# **ΜΗ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΣΑΡΓΙΩΤΑΚΗ ΕΛΕΝΗ
Επιβλέπων καθηγητής: ΚΛΩΝΙΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2006

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Εισαγωγή

Έστω $X_1, X_2, .., X_n$ ένα σύνολο ανεξάρτητων και ισόνομων παρατηρήσεων οι οποίες αποτελούν ένα δείγμα από μία άγνωστη κατανομή για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f$. Ένα από τα κεντρικότερα προβλήματα της Στατιστικής είναι η εκτίμηση της άγνωστης συνάρτησης $f$. Από διαγνωστικής απόψεως η εκτίμηση της $f$, έναντι της συνάρτησης κατανομής $F$, είναι προτιμότερη διότι εμφανίζει ευκρινέστερα τις συγκεντρώσεις μάζας πιθανότητας, ενω η $F$, λόγω της ολοκλήρωσης που γίνεται, τις εξομαλύνει.

Μια προσέγγιση στην εκτίμηση πυκνότητας είναι η παραμετρική. Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια γνωστή παραμετρική οικογένεια κατανομών, π.χ. την κανονική κατανομή, αλλά με άγνωστους το μέσο μ και τη διασπορά $\sigma^2$. Η πυκνότητα $f$ που περιγράφει τα δεδομένα μπορεί τότε να εκτιμηθεί αντικαθιστώντας στον τύπο π.χ. της πυκνότητας της κανονικής κατανομής τα μ και $\sigma^2$ με τις αντίστοιχες εκτιμήτριες τους.

Μια άλλη προσέγγιση, με την οποία θα ασχοληθούμε εδώ, είναι μέσω της μη - παραμετρικής στατιστικής, κατά την οποία δεν γίνονται πολύ δεσμευτικές υποθέσεις για την κατανομή των παρατηρήσεων. Οι υποθέσεις για την $f$ είναι ποιοτικές π.χ. η $f$ συνεχής ή διαφορίσιμη, τοπικά ή σε όλο το πεδίο ορισμού της, ή πληρεί κάποιες συνθήκες ομαλότητας, π.χ. $f'$ ή $(f^{\frac{1}{2}})' \in L_2$. Δύο άλλες ενδιάμεσες προσεγγίσεις είναι αυτές της ευσταθούς και ημιπαραμετρικής στατιστικής

Η παλαιότερη εκτιμήτρια της $f$ είναι το ιστόγραμμα, ενώ άλλες μη παραμετρικές μέθοδοι εκτίμησης που αναπτύχθηκαν κυρίως από τη δεκαετία του 1960 και μετά είναι η μέθοδος των πυρήνων, των ορθογώνιων σειρών, $k - nearest\ neighbour$, μέθοδος των $shieves$ και μέγιστης ποινικοποιημένης πιθανοφάνειας ($MPLE$), (βλ. [21]), με μία προσέγγιση της οποίας θα ασχοληθούμε εδώ.

Οι εκτιμήτριες των πυρήνων θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως προσεγγιστικές "λύσεις" στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας:

$$max \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1}$$

τ.ω.

$$\begin{cases} f \geq 0 \\ \int f = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Το ανώτερο πρόβλημα δεν έχει, φυσικά, λύση στον $L_1$, δεδομένου ότι η πιθανοφάνεια είναι μη φραγμένη και η γενικευμένη συνάρτηση *Dirac* :

$$\delta_n(x) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(x - X_i) \tag{3}$$

όπου $\delta(.)$ η *Dirac delta* συνάρτηση στο μηδέν, είναι η φορμαλιστική έκφραση της "μη λύσεως" του ανωτέρου προβλήματος. Μία προσέγγιση λοιπόν της (3) είναι η:

$$f_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big) \tag{4}$$

με $h \to 0$ , δεδομένου ότι για $x \neq X_i$,

$$\frac{1}{h}k\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big) \longrightarrow 0$$

και για $x = X_i$,

$$\frac{1}{h}k\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big) \longrightarrow +\infty$$

ενώ

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}k\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big)dx = 1$$

Εδώ προσθέτοντας κάποιες κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας π.χ. $(f^{\frac{1}{2}})' \in L_2$ στους περιορισμούς (2), θα επιτύχουμε το πρόβλημα (1) να έχει λύση. Αυτή ήταν η πρόταση των *Good* και *Gaskins*, (βλ. [9]) οι οποίοι προσέθεσαν, ουσιαστικά, στους (2) την συνθήκη

$$\int [(f^{\frac{1}{2}})']^2 < M, \tag{5}$$

η οποία και οδήγησε στην πρώτη *MPLE* των *Good* και *Gaskins*, ή την συνθήκη

$$\int [(f^{\frac{1}{2}})'']^2 < M, \tag{6}$$

η οποία οδήγησε στη δεύτερη *MPLE* των *Good* και *Gaskins*.

Τώρα αν γράψουμε την *Lagrangian* του προβλήματος (1), με επιπλέον συνθήκη μία των (5),(6), έχουμε το πρόβλημα της, χωρίς περιορισμούς, πλην του : $f \geq 0$ , μεγιστοποίησης της *Lagrangian* :

$$max\Big\{\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i) - \lambda\int (f^{\frac{1}{2}})^2 - \alpha\int [(f^{\frac{1}{2}})']^2\Big\} \tag{7}$$

ή

$$max\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i) - \|f^{\frac{1}{2}}\|^2_{W^{1,2}}$$

όπου $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ η νόρμα *Sobolev* τάξεως 1 στον $L_2$, μπορεί να θεωρηθεί και ως συναρτησοειδές ποινής, για μη ομαλότητα, εξ ου και ο όρος "ποινικοποιημένη" πιθανοφάνεια. Βέβαια οι *Good* και *Gaskins* οδηγήθηκαν στο πρόβλημα (7), μέσω άλλων κριτηρίων, προερχομένων από τη θεωρία *Bayes* και για αυτά παραπέμπουμε στο άρθρο τους, (*bl*.[9]). Οι λύσεις προβλημάτων σαν το (7), οδηγούν στις $MPLE$ με τις οποίες θα ασχοληθούμε εδώ, και η συγγένεια των προβλημάτων (1) και (7) προοιωνίζει την συγγένεια των $MPLE$ με τις εκτιμήτριες των πυρήνων, στους δε χώρους *Sobolev* $W^{k,2}$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle u,v\rangle := \sum_{i=0}^{k} w_i \int u^{(i)}v^{(i)}$, το γραμμικό συναρτησοειδές : $P_x(u) := u(x)$ είναι συνεχές (φραγμένο), άρα και η πιθανοφάνεια είναι συνεχής, και άρα, πάνω σε κατάλληλα σύνολα, έχει πράγματι μέγιστο, και έτσι αποφεύγονται οι " λύσεις " *Dirac* σαν την (3).

Οι *De Montricher*, *Tapia* και *Thompson*, (βλ. [7]), το 1975 απέδειξαν την ύπαρξη και μοναδικότητα των δύο $MPL$ εκτιμητών των *Good* και *Gaskins* σε χώρους *Sobolev*,

$$W^{2,l} = \{u \in L_2(\mathbb{R}) : \|u^{(l)}\|_2 < \infty\}$$

με $l$ θετικό ακέραιο, $L_2(\mathbb{R})$ ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και $\|u\|_2^2 = \int u^2$.

Οι $MPL$ εκτιμήτριες $u$ που θα μελετήσουμε εδώ είναι οι λύσεις του προβλήματος βελτιστοποίησης

$$max\Big\{\sum_{i=1}^{n}\log u(x_i) - \lambda(2\pi)^{-p}\int |\widetilde{u}|^2 d\mu,\ u \in H\Big\} \tag{8}$$

όπου $\widetilde{u}$ ο μετασχηματισμός *Fourier* της $u$, $H = \{u \in L_2(\mathbb{R}^p),\ \int |u|^2 d\mu < \infty\}$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε $\int u^2 = 1$.

Σε κάθε θετικό μέτρο μ, το οποίο κυριαρχείται από το μέτρο *Lebesque* με πυκνότητα $m(t)$, αντιστοιχεί μια μοναδική $MPL$ εκτιμήτρια και είναι μία *spline* συνάρτηση, (βλ. Παράρτημα, Ορισμός .1), της μορφής:

$$u(x) = \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\kappa_\mu(x_1 - X_{i1},\ ...,\ x_p - X_{ip}),\ \ x \in \mathbb{R}^p,$$

με $m\kappa_\mu = 1$. Έπειτα εκτιμούμε την $f$ με την $f_n = u^2$. Στα κεφάλαια 3 και 4, όπου μελετάται η συνέπεια αυτών των εκτιμητών, το μ θα εξαρτάται από μία παράμετρο $h \in \mathbb{R}^p$ έτσι, ώστε $m(t) = m_0(h_1t_1, ...h_pt_p),\ t \in \mathbb{R}^p$, με $h_j > 0,\ j = 1, .., p$.
Τότε,

$$\kappa_\mu(z) = (h_1\ ...\ h_p)^{-1}k(z_1/h_1,\ ...,\ z_p/h_p),\ \ z \in \mathbb{R}^p,$$

όπου το $k$ είναι τέτοιο, ώστε $\widetilde{k}m_0 = 1$. Σημειώνουμε ότι αν θέσουμε $m(t) = \sum_{j=0}^{l}\alpha_j t^{2j}$, με $\alpha_0, \alpha_l > 0$ και $\alpha_j \geq 0$, για $j = 1, .., l-1$ για κάποιο θετικό ακέραιο $l$, από εφαρμογή του θεωρήματος *Parseval*, (βλ. [24]), το πρόβλημα μεγιστοποίησης (1.7) είναι ισοδύναμο

με αυτό των *De Montricher*, *Tapia* και *Thompson* (1975) όπου με $l = 1, 2$ έχουμε την πρώτη και δεύτερη *MPLE* των *Good* και *Gaskins* που αντιστοιχεί στα $\Phi_1(u) = \alpha \int (u')^2$ και $\Phi_2(u) = \beta \int (u')^2 + \alpha \int (u'')^2,\ \alpha > 0,\ \beta \geq 0$ και παράγεται από τους πυρήνες $k_\mu$ της μορφής: $(\alpha/2) \exp\{-\alpha|x|\}$ και
$[4|\alpha\beta|(\alpha^2+\beta^2)]^{-1} \exp\{-|\alpha x|[|\beta| \cos|\beta x| + |\alpha| \sin|\beta x|]\}$ αντίστοιχα. (βλ. [15])

# Κεφάλαιο 1

# Ύπαρξη και αριθμητικός υπολογισμός των εκτιμητών

Η θεωρία στην οποία γίνεται αναφορά αναπτύχθηκε στους *Reproducing Kernel Hilbert Spaces* (*RKHS*) .

**Ορισμός 1.1**
*Ένας χώρος Hilbert H(Ω) συναρτήσεων ορισμένων στο Ω ονομάζεται Reproducing Kernel Hilbert Space αν υπάρχει ένα συναρτησοειδές* $K(\cdot,\cdot)$ *ορισμένο στο* $\Omega \times \Omega$ *τ.ω:*
*1.*$K(\cdot,t) \in H(\Omega)$ *για κάθε* $t \in \Omega$ *και*
*2.*$f(t) = \langle f(\cdot), K(\cdot,t)\rangle_H$ *για κάθε* $f \in H(\Omega)$ *και* $t \in \Omega$

Σε ένα τέτοιο χώρο μια φυσική συνάρτηση ποινής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η $\Phi(u) = \|u\|_H^2$. Πριν συνεχίσουμε τη μελέτη των παραπάνω εκτιμητριών θα αποδείξουμε την πρόταση 2.1 η οποία εξασφαλίζει τόσο την ύπαρξη όσο και τη μοναδικότητα των εκτιμητριών μας. Με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού και των Λημμάτων 1-7 του Παραρτήματος προχωράμε στην πρόταση 2.1 .

**Πρόταση 1.1**
*Υποθέτουμε ότι ο H(Ω) είναι ένας RKHS και D κλειστό κυρτό υποσύνολο του* $\{u \in H(\Omega) \ : \ u(x_i) \geq 0\}$ *με την ιδιότητα ότι το D περιέχει τουλάχιστον μια συνάρτηση η οποία είναι θετική στα* $x_1, x_2, .., x_n$. *Τότε το συναρτησοειδές της ποινικοποιημένης πιθανοφάνειας* $\widehat{L}(u) = \prod_{i=1}^{n} u(x_i) \exp(-\Phi(u))$ *έχει μοναδικό μέγιστο στο D.*

*Απόδειξη:*
Αφού ο H(Ω) είναι ένας $RKHS$ θα έχουμε :$|u(x_i)| \leq K_i \|u\|_H$ για $i = 1, .., n$. Άρα για το ποινικοποιημένο συναρτησοειδές πιθανοφάνειας με συνάρτηση ποινής την $\Phi(u) = \|u\|_H^2$, $\widehat{L}(u) = \prod_{j=1}^{n} u(x_i) \exp(-\Phi(u))$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
|\widehat{L}(u)| = \left|\prod_{j=1}^{n} u(x_i) \exp(-\Phi(u))\right| &\leq \prod_{j=1}^{n} |u(x_i)| \exp(-\Phi(u)) \\
&\leq c_1 \|u\|_H^n \exp(-\|u\|_H^2) \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $\theta(\lambda) = \lambda^n \exp(-\lambda^2)$ είναι φραγμένη από πάνω, από το $(n/2)^{(\frac{n}{2})} \exp(-n/2)$ άρα $|\widehat{L}(u)| \le c_2$. Αν $M = sup\{\widehat{L}(u) : u \in D\}$ τότε υπάρχει $\{u_j\} \subset D$ τέτοια, ώστε $\widehat{L}(u_j) \to M$. Από την υπόθεσή μας - μία τουλάχιστον να είναι θετική - προκύπτει ότι $M > 0$ . Παρατηρούμε επίσης ότι $\theta(\lambda) \to 0$ καθώς $\lambda \to \infty$. Άρα από τη (1.1)

$$\|u_j\|_H \le c_3, \ \forall j \tag{1.2}$$

Η μπάλα $\{u \in H(\Omega) : \|u\|_H \le c_3\}$ είναι ασθενώς συμπαγής . Άρα η $\{u_j\}$ περιέχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υποακολουθία την οποία επίσης δηλώνουμε ως $\{u_j\}$. Έχουμε ότι $u_j(x_i) \to u^*(x_i)$ καθώς $j \to \infty$ για κάθε $i = 1,..,n$. Η νόρμα είναι ένα συνεχές κυρτό συναρτησοειδές άρα ασθενώς κάτω ημισυνεχές έτσι, ώστε :
$\liminf_j \|u_j\|_H \ge \|u^*\|_H$, άρα προκύπτει ότι

$$\limsup \prod_{i=1}^{n} u_j(x_i) \exp(-\|u_j\|_H^2) \le \prod_{i=1}^{n} u^*(x_i) \exp(-\|u^*\|_H^2)$$

άρα

$$\lim_j \prod_{i=1}^{n} u_j(x_i) \exp(-\|u_j\|_H^2) \le \prod_{i=1}^{n} u^*(x_i) \exp(-\|u^*\|_H^2) \tag{1.3}$$

Όμως το αριστερό μέλος της (1.3) είναι ίσο με M και το δεξί μέλος με $\widehat{L}(u^*)$ άρα $M \le \widehat{L}(u^*)$. Τώρα αφού το $D$ είναι κλειστό και κυρτό είναι και ασθενώς κλειστό. Άρα $u^* \in D$ και $M = \widehat{L}(u^*)$. Αυτό αποδεικνύει το μέγιστο.

Το να μεγιστοποιήσουμε την $\widehat{L}$ πάνω στο $D$ είναι ισοδύναμο με το να μεγιστοποιήσουμε το $J(u) = \log \widehat{L}(u) = \sum_{i=1}^{n} logu(x_i) - \|u\|_H^2$. πάνω στο $D$. Υπολογίζουμε το διαφορικό $Gateaux$ πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned}
\nabla J(u)(\eta) &= \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\eta)\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg\{\sum_{i=1}^{n} log(u + \eta\varepsilon)(x_i) - \|u + \eta\varepsilon\|_H^2\bigg\}\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta(x_i)}{(u + \eta\varepsilon)(x_i)} - 2\varepsilon\|\eta\|_H^2 - \langle u, \eta\rangle\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta(x_i)}{u(x_i)} - 2\langle u, \eta\rangle
\end{aligned}$$

Για το διαφορικό δεύτερης τάξης ομοίως προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 J(u)(\mu, \eta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(x_i)\eta(x_i)}{u(x_i)^2} - 2\langle \mu, \eta\rangle. \tag{1.4}$$

Καθώς όμως το $\nabla^2 J$ είναι αρνητικά ορισμένο, το $J$ θα έχει το πολύ ένα μέγιστο.

$\square$

Στη συνέχεια θα πάρουμε τη *spline*

$$u(x) = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\kappa_\mu(x - X_i)\ , \quad x \in \mathbb{R}^p \tag{1.5}$$

ως μοναδική λύση του προβλήματος:

$$max\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \log u^2(X_i) - \lambda(2\pi)^{-p} \int |\widetilde{u}|^2 d\mu,\ u \in H \Big\} \tag{1.6}$$

ως προς το $u(x_i) \geq 0, i = 1,\ \ldots\ , n$ και θα υποδείξουμε μια προσέγγιση για τον αριθμητικό υπολογισμό των εκτιμητών.

Όταν το μέτρο στον $L_2(\mathbb{R}^p)$, $p \in \mathbb{Z}_+$ διαφέρει από το μέτρο *Lebesgue*, δηλώνουμε το χώρο $L_2(\mu)$, όπου $\mu$ θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^p$ που κυριαρχείται από το μέτρο *Lebesgue* με πυκνότητα $m(t)$. Έστω $H = \{u \in L_2(\mathbb{R}^p) : \tilde{u} \in L_2(\mu)\}$ χώρος *Hilbert* όπου η

$$\tilde{u}(t) = (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{-it^T x} u(x) dx$$

δηλώνει το μετασχηματισμό *Fourier* της $u$ με αντίστοιχο τύπο αντιστροφής του

$$u(x) = (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T x} \tilde{u}(t) dt\ , \quad t, x \in \mathbb{R}^p.$$

Τα μέτρα μ που υποθέτουμε εδώ είναι τέτοια, ώστε να υπάρχει μια συμμετρική γύρω από το μηδέν συνάρτηση $k_\mu \in L_2(\mathbb{R}^p)$ με

$$\widetilde{k}_\mu(t) m(t) = 1 \tag{1.7}$$

π.χ. $m(t) = \exp\{h^2 t^2/2\}$ με $k_\mu(\cdot) = h^{-1}\varphi(\cdot/h)$ όπου φ η τυπική κανονική κατανομή.

Για να δούμε ότι ο H είναι ένας *RKHS* με πυρήνα $\kappa^*(x, y) = \kappa_\mu(x - y)$, έστω το εσωτερικό γινόμενο του H

$$\langle u, v \rangle \equiv (2\pi)^{-p} \int \widetilde{u}\overline{\widetilde{v}} d\mu \tag{1.8}$$

και η εισαγόμενη νόρμα

$$\begin{aligned}
\|u\| &\equiv \langle u, u \rangle^{1/2} \\
&= \Big\{ (2\pi)^{-p} \int \widetilde{u}(t)\overline{\widetilde{u}}(t) d\mu \Big\}^{1/2} \\
&= (2\pi)^{-p/2} \Big( \int \widetilde{u}(t)\overline{\widetilde{u}}(t) m(t) dt \Big)^{1/2} \\
&= (2\pi)^{-p/2} \|m^{1/2}\widetilde{u}\|_2.
\end{aligned}$$

Τότε θέτοντας $\kappa_x^*(\cdot) = \kappa^*(\cdot, x) \in H$ , $x \in \mathbb{R}^p$ έχουμε από την ιδιότητα του χώρου :

$$\begin{aligned}
&\forall u \in H \; u(x) = \langle \kappa_x^*, u \rangle \\
&\Leftrightarrow (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{R}^p} \exp^{-it^T x} \overline{\widetilde{u}}(t) dt = (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{R}^p} \widetilde{\kappa}_x^*(t) \overline{\widetilde{u}}(t) m(t) dt \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\kappa}_x^*(t) = \exp^{-it^T x} / m(t) \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\kappa}_x^*(t) = \exp^{-it^T x} \widetilde{\kappa}_\mu(t) \\
&\Leftrightarrow (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T \xi} k_x(\xi) d\xi = e^{-it^T x} (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T \xi} k_\mu(\xi) d\xi \\
&\Leftrightarrow (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T \xi} k_x(\xi) d\xi = (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T (\xi - x} k_\mu(\xi) d\xi \\
&\Leftrightarrow (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T \xi} k_x(\xi) d\xi = (2\pi)^{-p/2} \int_{\mathbb{R}^p} e^{it^T (u} k_\mu(u + x) du \\
&\Leftrightarrow k_x(\xi) = k_\mu(u + x)
\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει το αποτέλεσμα.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη *spline* (1.5) ως τη μοναδική λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (1.6).

**Πρόταση 1.2**

*Το πρόβλημα βελτιστοποίησης*

$$\max\Big\{ \Big[\prod_{i=1}^{n} u^2(x_i)\Big] \exp\{-\lambda \|u\|^2\}, \; u \in H, \;\; u(x_i) \geq 0, \;\; i = 1, .., n \Big\}$$

*έχει μοναδική λύση που δίνεται από την (1.5) με* $\widetilde{\kappa}_\mu m = 1, \; \lambda > 0.$

*Απόδειξη:*

Ο H είναι $RKHS$ άρα η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης είνα αποτέλεσμα της πρότασης 1.1. Η μεγιστοποίηση της ποινικοποιημένης πιθανοφάνειας

$$\widehat{L}(u) = \prod_{i=1}^{n} u^2(X_i) \exp\{-\lambda \parallel u \parallel^2\}$$

ως προς $u \in H$ είναι ισοδύναμη με τη μεγστοποίηση του

$$J(u) = log\Big[\prod_{i=1}^{n} u^2(X_i) \exp\{-\lambda \|u\|^2\}\Big]$$

ως προς $u \in H$. Όμως παίρνοντας το διαφορικό *Gateux*, (βλ. Παράρτημα, Ορισμός .3), πρώτης τάξης έχουμε ότι:

$$\nabla J(u)(\eta) = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u(X_i)} \eta(X_i) - 2\lambda \langle u, \eta \rangle_H$$

Άρα

$$\nabla J(u)(\eta) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u(X_i)}\eta(X_i) - 2\lambda(2\pi)^{-p}\int \overline{\widetilde{u}}\widetilde{\eta}d\mu \tag{1.9}$$

Για το πρόβλημα μεγιστοποίησης θέλουμε $\nabla J(u) = 0$ και με τη βοήθεια των σχέσεων του $Parseval$, (βλ. Παράρτημα, Λήμμα .9), η (1.9) γίνεται:

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\eta(X_i) - \lambda(2\pi)^{-p}\Big\{\int m\widetilde{u}\overline{\widetilde{\eta}} + \int m\overline{\widetilde{u}}\widetilde{\eta}\Big\} = 0\ ,\ \ \forall\eta \in H\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\bigg((2\pi)^{-p}\int e^{-it^TX_i}\overline{\widetilde{\eta}}(t)dt + (2\pi)^{-p}\int e^{-it^TX_i}\widetilde{\eta}(t)dt\bigg)\\
&\quad -\lambda\bigg((2\pi)^{-p}\int m\widetilde{u}\overline{\widetilde{\eta}} + (2\pi)^{-p}\int m\overline{\widetilde{u}}\widetilde{\eta}\bigg) = 0\ ,\ \ \forall\eta \in H\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\int e^{-it^TX_i}\overline{\widetilde{\eta}}(t)dt - \lambda\int m\widetilde{u}\overline{\widetilde{\eta}}\\
&\quad +\sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)\int e^{it^TX_i}\widetilde{\eta}(t)dt - \lambda\int m\overline{\widetilde{u}}\widetilde{\eta} = 0\ ,\ \ \forall\eta \in H\\
&\Leftrightarrow 2Re\bigg\{\int \Big[\sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)e^{-it^TX_i} - \lambda m(t)\widetilde{u}(t)\Big]\overline{\widetilde{\eta}}(t)dt\bigg\} = 0\ \ \forall\eta \in H
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση πρέπει: $\sum_{i=1}^{n} u(X_i)^{-1}e^{-it^TX_i} - \lambda m(t)\widetilde{u}(t) = 0$ και για $\widetilde{k_\mu}(t)m(t) = 1$ παίρνουμε :

$$\widetilde{u}(t) = \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i)e^{-it^Tx_i}k_\mu(t)$$

το οποίο από τον τύπο της αντιστροφής δίνει την (1.5) .

Το ότι είναι μοναδική η λύση προκύπτει από την Πρόταση 1.1 και είναι συμπέρασμα από το γεγονός ότι η δεύτερη παράγωγος του $J(u)$ με τύπο :

$$\nabla^2 J(u) = -2\sum_{i=1}^{n} \eta^2(X_i)u^{-2}(X_i) - 2\lambda(2\pi)^{-p}\int m|\widetilde{\eta}|^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη παντού.

□

Η παράμετρος λ επιλέγεται έτσι, ώστε $\int u^2 = 1$. Για να υπολογίσουμε το λ παρατηρούμε ότι θέτοντας $q \equiv \lambda^{1/2}u$ έχουμε

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u(X_i)}k(x - X_i) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda}u(X_i)}k(x - X_i)$$

Άρα
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q(X_i)} k(x - X_i) \tag{1.10}$$
δηλαδή το $q = \lambda^{1/2} u$ δεν εξαρτάται από το λ και : $\|q\|_2^2 = \|\lambda^{1/2} u\|_2^2 = \lambda$

Για να λύσουμε το σύστημα (1.10) θέτουμε $g_i \equiv q(X_i)^{-1},\ i = 1,\ ...,\ n$ και ελαχιστοποιούμε ισοδύναμα την κυρτή συνάρτηση
$$g^T \Sigma g - \sum_{i=1}^{n} log\ g_i^2 \ \text{ στο } \{g \in \mathbb{R}^n : g_i \geq 0,\ i = 1,\ ...,\ n\},$$
όπου $\Sigma \equiv [\kappa_\mu(X_i - X_j)] \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_i g_j (\kappa_\mu * \kappa_\mu)(X_i - X_j)$. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε είναι βασισμένος σε μία $truncated - Newton$ μέθοδο, η οποία περιγράφεται από τον $Nash$ (1982). (βλ. [18], [13], [14])

# Κεφάλαιο 2

# Προεισαγωγικά Λήμματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τέσσερα λήμματα στα οποία βασίζονται οι αποδείξεις της συνέπειας των εκτιμητών που εμφανίζονται στο Κεφάλαιο 4.

Σημειώνουμε με $\| \cdot \|_p$ τις $L_p(\mathbb{R})$ νόρμες, $p = 1, 2, \infty$ και έστω $\| \cdot \|$ η νόρμα που συνδέεται με το εσωτερικό γινόμενο στον H. Οι αποδείξεις της συνέπειας βασίζονται στο παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 2.1**

*Έστω $u_\lambda$ η λύση του προβλήματος (1.6) για κάποιο $\lambda > 0$. Αν $v = f^{1/2} \in H$, τότε*

$$\| u_\lambda - v \|^2 \leq \lambda^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i) v^{-1}(X_j) k_\mu(X_i - X_j) - 2(n/\lambda) + \| v \|^2$$

*Απόδειξη:*

Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση του προβλήματος βελτιστοποίησης, $u_\lambda > 0$. Επίσης $v = f^{1/2} > 0$, άρα

$$\sum_{i=1}^{n} u_\lambda^{-1}(X_i) v^{-1}(X_i) (u_\lambda(X_i) - v(X_i))^2 \geq 0$$

επομένως, για $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i) k_\mu(\cdot, -X_i) - u_\lambda, u_\lambda - v \rangle \\
&= \langle \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_\mu(\cdot, -X_i)}{v(X_i)} - \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_\mu(\cdot, -X_i)}{u_\lambda(X_i)}, u_\lambda - v \rangle \\
&= \langle \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_\mu(\cdot, -X_i)(u_\lambda(X_i) - v(X_i))}{v(X_i) u_\lambda(X_i)}, u_\lambda - v \rangle \\
&= \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(u_\lambda(X_i) - v(X_i))}{v(X_i) u_\lambda(X_i)} \langle k_\mu(\cdot, -X_i), u_\lambda - v \rangle \\
&= \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(u_\lambda(X_i) - v(X_i))}{v(X_i) u_\lambda(X_i)} (u_\lambda(X_i) - v(X_i))
\end{aligned}$$

$$= \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)u_\lambda^{-1}(X_i)(u_\lambda(X_i)-v(X_i))^2$$
$$\geq 0$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-u_\lambda, u_\lambda - v\rangle \quad \geq 0\\
&\Leftrightarrow \langle \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i), u_\lambda - v\rangle \;\geq\; \langle u_\lambda, u_\lambda - v\rangle\\
&\Leftrightarrow \langle \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v, u_\lambda - v\rangle \;\geq \langle u_\lambda, u_\lambda - v\rangle - \langle v, u_\lambda - v\rangle\\
&\Leftrightarrow \langle \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v, u_\lambda - v\rangle \;\geq\; \|u_\lambda - v\|^2
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα $Cauchy - Schwartz$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda - v\|^2 \;&\leq\; \langle \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v, u_\lambda - v\rangle\\
&\leq\; \|\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v\|\|u_\lambda - v\|
\end{aligned}$$

άρα

$$\|u_\lambda - v\| \;\leq \|\; \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v\;\|$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
&\|u_\lambda - v\|^2 \leq \|\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)k_\mu(\cdot,-X_i)-v\|^2\\
\Leftrightarrow\;& \|u_\lambda - v\|^2 \leq \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)\langle k_\mu(\cdot,-X_i), k_\mu(\cdot,-X_j)\rangle\\
&\qquad -2\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)\langle k_\mu(\cdot,-X_i), v\rangle + \|v\|^2
\end{aligned}$$

Επειδή ο H είναι $RKHS$ έχουμε:

$$\|u_\lambda - v\|^2 \leq \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)k_\mu(X_i - X_j)$$

$$-2\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} v^{-1}(X_i)v(X_i) + \|v\|^2$$

$$\Leftrightarrow\ \|u_\lambda - v\|^2 \le \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)k_\mu(X_i - X_j) - 2(n/\lambda) + \|v\|^2.$$

□

Έστω $\lambda_n$ η τιμή του λ έτσι ώστε $\int u^2_{\lambda_n} = 1$. Το επόμενο λήμμα περιγράφει πιθανοθεωρητικά τη συμπεριφορά του $\lambda_n/n$.

**Λήμμα 2.2**

*Αν $v \in H$ , τότε*

$$|(\lambda_n/n)^{1/2} - 1| \le \| k_\mu \|_1^{1/2} \left\{ n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)k_\mu(X_i - X_j) - 2 + \| v \|^2 \right\}^{1/2}$$

*Απόδειξη:*

Από το λήμμα 2.1 για λ= $n$ έχουμε ότι :

$$\| u_n - v \|^2 \le\ n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)k_\mu(X_i - X_j) - 2 + \| v \|^2 \tag{2.1}$$

Επίσης από τη σχέση (1.10) παίρνουμε

$$q(X_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q(X_i)} k_\mu(X_i - X_j)\ ,\ j = 1, .., n$$

με $q(x) = \sqrt{\lambda}u(x)$ άρα η ποσότητα $\lambda^{1/2}u$ δεν εξαρτάται από το λ. Επομένως για $\lambda = n$ είναι

$$\lambda_n^{1/2} u_{\lambda_n} = n^{1/2}u_n \Leftrightarrow \|\lambda_n^{1/2}u_{\lambda_n}\|_2 = \|n^{1/2}u_n\|_2 \Leftrightarrow \|u_{\lambda_n}\|_2 = \left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^{1/2}\|u_n\|_2$$

δηλαδή

$$\frac{\lambda_n}{n} = \|u_n\|_2^2 \tag{2.2}$$

καθώς $\int u^2_{\lambda_n} = 1$ . Επίσης παρατηρούμε ότι $1 = m(t)\widetilde{k_\mu}(t) \le m(t)\|k_\mu\|_1$ . Άρα

$$1 \le \|m\|_2\|k_\mu\|_1 \Leftrightarrow \|m\|_2 \ge \frac{1}{\|k_\mu\|_1}$$

Η εισαγόμενη νόρμα του χώρου Η είναι η $\|u\| = (2\pi)^{-p/2}\|m^{1/2}\widetilde{u}\|_2,\ \ \forall u \in H$, άρα

$$\|u\|^2 = (2\pi)^{-p}\|m^{1/2}\widetilde{u}\|_2^2 \ge (2\pi)^{-p}\frac{1}{\|k_\mu\|_1}\|\widetilde{u}\|_2^2\ ,\ \ \forall u \in H$$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2\|k_\mu\|_1 \ge \|u\|_2^2\ ,\ \ \forall u \in H$$

Άρα

$$\| \cdot \|_2^2 \leq \|k_\mu\|_1 \| \cdot \|^2 \tag{2.3}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) παίρνουμε :

$$|(\lambda_n/n)^{1/2} - 1| = \Big| \|u_n\|_2 - \|v\|_2 \Big| \leq \|u_n - v\|_2 \leq \|k_\mu\|_1^{1/2} \|u_n - v\|$$

η οποία μαζί με την (2.1) μας δίνουν το αποτέλεσμα.

$\square$

Θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς για τη σύγκλιση κατά πιθανότητα και τη σχεδόν βεβαίως σύγκλιση ως εξής:
Για δύο ακολουθίες $A_n$ και $a_n$ και $c$ κάποια σταθερά, θα λέμε ότι
$A_n = O(a_n)$ όταν $\frac{A_n}{a_n} \to c$, σχεδόν βεβαίως, καθώς $n \to +\infty$.
Επίσης,
$A_n = O_p(a_n)$ όταν $\frac{A_n}{a_n} \to c$, κατά πιθανότητα, καθώς $n \to +\infty$.
Τέλος,
$A_n = o(a_n)$ όταν $\frac{A_n}{a_n} \to 0$, σχεδόν βεβαίως, καθώς $n \to +\infty$.

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε τον $RKHS$ H, με πυρήνα $k^*(x,y) = k_\mu(x-y)$ με $k_\mu(\cdot) = h^{-1}k(\cdot/h)$, $h \geq 0$, και θα παίρνουμε $h = h_n = O(n^{-t})$ για κάποια $t \in (0, 1/2)$ έτσι, ώστε η (1.5) να παίρνει τη μορφή :

$$u(x) = \lambda_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} u^{-1}(X_i) h^{-1} k\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big), \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

**Λήμμα 2.3**

*Κάτω από τις υποθέσεις :*
$Y_1 : E\{f^{-r}(X)\} < +\infty$ *για κάποιο* $r < (1-t)$, $t \in (0, 1/2)$,
$Y_2 : \|v^{(s+2)}\|_2 < +\infty$ *όπου* $s = 0, 1, ..$ *ο αριθμός των άρτιων ροπών του πυρήνα* $k$, *οι οποίες είναι μηδέν έχουμε ότι :*

$$\Big| n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i) v^{-1}(X_j) h^{-1} k\Big(\frac{X_i - X_j}{h}\Big) - 1 \Big|$$
$$= O_p(n^{-(1-\delta-r-t)}) + O_p(n^{-(1/2+(2+s)t)}) + O(n^{-2(1+s)t})$$

*για κάποιο* $\delta > 0$.

*Απόδειξη:*

Έστω $Y_{ij} \equiv v^{-1}(X_i) v^{-1}(X_j) h^{-1} k\Big(\frac{X_i - X_j}{h}\Big)$ $i, j = 1, .., n$ Παρατηρούμε ότι για $i = j$, είναι $k(0)^{-1} h Y_{ii} = v^{-2}(X_i) = f^{-1}(X_i)$, $i = 1, .., n$. Από την $Y_1$ παίρνουμε ότι:

$$E\{f^{-r}(X)\} < +\infty \;\; , \;\; \text{για} \;\; r < (1-t) < 1.$$

Από την προσαρμογή του INMA από τον $Marcinkiewicz$ (βλ. Παράρτημα, Λήμμα .11) παίρνουμε

$$\Big(\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(X_i)}\Big) \to 0,$$

επομένως, δεδομένου ότι $h = O(n^{-t})$ θα είναι :

$$\frac{h^{-1}}{n^{2-\frac{1}{r}}}\left(\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(X_i)}\right) = o(n^{-2+\frac{1}{r}+t})$$

άρα και

$$k(0)h^{-1}n^{-2}\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(X_i) = O(n^{(1/r)+t-2}) \;\; a.s. \tag{2.5}$$

έτσι, ώστε να μπορούμε να απασχοληθούμε μόνο με τον όρο $\sum\sum_{i\neq j} Y_{ij}$.

Αφού $EY_{ij}^2 = +\infty$ για να μελετήσουμε τη σύγκλιση των σειρών θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική του *truncation*. Για $i, j$ με $i \neq j$ έστω $Z_{ij} \equiv X_i - X_j$,

$$Z_{ij}^c = \begin{cases} +\infty, & \text{αν} |X_i| > c_i \text{ και } |X_j| > c_j \\ \\ Z_{ij} & , \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

με $c_i = i^{\zeta}$, $\zeta > r^{-1}$, και ορίζουμε $Y_{ij}^c \equiv v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}h^{-1}k\Big(\frac{Z_{ij}^c}{h}\Big)$. Παρατηρούμε ότι $Y_{ij} \neq Y_{ij}^c$ μόνο αν $Z_{ij} \neq Z_{ij}^c$. Άρα $\forall\, h > 0$

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} \neq Y_{ij}^c,\ i.o.) &= P(Z_{ij} \neq Z_{ij}^c,\ i.o.) = P\Big(|X_i| > c_i \text{ και } |X_j| > c_j\ ,\ i.o.\Big) \\ &\leq P\Big(|X_i| > c_i\ ,\ i.o.\Big)P\Big(|X_j| > c_j\ ,\ i.o.\Big) \\ &\leq \lim_m \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} P(|X_i| > c_i)P(|X_j| > c_j) = \lim_m \sum_{i=m}^{\infty} P(|X_i| > c_i)^2 \end{aligned}$$

Αλλά από την ανισότητα *Markov* έχουμε ότι

$$P(|X_i| > c_i) \leq \frac{E|X|^{1/r}}{|c_i|^{1/r}} = E|X|^{1/r} i^{-\zeta/r}$$

άρα η σειρά συγκλίνει. Τότε $\forall\, h > 0$

$$P(Y_{ij} \neq Y_{ij}^c, io) \leq \Big(\lim_m \sum_{i=m}^{\infty} E|X|^{1/r} i^{-\zeta/r}\Big)^2 = 0$$

Θέτουμε $S_n = \sum_{i=1\ i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}k\Big(\frac{Z_{ij}}{h_n}\Big)$ και ορίζουμε το $S_n^c$ ομοίως μέσα από το $Z_{ij}^c$.

Παρατηρούμε ότι για θετικό $n$ και πεπερασμένο σύνολο A

$$|S_n - S_n^c| \;=\; \Big|\sum_{i=1\ i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}k\Big(\frac{Z_{ij}}{h_n}\Big) - \sum_{i=1\ i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}k\Big(\frac{Z_{ij}^c}{h_n}\Big)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_{i\in A}\sum_{i\neq j}\sum_{j\in A} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}\Big(k\Big(\frac{Z_{ij}}{h_n}\Big)-k\Big(\frac{Z^c_{ij}}{h_n}\Big)\Big)\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i\in A}\sum_{j\in A} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}\|2k\|_\infty\Big| \\
&= 2\|k\|_\infty\Big|\sum_{i\in A}\sum_{j\in A} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}\Big| \\
&\leq 2\|k\|_\infty\Big(\sum_{i\in A} v(X_i)^{-1}\Big)^2
\end{aligned}
$$

όπου το A παραμένει πεπερασμένο σύνολο και $P(v(X_i)=0)=0$ αφού η $f$ συνεχής.

Άρα, για κάθε ακολουθία $\alpha_n \to 0$ καθώς $n\to\infty$ για $|S_n - S^c_n| \leq M\ ,\ M>0$, είναι

$$\alpha_n|S_n - S^c_n| \to 0 \quad \sigma.\pi.\ \text{καθώς}\ n\to\infty$$

δηλαδή οι σειρές $\alpha_n S_n$ και $\alpha_n S^c_n$ συγκλίνουν ισοδύναμα, άρα αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμά μας για τις *truncated* τυχαίες μεταβλητές.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τη βοήθεια της *truncated* μορφής του $Y_{ij}$ και με βάση τη διάταξη των $X_i, X_j$ σε σχέση με τα $c_i, c_j$ αντίστοιχα, θα είναι:

$$
\begin{aligned}
EY^c_{ij} &= EY_{ij} - \Big[\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} + \int_{c_i}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{c_j}^{+\infty}\Big] \\
&\qquad \Big[h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v(x)^{-1}v(y)^{-1}f(x)f(y)\Big]dxdy \\
&= EY_{ij} - \Big[\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} + \int_{c_i}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{c_j}^{+\infty}\Big] \\
&\qquad \Big[h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)f(x)^{-1/2}f(y)^{-1/2}f(x)f(y)\Big]dxdy \\
&= EY_{ij} - \Big[\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} + \int_{c_i}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{-\infty}^{-c_j} + \int_{-\infty}^{-c_i}\int_{c_j}^{+\infty}\Big] \\
&\qquad \Big[h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)f^{1/2}(x)f^{1/2(y)}\Big]dxdy
\end{aligned}
$$

Όμως από ανισότητα *Hölder*

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)f^{1/2}(x)f^{1/2}(y)dxdy\Big| \\
&\leq \Big\{\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} h^{-1}\Big|k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)\Big|f(x)dxdy\Big\}^{1/2}\Big\{\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} h^{-1}\Big|k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)\Big|f(y)dxdy\Big\}^{1/2} \\
&= \Big\{\int_{c_j}^{+\infty}\int_{c_i}^{+\infty} h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)f(x)dydx\Big\}^{1/2}\Big\{\int_{c_i}^{+\infty}\int_{c_j}^{+\infty} h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)f(y)dxdy\Big\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\leq \left\{ \int_{c_j}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} h^{-1} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) dy f(x) dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{c_i}^{+\infty} f(y) \int_{\mathbb{R}} h^{-1} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) dx dy \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \int_{c_j}^{+\infty} \|k\|_1 f(x) dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{c_i}^{+\infty} f(y) \|k\|_1 dy \right\}^{1/2}$$

$$= \|k\|_1^{1/2} \Big[P(X_i > c_i)\Big]^{1/2} \|k\|_1^{1/2} \Big[P(X_j > c_j)\Big]^{1/2}$$

Από ανισότητα $Markov$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\|k\|_1 \Big[P(X_i > c_i)\Big]^{1/2} \Big[P(X_j > c_j)\Big]^{1/2} &\leq \|k\|_1 \left[\left(\frac{E|X_i|^{1/r}}{c_i}\right)\right]^{1/2} \left[\left(\frac{E|X_j|^{1/r}}{c_j}\right)\right]^{1/2} \\
&= \|k\|_1 \frac{E|X_i|^{1/r}}{(c_i c_j)^{1/2r}} = \|k\|_1 \frac{E|X_i|^{1/r}}{(ij)^{\zeta/2r}}
\end{aligned}$$

Το ίδιο φράγμα προέρχεται ομοίως από τα άλλα τρία ολοκληρώματα έτσι, ώστε :

$$|EY_{ij}^c - EY_{12}| \leq 4\|k\|_1 E|X_i|^{1/r} (ij)^{\zeta/2r} \tag{2.6}$$

Αθροίζοντας τα $Y_{ij}$ , για $i = 1, .., n$ και $j = 1, .., n$ όπου $i \neq j$ , δηλαδή $n(n-1)$ στο πλήθος, για την τάξη του $n$ προκύπτει από την (2.6) ότι :

$$[n(n-1)]^{-1} E\Big\{\sum \sum_{i \neq j} Y_{ij}^c\Big\} = EY_{12} + O(n^{-\zeta/2r} n^{-\zeta/2r})$$

Άρα

$$[n(n-1)]^{-1} E\Big\{\sum \sum_{i \neq j} Y_{ij}^c\Big\} = EY_{12} + O(n^{-\zeta/r}) \tag{2.7}$$

Έπειτα, για να πετύχουμε την τάξη με την οποία χάνεται η μεροληψία, αρκεί να ελέγξουμε τον επόμενο όρο :

$$\begin{aligned}
|EY_{12} - 1| &= \Big| \int \int h^{-1} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) v(x)^{-1} v(y)^{-1} v^2(x) v^2(y) dx dy - 1 \Big| \\
&= \Big| \int \int h^{-1} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) v(x) v(y) dx dy - 1 \Big|
\end{aligned}$$

και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $\frac{y-x}{h} = z$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\Big| EY_{12} - 1 \Big| &= \Big| \int \int k(z) v(y + hz) v(y) dz dy - 1 \Big| \\
&= \Big| \int \int v(y) k(z) \Big\{ v(y) + z v'(y) + \frac{h^2}{2} z^2 v''(y + \overline{h} z) \Big\} dz dy - 1 \Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\int\int v(y)^2 k(z)dzdy + \int\int hk(z)zv(y)v'(y)dzdy \\
&\quad + \int\int \frac{h^2}{2} z^2 k(z)v(y)v''(y+\overline{h}z)dzdy - 1\Big| \\
&= \Big|\int v(y)^2\Big(\int k(z)dz\Big)dy + \int v(y)v'(z)h\Big(\int k(z)zdz\Big)dy \\
&\quad + \int\int \frac{h^2}{2} z^2 k(z)v(y)v''(y+\overline{h}z)dzdy - 1\Big| \\
&= \Big|1 + \frac{h^2}{2}\int\int z^2 k(z)v(y)v''(y+\overline{h}z)dzdy - 1\Big|
\end{aligned}
$$

καθώς η $k$ είναι συμμετρική γύρω από το 0 και $\int k(z)zdz = 0$, ενώ $\int k(z)dz = 1$, επομένως

$$
\Big|EY_{12} - 1\Big| = \frac{h^2}{2}\int\int z^2 k(z)v(y)v''(y+\overline{h}z)dzdy \quad , \quad \forall \overline{h} \in (0,h)
$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε :

$$
\begin{aligned}
\frac{h^2}{2}\Big|\int z^2 k(z)\int v(y)v''(y+\overline{h}z)dydz\Big| &= \frac{h^2}{2}\Big|\int z^2 k(z)\int v'(y)v'(y+\overline{h}z)dydz\Big| \\
&\leq \frac{h^2}{2}\Big|\int z^2 k(z)\|v'\|_2^2 dz\Big| \\
&\leq \frac{h^2}{2}\|v'\|_2^2\int z^2|k(z)|dz
\end{aligned}
$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $\int z^{2s}k(z)dz = 0$ για κάποιους θετικούς ακεραίους $s$ , μπορούμε να μεταφέρουμε το παραπάνω ανάπτυγμα $Taylor$ και να φτάσουμε στην ανισότητα

$$
\Big|EY_{12} - 1\Big| \leq \frac{h^{2(s+1)}}{2(s+1)!}\|v^{(s+1)}\|_2^2\int z^{2(s+1)}|k(z)|dz.
$$

Οπότε προκύπτει ότι:

$$
\Big|EY_{12} - 1\Big| = O(h^{2(s+1)}) \tag{2.8}
$$

Για παράδειγμα, για $s = 1$ ανάλογα με πριν θα προκύψει ότι $\Big|EY_{12} - 1\Big| = O(h^4)$.

Έπειτα, έχοντας την (2.7) και την (2.8) για να συμπεράνουμε την απόδειξη χρειαζόμαστε μόνο να δείξουμε ότι:

$$
[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c) = O_p(n^{-1/2}h^{2+s}) + O_p(n^{-1+(\zeta/2)}h^{-1/2}) \tag{2.9}
$$

από τα οποία με τη βοήθεια της ανισότητας $Markov$ παίρνουμε ότι:

$$
P\Big(\Big|\frac{[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)}{n^{1/2}h^{2+s}}\Big| > c_1\Big) \leq \frac{E\Big\{[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)\Big\}^2}{n^{-1/2}h^{2+s}c_1^2}
$$

και

$$P\Big(\Big|\frac{[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)}{n^{-1+(\zeta/2)}h^{-1/2}}\Big| > c_2\Big) \leq \frac{E\Big\{[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)\Big\}^2}{n^{-2+\zeta}h^{-1}c_2^2}$$

όπου $c_1, c_2$ θετικές σταθερές. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι :

$$E\Big\{[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)\Big\}^2 = O(n^{-1}h^{2s+4}) + O(n^{-2+\zeta}h^{-1}) \tag{2.10}$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum\sum_{i\neq j} E\{Y_{ij}^c\}^2 &\leq \sum\sum_{i\neq j}\Big\{\int_{-c_j}^{c_j}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v^{-1}(x)v^{-1}(y)\Big]^2 dF_x dF_y \\
&\quad + \int_{-c_i}^{c_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v^{-1}(x)v^{-1}(y)\Big]^2 dF_x dF_y\Big\} \\
&= \sum\sum_{i\neq j}\Big\{\int_{-c_j}^{c_j}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v^{-2}(x)v^{-2}(y)f(x)f(y)dxdy \\
&\quad + \int_{-c_i}^{c_i}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v^{-2}(x)v^{-2}(y)f(x)f(y)dxdy\Big\} \\
&= \sum\sum_{i\neq j}\Big\{\int_{-c_j}^{c_j}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2\Big(\frac{x-y}{h}\Big)dxdy \\
&\qquad + \int_{-c_i}^{c_i}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2\Big(\frac{x-y}{h}\Big)dxdy\Big\}
\end{aligned}$$

όπου κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $\frac{x-y}{h} = z$ προκύπτει :

$$\begin{aligned}
\sum\sum_{i\neq j} E\{Y_{ij}^c\}^2 &\leq \sum\sum_{i\neq j}\Big\{\int_{-c_j}^{c_j}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2(z)hdxdy + \int_{-c_i}^{c_i}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-2}k^2(z)hdxdy\Big\} \\
&= \sum\sum_{i\neq j}\Big\{\int_{-c_j}^{c_j} h^{-1}\|k\|_2^2 dy + \int_{-c_i}^{c_i} h^{-1}\|k\|_2^2 dxdy\Big\} \\
&= \sum\sum_{i\neq j}\Big\{2c_j h^{-1}\|k\|_2^2 + 2c_i h^{-1}\|k\|_2^2\Big\} \\
&= 2\|k\|_2^2 h^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(c_i + c_j) = 2\|k\|_2^2 h^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(i^\zeta + j^\zeta) \\
&\leq 2\|k\|_2^2 h^{-1}\sum\sum_{i\neq j}(n^\zeta + n^\zeta) \\
&= 2\|k\|_2^2 h^{-1}n(n-1)(2n^\zeta) \\
&\leq 4\|k\|_2^2 h^{-1}n^{\zeta+2}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum\sum_{i\neq j} E(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)^2 = O(h^{-1}n^{\zeta+2})$$

επομένως

$$[n(n-1)]^{-2}\sum\sum_{i\neq j} E(Y_{ij}^c - EY_{ij}^c)^2 = O(h^{-1}n^{-2+\zeta}) \tag{2.11}$$

Οι υπόλοιποι μη μηδενικοί όροι της (2.10) αποτελούν ένα τριπλό άθροισμα από όρους που φράσουμε παρακάτω.

$$\begin{aligned}
&|EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}^cEY_{jl}^c| \\
&= |EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}Y_{jl} + EY_{ij}Y_{jl} - EY_{ij}EY_{jl} + EY_{ij}EY_{jl} - EY_{jl}^cEY_{12} \\
&\qquad + EY_{12}EY_{jl}^c - EY_{jl}^cEY_{ij}^c| \\
&\leq |EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}Y_{jl}| + |EY_{ij}Y_{jl} - EY_{ij}EY_{jl}| + |EY_{12}EY_{12} - EY_{jl}^cEY_{12}| \\
&\qquad + |EY_{12}EY_{jl}^c - EY_{jl}^cEY_{ij}^c| \\
&= |EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}Y_{jl}| + |EY_{ij}Y_{jl} - EY_{ij}EY_{jl}| + |EY_{12}||EY_{jl}^c - EY_{12}| \\
&\qquad + |EY_{jl}^c||EY_{jl}^c - EY_{12}|.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Όμως, θέτοντας $I_i = [-c_i, c_i]$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
&EY_{ij}Y_{jl} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[h^{-2}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)k\Big(\frac{y-z}{h}\Big)v^{-1}(x)v^{-2}(y)v(z)^{-1}f(x)f(y)f(z)\Big]dxdydz \\
&= \Big\{\int_{I_i}\int_{I_j}\int_{I_l} + \int_{I_i^c}\int_{I_j}\int_{I_l} + \int_{I_i}\int_{I_j^c}\int_{I_l} + \int_{I_i^c}\int_{I_j^c}\int_{I_l} \\
&\qquad + \int_{I_i}\int_{I_j}\int_{I_l^c} + \int_{I_i^c}\int_{I_j}\int_{I_l^c} + \int_{I_i}\int_{I_j^c}\int_{I_l^c} + \int_{I_i^c}\int_{I_j^c}\int_{I_l^c}\Big\} \\
&\qquad \Big[h^{-2}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)k\Big(\frac{y-z}{h}\Big)v(x)v(z)\Big]dxdydz
\end{aligned}$$

Επίσης με βάση τον τρόπο που ορίζονται τα $Y_{ij}^c, Y_{jl}^c$ είναι:

$$\begin{aligned}
EY_{ij}^cY_{jl}^c &= \Big\{\int_{I_i}\int_{I_j^c}\int_{I_l} + \int_{I_i}\int_{I_j}\int_{I_l} + \int_{I_i^c}\int_{I_j}\int_{I_l} + \int_{I_i}\int_{I_j}\int_{I_l^c} + \int_{I_i^c}\int_{I_j}\int_{I_l^c}\Big\} \\
&\qquad \Big[h^{-2}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)k\Big(\frac{y-z}{h}\Big)v(x)v(z)\Big]dxdydz
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
& |EY_{ij}^c Y_{jl}^c - EY_{ij} Y_{jl}| \\
= \ & \left| \left\{ \int_{I_i^c} \int_{I_j^c} \int_{I_l} + \int_{I_i} \int_{I_j^c} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{I_j^c} \int_{I_l^c} \right\} \Big[ h^{-2} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) k\Big(\frac{y-z}{h}\Big) v(x) v(z) \Big] dx dy dz \right| \\
= \ & \left| \left\{ \int_{I_i} \int_{I_j^c} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{I_j^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ h^{-2} k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) k\Big(\frac{y-z}{h}\Big) v(x) v(z) \Big] dx dy dz \right| \\
\leq \ & \left\{ \int_{I_i} \int_{I_j^c} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{I_j^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ h^{-2} \Big| k\Big(\frac{x-y}{h}\Big) \Big| \Big| k\Big(\frac{y-z}{h}\Big) \Big| v(x) v(z) \Big] dx dy dz \\
= \ & \left\{ \int_{I_i} \int_{I_j^c} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{I_j^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ h^{-2} \Big| k\Big(\frac{y-x}{h}\Big) \Big| \Big| k\Big(\frac{z-y}{h}\Big) \Big| v(x) v(z) \Big] dx dy dz \\
\leq \ & \left\{ \int_{I_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ h^{-1} |k(t)| \Big| k\Big(\frac{z-x}{h} - t\Big) \Big| v(x) v(z) \Big] dx dt dz \\
\leq \ & \left\{ \int_{I_i} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ [h^{-1} v(x) v(z)] \int_{-\infty}^{+\infty} |k(t)| \Big| k\Big(\frac{z-x}{h} - t\Big) \Big| dt dx dz \Big] \\
\leq \ & \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_l^c} + \int_{I_i^c} \int_{-\infty}^{+\infty} \right\} \Big[ [h^{-1} v(x) v(z)] \Big( |k| * |k| \Big) \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dx dz \Big] \\
= \ & I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

όπου,

$$
I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_l^c} [h^{-1} v(x) v(z)] \Big( |k| * |k| \Big) \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dx dz \Big]
$$

και

$$
I_2 = \int_{I_i^c} \int_{-\infty}^{+\infty} [h^{-1} v(x) v(z)] \Big( |k| * |k| \Big) \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dx dz \Big]
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
I_1 \ \leq \ & \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_l^c} [h^{-1} v(x)^2] \Big( |k| * |k| \Big) \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dx dz \Big] \right\}^{1/2} \\
& \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_l^c} [h^{-1} v^2(z)] \Big( |k| * |k| \Big) \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dx dz \Big] \right\}^{1/2} \\
\leq \ & \left\{ \int_{I_l^c} v^2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1} |k| * |k| \Big( \frac{x-z}{h} \Big) dz dx \Big] \right\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(z)\int_{\infty}^{+\infty} h^{-1}|k|*|k|\Big(\frac{x-z}{h}\Big)dxdz\Big]\Big\}^{1/2} \\
\leq\ & \Big\{\int_{I_l^c} v^2(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1}|k|\Big(\frac{x-z}{h}-y\Big)|k|(y)dydzdx\Big]\Big\}^{1/2} \\
& \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(z)\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} h^{-1}|k|\Big(\frac{x-z}{h}-y\Big)|k|(y)dydxdz\Big]\Big\}^{1/2} \\
\leq\ & \Big\{\int_{I_l^c} v^2(x)\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1}|k|\Big(\frac{x-z}{h}-y\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}|k|(y)dzdydx\Big]\Big\}^{1/2} \\
& \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(z)\int_{\infty}^{+\infty} h^{-1}|k|\Big(\frac{x-z}{h}-y\Big)\int_{\infty}^{+\infty}|k|(y)dxdydz\Big]\Big\}^{1/2} \\
\leq\ & \Big[\|k\|_1^2\int_{I_l^c} v^2(x)dx\Big]^{1/2}\|k\|_1^2\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(z)dz\Big]^{1/2} = \|k\|_1^2 P(|X|>c_l)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Ομοίως

$$
I_2 \leq \|k\|_1^2 P(|X|>c_i)^{1/2}
$$

επομένως

$$
\begin{aligned}
|EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}Y_{jl}| &\leq \|k\|_1^2\Big[P(|X|>c_l)^{1/2}+P(|X|>c_i)^{1/2}\Big] \\
&\leq \|k\|_1^2\Big[\Big(\frac{E|X|^{1/r}}{c_l^{1/r}}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{E|X|^{1/r}}{c_i^{1/r}}\Big)^{1/2}\Big] \\
&= \|k\|_1^2 E|X|^{1/2r}(l^{-\zeta/2r}+i^{-\zeta/2r})
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
|EY_{ij}^cY_{jl}^c - EY_{ij}Y_{jl}| \leq \|k\|_1^2 E|X|^{1/2r}(l^{-\zeta/2r}+i^{-\zeta/2r}) \tag{2.13}
$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι για έναν πυρήνα $k$ με $s=0,1,2,...$ μηδενικές άρτιες ροπές, η συνέλιξη $k*k$ θα έχει $s$ μηδενικές ροπές και

$$
m_{2s+2}^* = 2m_{2s+2}\ ,
$$

όπου $m_r, m_r^*$ είναι η $r-$οστή ροπή των $k$ και $k*k$ αντίστοιχα. Για $s=0$

$$
\begin{aligned}
m_2^* &= \int x^2\int k(x-y)k(y)dydx \\
&= \int\Big(\int (z+y)^2 k(z)dz\Big)k(y)dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int (z^2+y^2+2yz)k(z)dz)k(y)dy \\
&= m_2 + \int y^2 k(y)dy \\
&= 2m_2
\end{aligned}
$$

Τότε :

$$
\begin{aligned}
& EY_{ij}Y_{jl} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1}(k*k)\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v(x)v(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1}(k*k)(z)v(y+hz)v(y)dzdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (k*k)(z)v(y)\Big\{v(y)+hzv'(y)+\frac{h^2}{2!}z^2v''(y)+\frac{h^3}{3!}z^3v'''(y) \\
&\qquad\qquad +\frac{h^4}{4!}z^4v^{(4)}(y+\overline{h}z)\Big\}dzdy \\
&= 1+\frac{h^2}{2}\int\int(k*k)(z)z^2v''(y)v(y)dzdy+\frac{h^4}{4!}\int\int z^4(k*k)(z)v^{(4)}(y+\overline{h}z)v(y)dzdy \\
&= 1+2\frac{h^2}{2}m_2\|v'\|_2^2+O(h^4)\ , \quad \overline{h}\in(0,h).
\end{aligned}
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
EY_{ij}EY_{jl} &= \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{-1}k\Big(\frac{x-y}{h}\Big)v(x)v(y)dxdy\Big\}^2 \\
&= \Big\{1+\frac{h^2}{2!}m_2\|v'\|_2^2+O(h^4)\Big\}^2
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
EY_{ij}Y_{jl}-EY_{ij}EY_{jl} = 1+2\frac{h^2}{2}m_2\|v'\|_2^2+O(h^4)-\Big\{1+\frac{h^2}{2!}m_2\|v'\|_2^2+O(h^4)\Big\}^2 = O(h^4)
$$

Γενικά, για $s=1,2,..$ και $m^*_{2s+2}=2m_{2s+2}$ είναι

$$
\begin{aligned}
& EY_{ij}Y_{jl}-EY_{ij}EY_{jl} \\
&= 1+(-1)^{s+1}\frac{h^{2s+2}}{(2s+2)!}m^*_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^2+O(h^{2s+4}) \\
&\quad -\Big\{1+(-1)^{s+1}\frac{h^{2s+2}}{(2s+2)!}m_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^2+O(h^{2s+4})\Big\}^2
\end{aligned}
$$

$$= 1 + (-1)^{s+1}\frac{h^{2s+2}}{(2s+2)!}m^*_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^2 + O(h^{2s+4})$$
$$-\Big\{1 + \frac{h^{4s+4}}{((2s+2)!)^2}m^2_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^4 + O(h^{8s+4}) + 2(-1)^{s+1}\frac{h^{2s+2}}{(2s+2)!}m_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^2$$
$$+O(h^{2s+4}) + 2O(h^{2s+4})(-1)^{s+1}\frac{h^{2s+2}}{(2s+2)!}m_{2s+2}\|v^{(s+1)}\|_2^2\Big\}$$

επομένως
$$EY_{ij}Y_{jl} - EY_{ij}EY_{jl} = O(h^{4+2s}) \tag{2.14}$$

Επομένως, επιστρέφοντας στη σχέση (2.12), συνοψίζουμε τις τάξεις σύγκλισης του δεξιού μέλους της κι έχουμε:

$$|EY^c_{ij}Y^c_{jl} - EY_{ij}Y_{jl}| \le \|k\|_1^2 E|X|^{1/2r}(l^{-\zeta/2r} + n^{-\zeta/2r}) = O(n^{-\zeta/2r}) = O(n^{-1})$$

από τη σχέση (2.13) και για $\zeta/r > 2$. Επίσης, από την σχέση (2.6) παίρνουμε ότι

$$|EY^c_{jl} - EY_{12}| \le 4\|k\|_1 E|X_i|^{1/r}(n^2)^{-\zeta/2r} = O(n^{-\zeta/r}) = O(n^{-2})$$

για $\zeta/r > 2$.

Άρα η σχέση (2.12) σε συνδυασμό με τις δύο παραπάνω σχέσεις και την (2.14) δίνει ότι :
$$(EY^c_{ij}Y^c_{jl} - EY^c_{ij}EY^c_{jl}) = O(n^{-1}) + O(h^{4+2s})$$

και αθροίζοντας προκύπτει ότι

$$\sum_i \sum_{\substack{j\\ i\neq j\neq l}} \sum_l E(Y^c_{ij}Y^c_{jl} - EY^c_{ij}EY^c_{jl}) = O(n^{-1}n^3) + O(n^3h^{4+2s})$$

από όπου συνεπάγεται η

$$[n(n-1)]^{-2}\sum_i \sum_{\substack{j\\ i\neq j\neq l}} \sum_l E(Y^c_{ij}Y^c_{jl} - EY^c_{ij}EY^c_{jl}) = O(n^{-2}) + O(n^{-1}h^{4+2s}) \tag{2.15}$$

Η παραπάνω σχέση μαζί με την (2.11) συμπληρώνουν τους όρους του αριστερού μέλους της (2.10) και την αποδεικνύουν. Επομένως, και η απόδειξη του Λήμματος είναι πληρης.
□

**Πόρισμα 2.1**

*Κάτω από τις υποθέσεις :* $Y_1, Y_2$ *έχουμε ότι :*

$$\Big|n^{-2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k\Big(\frac{X_i - X_j}{h}\Big) - 1\Big| = O_p(n^{-\xi})$$

*όπου* $\xi = 1 - r - t,\ t = [(1-r)/(3+2s)],\ s = 0, 1, 2$

*Παρατήρηση 3.1:*

Αν η $f$ έχει όλες τις ροπές τις πεπερασμένες, π.χ. αν η $f$ έχει συμπαγή φορέα, το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.1 ισχύει για $\xi < (1-t)$ και $t < (3+2s)^{-1},\ s = 0, 1, ...$

Η σύγκλιση κατά πιθανότητα που αποδεικνύεται στο Λήμμα 2.2, μετατρέπεται, με προσεκτικότερη ανάλυση, σε σχεδόν βεβαίως σύγκλιση, όπως φαίνεται στο επόμενο Λήμμα.

**Λήμμα 2.4**

*Κάτω από τις υποθέσεις $Y_1$ και $Y_2$, έχουμε ότι με πιθανότητα 1 :*

$$\Big|n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k\Big(\frac{X_i - X_j}{h}\Big) - 1\Big|$$

$$= O(n^{-(1-\delta-r-t)}) + O(n^{-\xi'}) + O(n^{-2(1+s)t}),$$

*για κάποιο $\delta > 0$ και $\xi' < [(1/4) + (2+s)t] \wedge [(3/4) - r - (t/2)]$.*

*Απόδειξη:*

Έχοντας τις σχέσεις (2.5) και (2.8) είναι αρκετό να αποδείξουμε τη σχέση (2.9) για *σ.β.* σύγκλιση με την παρούσα τάξη. Για να απλοποιήσουμε την παρατήρηση αυτή ορίζουμε

$$W_{ij}^h \equiv v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k(Z_{ij}^c/h),\ \ U_{ij}^h \equiv W_{ij}^h - EW_{ij}^h$$

και

$$S_n(h) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j\ j=1}^{n} U_{ij}^h$$

Έπειτα, έστω $n^2 \leq m \leq (n+1)^2$ . Τότε,

$$|S_m(h_m)| - |S_{n^2}(h_m)| \leq \Big||S_m(h_m)| - |S_{n^2}(h_m)|\Big| \leq |S_m(h_m) - S_{n^2}(h_m)| \leq D_n$$

όπου: $D_n = \sup\{|S_m(h_m) - S_{n^2}(h_m)| :\ n^2 \leq m \leq (n+1)^2\}$. Άρα,

$$|S_m(h_m)| \leq |S_{n^2}(h_m)| + D_n \tag{2.16}$$

Στην (2.10), θέτουμε όπου $n$ το $n^2$ και παίρνουμε

$$E\{[n^2(n^2-1)]^{-1}m^{\xi'}S_{n^2}(h_m)\}^2 = O(n^{-2-(8+4s)t+4\xi'}) + O(n^{-4+2\zeta+2t+4\xi'}),$$

έτσι ώστε για $-2-(8+4s)t+4\xi' < -1$ και $-4+2\zeta+2t+4\xi' < -1$, δηλαδή,

$$\xi' < [(1/4) + (2+s)t] \wedge [(3/4) - (\zeta+t)/2], \tag{2.17}$$

από την ανισότητα του *Chebyshev*, θα έχουμε ότι:

$$P\Big(|[n^2(n^2-1)]^{-1}m^{\xi'}S_{n^2}(h_m)| > \varepsilon\Big) < \frac{E(n^2(n^2-1)]^{-1}m^{\xi'}S_{n^2}(h_m))}{\varepsilon}$$

άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} P\Big([n^2(n^2-1)]^{-1} m^{\xi'} S_{n^2}(h_m) > \varepsilon\Big) < \infty$. Επομένως από το Λήμμα *Borel − Cantelli* προκύτει ότι

$$[n^2(n^2-1)]^{-1} m^{\xi'} S_{n^2}(h_m) = o(1). \tag{2.18}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
&E[S_m(h_m) - S_{n^2}(h_m)]^2 \\
&= E\Big\{\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} U_{ij}(h_m) - \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 \\
&= E\Big\{\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m) + \sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m) + \sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m) - \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 \\
&= E\Big\{2\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m) + \sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 \\
&= E\Big\{2\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 + E\Big\{\sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 \\
&\quad +4E\Big\{\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m) \sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\} \\
&= E\Big\{\Big(2\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m)\Big)\Big(2\sum_{i'=n^2+1}^{m}\sum_{j'=1}^{n^2} U_{ij}(h_m)\Big)\Big\} + E\Big\{\sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\}^2 \\
&\quad +4E\Big\{\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} U_{ij}(h_m) \sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\} \\
&= \Big\{4\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} EU_{ij}^2(h_m) + 4\sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m}\sum_{l=1}^{n^2} EU_{ij}(h_m)U_{il}(h_m) \\
&\quad +4\sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq l}}^{m}\sum_{l=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2} EU_{ij}(h_m)U_{lj}(h_m)\Big\} + E\Big\{\sum_{\substack{i=n^2+1\\i\neq j}}^{m}\sum_{j=n^2+1}^{m} U_{ij}(h_m)\Big\}^2
\end{aligned}$$

$$+8\sum_{i=n^2+1}^{m}\sum_{j=1}^{n^2}\sum_{l=n^2+1}^{m} EU_{ij}(h_m)U_{il}(h_m)$$

$$= O(n^{3+2\zeta+2t}) + \{O(n^3)+O(n^{5-(8+4s)t})\} + \{O(n^3)+O(n^{4-(8+4s)t})\}$$

$$+\{O(n^{2+2\zeta+2t})+O(n^{3-(8+4s)t})\} + \{O(n^3)+O(n^{4-(8+4s)t})\}$$

$$= \{O(n^{3+2\zeta+2t})+O(n^{5-(8+4s)t})\}.$$

Οι παραπάνω τάξεις προκύπτουν από τις σχέσεις (2.6),(2.14) και τις ανισότητες που χρησιμοποιούνται στις σχέσεις (2.11) και (2.12) αποδεικνύοντας την (2.10). Άρα

$$E[S_m(h_m)-S_{n^2}(h_m)]^2 = O(n^{3+2\zeta+2t})+O(n^{5-(8+4s)t})$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} ED_n^2 \le \sum_{m=n^2+1}^{(n+1)^2} E[S_m(h_m)-S_{n^2}(h_m)]^2 &= O(n\cdot n^{3+2\zeta+2/r})+O(n\cdot n^{5-(8+4s)t}) \\ &= O(n^{4+2\zeta+2/r})+O(n^{6-(8+4s)t}) \end{aligned}$$

έτσι, ώστε

$$\begin{aligned} E\{[n^2(n^2-1)]^{-1}m^{\xi'}D_n\}^2 &= O(n^{-8}n^{4+2\zeta+2t}m^{2\xi'})+O(n^{-8}n^{6-(8+4s)t}m^{2\xi'}) \\ &= O(n^{-4+2\zeta+2t+4\xi'})+O(n^{-2-(8+4s)t+4\xi'}), \end{aligned}$$

για $n^2 \le m \le (n+1)^2$ και $\xi'$ όπως στη σχέση (2.17), άρα πάλι με την βοήθεια τις ανισότητας $Chebyshev$ και του Λήμματος $Borel - Cantelli$, έχουμε ότι με πιθανότητα 1

$$[n^2(n^2-1)]^{-1}m^{\xi'}D_n = o(1). \tag{2.19}$$

Από την (2.16) με τη βοήθεια της (2.19) παίρνουμε το ζητούμενο.

□

**Πόρισμα 2.2**

*Κάτω από τις υποθέσεις* $Y_1$ *και* $Y_2$, *με πιθανότητα 1 έχουμε ότι:*

$$\Big|n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k\Big(\frac{X_i-X_j}{h}\Big)-1\Big| = o(^{-\xi'})$$

*όπου* $\xi' = (3/4)-r-(t/2)$, *με* $t = [(3-4r)/(10+8s)]^{-}$ *αν* $s \le 5(1-4r)^{-1}/2$ *και* $t = [(1-2r)/(5+2s)]^{-}$ *αλλιώς* , $s = 0,1,\dots$ .

*Παρατήρηση 3.2:*

Παρατηρούμε ότι, αν η $f$ έχει όλες τις ροπές της πεπερασμένες, π.χ., αν έχει συμπαγή φορέα, τότε το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.2 ισχύει για $\xi' = [(3/4) - (t/2)]^-$ με $t = [3(10+8s)^{-1}]^-$ αν $s < 5/2$ και $t = [(5+2s)^{-1}]^-$ αν $s > 5/2,\ s = 0, 1, ..$ .

# Κεφάλαιο 3

# Συνέπεια των Εκτιμητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε τη συνέπεια κατά πιθανότητα και σχεδόν βεβαίως της $MPLE$ $u$ της $f^{1/2}$ (απόσταση $Hellinger$ βλ. Παράρτημα, Ορισμός .8) και της εκτιμήτριας $f_n = u^2$ ως προς τις $L_p(\mathbb{R})$ νόρμες , $p = 1, 2, \infty$ Επίσης θα υποδείξουμε τις βέλτιστες τάξεις σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Σημειώνουμε την $MPLE$ των $v$, $f$ ως $u$ και $f_n = u^2$ αντίστοιχα, την παράμετρο κανονικοποίησης $\lambda_n$ ως λ και θεωρούμε $h = O(n^{-t}),\ t < 1/2$

**Θεώρημα 3.1**

*Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 2.1 και για $v \in H$, έχουμε ότι:*

(i) $|(\lambda/n) - 1| = O_p(n^{-(1-\delta-r-t)/2}) + O_p(n^{-\xi/2}) + O(n^{-(s+1)t})$,

(ii) $\|u - v\|_2 = O_p(n^{-(1-\delta-r-t)/2}) + O_p(n^{-\xi/2}) + O(n^{-(s+1)t})$,

(iii) $\|u - v\|_\infty = O_p(n^{-(1-\delta-r-2t)/2}) + O_p(n^{-(\xi-t)/2}) + O(n^{-(2s+1)t/2})$,

*με $\xi = 1/2 + (s+2)t$ για τη σύγκλιση κατά πιθανότητα και*
*$\xi = [1/4 + (s+2)t] \wedge [3/4 - r - (t/2)]$ για τη σχεδόν βεβαίως σύγκλιση.*

*Απόδειξη:*

Έστω $\widetilde{k}$ ο μετασχηματισμός $Fourier$ του πυρήνα $k$, δηλαδή $\widetilde{k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} k(x)dx$. Αν υπάρχει $q > 0$ τέτοιο, ώστε το

$$c_q = \lim_{u \to 0} \Big[ \frac{1 - \widetilde{k}(u)}{|u|^q} \Big]$$

να είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο, τότε το $q$ ονομάζεται χαρακτηριστικός δείκτης του $k$ με χαρακτηριστικό συντελεστή $c_q$.

Όμως,

$$\begin{aligned} c_q &= \lim_{u \to 0} \Big[ \frac{1 - \widetilde{k}(u)}{|u|^q} \Big] = \lim_{u \to 0} \Big[ \frac{1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} k(x)dx}{|u|^q} \Big] \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{1}{|u|^q} \Big[ 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx - iu \int_{-\infty}^{+\infty} xk(x)dx \\ &\qquad - \ldots - \frac{(iu)^{q-1}}{(q-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{q-1} k(x)dx - \frac{(iu)^q}{q!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^q k(x)dx + O(u^{q+1}) \Big]. \end{aligned}$$

Αν το $\widetilde{k}$ είναι πεπερασμένο και θετικό πρέπει :

$$\begin{cases} \int \widetilde{k}(x)dx = 1 \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \widetilde{k}(x)dx = 0 \ \text{ για } j = 1, 2, .., q-1 \\ \\ \int x^q \widetilde{k}(x)dx \neq \ 0 \text{ ή } \infty \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι το $\widetilde{k}$ πυκνότητα πιθανότητας θα πρέπει να ικανοποιούνται τα εξής:

$$\begin{cases} \widetilde{k}(x) \geq 0 \\ \int \widetilde{k}(x)dx = 1 \end{cases}$$

επομένως στην περίπτωση αυτή θα είναι $q = 2$. Στην περίπτωση που $\int z^{2s} k(z)dz = 0, \ s \in \mathbb{Z}_+$, όπως ορίστηκε στην απόδειξη του Λήμματος 2.2, τότε $q = 2(s+1)$. Χρησιμοποιόντας το θεώρημα του *Parseval* για το μετασχηματισμό *Fourier* έχουμε ότι :

$$\|u\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \|\widetilde{u}\|_2^2$$

Επομένως

$$\begin{aligned} h^{-2(s+1)}(\|v\|^2 - 1) &= h^{-2(s+1)}((2\pi)^{-1}\|\widetilde{v}m^{1/2}\|_2^2 - (2\pi)^{-1}\|\widetilde{v}\|_2^2) \\ &= h^{-2(s+1)}(2\pi)^{-1}\Big[\int |\widetilde{v}(t)|^2 m(ht)dt - \int |\widetilde{v}(t)|^2 dt\Big] \\ &= (2\pi)^{-1}\Big[\int |\widetilde{v}(t)|^2 \widetilde{k}(ht)^{-1} h^{-2(s+1)} dt - \int h^{-2(s+1)} |\widetilde{v}(t)|^2 dt\Big] \\ &= (2\pi)^{-1}\Big[\int |\widetilde{v}(t)|^2 h^{-2(s+1)} \Big(\widetilde{k}(ht)^{-1} - 1\Big) dt \\ &= (2\pi)^{-1}\Big[\int |\widetilde{v}(t)|^2 t^{2(s+1)} \frac{[1 - \widetilde{k}(ht)]}{(ht)^{2(s+1)}} \widetilde{k}(ht)^{-1} dt \end{aligned}$$

όπου για $h \to 0$ , $\frac{1-\widetilde{k}(ht)}{(ht)^{2(s+1)}} \to c_2$ και $\widetilde{k}(ht)^{-1} \to \frac{1}{k(0)} = 1$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και το Λήμμα .12 του Παραρτήματος, προκύπτει ότι

$$h^{-2(s+1)}(\|v\|^2 - 1) \to c_2 \|v^{(s+1)}\|_2^2 \text{ για } h \to 0$$

Επομένως

$$\|v\|^2 - 1 = O(h^{2(s+1)}) \tag{3.1}$$

Σαν συμπέρασμα της (3.1) και του Λήμματος 2.2 και 2.3 παίρνουμε το $(i)$ καθώς

$$\begin{aligned} &|(\lambda_n/n)^{1/2} - 1| \\ &\leq \|k_\mu\|_1^{1/2} \Big\{ n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1} v(X_j)^{-1} k(X_i - X_j) - 1 + \|v\|^2 - 1 \Big\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leq \|k_\mu\|_1^{1/2}\Big\{n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}k(X_i-X_j)-1\Big\}^{1/2}+\|k_\mu\|_1^{1/2}\{\|v\|^2-1\}^{1/2}$$
$$= O_p(n^{-(1-\delta-r-t)/2})+O_p(n^{-\xi/2})+O(n^{-(s+1)t}).$$

Για το $(ii)$ παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 2.1 για τον πυρήνα του $RKHS$ H, $\kappa_x^* = h^{-1}k((x-y)/h)$:

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda - v\|^2 &\leq \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}h^{-1}k\Big(\frac{X_i-X_j}{h}\Big)-2(n/\lambda)+\|v\|^2 \\
&= (n/\lambda)^2\{n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(X_i)^{-1}v(X_j)^{-1}h^{-1}k\Big(\frac{X_i-X_j}{h}\Big)-1\} \\
&\qquad +[(n/\lambda)-1]^2+\|v\|^2-1 \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Επίσης από την (2.3) προκύπτει ότι:

$$\|u-v\|_2^2 \leq \|k\|_1\|u-v\|^2$$

και με τη βοήθεια του Λήμματος 2.2 , του Λήμματος 2.3 και της σχέσης (3.1) προκύπτει το $(ii)$.

Έπειτα, παρατηρούμε ότι για τον πυρήνα $\kappa^*(x,y) = h^{-1}k((x-y)/h)$ του $RKHS$ H, είναι $\|\kappa_x^*\|^2 = k(0)h^{-1}$, όπου $\kappa_x^*(\cdot) = \kappa^*(\cdot, x)$. Τότε

$$\begin{aligned}
|u(x)-v(x)| &= |\langle \kappa_x^*, u-v\rangle| \\
&\leq \|\kappa_x^*\|\|u-v\| \\
&\leq h^{-1/2}\|k\|\|u-v\| \\
&\leq h^{-1/2}\|k\|_\infty\|u-v\|
\end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνεται το $(iii)$ με την βοήθεια των σχέσεων (3.1), (3.2),το $(i)$ , το Λήμμα 2.3 και για $h = O(n^{-t})$.

Τα αποτελέσματα για την $\sigma.\beta.$ σύγκλιση προκύπτουν όμοια με τη χρήση του Λήμματος 2.4 στη θέση του Λήμματος 2.3.

□

**Πόρισμα 3.1**

*Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 έχουμε ότι η $f_n$ συγκλίνει στην $f$ κατά πιθανότητα και σχεδόν βεβαίως ως προς τις $L_1(\mathbb{R})$ και $L_2(\mathbb{R})$ νόρμες με την τάξη του μέρους $(i)$ και ως προς την sup νόρμα με την τάξη του μέρους $(ii)$ του Θεωρήματος 3.1*

*Απόδειξη:*

$i)$ Είναι:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_1 &= \int |f_n - f| = \int |u_n^2 - v^2| \\
&= \int |u_n - v||u_n + v| \le \|u_n - v\|_2 \|u_n + v\|_2 \\
&\le \|u_n - v\|_2 (\|u_n\|_2 + \|v\|_2) = 2\|u_n - v\|_2
\end{aligned}$$

Άρα $\|f_n - f\|_1 \le 2\|u - v\|_2$ και από το $(ii)$ του Θεωρήματος 3.1 προκύπτει η σύγκλιση της $f_n$ στην $f$ κατά πιθανότητα και $\sigma.\beta.$

$(ii)$
$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_2^2 &= \int (u_n^2 - v^2)^2 = \int [(u_n - v)(u_n + v)]^2 \\
&= \int (u_n - v)^2 (u_n + v)^2 \le \|u_n - v\|_2^2 \|u_n + v\|_\infty^2 \\
&= \|u_n - v\|_2^2 \|u_n - v + v + v\|_\infty^2 \\
&\le (\|u_n - v\|_\infty + 2\|v\|_\infty)^2 \|u_n - v\|_2^2
\end{aligned}$$

Επομένως $\|f_n - f\|_2 \le (\|u_n - v\|_\infty + 2\|v\|_\infty)^2 \|u_n - v\|_2^2$ και το ζητούμενο προκύπτει από το $(ii)$ και $(iii)$ του Θεωρήματος 3.1.

$(iii)$ Τέλος όμοια με το $(ii)$ προκύπτει ότι

$$|f_n - f| \le |u_n - v||2v + (u_n - v)| \le 2|v||u_n - v| + |u_n - v|^2$$

Επομένως
$$\|f_n - f\|_\infty \le 2\|v\|_\infty \|u_n - v\|_\infty + \|u_n - v\|_\infty^2$$
και το ζητούμενο προκύπτει από το $(ii)$ και $(iii)$ του Θεωρήματος 3.1.

□

Οι βέλτιστες τάξεις σύγκλισης για τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.1 και του Πορίσματος 3.1 συμπεραίνονται από τα Πορίσματα 3.1 και 3.2. Στην επόμενη Πρόταση συνοψίζουμε τις μέγιστες τιμές που λαμβάνουμε από τις αποδείξεις υποθέτοντας ότι όλες οι ροπές της $f$ είναι πεπερασμένες, δηλαδή, η $f$ έχει συμπαγή φορέα.

**Πρόταση 3.1**

*Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 και με $r = 0$ έχουμε ότι:*

$(i)$ $\|f_n - f\|_1 = o_p(n^{-\rho})$

$(ii)$ $\|f_n - f\|_2 = o_p(n^{-\rho})$

(*iii*) $\|f_n - f\|_\infty = o_p(n^{-\rho+(t/2)})$

*όπου* $\rho = (1/2) - (4s+6)^{-1}$, *με* $t = [(2s+3)^{-1}]^-$ *για τη σύγκλιση κατά πιθανότητα, και για τη σ.β. σύγκλιση* $\rho = (3/8) - 3(40+32s)^{-1}$ *με* $t = [3/(10+8s)]^-$ *αν* $s \leq 2$ *και* $\rho = (3/8) - (20+8s)^{-1}$ *με* $t = [(5+2s)^{-1}]^-$ *αν* $s \geq 3$.

Στην περίπτωση που η νόρμα του H ορίζεται μέσω του μέτρου $m_h$ με πυκνότητα

$$m(ht) = 1 + \sum_{j=s+1}^{l} (ht)^{2j}\ , \quad s = 0, 1, .., l-1 \tag{3.3}$$

οι αντίστοιχες *MPLE* $u$ της $v = f^{1/2}$ είναι ισοδύναμες με αυτές που ασχολήθηκαν οι *Good* και *Gaskins* (1971) και *De Montricher* (1975). Παρατηρούμε ότι η ποινή που ορίζεται μέσω της (3.3) οδηγεί σε έναν πυρήνα $k$ συμμετρικό γύρω από το 0 με

$$\widetilde{k}(t) = 1 - (m(t) - 1)m(t)^{-1}$$

άρα ο $k$ έχει μηδενικές τις περιττές ροπές του.

Καθώς $\widetilde{k} > 0$, η συνέπεια που έχουμε ως αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται και σε αυτές τις εκτιμήσεις. Επίσης θα δείξουμε ότι οι παράγωγοι των εκτιμητών $f_n$ όσο και των $u$ που αντιστοιχούν στην (3.3) , συγκλίνουν ως προς την $L_2(\mathbb{R})$ νόρμα . Για να απλοποιήσουμε τον ισχυρισμό του παραπάνω θεωρήματος, θεωρούμε $\tau = +\infty$ όπως στην πρόταση 3.1 παρόλο που η απόδειξη βασίζεται στο Θεώρημα 3.1.

**Θεώρημα 3.2**

*Για το μ ορισμένο όπως στην (3.3) και κάτω από τις υποθέσεις της πρότασης 3.1 έχουμε ότι κατά πιθανότητα και σ.β.*

$$\|u^{(j)} - u^{(j)}\|_2 = O_p(n^{-\rho(1-j(s+1)^{-1})})$$

*όπου το ρ ορίζεται όπως στην Πρόταση 3.1 και* $j \leq s$.

*Απόδειξη:*

Παρατηρούμε ότι :

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \Big(\int m(t)(\widetilde{u} - \widetilde{v})dt\Big)^2 \\
&\geq \Big(\int \Big(1 + \sum_{j=s+1}^{l} (ht)^{2j}\Big)(\widetilde{u} - \widetilde{v})dt\Big)^2 \\
&= \Big(\int (\widetilde{u} - \widetilde{v})dt + \int \sum_{j=s+1}^{l} (ht)^{2j}(\widetilde{u} - \widetilde{v})dt\Big)^2 \\
&= \|u - v\|_2^2 + \int h^{2(s+1)}(t^{2(s+1)}(\widetilde{u} - \widetilde{v}))^2 dt \\
&\geq \|u - v\|_2^2 + h^{2(s+1)} \int (\widetilde{u}^{(s+1)} - \widetilde{v}^{(s+1)})^2 dt \\
&\geq h^{2(s+1)}\|u^{(s+1)} - v^{(s+1)}\|_2^2
\end{aligned}$$

Επομένως από την (3.2) έχουμε :

$$h^{2(s+1)}\|u^{(s+1)}-v^{(s+1)}\|_2^2 \leq \|u-v\|^2$$

$$\leq (n/\lambda)^2\Big\{n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k\Big(\frac{X_i-X_j}{h}\Big)-1\Big\}+[(n/\lambda)-1]^2+\|v\|^2-1$$

όπου

$$\|v\|^2=\int\Big(1+\sum_{j=s+1}^{l}(ht)^{2j}\Big)\widetilde{v}^2(t)dt=1+\sum_{j=s+1}^{l}h^{2j}\|v^{(j)}\|_2^2$$

Άρα

$$h^{2(s+1)}\|u^{(s+1)}-v^{(s+1)}\| \leq$$

$$(n/\lambda)^2\Big\{n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k\Big(\frac{X_i-X_j}{h}\Big)-1\Big\}+[(n/\lambda)-1]^2+\sum_{j=s+1}^{l}h^{2j}\|v^{(j)}\|_2^2 \tag{3.4}$$

Όμοια με το Λήμμα 2.2, θέτουμε $\lambda = n$ και έχουμε :

$$|(\lambda/n)-1|^2 \leq \Big\{n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{-1}(X_i)v^{-1}(X_j)h^{-1}k(\frac{X_i-X_j}{h})-1\Big\}+\sum_{j=s+1}^{l}h^{2j}\|v^{(j)}\|_2^2$$

Επίσης, όμοια με το Θεώρημα 3.1, έχουμε ότι :

$$[(n/\lambda)-1]^2, \|u-v\|^2 = O_p(n^{-(1-\delta-r-t)})+O_p(n^{-\xi})+O(n^{-2(s+1)t}) \tag{3.5}$$

με ξ ορισμένο όπως στο Θεώρημα 3.1.

Τότε από την (3.4) και την (3.5) συμπεραίνουμε για $h=O(n^{-t})$ ότι :

$$\|u^{(s+1)}-v^{(s+1)}\|_2 = O_p(1) \tag{3.6}$$

Έπειτα, παρατηρουμε ότι: $\|g^{(j)}\|_2^2 \leq \|g^{(j-1)}\|_2\|g^{(j+1)}\|_2,\ g \in H$ άρα με επαγωγή έχουμε ότι:

$$\|u^{(j)}-v^{(j)}\|_2 \leq \|u-v\|_2^{1-j(s+1)^{-1}}\|u^{(s+1)}-v^{(s+1)}\|_2^{j(s+1)^{-1}}$$

το οποίο μαζί με τις σχέσεις (3.5),(3.6) και τα Λήμματα 2.3 , 2.4 δίνουν το αποτέλεσμα. Η τάξη επιτυγχάνεται όπως στην Πρόταση 3.1.

□

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

**Ορισμός .1**

*Έστω* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 \ < \ x_1 < \ ... \ < \ x_n = b$ *μια διαμέριση του* $[a,b]$, *και* $m \in \mathbb{N}$. *Τα στοιχεία του συνόλου*

$$S_m(\Delta) := \{s \in C^{m-1}[a,b] \ : \ s|_{[x_i, X-i+1]} \in \mathbb{P}_m, \ \ i = 0, \ ..., \ n-1\}$$

*λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού* $m$ *(ως προς* $\Delta$*).(βλ. [1])*

**Ορισμός .2**

*Ένας χώρος Hilbert* $H$*, συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο* $T$ *ονομάζεται proper functional Hilbert space αν για κάθε* $t$ *το συναρτησοειδές* $f$ , $f \in H$ *στο* $t$ *είναι συνεχές, δηλαδή υπάρχει* $M_t$ *τέτοιο ώστε* $|f(t)| \leq M_t \|f\|$, $\forall f \in H$. *(βλ. [23])*

**Λήμμα .1**

*Ένας χώρος Hilbert συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο* $T$ *είναι proper functional χώρος Hilbert αν και μόνο αν είναι RKHS. (βλ. [23])*

**Λήμμα .2**

*Ο χώρος Sobolev* $H^s(-\infty, +\infty)$=$\{f : f^{(j)} \in L^2(-\infty, +\infty)$ *για* $j = 0, .., s\}$ *με εσωτερικό γινόμενο* $\langle f, g \rangle = \{\sum_{j=0}^{s} \langle f^{(j)}, g^{(j)} \rangle\}$ *είναι ένας RKHS. (βλ. [23])*

**Ορισμός .3**

*Έστω* $f : H \to R$. *Για* $x, \eta_1, ..., \eta_n \in H$ *ορίζουμε ως* $n-$*οστή Gâteaux μεταβολή του* $S$ *στο* $x$ *κατα τις κατευθύνσεις των* $\eta_1, ..., \eta_n$ *την*

$$f^{(n)}(x)(\eta_1, ..., \eta_n) = \lim_{t \to 0} t^{-1}[f^{(n-1)}(x + t\eta_n)(\eta_1, ..., \eta_{n-1}) - f^{(n-1)}(x)(\eta_1, ..., \eta_{n-1})],$$

*με* $f^{(0)}(x) = f(x)$. *(βλ. [23])*

**Λήμμα .3**

*Αν* $\Phi(t) = f(x + t\eta)$ *τότε* $\Phi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_n)(\eta, .., \eta)$. *(βλ. [23])*

**Ορισμός .4**

*Μία ακολουθία* $\{x_n\}$ *σε ένα χώρο Hilbert* $H$ *λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο* $x^* \in H$ *αν* $f(x^n) \to f(x^*)$ $\forall f \in H^*$ *όπου* $H^*$ *ο δυικός του* $H$. *(βλ. [23])*

**Λήμμα .4**

*Αν η $x_n$ συγκλίνει στο $x^*$ στον H, τότε συγκλίνει ασθενώς στο $x^*$.Επιπλέον, αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε η $x_n$ συγκλίνει ασθενώς στο $x^*$. (βλ. [23])*

**Ορισμός .5**

*Ένας τελεστής $f : H \rightarrow J$ ονομάζεται ασθενώς συνεχής αν όταν η $\{x_n\} \subset H$ συγκλίνει ασθενώς στο $x^* \in H$, τότε και η $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει ασθενώς στο $f(x^*)$ στο J. (βλ. [23])*

**Λήμμα .5**

*Ένα σύνολο $S \subset H$ ονομάζεται ασθενώς συμπαγές αν $x_n \subset S$ συνεπάγεται ότι η $x_n$ περιέχει μια υποακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς σε ένα στοιχείο του S. (βλ. [23])*

**Ορισμός .6**

*Ένα σύνολο S ονομάζεται ασθενώς κλειστό αν όταν η $x_n \in S$ συγκλίνει ασθενώς στο $x^* \in H$ τότε $x \in S$. (βλ. [23])*

**Λήμμα .6**

*Θεωρούμε το κυρτό υποσύνολο $S \subset H$.Τότε το S είναι ασθενώς κλειστό αν το S είναι κλειστό. Επιπλέον το S είναι ασθενώς συμπαγές αν το S είναι επίσης κλειστό και φραγμένο. (βλ. [23])*

**Ορισμός .7**

*Το σηναρτησοειδές f ονομάζεται ασθενώς κάτω ημισυνεχές στο $x \in H$ αν για δοθείσα ακολουθία $\{x_n\} \subset H$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στο x, τότε για δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος $N_\epsilon$ τέτοιος ώστε $-\epsilon < f(x_n) - f(x) \ \ \forall n \geq N_\epsilon$. (βλ. [23])*

**Λήμμα .7**

*Ένα συνεχές κυρτό συναρτησοειδές f ορισμένο σε ένα κλειστό υποσύνολο S του H είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. (βλ. [23])*

**Λήμμα .8**

*Έστω ότι οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ανήκουν και οι δύο στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, και έστω οι μετασχηματισμοί Fourier με $\widehat{f_1}(u)$ και $\widehat{f_2}(u)$, αντίστοιχα. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(u)\widehat{f_2}(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)f_2(-x)dx$$

*και*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(u)\widehat{f_2}(u)e^{i\langle u,x\rangle}du = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)f_2(x-y)dy$$

*(βλ. [24])*

**Λήμμα .9**
*Αν* $\widehat{f}$, $\widehat{g}$, *οι μετασχηματισμοί Fourier των* $f$, $g$ *και οι αντίστροφοι τύποι αυτών,* $\widetilde{f_1}$ *και* $\widetilde{f_2}$ *αντίστοιχα, έχουμε:*

$$\int \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int f(x)\widehat{g}(x)dx$$

$$\int f(\xi)\overline{g}(\xi)d\xi = \int \widetilde{f}(x)\overline{\widetilde{g}}(x)dx \ \ \textit{και}$$

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g} \ \textit{και} \ (2\pi)^{n/2}(\widehat{fg}) = \widehat{f} * \widehat{g}$$

*όπου η συνέλιξη* $f * g$ *ορίζεται ως:*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy.$$

*(βλ. [24])*

**Λήμμα .10**
*Έστω* $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *και* $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *τότε* $f * g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *και* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$ *(βλ. [24])*

**Ορισμός .8**
*Έστω* $P$ *και* $Q$ *δυο μέτρα πιθανότητας σε μία σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}$. *Έστω* $\mu = P + Q$ *και έστω* $f$ *και* $g$ *οι πυκνότητες* $f = dP/d\mu$ *και* $g = dQ/d\mu$.*Η* $L_1$ *νόρμα της διαφοράς* $P - Q$ *είναι* $\|P - Q\| = \int |f - g|d\mu = 2[1 - \|P \wedge Q\|]$, *όπου* $P \wedge Q$ *το minimum των μέτρων* $P$ *και* $Q$ *το οποίο είναι το μέτρο που αντιστοιχεί στην* $f \wedge g$ *ως προς το* $\mu$. *Ο μετασχηματισμός Hellinger του ζεύγους* $\{P, Q\}$ *ειναι η συνάρτηση* $\varphi$ *ορισμένη στο* $[0, 1]$ *με* $\phi(\alpha) = \|(dP)^{1-\alpha}(dQ)^{\alpha}\| = \int f^{1-\alpha}g^{\alpha}d\mu$. *Η τιμή* $\rho(P, Q) = \phi(1/2) = \int(dPdQ)^{1/2}$ *ονομάζεται επίσης affinity μεταξύ των* $P, Q$. *Η απόσταση Hellinger* $H(P, Q)$ *ορίζεται ως* $H^2(P, Q) = \int((dP)^{1/2} - (dQ)^{1/2})^2 = \int(f^{1/2} - g^{1/2})^2d\mu = 2[1 - \rho(P, Q)]$ *(βλ. [16])*

**Λήμμα .11**
*Έστω* $q_n \leq q$ *όπου* $q(x) = P(|X| \geq x)$ *και* $q(x_n) = P(|X_n| \geq x)$ *και* $E|X|^r < \infty$ *με* $r < 2$. *Τότε ,*

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k) \rightarrow^{a.s.} 0$$

*όπου* $a_k = 0$ *ή* $EX_k$ *ανάλογα με το αν* $r < 1$, *ή* $r > 1$. *(βλ. [17])*

**Λήμμα .12**
*Αν* $E|X|^k < \infty$, *τότε η χαρατηριστική συνάρτηση της* $X$ *έχει ανάπτυγμα*

$$f(u) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(iu)^k}{j!}EX^j + \frac{(iu)^k}{k!}(EX^k + \delta(u)),$$

*όπου* $\delta(u)$ *είναι μια συνάρτηση του* $u$ *τέτοια, ώστε* $\lim_{u\to 0}\delta(u) = 0$ *και ικανοποιεί τη σχέση* $|\delta(u)| \leq 3E|X|^k$ *για κάθε* $u$. *(βλ. [3])*

# Βιβλιογραφία

[1]**Ακρίβης Γ.Δ. Δουγαλής Β.Α.** Εισαγωγή στην Αριθμητική ανάλυση. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
[2]**Bartoszynski R., Brown B. W., McBride C. M. and Thompson J. R.** (1981). *Some nonparametric techniques for estimating the intensity function of a cancer related nonstationary Poisson process. Ann. Statist.* **9** 1050 − 1060.
[3]**Breiman L.** (1968). *Probability. Addison − Wesley, New York.*
[4]**Breiman L., Meisel W. and Purcell E.** (1977). *Variable kernel estimates of probability densities. Technometrics.* **19** 135 − 144.
[5]**Chung K. L.** (1974). *A course in probability theory. Academic Press, New York.*
[6]**Cox D. D.** (1983). *A penalty method for nonparametric estimation of the logarithmic derivative of a density function. Tech. Report No.* 704, *Dept. of Statist., Univ. of Wisconcin.*
[7]**De Montricher G. F., Tapia R. A. and Thompson J. R.** (1975). *Nonparametric maximum likelihood estimation of probability densities by penalty function methods. Ann. Statist.* **3** 1329 − 1348.
[8]**Farrell R. H.** (1972). *On the best obtainable asymptotic rates of convergence in estimation of a density function at a point. Ann. Math. Statist.* **43** 170 − 180.
[9]**Good I. J. and Gaskins R. A.** (1971). *Nonparametric roughness penalties for probability densities. Biometrica* **58** 255 − 277.
[10]**Good I. J. and Gaskins R. A.** (1980). *Density esimation and bumphunting by the penalised likelihood methods exemplified by scattering and meteorite data. (Invited paper) J. Amer. Statist. Assoc.* **75** 42 − 73.
[11]**Klonias V.K.**(1982*a*). *On a a class of maximum penalised likelihood estimators of the probability density function. Tech.Report No.* 364, *DeparmentofMatematical Sciences, The Johns Hopkins University*
[12]**Klonias V.K.**(1982*b*). *Consistency of two nonparametric maximum penalised likelihood estimators of the probability density function. Ann. Statist.* **10** 811 − 824
[13]**Klonias V.K. and Nash S.G.**(1983*a*). *On the computation of a class of maximum penalized likelihood estimators of the probability density function. Computer Science and Statistics : Fifteenth Annual Symposium on the Interface* 310 − 314. *Houston, Texas, March* 1983
[14]**Klonias V.K. and Nash S.G.**(1983*b*). *On the numerical evaluation of a class of nonparametric density and regression estimators. Tech. Report. No.* 376, *Department of Mathematical Sciences, The John Hopkins University.*

[15]**Klonias V.K.**(1984). *On a class of nonparametric density and regression estimators. Ann. Statist.* **12** 1263 − 1284
[16]**LeCam L.**(1970). *On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates. Ann. of Mathematical Statistics* **41** 802 − 828
[17]**Loève M.**(1977). *Probability theory. Springer − Verlag, New York Heidelberg Berlin.*
[18]**Nash S.G.**(1982). *Preconditioning of truncated − Newton methods. Tech. report No.* 371, *Department of Mathematical Sciences, The John Hopkins University.*
[19]**Parzen E.**(1962). *On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist.* **33** 1065 − 1076.
[20]**Scott D. W.**, **Tapia R. A. and Thompson J. R.** (1980). *Nonparametric probability density and estimation by discrete maximum penalised−likelihood criteria. Ann. Statist.* **8** 820 − 832.
[21]**Silverman B. W.** (1982). *On the estimation of a probability density function by the maximum penalised likelihood method. Ann. Statist.* **10** 795 − 810.
[22]**Stone Charles J.** (1980). *Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. Ann. Statist.* **8** 1348 − 1360.
[23]**Thompson J. R. and Tapia R. A.** (1990). *Nonparametric function estimation, modeling and simulation SIAM.*
[24]**Yosida K.** (1978). *Functional. Analysis. Springer − Verlag, Berlin. Heidelberg New York.*