Conics).

3. Υπερβολή και Κύκλος των 9 σημείων Feuerbach (1800-1834, Γερμανός).

Η ορθογώνια υπερβολή Feuerbach είναι ο ισογώνιος μετασχηματισμός της ευθείας ΟΙ (Ο, Ι: κέντρο περιγεγραμμένου, εγγεγραμμένου κύκλου). Ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου της ορθογώνιας υπερβολής που διέρχεται από τις κορυφές και το ορθόκεντρο ενός τριγώνου, είναι ο κύκλος των 9 σημείων του τριγώνου (που περνά από τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των τμημάτων που συνδέουν τις κορυφές και το ορθόκεντρο), που είναι γνωστός ως κύκλος του Euler, αλλά πρωτοαναφέρθηκε από τους Brianchon και Poncelet.
Ο Feuerbach απέδειξε ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται στον εγγεγραμμένο και στους 3 παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου. Το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τον κύκλο αυτό λέγεται σημείο F(euerbach) (Σχήμα 11). Το σημείο F είναι το κέντρο της υπερβολής Feuerbach.

Σημείωση: περισσότερα για τις παραπάνω υπερβολές υπάρχουν στο έργο, *Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών*, τόμος ΙΙ, σελ. 580-583, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΡΑΒΙΑ 1952.

4. Πρόβλημα του Castillon (1704-1791, Γερμανός).

Αν δοθεί μια κωνική και τέσσερα (ή περισσότερα) σημεία Α, Β, Γ, Δ του επιπέδου της, να εγγραφεί στην κωνική ένα πολύγωνο του οποίου οι πλευρές να περνούν από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

Γ. ΟΙ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΣΤΗΝ ΝΕΩΤΕΡΗ ΕΛΛΑΔΑ (18ος-19ος αιώνας)

Την Ευρωπαϊκή άνθηση στις θετικές επιστήμες τον 17ο και 18ο αιώνα, ήταν πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να την παρακολουθήσει η Τουρκοκρατουμενη Ελλάδα. Τα μεγαλειώδη έργα των Αρχαίων Ελλήνων δημιουργών, που μόρφωναν, φώτιζαν και διαπαιδαγωγούσαν τους Ευρωπαίους, στην Ελλάδα ήταν σχεδόν άγνωστα και η εκπαίδευση υποτυπώδης, αν όχι ανύπαρκτη. Μικρές και μεμονωμένες οι πνευματικές αναλαμπές στις θετικές επιστήμες στα χρόνια εκείνα (Βλ. [9], [11]).

Με κάποια καθυστέρηση, οι νέες αλλά και οι παλιές γνώσεις στις φυσικομαθηματικές επιστήμες, μέσω φωτισμένων και θαρραλέων πνευματικών ανθρώπων που σπούδασαν στην Ευρώπη, έφτασαν και στην χώρα μας.

Έτσι η Άλγεβρα, η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός, νέες τότε μαθηματικές επιστήμες, έκαναν σιγά σιγά την εμφάνισή τους και στην μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας. Εδώ θα περιοριστούμε στα θέματα των κωνικών τομών και της Αναλυτικής Γεωμετρίας η οποία όπως είδαμε συνδέθηκε στενά με αυτές, από την εποχή της γέννησή της.

I. ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΘΕΟΤΟΚΗΣ

Ο κληρικός και διδάσκαλος του γένους *Νικηφόρος Θεοτόκης* (1731-1800), γεννήθηκε στην Κέρκυρα και σπούδασε στην Ιταλία. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τις κωνικές τομές στην μεταβυζαντινή Ελληνική παιδεία. Συγκεκριμένα, δίδαξε κωνικές τομές στην Κέρκυρα το 1758-59 ([10], σελ. 217). Μάλιστα ήταν ο πρώτος την περίοδο της νεοελληνικής Αναγέννησης που μεταξύ άλλων αναφέρεται στα βιβλία του σε θέματα κωνικών τομών. Έτσι, στοιχεία κωνικών τομών υπάρχουν στον δεύτερο και τρίτο τόμο του έργου του *Στοιχεία Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντα* (Μόσχα 1798-1799) ([8]).

Κατά το μεγαλύτερο μέρος ο δεύτερος τόμος του έργου αυτού αφιερώνεται στις κωνικές τομές, οι οποίες και περιέχονται στις ενότητες: «Κωνικών τομών συμπτώματα τα κυριώτερα», «Περί των της παραβολής συμπτωμάτων», «Περί των της ελλείψεως συμπτωμάτων».

Ο Θεοτόκης στο έργο του αυτό, ακολουθεί τις μεθόδους της αρχαίας Ελληνικής γεωμετρίας, δηλαδή η παρουσίαση έχει καθαρά συνθετικό χαρακτήρα. Πρέπει να χρησιμοποίησε κάποια βιβλιογραφία της εποχής του, την οποία όμως δεν αναφέρει μέσα στο βιβλίο, πέρα από μερικές υποσημειώσεις που αναφέρονται σε εφαρμογές των κωνικών και παραπέμπει σε έργα των Christian Wolff (1679-1754), Gregory de Saint Vincent (1584-1667) και στον Evangelista Toricelli (1608-1674).

Στοιχεία όμως κωνικών τομών υπάρχουν και στον τρίτο τόμο του έργου του Θεοτόκη που αναφέραμε παραπάνω, που περιέχει Άλγεβρα. Εκεί και στο κα΄ κεφάλαιο με τίτλο «Περί της καλουμένης υψηλοτέρας Γεωμετρίας και πρώτον περί των εξισώσεων των εμφαινουσών τας του κώνου τομάς» παράγονται οι εξισώσεις των κωνικών τομών μέσα από διάφορα συστήματα αναφοράς.

Ο Θεοτόκης ορίζει την «Υψηλοτέραν Γεωμετρίαν», δηλαδή την Αναλυτική Γεωμετρία, λέγοντας: «Υψηλοτέραν ειώθασιν καλείν Γεωμετρίαν, την περί των κώνου τομών και άλλων διαλαμβάνουσαν καμπύλων, περί ων ουδέν περιέχει η στοιχειώδης Γεωμετρία, και δι' ών διάφορα επιλύεται προβλήματα, δια των γεωμετρικών στοιχείων μηδαμινώς επιλυόμενα» ([11] σελ. 22).

Στο επόμενο κβ΄ κεφάλαιο με τίτλο «Περί των εν επιπέδω των κωνικών τομών αναγραφής», κατασκευάζονται οι κωνικές καμπύλες και ο Θεοτόκης περιγράφει πρακτικές κατασκευές για την χάραξη των καμπυλών αυτών. Στο επόμενο κεφάλαιο κγ΄ «Περί της μεθόδου του ευθείαν εφαπτομένην άγειν από δοθέντος σημείου της οποιασούν καμπύλης, ής δέδοται η εξίσωσις», βρίσκονται οι εξισώσεις των εφαπτομένων των κωνικών από τις εξισώσεις τους και με την βοήθεια των διαφορικών, δηλαδή εδώ έχουμε για πρώτη φορά την χρησιμοποίηση παραγώγων σε έντυπο της εποχής της Τουρκοκρατίας.

Τέλος και το επόμενο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις κωνικές όπου αναφέρεται στα «Περί γεωμετρικών τόπων, και των δι' αυτών επιλυομένων αορίστων προβλημάτων». Και στο βιβλίο αυτό δεν υπάρχουν σαφείς βιβλιογραφικές αναφορές, εκτός από σχετικές υποσημειώσεις και παραπομπές ([10], σελ. 223). Στο τέλος του Κεφαλαίου υπάρχουν φωτοτυπίες τριών σελίδων από το βιβλίο του Ν. Θεοτόκη.

ΙΙ. ΙΩΣΗΠΟΣ ΜΟΙΣΙΟΔΑΞ

Ο *Ιώσηπος Μοισιόδαξ* (1730-1800) υπήρξε παιδαγωγός και εκπρόπωπος του Ελληνικού διαφωτισμού. Γεννήθηκε στην Τσερναβόντα της Βλαχίας (Ρουμανία) και σπούδασε στην Ιταλία Φιλοσοφία, Μαθηματικά και Φυσική. Υπήρξε διάδοχος του Ν. Θεοτόκη στην Ακαδημία του Ιασίου, όπου και δίδαξε θέματα κωνικών τομών. Μάλιστα έγραψε και σχετικά κείμενα για τις κωνικές τομές στα οποία στήριξε την διδασκαλία του ([10], σελ. 217).
Στην συγγραφή των θεμάτων αυτών ο Μοιδιόδακας χρησιμοποίησε, κατά πάσα πιθανότητα ως βοήθημα το βιβλίο των G. Grandi και O. Cametti, *Σύνοψις των Κωνικών Τομών* (Sectionum Conicarum Synopsic Φλωρεντία 1750).

ΙΙΙ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΑΣΑΝΗΣ

Ο *Σπυρίδων Ασάνης* (1749-1833) γεννήθηκε στην Κεφαλονιά και σπούδασε ιατρική στην Ιταλία. Μετά τον Μοιδιόδακα, ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές και το 1802 μετάφρασε το βιβλίο κωνικών τομών, *Σύνοψις των Κωνικών Τομών, των* G. Grandi και O. Cametti και το 1803 το βιβλίο των κωνικών τομών του Nicolas Louis De la Caille (1713-1762) *Αναλυτική πραγματεία κωνικών τομών* (Tractatus Analyticus de sectionibus Conicis*)*, με γλωσσική επιμέλεια Κ. Μ. Κούμα.

Το βιβλίο *Σύνοψις των Κωνικών Τομών*, κατά το μεγαλύτερο μέρος του είναι μια επιλογή από τα θεωρήματα των τριών πρώτων βιβλίων των Κωνικών του Απολλωνίου. Υπάρχουν πάντως και πολλές προσθήκες όπου χρησιμοποιεί σύγχρονο συμβολισμό, π.χ. δυνάμεις, και εκσυγχρονισμένο ύφος. Πάντως δεν υπάρχει οποιαδήποτε αναφορά στον Απολλώνιο ή σε άλλον αρχαίο Έλληνα γεωμέτρη.

Όσον αφορά το δεύτερο βιβλίο που μετάφρασε ο Σπ. Ασάνης, στην έκδοση του οποίου βοήθησε και ο Κ. Μ. Κούμας, δηλαδή το *Κωνικών τομών αναλυτική πραγματεία* του Αββά Καϊλλέ, αυτό είναι ένα σημαντικό βιβλίο και απότελεί σταθμό στην ιστορία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Στο έργο αυτό οι κωνικές τομές παρουσιάζονται από την σκοπιά της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στο πρώτο κεφάλαιο, «γνώσεις των καμπυλών εν γένει και όπως αναλυτικώς εκτίθενται», εισάγει νέες μεθόδους: χρησιμοποιεί τις ενδιαφέρουσες, μεθόδους της Απειροστικής Γεωμετρίας, που σήμερα έχουν αντικατασταθεί από τις παραγώγους.
Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στο «Περί φύσεως των Κωνικών τομών ήδη εν επιπέδω καταγραφεισών και περί των τας διαμέτρους αυτών αρχοειδεστέρων ιδιωμάτων». Εδώ ορίζει τις κωνικές όχι όπως οι αρχαίοι γεωμέτρες, αλλά όπως κάνουμε εμείς σήμερα, με βάση την διευθετούσα και την εστία. Πάντως στο τέλος του βιβλίου αποδεικνύει, με γεωμετρικό τρόπο, ότι οι κωνικές τομές σύμφωνα με τον αρχαίο τρισδιάστατο ορισμό, είναι οι ίδιες με αυτές που μελετά στο βιβλίο του.

Η συγγραφή-μετάφραση δυο βιβλίων κωνικών, με λίγη χρονική διαφορά, δεν πρέπει να εκπλήσσει αν σκεφτούμε ότι το βιβλίο του Γρανδή είχε τις κωνικές τομές με καθαρά συνθετικό πνεύμα, από την σκοπιά δηλαδή του Απολλωνίου, ενώ το βιβλίο του Καϊλλέ είχε τις κωνικές από την μεριά της τότε σύγχρονης Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Το βιβλίο των κωνικών του Καϊλλέ είναι ουσιαστικά το *πρώτο αυτοδύναμο έργο* Αναλυτικής Γεωμετρίας στον Ελλαδικό χώρο, αν και τα Μαθηματικά του Θεοτόκη περιέχουν επίσης αναλυτική γεωμετρία, αλλά όχι ως αυτοτελές έργο. Οι αποδείξεις παρέμεναν βασικά γεωμετρικές αλλά όπου χρειάζεται η μετάβαση σε όρια, οι αποδείξεις είναι ένα μείγμα γεωμετρίας και απειροστών.

IV. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΥΜΑΣ

Ο διδάσκαλος του Γένους *Κωνσταντίνος Κούμας* (1777-1836) γεννήθηκε στην Λάρισα και υπήρξε μαθητής του Σπ. Ασάνη. Φοίτησε στην σχολή του Πεζάρου στον Τύρναβο και σπούδασε Μαθηματικά στην Βιέννη. Δίδαξε Μαθηματικά και θέματα των κωνικών τομών, στην Λάρισσα και στην περίφημη σχολή Αμπελακίων. Ο Κούμας συνεργάστηκε όπως αναφέραμε, με τον Ασάνη στην έκδοση της *Αναλυτικής Πραγματείας* του Καϊλλέ για τις κωνικές τομές, αλλά επεξεργάστηκε ξανά τα θέματα των κωνικών τομών και τα συμπεριέλαβε στον τρίτο τόμο του έργου του, *Σειρά στοιχειώδης των Μαθηματικών και Φυσικών Πραγματειών* (8 τόμοι, Βιέννη 1807) και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο «Υψηλοτέρας Γεωμετρίας ή περί καμπυλών γραμμών». Το έργο αυτό είναι το σπουδαιότερο και το πιο πλήρες από όλα τα προηγούμενα και αποτελεί σταθμό στην Ελληνική βιβλιογραφία.

Ο ορισμός των κωνικών γίνεται όπως στον Απολλώνιο, δηλαδή τις θεωρεί ως τρισδιάστατες τομές, και στην συνέχεια αποδεικνύει την χαρακτηριστική ιδιότητα του σταθερού λόγου - από την εστία και την διευθετούσα- την οποία χρησιμοποιεί στην συνέχεια για την απόδειξη πολλών ιδιοτήτων των κωνικών. Γενικά πάντως η παρουσίαση και οι μέθοδοι του μοιάζουν πολύ με τις δικές μας. Στο τέλος του Κεφαλαίου υπάρχουν φωτοτυπίες μερικών σελίδων από τα έργα του Κ. Κούμα.

Εκτός από τους παραπάνω λογίους, κωνικές τομές φαίνεται να δίδαξαν στις αρχές του 19ου αιώνα ο *Δωρόθερος Πρώϊος* (περίπου 1765-1821) και ο *Βενιαμίν Λέσβιος* (1762-1824). Τέλος πρέπει να συμπεριλάβουμε και τον *Θεόφιλο Καΐρη* (1784-1853), γιατί υπάρχει η ένδειξη ότι τα μαθήματά του περιείχαν και στοιχεία κωνικών τομών ([10], σελ. 220).

Δ. ΒΙΒΛΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΤΟΝ 19ο ΑΙΩΝΑ

Παρ' όλη την μεγάλη μαθηματική εκδοτική δραστηριότητα στην χώρα μας τον αιώνα αυτό (Βλ. Α. Πούλου: *Ελληνική Μαθηματική Βιβλιογραφία* (1500-1900), Έκδοση Ε.Μ.Ε 1988), λαμβανομένων υπόψη και των κοινωνικοοικονομικών συνθηκών, στην Αναλυτική Γεωμετρία και τις κωνικές τομές δυο είναι τα σημαντικά βιβλία που εξεδόθησαν.

1. ΜΙΧΑΗΛ ΣΟΦΙΑΝΟΥ, Αντισυνταγματάρχου Πυροβολικού και Καθηγητή στην Σχολή Ευελπίδων, Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1857.

Το βιβλίο αρχίζει με την λύση μερικών γεωμετρικών προβλημάτων, κυρίως κατασκευών, που λύνονται με την βοήθεια της Άλγεβρας. Στην συνέχεια προχωρεί στην εξίσωση της ευθείας και του κύκλου. Αξιοσημείωτη διδακτική νύξη, είναι ότι βρίσκει την εξίσωση του κύκλου και ως προς ένα άλλο σύστημα, που δεν έχει αρχή το κέντρο του κύκλου, για να δείξει ότι «πρέπει να προσέχωμεν όταν ζητάμεν την εξίσωση καμπύλης, να εκλέγωμεν σύστημα αξόνων τοιούτον, οίον δίδει χώραν εις όσον ένεστιν απλούστερους λογαριασμούς, και προς ό η εξίσωσις της καμπύλης παρουσιάζεται υπό μορφήν όσον ένεστι καταλληλοτέραν προς το δηλώσαι το σχήμα και τας ιδιότητας αυτής» ([23], σελ. 47).

Οι καμπύλες παραβολή, έλλειψη και υπερβολή ορίζονται αλγεβρικά ως μερικές περιπτώσεις, από τη μελέτη της δευτεροβάθμιας εξίσωσης,

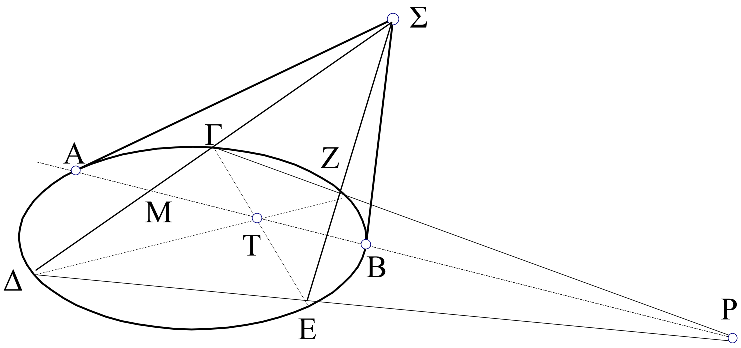
$$Αx^2 + Βxy + Γy^2 + Δx + Εy + Ζ = 0$$

Επίσης με την αλγεβρική μέθοδο αποδεικνύονται μερικές βασικές ιδιότητες των καμπυλών αυτών. Το βιβλίο ασχολείται και με τον τετραγωνισμό της ισοσκελούς υπερβολής που οδηγεί στους φυσικούς λογαρίθμους. Ακόμη θεωρούνται οι τομές κώνου με επίπεδο και εξάγεται για κάθε μια η εξίσωση από την οποία αναγνωρίζεται, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ότι πρόκειται για παραβολή, έλλειψη και υπερβολή. Το υπόλοιπο μέρος του βιβλίου αναφέρεται στην Αναλυτική Γεωμετρία του χώρου. Δεν υπάρχουν βιβλιογραφικές ή ιστορικές αναφορές.

2. ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΗΔΑΚΗ, Καθηγητή των Ανωτέρων Μαθηματικών εν τω Σχολείω των Ευελπίδων και υφηγητού του Πανεπιστημίου: Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία, Εν Αθήναις 1879.

Ο Ι. Χατζηδάκης καταγόταν από το χωριό Μύρθιο της επαρχίας Αγ. Βασιλείου Ρεθύμνου και υπήρξε διακεκριμένος μαθηματικός και πολυγραφότατος συγγραφέας της δευτεροβάθμιας και ανώτατης εκπαίδευσης. Το έργο του αυτό το χωρίζει σε 4 μέρη (βιβλία) και περιέχει την στοιχειώδη και ανώτερη Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου,. Το 1880 κυκλοφόρησε και το συνεχόμενο βιβλίο του *Στερεά Αναλυτική Γεωμετρία.* Το βιβλίο διακρίνεται για τον πλούτο των θεμάτων και των εννοιών που περιέχει, (ορισμένες μάλιστα είναι σήμερα σχεδόν άγνωστες ακόμη και στο ευρύ Μαθηματικό κοινό), καθώς και για την τάση αλγεβρικής γενίκευσης των ιδιοτήτων των καμπυλών και των προβλημάτων. Οι κωνικές τομές μελετώνται σε βάθος με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αφού προηγουμένως γίνει η μελέτη της γενικής αλγεβρικής εξίσωσης 2^{ου} βαθμού. Οι ορισμοί των κωνικών δίνονται μέσω του αθροίσματος και σταθερής διαφοράς και της παραβολής μέσω εστίας και διευθετούσας. Μετά δίνεται η κοινή ιδιότητα των κωνικών τομών που αναφέρεται στον λόγο από σημείο και διευθετούσα. Τέλος μελετώνται οι τομές ενός κώνου, θέματα προβολών καθώς και προβλήματα κατασκευής κωνικών τομών. Με την θεωρία των αναρμονικών λόγων και πολικών διατυπώνονται πολλά θεωρήματα στις κωνικές.

Ας δούμε π.χ. το επόμενο θεώρημα (που αποδίδεται στον Desargues):
Έστω μια κωνική, ένα σημείο Σ εκτός αυτής και τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ. Μια τυχαία ευθεία διέρχεται από το Σ και τέμνει την κωνική στα σημεία Γ, Δ. Τότε ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ που είναι συζυγές αρμονικό του Σ ως προς τα Γ, Δ είναι το τμήμα ΑΒ. Επίσης η ευθεία ΑΒ (πολική του Σ) συνδέει τα δυο διαγώνια σημεία Ρ, Τ κάθε πλήρους τετρακόρυφου του οποίου το άλλο διαγώνιο σημείο είναι το Σ.



Επίσης υπάρχουν (σελ. 313) και τα δυο βασικά θεωρήματα που αναφέρονται στις αναρμονικές ιδιότητες των κωνικών:

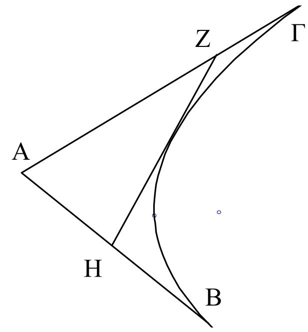
ΘΕΩΡΗΜΑ 1

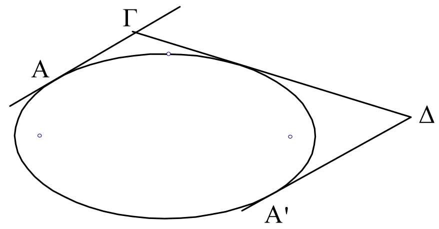
Έστω τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ σε μια κωνική τομή. Αν Μ τυχαίο σημείο της κωνικής, τότε ο αναρμονικός λόγος (Μ. ΑΒΓΔ) είναι σταθερός.
Ο σταθερός αυτός λόγος λέγεται αναρμονικός λόγος των τεσσάρων σημείων της κωνικής .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω τέσσερις εφαπτομένες μιας κωνικής τομής. Αν μια τυχαία εφαπτομένη της κωνικής τέμνει τις ευθείες αυτές, τότε ο αναρμονικός λόγος των τεσσάρων σημείων τομής είναι σταθερός.

Ο σταθερός αυτός λόγος λέγεται αναρμονικός λόγος των τεσσάρων εφαπτομένων της κωνικής. Αποδεικνύεται ότι αναρμονικός λόγος τεσσάρων σημείων δεδομένης κωνικής είναι ίσος με τον αναρμονικό λόγο των εφαπτομένων στα σημεία αυτά της κωνικής.
Από αυτά τα θεωρήματα προκύπτουν πολλά άλλα ως ειδικές περιπτώσεις. Έτσι έχουμε π.χ.:
1. Αν Α, Β είναι δυο σταθερά σημεία μιας υπερβολής και Σ τυχόν σημείο της, τότε οι ευθείες ΣΑ, ΣΒ ορίζουν πάνω στην ασύμπτωτη τμήμα σταθερού μήκους.
2. Αν τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΓ, ΑΒ μιας παραβολής τέμνονται από μια εφαπτομένη της στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα τότε ισχύει ΑΖ·ΑΗ = ΖΓ·ΗΒ.
3. Αν δυο παράλληλες εφαπτομένες κωνικής στα (σταθερά) σημεία της Α, Α′ τέμνουν μια τυχούσα εφαπτομένη της κωνικής στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα, τότε το γινόμενο ΑΓ·Α′Δ είναι σταθερό (σελ. 317).





Επίσης υπάρχουν τα θεωρήματα Pascal και Brianchon.

Στο βιβλίο δεν υπάρχουν ιστορικά στοιχεία, εκτός από μια αναφορά στον Πάππο για τον αναρμονικό λόγο και στον Αρχιμήδη για τον τετραγωνισμό της παραβολής, ούτε γίνεται καμία αναφορά στον Απολλώνιο ή σε άλλους αρχαίους ή νέους Γεωμέτρες, ενώ είναι φανερή η επίδρασή τους τουλάχιστον στις ιδιότητες των κωνικών τομών. Επίσης δεν υπάρχει σχετική βιβλιογραφία. Το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε ως βοήθημα πανεπιστημιακής διδασκαλίας καθώς και σε στρατιωτικές σχολές.

Ε. ΒΙΒΛΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΤΟΝ 20^{ο} ΑΙΩΝΑ

Ο αιώνας αυτός υπήρξε πλούσιος σε εκδόσεις σημαντικών βιβλίων που περιείχαν κωνικές τομές, κυρίως Πανεπιστημιακών, αλλά σ' όλα σχεδόν η μελέτη γινόταν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι κωνικές τομές διδάχθηκαν συστηματικά, στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μόνο την τελευταία εικοσαετία του αιώνα αυτού.

1. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ, τακτικού καθηγητού της ανωτέρας αναλύσεως εν τω Εθνικώ Πανεπιστημίω και εν των Εθνικώ Μ. Πολυτεχείο.
   Εγχειρίδιον Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1919 (Ανατύπωσις 1965).

Στο λιτό αλλά μεστό αυτό βιβλίο, περιέχονται βασικά στοιχεία από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει κατ' αρχήν ο σύντομος πρόλογος του βιβλίου, με σαφείς συγγραφικές και διδακτικές νύξεις, σπάνιες για την εποχή εκείνη:

«Σπάνια είναι εν τω κόσμω τα εγχειρίδια της Αναλυτικής Γεωμετρίας τα εκθέτοντα τας αρχάς και μεθόδους αυτής δια τρόπου συντόμου, σαφούς και ευλήπτου, απηλλαγμένου πολυπλόκων περιπτώσεων ενοχλουσών την διαύγειαν των ιδεών, χωρίς να παραβλάπτεται ποσώς η γενικότης και η τελεία επιστημονική ακρίβεια, ήτις τουναντίον, καθίσταται εν απλότητι περίβλεπτος και καθαρά…Δια λόγους παιδαγωγικούς και διδακτικής σκοπιμότητας απόσκοπούντας την καλιέργειαν της αυτενέργειας άνευ της οποίας η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι άκαρπος και άγονος, πολλά θέματα τίθενται ως ασκήσεις και όχι, ως είθισται, εν τοις κεφαλαίοις της διδακτέας ύλης».

Οι ορισμοί των κωνικών δίνονται μέσω των εστιακών ιδιοτήτων τους και μελετώνται οι βασικές ιδιότητές τους με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην συνέχεια γίνεται η μελέτη της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξαγωγή της εξίσωσης της έλλειψης και της υπερβολής μέσω ισοδυναμιών από τον ορισμό τους ([19], σελ. 69).
Συγκεκριμένα: Έστω 2α το σταθερό άθροισμα της έλλειψης και $2\gamma < 2\alpha$ η εστιακή απόσταση. Αν $M(x, y)$ σημείο της έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ είναι

$$EM + E'M = 2\alpha \quad (1).$$

Επειδή $$EM^2 = (x - \gamma)^2 + y^2,\ E'M^2 = (x + \gamma)^2 + y^2\ ,\quad (2)$$
αποδεικνύει ότι η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$EM = \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha},\ E'M = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \qquad (3)$$

Λόγω των (2), το σύστημα (3) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$(x + \gamma)^2 + y^2 = \left(\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2,\ (x - \gamma)^2 + y^2 = \left(\alpha - \frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2 \quad (4)$$

Το σύστημα (4) μετά την εκτέλεση των πράξεων είναι ισοδύναμο (οι εξισώσεις του ταυτίζονται), με την εξίσωση

$$x^2 + \gamma^2 + y^2 = \alpha^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2}, \qquad (5)$$

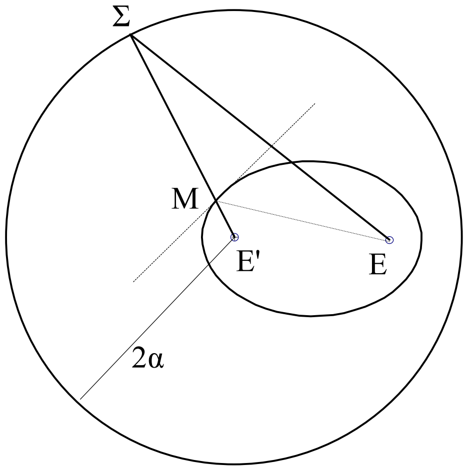
Έτσι η (1) είναι τελικά ισοδύναμη με την (5) , η οποία εύκολα γράφεται στην γνωστή κανονική εξίσωση της έλλειψης αν λάβουμε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$. Ας σημειωθεί ότι ο τρόπος αυτός υπάρχει και στο παραπάνω βιβλίο του Ι. Χατζηδάκη που αναφέραμε, αλλά η εξίσωσης της έλλειψης δεν παράγεται ισοδύναμα από τον ορισμό της ([21], σελ. 164).

Δεν γίνεται αναφορά ή σύνδεση των καμπυλών παραβολής, έλλειψης και υπερβολής με τις τομές κώνου και απουσιάζουν εντελώς οι ιστορικές και βιβλιογραφικές αναφορές.

2. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Β. ΓΕΝΝΗΜΑΤΑ, Τακτικού Καθηγητού του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, «Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία», Τεύχος Α΄, Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου, Αθήναι 1924.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι συντεταγμένες ευθύγραμμες και πολικές, καθώς και ο μερικός και διπλός λόγος σημείων σημειοσειράς. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο εξετάζονται θέματα της κλασικής Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου (συντεταγμένες, ευθεία, κύκλος κλπ). Στο τέταρτο εισάγονται οι κωνικές τομές μέσω των εστιών και του σταθερού αθροίσματος για την έλλειψη, της σταθερής διαφοράς της υπερβολής και της ισότητας από εστία και διευθετούσα στην παραβολή.

Μεγάλο βάρος δίνεται στις μεθόδους χάραξης κωνικών τομών. Ας δούμε για παράδειγμα ένα τρόπο κατασκευής της έλλειψης όταν δίνονται δυο σημεία Ε′, Ε ως εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Έστω Ε′Ε = 2γ η εστιακή απόσταση. Με κέντρο το σημείο Ε′ και ακτίνα 2α γράφουμε κύκλο (εντός του οποίου βρίσκεται η άλλη εστία, λόγω της 2α > 2γ). Θεωρούμε τυχόν σημείο Σ του κύκλου αυτού και την μεσοκάθετη του τμήματος ΣΕ που τέμνει την ΣΕ′ στο σημείο Μ. Το σημείο Μ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι της έλλειψης με μεγάλο άξονα 2α και εστιακή απόσταση 2γ. Αν ξεκινήσουμε με το σημείο Ε αντί του Ε′ προκύπτει η ίδια έλλειψη. Εντελώς όμοια γίνεται και η χάραξη της υπερβολής, αλλά εδώ η εστία Ε βρίσκεται εκτός του κύκλου κέντρου Ε′ και ακτίνας 2α, λόγω 2α < 2γ.



Επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει το θέμα των *δεσμικών εξισώσεων* κωνικών τομών. Ας δούμε συνοπτικά τις δεσμικές εξισώσεις της υπερβολής: Τα σημεία της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία τομής των ευθειών

(1) $y = \mu(x - \alpha)$, (2) $y=\frac{\beta^2}{\mu\alpha^2}(x+\alpha)$, όπου η παράμετρος $\mu \in R$ και για

$\mu = 0$ δεχόμαστε $x = -\alpha$, $y = 0$, ενώ για $\mu = \infty$, $x = \alpha$, $y = 0$.

Η (1), όπως και η (2), παριστάνει μια δέσμη ευθειών που διέρχονται από τα σημεία Α(α, 0), Α(-α, 0) αντίστοιχα, δηλαδή τις κορυφές της υπερβολής. Έτσι διατυπώνεται η πρόταση :

Η υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής δυο αντίστοιχων ευθειών (δηλαδή ευθειών που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της παραμέτρου μ) των δεσμών (1), (2). Η πρόταση γενικεύεται στην συνέχεια για τυχούσα διάμετρο της υπερβολής (αντί του κυρίου της άξονα).

Ανάλογες προτάσεις διατυπώνονται και για την έλλειψη και παραβολή και χρησιμοποιούνται στην συνέχεια σε προβλήματα κατασκευών. Ας σημειωθεί ότι, όπως δηλώνει ο συγγραφέας στον πρόλογο του βιβλίου, από το 1918 η διδασκαλία του στο Πολυτεχνείο πάνω στις κωνικές τομές είχε θεμελιωθεί πάνω στις *δεσμικές* τους εξισώσεις. Έτσι «επέτυχον σημαντικήν απλούστευσιν και πληρεστέραν εν τοις καθέκαστα συνοχήν της εν λόγω θεωρίας, αχθείς εκ παραλλήλου εις σειράν νέων κατασκευών, εις ας πλήν της άλλης χρησιμότητος ο σπουδαστής θα εύρη την ευκαιρίαν προπονήσεως εις τον Γραφικόν λογισμόν, εξαιρετικού ενδιαφέροντος μάθημα δια τον μέλλοντα Μηχανικόν..»

Αξιοσημείωτη είναι η πρόταση της σελίδας 143, (γνωστή από παλαιότερα), σύμφωνα με την οποία η παραβολή μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση έλλειψης ή υπερβολής. Επίσης δίνονται οι «νέοι», ισοδύναμοι, ορισμοί των κωνικών τομών οι σχετικοί με την εστία και την διευθετούσα.

Το βιβλίο κλείνει με την διερεύνηση των καμπυλών δευτέρου βαθμού και με τα θεωρήματα Pascal και Brianchon στις κωνικές τομές. Δεν αναφέρονται ιστορικά στοιχεία σχετικά με τις κωνικές τομές ούτε σχετική βιβλιογραφία.

3. ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΑΡΙΟΥ, Τακτικού Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας τόμος Α΄, Β΄, Αθήνα 1935.

Το βιβλίο κυκλοφόρησε στην πρώτη του έκδοση το 1924 με ένα ενδιαφέροντα πρόλογο του Κ. Καραθεοδωρή σχετικά με την εξέλιξη της Γεωμετρίας. Μια δεύτερη έκδοση έγινε το 1935 και από αυτήν αντλούμε τα σχετικά στοιχεία. Το βιβλίο προοριζόταν για πανεπιστημιακή διδασκαλία. Στον πρώτο τόμο περιέχονται βασικές έννοιες και στοιχεία της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου τα οποία επεκτείνονται και στον χώρο.

Οι κωνικές τομές υπάρχουν στο Β΄ τόμο και μελετώνται με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ο ορισμός της έλλειψης και της υπερβολής δίνεται μέσω των εστιών και του σταθερού αθροίσματος και διαφοράς αντίστοιχα, ενώ της παραβολής μέσω της εστίας και της διευθετούσας. Μετά δίνεται η κοινή χαρακτηριστική τους ιδιότητα με τον σταθερό λόγο. Τέλος εξετάζονται οι καμπύλες β΄ βαθμού ως τομές κυκλικού κώνου. Στην συνέχεια γίνεται η γενική διερεύνηση των καμπύλων β΄ βαθμού μέσω της γενικής τους εξίσωσής

$$Αx^2 + 2Βxy + Γy^2 + 2Δx + 2Εx + Ζ = 0$$

Στα επόμενα κεφάλαια εξετάζονται επιφάνειες στο χώρο όπως, ελλειψοειδές, υπερβολοειδές, παραβολειδές κλπ. Δεν υπάρχουν ιστορικά στοιχεία σχετικά με τις κωνικές τομές και τις ιδιότητές τους, ούτε σχετική βιβλιογραφία.

4. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ «Διδάκτορος και Καθηγητή των Μαθηματικών στο Πρότυπο Γυμνάσιο του Διδασκαλείου της Μέσης Εκπαίδευσης»: «Στοιχειώδης Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία», προς χρήση των μαθητών των πρακτικών Λυκείων και των Σπουδαστών των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Α΄ έκδοση 1928.

Στο βιβλίο αυτό υπάρχει η στοιχειώδης Αναλυτική Γεωμετρία του Επιπέδου, καθώς και λίγα στοιχεία κωνικών τομών από *καθαρά γεωμετρική άποψη*, «συμφώνως προς ρητήν και ορθοτάτην του ρηθέντος προγράμματος της 25 Νοεμβρίου 1922, απαίτησιν», όπως δηλώνει ο συγγραφέας του στον πρόλογο του βιβλίου ([16]).

Πράγματι, στα τρία πρώτα κεφάλαια εξετάζονται θέματα της κλασικής Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου (συντεταγμένες, ευθεία, κύκλος). Στα επόμενα τρία κεφάλαια εξετάζονται κατά σειρά η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή. Οι ορισμοί των κωνικών δίνονται μέσω εστιών και του σταθερού αθροίσματος για την έλλειψη, της σταθερής διαφοράς της υπερβολής και της ισότητας στην παραβολή. Η μελέτη περιορίζεται στις βασικές ιδιότητες των κωνικών και γίνεται με καθαρά γεωμετρικό τρόπο. Στην συνέχεια όμως γίνεται και μελέτη των κωνικών με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου αποδεικνύεται ότι, οι τομές ορθού κώνου είναι πράγματι οι καμπύλες που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Δεν υπάρχει σχετική βιβλιογραφία, παρά μόνο μια μικρή αναφορά στο τέλος του βιβλίου για τον Απολλώνιο:

«Δια την αλήθεια των τριών προηγουμένων θεωρημάτων η έλλειψις, η υπερβολή και η παραβολή καλούνται κωνικαί τομαί. Εθεώρησε δε ταύτας πρώτος ο Έλλην Μαθηματικός Απολλώνιος, ώστις εκλήθη δια τούτο μέγας Γεωμέτρης» ([16], σελ. 115).

Άλλες ιστορικές αναφορές δεν υπάρχουν, ούτε σχετική βιβλιογραφία. Το βιβλίο επανεκδόθηκε σε τρίτη έκδοση, μετά το 1944, αλλά στην έκδοση αυτή αφαιρέθηκε η γεωμετρική μελέτη των κωνικών και το θεώρημα Dandelin, αφού προσαρμόστηκε «στο από 27/7/1944 ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα». Κατά μαρτυρία συνταξιούχου συναδέλφου, το σχολικό έτος 1949-50 το βιβλίο αυτό διδασκόταν κατά την κρίση του διδάσκοντα Καθηγητή στο Λύκειο.

5. ΧΡΗΣΤΟΥ Β. ΓΚΛΑΒΑ, Διδάκτορος του Πανεπιστημίου Columbia, ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΙ, ΜΕΡΟΣ Β΄, ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, Βιβλιοπωλείο Γ. Κορφιάτη, Αθήναι 1961.

Το βιβλίο αυτό είναι συνέχεια του πρώτου μέρους των «Γεωμετριών», έργο το οποίο κατά τον συγγραφέα αφιερώνεται στην Τοπολογία, ως την πρώτη, γενική Γεωμετρία. Ο συγγραφέας στο έργο του αυτό ακολουθεί μια αντίθετη

από την συνηθισμένη πορεία: αρχίζοντας από την Προβολική Γεωμετρία οι υπόλοιπες γεωμετρίες θεωρούνται ως μερικές περιπτώσεις της. Στο βιβλίο αναπτύσσονται με αυστηρό και αξιωματικό τρόπο τα θέματα της Προβολικής Γεωμετρίας του επιπέδου και του χώρου (αξιώματα υπάρξεως και συντυχίας, αξιώματα προβολικότητας και τετρακορύφων, αξιώματα διατάξεως).
Το 4^{o} κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις κωνικές και στις ενελίξεις και περιέχει τις εξής ενότητες: προβολικότητες με διπλά σημεία, ενελίξεις, ορισμός κωνικών, εφαπτόμεναι και σημεία επαφής κωνικών, πόλος και πολική κωνικής, το θεώρημα του Desargues των κωνικών και δυο ορισμοί κωνικής.
Στην τελευταία αυτή ενότητα βρίσκουμε δυο νέους ορισμούς των κωνικών: τον ορισμό του Steiner και τον ορισμό του von Staudt και αποδεικνύεται ότι μια κωνική Steiner είναι και κωνική von Staudt και αντίστροφα. Το τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου αναφέρεται στις ομάδες προβολικών μετασχηματισμών, ενώ το βιβλίο τελειώνει με μια ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή για την γέννηση και θεμελίωση της Προβολικής Γεωμετρίας. Σ' αυτήν ο συγγραφέας παρατηρεί ότι, «αν επρόκειτο να εξεταστεί η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών στην γεωμετρία αυτή, θα διαπιστούτο η μεγάλη έκτασις και το πλήθος των προτάσεων των εχουσών σχέσιν με τας κωνικάς τομάς και τας άλλας περιοχάς της Προβολικής Γεωμετρίας».

6. ΜΑΥΡΙΚΙΟΥ Α. ΜΠΡΙΚΑ, Καθηγητού του Πανεπιστημίου Αθηνών, Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1965.

Το βιβλίο αυτό, στην 3^{η} του έκδοση, περιέχει την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου προοριζόμενη για πανεπιστημιακή διδασκαλία. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Σχετικά με τις κωνικές τομές, δίνεται στην αρχή ο ορισμός τους, ως τομές δίχωνου ορθού κυκλικού κώνου με επίπεδο, το οποίο ανάλογα με την γωνία που σχηματίζει με την γενέτειρα του κώνου, προκύπτει η συγκεκριμένη κωνική τομή. Αμέσως όμως μετά αναφέρεται ότι,

«αι καμπύλαι αύται παρουσιάζουν ωρισμένας χαρακτηριστικάς ιδιότητας τας οποίας δυνάμεθα να λάβωμεν ως βάσιν δια τον ορισμόν αυτών. Προκειμένου να μελετήσωμεν τας καμπύλας αυτάς εις έν σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, οι καταλληλότεροι ορισμοί προκύπτουν εκ των κατωτέρω ιδιοτήτων»

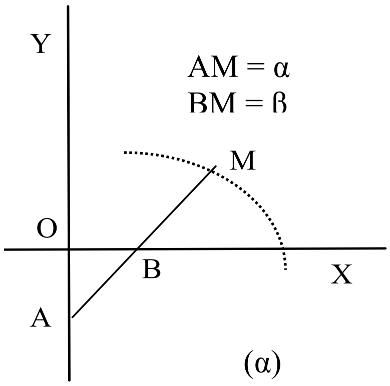
και δίνονται στην συνέχεια οι γνωστοί ορισμοί μέσω του σταθερού αθροίσματος, διαφοράς κλπ. Άξιο σημείωσης είναι ότι, είναι το πρώτο μάλλον νεοελληνικό βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας, στο οποίο υπάρχει σχετικό ιστορικό σημείωμα σχετικό με τις κωνικές τομές (σελ. 156) και αναφέρεται στον Μέναιχμο και στον Απολλώνιο. Μάλιστα ο συγγραφέας αναφερόμενος στην ιδέα του Μέναιχμου να υλοποιήσει την κατασκευή δυο μέσων αναλόγων τμημάτων, με καμπύλες που είναι τομές κώνου, εκφράζει την έκπληξή του: «*Είναι απορίας άξιον πως η εξαιρετικής γονιμότητας ιδέα του Μέναιχμου εχρειάσθη 2000 έτη δια να αποδώσει τους καρπούς της*» ([14], σελ. 158).

7. ΜΑΥΡΙΚΙΟΥ Α. ΜΠΡΙΚΑ, Καθηγητού του Πανεπιστημίου Αθηνών.
Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητος, Αθήναι 1970.

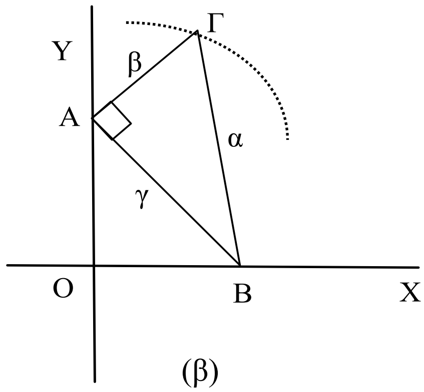
Η ευαισθησία του συγγραφέα σε θέματα της ιστορίας των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, που είχε εκδηλωθεί με το προηγούμενο βιβλίο του, εκφράστηκε πλήρως με την έκδοση αυτού του σημαντικού και μοναδικού ίσως στην Ελληνική βιβλιογραφία έργου του $20^{ου}$ αιώνα. Τα θέματα του βιβλίου που σχετίζονται με τις κωνικές τομές είναι :

Α. Σχετικά με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και την τριχοτόμηση γωνίας.
Το βιβλίο περιέχει τις λύσεις που έδωσαν στο πρόβλημα αυτό, με την βοήθεια κωνικών τομών ο Μέναιχμος και ο Απολλώνιος ([15], σελ. 75).
Επίσης περιέχει τις δυο λύσεις του Πάππου για την τριχοτόμηση γωνίας με την βοήθεια κωνικών ([15], σελ. 112).
Ακόμη ο συγγραφέας αποδεικνύει ότι τα δυο αυτά προβλήματα οδηγούν σε (μη ανάγωγες) εξισώσεις $3^{ου}$ βαθμού. Στην συνέχεια αποδεικνύει ότι μια τέτοια εξίσωση μπορεί να λυθεί με την βοήθεια κανόνα και διαβήτη αν έχουμε ήδη γνωστή μια κωνική. Έτσι π.χ. μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 – px + q = 0$ (την μορφή αυτή μπορεί να λάβει κάθε τριτοβάθμια εξίσωση) μπορεί να προκύψει ως τετμημένη ενός σημείου τομής του κύκλου $x^2 + y^2 + qx - (p+1)y = 0$ και της παραβολής $y = x^2$ ([15], σελ. 146).

Β. Χάραξη κωνικών τομών.
Στο βιβλίο αναφέρονται οι τρόποι χάραξης έλλειψης, υπερβολής και παραβολής, με την βοήθεια νήματος Για την έλλειψη (υπερβολή) ο τρόπος αυτός στηρίζεται στην χαρακτηριστική ιδιότητα της έλλειψης, για κάθε σημείο της το άθροισμα (διαφορά) των αποστάσεων του από τις εστίες της να είναι ίσο με τον μεγάλο της άξονα. Ας σημειωθεί εδώ ότι, αν και η ιδιότητα αυτή αναφέρεται όπως είδαμε από τον Απολλώνιο, πρώτος την χρησιμοποίησε για την χάραξη έλλειψης ο Ανθέμιος ο Τραλλιανός (αρχιτέκτονας της Αγίας Σοφίας, $6^{ος}$ αιώνας μ.Χ.), στο έργο του *Περί παραδόξων Μηχανημάτων* ([7], σελ. 47). Για την παραβολή χρησιμοποιείται η ιδιότητά της, κάθε σημείο της να ισαπέχει από την εστία και την διευθετούσα της ([15], σελ. 173-174).



(α)



(β)

Επίσης στο βιβλίο περιγράφεται ένα όργανο για την κατασκευή της έλλειψης, ο *ελλειψογράφος* του Πρόκλου (412-485 μ.Χ.).
Το όργανο αυτό στηρίζεται στην παρατήρηση ότι, αν τα σημεία Α, Β του τμήματος ΑΒΜ με ΑΜ = α, ΒΜ = β, α > β, κινούνται πάνω σε δυο κάθετες ευθείες ώστε το Α να βρίσκεται πάντα στην ευθεία ΟΥ, ενώ το Β στην ευθεία ΟΧ, τότε το σημείο Μ γράφει έλλειψη με ημιάξονες α, β (Σχήμα (α)).

Τέλος υπάρχει στο βιβλίο ένα τρόπος χάραξης της έλλειψης που ανακαλύφθηκε από τον Franz Schooten (1615-1660**).** Η μέθοδός του στηρίζεται στην εξής πρόταση:

Έστω δυο κάθετες ευθείες ΟΧ, ΟΥ (Σχήμα (β)) και ένα ορθογώνιο στο Α τρίγωνο ΑΒΓ. Αν το τρίγωνο μεταβάλλεται πάνω στο επίπεδο ΟΧΥ ώστε η κορυφή του Β να κινείται στην ευθεία ΟΧ, ενώ η κορυφή του Α στην ευθεία ΟΥ, τότε η κορυφή Γ γράφει έλλειψη. Οι πλευρές του τριγώνου μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα, ώστε να πάρουμε μια επιθυμητή έλλειψη. Πάντως η κατασκευή αυτή, σύμφωνα με τον συγγραφέα, είναι αξιοσημείωτη, γιατί ο Νεύτωνας την γενίκευσε και επινόησε, για πρώτη φορά, ένα όργανο για την χάραξη της κισσοειδούς καμπύλης (κισσοειδογράφος του Νεύτωνα).

8. ΔΥΟ ΑΡΘΡΑ ΤΟΥ ΣΠΥΡΟΥ ΚΑΝΕΛΛΟΥ.

Το 1979 ο μαθηματικός και συγγραφέας Σπύρος Κανέλλος δημοσίευσε δυο ενδιαφέροντα άρθρα στο περιοδικό Ευκλείδης Β΄ (τεύχη 3, 4, 1979-1980) που αναφέρονται σε ιδιότητες της έλλειψης.
Το πρώτο άρθρο έχει τίτλο *Ένα γεωμετρικό θεώρημα* και αποτελείται από ένα θεώρημα με 7 πορίσματα. Αναφέρουμε εδώ το θεώρημα και πέντε από τα πορίσματά του, όπως τα διατυπώνει ο συγγραφέας. Το θεώρημα αυτό είναι σχετικό με τις ελλείψεις Steiner του τριγώνου (βλ. σελ. 69-70).

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε μη ισόπλευρο τρίγωνο αντιστοιχεί μια και μόνο έλλειψη η οποία έχει κέντρο, το κέντρο βάρους του τριγώνου και η οποία διέρχεται από τις κορυφές του (περιγεγραμμένη έλλειψη). Αν α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου και a, b οι άξονες της έλλειψης, τότε ισχύουν

$a^2+b^2=\frac{2}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ και $ab=\frac{4E}{3\sqrt{3}}$, όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Υπάρχει επίπεδο επί του οποίου δοθέν μη ισόπλευρο τρίγωνο προβάλλεται ορθώς ως ισόπλευρο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Κάθε μη ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθή προβολή ενός ισοπλεύρου τριγώνου επί το επίπεδο ΑΒΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3

Αν ένα μεταβλητό τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε έλλειψη με άξονες 2a, 2b και έχει ως κέντρο βάρους το κέντρο της έλλειψης, τότε

α) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό και ίσο $3\sqrt{3}\,ab/4$.

β) Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του τριγώνου είναι σταθερό και ίσο με $9(a^2+b^2)/2$.

γ) Το άθροισμα των τετάρτων δυνάμεων των πλευρών του τριγώνου είναι σταθερό και ίσο με $27(3a^4+3b^4+2a^2b^2)/8$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5

Σε κάθε μη ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται μια μόνο έλλειψη η οποία έχει κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου και εφάπτεται των πλευρών του στα μέσα τους.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7

Αν δοθεί ένα τρίγωνο που δεν είναι ισόπλευρο, τότε υπάρχει στο επίπεδό του μια και μόνο ευθεία τέτοια ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των κορυφών του τριγώνου από αυτήν να είναι ελάχιστο.

Η ευθεία αυτή συμπίπτει με τον φορέα του μεγάλου άξονα της περιγεγραμμένης περί το τρίγωνο έλλειψης και το ελάχιστο άθροισμα είναι ίσο με $3b^2/2$, όπου b ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης αυτής.

Το δεύτερο άρθρο έχει τίτλο *Οδηγούσες διάμετροι έλλειψης* και αναφέρεται στις ιδιότητες και την κατασκευή των οδηγουσών διαμέτρων έλλειψης 1ου και 2ου είδους. Οι οδηγούσες ημιδιάμετροι 1ου είδους μιας έλλειψης, ορίζονται ως οι ημιδιάμετροι που βρίσκονται στο α΄ τεταρτημόριο της έλλειψης και έχουν γινόμενο ίσο με το γινόμενο των ημιαξόνων της έλλειψης αυτής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Σχετικά με το πρώτο άρθρο και το θεώρημα με τα πορίσματα που περιέχει, έχουμε να αναφέρουμε τα εξής σχετικά.

Ι. ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΨΗ : ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Ισχύουν και οι παρακάτω προτάσεις, οι αποδείξεις των οποίων γίνονται ευκολότερες θεωρώντας την έλλειψη ως προβολή κύκλου, οπότε μεταφέρονται ιδιότητες (προβολικού χαρακτήρα) του κύκλου σε αντίστοιχες ιδιότητες της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Απ' όλα τα εγγεγραμμένα σε μια δοσμένη έλλειψη, τρίγωνα, το τρίγωνο που έχει κέντρο βάρους το κέντρο της έλλειψης έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Κάθε τέτοιο τρίγωνο έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με $3\sqrt{3}\,\mathrm{ab}/4$, όπου a, b οι ημιάξονες της έλλειψης.

(Βλέπε απόδειξη στην §5.4, Πρόβλημα 4)

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Απ' όλα τα περιγεγραμμένα σε μια δοσμένη έλλειψη τρίγωνα (δηλαδή με πλευρές εφαπτόμενες), το τρίγωνο που έχει κέντρο βάρους το κέντρο της έλλειψης έχει το μικρότερο εμβαδόν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Η μικρότερη (σε εμβαδόν) έλλειψη που μπορεί να περιγραφεί σε ένα δοσμένο τρίγωνο είναι αυτή που έχει ως κέντρο της, το κέντρο βάρους του τριγώνου. Το εμβαδόν της είναι ίσο με $\dfrac{4\mathrm{E}}{3\sqrt{3}}$, όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

Η μεγαλύτερη (σε εμβαδόν) έλλειψη που μπορεί να εγγραφεί σε ένα δοσμένο τρίγωνο είναι αυτή που έχει ως κέντρο της, το κέντρο βάρους του τριγώνου.

Για τις δυο τελευταίες Προτάσεις βλέπε και την σελίδα 69 (Steiner).

II. ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΚΩΝΙΚΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν ΑΒΓ τρίγωνο του οποίου οι κορυφές Α, Β, Γ είναι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, τότε υπάρχει έλλειψη που εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του και έχει ως εστίες τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$$

Γενικότερα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

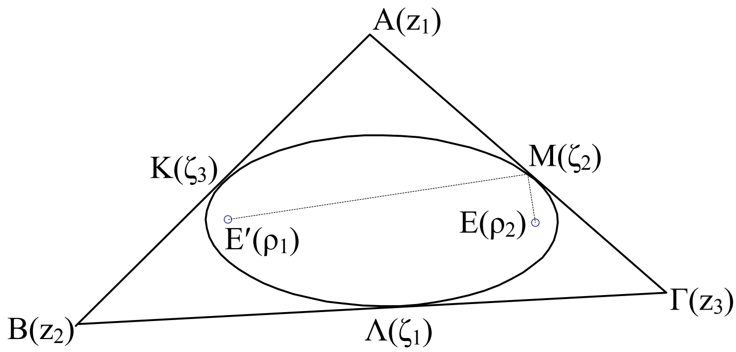
Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 και $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι κορυφές τριγώνου. Έστω η συνάρτηση

$f(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}(z - z_3)^{m_3}$, $z \in C$ και η (λογαριθμική της παράγωγος)

$$F(z) = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3},\ \text{όπου } m_1, m_2, m_3 \text{ ακέραιοι.}$$

Τότε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $F(z) = 0$ είναι οι εστίες κωνικής τομής που εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ του τριγώνου σε σημεία $K(\zeta_3)$, $\Lambda(\zeta_1)$, $M(\zeta_2)$ τα οποία χωρίζουν τις πλευρές σε λόγους m_1/m_2, m_2/m_3, m_3/m_1 αντίστοιχα. Αν $n = m_1+m_2+m_3 \neq 0$, η κωνική είναι μια έλλειψη αν $nm_1m_2m_3 > 0$, και υπερβολή αν $nm_1m_2m_3 < 0$.

Αν $n = 0$ και $\nu = m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3 \neq 0$, τότε η κωνική είναι παραβολή με εστία το ζ (μοναδική ρίζα της εξίσωσης $F(z) = 0$) και άξονα παράλληλο στην ευθεία που ενώνει την αρχή των αξόνων με την εικόνα του σημείου ν.



Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε από τον Bocher (1892) και Grace (1902) για την περίπτωση που οι m_1, m_2, m_3 είναι θετικοί και από τον Marden (1945) για οποιουσδήποτε m_1, m_2, m_3 ακέραιους. Γενίκευση του θεωρήματος έχει δοθεί από τους Siebeck (1864), Van den Berg (1882,1884,1889), Vries (1891), Juhel-Renoy (1906), Heawood (1907), Occhipinti (1910), Fujiwara (1916), Linfield (1923,1920) και Haensel (1928) (βλ. [13], σελ. 11)

9. ΓΡΗΓΟΡΙΟΥ ΤΣΑΓΚΑ, Καθηγητού Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας Γ΄ Λυκείου, Έκδοση Ιδρύματος Ευγενίδου, Αθήνα 1981.

Είναι το πρώτο βιβλίο μετά από πολλά χρόνια, κατά πληροφορία συνταξιούχου συναδέλφου Καθηγητή Μαθηματικών από το 1949-50, με το οποίο οι κωνικές τομές διδάσκονται ξανά στο Λύκειο. Περιέχονται στο 2^{ο} κεφάλαιο και περιλαμβάνουν, τον ορισμό της παραβολής με βάση την εστία και διευθετούσα της, καθώς και τους ορισμούς της έλλειψης και της υπερβολής με βάση το σταθερό άθροισμα και την διαφορά αντίστοιχα (εστιακοί ορισμοί).
Με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας εξάγονται (με ορθό και αντίστροφο) οι εξισώσεις των καμπυλών αυτών, καθώς και οι εξισώσεις των εφαπτομένων τους (ως διπλή λύση συστήματος πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Δεν αναφέρονται ιδιότητες των κωνικών πέραν από τις απλές ιδιότητες της συμμετρίας που προκύπτουν από τις εξισώσεις τους. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια σύντομη αναφορά στις παραπάνω καμπύλες ως τομές κώνου. Δεν υπάρχουν ιστορικά ή βιβλιογραφικά στοιχεία.

10. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΒΑΡΟΥΧΑΚΗ κ.ά., ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (Αναλυτική Γεωμετρία), ΟΕΔΒ, Αθήνα 1991.

Από το σχολικό έτος 1983-84 εφαρμόστηκε το βιβλίο αυτό, υλοποιώντας το νέο αναλυτικό πρόγραμμα. Οι κωνικές τομές περιέχονται στο 4^{ο} κεφάλαιο, το οποίο αρχίζει με την απλή αναφορά ότι «οι κωνικές τομές ήταν γνωστές από την αρχαιότητα» και συνεχίζει με ένα σχεδιάγραμμα της ύλης του.
Οι καμπύλες, κύκλος, έλλειψη, υπερβολή και παραβολή μελετώνται με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην αρχή δίνονται οι εστιακοί ορισμοί των καμπυλών και εξάγονται οι εξισώσεις τους (για έλλειψη και υπερβολή) με τον τρόπο που είδαμε στο βιβλίο του Γ. Ρεμούνδου. Επίσης οι εξισώσεις δίνονται και ως προς σύστημα με κέντρο διάφορο του κέντρου τους (ή της κορυφής για την παραβολή). Για κάθε καμπύλη εξετάζεται η σχετική θέση της ευθείας $y = \lambda x + \kappa$ με αυτήν και στην περίπτωση διπλού κοινού σημείου η ευθεία ορίζεται ως εφαπτομένη.

Εκτός από τις απλές ιδιότητες συμμετρίας των καμπυλών αναφέρεται μια ιδιότητα για κάθε καμπύλη. Δεν αναφέρεται η ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών. Επίσης η έλλειψη με μεγάλο άξονα 2α μελετάται σε σχέση με τον κύκλο διαμέτρου 2α (διευθετών κύκλος) καθώς και ως προβολή κύκλου. Στο τέλος αναφέρονται οι καμπύλες και ως κωνικές τομές με ανάλογα σχήματα και τέλος γίνεται πλήρης μελέτη της εξίσωσης

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0 \text{ με } |A| + |B| \neq 0.$$

Δεν υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές, ούτε ιστορικά στοιχεία, πέρα από αυτό που αναφέραμε στην αρχή.

11. ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗ κ.ά., Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Πιθανότητες), ΟΕΔΒ, Α΄ έκδοση Αθήνα 1992.

Από το 1992 άρχισε η διδασκαλία του βιβλίου αυτού υλοποιώντας το αναλυτικό πρόγραμμα που είχε αρχίσει να εφαρμόζεται από το ακαδημαϊκό έτος 1989-90. Οι κωνικές τομές περιέχονται στο 5^o κεφάλαιο και μελετώνται με μεθόδους της αναλυτικής γεωμετρίας. Στην αρχή γίνεται απλή αναφορά στις τομές κώνου με ένα επίπεδο, όπου παρουσιάζονται με σχήματα οι διάφορες περιπτώσεις, κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή.

Οι καμπύλες ορίζονται με βάση τις εστιακές τους ιδιότητες. Για κάθε μια καμπύλη παράγεται η εξίσωσή της (με απλή αναφορά ότι ισχύει και το αντίστροφο) και δίνονται οι απλές ιδιότητες συμμετρίας που προκύπτουν από αυτή. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων προκύπτουν με χρήση παραγώγων. Αναφέρεται μόνο η ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών με διάφορες εφαρμογές της, καθώς και μια ιδιότητα της υπερβολής. Καινοτομία του βιβλίου είναι ότι δίνει τις εξισώσεις αλλαγής αξόνων, παράλληλης μεταφοράς και στροφής. Έτσι εξετάζονται και εξισώσεις της μορφής

$$Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0,$$

αλλά μόνο με συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών, εκτός της περίπτωσης Α = Β που εξετάζεται γενικά. Επίσης στο τέλος του κεφαλαίου υπάρχει (για πρώτη φορά σε σχολικό βιβλίο) ένα ενδιαφέρον ιστορικό σημείωμα για τις κωνικές τομές, από τα αρχαία χρόνια μέχρι τα νεώτερα, γραμμένο από τον καθηγητή και συγγραφέα Ιωάννη Θωμαΐδη.

12. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ, Αθήνα 1998.

Από το σχολικό έτος 1998-99 οι κωνικές τομές διδάσκονται στην Β΄ Λυκείου. Περιέχονται στο 3^o κεφάλαιο του βιβλίου αυτού, το οποίο αρχίζει με ένα ιστορικό σημείωμα του Ι. Θωμαΐδη, που αναφέρεται στην προσέγγιση των κωνικών τομών από τον Μέναιχμο και τον Απολλώνιο. Οι καμπύλες ορίζονται με βάση τις εστιακές τους ιδιότητες και αναφέρονται οι εξισώσεις τους καθώς και οι εξισώσεις των εφαπτομένων τους χωρίς αποδείξεις (εκτός του κύκλου). Για κάθε μια αναφέρεται η εξίσωσή της και δίνονται οι απλές ιδιότητες συμμετρίας που προκύπτουν από αυτή. Αναφέρεται η ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών με διάφορες εφαρμογές της, και από δυο ιδιότητες στην παραβολή και έλλειψη και μια στην υπερβολή. Στο βιβλίο εξετάζεται ακόμη, μέσω της παράλληλης μεταφοράς αξόνων, και η εξίσωση

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0,$$

αλλά μόνο με συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών της.
Η περίπτωση όμως Α = Β, που μπορεί να παριστάνει κύκλο, εξετάζεται γενικά.

Το βιβλίο αυτό χρησιμοποιήθηκε και το σχολικό έτος 2003-2004 και εν όψει της νέας σχολικής χρονιάς 2004-2005 μοιράστηκε στους μαθητές της Β΄ τάξης (του Πειραματικού Λυκείου Ηρακλείου) στις 13 του Σεπτέμβρη του 2004, μέρα που ολοκληρώθηκε και η εργασία αυτή…

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1975, 1976.
2. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, Τόμος Α΄- μέρος Β΄, Β΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1970, 1973.
3. ΓΕΝΝΗΜΑΤΑ Β. Ν., Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία, τεύχος Α΄, Αθήναι 1924
4. COOLIDGE J., A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces, Dover Publications, Inc. New York, 1968.
5. ΕΥΚΛΕΙΔΗ, *Στοιχεία*, Τόμος Ι, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.), Αθήνα 2001.
6. HEATH TH., Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμος Ι, ΙΙ, μετάφραση, έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα 2001.
7. HUXLEY G., Anthemius of Tralles, Cambridge Massachusetts 1959.
8. ΘΕΟΤΟΚΗ Ν., *Στοιχεία Μαθηματικών εκ Παλαιών και Νεωτέρων Συνερανισθέντα*, Μόσχα 1799, τόμος Β΄.
9. ΚΑΡΑ Γ., Οι Φυσικές και Θετικές Επιστήμες στον Ελληνικό 18ο αιώνα, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1977.
10. ΚΑΣΤΑΝΗ Ν., ΛΑΜΠΡΟΥ Μ., Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών στον Ελληνικό χώρο τον 17ο-19ο αιώνα, επιμέλεια Γ. Καρά, Εκδόσεις Μεταίχμιο, Αθήνα 2003.
11. ΛΑΜΠΡΟΥ ΜΙΧ., Τα μη Στοιχειώδη Μαθηματικά κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας (η περίπτωση του Νικηφόρου Θεοτόκη). Πρακτικά ημερίδας της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας Επιστημών και Τεχνολογίας, Αθήνα 1990.
12. LORIA G., Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄. Έκδοση Ε.Μ.Ε.

13. MARDEN M., The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable, American Mathematical Society, 1949.
14. ΜΠΡΙΚΑ Μ., Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1965
15. ΜΠΡΙΚΑ Μ., Τα Περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητος, Αθήναι 1970.
16. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ν., Στοιχειώδης Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήναι 1928.
17. ΠΑΠΠΟΥ, Συναγωγή, (2 τόμοι), επιμέλεια και μετάφραση Ε. Σπανδάγος, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 2001, 2004.
18. ΠΡΟΚΛΟΥ, Υπόμνημα στο α΄ Βιβλίο στων Στοιχείων του Ευκλείδου, (2 τόμοι), επιμέλεια και μετάφραση Ε. Σπανδάγος, Εκδόσεις Αίθρα, 2001, 2002.
19. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ Γ., Εγχειρίδιον Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1919 (ανατύπωσις 1965) .
20. VAN DER WAERDEN B.L., Η Αφύπνιση της Επιστήμης, μετάφραση Γ. Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.
21. ΧΑΤΖΗΔΑΚΗ Ι., Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήναι 1879 (1891).
22. ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗ Γ., Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.
23. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ Ν., Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας, τόμος Β΄, Αθήναι 1923.
24. ΣΟΦΙΑΝΟΥ ΜΙΧ., Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1857.
25. ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΥ ΧΡ., Αναλυτική Γεωμετρία Ι, ΙΙ, Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 15, 16, Έκδοση Ε.Μ.Ε., 1979.
26. STRUIK D., Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1982.
27. TOOMER J. G., Diocles on Burning Mirrors, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York , 1975.
28. EucliDraw, Σχεδιαστικό Πρόγραμμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, Π. Πάμφιλος και Συνεργάτες, 2004.
29. Musaios, Πρόγραμμα Αρχαίων Ελληνικών Κειμένων.
30. http://www.euclidraw.com
31. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/
32. http://museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm
33. http://clowder.net/hop/Dandelin/Dandelin.html
34. http://www.museo.unimo.it/labmat/usa1.htm
35. http://historical.library.cornell.edu/math/math_T.html
36. http://195.134.75.8/ (Ελληνομνήμων).

*

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΠΕΡΓΑΙΟΣ (260-180 π.Χ. περίπου)

Η εισαγωγή στο α΄ βιβλίο των *Κωνικών*

᾿Απολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

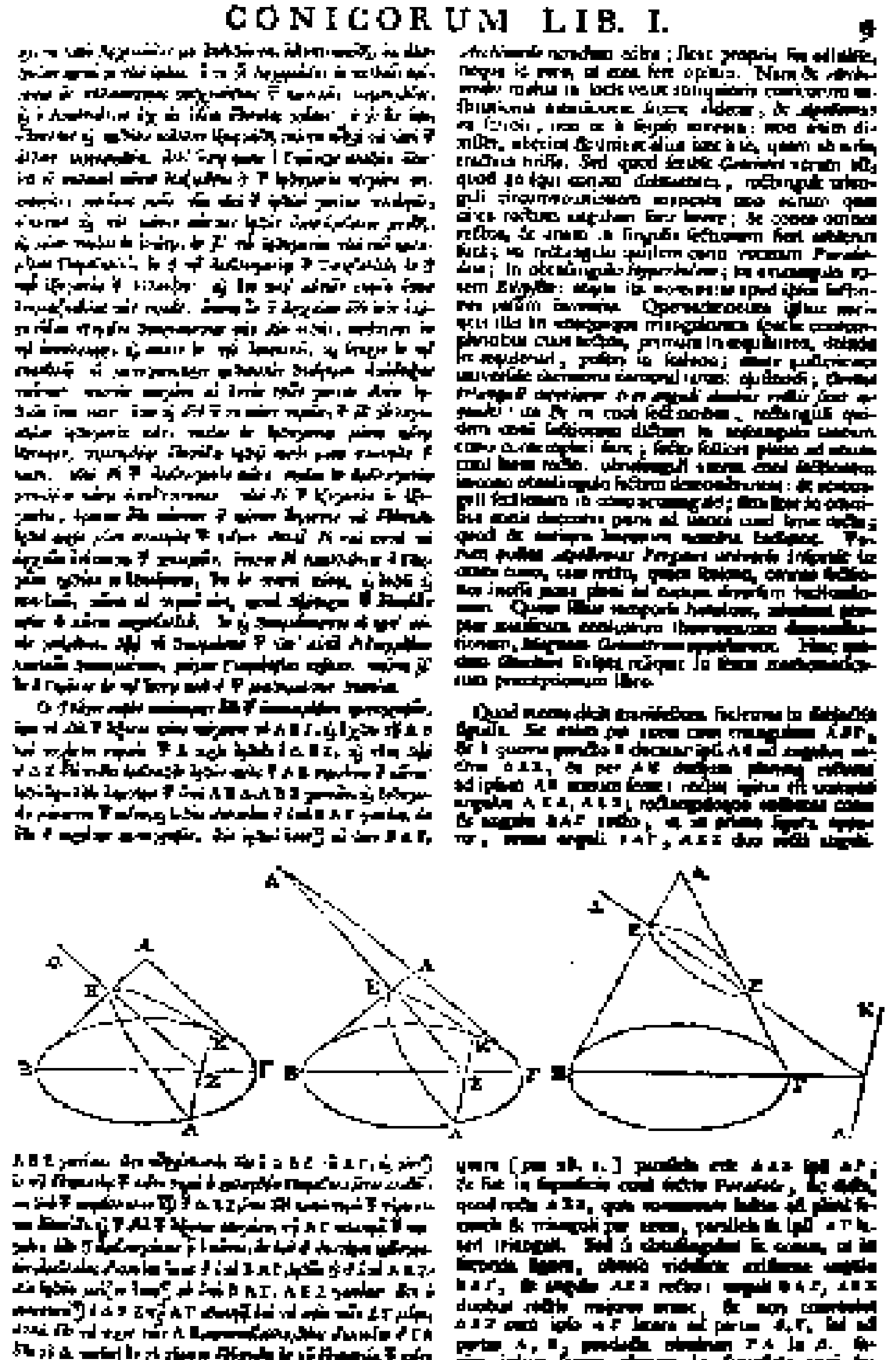
Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι, μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετά σου ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν· πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος, τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν· οὐκ ἀμνημονεῖν· γὰρ οἴομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς ᾿Αλεξάνδρειαν, καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτὰ εἰς τὸ σπουδαιότερον διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες ἀεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν μετειληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἑτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη, περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους καὶ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλέον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν, τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα…

ΤΟ ΕΞΩΦΥΛΛΟ ΑΠΌ ΤΗΝ ΕΚΔΟΣΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ 1710

Το εξώφυλλο της έκδοση των *Κωνικών* του 1710 (Οξφόρδη) με το κείμενο: «Οι ναυαγοί δεν ήξεραν αν είχαν τελειώσει τα βάσανά τους στην έρημη και άγνωστη ακτή όπου η άγρια θύελλα πέταξε τσακισμένο το καράβι τους. Τότε ο Σωκρατικός φιλόσοφος Αρίστιππος (ένας από τους ναυαγούς) παρατήρησε στην αμμουδιά γεωμετρικά σχήματα κι' είπε στους συντρόφους του μ' εμπιστοσύνη: Σωθήκαμε, εδώ κατοικούν πολιτισμένοι άνθρωποι. Πραγματικά είχαν αράξει στην Ρόδο.»

Σελίδα από την έκδοση των *Κωνικών* το 1710 (Ελληνικά-Λατινικά)


CONICORUM LIB. I. 9

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ ϗ ΝΕΩΤΕΡΩΝ
Συνερανισθέντων
ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ
ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,
Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,
Ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς
Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν,
ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ϗ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ
ΖΩΣΙΜΑ
ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ,
περιέχων
ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,
ΤΗΝ
ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ,
ΚΑΙ
ΤΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ.

ΕΝ ΜΟΣΧᾼ
Ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ
Ῥηδηγέρῳ ϗ Κλαυδίῳ.
Ἔτει 1799.

Η ΣΕΛΙΔΑ 128 ΑΠΌ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΘΕΟΤΟΚΗ (1802)

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν τῆς Ὑπερβολῆς συμπτωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄. (*)

Ἐὰν ἐν Ὑπερβολῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔσαι τὰ αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῆς Ὑπερβολῆς.

Ἔσω Ὑπερβολὴ ἡ ΖΝΜ, ἧς πλαγία πλευρὰ ἡ ΓΝ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΝΦ εὐθεῖαι αἱ ΖΦ, ΕΠ. λέγω ὅτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΓ, ΝΠ. ΠΓ. ἤτουν ὅτι ἐςὶν ὡς $\overline{Z\Phi}^2 : \overline{E\Pi}^2 :: N\Phi.\ \Phi\Gamma : N\Pi.\ \Pi\Gamma$. πίν. Β. χ. 4.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Π, καθ᾽ ὃ ἡ τεταγμένη τὴν Διάμετρον τέμνει εὐθεῖα ἡ ΡΠΗ τῇ τῆς βάσεως τοῦ Κώνου Διαμέτρῳ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΡΗ παράλληλός ἐςι τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΕΙ τῇ ΖΜ, (β) καὶ τὸ ἐπίπεδον ἄρα, τὸ διὰ τῶν ΡΗ,

(*) Τὸ β΄. μέρος ἐςὶ τῆς κα΄. τοῦ α΄. βιβλ τοῦ Ἀπολλων.
(α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὸν ιγ΄. ὁρισμ.

ΣΥΝΟΨΙΣ
τῶν
ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ
ΓΟΥΙΔΩΝΟΣ ΤΟΥ ΓΡΑΝΔΗ.

Μετὰ
πλουσιωτάτων Ὑποσημειώσεων
καὶ Προσθηκῶν
ʼΟΚΤΑΒΙΑΝΟΥ ΤΟΥ ΚΑΜΕΤΙΟΥ
Μεταφρασθεῖσα ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν καθʼ
ἡμᾶς ἁπλουστέραν διάλεκτον
ʽΥΠΟ Σ. Λ. Σ. ΚΕΦΑΛΛ. ΤΟΥʼ Ι. Φ. Σ.
ἐξ ἧς μετήνεκται εἰς τὴν Ἑλληνικὴν
παρὰ
ʼΙΩΝΑ ʽΙΕΡΟΜ: ΣΠΑΡΜΙΩΤΟΥ.

Νῦν Πρῶτον τύποις ἐκδοθεῖσα. Ἐπιστασίᾳ μὲν καὶ Διορθώσει
ΑΝΘΙΜΟΥ ΓΑΖΗ
ʼΑρχιμ. τοῦ Μηλιώτου.
Δαπάνῃ δὲ φιλοτίμῳ καὶ φιλοκάλῳ Ἑλλήνων, ὧν τὰ
ὀνόματα ἐν τοῖς ὄπισθεν καταγράφονται.

Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας.
Τύποις Φραγκίσκου Ἀντωνίου Σχραίμβλ.
αωβ.

Η ΣΕΛΙΔΑ 221 ΑΠΌ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΓΡΑΝΔΗ (1802)

221

ὀρθογώνια ΑΓΒ, ΔΓΛ ἐςὶν ἀλλήλοις ἴσα (ἔςι γὰρ ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ ὡς ΓΥ πρὸς ΓΡ, τῦτ' ἔςιν ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΓΛΡ, ΓΑΥ, ἐν οἷς δέον εἶναι ἀντιπεπονθείας τὰς περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν Γ πλευρὰς κατὰ τὸ Δ΄. Πορ. τῆς Μ΄.)· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ ϗ ΑΝ ἢ ΓΗ, ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΥ ϗ ΥΛ ἢ ΓΚ. Καὶ ληφθέντων τῶν τετραπλῶν αὐτῶν, γίνεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΝΞ, ΗΙ, ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΥΘ, ΚΕ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μϛ΄.

Ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώ- Σχημ. 114.
τυ ληφθῇ ἀπὸ τῦ κέντρυ τὰ διαςήματα ΓΛ, ΓΟ, ΓΑ συνεχῶς ἀνάλογον· ἀπὸ δὲ τῶν Λ, Ο, Α ἀχθῶσι τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παράλληλοι αἱ ΛΠ, ΟΚ, ΑΙ, τέμνυσαι τὴν Ὑπερβολὴν κατὰ τὰ Π, Κ, Ι. Τὰ μεταξὺ αὐτῶν τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΛΠΚΟ, ΟΚΙΑ ἴσα ἔςαι ἀλλήλοις.

Συμπληρωθέντων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ΓΛΠΡ, ΓΟΚΣ, ΓΑΙΜ ϗ προεκβληθεισῶν τῶν ΡΠ, ΑΙ ἕως ὅτυ συμπέσωσιν ἀλλήλαις κα-

ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

συγγραφεῖσα μὲν Γαλλιστὶ παρὰ τοῦ

ΑΒΒΑ ΚΑΪΛΛΕ,

Ἐκ δὲ τῆς Γαλλικῆς εἰς τὴν τῶν Λατίνων φωνὴν πρότερον μετενεχθεῖσα, μεθηρμηνεύθη ἤδη παρὰ τοῦ Ἰατροφιλοσόφου

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ

Ἀσάνους Κεφαλλῆνος εἰς τὴν Ἁπλοελληνικήν.

Ἐκ δὲ ταύτης εἰς τὴν Ἑλληνίδα ἐπιδιορθωθεῖσα παρὰ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Μιχαὴλ τοῦ ἐκ Λαρίσσης

τύποις ἐκδίδοται εἰς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Φροντιστηρίων.

Ἐπιστασίᾳ τοῦ Ἀρχιμανδρίτου

ΑΝΘΙΜΟΥ ΓΑΖΗ

Μηλιώτου

Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας. ͵αωγʹ.

Τύποις Φ. Α. Σχραίμβλ.

ΣΕΛΙΔΑ 30 ΑΠΌ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΚΑΙΛΕ (1802)

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 49.

Τὴν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, Ὑπερβολῆς, καὶ Παραβολῆς ἐξίσωσιν ἐξευρεῖν, εἴτ᾽ οὖν τὴν ἐκτιθεῖσαν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συνέκθεσις τῶν Τεταγμένων πρὸς τὴν τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν Ἀποτετμημένων, ληφθείσης τῆς αὐτῶν Ἀρχῆς ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν Διάμετρον κορυφῆς.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Σχ. 11. Τεθείσθω ἐν τῇ Ἐλλείψει $\Sigma\sigma = 2\alpha$, καὶ ΣΖ, ἢ $\sigma\zeta = \gamma$, καὶ $\Sigma\Pi = \chi$, $\Pi M = y$· ἔστι δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ ΖΜζ (α) $\zeta M + MZ : Z\zeta :: \zeta\Pi - \Pi Z : \zeta M - MZ$. Ἀλλαμὴν $\zeta M + MZ = \Sigma\sigma$ (§. 33.)

(α) §. 750. τῶν Μαθηματικῶν Στοιχείων τοῦ Καΐλλε ἐν τῇ Λατινικῇ μεταφράσει κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν· Ἔστι δ᾽ ἐκεῖ ἡ τοῦ θεωρήματος ἔκφρασις (ἐπεὶ ἐν ταῖς Ἑλληνιστὶ ἐκδεδομέναις Τριγωνομετρίαις τῇ αὐτῇ ἐκ ἐνέτυχον) τοιάδε: „Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν λοιπῶν πλευρῶν λόγον ἔχει, ὃν ἡ αὐτῶν διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων τῆς μείζονος πλευρᾶς τμηθείσης ὑπὸ τῆς Καθέτου τῆς καταχθείσης ἀπὸ τῆς μείζονος γωνίας πρὸς τὴν μείζω πλευράν.“

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΤΑΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχων, τὴν Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν, τὴν τȣ̃ Συμβολικȣ̃ Λογισμȣ̃ τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμογὴν, Ἐπιτομὴν τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, τὴν Ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν, εἴτ' ȣ̓̃ν τὰς τȣ̃ Κώνȣ τομὰς, καὶ τὰ περὶ τῶν ἄλλων καμπύλων, ϗ μέρος τȣ̃ Λογισμȣ̃ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ͂ι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

,ΑΩΖ.

ΣΕΛΙΔΑ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΚΟΥΜΑ

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η'

Περὶ τῶν Καμπύλων γραμμῶν.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῶν τοῦ Κώνου τομῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γενέσεως αὐτῶν.

Ὑψηλοτέρα καλεῖται Γεωμετρία ἡ περὶ τὰς τῶν καμπύλων γραμμῶν ἀσχολουμένη ἰδιότητας, ἐπιστήμη δήπου, ὅσον εὑρετία, τοσοῦτον ἔχουσα καὶ τὸ χρήσιμον· τῶν δὲ καμπύλων αἱ μᾶλλον θρυλλούμεναι, καὶ τῇ Μαθηματικωτέρᾳ Φυσικῇ λίαν συμβάλλουσαι, εἰσὶν αἱ καλούμεναι Κωνικαὶ τομαί, περὶ ἃς ἴσμεν οὐ βραχύ τι μοχθήσαντας τοὺς πάλαι Γεωμέτρας· τούτων οὖν καὶ ἡμεῖς τὰς κυριωτέρας ἐκθέμενοι ἰδιότητας, καὶ τῆς τῶν ἄλλων θεωρίας ἀκροθιγῶς ὕστερον ἐφαψόμεθα.

1. Κῶνος ἅπας δι' ἐπιπέδου πενταχῶς ἂν ἔχοι διχῇ τμηθῆναι.

Ἢ γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον (σχ. 61) ΑΒΓ διὰ τῆς τοῦ Κώνου κορυφῆς Α διήκει, καὶ τῇ βάσει ΒΜ' ΓΜ' τοῦ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο   Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο

ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΩΝΟ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είδαμε ότι ο Απολλώνιος όρισε τις καμπύλες παραβολή, υπερβολή και έλλειψη ως τομές κώνου με ένα ορισμένο επίπεδο. Οι καμπύλες όμως αυτές έχουν ορισμένες απλές χαρακτηριστικές ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να τις ορίσουμε χωρίς να αναφερθούμε καθόλου σε τομές κώνου.

Πράγματι, στο επόμενο κεφάλαιο θα ορίσουμε τις κωνικές εκ νέου, χωρίς να αναφερθούμε σε τομές κώνου, και θα αποδείξουμε με Ευκλείδεια μέσα τις βασικές τους ιδιότητες.

Εν τω μεταξύ στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε πώς προκύπτουν, από τον Απολλώνιο ορισμό, οι εν λόγω χαρακτηριστικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε τις εστιακές ιδιότητες της παραβολής, υπερβολής και έλλειψης και στην συνέχεια την γενική ιδιότητα του λόγου των καμπυλών αυτών. Για τις εστιακές ιδιότητες των κωνικών θα δούμε και μια δεύτερη απόδειξη, ιδιαίτερα κομψή, που οφείλεται στον Dandelin. Επίσης θα δείξουμε ότι η έλλειψη μπορεί να θεωρηθεί και ως τομή κυλίνδρου με επίπεδο. Με αφορμή το τελευταίο θα αναφερθούμε με συντομία σε ορισμένα χρήσιμα θέματα προβολών.

Τέλος, θα δώσουμε ένα αναλυτικό τρόπο με τον οποίο μπορούν να προκύψουν οι εξισώσεις της παραβολής, έλλειψης και υπερβολής απ' ευθείας από την τομή κώνου με επίπεδο.

2.1 ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΣ ΤΟΜΕΣ ΣΤΙΣ ΕΣΤΙΑΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ

Όπως είδαμε στο ιστορικό μέρος, ο Απολλώνιος αντιστοίχησε σε κάθε μία από τις καμπύλες παραβολή, έλλειψη και υπερβολή το σύμπτωμά της, μια σχέση δηλαδή μεταξύ ενός τυχαίου σημείου της και ορισμένων σταθερών που εξαρτώνται από τον κώνο και το επίπεδο τομής. Αυτό το σύμπτωμα το χρησιμοποιεί στην συνέχεια για ανακαλύψει και να αποδείξει πολλές ιδιότητες των κωνικών, μεταξύ των οποίων και τις εστιακές ιδιότητες της έλλειψης και της υπερβολής.

Στην απόδειξη της εστιακής ιδιότητας της έλλειψης (βλέπε *Κωνικά* Βιβλίο γ΄, Πρόταση 52, [1], τόμος β΄, σελ. 255) ο Απολλώνιος χρησιμοποιεί τις Προτάσεις 48 και 50 (Βιβλίο γ΄) οι οποίες προϋποθέτουν άλλες προηγούμενες προτάσεις.

Το ίδιο και για την υπερβολή, ενώ για την παραβολή, όπως έχουμε αναφέρει, δεν υπάρχει καν αναφορά σε εστία.

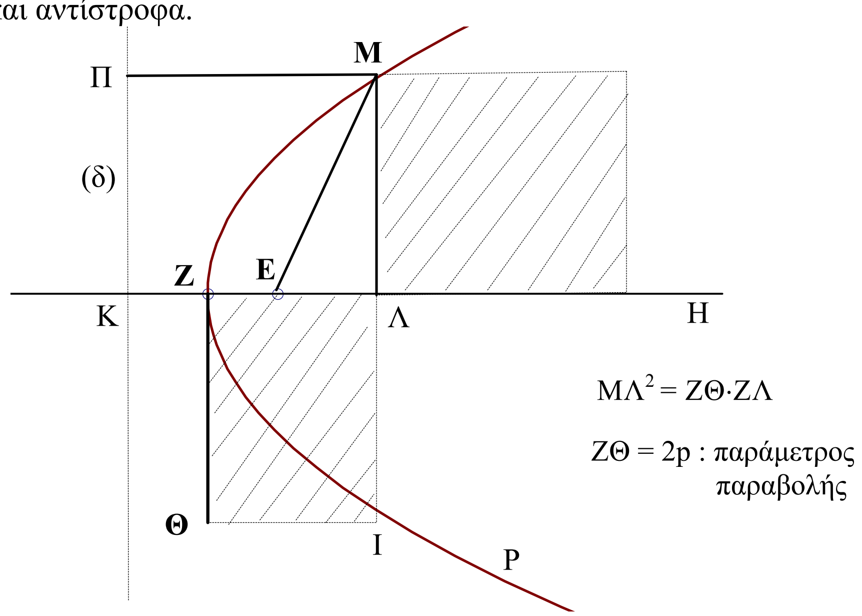
Εδώ θα δώσουμε μια δική μας απ' ευθείας απόδειξη των εστιακών ιδιοτήτων όλων των κωνικών τομών, εκτός του κύκλου, ξεκινώντας από τα συμπτώματα του Απολλωνίου, με την σειρά που παρουσιάζονται στα *Κωνικά* (βλ. Κεφ. 1, Α4.3).

Ας σημειωθεί ότι Απολλώνιος στις Προτάσεις 49 και 50 του α΄ βιβλίου των *Κωνικών,* αποδεικνύει ότι, από μια αρχική διάμετρο της κωνικής (που προήλθε από την τομή του επιπέδου τομής του κώνου με το αξονικό τρίγωνο) μπορούμε να μεταβούμε σε μια άλλη διάμετρο διατηρώντας την μορφή του συμπτώματος της καμπύλης. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ως αρχική διάμετρο τον άξονα της παραβολής (ή τον μεγάλο ή κύριο άξονα αντίστοιχα για την έλλειψη και υπερβολή) και αυτή την ειδική περίπτωση θα θεωρήσουμε παρακάτω..

Α. Π Α Ρ Α Β Ο Λ Η

Για την παραβολή, σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλωνίου, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα (σταθερό) σημείο Ε και μια (σταθερή) ευθεία (δ) στο επίπεδο της καμπύλης, ώστε κάθε σημείο της να ισαπέχει από το σημείο Ε και την ευθεία (δ) και αντίστροφα.

Σχήμα 1



Έχοντας υπόψη την Ενότητα Ι.1 (και το σχόλιο1) της §Α4.3 (Κεφ.1), θεωρούμε την τομή ΜΖΡ (Σχήμα 1) και την διάμετρό της ΖΛ που όπως αναφέραμε μπορούμε να θεωρήσουμε και ως άξονα, οπότε η ΜΛ είναι κάθε-τη στην ΖΗ. Πάνω στην διάμετρο ΖΕ παίρνουμε σημεία Κ, Ε ώστε ΚΖ = ΖΕ = ΖΘ/4, όπου ΖΘ η σταθερή παράμετρος της παραβολής.

Έτσι ΖΘ = 2ΚΕ = 4ΖΕ (*δηλαδή ΖΘ = 2p, όπου p η παράμετρος που θεωρούμε συνήθως σήμερα*).
Στο σημείο Κ θεωρούμε ευθεία (δ) κάθετη στην ευθεία ΖΛ. Έστω ΜΠ κάθετη στην ευθεία (δ) από το σημείο Μ. Έχοντας υπόψη ότι $ΜΛ^2 = ΖΘ \cdot ΖΛ$, έχουμε

$$\begin{aligned} ΜΕ^2 = ΜΛ^2 + ΕΛ^2 &= ΖΘ\cdot ΖΛ + (ΚΛ - ΚΕ)^2 \quad (ΚΕ = 2ΖΕ) \\ &= 4ΖΕ\cdot ΖΛ + ΚΛ^2 + 4ΖΕ^2 - 4ΚΛ\cdot ΖΕ \quad (ΚΖ = ΖΕ) \\ &= ΚΛ^2 + 4ΖΕ(ΖΛ - ΚΛ + ΖΕ), \\ &= ΚΛ^2 = ΠΜ^2 \end{aligned}$$

Άρα ΜΕ = ΠΜ.
Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο: αν ΜΕ = ΠΜ τότε $ΜΛ^2 = ΖΘ\cdot ΖΛ$.
Επομένως, ένα σημείο ανήκει στην παραβολή, σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλωνίου, αν και μόνο αν ισαπέχει από το (σταθερό) σημείο Ε και από την (σταθερή) ευθεία (δ).

Β. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Για την υπερβολή, σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλωνίου, θα δείξουμε ότι: υπάρχουν δυο σταθερά σημεία Ε, Ε΄ στο επίπεδο της καμπύλης και ένα σταθερό τμήμα 2α ώστε, ένα σημείο της καμπύλης αυτής ανήκει σ' αυτήν αν και μόνο αν η διαφορά των αποστάσεών του από αυτά να είναι ίσο με το σταθερό τμήμα 2α.
Έχοντας υπόψη την Ενότητα Ι.2 της §Α4.3 (Κεφ.1), θεωρούμε την τομή ΜΖ (Σχήμα 2) και μια διάμετρό της ΖΛ. Ας θεωρήσουμε ότι έχει προέλθει από ορθό κυκλικό κώνο οπότε ΜΛ κάθετη στην ΖΛ.
Όπως είδαμε στην § Ι.2 (Κεφ.1, Α4.3), Σχόλιο 4, σχέση (5), ο λόγος

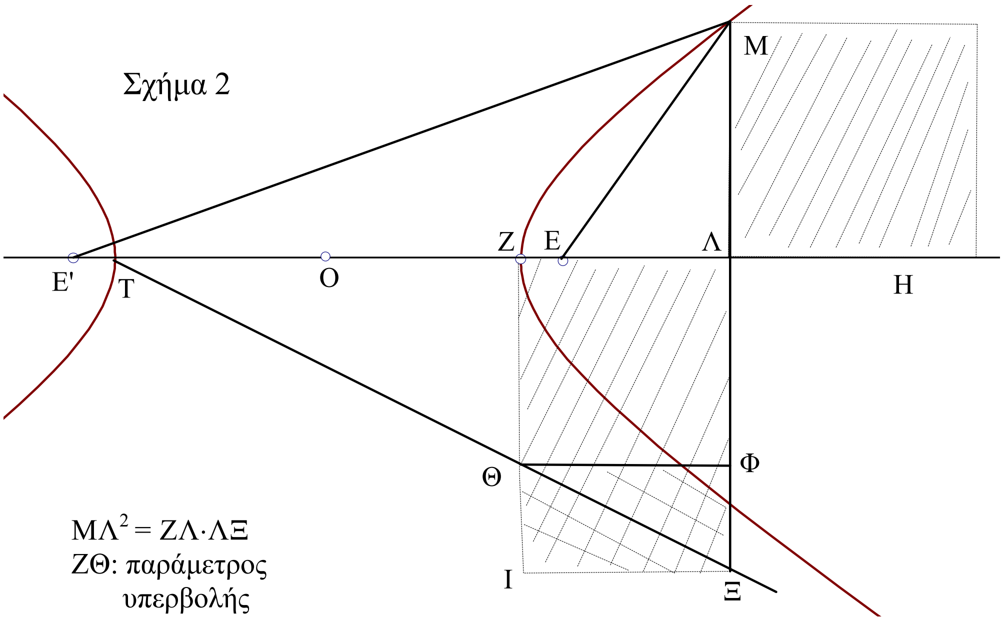
$$\frac{ΜΛ^2}{ΖΛ\cdot ΤΛ} = \frac{ΖΘ}{ΤΖ}$$

είναι σταθερός και χαρακτηρίζει το τυχόν σημείο Μ της υπερβολής.
Έστω Ο το μέσο της ΤΖ και τμήμα α με ΤΖ = 2α. Ορίζουμε τμήμα β ώστε $\frac{ΖΘ}{ΤΖ} = \frac{β^2}{α^2}$, δηλαδή το β επιλέγεται ώστε $β^2 = \frac{αΖΘ}{2}$ (άρα η *παράμετρος της υπερβολής* είναι $p = ΖΘ = 2β^2/α$).
Έτσι έχουμε

$$\frac{ΜΛ^2}{ΖΛ\cdot ΤΛ} = \frac{β^2}{α^2} \quad ή \quad \frac{ΜΛ^2}{ΟΛ^2 - α^2} = \frac{β^2}{α^2} \quad (1)$$

Θεωρούμε τα σημεία Ε′, Ε ώστε ΟΕ′ = ΟΕ = γ, όπου $γ^2 = α^2 + β^2$.

Έχουμε $ΜΕ'^2 - ΜΕ^2 = Ε'Λ^2 - ΕΛ^2 = (γ + ΟΛ)^2 - (ΟΛ - γ)^2 = 4γΟΛ$ (2) και



Σχήμα 2

$$ME'^2 + ME^2 = 2M\Lambda^2 + E\Lambda^2 + E'\Lambda^2 = \frac{2\beta^2(O\Lambda^2 - \alpha^2)}{\alpha^2} + (O\Lambda - \gamma)^2 + (O\Lambda + \gamma)^2$$

$$= \frac{2\beta^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} - 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2O\Lambda^2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (2), (3) παίρνουμε

$$ME'^2 = \frac{\beta^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} - \beta^2 + \gamma^2 + O\Lambda^2 + 2\gamma O\Lambda$$

$$= \frac{\gamma^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} + \alpha^2 + 2\gamma O\Lambda = (\alpha + \frac{\gamma}{\alpha}O\Lambda)^2, \text{ οπότε } ME' = \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}O\Lambda.$$

Όμοια με αφαίρεση των (2), (3) βρίσκουμε $ME^2 = (\frac{\gamma}{\alpha}O\Lambda - \alpha)^2$ και επειδή

$\gamma O\Lambda > \alpha^2$ (αφού $OE\cdot O\Lambda > OZ^2$), παίρνουμε $ME = \frac{\gamma}{\alpha}O\Lambda - \alpha$. Έτσι έχουμε

$$ME' - ME = 2\alpha \quad (4).$$

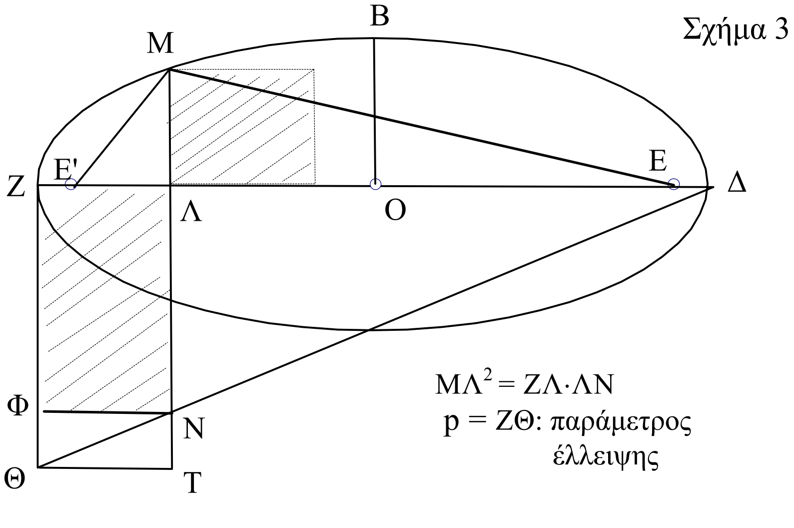
Όμοια και για τον άλλο κλάδο προκύπτει $ME - ME' = 2\alpha$.

Άρα κάθε σημείο της τομής - υπερβολής έχει την ιδιότητα, η διαφορά των αποστάσεών του από τα σταθερά σημεία Ε′, Ε να είναι σταθερή και ίση με 2α. Αποδεικνύεται και το αντίστροφο: αν ισχύει η (4) τότε ισχύει και η (1), λογικό άλλωστε αφού μόνο αυτή και το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιήθηκε για να προκύψει η (4).

Γ. ΕΛΛΕΙΨΗ

Για την έλλειψη, σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλωνίου, θα δείξουμε ότι: υπάρχουν δυο σταθερά σημεία Ε, Ε΄ στο επίπεδο της και ένα σταθερό τμήμα 2α, ώστε, ένα σημείο της καμπύλης αυτής ανήκει σ' αυτήν αν και μόνο αν το άθροισμα των αποστάσεών του από αυτά να είναι ίσο με το σταθερό τμήμα 2α.

Έχοντας υπόψη την Ενότητα Ι.3 της §Α4.3 (Κεφ.1), θεωρούμε την τομή ΜΖ (Σχήμα 3) και ΖΛ μια διάμετρός της. Ας θεωρήσουμε ότι έχει προέλθει από ορθό κώνο, οπότε ΜΛ κάθετη στην ΖΛ. Έστω ΖΔ = 2α και Ο το μέσο του ΖΔ. Όπως είδαμε στην § Ι.3 (Κεφ.1, Α4.3), Σχόλιο 3, σχέση (6), ο λόγος $\dfrac{\text{ΜΛ}^2}{\text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΔ}} = \dfrac{\text{ΖΘ}}{\text{ΖΔ}}$ είναι σταθερός και επομένως ίσος με $\dfrac{\text{ΟΒ}^2}{\text{ΖΟ}^2}$, όπου ΒΟ κάθετη στην ΖΔ. Θέτουμε β = ΟΒ, οπότε έχουμε



Σχήμα 3

$$\frac{\text{ΜΛ}^2}{\text{ΖΛ}\cdot\text{ΛΔ}}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΜΛ}^2}{\alpha^2-\text{ΟΛ}^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (1)$$

(Παρατηρούμε ότι η *παράμετρος* της έλλειψης είναι ίση με $p = \text{ΖΘ} = 2\beta^2/\alpha$)
Έστω α > β. Θεωρούμε τα σημεία Ε′, Ε στον άξονα ΖΔ ώστε ΟΕ′ = ΟΕ = γ, όπου $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Έχουμε τώρα,

$$\text{ΜΕ}^2 - \text{ΜΕ}'^2 = \text{ΕΛ}^2 - \text{Ε}'\text{Λ}^2 = (\gamma + \text{ΟΛ})^2 - (\gamma - \text{ΟΛ})^2 = 4\gamma\text{ΟΛ} \quad (2) \text{ και}$$

$$\text{ΜΕ}^2 + \text{ΜΕ}'^2 = 2\text{ΜΛ}^2 + \text{Ε}'\text{Λ}^2 + \text{ΕΛ}^2 = \frac{2\beta^2(\alpha^2-\text{ΟΛ}^2)}{\alpha^2} + (\gamma - \text{ΟΛ})^2 + (\gamma + \text{ΟΛ})^2$$

$$= 2\beta^2 - \frac{2\beta^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} + 2\gamma^2 + 2O\Lambda^2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (2), (3) παίρνουμε

$$ME^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} + \gamma^2 + O\Lambda^2 + 2\gamma O\Lambda$$

$$= \frac{\gamma^2 O\Lambda^2}{\alpha^2} + \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma O\Lambda = (\alpha + \frac{\gamma}{\alpha} O\Lambda)^2, \text{ οπότε } ME = \alpha + \frac{\gamma}{\alpha} O\Lambda.$$

Όμοια, με αφαίρεση των (2), (3) βρίσκουμε $ME'^2 = (\alpha - \frac{\gamma}{\alpha} O\Lambda)^2$ και επειδή $\alpha^2 > \gamma O\Lambda$ (διότι $O\Delta^2 > OE \cdot O\Lambda$), παίρνουμε $ME' = \alpha - \frac{\gamma}{\alpha} O\Lambda$. Έτσι έχουμε

$$ME' + ME = 2\alpha \quad (4)$$

Άρα κάθε σημείο της τομής - έλλειψης έχει την ιδιότητα, το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σταθερά σημεία Ε′, Ε να είναι σταθερή και ίση με 2α. Αποδεικνύεται και το αντίστροφο: αν ισχύει η (4) τότε ισχύει και η (1), λογικό άλλωστε αφού μόνο αυτή και το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιήθηκε για να προκύψει η (4).

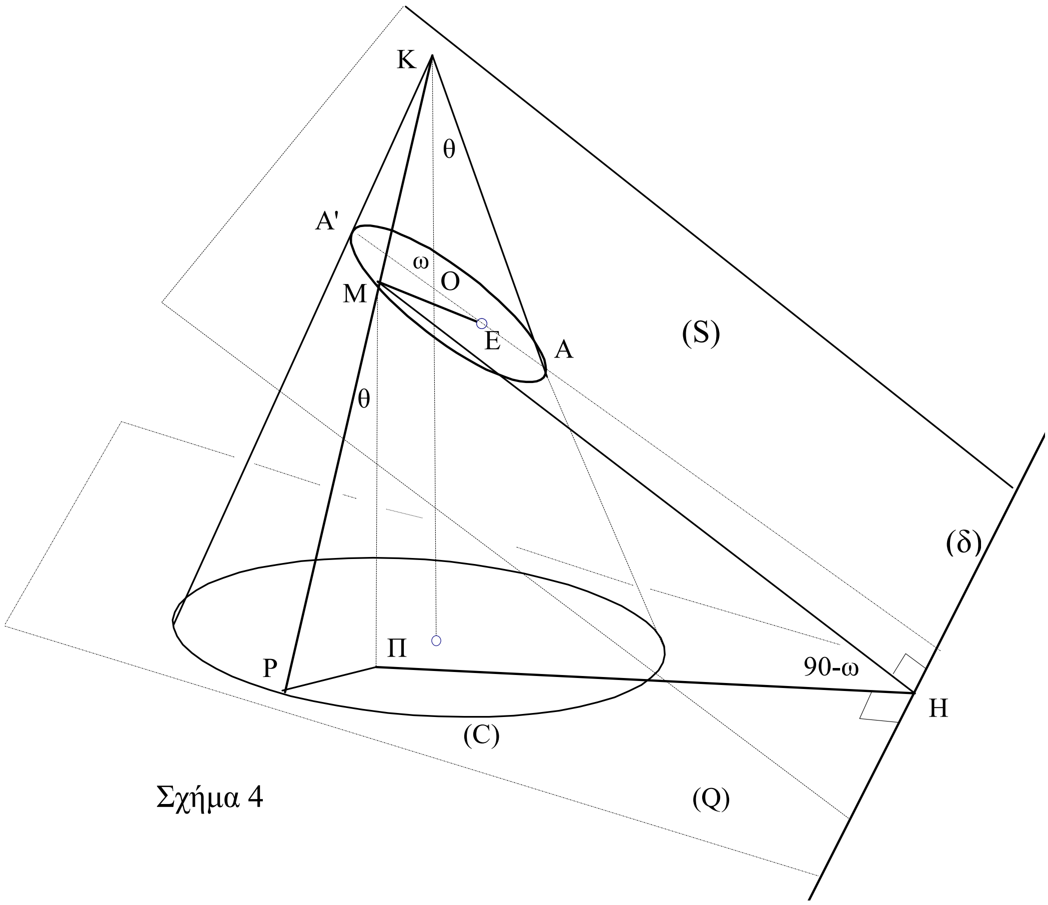
2.2 Η ΓΕΝΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Οι τομές μιας κωνικής κυκλικής επιφάνειας από ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από την κορυφή της είναι επίπεδες καμπύλες που έχουν μια ανέλπιστη κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Έτσι μπορούν να οριστούν με την ιδιότητα αυτή και να αγνοηθεί το τρισδιάστατο γεγονός της υλοποίησης τους ως τομές κωνικής επιφάνειας με επίπεδο.
Θα δείξουμε τώρα εδώ αυτή την κοινή ιδιότητα και των τριών κωνικών, εκτός δηλαδή του κύκλου.

Έστω ένας ορθός κυκλικός κώνος με κορυφή Κ (Σχήμα 4) του οποίου μια γενέτειρα σχηματίζει γωνία (οξεία αναγκαστικά) θ με τον άξονα του κώνου, δηλαδή γωνία κορυφής 2θ, $0 < \theta < 90^o$ και ένα επίπεδο (S) που τέμνει την επιφάνεια του κώνου. Έστω ότι η προβολή του άξονα του κώνου στο επίπεδο (S) είναι η ευθεία Α′ΟΑ. Η Α′Α ορίζει με την ΚΟ ένα επίπεδο κάθετο στο (S) που τέμνει την επιφάνεια του κώνου κατά τις ευθείες ΚΑ′, ΚΑ.

Έστω ω η οξεία γωνία του άξονα του κώνου με το επίπεδο (S), οπότε $A'\hat{O}K = \omega$. Θεωρούμε μια σφαίρα εγγεγραμμένη στον κώνο που εφάπτεται στο επίπεδο (S), έστω στο σημείο Ε και στην επιφάνεια του κώνου κατά μια καμπύλη (C). Τέτοια σφαίρα μπορεί πάντα να κατασκευαστεί (βλ. την σημείωση Ι της §2.3). Έστω (Q) το επίπεδο της καμπύλης (C) και (δ) η τομή των επιπέδων (Q), (S).

Θα δείξουμε ότι η κοινή ιδιότητα των σημείων της καμπύλης-τομής του επιπέδου με την επιφάνεια του κώνου, σχετίζεται με το σταθερό σημείο επαφής Ε της σφαίρας με το επίπεδο τομής (S), (εστία κωνικής) και την ευθεία (δ) (διευθετούσα κωνικής).
Έστω ένα σημείο Μ στην τομή του (S) με την επιφάνεια του κώνου.
Η ΚΜ είναι μια γενέτειρα του κώνου, άρα εφάπτεται στην σφαίρα στο σημείο Ρ.
Επίσης η ΜΕ είναι εφαπτομένη της σφαίρας, αφού το (S) είναι εφαπτόμενο στη σφαίρα, άρα ΜΕ = ΜΡ.



Σχήμα 4

Έστω ΜΠ κάθετη στο επίπεδο (Q), άρα παράλληλη στον άξονα του κώνου, οπότε $\theta = \widehat{\mathrm{P M \Pi}}$. Έστω ΜΗ κάθετη στην (δ), οπότε (θεώρημα τριών καθέτων) η ΠΗ είναι κάθετη στην (δ), άρα η γωνία $\widehat{\Pi \mathrm{H M}}$ είναι η γωνία των επιπέδων (Q) και (S). Είναι $\widehat{\Pi \mathrm{M H}} = \omega$, λόγω ΜΠ//ΚΟ και ΜΗ//Α′Α (η Α′Α είναι κάθετη στη (δ) γιατί το επίπεδο Α′ΚΑ είναι κάθετο στα επίπεδα (Q), (S), άρα είναι κάθετο και στην τομή τους (δ)).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΠΡ με $\theta = \widehat{\mathrm{P M \Pi}}$, έχουμε ΜΠ = ΜΡσυνθ.

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΠΗ με $\omega = \widehat{\text{ΗΜΠ}}$, έχουμε ΜΠ = ΜΗσυνω.
Άρα ΜΡσυνθ = ΜΗσυνω ή, λόγω ΜΕ = ΜΡ, $\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΗ}} = \frac{\text{συνω}}{\text{συνθ}}$.

Ο λόγος $\frac{\text{συνω}}{\text{συνθ}} = \varepsilon$ είναι σταθερός και θετικός, αφού εξαρτάται από τις σταθερές (οξείες) γωνίες ω, θ. Άρα για κάθε σημείο της τομής έχουμε

$$\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΗ}} = \varepsilon .$$

Αντίστροφα: Αν Μ σημείο του επιπέδου (S) με την ιδιότητα αυτή, τότε πρέπει να ανήκει στην τομή του (S) με τον κώνο. Πράγματι, αν ανήκε εκτός της τομής, τότε (από προτάσεις §4.2 (ΙΙ), §5.2 (IV), §6.2 (VI)) έχουμε ΜΕ > εΜΗ, ενώ αν ανήκε στο εσωτερικό της τομής τότε ΜΕ < εΜΗ, άτοπο.

Διερεύνηση

- Αν ω = θ δηλαδή το επίπεδο τομής είναι παράλληλο σε μια γενέτειρα του κώνου, οπότε τέμνει και την βάση του κώνου, τότε συνω = συνθ ή ε = 1 και η τομή είναι παραβολή.

- Αν ω > θ, δηλαδή το επίπεδο τομής τέμνει όλες τις γενέτειρες του κώνου, τότε συνω < συνθ ή 0 < ε < 1, και η τομή είναι έλλειψη.

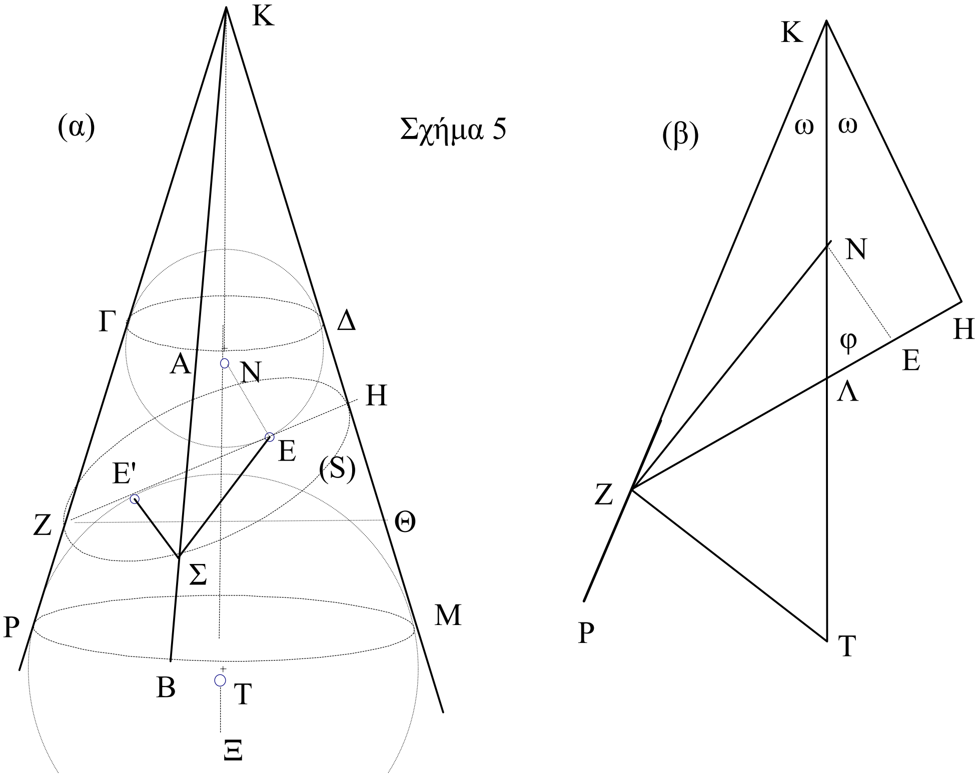
- Αν $0 \leq \omega < \theta$, δηλαδή το επίπεδο τομής τέμνει μέρος της επιφάνειας του κώνου, την βάση του, αλλά και την επιφάνεια του κατακορυφή κώνου, τότε συνω > συνθ ή ε > 1 και η τομή είναι υπερβολή με δυο κλάδους από ένα σε κάθε κώνο.

- Αν $\omega = 90^o$, δηλαδή το επίπεδο τομής είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, τότε ε = 0 και η τομή είναι κύκλος.

2.3. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ DANDELIN

Η απόδειξη των (χαρακτηριστικών) εστιακών ιδιοτήτων των καμπυλών που δημιουργούνται από τις τομές ενός κώνου από ένα επίπεδο, μπορεί να γίνει με ένα κομψό γεωμετρικό τρόπο. Οι παρακάτω είναι οι γνωστότερες και οφείλονται στον Βέλγο μαθηματικό Germinal-Pierre Dandelin (1794-1847).
Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ορθού κυκλικού κώνου με το επίπεδο τομής (S) να τέμνει όλες τις γενέτειρές του και το οποίο δεν περιέχει τον άξονα του κώνου (Σχήμα 5).
Θεωρούμε ένα επίπεδο (Q) που διέρχεται από τον άξονα του κώνου και τέμνει

κάθετα το (S). Το (Q) τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά τις γενέτειρες ΚΡ, ΚΜ και το επίπεδο (S) κατά την ευθεία ΖΗ.



Σχήμα 5

Θεωρούμε μια σφαίρα κέντρου Ν που εφάπτεται εσωτερικά του κώνου (στο κλειστό μέρος του) και στο επίπεδο (S), έστω στο σημείο Ε. Επίσης μια άλλη σφαίρα κέντρου Τ που εφάπτεται εσωτερικά και στον κώνο προς το ανοικτό μέρος του και στο επίπεδο τομής (S), έστω στο σημείο Ε′ (βλέπε σημείωση 1 στο τέλος). Έστω Σ ένα σημείο της τομής του επιπέδου (S) με την επιφάνεια του κώνου. Επειδή η σφαίρα κέντρου Τ εφάπτεται της κωνικής επιφάνειας και του επιπέδου (S) στο Ε′ έχομε ΣΕ′ = ΣΒ. Επίσης, επειδή η σφαίρα κέντρου Ν εφάπτεται της κωνικής επιφάνειας και του επιπέδου (S) στο Ε, έχουμε
ΣΕ = ΣΑ. Άρα

$$ΣΕ' + ΣΕ = ΣΒ + ΣΑ = ΑΒ \ \text{σταθερό}$$

εφόσον το τμήμα ΑΒ είναι το τμήμα της γενέτειρας μεταξύ δυο παραλλήλων και σταθερών επιπέδων ΓΑΔ, ΡΒΜ. Έτσι επειδή και τα σημεία Ε′, Ε είναι σταθερά, η τομή είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε, Ε′. Ισχύουν

- Μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι ο ΖΗ : πράγματι, επειδή
  $ΖΕ' + ΖΕ = ΑΒ = ΗΕ' + ΗΕ$, έχουμε $ΖΕ' = ΗΕ$, οπότε

ΖΗ = ΖΕ + ΕΗ = ΖΕ + ΖΕ′ = ΑΒ.

- Η απόσταση των εστιών είναι ίση με την διαφορά των αποστάσεων της κορυφής του κώνου από τις κορυφές της έλλειψης. Πράγματι, αν στο επίπεδο ΚΖΜ φέρουμε από το σημείο Ζ κάθετη στον άξονα του κώνου, η οποία τέμνει την ΖΜ στο σημείο Θ, έχουμε ΖΕ′ = ΖΡ = ΘΜ και Ε′Η = ΗΜ, οπότε ΕΕ′ = ΖΗ - ΖΕ′ - ΕΗ
= ΑΒ - ΖΡ - ΔΗ
= ΔΜ – ΘΜ - ΔΗ
= ΔΘ - ΔΗ = ΗΘ
= ΚΘ - ΚΗ = ΚΖ - ΚΗ.

Σημειώσεις

1. Δημιουργία των σφαιρών

Εντός της γωνίας ΡΚΜ (Σχήμα 5(α)) βρίσκεται η διχοτόμος της – άξονας του κώνου - ΚΞ. Θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ΖΚΗ που εφάπτεται στις πλευρές του στα σημεία Γ, Ε, Δ καθώς και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του ίδιου τριγώνου στην γωνία Κ που εφάπτεται στα σημεία Ρ, Ε′, Μ. Τα κέντρα των κύκλων αυτών Ν, Τ βρίσκονται στον άξονα ΚΞ. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία ΡΚΞ στρέφεται κατά 360^o περί τον άξονα ΚΞ, η ΚΡ θα διαγράψει την κωνική επιφάνεια και τα ημικύκλια των παραπάνω κύκλων θα διαγράψουν δυο σφαίρες με κέντρα Ν, Τ και ακτίνες ΝΕ, ΤΕ′ αντίστοιχα.
Οι σφαίρες αυτές θα εφάπτονται της κωνικής επιφάνειας κατά τους κύκλους ΓΔ, ΡΜ, αφού ΝΓ, ΤΡ κάθετες στην ΚΡ, αλλά και του επιπέδου (S) στα σημεία Ε, Ε′: πράγματι, επειδή ΝΕ, ΤΕ′ κάθετες στην ΖΗ, τομή των *καθέτων* επιπέδων ΡΚΜ και (S), οι ΝΕ, ΤΕ′ είναι κάθετες στο (S), άρα το (S) είναι εφαπτόμενο στις σφαίρες. Άρα τα τμήματα ΣΕ, ΣΑ είναι εφαπτόμενα (στο επίπεδό τους δεν ανήκει πάντα το Ν) κλπ. Όμοια τα τμήματα ΣΕ′, ΣΒ είναι εφαπτόμενα.

2. Υπολογισμός της ΑΒ.

Η σταθερή απόσταση ΑΒ εξαρτάται από την γωνία κορυφής του κώνου, έστω 2ω και την θέση του επιπέδου τομής. Έστω Λ (Σχήμα 5(β)) το σημείο που το επίπεδο τομής (S) τέμνει τον άξονα του κώνου, φ = ΚΛΗ > ω η οξεία γωνία που σχηματίζει ο άξονας του κώνου με το επίπεδο αυτό (η προβολή της ΛΚ στο (S) είναι η ΛΕ αφού ΝΕ κάθετη στο (S)) και ΚΛ = α.
Είναι ΑΒ = ΝΤσυνω και ΝΤ = ΝΛ + ΛΤ. Τα τμήματα ΝΛ, ΛΤ θα υπολογιστούν από τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου, αφού τα

σημεία Ν, Τ είναι κέντρα του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου αντίστοιχα. Έχουμε $\text{ΝΛ} = \dfrac{\alpha \text{ΖΛ}}{\text{ΖΚ} + \text{ΖΛ}}$, $\text{ΛΤ} = \dfrac{\alpha \text{ΖΛ}}{\text{ΖΚ} - \text{ΖΛ}}$

και από το θεώρημα των ημιτόνων στο τρίγωνο ΖΚΛ προκύπτει

$$\text{ΖΚ} = \frac{\alpha \eta\mu\varphi}{\eta\mu(\varphi - \omega)}, \quad \text{ΖΛ} = \frac{\alpha \eta\mu\omega}{\eta\mu(\varphi - \omega)}, \quad \text{και λόγω } \text{ΑΒ} = (\text{ΝΛ} + \text{ΛΤ})\sigma\upsilon\nu\omega,$$

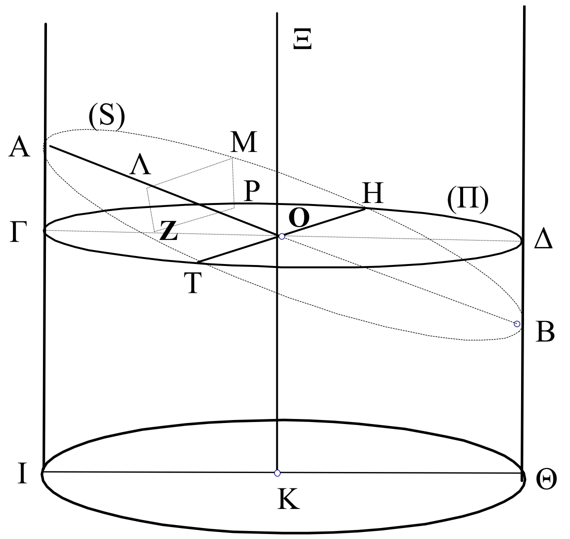
τελικά βρίσκουμε $$\text{ΑΒ} = \frac{\alpha \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu 2\omega}{\eta\mu^2\phi - \eta\mu^2\omega}, \quad 0 < \omega < \varphi < 90^o .$$

- Η παραπάνω απόδειξη του Dandelin μπορεί να προσαρμοστεί και για την παραβολή και την υπερβολή. Στην παραβολή χρειάζεται μια μόνο σφαίρα εφαπτόμενη εσωτερικά στον κώνο και στο επίπεδο τομής (S) σε σημείο που αποτελεί την εστία της. Στην υπερβολή το επίπεδο τομής (S) τέμνει και τον κατά κορυφή κώνο. Έτσι έχουμε πάλι δυο σφαίρες ανά μια εφαπτόμενη στον κατά κορυφή κώνο και στο επίπεδο τομής, ορίζοντας έτσι τις εστίες της υπερβολής.

2.4 Η ΕΛΛΕΙΨΗ ΩΣ ΤΟΜΗ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Εκτός από τομή κωνικής επιφάνειας, η έλλειψη μπορεί να προκύψει και ως τομή κυλίνδρου.
Είδαμε στο ιστορικό μέρος ότι η έλλειψη ήταν γνωστή στον Ευκλείδη και ως τομή κυλίνδρου. Όμως φαίνεται ότι πρώτος ο Σερήνος (4ος αιώνας μ.Χ.) έγραψε σχετική πραγματεία για τις τομές κυλίνδρου και κώνου (βλέπε σχετικά στο ιστορικό μέρος Κεφ. 1, Α7).

Έστω ένας ορθός κύλινδρος, με βάση κύκλο διαμέτρου ΙΚΘ (Σχήμα 6), όχι απαραίτητα ορθός, του οποίου η επιφάνεια τέμνεται από ένα επίπεδο (S), το οποίο τέμνει τον άξονα ΚΞ του κυλίνδρου στο σημείο Ο. Από το Ο θεωρούμε ένα επίπεδο (Q) παράλληλο προς το επίπεδο της βάσης που τέμνει το επίπεδο (S) κατά την ευθεία-διάμετρο ΤΗ. Στο επίπεδο (Q) θεωρούμε μια ευθεία ΟΓ κάθετη στην ΤΗ. Έστω ΑΟΒ η τομή του επιπέδου ΓΟΞ (αξονικό επίπεδο) με το επίπεδο (S) και ΓΟΔ με το επίπεδο (Q).



Σχήμα 6

Έστω Μ τυχόν σημείο της τομής του (S) με την κυλινδρική επιφάνεια. Φέρνουμε ΜΡ//ΑΓ//ΟΞ και ΡΖ κάθετη στην ΟΓ, άρα ΡΖ//ΤΗ. Η ΜΡ ως παράλληλη στην ΑΓ είναι παράλληλη στο επίπεδο ΑΓΟ, άρα το επίπεδο ΜΡΖ τέμνει το επίπεδο ΑΓΟ κατά ευθεία ΛΖ//ΜΡ. Επίσης ΜΛ//ΡΖ, γιατί ΤΗ//ΡΖ, άρα η ΤΗ είναι παράλληλη στο επίπεδο ΜΡΖ. Έτσι ΜΛ//ΡΖ, άρα το τετράπλευρο ΜΡΖΛ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή η τομή του (Q) με την κυλινδρική επιφάνεια είναι κύκλος και ΡΖ κάθετη στην διάμετρο ΓΔ, από το θεώρημα τεμνομένων χορδών κύκλου έχουμε

$\mathrm{PZ}^2 = \Gamma\mathrm{Z}\cdot\mathrm{Z}\Delta$ και $\mathrm{PZ} = \mathrm{M}\Lambda$ (το ΜΡΖΛ είναι παραλληλόγραμμο)

$$\mathrm{M}\Lambda^2 = \Gamma\mathrm{Z}\cdot\mathrm{Z}\Delta. \quad (1)$$

Επειδή ΑΓ//ΛΖ έχουμε $\dfrac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{O}\Lambda} = \dfrac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{A}\Lambda}$ (2) αλλά ΛΖ//ΔΒ, οπότε

$$\frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{O}\Lambda} = \frac{\mathrm{O}\Delta}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OZ}+\mathrm{O}\Delta}{\mathrm{O}\Lambda+\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{Z}\Delta}{\Lambda\mathrm{B}} \quad (3)$$

Από τις (2), (3) έχουμε $\dfrac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{A}\Lambda}\cdot\dfrac{\mathrm{Z}\Delta}{\Lambda\mathrm{B}} = \left(\dfrac{\mathrm{O}\Delta}{\mathrm{OB}}\right)^2$, οπότε από την (1) προκύπτει

$$\frac{\mathrm{M}\Lambda^2}{\mathrm{A}\Lambda\cdot\Lambda\mathrm{B}} = \left(\frac{\mathrm{O}\Delta}{\mathrm{OB}}\right)^2 = \text{σταθερός} \quad (4)$$

και όπως είδαμε στην περίπτωση της τομής κώνου (ιστορικό μέρος, Απολλώνιος), παριστάνει τελικά έλλειψη (με το ορισμό του αθροίσματος).

Άλλη απόδειξη μπορεί να δοθεί με τρόπο παρόμοιο με το Θεώρημα Dandelin: Θεωρούμε δυο σφαίρες που εφάπτονται εσωτερικά της κυλινδρικής επιφάνειας και του επιπέδου (S), εκατέρωθεν του επιπέδου (S). Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν Ε, Ε′ τα σημεία επαφής των σφαιρών με το επίπεδο (S) τότε ΜΕ + ΜΕ′ = σταθερό, δηλαδή τα σημεία Ε, Ε′ είναι οι εστίες της έλλειψης. Στην περίπτωση ορθού κυλίνδρου η απόσταση των κέντρων είναι ίση με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης δηλαδή ίση με $K_1K_2 = 2R/\text{συνω}$ (βλ. σχετικά στο [7]).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

1. Αν ΟΔ = ΟΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΒ, πράγμα που μπορεί να συμβεί στον πλάγιο κύλινδρο, τότε η (4) γίνεται $ΜΛ^2 = ΑΛ\cdot ΛΒ$ και η τομή είναι κύκλος.

2. Αν το αξονικό επίπεδο ΓΟΞ (ή ΑΓΒ) είναι κάθετο στην βάση του κυλίνδρου, άρα και στο επίπεδο ΓΤΗ τότε, επειδή ΟΤ κάθετη στην ΟΓ, θα είναι κάθετη και στο επίπεδο ΑΒΓ, οπότε ΟΤ κάθετη στην ΑΟ. Άρα η ΜΛ είναι κάθετη στην ΑΒ, οπότε η ΑΒ είναι άξονας της έλλειψης. Μια περίπτωση να συμβεί αυτό είναι ο κύλινδρος να είναι ορθός, αλλά μπορεί να είναι και πλάγιος.

3. Ειδικά στην περίπτωση ορθού κυλίνδρου, αν ω είναι η οξεία γωνία των επιπέδων (S) και (Q), τότε $\frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \text{συνω}$, ΟΔ = R και η (4) γίνεται

$$\frac{ΜΛ^2}{R^2 - ΟΛ^2} = \text{συν}^2\omega \quad (5)$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε στο επίπεδο (S) σύστημα αξόνων με ΑΒ τον άξονα των x και ΤΗ τον άξονα των y τότε, αν το Μ έχει συντεταγμένες (x,y), η (5) παίρνει την μορφή $\frac{x^2}{\left(\frac{R}{\text{συνω}}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$,

δηλαδή εξίσωση έλλειψης με μεγάλο ημιάξονα R/συνω και μικρό R.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε έλλειψη με ημιάξονες α, β, α > β > 0, μπορεί να θεωρηθεί ως τομή ορθού κυλίνδρου με βάση κύκλο ακτίνας β με επίπεδο (S) που σχηματίζει οξεία γωνία ω = τοξσυν(β/α), με το επίπεδο του κύκλου.

Πράγματι, αν Ο το κέντρο της έλλειψης, αρκεί να θεωρήσουμε ένα επίπεδο (Q) που διέρχεται από τον μικρό άξονα της έλλειψης και σχηματίζει γωνία ω με συνω = β/α με το επίπεδο της έλλειψης. Στην συνέχεια θεωρούμε τον κύλινδρο με βάση τον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα β κλπ.

Από το πόρισμα αυτό συμπεραίνουμε ότι, για κάθε έλλειψη υπάρχει επίπεδο στο οποίο προβάλλεται ως κύκλος. Το κέντρο του κύκλου είναι η προβολή του κέντρου της έλλειψης. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με τον μικρό ημιάξονα της έλλειψης.

4. Αν το επίπεδο τομής (S) είναι κάθετο στην γενέτειρα ΑΙ (μη ορθού) κυλίνδρου, τότε συνω = ΟΒ/ΟΔ και η κάθετη τομή είναι έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα R και μικρό Rσυνω.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, η (ορθή) προβολή κύκλου ακτίνας R σε επίπεδο που σχηματίζει οξεία γωνία ω με το επίπεδο του κύκλου είναι έλλειψη με ημιάξονες R και Rσυνω. Το κέντρο του κύκλου προβάλλεται στο κέντρο της έλλειψης.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις για τις προβολές, πολλές ιδιότητες της έλλειψης μπορούν να αναχθούν σε ιδιότητες του κύκλου (που αποδεικνύονται ευκολότερα). Αυτό μπορεί να γίνει είτε θεωρώντας την έλλειψη ως προβολή κάποιου κύκλου, είτε θεωρώντας τον κύκλο στον οποίο μπορεί να προβληθεί η έλλειψη.

Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη και τις εξής ιδιότητες των προβολών (στο ίδιο επίπεδο):
α) Αν δυο ευθείες είναι στο ίδιο επίπεδο τότε, αν είναι παράλληλες έπεται ότι και οι προβολές τους είναι παράλληλες και αντίστροφα.
β) Ο λόγος δυο παραλλήλων τμημάτων ισούται με το λόγο των προβολών τους.
γ) Μια εφαπτομένη της έλλειψης προβάλλεται σε εφαπτομένη του κύκλου και αντίστροφα.
δ) Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ προβάλλεται σ’ ένα επίπεδο (Π) στο τρίγωνο Α′Β′Γ′, τότε (Α′Β′Γ′) = (ΑΒΓ)συνω, όπου ω η γωνία του επιπέδου ΑΒΓ με το (Π). Η πρόταση αυτή ισχύει γενικά για ένα κλειστό επίπεδο πολύγωνο ή κάποια απλά άλλα σχήματα.

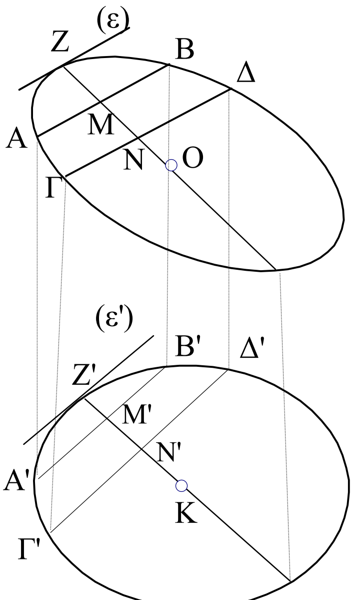
Παράδειγμα
Να δειχθεί ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα δυο παραλλήλων χορδών έλλειψης διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης και ότι η εφαπτομένη στα σημεία που η ευθεία αυτή συναντά την έλλειψη είναι παράλληλη στις χορδές αυτές.

Απόδειξη

Έστω Ο (Σχήμα 7) το κέντρο της έλλειψης και Κ το κέντρο του κύκλου στον οποίο μπορεί να προβληθεί. Έστω ΑΒ, ΓΔ δυο παράλληλες χορδές έλλειψης με μέσα αντίστοιχα Μ, Ν και Α′Β′, Γ′Δ′, Μ′, Ν′ αντίστοιχα οι προβολές των. Επειδή ΑΒ//ΓΔ θα είναι και Α′Β′//Γ′Δ′ και $1 = \frac{AM}{BM} = \frac{A'M'}{B'M'}$.

Άρα Μ′ μέσο της Α′Β′ και όμοια Ν′ μέσο της Γ′Δ′. Αλλά η Μ′Ν′, ως γνωστόν, διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου και επειδή η προβολή της ΜΝ είναι η Μ′Ν′ και το Ο προβάλλεται στο Κ, το Ο να ανήκει στην ΜΝ.

Επειδή η ΜΝ προβάλλεται στην Μ′Ν′, η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο Ζ προβάλλεται στην εφαπτομένη στο σημείο Ζ′ του κύκλου, έστω (ε′).



Σχήμα 7

Αλλά η (ε′) είναι παράλληλη στην Μ′Ν′ αφού, ως γνωστόν, είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΖ′. Άρα και η (ε) είναι παράλληλη στην ΜΝ.

2.5 ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΩΝΟ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

(Αναλυτική αντιμετώπιση)

Ένα άλλος τρόπος για να δούμε πως από ένα κώνο μπορούμε να φτάσουμε στις επίπεδες καμπύλες - κωνικές είναι να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου και του επιπέδου. Αυτό ακριβώς θα κάνουμε στην συνέχεια.

Θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz (Σχήμα 8) στον χώρο και τον κώνο (κωνική επιφάνεια) $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$, $\lambda > 0$, που προκύπτει από την περιστροφή της ευθείας $y = \pm\lambda z$ (του επιπέδου yz, δηλαδή με $x = 0$) περί τον άξονα των z. Θεωρούμε και ένα επίπεδο (Q) που τέμνει τον κώνο εκτός της κορυφής του Ο και χωρίς βλάβη μπορούμε να το υποθέσουμε κάθετο στο επίπεδο yz. Έτσι το επίπεδο (Q) είναι της μορφής $\alpha y + \beta z = \gamma$, $\gamma \neq 0$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i) $\beta = 0$, δηλαδή, το επίπεδο $y = \kappa$, $\kappa \neq 0$, είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου (άξονα των z) και τέμνει τον πάνω και τον κάτω κώνο. Η τομή αυτή έχει εξίσωση

$$\lambda^2 z^2 - x^2 = \kappa^2,$$

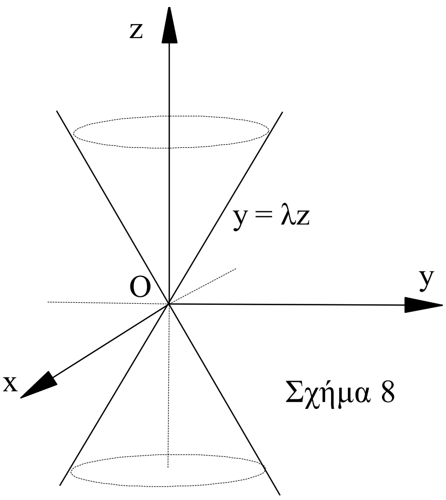
δηλαδή είναι υπερβολή με άξονα παράλληλο στον z άξονα (πάνω στο επίπεδο $y = \kappa$ με κλάδους $z \geq \frac{|\kappa|}{\lambda}$, $z \leq -\frac{|\kappa|}{\lambda}$).

ii) $\beta \neq 0$, το επίπεδο $\alpha y + \beta z = \gamma$, $\gamma \neq 0$, έχει την μορφή $z = \delta y + \theta$, $\theta \neq 0$, οπότε η τομή του με τον κώνο έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2(1 - \delta^2\lambda^2) - 2\lambda^2\delta\theta y = \lambda^2\theta^2$$

Έτσι, αν $1 - \lambda^2\delta^2 = 0$ ή $|\delta| = 1/\lambda$, η τομή είναι καμπύλη με εξίσωση

$$y = \frac{x^2}{2\lambda^2\theta} - \frac{\theta}{\lambda},$$ δηλαδή είναι παραβολή.



Σχήμα 8

Ειδικότερα, αν $\delta = 1/\lambda$ τότε επίπεδο τομής $z = (1/\lambda)y + \theta$ είναι παράλληλο στην ευθεία-γενέτειρα $y = \lambda z$, ενώ αν $\delta = -1/\lambda$ τότε το επίπεδο $z = (-1/\lambda)y + \theta$ είναι παράλληλο στην γενέτειρα $y = -\lambda z$. Σε κάθε περίπτωση, αν $\theta > 0$ το επίπεδο τομής τέμνει τον πάνω κώνο, ενώ αν $\theta < 0$ τέμνει τον κάτω κώνο.

- Αν $\alpha = 1 - \lambda^2\delta^2 > 0$ ή $|\delta| < 1/\lambda$, η τομή έχει εξίσωση

$$x^2 + \alpha\left(y - \frac{\lambda^2\delta\theta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\lambda^2\theta^2}{\alpha},$$

δηλαδή είναι έλλειψη. Στην περίπτωση αυτή το επίπεδο τομής $z = \delta y + \theta$, αν μεν $\theta > 0$ τέμνει (μόνο) τον πάνω κώνο (δηλαδή με $z > 0$), ενώ αν $\theta < 0$ τέμνει τον κάτω κώνο (δηλαδή με $z < 0$). Ειδικά, αν $\alpha = 1$ ή $\delta = 0$ τότε η τομή είναι κύκλος. Το επίπεδο τομής είναι τότε κάθετο στον άξονα του κώνου.

- Αν $\alpha = 1 - \lambda^2\delta^2 < 0$ ή $|\delta| > 1/\lambda$, τότε η τομή έχει εξίσωση

$$x^2 + \alpha\left(y - \frac{\lambda^2\delta\theta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\lambda^2\theta^2}{\alpha}$$

δηλαδή έχουμε πάλι υπερβολή, αλλά με άξονα μη παράλληλο προς τον z-άξονα (αντίθετα με την περίπτωση (i)). Στην περίπτωση αυτή το επίπεδο $z = \delta y + \theta$ τέμνει τον πάνω και τον κάτω κώνο, οπότε έχουμε τους δυο κλάδους της υπερβολής ($z > 0$, $z < 0$).

* *

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πώς από τον Απολλώνιο ορισμό των κωνικών προκύπτει ότι οι τρεις κωνικές έχουν την ιδιότητα του λόγου. Αυτό το τελευταίο θα αποτελέσει νέα αφετηρία για τον ορισμό των κωνικών. Συγκεκριμένα, στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε πώς, *με Ευκλείδεια μέσα και με αποδείξεις που μένουν στο επίπεδο (όχι στον χώρο), προκύπτουν οι βασικές ιδιότητες των κωνικών*. Το βασικό πλεονέκτημα της μελέτης των κωνικών από την ιδιότητα του λόγου είναι ότι ο ορισμός αυτός είναι ενοποιητικός, και εκτός από την συντομία του, επιτρέπει την ευχερέστερη απόδειξη πολλών ιδιοτήτων των καμπυλών αυτών. Επίσης δίνει την δυνατότητα κοινής απόδειξης ιδιοτήτων που αφορούν και τις τρεις καμπύλες. Στα επί μέρους κεφάλαια που αφορούν τις κεντρικές κωνικές (έλλειψη και υπερβολή) θα αποδείξουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την εστιακή ιδιότητα (άθροίσματος και διαφοράς) των καμπυλών αυτών. Εκτός από τον ορισμό στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε την σχετική ορολογία που είναι απαραίτητη στην μελέτη μας και τέλος θα καταγράψουμε τις πέντε σπουδαιότερες κοινές ιδιότητες των κωνικών τομών.

3.1 ΝΕΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Ο ορισμός που ακολουθεί έχει ως αφετηρία την ιδιότητα του λόγου των κωνικών, η οποία ήταν γνωστή στον Ευκλείδη (βλ. Κεφ. 1, Α2). Οι αποδείξεις που παραθέτουμε, θα αρχίζουν από τον εν λόγω ορισμό, χωρίς χρήση ιδιοτήτων των κωνικών, που αποδείχθηκαν με άλλο τρόπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Σ' ένα επίπεδο θεωρούμε ένα (σταθερό) σημείο Ε και μια (σταθερή) ευθεία (δ), στην οποία δεν ανήκει το σημείο Ε. Καλούμε *κωνική τομή* το σύνολο των

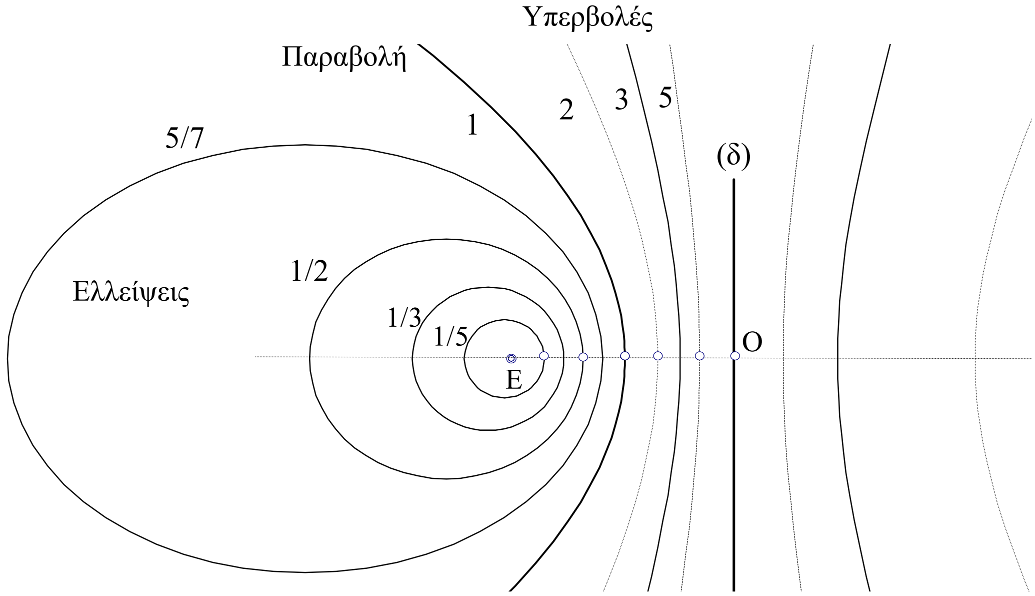
σημείων ενός επιπέδου τα οποία έχουν την ιδιότητα, ο λόγος των αποστάσεων τους από το σημείο Ε και την ευθεία (δ), είναι σταθερός.
Ο σταθερός αυτός λόγος που συμβολίζεται με ε, λέγεται *εκκεντρότητα* της κωνικής. Το σημείο Ε λέγεται *εστία* και η ευθεία (δ) *διευθετούσα* της κωνικής.

- Αν ε = 1 η κωνική λέγεται παραβολή.

- Αν 0 < ε < 1 η κωνική τομή λέγεται έλλειψη.

- Αν ε > 1 η κωνική λέγεται υπερβολή.

Βλέπουμε ότι με βάση τον ορισμό αυτό η εκκεντρότητα έχει μια γεωμετρική σημασία. Η μεταβολή της, από τιμές θετικές και μικρότερες του ένα, στην τιμή ένα και στην συνέχεια σε τιμές μεγαλύτερες του ένα, χαρακτηρίζει την εκάστοτε αντίστοιχη καμπύλη. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ακριβώς αυτή η συνέπεια στην μεταβολή της εκκεντρότητας.
Η έλλειψη και η υπερβολή λέγονται και *κεντρικές κωνικές,* επειδή όπως θα δούμε έχουν κέντρο συμμετρίας.



Κωνικές τομές, με κοινή εστία Ε, διευθετούσα (δ), ΟΕ = 6 και εκκεντρικότητα ε = 1/5, 1/3, 1/2, 5/7, 1, 2, 3, 5.

Σημείωση
Ο ορισμός αυτός δεν περιλαμβάνει την περίπτωση του κύκλου, οποίος είναι ασφαλώς κωνική τομή. Συνηθίζουμε όμως όταν μιλάμε για κωνικές, να αναφερόμαστε μόνο στις καμπύλες, παραβολή, έλλειψη και υπερβολή. Αυτό δεν

είναι παράλειψη, γιατί ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική μορφή έλλειψης. Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση που η κωνική τομή μπορεί να είναι ευθεία ή σημείο (όταν το επίπεδο τομής διέρχεται από τον άξονα του κώνου ή μόνο από την κορυφή του), αλλά αυτές, τις εκφυλισμένες περιπτώσεις, συνήθως δεν τις εξετάζουμε, ούτε τις περιλαμβάνουμε στην ονομασία κωνικές τομές.

3.2 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

1. *Χορδή* κωνικής λέμε ένα ευθύγραμμο τμήμα (ή μια ευθεία) που ενώνει δυο σημεία της κωνικής. Το πότε έχουμε τμήμα ή ευθεία θα συνάγεται κάθε φορά από τα συμφραζόμενα και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα. Το ίδιο θα ισχύει και σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις.

2. *Εστιακή χορδή* (ή εστιακή ακτίνα) κωνικής λέμε μια χορδή της κωνικής που διέρχεται από την εστία της, ενώ *εστιακτομή* (latus rectum) λέμε την χορδή της κωνικής που διέρχεται από την εστία της και είναι κάθετη στον άξονά της. Επίσης εστιακή ακτίνα ενός σημείου λέμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και την εστία (ή μια εστία) της κωνικής.

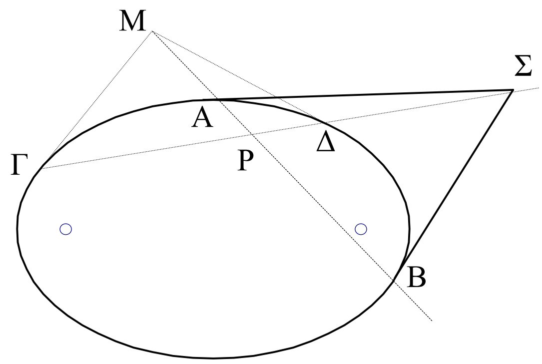
3. *Εφαπτομένη κωνικής* (και κύκλου) σ' ένα σημείο της Μ, λέμε την ευθεία που διέρχεται από το Μ, δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την κωνική και η κωνική (για την υπερβολή ο ένας κλάδος της) ανήκει μόνο στο ένα από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία αυτή.

4. *Κάθετη κωνικής* σ' ένα σημείο της (και γενικά καμπύλης) λέμε την ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της κωνικής στο σημείο αυτό.

5. *Διάμετρο* παραβολής λέμε μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονά της, ενώ διάμετρο έλλειψης ή υπερβολής λέμε μια χορδή της που διέρχεται από το κέντρο της. Η διάμετρος μιας κωνικής έχει την ιδιότητα (βλέπε σχετικά την γενική ιδιότητα 4 των κωνικών και Πρόταση 7 (§4.3), Πρόταση 10 (§5.4)), να ανήκουν σ' αυτήν τα μέσα παραλλήλων χορδών της κωνικής.
Ο Απολλώνιος ορίζει την διάμετρο κωνικής μέσω αυτής της ιδιότητας.

6. *Συζυγείς διάμετροι*: στην έλλειψη και στην υπερβολή δυο διάμετροι λέγονται συζυγείς, αν η εφαπτομένη στο σημείο που η μια διάμετρος συναντά την κωνική είναι παράλληλη προς την άλλη διάμετρο (Βλέπε σχετικά την γενική ιδιότητα 4 των κωνικών).

7. *Πολική Σημείου*



Έστω Σ σημείο του επιπέδου μιας κωνικής και μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Σ και τέμνει την κωνική στα σημεία Γ, Δ. Ονομάζουμε *πολική του σημείου Σ* ως προς την κωνική αυτή, το γεωμετρικό τόπο των συζυγών αρμονικών σημείων Ρ του Σ ως προς τα σημεία Γ, Δ.

Αποδεικνύεται ότι η πολική του Σ είναι ευθεία και το Σ λέγεται *πόλος* της ευθείας αυτής.
Αν το σημείο Σ είναι εκτός της κωνικής και ΣΑ, ΣΒ τα εφαπτόμενα τμήματα προς αυτήν, τότε η ευθεία ΑΒ είναι η πολική του Σ ως προς την κωνική αυτή.
Η θεωρία των πόλων και πολικών είναι ένα ενδιαφέρον κεφάλαιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας και με βάσει αυτή, πολλές ιδιότητες του κύκλου μεταφέρονται στις κωνικές και αντίστροφα (βλέπε π.χ. [11], σελ. 234-249, [8], σελ. 177).

3.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΩΝΙΚΩΝ

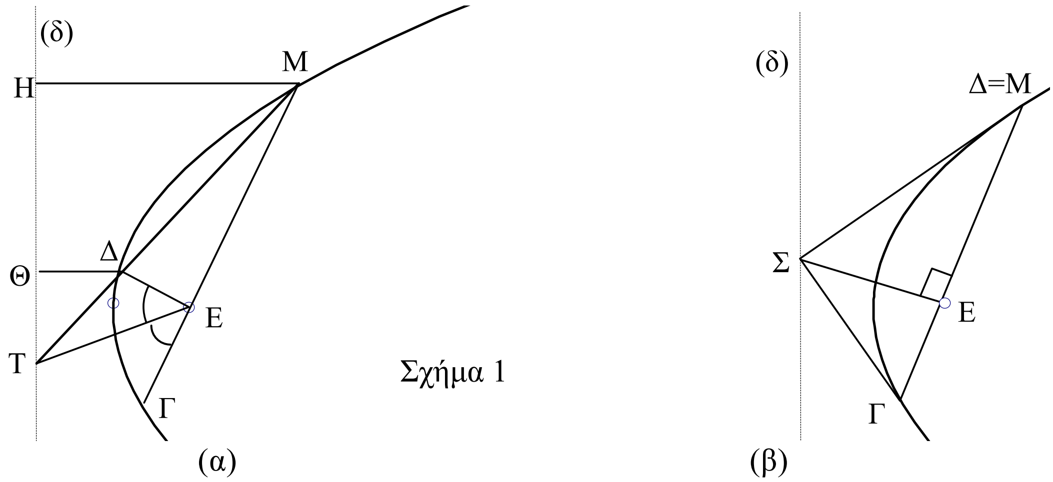
Οι κωνικές τομές έχουν πολλές κοινές ιδιότητες που η ταυτόχρονη απόδειξή τους διευκολύνει την μελέτη τους. Εδώ θα αναφέρουμε τις σπουδαιότερες για να υπάρχει μια γενική εικόνα των κοινών ιδιοτήτων, αλλά για λόγους διδακτικούς δεν θα παρουσιάσουμε εδώ τις αποδείξεις τους. Οι αποδείξεις υπάρχουν τις οικείες ενότητες κάθε καμπύλης.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1 (Χορδή κωνικής)

Αν μια ευθεία τέμνει την κωνική στα σημεία Μ, Δ και την διευθετούσα της στο Τ, τότε η ΕΤ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της γωνίας ΜΕΔ (Σχήμα (1) (α)).

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2 (Εφαπτομένη κωνικής)

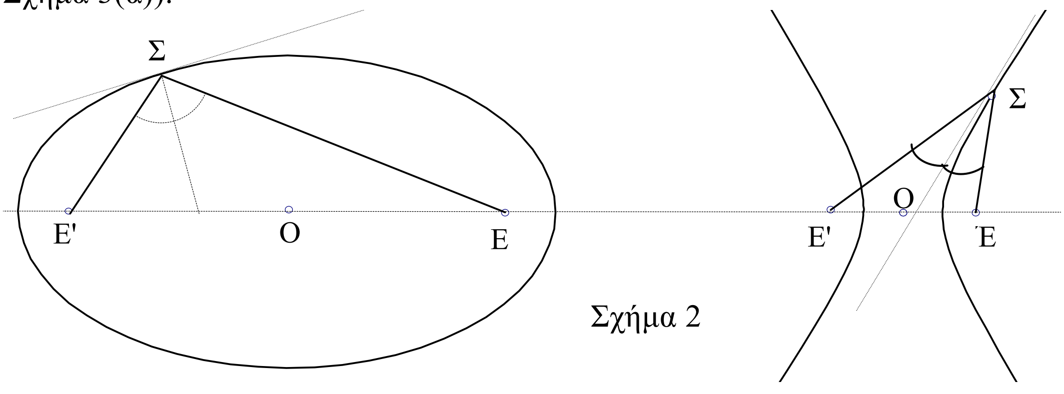
Αν η εφαπτομένη στο σημείο Μ μιας κωνικής τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο Σ, τότε το τμήμα ΜΣ φαίνεται από την εστία της με ορθή γωνία (Σχήμα (1) (β)).



Σχήμα 1

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3 (Ανακλαστική ιδιότητα κωνικών)

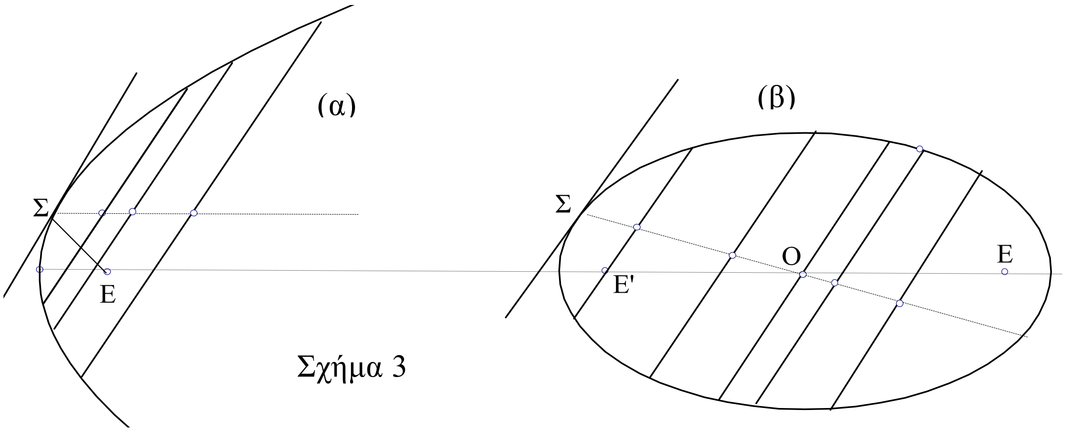
Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο μιας κωνικής σχηματίζει ίσες γωνίες με τις εστιακές ακτίνες του σημείου αυτού (Σχήμα 2). Για την παραβολή η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της σχηματίζει ίσες γωνίες με την εστιακή ακτίνα του σημείου αυτού και την παράλληλη από το σημείο προς τον άξονα της παραβολής (θα μπορούσαμε να εντάξουμε και την ιδιότητα αυτή της παραβολής στην γενική περίπτωση, θεωρώντας ότι έχει μια δεύτερη εστία αρκετά μακριά, στο άπειρο, Σχήμα 3(α)).



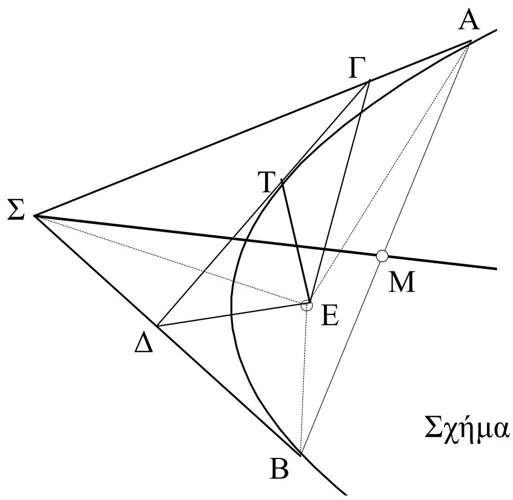
Σχήμα 2

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4 (Μέσα χορδών κωνικής)

Τα μέσα, μιας δεδομένης δέσμης, παραλλήλων μεταξύ τους, χορδών κωνικής ανήκουν σε μια (σταθερή) ευθεία - διάμετρο κωνικής. Επί πλέον, αν η ευθεία αυτή τέμνει την κωνική στο σημείο Σ, τότε η παράλληλη από το Σ σε μια από τις χορδές αυτές είναι εφαπτομένη στην κωνική στο σημείο αυτό (Σχήμα 3).



Σχήμα 3



$\Sigma\hat{E}A = \Sigma\hat{E}B$

$\Gamma\hat{E}\Delta = \Sigma\hat{E}A = c$

Σχήμα 4

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5 (Εφαπτόμενα τμήματα κωνικής)

Έστω δυο εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ, (Σχήμα 4) από ένα σημείο Σ εκτός κωνικής, προς την κωνική (για την υπερβολή προς τον ίδιο κλάδο). Τότε ισχύουν

Α. Τα τμήματα αυτά φαίνονται από την εστία (εστίες) της υπό ίσες γωνίες.

Β. Αν τα τμήματα αυτά είναι σταθερά και μια οποιαδήποτε εφαπτομένη της κωνικής τα τέμνει, το τμήμα που ορίζεται πάνω σ’ αυτήν, από τα δυο εφαπτόμενα τμήματα, φαίνεται από την εστία με σταθερή γωνία.

Γ. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Σ και το μέσο του ΑΒ είναι διάμετρος της κωνικής.

Δ. Αν η χορδή ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε τότε τα τμήματα ΣΑ, ΣΒ φαίνονται από την εστία υπό ορθή γωνία και το σημείο Σ ανήκει στην διευθετούσα.

* * *

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο   Τ Ε Τ Α Ρ Τ Ο

Π Α Ρ Α Β Ο Λ Η

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως αποδεικνύονται με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ορισμένες γενικές ιδιότητες των κωνικών τομών. Στο παρόν κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε ειδικά στην παραβολή. Θα αποδείξουμε πάλι με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μερικές από τις σπουδαιότερες ιδιότητες της καμπύλης αυτής, ενώ άλλες αναφέρουμε στο τέλος χωρίς απόδειξη. Πρέπει να έχουμε υπόψη ότι ο κατάλογος των ιδιοτήτων των κωνικών τομών είναι ανεξάντλητος. Αρκετές από τις ιδιότητες αυτές ήταν γνωστές στους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, και ειδικά στον Απολλώνιο τον Περγαίο.
Στο περίφημο έργο του *Κωνικά* περιέχονται πάρα πολλές από τις γνωστές σήμερα ιδιότητες των κωνικών.

Ας έχουμε πάντως υπόψη ότι οι αποδείξεις στην εργασία αυτή στηρίζονται στον νέο ορισμό που δώσαμε στις κωνικές, επομένως διαφέρουν γενικά από αυτές του Απολλωνίου. Υπενθυμίζουμε πρώτα μερικά βασικά στοιχεία και στοιχειώδεις ιδιότητες της παραβολής.

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Όπως ήδη αναφέραμε στον γενικό ορισμό των κωνικών, αν Ε είναι σημείο ενός επιπέδου και (δ) ευθεία του που δεν διέρχεται από το Ε, ονομάζουμε παραβολή με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία (δ), τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$ΜΕ = ΜΗ,$$

όπου Η η προβολή του Μ στην ευθεία (δ) (Σχήμα 1).
Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Ε και είναι κάθετη στην διευθετούσα λέγεται **άξονας** της παραβολής, ενώ η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και συμβολίζεται συνήθως με p (ο Απολλώνιος, ορίζοντας διαφορετικά την παραβολή, θεωρεί ως παράμετρο της παραβολής το 2p).
Παρατηρούμε ότι το μέσο Ο του καθέτου τμήματος ΕΔ, από την εστία στην διευθετούσα, ανήκει στην παραβολή και λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

Χορδή μιας παραβολής λέμε ένα τμήμα που συνδέει δυο σημεία της, ενώ **διάμετρο** λέμε μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονά της.

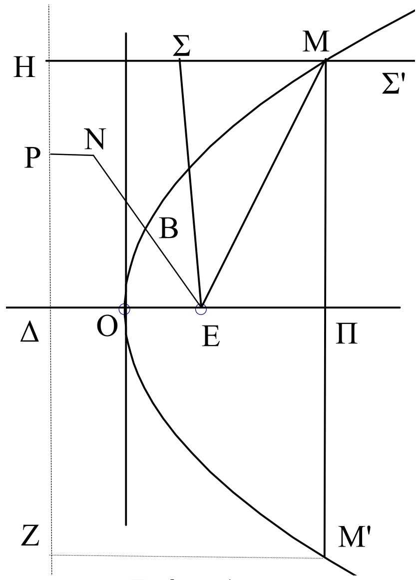
4.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ι. Θεωρούμε την κάθετη στον άξονα της παραβολής στην κορυφή της Ο. Τότε η παραβολή βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο ημιεπίπεδο της ευθείας αυτής που περιέχει την εστία της.

Πράγματι, αν Ν σημείο στο αντικείμενο ημιεπίπεδο (ή και στην κάθετη στο Ο, αλλά διάφορο του Ο) τότε (Σχήμα 1)

$$NP < N\Delta < NE,$$

οπότε δεν ισχύει η ισότητα. Από αυτό συμπεραίνουμε ακόμη ότι η κάθετη στον άξονα της παραβολής στην κορυφή της είναι *εφαπτομένη* της παραβολής.



Σχήμα 1

ΙΙ. Κάθε σημείο εκτός της παραβολής, απέχει από την εστία περισσότερο από όσο απέχει από την διευθετούσα, ενώ αν το σημείο βρίσκεται εντός, απέχει λιγότερο.

Πράγματι, έστω σημείο Σ εκτός της παραβολής, δεξιά της διευθετούσας. Φέρνουμε από το Σ παράλληλη στον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Μ και την διευθετούσα στο Η (Σχήμα 1).
Τότε έχουμε $H\Sigma + \Sigma M = ME < \Sigma E + \Sigma M$, άρα $H\Sigma < \Sigma E$.
Αν Σ αριστερά της διευθετούσας και η ΣΕ την τέμνει στο σημείο Λ, τότε
$\Sigma E > \Sigma\Lambda > \Sigma H$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι αν το Σ′ (Σχήμα 1) βρίσκεται εντός της παραβολής, τότε $\Sigma'E < \Sigma'H$.

- Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι, μια ευθεία που έχει κοινό σημείο με την παραβολή είναι εφαπτομένη στην παραβολή, αν και μόνο αν η απόσταση κάθε σημείου της, εκτός του σημείου επαφής, από την εστία είναι μεγαλύτερη από την απόστασή του από την διευθετούσα.

Επομένως από ένα σημείο που βρίσκεται εντός παραβολής, προς το κοίλο μέρος της, δεν διέρχεται εφαπτομένη της παραβολής. Επίσης συμπεραίνουμε ότι η έλλειψη με την ίδια εστία και διευθετούσα βρίσκεται μέσα στην παραβολή ενώ η υπερβολή με την ίδια εστία και διευθετούσα βρίσκεται έξω από την παραβολή.

Εύκολα επίσης αποδεικνύεται ότι,

ΙΙΙ. Ο άξονας της παραβολής είναι άξονας συμμετρίας της.

IV. Κάθε διάμετρος παραβολής την τέμνει σ' ένα μόνο σημείο.

Πράγματι, έστω μια διάμετρος παραβολής, δηλαδή μια παράλληλη προς τον άξονά της από το σημείο Η της διευθετούσας (Σχήμα 1). Τότε η μεσοκάθετη στο τμήμα ΗΕ τέμνει την διάμετρο σ' ένα σημείο Μ με ΜΕ = ΜΗ, άρα είναι σημείο της παραβολής. Έστω τώρα ότι η διάμετρος ΗΜ τέμνει την παραβολή και στο σημείο Σ′. Τότε

$$Σ'Ε = Σ'Η = ΗΜ + ΜΣ' = ΜΕ + ΜΣ',$$

οπότε η ευθεία ΗΣ′ ταυτίζεται με την ΜΕ, άτοπο. Άρα κάθε διάμετρος τέμνει την παραβολή σ' ένα μόνο σημείο, χωρίς βέβαια να είναι εφαπτομένη αφού υπάρχουν σημεία της παραβολής εκατέρωθεν της διαμέτρου.

V. Εξισώσεις παραβολής

Αν και δεν θα μελετήσουμε την παραβολή με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας κρίνουμε σκόπιμο να υπενθυμίσουμε μερικά σχετικά στοιχεία.

Α. Αν θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων την κορυφή Ο της παραβολής με παράμετρο $p = |2α|$ και ως άξονα των x τον άξονα της παραβολής, τότε:

Αν η εστία Ε βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox, δηλαδή Ε(α, 0), όπου $α > 0$, η παραβολή έχει καρτεσιανή (κανονική) εξίσωση

$$y^2 = 4αx.$$

Επίσης με μεθόδους του Απειροστικού λογισμού ή αλλιώς, αποδεικνύεται ότι η εφαπτομένη της παραβολής σ' ένα σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση

$$yy_1 = 2α(x + x_1).$$

Β. Οι παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής $y^2 = 4αx$ είναι

$$x = αt^2,\ \ y = 2αt,\ t \geq 0.$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ χρήσιμες όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα παραβολής με Αναλυτική Γεωμετρία.

Στα επόμενα επανερχόμαστε στις μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

4.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Στις παρακάτω προτάσεις, αν δεν αναφέρεται διαφορετικά, θα σημειώνουμε με Ε την εστία, με Ο την κορυφή και με p την παράμετρο της παραβολής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (Χορδές παραβολής)

Έστω Μ σημείο της παραβολής (με παράμετρο p = 2α) και ΜΣ μια χορδή της που τέμνει τον άξονα στο σημείο Τ. Αν Π, Ν οι προβολές των Μ, Σ αντίστοιχα στον άξονα της παραβολής και Ο η κορυφή της παραβολής τότε ισχύουν:

α) $ΜΠ^2 = 4ΟΕ \cdot ΟΠ = 2p \cdot ΟΠ$ και αντιστρόφως, αν $ΜΠ^2 = 4ΟΕ \cdot ΟΠ$ τότε το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή.

β) Το τμήμα ΟΤ είναι μέσο ανάλογο των τμημάτων ΟΠ, ΟΝ.

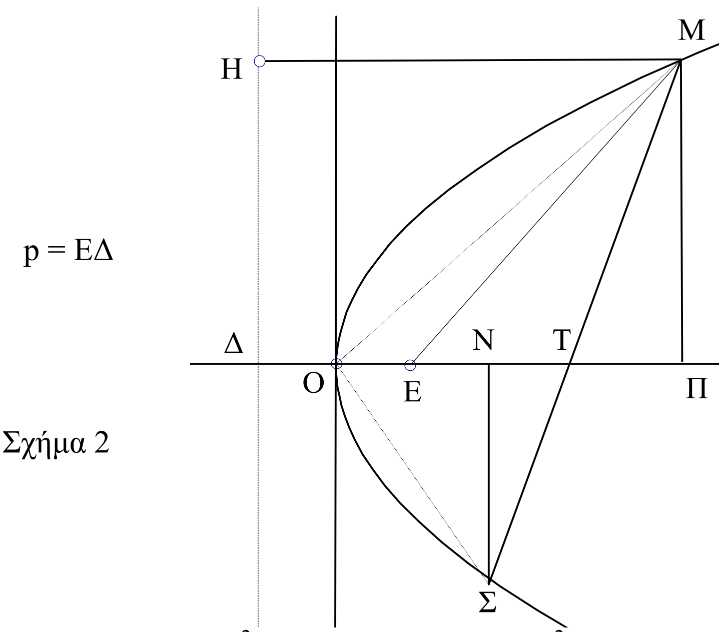
γ) Αν το σημείο Τ είναι σταθερό τότε το γινόμενο των αποστάσεων των Μ, Σ από τον άξονα της παραβολής είναι σταθερό και ισχύει $ΜΠ \cdot ΣΝ = 4ΟΕ \cdot ΟΤ$

Απόδειξη

α) Αφού ΔΟ = ΟΕ = p/2, (Σχήμα 2) έχουμε

$$(ΔΟ + ΟΠ)^2 = ΔΠ^2 = ΜΕ^2 = ΜΠ^2 + (ΟΠ - ΟΕ)^2,$$

οπότε $ΜΠ^2 = 4ΟΕ \cdot ΟΠ = 2p \cdot ΟΠ$.



Σχήμα 2

Αντιστρόφως: Αν $ΜΠ^2 = 4ΟΕ \cdot ΟΠ$, τότε $ΜΠ^2 = (ΟΠ + ΟΕ)^2 - (ΟΠ - ΟΕ)^2$, ή $ΜΠ^2 + ΕΠ^2 = ΔΠ^2$ ή $ΜΕ^2 = ΔΠ^2$ ή ΜΕ = ΜΗ, δηλαδή το Μ ανήκει στην παραβολή.

β) Από τα όμοια τρίγωνα ΣΤΝ, ΤΜΠ, έχουμε $\frac{ΜΠ}{ΝΣ} = \frac{ΤΠ}{ΤΝ}$ ή $\frac{ΜΠ^2}{ΝΣ^2} = \frac{ΤΠ^2}{ΤΝ^2}$ ή

$$\frac{2pΟΠ}{2pΟΝ} = \frac{(ΟΠ - ΟΤ)^2}{(ΟΤ - ΟΝ)^2} \text{ ή } ΟΠ(ΟΤ^2 + ΟΝ^2) = ΟΝ(ΟΠ^2 + ΟΤ^2) \text{ ή}$$

$$ΟΠ{\cdot}ΟΝ(ΟΝ - ΟΠ) = ΟΤ^2(ΟΝ - ΟΠ)$$

Έτσι, αν Ν διάφορο του Π, τότε $ΟΠ{\cdot}ΟΝ = ΟΤ^2$, ενώ αν το Ν ταυτίζεται με το Π τότε η χορδή ΜΣ είναι κάθετη στον άξονα οπότε ΟΤ = ΟΠ = ΟΝ, άρα και πάλι $ΟΠ{\cdot}ΟΝ = ΟΤ^2$.

γ) Λόγω των (α), (β) έχουμε

$ΜΠ^2{\cdot}ΣΝ^2 = (2p{\cdot}ΟΠ)(2p{\cdot}ΟΝ) = 4p^2{\cdot}ΟΝ{\cdot}ΟΠ = 4p^2{\cdot}ΟΤ^2$, οπότε και

$ΜΠ{\cdot}ΣΝ = 2p{\cdot}ΟΤ$, σταθερό.

Σημείωση

Η σχέση $ΜΠ^2 = 2p{\cdot}ΟΠ$ είναι ουσιαστικά η εξίσωση της παραβολής ως προς καρτεσιανό σύστημα αρχής Ο με άξονα τον x τον άξονα της παραβολής και με παράμετρο p = ΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1

Αν μια χορδή παραβολής ΜΣ τέμνει κάθετα τον άξονά της στο σημείο Π, τότε $ΜΣ^2 = 8pΟΠ$. Αν μάλιστα διέρχεται και από την εστία της (εστιακτομή) τότε ΜΣ = 2p (αυτή θεωρεί ως παράμετρο της παραβολής ο Απολλώνιος).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2

Αν μια χορδή ΜΣ παραβολής διέρχεται από την εστία της και Π, Ν είναι αντίστοιχα οι προβολές των Μ, Σ στον άξονά της, τότε τα γινόμενα $ΟΠ{\cdot}ΟΝ$, $ΜΠ{\cdot}ΣΝ$ είναι σταθερά και αντίστοιχα ίσα με $p^2/4$, p^2, (p =2ΟΕ).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3

Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου εγγεγραμμένου σε μια παραβολή, με κορυφή της ορθής γωνίας την κορυφή της παραβολής, διέρχεται από ένα σταθερό σημείο του άξονα της παραβολής.

Απόδειξη

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΣ (Σχήμα 2) και Π, Ν οι προβολές των Μ και Σ στον άξονα της παραβολής και Τ το σημείο τομής της χορδής ΜΣ με τον άξονα. Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΟΝΣ, ΟΜΠ ($\widehat{ΜΟΠ} = \widehat{ΟΣΝ}$) έχουμε

$$\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΟΝ}} = \frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΣΝ}} \text{ ή } \frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΝ}^2} = \frac{\text{ΟΠ}^2}{\text{ΣΝ}^2} \text{ ή } \text{ΟΠ}^2\cdot\text{ΟΝ}^2 = \text{ΜΠ}^2\cdot\text{ΣΝ}^2 \text{ ή}$$

(από την Πρόταση 1(α)) $\text{ΟΠ}^2\cdot\text{ΟΝ}^2 = (2p\cdot\text{ΟΠ})(2p\cdot\text{ΟΝ})$ ή $\text{ΟΠ}\cdot\text{ΟΝ} = 4p^2$, και από την Πρόταση 1(β) έχουμε $\text{ΟΤ}^2 = \text{ΟΠ}\cdot\text{ΟΝ} = 4p^2$, άρα $\text{ΟΤ} = 2p$, σταθερό, άρα Τ σταθερό.

Άσκηση

Αν μια χορδή ΜΣ παραβολής τέμνει τον άξονά της στο σημείο Τ και είναι ΟΤ = 2p, τότε το τρίγωνο ΟΜΣ είναι ορθογώνιο στο Ο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (Χορδή, εστία και διευθετούσα)

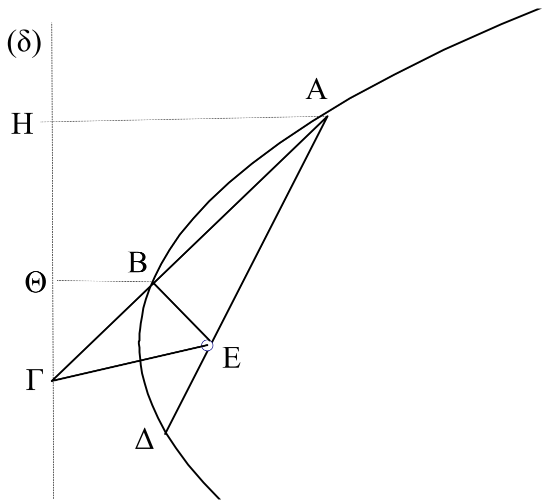
Αν μια ευθεία τέμνει την παραβολή, στα σημεία Α, Β και την διευθετούσα στο Γ, τότε η ευθεία ΕΓ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας ΑΕΒ.

Απόδειξη

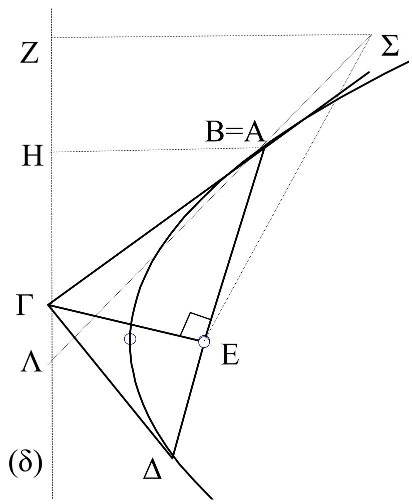
Έστω Η, Θ οι προβολές των Α, Β αντίστοιχα στην διευθετούσα (Σχήμα 3(α)). Επειδή ΒΘ//ΑΗ από τα όμοια τρίγωνα ΑΗΓ, ΓΒΘ έχουμε

$\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΒΘ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$, αλλά ΑΗ = ΕΑ και ΒΘ = ΒΕ, οπότε $\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$,

άρα η ΕΓ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Ε του τριγώνου ΑΕΒ.



(α)



(β)

Σχήμα 3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το σημείο Α είναι σταθερό και το σημείο Β πλησιάζει να συμπέσει με το Α (Σχήμα 4(β)) τότε η ευθεία ΑΓ είναι διαισθητικά εφαπτομένη της παραβολής στο Α και η γωνία ΔΕΒ θα είναι 2 ορθές, οπότε η ΕΓ είναι διχοτόμος της, άρα ΕΓ, ΕΑ κάθετες. Δηλαδή, αν η εφαπτομένη της παραβολής σ' ένα σημείο Α τέμνει την διευθετούσα της στο Γ, τότε η γωνία ΑΕΓ είναι ορθή. Αυτό θα αποδειχθεί παρακάτω αυστηρότερα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1

Έστω μια ευθεία η οποία τέμνει την παραβολή στα (διαφορετικά) σημεία Α, Β και την διευθετούσα της στο Γ. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ τότε ισχύει

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma > 90^o$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma < 90^o$.

Πράγματι, είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta = 180^o$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma < \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$, οπότε

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma > 90^o$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma < 90^o$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (Ύπαρξη και μοναδικότητα της εφαπτομένης)

Σε κάθε σημείο μιας παραβολής υπάρχει μοναδική εφαπτομένη.

Απόδειξη

α) Ύπαρξη. Αν Α σημείο της παραβολής το οποίο δεν είναι κορυφή της, φέρνουμε κάθετη στην ΕΑ (Σχήμα 3(β)) που τέμνει την διευθετούσα, έστω στο Γ. Τότε η ΑΓ είναι εφαπτομένη της παραβολής.

Πράγματι, αν έτεμνε την παραβολή στο σημείο Β, και το Β είναι μεταξύ των Α, Γ, από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 90^o = \Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$, οπότε το Β συμπίπτει με το Α, και άρα η ΑΓ είναι εφαπτομένη, αφού δεν έχει άλλα, εκτός του Α, κοινά σημεία με την παραβολή. Όμοια εργαζόμαστε αν το Α είναι μεταξύ των Β, Γ. (Θα μπορούσαμε να δώσουμε απόδειξη και με βάση το προηγούμενο Πόρισμα.)

Αν Α κορυφή της παραβολής, τότε η κάθετη στον άξονα στο σημείο αυτό είναι εφαπτομένη (βλέπε §4.2, Ι).

β) Μοναδικότητα.

Έστω ΑΛ (Σχήμα 3(β)) μια άλλη εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α, διάφορο της κορυφής, η οποία τέμνει την διευθετούσα στο Λ. Αν Σ τυχόν σημείο της ευθείας αυτής και ΣΖ κάθετη στην (δ), τότε (βλέπε §4.2, ΙΙ) πρέπει ΣΕ ≥ ΣΖ ή $\frac{\Sigma\mathrm{E}}{\Sigma\mathrm{Z}} \geq 1 = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AH}}$, δηλαδή ο λόγος $\frac{\Sigma\mathrm{E}}{\Sigma\mathrm{Z}}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν το σημείο Σ (της σταθερής ευθείας ΑΛ) ταυτίζεται με το Α. Αυτό όμως συμβαίνει (βλέπε Λήμμα στην συνέχεια) μόνο όταν η ΛΕ είναι κάθετη στην ΑΕ.

Όμως και ΕΓ κάθετη στην ΑΕ, άρα οι ΕΓ, ΕΛ συμπίπτουν, άρα και οι εφαπτομένες ΑΓ, ΑΛ.
Αν τώρα το σημείο Α είναι κορυφή της παραβολής, θα δείξουμε ότι και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη στην κορυφή Α που τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Λ. Τότε, όπως προηγουμένως πρέπει η ΛΕ να είναι κάθετη στην ΑΕ, δηλαδή ΕΛ//(δ), άτοπο. Άρα μια εφαπτομένη στο Α είναι παράλληλη στην διευθετούσα, άρα κάθετη στον άξονα στο Α. Επομένως είναι μοναδική.

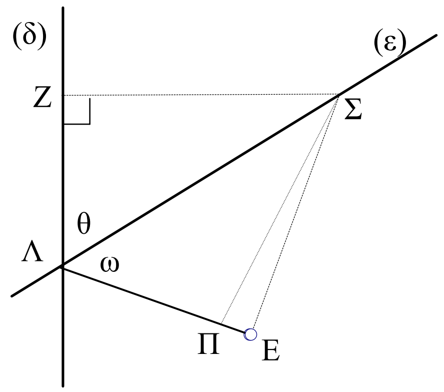
ΛΗΜΜΑ

Έστω (δ) και (ε) δυο (σταθερές) ευθείες τεμνόμενες στο Λ και Ε ένα (σταθερό) σημείο εκτός αυτών. Αν Σ σημείο της ευθείας (ε) και ΣΖ κάθετη στην (δ), τότε ο λόγος $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}$ γίνεται ελάχιστος αν και μόνο ΣΕ κάθετη στην ΕΛ.

Απόδειξη

Έστω ΣΠ (Σχήμα 4) κάθετη στην ΕΛ.

Σχήμα 4



Επειδή οι γωνίες $\theta = \Sigma\hat{\Lambda}Z$, $\omega = \Sigma\hat{\Lambda}E$ είναι σταθερές, οι λόγοι $\frac{\Sigma Z}{\Sigma\Lambda}$, $\frac{\Sigma\Pi}{\Sigma\Lambda}$ είναι σταθεροί, και λόγω $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}=\frac{\Sigma E}{\Sigma\Pi}\cdot\frac{\Sigma\Pi}{\Sigma\Lambda}\cdot\frac{\Sigma\Lambda}{\Sigma Z}$, ο λόγος $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}$ είναι ελάχιστος αν και μόνο ο $\frac{\Sigma E}{\Sigma\Pi}$ είναι ελάχιστος. Όμως $\frac{\Sigma E}{\Sigma\Pi}\geq 1$, άρα ο λόγος $\frac{\Sigma E}{\Sigma\Pi}$ είναι ελάχιστος αν και μόνο (η ΕΛ είναι σταθερή) ΣΕ = ΣΠ, δηλαδή όταν η ΣΕ κάθετη στην ΕΛ

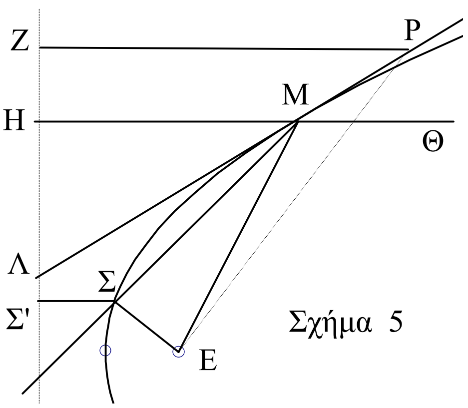
(διαφορετικά : αν $\varphi = \Sigma\hat{E}\Lambda$, τότε $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}=\frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\varphi\cdot\eta\mu\theta}$, οπότε γίνεται ελάχιστος αν $\varphi = 90^o$).

1η Κατασκευή εφαπτομένης σ' ένα σημείο παραβολής

Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ένα τρόπο κατασκευής (με κανόνα και διαβήτη) της εφαπτομένης δοσμένης παραβολής σ’ ένα σημείο της Α. Συγκεκριμένα, αν το Α δεν είναι κορυφή της, φέρνουμε κάθετη στην ΕΑ, στο σημείο Ε, που τέμνει την διευθετούσα στο Γ. Τότε η ΑΓ είναι εφαπτομένη της παραβολής. Αν το Α συμπίπτει με την κορυφή της παραβολής, τότε όπως είδαμε (βλέπε §4.2, Ι) η κάθετη στον άξονά της στο σημείο αυτό είναι εφαπτομένη της παραβολής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Εφαπτομένη και διευθετούσα)
Έστω Μ σημείο της παραβολής και Η η προβολή του στην διευθετούσα της. Τότε η διχοτόμος της γωνίας ΗΜΕ (η μεσοκάθετη του ΗΕ) είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Μ και αντίστροφα.

Απόδειξη
Έστω ότι η διχοτόμος αυτή τέμνει την παραβολή και σ’ ένα άλλο σημείο Σ (Σχήμα 5). Τότε επειδή τα τρίγωνα ΗΜΣ, ΜΣΕ είναι ίσα, έπεται ΗΣ = ΣΕ. Όμως ΣΣ′ = ΣΕ, οπότε ΗΣ = ΣΣ′, άτοπο.



Σχήμα 5

Δείξαμε ότι η διχοτόμος της γωνίας ΗΜΕ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την παραβολή (και δεν είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής), άρα, εξ’ ορισμού είναι εφαπτομένη της παραβολής. Εντελώς όμοια εργαζόμαστε αν το Μ είναι κορυφή της παραβολής. Έτσι η κάθετη στην κορυφή της παραβολής είναι εφαπτομένη της παραβολής (αυτό αποδείχθηκε και διαφορετικά στην αρχή).

Αντίστροφα: Έστω ΜΛ μια εφαπτομένη στο Μ. Φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας ΗΜΕ, οπότε θα’ ναι εφαπτομένη στο Μ και λόγω της μοναδικότητας της εφαπτομένης (βλ. Πρόταση 3) η ΜΛ είναι διχοτόμος της ΗΜΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1 (Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής)
Η εφαπτομένη σ’ ένα σημείο Μ της παραβολής σχηματίζει ίσες γωνίες με την ΜΕ και την παράλληλη από το Μ προς τον άξονα της παραβολής και αντίστροφα.
Α΄ Απόδειξη: επειδή ΜΛ (Σχήμα 5) διχοτόμος της γωνίας ΗΜΕ και

$P\hat{M}\Theta = \Lambda\hat{M}H$, έχουμε $P\hat{M}\Theta = \Lambda\hat{M}E$.

Β΄ Απόδειξη: Για κάθε σημείο Ρ της εφαπτομένης ΜΛ έχουμε (Πρόταση §4.2, ΙΙ) ΡΕ ≥ ΡΖ ή $\frac{PE}{PZ} \geq 1 = \frac{ME}{MH}$, δηλαδή το Μ ελαχιστοποιεί τον λόγο ΡΕ/ΡΖ, οπότε από το Λήμμα της Πρότασης 3 η ΛΕ είναι κάθετη στην ΜΕ. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΗΜ, ΛΕΜ είναι ίσα, οπότε $H\hat{M}\Lambda = \Lambda\hat{M}E$ κλπ.

Αντίστροφα: Προκύπτει από την Πρόταση 4, αφού η ευθεία αυτή θα είναι διχοτόμος της γωνίας $H\hat{M}E$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2

Το τμήμα της εφαπτομένη μιας παραβολής από το σημείο επαφής μέχρι την διευθετούσα της φαίνεται υπό ορθή γωνία από την εστία της. (αποδείχθηκε και διαφορετικά στην Πρόταση 3).

(Υπόδειξη : τα τρίγωνα ΛΜΗ, ΛΜΕ είναι ίσα.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.3

α) Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ μιας παραβολής είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΗΕ, όπου Η η προβολή του Μ στην διευθετούσα.
β) Οι εφαπτομένες σε δυο διαφορετικά σημεία της παραβολής τέμνονται.

Απόδειξη

α) Προφανές, αφού η μεσοκάθετη στο τμήμα ΗΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΜΕ.
β) Κάθε μια είναι μεσοκάθετη σε διαφορετικά τμήματα που αρχίζουν από την εστία Ε.

2η Κατασκευή εφαπτομένης σ' ένα σημείο παραβολής

Από το προηγούμενο πρόταση συμπεραίνουμε ένα τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης δοσμένης παραβολής σ' ένα σημείο της Μ: Φέρνουμε ΜΗ κάθετη στην διευθετούσα και στην συνέχεια την διχοτόμο της γωνίας ΗΜΕ, η οποία θα είναι εφαπτομένη στο σημείο Μ της παραβολής. Αντί την διχοτόμου της γωνίας ΗΜΕ, μπορούμε να φέρουμε και την μεσοκάθετη στο τμήμα ΗΕ. Αν το Μ συμπίπτει με την κορυφή της παραβολής, τότε φέρνουμε κάθετη στον άξονα της παραβολής στο σημείο αυτό. Πράγματι, αν η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ τέμνει τον άξονα στο σημείο Α′ τότε ΟΑ′ = ΟΑ, οπότε το Α′ συμπίπτει με το Α.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5 (Εφαπτομένη, κάθετη, εστία και διευθετούσα)
Έστω ότι εφαπτομένη και η κάθετη στην παραβολή σ' ένα σημείο της Μ τέμνουν τον άξονα της παραβολής στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και Π η προβολή του Μ στον άξονα αυτό. Τότε
i) Το τετράπλευρο ΑΕΜΗ είναι ρόμβος.
ii) Η κορυφή Ο της παραβολής είναι μέσο της ΑΠ.
iii) Το κέντρο του ρόμβου ΑΕΜΗ ανήκει στην εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της.
iv) Η εστία Ε είναι μέσο της ΑΒ.
v) ΠΒ = 2ΟΕ.

Απόδειξη

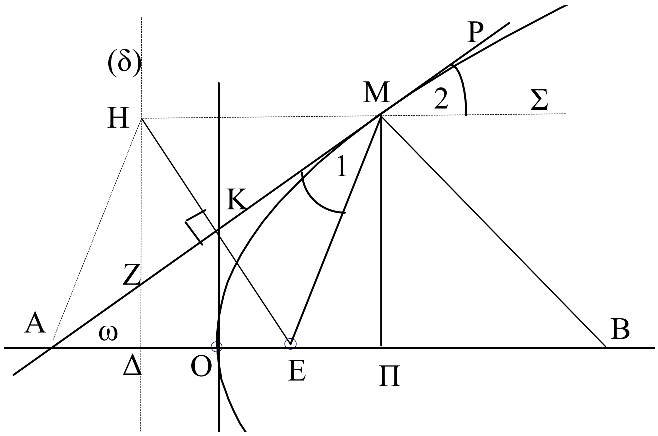
i) Από την ανακλαστική ιδιότητα (Πόρισμα 3.1) έχουμε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (Σχήμα 6) αλλά $\hat{\omega} = \hat{M}_2$ οπότε ΑΕΜ ισοσκελές και άρα ΕΑ = ΕΜ. Είναι ΜΕ = ΗΜ, οπότε ΗΜ = ΑΕ και παράλληλες, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος αφού και ΑΕ = ΕΜ.

ii) Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΑΗΔ, ΕΜΠ (υποτείνουσα και μια κάθετη ίσες) έχουμε ΑΔ = ΕΠ και λόγω του ότι ΔΟ = ΟΕ προκύπτει ΑΟ = ΟΠ.

iii) Αν Κ (Σχήμα 6) το κέντρο του ρόμβου ΑΕΜΗ, επειδή ΑΟ = ΟΠ, η εφαπτομένη στο Ο ως παράλληλη στην ΜΠ θα διέρχεται από το μέσο Κ της ΑΜ, δηλαδή από το κέντρο του ρόμβου.

iv) Εφ' όσον το τρίγωνο ΑΕΜ είναι ισοσκελές και το ΑΜΒ ορθογώνιο στο Μ, έπεται ότι το τρίγωνο ΜΕΒ είναι ισοσκελές με κορυφή το Ε. Άρα ΑΕ = ΕΜ = ΕΒ.

Σχήμα 6



ν) Είναι ΕΒ = ΑΕ, οπότε ΕΠ + ΠΒ = ΑΟ + ΟΕ και

(ΕΠ + ΟΕ) + ΠΒ = ΑΟ + 2ΟΕ, άλλά ΕΠ + ΟΕ = ΟΠ = ΑΟ, οπότε ΠΒ = 2ΟΕ.

Σημείωση

Η ιδιότητα ΠΒ = 2ΟΕ = ΔΕ δηλώνει ότι η προβολή του καθέτου τμήματος ΜΒ είναι σταθερή και ίση με την παράμετρο της παραβολής. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται, χωρίς απόδειξη, στο έργο του Διοκλέους (≈180 π.Χ.) *Περί Πυρείων.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.1

Αν η εφαπτομένη της παραβολής σ' ένα σημείο της Μ τέμνει τον άξονα της παραβολής στο Α και την εφαπτομένη στην κορυφή της στο σημείο Κ, τότε η ΕΚ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΜ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.2

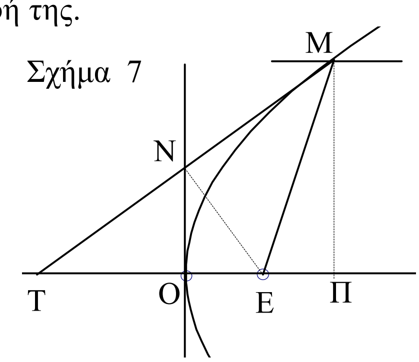
Το μήκος της προβολής του καθέτου τμήματος ΜΒ πάνω στον άξονα της παραβολής είναι σταθερό και ίσο με την παράμετρο της παραβολής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.3

Αν Μ σημείο της παραβολής, τότε ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ εφάπτεται της καθέτου στην κορυφή της παραβολής.

(Υπόδειξη: αν Α η τομή της εφαπτομένης στο Μ με τον άξονα και Η η προβολή του Μ στην διευθετούσα (Σχήμα 6), από το (iii) έχουμε ότι το κέντρο Κ του ρόμβου ΜΗΑΕ ανήκει στην εφαπτομένη στο Ο, άρα το Κ ανήκει στον κύκλο αυτό και η παράλληλη από το Κ στην ΑΕ – άρα κάθετη στην ΟΚ – διέρχεται από το μέσο της ΜΕ κλπ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.3 (Ποδική παραβολής ως προς την εστία)
Ο γεωμετρικός τόπος της προβολής της εστίας παραβολής πάνω σε εφαπτομένη της είναι η εφαπτομένη στην κορυφή της.



Πράγματι, από την Πρόταση 5(iii) προκύπτει ότι η προβολή της εστίας Ε σε μια εφαπτομένη ανήκει στην εφαπτομένη στο Ο. Αντίστροφα: αν Ν (Σχήμα 7) σημείο της εφαπτομένης στο Ο, θα δείξουμε ότι είναι προβολή της εστίας σε κάποια εφαπτομένη της παραβολής. Αν ΝΜ εφαπτομένη της παραβολής που τέμνει τον άξονα στο σημείο Τ τότε (από την Πρόταση 5(ii)) ΤΟ = ΟΠ, οπότε ΤΝ = ΝΜ. Επειδή όμως η ΜΤ είναι εφαπτομένη έχουμε $N\hat{T}E = N\hat{M}E$, οπότε ΝΕ κάθετη στην ΤΜ ως διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΤΕΜ.

3^{η} Κατασκευή εφαπτομένης παραβολής σ' ένα σημείο της

Από την Πρόταση 5(ii) προκύπτει η εξής κατασκευή εφαπτομένης: Έστω Μ σημείο της παραβολής και Π η προβολή του στον άξονά της. Πάνω στον άξονα της παραβολής παίρνουμε τμήμα ΑΟ = ΟΠ, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Μ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (Εστιακή χορδή)
Έστω μια παραβολή και μια εστιακή χορδή της. Τότε

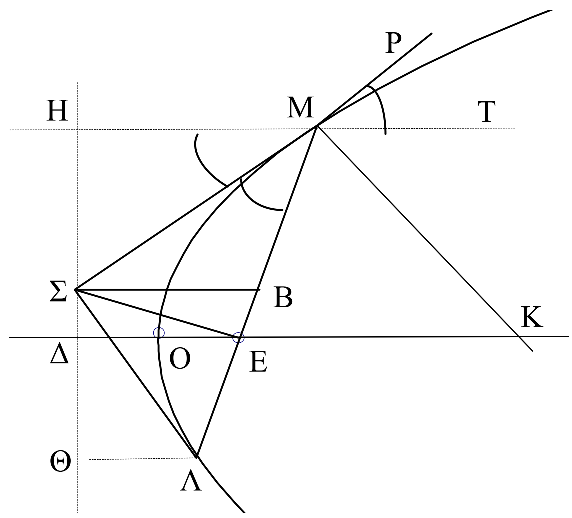
α) Οι εφαπτομένες στα άκρα της χορδής αυτής τέμνονται υπό ορθή γωνία πάνω στην διευθετούσα της παραβολής,

β) Ο κύκλος με διάμετρο την χορδή αυτή εφάπτεται της διευθετούσας.

Απόδειξη
α) Έστω ότι η εφαπτομένη στο Μ τέμνει την διευθετούσα (δ) στο Σ (Σχήμα 8). Τότε, λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της παραβολής, τα τρίγωνα ΣΜΗ, ΣΜΕ είναι ίσα, οπότε η ΣΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΣΕ και $\Sigma\hat{E}M = 90^{o}$.

Άρα $\Sigma\hat{E}\Lambda = 90^{o}$ και έτσι τα τρίγωνα ΘΣΛ, ΣΛΕ είναι ίσα (ορθογώνια με ΣΛ κοινή και ΛΕ = ΘΛ) οπότε ΣΛ διχοτόμος της ΘΛΕ, άρα είναι εφαπτομένη στο Λ της παραβολής.

Σχήμα 8



Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι η ΣΛ είναι και διχοτόμος της γωνίας ΘΣΕ , οπότε ΣΜ και ΣΛ κάθετες.

β) Είναι ΣΗ = ΣΕ = ΣΘ, άρα Σ μέσο της ΗΘ. Από το Σ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα που τέμνει την χορδή ΜΛ στο μέσο της Β. Τότε ΣΒ διάμεσος του τραπεζίου ΗΜΛΘ και έτσι ΣΒ = (ΗΜ + ΘΛ)/2 = (ΜΕ + ΛΕ)/2 = ΜΛ/2. Άρα ο κύκλος διαμέτρου ΜΛ και κέντρου Β διέρχεται από το Σ και επειδή ΣΒ κάθετη στην διευθετούσα, εφάπτεται σε αυτή.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.1

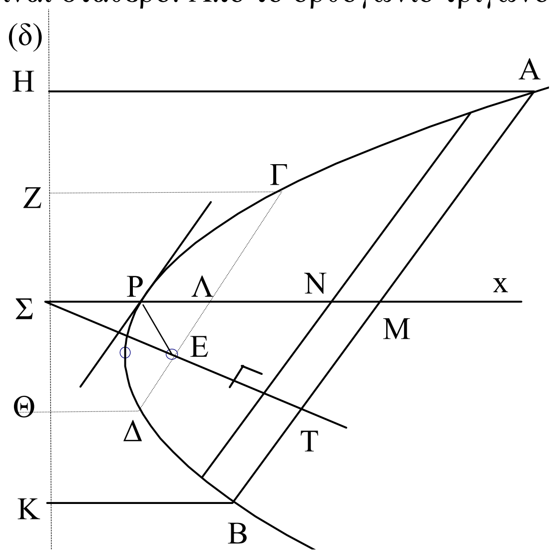
Έστω ΜΛ μια εστιακή χορδή παραβολής, Η, Θ οι προβολές των Μ, Λ, αντίστοιχα, στην διευθετούσα της και Σ το σημείο όπου η εφαπτομένη στο Μ τέμνει την διευθετούσα. Τότε τα τμήματα ΣΜ και ΗΘ φαίνονται από την εστία υπό ορθή γωνία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7 (Μέσα χορδών)

Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων μιας δέσμης παραλλήλων μεταξύ τους χορδών παραβολής, είναι διάμετρος (ακριβέστερα ημιευθεία της διαμέτρου) της παραβολής. Η διάμετρος αυτή τέμνει την διευθετούσα σ' ένα σημείο Σ για το οποίο η ευθεία ΣΕ είναι κάθετη στις χορδές αυτές.
Επί πλέον, αν η διάμετρος αυτή τέμνει την παραβολή στο σημείο Ρ, τότε η παράλληλη από το Ρ σε μια από τις χορδές αυτές είναι εφαπτομένη στην παραβολή στο σημείο αυτό.
Απόδειξη

Έστω μια τυχούσα χορδή ΑΒ (Σχήμα 9) από τις δεδομένες χορδές της παραβολής, Μ το μέσο της και η ευθεία ΕΤ κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την διευθετούσα στο Σ. Η ευθεία ΣΤ είναι σταθερή, αφού διέρχεται από το σταθερό σημείο Ε και είναι κάθετη στην ΑΒ που έχει σταθερή (δεδομένη) κλίση, άρα και το σημείο Σ είναι σταθερό. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΣΑ έχουμε

Σχήμα 9



$$\begin{aligned} Η Σ^2 &= Σ Α^2 - Α Η^2 \qquad (ΑΗ = ΑΕ, \text{ λόγω παραβολής}) \\ &= Σ Α^2 - Α Ε^2 \\ &= Σ Τ^2 + Α Τ^2 - (Α Τ^2 + Ε Τ^2) \\ &= Σ Τ^2 - Ε Τ^2 \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε $ΣΚ^2 = ΣΤ^2 - ΕΤ^2$, οπότε ΗΣ = ΣΚ. Επομένως η παράλληλη από μέσο Σ της ΗΚ προς τον άξονα της παραβολής (άρα και προς τις ΗΑ, ΚΒ) τέμνει την χορδή ΑΒ στο μέσο της Μ. Άρα το μέσο Μ της (τυχούσας) χορδής ΑΒ βρίσκεται πάνω στην σταθερή διάμετρο Σx που διέρχεται από το Σ.

Αντιστρόφως: Έστω τυχόν σημείο της Ν της ημιευθείας Σx. Θα δείξουμε ότι είναι μέσο κάποιας χορδής από αυτές που ανήκουν στην δεδομένη δέσμη. Θεωρούμε μια ευθεία που διέρχεται από το Ν και είναι παράλληλη στην ΑΒ (άρα ανήκει στην δεδομένη δέσμη). Τότε η ΣΕ θα είναι κάθετη στην ευθεία αυτή και όπως προηγουμένως το Ν θα είναι μέσο της χορδής αυτής.

Έστω τώρα μια παράλληλη από το Ρ προς την ΑΒ. Τότε αυτή είναι κάθετη στην ΣΕ και λόγω ΡΣ = ΡΕ η ευθεία αυτή είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΣΕ, οπότε από την Πρόταση 4 είναι εφαπτομένη της παραβολής.

Σημείωση

Λόγω της παραπάνω ιδιότητας μιας διαμέτρου, ο ορισμός που δώσαμε στην διάμετρο παραβολής συμπίπτει με ορισμό του Απολλωνίου, ο οποίος ορίζει ως διάμετρο κωνικής τον γεωμετρικό τόπο (ευθεία) των μέσων μιας δέσμης παραλλήλων χορδών της.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.1

Έστω ΑΒ μια χορδή παραβολής και ότι η κάθετη από την εστία Ε στην ΑΒ τέμνει την διευθετούσα στο Σ. Αν η παράλληλη από το Σ στον άξονα της παραβολής τέμνει την παραβολή στο Ρ, τότε

α) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Ρ είναι παράλληλη στην ΑΒ.

β) Απ' όλα τα σημεία του παραβολικού τόξου ΑΡΒ το Ρ απέχει την μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία ΑΒ και είναι το μοναδικό σημείο με αυτήν την ιδιότητα.

(Υπόδειξη: α) Η εφαπτομένη στο Ρ είναι μεσοκάθετη στην ΣΕ κλπ. β) Η απόσταση ενός σημείου Γ του τόξου είναι μικρότερη από την απόσταση του Ρ από την ΑΒ, αφού το Γ δεν ανήκει στην εφαπτομένη στο Ρ.)

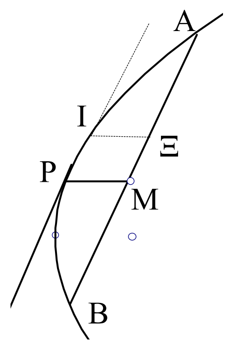
Σημείωση

Το Πόρισμα 7.1(β) είναι η Πρόταση 18 στο έργο του Αρχιμήδη *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής* (βλ. Κεφ. 1, Α3 και [2] τόμος β΄, σελ. 251). Το σημείο Ρ ο Αρχιμήδης το ονομάζει *κορυφή* του παραβολικού τμήματος ΑΡΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.2

Έστω ΑΒ μια χορδή παραβολής και ένα εσωτερικό σημείο Ξ του τμήματος ΑΒ. Από το Ξ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Ι. Αν η εφαπτομένη στο Ι είναι παράλληλη στην ΑΒ τότε το Ξ είναι μέσο του ΑΒ και αντιστρόφως.

(Υπόδειξη: Από το μέσο Μ (Σχήμα 10) της ΑΒ φέρνουμε ΜΡ//ΞΙ, οπότε η εφαπτομένη στο Ρ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη στο Ι, οπότε Ρ συμπίπτει με το Ι (Πόρισμα 4.3). Άρα το Ξ συμπίπτει με το μέσο Μ. Το αντίστροφο προκύπτει από την Πρόταση 7.)



Σχήμα 10

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.3

Αν μια χορδή παραβολής ΓΔ διέρχεται από την εστία της, τότε ΓΔ = 4ΡΕ, όπου Ρ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΓΔ.

(Υπόδειξη: θεωρούμε την ΣΕ κάθετη στην ΓΔ (Σχήμα 9). Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι το Ρ είναι σημείο τομής της παραλλήλου από το μέσο Σ του ΖΘ προς τον άξονα, οπότε Λ μέσο της ΓΔ. Η ΣΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΖΓΔΘ, ισχύει ΣΛ = ΓΔ/2 και άρα το Ρ είναι μέσο της ΣΛ κλπ.)

Σχετικά θέματα.

1. Έστω ΑΒ μια δεδομένη χορδή παραβολής. Να βρεθεί σημείο Μ του παραβολικού τόξου ΑΒ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ είναι μέγιστο.
2. Να δειχθεί ότι κάθε διάμετρος παραβολής περιέχει μια ημιευθεία τα σημεία της οποίας είναι μέσα παραλλήλων χορδών της. Ιδιαίτερα ο άξονας της παραβολής είναι η διάμετρος που περιέχει τα μέσα των καθέτων χορδών στον άξονα αυτόν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8 (Εφαπτόμενα τμήματα)

Έστω σημείο Σ εκτός μιας παραβολής και ΣΜ, ΣΛ εφαπτομένες στην παραβολή. Τότε ισχύουν

α) $\Sigma\hat{E}M = \Sigma\hat{E}\Lambda$, β) $E\Sigma^2 = EM \cdot E\Lambda$, γ) $\dfrac{\Sigma M^2}{\Sigma\Lambda^2} = \dfrac{EM}{E\Lambda}$.

δ) Η ευθεία που διέρχεται από το Σ και το μέσο του ΜΛ είναι διάμετρος της παραβολής.

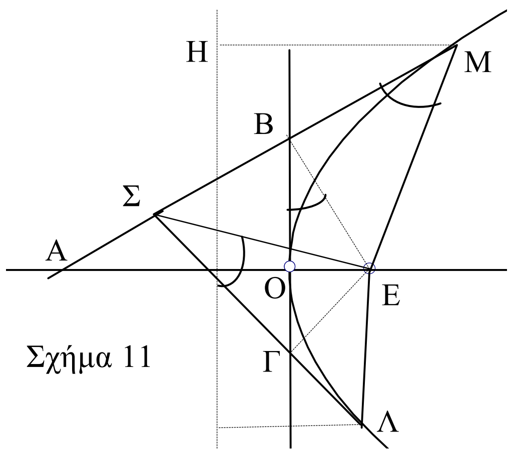
Απόδειξη

α) Στο τετράπλευρο ΣΒΕΓ (Σχήμα 11) οι απέναντι γωνίες Β, Γ είναι ορθές (Πρόταση 5, (iii)), οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο, άρα $E\hat{\Sigma}\Gamma = \Gamma\hat{B}E$.

Όμως $O\hat{B}E = B\hat{M}E$, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΜ και του ότι ΕΒ κάθετη στην ΑΜ.

Άρα $E\hat{\Sigma}\Gamma = B\hat{M}E$.

Όμοια προκύπτει $E\hat{\Sigma}B = \Sigma\hat{\Lambda}E$. Έτσι από τα τρίγωνα ΣΕΜ, ΣΕΛ προκύπτει ότι και $\Sigma\hat{E}M = \Sigma\hat{E}\Lambda$.



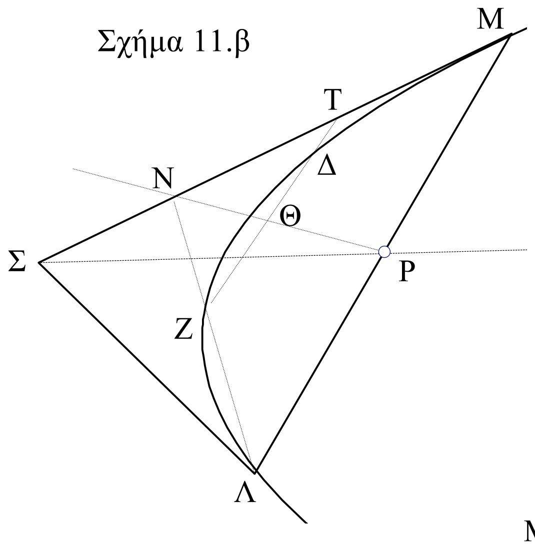
Σχήμα 11

β), γ) Όπως προέκυψε προηγουμένως, τα τρίγωνα ΣΕΜ, ΣΕΛ είναι όμοια, οπότε $\frac{ΣΜ}{ΣΛ} = \frac{ΕΣ}{ΕΛ} = \frac{ΕΜ}{ΕΣ}$. Έτσι έχουμε $ΕΣ^2 = ΕΜ \cdot ΕΛ$ και

$$\frac{ΣΜ^2}{ΣΛ^2} = \frac{ΕΣ}{ΕΛ} \cdot \frac{ΕΜ}{ΕΣ} = \frac{ΕΜ}{ΕΛ}.$$

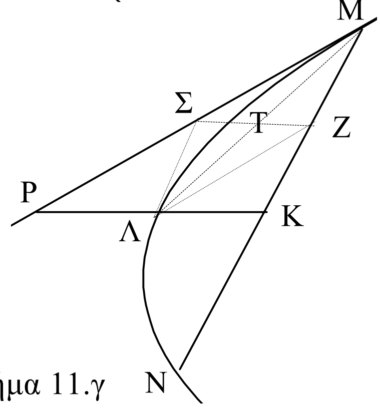
δ) Έστω Ρ (Σχήμα 11.β) το μέσο του ΜΛ και η διάμετρος της παραβολής από το Ρ (δηλαδή η παράλληλη από το Ρ στον άξονά της) που τέμνει την ΣΜ στο Ν. Αν το Ν συμπίπτει με το Σ τότε αποδείχθηκε. Αν το Ν είναι διάφορο του Σ, τότε η ΝΛ τέμνει την παραβολή (αφού δεν είναι η εφαπτομενη στο Λ), έστω στο Ζ. Φέρνουμε από το Ζ παράλληλη στην ΜΛ που τέμνει την ΝΡ στο Θ, την παραβολή στο Δ και την ΣΜ στο Τ. Τότε (Πρόταση 7) ΖΘ = ΘΔ, αλλά και ΖΘ = ΘΤ (αφού ΛΡ = ΡΜ και ΖΤ//ΛΜ). Άρα ΘΔ = ΘΤ, δηλαδή το Δ συμπίπτει με το Τ, άτοπο, αφού η ΣΜ, ως εφαπτομένη, δεν μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με την παραβολή. (Η ίδια απόδειξη μπορεί να δοθεί και για έλλειψη ή υπερβολή).

Σχήμα 11.β



ΠΟΡΙΣΜΑ 8.1 (Σημαντικό)
Από το μέσο Κ μιας χορδής ΜΝ παραβολής φέρνουμε παράλληλη στον άξονα που τέμνει την παραβολή στο Λ και την εφαπτομένη στο Μ, στο σημείο Ρ. Τότε το Λ είναι μέσο του τμήματος ΚΡ.

Απόδειξη
Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Λ (Σχήμα 11.γ) που τέμνει την ΜΡ στο σημείο Σ. Από την Πρόταση 7 έχουμε ότι η ΛΣ είναι παράλληλη στην ΜΝ. Φέρνουμε ΛΖ//ΣΜ, οπότε το σημείο τομής Τ των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΣΜΖΛ είναι μέσο της ΛΜ, οπότε (Πρόταση 8(γ)) η ΣΤ είναι διάμετρος, άρα παράλληλη στην ΡΚ. Όμως Τ μέσο του ΣΖ, οπότε και Λ μέσο του ΡΚ.



Σχήμα 11.γ

Άσκηση: αν Α το σημείο τομής της ΣΖ με την παραβολή τότε ΑΤ = (1/4)ΛΚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.2

Αν οι εφαπτομένες ΣΜ, ΣΛ από ένα σημείο Σ εκτός παραβολής προς την παραβολή είναι κάθετες, τότε
α) Η χορδή ΜΛ διέρχεται από την εστία, β) Το Σ ανήκει στην διευθετούσα.

(Υπόδειξη: (α) από την ισότητα γωνιών στα όμοια τρίγωνα ΣΕΜ, ΣΕΛ (Σχήμα 11) προκύπτει ότι οι γωνίες $\Sigma\hat{E}M$, $\Sigma\hat{E}\Lambda$ είναι ορθές κλπ. (β) Αν Η η προβολή του Μ στην διευθετούσα, τότε τα τρίγωνα ΗΣΜ, ΣΕΜ είναι ίσα (δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία) αλλά $\Sigma\hat{E}M = 90^{o}$ κλπ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.3

Αν τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΜ, ΣΛ από σημείο εκτός της παραβολής είναι ίσα, τότε α) τα σημεία Σ, Μ, Λ ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ε, β) τα σημεία Μ, Λ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα, γ) το σημείο Σ ανήκει στον άξονα της παραβολής.

(Υπόδειξη: τα τρίγωνα ΣΕΜ, ΣΕΛ είναι ίσα και το ΣΕΜ είναι ισοσκελές. Για το (γ), έχουμε ότι τα Σ, Ε ανήκουν στην μεσοκάθετη του ΜΛ, οπότε αυτή συμπίπτει με τον άξονα.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.4

Αν από ένα σημείο Σ του άξονα φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΜ, ΣΛ της παραβολής, τότε αυτά είναι ίσα και ο άξονας είναι μεσοκάθετη στην χορδή ΜΛ. (Φανερό και από το ότι ο άξονας της παραβολής είναι άξονας συμμετρίας της.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.5

Αν ΣΜ, ΣΛ εφαπτόμενα τμήματα παραβολής, τότε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Σ, Μ, Ε εφάπτεται στην ΣΛ στο σημείο Σ.

Κατασκευή εφαπτόμενων παραβολής από σημείο εκτός αυτής

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.6

Έστω ένα σημείο Σ εκτός της παραβολής (Σχήμα 11). Με διάμετρο ΣΕ κατάσκευάζουμε κύκλο που τέμνει την εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της στα σημεία Β, Γ. Τότε οι ευθείες ΣΒ, ΣΓ είναι εφαπτόμενες της παραβολής.

(Υπόδειξη: αν Μ το σημείο που η ΣΒ τέμνει την παραβολή τότε το Β ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΜΕ. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ τέμνει την κάθετη στην κορυφή της στο Β′ τότε το Β′ ανήκει στον ίδιο κύκλο ο οποίος (Πόρισμα 5.3) εφάπτεται στην ευθεία αυτή, άρα Β συμπίπτει με το Β′ κλπ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 9 (Εφαπτομένη και διάμετρος)

Έστω (ε) μια εφαπτομένη της παραβολής σ' ένα σημείο της Σ. Από ένα σημείο Α της παραβολής φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονά της (διάμετρο) που τέμνει την (ε) στο σημείο Τ. Τότε ισχύει $ΣΤ^2 = 4ΣΕ \cdot ΤΑ$ (δηλαδή το $ΣΤ^2$, με δεδομένο το σημείο Σ, είναι ανάλογο του ΤΑ).

Απόδειξη

Έστω ότι η διάμετρος τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Η. Θεωρούμε από το σημείο Α μια χορδή ΑΒ παράλληλη προς την εφαπτομένη (ε) (Σχήμα 12). Η κάθετη από την εστία στην ΑΒ τέμνει την ΑΒ στο Ρ και την διευθετούσα στο Ζ. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 7, η παράλληλη από το Ζ προς τον άξονα της παραβολής διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΒ και τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της παραβολής είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα συμπίπτει με το σημείο Σ.

Επειδή ΗΑ//ΖΜ//ΚΒ και ΑΜ = ΜΒ έχουμε ΗΖ = ΖΚ..

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΜΘ, ΖΜΡ έχουμε

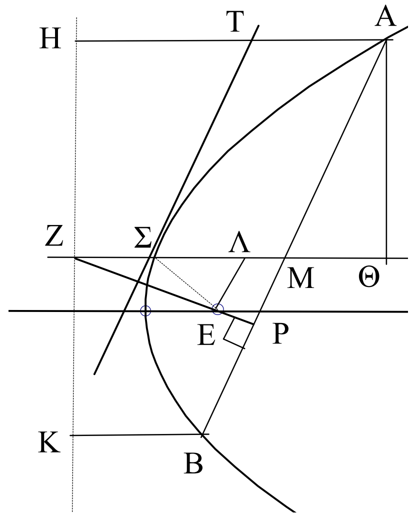
$$\frac{ΑΘ}{ΑΜ} = \frac{ΖΡ}{ΖΜ}$$ και λόγω της ΕΛ//ΜΡ έχουμε

$$\frac{ΖΡ}{ΖΜ} = \frac{ΕΡ}{ΛΜ}$$. Είναι ΗΖ = ΑΘ, οπότε

$$\frac{ΗΖ^2}{ΑΜ^2} = \frac{ΖΡ^2}{ΖΜ^2} = \frac{ΕΡ^2}{ΛΜ^2} = \frac{ΖΡ^2 - ΕΡ^2}{ΖΜ^2 - ΛΜ^2},$$ αλλά

$ΗΖ^2 = ΖΑ^2 - ΗΑ^2 = ΖΑ^2 - ΑΕ^2 = ΖΡ^2 - ΕΡ^2$, οπότε (ΖΣ = ΣΛ)

$$ΑΜ^2 = ΖΜ^2 - ΛΜ^2 = (ΖΜ - ΛΜ)(ΖΜ + ΛΜ)$$
$$= ΖΛ \cdot 2ΣΜ = 4ΣΕ \cdot ΣΜ,$$



Σχήμα 12

αλλά ΣΤ = ΑΜ, ΣΜ = ΤΑ, λόγω του παραλληλογράμμου ΣΜΑΤ, οπότε $ΣΤ^2 = 4ΣΕ \cdot ΤΑ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.1
Αν μια χορδή ΑΒ παραβολής διέρχεται από την εστία της Ε , τότε ΑΒ = 4ΕΣ, όπου Σ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ΑΒ.

(Υπόδειξη: ΤΑ = ΣΛ = ΣΕ και 2ΣΤ = ΑΒ κλπ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.2 (Χαρακτηριστική ιδιότητα ως προς μια διάμετρο)
Από ένα (σταθερό) σημείο Σ μιας παραβολής θεωρούμε μια παράλληλη στον άξονά της (δηλαδή μια διάμετρό της) και έστω Α τυχόν σημείο της παραβολής. Από το Α θεωρούμε μια χορδή παράλληλη προς την εφαπτομένη της παραβολής στο Σ που τέμνει την διάμετρο στο σημείο Μ. Τότε ισχύουν
α) Το Μ είναι μέσο της χορδής.
β) Ισχύει $AM^2 = 4ΣΕ\cdot ΣΜ$.

(Υπόδειξη: προκύπτει από το Πόρισμα 7.2.)

Σημειώσεις
1. Το πόρισμα 9.2 μας λέει ουσιαστικά ότι, ως προς το σύστημα (γενικά πλαγιογώνιο) ΤΣΜ με άξονες ΣΜ, ΣΤ κάθε σημείο της παραβολής χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα $AM^2 = 4ΣΕ\cdot ΣΜ$ (το αντίστροφο το έχουμε αποδείξει στην §2.1 (Α)), δηλαδή είναι η εξίσωση της παραβολής ως προς το σύστημα αυτό.
2. Η σχέση $AM^2 = p\cdot ΣΜ$ με $p = 4ΣΕ$ = σταθερά (παράμετρος παραβολής) είναι ουσιαστικά αυτή με την οποία ο Απολλώνιος αρχίζει την μελέτη του για την παραβολή στα *Κωνικά*. Είναι το «σύμπτωμα» (που είδαμε στο ιστορικό μέρος, Κεφ. 1, Α4.3 (Ι.1) σχέση (3)) που παρήγαγε από την τομή κώνου με επίπεδο και το χρησιμοποίησε για όλες τις επόμενες προτάσεις του για την παραβολή. Η σχέση είναι δυναμική, αφού αναφέρεται ως οποιαδήποτε διάμετρο ΣΜ, άρα και ως προς τον άξονα της παραβολής, δηλαδή είναι γενίκευση της σχέσης (α) της Πρότασης 1 της § 4.3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10 (Χορδή, εφαπτομένη και διάμετρος)
Έστω μια χορδή ΑΒ παραβολής και μια εφαπτομένη της στο σημείο Α.
Μια διάμετρος της παραβολής τέμνει την εφαπτομένη αυτή στο Γ, την παραβολή στο Η και την χορδή ΑΒ στο Δ. Τότε ισχύει

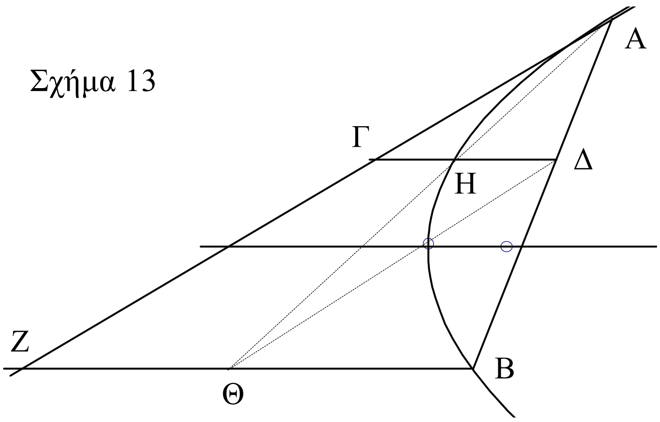
$$\frac{ΒΔ}{ΑΒ}=\frac{ΗΔ}{ΓΔ}$$

δηλαδή τα σημεία Η, Δ χωρίζουν τις ΓΔ, ΑΒ σε ίσους λόγους.

Απόδειξη

Έστω ότι η παράλληλη προς τον άξονα από το Β τέμνει την εφαπτομένη στο Ζ (Σχήμα 13). Λόγω της προηγούμενης πρότασης έχουμε

Σχήμα 13



$$\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΖ}^2} = \frac{4\text{ΑΕ}\cdot\text{ΓΗ}}{4\text{ΑΕ}\cdot\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΖΒ}}$$, αλλά λόγω ΓΔ//ΒΖ έχουμε $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΖ}^2} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΖΒ}^2}$, οπότε

$\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΖΒ}^2}$ ή $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΖΒ}}$ αλλά λόγω ΓΔ//ΒΖ έχουμε $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}$, οπότε

$$\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}.$$

Σημείωση

Η σπουδαία αυτή ιδιότητα της παραβολής είναι η Πρόταση 5 στο έργο του Αρχιμήδη *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής* (βλ. Κεφ. 1, Α3, Πρόταση 5 και [2], τόμος β΄, σελ. 224). Την Πρόταση αυτή χρησιμοποιεί στο έργο αυτό, (στην Πρόταση 14, [2], τόμος β΄, σελ. 239) καθώς και στο έργο του *Έφοδος* (στην Πρόταση 1, [2], τόμος β΄, σελ. 393) για να υπολογίσει το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΑΗΒ («τετραγωνισμός παραβολής»), «σαρώνοντας» με το τμήμα ΗΔ το χωρίο αυτό. Η αναλογία αυτή επιτρέπει στο τμήμα ΗΔ, αν και δεν είναι άμεσα «Ευκλείδειο μήκος», να εκφραστεί συναρτήσει απλών (Ευκλειδείων) τμημάτων και έτσι αντικαθιστά ουσιαστικά της εξίσωση της παραβολής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.1

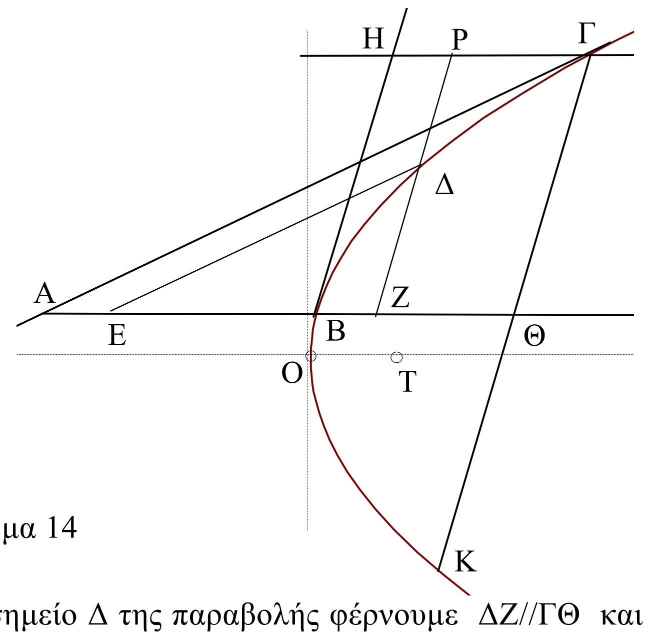
Έστω μια χορδή ΑΒ παραβολής και η εφαπτομένη της στο Α. Αν από το μέσο της ΑΒ φέρομε μια παράλληλη στον άξονα της παραβολής (δηλαδή μια διάμετρό της), τότε η παραβολή διχοτομεί το τμήμα της διαμέτρου που βρίσκεται μεταξύ της εφαπτομένης και της χορδής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.2 (Απολλωνίου *Κωνικά* βιβλίο α′, Πρόταση 42)

«Έστω παραβολή, ής διάμετρος η ΑΒ, και ήχθω εφαπτομένη της τομής η ΑΓ, και τεταγμένως κατήχθω η ΓΘ, και από τινος σημείου τυχόντος κατήχθω η ΔΖ, και διά μεν του Δ τη ΑΓ παράλληλος ήχθω η ΔΕ, διά δε του Γ τη ΒΖ η ΓΗ, διά δε του Β τη ΘΓ η ΒΗ. λέγω, ότι το ΔΕΖ τρίγωνον ίσον εστί τω ΗΖ παραλληλογράμμω».

Ελεύθερη απόδοση και απόδειξη (του Απολλωνίου).

Έστω (Σχήμα 14) μια διάμετρος της παραβολής ΑΒ (στην οποία ανήκουν τα μέσα όλων των παραλλήλων προς την εφαπτομένη στο Β χορδών, σύμφωνα με την Πρόταση 7), η εφαπτομένη ΓΑ της παραβολής στο Γ και η ΘΓ//ΒΗ, όπου η ΒΗ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Β (αυτό σημαίνει κατήχθη τεταγμένως η ΓΘ).



Σχήμα 14

Από ένα τυχόν σημείο Δ της παραβολής φέρνουμε ΔΖ//ΓΘ και ΔΕ//ΑΓ, ΓΗ// ΒΖ. Θα δειχθεί ότι (ΕΔΖ) = (ΗΡΖΒ). Επειδή η ΑΓ εφάπτεται της παραβολής και η ΓΘ είναι παράλληλος προς την εφαπτομένη της παραβολής στο Β το Θ είναι μέσο της ΓΚ, οπότε είναι ΑΒ = ΒΘ (από πόρισμα 10.1), άρα ΑΘ = 2ΒΘ, οπότε (ΑΓΘ) = παραλληλόγραμμο (ΗΓΘΒ).

Αλλά από Πόρισμα 9.2 (εδώ μόνο διαφοροποιείται η απόδειξη του Απολλωνίου, όπου επικαλείται την Πρόταση 20 του βιβλίου α΄ όπου αποδεικνύει το αποτέλεσμα αυτό με άλλο τρόπο) έχουμε

$$\frac{\Gamma\Theta^2}{\Delta Z^2} = \frac{4\mathrm{BT}\cdot\mathrm{B}\Theta}{4\mathrm{BT}\cdot\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{B}\Theta}{\mathrm{BZ}} \quad \text{(T η εστία).}$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΓΘ, ΕΔΖ έχουμε

$$\frac{(\mathrm{A}\Gamma\Theta)}{(\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z})} = \frac{\Gamma\Theta^2}{\Delta\mathrm{Z}^2} \text{ και } \frac{\mathrm{B}\Theta}{\mathrm{BZ}} = \frac{(\mathrm{H}\Gamma\Theta\mathrm{B})}{(\mathrm{HPZB})} \text{ (τα παραλληλόγραμμα έχουν ίσα ύψη), οπότε}$$

$$\frac{(\mathrm{A}\Gamma\Theta)}{(\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z})} = \frac{(\mathrm{H}\Gamma\Theta\mathrm{B})}{(\mathrm{HPZB})}.$$

Αλλά, όπως είδαμε στην αρχή, είναι (ΑΓΘ) = (ΗΓΘΒ), άρα (ΕΔΖ) = (ΗΡΖΒ).

Σημείωση

Στην παραπάνω Πρόταση 42 των *Κωνικών* έχουμε τις διαμέτρους ΑΒ, ΓΗ και τις αντίστοιχες εφαπτομένες στα σημεία Β, Γ που προδιαθέτουν για εναλλαγή των ρόλων που παίζουν τα σημεία Β, Γ. Η Πρόταση 42 για την παραβολή, όπως και η αντίστοιχη για έλλειψη και υπερβολή, Πρόταση 43 του α΄ βιβλίου των *Κωνικών*, έχουν ονομαστεί από τον μελετητή του έργου του Απολλώνίου O. Neugebauer «Προτάσεις των δυο εφαπτομένων». Οι προτάσεις αυτές παίζουν τον κύριο ρόλο στον σκοπό του Απολλωνίου: να αποδείξει ότι όλες οι διάμετροι μιας κωνικής είναι ισοδύναμες, δηλαδή ότι το σύμπτωμα μιας κωνικής ως προς μια αρχική διάμετρο και την αντίστοιχη εφαπτομένη (ως τεταγμένη) στο άκρο της, παραμένει ίδιο αν αναφέρεται ως προς μια άλλη διάμετρο της κωνικής και την αντίστοιχη εφαπτομένη στο άκρο της διαμέτρου αυτής (βλέπε [20], σελ. 297-299, στην βιβλιογραφία του Κεφ. 1).

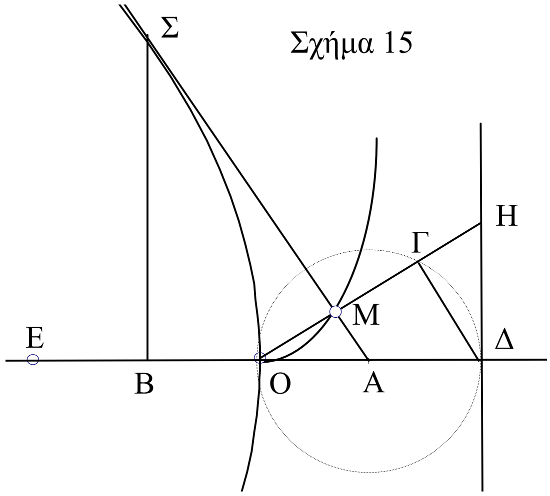
Παραβολή και Κισσοειδής

ΠΡΟΤΑΣΗ 11 (Ποδική παραβολής ως προς την κορυφή της)
Έστω μια παραβολή με παράμετρο 2α, όπου $\alpha > 0$. Ο γεωμετρικός τόπος της προβολής της κορυφής της Ο πάνω σε μια τυχαία εφαπτομένη της παραβολής (η λεγόμενη *ποδική* της παραβολής ως προς το σημείο Ο) είναι μια *κισσοειδής* καμπύλη.

Απόδειξη

Έστω ΣΑ εφαπτομένη της παραβολής και Μ (Σχήμα 15) ένα σημείο του τόπου. Θεωρούμε ένα κύκλο διαμέτρου ΟΔ = α (= ΟΕ) και την εφαπτομένη του στο Δ (διευθετούσα της παραβολής). Η ΟΜ τέμνει την εφαπτομένη αυτή στο Η. Πρέπει να δειχθεί (σύμφωνα με τον ορισμό της κισσοειδούς, βλ. σημείωση) ότι ΟΜ = ΓΗ.

Επειδή η ΣΑ είναι εφαπτομένη έχουμε ΟΒ = ΟΑ (από την Πρόταση 5(ii)).



Σχήμα 15

Επίσης είναι $ΣΒ^2 = 4ΟΔ \cdot ΟΒ$ (1) (βλέπε Πρόταση 1(α)). Από τα όμοια τρίγωνα ΣΒΑ, ΟΜΑ έχουμε (ΒΑ = 2ΟΑ) $\dfrac{ΟΜ}{ΣΒ} = \dfrac{ΑΜ}{2ΟΑ}$ (2)

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΟΜΑ, ΟΔΓ ($\hat{Μ} = \hat{Γ} = 90^\circ$) έχουμε

$$\frac{ΟΜ}{ΟΓ} = \frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΑΜ}{ΔΓ} \quad (3)$$

Ακόμη από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΗ, με ΔΓ κάθετη στην ΟΗ έχουμε

$$ΔΓ^2 = ΟΓ \cdot ΓΗ \quad (4)$$

Από (1), (2) (απαλείφοντας το ΣΒ) έχουμε

$$\frac{ΟΜ^2}{4ΟΔ \cdot ΟΒ} = \frac{ΑΜ^2}{4ΟΑ^2} \quad ή \quad \frac{ΟΜ^2}{ΑΜ^2} = \frac{ΟΔ}{ΟΑ} \quad (5)$$

Επίσης, από τις (3), (4) (απαλείφοντας το ΔΓ) έχουμε

$$\frac{ΟΜ^2}{ΟΓ^2} = \frac{ΑΜ^2}{ΟΓ \cdot ΓΗ} \quad ή \quad \frac{ΟΜ^2}{ΑΜ^2} = \frac{ΟΓ}{ΓΗ} \quad (6)$$

Από (5), (6) έχουμε $\dfrac{ΟΔ}{ΟΑ} = \dfrac{ΟΓ}{ΓΗ}$ ή, λόγω της (3), $\dfrac{ΟΓ}{ΟΜ} = \dfrac{ΟΓ}{ΓΗ}$, άρα ΟΜ = ΓΗ.

Αντίστροφα: έστω Μ ένα σημείο της κισσοειδούς (της οποίας το σημείο-κορυφή είναι το Ο και έχει βάση τον κύκλο ΟΔ = α με την εφαπτομένη του στο Δ). Δηλαδή έχουμε ΟΜ = ΓΗ. Έστω ακόμη Σ το σημείο που η κάθετη στην ΟΜ στο σημείο Μ τέμνει την παραβολή. Φέρνουμε την ΣΜ μέχρι να τμήσει τον άξονα της παραβολής, έστω στο Α.

Από τις παραπάνω σχέσεις (1) - (4), που ισχύουν όλες, θα προκύψει ΟΒ = ΟΑ. Πράγματι, από τις ιδιότητες της παραβολής χρησιμοποιήσαμε τις ΟΒ = ΟΑ και την (1). Η (1) εξακολουθεί να ισχύει εδώ, οπότε με δεδομένο ότι ΟΜ = ΓΗ, προκύπτει ότι ΟΒ = ΟΑ, δηλαδή ΣΑ εφαπτομένη (Πόρισμα 5.5).

Ιστορική Σημείωση

Έστω κύκλος διαμέτρου ΟΔ = α και η εφαπτόμενη του στο σημείο Δ (Σχήμα 15). Καθώς το σημείο Η κινείται πάνω στην εφαπτομένη αυτή, η ευθεία ΟΗ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ της ΟΗ για το οποίο ισχύει ΟΜ = ΓΗ (ή ΟΓ = ΜΗ) είναι μια καμπύλη που λέγεται **κισσοειδής** του Διοκλέους. Με βάσει την καμπύλη αυτή ο Διοκλής «έλυσε» το *δήλιο πρόβλημα.*
Το όνομα κισσοειδής (σχήματος κισσού) αναφέρεται από τον ιστορικό των Μαθηματικών Γέμινο τον 1^{o} αιώνα π.Χ., στα σχόλια του στο βιβλίο του Αρχιμήδη, *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου,* όπου σημειώνει ότι, αυτή ήταν η προσφορά του Διοκλή στο περίφημο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Ο Fermat και ο Roberval κατασκεύασαν την εφαπτομένη το 1634, ενώ ο Huygens και Wallis υπολόγισαν το 1658 το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη και την ασύμπτωτή της.

Σχετικά θέματα

1. Αν το παραπάνω σημείο Μ έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς σύστημα κέντρου Ο και άξονα τον x την ευθεία ΟΔ τότε $x^3 = y^2(α - x)$ (εξίσωση κισσοειδούς.)

2. Επίσης ισχύει ρ = ΟΜ = $αημ^2θ/συνθ$, όπου θ η γωνία ΜΟΑ (πολική εξίσωση της κισσοειδούς).

3. Η ποδική της παραβολής $y^2 = 4αx$ ως προς την εστία της είναι ο y- άξονας.

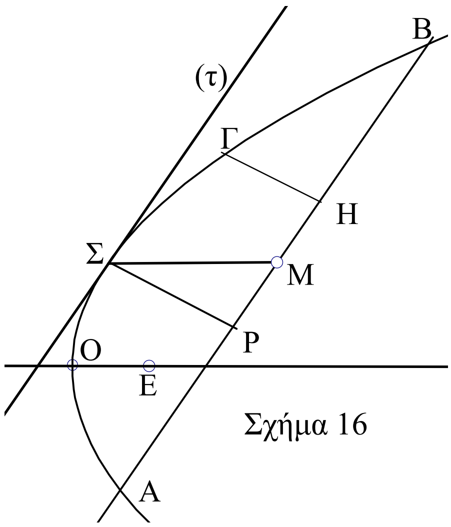
4.4 ΘΕΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω μια παραβολή με κορυφή Ο και μια χορδή της ΑΒ. Να βρεθεί σημείο της παραβολής που απέχει περισσότερο από την ευθεία ΑΒ.

Λύση

Εποπτικά συμπεραίνουμε (Σχήμα 16) ότι το ζητούμενο σημείο πρέπει να είναι το σημείο όπου η εφαπτομένη στην παραβολή είναι παράλληλη στην ΑΒ. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι πράγματι σωστό. Από το μέσο Μ της (δεδομένης) χορδής ΑΒ θεωρούμε ευθεία παράλληλη στον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο σημείο Σ. Επειδή η ΣΜ είναι διάμετρος της παραβολής, η εφαπτομένη (τ) στο Σ είναι (Πρόταση 7) παράλληλη στην ΑΒ. Αν Γ τυχόν σημείο του τόξου ΑΟΒ και Η, Ρ οι προβολές των Γ, Σ στην ΑΒ θα έχουμε ΣΡ ≥ ΓΗ, εφόσον το Γ βρίσκεται μέσα στην ζώνη των παραλλήλων ΑΒ, (ε). Άρα το Σ είναι το (μοναδικό) ζητούμενο σημείο.



Σχήμα 16

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

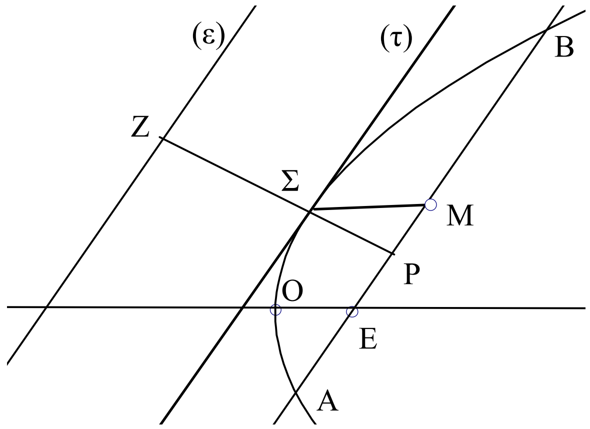
Έστω μια παραβολή με κορυφή Ο και μια ευθεία (ε) που δεν τέμνει την παραβολή. Να βρεθεί σημείο της παραβολής που απέχει λιγότερο από την ευθεία (ε).

Λύση

Από την εστία Ε (Σχήμα 17) της παραβολής θεωρούμε παράλληλη ΑΕΒ στην ευθεία (ε).

Εφ' όσον οι ευθείες (ε), ΑΒ είναι σταθερές, η απόστασή τους d είναι σταθερή. Αν Σ τυχόν σημείο του τόξου ΑΟΒ και Ζ, Ρ οι προβολές του στις ευθείες (ε), ΑΒ, αντίστοιχα, θα έχουμε ΣΖ = d-ΣΡ. Έτσι το ζητούμενο σημείο Σ θα είναι εκείνο που θα απέχει περισσότερο από την ευθεία ΑΒ. Αυτό όμως έχει προσδιοριστεί στο Πρόβλημα 1: είναι το σημείο τομής της διαμέτρου της παραβολής από το μέσο της ΑΒ και της παραβολής.

Σχήμα 17



Εφ' όσον οι ευθείες (ε), ΑΒ είναι σταθερές, η απόστασή τους d είναι σταθερή. Αν Σ τυχόν σημείο του τόξου ΑΟΒ και Ζ, Ρ οι προβολές του στις ευθείες (ε), ΑΒ, αντίστοιχα, θα έχουμε ΣΖ = d - ΣΡ. Έτσι το ζητούμενο σημείο Σ θα είναι εκείνο που θα απέχει περισσότερο από την ευθεία ΑΒ. Αυτό όμως έχει προσδιοριστεί στο Πρόβλημα 1: είναι το σημείο τομής της διαμέτρου της παραβολής από το μέσο της ΑΒ και της παραβολής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

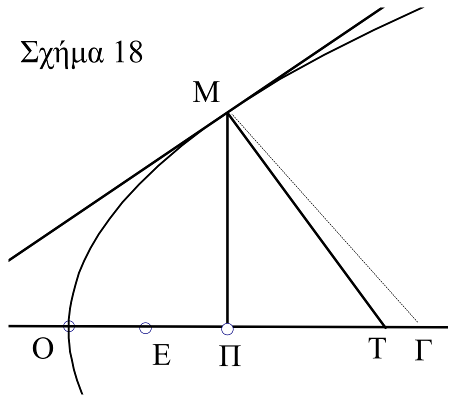
Έστω μια παραβολή και ένα σημείο Τ στον άξονα της παραβολής. Να βρεθεί σημείο Μ της παραβολής που απέχει λιγότερο από το σημείο Τ. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο αυτό Μ είναι κάθετη στην ΜΤ.

Λύση

Έστω Μ (Σχήμα 18) ένα σημείο της παραβολής και Π η προβολή του στον άξονά της. Σύμφωνα με την Πρόταση 1(α) έχουμε
$M\Pi^2 = 2p\cdot O\Pi$, όπου $p = 2OE$ η παράμετρος της παραβολής. Αν $OT = \mu$, έχουμε

$$MT^2 = M\Pi^2 + \Pi T^2 = 2p\cdot O\Pi + (\mu - O\Pi)^2$$
$$= O\Pi^2 + 2O\Pi(p - \mu) + \mu^2$$

Σχήμα 18



α) Αν $2OE = p \geq OT = \mu$, τότε η απόσταση ΜΤ γίνεται ελάχιστη όταν ΟΠ = 0, δηλαδή όταν το Μ ταυτίζεται με το Ο. Έτσι στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο σημείο είναι η κορυφή της παραβολής και η εφαπτομένη στην κορυφή είναι, ως γνωστόν, κάθετη στον άξονα και η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με μ.

β) Αν ΟΤ = μ > p, τότε $MT^2 = (O\Pi - (\mu - p))^2 + \mu^2 - (\mu - p)^2$.
Η απόσταση ΜΤ θα είναι ελάχιστη αν ΟΠ = μ - p. Έτσι ορίζεται το σημείο Π, άρα και το ζητούμενο σημείο Μ, ως σημείο τομής της κάθετης στον άξονα στο Π και της παραβολής. Η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με $2\mu p - p^2$.

Μένει να δειχθεί τώρα ότι η εφαπτομένη στο Μ είναι κάθετη στην ΜΤ. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ΠΤ = ΟΤ - ΟΠ = μ - (μ - p) = p. Έτσι αν θεωρήσουμε την εφαπτομένη της παραβολή στο σημείο Μ με p = 2ΠΤ, τότε για το κάθετο τμήμα ΜΓ, από την Πρόταση 5(ν), θα έχουμε ΠΓ = p και επειδή τα Τ, Γ είναι προς το ίδιο μέρος του Π, το Τ θα ταυτίζεται με το Γ. Άρα η εφαπτομένη στο Μ είναι κάθετη στην ΜΤ.

Άσκηση: Έστω σημείο Μ παραβολής διάφορο της κορυφής της, το οποίο απέχει την μικρότερη δυνατή απόσταση από ένα σημείο Τ του άξονα. Να δειχθεί ότι:
α) ΟΤ > p, β) Αν Π η προβολή του Μ στον άξονα τότε ΤΠ = p,
γ) Η γωνία ΜΤΠ είναι οξεία.

4.5 ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

1. Αν δυο σημεία παραβολής ισαπέχουν από την εστία της, τότε είτε συμπίπτουν είτε είναι συμμετρικά ως προς τον άξονά της.

2. Αν Μ σημείο παραβολής και Ε η εστία της, τότε ο κύκλος με διάμετρο ΜΕ εφάπτεται στην εφαπτομένη της παραβολής στο Ο.

3. Έστω μια παραβολή με κορυφή Ο και ένα σημείο της Α. Αν η ΟΑ τέμνει την διευθετούσα στο Β τότε η ΒΕ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της παραβολής στο Α.

4. Έστω ότι η εφαπτομένη της παραβολής σ' ένα σημείο της Μ τέμνει την εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της στο σημείο Κ και την διευθετούσα της στο Ζ. Αν Δ το σημείο που η διευθετούσα τέμνει τον άξονα της παραβολής, τότε ισχύουν
α) Τα σημεία Κ, Ε, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά, β) $EK^2 = MK \cdot KZ$,
γ) $ME^2 = MK \cdot MZ$.

5. Αν δυο παραβολές έχουν ίδια εστία και άξονα, αλλά αντίθετες κατευθύνσεις τότε τέμνονται ορθογώνια (κάθετες εφαπτομένες στα σημεία τομής).

6. Αν οι εφαπτομένες στα άκρα μιας εστιακής χορδής παραβολής τέμνουν την εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της στα σημεία Α, Β, τότε η γωνία ΑΕΒ είναι ορθή.

7. Αν ο άξονας παραβολής είναι μεσοκάθετη σε μια χορδή της, τότε οι εφαπτομένες στα άκρα της χορδής τέμνονται πάνω στον άξονά της και αντιστρόφως.

8. Έστω ΑΒ μια εστιακή χορδή παραβολής, με κορυφή Ο και εστία Ε, και Π, Ν οι προβολές των Α, Β αντίστοιχα στον άξονά της. Τότε ισχύουν
α) ΑΕ = ΟΠ + ΟΕ, β) $ΟΠ\cdot ΟΝ = ΟΕ^2$, γ) $ΑΕ\cdot ΕΒ = ΑΒ\cdot ΟΕ$.

9. Έστω Σ σημείο του άξονα παραβολής, ΣΜ, ΣΛ εφαπτόμενα τμήματα και μια εφαπτομένη στο σημείο της Τ που τέμνει τα τμήματα αυτά αντίστοιχα στα σημεία Κ, Ρ. Τότε ισχύουν
α) Το τρίγωνο ΚΕΡ είναι ισοσκελές, β) Το τετράπλευρο ΣΚΕΡ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, γ) ΣΡ = ΚΜ, ΣΚ = ΡΛ, δ) $ΕΚ^2 = ΕΤ\cdot ΕΣ$.

10. α) Από ένα σημείο Σ της διευθετούσας φέρνομε δυο εφαπτόμενες στην παραβολή και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Τότε ισχύουν
i) η ΑΒ είναι εστιακή χορδή, ii) Η ΣΕ είναι κάθετη στην ΑΒ,
iii) οι ευθείες ΣΑ, ΣΒ είναι κάθετες.
β) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου μιας παραβολής από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες στην παραβολή είναι η διευθετούσα της.

11. Αν από σημείο Σ εκτός παραβολής θεωρήσουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ ώστε η ΣΕ να είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΣΒ, τότε ισχύουν
α) η ευθεία ΣΕ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΒ και άξονας της παραβολής,
β) το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΣ.

12. Αν μια χορδή παραβολής είναι κάθετη στον άξονά της και οι εφαπτόμενες στα άκρα της χορδής αυτής τέμνονται κάθετα, τότε το σημείο τομής τους συμπίπτει με το σημείο τομής του άξονα με την διευθετούσα.

13. Έστω ΣΜ, ΣΛ εφαπτόμενα τμήματα παραβολής και μια εφαπτομένη στο σημείο της Τ που τέμνει τα τμήματα αυτά αντίστοιχα στα σημεία Κ, Ρ. Τότε ισχύουν α) αν το σημείο Σ είναι σταθερό και η εφαπτομένη ΚΡ μεταβάλλεται τότε οι γωνίες του τριγώνου ΚΡΕ μένουν σταθερές,
β) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΣΚΡ διέρχεται από την εστία,
γ) $ΕΡ\cdot ΕΚ = ΕΤ\cdot ΕΣ$.

14. Αν η εφαπτομένη στην παραβολή σ' ένα σημείο Μ τέμνει την εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή Ο στο σημείο Κ και την διευθετούσα στο Ζ, τότε ισχύουν
α) Το τετράπλευρο ΗΜΒΕ είναι παραλληλόγραμμο,
β) $ΕΚ^2 = ΕΜ \cdot ΕΟ = ΜΚ \cdot ΚΖ$.

15. Με τα δεδομένα της Πρότασης 10, θεωρούμε την ΑΗ (Σχήμα 13) που τέμνει την ΒΖ στο Θ. Τότε το τετράπλευρο ΖΘΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

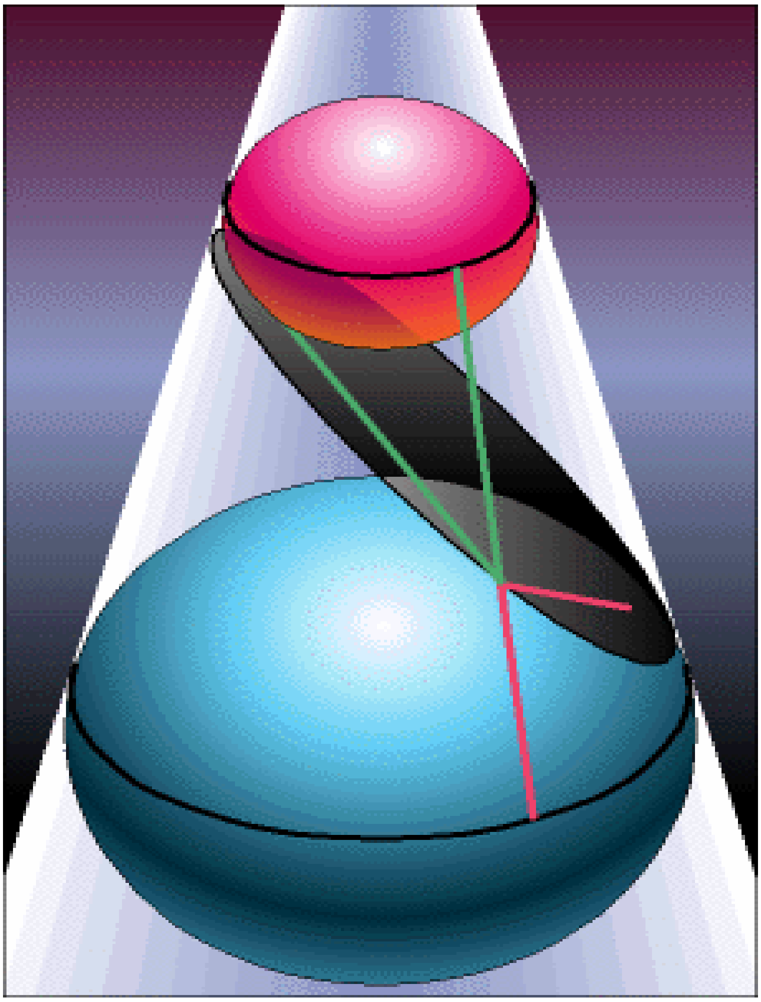
16. Από την κορυφή Ο παραβολής θεωρούμε μια χορδή της ΟΒ και την κάθετη στην ΟΒ στο σημείο Β που τέμνει τον άξονα στο σημείο Γ. Έστω η εστιακή χορδή ΚΛ παράλληλη στην ΟΒ. Από το μέσο Μ του ΚΛ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα που τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Ζ. Τότε ισχύουν
α) το τρίγωνο ΖΕΜ είναι ορθογώνιο, β) ΚΛ = ΖΜ = ΟΓ,
γ) η εφαπτομένη στο Κ διέρχεται από το σημείο Ζ.

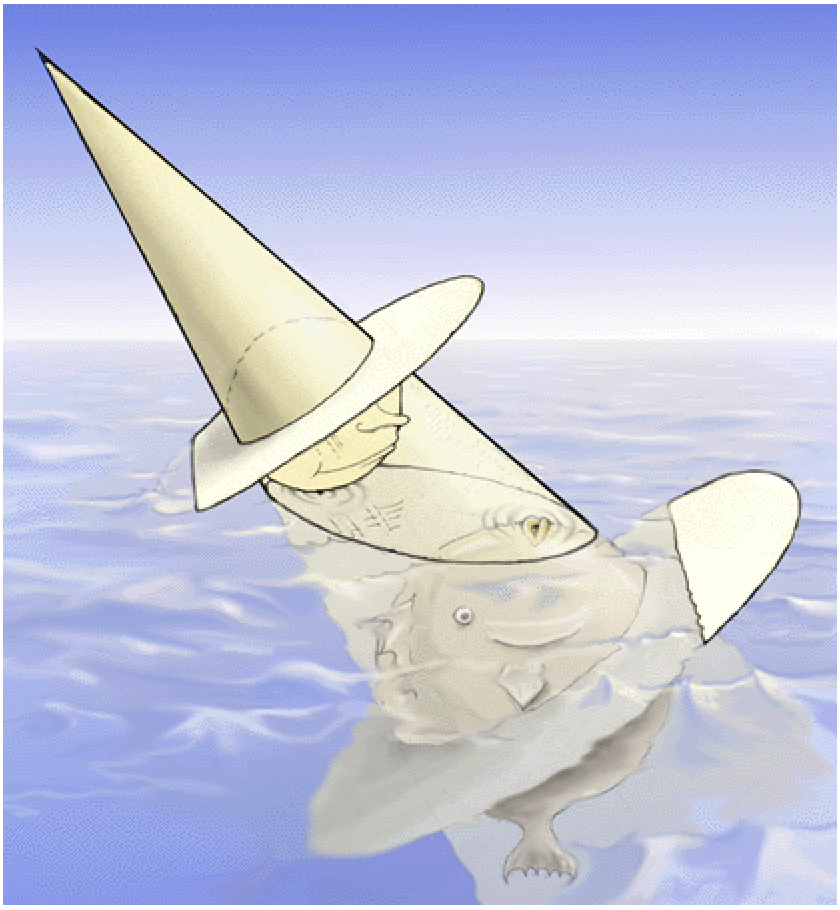
17. Αν η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Σ παραβολής είναι παράλληλη σε μια χορδή ΚΛ που διέρχεται από την εστία Ε, τότε ισχύουν
α) ΚΛ = 4ΕΣ,
β) αν ΑΒ χορδή παραβολής παράλληλη στην ΚΛ και η παράλληλη από ένα σημείο Τ του ΑΒ προς τον άξονα τέμνει την παραβολή στο Μ, τότε $ΤΑ \cdot ΤΒ = 4ΕΣ \cdot ΜΤ$,
γ) δυο χορδές ΓΔ, ΑΒ, παραβολής τέμνονται στο Τ. Αν ΗΘ, ΚΛ εστιακές χορδές που είναι παράλληλες αντίστοιχα στις ΑΒ, ΓΔ, τότε ισχύει
$$\frac{ΤΑ \cdot ΤΒ}{ΥΓ \cdot ΤΔ} = \frac{ΚΛ}{ΗΘ}.$$
18. Έστω ΑΒ χορδή παραβολής κάθετη στην παραβολή στο σημείο Α. Μια εστιακή χορδή ΖΗ παράλληλη στην ΑΒ τέμνει, την εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της Ο, στο σημείο Κ. Τότε ισχύει $ΑΒ \cdot ΕΟ = ΖΗ \cdot ΕΚ$.

19. Από ένα σημείο Σ θεωρούμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΜ, ΣΛ μιας παραβολής και από το Σ ευθεία παράλληλη στον άξονα της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Τ και την ΜΛ στο Κ. Τότε ισχύουν
α) $ΣΜ^2 = 4ΜΕ \cdot ΣΤ$, β) $ΣΜ \cdot ΣΛ = 2ΣΕ \cdot ΣΚ$.

* * * *

ΑΠΟΔΕΙΞΗ DANDELIN





Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο   Π Ε Μ Π Τ Ο

Ε Λ Λ Ε Ι Ψ Η

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συνεχίζουμε την μελέτη των κωνικών τομών με την έλλειψη. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε και θα αποδείξουμε με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μερικές από τις σπουδαιότερες ιδιότητες της έλλειψης, ενώ άλλες θα αναφέρουμε στο τέλος χωρίς απόδειξη. Αποδείξεις μπορούν να δοθούν και με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, με κόστος τις πολλές αλγεβρικές πράξεις και το έλλειμμα στην Μαθηματική σκέψη και κομψότητα. Πρέπει να έχουμε υπόψη ότι οι αποδείξεις που θα δώσουμε θα στηριχθούν κυρίως στον νέο ορισμό που δώσαμε στην έλλειψη, καθώς και στην ισοδύναμη εστιακή της ιδιότητά που θα αποδείξουμε παρακάτω.
Υπενθυμίζουμε πρώτα μερικά βασικά στοιχεία και στοιχειώδεις ιδιότητες της έλλειψης.

5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Όπως ήδη αναφέραμε στον γενικό ορισμό των κωνικών, αν Ε είναι ένα σημείο ενός επιπέδου, (δ) μια ευθεία του που δεν διέρχεται από το Ε, και ε ένας (σταθερός) αριθμός με $0 < \varepsilon < 1$, ονομάζουμε *έλλειψη*, τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\frac{ME}{MH} = \varepsilon,$$

όπου Η η προβολή του Μ στην ευθεία (δ) και (Σχήμα 1). Το **Ε** λέγεται **εστία,** η ευθεία **(δ) διευθετούσα** και ο αριθμός **ε εκκεντρότητα** της έλλειψης.

Θεωρούμε την κάθετη από το Ε στην διευθετούσα που την τέμνει στο σημείο Κ. Τότε προφανώς υπάρχουν μοναδικά σημεία Α, Α′ της κάθετης αυτής στο ημιεπίπεδο της διευθετούσας που ανήκει η εστία Ε τέτοια ώστε

$$AE = \varepsilon AK,\ A'E = \varepsilon A'K$$

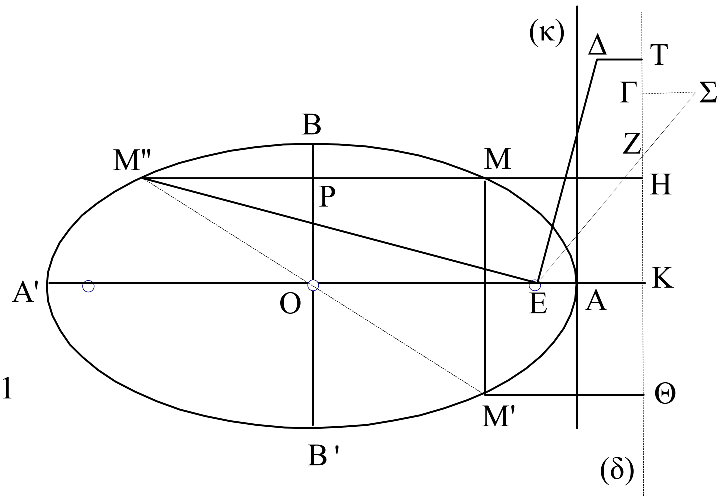
Τα σημεία Α, Α′ ανήκουν στην έλλειψη, σύμφωνα με τον ορισμό, και το τμήμα ΑΑ′ λέγεται **μεγάλος ή κύριος άξονας** της έλλειψης. Το μέσο του τμήματος ΑΑ′ λέγεται **κέντρο** της έλλειψης και παριστάνεται στα επόμενα με Ο. Πάνω στην κάθετη στον μεγάλο άξονα στο σημείο Ο, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν δυο ακριβώς σημεία της έλλειψης, έστω Β, Β′ (Βλέπε §5.2,VIII, ση-

μείωση). Το τμήμα ΒΒ′ λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης και τα σημεία Β, Β′, όπως και τα Α, Α′, λέγονται *κορυφές* της έλλειψης.
Χορδή μιας έλλειψης λέμε ένα τμήμα που συνδέει δυο σημεία της, ενώ **διάμετρο** μια χορδή (ή γενικότερα ολόκληρη την ευθεία) που διέρχεται από το κέντρο της. Δυο ελλείψεις με την ίδια εκκεντρότητα λέγονται **όμοιες**.

5.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ι. Αν η ευθεία (κ) είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης στην κορυφή της Α, τότε η έλλειψη ανήκει στο ημιεπίπεδο της ευθείας (κ) που περιέχει την εστία.

Πράγματι, έστω κατ’ αρχήν ότι υπάρχει σημείο Σ της έλλειψης δεξιά της διευθετούσας (Σχήμα 1). Τότε ΣΕ > ΣΖ > ΣΓ, άτοπο, αφού ΣΕ = εΣΓ < ΣΓ.
Έστω τώρα ένα σημείο Δ μεταξύ των (κ), (δ). Τότε στο τρίγωνο ΔΕΑ η γωνία $\widehat{EA\Delta}$ είναι αμβλεία, οπότε ΔΕ > ΕΑ = εΑΚ ≥ εΔΤ, δηλαδή ΔΕ > εΔΤ, άρα το Δ δεν ανήκει στην έλλειψη.



Σχήμα 1

Σημείωση
Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Δ πάνω στην κάθετη (κ) στην έλλειψη στην κορυφή της Α, εκτός του Α, δεν είναι σημείο της έλλειψης, άρα η ευθεία αυτή είναι *εφαπτομένη της έλλειψης* στο Α. Όμοια και για την άλλη κορυφή Α′.

ΙΙ. *Χρήσιμες σχέσεις*

Θεωρούμε μια έλλειψη με εκκεντρότητα ε και με απόσταση της εστίας από την διευθετούσα ΕΚ = d. Τότε τα σημεία Α, Α′ , Β, Β′ είναι σταθερά και τα μήκη των τμημάτων ΑΑ′, ΒΒ′, προσδιορίζονται μονοσήμαντα συναρτήσει της εκκεντρότητας ε και της d (Βλέπε §5.5 (1)).

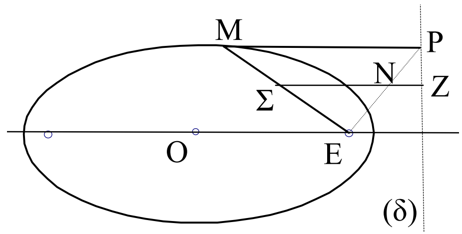
Έστω 2α ο μεγάλος άξονας και 2β ο μικρός άξονας της έλλειψης, δηλαδή ΑΑ′ = 2α και ΒΒ′ = 2β. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

- $ΟΕ = αε$, $ΟΚ = \frac{α}{ε}$, $ΟΑ^2 = ΟΕ \cdot ΟΚ$, $ΟΕ = ε^2ΟΚ$ (1)
- Απόσταση εστίας από κορυφή: $ΕΑ = α(1 - ε)$.
- Απόσταση εστίας από διευθετούσα: $ΕΚ = \frac{α}{ε} - αε = \frac{α(1 - ε^2)}{ε}$.
- Σχέση ημιαξόνων και εκκεντρότητας: $β^2 = α^2(1 - ε^2)$ (2)

Εύκολα επίσης αποδεικνύονται (γεωμετρικά) και οι παρακάτω ιδιότητες.

ΙΙΙ. Οι άξονες της έλλειψης είναι άξονες συμμετρίας της και το κέντρο της είναι κέντρο συμμετρίας της (Σχήμα (1).

IV. Αν Σ σημείο εντός της έλλειψης και Ζ (Σχήμα 2) η προβολή του στην διευθετούσα τότε $ΣΕ < εΣΖ$, ενώ αν Σ είναι εκτός της έλλειψης τότε $ΣΕ > εΣΖ$.



Σχήμα 2

V. Οι εστίες της έλλειψης.

Έστω Ε′ (Σχήμα 3) το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς το κέντρο της έλλειψης Ο και (δ′) η συμμετρική της διευθετούσας (δ) ως προς τον μεγάλο άξονα. Τότε η έλλειψη με εστία το Ε′ και διευθετούσα (δ′) συμπίπτει με την έλλειψη με εστία Ε και διευθετούσα (δ′). Δηλαδή, αν Μ τυχόν σημείο της έλλειψης τότε αποδεικνύεται απλά ότι ισχύει

$$ΜΕ = εΜΗ \Leftrightarrow ΜΕ' = εΜΗ' .$$

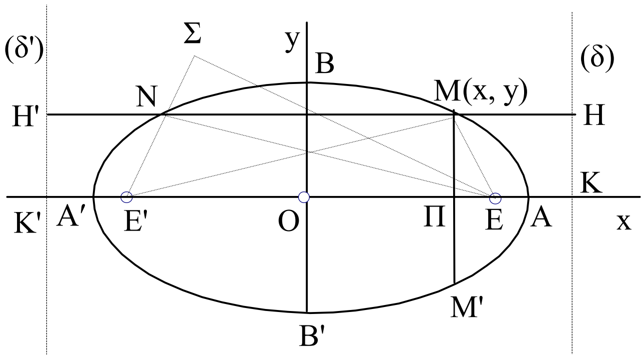
Έτσι και το Ε′ θεωρείται εστία όπως και η (δ′) διευθετούσα της ίδιας έλλειψης. Άρα σε κάθε έλλειψη έχουμε *δυο εστίες και δυο διευθετούσες*. Το μήκος του τμήματος Ε′Ε λέγεται *εστιακή απόσταση* και συμβολίζεται συνήθως με 2γ. Έτσι έχουμε $2γ = 2αε$ ή $ε = \frac{γ}{α}$.

VI. Αποστάσεις σημείου από τις εστίες.

Αν Μ σημείο της έλλειψης και Π η προβολή του στον μεγάλο άξονα τότε αν $d = ΟΠ < α$, ισχύουν (Σχήμα 3) :

- αν ΠΑ ≤ α τότε ΜΕ = α - εd, ΜΕ′ = α + εd ,
- αν ΠΑ ≥ α τότε ΜΕ = α + εd, ΜΕ′ = α – εd.

Σχήμα 3



Σημείωση
Οι παραπάνω σχέσεις είναι γενικά πολύ χρήσιμες. Δηλώνουν ότι κάθε σημείο της έλλειψης προσδιορίζεται πλήρως από την απόσταση της προβολής του στον μεγάλο άξονα από το κέντρο της έλλειψης, και αντίστροφα. Έτσι αποδεικνύεται και το εξής: σε κάθε ευθεία κάθετη στο τμήμα ΑΑ′ ανήκουν δυο ακριβώς σημεία της έλλειψης, που συμπίπτουν όταν η ευθεία αυτή είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα στις κορυφές Α′, Α. Τα σημεία αυτά είναι σημεία τομής του κύκλου κέντρου Ε και ακτίνας R = α - εd με την ευθεία αυτή. *Αυτό μας δείχνει και ένα τρόπο κατασκευής σημείων έλλειψης όταν γνωρίζουμε τον μεγάλο της άξονα 2α και την εκκεντρότητα ε.*

VII. Η εστιακή ιδιότητα έλλειψης

Αν Μ σημείο έλλειψης τότε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία Ε, Ε′ είναι σταθερό και ίσο με 2α > ΕΕ′, και αντιστρόφως.

(Υπόδειξη: για το ορθό χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (Σχήμα 3) ΜΕ = εΜΗ, ΜΕ′ = εΜΗ′. Για το αντίστροφο, θεωρούμε μια ευθεία (δ) κάθετη στην ΕΕ′ σε απόσταση ΟΚ = α^2/γ από το μέσο Ο του ΕΕ′ προς το μέρος του σημείου Ε. Αν Η η προβολή του Μ στην (δ) και ΜΕ′ > ΜΕ, τότε με την βοήθεια του 2ου θεωρήματος των διαμέσων στο τρίγωνο Ε′ΜΕ, βρίσκουμε $\frac{ME}{MH} = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$ σταθερός. Το ίδιο προκύπτει και στις περιπτώσεις ΜΕ′ < ΜΕ, ΜΕ′ = ΜΕ. Άρα το Μ ανήκει στην έλλειψη με εκκεντρότητα ε = γ/α και διευθετούσα την ευθεία (δ). Η έλλειψη αυτή έχει μεγάλο άξονα α και μικρό β, όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εστιακή αυτή ιδιότητα είναι χαρακτηριστική της έλλειψης, επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ορισμό της.

VIII. Σημεία εκτός της έλλειψης

Ένα σημείο Σ του επιπέδου της έλλειψης βρίσκεται εκτός αυτής αν και μόνο το άθροισμα των αποστάσεών του από τις εστίες είναι μεγαλύτερο του 2α.
(Υπόδειξη:εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΣΝΕ (Σχήμα 3).)

IX. Εξισώσεις έλλειψης

Αν και δεν θα μελετήσουμε την έλλειψη με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας κρίνουμε σκόπιμο να υπενθυμίσουμε μερικά σχετικά στοιχεία.

Α. Έστω μια έλλειψη με μήκη αξόνων 2α, 2β, α > β > 0. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxy, με αρχή το κέντρο Ο της έλλειψης, και την εστία Ε στον θετικό ημιάξονα των x (Σχήμα 3). Τότε, εύκολα προκύπτει ότι ένα σημείο Μ(x, y) ανήκει στην έλλειψη αν και μόνο

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

που αποτελεί την (κανονική ή ανηγμένη) εξίσωση της έλλειψης.
Οι εστίες της έλλειψης αυτής είναι τα σημεία Ε(γ, 0), Ε′(-γ, 0).
Οι διευθετούσες έχουν εξισώσεις $x = \pm\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ ή $x=\pm\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης, με την παραπάνω εξίσωση, σ' ένα σημείο (x_1,y_1) είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1\,.$$

Β. Η έλλειψη έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\ y = \beta\eta\mu\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Η γωνία -παράμετρος θ μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά (βλέπε σχετικά την άσκηση 19, §5.5). Θέτοντας t = εφφ, έχουμε και τις παραμετρικές εξισώσεις $x=\dfrac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}$, $y=\dfrac{2\beta t}{1+t^2}$, $t \in R$.
Με τις παραμετρικές εξισώσεις αντιμετωπίζονται πολλές φορές ευκολότερα ορισμένα προβλήματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

5.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

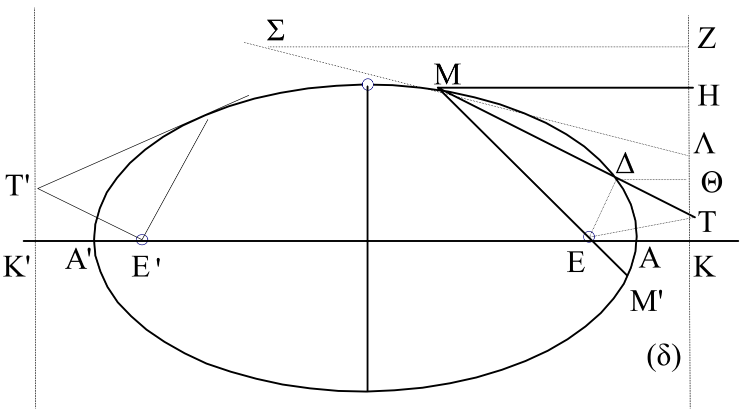
Στις παρακάτω προτάσεις, αν δεν αναφέρεται διαφορετικά, θα σημειώνουμε τις εστίες με Ε, Ε′ και με Ο το κέντρο της έλλειψης. Επίσης με 2α θα συμβολίζουμε τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, με 2β τον μικρό, με ε την εκκεντρότητα και με 2γ την εστιακή απόσταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (Χορδή, εστία και διευθετούσα)

Αν μια ευθεία τέμνει την έλλειψη στα σημεία Μ, Δ και την διευθετούσα της στο Τ, τότε η ΕΤ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας, της γωνίας ΜΕΔ .

Απόδειξη
Έστω Η, Θ οι προβολές των Μ, Δ αντίστοιχα στην διευθετούσα. Επειδή (Σχήμα 5) ΔΘ//ΜΗ έχουμε $\frac{\Delta T}{MT}=\frac{\Delta\Theta}{MH}$, αλλά ΔΕ = εΔΘ, ΜΕ = εΜΗ, οπότε

Σχήμα 5



$$\frac{\Delta E}{ME}=\frac{\Delta\Theta}{MH},\ \text{άρα}\ \frac{\Delta T}{MT}=\frac{\Delta E}{ME}\ \text{ή}\ \frac{E\Delta}{EM}=\frac{T\Delta}{MT}.$$

Επομένως η ΕΤ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Ε του τριγώνου ΜΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1
Αν μια ευθεία τέμνει την έλλειψη στα (διαφορετικά) σημεία Μ, Δ και την διευθετούσα της στο Τ, όπου το Δ είναι μεταξύ των Μ και Τ ισχύει,

$M\hat{E}T > 90^o$ και $\Delta\hat{E}T < 90^o$.

Πράγματι, είναι $\widehat{MET} + \varphi = 180^o$ και $\widehat{\Delta ET} = \varphi < \widehat{MET}$, οπότε $\widehat{MET} > 90^o$ και $\widehat{\Delta ET} < 90^o$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (Ύπαρξη και μοναδικότητα εφαπτομένης)
Σε κάθε σημείο Μ μιας έλλειψης υπάρχει εφαπτομένη και είναι μοναδική.

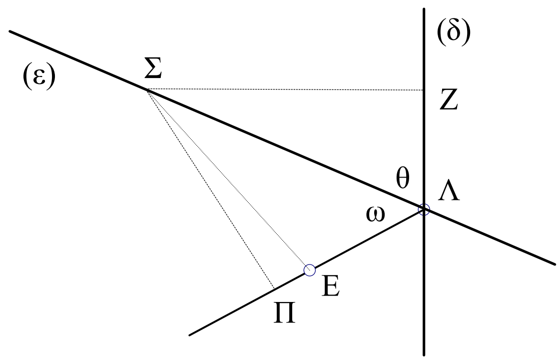
Απόδειξη
α) Ύπαρξη. Έστω Μ (Σχήμα 5) σημείο διάφορο των άκρων του μεγάλου άξονα, οπότε η κάθετη στην ΜΕ στο σημείο Ε τέμνει την διευθετούσα, έστω στο Τ. Η ευθεία ΜΤ είναι εφαπτομένη στο Μ. Πράγματι, αν έτεμνε την έλλειψη στο σημείο Δ, τότε από το Πόρισμα 1.1, έχουμε $\widehat{MET} > 90^o$ ή $\widehat{MET} < 90^o$, άτοπο. Αν Μ άκρο του μεγάλου άξονα της έλλειψης, τότε όπως είδαμε (§ 5.2, Ι Σημείωση) η κάθετη στον άξονα στο σημείο αυτό είναι εφαπτομένη.

β) Μοναδικότητα.
Έστω ΜΛ μια εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ, διάφορο των άκρων του μεγάλου άξονα, που τέμνει την διευθετούσα στο Λ. Αν Σ τυχόν σημείο της ευθείας αυτής και ΣΖ κάθετη στην (δ), τότε (βλέπε §5.2, VI) πρέπει $\Sigma E \geq \varepsilon \Sigma Z$ ή $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z} \geq \varepsilon = \frac{ME}{MH}$, δηλαδή ο λόγος $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν το σημείο Σ (της σταθερής ευθείας ΜΛ) ταυτίζεται με το Μ (Σχήμα 6). Αυτό όμως συμβαίνει (βλέπε Λήμμα στην συνέχεια) μόνο όταν η ΛΕ είναι κάθετη στην ΜΕ. Όμως και ΕΤ κάθετη στην ΜΕ, άρα οι ΕΤ, ΕΛ ταυτίζονται άρα και οι ΜΤ, ΜΛ. Αν το σημείο Μ είναι άκρο του μεγάλου άξονα, τότε η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως στην περίπτωση της παραβολής (βλέπε Πρόταση 3, §4.3).

ΛΗΜΜΑ
Έστω (δ) και (ε) δυο (σταθερές ευθείες) τεμνόμενες στο Λ και Ε ένα (σταθερό) σημείο εκτός αυτών (Σχήμα 6). Αν Σ σημείο της ευθείας (ε) και ΣΖ κάθετη στην (δ), τότε ο λόγος $\frac{\Sigma E}{\Sigma Z}$ γίνεται ελάχιστος αν και μόνο αν ΣΕ κάθετη στην ΕΛ.

Απόδειξη (όπως ακριβώς στο αντίστοιχο Λήμμα στην Πρόταση 3, § 4.3)

Σχήμα 6



1η Κατασκευή εφαπτομένης σ' ένα σημείο έλλειψης

Από το προηγούμενο πόρισμα συμπεραίνουμε ένα τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης δοθείσης έλλειψης σ' ένα σημείο της Μ. Αν το Μ δεν είναι μια από τις κορυφές Α, Α′, φέρνουμε κάθετη στην ΜΕ, στο σημείο Ε, που τέμνει την διευθετούσα στο Τ. Τότε η ΜΤ είναι εφαπτομένη της έλλειψης. Αν το Μ συμπίπτει με την κορυφή Α ή Α′, τότε όπως είδαμε η κάθετη στον μεγάλο άξονα στο σημείο αυτό είναι η εφαπτομένη της έλλειψης (βλέπε §5.2, Ι).

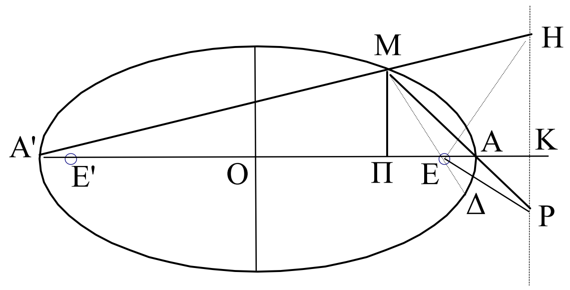
ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (Χαρακτηριστική ιδιότητα)
Α. Έστω Μ σημείο μιας έλλειψης, Π η προβολή του στον μεγάλο της άξονα και Η, Ρ τα σημεία που οι ευθείες Α′Μ, ΜΑ τέμνουν αντίστοιχα την διευθετούσα της έλλειψης. Τότε ισχύουν

α) Η γωνία $\widehat{\mathrm{HEP}}$ είναι ορθή, β) $\dfrac{\mathrm{M\Pi}^2}{\mathrm{A\Pi}\cdot \mathrm{A'\Pi}} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Β. Έστω τμήμα β και δυο σημεία Α, Α′ του επιπέδου με ΑΑ′ = 2α , α > β. Αν Μ σημείο του επιπέδου, ώστε η προβολή του στην ευθεία ΑΑ′ να ανήκει στο τμήμα ΑΑ′ και να ισχύει η (β), τότε το σημείο Μ ανήκει σε έλλειψη με ημιάξονες α, β.

Απόδειξη
α) Από την Πρόταση 1 για την χορδή Α′Μ, θα έχουμε ότι η ΕΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΜ (Σχήμα 7). Όμοια θεωρώντας την χορδή ΜΑ, η ΕΡ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΔ. Άρα οι ΗΕ, ΕΡ είναι κάθετες.

Σχήμα 7



β) Επειδή ΕΚ ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΗΕΡ έχουμε $ΕΚ^2 = ΗΚ \cdot ΚΡ$.

Από τα όμοια τρίγωνα Α′ΜΠ, Α′ΗΚ έχουμε $\frac{ΜΠ}{Α'Π} = \frac{ΗΚ}{Α'Κ}$ (1).
Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΚΡ έχουμε $\frac{ΜΠ}{ΑΠ} = \frac{ΚΡ}{ΑΚ}$, (2), οπότε με πολλαπλασιασμό των (1), (2) παίρνουμε

$$\frac{ΜΠ^2}{ΑΠ \cdot Α'Π} = \frac{ΗΚ \cdot ΚΡ}{Α'Κ \cdot ΑΚ} = \frac{ΕΚ^2}{Α'Κ \cdot ΑΚ} \quad \text{σταθερός.}$$

Ειδικά αν ως Μ πάρουμε το σημείο Β (κορυφή) του μικρού άξονα, θα έχουμε $ΜΠ = β$, $ΑΠ = α = Α'Π$ και προκύπτει η προς απόδειξη σχέση.

Β. Έστω Ο το μέσο του ΑΑ′. Θεωρούμε σημεία Ε, Ε′ του τμήματος ΑΑ′ με $ΟΕ = ΟΕ' = γ$, όπου $γ^2 = α^2 - β^2$, $γ < α$.
Επειδή $ΑΠ \cdot Α'Π = (α + ΟΠ)(α - ΟΠ) = α^2 - ΟΠ^2$, έχουμε

$$ΜΕ^2 = ΜΠ^2 + ΠΕ^2 = \frac{β^2}{α^2}(α^2 - ΟΠ^2) + (ΟΕ - ΟΠ)^2 = \ldots = \left(\frac{γΟΠ}{α} - α\right)^2,$$

και λόγω της $α^2 > γΟΠ$, έχουμε $ΜΕ = α - \frac{γΟΠ}{α}$. Όμοια βρίσκουμε και

$$ΜΕ' = α + \frac{γΟΠ}{α}, \text{ οπότε } ΜΕ + ΜΕ' = 2α \text{ με } ΕΕ' = 2γ \text{ και } γ^2 = α^2 - β^2.$$

Έτσι σύμφωνα με την ιδιότητα VII της §5.2 το Μ ανήκει σε έλλειψη με εστία Ε και διευθετούσα την κάθετη στην ΑΑ′ σε απόσταση $ΟΚ = α^2/γ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1

Έστω δυο σημεία Α, Α′ με $ΑΑ' = 2α$ και τμήμα β με $α > β$. Έστω ακόμη Ο το μέσο του ΑΑ′, ευθεία (δ) κάθετη στην ΑΑ′ σε απόσταση $ΟΚ = α^2/γ$ και σημείο Ε του ΟΑ με $ΟΕ = γ$, όπου $γ^2 = α^2 - β^2$. Ένα σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία (δ), αν και μόνο ισχύει

$$\frac{ΜΠ^2}{α^2 - ΟΠ^2} = \frac{β^2}{α^2} \quad \text{ή} \quad \frac{ΟΠ^2}{α^2} + \frac{ΜΠ^2}{β^2} = 1$$

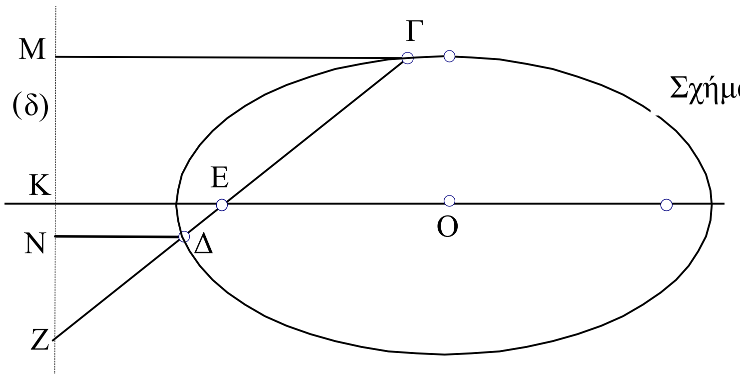
όπου και Π η προβολή του Μ στην ΑΑ′.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2
Το μήκος της χορδής έλλειψης που διέρχεται από μια εστία της και είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα (εστιακτομής) είναι ίσο με $p = \frac{2\beta^2}{\alpha}$. Ο αριθμός αυτός λέγεται *παράμετρος* της έλλειψης.

(Υπόδειξη: παίρνουμε ως ΟΠ = γ κλπ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Εστιακή χορδή και διευθετούσα)
Μία εστιακή χορδή ΓΔ μιας έλλειψης τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο Ζ. Τότε ισχύουν
α) Τα σημεία Ζ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Γ.
β) $\frac{1}{\mathrm{E\Gamma}} + \frac{1}{\mathrm{E\Delta}} =$ σταθερό.

Απόδειξη
α) Έστω Μ, Κ, Ν (Σχήμα 8) οι προβολές των Γ, Ε, Δ στην διευθετούσα.
Έχουμε
$\varepsilon = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{\Delta N}}$, οπότε $\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{\Delta N}}{\mathrm{M\Gamma}}$, αλλά ΜΓ//ΝΔ ,άρα $\frac{\mathrm{\Delta N}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{Z\Gamma}}$, επομένως
$\frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{Z\Gamma}} = \frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}}$ (1), οπότε τα σημεία Ζ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Γ.



Σχήμα 8

β) Έστω λ = ΕΔ, μ = ΕΓ.
Από την (1) προκύπτει $\frac{\mu}{\mathrm{Z\Gamma}} = \frac{\lambda}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$ (2)
Επειδή ΝΔ//ΚΕ έχουμε $\frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{\Delta N}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{EK}} = \frac{\lambda+\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{EK}}$ οπότε $\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{\Delta N}} = \frac{\lambda+\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\lambda}{\mathrm{Z\Delta}} + 1$

και λόγω της (2) $\frac{EK}{\Delta N} - 1 = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}$, αλλά ΔΝ = λ/ε , οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{L}$, όπου L = εΕΚ σταθερό και μάλιστα

$$L = \varepsilon(OK - OE) = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \alpha\varepsilon\right) = \alpha(1 - \varepsilon^2) = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Στην περίπτωση που η εστιακή χορδή είναι παράλληλη στην διευθετούσα, τότε είναι ΕΓ = ΕΔ = εΕΚ = L οπότε η σχέση ισχύει και πάλι. Παρατηρούμε ότι το μήκος L είναι ίσο με το ήμισυ της παραμέτρου (εστιακτομής) της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5 (Εφαπτόμενες στα άκρα εστιακής χορδής)

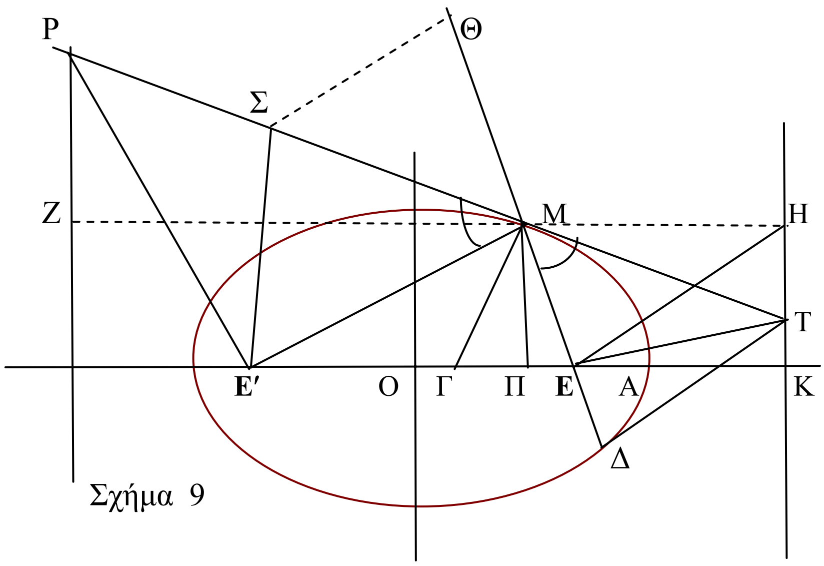
Έστω μια χορδή ΜΔ μιας έλλειψης που διέρχεται από μια εστία της Ε και ΜΓ η κάθετη στην έλλειψη στο σημείο Μ. Τότε

α) Οι εφαπτομένες στα άκρα της χορδής αυτής τέμνονται πάνω στην (αντίστοιχη της εστίας) διευθετούσα της έλλειψης.

β) Ισχύουν ΕΓ = εΕΜ, Ε′Γ = εΕ′Μ.

Απόδειξη

α) Φέρνουμε την ΕΤ (Σχήμα 9) κάθετη στην ΜΔ. Τότε (Πόρισμα 1.1) η ΜΤ είναι εφαπτομένη στο Μ της έλλειψης. Είναι $T\hat{E}\Delta = 90^o$ οπότε και η ΔΤ είναι εφαπτομένη. Άρα οι εφαπτομένες στα Μ, Δ τέμνονται πάνω στην διευθετούσα της.



Σχήμα 9

β) Το τετράπλευρο ΜΕΤΗ έχει τις απέναντι γωνίες του Ε, Η ορθές άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο με την ΜΤ διάμετρο του κύκλου. Άρα η ΜΓ ως κάθετη στην ΜΤ, είναι εφαπτομένη του κύκλου αυτού. Έτσι τα τρίγωνα ΜΓΕ, ΜΕΗ είναι όμοια ($\hat{\Gamma E M} = \hat{E M H}$, $\hat{\Gamma M E} = \hat{M T E} = \hat{M H E}$), οπότε

$\frac{E\Gamma}{EM} = \frac{EM}{MH} = \varepsilon$, και άρα ΕΓ = εΕΜ. Όμοια βρίσκουμε και ότι Ε′Γ = εΕ′Μ.
Αυτό προκύπτει και διαφορετικά:

$$E'\Gamma = 2\gamma - \Gamma E = 2\gamma - \varepsilon EM = 2\gamma - \varepsilon(2\alpha - E'M) = \varepsilon E'M.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.1

Αν Μ σημείο της έλλειψης, Η η προβολή του στην διευθετούσα και ΜΓ η κάθετη στην έλλειψη στο σημείο Μ, τότε το τμήμα ΕΜ είναι μέσο ανάλογο των ΕΓ, ΜΗ, δηλαδή $EM^2 = E\Gamma \cdot MH$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.2

Έστω (δ) η διευθετούσα μιας έλλειψης και Ε η αντίστοιχη εστία της. Από ένα σημείο Τ της (δ), φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΤΜ, ΤΔ στην έλλειψη. Τότε ισχύουν

α) Η χορδή ΜΔ διέρχεται από την εστία της έλλειψης,

β) Ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του κέντρου της έλλειψης πάνω στην ΜΔ είναι κύκλος διαμέτρου ΟΕ.

(Υπόδειξη (α): σύμφωνα με το πόρισμα 1.1 οι γωνίες ΜΕΤ, ΤΕΔ είναι ορθές.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (Ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης)

Αν μια ευθεία είναι εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της έλλειψης τότε σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ευθείες ΜΕ και ΜΕ′ και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Α΄ τρόπος: Έστω Σ (Σχήμα 9) τυχόν σημείο της εφαπτομένης στο Μ, οπότε (βλ. 5.2(Χ)) $\Sigma E' + \Sigma E \geq 2\alpha = ME' + ME$, με ισότητα μόνο όταν το Σ συμπίπτει με το Μ. Έτσι το άθροισμα ΣΕ′ + ΣΕ γίνεται ελάχιστο αν το Σ συμπίπτει με το Μ. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο αν $\hat{EMT} = \hat{\Sigma M E'}$.

Β΄ τρόπος: Έστω ΜΓ η κάθετη στην έλλειψη στο Μ. Από την προηγούμενη πρόταση είναι ΕΓ = εΕΜ (Σχήμα 9) και Ε′Γ = εΕ′Μ. Έτσι έχουμε

$$\frac{E\Gamma}{EM} = \frac{E'\Gamma}{E'M} \quad \text{ή} \quad \frac{ME}{ME'} = \frac{\Gamma E}{\Gamma E'},$$

άρα η ΜΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{EME'}$, οπότε και $\hat{EMT} = \hat{PME'}$.

Γ΄ τρόπος (εφαρμόζεται και στην υπερβολή): Έστω ότι η ΜΤ τέμνει την άλλη διευθετούσα στο Ρ. Έχουμε

$$\frac{ME'}{MZ}=\frac{ME}{MH},\ \text{οπότε}\ \frac{ME'}{ME}=\frac{MZ}{MH}=\frac{MP}{MT}.\ \text{Άρα έχουμε}\ \frac{ME'}{MP}=\frac{ME}{MT}$$

και επειδή τα τρίγωνα ΡΕ′Μ, ΜΕΤ είναι ορθογώνια στα Ε′, Ε αντίστοιχα, θα είναι όμοια, οπότε $E\hat{M}T = P\hat{M}E'$.

Αντιστρόφως : Έστω μια ευθεία ΜΤ που διέρχεται από το σημείο Μ της έλλειψης με $E\hat{M}T = P\hat{M}E'$ και Σ τυχόν σημείο της ευθείας αυτής διάφορο του Μ. Στην προέκταση της ΕΜ θεωρούμε τμήμα ΜΘ = ΜΕ′. Τότε από την ισότητα των τριγώνων ΘΜΣ, ΣΜΕ′ προκύπτει ΣΘ = ΣΕ′. Έχουμε

$$\Sigma E' + \Sigma E = \Sigma\Theta + \Sigma E > \Theta E = M\Theta + ME = ME' + ME = 2\alpha,$$

άρα το σημείο Σ βρίσκεται εκτός της έλλειψης επομένως η ευθεία αυτή είναι εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ.

2η Κατασκευή εφαπτομένης σ’ ένα σημείο έλλειψης

Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ένα τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης δοθείσης έλλειψης σ’ ένα σημείο της Μ. Αν το Μ δεν είναι μια από τις κορυφές της Α, Α′, φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $\Theta\hat{M}E'$ (παραπληρωματικής της $E'\hat{M}E$, (Σχήμα 9).) ή αλλιώς, φέρνουμε την κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας. $E'\hat{M}E$ στο σημείο Μ.. Η ευθεία αυτή είναι εφαπτομένη, εφόσον σχηματίζει ίσες γωνίες με τις εστιακές ακτίνες. Αν το Μ συμπίπτει με την κορυφή Α ή Α′, τότε όπως είδαμε η κάθετη στον μεγάλο άξονα στο σημείο αυτό είναι η εφαπτομένη της έλλειψης (βλέπε §5.2, Ι).

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.1
Η εφαπτομένη και η κάθετη στο ίδιο σημείο μιας έλλειψης όταν τέμνουν τον κύριο άξονά της, τον τέμνουν σε σημεία που είναι συζυγή αρμονικά των εστιών της,

(Υπόδειξη: ιδιότητα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2
Αν η κάθετη στην έλλειψη σ’ ένα σημείο της διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης (είναι διάμετρος), τότε το σημείο αυτό είναι κορυφή της έλλειψης ή η έλλειψη είναι κύκλος.

Απόδειξη

Αν η έλλειψη δεν είναι κύκλος, τότε έχει δυο (διαφορετικές) εστίες E', E. Έτσι αν M είναι το σημείο αυτό και δεν συμπίπτει με τις κορυφές A, A', τότε η MO θα είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου $E'ME$, άρα κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης, άρα το M συμπίπτει με την κορυφή B ή B'.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7 (Ποδική έλλειψης ως προς εστία)

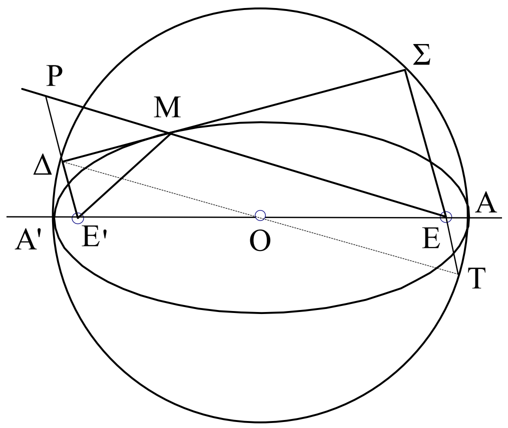
α) Ο γεωμετρικός τόπος των προβολών μιας εστίας της έλλειψης πάνω στις διάφορες εφαπτομένες της έλλειψης είναι κύκλος, με διάμετρο τον μεγάλο άξονα και κέντρο το κέντρο της έλλειψης (*ποδική της έλλειψης ως προς την εστία αυτή*).

β) Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της έλλειψης από μια εφαπτομένη της είναι σταθερό και ίσο με β^2.

Απόδειξη

α) Έστω Δ (Σχήμα 10) η προβολή της εστίας E' στην εφαπτομένη στο M. Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης έχουμε $\Delta\hat{M}E' = \Sigma\hat{M}E = P\hat{M}\Delta$.

Σχήμα 10



Επίσης η ΔM είναι κάθετη στην PE', άρα η ΔM είναι μεσοκάθετη στο τμήμα PE' οπότε $PM = ME'$ και Δ μέσο του PE', όπως και το O μέσο του EE'. Επομένως

$$\Delta O = \frac{PE}{2} = \frac{PM + ME}{2} = \frac{ME' + ME}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Άρα το Δ ανήκει σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας α.

Αντίστροφα: Έστω Δ τυχόν σημείο του κύκλου (O, α) και η εφαπτομένη ΔM της έλλειψης. Η προβολή του E' στην $\Delta M\Sigma$ ανήκει, σύμφωνα με το προηγούμενο, στον κύκλο (O, α), άρα συμπίπτει με το Δ. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για την άλλη εστία E'.

β) Κατ' αρχήν, αν η εφαπτομένη είναι στην κορυφή Α τότε

$$E'A \cdot EA = (\alpha + OE)(\alpha - OE) = \alpha^2 - OE^2 = \alpha^2 - \alpha^2\varepsilon^2 = \beta^2.$$

Θα δείξουμε ότι η τιμή αυτή του γινομένου είναι η ίδια για οποιαδήποτε εφαπτομένη.

Έστω Δ, Σ οι προβολές των εστιών Ε, Ε′ αντίστοιχα πάνω στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ και Τ το σημείο που προέκταση της ΣΕ τέμνει τον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας α. Τότε η ΔΟΤ είναι διάμετρος του κύκλου και παράλληλη στην ΡΕ (Δ, Ο μέσα πλευρών του τριγώνου ΡΕ′Ε).
Άρα το τετράπλευρο ΡΔΤΕ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΔΕ′ = ΡΔ = ΕΤ.
Έτσι έχουμε $\Delta E' \cdot E\Sigma = ET \cdot E\Sigma = A'E \cdot EA$ (τεμνόμενες στο Ε χορδές κύκλου)

$$= (\alpha + OE)(\alpha - OE) = \alpha^2 - OE^2 = \alpha^2 - \alpha^2\varepsilon^2 = \beta^2 \text{ σταθερό.}$$

Σημείωση

Ο παραπάνω κύκλος με διάμετρο τον κύριο άξονα ΑΑ′ λέγεται *πρωτεύον* ή *βοηθητικός* κύκλος της έλλειψης και είναι χρήσιμος στην μελέτη της. Ο κύκλος αυτός είναι ακόμη ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ, που η παράλληλη από το κέντρο Ο προς την ΜΕ τέμνει την εφαπτομένη στο Μ (Βλέπε και § 5.5 (4)).

ΠΡΟΤΑΣΗ 8 (Γεωμ. τόπος τομής καθέτων εφαπτομένων)

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία διέρχονται δυο κάθετες εφαπτομένες σε μια έλλειψη, είναι κύκλος με κέντρο το κέντρο της έλλειψης και ακτίνα $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

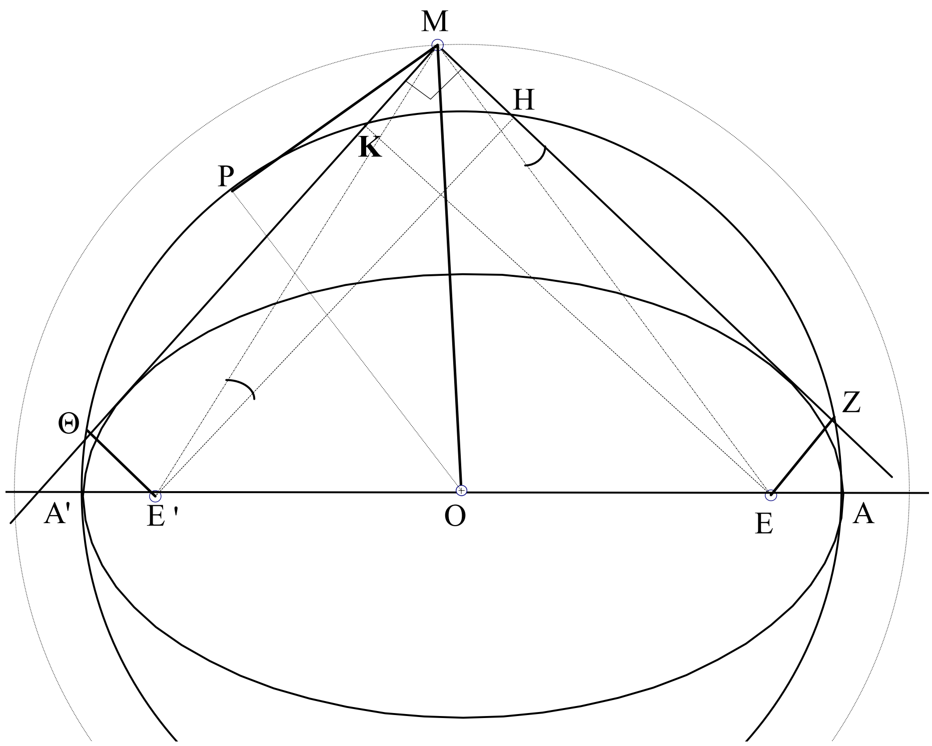
Απόδειξη

Έστω ένα Θ, Η (Σχήμα 11) οι προβολές της εστίας Ε′ και Κ, Ζ. οι προβολές της εστίας Ε στις δυο εφαπτομένες από το Μ, που είναι κάθετες μεταξύ τους. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 7(α), τα Θ, Η, Κ, Ζ ανήκουν στον πρωτεύοντα κύκλο της έλλειψης. Έστω ΜΡ εφαπτομένη του κύκλου αυτού, οπότε, λόγω της Πρότασης 7(β) και των σχηματιζομένων ορθογωνίων, έχουμε

$$MP^2 = MH \cdot MZ = E'\Theta \cdot EK = \beta^2.$$

Επομένως $OM^2 = MP^2 + PO^2 = \beta^2 + \alpha^2$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο (Ο, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$).



Σχήμα 11

Αντίστροφα: Έστω Μ τυχόν σημείο του κύκλου (Ο, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$) και οι εφαπτομένες από το Μ στην έλλειψη. Θα δείξουμε είναι κάθετες. Θεωρούμε τις προβολές Κ, Θ και Η, Ζ των εστιών πάνω στις δυο αυτές εφαπτομένες, που ανήκουν (Πρόταση 7(α)) στον πρωτεύοντα κύκλο της έλλειψης και την εφαπτομένη ΜΡ από το Μ προς τον πρωτεύοντα κύκλο. Έχουμε

$$MH\cdot MZ = MK\cdot M\Theta = MP^2 = OM^2 - OP^2 = \beta^2 + \alpha^2 - \alpha^2 = \beta^2$$

και $EK\cdot E'\Theta = E'H\cdot EZ = \beta^2$ (Πρόταση 7(β))

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $MH\cdot MZ = E'H\cdot EZ$ ή $\dfrac{MH}{E'H} = \dfrac{EZ}{MZ}$.

Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα Ε′ΜΗ, ΕΖΜ είναι όμοια οπότε $E\hat{M}Z = M\hat{E'}H$.

Όμοια από την σχέση ΜΚ·ΜΘ = ΘΕ′·ΚΕ προκύπτει $K\hat{M}E = \Theta\hat{E'}M$. Επομένως οι απέναντι γωνίες Ε′,Μ του τετραπλεύρου ΘΜΗΕ′ είναι ίσες, ενώ οι άλλες του γωνίες Θ, Η είναι ορθές, άρα και η γωνία Μ είναι ορθή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9 (Εφαπτόμενα τμήματα)

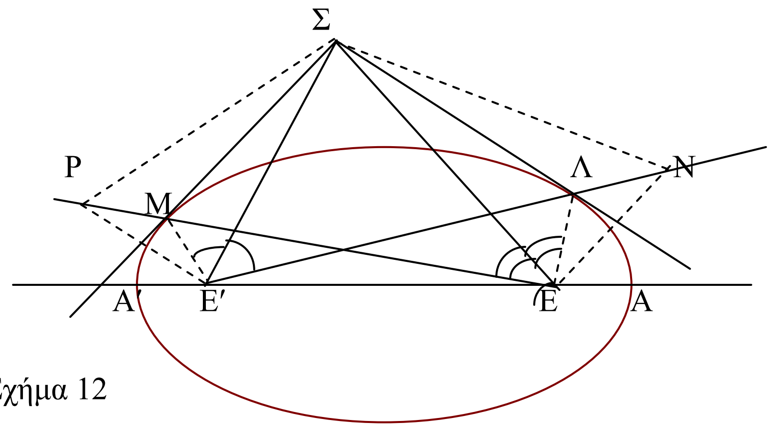
Έστω ότι οι εφαπτομένες μιας έλλειψης στα σημεία της Μ, Λ τέμνονται στο σημείο Σ. Τότε

α) Οι εφαπτομένες σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΣΕ, ΣΕ′, και

β) Τα τμήματα ΣΜ, ΣΛ φαίνονται με ίσες γωνίες από την εστία Ε, όπως και από την Ε′.

Απόδειξη

Φέρνουμε Ε′Ρ κάθετη στην ΜΣ και ΕΝ κάθετη στην ΣΛ (Σχήμα 12). Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης η ευθεία ΣΜ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΡΕ και διχοτόμος της γωνίας ΡΜΕ′ και η ΣΛ μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ και διχοτόμος της γωνίας ΕΣΝ.



Σχήμα 12

Έτσι έχουμε ΡΣ = ΣΕ′, ΣΕ = ΣΝ. Τα τρίγωνα ΡΣΕ, Ε′ΣΝ έχουν ήδη δυο πλευρές ίσες (ΣΡ = ΣΕ′, ΣΕ = ΣΝ) αλλά και τις τρίτες:

$$PE = PM + ME = ME' + ME = 2\alpha = \Lambda E' + \Lambda E = \Lambda E' + \Lambda N = E'N.$$

Άρα είναι ίσα.

α) Από την ισότητα αυτή έχουμε $P\hat{\Sigma}E = E'\hat{\Sigma}N$ ή $P\hat{\Sigma}E' = E\hat{\Sigma}N$ ή $2M\hat{\Sigma}E' = 2E\hat{\Sigma}\Lambda$ ή $M\hat{\Sigma}E' = E\hat{\Sigma}\Lambda$, όπως και $M\hat{\Sigma}E = E'\hat{\Sigma}\Lambda$.

β) Από την ίδια ισότητα τριγώνων έχουμε και $\Sigma\hat{N}\Lambda = \Sigma\hat{E}P$ αλλά $\Sigma\hat{N}\Lambda = \Sigma\hat{E}\Lambda$, οπότε $\Sigma\hat{E}P = \Sigma\hat{E}\Lambda$. Άρα η εστία Ε βλέπει τα τμήματα ΣΜ, ΣΛ με ίσες γωνίες. Ομοίως βρίσκομε $M\hat{E'}\Sigma = \Sigma\hat{E'}\Lambda$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.1

Το τμήμα μιας εφαπτομένης έλλειψης που περιέχεται μεταξύ των εφαπτομένων στα άκρα του μεγάλου της άξονα, φαίνεται από κάθε εστία της με ορθή γωνία (μ’ άλλα λόγια, ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα αυτό διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης. (Υπόδειξη:συνέπεια του (β))

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.2 (κατασκευή εφαπτομένων έλλειψης από σημείο εκτός έλλ.)
Έστω Σ σημείο εκτός έλλειψης και ότι οι κύκλοι (Ε′, 2α), (Σ, ΣΕ) τέμνονται (ισχύει 2α - ΣΕ < ΣΕ′ < ΣΕ + 2γ < ΣΕ + 2α) στα σημεία Ν, Ν′. Αν η Ε′Ν τέμνει την έλλειψη στο Λ ενώ η Ε′Ν′ την τέμνει στο Μ, τότε οι ΣΛ, ΣΜ είναι εφαπτόμενες της έλλειψης.
(Υπόδειξη: σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις; εστιακές ακτίνες)

ΠΡΟΤΑΣΗ 10 (Μέσα χορδών κωνικής)
Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων, μιας δέσμης παραλλήλων μεταξύ τους χορδών κωνικής είναι μια (σταθερή) διάμετρος (ακριβέστερα ημιευθεία της διαμέτρου). Η διάμετρος αυτή τέμνει την διευθετούσα σ’ ένα σημείο Σ για το οποίο η ευθεία ΣΕ είναι κάθετη στις χορδές αυτές.
Επί πλέον, αν η διάμετρος αυτή τέμνει την κωνική στο σημείο Ρ, τότε η παράλληλη από το Ρ σε μια από τις χορδές αυτές είναι εφαπτομένη στην κωνική στο σημείο αυτό.

Απόδειξη
Για την περίπτωση της παραβολής έχουμε ασχοληθεί στην§4.3, Πρόταση 7. Έστω μια τυχούσα χορδή ΔΓ (Σχήμα 13) από τις δεδομένες χορδές της κωνικής και Μ το μέσο της. Αν η ΔΓ είναι παράλληλη στην διευθετούσα τότε, λόγω συμμετρίας, το Μ ανήκει στον άξονα-διάμετρο της κωνικής. Έστω ότι η ΔΓ τέμνει την διευθετούσα στο Λ και η ευθεία ΕΒ είναι κάθετη στην ΔΓ που τέμνει την διευθετούσα στο Σ. Η ευθεία ΣΒ είναι σταθερή, αφού διέρχεται από το σταθερό σημείο Ε και είναι κάθετη στην ΓΔ, η οποία από υπόθεση θα σχηματίζει σταθερή γωνία έστω ω με την διευθετούσα. Έτσι και το σημείο Σ είναι σταθερό. Έχουμε

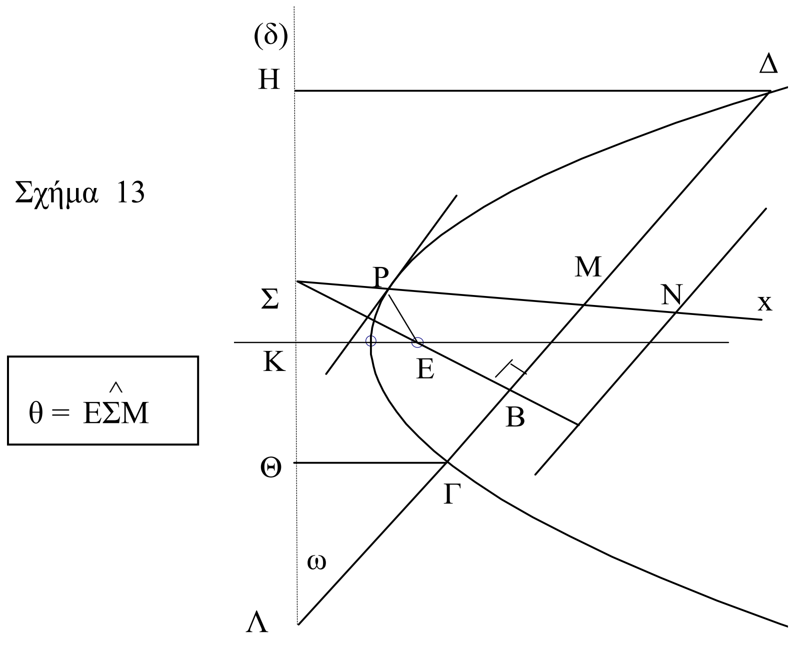
$$\frac{ΕΔ}{ΔΗ} = ε = \frac{ΓΕ}{ΓΘ}, \text{ οπότε } \frac{ΕΔ}{ΔΛ} = \frac{εΔΗ}{ΔΛ} = εημω \quad (1).$$

ομοίως βρίσκομε $\frac{ΕΓ}{ΓΛ} = \frac{εΓΘ}{ΓΛ} = εημω$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{ΕΔ}{ΔΛ} = \frac{ΕΓ}{ΓΛ}, \text{ οπότε } \frac{ΕΔ^2}{ΔΛ^2} = \frac{ΕΓ^2}{ΓΛ^2} = \frac{ΒΓ^2 + ΒΕ^2}{ΓΛ^2} = \frac{ΒΔ^2 + ΒΕ^2}{ΔΛ^2} = \frac{ΒΔ^2 - ΒΓ^2}{ΔΛ^2 - ΓΛ^2}$$

αλλά επειδή Μ μέσο της ΓΔ έχουμε
$ΒΔ^2 - ΒΓ^2 = (ΒΓ + ΒΔ)(ΒΔ - ΒΓ) = 2ΒΜ\cdot ΓΔ$ και
$ΔΛ^2 - ΓΛ^2 = (ΔΛ + ΓΛ)(ΔΛ - ΓΛ) = 2ΛΜ\cdot ΓΔ$, οπότε, λόγω και της (1),

$$(\varepsilon\eta\mu\omega)^2 = \frac{Ε\Delta^2}{\Delta\Lambda^2} = \frac{Β\Delta^2 - ΒΓ^2}{\Delta\Lambda^2 - Γ\Lambda^2} = \frac{ΒΜ}{\LambdaΜ}.$$ Έστω $(\varepsilon\eta\mu\omega)^2 = \kappa$.



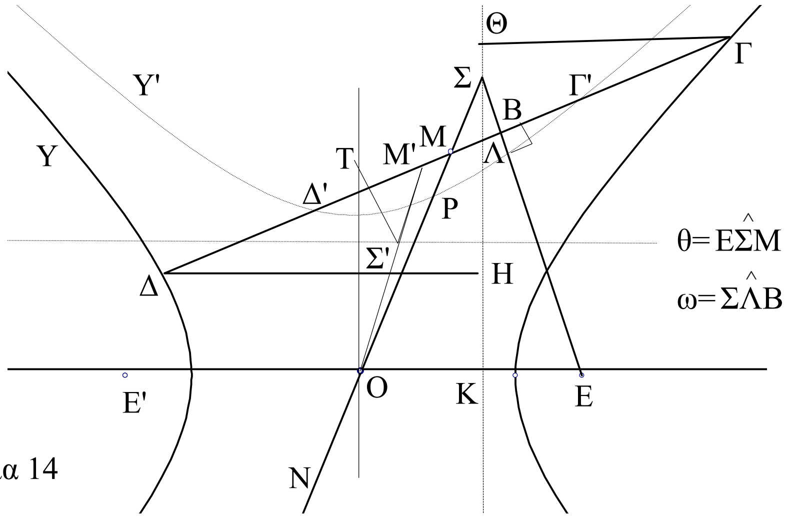
Έτσι ο λόγος ΒΜ/ΛΜ είναι σταθερός (και μικρότερος του 1), επομένως το μέσο Μ ανήκει σε σταθερή ευθεία που διέρχεται από το σταθερό σημείο Σ. Πράγματι, αν $\theta = \widehat{ΕΣΜ}$ και ω η σταθερή γωνία $\widehat{Σ\Lambda\Delta}$, έχουμε

$$\frac{ΒΜ}{Β\Lambda} = \frac{\kappa}{1-\kappa}, \text{ οπότε } \frac{ΒΜ}{ΒΣ} = \frac{\kappa}{1-\kappa}\cdot\frac{Β\Lambda}{ΒΣ} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \frac{(\varepsilon\eta\mu\omega)^2}{1-(\varepsilon\eta\mu\omega)^2}\sigma\varphi\omega,$$

δηλαδή θ σταθερή.
Αν είμαστε σε παραβολή τότε ε = 1, οπότε θ = ω και η ευθεία ΣΜ είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής, δηλαδή είναι διάμετρος.

Αν η κωνική είναι έλλειψη τότε η ΣΜ διέρχεται και από το κέντρο της έλλειψης, εφόσον αυτό είναι μέσο μιας χορδής (διαμέτρου) από την δεδομένη δέσμη των παραλλήλων ευθειών. Άρα η ΣΜ είναι διάμετρος της έλλειψης.
Αν η κωνική είναι υπερβολή, τότε θεωρούμε και τον άλλο κλάδο της και το μέσο Ι μιας χορδής παράλληλης προς την ΔΓ. Έτσι έχουμε ότι και το Ι ανήκει σε μια αντίστοιχη SI που σχηματίζει (επίσης) γωνία θ με την E′S. Τελικά, λόγω και της συμμετρίας ως προς το Ο διαπιστώνουμε ότι οι SI, ΣΜ συμπίπτουν και διέρχονται από το Ο. Άρα η ΣΜ είναι διάμετρος της υπερβολής.

Αντιστρόφως: Έστω τυχόν σημείο της Ν της ημιευθείας ΡΧ. Θα δείξουμε ότι είναι μέσο κάποιας χορδής από αυτές που ανήκουν στην δεδομένη δέσμη. Θεωρούμε μια ευθεία που διέρχεται από το Ν και είναι παράλληλη στην ΓΔ (άρα ανήκει στην δεδομένη δέσμη). Τότε η ΣΕ θα είναι κάθετη στην ευθεία αυτή και όπως προηγουμένως το μέσο της χορδής αυτής θα ανήκει στην Σx, άρα συμπίπτει με το Ν.



Σχήμα 14

Η εφαπτομένη στο άκρο της διαμέτρου

Έστω ότι η κωνική είναι έλλειψη ή υπερβολή με την ΔΓ χορδή ενός κλάδου της (Σχήμα 13), οπότε η ΣΜ τέμνει την κωνική έστω στο σημείο Ρ. Φέρνουμε μια παράλληλη από το Ρ προς την ΔΓ, οπότε αυτή είναι κάθετη στην ΣΕ. Αν η παράλληλη αυτή έτεμνε και σε άλλο σημείο την κωνική το μέσο της θα ανήκε στην ΣΜ, άτοπο, αφού θα ταυτιζόταν με την ΣΡ (η ΣΡ τέμνει τις παράλληλες).

Έστω τώρα και η περίπτωση που η χορδή ΔΓ, έχει τα άκρα της σε διαφορετικούς κλάδους της; υπερβολής (Σχήμα 14). Τότε $\frac{BM}{B\Lambda} > 1$, δηλαδή κ > 1 και προκύπτει $\varepsilon\varphi\theta = \frac{(\varepsilon\eta\mu\omega)^2}{(\varepsilon\eta\mu\omega)^2 - 1}\sigma\varphi\omega$, $\theta = E\hat{\Sigma}M$, $\omega = \Sigma\hat{\Lambda}\Gamma$. Το μέσο Μ θα βρίσκεται στην διάμετρο (και το κέντρο Ο είναι μέσο μιας παραλλήλου προς την ΔΓ χορδής-διαμέτρου) ΣΜ, η οποία όμως δεν τέμνει την υπερβολή. Τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή; Θα δείξουμε ότι στο σημείο Ρ, που η ΣΜ τέμνει την συζυγή της Υ′, η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΔΓ.

Επειδή η χορδή Δ′Γ′ της Υ′ σχηματίζει γωνία ω′ = 90^o - ω με την διευθετούσα της (δηλαδή την διευθετούσα της Υ′), το μέσο της Μ′, θα ανήκει σύμφωνα με το προηγούμενη περίπτωση (που η χορδή έχει άκρα στον ίδιο κλάδο) σε διάμετρο Σ′Μ′ που σχηματίζει με την ΤΣ′ (Τ εστία της Υ′) γωνία $\varphi = \mathrm{T}\hat{\Sigma}'\mathrm{M}'$ με

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{(\varepsilon_\sigma \eta\mu\omega')^2}{1-(\varepsilon_\sigma \eta\mu\omega')^2}\sigma\varphi\omega', \text{ και επειδή } \varepsilon_\sigma{}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}, \ \omega' = 90^o - \omega, \text{ προκύπτει}$$

εφφ = εφθ, άρα φ = θ και τελικά ότι τα μέσα των χορδών Δ′Γ′, ΔΓ ταυτίζονται και έτσι η εφαπτομένη, στο σημείο Ρ που η ΣΟ τέμνει την Υ′, είναι παράλληλη στην Δ′Γ′, άρα και στην ΔΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.1

Αν μια ευθεία τέμνει μια υπερβολή και την συζυγή της τότε οι αντίστοιχες χορδές τους έχουν κοινό μέσο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.2

Οι εφαπτομένες στα άκρα μιας διαμέτρου έλλειψης (ή υπερβολής) είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.3

Αν δυο εφαπτομένες σε έλλειψη (ή σε κύκλο) στα σημεία της Γ, Δ είναι παράλληλες, τότε η ΓΔ είναι διάμετρος και το γινόμενο των αποστάσεων μιας εστίας από αυτές είναι σταθερό και ίσο με β^2**.**

(Υπόδειξη: χρησιμοποιούμε την Πρόταση 7(β).)

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.4

Τα μέσα δυο παραλλήλων χορδών κωνικής ορίζουν μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της, δηλαδή είναι μια διάμετρός της.

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.5

Αν η μεσοκάθετη σε μια χορδή έλλειψης διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης, τότε η μεσοκάθετη είναι ένας από τους άξονές της (ή η έλλειψη είναι κύκλος).

(Υπόδειξη: η εφαπτομένη στο σημείο που η μεσοκάθετη τέμνει την έλλειψη, είναι παράλληλη στην χορδή, οπότε εφαρμόζουμε το Πόρισμα 6.2.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.6

Κάθε έλλειψη έχει δυο μόνο άξονες συμμετρίας.
(Υπόδειξη: Αν υπάρχει τρίτος άξονας, τότε θα περιέχει τα μέσα δυο καθέτων σ' αυτόν χορδών, άρα θα 'ναι διάμετρος, οπότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο Πόρισμα.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.7

Αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε έλλειψη, τότε το περίκεντρό του δεν μπορεί να συμπίπτει με το κέντρο της έλλειψης. Άρα δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε έλλειψη με το κέντρο βάρους του να συμπίπτει με το κέντρο της έλλειψης (εκτός αν είναι κύκλος).

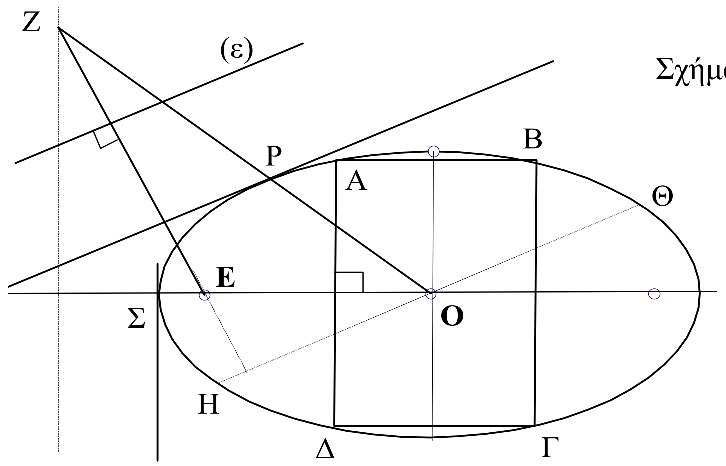
(Υπόδειξη: Αν συνέβαινε αυτό, η έλλειψη θά 'χε τρεις άξονες συμμετρίας, άρα θα' ταν κύκλος.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 10.8

Αν ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο σε έλλειψη, τότε οι πλευρές του είναι παράλληλες στους άξονες της έλλειψης.

Απόδειξη

Τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ (Σχήμα 15) ορίζουν ευθεία - μεσοπαράλληλη των ΑΒ, ΓΔ, που (Πόρισμα 9.3) διέρχεται από το κέντρο Ο της έλλειψης και είναι κάθετη στις πλευρές αυτές. Αν η διάμετρος αυτή τέμνει την έλλειψη στο σημείο Σ, τότε η εφαπτομένη στο Σ είναι (Πρόταση 10) παράλληλη στην ΑΔ, άρα κάθετη στην ΣΟ. Δηλαδή η κάθετη ΣΟ στην έλλειψη στο Σ διέρχεται από το κέντρο Ο, οπότε (Πόρισμα 6.2) το Σ είναι κορυφή της έλλειψης, δηλαδή η ΣΟ είναι άξονάς της. Ομοίως και η μεσοπαράλληλη των ΑΔ, ΒΓ θα είναι ο άλλος άξονας της έλλειψης.



Σχήμα 15

Κατασκευή εφαπτομένης παράλληλης σε δεδομένη ευθεία

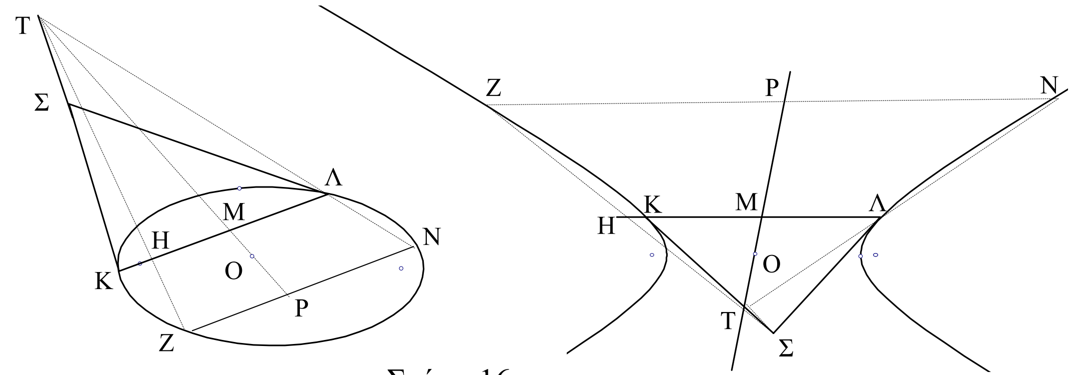
ΠΟΡΙΣΜΑ 10.9
Έστω (ε) μια ευθεία στο επίπεδο μιας έλλειψης (Σχήμα 15). Αν η (ε) είναι παράλληλη σ' ένα άξονα της έλλειψης τότε η κάθετη στον άλλο άξονα σε μια αντίστοιχη κορυφή της έλλειψης είναι εφαπτομένη παράλληλη στην (ε). Αν η (ε) δεν είναι παράλληλη στους άξονες, τότε φέρνουμε την κάθετη από μια εστία στην (ε) που τέμνει την αντίστοιχη διευθετούσα έστω στο σημείο Ζ. Στην συνέχεια φέρνουμε εφαπτομένη στο σημείο Ρ που η διάμετρος ΖΟ τέμνει την έλλειψη. Αυτή είναι παράλληλη στην (ε).

Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια διάμετρο ΗΘ παράλληλη στην (ε) τότε αυτή είναι κάθετη στην ΖΕ, οπότε από την Πρόταση 10, η εφαπτομένη στο Ρ είναι η ζητούμενη.

Σημείωση
Μια δέσμη παραλλήλων χορδών έλλειψης (ή υπερβολής) καθορίζεται από μια διάμετρο παράλληλη προς μια από τις ευθείες της δέσμης αυτής. Έτσι, αν έχουμε μια διάμετρο (τ) μιας έλλειψης, τα μέσα όλων των παραλλήλων προς αυτήν χορδών, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, ανήκουν σε μια άλλη διάμετρο (τ′). Η διάμετρος (τ′) λέγεται *συζυγής της* διαμέτρου (τ). Ισοδύναμα, συζυγής της διαμέτρου (τ) είναι η διάμετρος που είναι παράλληλη προς τις εφαπτομένες στα σημεία που η (τ) τέμνει την έλλειψη. Από την προηγούμενη πρόταση και τα πορίσματά της προκύπτει ότι η συζυγής της διαμέτρου (τ′) είναι η (τ). Έτσι οι (τ), (τ′) λέγονται απλά *συζυγείς διάμετροι* της έλλειψης (ή της υπερβολής). Στην Πρόταση 14 παρουσιάζονται οι ιδιότητες των συζυγών διαμέτρων της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11 (Εφαπτόμενα τμήματα κωνικής και διάμετρος)
Αν ΣΚ, ΣΛ εφαπτόμενα τμήματα κωνικής (έλλειψης, υπερβολής, παραβολής) τότε η διάμετρος ΣΟ διχοτομεί την χορδή ΚΛ (διαφορετικά : η διάμετρος από το Σ διχοτομεί την πολική του Σ).

Απόδειξη
Έστω Μ το μέσο της ΚΛ και ότι η ΟΜ τέμνει την ΣΚ στο σημείο Τ (Σχήμα 16). Θα δείξουμε ότι τελικά το Τ συμπίπτει με το Σ. Έστω ότι η ΤΛ τέμνει την κωνική και στο σημείο Ν (αν δεν την τέμνει θα είναι εφαπτομένη στο Λ, οπότε το Τ θα συμπίπτει με το Σ).



Σχήμα 16

Θεωρούμε την χορδή ΝΖ//ΚΛ, οπότε το μέσο της Ρ βρίσκεται πάνω στην διάμετρο ΤΟ. Αν η ΤΖ τέμνει την ΚΛ στο Η τότε λόγω του ότι ΗΛ//ΖΝ και ΖΡ = ΡΝ, έχουμε ΜΗ = ΜΛ = ΜΚ, άρα το Η ≡ Κ. Έτσι οι ευθείες ΤΚ, ΤΗΖ συμπίπτουν και επειδή ΣΚ εφαπτομένη πρέπει Κ ≡ Ζ. Τότε όμως και Ν ≡ Λ, οπότε η ΤΝ είναι εφαπτομένη στο Λ, άρα συμπίπτει με την ΣΛ. Άρα το Σ συμπίπτει με το Τ και επομένως η ΣΟ με την διάμετρο ΤΜΟ. (Μια άλλη απόδειξη για την παραβολή που μπορεί να γενικευθεί για κωνική, υπάρχει στην Πρόταση 8(δ), Κεφ. 4).

ΠΟΡΙΣΜΑ 11.1

Αν δυο εφαπτόμενα τμήματα ΣΚ, ΣΛ έλλειψης ή υπερβολής είναι ίσα, τότε το σημείο Σ ανήκει σ' ένα από τους δυο άξονες της κωνικής.

(Υπόδειξη: η ΣΟ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΚΛ. Η εφαπτομένη στο σημείο Θ που η ΣΟ τέμνει την κωνική είναι παράλληλη στην ΚΛ, οπότε η κάθετη της κωνικής στο Θ διέρχεται από το κέντρο της και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 6.2.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 11.2

Αν οι εφαπτομένες στα άκρα μιας χορδής έλλειψης ή υπερβολής τέμνονται, τότε η διάμετρος που διέρχεται από το μέσο της χορδής διέρχεται από το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12 (Εφαπτομένη και διάμετρος)

Έστω μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της έλλειψης (ή κύκλου), κέντρου Ο, που τέμνει μια διάμετρό της ΡΝ στο σημείο Τ. Αν η παράλληλη από το Μ προς εφαπτομένες στα άκρα της διαμέτρου ΡΝ τέμνει την ΡΝ στο Π, τότε ισχύουν:

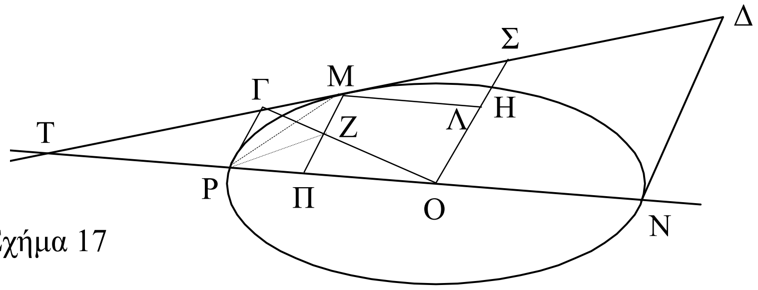
α) Το γινόμενο ΟΠ·ΟΤ είναι σταθερό και ίσο με $ΟΡ^2$.

β) Τα σημεία Τ, Π είναι συζυγή αρμονικά των Ρ, Ν.

Απόδειξη

α) Έστω ότι η εφαπτομένη τέμνει τις εφαπτομένες στα άκρα της διαμέτρου ΡΝ στα σημεία Γ, Δ. Οι παράλληλες στα άκρα της διαμέτρου ΡΝ (η ΡΝ *δεν είναι* κατ' ανάγκη ο κύριος άξονας της έλλειψης) είναι ως γνωστό παράλληλες (Σχήμα 17). Έστω ΡΖ//ΓΜ, οπότε το τετράπλευρο ΓΜΖΡ είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι, επειδή η ΓΟ είναι διάμετρος και από το Γ διέρχονται οι εφαπτόμενες ΓΜ, ΓΡ, η ΓΟ διέρχεται από το μέσο της ΡΜ (Πρόταση 10), δηλαδή συμπίπτει με την διαγώνιο ΓΖ του παραλληλογράμμου ΓΜΖΡ. Επίσης η ΓΟ είναι παράλληλη στην ΜΝ (διέρχεται από τα μέσα των ΡΜ, ΡΝ)

Επειδή ΠΖ//ΓΡ και ΡΖ//ΤΜ έχουμε $\frac{ΟΠ}{ΟΡ} = \frac{ΟΖ}{ΟΓ} = \frac{ΟΡ}{ΟΤ}$ οπότε $ΟΡ^2 = ΟΠ \cdot ΟΤ$.



Σχήμα 17

β) Πρέπει να δειχθεί ότι $\frac{ΤΡ}{ΤΝ} = \frac{ΠΡ}{ΠΝ}$.

Τα τρίγωνα ΓΜΖ, ΜΔΝ, λόγω του ότι ΜΖ//ΔΝ και ΜΝ//ΓΟ, είναι όμοια οπότε

$$\frac{ΓΜ}{ΜΖ} = \frac{ΜΔ}{ΔΝ} \text{ αλλά } ΓΡ = ΜΖ, \text{ οπότε } \frac{ΓΜ}{ΜΔ} = \frac{ΓΡ}{ΔΝ} = \frac{ΤΡ}{ΤΝ}, \text{ εφόσον } ΓΡ//ΔΝ.$$

Επίσης, επειδή ΜΠ//ΓΡ//ΔΝ, έχουμε $\frac{ΓΜ}{ΜΔ} = \frac{ΠΑ}{ΠΝ}$, οπότε $\frac{ΤΡ}{ΤΝ} = \frac{ΠΡ}{ΠΝ}$.

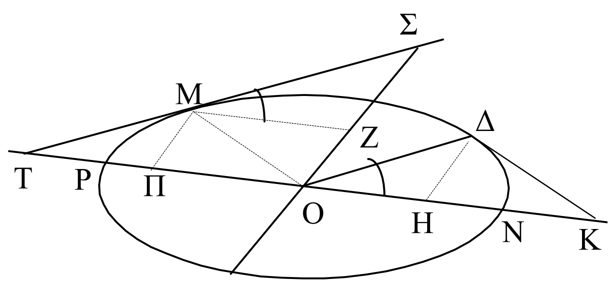
ΠΟΡΙΣΜΑ 12.1

Μια εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της έλλειψης τέμνει δυο συζυγείς διαμέτρους της ΟΡ, ΟΗ στα σημεία Τ, Σ αντίστοιχα (Σχήμα 17). Αν η παράλληλη από το Μ στην διάμετρο ΟΗ τέμνει την ΟΡ στο σημείο Π και η η παράλληλη από το Μ στην ΟΡ τέμνει την ΟΗ στο σημείο Λ, τότε ισχύουν $ΟΠ \cdot ΟΤ = ΟΡ^2$, $ΟΛ \cdot ΟΣ = ΟΗ^2$. Ειδικά αν ΟΡ ο μεγάλος ημιάξονας τότε $ΟΠ \cdot ΟΤ = α^2$ και $ΟΛ \cdot ΟΣ = β^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13 (Εφαπτομένη και συζυγείς διάμετροι)
Μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της έλλειψης τέμνει δυο συζυγείς διαμέτρους της στα σημεία Τ, Σ. Αν ΟΔ είναι μια ακτίνα της έλλειψης παράλληλη στην εφαπτομένη (στο σημείο Μ), τότε το τμήμα ΟΔ είναι μέσο ανάλογο των τμημάτων ΜΤ, ΜΣ.

Απόδειξη
Έστω οι συζυγείς διάμετροι ΟΤ, ΟΣ (Σχήμα 18). Θα δειχθεί ότι $ΟΔ^2$ = ΜΤ·ΜΣ. Φέρνουμε ΜΠ//ΟΣ και ΜΖ//ΟΤ. Από την Πρόταση 12(α) έχουμε $ΟΡ^2$ = ΟΠ·ΟΤ. Επειδή ΟΔ //ΤΣ η ΟΔ είναι συζυγής διάμετρος της ΟΜ, οπότε η εφα-πτομένη ΔΚ είναι παράλληλη στην ΜΟ. Έστω ΔΗ//ΟΣ, οπότε από Πρόταση 12(α) έχουμε ΟΗ·ΟΚ = $ΟΝ^2$. Επομένως ΟΠ·ΟΤ = ΟΗ·ΟΚ (1).

Σχήμα 18



Από τα όμοια τρίγωνα ΤΜΟ, ΟΔΚ έχουμε $\frac{ΜΤ}{ΟΤ} = \frac{ΟΔ}{ΟΚ}$. Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΜΖΣ, ΟΔΗ έχουμε $\frac{ΜΣ}{ΜΖ} = \frac{ΟΔ}{ΟΗ}$. Με πολλαπλασιασμό αυτών και λόγω του ότι ΜΖ = ΟΠ, έχουμε $\frac{ΜΤ \cdot ΜΣ}{ΟΤ \cdot ΟΠ} = \frac{ΟΔ^2}{ΟΗ \cdot ΟΚ}$ και λόγω της (1) παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.1
Αν Μ είναι ένα σταθερό σημείο μιας έλλειψης και δυο συζυγείς διάμετροι τέμνουν την εφαπτομένη στο Μ στα σημεία Τ, Σ τότε το γινόμενο ΜΤ·ΜΣ είναι σταθερό.
(Υπόδειξη: η εφαπτομένη στο Μ όπως και η παράλληλή της είναι σταθερές.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.2
Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ μιας έλλειψης τέμνει τις εφαπτομένες στα άκρα του μεγάλου άξονα στα σημεία Κ, Λ. Αν ΟΔ είναι μια ακτίνα της έλλειψης παράλληλη στην εφαπτομένη στο Μ, τότε $ΟΔ^2$ = ΚΜ·ΜΛ.

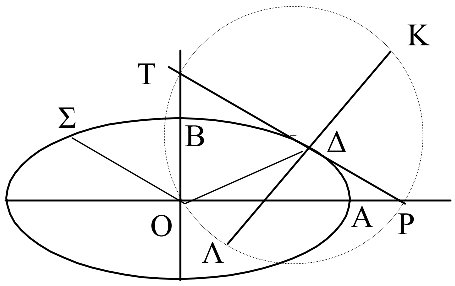
(Υπόδειξη: οι ΟΚ, ΟΛ είναι διάμετροι και μάλιστα συζυγείς.)

Κατασκευή αξόνων αν είναι γνωστές δυο συζυγείς διάμετροι

Με την βοήθεια της προηγούμενη πρότασης μπορεί να γίνει η κατασκευή των αξόνων μιας έλλειψης αν γνωρίζουμε δυο συζυγείς διαμέτρους της (κατά θέση και μέγεθος).

Ανάλυση

Έστω ΟΣ = β′, ΟΔ = α′ (Σχήμα 18.α) δυο συζυγείς διάμετροι και ότι έχουν κατάσκευαστεί οι άξονες της έλλειψης. Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Δ που τέμνει τους άξονες, έστω στα σημεία Τ, Ρ, και η οποία είναι παράλληλη στην ΟΣ. Πάνω στην κάθετη στην ΤΡ στο σημείο Δ, παίρνουμε τμήματα ΔΚ = ΔΛ = β′, οπότε από την Πρόταση 13, έχουμε ΤΔ·ΔΡ = $ΟΣ^2$ = $ΚΔ^2$. Έτσι ο κύκλος διαμέτρου ΤΡ διέρχεται από τα σημεία Ο, Κ, Λ. Τα σημεία όμως Κ, Λ μπορούν να κατασκευαστούν εξ’ αρχής.



Σχήμα 18.α

Κατασκευή

Φέρνουμε την εφαπτομένη και την κάθετη στην έλλειψη στο σημείο Δ και παίρνουμε πάνω σ’ αυτήν τμήματα ΔΚ = ΔΛ = β′.

Κατασκευάζουμε στην συνέχεια τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Ο, Κ, Λ. Ο κύκλος αυτός θα τέμνει την εφαπτομένη στο Δ, σε σημεία Τ, Ρ. Οι τομές των ΟΤ, ΟΡ με την έλλειψη ορίζουν τους άξονες ΟΒ, ΟΑ.

Αν τυχόν τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά τότε οι ΟΔ, ΟΣ είναι ήδη οι άξονες. (Σημ. Από την κατασκευή αυτή μπορούν να βρεθούν και τα μήκη των αξόνων, βλ. §5.5, 17(β).)

ΠΡΟΤΑΣΗ 14 (Συζυγείς διάμετροι έλλειψης).

Έστω ΟΔ, ΟΣ (Σχήμα 19) δυο συζυγείς ημιδιάμετροι έλλειψης με ημιάξονες α, β και Η, Ρ οι προβολές των Δ, Σ αντίστοιχα στον μεγάλο άξονα Τότε ισχύουν

α) $\dfrac{ΔΗ \cdot ΣΡ}{ΟΗ \cdot ΟΡ} = \dfrac{β^2}{α^2}$,

β) $ΟΗ^2+ΟΡ^2 = α^2$, $ΔΗ^2+ΣΡ^2 = β^2$,

γ) $ΟΔ^2+ΟΣ^2 = α^2+β^2$,

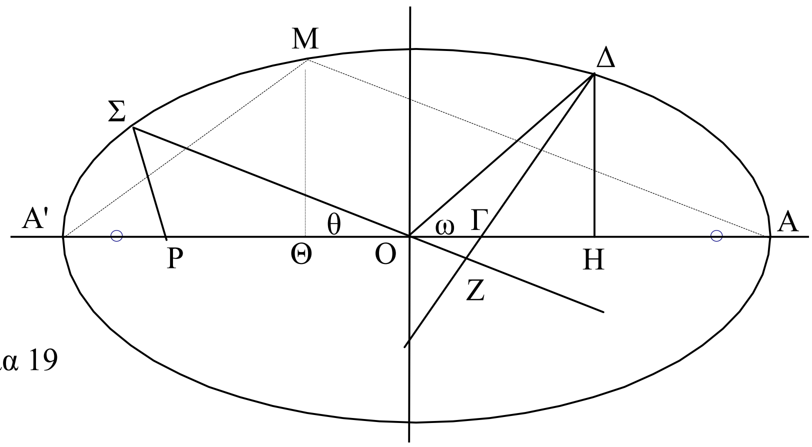
δ) $\dfrac{ΔΗ}{ΟΡ} = \dfrac{ΣΡ}{ΟΗ} = \dfrac{β}{α}$.

Απόδειξη

α) Κατ' αρχήν οι ημιδιάμετροι ΟΔ, ΟΣ μπορούν πάντα να θεωρηθούν στο ένα μισό της έλλειψης (που ορίζει ο μεγάλος άξονας), αφού αν κάποια ανήκει στο άλλο μισό παίρνουμε την συμμετρική της ως προς το Ο (Σχήμα 19).
Από το σημείο Α′ (άκρο μεγάλου άξονα) φέρουμε παράλληλη προς την διάμετρο ΟΔ που τέμνει την έλλειψη στο Μ. Τότε η ΟΣ διχοτομεί το τμήμα Α′Μ (εξ' ορισμού των συζυγών διαμέτρων). Έτσι η ΟΣ είναι παράλληλη στην ΜΑ.
Αν Θ η προβολή του Μ στον άξονα από την Πρόταση 3(β) έχουμε

$$\frac{\mathrm{M\Theta}^2}{\mathrm{A'\Theta}\cdot\mathrm{\Theta A}}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\quad(1).$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα Α′ΜΘ, ΟΔΗ έχουμε $\frac{\mathrm{M\Theta}}{\mathrm{A'\Theta}}=\frac{\Delta\mathrm{H}}{\mathrm{OH}}$ και από τα όμοια τρίγωνα ΟΣΡ, ΑΜΘ έχουμε $\frac{\mathrm{M\Theta}}{\mathrm{\Theta A}}=\frac{\Sigma\mathrm{P}}{\mathrm{OP}}$.



Σχήμα 19

Έτσι από την (1) παίρνουμε $\frac{\Delta\mathrm{H}\cdot\Sigma\mathrm{P}}{\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OP}}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (2)

β) Από την Πρόταση 3(β) έχουμε

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\Delta\mathrm{H}^2}{\mathrm{A'H}\cdot\mathrm{HA}}=\frac{\Delta\mathrm{H}^2}{\alpha^2-\mathrm{OH}^2}=\frac{\Sigma\mathrm{P}^2}{\alpha^2-\mathrm{OP}^2}\quad(3)$$

Άρα $\frac{\beta^4}{\alpha^4}=\frac{\Delta\mathrm{H}^2\cdot\Sigma\mathrm{P}^2}{(\alpha^2-\mathrm{OH}^2)(\alpha^2-\mathrm{OP}^2)}$ (4)

Απαλείφοντας το γινόμενο ΔΗ·ΣΡ από τις (2),(4), προκύπτει $\mathrm{OH}^2+\mathrm{OP}^2=\alpha^2$.

Λόγω της σχέσης αυτής από την (3) προκύπτει $\Delta\mathrm{H}^2+\Sigma\mathrm{P}^2=\beta^2$.

γ) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΔΗ, ΟΣΡ και λόγω των σχέσεων (β) έχουμε

$$\mathrm{O}\Delta^2+\mathrm{O}\Sigma^2=\mathrm{OH}^2+\Delta\mathrm{H}^2+\mathrm{OP}^2+\Sigma\mathrm{P}^2=\alpha^2+\beta^2.$$

δ) Επειδή $ΟΡ^2 = α^2 - ΟΗ^2$ από την (3) έχουμε $\frac{β^2}{α^2} = \frac{ΔΗ^2}{ΟΡ^2}$, οπότε λόγω και της (2) προκύπτει $\frac{ΔΗ}{ΟΡ} = \frac{ΣΡ}{ΟΗ} = \frac{β}{α}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 14.1

Αν θ, ω είναι οι οξείες γωνίες που σχηματίζουν οι ημιδιάμετροι ΟΣ, ΟΔ με τον μεγάλο άξονα τότε, αν είναι συζυγείς ισχύει (εφθ)(εφω) = $β^2/α^2$ (δηλαδή το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης δυο συζυγών διαμέτρων έλλειψης είναι ίσο με $-β^2/α^2$) και αντιστρόφως.

Ακόμη η γωνία δυο συζυγών διαμέτρων έλλειψης είναι πάντοτε αμβλεία, εκτός αν πρόκειται για τους άξονες που είναι ορθή.

(Υπόδειξη: το ορθό είναι άμεση συνέπεια του (α). Για το αντίστροφο: θεωρούμε την συζυγή της ΟΣ, έστω ΟΔ′ και αποδεικνύουμε, χρησιμοποιώντας το ορθό, ότι ταυτίζεται με την ΟΔ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 14.2

Έστω θ, ω, θ > ω, οι οξείες γωνίες που σχηματίζουν δυο συζυγείς διάμετροι ΟΣ, ΟΔ αντίστοιχα με τον μεγάλο άξονα έλλειψης (α > β). Τότε ισχύουν

ΟΣ < ΟΔ και $α^2 - β^2 > ΟΔ^2 - ΟΣ^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15 (Παραλληλόγραμμα συζυγών διαμέτρων)

α) Έστω ότι η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Δ της έλλειψης τέμνει τον μεγάλο άξονα στο Κ και τον μικρό στο Τ. Αν η κάθετη στην έλλειψη στο σημείο Δ τέμνει τον μεγάλο άξονα στο Γ και την παράλληλη από το Ο προς την εφαπτομένη (στο Δ), στο σημείο Ζ, τότε ισχύει $ΔΓ \cdot ΔΖ = β^2$.

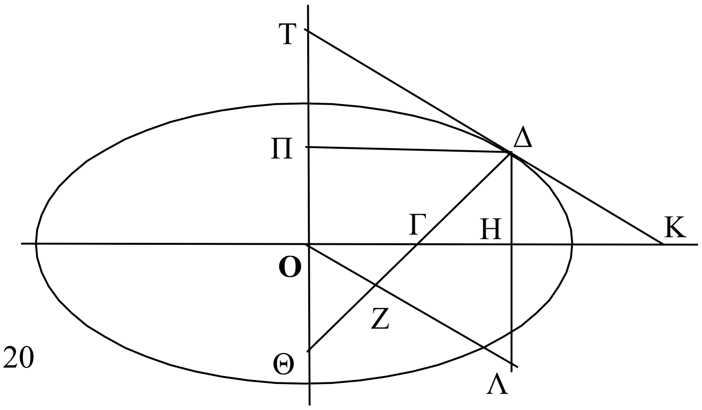
β) Το εμβαδόν του (εγγεγραμμένου σε έλλειψη) παραλληλογράμμου που ορίζουν δυο συζυγείς διάμετροι έλλειψης, με ημιάξονες α, β, έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με 2αβ.

γ) Το εμβαδόν του (περιγεγραμμένου σε έλλειψη) τετραπλεύρου που έχει πλευρές εφαπτόμενες στα άκρα δυο συζυγών διαμέτρων έλλειψης, με ημιάξονες α, β, έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με 4αβ και οι διαγώνιές του είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης.

Απόδειξη

α) Φέρνουμε ΔΗ (Σχήμα 20) κάθετη στην ΟΚ που τέμνει την ΟΖ στο Λ και ΔΠ κάθετη στην ΟΤ. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΓΗΛΖ έχουμε (ΟΤΔΛ παραλληλόγραμμο)

$\Delta\Gamma \cdot \Delta Z = \Delta H \cdot \Delta\Lambda = \Delta H \cdot OT = O\Pi \cdot OT = \beta^2$, λόγω της Πρότασης 12(α).

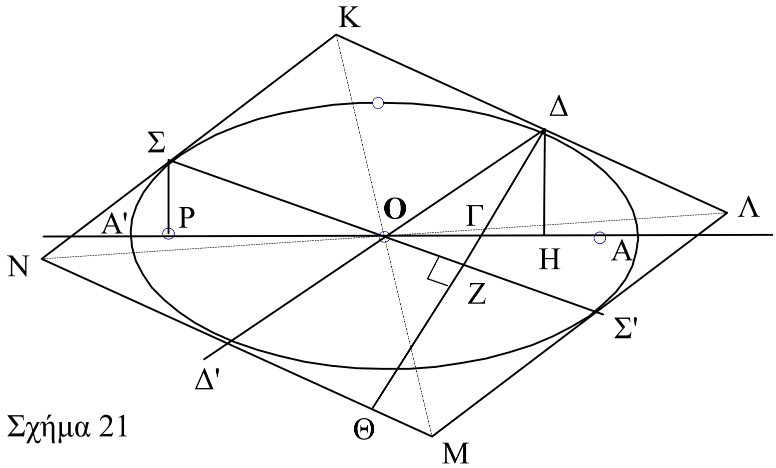


Σχήμα 20

β) Έστω δυο συζυγείς διάμετροι ΔΔ′, ΣΣ′ (Σχήμα 21). Φέρνουμε την ΔΖ κάθετη στην διάμετρο ΣΣ′ που τέμνει τον μεγάλο άξονα στο Γ. Αρκεί να δειχθεί ότι ΟΣ·ΔΖ είναι σταθερό.

Από τα όμοια τρίγωνα ΓΔΗ, ΣΡΟ ($\widehat{P\Sigma O} = \widehat{\Delta\Gamma H}$) έχουμε

$\dfrac{\Delta\Gamma}{O\Sigma} = \dfrac{\Delta H}{OP}$ και λόγω του (δ) της Πρότασης 14 προκύπτει



Σχήμα 21

$$\frac{\Delta\Gamma}{O\Sigma} = \frac{\beta}{\alpha} \quad ή \quad \frac{\Delta\Gamma \cdot \Delta Z}{O\Sigma \cdot \Delta Z} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta}.$$

Αλλά από το (α) έχουμε $ΔΓ \cdot ΔΖ = β^2$, οπότε $ΟΣ \cdot ΔΖ = αβ$.

Επομένως, $(ΔΣΔ'Σ') = ΣΣ' \cdot ΔΖ = ΣΣ' \cdot ΔΖ = 2ΟΣ \cdot ΔΖ = 2αβ$.

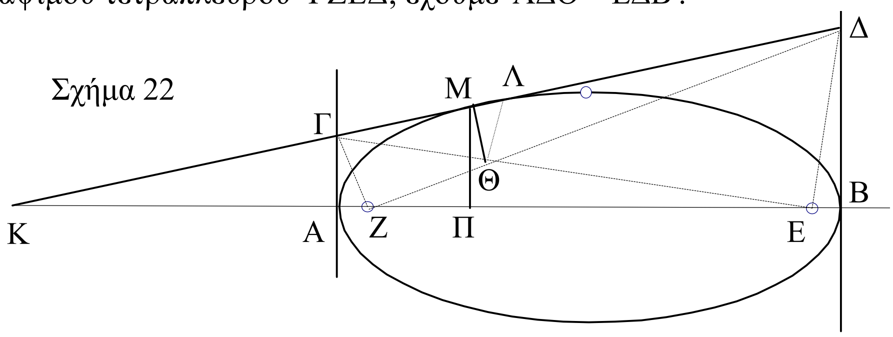
γ) Κατ' αρχήν οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας διαμέτρου είναι παράλληλες (Πόρισμα 10.1) οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγράμμο και επειδή τα Δ, Σ, Δ′, Σ′ είναι μέσα των πλευρών του, έχουμε $(ΚΛΜΝ) = 2(ΔΣΔ'Σ') = 4αβ$.
Το Ο είναι κέντρο του ΚΛΜΝ αφού είναι σημείο τομής των μεσοπαράλληλων των πλευρών του. Άρα οι διαγώνιοι ΚΜ, ΛΝ είναι διάμετροι της έλλειψης. Επειδή η ΣΔ είναι παράλληλη στην ΝΛ και το μέσο της ΣΔ ανήκει στην ΚΜ η ΚΜ είναι συζυγής (εξ' ορισμού) της διαμέτρου ΝΛ.

Τελειώνουμε με μια Πρόταση από τα *Κωνικά*, με την απόδειξη του Απολλωνίου. Χάριν συντομίας έχουμε κάνει μικρές διαφοροποιήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16 (*Κωνικά,* βιβλίο γ΄, Πρόταση 47)
Μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της έλλειψης τέμνει τον μεγάλο άξονα στο σημείο Κ και τις εφαπτομένες στα άκρα Α, Β του μεγάλου άξονα στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Αν Ε, Ζ οι εστίες της έλλειψης και Θ το σημείο τομής των ΓΕ, ΔΖ τότε η ΘΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΓΔ.

Απόδειξη
Έστω ότι δεν είναι κάθετη στην ΓΔ (Σχήμα 22). Φέρνουμε ΘΛ κάθετη στην ΓΔ. Τότε από πόρισμα 9.1 έχουμε $Γ\hat{Ζ}Δ = Γ\hat{Ε}Δ = 90^o$. Έτσι λόγω και του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΓΖΕΔ, έχουμε $Λ\hat{Δ}Θ = Ε\hat{Δ}Β$.

Σχήμα 22



Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΘΔ, ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε $\frac{ΕΔ}{ΔΘ} = \frac{ΒΔ}{ΛΔ}$. Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων ΘΔΕ, ΓΘΖ έχουμε $\frac{ΕΔ}{ΔΘ} = \frac{ΖΓ}{ΓΘ}$. Ακόμη από την ομοιότητα (όπως παραπάνω) των τριγώνων ΑΓΖ, ΓΘΛ έχουμε

$\dfrac{ΖΓ}{ΓΘ} = \dfrac{ΑΓ}{ΓΛ}$ οπότε από τους τρεις αυτούς λόγους προκύπτει

$\dfrac{ΒΔ}{ΛΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΓΛ}$ ή $\dfrac{ΓΛ}{ΛΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΔ}$ (1). Είναι ΑΓ//ΔΒ οπότε $\dfrac{ΚΑ}{ΚΒ} = \dfrac{ΑΓ}{ΒΔ}$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε $\dfrac{ΚΑ}{ΚΒ} = \dfrac{ΓΛ}{ΛΔ}$ (3) . Φέρνουμε ΜΠ//ΑΓ, οπότε από την Πρόταση 12(β) έχουμε $\dfrac{ΚΑ}{ΚΒ} = \dfrac{ΠΑ}{ΠΒ}$ και λόγω της (3) προκύπτει $\dfrac{ΠΑ}{ΠΒ} = \dfrac{ΓΛ}{ΛΔ}$ (4).

Είναι ΜΠ//ΑΓ//ΒΔ, οπότε $\dfrac{ΠΑ}{ΠΒ} = \dfrac{ΓΜ}{ΜΔ}$ και λόγω της (4) παίρνουμε

$\dfrac{ΓΛ}{ΛΔ} = \dfrac{ΓΜ}{ΜΔ}$ ή $\dfrac{ΓΛ}{ΓΔ} = \dfrac{ΓΜ}{ΓΔ}$ άτοπο, αφού Μ διαφορετικό του Λ.

Άρα η ΘΜ είναι κάθετη στην ΓΔ.

5.4 ΘΕΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Η μικρότερη διάμετρος μιας έλλειψης είναι ο μικρός της άξονας και η μεγαλύτερη ο μεγάλος της άξονας.

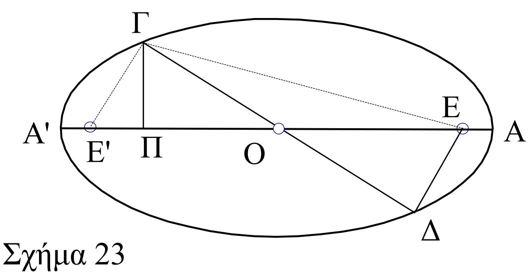
Απόδειξη

Έστω μια έλλειψη με ημιάξονες $α > β$. Θα δειχθεί ότι για κάθε διάμετρο της έλλειψης ΓΔ ισχύει $2β \leq ΓΔ \leq 2α$. Αρκεί να δειχθεί ότι $β \leq ΟΓ \leq α$.

Από το τρίγωνο ΔΓΕ και το παραλληλόγραμμο Ε′ΓΕΔ (Σχήμα 23) έχουμε $ΓΔ = 2ΟΓ \leq ΓΕ + ΕΔ = ΓΕ + ΓΕ' = 2α$, οπότε $ΟΓ \leq α$.

Είναι $ΟΓ^2 = ΓΠ^2 + ΟΠ^2$, αλλά από την Πρόταση 2(β) (§5.3) έχουμε

$$\frac{ΓΠ^2}{ΑΠ \cdot Α'Π} = \frac{β^2}{α^2} \quad ή$$



$$ΓΠ^2 = \frac{β^2}{α^2}(α^2 - ΟΠ^2), \text{ οπότε}$$

Σχήμα 23

23

$$ΟΓ^2 = \frac{β^2}{α^2}(α^2 - ΟΠ^2) + ΟΠ^2 = β^2 + ΟΠ^2\left(1 - \frac{β^2}{α^2}\right) \geq β^2, \text{ οπότε } β \leq ΟΓ.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω μια έλλειψη με ημιάξονες α, β, $\alpha > \beta > 0$ και Σ ένα σημείο του μεγάλου της άξονα με $\Sigma A = \mu$, $0 < \mu \leq \alpha$. Να βρεθούν τα σημεία Μ της έλλειψης για τα οποία η απόσταση ΣΜ είναι ελάχιστη ή μέγιστη. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κάθετη στην ΣΜ.

Λύση

Έστω Π η προβολή του Μ στον μεγάλο άξονα (Σχήμα 24). Μετρώντας τις αποστάσεις από την κορυφή Α θα έχουμε $EA = \alpha - \gamma$, $\Sigma A = \mu$ και

$$\Sigma M^2 = M\Pi^2 + \Sigma\Pi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} A\Pi \cdot A'\Pi + (\mu - A\Pi)^2 =$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2} A\Pi(2\alpha - A\Pi) + \mu^2 + A\Pi^2 - 2\mu A\Pi$$

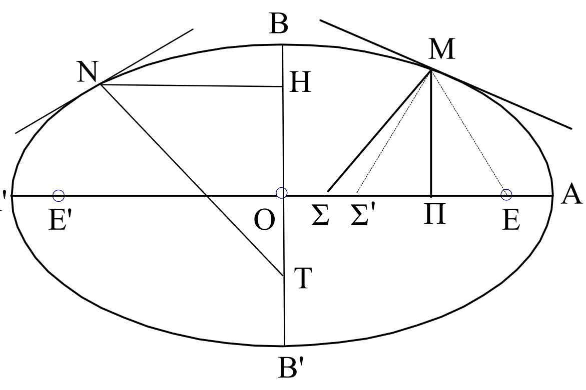
$$= 2\frac{\beta^2}{\alpha} A\Pi + A\Pi^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \mu^2 - 2\mu A\Pi, \text{ οπότε}$$

$$\Sigma M^2 = \mu^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} A\Pi^2 + 2A\Pi\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \mu\right),\ 0 \leq A\Pi \leq 2\alpha \qquad (1)$$

Α. Ελάχιστο ΣΜ.

- Αν $\frac{\beta^2}{\alpha} \geq \mu$, τότε το ΣΜ γίνεται ελάχιστο όταν $A\Pi = 0$, δηλαδή όταν το Μ συμπίπτει με το Α. Η εφαπτομένη στο Α είναι ως γνωστόν κάθετη στην ευθεία ΣΑ.
- Αν $\frac{\beta^2}{\alpha} < \mu$ τότε $\Sigma M^2 = \mu^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} A\Pi + \frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\beta^2 - \alpha\mu}{\alpha}\right)\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left(\frac{\beta^2 - \alpha\mu}{\alpha}\right)^2$

$$\boxed{A\Sigma = \mu > \frac{\beta^2}{\alpha} > \alpha - \gamma = AE}$$



Σχήμα 24

και γίνεται ελάχιστο αν και μόνο

$$\frac{\gamma}{\alpha}\text{ΑΠ}+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\beta^2-\alpha\mu}{\alpha}\right)=0 \text{ ή } \quad \text{ΑΠ}=\frac{\alpha(\alpha\mu-\beta^2)}{\gamma^2} \quad (2)$$

και η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma\text{Μ}=\sqrt{\mu^2-\left(\frac{\alpha\mu-\beta^2}{\gamma}\right)^2}>0$ (3)

Επειδή $0<\mu\le\alpha$ εύκολα προκύπτει $0<\text{ΑΠ}\le\alpha$, άρα ορίζεται μοναδικό σημείο Π στον ημιάξονα ΟΑ από την σχέση (2), οπότε η κάθετη στο άξονα στο σημείο Π τέμνει την έλλειψη στο ζητούμενο σημείο Μ (και το συμμετρικό του ως προς τον άξονα). Θα δείξουμε τώρα ότι η εφαπτομένη στο σημείο αυτό Μ είναι κάθετη στην ΣΜ. Έστω ΜΣ′ η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ, οπότε ισχύει η (2). Από την Πρόταση 5(ii) και §5.2 (VIII) έχουμε

$$\Sigma'\text{Ε} = \varepsilon\text{ΕΜ} = \varepsilon(\alpha - \varepsilon\text{ΟΠ}) = \varepsilon\alpha - \varepsilon^2(\alpha - \text{ΑΠ}) =$$

$$= \varepsilon\alpha - \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^2\ \frac{\alpha(\alpha\mu-\beta^2)}{\gamma^2}) = \gamma + \mu - \alpha\varepsilon^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

$$= \gamma + \mu - \alpha = \mu - (\alpha - \gamma) = \text{ΑΣ} - \text{ΑΕ} = \Sigma\text{Ε}.$$

Τα σημεία όμως Σ, Σ′ είναι «αριστερά» του Ε, γιατί $\Sigma\text{Α} = \mu > \frac{\beta^2}{\alpha} > \alpha - \gamma > 0$ και το Σ′ είναι μεταξύ των εστιών Ε′, Ε, αφού η ΜΣ′ είναι, ως γνωστό διχοτόμος της γωνίας Ε′ΜΕ. Άρα τα Σ, Σ′ συμπίπτουν επομένως η ΣΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ.

Σημείωση: Ο αριθμός $\frac{\beta^2}{\alpha}$ ως προς τον οποίο διακρίναμε τις περιπτώσεις είναι η *ημιπαράμετρος* της έλλειψης, αφού ως παράμετρο της έλλειψης θεωρούμε (αυτό που θεωρούσε και ο Απολλώνιος) τον $p=\frac{2\beta^2}{\alpha}$.

Β. Μέγιστο ΣΜ. Από την σχέση (1) έχουμε

$$\Sigma\text{Μ}^2 = \mu^2 + \text{ΑΠ}(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\text{ΑΠ} + 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \mu)),\ 0 \le \text{ΑΠ} \le 2\alpha \quad (4)$$

και συμπεραίνουμε ότι η απόσταση ΣΜ γίνεται μέγιστη όταν ΑΠ = 2α, δηλαδή όταν το Π, άρα και το Μ συμπίπτει με το άλλο άκρο Α′ του μεγάλου άξονα.
Η μέγιστη απόσταση είναι ΣΜ = 2α - μ και η εφαπτομένη στο Α′≡Μ είναι ως γνωστόν κάθετη στην ΣΜ.

Εφαρμογή : με $\mu = ΣΑ = ΟΑ = \alpha > \frac{\beta^2}{\alpha}$ έχουμε ΑΠ = α, δηλαδή το σημείο Π είναι το κέντρο Ο, οπότε το ζητούμενο σημείο Μ είναι το άκρο Β του μικρού άξονα και η ελάχιστη απόσταση, από τον τύπο (3), είναι ΣΜ = ΟΒ = β.

Η μέγιστη απόσταση είναι ΣΜ = 2α - μ = 2α - α = α. Ουσιαστικά προέκυψαν τα αποτελέσματα της Πρότασης 15.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω μια έλλειψη με ημιάξονες α, β, α > β > 0 και Τ ένα σημείο του μικρού της άξονα ΟΒ′ με ΒΤ = μ, β < μ < 2β. Να βρεθούν τα σημεία Ν της έλλειψης για τα οποία η απόσταση ΤΝ είναι ελάχιστη ή μέγιστη. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κάθετη στην ΤΝ.

(Υπόδειξη: Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως εκφράζοντας την απόσταση ΤΝ (Σχήμα 24) συναρτήσει του ΒΗ, $0 \leq ΒΗ \leq 2\beta$.)

Δίνουμε μόνο τα αποτελέσματα:

- Αν $(2\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} < \beta <)\ \mu < \frac{\alpha^2}{\beta}$ τότε η απόσταση ΤΝ γίνεται μέγιστη όταν το σημείο Ν έχει προβολή Η με $ΒΗ = \frac{\beta(\alpha^2 - \beta\mu)}{\gamma^2}$, $0 < \frac{\beta(\alpha^2 - \beta\mu)}{\gamma^2} < \beta$ και ελάχιστη, ίση με 2β - μ, όταν ΗΒ = 2β, δηλαδή όταν το Ν συμπίπτει με το Β′.

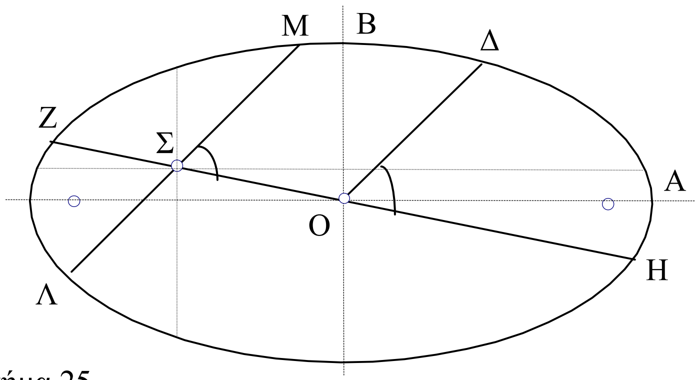
- Αν $\mu > \frac{\alpha^2}{\beta} (> \beta)$ τότε η απόσταση ΤΝ γίνεται μέγιστη, ίση με μ, όταν ΒΗ = 0, δηλαδή όταν το Ν ταυτιστεί με το Β και ελάχιστη, ίση με 2β - μ, όταν ΒΗ = 2β δηλαδή όταν το Η ταυτιστεί με το Β′.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω μια έλλειψη και ένα σταθερό σημείο Σ εντός της έλλειψης. Θεωρούμε μια χορδή της έλλειψης που διέρχεται από Σ και τέμνει την έλλειψη στα σημεία Μ, Λ. Να οριστεί η χορδή για την οποία το γινόμενο ΣΜ·ΣΛ είναι ελάχιστο ή μέγιστο.

Λύση

Έστω ότι η διάμετρος ΣΟ τέμνει την έλλειψη στα σημεία Ζ, Η (Σχήμα 25). Αν ΟΔ παράλληλη στην ΜΛ από το Πόρισμα 19.4 (§ 6.5), έχουμε



Σχήμα 25

$$\frac{\Sigma M\cdot\Sigma\Lambda}{\Sigma Z\cdot\Sigma H}=\frac{O\Delta^2}{OZ^2} \text{ ή } \Sigma M\cdot\Sigma\Lambda = cO\Delta^2, \text{ όπου } c=\frac{\Sigma Z\cdot\Sigma H}{OZ^2}=\frac{OZ^2-O\Sigma^2}{OZ^2} \text{ σταθερό.}$$

Επομένως το γινόμενο ΣΜ·ΣΛ εξαρτάται μόνο από την ημιδιάμετρο ΟΔ, άρα η ελάχιστη τιμή του είναι όταν ΟΔ = β = ΟΒ. Τότε όμως η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα. Άρα η ζητούμενη χορδή είναι αυτή που διέρχεται από το Σ και είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα. Όμοια έχουμε ότι το γινόμενο ΣΜ·ΣΛ είναι μέγιστο όταν ΟΔ = α = ΟΑ και αυτό συμβαίνει για την χορδή που διέρχεται από το σημείο Σ και είναι παράλληλη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

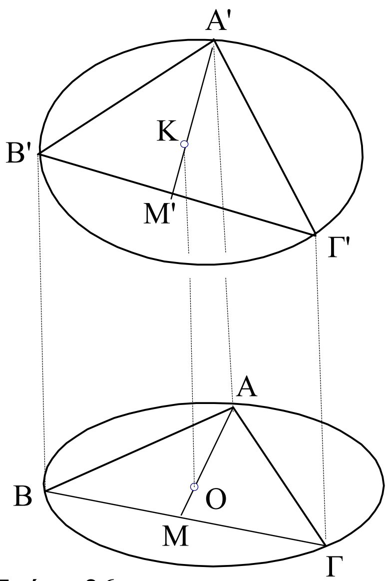
Απ' όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε μια έλλειψη να βρεθεί αυτό που έχει το μέγιστο εμβαδόν, καθώς και το εμβαδόν αυτό.

Απόδειξη

Θα λύσουμε το πρόβλημα με την μέθοδο των προβολών (Βλέπε §2.4, Παρατήρηση 3, 4).

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κύκλος κέντρου Κ ο οποίος προβάλλεται στην δεδομένη έλλειψη με το κέντρο του να προβάλλεται στο κέντρο Ο της έλλειψης (και ακτίνα του κύκλου τον μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης). Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο στην έλλειψη και Α′Β′Γ′ (Σχήμα 26) το αντίστοιχο τρίγωνο (πρότυπο) στο κύκλο αυτό. Αν ω η γωνία των επιπέδων ΑΒΓ, Α′Β′Γ′, τότε ως γνωστόν ισχύει (ΑΒΓ) = (Α′Β′Γ′)συνω.

Επειδή η ω είναι σταθερή, το εμβαδόν του ΑΒΓ θα είναι μέγιστο αν το (Α′Β′Γ′) γίνει μέγιστο.



Σχήμα 26

Το μέγιστο όμως τρίγωνο που μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο είναι το ισόπλευρο και το κέντρο του συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου Κ. Έτσι αν Μ′ μέσο του Β′Γ′ τότε και Μ μέσο του ΒΓ και ισχύει $2 = \frac{\text{Α΄Κ}}{\text{ΚΜ}'} = \frac{\text{ΑΟ}}{\text{ΟΜ}}$. Άρα το Ο είναι κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.
Επομένως το ζητούμενο τρίγωνο είναι αυτό που έχει κέντρο βάρους το κέντρο της έλλειψης. Προφανώς υπάρχουν άπειρα τέτοια τρίγωνα, αντίστοιχα των άπειρων εγγεγραμμένων στον κύκλο ισοπλεύρων τριγώνων.

Εμβαδόν: Έχουμε (ΑΒΓ) = (Α′Β′Γ′)συνω και είναι συνω = β/α, όπου α, β οι ημιάξονες της έλλειψης. Επίσης για το ισόπλευρο τρίγωνο Α′Β′Γ′ έχουμε (Α′Β′Γ′) = $\frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,\alpha^2}{4}$, οπότε (ΑΒΓ) = $\frac{3\sqrt{3}\,\alpha\beta}{4}$ (σταθερό για κάθε τρίγωνο εγγεγραμμένο σε έλλειψη, με κέντρο βάρους το κέντρο της έλλειψης).

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΨΗ: ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5
Να βρεθεί το μεγαλύτερο (σε εμβαδόν) παραλληλόγραμμο που μπορεί να είναι εγγεγραμμένο σε μια δοσμένη έλλειψη, καθώς και το εμβαδόν του.

Λύση
Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, θεωρώντας την έλλειψη ως προβολή κάποιου κύκλου. Έστω ΑΒΓΔ ένα παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο στην έλλειψη και Α′Β′Γ′Δ′ το αντίστοιχο πρότυπο στον κύκλο. Θα έχουμε πάλι (ΑΒΓΔ) = (Α′Β′Γ′Δ′)συνω και το παραλληλόγραμμο Α′Β′Γ′Δ′ του κύκλου γίνεται μέγιστο αν είναι τετράγωνο, οπότε το κέντρο του συμπίπτει με το κέντρο Κ του κύκλου. Έτσι το Ο ως προβολή του Κ είναι μέσο των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι διάμετροι της έλλειψης (αυτό ισχύει για κάθε παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο σε έλλειψη, βλ. Πόρισμα 10.3, 10.2). Επίσης, αν (ε′) είναι εφαπτομένη στο σημείο Α′ του κύκλου, τότε θα’ ναι παράλληλη στην διαγώνιο-διάμετρο Β′Δ′, οπότε και η προβολή της (ε), που είναι εφαπτομένη στο Α, θα είναι παράλληλη στην διάμετρο της έλλειψης ΒΔ. Άρα η ΒΔ είναι συζυγής διάμετρος της ΑΓ.
Επομένως, το μέγιστο παραλληλόγραμμο είναι αυτό που οι διαγώνιοί του είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης. Προφανώς υπάρχουν και εδώ άπειρα τέτοια παραλληλόγραμμα, αντίστοιχα των εγγεγραμμένων σε κύκλο τετραγώνων.
Εμβαδόν: Είναι (ΑΒΓΔ) = (Α′Β′Γ′Δ′)συνω, με συνω = β/α, (Α′Β′Γ′Δ′) = $2R^2 = 2\alpha^2$, οπότε μέγιστο (ΑΒΓΔ) = 2αβ (σταθερό για κάθε εγγεγραμμένο σε έλλειψη παραλληλόγραμμο με διαγώνιες συζυγείς διαμέτρους).

Ισχύουν ακόμη οι παρακάτω προτάσεις. Οι αποδείξεις τους μπορούν να δοθούν ευκολότερα θεωρώντας την έλλειψη ως προβολή κύκλου, είτε προβάλλοντας την έλλειψη σε κύκλο και μεταφέροντας (σχετικές) ιδιότητες που κύκλου σε αντίστοιχες ιδιότητες της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Το μικρότερο παραλληλόγραμμο που είναι περιγεγραμμένο σε μια δοσμένη έλλειψη, είναι αυτό που οι διαγώνιοί του βρίσκονται σε συζυγείς διαμέτρους της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Η μεγαλύτερη έλλειψη που μπορεί να εγγραφεί σε ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο είναι αυτή που έχει τις διαγωνίους του ως συζυγείς διαμέτρους της.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

Η μικρότερη έλλειψη που μπορεί να περιγραφεί σε ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο είναι αυτή που έχει τις διαγωνίους του ως συζυγείς διαμέτρους.

5.5 ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. Θεωρούμε την έλλειψη με εστία Ε, εκκεντρότητα ε, $0 < \varepsilon < 1$ και διευθετούσα (δ). Έστω Κ προβολή του Ε στην (δ) με $EK = d$ και Α, Α′ τα σημεία που χωρίζουν το τμήμα ΕΚ εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα σε λόγο ε. Αν Ο το μέσο του τμήματος ΑΑ′, Ε′ το συμμετρικό του Ε ως προς το Ο, και Β, Β′ τα σημεία της κάθετης στην ΑΑ′ στο Ο, τότε ισχύουν,

α) $EA = \dfrac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}$, $EA' = \dfrac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}$, $AA' = \dfrac{2\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$,

β) αν $\alpha = \dfrac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$, τότε $OE = \alpha\varepsilon$, $OK = \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$, $BB' = 2\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

2. Ο γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών της μιας εστίας έλλειψης ως προς τις εφαπτομένες της έλλειψης, είναι κύκλος με κέντρο την άλλη εστία και ακτίνα ίση με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης (διευθετών κύκλος). Με βάση αυτό να βρεθεί τρόπος κατασκευής (με κανόνα και διαβήτη) εφαπτομένης έλλειψης που είναι παράλληλη σε δοσμένη ευθεία.

3. Αν Ε, Ε′ εστίες έλλειψης και Δ, Τ άκρα μιας διαμέτρου, τότε ισχύουν
α) το τετράπλευρο ΕΔΕ′Τ είναι παραλληλόγραμμο. Σε ποια περίπτωση είναι ρόμβος;
β) οι εφαπτομένες στα σημεία Τ, Δ σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ευθείες ΕΔ και ΕΤ.

4. Έστω έλλειψη με εστίες Ε′, Ε και μεγάλο άξονα 2α. Σ' ένα σημείο Μ της έλλειψης θεωρούμε την εφαπτομένη της που τέμνει την παράλληλη από το κέντρο της έλλειψης προς την ΜΕ στο σημείο Σ. Ο γεωμετρικός τόπος του Σ είναι ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας α (πρωτεύον κύκλος).

5. Έστω ΑΒ μια διάμετρος έλλειψης και (ε) η εφαπτομένη στο Α.Τότε ισχύουν
α) αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς την (ε) και διέρχεται από το Β, τότε είναι εφαπτομένη στην έλλειψη,
β) η εφαπτομένη της έλλειψης στο Β είναι παράλληλη της (ε).

6. Έστω ΓΔ διάμετρος έλλειψης και μια χορδή ΖΘ κάθετη στην έλλειψη η οποία διχοτομείται από την ΓΔ. Τότε η κάθετη στην έλλειψη στο Γ (ή στο Δ) διχοτομείται από την διάμετρο που διέρχεται από το σημείο Ζ.

7. Θεωρούμε δυο όμοιες ελλείψεις με το ίδιο κέντρο Ο των οποίων οι μεγάλοι ημιάξονες ΟΑ = α, ΟΑ′ = α′, α′ > α, βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ομοιόθετες). Τότε ισχύουν
α) αν μια ημιευθεία ΟΖ τέμνει την εσωτερική στο Λ και την εξωτερική στο Μ τότε ΜΑ′//ΛΑ, $ΜΕ_2//ΛΕ_1$ και ΟΜ/ΟΛ = α′/α, όπου $Ε_1$ η εστία της εσωτερικής και $Ε_2$ της εξωτερικής έλλειψης της ημιευθείας ΟΑ′,
β) αν μια χορδή της εξωτερικής εφάπτεται στην εσωτερική, τότε το σημείο επαφής είναι το μέσον της,
γ) αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο στην εξωτερική και περιγεγραμμένο στην εσωτερική τότε το κέντρο βάρους του είναι το κέντρο της έλλειψης και ο λόγος των ημιαξόνων των ελλείψεων είναι 2.

8. Έστω δυο σημεία ενός επιπέδου Ε, Σ με ΕΣ < 2α, α σταθερό μήκος. Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο Σ εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου με κέντρο Ε και ακτίνα 2α και είναι έλλειψη.

9. Αν ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε έλλειψη, τότε οι διαγώνιοί του τέμνονται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα μέσα των παραλλήλων πλευρών του.

10. Έστω ΜΜ′ μια χορδή της έλλειψης που διέρχεται από μια εστία της Ε και Η η προβολή του Μ στην διευθετούσα της έλλειψης. Αν Γ είναι το σημείο που η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης τέμνει τον μεγάλο άξονα και Τ το σημείο που η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ τέμνει την διευθετούσα της. Τότε ισχύουν:

α) $\dfrac{ΜΕ}{ΜΕ'} = \dfrac{ΕΓ}{Ε'Γ}$, β) Τα τρίγωνα ΜΕΓ, ΜΕΗ είναι όμοια.

γ) Η ευθεία ΜΓ εφάπτεται του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Μ, Ε, Η.

δ) Ο λόγος ΜΓ/ΜΗ είναι σταθερός.

11. Έστω ΣΜ, ΣΔ εφαπτόμενα τμήματα έλλειψης και Τ το σημείο που η ΜΔ τέμνει την διευθετούσα της έλλειψης. Τότε η γωνία $Σ\hat{Ε}Τ$ είναι ορθή.

12. Έστω έλλειψη με ημιάξονες ΟΑ > ΟΒ. Μια εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο Μ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Τότε το Μ είναι μέσο του τμήματος της εφαπτομένης που περιέχεται μεταξύ των αξόνων της και η ευθεία ΟΜ διέρχεται από το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία Α, Β.

13. Έστω μια έλλειψη με ημιάξονες α, β, α > β και δυο συζυγείς ημιδιάμετροι ΟΣ , ΟΔ , ΟΣ > ΟΔ που σχηματίζουν γωνία φ. Τότε ισχύουν

α) αβ = ΟΣ·ΟΔημφ, β) $\dfrac{α}{β} > \dfrac{ΟΣ}{ΟΔ}$, γ) α+β < ΟΣ + ΟΔ,

γ) το ορθογώνιο με πλευρές τους άξονες έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο με διαστάσεις δυο συζυγείς διαμέτρους,

ε) α - β > ΟΣ - ΟΔ.

14. Έστω σημείο Μ έλλειψης, με ημιάξονες α, β, α > β > 0, ώστε η ημιευθεία ΟΜ να σχηματίζει με τον μεγάλο ημιάξονα ΟΑ γωνία ω με εφω = β/α. Τότε

α) το σημείο Μ είναι μέσο του τμήματος της εφαπτομένης στο Μ που περιέχεται μεταξύ των αξόνων της,

β) αν Κ, Λ οι προβολές του Μ στους ημιάξονες ΟΑ, ΟΒ τότε οι ευθείες ΚΛ, ΑΒ είναι παράλληλες στην εφαπτομένη στο Μ.

15. Έστω δυο ευθείες ΧΧ′, ΥΥ′ που τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο. Ένα τμήμα ΓΔ κινείται ώστε το άκρο Γ να βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΧΧ′, ενώ το Δ στην ευθεία ΥΥ′. Έστω σημείο Μ του τμήματος ΓΔ ώστε ΜΓ = β, ΜΔ = α, α, β σταθεροί, α > β > 0. Τότε το σημείο Μ γράφει έλλειψη κέντρου Ο με άξονες πάνω στις ευθείες αυτές και μήκη ημιαξόνων α, β.

Τι συμβαίνει αν ΜΓ = ΜΔ;

Σημείωση: Σ' αυτήν την πρόταση στηρίζεται ο *ελλειψογράφος,* το όργανο που χρησιμοποιείται για την χάραξη ελλείψεων. Στο σημείο Μ τοποθετείται ένα μολύβι. Η θέση του μολυβιού μπορεί να αλλάζει, χωρίς να τοποθετείται στο μέσο του κανόνα ΓΔ, ώστε να παίρνουμε έλλειψη με επιθυμητούς άξονες.

16. Θεωρούμε δυο ομόκεντρους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνων α, β αντίστοιχα, α > β > 0 και μια διάμετρο ΑΑ′ του κύκλου (Ο, α). Αν Σ σημείο του κύκλου (Ο, α), έστω Ν το σημείο που η ΟΣ τέμνει τον κύκλο (Ο, β). Αν η παράλληλη από το Ν προς την ΑΑ′ τέμνει την κάθετη από το Σ προς την ΑΑ′ στο σημείο Μ, τότε ισχύουν
α) το σημείο Μ διαγράφει έλλειψη με ημιάξονες α, β, καθώς το σημείο Σ κινείται στον κύκλο (Ο, α),
β) η εφαπτομένη του κύκλου στο Σ και η εφαπτομένη της έλλειψης στο (αντίστοιχο) σημείο Μ τέμνονται πάνω στον άξονα Α′Α.

Σημείωση: Η πρόταση αυτή υποδεικνύει ένα τρόπο για την εύρεση σημείων έλλειψης με ημιάξονες α, β. Επίσης ένα ακόμη τρόπο χάραξης εφαπτομένης σ΄ ένα σημείο της έλλειψης.

17. Ως συνέχεια της κατασκευής της σελίδας 175: αν φ η γωνία δυο συζυγών ημιδιαμέτρων έλλειψης ΟΣ = β′, ΟΔ = α′ (Σχήμα 18.α), ισχύουν
α) αβ = α′β′ημφ, β) ΟΚ = α + β, ΟΛ = α - β.

18. Έστω ένας κύκλος (Ο, α) και μια διάμετρός του ΑΑ′. Αν Σ ένα σημείο του κύκλου και Π η προβολή του στην ΑΑ′, θεωρούμε ένα σημείο Μ του τμήατος ΣΠ ώστε ΣΜ = λΣΠ, όπου λ σταθερός, 0 < λ < 1. Να δειχθεί ότι καθώς το Σ διαγράφει τον κύκλο, το Μ διαγράφει μια έλλειψη με ημιάξονες α, λα.

19. Έστω έλλειψη με κέντρο Ο και ημιάξονες α, β, α > β > 0 και κορυφές Α′, Α στον μεγάλο άξονα. Η κάθετη από ένα τυχόν σημείο Μ της έλλειψης στον μεγάλο της άξονα τέμνει τον κύκλο (Ο, α) στο σημείο Σ και η παράλληλη από το Μ στον μεγάλο άξονα τέμνει την ΟΣ στο σημείο Τ. Τότε ισχύουν
α) Ο γεωμετρικός τόπος του Τ καθώς το Μ κινείται στην έλλειψη είναι ο κύκλος (Ο, β).
β) Για το σημείο Μ(x, y) της έλλειψης ισχύει x = ασυνθ, y = βημθ, όπου θ η γωνία ΑΟΣ, 0 ≤ θ ≤ π.
γ) Αν $\Sigma\hat{A'}O = \theta/2$, να δειχθεί ότι $x = \dfrac{\alpha(1 - t^2)}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{2\beta t}{1 + t^2}$, $t = \varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}$.

20. Ο κύκλος που διέρχεται από ένα σημείο Δ της έλλειψης και τις εστίες της Ε, Ε′ τέμνει τον μικρό άξονα στα σημεία Τ, Θ. Τότε ισχύουν
α) η ευθεία ΤΔ είναι εφαπτομένη, β) η ΔΘ είναι κάθετη στην έλλειψη,
γ) αν η ΤΔ τέμνει τον μεγάλο άξονα στο Κ, τα τρίγωνα ΟΘΓ, ΓΔΗ είναι όμοια με το τρίγωνο ΟΤΚ,
δ) $ΟΓ \cdot ΟΚ = ΟΘ \cdot ΟΤ = γ^2$.

21. Στις κορυφές Α, Β μιας έλλειψης με ημιάξονες α, β, α > β, θεωρούμε στο ίδιο τεταρτημόριο των αξόνων της τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΕ = ΒΖ . Οι ΟΕ, ΟΖ τέμνουν την έλλειψη στα σημεία Δ, Γ αντίστοιχα και Θ, Η είναι οι προβολές των Δ, Γ αντίστοιχα στους άξονες. Αν $φ = B\hat{O}Z$, $ω = E\hat{O}A$ τότε ισχύουν,
α) βεφφ = αεφω, β) ΗΓ = αημω, ΟΘ = ασυνφ, γ) $ΟΓ \cdot ΟΔ = αβ$.

22. Έστω μια έλλειψη, ένα σημείο Σ εκτός αυτής και τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΡ, ΣΛ. Από το Σ φέρνουμε μια ευθεία που τέμνει την έλλειψη στα σημεία Γ, Δ. Να δειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών ΣΔ, ΡΛ είναι συζυγές αρμονικό του Σ ως προς τα Γ, Δ.

23. Από όλα τα εγγεγραμμένα σε έλλειψη ορθογώνια, το μέγιστο εμβαδόν το έχει το ορθογώνιο του οποίου οι κορυφές είναι μέσα των εφαπτόμενων τμημάτων στα σημεία αυτά, που περιέχονται μεταξύ των αξόνων της.
(Υπόδειξη: Πρόβλημα 5, §5.4.)

* * * * *

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο   Ε Κ Τ Ο

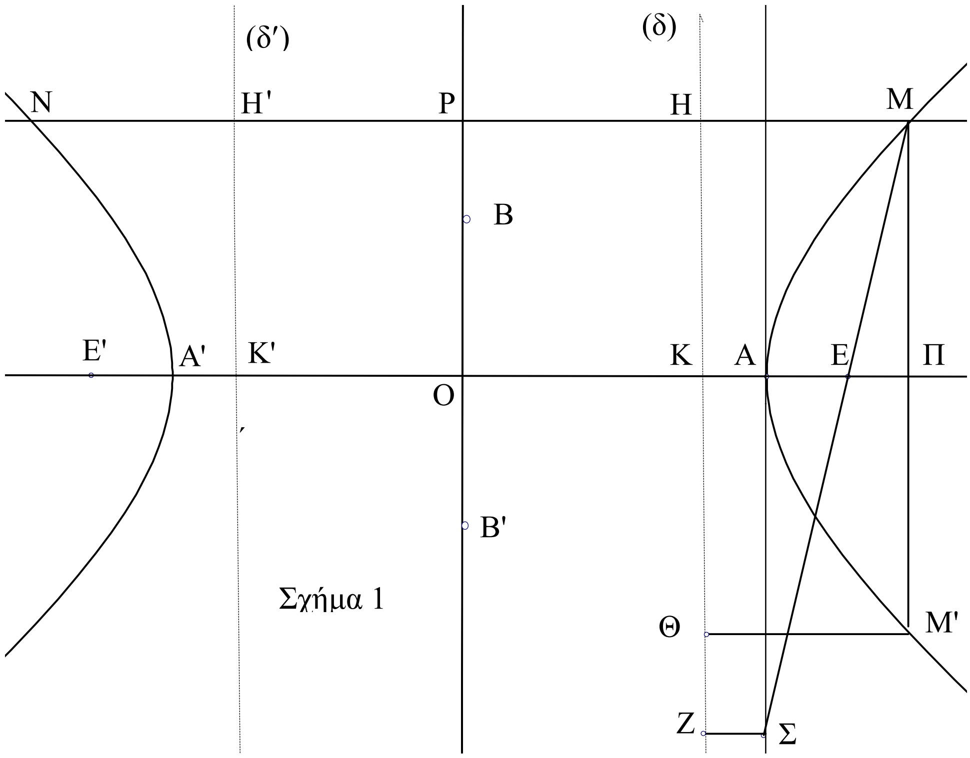
Υ Π Ε Ρ Β Ο Λ Η

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τελειώνουμε την μελέτη των κωνικών τομών με την υπερβολή. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε και θα αποδείξουμε με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε και για τις άλλες κωνικές, μερικές από τις σπουδαιότερες ιδιότητες της υπερβολής, ενώ άλλες δίνουμε στο τέλος χωρίς απόδειξη. Όπως και στις προηγούμενες καμπύλες, οι αποδείξεις των ιδιοτήτων στηρίζονται στον ορισμό που δώσαμε στην υπερβολή, αλλά και στην χαρακτηριστική εστιακή της ιδιότητα που θα αποδείξουμε, επομένως διαφέρουν γενικά από αυτές του Απολλωνίου.
Πριν προχωρήσουμε στις αποδείξεις των ιδιοτήτων θα αναφέρουμε εν συντομία μερικά βασικά στοιχεία και στοιχειώδεις ιδιότητες της υπερβολής.

6.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Όπως ήδη αναφέραμε στον γενικό ορισμό των κωνικών, αν Ε είναι ένα σημείο ενός επιπέδου, (δ) μια ευθεία του που δεν διέρχεται από το Ε και ε σταθερός αριθμός με $\varepsilon > 1$, *υπερβολή* λέμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου αυτού για τα οποία ισχύει $\frac{ME}{MH} = \varepsilon$, όπου Η η προβολή του Μ στην ευθεία (δ) και (Σχήμα 1). Το Ε λέγεται **εστία** και η ευθεία (δ) **διευθετούσα** της υπερβολής.
Θεωρούμε την κάθετη από το Ε στην διευθετούσα που την τέμνει στο σημείο Κ. Τότε υπάρχουν μοναδικά σημεία Α, Α′ της κάθετης αυτής, εκατέρωθεν της διευθετούσας, ώστε $AE = \varepsilon AK$, $A'E = \varepsilon A'K$.
Τα σημεία Α, Α′ ανήκουν στην υπερβολή, σύμφωνα με τον ορισμό, και λέγονται **κορυφές** της. Το τμήμα (ή και η ευθεία) ΑΑ′ λέγεται **κύριος ή πρωτεύων ή εγκάρσιος άξονας** της υπερβολής Το μέσο Ο του τμήματος ΑΑ′ λέγεται **κέντρο** της υπερβολής. Η κάθετη ευθεία στον κύριο άξονα στο σημείο Ο, λέγεται **δευτερεύων ή συζυγής άξονας** της υπερβολής.
Χορδή μιας υπερβολής λέμε ένα τμήμα που συνδέει δυο σημεία της, ενώ **διάμετρο** μια χορδή (ή μια ευθεία) που διέρχεται από το κέντρο της.



Σχήμα 1

6.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ι. Χρήσιμες σχέσεις

Θεωρούμε μια υπερβολή με εκκεντρότητα ε και με απόσταση της εστίας από την διευθετούσα ΕΚ = d (Σχήμα 1). Τότε τα σημεία Α, Α′ είναι σταθερά και το μήκος του τμήματος ΑΑ′, προσδιορίζεται μονοσήμαντα συναρτήσει της εκκεντρότητας ε και της d. (Βλέπε §6.5 (1)).
Έστω 2α ο μεγάλος άξονας της υπερβολής, δηλαδή ΑΑ′ = 2α, ΟΑ = α.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

- $ΟΕ = αε$, $ΟΚ = \dfrac{α}{ε}$, $ΟΑ^2 = ΟΕ \cdot ΟΚ$ (1)
- Απόσταση εστίας από κορυφές: $ΕΑ = α(ε - 1)$, $ΕΑ′ = α(ε + 1)$
- Απόσταση εστίας από διευθετούσα: $ΕΚ = αε - \dfrac{α}{ε} = \dfrac{α(ε^2 - 1)}{ε}$.

Επίσης ισχύει

ΙΙ. Οι άξονες της υπερβολής είναι άξονες συμμετρίας της και το κέντρο της είναι κέντρο συμμετρίας.

Απόδειξη

Η περίπτωση του κυρίου άξονα είναι απλή. Έστω τώρα Μ (Σχήμα 1) ένα σημείο της υπερβολής και Ν το συμμετρικό του ως προς τον δευτερεύοντα άξονα. Αν Η η προβολή του Μ στην διευθετούσα, τότε το Η είναι και η προβολή του Ν στην διευθετούσα. Ισχύει ΜΕ = εΜΗ. Θα δείξουμε ότι και ΝΕ = εΝΗ. Επειδή ο δευτερεύοντας άξονας είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΜΝ έχουμε ΝΡ = ΡΜ και από το 2^o θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΝΕΜ με διάμεσο ΕΡ, έχουμε $EN^2 = EM^2 + 2NM \cdot OE = \varepsilon^2 MH^2 + 4PM \cdot OE$

Εξ' άλλου έχομε
$$\begin{aligned}\varepsilon^2NH^2 &= \varepsilon^2 (2PM - MH)^2\\ &= \varepsilon^2MH^2 + 4\varepsilon^2PM(PM - MH)\\ &= \varepsilon^2MH^2 + 4\varepsilon^2PM\cdot OK \qquad (\varepsilon^2OK = OE, \text{ από (I)})\\ &= \varepsilon^2MH^2 + 4PM\cdot OE\end{aligned}$$

Άρα $EN^2 = \varepsilon^2NH^2$ ή $NE = \varepsilon NH$. Έτσι και το συμμετρικό του Μ ανήκει στην υπερβολή. Επομένως η υπερβολή έχει και ένα δεύτερο κλάδο αριστερά του δευτερεύοντα άξονα και συμμετρικό ως προς αυτόν με τον πρώτο κλάδο. Συνέπεια αυτών είναι ότι και το σημείο τομής των αξόνων αυτών είναι και κέντρο συμμετρίας της.

ΙΙΙ. Θεωρούμε τις κάθετες στον κύριο άξονα της υπερβολής στις κορυφές της Α, Α′. Τότε στο μέρος του επιπέδου που περικλείεται από τις δυο αυτές ευθείες (χωρίς αυτές) δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής.

Απόδειξη

Επειδή η απόσταση των ευθειών αυτών από το Ο είναι ΟΑ = ΟΑ′ = α, αρκεί να δειχθεί ότι, αν Π η προβολή ενός σημείου Μ της υπερβολής τότε ΟΠ ≥ α (Σχήμα 1). Έστω ότι το Μ βρίσκεται κατ' αρχήν δεξιά της διευθετούσας.

Έχουμε,
$$\begin{aligned}ME \geq ΠE &\Leftrightarrow \varepsilon^2MH^2 \geq ΠE^2 \quad (MH = KΠ)\\ &\Leftrightarrow \varepsilon^2(OΠ - OK)^2 \geq (OE - OΠ)^2\\ &\Leftrightarrow \varepsilon^2\left(OΠ - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2 \geq (\alpha\varepsilon - OΠ)^2\\ &\Leftrightarrow \varepsilon^2OΠ^2 + \alpha^2 \geq \alpha^2\varepsilon^2 + OΠ^2\\ &\Leftrightarrow (\varepsilon^2 - 1)OΠ^2 \geq \alpha^2(\varepsilon^2 -1) \quad (\varepsilon > 1)\\ &\Leftrightarrow OΠ \geq \alpha.\end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας της υπερβολής ως προς τον δευτερεύοντα άξονα θα ισχύει ΟΠ ≥ α, για κάθε σημείο Μ της υπερβολής. Το ίσον ισχύει μόνο αν το Μ συμπίπτει με τις κορυφές Α, Α′.

Συνέπεια: Ο δευτερεύων άξονας της υπερβολής δεν έχει κοινά σημεία με αυτή.

Με βάση την προηγούμενη πρόταση εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

IV. Οι κάθετες στον κύριο άξονα της υπερβολής στις κορυφές της Α, Α′ (Σχήμα 1) είναι εφαπτομένες της.

V. Οι εστίες της υπερβολής - δευτερεύοντας άξονας.

Έστω Ε′ (Σχήμα 1) το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς το κέντρο της υπερβολής Ο και (δ′) η συμμετρική της διευθετούσας (δ) ως προς τον δευτερεύοντα άξονα. Τότε η υπερβολή με εστία το Ε′ και διευθετούσα (δ′) είναι ακριβώς η υπερβολή με εστία Ε και διευθετούσα (δ). Δηλαδή, αν Μ τυχόν σημείο της υπερβολής τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$ME = \varepsilon MH \;\Leftrightarrow\; ME' = \varepsilon MH' .$$

Έτσι και το Ε′ θεωρείται εστία όπως και η (δ′) διευθετούσα της ίδιας υπερβολής. Άρα σε κάθε υπερβολή, όπως και σε κάθε έλλειψη, έχουμε *δυο εστίες και δυο διευθετούσες*. Η απόσταση των εστιών λέγεται *εστιακή απόσταση* της υπερβο-λής και είναι ίση με ΕΕ′ = 2ΟΕ = 2αε. Συνήθως θέτουμε ΕΕ′ = 2γ, οπότε $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, γ > α. Ακόμη παρατηρούμε ότι ΑΕ = ΑΕ′ και το Ο είναι κοινό μέσο των τμημάτων ΑΑ′, ΕΕ′. Θέτουμε $\beta^2 = \alpha^2\varepsilon^2 - \alpha^2$, οπότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$. Αν πάνω στον δευτερεύοντα άξονα πάρουμε σημεία Β, Β′ ώστε ΟΒ = ΟΒ′ = β, τότε το τμήμα ΒΒ′ ονομάζεται *δευτερεύοντας ή συζυγής άξονας* της υπερβολής (κατ’ αναλογία με τον μικρό άξονα 2β της έλλειψης). Αν α = β, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής ή ορθογώνια**.

VI. Αποστάσεις σημείου από εστίες.

Αν Μ σημείο της υπερβολής, Π (Σχήμα 1) η προβολή του στον κυρίως άξονα και d = ΟΠ > α, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

- αν ΜΕ < ΜΕ′ τότε ΜΕ = εd - α και ΜΕ′ = εd + α ,
- αν ΜΕ > ΜΕ′ τότε ΜΕ = εd + α και ΜΕ′ = εd - α.

Σημείωση

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γενικά πολύ χρήσιμες. Δηλώνουν ότι κάθε σημείο της υπερβολής προσδιορίζεται πλήρως από την απόσταση της προβολής του στον κύριο άξονα, από το κέντρο της υπερβολής και αντίστροφα. Έτσι αποδεικνύεται και το εξής: σε κάθε ευθεία κάθετη στο τμήμα ΑΑ′ σε απόσταση d > α από το κέντρο Ο, ανήκουν δυο ακριβώς σημεία της υπερβολής, που συμπίπτουν όταν η ευθεία αυτή είναι κάθετη στις κορυφές Α′, Α. Τα σημεία αυτά είναι σημεία τομής του κύκλου κέντρου Ε και ακτίνας ρ = εd - α > 0 (ή του κύκλου κέντρου Ε′ και ακτίνας R = εd - α) με την ευθεία αυτή. *Αυτό μας δείχνει και ένα τρόπο κατά-*

σκευής σημείων υπερβολής όταν γνωρίζουμε τον κύριο άξονα 2α και την εκκεντρότητα ε. (Οι εστίες ορίζονται από τις σχέσεις $ΟΕ = ΟΕ' = αε$).

VII. Σημεία εντός-εκτός της υπερβολής σε σχέση με την εκκεντρότητα.

Ένα σημείο Ρ (του επιπέδου μιας υπερβολής) βρίσκεται «εντός» της υπερβολής αν και μόνο αν $ΡΕ < εΡΛ$, ενώ βρίσκεται «εκτός» αν και μόνο αν $ΡΕ > εΡΛ$, όπου ΡΛ η απόσταση του Ρ από την διευθετούσα.

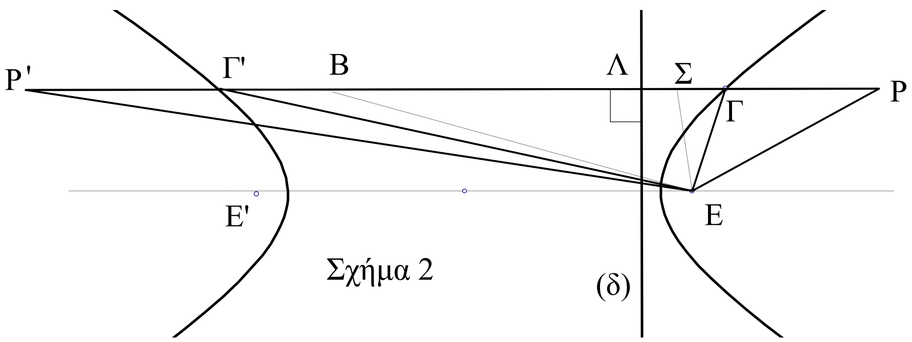
Απόδειξη

Αρκεί να δειχθεί το πρώτο. Έστω σημείο Ρ (Σχήμα 2) εντός του δεξιού κλάδου της υπερβολής και ΡΛ κάθετη στην διευθετούσα που τέμνει την υπερβολή στο σημείο Γ. Λόγω της $ε > 1$ έχουμε

$$ΡΕ < ΕΓ + ΓΡ = εΓΛ + ΓΡ < εΓΛ + εΓΡ = ε(ΓΛ + ΓΡ) = εΡΛ$$

Αν Ρ′ εντός του αριστερού κλάδου τότε, όμοια

$$Ρ'Ε < ΕΓ' + Γ'Ρ' = εΓ'Λ + Γ'Ρ' < εΓ'Λ + εΓ'Ρ' = ε(Γ'Λ + Γ'Ρ') = εΡ'Λ$$



Σχήμα 2

Αντίστροφα: έστω σημείο Σ (Σχήμα 2) εκτός της υπερβολής, και πρώτα δεξιά της διευθετούσας. Τότε αν ΣΛ κάθετη στην διευθετούσα που τέμνει την υπερβολή στο σημείο Γ, έχουμε

$$ΣΕ > ΕΓ - ΓΣ = εΓΛ - ΓΣ > εΓΛ - εΓΣ = ε(ΓΛ - ΓΣ) = εΣΛ.$$

Αν Β αριστερά της διευθετούσας και Γ′ το σημείο που η κάθετη στην διευθετούσα ΒΛ τέμνει τον αριστερό κλάδο, έχουμε

$$ΒΕ > ΕΓ' - Γ'Β = εΓ'Λ - Γ'Β > εΓ'Λ - εΓ'Β = ε(Γ'Λ - Γ'Β) = εΒΛ.$$

Άρα αν $ΡΕ < εΡΛ$ τότε το Ρ πρέπει να βρίσκεται εντός της υπερβολής.

VIII. Η εστιακή ιδιότητα της υπερβολής.

Αν Μ σημείο μιας υπερβολής, τότε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών του από τις εστίες Ε, Ε′ είναι σταθερή και ίση με 2α < ΕΕ′, και αντιστρόφως.

Πράγματι, έστω κατ' αρχήν σημείο του δεξιού κλάδου της υπερβολής. Έχουμε (Σχήμα 3) ΜΕ = εΜΗ, ΜΕ′ = εΜΗ′, οπότε

$$ΜΕ' - ΜΕ = ε(ΜΗ' - ΜΗ) = εΗΗ' = εΚΚ' = ε2ΟΚ = 2ε(α/ε) = 2α.$$

Είναι 2α < ΕΕ′ = 2ΟΕ = 2αε, εφ' όσον ε > 1. Ομοίως, αν το Μ ανήκει στον αριστερό κλάδο της υπερβολής βρίσκουμε ΜΕ - ΜΕ′ = 2α. Γενικά λοιπόν έχουμε |ΜΕ′ - ΜΕ| = 2α. (Μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις του VI).

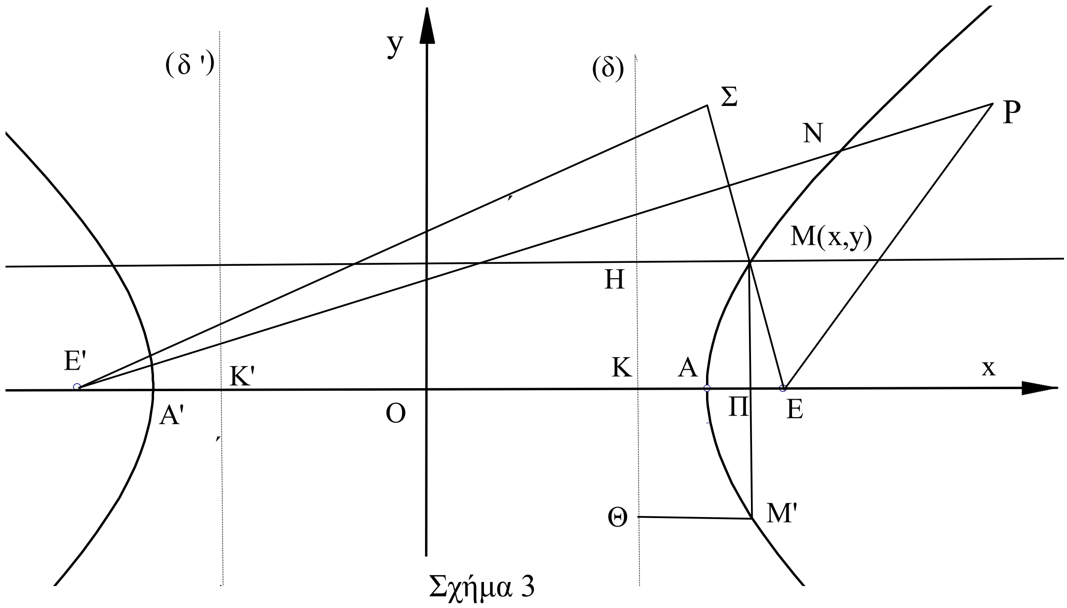
Αντιστρόφως: Έστω ΜΕ′ > ΜΕ, οπότε ΜΕ′ - ΜΕ = 2α, ΕΕ′ = 2γ > 2α. Θεωρούμε μια ευθεία (δ) κάθετη στην ΕΕ′ σε απόσταση $ΟΚ = \frac{α^2}{γ} < ΟΕ = γ$ από το μέσο Ο του ΕΕ′ προς το μέρος του σημείου Ε. Έστω Η η προβολή του Μ στην (δ). Επειδή ΜΕ′ > ΜΕ από το $2^ο$ θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο Ε′ΜΕ έχουμε $ΜΕ'^2 - ΜΕ^2 = 2ΕΕ'{\cdot}ΟΠ$ ή $2α(ΜΕ' + ΜΕ) = 2ΕΕ'{\cdot}ΟΠ$ ή (ΟΠ = ΟΚ + ΜΗ), άρα $ΜΕ' + ΜΕ = \frac{2γ}{α}(\frac{α^2}{γ} + ΜΗ)$ και με αφαίρεση από την ΜΕ′ - ΜΕ = 2α έχομε $\frac{ΜΕ}{ΜΗ} = \frac{γ}{α}$ σταθερός. Το ίδιο προκύπτει και στην περίπτωση που ΜΕ′ < ΜΕ. Άρα το Μ ανήκει στην υπερβολή με εκκεντρότητα ε = γ/α και διευθετούσα την ευθεία (δ).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εστιακή ιδιότητα της υπερβολής είναι χαρακτηριστική της ιδιότητα, επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον ορισμό της.

Για σημεία εκτός της υπερβολής ισχύει κατ' αναλογία με την ιδιότητα VII, η παρακάτω ιδιότητα η οποία αποδεικνύεται παρόμοια.

IX. Σημεία εντός-εκτός της υπερβολής σε σχέση με την διαφορά.

Ένα σημείο Σ (Σχήμα 3) του επιπέδου της υπερβολής βρίσκεται εντός αυτής (στα κοίλα μέρη της, όπου βρίσκονται οι εστίες) αν και μόνο αν η διαφορά των αποστάσεων του, κατ' απόλυτη τιμή, από τις εστίες της είναι μεγαλύτερη του 2α, ενώ βρίσκεται εκτός, αν και μόνο αν η διαφορά των απόστάσεων του, κατ' απόλυτη τιμή, από τις εστίες της είναι μικρότερη του 2α.



Σχήμα 3

Χ. Εξισώσεις υπερβολής

Αν και δεν θα μελετήσουμε την υπερβολή με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας θεωρούμε χρήσιμο σκόπιμο να υπενθυμίσουμε μερικά σχετικά στοιχεία.

Α. Καρτεσιανή εξίσωση της υπερβολής.

Έστω μια υπερβολή με εκκεντρότητα ε και μήκος κύριου άξονα 2α. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy (Σχήμα 3), με αρχή το κέντρο Ο της υπερβολής, και την εστία Ε στον θετικό ημιάξονα των x.
Εύκολα προκύπτει ότι ένα σημείο Μ(x, y) ανήκει στην υπερβολή αν και μόνο αν $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1), όπου $\beta^2 = \alpha^2(\varepsilon^2 - 1)$, ή λόγω της $\gamma = \alpha\varepsilon$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.
Η εξίσωση (1) λέγεται κανονική ή ανηγμένη εξίσωση της υπερβολής. Οι εστίες της είναι τα σημεία Ε(γ, 0), Ε′(-γ, 0). Από την εξίσωση αυτή προκύπτει άμεσα η συμμετρία της υπερβολής ως προς τους άξονες του συστήματος καθώς και ότι έχει κέντρο συμμετρίας το Ο. Επίσης προκύπτει ότι δεν τέμνει τον άξονα τον y και ισχύει $|x| \geq \alpha$. Τα συμπεράσματα αυτά είδαμε παραπάνω ότι προέκυψαν και με γεωμετρικό τρόπο.

Οι διευθετούσες έχουν εξισώσεις $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$ ή $x = \pm \frac{\alpha^2}{\gamma}$.

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής σ' ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Β. Η υπερβολή έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta},\ y=\beta\varepsilon\varphi\theta\ ,\ 0\le\theta<\pi,\ \theta\neq\pi/2,$$

Μια άλλη παραμέτρηση της υπερβολής μπορούμε να έχουμε μέσω των υπερβολικών συναρτήσεων $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$:

$$y=\beta\sinh t\ ,\ x=\pm\ \alpha\cosh t,\ \ t\in R.$$

6.3 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ορισμός

Έστω μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων της υπερβολής. Αν για ένα σημείο Σ (Σχήμα 4) της ευθείας αυτής ισχύει $\frac{\Sigma\Pi}{O\Pi}=\frac{\beta}{\alpha}$, όπου Π η προβολή του Σ στον κύριο άξονα της υπερβολής, τότε η ευθεία αυτή λέγεται *ασύμπτωτη* της υπερβολής.
Μ' άλλα λόγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της υπερβολής και σχηματίζει με τον κύριο άξονα γωνία ω με εφω = β/α (ή με συντελεστή διεύθυνσης β/α). Είναι φανερό ότι υπάρχουν δυο τέτοιες ευθείες συμμετρικές ως προς τους δυο άξονες της υπερβολής (με συντελεστές διεύθυνσης ±β/α).

Βασικές σχέσεις και ιδιότητες στις ασύμπτωτες.

Α. Αν Σ σημείο της ασύμπτωτης και Π η προβολή του στον κύριο άξονα της υπερβολής, τότε ισχύει $\varepsilon=\frac{O\Sigma}{O\Pi}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, όπου ω η οξεία γωνία μιας ασύμπτωτης με τον κύριο άξονα.
Πράγματι , είναι $O\Sigma^2=O\Pi^2+\Sigma\Pi^2$ ή $O\Sigma^2=O\Pi^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}O\Pi^2$ και λόγω της $\beta^2=\alpha^2(\varepsilon^2-1)$, προκύπτει το ζητούμενο.

Β. Κάθε σημείο της υπερβολής είναι εσωτερικό των κατακορυφή γωνιών που σχηματίζουν οι ασύμπωτες και περιέχουν τις εστίες.

Απόδειξη

Επειδή ο κύριος άξονας της υπερβολής είναι άξονας συμμετρίας των γωνιών αυτών, αρκεί να δειχθεί ότι ΣΠ > ΜΠ (Σχήμα 4) όπου Μ ένα σημείο της υπερβολής, Π η προβολή του στον κύριο άξονα και Σ το σημείο όπου η ΜΠ τέμνει την ασύμπτωτη. Όπως θα δούμε παρακάτω (Πρόταση 3(γ)) ότι ισχύει

$$\frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΠ}^2-\alpha^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (1)$$. Έτσι έχουμε

$\text{ΣΠ}^2 - \text{ΜΠ}^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\text{ΟΠ}^2-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}(\text{ΟΠ}^2-\alpha^2)=\beta > 0$, άρα ΣΠ > ΜΠ. Συμπεραίνουμε ακόμη ότι οι ασύμπτωτες δεν τέμνουν την υπερβολή.

Γ. Η απόσταση ενός σημείου Μ της υπερβολής από τις ασύμπτωτες τείνει στο μηδέν όταν η απόσταση ΟΠ τείνει στο άπειρο.

Έστω ΜΤ < ΣΜ (Σχήμα 4) η απόσταση ενός σημείου Μ από την ασύμπτωτη (του κλάδου στο οποίο βρίσκεται το Μ) Λόγω της (1) και του ορισμού της ασύμπτωτης έχουμε

$$\text{ΜΤ} < \text{ΣΜ} = \text{ΣΠ} - \text{ΜΠ} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\text{ΟΠ}-\sqrt{\text{ΟΠ}^2-\alpha^2}\right)=\frac{\alpha\beta}{\text{ΟΠ}+\sqrt{\text{ΟΠ}^2-\alpha^2}},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Δ. Η διευθετούσα της υπερβολής τέμνει τις ασύμπτωτες σε σημεία που ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το κέντρο Ο της υπερβολής και με διάμετρο τον κύριο άξονά της.

Πράγματι, αν Ζ (Σχήμα 4) κοινό σημείο διευθετούσας και ασύμπτωτης τότε

$\dfrac{\text{ΖΚ}}{\text{ΟΚ}}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $\text{ΟΚ} = \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$, οπότε $\text{ΟΖ}^2 = \text{ΟΚ}^2 + \text{ΚΖ}^2 = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\varepsilon^3}=\dfrac{\gamma^2}{\varepsilon^2}=\alpha^2$, άρα ΟΖ = α.

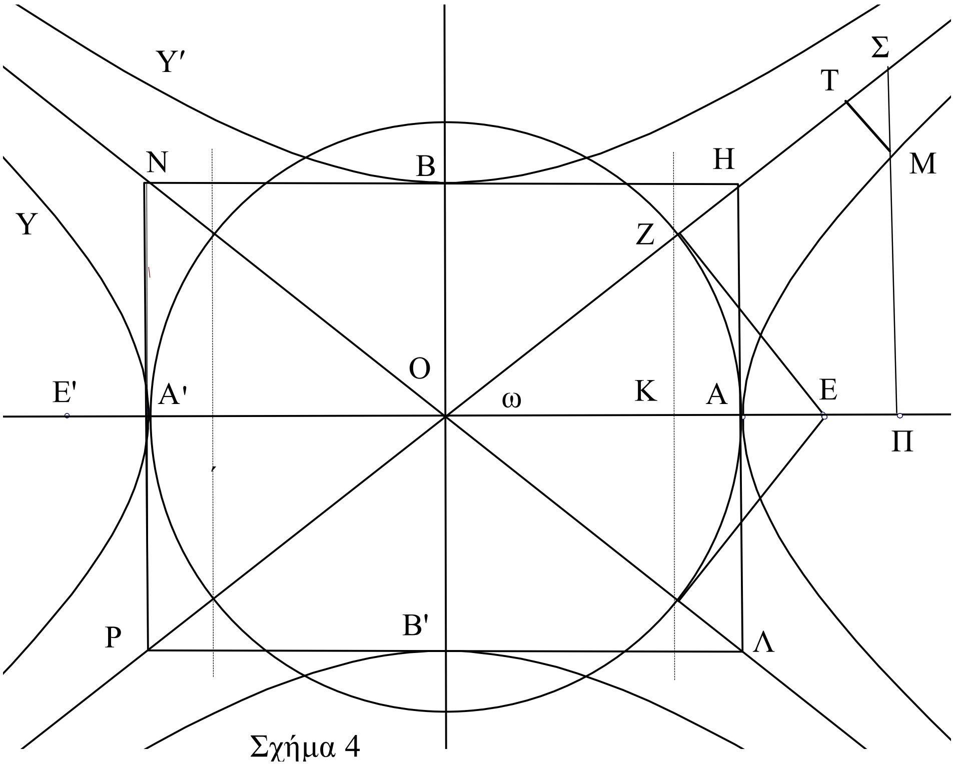
Σημείωση

Ο παραπάνω κύκλος με διάμετρο τον κύριο άξονα ΑΑ′ λέγεται *πρωτεύον* ή *βοηθητικός κύκλος* της υπερβολής και είναι χρήσιμος στην μελέτη της.

Ε. Το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

Έστω ότι οι κάθετες στις κορυφές Α, Α′ (εφαπτομένες) της υπερβολής τέμνουν τις ασύμπτωτές της στα σημεία Η, Λ, Ρ, Ν (Σχήμα 4).

Τότε το τετράπλευρο ΗΛΡΝ είναι ορθογώνιο με διαστάσεις, 2α, 2β, πλευρές παράλληλες στους άξονες της υπερβολής και διαγώνιες τις ασύμπτωτες και λέγεται *ορθογώνιο βάσης* της υπερβολής.



Σχήμα 4

ΣΤ. Συζυγείς υπερβολές

Έστω μια υπερβολή Υ (Σχήμα 4) με κύριο άξονα ΑΑ ′= 2α και δευτερεύοντα ΒΒ′ = 2β. Θεωρούμε την υπερβολή Υ′ που έχει κύριο άξονα ΒΒ′ = 2β και δευτερεύοντα ΑΑ′ = 2α και εστίες στην ευθεία ΒΒ′. Η υπερβολή Υ′ λέγεται *συζυγής* της Υ. Έτσι και η Υ είναι συζυγής της Υ′ και οι Υ, Υ′ λέγονται απλά *συζυγείς υπερβολές*. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι συζυγείς υπερβολές έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες και οι εστίες της μιας βρίσκονται στον δευτερεύοντα άξονα της άλλης.

Ζ. Ας έχουμε ακόμη υπόψη τις παρακάτω προτάσεις, σχετικά με τις ασύμπτωτες:

1. Η απόσταση μιας εστίας από μια ασύμπτωτη είναι ίση με β και η προβολή της εστίας αυτής στην ασύμπτωτη ανήκει στην διευθετούσα**.**

2. Αν από μια εστία φέρουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος πλευράς $αε^2/2$.
3. Αν από στην κορυφή (άκρο κυρίου άξονα) της υπερβολής φέρουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος πλευράς αε/2.
4. Η απόσταση μιας κορυφής υπερβολής από μια ασύμπτωτη είναι ίση με β/ε.
5. Για την γωνία 2ω των ασυμπτώτων της υπερβολής ισχύουν οι σχέσεις

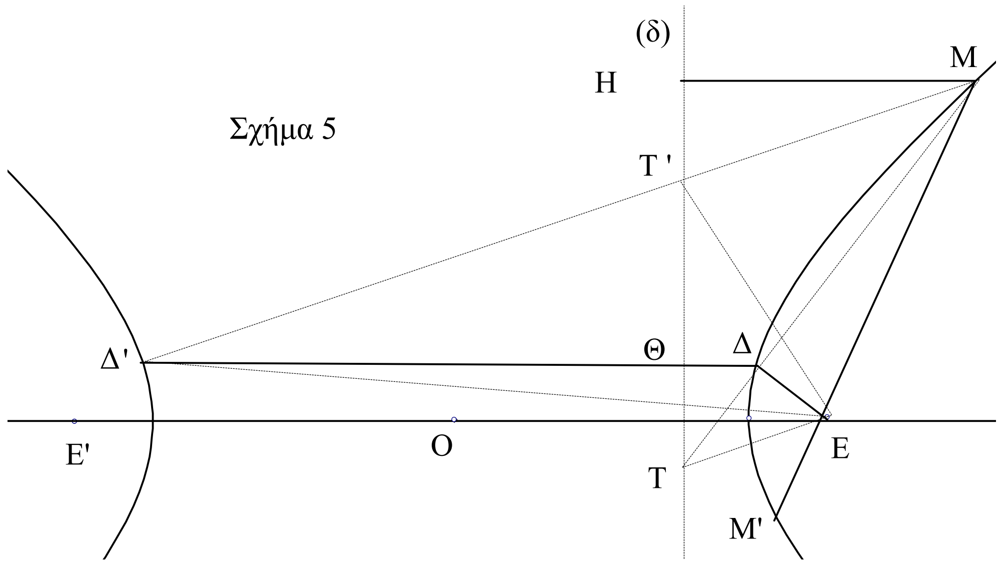
$$ημ2ω = \frac{2αβ}{α^2+β^2},\ συν2ω = \frac{α^2-β^2}{α^2+β^2}.$$

6.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Στις παρακάτω προτάσεις σημειώνουμε τις εστίες της υπερβολής με Ε, Ε′ και με Ο το κέντρο της. Επίσης με 2α θα συμβολίζουμε τον κύριο άξονα της υπερβολής, με 2β τον δευτερεύοντα, με ε την εκκεντρότητα και με 2γ την εστιακή απόσταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (Χορδή, εστία και διευθετούσα)
Αν μια ευθεία τέμνει την υπερβολή στα σημεία Μ, Δ και την διευθετούσα της στο Τ, τότε η ΕΤ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της γωνίας ΜΕΔ, αν τα σημεία Μ, Δ βρίσκονται στον ίδιο κλάδο της υπερβολής, ή διχοτόμος της γωνίας ΜΕΔ αν τα σημεία Μ, Δ βρίσκονται σε διαφορετικούς κλάδους.

Απόδειξη
Έστω ότι τα σημεία Μ, Δ βρίσκονται στον ίδιο κλάδο της υπερβολής (μπορούμε να παρακολουθήσουμε συγχρόνως και την περίπτωση ίδιου κλάδου όπου αντί των σημείων Δ, Τ έχουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ′, Τ′) (Σχήμα 5) και έστω Η, Θ οι προβολές τους αντίστοιχα στην διευθετούσα Επειδή ΔΘ//ΜΗ από τα όμοια τρίγωνα ΔΘΤ, ΜΤΗ έχουμε $\frac{ΤΜ}{ΔΤ} = \frac{ΗΜ}{ΔΘ}$ αλλά ΜΕ = εΗΜ και ΔΕ = εΔΘ, οπότε $\frac{ΕΜ}{ΕΔ} = \frac{ΗΜ}{ΔΘ}$ και λόγω της προηγούμενης αναλογίας προκύπτει $\frac{ΕΜ}{ΕΔ} = \frac{ΤΜ}{ΤΔ}$. Άρα η ΕΤ είναι διχοτόμος της γωνίας Μ′ΕΔ, εξωτερικής της γωνίας ΜΕΔ.



Όμοια θα έχουμε $\dfrac{\text{ΕΜ}}{\text{ΕΔ}'} = \dfrac{\text{Τ}'\text{Μ}}{\text{Τ}'\text{Δ}'}$ όταν Μ, Δ′ είναι σε διαφορετικούς κλάδους οπότε η ΕΤ′ διχοτόμος της γωνίας Δ′ΕΜ.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που τα σημεία Μ, Δ βρίσκονται στον ίδιο κλάδο, παρατηρούμε ότι αν το σημείο Μ είναι σταθερό και το σημείο Δ πλησιάζει να συμπέσει με το Μ (Σχήμα 5) τότε η ευθεία ΜΤ γίνεται εποπτικά εφαπτομένη της παραβολής στο Μ και η γωνία ΔΕΜ′ θα είναι 2 ορθές, οπότε η ΕΤ είναι διχοτόμος της, άρα η γωνία ΤΕΜ είναι ορθή. Δηλαδή, αν η εφαπτομένη της υπερβολής σ' ένα σημείο Μ τέμνει την διευθετούσα της στο Τ, τότε η γωνία ΜΕΤ είναι ορθή. Αυτό μας δίνει μια ιδέα που θα αξιοποιήσουμε και θα αποδειχθεί (αυστηρά) παρακάτω.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1

Αν μια ευθεία τέμνει τον ίδιο κλάδο υπερβολής στα (διαφορετικά) σημεία Μ, Δ και την διευθετούσα της στο Τ, τότε, αν το Δ είναι μεταξύ των Μ, Τ ισχύει

$\text{M}\hat{\text{E}}\text{T} > 90^o$ και $\Delta\hat{\text{E}}\text{T} < 90^o$.

Πράγματι, αν $\varphi = \Delta\hat{\text{E}}\text{T} = \text{M}'\hat{\text{E}}\text{T}$, είναι $\text{M}\hat{\text{E}}\text{T} + \varphi = 180^o$ και $\varphi < \text{M}\hat{\text{E}}\text{T}$,

οπότε $\text{M}\hat{\text{E}}\text{T} > 90^o$ και $\Delta\hat{\text{E}}\text{T} < 90^o$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (Ύπαρξη και μοναδικότητα εφαπτομένης)

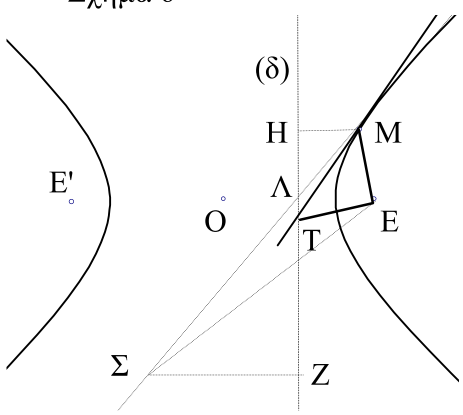
Σε κάθε σημείο Μ μιας υπερβολής υπάρχει εφαπτομένη και είναι μοναδική.

Απόδειξη

α) Ύπαρξη. Έστω Μ (Σχήμα 5, 6) σημείο της υπερβολής διάφορο των κορυφών της (άκρων κυρίως άξονα), οπότε η κάθετη στην ΜΕ στο σημείο Ε τέμνει την διευθετούσα, έστω στο Τ. Η ευθεία ΜΤ είναι εφαπτομένη στο Μ. Πράγματι, αν έτεμνε την υπερβολή σε σημείο Δ του ίδιου κλάδου της υπερβολής, τότε από Πόρισμα 1.1, έχουμε $\widehat{\mathrm{MET}} > 90^o$ ή $\widehat{\mathrm{MET}} < 90^o$, άτοπο. Αν η ΜΤ τέμνει την υπερβολή σε σημείο Δ′ του άλλου κλάδου, οπότε θα τέμνει την διευθετούσα στο Τ′ (Σχήμα 5), τότε από την Πρόταση 1, πρέπει

$\Delta'\widehat{E}T' = T'\widehat{E}M = 90^o$, δηλαδή να συμπίπτουν οι ευθείες ΜΕ και ΕΔ′, δηλαδή το Δ′ να είναι σημείο του πρώτου κλάδου, άτοπο. Άρα η ΜΤ δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την υπερβολή, εκτός του Μ, άρα είναι εφαπτομένη στο Μ. Αν Μ κορυφή της υπερβολής, τότε όπως είδαμε στην § 6.2,VI, η κάθετη στον κυρίως άξονα στο σημείο αυτό είναι εφαπτομένη.

Σχήμα 6



β) Η εφαπτομένη στο Μ είναι μοναδική.

Έστω ΜΛ (Σχήμα 6) μια άλλη εφαπτομένη της υπερβολής σε σημείο Μ, διάφορο των κορυφών της, οπότε τέμνει την διευθετούσα έστω στο σημείο Λ. Αν Σ τυχόν σημείο της ΜΛ και ΣΖ κάθετη στην (δ), τότε (βλέπε §5.2, IX) πρέπει

$\Sigma E \geq \varepsilon \Sigma Z$ ή $\dfrac{\Sigma E}{\Sigma Z} \geq \varepsilon = \dfrac{ME}{MH}$, δηλαδή ο λόγος $\dfrac{\Sigma E}{\Sigma Z}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν το σημείο Σ (της σταθερής ευθείας ΜΛ) ταυτίζεται με το Μ. Αυτό όμως συμβαίνει (σύμφωνα με το Λήμμα της Πρότασης 3, §4.3) μόνο όταν η ΕΛ είναι κάθετη στην ΜΕ. Όμως και η ΕΤ είναι κάθετη στην ΜΕ, άρα οι ΕΤ, ΕΛ συμπίπτουν, άρα δεν υπάρχει άλλη διαφορετική εφαπτομένη στο Μ.

Αν Μ κορυφή της υπερβολής, η μοναδικότητα προκύπτει παρόμοια με την περίπτωση της παραβολής (βλέπε Πρόταση 3, §4.3).

1η Κατασκευή εφαπτομένης σ’ ένα σημείο υπερβολής

Από τη προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ένα τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης δοσμένης υπερβολής σ’ ένα σημείο της Μ. Αν το Μ δεν είναι μια από τις κορυφές Α, Α′, φέρνουμε κάθετη στην ΜΕ, στο σημείο Ε, που τέμνει την διευθετούσα έστω στο Τ. Τότε η ΜΤ είναι εφαπτομένη της υπερβολής Αν το Μ συμπίπτει με την κορυφή Α ή Α′, τότε όπως είδαμε η κάθετη στον μεγάλο άξονα στο σημείο αυτό είναι η εφαπτομένη της υπερβολής (βλέπε §6.2, IV).

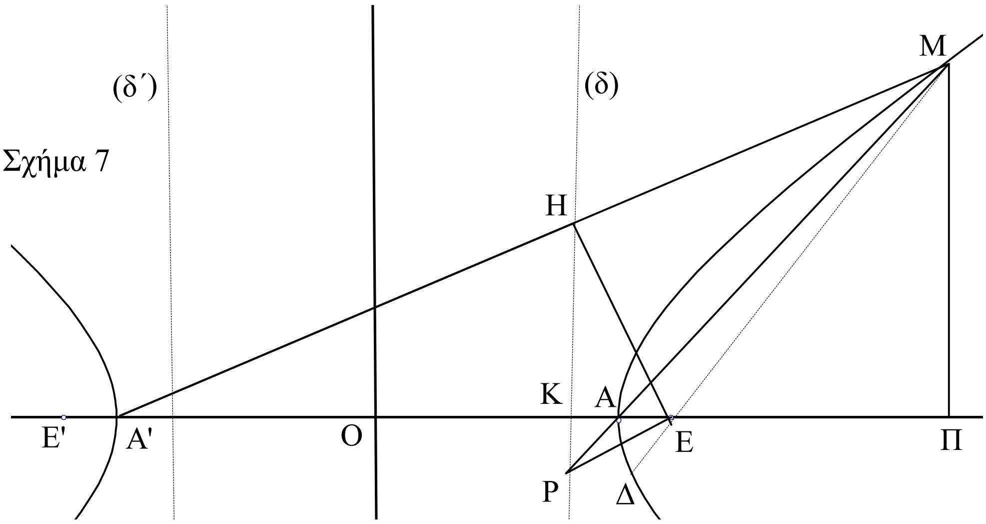
ΠΡΟΤΑΣΗ 3 (Χαρακτηριστική ιδιότητα.)
Α. Έστω Μ σημείο μιας υπερβολής, Π η προβολή του στον κύριο άξονά της και Η, Ρ τα σημεία που οι ευθείες Α′Μ, ΜΑ τέμνουν αντίστοιχα την διευθετούσα της υπερβολής. Τότε ισχύουν

α) Η γωνία $\widehat{\text{ΗΕΡ}}$ είναι ορθή , β) $\dfrac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΑΠ}\cdot\text{Α′Π}}=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$

(Η πρόταση μπορεί να γενικευθεί: βλέπε Πρόταση 18)

Β. Έστω δυο σημεία Α, Α′ του επιπέδου με ΑΑ′ = 2α, Ο το μέσο του ΑΑ′ και ένα τμήμα β. Αν Μ σημείο του επιπέδου, ώστε η προβολή του Π στην ευθεία ΑΑ′ να μην είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΑ′ και να ισχύει η (β), τοτε το σημείο Μ ανήκει σε υπερβολή με κύριο ημιάξονα α και δευτερεύοντα β.

Απόδειξη
α) Από την προηγούμενη Πρόταση 1 για την χορδή Α′Μ, θα έχουμε ότι η ΕΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΜ (Σχήμα 7). Όμοια θεωρώντας την χορδή ΜΑ, η ΕΡ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΔ. Άρα οι ΗΕ, ΕΡ είναι κάθετες.



Σχήμα 7

β) Επειδή ΕΚ ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΗΕΡ έχουμε $\text{ΕΚ}^2 = \text{ΗΚ}\cdot\text{ΚΡ}$.
Από τα όμοια τρίγωνα Α′ΜΠ, Α′ΗΚ έχουμε $\dfrac{\text{ΜΠ}}{\text{Α′Π}}=\dfrac{\text{ΗΚ}}{\text{Α′Κ}}$ (1).

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΚΡ έχουμε $\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΑΠ}} = \frac{\text{ΚΡ}}{\text{ΑΚ}}$, (2), οπότε με πολλαπλασιασμό τω (1), (2) παίρνουμε

$$\frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΑΠ} \cdot \text{Α}'\text{Π}} = \frac{\text{ΗΚ} \cdot \text{ΚΡ}}{\text{Α}'\text{Κ} \cdot \text{ΑΚ}} = \frac{\text{ΕΚ}^2}{\text{Α}'\text{Κ} \cdot \text{ΑΚ}} \quad \text{σταθερός.}$$

Επειδή ΕΚ = ΟΕ - ΟΚ = αε - $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, Α′Κ = α + $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ΑΚ = α - $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\beta^2 = \alpha^2(\varepsilon^2 - 1)$, με αντικατάσταση βρίσκουμε τελικά το ζητούμενο.

Β. Είναι ΑΠ·Α′Π = (ΟΠ - α)(ΟΠ + α) = $\text{ΟΠ}^2 - \alpha^2$. Έστω σημείο Ε δεξιά του Α με ΟΕ = γ όπου $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, γ > α, και ευθεία (δ) κάθετη στο τμήμα ΟΑ στο σημείο Κ με ΟΚ = α/ε < α, όπου ε = γ/α. Αν το Π βρίσκεται δεξιά του Α, έχουμε

$$\text{ΜΕ}^2 = \text{ΜΠ}^2 + \text{ΠΕ}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\text{ΟΠ}^2 - \alpha^2) + (\text{ΟΠ} - \text{ΟΕ})^2 = ... = (\frac{\gamma\text{ΟΠ}}{\alpha} - \alpha)^2$$

και λόγω της $\alpha^2 < \gamma\text{ΟΠ}$, έχουμε ΜΕ = εΟΠ – α, οπότε

$$\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΚΠ}} = \frac{\varepsilon\text{ΟΠ} - \alpha}{\text{ΟΠ} - \text{ΟΚ}} = \frac{\varepsilon\text{ΟΠ} - \alpha}{\text{ΟΠ} - \frac{\alpha}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Αν το Μ βρίσκεται αριστερά του Α′, όμοια βρίσκουμε ΜΕ = εΟΠ + α και λόγω της ΚΠ = ΟΠ + ΟΚ, βρίσκουμε πάλι ότι ΜΕ/ΚΠ = ε.

Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό, το Μ ανήκει σε υπερβολή με εστία Ε, διευθετούσα την (δ) και εκκεντρότητα ε. Η υπερβολή αυτή έχει κύριο ημιάξονα α και δευτερεύοντα β, αφού ΕΚ = αε - $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ και $\alpha^2\varepsilon^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1

Έστω Μ σημείο μιας υπερβολής με κύριο άξονα α και δευτερεύοντα β και Π η προβολή του Μ στον κύριο άξονά της. Τότε ισχύει

$$\frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΠ}^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΟΠ}^2}{\alpha^2} - \frac{\text{ΜΠ}^2}{\beta^2} = 1$$

και αντιστρόφως, αν ισχύει η σχέση αυτή τότε το Μ ανήκει σε υπερβολή με κύριο ημιάξονα άξονα α και δευτερεύοντα β.

Σημείωση: Η ισότητα αυτή $\frac{\text{ΟΠ}^2}{\alpha^2} - \frac{\text{ΜΠ}^2}{\beta^2} = 1$ είναι ουσιαστικά η εξίσωση της υπερβολής στην Αναλυτική Γεωμετρία.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2

Το μήκος της χορδής της υπερβολής που διέρχεται από την εστία της και είναι κάθετη στον κύριο άξονά της (δηλαδή της εστιακτομής της) είναι ίσο με $p = 2\beta^2/\alpha$ (δηλαδή ίσο με την παράμετρο της υπερβολής).

(Υπόδειξη: ΟΠ = γ, κλπ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 (Εφαπτόμενες στα άκρα εστιακής χορδής.)

Έστω μια χορδή ΜΔ μιας υπερβολής που διέρχεται από μια εστία της Ε και ΜΓ η κάθετη στην υπερβολή στο σημείο Μ. Τότε

α) οι εφαπτομένες στα άκρα της χορδής αυτής τέμνονται πάνω στην διευθετούσα της,

β) ΕΓ = εΕΜ και Ε′Γ = εΕ′Μ,

γ) $ΟΓ = ε^2ΟΠ$.

Απόδειξη

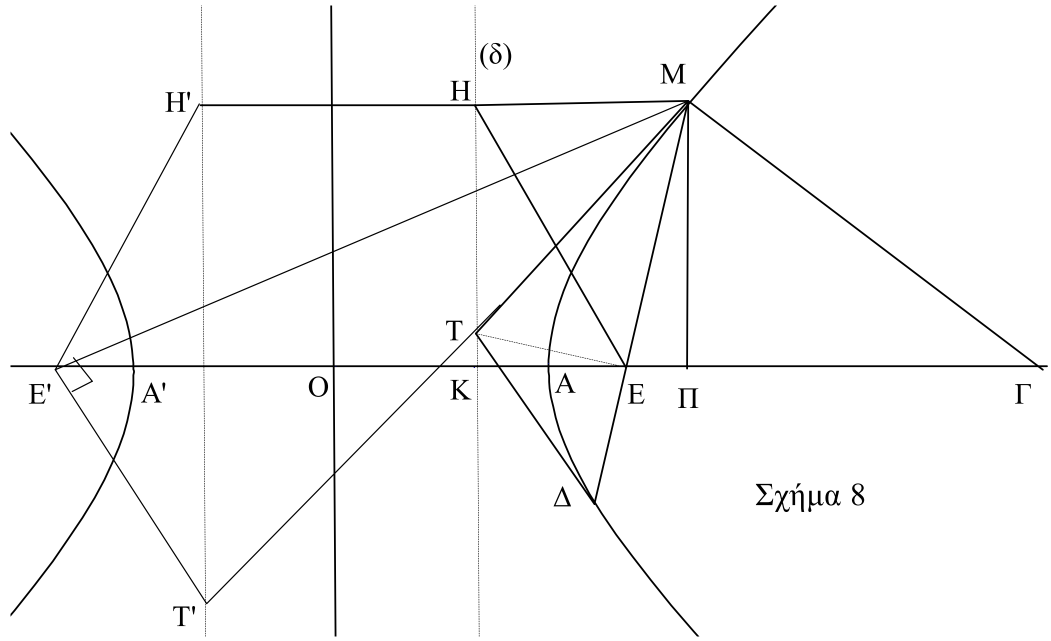
α) Φέρνουμε την ΕΤ κάθετη στην ΜΔ (Σχήμα 8). Τότε (Πρόταση 2) η ΜΤ είναι εφαπτομένη στο Μ της υπερβολής. Είναι $T\hat{E}\Delta = 90^o$ οπότε και η ΔΤ είναι εφαπτομένη στο Δ. Άρα οι εφαπτομένες στα Μ, Δ τέμνονται πάνω στην διευθετούσα της στο Τ.

β) Το τετράπλευρο ΜΕΤΗ έχει τις απέναντι γωνίες του Ε, Η ορθές άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο με την ΜΤ διάμετρο του κύκλου. Άρα η ΜΓ που κάθετη στην ΜΤ είναι εφαπτομένη του κύκλου αυτού. Έτσι τα τρίγωνα ΜΓΕ, ΜΕΗ είναι όμοια ($\Gamma\hat{E}M = E\hat{M}H$, $\Gamma\hat{M}E = M\hat{H}E$: υπό χορδής και εφαπτομένης), οπότε $\dfrac{E\Gamma}{EM} = \dfrac{EM}{MH} = \varepsilon$, οπότε ΕΓ = εΕΜ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι Ε′Γ = εΕ′Μ (ξεκινάμε από εγγράψιμο τετράπλευρο Ε′Η′ΜΤ′ κλπ).

γ) ΟΓ = ΟΕ + ΕΓ = αε + εΕΜ = αε + εεΜΗ =

$$= \varepsilon^2\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + MH\right) = \varepsilon^2(OK + MH) = \varepsilon^2 O\Pi.$$



Σχήμα 8

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1

Αν Μ σημείο της υπερβολής, Η η προβολή του στην διευθετούσα και ΜΓ η κάθετη στην υπερβολή στο σημείο Μ, τότε το τμήμα ΕΜ είναι μέσο ανάλογο των ΕΓ, ΜΗ, δηλαδή $ΕΜ^2 = ΕΓ \cdot ΜΗ$.

(Υπόδειξη: τα τρίγωνα ΜΓΕ, ΜΕΗ είναι όμοια.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2

Ο λόγος των τμημάτων ΠΓ και ΟΓ είναι σταθερός και ίσος με $β^2/α^2$.

Πράγματι, $\dfrac{ΠΓ}{ΟΠ} = \dfrac{ΟΓ - ΟΠ}{ΟΠ} = ε^2 - 1 = \dfrac{β^2}{α^2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5 (Ανακλαστική ιδιότητα)

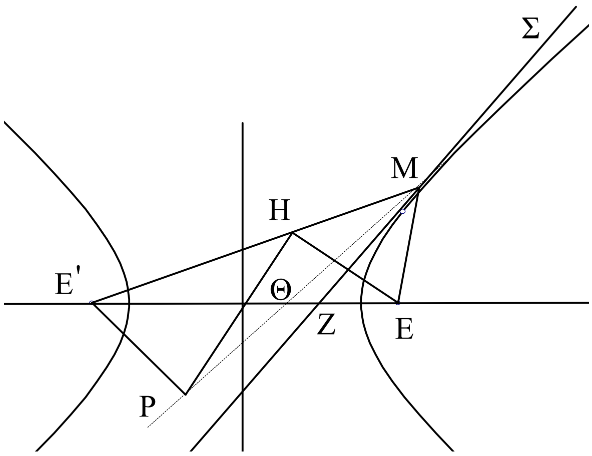
Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της υπερβολής διχοτομεί την γωνία Ε′ΜΕ και αντίστροφα.

Απόδειξη

Α΄ τρόπος: Από την Πρότασης 4(ii) έχουμε ΕΓ = εΕΜ, Ε′Γ = εΕ′Μ (Σχήμα 8) οπότε $\frac{\Gamma E}{ME} = \varepsilon = \frac{\Gamma E'}{ME'}$. Άρα $\frac{\Gamma E}{\Gamma E'} = \frac{ME}{ME'}$, οπότε η ΜΓ διχοτομεί την εξωτερική γωνία της γωνίας Ε′ΜΕ Επομένως η εφαπτομένη ΜΤ που είναι κάθετη στην ΜΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Ε′ΜΕ.

Β΄ τρόπος: Έστω Σ (Σχήμα 9) τυχόν σημείο της εφαπτομένης στο Μ, οπότε (βλ. §6.2, XI) $|\Sigma E' - \Sigma E| \leq 2\alpha = ME' - ME$, με ισότητα μόνο όταν το Σ συμπίπτει με το Μ. Έτσι η διαφορά ΣΕ′ - ΣΕ γίνεται μέγιστη αν το Σ συμπίπτει με το Μ. Αυτό όμως συμβαίνει (Βλέπε Λήμμα παρακάτω) μόνο αν $E\hat{M}Z = Z\hat{M}E'$.
Γ΄ τρόπος: όπως ο γ′ τρόπος στην έλλειψη, σελ. 173.

Σχήμα 9



Αντιστρόφως: Έστω ΜΖ διχοτόμος της γωνίας Ε′ΜΕ και Σ τυχόν σημείο της ΜΖ, διάφορο του Μ. Θα δείξουμε ότι είναι εκτός της υπερβολής. Αν ΕΗ κάθετη στην ΜΖ, τότε ΜΖ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΗΕ, οπότε ΣΗ = ΣΕ. Από το τρίγωνο ΣΗΕ′ έχουμε

$\Sigma E' - HE' < \Sigma H = \Sigma E$ ή $\Sigma E' - \Sigma E < HE' = ME' - MH = ME' - ME = 2\alpha$,
οπότε

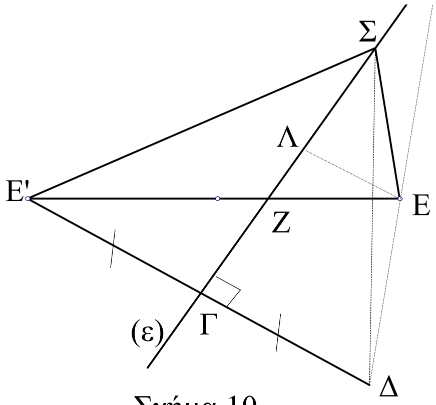
$\Sigma E' - \Sigma E < 2\alpha$, άρα το σημείο Σ βρίσκεται εκτός της υπερβολής (βλ. §6.2, XI).

ΛΗΜΜΑ
Έστω ένα τμήμα Ε′Ε και μια (σταθερή) ευθεία (ε) που τέμνει το τμήμα Ε′Ε σε σημείο διάφορο του μέσου του. Αν Σ τυχόν σημείο της ευθείας (ε), τότε η διαφορά $|\Sigma E' - \Sigma E|$ γίνεται μέγιστη αν και μόνο η (ε) είναι διχοτόμος της γωνίας $E'\hat{\Sigma}E$.

Απόδειξη

Έστω Ζ (Σχήμα 10) το σημείο τομής της (ε) με το τμήμα ΕΕ′ και ότι Ε′Ζ > ΖΕ. Αν Δ το συμμετρικό του Ε ως προς την (ε), τότε ΣΔ = ΣΕ′, οπότε από το τρίγωνο ΣΔΕ έχουμε

$|ΣΕ' - ΣΕ| = |ΣΔ - ΣΕ| \leq ΕΔ$, με ΕΔ σταθερό. Η ισότητα ισχύει μόνο αν τα σημεία Σ, Ε, Δ είναι συνευθειακά. Αυτό μπορεί να συμβεί, γιατί εφόσον Ε′Ζ > ΖΕ είναι και ΔΓ > ΕΛ, άρα η ΕΔ δεν είναι παράλληλη στην (ε) οπότε την τέμνει. Το σημεία όμως Σ, Ε, Δ είναι συνευθειακά, αν και μόνο η (ε) είναι διχοτόμος της γωνίας Ε′ΣΔ.



Σχήμα 10

2η Κατασκευή εφαπτομένης σ’ ένα σημείο υπερβολής

Έστω Μ (Σχήμα 9) ένα σημείο μιας υπερβολής, διαφορετικό από τις κορυφές της. Σχεδιάζουμε την γωνία Ε′ΜΕ και κατασκευάζουμε (με κανόνα και διαβήτη) την διχοτόμο της ΜΖ. Τότε, από την προηγούμενη πρόταση (αντίστροφο) η ΜΖ είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ. Αν το Μ είναι κορυφή της υπερβολής, φέρνουμε κάθετη στον κυρίως άξονα της υπερβολής στο σημείο αυτό.

Άσκηση

Με την βοήθεια του παραπάνω Λήμματος και του σχήματος 9 (όπου η ΜΘ θεωρείται μια άλλη εφαπτομένη), μπορεί να δοθεί ένας ακόμη τρόπος απόδειξης της μοναδικότητας της εφαπτομένης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 (Ποδική υπερβολής ως προς μια εστία)

α) Ο γεωμετρικός τόπος των προβολών μιας εστίας της υπερβολής πάνω στις διάφορες εφαπτομένες της υπερβολής είναι κύκλος, με διάμετρο τον κυρίως άξονα και κέντρο το κέντρο της υπερβολής (*ποδική της* υπερβολής *ως προς την εστία αυτή*).

β) Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της υπερβολής από μια (οποιαδήποτε) εφαπτομένη της είναι σταθερό.

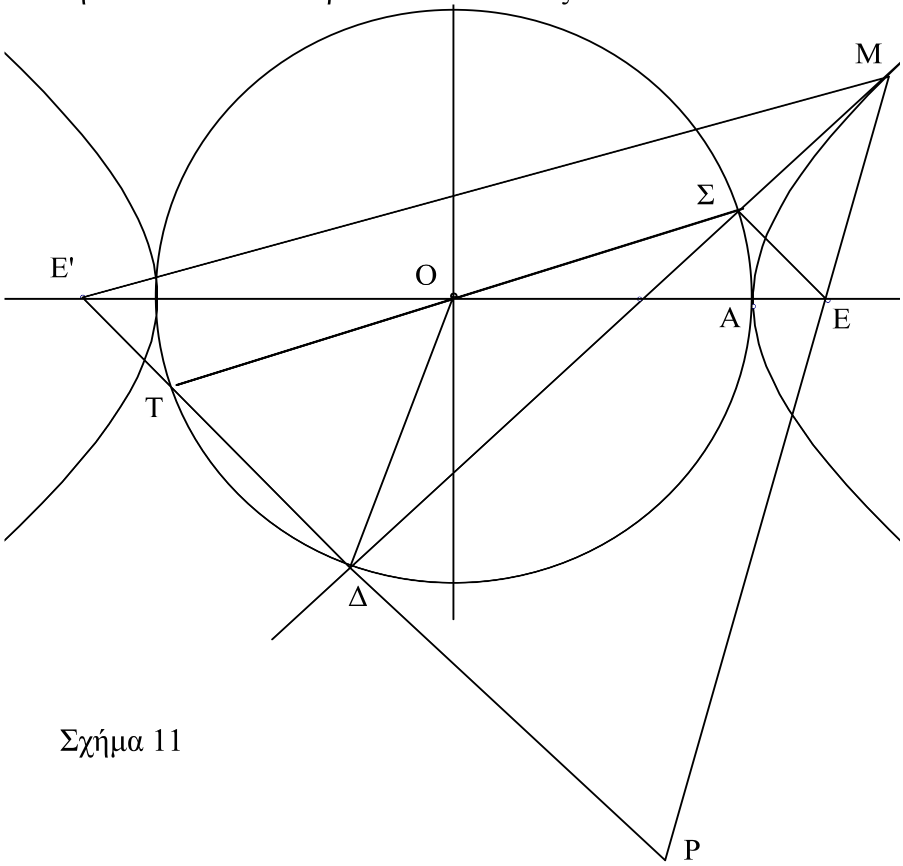
Απόδειξη

α) Έστω Δ (Σχήμα 11) η προβολή της εστίας Ε′ στην εφαπτομένη στο Μ. Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της υπερβολής έχουμε $Δ\hat{Μ}Ε' = Δ\hat{Μ}Ε$.

Επίσης η ΔΜ είναι κάθετη στην ΔΕ′, άρα η ΔΜ είναι μεσοκάθετη στην ΡΕ′ οπότε ΡΜ = ΜΕ′ και Δ μέσο του ΡΕ′, όπως και το Ο μέσο του ΕΕ′. Επομένως

$$ΟΔ = \frac{ΡΕ}{2} = \frac{ΡΜ - ΜΕ}{2} = \frac{ΜΕ' - ΜΕ}{2} = \frac{2α}{2} = α$$

Άρα το Δ ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας α.



Σχήμα 11

Αντίστροφα: Έστω Δ τυχόν σημείο του κύκλου (Ο, α) και η εφαπτομένη ΔΜ της υπερβολής Η προβολή του Ε′ στην ΔΜΣ ανήκει, σύμφωνα με το προηγούμενο, στον κύκλο (Ο, α), άρα συμπίπτει με το Δ.

β) Κατ’ αρχήν, αν η εφαπτομένη είναι στην κορυφή Α τότε

$$Ε'Α \cdot ΕΑ = (ΟΕ + ΟΑ)(ΟΕ - ΟΑ) = ΟΕ^2 - α^2 = α^2ε^2 - α^2 = β^2.$$

Θα δείξουμε ότι η τιμή αυτή του γινομένου είναι η ίδια για οποιαδήποτε εφαπτομένη.

Έστω Δ, Σ οι προβολές των εστιών Ε′, Ε αντίστοιχα πάνω στην εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο Μ και Τ το σημείο που η ΣΟ τέμνει την Ε′Δ. Επειδή ΟΔ = ΟΣ = α και η γωνία Δ είναι ορθή ο κύκλος διαμέτρου ΤΣ έχει

κέντρο το Ο και διέρχεται από το Δ. Από την ισότητα των τριγώνων Ε′ΟΤ, ΟΣΕ (δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία) έχουμε ΤΕ′ = ΣΕ, οπότε
ΔΕ′·ΣΕ = ΔΕ′ · ΤΕ′ (δύναμη του σημείο Ε′ ως προς τον κύκλο(Ο, α)
$= Ε'Ο^2 - ΟΑ^2 = α^2ε^2 - α^2 = β^2$ σταθερό.

Σημείωση
Ο παραπάνω κύκλος με διάμετρο τον κύριο άξονα ΑΑ′ λέγεται *πρωτεύον* ή *βοηθητικός κύκλος* της υπερβολής και είναι χρήσιμος στην μελέτη της.

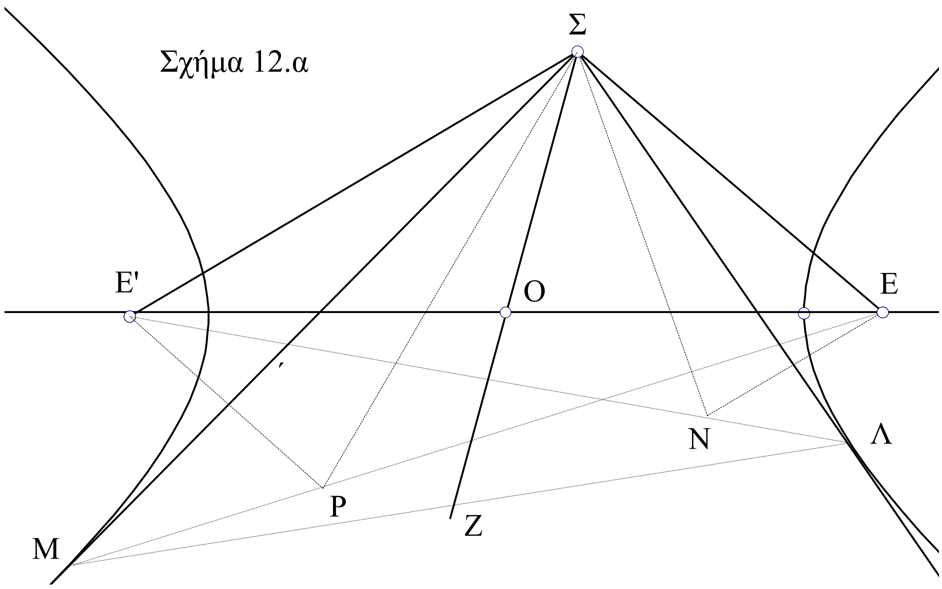
ΠΡΟΤΑΣΗ 7 (Εφαπτόμενα τμήματα)
Έστω ότι οι εφαπτομένες μιας υπερβολής στα σημεία της Μ, Λ τέμνονται στο σημείο Σ. Τότε
α) Οι εφαπτομένες σχηματίζουν ίσες (αντίστοιχα παραπληρωματικές) γωνίες με τις ευθείες (εστιακές ακτίνες) ΣΕ, ΣΕ′.
β) Τα τμήματα ΣΜ, ΣΛ φαίνονται με παραπληρωματικές (αντίστοιχα ίσες) γωνίες από την εστία Ε, καθώς και από την Ε′.
γ) Η ΣΟ διχοτομεί την χορδή ΜΛ.

Απόδειξη
Έστω ότι τα εφαπτόμενα τμήματα δεν είναι στον ίδιο κλάδο της υπερβολής (Σχήμα 12.α) Φέρνουμε Ε′Ρ κάθετη στην ΜΣ που τέμνει την ΜΕ στο Ρ και την ΕΝ κάθετη στην ΣΛ που τέμνει την Ε′Λ στο Ν.
Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της υπερβολής η ευθεία ΜΣ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΡΕ′ οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας ΡΣΕ′. Όμοια η ΣΛ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ και διχοτόμος της γωνίας ΕΣΝ.
Έτσι έχουμε ΡΣ = ΣΕ′, ΣΕ = ΣΝ. Τα τρίγωνα ΡΣΕ, Ε′ΣΝ έχουν ήδη δυο πλευρές ίσες (ΣΡ = ΣΕ′, ΣΕ = ΣΝ) αλλά και τις τρίτες:

$$ΡΕ = ΜΕ - ΡΜ = ΜΕ - ΜΕ' = 2α = ΛΕ' - ΛΕ = ΛΕ' - ΛΝ = Ε'Ν.$$

Άρα είναι ίσα.

α) Από την ισότητα αυτή έχουμε $Ρ\hat{Σ}Ε = Ε'\hat{Σ}Ν$ ή $Ρ\hat{Σ}Ε' = Ε\hat{Σ}Ν$ ή $2\,Μ\hat{Σ}Ε' = 2\,Ε\hat{Σ}Λ$ ή $Μ\hat{Σ}Ε' = Ε\hat{Σ}Λ$. Τότε όμως είναι και $Μ\hat{Σ}Ε = Ε'\hat{Σ}Λ$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε *ισότητα* γωνιών μεταξύ εφαπτόμενων τμημάτων και εστιακών ακτίνων.



β) Από την ίδια ισότητα τριγώνων έχουμε και $\Sigma\hat{N}E' = \Sigma\hat{E}M$ αλλά $\Sigma\hat{N}\Lambda = \Sigma\hat{E}\Lambda$ και $\Sigma\hat{N}\Lambda + \Sigma\hat{N}E' = 180^o$ οπότε και οι γωνίες $\Sigma\hat{E}\Lambda$, $\Sigma\hat{E}M$ με τις οποίες η εστία Ε βλέπει τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΛ, ΣΜ είναι *παραπληρωματικές*. Όμοια και για την εστία Ε′.

- Στην περίπτωση που τα εφαπτόμενα τμήματα είναι προς τον ίδιο κλάδο της υπερβολής, εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε αντίστροφες σχέσεις: οι γωνίες μεταξύ εφαπτόμενων τμημάτων και εστιακών ακτίνων είναι *παραπληρωματικές,* ενώ κάθε εστία βλέπει τα εφαπτόμενα τμήματα με *ίσες* γωνίες.

γ) Βλέπε απόδειξη στην Πρόταση 11, § 5.4 (έλλειψη).

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.1

Το τμήμα μιας εφαπτομένης της υπερβολής που περιέχεται μεταξύ των εφαπτομένων στα άκρα του μεγάλου της άξονα, φαίνεται από κάθε εστία της με ορθή γωνία.

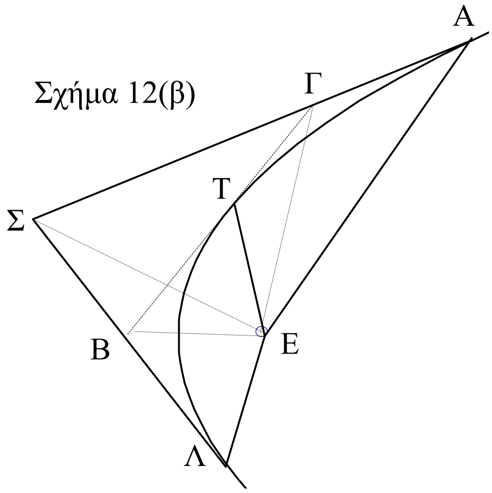
(Υπόδειξη: χρησιμοποιούμε ότι μια εστία βλέπει δυο εφαπτόμενα τμήματα (από το ίδιο σημείο) προς τον ίδιο κλάδο με ίσες γωνίες και ότι η ίδια εστία βλέπει δυο εφαπτόμενα τμήματα προς διαφορετικούς κλάδους με παραπληρωματικές. Έτσι τελικά έχουμε διχοτόμους δυο παραπληρωματικών γωνιών κλπ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.2

Έστω ΣΑ, ΣΛ δυο (σταθερά) εφαπτόμενα τμήματα κωνικής (για την υπερβολή προς τον ίδιο κλάδο) και μια τυχαία εφαπτομένη στην κωνική που τέμνει αντίστοιχα τα τμήματα αυτά στα σημεία Γ, Β. Τότε η εστία (εστίες) βλέπει το τμήμα ΒΓ με σταθερή γωνία.

Πράγματι, όπως έχουμε δει (Πρόταση 8(α), §4.3 και Πρόταση 9(β), §5.4) και για τις τρεις κωνικές, τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο Σ εκτός κωνικής, φαίνονται από την εστία της (ή εστίες) με ίσες γωνίες. Άρα για τα εφαπτόμενα τμήματα ΓΤ, ΓΑ (Σχήμα 12(β)) έχουμε ότι η ΕΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΤΕΑ}$. Ομοίως για τα εφαπτόμενα τμήματα ΒΤ, ΒΛ η ΕΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΤΕΛ}$. Άρα η γωνία $\widehat{ΒΕΓ}$ είναι το μισό της γωνίας $\widehat{ΛΕΑ}$, και άρα ίση με την $\widehat{ΣΕΑ}$ που είναι σταθερή.

Σχήμα 12(β)



ΠΡΟΤΑΣΗ 8 (Χορδή και ασύμπτωτη)

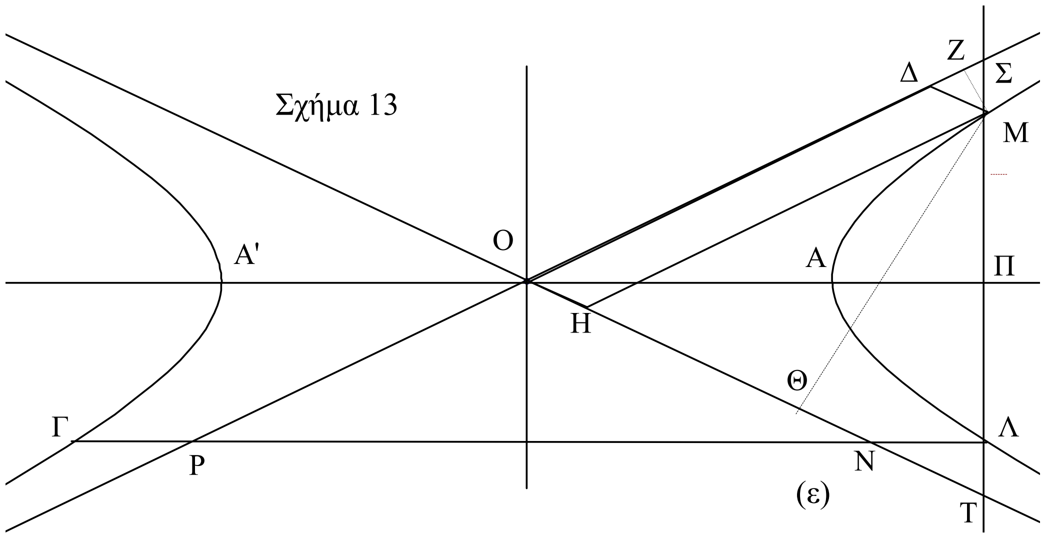
Έστω μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τον δευτερεύοντα (ή τον κύριο) άξονα της υπερβολής που τέμνει την υπερβολή στα σημεία Μ, Λ και τις ασύμπτωτές της στα σημεία Σ, Τ. Τότε

α) Τα γινόμενα ΜΣ·ΜΤ, ΛΣ·ΛΤ είναι σταθερά και ίσα με το τετράγωνο του ημιάξονα προς τον οποίο είναι παράλληλη η ευθεία (ε).

β) Τα τμήματα της ευθείας (ε) μεταξύ της υπερβολής και των ασύμπτωτων είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι η ευθεία είναι παράλληλη προς τον δευτερεύοντα άξονα της υπερβολής, και τέμνει τον κύριο άξονα στο σημείο Π. Τότε λόγω συμμετρίας των ασύμπτωτων ως προς κύριο άξονα έχουμε ΣΠ = ΠΤ (Σχήμα 13) και



$$ΜΣ \cdot ΜΤ = (ΣΠ - ΜΠ)(ΠΤ + ΜΠ) = ΣΠ^2 - ΜΠ^2 \quad (1)$$

Αλλά επειδή η ΟΣ είναι ασύμπτωτη, εξ' ορισμού, έχουμε $ΣΠ = \frac{β}{α}ΟΠ$, και από την Πρόταση 3(β), $ΜΠ^2 = \frac{β^2}{α^2} Α'Π \cdot ΑΠ$ και είναι

$$Α'Π \cdot ΑΠ = (ΟΠ + α)(ΟΠ - α) = ΟΠ^2 - α^2$$

οπότε συνεχίζοντας στην (1) έχουμε

$$ΜΣ \cdot ΜΤ = ΣΠ^2 - ΜΠ^2 = \frac{β^2}{α^2}\left(ΟΠ^2 - Α'Π \cdot ΑΠ\right) = \frac{β^2}{α^2}α^2 = β^2.$$

Όμοια βρίσκουμε $ΛΤ \cdot ΛΣ = β^2$.

β) Έχουμε,

$$ΜΣ \cdot ΜΤ = ΛΤ \cdot ΛΣ \Leftrightarrow ΜΣ \cdot (ΜΛ + ΛΤ) = ΛΤ(ΜΛ + ΜΣ) \Leftrightarrow ΜΣ = ΛΤ.$$

Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον κύριο άξονα της υπερβολής και τέμνει τις ασύμπτωτες στα Ρ, Ν και την υπερβολή στα Λ, Γ τότε ομοίως προκύπτει $ΛΡ \cdot ΛΝ = ΓΡ \cdot ΓΝ = α^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9 (Υπερβολή και ασύμπτωτες)

Αν από ένα σημείο της υπερβολής φέρουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτές της τότε:

α) Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με το αβ/2 (1/8 του ορθογωνίου βάσης).

β) Το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου υπερβολής από τις ασύμπτωτές της είναι σταθερό και ίσο με $(β/ε)^2$.

Απόδειξη

α) Έστω ένα σημείο Μ της υπερβολής και ΜΔ, ΜΗ οι παράλληλες προς τις ασύμπτωτες (Σχήμα 13). Έστω και η κάθετη ΜΠ από το Μ προς τον κύριο άξονα της υπερβολής. Τότε το τρίγωνο ΣΔΜ είναι ισοσκελές ($\hat{\Sigma} = \hat{M}$). Από την Πρόταση 8, έχουμε $M\Sigma \cdot MT = \beta^2$ (1)

Από τα όμοια τρίγωνα ΔΣΜ, ΣΤΟ έχουμε

$$\frac{\Sigma\Delta}{\Sigma M} = \frac{O\Sigma}{\Sigma T} = \frac{O\Sigma - \Sigma\Delta}{\Sigma T - \Sigma M} = \frac{O\Delta}{MT}, \text{ οπότε } \frac{\Sigma\Delta \cdot O\Delta}{\Sigma M \cdot MT} = \frac{O\Sigma^2}{\Sigma T^2} \quad (2)$$

Αλλά επειδή $\Sigma\Pi = \frac{\beta}{\alpha} O\Pi$, έχουμε $O\Sigma^2 = \Sigma\Pi^2 + O\Pi^2 = \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right) O\Pi^2 = \varepsilon^2 O\Pi^2$,

οπότε $\frac{O\Sigma^2}{\Sigma T^2} = \frac{\varepsilon^2 O\Pi^2}{4\Sigma\Pi^2} = \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{4\beta^2}$, οπότε λόγω και της (1), η (2) δίνει

$\Sigma\Delta \cdot O\Delta = \frac{(\alpha\varepsilon)^2}{4}$. Αλλά ΣΔ = ΔΜ = ΟΗ, οπότε

$OH \cdot O\Delta = \frac{(\alpha\varepsilon)^2}{4}$ (3) και $(\Delta MHO) = \frac{(\alpha\varepsilon)^2}{4} \eta\mu 2\omega = \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha\beta}{2}$.

(2ω: η γωνία των ασυμπώτων)

β) Έστω ΜΖ, ΜΘ οι κάθετες στις ασύμπτωτες. Έχουμε

$E = (O\Delta MH) = O\Delta \cdot MZ = OH \cdot M\Theta$, οπότε $E^2 = (O\Delta \cdot OH)(MZ \cdot M\Theta)$

αλλά $OH \cdot O\Delta = \frac{(\alpha\varepsilon)^2}{4}$ και $E = \frac{\alpha\beta}{2}$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $MZ \cdot M\Theta = (\beta/\varepsilon)^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.1

Αν από ένα σημείο Μ μιας υπερβολής φέρουμε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη που τέμνει την άλλη στο σημείο Η, τότε $OH \cdot HM = \gamma^2/4$.

Σημείωση

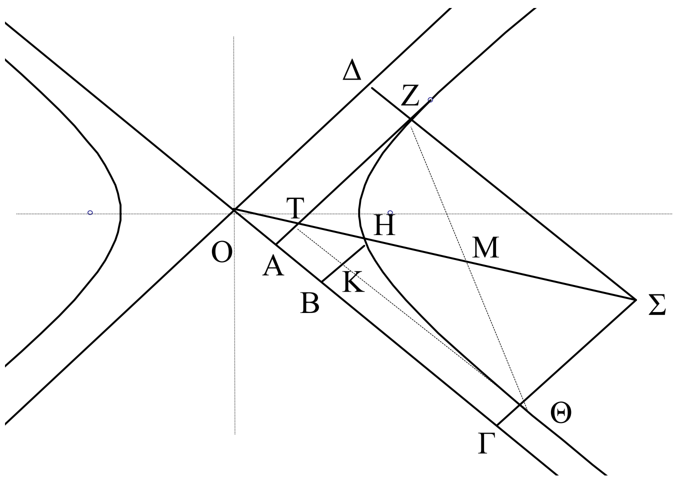
Η σχέση $OH \cdot O\Delta = \gamma^2/4$ είναι ουσιαστικά η εξίσωση της υπερβολής ως προς το σύστημα των ασυμπώτων της (γενικά πλαγιογώνιο). Αν η υπερβολή είναι ισοσκελής (ορθογώνια), τότε οι ασύμπτωτές της είναι κάθετες, οπότε αν (x, y) οι συντεταγμένες του Μ, ως προς το ορθογώνιο σύστημα Oxy με άξονα Ox την ευθεία ΟΤ και Oy την ευθεία ΟΔ, τότε ΟΗ = x, ΟΔ = y, και έχουμε $xy = \alpha^2/2$ ($\alpha = \beta = \gamma/\sqrt{2}$), δηλαδή την γνωστή εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής.

ΤΡΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 10 (Ισοσκελής υπερβολή)
Έστω Α, Β, Γ σημεία σε μια ασύμπτωτη ισοσκελούς (ορθογώνιας) υπερβολής ώστε $\frac{ΟΒ}{ΟΑ} = \frac{ΟΓ}{ΟΒ}$. Από τα σημεία Α, Β, Γ φέρνουμε παράλληλες προς την άλλη ασύμπτωτη της υπερβολής που τέμνουν την υπερβολή στα σημεία Ζ, Η, Θ αντίστοιχα. Αν Σ η προβολή του Ζ στην ευθεία ΓΘ, τότε ισχύουν:
α) Τα σημεία Ο, Η, Σ είναι συνευθειακά.
β) Η ευθεία ΟΗ διχοτομεί το τμήμα ΖΘ.

Απόδειξη
α) Επειδή η γωνία των ασυμπώτων στην ισοσκελή υπερβολή είναι ορθή, το τετράπλευρο ΑΖΣΓ (Σχήμα 14) είναι ορθογώνιο. Έστω Τ το σημείο τομής της ΟΣ με την ΑΖ. Από την Πρόταση 9(β) έχουμε

Σχήμα 14



$ΟΑ \cdot ΑΖ = ΟΒ \cdot ΒΗ$ ($= α^2/2$) ή $\frac{ΟΒ}{ΟΑ} = \frac{ΑΖ}{ΒΗ}$ και λόγω της δοθείσας σχέσης έχουμε

$\frac{ΟΓ}{ΟΒ} = \frac{ΑΖ}{ΒΗ}$ ή $\frac{ΒΗ}{ΟΒ} = \frac{ΓΣ}{ΟΓ}$, και λόγω του ότι ΗΒ//ΣΓ τα τρίγωνα ΟΒΗ, ΟΓΣ είναι όμοια οπότε τα σημεία Ο, Η, Σ είναι συνευθειακά.

β) Τα σημεία Ο, Η, Σ ανήκουν στην διαγώνιο ΟΣ του ορθογωνίου ΟΔΣΓ. Έστω Τ το σημείο που η ΟΣ τέμνει την ΑΖ. Έχουμε (Πρόταση 9(β))

$OB \cdot BH = O\Gamma \cdot \Gamma\Theta$ ή $\frac{OB}{O\Gamma} = \frac{\Gamma\Theta}{BH}$ και λόγω της δοσμένης σχέσης και του ότι ΑΤ//ΒΗ έχουμε $\frac{\Gamma\Theta}{BH} = \frac{OA}{OB} = \frac{AT}{BH}$, άρα ΓΘ = ΑΤ. Έτσι το τετράπλευρο ΑΤΘΓ είναι ορθογώνιο, άρα και το ΤΖΣΘ, οπότε η διαγώνιος ΤΣ διχοτομεί την διαγώνιο ΖΘ.

Σημείωση

Από την παραπάνω πρόταση (β) προκύπτει ότι, κάθε παράλληλο τμήμα από ένα σημείο της ΤΗ προς την ΖΘ - ή την εφαπτομένη στο Η - που περιέχεται μεταξύ των ΤΖ, ΤΘ, διχοτομείται από το τμήμα ΤΗ, οπότε σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri τα εμβαδά των (μικτογράμμων) χωρίων ΤΗΖ, ΤΗΘ είναι ίσα. Επίσης αποδεικνύεται εύκολα, από την δοσμένη σχέση, ότι το ορθογώνιο ΑΒxΒΗ είναι ίσεμβαδικό με το ορθογώνιο ΒΓxΓΘ, οπότε προκύπτει ότι τα εμβαδά των (μικτογράμμων) χωρίων ΑΖΗΒ, ΒΗΘΓ είναι ίσα.
Έτσι, αν συνεχιστεί ο χωρισμός της ασύμπτωτης κατά γεωμετρική πρόοδο (ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,…) τα αντίστοιχα εμβαδά, που ορίζονται από τις παράλληλες στην άλλη ασύμπτωτη και την υπερβολή, θα αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Σ' αυτήν την σπουδαία ιδιότητα της ισοσκελούς υπερβολής στηρίχθηκε η δημιουργία των φυσικών λογαρίθμων από τον Saint Vincent (1584-1667).

ΠΡΟΤΑΣΗ 11 (Τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ισοσκελή υπερβολή)

α) Έστω (F, D, C) μια τριάδα σημείων όπου τα D, F ανήκουν σε μια ισοσκελή υπερβολή και C είναι το σημείο τομής της DF με μια ασύμπτωτή της υπερβολής. Τότε, αν O το κέντρο της υπερβολής ισχύουν

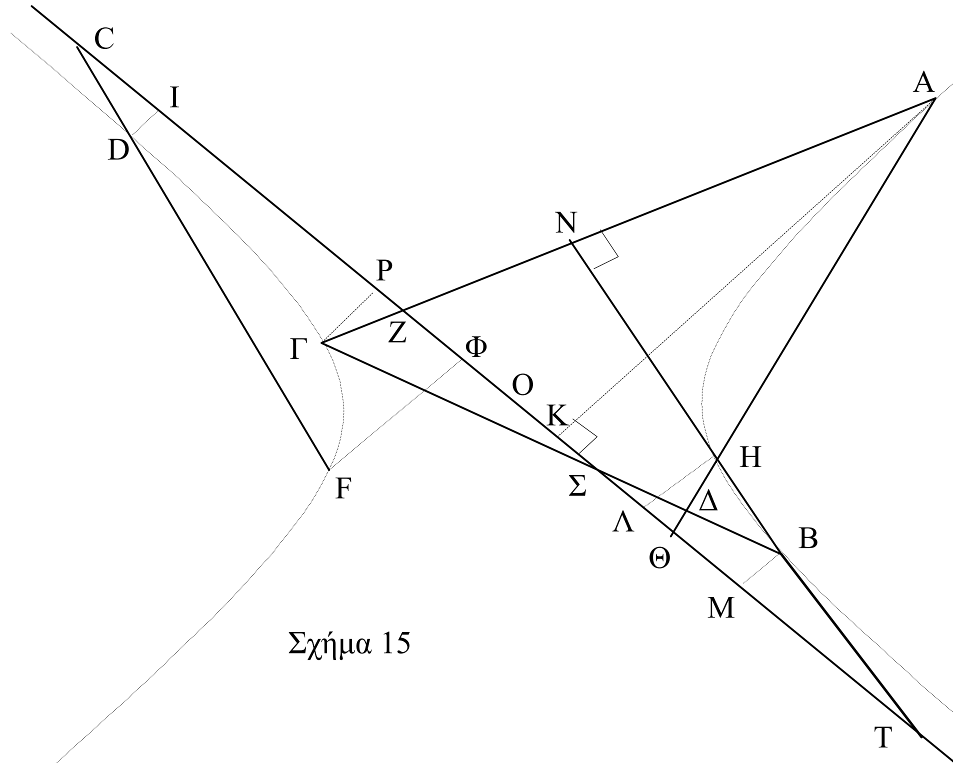
$$\pi(DC) = \pi(OF), \quad \pi(FC) = \pi(OD),$$

όπου π(DC) συμβολίζει την προβολή του DC πάνω στην ασύμπτωτη αυτή.

β) Αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε μια ισοσκελή υπερβολή, τότε το ορθόκεντρό του ανήκει στην υπερβολή αυτή.

Απόδειξη

α) Έστω Ι, Φ (Σχήμα 15) οι προβολές των D,F στην ασύμπτωτη αυτή αντίστοιχα. Από τα όμοια τρίγωνα IDC, CFΦ έχουμε $\frac{F\Phi}{DI} = \frac{\Phi C}{IC}$, αλλά από Πόρισμα 9.1, $O\Phi \cdot F\Phi = DI \cdot DI$ $(= \alpha^2/2)$, οπότε $\frac{F\Phi}{DI} = \frac{OI}{O\Phi}$, άρα $\frac{\Phi C}{IC} = \frac{OI}{O\Phi}$ ή $\frac{\Phi C - IC}{IC} = \frac{OI - O\Phi}{O\Phi}$, οπότε IC= ΟΦ και ΦC = OI.



Σχήμα 15

β) Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 15) και ότι το ύψος του ΒΝ τέμνει την υπερβολή στο σημείο Η. Έστω Κ, Λ, Μ οι προβολές των Α, Η, Β στην ασύμπτωτη αυτή. Θα δείξουμε ότι η ΑΗΔ είναι κάθετη στην ΓΒ, οπότε το Η θα είναι ορθόκεντρο του ΑΒΓ και ανήκει (ήδη) στην υπερβολή.

Αρκεί να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΚΣΔ είναι εγγράψιμο, οπότε η γωνία του Δ θα είναι ορθή. Αρκεί γι' αυτό να δειχθεί ότι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Sigma}\mathrm{M}$, ισοδύναμα ότι τα τρίγωνα ΑΚΘ, ΣΒΜ είναι όμοια, δηλαδή ότι $\frac{\mathrm{AK}}{\Sigma\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{K}\Theta}{\mathrm{BM}}$. (1)

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΖ, ΜΒΤ (γωνία Ζ = γωνία Β, γιατί το ΝΖΜΒ είναι εγγράψιμο) έχουμε $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{ZK}} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{BM}}$.

Από το (α) για τις τριάδες (Α, Γ, Ζ) , (Γ, Β, Σ) έχουμε αντίστοιχα π(ΑΖ) = π(ΟΓ), π(ΒΣ) = π(ΟΓ) ή ΖΚ = ΟΡ = ΣΜ και από (α) για τις τριάδες (Α, Η, Θ), (Η, Β, Τ) έχουμε ΚΘ = ΟΛ = ΜΤ, οπότε από την τελευταία αναλογία προκύπτει η ζητούμενη (1).

ΠΟΡΙΣΜΑ 11.1

Αν θεωρήσουμε τις τρεις κορυφές ενός τριγώνου και το ορθόκεντρό του, τότε μια ισοσκελής υπερβολή που διέρχεται από τρία από τα σημεία αυτά διέρχεται και από το τέταρτο.

(Υπόδειξη: το τρίγωνο που ορίζουν τρία οποιαδήποτε από αυτά τα σημεία έχει το τέταρτο ως ορθόκεντρό του.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 12 (Εφαπτομένη και διάμετρος)

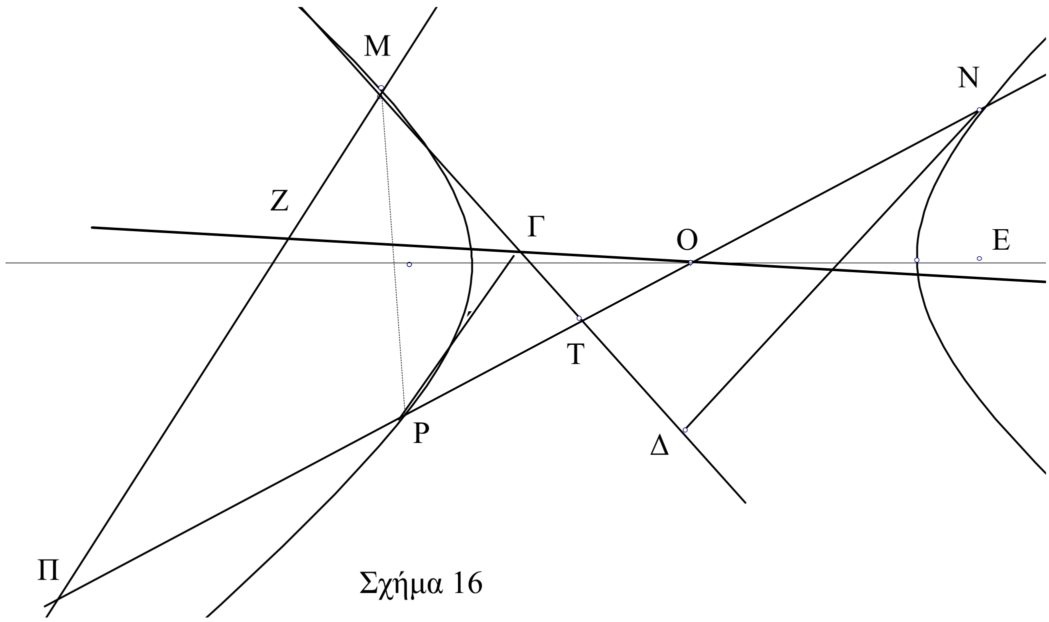
Έστω μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της υπερβολής, που τέμνει μια διάμετρό της ΡΝ στο σημείο Τ και τις εφαπτομένες στα άκρα της διαμέτρου αυτής στα σημεία Γ, Δ. Αν η παράλληλη από το Μ προς εφαπτομένες τέμνει την διάμετρο ΡΝ στο Π, τότε ισχύουν

α) Το γινόμενο $ΟΠ \cdot ΟΤ$ είναι σταθερό και ίσο με $ΟΡ^2$.

β) Τα σημεία Τ, Π είναι συζυγή αρμονικά των Ρ, Ν.

Απόδειξη

α), β) Δίνουμε μόνο το σχήμα 16. Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια (και με τα ίδια γράμματα!) με την αντίστοιχη Πρόταση 12 της §5.4. Ας σημειωθεί μόνο ότι, όπως και στην έλλειψη έτσι και εδώ η ΓΟ (που δεν συμπίπτει πάντα με τον κύριο άξονα) διχοτομεί το τμήμα ΡΜ εφόσον οι ΓΜ, ΓΡ είναι εφαπτομένες.



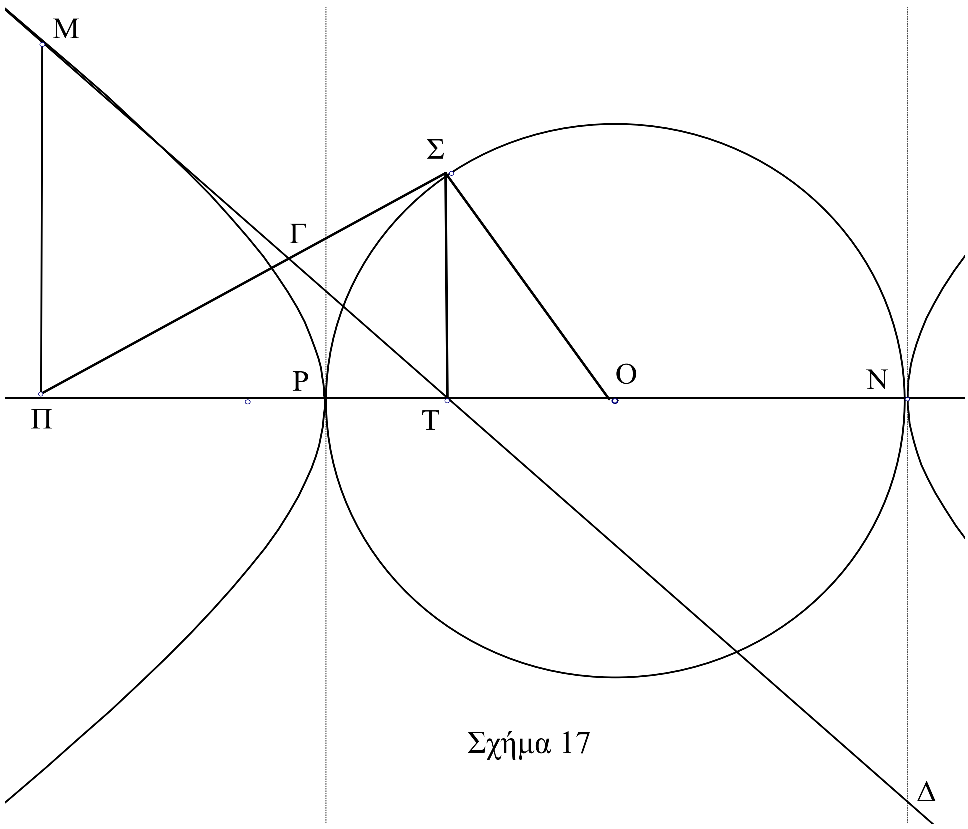
Σχήμα 16

ΠΟΡΙΣΜΑ 12.1

Έστω μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της υπερβολής κέντρου Ο, που τέμνει τον κύριο άξονά της ΡΝ στο σημείο Τ και τις εφαπτομένες στα άκρα του άξονα αυτού στα σημεία Γ, Δ. Αν η προβολή του Μ στον κύριο άξονα είναι Π, τότε ισχύουν

α) Το γινόμενο ΟΠ·ΟΤ είναι σταθερό και ίσο με $OP^2 = \alpha^2$.
β) Τα σημεία Τ, Π είναι συζυγή αρμονικά των Ρ, Ν.
γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.
δ) Το γινόμενο ΡΓ·ΝΔ είναι σταθερό και ίσο με β^2.

Απόδειξη
Για τα (α), (β): εφαρμόζουμε την Πρόταση 12 παίρνοντας ως διάμετρο ΡΝ τον κύριο άξονα της υπερβολής, (Σχήμα 17). Το (γ) ισχύει από το πόρισμα 7.1.



Σχήμα 17

(δ) Από τα όμοια τρίγωνα ΡΓΤ, ΤΝΔ, ΜΠΡ έχουμε

$$\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΤΡ}} = \frac{\text{ΝΔ}}{\text{ΝΤ}} = \frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΤΠ}}, \text{ οπότε } \frac{\text{ΡΓ}\cdot\text{ΝΔ}}{\text{ΤΡ}\cdot\text{ΝΤ}} = \frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΤΠ}^2} = \frac{\text{ΜΠ}^2(\text{ΟΠ}^2-\alpha^2)}{(\text{ΟΠ}^2-\alpha^2)\text{ΤΠ}^2},$$

αλλά (Πόρισμα 3.1) $\dfrac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΠ}^2-\alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι

$TΠ^2α^2 = TP \cdot NT(OΠ^2 - α^2)$ ή, λόγω της $TP \cdot NT = OP^2 - OT^2$, αρκεί

$TΠ^2α^2 = (α^2 - OT^2)(OΠ^2 - α^2)$ ή $TΠ^2α^2 = α^2(OT^2 + OΠ^2 - 2OT \cdot OΠ)$
(λόγω του (α), $OΠ \cdot OT = α^2$), που ισχύει.

$3^η$ Κατασκευή εφαπτομένης σ' ένα σημείο μιας υπερβολής

Το Πόρισμα 12.1(α) μας παρέχει ένα ακόμη τρόπο κατασκευής εφαπτομένης υπερβολής σ' ένα σημείο της Μ. Αν Π η προβολή του σημείου Μ στον κύριο άξονα, φέρνουμε εφαπτομένη ΠΣ από το Π στον (βοηθητικό) κύκλο διαμέτρου ΑΝ = 2α. Αν Τ η προβολή του Σ στον άξονα τότε η ΜΤ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ.

Πράγματι, το ΣΤ (Σχήμα 17) είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΠΣΟ, οπότε $OΣ^2 = OΠ \cdot OT$ ή $OΠ \cdot OT = OP^2$. Έτσι με δεδομένη το Π, το Τ είναι εντελώς ορισμένο (και μοναδικό) σημείο τομής της εφαπτομένης με τον

Συζυγείς διάμετροι υπερβολής

Στην υπερβολή, όπως και στην έλλειψη, ορίζονται συζυγείς διάμετροι. Μια δέσμη παραλλήλων χορδών υπερβολής καθορίζεται από μια διάμετρο παράλληλη προς μια από τις ευθείες της δέσμης. Έτσι, αν έχουμε μια διάμετρο (τ) μιας υπερβολής, τα μέσα όλων των παραλλήλων προς αυτήν χορδών, σύμφωνα με την Πρόταση 10, §5.4, ανήκουν σε μια άλλη διάμετρο (τ′) και αντίστροφα. Γι' αυτό και η (τ′) λέγεται *συζυγής* της διαμέτρου (τ), όπως και η (τ) συζυγής της διαμέτρου (τ′), ή ότι οι (τ), (τ′) είναι *συζυγείς* διάμετροι. Ισοδύναμα, συζυγής μιας διαμέτρου (τ) είναι η διάμετρος (τ′) που είναι παράλληλη προς τις εφαπτομένες στα σημεία που η (τ) τέμνει την υπερβολή. Η διαφορά με την έλλειψη είναι ότι η συζυγής ΟΣ μιας διαμέτρου ΟΔ της υπερβολής Υ, δεν τέμνει την Υ αλλά την συζυγή της Υ′ (Σχήμα 18, 19).

Σχετική με τις συζυγείς διαμέτρους υπερβολής είναι η παρακάτω πρόταση, αντίστοιχη της Πρόταση 14 στην έλλειψη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13 (Συζυγείς διάμετροι)
Έστω μια υπερβολή Υ , με ημιάξονες α, β και Υ′ η συζυγή της. Έστω ΟΔ διάμετρος μιας Υ και ΟΣ (Σχήμα 18) η συζυγή της. Αν Η, Ρ οι προβολές των Δ, Σ αντίστοιχα στον μεγάλο άξονα ενώ Κ η προβολή του Σ στον κύριο άξονα της Υ′. Τότε ισχύουν:

α) $\dfrac{\Delta H \cdot \Sigma P}{OH \cdot OP} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, β) $OH^2 - OP^2 = \alpha^2$, $\Sigma P^2 - \Delta H^2 = \beta^2$,

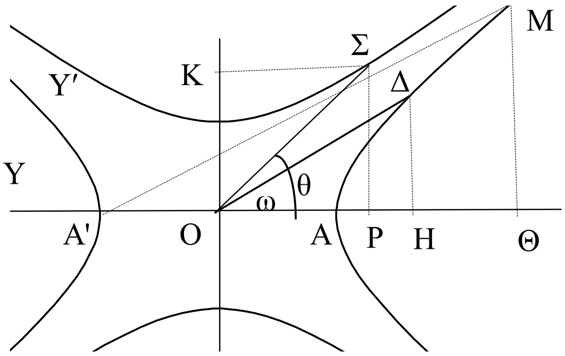
γ) $O\Delta^2 - O\Sigma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, δ) $\dfrac{\Delta H}{OP} = \dfrac{\Sigma P}{OH} = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

α) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 14 στην έλλειψη. Από το σημείο Α′ (άκρο κυρίου άξονα) φέρνουμε παράλληλη προς την διάμετρο ΟΔ (Σχήμα 18) που τέμνει την υπερβολή Υ στο Μ. Τότε η ΟΣ διχοτομεί το τμήμα Α′Μ (εξ’ ορισμού των συζυγών διαμέτρων). Έτσι η ΟΣ είναι παράλληλη στην ΜΑ, αφού ενώνει τα μέσα των Α′Α, Α′Μ. Αν Θ η προβολή του Μ στον άξονα από την Πρόταση 3.Α(β) έχουμε

$$\frac{M\Theta^2}{A'\Theta \cdot \Theta A} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (1).$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα Α′ΜΘ, ΟΔΗ έχουμε $\dfrac{M\Theta}{A'\Theta} = \dfrac{\Delta H}{OH}$ και από τα όμοια τρίγωνα ΟΣΡ, ΑΜΘ (ΟΣ//ΑΜ) έχουμε $\dfrac{M\Theta}{\Theta A} = \dfrac{\Sigma P}{OP}$.



Σχήμα 18

Έτσι από την (1) παίρνουμε

$$\frac{\Delta H \cdot \Sigma P}{OH \cdot OP} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (2)$$

β) Από την Πρόταση 3(γ) έχουμε για το σημείο Δ:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\Delta H^2}{A'H \cdot HA} = \frac{\Delta H^2}{OH^2 - \alpha^2} \quad (3)$$

Όμοια για το σημείο Σ της Υ′ (ΟΡ = ΚΣ) $\dfrac{\Sigma P^2 - \beta^2}{OP^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = \dfrac{\Sigma P^2}{OP^2 + \alpha^2}$ (4)

Άρα $\dfrac{\beta^4}{\alpha^4} = \dfrac{\Delta H^2 \cdot \Sigma P^2}{\left(OH^2 - \alpha^2\right)\left(\alpha^2 + OP^2\right)}$ (5)

Απαλείφοντας το γινόμενο ΔΗ·ΣΡ από τις (2), (5), προκύπτει $OH^2 - OP^2 = \alpha^2$. Λόγω της σχέσης αυτής από τις (3), (4) έχουμε

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\Delta H^2}{OP^2}=\frac{\Sigma P^2}{OP^2+\alpha^2}=\frac{\Sigma P^2-\Delta H^2}{\alpha^2}, \text{ οπότε } \Sigma P^2 - \Delta H^2 = \beta^2.$$

γ) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΔΗ, ΟΣΡ και λόγω των σχέσεων (β) έχουμε

$$O\Delta^2 - O\Sigma^2 = OH^2 + \Delta H^2 - OP^2 - \Sigma P^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

δ) Επειδή $OP^2 = OH^2 - \alpha^2$, από την (3) έχουμε $\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\Delta H^2}{OP^2}$, οπότε λόγω και της (2) προκύπτει $\frac{\Delta H}{OP}=\frac{\Sigma P}{OH}=\frac{\beta}{\alpha}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.1

Αν ω, θ οι η οξείες γωνίες που σχηματίζουν οι (ημι)διάμετροι ΟΔ, ΟΣ μιας υπερβολής με τον κύριο άξονά της αντίστοιχα, τότε αν είναι συζυγείς ισχύει εφθεφω = β^2/α^2 (ισοδύναμα, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης δυο συζυγών διαμέτρων υπερβολής είναι ίσο με β^2/α^2) και αντίστροφα.

(Υπόδειξη: το ορθό είναι άμεση συνέπεια του (α). Για το αντίστροφο: θεωρούμε την συζυγή της ΟΔ, έστω ΟΣ′, και αποδεικνύουμε, χρησιμοποιώντας το ορθό, ότι ταυτίζεται με την ΟΣ.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.2

Έστω ΟΔ, ΟΣ συζυγείς διάμετροι υπερβολής. Τότε ισχύει $O\Delta^2 + O\Sigma^2 \geq \alpha^2 + \beta^2$.

Πράγματι, λόγω των σχέσεων (β) έχουμε

$$O\Delta^2 + O\Sigma^2 = OH^2 + \Delta H^2 + OP^2 + \Sigma P^2 =$$
$$= \alpha^2 + OP^2 + \Delta H^2 + OP^2 + \Delta H^2 + \beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 .$$

(προκύπτει και με απλές ανισότητες: ΟΔ ≥ ΟΑ, ΟΣ ≥ ΟΒ κλπ, αν θεωρηθούν γνωστές). Η ισότητα ισχύει αν ΟΔ, ΟΣ είναι οι άξονες της υπερβολής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.3

Αν ΟΔ, ΟΣ συζυγείς διάμετροι υπερβολής και ΟΗ, ΟΡ οι προβολές των στον κύριο άξονα της υπερβολής, τότε τα τρίγωνα ΟΔΗ, ΟΣΡ είναι ισεμβαδικά.

(Υπόδειξη: προκύπτει από την (δ).)

ΠΟΡΙΣΜΑ 13.4

Στην ισοσκελή υπερβολή, δυο συζυγείς διάμετροι είναι ίσες και οι γωνίες που σχηματίζουν με τον κύριο άξονα της υπερβολής είναι συμπληρωματικές.

(Υπόδειξη: από την (γ) και την (δ) τα τρίγωνα ΟΣΡ, ΟΔΗ είναι ίσα.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 14 (Συζυγείς υπερβολές και διάμετροι)

Έστω μια υπερβολή Υ με κύριο άξονα α, δευτερεύοντα β και η συζυγής της Υ′ (με κύριο άξονα β, δευτερεύοντα α). Μια εφαπτομένη στο σημείο Μ της Υ τέμνει την ασύμπτωτη (προς τον κλάδο που βρίσκεται το Μ) στο σημείο Σ και σχηματίζει με τον κύριο άξονα της Υ οξεία γωνία θ. Από το κέντρο Ο της υπερβολής θεωρούμε μια διάμετρο ΟΝ παράλληλη στην εφαπτομένη ΜΣ. Έστω φ η οξεία γωνία που η εφαπτομένη στο Ν σχηματίζει με τον κύριο άξονα της Υ′. Τότε ισχύουν:

α) $\dfrac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΠ}\cdot\text{ΤΠ}} = \dfrac{\text{ΟΚ}\cdot\text{ΚΛ}}{\text{ΚΝ}^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ και εφφ = $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$εφθ . β) $\dfrac{\text{ΟΚ}}{\text{ΟΠ}} = \dfrac{\text{ΟΛ}}{\text{ΟΤ}} = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

γ) Οι εφαπτομένες στα σημεία Μ, Ν τέμνονται πάνω στην ασύμπτωτη.

δ) Το τετράπλευρο ΟΝΣΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

α) Έστω Π (Σχήμα 19) η προβολή του Μ και Ρ η προβολή του Σ στον μεγάλο άξονα της Υ και Κ η προβολή του σημείο Ν στον μεγάλο άξονα της Υ′ και Λ το σημείο που η εφαπτομένη στο Ν τέμνει τον μεγάλο άξονα της Υ′.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΟΠ}^2-\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},\ \frac{\text{ΚΝ}^2}{\text{ΟΚ}^2-\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad (1)\ \ (\text{από Πόρισμα 3.1})$$

$$\text{ΟΠ}\cdot\text{ΟΤ} = \alpha^2,\ \text{ΟΛ}\cdot\text{ΟΚ} = \beta^2 \quad (2)\ \ (\text{από πόρισμα 9.1})$$

Είναι ΟΠ·ΤΠ = ΟΠ(ΟΠ - ΟΤ) = $\text{ΟΠ}^2 - \alpha^2$,

ΟΚ·ΚΛ = ΟΚ(ΟΚ - ΟΛ) = $\text{ΟΚ}^2 - \beta^2$,

Οπότε αντικαθιστώντας στις (1) προκύπτει το ζητούμενο.

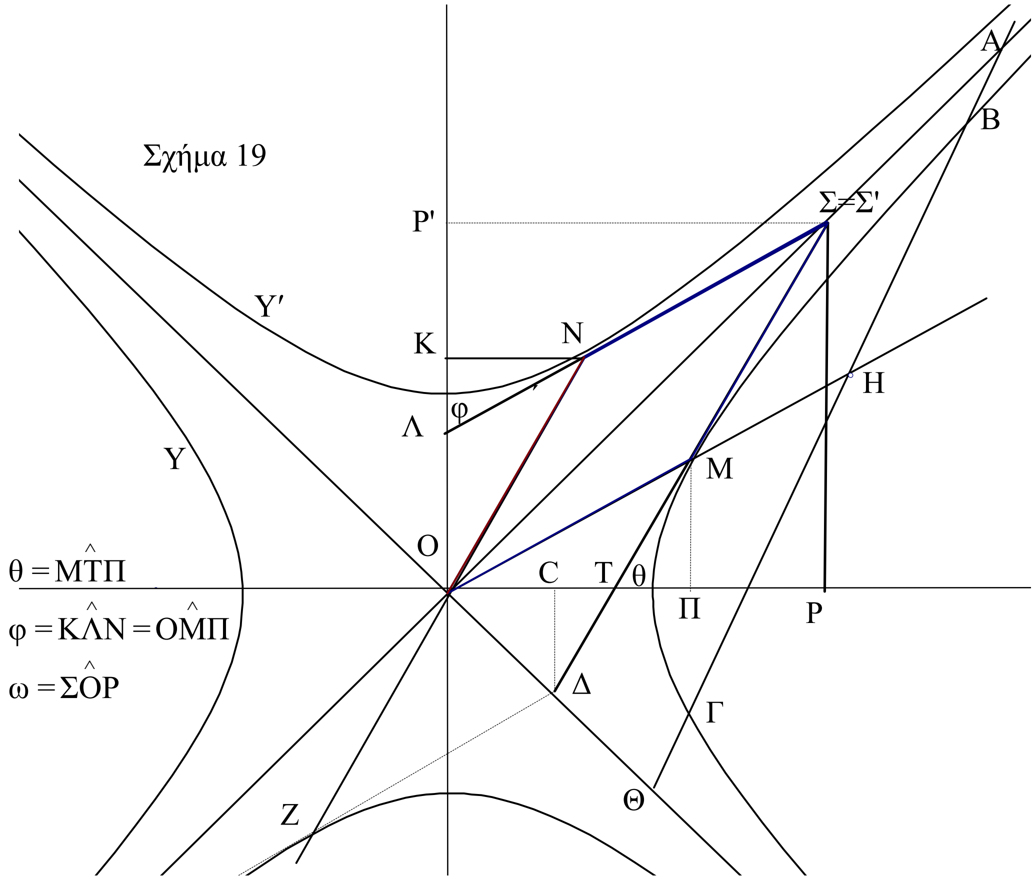
Επίσης έχουμε $\theta = \text{Μ}\hat{\text{Τ}}\text{Π} = \text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Ο}$, (λόγω της ΟΝ//ΜΤ), $\varphi = \text{Κ}\hat{\Lambda}\text{Ν}$, οπότε

ΚΝ = εφφ·ΚΛ και ΟΚ = εφθ·ΚΝ, και λόγω της $\dfrac{\text{ΚΝ}^2}{\text{ΟΚ}\cdot\text{ΚΛ}} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

προκύπτει εφφ = $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$εφθ.

β) Από την Πρόταση 13(δ) έχουμε $\dfrac{\text{ΟΚ}}{\text{ΟΠ}} = \dfrac{\beta}{\alpha}$, οπότε με διαίρεση των σχέσεων (2) προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Έστω Σ′ το σημείο που η εφαπτομένη της Υ′, στο Ν τέμνει την ίδια ασύμπτωτη (με αυτήν που τέμνει η εφαπτομένη στο Μ) και Ρ′ η προβολή του στον κύριο άξονα της Υ′. Θα δείξουμε ότι τα σημεία Σ′, Σ ταυτίζονται.



Έστω ω η γωνία ασύμπτωτης και κυρίου άξονα της Υ, οπότε εφω = β/α και Τ το σημείο που η ΜΣ τέμνει την ΟΠ. Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΤΜΠ, ΤΣΡ έχουμε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{M\Pi}{T\Pi} = \frac{\Sigma P}{TP} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{OP}{TP}$ και παρόμοια από τα ΚΝΛ, ΛΡ′Σ′,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{OP'}{P'\Lambda}.$$ Αντικαθιστώντας στην σχέση $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\varepsilon\varphi\theta$ (από (α)),

προκύπτει $\frac{P'\Lambda}{TP} = \frac{OP'}{OP}$ ή $\frac{OP' - O\Lambda}{OP - OT} = \frac{OP'}{OP} = \frac{O\Lambda}{OT} = \frac{\beta}{\alpha}$ (λόγω του (β))

Άρα $\frac{OP'}{OP} = \frac{\beta}{\alpha}$, όμως $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Sigma P}{OP} = \frac{\beta}{\alpha}$, οπότε ΟΡ′ = ΣΡ, επομένως το Σ συμπίπτει με το Σ′.

δ) Αρκεί να δειχθεί ότι ΛΣ//ΟΜ ή $\varphi = \widehat{\text{ΟΜΠ}}$ ή ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΠ, ΚΝΛ είναι όμοια, και αρκεί γι' αυτό $\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΚΝ}} = \frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΚΛ}}$ (3).

Από το (β) έχουμε $\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΚ}} = \frac{\text{ΟΤ}}{\text{ΟΛ}} = \frac{\text{ΟΠ} - \text{ΟΤ}}{\text{ΟΚ} - \text{ΟΛ}} = \frac{\text{ΤΠ}}{\text{ΚΛ}}$, οπότε ΟΠ·ΚΛ = ΤΠ·ΟΚ

Από τα όμοια τρίγωνα ΜΤΠ, ΚΝΛ ($\theta = \widehat{\text{ΜΤΠ}} = \widehat{\text{ΚΝΟ}}$) έχουμε, $\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΟΚ}} = \frac{\text{ΤΠ}}{\text{ΚΝ}}$, ή ΜΠ·ΚΝ = ΤΠ·ΟΚ. Από τις δυο τελευταίες ισότητες γινομένων παίρνουμε την την (3) .

Σχετικά θέματα

Με τα δεδομένα της προηγούμενης πρότασης, ισχύουν οι τριγωνομετρικές σχέσεις :

$$\text{i) ΟΠ}^2 = \frac{\alpha^4 \varepsilon\phi^2\theta}{\alpha^2\varepsilon\phi^2\theta - \beta^2}, \quad \text{ii) ΟΡ}^2 = \frac{\alpha^2(\varepsilon\phi\theta + \alpha)}{\beta\varepsilon\phi\theta - \alpha}.$$

$$\text{iii) ΟΜ}^2 = \frac{\alpha^4\varepsilon\phi^2\theta + \beta^4}{\alpha^2\varepsilon\phi^2\theta - \beta^2}, \quad \text{iv)} \frac{\text{ΟΝ}^2}{\text{ΟΜ}^2} = \frac{\beta^2\eta\mu^2\phi}{\alpha^2\eta\mu^2\theta} = \frac{\eta\mu 2\phi}{\eta\mu 2\theta} = \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu 2y}.$$

(x, y γωνίες των ΟΜ, ΟΝ με τους κύριους άξονες των συζυγών υπερβολών)

$$\text{v) ΟΣ}^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\varepsilon\varphi\theta+\beta)}{\alpha\varepsilon\varphi\theta - \beta}, \quad \text{vi) ΟΔ}^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\varepsilon\varphi\theta-\beta)}{\alpha\varepsilon\varphi\theta+\beta}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 14.1

Στην ισοσκελή υπερβολή οι (οξείες) γωνίες που σχηματίζουν δυο συζυγείς διάμετροι με τις ασύμπτωτες είναι συμπληρωματικές.

Πράγματι, αν (Σχήμα 19) $\kappa = \widehat{\text{ΝΟΣ}}$, $\lambda = \widehat{\text{ΜΟΔ}}$, τότε κ = θ - ω, λ = ω + 90 - φ, αλλά φ = θ (από (α)), οπότε $\kappa + \lambda = 90^o$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15 (Εφαπτομένη, χορδή και ασύμπτωτες)

α) Το τμήμα της εφαπτομένης της υπερβολής που περιέχεται μεταξύ των ασύμπτωτών της διχοτομείται από το σημείο επαφής.

β) Αν μια ευθεία τέμνει μια υπερβολή, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω σ' αυτήν μεταξύ των ασυμπώτων της και της υπερβολής είναι ίσα.

Απόδειξη

α) Έστω ότι η εφαπτομένη στο Μ (Σχήμα 19) τέμνει την μια ασύμπτωτη στο Σ και την άλλη στο Δ. Θεωρούμε την διάμετρο ΖΝ παράλληλη στην ΜΣ. Από την Πρόταση 14(δ), έχουμε ΟΝ = ΜΣ, αλλά και ΟΖ = ΜΔ, αφού ομοίως το τετράπλευρο ΟΜΔΖ είναι παραλληλόγραμμο. Ισχύει ΟΝ = ΟΖ αφού Ο κέντρο της συζυγούς, οπότε ΜΣ = ΜΔ.

β) Έστω μια ευθεία που τέμνει την υπερβολή στα σημεία Β, Γ και την ασύμπτωτη στα σημεία Α, Θ. Αν Η το μέσο της χορδής ΒΓ, τότε η ΟΗ είναι διάμετρος της υπερβολής και αν Μ το σημείο που τέμνει την υπερβολή, η εφαπτομένη στο Μ είναι παράλληλη στην ΒΓ (βλέπε Πρόταση 10, §5.4). Έστω ότι η εφαπτομένη αυτή τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία Σ, Δ. Τότε από το (α) το Μ είναι μέσο της ΔΣ, οπότε λόγω του ότι ΣΔ//ΑΘ, το Η είναι μέσο της ΑΘ. Αλλά το Η είναι και μέσο της ΒΓ, οπότε ΑΒ = ΓΘ.

Κατασκευή σημείων υπερβολής

Με την βοήθεια της Πρότασης 15(β) μπορούμε να βρούμε διάφορα σημεία υπερβολής αν γνωρίζουμε τις ασύμπτωτές της και ένα σημείο της, έστω Β: φέρνουμε τυχούσα ευθεία από το Β που τέμνει τις ασύμπτωτες έστω στα σημεία Α, Θ. Παίρνουμε τμήμα ΘΓ = ΑΒ, οπότε το σημείο Γ ανήκει στην υπερβολή αυτή.

ΠΟΡΙΣΜΑ 15.1

Αν μια εφαπτομένη υπερβολής τέμνει τις ασύμπτωτές της στα σημεία Σ, Δ τότε το γινόμενο ΟΣ·ΟΔ είναι σταθερό και ίσο με γ^2. Ακόμη, αν P, C οι προβολές των Σ, Δ αντίστοιχα στον κύριο άξονα τότε $OP\cdot OC = \alpha^2$.

Πράγματι, (Σχήμα 19) αν η εφαπτομένη στο Μ τέμνει την υπερβολή στα σημεία Δ, Σ τότε το Μ είναι μέσο της ΔΣ και αν ΜΙ//ΟΔ, το Ι είναι του ΟΣ, οπότε ΟΔ = 2ΜΙ, ΟΣ = 2ΟΙ. Από το Πόρισμα 9.1 έχουμε $OI\cdot IM = \gamma^2/4$, , οπότε $O\Sigma\cdot O\Delta = \gamma^2$. Επίσης ισχύει $\frac{O\Sigma}{OP} = \varepsilon = \frac{O\Delta}{OC}$, οπότε

$$OP\cdot OC = O\Sigma\cdot O\Delta/\varepsilon = \gamma^2/\varepsilon^2 = \alpha^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 15.2

Έστω μια ευθεία που τέμνει την υπερβολή στα σημεία Β, Γ και την ασύμπτωτη στα σημεία Α, Θ. Τότε ισχύει ΒΑ·ΒΘ = ΓΑ·ΓΘ.

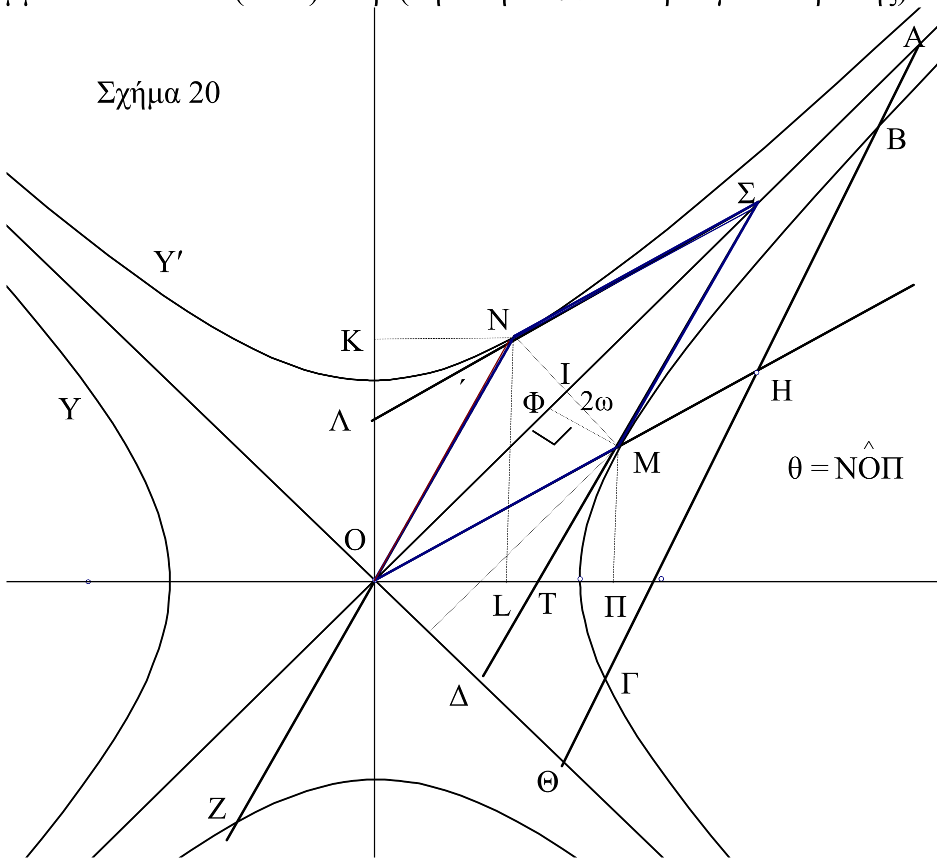
ΠΟΡΙΣΜΑ 15.1

Το παραλληλόγραμμο δυο συζυγών διαμέτρων υπερβολής έχει την μια διαγώνιό του ως ασύμπτωτη ενώ η άλλη διαγώνιος είναι παράλληλη στην άλλη ασύμπτωτη της υπερβολής

Πράγματι, η ΝΜ διέρχεται από τα μέσα των ΟΣ, ΣΔ (Σχήμα 19, 20).

ΠΡΟΤΑΣΗ 16 (Τρίγωνο ασύμπτωτων και εφαπτομένης)
Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής και από μια εφαπτομένη της σ' ένα οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής είναι σταθερό και ίσο με αβ.

Απόδειξη
Α΄ τρόπος: έστω ΔΜΣ (Σχήμα 20) εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της υπερβολής. Θεωρούμε από το Μ τις παράλληλες προς τις πλευρές ΟΔ, ΟΣ του τριγώνου ΟΔΣ. Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο σύμφωνα με την Πρόταση 9(α) έχει εμβαδόν αβ/2. Αλλά επειδή Μ μέσο του ΔΣ εύκολα προκύπτει ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΔΣ είναι διπλάσιο του εμβαδού του παραλληλόγραμμο αυτού. Έτσι (ΟΔΣ) = αβ (δηλαδή το ¼ του ορθογωνίου βάσης).



Β΄ τρόπος: επειδή η γωνία 2ω των ασύμπτωτων είναι σταθερή, αρκεί να δειχθεί ότι το γινόμενο ΟΣ·ΟΔ είναι σταθερό. Πράγματι από πόρισμα 15.1 έχουμε $O\Sigma \cdot O\Delta = \alpha^2 + \beta^2$. Άρα

$$(O\Delta\Sigma) = \frac{O\Sigma \cdot O\Delta}{2}\eta\mu 2\omega = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha\beta\,.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 17 (Σχέσεις συζυγών διαμέτρων)
α) Η διαφορά των τετραγώνων δυο συζυγών ημιδιαμέτρων υπερβολής είναι σταθερή και ίση με α^2 - β^2. Μειωτέος της διαφοράς είναι το τετράγωνο της ημιδιαμέτρου που τέμνει την υπερβολή και έχει κύριο άξονα α.
β) Η διαφορά των τετραγώνων των προβολών δυο συζυγών ημιδιαμέτρων υπερβολής, πάνω σ' ένα άξονά της, είναι σταθερή και ίση με το τετράγωνο του άξονα αυτού. Μειωτέος της διαφοράς είναι το τετράγωνο της προβολής της ημιδιαμέτρου που τέμνει την υπερβολή (ή την συζυγή της) και έχει ως κύριο άξονα, τον άξονα προβολής.

Απόδειξη
Τα αποτελέσματα αυτά έχουν αποδειχθεί στην Πρόταση 13(γ), (β). Θα δώσουμε εδώ μια άλλη απόδειξη.
α) Έστω δυο συζυγείς ημιδιάμετροι ΟΜ, ΟΝ, (Σχήμα 20) οπότε η ΟΝ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ. Οι εφαπτομένες της υπερβολής στα σημεία Ν, Μ όπως είδαμε στην Πρόταση 14(δ) τέμνονται στο Σ και το τετράπλευρο ΟΝΣΜ είναι παραλληλόγραμμο. Έστω Ι το σημείο τομής των διαγωνίων του και Φ η προβολή του Μ στην ΟΣ. Η ΙΜ είναι παράλληλη στην ΟΔ (ενώνει μέσα πλευρών) οπότε η γωνία των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι ίση με γωνία των ασυμπτώτων 2ω και αν β > α έχουμε $\text{συν}2\omega = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} < 0$, οπότε $2\omega = \hat{\Sigma I M} > 90^o$.

Έτσι το σημείο Φ βρίσκεται μεταξύ Ο και Ι και ΟΝ > ΟΜ (από τα τρίγωνα ΝΙΟ, ΟΙΜ που έχουν δυο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες). Από το 2^o θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΟΜΣ έχουμε

$$ON^2 - OM^2 = 2O\Sigma \cdot I\Phi = -2O\Sigma \cdot IM\text{συν}2\omega$$

Αλλά από την πόρισμα 15.1 έχουμε $O\Sigma \cdot O\Delta = \alpha^2 + \beta^2$ ή $O\Sigma \cdot 2IM = \alpha^2 + \beta^2$,
οπότε $ON^2 - OM^2 = -(\alpha^2 + \beta^2)\text{συν}2\omega = \beta^2 - \alpha^2$.
Αν α > β, τότε ομοίως βρίσκουμε $OM^2 - ON^2 = \alpha^2 - \beta^2$.
Αν α = β τότε η γωνία των ασυμπτώτων είναι ορθή και το παραλληλόγραμμο ΟΝΣΜ είναι ρόμβος οπότε ΟΝ = ΟΜ και ισχύει πάλι.

β) Θα δειχθεί ότι $O\Pi^2 - KN^2 = \alpha^2$ και $OK^2 - M\Pi^2 = \beta^2$.
Για την υπερβολή Υ έχουμε

$$\frac{M\Pi^2}{O\Pi^2-\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ ή } \frac{M\Pi^2}{\beta^2} = \frac{O\Pi^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{M\Pi^2+O\Pi^2-\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2} \quad (1),$$

ενώ για την υπερβολή Υ΄

$$\frac{KN^2}{OK^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad ή \quad \frac{KN^2}{\alpha^2}=\frac{OK^2-\beta^2}{\beta^2}=\frac{KN^2+OK^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \quad (2)$$

Αλλά από το (α) έχουμε $\beta^2 - \alpha^2 = ON^2 - OM^2 = KN^2 + OK^2 - O\Pi^2 - M\Pi^2$ ή

$$M\Pi^2 + O\Pi^2 - \alpha^2 = KN^2 + OK^2 - \beta^2 .$$

Έτσι από τις (1), (2) προκύπτει $O\Pi^2 - \alpha^2 = KN^2$ και $OK^2 - \beta^2 = M\Pi^2$

ή $O\Pi^2 - KN^2 = \alpha^2$ και $OK^2 - M\Pi^2 = \beta^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 18 (Θεμελιώδης χαρακτηριστική ιδιότητα υπερβολής)
Έστω ΒΓ μια χορδή υπερβολής, Η το μέσο της και Μ, Μ′ τα σημεία που η διάμετρος ΟΗ τέμνει την υπερβολή. Αν ΟΝ η συζυγής ημιδιάμετρος της ΟΜ τότε ισχύει $\dfrac{BH^2}{HM\cdot HM'}=\dfrac{ON^2}{OM^2}$ ή $\dfrac{BH^2}{OH^2-OM^2}=\dfrac{ON^2}{OM^2}$
και ο λόγος εξαρτάται μόνο από την γωνία κλίσης της ΒΓ.

Απόδειξη
Κατ' αρχήν είναι $HM\cdot HM' = (OH - OM)(OH + OM) = OH^2 - OM^2$.
Από τα σημεία Β, Μ, Η, Γ (Σχήμα 21) φέρνουμε παράλληλες προς την μια ασύμπτωτη που τέμνουν την άλλη έστω στα σημεία Ζ, Ρ, Κ, Λ αντίστοιχα.
Ισχύουν $OZ\cdot BZ = O\Lambda\cdot\Gamma\Lambda = OP\cdot PM = \gamma^2/4 = c$ (1), σύμφωνα με το Πόρισμα 9.1. Επίσης, επειδή Η μέσο της ΒΓ έχουμε

$$2HK = BZ + \Gamma\Lambda,\ 2OK = OZ + O\Lambda \ (2)$$

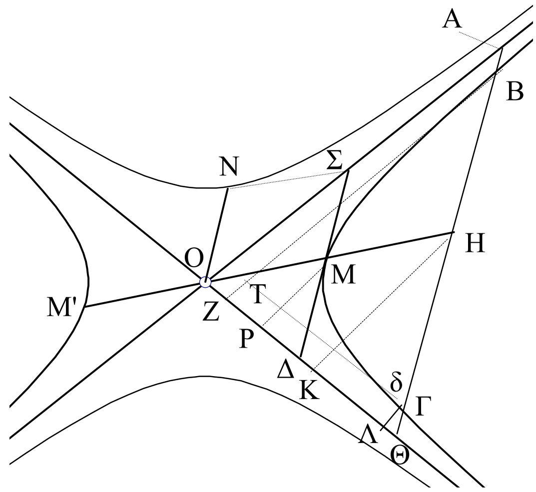
Έστω ΜΤ παράλληλη στην ΖΛ, 2ω η γωνία των ασυμπώτων και $\delta = B\hat{\Theta}O$ η γωνία που σχηματίζει η χορδή ΒΓ με την ασύμπτωτη ΟΛ. Από το τρίγωνο ΒΤΓ, σύμφωνα με το θεώρημα των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{2BH}{\eta\mu 2\omega}=\frac{BZ-TZ}{\eta\mu\delta} \quad ή \quad BH^2=(\eta\mu 2\omega)^2\left(\frac{BZ-\Gamma\Lambda}{2\eta\mu\delta}\right)^2 \quad (3)$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΟΜΡ, ΟΗΚ έχουμε $\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{HK}{MP}=\dfrac{OK}{OP}$ (4)

οπότε, λόγω και των (2), $\dfrac{OH^2}{HK^2}=\dfrac{OM^2}{MP^2}=\dfrac{4(OH^2-OM^2)}{(BZ+\Gamma\Lambda)^2-4MP^2}$ (5)

Σχήμα 21



Επίσης από την (4) , λόγω και των (2), (1) έχουμε

$$\frac{HK}{MP}=\frac{OK}{OP} \text{ ή } \frac{BZ+\Gamma\Lambda}{2MP}=\frac{MP(OZ+O\Lambda)}{2c} \text{ ή } \frac{BZ+\Gamma\Lambda}{2MP}=\frac{MP(\frac{c}{BZ}+\frac{c}{\Gamma\Lambda})}{2c}$$

ή $MP^2 = BZ{\cdot}\Gamma\Lambda$. Έτσι από την (5) παίρνουμε

$$\frac{(BZ-\Gamma\Lambda)^2}{4(OH^2-OM^2)}=\frac{MP^2}{OM^2} \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3) και (6) και παίρνουμε

$$\frac{BH^2}{OH^2-OM^2}=\frac{MP^2\eta\mu^2 2\omega}{OM^2\eta\mu^2\delta}.$$ Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $ON=\frac{MP\eta\mu 2\omega}{\eta\mu\delta}$.

Πράγματι, αυτή ισχύει, από το θεώρημα των ημιτόνων στο τρίγωνο ΡΜΔ, αφού $\hat{P}=2\omega, \hat{\Delta}=\delta$ και ΜΔ = ΟΝ (από Πρόταση 14 και 15(α)).

- Για οποιαδήποτε χορδή Β′Γ′ παράλληλη στην ΒΓ, η ΟΜ ως διάμετρος διέρχεται από το μέσο της Η′, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο

$$\frac{B'H'^2}{H'M\cdot H'M'}=\frac{ON^2}{OM^2}=\frac{BH^2}{HM\cdot HM'}$$ άρα είναι σταθερός.

Μάλιστα μπορεί να δειχθεί ότι, αν η χορδή ΒΓ σχηματίζει (οξεία) γωνία θ με τον μεγάλο άξονα της υπερβολής τότε

$$\frac{ON^2}{OM^2}=\frac{\alpha^2(1+\varepsilon\varphi^2\theta)}{\beta^2(\beta^4+\alpha^4\varepsilon\varphi\theta)}.$$

(ακόμη μπορεί να εκφραστεί και μέσω της γωνίας δ, αφού δ = 180 - ω - θ)

Σημείωση
Η παραπάνω ιδιότητα είναι χαρακτηριστική της υπερβολής, αφού έχουμε δείξει και το αντίστροφο: στην §2.1(Β) δείξαμε ότι από αυτήν προκύπτει η ιδιότητα της σταθερής διαφοράς και στην §6.2(Χ) ότι από την ιδιότητα της σταθερής διαφοράς προκύπτει η ιδιότητα του σταθερού λόγου, που αποτέλεσε τον ορισμό μας. Περισσότερα για την ιδιότητα αυτή βλέπε παρακάτω, μετά το Πόρισμα 19.4.

ΠΟΡΙΣΜΑ 18.1
Αν ευθεία τέμνει μια υπερβολή στα σημεία Β, Γ και μια ασύμπτωτη στα σημεία Α, Θ, τότε ισχύει $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ} = \text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΘ} = \text{ΟΝ}^2$.

Απόδειξη
Ισχύει $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ} = \text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΘ}$, από Πόρισμα 15.2.
Έχουμε $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ} = (\text{ΑΗ} - \text{ΒΗ})(\text{ΑΗ} + \text{ΒΗ}) = \text{ΑΗ}^2 - \text{ΒΗ}^2$.

Και λόγω της $\dfrac{\text{ΒΗ}^2}{\text{ΟΗ}^2 - \text{ΟΜ}^2} = \dfrac{\text{ΟΝ}^2}{\text{ΟΜ}^2}$ και $\dfrac{\text{ΑΗ}}{\text{ΟΝ}} = \dfrac{\text{ΟΗ}}{\text{ΟΜ}}$ (από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΜΣ, ΟΗΑ) έχουμε

$$\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ} = \text{ΑΗ}^2 - \text{ΒΗ}^2 = \frac{\text{ΟΗ}^2\text{ΟΝ}^2}{\text{ΟΜ}^2} - \frac{\text{ΟΝ}^2(\text{ΟΗ}^2 - \text{ΟΜ}^2)}{\text{ΟΜ}^2} = \text{ΟΝ}^2$$

Άμεση συνέπεια: επειδή η διάμετρος ΟΝ, με δεδομένη την υπερβολή, εξαρτάται μόνο από την γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον κύριο άξονα της υπερβολής, το γινόμενο $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ}$ παραμένει σταθερό για οποιαδήποτε άλλη χορδή παράλληλη στην ΒΓ. Έτσι π.χ., αν η ΒΓ είναι κάθετη στον κύριο άξονα, τότε $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΘ} = \beta^2$, σχέση που είχαμε βρει και στην Πρόταση 8.

ΠΟΡΙΣΜΑ 18.2
Αν Β σημείο υπερβολής με συζυγείς ημιδιαμέτρους $\text{ΟΜ} = \alpha'$, $\text{ΟΝ} = \beta'$ και ΒΗ//ΟΝ, τότε ισχύει

$$\frac{\text{ΟΗ}^2}{\alpha'^2} - \frac{\text{ΒΗ}^2}{\beta'^2} = 1$$

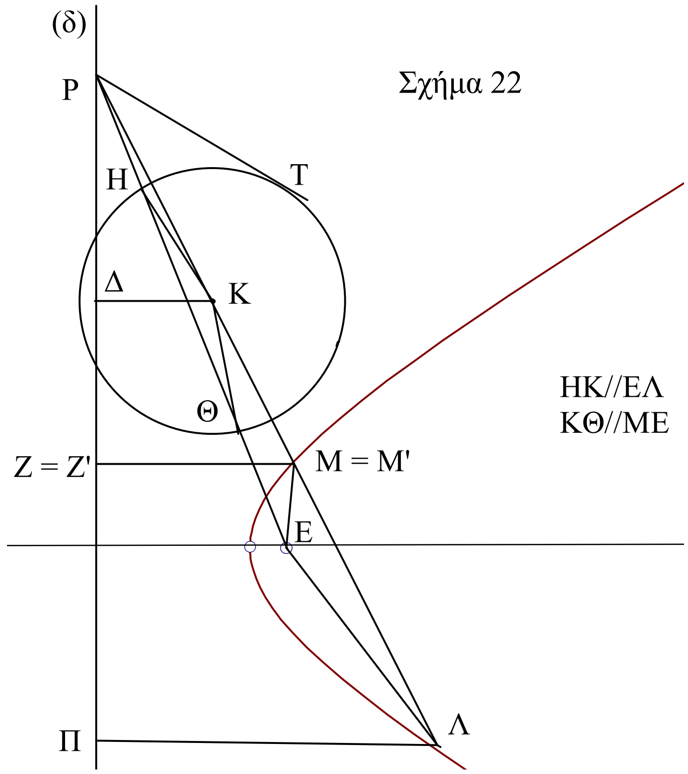
(Ουσιαστικά η εξίσωση της υπερβολής ως προς το πλαγιογώνιο σύστημα ΝΟΜ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ 19 (Βασικό θεώρημα κεντρικών κωνικών)
Έστω μια χορδή ΜΛ μιας κεντρικής κωνικής (υπερβολής ή έλλειψης) που τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Ρ με γωνία ω. Έστω ένα σημείο Κ στην χορδή ΜΛ (εσωτερικό ή εξωτερικό του τμήματος ΜΛ), Δ η προβολή του στην διευθετούσα και ο κύκλος κέντρου Κ και ακτίνας $\rho = \varepsilon\text{ΚΔ}$, όπου ε η εκκεντρό-

τητα της κωνικής. Έστω Η, Θ τα σημεία που η ευθεία ΡΕ τέμνει τον κύκλο αυτό. Τότε ισχύουν:

α) Η ευθεία ΗΚ είναι παράλληλη στην ΕΛ και η ΚΘ παράλληλη στην ΜΕ.

β) Ο λόγος $\frac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΕΘ \cdot ΕΗ}$ είναι ανεξάρτητος της θέσης του Κ πάνω στην ΜΛ (εξαρτάται μόνο από την γωνία ω).



Απόδειξη

α)Έχουμε (Σχήμα 22) $\frac{ΗΚ}{ΔΚ} = ε = \frac{ΕΜ}{ΜΖ}$, οπότε (ΚΘ = ΗΚ) $\frac{ΚΘ}{ΜΕ} = \frac{ΔΚ}{ΜΖ} = \frac{ΡΚ}{ΡΜ}$ (λόγω του ότι ΔΚ//ΜΖ) , άρα $\frac{ΚΘ}{ΜΕ} = \frac{ΡΚ}{ΡΜ}$, επομένως ΚΘ//ΜΕ. Πράγματι, είναι κατ' αρχήν αναγκαία η συνθήκη αυτή, αλλά και αρκετή: έστω Μ′ στην ευθεία ΜΛ ώστε ΕΜ′//ΚΘ και Ζ′ η προβολή του Μ′ στην διευθετούσα.

Τότε από παραλληλία και το ότι ΚΘ = εΚΔ έχουμε

$$\frac{Μ'Ε}{ΚΘ} = \frac{ΡΜ'}{ΡΚ} = \frac{Μ'Ζ'}{ΔΚ}, \text{ οπότε } \frac{Μ'Ε}{Μ'Ζ'} = \frac{ΚΘ}{ΔΚ} = ε$$

οπότε Μ′Ε = εΜ′Ζ′, δηλαδή το σημείο Μ′ ανήκει στην κωνική, οπότε ταυτίζεται με το Μ. Όμοια βρίσκουμε $\frac{ΗΚ}{ΕΛ} = \frac{ΡΚ}{ΡΛ}$ οπότε ΗΚ//ΕΛ.

β) Επειδή ΚΘ//ΜΕ και ΗΚ//ΕΛ έχουμε

$\dfrac{ΚΜ}{ΕΘ} = \dfrac{ΡΚ}{ΡΘ}$ και $\dfrac{ΚΛ}{ΕΗ} = \dfrac{ΡΚ}{ΡΗ}$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε

$\dfrac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΕΘ \cdot ΕΗ} = \dfrac{ΡΚ^2}{ΡΘ \cdot ΡΗ}$, και αν ΡΤ η εφαπτομένη από το Ρ στον κύκλο, έχουμε

$$\frac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΕΘ \cdot ΕΗ} = \frac{ΡΚ^2}{ΡΤ^2} \quad (1)\,.$$

Επειδή η ευθεία ΜΛ σχηματίζει γωνία $ω = \hat{ΔΡΚ}$ με την διευθετούσα, ο λόγος ΚΔ/ΡΚ είναι εξαρτάται μόνο από την γωνία ω και λόγω του ότι ΤΚ = εΚΔ, και ο λόγος ΤΚ/ΡΚ εξαρτάται από την γωνία ω, επομένως και ο λόγος ΡΚ/ΡΤ. Δηλαδή ο λόγος είναι ΡΚ/ΡΤ ανεξάρτητος από την θέση του Κ πάνω στην ΜΛ και εξαρτάται μόνο από την γωνία ω. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί ότι

$$\frac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΕΘ \cdot ΕΗ} = \frac{ΡΚ^2}{ΡΤ^2} = 1 - ε^2 ημ^2 ω\,.$$

Επίσης στην (1) παρατηρούμε ότι το γινόμενο

$$ΕΘ \cdot ΕΗ = ΕΚ^2 - ΗΚ^2 = ΕΚ^2 - ε^2 ΔΚ^2$$

είναι η δύναμη του σημείου Ε (εστίας) ως προς τον κύκλο, άρα εξαρτάται μόνο από την θέση του σημείου Κ πάνω στην ΜΛ.

Σημείωση: Η χορδή ΜΛ μπορεί να ενώνει σημεία και δυο διαφορετικών κλάδων υπερβολής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 19.1

Έστω δυο παράλληλες χορδές ΜΛ, ΒΓ κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής) που διέρχονται από δυο σημεία Κ, Σ. Τότε ο λόγος $\dfrac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΣΒ \cdot ΣΓ}$ εξαρτάται μόνο από την θέση των σημείων Κ, Σ.

Πράγματι, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, εφόσον οι χορδές είναι παράλληλες, σχηματίζουν ίσες γωνίες με την διευθετούσα, οπότε (Σχήμα 23, 24)

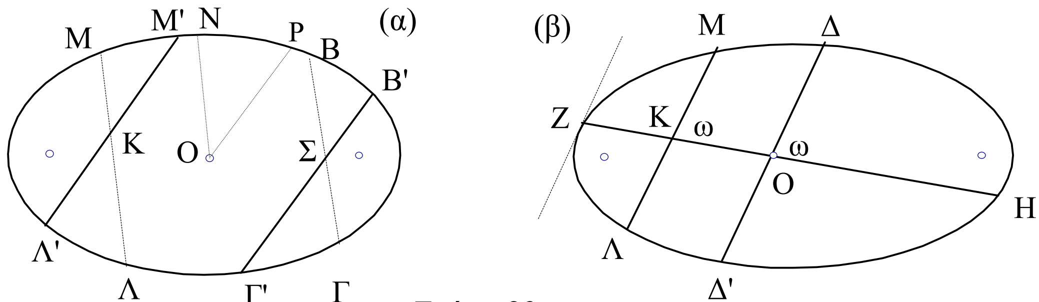
$\dfrac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΕΘ \cdot ΕΗ} = \dfrac{ΣΒ \cdot ΣΓ}{ΕΘ' \cdot ΕΗ'}$, όπου Θ′, Η′ τα αντίστοιχα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου κέντρου Σ με την Ρ′Ε (Ρ′ το σημείο που ΒΓ τέμνει την διευθετούσα). Όμως το γινόμενο ΕΘ·ΕΗ είναι η δύναμη του σημείου Ε ως προς τον κύκλο κέντρου Κ, άρα είναι εξαρτάται μόνο από το Κ. Όμοια και το γινόμενο ΕΘ′·ΕΗ′. Έτσι τελικά και ο λόγος $\dfrac{ΚΜ \cdot ΚΛ}{ΣΒ \cdot ΣΓ} = \dfrac{ΕΘ \cdot ΕΗ}{ΕΘ' \cdot ΕΗ'}$ εξαρτάται μόνο από την θέση των σημείων Κ, Σ (επομένως είναι σταθερός αν τα Κ, Σ είναι δεδομένα).

ΠΟΡΙΣΜΑ 19.2

Έστω (ΜΚΛ, ΒΣΓ) και (Μ′ΚΛ′, Β′ΣΓ′), (Σχήμα 23(α)), δυο ζεύγη παραλλήλων χορδών κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής) που διέρχονται από δυο σημεία Κ, Σ. Τότε ισχύει

$$\frac{\mathrm{KM}\cdot\mathrm{K\Lambda}}{\mathrm{KM'}\cdot\mathrm{K\Lambda'}}=\frac{\Sigma\mathrm{B}\cdot\Sigma\Gamma}{\Sigma\mathrm{B'}\cdot\Sigma\Gamma'}.$$

Πράγματι, από το προηγούμενο πόρισμα ο λόγος $\frac{\mathrm{KM}\cdot\mathrm{K\Lambda}}{\Sigma\mathrm{B}\cdot\Sigma\Gamma}$ εξαρτάται μόνο από την θέση των Κ, Σ, που εδώ παραμένουν ίδια και για το άλλο ζευγάρι παραλλήλων Μ′ΚΛ′, Β′ΣΓ′ κλπ.



Σχήμα 23

Ιδιαίτερα αν το Κ είναι το κέντρο της έλλειψης έχουμε το παρακάτω πόρισμα που εκφράζει την δύναμη σημείου ως προς έλλειψη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 19.3 (Δύναμη σημείου ως προς έλλειψη)

Έστω δυο χορδές ΒΣΓ, Β′ΣΓ′ μιας έλλειψης (ή υπερβολής) που διέρχονται από το σημείο Σ (εντός η εκτός των κωνικών). Αν ΝΟΝ′, ΡΟΡ′ (Σχήμα 23(α)) διάμετροι παράλληλες αντίστοιχα στις χορδές αυτές, τότε ισχύει

$$\frac{\Sigma\mathrm{B}\cdot\Sigma\Gamma}{\Sigma\mathrm{B'}\cdot\Sigma\Gamma'}=\frac{\mathrm{ON}^2}{\mathrm{OP}^2}.$$

Σημείωση

Στην περίπτωση που η έλλειψη είναι κύκλος, τότε ΟΝ = ΟΡ, οπότε προκύπτει το γνωστό θεώρημα της δύναμης σημείου ως προς κύκλο.

Επίσης στην περίπτωση που οι ΟΝ, ΟΡ είναι συζυγείς διάμετροι ισοσκελούς υπερβολής, τότε, λόγω του ότι ΟΝ = ΟΡ, έχουμε ΣΒ·ΣΓ = ΣΒ′·ΣΓ′. Στηριζόμενοι σ’ αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να δώσουμε μια άλλη απόδειξη της ιδιότητας: αν μια ισοσκελής υπερβολή διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου τότε διέρχεται και από το ορθόκεντρό του.

ΠΟΡΙΣΜΑ 19.4

Έστω ΖΗ μια (σταθερή) διάμετρος κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής) που τέμνει μια χορδή ΜΛ στο σημείο Κ . Τότε $\frac{\mathrm{KM}\cdot\mathrm{K\Lambda}}{\mathrm{KZ}\cdot\mathrm{KH}}=\frac{\mathrm{O\Delta}^2}{\mathrm{OZ}^2}$, όπου ΟΔ//ΜΛ. Αν η γωνία τομής ω των ΖΗ, ΜΛ είναι σταθερή, τότε ο λόγος αυτός είναι σταθερός.

(Υπόδειξη: Φέρνουμε Δ′ΟΔ//ΜΛ, (Σχήμα 23(β)) και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 19.2 για τα ζευγάρια των παραλλήλων χορδών (ΚΜΛ, ΟΔΔ′), και (ΚΖΗ, ΟΖΗ.)

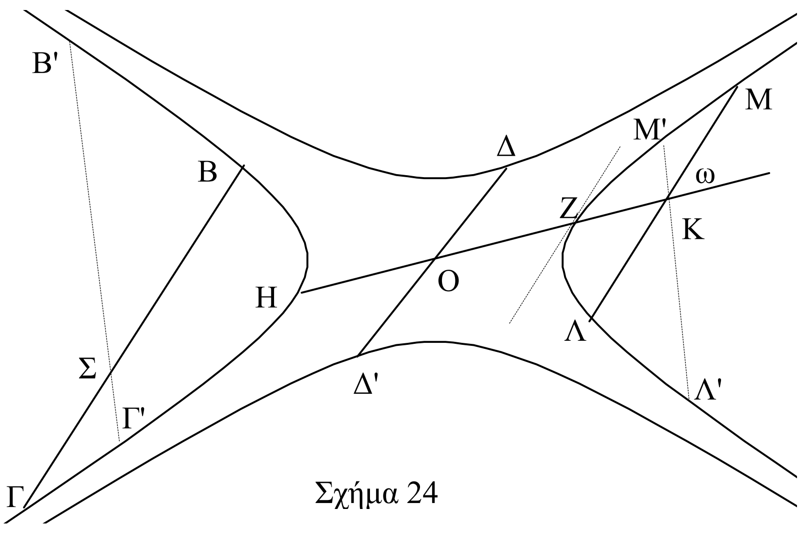
ΠΟΡΙΣΜΑ 19.5 (Σημαντικό)

Έστω ΖΗ (σταθερή) διάμετρος κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής). Από τυχόν σημείο Μ της κωνικής φέρνουμε παράλληλη στην εφαπτομένη της κωνικής στο Ζ που τέμνει την διάμετρο στο Κ. Τότε ισχύει

$$\frac{\mathrm{KM}^2}{\mathrm{KZ}\cdot\mathrm{KH}}=\frac{\mathrm{O\Delta}^2}{\mathrm{OZ}^2}=\text{σταθερός},$$

όπου ΟΔ η συζυγής ημιδιάμετρος της ΖΗ.

(Άμεση συνέπεια του προηγούμενου αφού Κ μέσο της ΜΛ)



Σχήμα 24

Σημειώσεις

Ι. Αν ΖΗ = 2α′, ΔΔ′ = 2β′, δυο δοσμένες συζυγείς διάμετροι κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής) τότε ΚΖ·ΚΗ = α'^2 - ΟΚ^2 για την έλλειψη και ΚΖ·ΚΗ = ΟΚ^2 - α'^2 για την υπερβολή. Έτσι το Πόρισμα 19.5 μας λέει ουσιαστικά ότι: ως προς το σύστημα (γενικά πλαγιογώνιο) ΔΟΗ με άξονες τις διαμέτρους αυτές, κάθε σημείο της κωνικής χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{\mathrm{KM}^2}{\alpha'^2 - \mathrm{OK}^2} = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} \text{ ή } \frac{\mathrm{OK}^2}{\alpha'^2} + \frac{\mathrm{KM}^2}{\beta'^2} = 1 \quad \text{για την έλλειψη,}$$

και $\frac{\mathrm{KM}^2}{\mathrm{OK}^2 - \alpha'^2} = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}$ ή $\frac{\mathrm{OK}^2}{\alpha'^2} - \frac{\mathrm{KM}^2}{\beta'^2} = 1$ για την υπερβολή (βλέπε Σχήμα 24),

δηλαδή είναι ουσιαστικά η εξίσωση της κωνικής ως προς το σύστημα αυτό.

ΙΙ. Η τελευταία μας σχέση $\frac{\mathrm{KM}^2}{\mathrm{KZ}\cdot\mathrm{KH}} = \frac{\mathrm{O\Delta}^2}{\mathrm{OZ}^2}$ = σταθερός, είναι ουσιαστικά αυτή με την οποία ο Απολλώνιος αρχίζει την μελέτη του για την έλλειψη και την υπερβολή στα *Κωνικά*. Είναι το «σύμπτωμα» (που είδαμε στο ιστορικό μέρος) που έβγαλε από την τομή κώνου με επίπεδο και το χρησιμοποίησε για όλες τις επόμενες προτάσεις του. Η σχέση είναι δυναμική, αφού αναφέρεται ως οποιαδήποτε διάμετρο ΖΗ (και την αντίστοιχη συζυγή της), άρα και ως προς τους άξονες της κωνικής (έλλειψης ή υπερβολής).
Είδαμε όμως με πόση δυσκολία την αποδείξαμε στα προηγούμενα (Βλέπε και την Πρόταση 18), με αφετηρία βέβαια τον ορισμό που δώσαμε στις κωνικές, μέσω του λόγου.

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ στον Απολλώνιο τον Περγαίο και στο μεγαλειώδες έργο του, τελειώνουμε τις ιδιότητες της υπερβολής και των κωνικών τομών με τρεις Προτάσεις από τα *Κωνικά,* βιβλίο γ΄. Οι αποδείξεις είναι του Απολλωνίου, ο οποίος χρησιμοποιεί τις προτάσεις που αναφέρουμε και εμείς, αλλά τις αποδεικνύει με διαφορετικό τρόπο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 20 (Απολλωνίου *Κωνικά,* βιβλίο γ΄, Προτάσεις 1, 4)
Α) Έστω δυο εφαπτόμενες ΝΘ, ΝΒ (ίδιου κλάδου) υπερβολής που τέμνουν τις διαμέτρους ΒΟΚ, ΘΟΑ στα σημεία Λ, Ζ αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ΟΒΖ, ΟΛΘ είναι ισεμβαδικά.

Β) Έστω ότι από ένα σημείο Γ διέρχονται δυο εφαπτόμενες ΓΑ, ΓΒ υπερβολής, προς τους δυο κλάδους της. Από τα σημεία επαφής Α, Β θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΟΘ, ΒΟΚ που συναντούν τις εφαπτομένες στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ΑΗΟ, ΒΟΖ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΓΖ, ΒΗΓ είναι ισεμβαδικά.

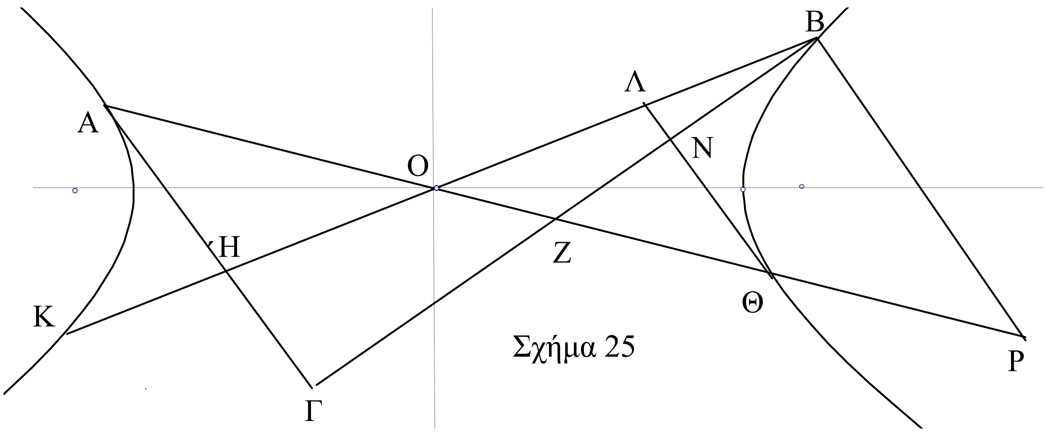
Απόδειξη

Α) Φέρνουμε ΒΡ//ΘΛ (Σχήμα 25). Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 12(α) θα ισχύει

$$\mathrm{O\Theta}^2 = \mathrm{OZ}\cdot\mathrm{OP} \text{ ή } \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{O\Theta}} = \frac{\mathrm{O\Theta}}{\mathrm{OZ}}, \text{ οπότε } \frac{\mathrm{OP}^2}{\mathrm{O\Theta}^2} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OZ}} \quad (1)$$

Αλλά από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΒΡ, ΟΛΘ έχουμε $\frac{\mathrm{OP}^2}{\mathrm{O\Theta}^2} = \frac{(\mathrm{OBP})}{(\mathrm{O\Lambda\Theta})}$

και ισχύει $\frac{(\mathrm{OBP})}{(\mathrm{OBZ})} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OZ}}$. Έτσι λόγω της (1) προκύπτει (ΟΒΖ) = (ΟΛΘ).



Σχήμα 25

Β) Φέρνουμε την ΘΛ εφαπτομένη στην υπερβολή στο Θ, οπότε ΘΛ//ΑΓ (οι εφαπτομένες στα άκρα διαμέτρου υπερβολής ή έλλειψης είναι παράλληλες, βλέπε Πόρισμα 10.1, § 5.4). Επειδή ΑΟ = ΟΘ και ΘΛ//ΑΗ τα τρίγωνα ΑΗΟ, ΟΛΘ είναι ίσα. Άρα και (ΑΗΟ) = (ΟΛΘ). Από το (α) όμως έχουμε (ΟΒΖ) = (ΟΛΘ), οπότε (ΑΗΟ) = (ΒΟΖ). Προφανώς θα είναι και (ΑΓΖ) = (ΒΗΓ).

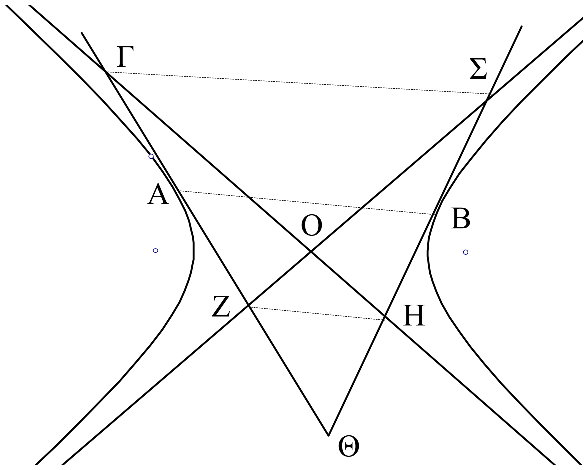
ΠΡΟΤΑΣΗ 21 (*Κωνικά*, βιβλίο γ΄, Πρόταση 44)

Οι εφαπτομένες στα σημεία Α, Β (όχι του ίδιου κλάδου) μιας υπερβολής τέμνονται στο σημείο Θ. Αν η εφαπτομένη στο Α τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα σημεία Γ, Ζ, ενώ η εφαπτομένη στο Β στα σημεία Σ, Η τότε οι ευθείες ΖΗ, ΑΒ και ΓΣ είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Απόδειξη
Από το Πόρισμα 15.1 έχουμε (Σχήμα 26)

$$ΟΓ\cdot ΟΖ = ΟΣ\cdot ΟΗ \quad \text{ή} \quad \frac{ΟΓ}{ΟΗ} = \frac{ΟΣ}{ΟΖ}, \ \text{άρα } ΖΗ//ΓΣ.$$

Σχήμα 26



Εφ' όσον όμως ΖΗ//ΓΣ έχουμε $\frac{ΘΖ}{ΖΓ} = \frac{ΘΗ}{ΗΣ}$ και από την Πρόταση 15(α) τα Α, Β είναι μέσα των ΓΖ, ΣΗ, οπότε $\frac{ΖΓ}{ΖΑ} = \frac{ΗΣ}{ΗΒ}$ (= 2). Με πολλαπλασιασμό των δυο τελευταίων σχέσεων προκύπτει $\frac{ΘΖ}{ΖΑ} = \frac{ΘΗ}{ΗΒ}$, οπότε και ΖΗ//ΑΒ.

6.5 ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Θεωρούμε την υπερβολή με εστία Ε, εκκεντρότητα ε > 1 και διευθετούσα (δ). Έστω Κ προβολή του Ε στην (δ) με ΕΚ = d και Α, Α′ τα σημεία που χωρίζουν το τμήμα ΕΚ εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα σε λόγο ε.
Αν Ο το μέσο του τμήματος ΑΑ′, Ε′ το συμμετρικό του Ε ως προς το Ο, τότε ισχύουν

α) $ΕΑ = \frac{εd}{1+ε}$, $ΕΑ' = \frac{εd}{ε-1}$, $ΑΑ' = \frac{2εd}{ε^2-1}$,

β) αν $α = \frac{εd}{ε^2-1}$, τότε $ΟΕ = αε$, $ΟΚ = \frac{α}{ε}$.

2. Έστω Ε, Σ δυο σταθερά σημεία ενός επιπέδου με ΕΣ > 2α, όπου α δεδομένο μήκος. Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο Σ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου με κέντρο Ε και ακτίνα 2α είναι ένα κλάδος υπερβολής. (Αν εναλλάξουμε τον ρόλο των Ε, Σ θα πάρουμε τον άλλο κλάδο της υπερβολής.)

3. Θεωρούμε δυο κύκλους με κέντρα Ο, Κ και ακτίνες R, ρ αντίστοιχα, με ΟΚ > R + ρ και R > ρ. Τότε κέντρα των κύκλων που εφάπτονται στους κύκλους αυτούς ανήκουν σε μια υπερβολή.

4. Μια ασύμπτωτη τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Ζ και την εφαπτομένη στην αντίστοιχη κορυφή Α στο σημείο Η. Αν Ε η αντίστοιχη εστία, τότε ΗΕ//ΑΖ.

5. Να αποδειχθούν οι πέντε προτάσεις της §6.3 (Ζ).

6. Η κάθετη στο σημείο Μ μιας ισοσκελούς υπερβολής τέμνει τον κύριο άξονα στο Γ και τον δευτερεύοντα στο Δ. Αν Π η προβολή του Μ στον κύριο άξονα τότε τα σημεία Π, Μ είναι αντίστοιχα μέσα των ΟΓ, ΔΓ.

7. Έστω μια υπερβολή με κύριο άξονα α (έλλειψη με μεγάλο άξονα α) και εστίες Ε′, Ε. Η κάθετη σ’ ένα σημείο Μ της υπερβολής (έλλειψης) τέμνει τον συζυγή άξονα (τον μικρό άξονα) στο σημείο Γ. Αν Δ η προβολή του Γ στην ΜΕ′, τότε το τετράπλευρο ΓΜΕΕ′ είναι εγγράψιμο και ΜΔ = α.

8. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών μιας εστίας υπερβολής ως προς τις διάφορες εφαπτομένες της υπερβολής είναι κύκλος με κέντρο την άλλη εστία και ακτίνα ίση με τον κύριο άξονα της υπερβολής.

9. Αν Μ σημείο μιας ισοσκελούς υπερβολής, Ο το κέντρο της και Ε, Ε′ οι εστίες της, τότε ισχύει $ΟΜ^2 = ΜΕ' \cdot ΜΕ$.

10. Έστω Α, Α′ τα σημεία τομής του κύριου άξονα μιας ισοσκελούς υπερβολής με την υπερβολή και Β ένα σημείο της. Αν Γ το συμμετρικό του Β ως προς τον κύριο άξονα, τότε το σημείο Α′ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

11. Έστω υπερβολή με εστίες Ε′, Ε και μεγάλο άξονα 2α. Σ’ ένα σημείο Μ της υπερβολής θεωρούμε την εφαπτομένη της που τέμνει την παράλληλη από το κέντρο Ο προς την ΜΕ στο σημείο Σ. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας α (πρωτεύον κύκλος).

12. Έστω μια υπερβολή με ημιάξονες α, β, α > β και δυο συζυγείς ημιδιάμετροι ΟΔ, ΟΣ με ΟΔ > ΟΣ. Τότε ισχύουν

α) $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\text{ΟΣ}}{\text{ΟΔ}}$, β) α + β < ΟΣ + ΟΔ, γ) Το ορθογώνιο με πλευρές τους άξονες έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο με διαστάσεις δυο συζυγείς διαμέτρους.
δ) α - β > ΟΣ - ΟΔ.

13. Έστω Μ σημείο υπερβολής με κύριο άξονα α και δευτερεύοντα β, ώστε $\text{Ε}'\hat{\text{Μ}}\text{Ε} = 90^{o}$. Αν ΟΝ η συζυγής ημιδιάμετρος της ΟΜ, τότε ισχύει $\text{ΟΝ}^2 = 2\beta^2$.

14. α) Δίνονται δυο ασύμπτωτες υπερβολής και ένα σημείο της. Να κατασκευαστούν δυο συζυγείς διάμετροί της εκ των οποίων η μια να είναι παράλληλη σε μια δοσμένη ευθεία. β) Δίνεται μια υπερβολή και δυο συζυγείς διάμετροί της. Να κατασκευαστούν οι άξονες της υπερβολής.
(Υπόδειξη: Πόρισμα 18.1, Πρόταση 14(δ).)

15. Δυο υπερβολές έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες και διαφορετικές εστίες. Αν μια χορδή ΑΒ της μιας εφάπτεται στην άλλη στο σημείο Σ, τότε ΑΣ = ΣΒ.

16. Αν μια έλλειψη και μια υπερβολή έχουν τις ίδιες εστίες, τότε τέμνονται ορθογώνια (κάθετες εφαπτομένες στα σημεία τομής).

17. Αν οι άξονες μιας έλλειψης συμπίπτουν με τις ασύμπτωτες μιας ισοσκελούς υπερβολής και η έλλειψη εφάπτεται στην υπερβολή στα σημεία Γ, Δ, τότε η ΓΔ είναι κοινή διάμετρος των δυο κωνικών και ο κύριος άξονας της υπερβολής είναι μέση ανάλογος των ημιαξόνων της έλλειψης.

* * * * * *

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ $2^{ου}$ – $6^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1975, 1976.

2. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, Τόμος Α΄ - μέρος Β΄, Β΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1970, 1973.

3. CROSLAND L., Higher School Geometry, London, Macmillan & Co. Ltd, 1965.

4. DREW H.W., A Geometrical Treatise on Conic Sections, 1869.

5. LOCKWOOD E., A Book of Curves, Cambridge University Press, 1978.

6. LAWRENCE J. D., A Catalog of Special Plane Curves, Dover Publications. Inc., 1972.

7. ΜΠΟΥΝΑΚΗ Δ., Κυλινδρικές Τομές, Ευκλείδης Γ΄, τεύχος 17, Έκδοση Ε. Μ. Ε., 1987.

8. ΜΠΡΙΚΑ Μ., Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, Αθήναι 1965.

9. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ν., Στοιχειώδης Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήναι 1928.

10. PEDOE D., Geometry and the Visual Arts, Dover Publications. Inc., New York, 1976.

11. ΧΑΤΖΗΔΑΚΗ Ι., Επίπεδος Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήναι 1879 (1891).

12. TAYLOR C., An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics, Cambridge, Deiton Bell and Co., 1881.