

ΔΙΑΧΥΣΗ ΚΑΙ
ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΟΡΦΩΝ ΣΕ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Οκτώβριος, 2006

Άννα Μπιτσακάκη

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ, ΗΡΑΚΛΕΙΟ

Στον Πέτρο,
το Γιώργο και το Μιχάλη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	v
1.1. Ορισμοί	viii
Κεφάλαιο 2. Περιγραφή του μοντέλου	11
Κεφάλαιο 3. Χωρική ισορροπία ανοικτής πρόσβασης με διάχυση της Τραπεζικής Δραστηριότητας	15
Κεφάλαιο 4. Ασυμπτωτική Λύση της εξίσωσης εξέλιξης της Τραπεζικής Δραστηριότητας	17
Κεφάλαιο 5. Αντίδραση - Διάχυση Τραπεζικής - Οικονομικής δραστηριότητας και σχηματισμός μορφών	21
5.1. Γενικές συνθήκες για Αστάθεια Προκαλούμενη από Διάχυση: Ανάλυση Γραμμικής Σταθερότητας και Ανάπτυξη Χωρικών Μορφών	21
5.2. Αναλυτική περιγραφή σχηματισμού μορφών σε ένα σύστημα Αντίδρασης Διάχυσης	28
Κεφάλαιο 6. Αριθμητική εφαρμογή	33
6.1. Πρόγραμμα για την Αριθμητική Εφαρμογή	35
Κεφάλαιο 7. Μη ύπαρξη χωρικών μορφών σε Συστήματα Αντίδρασης Διάχυσης: Γενικά και Ειδικότερα αποτελέσματα	39
Κεφάλαιο 8. Συμπεράσματα	43
Παράρτημα Α'. Η εξίσωση Fisher - Kolmogorov και οι λύσεις στη μορφή διαδιδόμενων κυμάτων	45
Παράρτημα Β'. Ανάλυση επιπέδων φάσης	49
Παράρτημα Γ'. Γενικά αποτελέσματα για το Λαπλασιανό Τελεστή σε συμπαγή χωρία	53
Παράρτημα. Βιβλιογραφία	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η αυτο-οργάνωση των διασκορπιζόμενων δομών είναι ένα φαινόμενο τυπικό των συστημάτων που δε βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας. Αυτές οι δομές υπάρχουν μακριά από την ισορροπία και διαφέρουν από τις τυπικές δομές σε ισορροπία (π.χ. κρύσταλοι) στο ότι διατηρούνται στη στάσιμη φάση ανταγωνιζόμενες δυναμικές διαδικασίες σε εξέλιξη, που εφοδιάζουν με ενέργεια το σύστημα. Οι δομές παραμένουν, διασκορπίζοντας την εισερχόμενη ενέργεια (και κατα συνέπεια την εντροπία που γεννιέται) και έτσι η διαδικασία γίνεται μη αναστρέψιμη.

Οι διασκορπιζόμενες δομές είναι τυπικά μακροσκοπικές και το χαρακτηριστικό μήκος κλίμακας της δομής είναι ανεξάρτητο του μεγέθους των συστατικών του συστήματος (π.χ. μόρια). Τα συστήματα που αντιπροσωπεύουν αυτο-οργανωνόμενες διασκορπιζόμενες δομές ποικίλουν από αναπτυσσόμενες βακτηριακές αποικίες σε ρευστά με αστάθειες διάδοσης (π.χ. Rayleigh-Bénard convection).

Η επίσημη θεωρία της αυτο-οργάνωσης έχει βασιστεί στα θερμοδυναμικά συστήματα σε μη ισορροπία και ο εμπνευστής της ήταν ο χημικός Ilya Prigogine. Η περισσότερη από την έρευνα έγινε στις Βρυξέλες από τη δεκαετία του 1940 μέχρι τη δεκαετία του 1960 από τον Prigogine και τους συνεργάτες του. Επέκτειναν τις μεθόδους από τα θερμοδυναμικά συστήματα σε μη ισορροπία, σε μη γραμμικό καθεστώς μακριά από την ισορροπία και εφάρμοσαν bifurcation theory για να αναλύσουν την επιλογή της κατάστασης. Ήδη το 1945 ο Prigogine είχε υποστηρίξει ότι ένα σύστημα σε μη ισορροπία προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το ρυθμό παραγωγής εντροπίας και επιλέγει την κατάσταση αναλόγως.

Αυτή η συνθήκη αποδείχθηκε ανεπαρκής από τον Rolf Landauer το 1975, ο οποίος υποστήριξε ότι η παραγωγή της ελάχιστης εντροπίας δεν είναι γενικά μία αναγκαία συνθήκη για τη στάσιμη φάση και ότι κάποιος δεν μπορεί να καθορίσει την κατάσταση που το σύστημα προτιμά να βρίσκεται, βασισμένος στη συμπεριφορά στη γειτονιά της στάσιμης φάσης, αλλά θα πρέπει να θεωρήσει συνολικά τα δυναμικά μη-ισορροπίας. Παρόλα αυτά το 1977 ο Prigogine τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ στη Χημεία για τη συνεισφορά του στις διασκορπιζόμενες δομές.

Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία από συστήματα χημικών τα οποία μπορούν να εμφανίσουν αστάθειες που μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα είτε ταλαντωτικές είτε στατικές μορφές. Οι δυσκολίες των συστημάτων της θερμοδυναμικής είναι επίσης παρούσες στη θεωρία του σχηματισμού μορφών στη Χημεία. Θα επικεντρωθούμε κυρίως σε συστήματα που επιδεικνύουν τη λεγόμενη αστάθεια **Turing**, που εμφανίζεται λόγω της ύπαρξης διαφορετικών ρυθμών διάχυσης των αντιδρώντων χημικών ουσιών. Η αστάθεια Turing μπορεί να θεωρηθεί ως ανταγωνισμός μεταξύ ενεργοποίησης από μια χημική ουσία που διαχέεται αργά (ενεργοποιητής) και αναχαίτιση από μια άλλη που διαχέεται γρηγορότερα (αναχαιτιστής).

Η ιδέα για την αστάθεια προκαλούμενη από διάχυση πρωτοσυσζητήθηκε από τον Nicolas Rashevsky το 1938, αλλά ο φημισμένος Βρετανός Μαθηματικός και Επιστήμονας της Πληροφορικής **Alan Turing** έγινε ευρύτερα γνωστός καθώς πρώτος επεξεργάστηκε και ανέλυσε Μαθηματικά ένα τέτοιο μοντέλο το 1952. Το κίνητρο του Alan Turing για τη μελέτη χημικών συστημάτων ήταν βιολογικό και κατά συνέπεια το πρώτο άρθρο είχε τίτλο **The Chemical basis of Morphogenesis**, όπου ονόμασε τα αντιδρώντα και διαχέοντα χημικά morphogens. Ο Turing τόνισε ότι το μοντέλο του είναι πολύ θεωρητικό και μια υπεραπλούστευση κάποιου αληθινού βιολογικού συστήματος, αλλά ήταν πεπεισμένος ότι το μοντέλο του θα μπορούσε να εξηγήσει κάποια από τα γνωρίσματα που έχουν σχέση με τη Μορφογένεση.

Ο Turing αγνόησε τη μηχανική και ηλεκτρική διάσταση και θεώρησε την αντίδραση και διάχυση των σωματιδίων να είναι τα πιο σημαντικά για το σύστημα. Στις μέρες μας, υπάρχουν κάποιες ποιοτικές ενδείξεις ότι τα μοντέλα του Turing είναι ικανά να μιμηθούν τη βιολογική αυτο-οργάνωση, αλλά η τελική απόδειξη ότι η Μορφογένεση είναι πραγματικά ένας μηχανισμός όπως αυτοί του Turing δεν έχει δοθεί ακόμη.

Το πρόβλημα στη θεωρία του Turing ήταν ότι η ύπαρξη χημικών χωρικών μορφών όπως προβλεπόταν από τους Μαθηματικούς υπολογισμούς του δεν μπορούσαν να επιβεβαιωθούν πειραματικά. Η ύπαρξη μορφών Turing σε οποιοδήποτε χημικό σύστημα μπορεί να αμφισβητηθεί και πόσο μάλλον για τα βιολογικά συστήματα. Όμως στην αρχή της δεκαετίας του 1950 ένας Ρώσος Βιοχημικός ο Boris Belousov παρατήρησε μια ταλαντωτική συμπεριφορά σε μια χημική αντίδραση, αλλά δεν μπορούσε να δημοσιεύσει τα αποτελέσματά του σε κανένα περιοδικό, καθώς δεν μπορούσε να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα, που φαίνεται να αντιβαίνουν το δεύτερο νόμο της Θερμοδυναμικής.

Νωρίτερα από τη δουλειά του Prigogine ήταν αρχή ότι η εντροπία θα έπρεπε συνεχώς να αυξάνει σε μια διαδικασία και έτσι μια χημική ταλάντωση φαινόταν αδύνατη με την εντροπία να αυξάνεται και να μειώνεται

διαδοχικά. Δεν ήταν πριν από το τέλος της δεκαετίας του 1960 όταν παρατηρήθηκε ότι η αντίδραση που πρώτος ο Boris Belousov μελέτησε, επιδεικνύει ένα μηχανισμό σχηματισμού μορφών με ομοιότητες με εκείνον που ο Turing είχε προτείνει. Όμως είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα κυματομορφές των Belousov-Zhabotinsky αλλά και οι μορφές του Turing είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Οι πρώτες πειραματικές παρατηρήσεις σταθερών μορφών Turing έγιναν από θεωρητικές σπουδές και την πρακτική ανάπτυξη ενός νέου είδους αντιδραστών συνεχώς αναδεδυόμενων σε δοχείο. Δεν ήταν παρά μέχρι το 1990, όταν η ομάδα του Patric de Kepper παρατήρησε μια σταθερή μορφή με κηλίδες σε ένα χημικό σύστημα που αφορούσε στην αντίδραση ιόντων Χλωρίου, ιόντων Ιωδίου και Μαλωνικού οξέως (CIMA reaction). Ειδικότερα η απαιτούμενη διαφορά στους ρυθμούς διάχυσης των χημικών ουσιών καθυστέρησε την πρώτη πειραματική παρατήρηση μορφών Turing. Το 1991 επίσης παρατηρήθηκαν ραβδώσεις στην αντίδραση CIMA και δείχθηκε ότι πειραματικές μορφές Turing μπορούν να αναπτυχθούν ακόμη και σε μεγάλα χωρία.

Η παρατήρηση μορφών Turing εισήγαγε ένα ανανεωμένο ενδιαφέρον στο φαινόμενο του σχηματισμού τους. Αυτό που προηγούμενα ήταν μόνο μια μαθηματική πρόβλεψη ενός πολυμήχανου μαθηματικού, 40 χρόνια αργότερα επιβεβαιώθηκε να είναι ένα πραγματικό χημικό φαινόμενο. Ο μηχανισμός **Turing** έχει μελετηθεί και έχει διαπιστωθεί η εφαρμογή του στη διαδικασία δημιουργίας μορφών σε Βιολογικά μοντέλα αλλά και μοντέλα αλληλεπίδρασης μεταξύ χημικών. Για παράδειγμα ο μηχανισμός **Turing** μπορεί να ερμηνεύσει τη δημιουργία μορφών στο δέρμα των ζώων (λεοπάρδαλη, ζέβρα, φίδι) αλλά και τη δημιουργία σχηματισμών κατά τη μετακίνηση ορισμένων ζώων (πουλιά, ψάρια κλπ).

Η διάχυση συνήθως βασίζεται σε μοντέλα τυχαίων περιπάτων, τα οποία όταν συνδυάζονται με εξισώσεις ανάπτυξης πληθυσμών οδηγεί σε γενικά **συστήματα αντίδρασης -διάχυσης**. Γενικά μια διαδικασία διάχυσης σε ένα οικοσύστημα τείνει να παράγει μια ομογενή πυκνότητα πληθυσμού η οποία είναι μια χωρική ομοιογένεια. Έτσι θα μπορούσε να περιμένει κανείς ότι σε ένα οικοσύστημα δύο αλληλεπιδρόντων ειδών, κτηνηγός - θήραμα (predator - prey), τα οποία διασκορπίζονται στο χώρο, θα επέλθει ομοιογένεια των πληθυσμών. Αυτό λοιπόν που είναι καινούργιο στην ιδέα του Turing ήταν ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, συστήματα αντίδρασης - διάχυσης σχηματίζουν χωρικά ανομοιογενείς μορφές, διαδικασία η οποία ονομάστηκε **μηχανισμός Turing** για τη γέννηση αστάθειας από διάχυση. Η φύση επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό με το σχηματισμό μορφών από ομάδες πληθυσμών όταν αυτοί απειλούνται από το κυνήγι.

Στα οικονομικά η σημασία του χώρου έχει αναγνωριστεί από παλιά με την γέννηση της θεωρίας του εντοπισμού. Λόγω όμως της ύπαρξης δυσκολιών ανάπτυξης βολικών μοντέλων ατελούς ανταγωνισμού η συστηματική ανάλυση των χωρικών οικονομικών υπήρξε περιορισμένη. Το ενδιαφέρον για τα οικονομικά του χώρου ανεώθηξε μετά το 1990 στο πλαίσιο της νέας οικονομικής γεωγραφίας, με την έρευνα να επικεντρώνεται σε θέματα όπως τα αίτια της χωρικής ανάπτυξης, της χωρικής αλληλεπίδρασης, ή η τοποθεσία και το μέγεθος των πόλεων.

Σε προβλήματα περιβαλλοντικά και διαχείρισης πόρων η πλειοψηφία της ανάλυσης έχει επικεντρωθεί σε θέματα όπως δυναμικά μετάβασης προς μία σταθεροποιημένη κατάσταση ή τα χαρακτηριστικά της σταθερότητας σε μία τέτοια κατάσταση. Όμως είναι προφανές ότι όταν αναλύονται ανανεώσιμες και ειδικότερα βιολογικές πηγές η χωρική μεταβλητότητα του φαινομένου είναι επίσης σημαντική. Οι βιολογικές πηγές τείνουν να διασκορπίζονται στο χώρο με την επίδραση δυνάμεων που ευνοούν τη διάχυση ή τη συγκέντρωση (Akira Okubo 2001). Αυτές οι διαδικασίες μαζί με τις εντός και μέσω των ειδών αλληλεπιδράσεις ευνοούν τη δημιουργία χωρικών μορφών (patterns) για τα είδη.

1.1. Ορισμοί

- (1) **Χωρική ανομοιογένεια:** Η κατάσταση κατά την οποία η συγκέντρωση σε ισορροπία του πόρου και της οικονομικής μεταβλητής είναι διαφορετική σε διαφορετικά σημεία μέσα σε ένα δοσμένο χωρίο.
- (2) **Χωρική ομοιογένεια:** Η κατάσταση κατά την οποία η συγκέντρωση σε ισορροπία του πόρου και της οικονομικής μεταβλητής είναι η ίδια σε όλα τα σημεία σε ένα δοσμένο χωρίο.
- (3) **Διάχυση:** Μία διαδικασία όπου η μικροσκοπική μη κανονική κίνηση σωματιδίων όπως, κύτταρα, βακτήρια, χημικά ή ζώα έχει ως αποτέλεσμα κάποια μακροσκοπική κανονική κίνηση του συνόλου.

Στην εργασία αυτή θα γίνει προσπάθεια ανάλυσης ενός οικονομικού μοντέλου με χρήση θεωρίας και συμπερασμάτων από βιολογικά μοντέλα. Θα εξερευνήσουμε την επίδραση του μηχανισμού Turing στην εμφάνιση αστάθειας διάχυσης σε ένα οικονομικό μοντέλο όπου η *Οικονομική Δραστηριότητα* σε ένα χωρίο αλληλεπιδρά με την *Τραπεζική Δραστηριότητα*.

Η χρήση του μηχανισμού Turing μας επιτρέπει να αναλύσουμε με λεπτομέρειες συνθήκες υπό τις οποίες η διάχυση μπορεί να δημιουργήσει χωρική ανομοιογένεια και δημιουργία χωρικών μορφών (patterns) ή

χωρική ομοιογένεια. Όταν η χωρική ανομοιογένεια προκύπτει, η συγκέντρωση των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν (απόθεμα *Οικονομικής Δραστηριότητας* και *επίπεδο Τραπεζικής Δραστηριότητας*) σε ισορροπία, είναι διαφορετική σε διαφορετικές τοποθεσίες ενός δεδομένου χωρίου. Από τη στιγμή που ο μηχανισμός θα αποκαλυφθεί μπορούμε να αναλύσουμε το αποτέλεσμα της ρύθμισης στην εξάπλωση ή τον περιορισμό της χωρικής ανομοιογένειας. Στην εργασία αυτή:

- (1) Θα αναλύσουμε το μοντέλο διάχυσης που διέπει αλληλεπιδρώντες οικονομικές μεταβλητές σε χώρους συνεχούς χρόνου.
- (2) Θα εξάγουμε σαφείς συνθήκες που εξαρτώνται από τις μεταβλητές αυτές κάτω από τις οποίες η διάχυση θα μπορούσε να παράγει χωρικές μορφές (patterns).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Περιγραφή του μοντέλου

Υπάρχει πρόσφατη έξαρση ενδιαφέροντος σχετικά με τη γεωγραφική άποψη της εξέλιξης δηλαδή σχετικά με τον τόπο όπου λαμβάνουν χώρα οι οικονομικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με τον Paul Krugman (*The Role of Geography in Development*) κάτι τέτοιο δε θα πρέπει να μας δημιουργεί έκπληξη καθώς μια προσεκτική ματιά στο χάρτη υποδεικνύει ότι διαφορές στην οικονομική ανάπτυξη είναι τουλάχιστο συνδεδεμένες με την τοποθεσία: χώρες κοντά στον Ισημερινό τείνουν να είναι φτωχότερες από εκείνες στις εύκρατες ζώνες και το κατα κεφαλήν εισόδημα στην Ευρώπη δείχνει να ακολουθεί μια καθοδική κλίση από την βορειοανατολική γωνία της ηπείρου.

Πολλές οικονομικές δραστηριότητες είναι σαφώς συγκεντρωμένες γεωγραφικά. Οι περισσότεροι άνθρωποι στις αναπτυγμένες χώρες, και ένας αυξανόμενος αριθμός στις αναπτυσσόμενες χώρες, μένουν σε μεγάλες, πυκνοκατοικημένες μεγαλουπόλεις. Πολλές επιχειρήσεις (συμπεριλαμβανομένων και επιχειρήσεις παροχής υπηρεσιών όπως τράπεζες) είναι επίσης γεωγραφικά συγκεντρωμένες και τέτοια συγκροτήματα είναι μία σημαντική πηγή διεθνούς εξειδίκευσης και εμπορίου.

Όμως δε ζούμε όλοι σε μια μεγάλη πόλη, ούτε η παγκόσμια Οικονομία συγκεντρώνει την παραγωγή σε μια μόνη τοποθεσία. Προφανώς υπάρχει πόλεμος ανάμεσα σε δυνάμεις που τείνουν να προωθήσουν γεωγραφική συγκέντρωση και εκείνων που τείνουν να αντισταθούν, δηλαδή **κεντρομόλες και φυγόκεντρες** δυνάμεις.

Στο μοντέλο που θα κατασκευάσουμε θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε πως η *Οικονομική Δραστηριότητα* σε ένα τόπο συνυπάρχει με την *Τραπεζική δραστηριότητα*, πως αλληλεπιδρούν και θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τη δημιουργία **χωρικών μορφών** με τη βοήθεια του **μηχανισμού Turing**.

Για την κατασκευή του μοντέλου μας θα κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

- Για την *Οικονομική Δραστηριότητα*:
 - Αυξάνει, αναπαράγεται (αυτοκαταλυτικός μηχανισμός που ενεργοποιείται από την τραπεζική δραστηριότητα) και διαχέεται στο χώρο με ένα σταθερό συντελεστή διάχυσης D_V .
 - Ο ρυθμός χρονικής ανάπτυξης είναι θετικός και απουσία τραπεζικής δραστηριότητας φθάνει σε ένα μέγιστο σημείο (κορεσμός του χωρίου- θεωρούμε ότι το χωρίο έχει φέρουσα ικανότητα K) και μετά γίνεται αρνητικός.
 - Παρουσία τραπεζικής δραστηριότητας έχω αιχμαλωσία ενός μέρους της οικονομικής δραστηριότητας (Για την κεφαλαιακή επάρκεια των Τραπεζών απαιτείται το μέγεθος των Καταθέσεων να είναι μεγαλύτερο εκείνου των ξορηγήσεων)
- Για την *Τραπεζική Δραστηριότητα*:
 - Η τραπεζική δραστηριότητα ελκύεται από το κέρδος και διαχέεται στο χώρο με ένα σταθερό συντελεστή διάχυσης D_U . Εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι κάποιοι θεσμικοί παράγοντες (νομοθεσία, περιβαλλοντικοί παράγοντες) ή ακόμα και η καταλληλότητα της τοποθεσίας (θέσεις πάρκινγκ, εύκολια πρόσβασης κλπ) εμποδίζουν την τραπεζική Δραστηριότητα να διαχέεται στο χώρο με άπειρο ρυθμό.
 - Ο ρυθμός ανάπτυξης της θα είναι ανάλογος της οικονομικής δραστηριότητας σε ένα χωρικό σημείο ενώ απουσία οικονομικής δραστηριότητας η τραπεζική δραστηριότητα θα φθίνει και σε κάποια χρονική στιγμή θα σβήσει.

Μέσω των παραπάνω παραδοχών θα βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα που θα στηρίξουν την κατασκευή του μοντέλου μας.

- Η επίδραση της τραπεζικής δραστηριότητας ενώ αυξάνει το κόστος δρα καταλυτικά στην διάχυση στο χώρο της οικονομικής δραστηριότητας. (Ο τραπεζικός δανεισμός ευνοεί τη χωρική επέκταση τόσο των επιχειρήσεων όσο και των νοικοκυριών) οπότε σύμφωνα με τους όρους της θεωρίας του Krugman δρα **φυγοκεντρικά**.
- Η αύξηση της οικονομικής δραστηριότητας σε ένα τόπο αυξάνει το κέρδος της τραπεζικής δραστηριότητας με αποτέλεσμα να μη δημιουργεί κίνητρα διάχυσης. Θα μπορούσαμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι κατά Krugman η οικονομική δραστηριότητα δρα **κεντρομόλα** για την τραπεζική δραστηριότητα.

Το μοντέλο στο οποίο θα βασιστούμε για την παρουσίαση του προβλήματος είναι βασισμένο σε ένα μοντέλο κυνηγού- θηράματος (predator - prey) δανεισμένο από τη Βιολογία. Έχουμε κατασκευάσει ένα διαφοροποιημένο Lotka-Volterra δυναμικό σύστημα ως εξής:

Έστω $V(x, t)$ η συγκέντρωση της *Οικονομικής Δραστηριότητας* στο χωρίο Z που μελετάμε δηλ $x \in Z$ τη χρονική στιγμή t , $t \in [0, \infty)$ και $U(x, t)$ η συγκέντρωση της *Τραπεζικής Δραστηριότητας* στο ίδιο σημείο, την ίδια χρονική στιγμή.

Η *Τραπεζική Δραστηριότητα* θεωρούμε ότι αναπτύσσεται στο χρόνο και διαχέεται στο χώρο σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$(2.1) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = F(U(x, t), V(x, t)) + D_U \nabla^2 U(x, t),$$

όπου $\nabla^2 U(z, t) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$ και D_U είναι ο συντελεστής διάχυσης της τραπεζικής δραστηριότητας ο οποίος για τις ανάγκες του προβλήματός μας θα θεωρηθεί σταθερός. Η συνάρτηση $F(U(x, t), V(x, t))$ θα είναι η συνάρτηση κέρδους της τραπεζικής δραστηριότητας και ορίζεται ως:

$$(2.2) \quad F(U(x, t), V(x, t)) = \delta p q U(x, t) V(x, t) - C(V(x, t))$$

όπου:

p : η τιμή πώλησης των τραπεζικών εργασιών. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή πώλησης καθορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στο επιτόκιο χορηγήσεων και το επιτόκιο καταθέσεων.

q : συντελεστής που αφορά στην ικανότητα προσέλκυσης της οικονομικής δραστηριότητας από τις τράπεζες.

$C(V(x, t))$: το κόστος για την τραπεζική δραστηριότητα (ενοίκια Καταστημάτων, μισθοδοσία υπαλλήλων κλπ.) Στο μοντέλο μας θα θεωρήσουμε το κόστος να εξαρτάται μόνο από τη συγκέντρωση της τραπεζικής δραστηριότητας.

δ : συντελεστής που θα καθορισθεί παρακάτω για τον οποίο ισχύει $0 < \delta < 1$.

Η *Οικονομική Δραστηριότητα* θεωρούμε ότι αναπτύσσεται στο χρόνο και διαχέεται στο χώρο σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$(2.3) \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = G(U(x, t), V(x, t)) + D_V \nabla^2 V(x, t)$$

όπου $\nabla^2 V(z, t) = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}$ και D_V είναι ο συντελεστής διάχυσης της οικονομικής δραστηριότητας ο οποίος για τις ανάγκες του προβλήματός μας θα θεωρηθεί σταθερός. Η συνάρτηση $G(U(x, t), V(x, t))$ θα έχει τη μορφή:

$$(2.4) \quad G(U(x, t), V(x, t)) = A V(x, t) \left(1 - \frac{V(x, t)}{K}\right) - p q U(x, t) V(x, t)$$

όπου A , K θετικές σταθερές. Απουσία τραπεζικής δραστηριότητας ο ρυθμός ανάπτυξης της οικονομικής δραστηριότητας θα αυξάνει μέχρι να επιτευχθεί ο κορεσμός του χωρίου όταν $V(x, t) = K$ και μετά θα φθίνει

(K η φέρουσα ικανότητα του χωρίου). Παρουσία τραπεζικής δραστηριότητας θα έχουμε ως αποτέλεσμα την παρουσία του όρου $pqU(x, t)V(x, t)$ ως το κόστος με το οποίο η τραπεζική δραστηριότητα επιβαρύνει την οικονομική δραστηριότητα. Η παρουσία του συντελεστή δ ($0 < \delta < 1$) στην $F(U(x, t), V(x, t))$ δηλώνει ότι μόνο μέρος του κόστους για την οικονομική δραστηριότητα αποτελεί έσοδο για την τραπεζική δραστηριότητα. Συνεπώς έχουμε υποθέσει τόσο την οικονομική δραστηριότητα όσο την τραπεζική δραστηριότητα να αναπτύσσονται στο χρόνο ανάλογα με τα κέρδη τους.

Η χρήση ενός Βιολογικού μοντέλου στην προσπάθεια να ερμηνεύσει κανείς το σχηματισμό μορφών τραπεζικής δραστηριότητας μπορεί να εμπεριέχει κινδύνους καθώς θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι δεν υπάρχει αναλογία ούτε στο μέγεθος των αντιδρώντων σωματιδίων αλλά και η παραδοχή ύπαρξης διάχυσης για την τραπεζική δραστηριότητα φαίνεται ανακριβής. Αφενός όμως η αύξηση της τραπεζικής δραστηριότητας τα τελευταία χρόνια αφετέρου η εξάπλωση των τραπεζικών δραστηριοτήτων σε πολλούς τομείς (ασφαλιστικά προϊόντα, χρηματοπιστηριακές εργασίες κλπ) θα μπορούσε να μας επιτρέψει την αντιστοίχιση θεωρώντας ως μονάδα μέτρησης της τραπεζικής δραστηριότητας τη μονάδα του χρήματος που απασχολείται με κάποιας μορφής τραπεζική εργασία ενώ ως μονάδα μέτρησης της οικονομικής δραστηριότητας τη μονάδα του χρήματος που παράγουν οι παραγωγικές διαδικασίες σε έναν τόπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χωρική ισορροπία ανοικτής πρόσβασης με διάχυση της Τραπεζικής Δραστηριότητας

Υποθέτουμε ότι η οικονομική δραστηριότητα διαχέεται στο χωρίο μας απείρως γρήγορα και επιτρέπουμε ανοικτή πρόσβαση στην οικονομική δραστηριότητα. Δηλαδή μπορούμε να έχουμε εισαγωγή οικονομικής δραστηριότητας από γειτονικές περιοχές. Τότε θα έχουμε ως αποτέλεσμα τον κορεσμό του χωρίου και σε κατάσταση ισορροπίας θα έχω μηδενικό ρυθμό αναπτυξης οικονομικής δραστηριότητας. Για απλούστευση των συμβολισμών γράφουμε $U = U(x, t)$, $V = V(x, t)$. Συνεπώς:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G(U(x, t), V(x, t)) &= 0, \text{ δηλαδή,} \\ AV(1 - \frac{V}{K}) - pqUV &= 0, \text{ οπότε,} \\ V &= \begin{cases} \frac{AK - pqKU}{A}, & U < \frac{A}{pq}, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων σε κατάσταση ισορροπίας ανοικτής πρόσβασης η εξίσωση (2.1) που περιγράφει την ανάπτυξη και διάχυση της τραπεζικής δραστηριότητας γίνεται:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \delta pqU \left(\frac{AK - pqKU}{A} \right) - C(U) + D_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &= U((\delta pqK - \overline{C(U)}) - \frac{\delta p^2 q^2 K}{A} U) + D_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &= (\delta pqK - \overline{C})U \left(1 - \frac{\delta p^2 q^2 K}{A(\delta pqK - \overline{C})} U \right) + D_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

όπου $\overline{C(U)} = C(U)/U$, το μέσο κόστος για την τραπεζική δραστηριότητα, το οποίο για τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος θεωρούμε ότι είναι σταθερό δηλαδή $\overline{C(U)} = \overline{C}$.

Στη συνέχεια θέτουμε $s' = \delta pqK - \overline{C}$, $r' = \frac{\delta p^2 q^2 K}{A}$ και $a = \frac{r'}{s'}$ οπότε η εξίσωση (3.2) γίνεται

$$(3.3) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = s'U(1 - aU) + D_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Με την αλλαγή στις μεταβλητές $t^* = s't$ και $x^* = x(\frac{s'}{D_U})^{1/2}$ και παραλείποντας τους αστερίσκους για απλούστευση των συμβολισμών η (3.3) γίνεται

$$(3.4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = U(1 - aU) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Σύμφωνα με το Παράρτημα (A) η εξίσωση (3.4) έχει μια λύση σε μορφή μεταδιδόμενου κύματος (travelling wave) που μπορεί να γραφτεί ως

$$(3.5) \quad U(x, t) = u(z), \quad z = x - ct$$

όπου c είναι η ταχύτητα του κύματος η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$(3.6) \quad c \geq c_{min} = 2(s'D_U)^{1/2} = 2[(\delta pqK - \bar{C})D_U]^{1/2}.$$

Η λύση απεικονίζεται στο σχήμα (1).

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να συνοψισθούν στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1 Εστω ότι τραπεζική δραστηριότητα διασκορπίζεται στο χώρο σύμφωνα με την (2.1). Υποθέτουμε ακόμη ανοικτή πρόσβαση οικονομικής δραστηριότητας και ότι διαχέεται γρήγορα επιφέροντας κορεσμό σε όλα τα σημεία του χωρίου. Τότε θα έχουμε τη σύγκλιση σε μια λύση, κυματοειδούς μορφής, για τη συγκέντρωση της τραπεζικής δραστηριότητας $u(z)$, με αντίστοιχη συγκέντρωση της οικονομικής δραστηριότητας που δίνεται από τη σχέση $V = \frac{AK - pqKu(z)}{A}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ασυμπτωτική Λύση της εξίσωσης εξέλιξης της Τραπεζικής Δραστηριότητας

Σύμφωνα με το Παράρτημα (Α) η κυματοειδής λύση της εξίσωσης (3.4) ικανοποιεί τη σχέση

$$(4.1) \quad u'' + cu' + u(1 - au) = 0, \quad u(z) = U(x, t), \quad z = x - ct.$$

Για την παραπάνω υπάρχουν μονότονες λύσεις, με $u(-\infty) = \frac{1}{a}$ και $u(\infty) = 0$, για όλα τα $c > 2$. Οι τροχιές στο επίπεδο φάσης είναι λύσεις της

$$(4.2) \quad \frac{dv}{du} = \frac{-cv - u(1 - au)}{v}.$$

Δεν έχουν βρεθεί αναλυτικές λύσεις αυτών των εξισώσεων για c οποιοδήποτε, μολονότι υπάρχει ακριβής λύση για συγκεκριμένο $c > 2$ (Κεφ.13.4 Murray 2002 VolI). Η ύπαρξη όμως μιας μικρής παραμέτρου στις εξισώσεις, η $\varepsilon = \frac{1}{c^2} \leq 0.25$, υποδεικνύει ότι θα πρέπει να ψάξουμε για ασυμπτωτικές λύσεις της εξίσωσης για $0 < \varepsilon \ll 1$.

Αφού οι κυματοειδείς λύσεις είναι αναλοιώτες σε κάθε μετατόπιση της αρχής των αξόνων θέτουμε $z = 0$ να είναι το σημείο όπου $U = 1/2$ (για να έχει νόημα η παραδοχή θα πρέπει να ισχύει $a < 2$). Θα χρησιμοποιήσουμε μια καθιερωμένη τεχνική διαταραχών εισάγοντας μια νέα μεταβλητή γύρω από το σημείο $z = 0$ και θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη λύση ως ένα ανάπτυγμα Taylor σε σχέση με τη μικρή παράμετρο ε . Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με το μετασχηματισμό

$$(4.3) \quad u(z) = g(\xi), \quad \xi := \frac{z}{c} = \varepsilon^{1/2} z.$$

Λόγω της (4.3) και των συνοριακών συνθηκών για το u η (4.1) γίνεται:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{dg}{d\xi} + g(1 - ag) &= 0 \\ g(-\infty) &= \frac{1}{a} \\ g(\infty) &= 0 \\ 0 < \varepsilon &\leq \frac{1}{c^2} = 0.25 \end{aligned}$$

και απαιτούμε επιπλέον $g(0) = 1/(1+a)$. Τώρα θα ψάξουμε για λύσεις της (4.4) αναπτύσσοντας μια κανονική σειρά διαταραχών ως προς ε

$$(4.5) \quad g(\xi; \varepsilon) = g_0(\xi) + \varepsilon g_1(\xi) + \dots$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τις συνοριακές συνθήκες στο $\pm\infty$ και ότι $g(0; \varepsilon) = 1/(1+a)$ για κάθε ε παίρνουμε από την (4.5) τις συνθήκες για τα $g_i(\xi)$ για $i = 0, 1, 2, \dots$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} g_0(-\infty) = 1, g_0(\infty) = 0, g_0(0) = 1/(1+a) \\ g_i(\pm\infty) = 0, g_i(0) = 0, \text{ για } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (4.5) στην (4.4) και εξισώνοντας τις δυνάμεις του ε παίρνουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} O(1) : \frac{dg_0}{d\xi} + g_0 - ag_0^2 = 0 \text{ δηλαδή} \\ \frac{dg_0}{d\xi} = -g_0(1 - ag_0) \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$g_0(\xi) = \frac{1}{a + c_1 e^\xi}$$

και με χρήση της $g_0(0) = 1/(1+a)$ η g_0 γίνεται:

$$(4.7) \quad g_0(\xi) = \frac{1}{a + e^\xi}.$$

$$O(\varepsilon) : \frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \frac{dg_1}{d\xi} + g_1 - 2ag_0g_1 = 0 \text{ ισοδύναμα}$$

$$g_1' - g_1 \left(\frac{g_0''}{g_0'} \right) = -g_0'' \text{ όπου } g' = \frac{dg}{d\xi}$$

και λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνουμε:

$$(4.8) \quad g_1 = -g_0' \ln \left[\frac{4g_0'}{a} \right] = \frac{e^\xi}{(a + e^\xi)^2} \ln \left[\frac{4e^\xi}{a(a + e^\xi)^2} \right].$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις και επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές u και z η ομοιόμορφα ισχύουσα ασυμπτωτική λύση για όλα τα z δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u(z; \varepsilon) = (a + e^{z/c})^{-1} + \frac{1}{c^2} e^{z/c} (a + e^{z/c})^{-2} \ln \left[\frac{4e^{z/c}}{a(a + e^{z/c})^2} \right] + \\ + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad c \geq c_{min} = 2 \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ασυμπτωτική λύση για να βρούμε μια σχέση μεταξύ της κλίσης του παραγόμενου κύματος και της ταχύτητας αναπαραγωγής του. Αφού ισχύει $U'(z) < 0$, ένα μέτρο, ας το ονομάσουμε s , της κλίσης της κυματομορφής, θα μπορούσε να είναι η τιμή του μεγίστου του $U'(z)$ ή ισοδύναμα το σημείο όπου $U'' = 0$. Ψάχνουμε τα σημεία όπου $U''(z) = 0$ δηλαδή τα σημεία καμπής της U ή με τη βοήθεια της (4.5) τα σημεία όπου

$$g_0''(\xi) + \varepsilon g_1''(\xi) + O(\varepsilon^2) = 0$$

η οποία δίνει $\xi = 0$ δηλαδή $z = 0$. Η κλίση στο $z = 0$ χρησιμοποιώντας την (4.9), δίνει

$$s = -U'(0) = \frac{1}{4c} + O\left(\frac{1}{c^5}\right),$$

σχέση η οποία ισχύει μόνο για $c \geq 2$. Αυτό το αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι όσο γρηγορότερα κινείται το κύμα, δηλαδή όσο μεγαλύτερο το c , τόσο λιγότερο απότομη είναι η κυματομορφή.

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας μπορούν να γενικευθούν σε μοντέλα μονοειδών πληθυσμών που η συνάρτηση ανάπτυξης παριστάνεται από μία κατάλληλη $f(u)$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

όπου $f(u)$ έχει μόνο δύο σημεία μηδενισμού έστω u_1 και $u_2 > u_1$. Εάν $f'(u_1) > 0$ και $f'(u_2) < 0$ τότε με μια ανάλυση όμοια με παραπάνω, κυματοειδείς λύσεις προκύπτουν με το u να πηγαίνει μονότονα από το u_1 στο u_2 με ταχύτητα κύματος

$$c \geq c_{\min} = 2[f'(u_1)]^{1/2}.$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει γραμμικοποιώντας την $f(u)$ γύρω από τον κυρίαρχο όρο όπου $u \approx u_1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αντίδραση - Διάχυση Τραπεζικής - Οικονομικής δραστηριότητας και σχηματισμός μορφών

Στην προηγούμενη ενότητα υποθέσαμε ότι σε ένα μη φραγμένο χωρικό πεδίο η οικονομική δραστηριότητα διαχέεται γρήγορα με αποτέλεσμα τον κορεσμό του χωρίου υπό την προϋπόθεση ότι επιτρέπουμε την ανοικτή πρόσβαση της οικονομικής δραστηριότητας από όλες τις πλευρές. Υπό αυτές τις συνθήκες μελετήσαμε την εξέλιξη της τραπεζικής δραστηριότητας στο χωρικό αυτό πεδίο.

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ένα συμπαγές χωρικό πεδίο $Z = [0, \alpha]$ και υποθέτουμε ότι η οικονομική δραστηριότητα δεν διαχέεται απείρως γρήγορα.

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να μελετήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ Τραπεζικής και Οικονομικής Δραστηριότητας και τη δυνατότητα γέννησης χωρικών μορφών μέσα στο χωρικό πεδίο.

5.1. Γενικές συνθήκες για Αστάθεια Προκαλούμενη από Διάχυση: Ανάλυση Γραμμικής Σταθερότητας και Ανάπτυξη Χωρικών Μορφών

Ένα σύστημα αντίδρασης - διάχυσης μπορεί να επιδειξει αστάθεια προκαλούμενη από διάχυση η οποία κάποιες φορές αποκαλείται **αστάθεια Turing**. Αυτό συμβαίνει εάν η ομογενής στάσιμη φάση είναι σταθερή σε μικρές διαταραχές απουσία διάχυσης αλλά ασταθής σε μικρές χωρικές διαταραχές όταν η διάχυση είναι παρούσα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξάγουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για αστάθεια της στάσιμης φάσης προκαλούμενη από διάχυση και την παραγωγή χωρικών μορφών για ένα σύστημα αντίδρασης διάχυσης που έχει τη γενική μορφή:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \gamma f(u, v) + \nabla^2 u \\ v_t &= \gamma g(u, v) + d \nabla^2 v \end{aligned}$$

όπου d είναι ο λόγος των συντελεστών διάχυσης. Σημειώνουμε ότι με « ∇ » συμβολίζουμε την παραγωγο ως προς τη χωρική μεταβλητή. Η παράμετρος γ μπορεί να έχει κάποια από τις ακόλουθες ερμηνείες.

- (1) $\gamma^{1/2}$ είναι ανάλογο του γραμμικού μεγέθους του χωρικού πεδίου στη μια διάσταση. Στις δυο διαστάσεις το γ είναι ανάλογο του εμβαδού.
- (2) Το γ αντιπροσωπεύει τη σχετική ισχύ των όρων αντίδρασης. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα, ότι μια αύξηση του γ μπορεί να αντιπροσωπεύει μια αύξηση στη δραστηριότητα κάποιας ενέργειας στην ακολουθία αντίδρασης.
- (3) Μια αύξηση στο γ μπορεί ακόμη να θεωρηθεί ως ισοδύναμη με μείωση στο λόγο των συντελεστών διάχυσης d .

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα Μαθηματικά απαιτούμε συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Παίρνουμε λοιπόν συνοριακές συνθήκες μηδενικής ροής και αρχικές συνθήκες δοσμένες. Το μαθηματικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_t &= \gamma f(u, v) + \nabla^2 u, \\ v_t &= \gamma g(u, v) + d\nabla^2 v, \end{aligned}$$

στο $B \times (0, \infty)$,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \text{ στο } \partial B \times [0, \infty), u(\cdot, 0), v(\cdot, 0) \text{ δοσμένα.}$$

Θεωρούμε ∂B να είναι το κλειστό σύνορο του χωρίου αντίδρασης διάχυσης B και \mathbf{n} να είναι το κανονικό μοναδιαίο διάνυσμα στο ∂B . Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που διαλέξαμε συνοριακές συνθήκες μηδενικής ροής. Ο κυριότερος από αυτούς είναι ότι ενδιαφερόμαστε για αυτοοργάνωση των μορφών. Εάν επιβάλαμε καθορισμένες συνθήκες μηδενικής ροής στα u και v , η χωρική μορφοποίηση θα μπορούσε να είναι μια ευθεία συνέπεια των συνοριακών συνθηκών.

Η στάσιμη κατάσταση του αντίστοιχου στο (5.2) ομογενούς συστήματος (u_0, v_0) είναι η θετική λύση του συστήματος

$$(5.3) \quad f(u, v) = 0, g(u, v) = 0.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι $f(u, v)$, $g(u, v)$ είναι αναλυτικές γύρω από το σημείο (u_0, v_0) .

Αφού θέλουμε να μελετήσουμε την αστάθεια προκαλούμενη από διάχυση, ενδιαφερόμαστε για γραμμική αστάθεια αυτής της στάσιμης φάσης η οποία εξαρτάται μόνο από το χώρο. Άρα, απουσία κάθε χωρικής μεταβολής η ομογενής στάσιμη φάση θα πρέπει να είναι γραμμικά σταθερή.

Χωρίς χωρική μεταβολή τα u, v ικανοποιούν:

$$(5.4) \quad u_t = \gamma f(u, v), \quad v_t = \gamma g(u, v).$$

Στη συνέχεια γραμμικοποιούμε γύρω από τη στάσιμη φάση (u_0, v_0) . Αρχικά θέτουμε $x(t) = u(t) - u_0$, $y(t) = v(t) - v_0$ και με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor γύρω από το σημείο (u_0, v_0) το σύστημα (5.4) γίνεται:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \gamma f(x + u_0, y + v_0) = \gamma [f(u_0, v_0) + x \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \\ &+ y \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) + R_1(u_0, v_0, x, y)] \end{aligned}$$

καθώς $|x| \rightarrow 0$, $|y| \rightarrow 0$ έχουμε $R_1(u_0, v_0, x, y) \rightarrow 0$

όπου $|\cdot|$ η Ευκλείδεια Νόρμα οπότε έχουμε,

$$\frac{dx}{dt} \sim \gamma x \frac{\partial f}{\partial u} + \gamma y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Σημειώνουμε ότι εφεξής θα θεωρούμε τις μερικές παραγώγους των f και g υπολογισμένες στη στάσιμη φάση εκτός εάν έχει δηλωθεί διαφορετικά. Με τελείως ανάλογους υπολογισμούς παίρνουμε:

$$\frac{dy}{dt} \sim \gamma x \frac{\partial g}{\partial u} + \gamma y \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Θέτοντας λοιπόν $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$ και για $|\mathbf{w}|$ μικρό η (5.4) γίνεται

$$(5.6) \quad \mathbf{w}_t = \gamma A \mathbf{w} \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

όπου A ο πίνακας σταθεροποίησης. Θα ψάξουμε τώρα για λύσεις της (5.6) στη μορφή

$$(5.7) \quad \mathbf{w} = \mathcal{C} e^{\lambda t}$$

όπου $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, λ ιδιοτιμή του πίνακα A . Η στάσιμη φάση $\mathbf{w} = 0$ είναι γραμμικά σταθερή εάν $Re \lambda < 0$ αφού σε αυτή την περίπτωση η διαταραχή $\mathbf{w} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Αντικαθιστώντας την (5.7) στην (5.6) έχουμε

$$(5.8) \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma f_u & \gamma f_v \\ \gamma g_u & \gamma g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές ορίζονται ως οι λύσεις της εξίσωσης

$$|\gamma A - \lambda I| \leftrightarrow \begin{vmatrix} \gamma f_u - \lambda & \gamma f_v \\ \gamma g_u & \gamma g_v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$\lambda^2 - \gamma(f_u + g_v)\lambda + \gamma^2|A| = 0$$

ή

$$(5.9) \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\gamma[(f_u + g_v) \pm \{(f_u + g_v)^2 - 4|A|\}^{1/2}].$$

Τη γραμμική σταθερότητα δηλαδή $Re\lambda < 0$ την εξασφαλίζουν οι σχέσεις

$$(5.10) \quad trA = f_u + g_v < 0, |A| = f_u g_v + f_v g_u > 0.$$

Αφού (u_0, v_0) είναι συναρτήσεις των παραμέτρων των kinetics, αυτές οι ανισότητες θέτουν ορισμένους περιορισμούς στις παραμέτρους.

Τώρα θεωρούμε το πλήρες σύστημα αντίδρασης διάχυσης (5.2) και γραμμικοποιούμε ξανά γύρω από τη στάσιμη φάση, η οποία με την αντι-κατάσταση

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$$

είναι $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ και παίρνουμε

$$(5.11) \quad \mathbf{w}_t = \gamma A \mathbf{w} + D \nabla^2 \mathbf{w}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες πρώτα ορίζουμε $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ να είναι η ανεξάρτητη του χρόνου λύση του χωρικού προβλήματος ιδιοτιμών που ορίζεται ως

$$(5.12) \quad \nabla^2 \mathbf{W} + k^2 \mathbf{W} = 0 \text{ στο } B, \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{W} = 0 \text{ στο } \partial B,$$

όπου k η ιδιοτιμή.

Για παράδειγμα, εάν το χωρίο είναι μονοδιάστατο $0 \leq x \leq a$, η λύση θα ήταν της μορφής $\mathbf{W}_{\mathbf{n}} = C \cos(\frac{n\pi x}{a})$, $n \in \mathbb{Z}$ η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες για $x = 0$ και $x = a$. Οι ιδιοτιμές σ' αυτή την περίπτωση είναι $k_n = \frac{n\pi}{a}$. Άρα, η ποσότητα $\frac{1}{k_n} = \frac{a}{n\pi}$ είναι το μέτρο της κυματοειδούς μορφής: η ιδιοτιμή k_n καλείται *κυματικός αριθμός* και το $\frac{1}{k_n}$ είναι ανάλογο του μήκους κύματος ω . Σε αυτό το παράδειγμα $\omega = \frac{2\pi}{k} = \frac{2a}{n}$. Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το όρο *κυματικός αριθμός* όταν αναφερόμαστε στο k . Σε πεπερασμένα χωρία υπάρχει διακριτό σύνολο κυματικών αριθμών καθώς $n \in \mathbb{Z}$.

Έστω $\mathbf{W}_{k_i}(\mathbf{r})$ η ιδοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στον κυματικό αριθμό k_i με $i = 1, 2, 3, \dots$ για τις οποίες υποθέτουμε $k_1 < k_2 < k_3 \dots$. Κάθε ιδιοσυνάρτηση \mathbf{W}_{k_i} ικανοποιεί συνθήκες μηδενικής ροής.

Καθώς το πρόβλημα είναι γραμμικό ψάχνουμε τώρα για λύσεις $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ της (5.11) της μορφής

$$(5.13) \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} c_{\mu} e^{\lambda t} \mathbf{W}_{k_{\mu}}(\mathbf{r}),$$

όπου οι σταθερές c_{μ} ορίζονται από ένα ανάπτυγμα Fourier των αρχικών συνθηκών σε όρους της $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$ και λ είναι η ιδιοτιμή που καθορίζει τη χρονική ανάπτυξη.

Αντικαθιστώντας την (5.13) στην (5.11) με τη βοήθεια της (5.12) και απαλείφοντας το $e^{\lambda t}$, παίρνουμε, για κάθε $k \in \{k_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{W}_k &= \gamma A \mathbf{W}_k + D \nabla^2 \mathbf{W}_k = \\ &= \gamma A \mathbf{W}_k - D k^2 \mathbf{W}_k. \end{aligned}$$

Απαιτούμε μη τετριμμένες λύσεις για το \mathbf{W}_k οπότε το λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$|\lambda I - \gamma A + D k^2| = 0$$

ή

$$(5.14) \quad \lambda^2 + \lambda[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)] + h(k^2) = 0$$

όπου

$$h(k^2) = dk^4 - \gamma(df_u + g_v)k^2 + \gamma^2|A|.$$

Η στάσιμη φάση είναι γραμμικά σταθερή εάν και οι δύο λύσεις της (5.14) έχουν $Re\lambda < 0$. Έχουμε ήδη θέσει τους περιορισμούς ώστε απουσία διάχυσης η στάσιμη φάση να είναι γραμμικά σταθερή που είναι $Re\lambda(k^2 = 0) < 0$. Σε αυτή την περίπτωση η (5.14) ταυτίζεται με την (5.9) οπότε η απαίτηση $Re\lambda < 0$ έδωσε τις συνθήκες (5.10). Για να είναι η στάσιμη φάση ασταθής σε χωρικές μεταβολές απαιτούμε $Re\lambda(k) > 0$ για κάποιο $k \neq 0$. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί είτε εάν ο συντελεστής του λ στη (5.14) είναι αρνητικός είτε εάν $h(k^2) < 0$ για κάποιο $k \neq 0$. Καθώς όμως $f_u + g_v < 0$ από τις συνθήκες (5.9) και $k^2(1+d) > 0$ για κάθε $k \neq 0$ έχουμε ότι $k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v) > 0$ άρα η μόνη περίπτωση ώστε $Re\lambda(k) > 0$ για κάποιο $k \neq 0$ είναι να έχουμε $h(k^2) < 0$ για κάποιο $k \neq 0$. Πράγματι το λ δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{-[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)] \pm \{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4h(k^2)\}^{1/2}}{2}$$

και είναι φανερό ότι εάν $h(k^2) > 0$ για κάθε $k \neq 0$ τότε $Re\lambda < 0$.

Αφού η (5.9) απαιτεί $|A| > 0$ η μόνη περίπτωση για να έχω $h(k^2) < 0$ είναι εάν $(df_u + g_v) < 0$. Αφού όμως $f_u + g_v > 0$ από τη (5.9) η παραπάνω

σχέση συνεπάγεται ότι $d \neq 1$ και ότι f_u, g_v είναι ετερόσημοι. Άρα μια συμπληρωματική συνθήκη σε αυτές της (5.9) είναι

$$(5.15) \quad f_u + g_v > 0 \Rightarrow d \neq 1.$$

Εάν π.χ. υποθέσουμε ότι $f_u > 0, g_v < 0$ τότε η συνθήκη στη (5.10) και η τελευταία ανισότητα (5.15) απαιτούν ο λόγος των συντελεστών διάχυσης να είναι μεγαλύτερος της μονάδας δηλ. $d > 1$. Για παράδειγμα σε όρους του μηχανισμού ενεργοποίησης -αναχαίτισης αυτό σημαίνει ότι ο αναχαιτιστής πρέπει να διαχέεται γρηγορότερα από τον ενεργοποιητή.

Η ανισότητα (5.15) είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για να ισχύει $Re\lambda > 0$. Για να έχω $h(k^2) < 0$ για κάποιο $k \neq 0$, το ελάχιστο h θα πρέπει να είναι αρνητικό. Από τη (5.14) με παραγωγή ως προς k^2 παίρνω ότι

$$(5.16) \quad h_{min} = \gamma^2 \left[|A| - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right], \quad k^2 = k_m^2 = \gamma \frac{df_u + g_v}{2d}.$$

Ετσι η συνθήκη ότι $h(k^2) < 0$ για κάποιο $k^2 \neq 0$ είναι

$$(5.17) \quad \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > |A|.$$

Όταν $h_{min} = 0$ ζητάμε $\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} = |A|$ σχέση από την οποία μπορεί να προκύψει μια εξίσωση που ορίζει την κρίσιμη τιμή του λόγου διάχυσης d_c ως την κατάλληλη ρίζα της εξίσωσης

$$(5.18) \quad d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0$$

Ο κρίσιμος κυματικός αριθμός δίνεται τότε από την εξίσωση

$$(5.19) \quad k_c^2 = \gamma \frac{d_c f_u + g_v}{2d_c} = \gamma \left[\frac{|A|}{d_c} \right]^{1/2} = \gamma \left[\frac{f_u g_v - f_v g_u}{d_c} \right]^{1/2}$$

Όταν $h(k^2) < 0$, η (5.14) έχει μια λύση λ που είναι θετική για το ίδιο εύρος των κυματικών αριθμών που κάνουν το h αρνητικό. Από τη σχέση (5.14) με $d > d_c$ το εύρος των ασταθών κυματικών αριθμών $k_{\mu_1}^2 < k^2 < k_{\mu_2}^2$ καθορίζεται από τις ρίζες της $h(k^2) = 0$ και δίνεται από τη σχέση:

$$(5.20) \quad \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\gamma}{2d} \left[(df_u + g_v) - \left\{ (df_u + g_v)^2 - 4d|A| \right\}^{1/2} \right] < k_{\mu_1}^2 < k^2 \\ &< k_{\mu_2}^2 < \frac{\gamma}{2d} \left[(df_u + g_v) + \left\{ (df_u + g_v)^2 - 4d|A| \right\}^{1/2} \right] = k_2^2. \end{aligned}$$

Η έκφραση $\lambda = \lambda(k^2)$ ονομάζεται μια σχέση διασποράς (dispersion relation). Παρατηρούμε ότι, ανάμεσα στο εύρος της αστάθειας, η ποσότητα $Re\lambda(k^2) > 0$ λαμβάνει μέγιστο για τον κυματικό αριθμό k_m που προκύπτει από την (5.16) με $d > d_c$. Αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει ένας μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης στο άθροισμα (5.13) για το \mathbf{w} . Την ιδιότητα αυτή θα εξερευνήσουμε παρακάτω.

Εάν θεωρήσουμε τη λύση \mathbf{w} που δίνεται από τη (5.13), η κυρίαρχη συνεισφορά καθώς το t αυξάνει είναι εκείνοι οι όροι για τους οποίους $Re\lambda(k^2) > 0$ αφού όλοι οι άλλοι όροι τείνουν στο μηδέν εκθετικά. Από τη σχέση (5.20), καθορίζουμε το εύρος, $k_1^2 < k_{\mu_1}^2 < k^2 < k_{\mu_2}^2 < k_2^2$, όπου $h(k^2) < 0$, δηλαδή $Re\lambda(k^2) > 0$ και έτσι από τη (5.16) κρατώντας τους όρους του αθροίσματος με την κυρίαρχη συνεισφορά έχουμε

$$(5.21) \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \sim \sum_{\mu_1}^{\mu_2} \mathbf{c}_{\mu} e^{\lambda(k_{\mu}^2)t} \mathbf{W}_{k_{\mu}}(\mathbf{r}) \text{ για μεγάλο } t.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μελέτη και γραφική παράσταση της σχέσης διασποράς μας δίνουν επαρκείς πληροφορίες σχετικά με τις ιδιοτιμές και κατά συνέπεια τις χωρικές μορφές που είναι γραμμικά ασταθείς και μεγαλώνουν εκθετικά με το χρόνο. Πρέπει να λαβουμε υπόψη ότι με προβλήματα ιδιοτιμών σε πεπερασμένα χωρία, οι κυματικοί αριθμοί είναι διακριτοί και μόνο συγκεκριμένα k στο εύρος (5.20) είναι αποδεκτά.

Η βασική υπόθεση, και αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει, είναι ότι αυτές οι γραμμικά ασταθείς ιδιοσυναρτήσεις στην (5.21) οι οποίες μεγαλώνουν εκθετικά με το χρόνο, τελικά θα είναι φραγμένες από τους μη γραμμικούς όρους στις εξισώσεις αντίδρασης διάχυσης και θα προκύψει μια χωρικά ετερογενής λύση της τελικής στάσιμης φάσης. Ένα στοιχείο κλειδί αυτής της υπόθεσης είναι η ύπαρξη ενός καθορισμένου συνόλου (ή συμπαγούς χωρίου) για τις f και g .

Ανακεφαλαιώνοντας, σε αυτή την ενότητα ανακαλύψαμε τις συνθήκες για το σχηματισμό χωρικών μορφών από μηχανισμούς αντίδρασης διάχυσης μεταξύ δύο ειδών βάσει του συστήματος (5.2). Επαναλαμβάνουμε τις συνθήκες αυτές και υπενθυμίζουμε ότι όλες οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στη στάσιμη φάση (u_0, v_0) .

$$(5.22) \quad \begin{aligned} f_u + g_v &< 0, \\ f_u g_v - f_v g_u &> 0, \\ f_u + g_v &> 0, \\ (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) &> 0. \end{aligned}$$

Οι παράγωγοι f_u και g_v θα πρέπει να είναι ετερόσημες και εάν έχουμε για παράδειγμα $f_u > 0$ και $g_v < 0$ από τις παραπάνω σχέσεις θα πάρουμε $d > 1$.

5.2. Αναλυτική περιγραφή σχηματισμού μορφών σε ένα σύστημα Αντίδρασης Διάχυσης

Ο σκοπός μας στην ενότητα αυτή είναι να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα και να εξάγουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα που περιγράφει την αλληλεπίδραση Οικονομικής - Τραπεζικής δραστηριότητας $U(x, t)$, $V(x, t)$ αντίστοιχα, μπορεί να οδηγήσει σε σχηματισμό μορφών. Το παραπάνω μοντέλο όπως περιγράψαμε στην Ενότητα I μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σύστημα αντίδρασης διάχυσης:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \delta pqUV - C(U) + D_U \nabla^2 U \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= AV(1 - \frac{V}{K}) - pqUV + D_V \nabla^2 V \end{aligned}$$

$$x \in Z = [0, a], U(x, 0), V(x, 0) \text{ δοσμένα,} \\ \nabla U = \nabla V = 0 \text{ για } x = 0, a$$

όπου A, B, δ, p, q , θετικές σταθερές όπως αυτές έχουν περιγραφεί στο πρώτο Κεφάλαιο, D_U, D_V οι συντελεστές διάχυσης της Τραπεζικής και της Οικονομικής δραστηριότητας αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $C(U)$ είναι η συνάρτηση κόστους για την Τραπεζική δραστηριότητα για την οποία ισχύει η σχέση $C(U) = \overline{C(U)}U$ όπου $\overline{C(U)}$ η συνάρτηση μέσου κόστους για την Τραπεζική δραστηριότητα. Για το μοντέλο μας υποθέτουμε ότι η μορφή της $\overline{C(U)}$ είναι παραβολή ($\overline{C(U)} = b_1 U^2 + b_2 U + b_3, b_1 > 0$). Για απλούστευση στη μορφή του συστήματος προχωράμε στις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$v = \frac{V}{K}, u = \frac{pqU}{A}, t^* = At, x^* = x\left(\frac{A}{D_U}\right)^{1/2} \\ d^* = \frac{D_V}{D_U}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις και παραλείποντας τους αστερίσκους για απλούστευση των συμβολισμών το σύστημα γίνεται:

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\delta pqK}{A} uv - \frac{\overline{c(u)}}{A} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= v(1 - v - u) + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$x \in Z_1 = [0, p], u(x, 0), v(x, 0) \text{ δοσμένα,} \\ \nabla u = \nabla v = 0 \text{ για } x = 0, p$$

Ως στάσιμες φάσεις του συστήματος προκύπτουν τα σημεία:

- (1) $(0, 0)$: μηδενική συγκέντρωση οικονομικής και τραπεζικής δραστηριότητας,
- (2) $(0, 1)$: απουσία τραπεζικής δραστηριότητας και η οικονομική δραστηριότητα σε συγκέντρωση ίση με τη φέρουσα ικανότητα του χωρίου
- (3) $(1 - v_0, \frac{c(u_0)}{\delta pqK})$: συνύπαρξη οικονομικής και τραπεζικής δραστηριότητας εάν $v_0 < 1$.

Ακολουθώντας το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$f(u, v) = \frac{\delta pqK}{A} uv - \frac{\overline{c(u)}}{A} u$$

$$g(u, v) = v(1 - v - u)$$

και

$$f_u = \frac{\delta pqK}{A} v - \frac{(\overline{c(u)})'}{A} u - \frac{\overline{c(u)}}{A}$$

$$f_v = \frac{\delta pqK}{A} u$$

$$g_u = -v$$

$$g_v = 1 - 2v - u$$

Αρχικά μελετώ το σύστημα απουσία διάχυσης. Γραμμικοποιώ γύρω από κάθε στάσιμη φάση:

- $(u_0, v_0) = (0, 0)$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - 0 \\ v - 0 \end{pmatrix} \text{ και για } |\mathbf{w}| \text{ μικρό έχουμε } \mathbf{w}_t = A\mathbf{w} \text{ όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{-\overline{c(0)}}{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής \mathbf{w} ανάλογο του $e^{\lambda t}$ όπου λ οι ιδιοτιμές του πίνακα A δηλ. έχουμε $|A - \lambda I| = 0$ και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{-\overline{c(0)}}{A}$. Στο μοντέλο μας $\frac{\overline{c(0)}}{A} > 0$ δηλ. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ οπότε στο σημείο $(0, 0)$ το σύστημα παρουσιάζει σαγματικό σημείο που είναι πάντα ασταθές.

- $(u_0, v_0) = (0, 1)$ με διαδικασία όμοια με την προηγούμενη οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -1 < 0$ και $\lambda_2 = \frac{\delta pqK - \overline{c(0)}}{A}$. Σύμφωνα με το μοντέλο μας ο όρος δpqK είναι τα έσοδα μιας μονάδας Τραπεζικής δραστηριότητας από K (η φέρουσα ικανότητα του χωρίου) μονάδες οικονομικής δραστηριότητας που μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα είναι μεγαλύτερα από το μέσο κόστος της

Τραπεζικής δραστηριότητας για $u = 0$. Δηλαδή $\frac{\delta pqK - c(0)}{A} > 0$ και πάλι έχω ιδιομορφία σαγματικού σημείου που είναι ασταθής.

- $(u_0, v_0) = (1 - v_0, \frac{c(u_0)}{\delta pqK})$. Για απλούστευση των συμβολισμών θα γραφουμε $c(u_0)$ αντί $\overline{c(u_0)}$ και έχουμε

$$(5.25) \quad \begin{aligned} f_u(u_0, v_0) &= -\frac{c'(u_0)u_0}{A}, \quad f_v(u_0, v_0) = \frac{\delta pqK}{A}u_0 \\ g_u(u_0, v_0) &= -v_0, \quad g_v(u_0, v_0) = -v_0. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη του μέσου κόστους για την Τραπεζική δραστηριότητα είναι παραβολή και ότι το σημείο (u_0, v_0) βρίσκεται στο φθίνον κομμάτι της, ενώ το (u_0, v_0) είναι το μοναδικό σημείο τομής των καμπυλών $f(u, v)$ και $g(u, v)$ στο θετικό τεταρτημόριο. Στην προηγούμενη ενότητα εξάγαμε τις συνθήκες για να έχω αστάθεια προκαλούμενη από διάχυση. Θα δούμε τώρα πως αυτές εφαρμόζονται στο μοντέλο μας.

$f_u + g_v < 0$: $-\frac{c'(u_0)u_0}{A} - v_0 < 0$ ή ισοδύναμα $c'(u_0)u_0 + Av_0 > 0$ η οποία μπορεί να ισχύει καθώς η καμπύλη $c(u)$ μπορεί να επιλεγεί ώστε $-1 < c'(u_0) < 0$ και το A κατάλληλα μεγάλο.

$f_u g_v - f_v g_u > 0$: $c'(u_0) + \delta pqK > 0$ που ισχύει καθώς ο K είναι η φέρουσα ικανότητα του χωρίου σε οικονομική δραστηριότητα κατα συνέπεια μπορεί να επιλεγεί κατάλληλα μεγάλο.

$df_u + g_v > 0$: $dc'(u_0)u_0 + Av_0 < 0$ που μπορεί να ισχύει με κατάλληλη επιλογή του $d > 1$.

$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0$: $\frac{(dc'(u_0)u_0 + Av_0)^2}{A^2} - 4d\frac{u_0 v_0}{A}(c'(u_0) + \delta pqK) > 0$

Οι παραπάνω ανισότητες ορίζουν κάποιο χωρίο στο χώρο των παραμέτρων του συστήματος, που ονομάζεται ο χώρος του σχηματισμού μορφών (ή χώρος Turing) εντός του οποίου ο μηχανισμός είναι ασταθής σε ορισμένες χωρικές διαταραχές των δοσμένων κυματικών αριθμών k , που θα καθορίσουμε παρακάτω.

Από την παραπάνω ανάλυση του προβλήματος διαπιστώσαμε ότι από τα τρία στάσιμα σημεία, μόνο για το σημείο $(u^*, v^*) = (1 - v_0, \frac{c(u_0)}{\delta pqK})$ η ομογενής στάσιμη φάση είναι σταθερή σε μικρές διαταραχές. Επομένως για το σημείο αυτό θα εξετάσουμε την δυνατότητα εφαρμογής του μηχανισμού Turing για τη δημιουργία χωρικών μορφών.

Ας θεωρήσουμε, το σχετικό με το σύστημά μας, πρόβλημα ιδιοτιμών (5.12) και ας επιλέξουμε το χωρίο να είναι $x \in (0, p)$ με $p > 0$. Τότε έχουμε

$$(5.26) \quad \mathbf{W}_{xx} + k^2 \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{W}_x = 0 \text{ για } x = 0, p$$

οι λύσεις της οποίας είναι

$$(5.27) \quad \mathbf{W}_n(x) = A_n \cos(n\pi x/p), n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

όπου τα A_n είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι ιδιοτιμές είναι οι διακριτοί κυματικοί αριθμοί $k = n\pi/p$ που βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές που καθορίζονται από τη (5.20), τότε οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{W}_n(x)$ είναι γραμμικά ασταθείς. Έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις (5.27) με μήκη κύματος $\omega = 2\pi/k = 2p/n$ είναι εκείνες που αρχικά μεγαλώνουν με το χρόνο ως $\exp\{\lambda([n\pi/p]^2)t\}$.

Η συλλογή των κυματικών αριθμών από την (5.20), με την (5.25), δίνεται από τη σχέση:

$$(5.28) \quad k_1^2 < k < k_2^2$$

όπου τα k_1, k_2 δίνονται από τη σχέση (5.20). Αναφορικά με τα μήκη κύματος, το εύρος των ασταθών \mathbf{W}_n έχουν μήκη κύματος φραγμένα από τα ω_1 και ω_2 , όπου

$$(5.29) \quad \frac{4\pi^2}{k_1^2} = \omega_1^2 > \omega^2 = \left(\frac{2p}{n}\right)^2 > \omega_2^2 = \frac{4\pi^2}{k_2^2}.$$

Ο μικρότερος κυματικός αριθμός είναι, για $n = 1$, ο π/p .

Εάν δώσουμε καθορισμένες τιμές στις παραμέτρους μπορούμε να προσδιορίσουμε τα n που ικανοποιούν τη (5.28). Τότε η χωρικά ετερογενής λύση που προκύπτει θα είναι το άθροισμα των ασταθών μορφών, δηλαδή:

$$(5.30) \quad \mathbf{w}(x, t) \sim \sum_{n_1}^{n_2} \mathbf{C}_n \exp\left[\lambda\left(\frac{n^2\pi^2}{p^2}\right)t\right] \cos \frac{n\pi x}{p}.$$

Τώρα ας θεωρήσουμε τον τύπο των χωρικών μορφών που θα μπορούσαμε να περιμένουμε από την ασταθή λύση (5.30). Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι το μέγεθος του χωρίου είναι τέτοιο ώστε το εύρος των ασταθών κυματικών αριθμών δέχεται μόνο τον κυματικό αριθμό $n = 1$ οπότε από τη (5.27) η μόνη ασταθής μορφή είναι $\cos \frac{\pi x}{p}$ και η σχέση για το $\mathbf{w}(x, t)$ δίνεται από την (5.30) ως

$$(5.31) \quad \mathbf{w}(x, t) \sim \mathbf{C}_1 \exp\left[\lambda\left(\frac{\pi^2}{p^2}\right)t\right] \cos \frac{\pi x}{p}.$$

Μπορούμε να καθορίσουμε το \mathbf{C}_1 από τις αρχικές συνθήκες. Για να πάρουμε μια ιδέα, ας πάρουμε το \mathbf{C}_1 ως $(\varepsilon, \varepsilon)$ για κάποιο μικρό θετικό ε οπότε από την τελευταία σχέση και τον ορισμό του \mathbf{w} έχουμε

$$(5.32) \quad u(x, t) \sim u_0 + \varepsilon \exp\left[\lambda\left(\frac{\pi^2}{p^2}\right)t\right] \cos \frac{\pi x}{p}.$$

Αφού $\lambda(\frac{\pi^2}{p^2}) > 0$ καθώς t αυξάνει η παρέκλιση από την χωρικά ομογενή λύση δεν εκφυλίζεται και θα μπορούσε τελικά να μετατραπεί σε μια χωρική μορφή που είναι σαν μια απλή συνημιτονοειδής μορφή.

Εάν το χωρίο είναι αρκετά μεγαλύτερο ώστε να περιλαμβάνει μεγαλύτερο αριθμό ασταθών κυματικών αριθμών τότε η χωρική μορφή είναι πιο πολύπλοκη. Με εκθετική αύξηση των λύσεων για όλους τους χρόνους στην (5.32) προκύπτει ότι $u \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Όμως υποθέτουμε ότι οι γραμμικά ασταθείς ιδιοσυναρτήσεις φράσσονται από τους μη γραμμικούς όρους και θα προκύψει μια χωρικά ετερογενής στάσιμη φάση. Η κύρια υπόθεση εδώ είναι η ύπαρξη ενός χωρίου που φράσσει τις $f(u, v), g(u, v)$ στο θετικό τεταρτημόριο. Έτσι το σύνολο φράγμα που περιορίζει τις $f(u, v), g(u, v)$ θα περιέχει και τις λύσεις (u, v) όταν η διάχυση είναι παρούσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Αριθμητική εφαρμογή

Για την αριθμητική εφαρμογή του μηχανισμού Turing στο μοντέλο μας χρησιμοποιήσαμε το σύστημα αντίδρασης διάχυσης (5.24) όπως αυτό κατασκευάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο δηλ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\delta pqK}{A}uv - \frac{\overline{c(u)}}{A}u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= v(1 - v - u) + d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

με συνθήκες μηδενικής ροής στο σύνορο του χωρίου και δοσμένες αρχικές συνθήκες και με $\frac{\overline{c(u)}}{\delta pqK} = \frac{35}{392}(x-3)^2 + \frac{1}{10}$, $\frac{\delta pqK}{A} = 7.9$, $d = 6$.

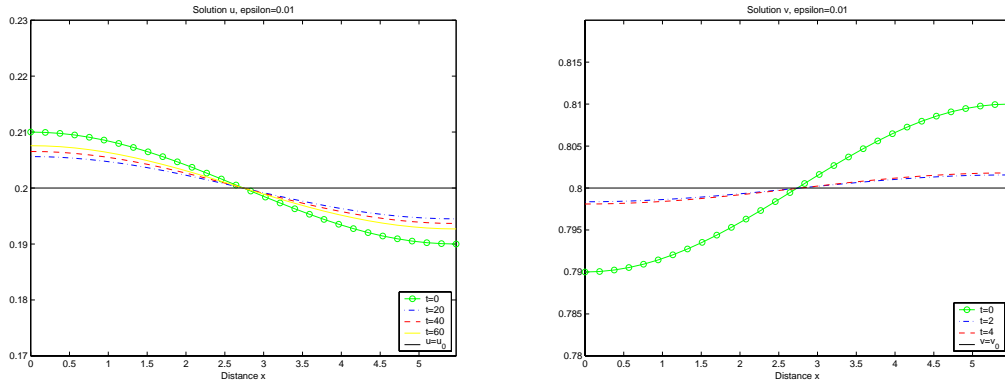
Για τις παραπάνω τιμές των συντελεστών η στάσιμη φάση του συστήματος είναι το σημείο $(u_0, v_0) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ ενώ ικανοποιούνται οι συνθήκες για αστάθεια προκαλούμενη από διάχυση.

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιήσαμε τη ρουτίνα **pdepe** της **Matlab** με $x \in Z = [0, \sqrt{30}]$, $t \in [0, 100]$ και

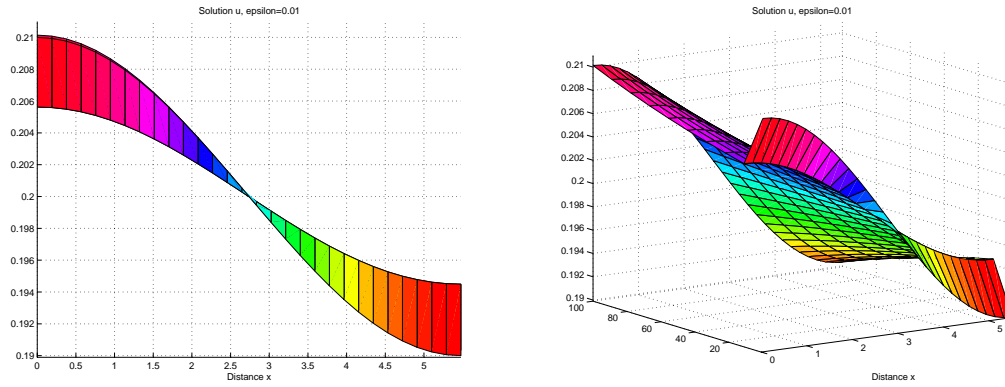
$$u(x, 0) = \frac{1}{5} + \varepsilon \cos \frac{\pi x}{\sqrt{30}}, \quad v(x, 0) = \frac{4}{5} - \varepsilon \cos \frac{\pi x}{\sqrt{30}}.$$

Στο Παράρτημα (Δ) παρουσιάζουμε αναλυτικά το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε στην αριθμητική εφαρμογή.

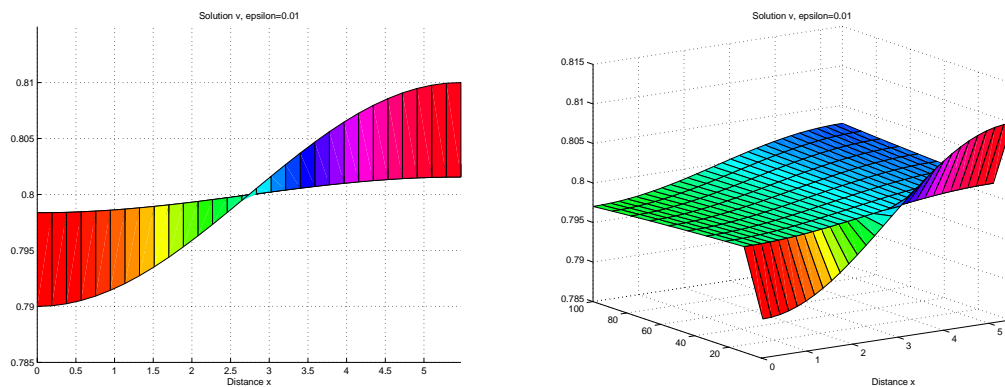
Στα παρακάτω σχήματα (6.1) (6.2) (6.3) φαίνεται η εξέλιξη των u και v σε σχέση με το χρόνο για $\varepsilon = 0.01$ όπου παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες οι λύσεις του συστήματός μας συγκλίνουν με $t \rightarrow \infty$ σε συνημιτονοειδείς μορφές επιβεβαιώνοντας τα θεωρητικά συμπεράσματά μας.



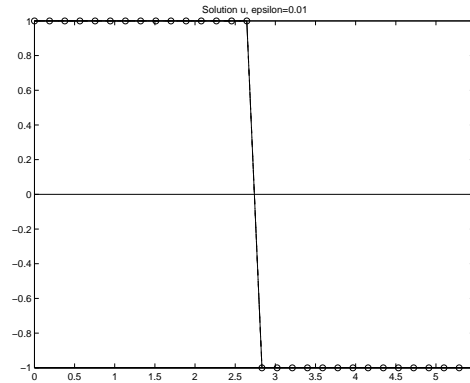
ΣΧΗΜΑ 6.1. Αριστερά: Η u σε διάφορες χρονικές στιγμές για $\varepsilon = 0.01$. Δεξιά: Η v σε διάφορες χρονικές στιγμές για $\varepsilon = 0,01$.



ΣΧΗΜΑ 6.2. Η εξέλιξη της u στο χρόνο και ο σχηματισμός της συνημιτονοειδούς μορφής.



ΣΧΗΜΑ 6.3. Η εξέλιξη της v στο χρόνο και ο σχηματισμός της συνημιτονοειδούς μορφής.



ΣΧΗΜΑ 6.4. Οι τιμές $+1$ αντιστοιχούν στα σημεία του χωρίου όπου $u > u_0$ και οι τιμές -1 αντιστοιχούν στα σημεία του χωρίου όπου $u < u_0$.

6.1. Πρόγραμμα για την Αριθμητική Εφαρμογή

```
function pdex4

format long; m = 0;p=30^0.5;

x=linspace(0,p,30);

t=linspace(0,100,10);

sol = pdepe(m,@pdex4pde,@pdex4ic,@pdex4bc,x,t); u1 = sol(:,:,1);
u2 = sol(:,:,2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u11 = sol(1,:,1); u12= sol(2,:,1); u13= sol(4,:,1); u14=
sol(6,:,1); u15 = sol(8,:,1); u16 = sol(10,:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u21 = sol(1,:,2); u22= sol(2,:,2); u23= sol(4,:,2); u24=
sol(6,:,2); u25 = sol(8,:,2); u26 = sol(10,:,2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u10=0.20; u20=1.0-u10; unstable1=ones(30,1)'*u10;
unstable2=ones(30,1)'*u20;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5
e1=sign(u11-unstable1); e2=sign(u12-unstable1);
e3=sign(u13-unstable1); e4=sign(u14-unstable1);
```

```
e5=sign(u12-ustable1); e6=sign(u12-ustable1);
```

```
e=zeros(6,30); e(1,:)=e1; e(2,:)=e2; e(3,:)=e3; e(4,:)=e4;
e(5,:)=e5; e(6,:)=e6;
```

```
area(e') title('Solution u, epsilon=0.01'); colormap summer pause
```

```
plot(x,e1,'-og',x,e2,'-.b',x,e3,'--r',x,ustable1-ustable1,'-k');
title('Solution u, epsilon=0.01'); axis([0,30^0.5,-1,1]); pause
plot(x,e3,'-og',x,e4,'-.b',x,e5,'--r',x,ustable1-ustable1,'-k');
title('Solution u, epsilon=0.01'); axis([0,30^0.5,-1,1]); pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
plot(x,u11,'-og',x,u12,'-.b',x,u13,'--r',x,u14,'-y',x,ustable1,'-k');
h=legend('t=0','t=20','t=40','t=60','u=u_0',4); title('Solution u,
epsilon=0.01'); xlabel('Distance x'); axis([0,30^0.5,0.17,0.23]);
pause
```

```
plot(x,u14,'-og',x,u15,'-.b',x,u16,'--r',x,ustable1,'-k');
axis([0,30^0.5,0.17,0.23]);
%axis auto
h=legend('t=6','t=8','t=10','u=u_0',4); title('Solution u,
epsilon=0.01'); xlabel('Distance x'); pause
```

```
%figure
surf(x,t,u1); view(0,0); title('Solution u, epsilon=0.01');
xlabel('Distance x'); colormap hsv
axis([0,30^0.5,1,100,0.1899,0.211]); pause
%plot(x,u13,'-',x,u14,'--',x,u15,'.-',x,ustable1,'.-');
%axis([0,30^0.5,0.199,0.201]);
%pause
%plot(x,u1,'-',x,u2,'--',x,u3,'.-',x,ustable,'.-');
%axis([0,30^0.5,0.199,0.201]);
%plot(x,u1,'-',x,u2,'-');
%u1,u4
%title('u1(x,t)');
%xlabel('Distance x');
```

```

ylabel('Time t');

plot(x,u21,'-og',x,u22,'-.b',x,u23,'--r',x,ustable2,'-k');
axis([0,30^0.5,0.78,0.82]);
%axis auto
h=legend('t=0','t=2','t=4','v=v_0',4); title('Solution v,
epsilon=0.01'); xlabel('Distance x'); pause

plot(x,u24,'-og',x,u25,'-.b',x,u26,'--r',x,ustable2,'-k');
axis([0,30^0.5,0.78,0.82]);
%axis auto
h=legend('t=6','t=8','t=1','v=v_0',4); title('Solution v,
epsilon=0.01'); xlabel('Distance x'); pause

%figure
surf(x,t,u2); view(0,0); title('Solution v, epsilon=0.01');
xlabel('Distance x'); axis([0,30^0.5,1,100,0.785,0.815]);
%plot(x,u2,'--');
%title('u2(x,t)');
%xlabel('Distance x');
%ylabel('Time t');

% -----
function [c,f,s] = pdex4pde(x,t,u,DuDx) c = [1; 1];

%d=25;
%D1=1;
%D2=d;
%f = [D1; D2] .* DuDx;
%%a=11.0/9.0;
%%b=0.25;
%F1 = (5)*u(1)*u(2)-(5)*(a*(u(1)-0.5)^2+b)*u(1);
%F2 = (1-u(1)-u(2))*u(2);
%a=99.3/11786.91;b=100-a*11881;
%F1 = (14)*u(1)*u(2)-(14)*(a*(u(1)-10)^2+b)*u(1);
%F2 = (1-u(1)-u(2))*u(2);

```

```

%s1=u(1)^2;
%F1=1*(a-u(1)+(s1)*u(2));
%F2=1*(b-(s1)*u(2));
%%%%%%%%%%%%%
a=35.0/392.0; d=6.0; D1=1.0; D2=d; f = [D1; D2] .* DuDx;
b=1.0/10.0; F1 = (7.9)*u(1)*u(2)-(7.9)*(a*(u(1)-3.0)^2+b)*u(1); F2
= (1.0-u(1)-u(2))*u(2); s = [F1; F2];
% -----
function u0 = pdex4ic(x); u0 =
[0.2+(0.01)*cos(pi*x/30^0.5);0.8-(0.01)*cos(pi*x/30^0.5)];
%u0 = [0.20+(0.01)*cos(pi*x/30^0.5);(1.0-0.20)+(0.01)*cos(pi*x/30^0.5)];
%u0=[1;0];
% -----
function [pl,q1,pr,qr] = pdex4bc(xl,ul,xr,ur,t) pl = [0; 0]; q1 =
[1; 1]; pr = [0; 0]; qr = [1; 1];

```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μη ύπαρξη χωρικών μορφών σε Συστήματα Αντίδρασης Διάχυσης: Γενικά και Ειδικότερα αποτελέσματα

Είδαμε στις προηγούμενες ενότητες πως Συστήματα Αντίδρασης - Διάχυσης με συνοριακές συνθήκες μηδενικής ροής θα μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα πλούσιο φάσμα χωρικών μορφών εάν οι παράμετροι και οι συναρτήσεις $f(u, v)$ και $g(u, v)$ (kinetics) ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες: βασικά οι συντελεστές διάχυσης των αντιδρώντων θα έπρεπε να είναι διαφορετικοί. Εδώ θα δείξουμε ότι για συγκεκριμένα συστήματα πολλαπλών ειδών η μορφογένεση μπορεί να καταστραφεί εάν η διάχυση είναι αρκετά μεγάλη. Αυτό είναι διαισθητικά αυτό που θα μπορούσαμε να περιμένουμε, όμως δεν είναι προφανές εάν οι συντελεστές διάχυσης είναι διαφορετικοί. Αυτό θα αποδείξουμε εδώ. Η ανάλυση, όπως θα δείξουμε δίνει μια επιπλέον συνθήκη που αφορά το *χρόνο ανάπαυσης των kinetics* του μηχανισμού (kinetic relaxation time).

Αρχικά θα θεωρήσουμε το γενικό μονοδιάστατο σύστημα Αντίδρασης - Διάχυσης δύο ειδών:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} u_t &= f(u, v) + D_1 u_{xx} \\ v_t &= g(u, v) + D_2 v_{xx} \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες και συνοριακές συνθήκες μηδενικής ροής:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= u_x(1, t) = v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned}$$

όπου $u'_0(x)$ και $v'_0(x)$ είναι μηδέν για $x = 0$ και $x = 1$. Ορίζουμε μία συνάρτηση ενέργειας E ως εξής:

$$(7.3) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2 + v_x^2) dx.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_0^1 (u_x u_{xt} + v_x v_{xt}) dx \\
&= [u_t u_x + v_t v_x]_0^1 - \int_0^1 (u_{xx} u_t + v_{xx} v_t) dx \\
&= - \int_0^1 (u_{xx} (f + D_1 u_{xx}) + v_{xx} (g + D_2 v_{xx})) dx \\
&= - [u_x (f + D_1 u_{xx}) + v_x (g + D_2 v_{xx})]_0^1 + \\
&\quad + \int_0^1 (u_x (f + D_1 u_{xx})_x + v_x (g + D_2 v_{xx})_x) dx \\
&= [u_x D_1 u_{xx} + v_x D_2 v_{xx}]_0^1 - \int_0^1 (D_1 u_{xx}^2 + D_2 v_{xx}^2) dx + \\
&\quad + \int_0^1 [f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + (f_v + g_u) u_x v_x] dx \\
&\leq - \int_0^1 (D_1 u_{xx}^2 + D_2 v_{xx}^2) dx + \\
&\quad + \int_0^1 [f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + \frac{1}{2} (f_v + g_u) (u_x^2 + v_x^2)] dx
\end{aligned}$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις έχουμε λάβει υπόψη τις συνθήκες μηδενικής ροής.

Τώρα ορίζουμε τις ποσότητες

$$(7.4) \quad d = \min(D_1, D_2), \quad m = \max_{u,v} (f_u^2 + f_v^2 + g_u^2 + g_v^2)^{1/2},$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
(7.5) \quad \frac{dE}{dt} &\leq -d \int_0^1 (u_{xx}^2 + v_{xx}^2) dx + 4m \int_0^1 (u_x^2 + v_x^2) dx \\
&\leq (4m - 2\pi^2 d) E,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$(7.6) \quad \int_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx$$

η οποία αποδεικνύεται στο Παράρτημα [Γ].

Από την ανισότητα (7.5) βλέπουμε ότι εάν ο ελάχιστος συντελεστής διάχυσης d όπως αυτός ορίζεται από την (7.4), είναι αρκετά μεγάλος ώστε $(4m - 2\pi^2 d) < 0$ τότε $\frac{dE}{dt} < 0$, το οποίο σημαίνει ότι $E \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ δεδομένου ότι $E(t) \geq 0$. Από τον ορισμό του $E(t)$ αυτό συνεπάγεται ότι

$u_x \rightarrow 0$ και $v_x \rightarrow 0$ δηλαδή έχουμε χωρική ομοιογένεια στις λύσεις u και v καθώς $t \rightarrow \infty$. Το αποτέλεσμα δεν είναι ακριβές καθώς υπάρχουν πολλές επιλογές για το m , η σχέση (7.4) είναι μόνο ένα παράδειγμα. Ο σκοπός του αποτελέσματος αυτού είναι να δείξει ότι είναι δυνατό για τη διάχυση να καταστρέψει κάθε χωρική ετερογένεια.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ανάλογο του παραπάνω αποτελέσματος για γενικά συστήματα αντίδρασης διάχυσης. Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$(7.7) \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D\nabla^2\mathbf{u},$$

όπου \mathbf{u} , με συντεταγμένες u_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, είναι το διάνυσμα των συγκεντρώσεων των πληθυσμών, και D είναι ένας διαγώνιος πίνακας των θετικών συντελεστών διάχυσης D_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και \mathbf{f} είναι οι μη γραμμικές kinetics. Τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε ισχύουν ακόμα για έναν πίνακα διάχυσης με μερικούς όρους διασταυρούμενης διάχυσης, αλλά για απλότητα εδώ ασχολούμαστε μόνο με την (7.7). Οι συνθήκες μηδενικής ροής και οι αρχικές συνθήκες για το \mathbf{u} είναι:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0, \text{ στο } \partial B, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}),$$

όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα στο ∂B . Όπως προηγούμενα, υποθέτουμε ότι όλες οι λύσεις \mathbf{u} είναι φραγμένες για κάθε $t \geq 0$. Πρακτικά αυτό εξασφαλίζεται εάν υπάρχει ένα περιορισμένο σύνολο για τα kinetics αντίδρασης.

Τώρα γενικεύουμε την προηγούμενη ανάλυση. Ορίζουμε την ενέργεια $E(t)$ ως

$$(7.8) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_B \|\nabla\mathbf{u}\|^2 d\mathbf{r},$$

όπου η νόρμα

$$(7.9) \quad \|\nabla\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla u_i|^2.$$

Έστω d η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα D , που στην περίπτωση διαγώνιου πίνακα είναι απλώς ο μικρότερος συντελεστής διάχυσης όλων των ειδών. Τώρα ορίζουμε

$$(7.10) \quad m = \max_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{u})\|,$$

όπου \mathbf{u} παίρνει όλες τις δυνατές τιμές των λύσεων.

Παραγωγίζοντας την $E(t)$, στη σχέση (7.8) και συμβολίζοντας με $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο των \mathbf{a} και \mathbf{b} παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 (7.11) \quad \frac{dE}{dt} &= \int_B \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}_t \rangle d\mathbf{r} \\
 &= \int_B \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f} + \nabla D \nabla^2 \mathbf{u} \rangle d\mathbf{r} \\
 &= \int_B \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla D \nabla^2 \mathbf{u} \rangle d\mathbf{r} + \int_B \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle d\mathbf{r} \\
 &= \int_{\partial B} \langle \mathbf{u}, D \nabla^2 \mathbf{u} \rangle - \int_B \langle \nabla^2 \mathbf{u}, \nabla^2 \mathbf{u} \rangle d\mathbf{r} + \int_B \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle d\mathbf{r} \\
 &\leq -d \int_B \|\nabla^2 \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{r} + mE.
 \end{aligned}$$

Στο Παράρτημα Γ δείχνουμε ότι όταν $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$ στο ∂B ισχύει,

$$(7.12) \quad \int_B |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 d\mathbf{r} \geq \mu \int_B \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{r},$$

όπου μ είναι η μικρότερη θετική ιδιοτιμή του

$$\nabla^2 \phi + \mu \phi = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad \mathbf{r} \text{ στο } \partial B,$$

όπου ϕ βαθμωτό. Με χρήση της παραπάνω ανισότητας στην (7.11) παίρνουμε

$$(7.13) \quad \frac{dE}{dt} \leq (m - 2\mu d)E \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \text{ εάν } m < 2\mu d$$

και έτσι ξανά, εάν ο μικρότερος συντελεστής διάχυσης είναι αρκετά μεγάλος αυτό συνεπάγεται ότι $\nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$ και έτσι όλες οι χωρικές μορφές τείνουν στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$. Ο Othmer(1977) επεσήμανε ότι η παράμετρος m , όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας των ρυθμών αντίδρασης σε αλλαγές στο \mathbf{u} καθώς $\frac{1}{m}$ είναι ο μικρότερος χρόνος ανάπαυλας των kinetics στο μηχανισμό αντίδρασης διάχυσης. Έτσι το αποτέλεσμα στην (7.13) που είναι $\frac{1}{m} > \frac{1}{2\mu d}$, συνεπάγεται ότι εάν ο μικρότερος χρόνος ανάπαυλας των kinetics είναι μεγαλύτερος από το μεγαλύτερο χρόνο διάχυσης τότε όλες οι χωρικές μορφές θα σβήσουν καθώς $t \rightarrow \infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συμπεράσματα

Η προσπάθειά μας στην εργασία αυτή ήταν να ερμηνεύσουμε και ίσως να προβλέψουμε την κατανομή στο χώρο, της τραπεζικής δραστηριότητας σε σχέση με την οικονομική δραστηριότητα του τόπου που μελετάμε.

Η ανάλυση του προβλήματος στα πλαίσια της εργασίας αυτής ήταν στοιχειώδης. Οι εξισώσεις που διέπουν τη χρονική εξέλιξη τόσο της οικονομικής όσο της τραπεζικής δραστηριότητας συμπεριέλαβαν κάποιες, αλλά όχι αρκετές, από τις παραμέτρους οι οποίες θα μπορούσαν να επηρεάσουν το σύστημα.

Η προσπάθεια ήταν, να μελετηθεί ο μηχανισμός και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ο σχηματισμός χωρικών μορφών είναι δυνατός και η επιλογή του μοντέλου ήταν τέτοια ώστε να είναι βολικό για μελέτη σε σχέση με αυτά που ήδη έχουν μελετηθεί ήδη στη βιβλιογραφία.

Είναι κατα τη γνώμη μας πολύ ενδιαφέρον να προσπαθήσει κανένας να μεταφέρει την εξελικτική θεωρία από τη Βιολογία και τη Χημεία στα Οικονομικά Μοντέλα, προσπαθώντας να μελετήσει την Οικονομική Γεωγραφία αλλά ακόμα να παρέμβει σε αυτήν επηρεάζοντας τις παραμέτρους.

Η αριθμητική εφαρμογή δείχνει ότι το εγχείρημα έχει βάση. Κατασκευάσαμε ένα οικονομικό μοντέλο αντίδρασης - διάχυσης Οικονομικής - Τραπεζικής δραστηριότητας στο οποίο διαπιστώσαμε αριθμητικά ότι ο μηχανισμός Turing μπορεί να εφαρμοστεί.

Μπορούμε να ελπίζουμε ότι η περεταίρω έρευνα θα μπορέσει να φτιάξει ένα μοντέλο αντίδρασης - διάχυσης το οποίο θα περιγράφει καλύτερα την αλληλεπίδραση των αντιδρώντων του συστήματος που μελετήσαμε και μια προσεκτική Στατιστική θα δώσει ακριβέστερες αρχικές συνθήκες.

Η εργασία αυτή στηρίχθηκε στην ιδέα ότι οι οικονομικές αγορές μπορούν να θεωρηθούν ότι προκύπτουν ως αυτοοργανωμένα συστήματα. Χαρακτηρίζονται από μεγάλο βαθμό πολυπλοκότητας και πολλούς πρωταγωνιστές των οποίων η ατομική συμπεριφορά και στρατηγική δεν μπορεί πλέον να καθοριστεί αλλά οι αλληλεπιδράσεις τους έχουν ως αποτέλεσμα την τάξη και τη δομή του συστήματος. Είναι ικανές να δημιουργήσουν μια « κουλτούρα » στην αγορά που επιτρέπει σε μια τοποθεσία να γίνει ένα εμπορικό κέντρο. Για να προκύψει η κουλτούρα αυτή και για να έχουμε εγκατάσταση Τραπεζών ή άλλων Ιδρυμάτων εκεί, θα πρέπει να

ικανοποιηθούν κάποιες συνθήκες. Οι θεωρίες της αυτο-οργάνωσης δίνουν έμφαση στην ύπαρξη δυνάμεων έλξης και απώθησης οι οποίες θα πρέπει να συνδυαστούν με κατάλληλο τρόπο ώστε να εξελιχθεί μια χωρική μορφή.

Η κυριότερη πρόκληση για περαιτέρω μελέτη θα είναι να καθορίσει κανείς εκείνους τους παράγοντες, να εξηγήσει τους τρόπους με τους οποίους αυτοί επηρεάζουν την ανατολή και τη δύση των αγορών και να εκμεταλλευτεί την ευκαιρία για διαμόρφωση πολιτικής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

Η εξίσωση Fisher - Kolmogorov και οι λύσεις στη μορφή διαδιδόμενων κυμάτων

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(A'.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = kU(1 - aU) + D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Θέτουμε $t^* = kt$, $x^* = x(\frac{k}{D})^{1/2}$ και παραλείποντας τα * για απλούστευση των συμβολισμών παίρνουμε την εξίσωση :

$$(A'.2) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = U(1 - aU) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

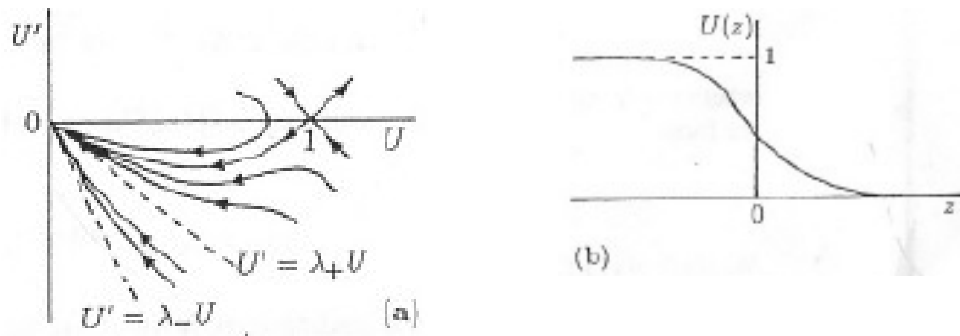
Οι ομογενείς περιπτώσεις για την παραπάνω εξίσωση είναι για $U = 0$ και $U = \frac{1}{a}$ που είναι ασταθής και σταθερή αντίστοιχα. Αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει να ψάξουμε για λύσεις σε κυματική μορφή traveling wavefront solutions για τις οποίες $0 \leq U \leq \frac{1}{a}$ ($U < 0$ δεν έχει νόημα για το πρόβλημα). Εάν υπάρχει μια λύση σε μορφή μεταδιδόμενου κύματος αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή $U(x, t) = u(z)$ με $z = x - ct$ όπου c η ταχύτητα του κύματος. Επειδή η (A'.2) δεν επηρεάζεται εάν $x \mapsto -x$, θα μπορούσε το c να είναι αρνητικό ή θετικό. Θεωρούμε $c \geq 0$, αντικαθιστούμε στη (A'.2) και έχουμε:

$$(A'.3) \quad u'' + cu' + u(1 - au) = 0$$

όπου $u' = \frac{du}{dz}$. Μια τυπική κυματοειδή λύση έχουμε όταν $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0$ και $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = \frac{1}{a}$. Θα μελετήσουμε την (A'.3) για u στο (u, v) επίπεδο φάσης όπου $u' = v$, $v' = -cv - u(1 - au)$ που δίνει τις τροχιές του επιπέδου φάσης ως λύσεις του

$$(A'.4) \quad \frac{dv}{du} = \frac{-cv - u(1 - au)}{v}$$

η οποία έχει δύο ιδιόμορφα σημεία (singular points) για (u, v) τα $(0, 0)$, $(\frac{1}{a}, 0)$ που είναι φυσικά στάσιμες φάσεις. Μια ανάλυση γραμμικής σταθερότητας (βλ. Παράρτημα Β) δείχνει ότι οι ιδιοτιμές λ για τα ιδιόμορφα σημεία είναι:



ΣΧΗΜΑ Α'.1. Αριστερά: Οι τροχιές στο επίπεδο φάσης για την κυματοειδή λύση με $c^2 > 4$. Δεξιά: Κυματοειδής λύση για την εξίσωση Fisher - Kolmogorov με $c > 2$.

Για το σημείο $(0, 0)$:

$$(A'.5) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[-c \pm (c^2 - 4)^{1/2}]$$

και οι τροχιές στο επίπεδο φάσης είναι:

$$\begin{cases} \text{σταθερός κόμβος (node) εάν, } & c^2 > 4. \\ \text{σταθερή έλικα (spiral) εάν, } & c^2 < 4. \end{cases}$$

Για το σημείο $(\frac{1}{a}, 0)$:

$$(A'.6) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[-c \pm (c^2 + 4)^{1/2}]$$

και έχω σαγματικό σημείο (saddle point).

Το σχήμα (A'.1)(σχ.13.1 κεφ. 13 Murray 2002 VOL1 σελ. 441) απεικονίζει τις τροχιές στο επίπεδο φάσης.

Με τη βοήθεια του Παραρτήματος (B) συμπεραίνουμε πιο αναλυτικά:

Εάν $c \geq c_{\min} = 2$ το $(0, 0)$ είναι ένας σταθερός κόμβος stable node, ειδικότερα η περίπτωση όπου $c = c_{\min} = 2$ δίνει έναν φθίνοντα κόμβο node.

Εάν $c^2 < 4$ το $(0, 0)$ είναι stable spiral δηλαδή στη γειτονιά του $(0, 0)$ η U ταλαντώνεται. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συνέχειας ή από το σχήμα των τροχιών στο επίπεδο φάσης, υπάρχει μια τροχιά από το $(\frac{1}{a}, 0)$ στο $(0, 0)$ που κείται εξ' ολοκλήρου στο τεταρτημόριο $U \geq 0, U' \leq 0$, με $0 \leq U \leq \frac{1}{a}$ για όλες τις ταχύτητες των κυμάτων με $c \geq c_{\min} = 2$. Σε όρους της αρχικής εξίσωσης (Α'.1) οι ταχύτητες των κυμάτων ικανοποιούν

$$(Α'.7) \quad c \geq c_{\min} = 2(kD)^{1/2}.$$

Στο σχήμα φαίνεται μία τυπική λύση σε μορφή travelling wave. Υπάρχουν λύσεις σε μορφή travelling wave και για $c < 2$ αλλά είναι χωρίς πραγματικές εφαρμογές καθώς $u < 0$, για κάποια z , γιατί σε αυτή την περίπτωση u κάνει σπирάλ γύρω από την αρχή των αξόνων. Σε αυτές τις περιπτώσεις η u τείνει στο 0 στον κυρίαρχο όρο, με φθίνουσες ταλαντώσεις γύρω από το $u \rightarrow 0$.

Μια ερώτηση κλειδί σε αυτό το στάδιο είναι τι είδους αρχικές συνθήκες $U(x, 0)$ για την αρχική εξίσωση Fisher-Kolmogorov (Α'.2) θα έχουν ως αποτέλεσμα λύση σε μορφή διαδιδόμενου κύματος (travelling wave) και εάν μια τέτοια λύση υπάρχει, ποια είναι η ταχύτητα του κύματος c . Αυτό το πρόβλημα και οι γενικεύσεις του έχουν μελετηθεί αναλυτικά. Ο Kolmogorov et al. (1937) απέδειξαν ότι εάν $U(x, 0)$ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή

$$(Α'.8) \quad U(x, 0) = U_0(x), U_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_1 \\ 0, & x \geq x_2. \end{cases}$$

όπου $x_1 < x_2$ και $u_0(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $x_1 < x < x_2$, τότε η λύση $u(x, t)$ της (Α'.2) προκύπτει να είναι μια κυματοειδής μορφή (wavefront solution) $u(z)$ με $z = x - 2t$. Δηλαδή προκύπτει κύμα με την ελάχιστη ταχύτητα $c = 2$. Για αρχικές συνθήκες διαφορετικές από την (Α'.8) η λύση επηρεάζεται καθοριστικά από τη συμπεριφορά της $U(x, 0)$ καθώς $x \rightarrow \pm\infty$. (βλ. Murray 2002 VII Ch13.2)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'

Ανάλυση επιπέδων φάσης

Μελετάω γενικά αυτόνομες $2^{\text{η}}$ ς τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$(B'.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Οι καμπύλες φάσης ή τροχιές φάσης της (B'.1) είναι λύσεις της

$$(B'.2) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

Για κάθε σημείο (x_0, y_0) υπάρχει μοναδική καμπύλη φάσης εκτός από τα ιδιόμορφα σημεία (*singular points*) για τα οποία ισχύει $f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0$.

Εάν λοιπόν θέσουμε $x \rightarrow x - x_s, y \rightarrow y - y_s$, τότε $(0, 0)$ είναι ένα ιδιόμορφο σημείο της μετασχηματισμένης εξίσωσης. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε την (B'.2) να έχει ένα ιδιόμορφο σημείο στο $(0, 0)$. Θεωρούμε f, g να είναι αναλυτικές γύρω από το $(0, 0)$ και κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους παίρνουμε

$$(B'.3) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy} \text{ όπου, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

Η παραπάνω γραμμική μορφή είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$(B'.4) \quad \frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Οι λύσεις του (B'.4) δίνουν την παραμετρική μορφή των καμπυλών φάσης ως προς t . Έστω λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του A δηλαδή

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm [(a + d)^2 - 4 \det(A)]^{1/2})$$

Τότε οι λύσεις του (B'.4) είναι

$$(B'.5) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 \exp[\lambda_1 t] + c_2 v_2 \exp[\lambda_2 t]$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και v_1, v_2 είναι τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και δίνονται από τις

σχέσεις:

$$(B'.6) \quad v_i = (1 + p_i)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix}, \quad p_i = \frac{\lambda_i - a}{b}, \quad b \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Με απαλοιφή του t στην (B'.5) παίρνουμε τις καμπύλες φάσης στο (x, y) επίπεδο.

Σημειώνουμε ότι η μορφή της (B'.5) είναι για διακεκριμένες ιδιοτιμές. Εάν οι ιδιοτιμές είναι ίσες οι λύσεις είναι ανάλογες του $(c_1 + c_2 t) \exp(\lambda t)$.

Κατάλογος (γραμμικών) ιδιομορφιών (linear singularities) στο επίπεδο φάσης:

(i) λ_1, λ_2 είναι πραγματικές και διακεκριμένες:

(a) λ_1, λ_2 είναι ομόσημες. Οι τυπικές ιδιοτιμές v_1 και v_2 παρουσιάζονται στο σχήμα 1. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Από την (B'.5), κάθε λύση τείνει στο $(0, 0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και έχω $\exp[\lambda_2 t] = o(\exp[\lambda_1 t])$ καθώς $t \rightarrow \infty$, άρα

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim c_1 v_1 \exp[\lambda_1 t] \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

Έτσι αρκετά κοντά στην αρχή των αξόνων όλες οι λύσεις τείνουν στο 0 κατά μήκος του v_1 όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτή ονομάζεται **ιδιομορφία κόμβου** (node singularity) τύπου I. Εάν έχω $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ stable node καθώς όλες οι τροχιές τείνουν στο $(0, 0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Εάν $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ έχω ασταθή κόμβο (unstable node), εδώ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

(b) λ_1 και λ_2 είναι ετερόσημες π.χ. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ τότε $\exp[\lambda_1 t] \rightarrow 0$ κατά μήκος του v_1 καθώς $t \rightarrow \infty$ ενώ $\exp[\lambda_2 t] \rightarrow 0$ κατά μήκος του v_2 καθώς $t \rightarrow -\infty$. Υπάρχουν κατά συνέπεια διαφορετικές κατευθύνσεις στα v_1 και v_2 . Οι λύσεις γύρω από το $(0, 0)$ είναι όπως φαίνονται στο σχήμα. Αυτή είναι μια **ιδιομορφία σαγματικού σημείου** (saddle point singularity) η οποία είναι πάντα ασταθής: εκτός αυστηρά κατά μήκος του v_1 κάθε μικρή διαταραχή από το $(0, 0)$ μεγαλώνει εκθετικά.

(ii) λ_1 και λ_2 μιγαδικές: $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$.

Οι λύσεις εδώ περιέχουν ως παράγοντες τους όρους $\exp[\alpha t] \exp[\pm i\beta t]$ που υποδηλώνει ταλαντωτική προσέγγιση στο $(0, 0)$. (a) $\alpha \neq 0$. Εδώ έχουμε **σπειροειδές** (spiral) το οποίο είναι σταθερό (stable) εάν $\alpha < 0$ και ασταθές (unstable) εάν $\alpha > 0$. Σχήμα

(b) $\alpha = 0$. Σε αυτή την περίπτωση οι καμπύλες φάσης είναι ελλείψεις. Αυτή η ιδιομορφία καλείται **κέντρο** (σχήμα). Τα κέντρα περίπτωση δεν

είναι σταθερά (stable) με τη συνήθη έννοια, δηλαδή μια μικρή διαταραχή από την καμπύλη φάσης δεν σβήνει ώστε να επανέλθουμε στην αρχική μη διαταραγμένη καμπύλη. Η διαταραχή απλώς δίνει μια άλλη λύση. Στην περίπτωση ιδιομορφιών κέντρου που ορίζονται από τη γραμμική προσέγγιση στις $f(x, y)$, $g(x, y)$, πρέπει να κοιτάζουμε στους όρους υψηλότερης τάξης (από τους γραμμικούς) για να καθορίσουμε εάν έχουμε όντως ή όχι spiral και κατά συνέπεια εάν αυτό είναι σταθερό (stable) ή ασταθές (unstable).

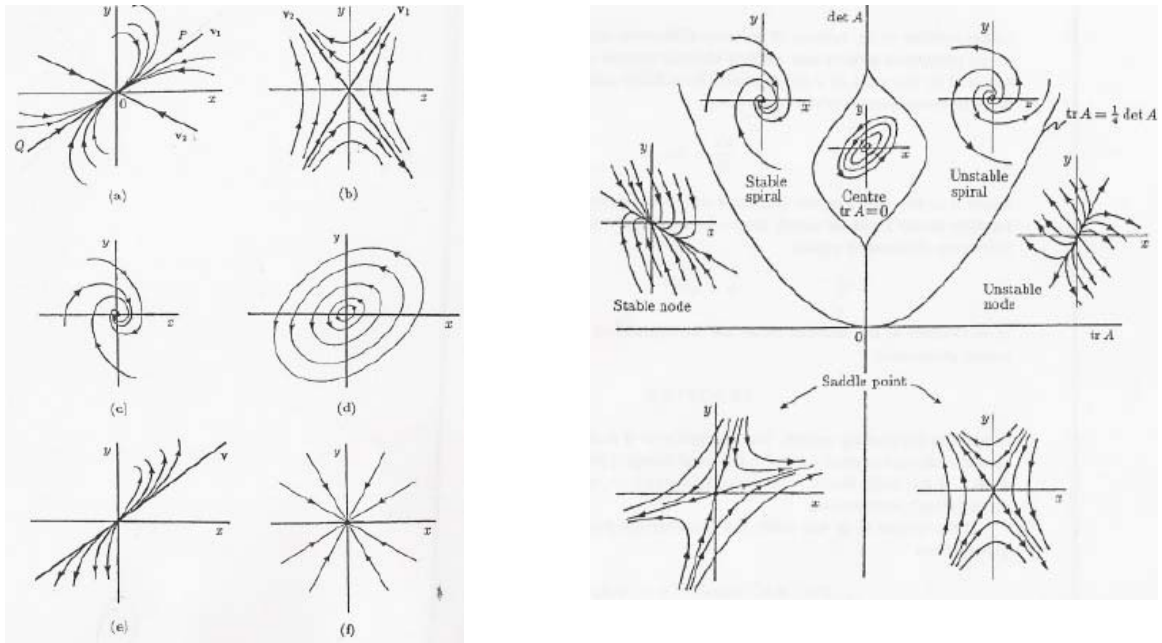
(iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Εδώ έχουμε ίσες ιδιοτιμές.

(a) Γενικά οι λύσεις περιέχουν όρους όπως $t \exp[\lambda t]$ και υπάρχει μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα v κατά μήκος του οποίου οι λύσεις τείνουν στο $(0, 0)$. Το t στο $t \exp[\lambda t]$ τροποποιεί τη λύση μακριά από το $(0, 0)$. Αυτό ονομάζεται ιδιομορφία **κόμβος τύπου I** (node Type I singularity) μια παράσταση της οποίας δίνεται στο σχήμα.

(b) Εάν οι λύσεις δεν περιέχουν τον όρο $t \exp[\lambda t]$ έχουμε μια **αστεροειδή ιδιομορφία** (star singularity), που να είναι stable ή unstable και αυτό εξαρτάται από το πρόσημο του λ . Οι τροχιές σε μια γειτονιά της αστεροειδούς ιδιομορφίας φαίνονται στο σχήμα.

Οι ιδιομορφίες εξαρτώνται από τα στοιχεία a,b,c,d του πίνακα A του συστήματος (B'.3). Το σχήμα (B'.1) (σχ. A.1 και A.2 Murray 2002 VOL1 σελ. 503 και 504) συνοψίζει τα αποτελέσματα σε σχέση με το ίχνος και την ορίζουσα του A .

Εάν το σύστημα (B'.1) κατέχει ένα περιορισμένο σύνολο (δηλαδή ένα χωρίο στο σύνολο ∂B του οποίου το διάνυσμα $(dx/dt, dy/dt)$ δείχνει προς το εσωτερικό του χωρίου), που εμπεριέχει ένα και μόνο ιδιόμορφο σημείο το οποίο είναι unstable spiral ή node, τότε καμία τροχιά φάσης δεν μπορεί ούτε να τείνει στην ιδιομορφία με το χρόνο, ούτε να αφήσει το περιορισμένο σύνολο. Το Θεώρημα Poincare -Bendixson λέει ότι ότι καθώς $t \rightarrow \infty$ η τροχιά θα τείνει σε μια οριακά κυκλική λύση. Αυτή είναι η απλούστερη εφαρμογή του Θεωρήματος. Εάν η μόνη ιδιομορφία είναι ένα σαγματικό σημείο τότε ένας οριακός κύκλος δεν μπορεί να υπάρχει. (Jordan και Smith 1999).



ΣΧΗΜΑ Β'.1. Αριστερά: Τυπικά παραδείγματα των βασικών γραμμικών ιδιομορφιών με βάση την ανάλυση των επιπέδων φάσης. Δεξιά: Συνοπτικό διάγραμμα που δείχνει πως $\text{tr}(A)$ και $\det(A)$ καθορίζουν τον τύπο της γραμμικής ιδιομορφίας του επιπέδου φάσης για το σύστημα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ'

Γενικά αποτελέσματα για το Λαπλασιανό Τελεστή σε συμπαγή χωρία

Έστω συνάρτηση $u(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = 0$ για $x = 0, x = 1$. Η συνάρτηση u ικανοποιεί:

$$(Γ'.1) \quad \int_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx.$$

Θα αποδείξουμε ότι και το πιο γενικό αποτέλεσμα

$$(Γ'.2) \quad \int_B |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 d\mathbf{r} \geq \mu \int_{\partial B} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\mathbf{r}$$

όπου B είναι ένα πεπερασμένο χωρίο που περιλαμβάνεται από μια απλή συνεκτική επιφάνεια με ισχύ συνθηκών μηδενικής ροής (Neumann) δηλαδή $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$ όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα στο ∇B . Στην (Γ'.2), μ είναι η μικρότερη θετική ιδιοτιμή του του $\nabla^2 + \mu$ στο B με συνθήκες Neumann στο ∇B και όπου $\|\cdot\|$ συμβολίζει μια Ευκλείδια Νόρμα, για παράδειγμα,

$$\|\nabla \mathbf{u}\| = \max_{r \in B} \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\mathbf{r} = (x_j), j = 1, 2, \dots, n.$$

Θα αποδείξουμε πρώτα τη σχέση (Γ'.1) η οποία σημειώνουμε είναι ειδική περίπτωση της (Γ'.2) όπου u βαθμωτό και \mathbf{r} είναι μία μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή.

Έστω $w(x)$ μια βαθμωτή συνάρτηση μιας μεταβλητής $x \in \mathbb{R}$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$(Γ'.3) \quad w_{xx} + \mu w = 0.$$

Συμβολίζουμε με μ τη γενική ιδιοτιμή για λύσεις της παραπάνω εξίσωσης που ικανοποιούν συνοριακές συνθήκες Neumann, δηλαδή

$$(Γ'.4) \quad w_x = 0 \text{ για } x = 0, 1.$$

Οι Ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_k(x)\}$ και ιδιοτιμές $\{\mu_k\}$ όπου $k = 0, 1, 2, \dots$ για τις εξισώσεις (Γ'.3), (Γ'.4) είναι

$$(Γ'.5) \quad \phi_k(x) = \cos \mu_k^{1/2} x, \mu_k = k^2 \pi^2, k = 0, 1, 2, \dots$$

Κάθε συνάρτηση w_x με τις παραπάνω ιδιότητες, που ικανοποιεί τις συνθήκες μηδενικής ροής (Γ'.4) μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα σε σειρά των ιδοσυναρτήσεών της $\phi_k(x)$ (ανάπτυγμα Fourier) όπως επίσης και οι παράγωγοί της, τις οποίες υποθέτουμε ότι υπάρχουν. Έστω

$$(Γ'.6) \quad w_{xx}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\pi x)$$

όπου

$$a_k = 2 \int_0^1 w_{xx}(x) \cos(k\pi x) dx, \quad k > 0$$

$$a_0 = \int_0^1 w_{xx} dx = [w_x(x)]_0^1 = 0$$

Τότε, ολοκληρώνοντας την (Γ'.5) έχουμε

$$\begin{aligned} w_x(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\pi z) dz = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k \cos(k\pi z) dz = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k\pi} \sin(k\pi x) \end{aligned}$$

οπότε

$$w(x) = \int_0^x w_z(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{a_k}{\mu_k} \phi_k(x) - \frac{a_k}{\mu_k} \right)$$

όπου έχουμε λάβει υπόψη ότι $a_0 = 0$.

Τότε ισχύουν οι παρακάτω υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 w_x^2 dx &= [w w_x]_0^1 - \int_0^1 w w_{xx} = - \int_0^1 w w_{xx} \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} \cos(k\pi x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\pi x) dx \\
 &+ \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi x) dx \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2}{\mu_k} \cos^2(k\pi x) dx \\
 (\Gamma'.7) \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2}{2\mu_k} \int_0^1 (1 + \cos(2k\pi x)) dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2\mu_k} \\
 &\leq \frac{1}{2\mu_1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx
 \end{aligned}$$

όπου $\mu_1 = \pi^2$ η μικρότερη ιδιοτιμή.

Η απόδειξη για το γενικότερο αποτέλεσμα είναι παρόμοια με αυτή στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Εάνά έστω η ακολουθία $\{\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\}$ $j = 0, 1, 2, \dots$ οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του

$$\nabla^2 \mathbf{w} + \mu \mathbf{w} = 0$$

όπου $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση της χωρικής μεταβλητής \mathbf{r} και μ είναι η γενική ιδιοτιμή. Έστω οι αντίστοιχες ιδιοτιμές για την ακολουθία $\{\phi_{\mathbf{k}}\}$ να είναι η ακολουθία $\{\mu_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και διατάσουμε τις ιδιοτιμές αυτές ώστε $\mu_0 = 0$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$. Σημειώνουμε σε αυτή την περίπτωση ότι ϕ_0 είναι σταθερό.

Έστω $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ μια συνάρτηση που ορίζεται για \mathbf{r} στο χωρίο B και ικανοποιεί τις συνθήκες μηδενικής ροής $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{w} = 0$ για \mathbf{r} στο ∂B . Τότε

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{w} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ (\Gamma'.8) \quad a_k &= \int_B \langle \nabla^2 \mathbf{w}, \phi_{\mathbf{k}} \rangle d\mathbf{r} \\ a_0 &= \langle \phi_0, \int_B \nabla^2 \mathbf{w} d\mathbf{r} \rangle = \langle \phi_0, \int_{\partial B} \nabla \mathbf{w} d\mathbf{r} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Εδώ $\langle \cdot \rangle$ συμβολίζει το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο. Ολοκληρώνοντας $\nabla^2 \mathbf{w}$ δύο φορές παίρνουμε

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{a_k}{\mu_k} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + b_0 \phi_0,$$

όπου b_0 και ϕ_0 είναι σταθερές. Με αυτή την έκφραση μαζί με εκείνη για το $\nabla^2 \mathbf{w}$ έχουμε ολοκληρώνοντας κατά μέρη,

$$\begin{aligned} (\Gamma'.9) \quad \int_B \|\nabla \mathbf{w}\|^2 d\mathbf{r} &= \int_{\partial B} \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{w} \rangle d\mathbf{r} - \int_B \langle \mathbf{w}, \nabla^2 \mathbf{w} \rangle d\mathbf{r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2}{\mu_k} \\ &\leq \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \\ &= \frac{1}{\mu_1} \int_B |\nabla^2 \mathbf{w}|^2 d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

που δίνει το ζητούμενο καθώς μ_1 είναι η μικρότερη θετική ιδιοτιμή.

Βιβλιογραφία

- [1] Lawrence c. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [2] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer, Berlin, 1993
- [3] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology I- An Introduction*, Springer, 2002
- [4] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology II- Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2002
- [5] COLIN W. CLARK, *Mathematical Bioeconomics-The Optimal Management of Renewable Resources*, A Wiley-Interscience publication, 1990
- [6] J. CRANK, *The Mathematics of Diffusion*, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1975.
- [7] Arnd Scheel, *Radicaly Symmetric Patterns of Reaction- Diffusion Systems*, MEMOIRS of the American Mathematical Society, 2003.
- [8] G. Rangarajan, Y. Chen, M. Ding, *Generalized Turing Patterns and their selective realization in spatiotemporal systems*, Physics Letters A310, 2003 415-422.
- [9] E. Sander and T. Wanner, *Pattern formation in a nonlinear model for animal coats*, J. Differential Equations 191, 2003 143-174.
- [10] Teemu Leppänen, *The theory of Turing Pattern formation*, February 2004.
- [11] M. Fujita, P. Krugman, A. Venables, *The Spatial Economy*, Cambridge Massachusetts: The MIT Press, 1999.
- [12] Paul Krugman, *The Role of Geography in Development*, Paper prepared for the Annual World Bank Conference on Development Economics, April 20-21 1998.
- [13] W. Brock, A. Xepapadeas, *Spatial Analysis: Development of Descriptive and Normative Methods with Applications to Economic- Ecological Modelling*, Working Paper, October 2004.
- [14] W. Brock, A. Xepapadeas, *Optimal Control and Spatial Heterogeneity: Pattern Formation in Economic Ecological Models*, Working Paper, 2004.
- [15] Γ. Ακρίβης και Β. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Ιωάννινα, 2005.