ΠΡΟΡΡΥΘΜΙΣΤΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ BLOCK ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Μαρία Αλανέλλη
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Ηράκλειο, Νοέμβρης 2001

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με την αριθμητική επίλυση συστημάτων n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής

$$Ax = b,\ \mu\varepsilon\ A \in \mathbb{C}^{n,n} \kappa\alpha\iota\ b \in \mathbb{C}^{n}, \tag{1.1}$$

όπου ο πίνακας $A(= (a_{ij}),\ i, j = 1(1)n)$, του συστήματος είναι ιδιόμορφος ή μη-ιδιόμορφος.

Συστήματα της παραπάνω μορφής εμφανίζονται σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών, της Επιστήμης, της Τεχνολογίας, των Οικονομικών κ.λπ.

Στις περισσότερες περιπτώσεις τα γραμμικά συστήματα (1.1) χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι οι πίνακες τους είναι "αραιοί", δηλαδή το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων τους είναι της τάξης $\mathcal{O}(n)$ αντί $\mathcal{O}(n^2)$.

Για την επίλυση των συστημάτων αυτών χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες. Στις "άμεσες", όπου η λύση του (1.1) (με ακριβή αριθμητική) βρίσκεται μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων, στις "έμμεσες" ή "επαναληπτικές", όπου κατασκευάζεται μια ακολουθία διανυσμάτων η οποία κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, και με ακριβή αριθμητική, συγκλίνει οριακά στην ακριβή λύση, και τέλος, στις "μικτές", όπου κατασκευάζεται πάλι μια ακολουθία διανυσμάτων, η οποία όμως (με ακριβή αριθμητική) συγκλίνει στην ακριβή λύση, μετά από n το πολύ επαναλήψεις.

Ως χαρακτηριστικό αντιπρόσωπο των άμεσων μεθόδων αναφέρουμε την κλασική απαλοιφή του Gauss, ενώ από τις επαναληπτικές αναφέρουμε, μεταξύ των άλλων, τις "κλασικές" επαναληπτικές μεθόδους του Jacobi, των Gauss-Seidel, της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR) και της Συμμετρικής Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SSOR). Από τις μικτές μεθόδους, αναφέρουμε την πιο δημοφιλή που είναι η μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων καθώς και οι διάφορες παραλλαγές της.

Στην εργασία μας, για την επίλυση του συστήματος (1.1), εφαρμόζουμε έναν αριθμό βημάτων της διαδικασίας της άμεσης μεθόδου απαλοιφής Gauss, τα οποία ακολουθούνται από την εφαρμογή μιας κλασικής επαναληπτικής μεθόδου.

Την ιδέα για την εφαρμογή της απαλοιφής Gauss σε μια μόνο στήλη του πίνακα A του συστήματος (1.1), η οποία ακολουθείται από μια κλασική επαναληπτική μέθοδο, έδωσαν πρώτοι οι *Juncosa* και *Mulliken* (1960, [8]). Βασισμένος στην ιδέα αυτή, καθώς και σε παρόμοιες που δόθηκαν σε μεταγενέστερες εργασίες (όπως για παράδειγμα, των *Funderlic* και *Plemmons* [4] και του *Robert* [9], [10]), ο *Milaszewicz* ([5], [6], [7]) βελτίωσε κατά πολύ τα μέχρι τότε αποτελέσματα. Στην ίδια λογική αλλά σε διαφορετική κατεύθυνση εργάστηκαν οι *Gunawardena*, *Jain* και *Snyder* [15], οι *Kohno*, *Niki* και

$Usui$ [16] και πιο πρόσφατα οι Li και Sun [17] και οι $Hadjidimos$, $Noutsos$ και $Tzoumas$ [18], δίνοντας κατά περίπτωση καλύτερα αποτελέσματα ως προς τις "ασυμπτωτικές ταχύτητες σύγκλισης" των κλασικών επαναληπτικών μεθόδων που χρησιμοποίησαν.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οι περισσότεροι από τους προαναφερθέντες ερευνητές χρησιμοποίησαν για τη διαδικασία της απαλοιφής "αριστερούς προρρυθμιστές", τους οποίους και εφάρμοσαν στο αρχικό σύστημα με απώτερο σκοπό να πετύχουν μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθούσας επαναληπτικής μεθόδου, σε σύγκριση με την κατευθείαν εφαρμογή της υπόψη επαναληπτικής μεθόδου στο αρχικό σύστημα.

Ειδικότερα, ο $Milaszewicz$ [7] θεώρησε (σιωπηρά) τον προρρυθμιστή

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

για να απαλείψει τα στοιχεία της πρώτης στήλης του μη-ιδιόμορφου "M-πίνακα" A κάτω από την κύρια διαγώνιο. Ένας τέτοιος προρρυθμιστής βελτίωσε τη σύγκλιση των κλασικών επαναληπτικών μεθόδων που εφαρμόζονται μετά την αρχική απαλοιφή.

Οι $Gunawardena$, $Jain$ και $Snyder$ [15], χρησιμοποίησαν ως προρρυθμιστή τον πίνακα

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -a_{23} & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

για να απαλείψουν τα στοιχεία της πρώτης διαγωνίου πάνω από την κύρια διαγώνιο του μη-ιδιόμορφου ή ιδιόμορφου M-πίνακα A.

Στη συνέχεια, οι $Kohno$, $Niki$ και $Usui$ [16] χρησιμοποίησαν τον προρρυθμιστή

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 a_{12} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 a_{23} & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1} a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

με $0 \leq a_i,\ i = 1(1)n-1$, για να πετύχουν περαιτέρω βελτίωση της σύγκλισης κάτω όμως από ορισμένους περιορισμούς που αναφέρονται στον πίνακα A.

Τον ίδιο προρρυθμιστή (1.4) χρησιμοποίησαν επίσης οι *Li* και *Sun* [17], με $a_i \in [0,1],\ i = 1(1)n-1$, και έδειξαν ότι για μη-ιδιόμορφους Μ-πίνακες Α η επιτυγχανόμενη σύγκλιση είναι καλύτερη.

Τελευταία, οι *Hadjidimos*, *Noutsos* και *Tzoumas* [18], θεώρησαν τους γενικευμένους προρρυθμιστές

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

με $0 \leq a_i,\ i = 2(1)n$, και

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 a_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix} (\equiv P_3), \tag{1.6}$$

με $0 \leq a_i,\ i = 1(1)n-1$, με στόχο τη γενίκευση, επέκταση και βελτίωση των ως τότε αποτελεσμάτων. Μια από τις ουσιαστικές διαφορές, σε σχέση με τις προηγούμενες εργασίες, αποτελεί το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά "κανονικές διασπάσεις".

Όπως τονίστηκε, σε όλες τις αναφερθείσες εργασίες, εφαρμόστηκε **ένα μόνο** βήμα απαλοιφής Gauss ή παραλλαγή του, το οποίο ακολουθούσε η εφαρμογή μιας "σημειακής (*point*)" κλασικής επαναληπτικής μεθόδου.

Στην παρούσα μελέτη εργαζόμαστε εφαρμόζοντας αρχικά περισσότερα από ένα βήματα απαλοιφής Gauss, ακολουθούμενα από μια "*block*" κλασική επαναληπτική μέθοδο.

Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2, που αποτελεί συνθετική εργασία, παραθέτουμε τη θεωρία πάνω στην οποία βασιστήκαμε για να διατυπώσουμε και να αναπτύξουμε τα περιλαμβανόμενα στο Κεφάλαιο 3 αποτελέσματα, που συνιστούν πρωτότυπη συμβολή στην αντίστοιχη ερευνητική περιοχή.

Πιο αναλυτικά, στις παραγράφους 3.1 και 3.3, θεωρώντας δεδομένο τον "*block* διαχωρισμό" του πίνακα Α

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix},$$

όπου $A_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i,n_j}$, $i,j = 1(1)p$, $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$, και $\det(A_{ii}) \neq 0$, $i = 1(1)p$, εφαρμόζουμε στο σύστημα (1.1) τον *block* προρρυθμιστή πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1}A_{11}^{-1} & O_{p2} & \dots & I_{pp} \end{bmatrix},$$

όπου L_{11} είναι ο κάτω τριγωνικός παράγοντας στην "LU παραγοντοποίηση" του A_{11}. Η εν λόγω προρρύθμιση απαλείφει τις n_1 πρώτες στήλες του A, κάτω από την κύρια διαγώνιο, όταν ο πίνακας αυτός είναι ένας μη-ιδιόμορφος ή ιδιόμορφος M-πίνακας.

Στην παράγραφο 3.2, όπου ο πίνακας A θεωρείται ότι είναι "p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος" αποδεικνύεται, μεταξύ των άλλων, ότι η εφαρμογή *block* προρρυθμιστή, όπως αυτή περιγράφηκε, είναι ισοδύναμη με το γνωστό ως "block κυκλικό επαναδιαχωρισμό", με τον οποίο ασχολήθηκαν οι *Markham*, *Neumann* και *Plemmons* [11], ο *Pierce* [12] και οι *Pierce*, *Hadjidimos* και *Plemmons* [13] και οι *Galanis* και *Hadjidimos* [14].

2 Βασική θεωρία

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση και τη μελέτη των νέων στοιχείων της παρούσας εργασίας θα παρουσιάσουμε τη θεωρία που χρησιμοποιείται σαν απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο για τη στήριξη της όλης μελέτης και ανάπτυξής της.

2.1 Αναγώγιμοι και μη-αναγώγιμοι πίνακες

Ξεκινάμε με μερικούς ορισμούς:

Ορισμός 2.1.1 *[1] Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, όπου $n \geq 2$. Ο A καλείται <u>αναγώγιμος</u> (reducible), αν υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{C}^{r,r}$ και $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$, με $1 \leq r < n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας μετάθεσης P, τότε ο A καλείται <u>μη-αναγώγιμος</u> (irreducible). Αν ο $A \in \mathbb{C}^{1,1}$, τότε είναι μη-αναγώγιμος αν το μοναδικό του στοιχείο είναι μη-μηδενικό αλλιώς είναι αναγώγιμος.

Η έννοια της αναγωγιμότητας ή μη μπορεί να δοθεί ισοδύναμα χρησιμοποιώντας κάποιες στοιχειώδεις έννοιες από τη θεωρία γραφημάτων (βλ. $Varga$ [1], $Young$ [2] και $Berman\ and\ Plemmons$ [3]).

Θεωρούμε $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ τυχόντα και έστω $R_1, R_2, \cdots, R_n$ οποιαδήποτε n διακριτά σημεία του επιπέδου, τα οποία ονομάζουμε <u>κορυφές</u> ή <u>κόμβους</u> ($nodes$). Για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο a_{ij} του πίνακα ενώνουμε τους κόμβους R_i, R_j με μια <u>κατευθυνόμενη ακμή</u> ($directed\ arc$ ή $directed\ edge$) από τον κόμβο R_i στον R_j, την $\overrightarrow{R_iR_j}$. Για ένα διαγώνιο μη-μηδενικό στοιχείο του A η ακμή που συνδέει τον R_i με τον εαυτό του λέγεται <u>βρόχος</u> ($loop$).
Με αυτόν τον τρόπο, κάθε $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ συνδέεται με ένα πεπερασμένο <u>κατευθυνόμενο γράφημα</u> ($directed\ graph$) $\Gamma(A)$.

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται <u>ισχυρά συνεκτικό</u> ($strongly\ connected$) αν, για κάθε διατεταγμένο ζεύγος κόμβων $(R_i,\ R_j)$, υπάρχει ένα κατευθυνόμενο <u>μονοπάτι</u> ($path$) $\overrightarrow{R_iR_{l_1}}$, $\overrightarrow{R_{l_1}R_{l_2}}$, $\cdots$, $\overrightarrow{R_{l_{r-1}}R_{l_r=j}}$, που συνδέει τους κόμβους R_i, R_j.
Θα λέμε ότι ένα τέτοιο μονοπάτι έχει <u>μήκος</u> r, δηλαδή το πλήθος των ακμών του μονοπατιού από τον R_i στον R_j είναι r.

Θεώρημα 2.1.1 *[1] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι μη-αναγώγιμος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημά του $\Gamma(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.*

Ισοδύναμα, αποδεικνύεται ότι ισχύει ($Young$ [2]) εναλλακτικά ο ορισμός:

Ορισμός 2.1.2 *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι μη-αναγώγιμος αν και μόνο αν $n = 1$, με $a_{11} \neq 0$ ή, δεδομένων οποιωνδήποτε φυσικών i και j με $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, είναι $a_{ij} \neq 0$ ή υπάρχουν φυσικοί $i_1, i_2, \ldots, i_s$ τέτοιοι ώστε*

$$a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_s,j} \neq 0. \tag{2.1}$$

Δυο έννοιες, που χρησιμοποιούνται παρακάτω είναι οι έννοιες του φάσματος και της φασματικής ακτίνας ενός πίνακα, που ορίζονται ως εξής.

Ορισμοί 2.1.1 *([1], [2], [3]) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1(1)n$, δηλαδή τους n αριθμούς που ικανοποιούν την $\det(A - \lambda I) = 0$, τότε, καλείται φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα A, $\sigma(A)$, το σύνολο*

$$\sigma(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

και φασματική ακτίνα του πίνακα A το

$$\rho(A) = \max_{i=1(1)n} |\lambda_i|.$$

Ορισμός 2.1.3 *[3] Ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μη-αρνητικός ((όχι γνήσια) θετικός), αν κάθε στοιχείο του είναι μη-αρνητικό (αν κάθε στοιχείο του είναι μη-αρνητικό και τουλάχιστον ένα στοιχείο του είναι θετικό). Τον συμβολίζουμε με $B \geq 0$ ($B \geq 0$ αλλά $B \not\equiv 0$). Επιπλέον, ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι θετικός αν κάθε στοιχείο του είναι θετικό: τον συμβολίζουμε με $B > 0$.*

Αντίστοιχοι ορισμοί ισχύουν για διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής κύριο αποτέλεσμα της θεωρίας των $Perron$ (1907) και $Frobenius$ (1912) (βλ. $Varga$ [1]):

Θεώρημα 2.1.2 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, μη-αναγώγιμος πίνακας. Τότε:*

(1) Ο A έχει μια θετική πραγματική ιδιοτιμή ίση με τη φασματική ακτίνα του $\rho(A)$.

(2) Στη $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $x > 0$.

(3) Η $\rho(A)$ αυξάνει (γνήσια) καθώς οποιοδήποτε στοιχείο του A αυξάνει.

(4) Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A.

Γενίκευση του προηγούμενου αποτελεί το θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.3 *[1] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $A \geq 0$. Τότε,*

(1) Ο A έχει μια μη-αρνητική πραγματική ιδιοτιμή ίση με τη φασματική ακτίνα του $\rho(A)$. Η ιδιοτιμή αυτή είναι θετική εκτός αν ο A είναι αναγώγιμος και η κανονική μορφή του είναι αυστηρά άνω τριγωνική. Δηλαδή, αν ο A είναι αναγώγιμος με βάση τον Ορισμό 2.1.1 και υπάρχει πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ O_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ O_{m1} & O_{m2} & \dots & R_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

όπου κάθε υποπίνακας R_{jj}, $j = 1(1)m$, είναι τετραγωνικός και είναι είτε μη-αναγώγιμος ή ένας 1×1 μηδενικός πίνακας. Ορίζουμε τον πίνακα της (2.2) ως κανονική μορφή (normal form) ενός αναγώγιμου πίνακα A.

(2) Στη $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $x \geq 0$.

(3) Η $\rho(A)$ δεν ελαττώνεται καθώς οποιοδήποτε στοιχείο του A αυξάνει.

Είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα να βρεθεί η φασματική ακτίνα ενός δεδομένου πίνακα. Όμως μπορούν να βρεθούν άνω φράγματα από το ακόλουθο θεώρημα του *Gerschgorin* (1931) (βλ. *Varga*, [1]).

Θεώρημα 2.1.4 *(Gerschgorin (1931)) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ και έστω*

$$\Lambda_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} | a_{ij} |, \ i = 1(1)n.$$

Τότε, όλες οι ιδιοτιμές λ του A ανήκουν στην ένωση των δίσκων

$$| z - a_{ii} | \leq \Lambda_i, \ i = 1(1)n.$$

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει άνω και κάτω (απόλυτα) φράγματα για τη φασματική ακτίνα ενός $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, μη-αρνητικού και μη-αναγώγιμου πίνακα.

Θεώρημα 2.1.5 *[1] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, μη-αναγώγιμος πίνακας και έστω P^* το υπερογδοημόριο των διανυσμάτων $x > 0$. Τότε, $\forall x \in P^*$,*

είτε

$$\min_{i=1(1)n} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right] < \rho(A) < \max_{i=1(1)n} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right]$$

ή

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} = \rho(A), \ \forall i, \ i = 1(1)n.$$

Επιπλέον,

$$\sup_{x\in P^*}\left\{\min_{i=1(1)n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{x_i}\right]\right\} = \rho(A) = \inf_{x\in P^*}\left\{\max_{i=1(1)n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{x_i}\right]\right\}.$$

Έχουν ερευνηθεί περιπτώσεις μη-αρνητικών, μη-αναγώγιμων πινάκων για τους οποίους υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές μέτρου ίσου με τη φασματική τους ακτίνα. Αρχίζουμε με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1.4 *[1] Έστω $A \in I\!R^{n,n}$, $A \geq 0$, ένας μη-αναγώγιμος πίνακας, και έστω k το πλήθος των ιδιοτιμών του A μέτρου ίσου με $\rho(A)$. Αν $k = 1$, τότε ο A καλείται αρχικός (primitive). Αν $k > 1$, τότε ο A είναι κυκλικός δείκτη k (cyclic of index k).*

Αποδεικνύεται ότι ισχύει (βλ. *Varga* [1]):

Θεώρημα 2.1.6 *(Frobenius (1912)) Έστω $A \in I\!R^{n,n}$, $A \geq 0$, μη-αναγώγιμος, κυκλικός πίνακας δείκτη k (> 1). Τότε οι k ιδιοτιμές μέτρου $\rho(A)$ είναι της μορφής*

$$\rho(A)\exp\left(i\frac{2\pi j}{k}\right),\ j = 0(1)k-1,$$

όπου i, εδώ, η φανταστική μονάδα. Επιπλέον, όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν την ιδιότητα ότι οι στροφές του μιγαδικού επιπέδου περί την αρχή των αξόνων κατά γωνίες $\frac{2\pi}{k}$, αλλά όχι μικρότερες από $\frac{2\pi}{k}$, απεικονίζουν το σύνολο των ιδιοτιμών στον εαυτό του, δηλαδή

$$\sigma\left(\exp\left(i\frac{2\pi j}{k}\right)A\right) \equiv \sigma(A),\ j \in Z\!\!\!Z.$$

Τέλος, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε ο PAP^T έχει τη μορφή

$$PAP^T = \begin{bmatrix} O_{11} & A_{12} & O_{13} & \dots & O_{1k} \\ O_{21} & O_{22} & A_{23} & \dots & O_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{k-1,1} & O_{k-1,2} & O_{k-1,3} & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & O_{k2} & O_{k3} & \dots & O_{kk} \end{bmatrix},$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες είναι τετραγωνικοί.

Η παραπάνω αναπαράσταση ενός μη-αρνητικού, μη-αναγώγιμου κυκλικού πίνακα δείκτη $k > 1$ μπορεί να μετατεθεί με αρκετούς διαφορετικούς αλλά ισοδύναμους τρόπους. Μια από αυτές τις μορφές είναι και η

$$PAP^T = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & & O_{1,k-1} & A_{1k} \\ A_{21} & O_{22} & & O_{2,k-1} & O_{2k} \\ O_{31} & A_{32} & & O_{3,k-1} & O_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ O_{k1} & O_{k2} & \dots & A_{k,k-1} & O_{kk} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Ορισμός 2.1.5 *[1] Λέμε ότι η (2.3) είναι η* <u>*κανονική μορφή*</u> *(normal form) ενός $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, μη-αρνητικού, μη-αναγώγιμου πίνακα, που είναι κυκλικός δείκτη k (> 1).*

Γενικότερα, έχουμε :

Ορισμός 2.1.6 *[1] Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ (όχι απαπαίτητα μη-αρνητικός ή μη-αναγώγιμος) είναι* <u>*ασθενώς κυκλικός δείκτη k*</u> *(> 1) (weakly cyclic of index k), αν υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε ο PAP^T είναι της μορφής:*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1,k-1} & A_{1k} \\ A_{21} & O_{22} & & O_{2,k-1} & O_{2k} \\ O_{31} & A_{32} & \ddots & O_{3,k-1} & O_{3k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{k1} & O_{k1} & \dots & A_{k,k-1} & O_{kk} \end{bmatrix},$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες είναι τετραγωνικοί και $A_{i+1,i} \not\equiv 0$, με $i = 1(1)k$ και $A_{k+1,k} = A_{1k}$.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την κανονική μορφή στη γενική περίπτωση των ασθενώς κυκλικών πινάκων, μπορούμε να εξασφαλίσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του *Romanovsky* (1936) (βλ. *Varga* [1]).

Θεώρημα 2.1.7 *(Romanovsky (1936)) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ασθενώς κυκλικός πίνακας δείκτη $k > 1$. Τότε*

$$\phi(t) = det(tI - A) = t^m \prod_{i=1}^{r} (t^k - \sigma_i^k),$$

όπου σ_i, $i = 1(1)k$, είναι μη-μηδενική ιδιοτιμή του A και m μη-αρνητικός ακέραιος που ικανοποιεί την $m + rk = n$.

Μια πρόταση που μας δίνει στοιχεία για τη συμπεριφορά των δυνάμεων των κυκλικών πινάκων δίνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.8 *(Frobenius (1912)) [1] Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ασθενώς κυκλικός πίνακας δείκτη $k > 1$. Τότε ο A^{jk} είναι τελείως αναγώγιμος (completely reducible) για κάθε $j \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε*

$$PA^{jk}P^T = \begin{bmatrix} C_1^j & & & O \\ & C_2^j & & \\ & & \ddots & \\ O & & & C_k^j \end{bmatrix}, \; j \geq 1,$$

όπου κάθε διαγώνιος υποπίνακας C_i είναι τετραγωνικός, και

$$\rho(C_1) = \rho(C_2) = \ldots = \rho(C_k) = \rho^k(A).$$

Επίσης, αν ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός, μη-αναγώγιμος, και κυκλικός δείκτη k, τότε κάθε υποπίνακας C_i είναι αρχικός.

Είδαμε ότι η εισαγωγή της έννοιας του κατευθυνόμενου γραφήματος ενός πίνακα μας παρέχει μια γεωμετρική μέθοδο για να αποφασίζουμε αν ένας συγκεκριμένος πίνακας είναι αναγώγιμος ή μη. Το ίδιο χρήσιμη είναι αυτή όταν θέλουμε να καθορίσουμε αν ένας μη-αρνητικός, μη-αναγώγιμος πίνακας είναι αρχικός ή κυκλικός κάποιου δείκτη k.

Μπορούμε να δούμε ότι τα κατευθυνόμενα γραφήματα των δυνάμεων ενός μη-αρνητικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ μπορούν να εξαχθούν από το κατευθυνόμενο γράφημα του A, Γ(A). Αυτό γιατί, το $\Gamma(A^r)$, $r \geq 1$, είναι το κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει αν θεωρήσουμε όλα τα μονοπάτια του Γ(A) μήκους ακριβώς r, για παράδειγμα το $\overrightarrow{R_iR_{l1}}$, $\overrightarrow{R_{l_1}R_{l_2}}$, $\cdots$, $\overrightarrow{R_{l_{r-1}}R_{l_r=j}}$, και ενώσουμε στη συνέχεια τους κόμβους R_i, R_j με μια κατευθυνόμενη ακμή στο $\Gamma(A^r)$. Με τα κατευθυνόμενα γραφήματα των δυνάμεων του A, μπορούμε να δώσουμε μια απλή γραφική μέθοδο για να αποφασίζουμε αν ένας δεδομένος μη-αρνητικός, μη-αναγώγιμος πίνακας A είναι αρχικός ή κυκλικός κάποιου δείκτη $k > 1$.

Θεώρημα 2.1.9 *(Romanovsky (1936)) [1] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, μη-αναγώγιμος πίνακας και Γ(A) το κατευθυνόμενο γράφημά του. Για κάθε κόμβο R_i του Γ(A), θεωρούμε όλα τα κλειστά μονοπάτια που συνδέουν τον R_i με τον εαυτό του. Έστω S_i το σύνολο όλων των μηκών μ_i των κλειστών μονοπατιών, και k_i ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των μηκών μ_i, με $\mu_i \in S_i$, για $i = 1(1)n$. Τότε, $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$, όπου $k = 1$ αν ο A είναι αρχικός, και $k > 1$ αν ο A είναι κυκλικός δείκτη k.*

Με χρήση του Θεωρήματος 2.1.9 είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις σχεδόν προφανείς έννοιες των κυκλικών και αρχικών πεπερασμένων κατευθυνόμενων γραφημάτων.

Ορισμός 2.1.7 *[1] Αν Γ είναι ένα πεπερασμένο, ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα, τότε αυτό είναι ένα κυκλικό γράφημα δείκτη $k > 1$ (cyclic graph of index k), ή ένα αρχικό γράφημα (primitive graph) αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των μηκών των κλειστών μονοπατιών του είναι αντίστοιχα $k > 1$ ή $k = 1$.*

2.2 Θεωρία κλασικών επαναληπτικών σχημάτων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b \text{ με } A \in \mathbb{C}^{n,n},\ \det(A) \neq 0,\ b \in \mathbb{C}^{n}. \tag{2.4}$$

Για την επίλυσή του εκφράζουμε τον πίνακα A στη μορφή

$$A = M - N. \tag{2.5}$$

Ορισμός 2.2.1 *Αν ο M, ο οποίος λέγεται προρρυθμιστής, είναι αντιστρέψιμος, τότε λέμε ότι η έκφραση (2.5) είναι μια διάσπαση του πίνακα A.*

Τότε το σύστημα (2.4) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$Mx = Nx + b. \tag{2.6}$$

Οπότε, αφού ο M είναι αντιστρέψιμος πίνακας, έχουμε την ισοδύναμη εξίσωση σταθερού σημείου :

$$x = Tx + c, \tag{2.7}$$

όπου

$$T := M^{-1}N,\ c := M^{-1}b. \tag{2.8}$$

Η επαναληπτική μέθοδος που κατασκευάζεται με βάση τις (2.7)-(2.8) είναι η

$$x^{(m+1)} = Tx^{(m)} + c, \tag{2.9}$$

και άρα καταλήγουμε στο ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(m+1)} = Tx^{(m)} + c,\ m = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{με } x^{(0)} \in \mathbb{C}^{n} \text{ οποιοδήποτε}. \tag{2.10}$$

Το επαναληπτικό σχήμα (2.10) παράγει μια ακολουθία διανυσμάτων $x^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$, η οποία συγκλίνει στη λύση του συστήματος $Ax = b$, $x = A^{-1}b$ υπό κάποιες προϋποθέσεις. Αποδεικνύεται ωστόσο, ότι αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει, θα συγκλίνει στην λύση $x = A^{-1}b$ του αρχικού συστήματος. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της $x^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$, δίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.2.1 *[20] Η ακολουθία διανυσμάτων $x^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$, που παράγεται από το επαναληπτικό σχήμα (2.10) συγκλίνει στη λύση $x = A^{-1}b$ του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν $\rho(T) < 1$.*

Τότε μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.2 *Αν $A = M - N$ είναι μια διάσπαση του A και $T = M^{-1}N$, με $\rho(T) < 1$, τότε λέμε ότι η διάσπαση από την οποία προέρχεται ο T είναι συγκλίνουσα, ενώ ο T λέγεται συγκλίνων πίνακας.*

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Πόρισμα 2.2.1 *[20] Αν $\|T\| < 1$, με $\|.\|$ μια οποιαδήποτε φυσική norm, τότε ο αλγόριθμος (2.10) συγκλίνει στη λύση του συστήματος (2.4).*

Πόρισμα 2.2.2 *[20] Αν για κάποια φυσική norm και κάποιο m θετικό ακέραιο ισχύει ότι $\|T^m\| < 1$ για τον επαναληπτικό πίνακα του σχήματος (2.10), τότε το σχήμα συγκλίνει.*

(Υπενθύμιση: Με τον όρο φυσική *norm* εννοούμε την απεικόνιση

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \equiv \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\| \equiv \max_{x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\|,\ \forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$$

που βασίζεται σε μια οποιαδήποτε διανυσματική *norm*. Οι παραπάνω απεικονίσεις από το $\mathbb{C}^{n,n}$ στο $\mathbb{R}_{+,0}$ ορίζουν μια *norm* πίνακα, για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Δηλαδή, ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:
i) $\|A\| \geq 0$ ($\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$) $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$
ii) $\|cA\| = |c|\|A\|,\ \forall c \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$
iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$
καθώς και την
iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$.)

Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα-σφάλμα $\varepsilon^{(m)}$ στην m επανάληψη της επαναληπτικής μεθόδου (2.10) για την επίλυση του συστήματος (2.4) ως

$$\varepsilon^{(m)} = x^{(m)} - x,\ m \geq 0,$$

όπου x είναι το μοναδικό διάνυσμα-λύση του αρχικού συστήματος. Τότε χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των $x^{(m)}$, x, από τις (2.9) και (2.7), αντίστοιχα, έχουμε

$$\varepsilon^{(m)} = T\varepsilon^{(m-1)} = \ldots = T^m \varepsilon^{(0)},\ m \geq 0, \tag{2.11}$$

όπου το $\varepsilon^{(0)}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$.
Από τη σχέση (2.11) και για $\varepsilon^{(0)} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ έχουμε ότι $\frac{\|\varepsilon^{(m)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \leq \|T^m\|$, από όπου προκύπτει ότι

$$\sup_{\varepsilon^{(0)} \in\ \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \left(\frac{\|\varepsilon^{(m)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \right) \leq \|T^m\|. \tag{2.12}$$

Μπορούμε με βάση το Πόρισμα 2.2.2 και τη σχέση (2.12) να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.2.3 *[1] Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m και για μια φυσική norm ισχύει $\|A^m\| < 1$, τότε η*

$$R(A^m) = -\ln(\|A^m\|^{\frac{1}{m}}) = \frac{-\ln\|A^m\|}{m} \tag{2.13}$$

είναι η μέση ταχύτητα σύγκλισης για m επαναλήψεις. Αν $\|B^m\| < 1$ και $R(A^m) < R(B^m)$, τότε ο B είναι ταχύτερος από τον A για m επαναλήψεις.

Για $m \to \infty$, δηλαδή για πολύ μεγάλες τιμές του m στην πράξη, και με βάση τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορεί να αποδειχτεί (βλ. $Varga$ [1]) ότι

$$R_\infty(A) = \lim_{m\to\infty} R(A^m) = -\ln\rho(A), \tag{2.14}$$

η οποία καλείται μέση ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης. Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα του A, με $\rho(A) < 1$, και ειδικά στην περίπτωση των επαναληπτικών σχημάτων (2.10), του πίνακα T, τόσο ασυμπτωτικά ταχύτερος είναι ο T (και τόσο ταχύτερα ασυμπτωτικά συγκλίνει η $x^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$, στη λύση του αρχικού συστήματος).

Παρακάτω θα αναφερθούμε στις κλασικές επαναληπτικές μεθόδους, που στηρίζονται στην εξής έκφραση του πίνακα A :

$$A = D - L - U, \tag{2.15}$$

όπου ο D είναι ένας διαγώνιος πίνακας που περιέχει τα διαγώνια στοιχεία του A, και οι $-L$ και $-U$ είναι αντίστοιχα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες που τα στοιχεία τους είναι αυτά που βρίσκονται κάτω και άνω από την κύρια διαγώνιο του A. Η μορφή (2.15) είναι τότε μονοσήμαντα ορισμένη.

Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε ως M τον πίνακα D η (2.15)$D - (L + U)$ είναι μια διάσπαση του πίνακα A αν και μόνο αν ο D είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή, αν και μόνο αν $\det(M) = \det(D) = a_{11} \ldots a_{nn} \neq 0$. Όταν η $D - (L + U)$ είναι η διάσπαση του A, τότε το σχήμα (2.10) είναι το

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(m)} + D^{-1}b, \; m = 0, 1, \ldots. \tag{2.16}$$

Ονομάζουμε την μέθοδο (2.16) σημειακή (point) επαναληπτική μέθοδο του Jacobi και τον πίνακα

$$B = D^{-1}(L + U)$$

(σημειακό) επαναληπτικό πίνακα της Jacobi που συνδέεται με τον A.

Επιλέγοντας ως M τον $D - L$ και με την επιπλέον υπόθεση ότι αυτός είναι αντιστρέψιμος (που είναι ισοδύναμο με το να υποθέσουμε ότι $\det(D - L) = \det(D) \neq 0$), έπεται ότι η $(D - L) - U$ είναι διάσπαση του A. Τότε ορίζεται το επαναληπτικό σχήμα της σημειακής (point) μεθόδου των Gauss-Seidel

$$x^{(m+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(m)} + (D-L)^{-1}b,\ m = 0,1,\ldots. \tag{2.17}$$

Ο πίνακας

$$H = (D-L)^{-1}U$$

είναι ο (σημειακός) επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel που συνδέεται με τον A.

Μια τρίτη βασική επαναληπτική μέθοδος επίλυσης του αρχικού συστήματος, η οποία συσχετίζεται με την σημειακή Gauss-Seidel είναι η σημειακή μέθοδος της διαδοχικής υπεργαλάρωσης (*Successive Over – Relaxation*) ή της *SOR*.

Θεωρούμε σαν

$$M = M_\omega = \frac{1}{\omega}(D-\omega L),\ \omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

όπου η παράμετρος ω καλείται παράμετρος υπεργαλάρωσης. Συνεπώς η SOR μέθοδος είναι η

$$x^{(m+1)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x^{(m)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b,\ m = 0,1,\ldots. \tag{2.18}$$

Ο πίνακας

$$\mathcal{L}_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$$

είναι ο (σημειακός) επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου SOR που συνδέεται με τον A.

Αν επιλέξουμε $\omega = 1$ παρατηρούμε ότι η SOR δεν είναι άλλη παρά η σημειακή Gauss-Seidel.

Με τον ορισμό της μέσης ασυμπτωτικής ταχύτητας σύγκλισης που δώσαμε παραπάνω μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις ασυμπτωτικές ταχύτητες ή ισοδύναμα τις φασματικές ακτίνες των σημειακών επαναληπτικών πινάκων της μεθόδου του Jacobi και των Gauss-Seidel, στην περίπτωση που ο πίνακας της Jacobi έχει πραγματικά, μη-αρνητικά στοιχεία. Αυτό το θεμελειώδες αποτέλεσμα που βασίστηκε στη θεωρία των Perron και Frobenius δόθηκε από τους *Stein* και *Rosenberg* (1948) (βλ. *Varga* [1]).

Θεώρημα 2.2.2 *(Stein – Rosenberg (1948)) Έστω ότι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Jacobi $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας, και έστω H ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel. Τότε, ισχύει μια ακριβώς από τις παρακάτω αμοιβαία αποκλειόμενες σχέσεις:*

(1) $\rho(B) = \rho(H) = 0$.

(2) $0 < \rho(H) < \rho(B) < 1$.

(3) $1 = \rho(B) = \rho(H)$.

(4) $1 < \rho(B) < \rho(H)$.

Σημείωση : Ο Jacobi πίνακας B και ο Gauss-Seidel πίνακας H είναι είτε και οι δύο συγκλίνοντες ή και οι δύο αποκλίνοντες.

Άμεση συνέπεια αποτελεί η παρακάτω πρόταση:

Πόρισμα 2.2.3 *[1] Αν ο μη-αρνητικός πίνακας της Jacobi B είναι τέτοιος ώστε $0 < \rho(B) < 1$, τότε*

$$R_\infty(B) < R_\infty(H). \tag{2.19}$$

Πριν κλείσουμε την υποενότητα αυτή θα παραθέσουμε ορισμένα αποτελέσματα των *Ostrowski* (1954) και *Reich* (1949), τα οποία δίνουν διαφορετικές ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη σύγκλιση της SOR και της Gauss-Seidel μεθόδου. Ξεκινάμε όμως πρώτα με το ακόλουθο αποτέλεσμα του *Kahan* (1958).

Θεώρημα 2.2.3 *(Kahan (1958)) Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της μεθόδου της SOR είναι η*

$$|\omega - 1| < 1,\ \omega \in \mathbb{C} \Rightarrow \omega \in (0,2),\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Υπάρχουν κατηγορίες πινάκων για τους οποίους η παραπάνω αναγκαία συνθήκη είναι και ικανή. Μια τέτοια κατηγορία πινάκων είναι οι Ερμιτιανοί και θετικά ορισμένοι.

Ορισμός 2.2.4 *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $A^H = \bar{A}^T = A$ (Ερμιτιανός). Τότε ο A είναι <u>θετικά ορισμένος</u> αν και μόνο αν $\forall x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\},\ x^H A x > 0$.*

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ο ισοδύναμος ορισμός στην περίπτωση που ο A είναι πραγματικός πίνακας είναι:

Ορισμός 2.2.5 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $A^T = A$. Τότε ο A είναι <u>θετικά ορισμένος</u> αν και μόνο αν $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ x^T A x > 0$.*

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το εξής θεώρημα (βλ. *Varga* [1]):

Θεώρημα 2.2.4 *(Ostrowski (1954)) Έστω ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε για $\omega \in \mathbb{R}$, η συνθήκη $\omega \in (0,2)$ αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου.*

Η ειδική περίπτωση $\omega = 1$, που αποδείχτηκε πρώτα από τον *Reich* (1949), δίνεται στην παρακάτω πρόταση:

Πόρισμα 2.2.4 *Κάτω από τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει.*

Η θεωρία που αναπτύχθηκε ως τώρα για τις σημειακές επαναληπτικές μεθόδους Jacobi, Gauss-Seidel και SOR ισχύει με μικρές τροποποιήσεις και στην περίπτωση των αντίστοιχων *block* επαναληπτικών μεθόδων.
Για τον ορισμό τους, ξεκινάμε με το γραμμικό σύστημα (2.4) του οποίου ζητάμε τη λύση, όπου όμως ο A είναι διαχωρισμένος σε μια $p \times p$ *block* μορφή την

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

με τα διαγώνια blocks A_{ii}, $i = 1(1)p$, να είναι τετραγωνικοί πίνακες, δηλαδή $A_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i,n_i}$ με $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.
Από αυτόν το διαχωρισμό του πίνακα A, ορίζουμε τους πίνακες

$$D = \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp}), \tag{2.22}$$

$$L = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21} & O_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1} & -A_{p2} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} O_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & -A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

όπου οι πίνακες L και U είναι αντίστοιχα κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μορφή του A, $A = D - L - U$, να είναι μονοσήμαντα ορισμένη και να εξαρτάται μόνο από το διαχωρισμό του A σε blocks. Τότε, οι κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι κατασκευάζονται με τον τρόπο που έχουμε αναφέρει πιο πάνω.

Ειδικότερα, η *block* επαναληπτική μέθοδος του Jacobi ορίζεται αν και μόνο αν ο D είναι αντιστρέψιμος πίνακας (ισοδύναμα αν και μόνο αν οι διαγώνιοι block υποπίνακες του A είναι αντιστρέψιμοι). Για την εφαρμογή της block Jacobi μεθόδου διαχωρίζουμε ανάλογα σε blocks το άγνωστο διάνυσμα x και το διάνυσμα b. Συγκεκριμένα, καθένα από τα διανύσματα αυτά χωρίζεται έτσι ώστε

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \ \mu\varepsilon \ x_i, b_i \in \mathbb{C}^{n_i}, \ i = 1(1)p.$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου θα δίνεται από τη (2.16) με τη διαφορά ότι οι D, L και U θα ορίζονται όπως στις (2.22), (2.23) και (2.24), αντίστοιχα.
Όμοια ορίζονται η *block* επαναληπτική μέθοδος των Gauss-Seidel και η *block* επαναληπτική μέθοδος της SOR. Η προϋπόθεση για τον ορισμό τους είναι αυτή που ισχύει στην block Jacobi, δηλαδή τα διαγώνια blocks $A_{ii}, \ i = 1(1)p$, του A να είναι τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες. Οπότε η block Gauss-Seidel μέθοδος είναι η (2.17) και η block SOR μέθοδος δίνεται από τη (2.18).

2.3 Z- και M-πίνακες

Ορισμός 2.3.1 *[3] Ένας πίνακας A λέγεται Z-πίνακας, όταν τα εκτός της κύριας διαγωνίου στοιχεία του είναι μη-θετικά, και M-πίνακας, όταν μπορεί να εκφραστεί στη μορφή*

$$A = sI - B,\ s > 0,\ B \geq 0 \ \kappa\alpha\iota\ s \geq \rho(B), \tag{2.25}$$

όπου $\rho(B)$ η φασματική ακτίνα του B .

Ειδικότερα, ο A είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας , όταν είναι στη μορφή (2.25) και $s > \rho(B)$.
Το παρακάτω λήμμα είναι το λήμμα του *Neumann* για συγκλίνουσες σειρές εφαρμοσμένο σε συγκλίνοντες πίνακες.

Λήμμα 2.3.1 *[1] Αν $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $\rho(M) < 1$, τότε ο $I - M$ είναι μη-ιδιόμορφος, και*

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \ldots,$$

με τη σειρά στο δεξί μέλος να συγκλίνει. Αντίστροφα, αν η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει, τότε $\rho(M) < 1$.

Ισχύει ότι:

Θεώρημα 2.3.1 *[1] Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας M-πίνακας, και έστω ότι C ένας οποιοσδήποτε πίνακας που προκύπτει από τον A θέτοντας κάποια στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου του A ίσα με μηδέν. Τότε, ο C είναι επίσης ένας M-πίνακας.*

Πριν παραθέσουμε τις ιδιότητες ενός μη-ιδιόμορφου M-πίνακα, που θα χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή πολλών από τα συμπεράσματά μας, θα δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.3.2 *[1] Έστω ότι ο A έχει την διάσπαση $A = M - N$. Λέμε ότι η εν λόγω διάσπαση είναι κανονική διάσπαση, αν υπάρχει ο M^{-1} με $M^{-1} \geq 0$, και $N \geq 0$.*

Θεώρημα 2.3.2 *(βλ. Berman and Plemmons [3]) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ Z-πίνακας. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες με την πρόταση " O A είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας ".*

(1) [E18] Υπάρχουν κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες L και U, αντίστοιχα, με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιοι ώστε $A = LU$. (Οι πίνακες αυτοί είναι ειδικότερα μη-ιδιόμορφοι M-πίνακες.)

(2) [I27] Υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax > 0$.
(Σημείωση: Από τη (2) έπεται ότι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι θετικά.)

(3) [J30] Υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax \geq 0$ (αλλά $Ax \not\equiv 0$) και $\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j \geq 0$ (αλλά $\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j \not\equiv 0$).

(4) [N38] Υπάρχει ο A^{-1} και $A^{-1} \geq 0$. Ειδικότερα αν ο A είναι και μη-αναγώγιμος, τότε $A^{-1} > 0$.

(5) [P48] Κάθε κανονική διάσπαση του A είναι συγκλίνουσα.

(6) Κάθε κύριος τετραγωνικός υποπίνακας του A, δηλαδή κάθε πίνακας που προκύπτει από τον A διαγράφοντας οποιεσδήποτε γραμμές του και τις αντίστοιχες στήλες του, είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας.
Σημείωση: Με τον όρο “ κύριος (τετραγωνικός) υποπίνακας ” του A, εννοούμε οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα που προκύπτει διαγράφοντας οποιεσδήποτε j γραμμές του πίνακα A και τις αντίστοιχες j στήλες του, με $1 \leq j < n$.

Επανερχόμενοι στον ορισμό της κανονικής διάσπασης ενός πίνακα A έχουμε τις παρακάτω προτάσεις (βλ. $Varga$ [1]):

Θεώρημα 2.3.3 *Έστω $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ δυο κανονικές διασπάσεις του A, όπου $A^{-1} \geq 0$. Αν $0 \leq N_1 \leq N_2$, με την ισότητα να αποκλείεται (δηλαδή ούτε $N_1 = 0$ ούτε $N_2 - N_1 = 0$), τότε*

$$0 \leq \rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2) < 1. \tag{2.26}$$

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο A είναι μη-αναγώγιμος όλες οι ανισότητες της (2.26) είναι αυστηρές.

Ίδιο αποτέλεσμα έχουμε αν, αντί της $0 \leq N_1 \leq N_2$, χρησιμοποιήσουμε την ασθενέστερη συνθήκη του $Woźnicki$ (βλ. [19]), $M_2^{-1} \leq M_1^{-1}$. Τότε το θεώρημα έχει τη μορφή:

Θεώρημα 2.3.4 *(Woźnicki (1994)) Έστω $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ δυο κανονικές διασπάσεις του A, όπου $A^{-1} \geq 0$. Αν $M_2^{-1} \leq M_1^{-1}$, τότε*

$$0 \leq \rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2) < 1. \tag{2.27}$$

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο A είναι μη-αναγώγιμος και ότι $M_2^{-1} < M_1^{-1}$ έπεται ότι όλες οι ανισότητες της (2.27) είναι αυστηρές.

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου βασίζεται στην έννοια της M-διάσπασης.

Ορισμός 2.3.3 *Έστω $A = M - N$ μια διάσπαση ενός πίνακα A. Η διάσπαση αυτή καλείται Μ-διάσπαση, όταν ο M είναι ένας μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας και $N \geq 0$.*

Τότε αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 2.3.5 *Έστω $A = M - N$ μια Μ-διάσπαση του A. Τότε, ισχύει $\rho(M^{-1}N) < 1$ αν και μόνο αν ο A είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας.*

2.4 p-κυκλικοί πίνακες

Ορισμός 2.4.1 *[1] Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με τον block διαχωρισμό που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο και με την επιπλέον υπόθεση ότι τα διαγώνια blocks A_{ii} είναι μη-ιδιόμορφα, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον block Jacobi πίνακα του A ως $B = D^{-1}(L+U)$. Αν ο B είναι ασθενώς κυκλικός δείκτη $p(\geq 2)$, τότε ο A είναι p-κυκλικός ως προς το συγκεκριμένο διαχωρισμό του A.*

Ορισμός 2.4.2 *[1] Αν ο A, όπως στον Ορισμό 2.4.1, είναι p-κυκλικός, τότε ο A είναι συνεπώς διατεταγμένος, αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα*

$$B(\alpha) = \alpha D^{-1}L + \alpha^{-(p-1)}D^{-1}U$$

που προκύπτει από τον αντίστοιχο block Jacobi επαναληπτικό πίνακα B, είναι ανεξάρτητες του $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Τότε λέμε ότι και ο B είναι συνεπώς διατεταγμένος. Αλλιώς οι A και B λέγονται ασυνεπώς διατεταγμένοι.

Θεώρημα 2.4.1 *[1] Έστω A ένας πίνακας διαχωρισμένος σε blocks όπως στη (2.21) . Υποθέτουμε ότι ο A είναι p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος με διαγώνιους υποπίνακες A_{ii}, $i = 1(1)p$, μη-ιδιόμορφους. Αν μ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα B της block Jacobi, μ^p είναι μια ιδιοτιμή του $H \equiv \mathcal{L}_1$. Αν λ είναι μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του $H \equiv \mathcal{L}_1$ και $\mu^p = \lambda$, τότε μ είναι μια ιδιοτιμή του B. Συνεπώς, η block Jacobi συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η block Gauss-Seidel. Αν συγκλίνουν και οι δυο τότε, $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho^p(B) < 1$.*

Θεώρημα 2.4.2 *[1] Έστω A ένας πίνακας διαχωρισμένος σε blocks όπως στην (2.21). Υποθέτουμε ότι ο A είναι p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος με διαγώνιους υποπίνακες A_{ii}, $i = 1(1)p$, μη-ιδιόμορφους. Αν όλες οι ιδιοτιμές της p-οστής δύναμης του αντίστοιχου block Jacobi B είναι πραγματικές, μη-αρνητικές και $0 < \rho(B) < 1$, τότε :*

(1) Η φασματική ακτίνα της βέλτιστης SOR μεθόδου δίνεται από την έκφραση:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (p-1)(\omega_b - 1),$$

όπου ω_b συμβολίζει τη βέλτιστη παράμετρο υπερχαλάρωσης και

$$(2) \qquad \rho(\mathcal{L}_\omega) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}),\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon,\ \omega \neq \omega_b,$$

όπου $\mathcal{L}_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U]$. Η ω_b αποτελεί τη μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο διάστημα $(1, \frac{p}{p-1})$ της εξίσωσης

$$(\rho(B)\omega_b)^p = p^p(p-1)^{1-p}(\omega_b - 1). \tag{2.28}$$

Επίσης, ο πίνακας της block SOR μεθόδου, $\mathcal{L}_\omega$, συγκλίνει $\forall \omega \in (0, \frac{p}{p-1})$.

Θεώρημα 2.4.3 *[3] Έστω A ένας πίνακας διαχωρισμένος σε blocks όπως στη (2.21). Υποθέτουμε ότι ο A είναι p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος με διαγώνιους υποπίνακες A_{ii}, $i = 1(1)p$, μη-ιδιόμορφους. Αν όλες οι ιδιοτιμές της p-οστής δύναμης του αντίστοιχου block Jacobi B είναι πραγματικές, μη-θετικές και $0 < \rho(B) < \frac{p}{p-2}$ ($0 < \rho(B) < \infty$, αν $p = 2$), τότε :*

(1) Η φασματική ακτίνα της βέλτιστης SOR δίνεται από:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (p-1)(1-\omega_b),$$

όπου ω_b συμβολίζει τη βέλτιστη παράμετρο υπερχαλάρωσης και

$$(2) \qquad \rho(\mathcal{L}_\omega) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) \ \text{για κάθε}, \ \omega \neq \omega_b.$$

Η ω_b αποτελεί τη μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο διάστημα $(\frac{p-2}{p-1}, 1)$ της

$$(\rho(B)\omega_b)^p = p^p(p-1)^{1-p}(1-\omega_b). \tag{2.29}$$

Επίσης, ο πίνακας της block SOR, $\mathcal{L}_\omega$, συγκλίνει $\forall \omega \in (\frac{p-2}{p-1}, \frac{2}{1+\rho(B)})$.

2.5 Ιδιόμορφοι και Ημισυγκλίνοντες πίνακες

Στην παράγραφο 2.2 του κεφαλαίου αυτού μιλήσαμε για επίλυση του συστήματος (2.4) με τη χρήση επαναληπτικών μεθόδων, αλλά στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι μη-ιδιόμορφος. Εδώ θα δούμε πώς μπορεί να επεκταθεί η παραπάνω μελέτη στην περίπτωση συστημάτων της μορφής

$$Ax = b,\ \textit{με}\ A \in \mathbb{C}^{n,n}\ \det(A) = 0\ \textit{και}\ b \in \operatorname{range}(A), \tag{2.30}$$

όπου $\operatorname{range}(A)$ συμβολίζει το χώρο στηλών του πίνακα A.
(Θυμίζουμε εδώ ότι ο <u>χώρος στηλών</u> ενός πίνακα A είναι ο χώρος που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα-στήλες του.)
Ας δώσουμε όμως πριν κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.5.1 *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ορίζουμε σαν <u>τάξη</u> (rank) του πίνακα A το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων-στηλών του.*

Ορισμός 2.5.2 *[3] <u>Δείκτης</u> (index) ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ο μικρότερος μη-αρνητικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η τάξη του A^{k+1} να ισούται με την τάξη του A^k $(\operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^k))$.*

Επίσης:

Ορισμός 2.5.3 *[3] Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας πίνακας δείκτη k ορίζουμε ως <u>Drazin αντίστροφο</u> του A το μοναδικό τετραγωνικό πίνακα $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:*

$$XAX = X \tag{2.31}$$

$$AX = XA \tag{2.32}$$

$$A^k = XA^{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.33}$$

Συμβολίζουμε τον Drazin αντίστροφο πίνακα του A με $X = A^D$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μια σημαντική υποοικογένεια της οικογένειας των M-πινάκων, τους ημισυγκλίνοντες πίνακες, οι οποίοι χρησιμεύουν στην εξασφάλιση κριτηρίων σύγκλισης για τις επαναληπτικές μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ιδιόμορφων συστημάτων γραμμικων εξισώσεων.

Ορισμός 2.5.4 *[3] Ένας πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται <u>ημισυγκλίνων</u>, όταν υπάρχει το $\lim_{j\to\infty} T^j$.*

Ισοδύναμα, ισχύει ότι:

Ορισμός 2.5.5 *[3] Ο T λέγεται ημισυγκλίνων αν ισχύουν κάθε μια από τις παρακάτω συνθήκες.*

(1) $\rho(T) \leq 1$ και

(2) αν $\rho(T) = 1$, τότε όλα τα Jordan blocks, στην κανονική μορφή του Jordan, που συνδέονται με την ιδιοτιμή 1 του T είναι 1×1 και

(3) αν $\rho(T) = 1$, τότε για $\lambda \in \sigma(T)$, έχουμε λ=1 αν $\mid \lambda \mid= 1$.

Ο παραπάνω ορισμός οδηγεί στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.5.1 *[3] Έστω $T \in \mathbb{C}^{n,n}$. Τότε ο T είναι ημισυγκλίνων αν και μόνο αν υπάρχει ένας μη-ιδιόμορφος πίνακας P τέτοιος ώστε*

$$T = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & K_{n-r} \end{bmatrix} P^{-1},\ I_r \in \mathbb{C}^{r,r},\ K_{n-r} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r},\ 0 < r < n. \quad (2.34)$$

όπου $\rho(K_{n-r}) < 1$. (Η μορφή (2.34) μπορεί να αποτελεί κάλλιστα την κανονική μορφή του Jordan.)
(Σημείωση: Αν $r = 0$, ο I_0 δεν εμφανίζεται στον πίνακα του δεύτερου μέλους και ο T είναι συγκλίνων, ενώ αν $r = n$ ο K_0 δεν εμφανίζεται στην (2.34) και $T = I$.)

Λήμμα 2.5.2 *[3] Έστω ότι $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ημισυγκλίνων. Τότε $\lim_{j \longrightarrow \infty} T^j = I - E$, όπου $E = (I - T)(I - T)^D$.*

Οπότε καταλήγουμε στο εξής λήμμα:

Λήμμα 2.5.3 *[3] Έστω $A = M - N$ με $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και M μη-ιδιόμορφος πίνακας. Τότε για $T = M^{-1}N$ και $c = M^{-1}b$, η επαναληπτική μέθοδος*

$$x^{(m+1)} = Tx^{(m)} + c \quad (2.35)$$

συγκλίνει σε κάποια λύση x $(x^{(0)})$ του $Ax = b\ \forall\ x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, με $b \in \mathrm{range}(A)$, αν και μόνο αν T είναι ημισυγκλίνων. Στην περίπτωση αυτή,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} x^{(j)} = (I - T)^D c + (I - E)x^{(0)},\ E = (I - T)(I - T)^D. \quad (2.36)$$

Αν $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ ημισυγκλίνων, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$\gamma(T) := \max\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 1\}$. Τότε, αν $\rho(T) < 1$, $\gamma(T) = \rho(T)$. Αλλιώς, $\gamma(T)$ είναι το αμέσως μικρότερο από τη μονάδα μέτρο των ιδιοτιμών του Τ. Τότε, $\gamma(T) = \rho(K)$.

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω* $A = M - N \in \mathbb{R}^{n,n}$ *μια Μ-διάσπαση του* A. *Τότε, ισχύει* $\rho(M^{-1}N) = 1$ *αν και μόνο αν ο* A *είναι ιδιόμορφος Μ-πίνακας.*

Επίσης, γνωρίζουμε ότι αν $A = sI - B$, $s > 0$, $B \geq 0$ και αν ο A είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, τότε ο $T = \frac{B}{s}$ συγκλίνει. Μπορούμε να επεκτείνουμε την ιδιότητα αυτή σε συγκεκριμένους ιδιόμορφους Μ-πίνακες, όπως παρακάτω.

Ορισμός 2.5.6 *[3] Ένας Μ-πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *λέμε ότι έχει την* <u>*ιδιότητα c*</u>, *αν ο* $A = sI - B$, $s > 0$, $B \geq 0$, *όταν ο πίνακας* $T = \frac{B}{c}$, *είναι ημισυγκλίνων.*

Έχοντας υπόψη μας τον παραπάνω ορισμό έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

Ορισμός 2.5.7 *[3] Ένας Μ-πίνακας* A *έχει την* <u>*ιδιότητα c*</u> *αν και μόνο αν ο δείκτης του* A *είναι μικρότερος ή ίσος του 1.*

Τέλος, ισχύουν τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 2.5.2 *[3] Έστω* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ένας ιδιόμορφος, μη-αναγώγιμος Μ-πίνακας . Τότε:*

(1) Υπάρχει ένα διάνυσμα $x > 0$ *τέτοιο ώστε* $Ax = 0$.

(2) Κάθε κύριος υποπίνακας του A *εκτός του* A *είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας.*

(3) Ο A *έχει την ιδιότητα c.*

Θεώρημα 2.5.3 *[3] Έστω* $A = M - N$ *μια κανονική διάσπαση ενός πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ *και έστω* $T = M^{-1}N$. *Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) Ο A *έχει την ιδιότητα c και* $\gamma(T) < 1$.

(2) Ο T *είναι ημισυγκλίνων, δηλαδή το επαναληπτικό σχήμα (2.35) συγκλίνει στο (2.36)* $\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$.

3 Νέα αποτελέσματα

Όπως, έχουμε αναφέρει στην Εισαγωγή, αντικειμενικός σκοπός μας είναι η επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b, \ \mu\varepsilon \ A \in \mathbb{R}^{n,n} \ \kappa\alpha\iota \ b \in \mathbb{R}^{n}, \tag{3.1}$$

απαλείφοντας την πρώτη block στήλη του A (κάτω από το A_{11} block) και εφαρμόζοντας έπειτα κάποια κλασική επαναληπτική μέθοδο.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τα προαναφερθέντα για διάφορες κατηγορίες πινάκων.

3.1 Πρώτη περίπτωση: Α μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας

Βάσει της μορφής του Α και της θεωρίας που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

Από το Θεώρημα 2.3.2(6) προκύπτει ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i,n_i}$, $i = 1(1)p$ $(\sum_{i=1}^{p} n_i = n)$, είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες, ενώ οι $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i,n_j}$, $i \neq j = 1(1)p$, είναι μη-θετικοί πίνακες.

Από το ίδιο θεώρημα, έχουμε ότι για το μη-ιδιόμορφο πίνακα A_{11} ισχύει ότι $A_{11} = L_{11}U_{11}$, όπου $L_{11} \in \mathbb{R}^{n_1,n_1}$ και $U_{11} \in \mathbb{R}^{n_1,n_1}$, είναι αντίστοιχα, κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες με θετικά διαγώνια στοιχεία και είναι επίσης μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες. Ειδικότερα, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο L_{11} έχει διαγώνια στοιχεία μονάδες.

Για την απόδειξη βασικών προτάσεων της παρούσας υποενότητας θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα των *Funderlic* και *Plemmons* [4] .

Λήμμα 3.1.1 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \geq 2$, ένας Μ-πίνακας, και υποθέτουμε ότι*

$$y^T A \geq 0, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o \ y^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] > 0.$$

(Σημείωση: Την ιδιότητα αυτή ικανοποιούν οι Μ-πίνακες που είναι α) μη-ιδιόμορφοι, ή β) μη-αναγώγιμοι, ή γ) συμμετρικοί ιδιόμορφοι.)

Αν $a_{11} = 0$, θέτουμε

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ \frac{y_1}{y_2} & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

και αν $a_{11} \neq 0$, *θέτουμε*

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & O \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, σε κάθε περίπτωση, ο $\widetilde{A} = {L_1}^{-1}A$ *και ο* $\widetilde{A}_1$*, που προκύπτει από τον* $\widetilde{A}$*, αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του, είναι M-πίνακες. Επίσης, ο* $\widetilde{A}_1$ *ικανοποιεί την*

$$\widetilde{y}^T \widetilde{A}_1 > 0, \ \widetilde{y}^T = [y_2 \dots y_n],$$

και διατηρεί όλες τις προαναφερθείσες ιδιότητες του A.

Σημείωση: Το παραπάνω λήμμα μπορεί τετριμμένα να δειχτεί ότι ισχύει και στην περίπτωση όπου η υπόθεση $y^T A \geq 0$ αντικαθίσταται από την $Ay \geq 0$. (βλ. *Funderlic* και *Plemmons* [4])

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω* $A \in I\!R^{n,n}$ *μη-ιδιόμορφος M-πίνακας, που είναι διαχωρισμένος σε blocks ως εξής:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

και αποτελεί τον πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.1) του οποίου επιζητούμε τη λύση. Αν εφαρμόσουμε από τα αριστερά του A *τον προρρυθμιστή πίνακα* P *της μορφής:*

$$P = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1}A_{11}^{-1} & O_{p2} & \dots & I_{pp} \end{bmatrix} = Q + S,$$

όπου

$$Q = \operatorname{diag}(L_{11}^{-1}, I_{22}, \dots, I_{pp}), \ I_{ii} \in I\!R^{n_i,n_i}, \ i = 2(1)p,$$

και

$$S = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & O_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1}A_{11}^{-1} & O_{p2} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix},$$

τότε προκύπτει ένα ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα το:

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b} \;\; \mu\varepsilon \;\; \widetilde{A} = PA \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \widetilde{b} = Pb, \tag{3.3}$$

όπου ο πίνακας $\widetilde{A}$ του ισοδύναμου συστήματος είναι ένας μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας.

Απόδειξη:
Βασιζόμενοι στη Σημείωση που προηγείται, εφαρμόζουμε την διαδικασία που περιγράφεται στο Λήμμα 3.1.1 (με την υπόθεση $Ay \geq 0$ για $y > 0$ για τον πίνακα Α) n_1 φορές με οδηγούς τα διαγώνια στοιχεία από τον A_{11}. Καταλήγουμε έτσι στο μη-αρνητικό προρρυθμιστή πίνακα P, όπως τον ορίσαμε παραπάνω, τον οποίο και χρησιμοποιούμε για την κατευθείαν απαλοιφή των n_1 πρώτων στηλών του Α (ο P είναι μη-αρνητικός ως άθροισμα των μη-αρνητικών πινάκων Q και S).

Πολλαπλασιάζοντας τον Α από τα αριστερά επί τον P έχουμε τον $\widetilde{A} = PA$ (ουσιαστικά τον $\widetilde{A}$ του Λήμματος 3.1.1, μετά την εφαρμογή του λήμματος n_1 φορές). Επομένως, με βάση το Λήμμα 3.1.1 ο $\widetilde{A}$ θα είναι Μ-πίνακας. Πράγματι, τα block στοιχεία του $\widetilde{A}$ είναι τα :

$$\widetilde{A}_{ij} = \begin{cases} L_{11}^{-1}A_{1j}, & j \in N = \{1, \cdots, p\} \\ O_{i1}, & i \in N_1 \equiv N\backslash\{1\} \\ A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j}, & i, j \in N_1. \end{cases}$$

Από τη μορφή τους προκύπτει ότι ο $\widetilde{A}$ είναι Ζ-πίνακας, γιατί:

$\widetilde{A}_{i1} = O_{i1} (\leq 0)$, για $i \in N_1$,

$\widetilde{A}_{ij} = A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j} (\leq 0)$, για $i, j \in N_1,\ i \neq j$.

Παρατηρούμε επίσης ότι διαγώνια στοιχεία των $\widetilde{A}_{ii}$ είναι θετικά. Αυτό αποδεικνύεται αρκεί να παρατηρήσουμε τα εξής:
Η κλασική απαλοιφή $Gauss$ των $n_1 - 1$ πρώτων στηλών του A_{11}, πετυχαίνεται πολλαπλασιάζοντας τον A_{11} από αριστερά επί τον αντίστροφο του πίνακα

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{a_{n_1,1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n_1,2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n_1,3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \dots & \frac{a_{n_1,n_1-1}^{(n_1-1)}}{a_{n_1-1,n_1-1}^{(n-1)}} & 1 \end{bmatrix},$$

όπου τα πηλίκα

$$\frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} = m_{jk}, \;\; \mu\varepsilon \;\; k = 1(1)n_1 - 1, \;\; j = k + 1(1)n_1,$$

αποτελούν τους πολλαπλασιαστές στην απαλοιφή του $Gauss$ και

$$a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - m_{jk}a_{kl}^{(k)},\ \mu\varepsilon\ j = k+1(1)n_1,\ l = k+1(1)n_1,$$

τα στοιχεία του $A_{11}^{(k+1)}$ (με $A_{11}^{(1)} = A_{11}$) μετά το k βήμα της απαλοιφής. Ο άνω τριγωνικός πίνακας που προκύπτει είναι τότε ο U_{11}, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $L_{11}U_{11} = A_{11}$. Χρησιμοποιώντας τον U_{11} απαλείφουμε τις n_1 πρώτες στήλες των γραμμών n_1+1 έως n του A, έχουμε σαν block (i,i)-στοιχείο του $\widetilde{A}$ το $A_{ii} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i},\ i \in N_1$.
Επειδή έχουμε $n_1 - 1$ βήματα απαλοιφής, με εφαρμογή του Λήμματος 3.1.1, έπεται ότι ο $\widetilde{A}$ είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, οπότε από το Θεώρημα 2.3.2, οι διαγώνιοι υποπίνακες του $\widetilde{A}$ είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες και άρα τα διαγώνια στοιχεία τους είναι θετικά.
Ισοδύναμα, αφού ο A είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, από το Θεώρημα 2.3.2 υπάρχει $y > 0$, με $y \in I\!R^n$ (που έχει τον ίδιο block διαχωρισμό με τον A), τέτοιο ώστε $Ay > 0$, έπεται ότι $PAy = \widetilde{A}y > 0$. Άρα, ο $\widetilde{A}$ είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, οπότε τα διαγώνια blocks του είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες με διαγώνια στοιχεία θετικά. □

Για να εφαρμόσουμε οποιαδήποτε από τις κλασικές επαναληπτικές μεθόδους χρησιμοποιούμε διάφορες διασπάσεις του πίνακα $\widetilde{A}$. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τους παρακάτω πίνακες :

$$\widehat{D} = \mathrm{diag}(O_{11}, A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \cdots, A_{p1}A_{11}^{-1}A_{1p}) \geq 0 \tag{3.4}$$

$$SU = \widehat{L} + \widehat{D} + \widehat{U}, \tag{3.5}$$

όπου οι

$$\widehat{L} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & A_{p1}A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.6}$$

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & O_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{13} & \dots & A_{21}A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} & \dots & A_{31}A_{11}^{-1}A_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & O_{p3} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.7}$$

είναι αντίστοιχα οι αυστηρά άνω και κάτω τριγωνικές συνιστώσες-πίνακες του SU.

Αν είναι
$$A = D - L - U, \tag{3.8}$$
η συνηθισμένη διάσπαση του A, όπου

$$D = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}),$$

$$L = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \ldots & O_{1p} \\ -A_{21} & O_{22} & \ldots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1} & -A_{p2} & \ldots & O_{pp} \end{bmatrix}$$

και
$$U = \begin{bmatrix} O_{11} & -A_{12} & \ldots & -A_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & \ldots & -A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ O_{p1} & O_{p2} & \ldots & O_{pp} \end{bmatrix},$$

τότε, έχοντας υπόψη τις (3.5), (3.8), θεωρούμε τις παρακάτω διασπάσεις του $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = (Q+S)(D-L-U) = \begin{cases} QD - (PL - SD + \widehat{L} + \widehat{D} + QU + \widehat{U}) \\ (QD - \widehat{D}) - (PL - SD + \widehat{L} + QU + \widehat{U}) \end{cases}$$

Συνεπώς, οι block επαναληπτικοί πίνακες των Jacobi και Gauss-Seidel καθώς και οι block επαναληπτικοί πίνακες "τύπου" Jacobi και Gauss-Seidel, που αντιστοιχούν στις δύο παραπάνω διασπάσεις είναι αντίστοιχα οι:

$$B = D^{-1}(L+U) \ (\gamma\iota\alpha \ \tau o\nu \ A) \tag{3.9}$$
$$B' = (QD)^{-1}(PL - SD + \widehat{L} + \widehat{D} + QU + \widehat{U} \tag{3.10}$$
$$B'' = (QD - \widehat{D})^{-1}(PL - SD + \widehat{L} + QU + \widehat{U}) \tag{3.11}$$
$$H = (D-L)^{-1}U \ (\gamma\iota\alpha \ \tau o\nu \ A) \tag{3.12}$$
$$H' = (P(D-L) - \widehat{L})^{-1}(\widehat{D} + QU + \widehat{U}) \tag{3.13}$$
$$H'' = (P(D-L) - \widehat{L} - \widehat{U})^{-1}(QU + \widehat{U}). \tag{3.14}$$

Θεώρημα 3.1.2 *Υποθέτοντας ότι ο A είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*
$$\rho(B'') \leq \rho(B') < 1, \tag{3.15}$$
$$\rho(H'') \leq \rho(H') < \rho(H) < 1. \tag{3.16}$$

Επίσης, υπάρχει, ένα $y \in I\!R^n$, με $y \geq 0$, τέτοιο ώστε:

$$B'y \leq By. \tag{3.17}$$

Οι σχέσεις που συνδέουν τις φασματικές ακτίνες των επαναληπτικών πινάκων των Jacobi και Gauss-Seidel καθώς και των "τύπου" Jacobi και Gauss-Seidel μεταξύ τους δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho(H'') \leq \rho(B''),\ \rho(H') \leq \rho(B'),\ \rho(H) < \rho(B) < 1. \tag{3.18}$$

Απόδειξη:

Απόδειξη των ανισοτήτων (3.15):

Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε τις διασπάσεις που μας δίνουν τους B' και B''. Ο πίνακας

$$M'^{-1} = (QD)^{-1} = \mathrm{diag}(U_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \cdots, A_{pp}^{-1})$$

είναι μη-αρνητικός από Θεώρημα 2.3.2 (1),(4). Μη-αρνητικός είναι και ο πίνακας

$$N' = PL - SD + \widehat{L} + \widehat{D} + QU + \widehat{U}$$

αφού έχει τη μορφή:

$$N' = \begin{bmatrix} O_{11} & -L_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -L_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -\widetilde{A}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & -\widetilde{A}_{p2} & \dots & A_{p1}A_{11}^{-1}A_{1p} \end{bmatrix}.$$

Άρα, από τον Ορισμό 2.3.2, η διάσπαση που μας δίνει τον B' είναι κανονική.

Επίσης, ο

$$M''^{-1} = (QD - \widehat{D})^{-1} = \mathrm{diag}(U_{11}^{-1}, \widetilde{A}_{22}^{-1}, \cdots, \widetilde{A}_{pp}^{-1}),$$

είναι μη-αρνητικός πίνακας. Αυτό γιατί, οι U_{11} και $\widetilde{A}_{ii} = A_{ii} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i}$ είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες, άρα οι αντίστροφοι τους είναι μη-αρνητικοί, από το Θεώρημα 2.3.2 (1),(6).

Όπως παραπάνω, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο

$$N'' = PL - SD + \widehat{L} + QU + \widehat{U}$$

είναι μη-αρνητικός, αφού έχει τη μορφή:

$$N'' = \begin{bmatrix} O_{11} & -L_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -L_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & -\widetilde{A}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & -\widetilde{A}_{p2} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix}$$

και άρα η διάσπαση που μας δίνει τον B'' είναι κανονική. Έτσι, από το Θεώρημα 2.3.2(5), έπεται ότι:

$$\rho(B') < 1, \ \rho(B'') < 1.$$

Συγκρίνοντας τους M'^{-1} και M''^{-1} διαπιστώνουμε ότι ισχύει $M''^{-1} \geq M'^{-1}$, και άρα από το Θεώρημα του *Woźnicki* (Θεώρημα 2.3.4) έχουμε ότι

$$\rho(B'') \leq \rho(B'). \tag{3.19}$$

<u>Απόδειξη των ανισοτήτων (3.16):</u>

Για την απόδειξη της $\rho(H) < 1$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αφού ο A είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας, ο πίνακας $D-L$ είναι επίσης μη-ιδιόμορφος M-πίνακας (από το Θεώρημα 2.3.1), οπότε ο αντίστροφος του είναι μη-αρνητικός πίνακας. Ο U είναι κι αυτός μη-αρνητικός πίνακας, άρα η διάσπαση $(D-L)-U$ είναι κανονική διάσπαση (από τον Ορισμό 2.3.2). Συνεπώς, ο $H = (D-L)^{-1}U$ είναι συγκλίνων, όπως προκύπτει και από το Θεώρημα 2.3.2 (5).

Για την απόδειξη των $\rho(H'') \leq \rho(H') \leq \rho(H)$ θεωρούμε τις εξής τρεις διασπάσεις του $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{cases} M - N = P(D-L) - PU \\ M' - N' = \Big(P(D-L) - \widehat{L}\Big) - (\widehat{D} + QU + \widehat{U}) \\ M'' - N'' = \Big(P(D-L) - \widehat{L} - \widehat{D}\Big) - (QU + \widehat{U}) \end{cases}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$M = \begin{bmatrix} U_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & O_{1p} \\ O_{21} & A_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & A_{p2} & A_{p3} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

είναι μη-ιδιόμορφος Z-πίνακας.

Πράγματι, οι $U_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp}$ είναι μη-ιδιόμορφοι M-πίνακες (τα διαγώνια στοιχεία τους είναι θετικά) και οι $A_{ij}, \ i \in N_1 \backslash \{2\}, \ j \in N_1, \ j < i$, είναι μη-θετικοί. Οπότε όλα τα εκτός διαγώνιου στοιχεία του M είναι μη-θετικά.

Επίσης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M^{-1} &= ((Q+S)(D-L))^{-1} = (D-L)^{-1}(Q+S)^{-1} \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}(Q+S)^{-1} \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}(QD + SD)^{-1} \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}\Big(I + (QD)^{-1}SD\Big)(QD)^{-1} \\ &= (I + D^{-1}L + \dots + (D^{-1}L)^{p-1})(I-K)(QD)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \Big(I + (I + D^{-1}L + \cdots + (D^{-1}L)^{p-2})(D^{-1}L - K)\Big)\,(QD)^{-1},$$

όπου $K = (QD)^{-1}SD$ και $(D^{-1}L)^{p-1}K = 0$. Ο M^{-1} είναι μη-αρνητικός πίνακας, γιατί οι $(QD)^{-1}$, $I + D^{-1}L + \cdots + (D^{-1}L)^{p-2}$ και

$$D^{-1}L - K = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \ldots & O_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \ldots & O_{2p} \\ O_{31} & -A_{33}^{-1}A_{32} & O_{33} & \ldots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & -A_{pp}^{-1}A_{p2} & -A_{pp}^{-1}A_{p3} & \ldots & O_{pp} \end{bmatrix}$$

είναι μη-αρνητικοί πίνακες. Οπότε η διάσπαση $M - N$ είναι κανονική άρα ο $B = M^{-1}N$ είναι συγκλίνων. Ομοίως ο

$$M' = \begin{bmatrix} U_{11} & O_{12} & O_{13} & \ldots & O_{1p} \\ O_{21} & A_{22} & O_{23} & \ldots & O_{2p} \\ O_{31} & \widetilde{A}_{32} & A_{33} & \ldots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & \widetilde{A}_{p2} & \widetilde{A}_{p3} & \ldots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

είναι ιδιόμορφος Z-πίνακας, γιατί οι $U_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ είναι μη-ιδιόμορφοι M-πίνακες (τα διαγώνια στοιχεία τους είναι θετικά) και οι $\widetilde{A}_{ij}, i \in N_1\backslash\{2\},\ j \in N_1,\ j < i$, είναι μη-θετικοί πίνακες. Οπότε, όλα τα εκτός διαγώνιου στοιχεία του M' είναι μη-θετικά.
Παρατηρούμε ότι :

$$M' = M - \widehat{L} = M(I - M^{-1}\widehat{L}).$$

Θέτουμε $\overline{L} = M^{-1}\widehat{L}$ και έχουμε ότι $M' = M(I - \overline{L})$. Άρα,

$$M'^{-1} = (I - \overline{L})^{-1}M^{-1} = (I + \overline{L} + \ldots + \overline{L}^{p-1})M^{-1} \geq 0.$$

Οπότε, από το Θεώρημα 2.3.2(4), έπεται ότι ο M' είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας. Επίσης, ο N' είναι μη-αρνητικός. Οπότε, η $M' - N'$ είναι κανονική διάσπαση και ο $B' = M'^{-1}N'$ είναι συγκλίνων.
Τέλος, ο πίνακας

$$M'' = \begin{bmatrix} U_{11} & O_{12} & O_{13} & \ldots & O_{1p} \\ O_{21} & \widetilde{A}_{22} & O_{23} & \ldots & O_{2p} \\ O_{31} & \widetilde{A}_{32} & \widetilde{A}_{33} & \ldots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & \widetilde{A}_{p2} & \widetilde{A}_{p3} & \ldots & \widetilde{A}_{pp} \end{bmatrix}$$

είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, γιατί προκύπτει από τον $\widetilde{A}$ θέτοντας μηδέν κάποια στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου του. Άρα, από το Θεώρημα 2.3.1, ο M''^{-1} είναι μη-αρνητικός πίνακας. Ο N'' είναι μη-αρνητικός, άρα η διάσπαση $M'' - N''$ είναι κανονική, και από το Θεώρημα 2.3.2(5), ο $B'' = M''^{-1}N''$ είναι συγκλίνων.
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει

$$N'' = QU + \widehat{U} \leq N' = \widehat{D} + QU + \widehat{U} \leq N = \widehat{D} + QU + \widehat{U} + \widehat{L}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 2.3.3 έχουμε τις ανισότητες

$$\rho(H'') \leq \rho(H') \leq \rho(H).$$

<u>Απόδειξη των (3.17):</u>
<u>Καταρχάς βρίσκουμε</u> τις εκφράσεις των block στοιχείων των B, B', B''.Τα στοιχεία του B είναι τα:

$$\begin{cases} B_{ii} = 0,\ i \in N \\ B_{ij} = -A_{ii}^{-1}A_{ij},\ i,j \in N,\ i \neq j \end{cases}.$$

Τα στοιχεία του B' είναι τα:

$$\begin{cases} B'_{ij} = A_{ii}^{-1}A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i} = B_{i1}B_{1i},\ i \in N_2 \\ B'_{ii} = 0,\ i \in N \backslash N_2 \\ B'_{ij} = -A_{ii}^{-1}A_{ij} = B_{ij},\ i \in N \backslash N_2,\ j \in N_1, j \neq i \\ B'_{i1} = 0,\ i \in N_2 \\ B'_{ij} = -A_{ii}^{-1}A_{ij} + A_{ii}^{-1}A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i} = B_{ij} + B_{i1}B_{1i}, \\ \ i \in N_2,\ j \in N_1,\ j \neq i \end{cases}.$$

Τα στοιχεία του B'' είναι τα:

$$\begin{cases} B''_{ii} = 0,\ i \in N \\ B''_{ij} = -A_{ii}^{-1}A_{ij} = B_{ij}, i \in N \backslash N_2,\ j \in N_1,\ j \neq i \\ B''_{i1} = 0,\ i \in N_2 \\ B''_{ij} = (I_{ii} - A_{ii}^{-1}A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j})(-A_{ii}^{-1}A_{ij} + A_{ii}^{-1}A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j}) \\ = (I_{ii} - B_{i1}B_{1i})^{-1}(B_{ij} + B_{i1}B_{1i}),\ i \in N_2,\ j \in N_1,\ j \neq i \end{cases}.$$

Οπότε από το Θεώρημα 2.1.3(2), αφού ο $B \geq 0$, έπεται ότι υπάρχει ένα $y \in I\!R^n$ (με τον ίδιο block διαχωρισμό με τον πίνακα Α) με $y \geq 0$, τέτοιο ώστε $By = \rho(B)y$.

Εξισώνοντας τις i-οστές block γραμμές $i \in N_2$, των διανυσμάτων των δυο μελών, έχουμε διαδοχικά:

$$\rho(B)y_i \;\; = \;\; \sum_{j=1, j\neq i}^{p} B_{ij}y_j$$

$$
\begin{aligned}
&= B_{i1}y_1 + \sum_{j=2, j\neq i}^{p} B_{ij}y_j \\
&= (B'_{i1} + B_{i1})y_1 + \sum_{j=2, j\neq i}^{p} (B'_{ij} - B_{ij})y_j + B'_{ii}y_i - B'_{ii}y_i \\
&= \sum_{j=1}^{p} B'_{ij}y_j - B_{i1} \sum_{j=2, j\neq i}^{p} B_{1j}y_j - B_{i1}B_{1i}y_i + B_{i1}y_1 \\
&= \sum_{j=1}^{p} B'_{ij}y_j - B_{i1} \sum_{j=2}^{p} B_{1j}y_j + B_{i1}y_1.
\end{aligned}
$$

Αλλά $\rho(B)y_1 = \sum_{j=2}^{p} B_{1j}y_j$, συνεπώς:

$$
\begin{aligned}
\rho(B)y_i &= \sum_{j=1}^{p} B'_{ij}y_j - B_{i1}\left(\frac{1}{\rho(B)} - 1\right)\sum_{j=2}^{p} B_{1j}y_j \\
&\geq \sum_{j=1}^{p} B'_{ij}y_j.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\sum_{j=1}^{p} B'_{ij}y_j \leq \sum_{j=1}^{p} B_{ij}y_j
$$

(τα μέλη της οποίας είναι διανύσματα διάστασης n_i). Οπότε έχουμε:

$$
B'y \leq By.
$$

Απόδειξη των (3.18):
Θεωρούμε τις διασπάσεις που μας δίνουν τους H'', B'', H', B' (οι οποίες είναι κανονικές διασπάσεις):

$$
\widetilde{A} = \begin{cases} QD - (PL - SD + QU + \widehat{L} + \widehat{D} + \widehat{U}) \\ (QD - \widehat{D}) - (PL - SD + QU + \widehat{L} + \widehat{U}) \end{cases}
$$

(μας δίνουν τους B' και B''),

$$
\widetilde{A} = \begin{cases} \left(P(D-L) - \widehat{L}\right) - (\widehat{D} + QU + \widehat{U}) \\ \left(P(D-L) - \widehat{L} - \widehat{D}\right) - (QU + \widehat{U}) \end{cases}
$$

(μας δίνουν τους H' και H'').
Υπενθυμίζεται ότι ο A είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας και ισχύουν οι σχέσεις:

$$
PL - SD + QU + \widehat{L} + \widehat{D} + \widehat{U} \geq \widehat{D} + QU + \widehat{U}
$$

και

$$PL - SD + QU + \widehat{L} + \widehat{U} \geq QU + \widehat{U}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 2.3.3, έπεται ότι ισχύουν,

$$\rho(H') \leq \rho(B'),\ \rho(H'') \leq \rho(B'').$$

Οι σχέσεις $\rho(H) \leq \rho(B) < 1$ προκύπτουν από την άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος των Stein-Rosenberg. □

Ξεκινώντας από τον block διαχωρισμό (3.2) για τον A, μπορούμε επίσης να βρούμε σχέσεις ανάλογες με εκείνες του προηγούμενου θεωρήματος αν αντί της συνηθισμένης διάσπασης του A σε $D - L - U$, αλλά με βάση αυτή, χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση:

$$A = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \frac{1}{\omega}[(1-\omega)D + \omega U],\ \mu\varepsilon\ 0 < \omega \leq 1.$$

Εφαρμόζοντας τον προρρυθμιστή P από τα αριστερά του A θεωρούμε τις εξής διασπάσεις του $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \frac{1}{\omega}[QD - \omega(PL - SD + \widehat{L})] - \frac{1}{\omega}[(1-\omega)QD + \omega(\widehat{D} + QU + \widehat{U})] \\ \frac{1}{\omega}[(QD - \widehat{D}) - \omega(PL - SD + \widehat{L})] - \frac{1}{\omega}[(1-\omega)(QD - \widehat{D}) + \omega(QU + \widehat{U})] \end{cases}$$

(Οι $\widehat{D}$, $\widehat{L}$, $\widehat{U}$ είναι οι πίνακες που έχουμε ορίσει στις (3.4), (3.6), (3.7), αντίστοιχα.)
Τότε οι επαναληπτικοί πίνακες της block SOR και “τύπου” SOR που συνδέονται με τους A και $\widetilde{A}$ είναι οι:

$$\mathcal{L}_{\omega_A} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] \tag{3.20}$$

$$\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},1}} = [QD - \omega(PL - SD + \widehat{L})]^{-1}[(1-\omega)QD + \omega(\widehat{D} + QU + \widehat{U})] \tag{3.21}$$

$$\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}} = [(QD - \widehat{D}) - \omega(PL - SD + \widehat{L})]^{-1}[(1-\omega)(QD - \widehat{D}) + \omega(QU + \widehat{U})]. \tag{3.22}$$

Θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.3 *Έστω A όπως στο Θεώρημα 3.1.1. Τότε, για τον block επαναληπτικό πίνακα της SOR καθώς και για τους block επαναληπτικούς πίνακες “τύπου” SOR ισχύουν οι εξής σχέσεις:*

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_A}) < 1, \tag{3.23}$$

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},1}}) < 1, \tag{3.24}$$

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}}) < 1. \tag{3.25}$$

Επίσης, θεωρώντας ω_1, ω_2, με $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq 1$, ισχύουν οι σχέσεις

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1A}}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2A}}) < 1, \tag{3.26}$$

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1_{\widetilde{A},1}}}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2_{\widetilde{A},1}}}) < 1, \tag{3.27}$$

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1_{\widetilde{A},2}}}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2_{\widetilde{A},2}}}) < 1. \tag{3.28}$$

Αν ο A είναι επιπλέον μη-αναγώγιμος πίνακας, οι ανισότητες (3.26), (3.27), (3.28) είναι αυστηρές.
Τέλος, υπάρχει ένα διάνυσμα $x \in I\!R^n$, $x \geq 0$, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}} x \leq \mathcal{L}_{\omega_A} x \ \text{με}\ 0 < \omega \leq 1. \tag{3.29}$$

Απόδειξη:
Απόδειξη της (3.23):
Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega_A} &= (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] \\ &= (I - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] \\ &= (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U]. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο $\mathcal{L}_{\omega_A}$ είναι ίσος με τον block επαναληπτικό πίνακα της SOR που συνδέεται με τον $D^{-1}A = I - D^{-1}L - D^{-1}U$, τον $\mathcal{L}_{\omega_{D^{-1}A}}$.
Σημείωση: Ο $D^{-1}A$ διατηρεί τις ιδιότητες του A. Είναι δηλαδή και αυτός ένας μη-ιδιόμορφος M-πίνακας.

Η διάσπαση που μας δίνει τον $\mathcal{L}_{\omega_{D^{-1}A}} \equiv \mathcal{L}_{\omega_A}$ είναι η

$$D^{-1}A = \frac{1}{\omega}(I - \omega D^{-1}L) - \frac{1}{\omega}[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U],$$

η οποία είναι κανονική διάσπαση. Πράγματι,

$$\begin{aligned} M_{D^{-1}A}^{-1} &= \omega(I - \omega D^{-1}L)^{-1} \\ &= \omega(I + \omega D^{-1}L + \cdots + (\omega D^{-1}L)^{p-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του Λήμματος 2.3.1, αφού $\rho(D^{-1}L) = 0 < 1$) και

$$N_{D^{-1}A} = \frac{1}{\omega}[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U] \geq 0.$$

Οπότε από το Θεώρημα 2.3.2(5) έπεται ότι

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_A}) < 1. \tag{3.30}$$

Απόδειξη των (3.26):
Θεωρώντας ω_1, ω_2 με $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq 1$, έχουμε

$$0 \leq N_{\omega_2} \leq N_{\omega_1},$$

με την ισότητα να εξαιρείται. Τότε, από το Θεώρημα 2.3.3 έπεται ότι:

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2A}}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1A}}) < 1. \tag{3.31}$$

Αν ο A είναι μη-αναγώγιμος τότε, από το Θεώρημα 2.3.4 ισχύει ότι

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2A}}) < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1A}}) < 1. \tag{3.32}$$

Απόδειξη της (3.24):
Εφαρμόζουμε τον P στο αρχικό σύστημα και θεωρούμε ως προρρυθμιστή του $\widetilde{A} = M' - (M' - A) = M' - N'$ τον πίνακα:

$$\begin{aligned}
M' &= \frac{1}{\omega}[QD - \omega(PL - SD + \widehat{L})] \\
&= \frac{1}{\omega}[QD - \omega(PL - SD)] - \widehat{L} \\
&= M_1 - \widehat{L} \\
&= M_1(I - M_1^{-1}\widehat{L}) \\
&= M_1(I - \overline{L}).
\end{aligned}$$

(Ο $\overline{L}$ είναι ένας αυστηρά κάτω τριγωνικός πίνακας, μη-αρνητικός με $\rho(\overline{L}) = 0 < 1$.)

Ο πίνακας

$$M_1 = \begin{bmatrix} U_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & O_{1p} \\ O_{21} & A_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & \omega A_{32} & A_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & \omega A_{p2} & \omega A_{p3} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix} \left(= \frac{1}{\omega}[QD - \omega(PL - SD)]\right)$$

είναι μη-ιδιόμορφος Z-πίνακας, αφού τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του είναι μη-θετικά. Επίσης,

$$\begin{aligned}
M_1^{-1} &= \left(\frac{1}{\omega}[QD-\omega(PL-SD)]\right)^{-1}\\
&= \omega[I-\omega(QD)^{-1}(PL-SD)]^{-1}(QD)^{-1}\\
&= \omega(I-\omega K_1)^{-1}(QD)^{-1}\\
&= \omega\left(I+\omega K_1+(\omega K_1)^2+\cdots+(\omega K_1)^{p-1}\right)(QD)^{-1}
\end{aligned}$$

όπου $K_1=(QD)^{-1}(PL-SD)$ (με μη-μηδενικά blocks τα $-A_{ii}^{-1}A_{ij}$, για $i\in N\backslash\{2\},\ j\in N_1,\ j<i$) και $\rho(\omega K_1)<1$. Οπότε $M_1^{-1}\geq 0$ και έτσι:

$$\begin{aligned}
M'^{-1} &= (I-\overline{L})^{-1}M_1^{-1}\\
&= (I+\overline{L}+\cdots+\overline{L}^{p-1})M_1^{-1}\geq 0.
\end{aligned}$$

Οπότε, ο M' είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας. Τότε ο επαναληπτικός πίνακας της block "τύπου" SOR είναι ο:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},1}} &= [QD-\omega(PL-SD+\widehat{L})]^{-1}[(1-\omega)QD+\omega(\widehat{D}+QU+\widehat{U})]\\
&= [I-\omega(QD)^{-1}(PL-SD+\widehat{L})]^{-1}(QD)^{-1}[(1-\omega)QD+\omega(\widehat{D}+QU+\widehat{U})]\\
&= [I-\omega(QD)^{-1}(PL-SD+\widehat{L})]^{-1}[(1-\omega)I+\omega(QD)^{-1}(\widehat{D}+QU+\widehat{U}],
\end{aligned}$$

ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα της SOR που αντιστοιχεί στον $(QD)^{-1}\widetilde{A}$, τον $\mathcal{L}_{\omega_{(QD)^{-1}\widetilde{A}}}$. Η διάσπαση που δίνει τον $\mathcal{L}_{\omega_{(QD)^{-1}\widetilde{A}}}\equiv\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},1}}$ είναι κανονική, γιατί :

$$\begin{aligned}
M_{(QD)^{-1}\widetilde{A}}^{-1} &= \omega[I-\omega(QD)^{-1}(PL-SD+\hat{L})]^{-1}\\
&= \omega(I-\omega K_2)^{-1}\\
&= \omega(I+\omega K_2+(\omega K_2)^2+\cdots+(\omega K_2)^{p-1})\geq 0
\end{aligned}$$

όπου ο $K_2=(QD)^{-1}(PL-SD+\widehat{L})$, δηλαδή ο

$$K_2=\begin{bmatrix}
O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & & O_{1p}\\
O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & & O_{2p}\\
O_{31} & -\omega A_{33}^{-1}\widetilde{A}_{32} & O_{33} & \dots & & O_{3p}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\
O_{p1} & -\omega A_{pp}^{-1}\widetilde{A}_{p2} & -\omega A_{pp}^{-1}\widetilde{A}_{p3} & \dots & -\omega A_{pp}^{-1}\widetilde{A}_{p,p-1} & O_{pp}
\end{bmatrix}$$

έχει $\rho(\omega K_2)<1$ και

$$N_{(QD)^{-1}\widetilde{A}}=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)I+\omega(QD)^{-1}(\widehat{D}+QU+\widehat{U})]\geq 0.$$

Οπότε, από το Θεώρημα 2.3.2(5)

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},1}}) < 1. \tag{3.33}$$

Απόδειξη των (3.27):
Συνεπώς, θεωρώντας $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq 1$, έχουμε ότι:

$$0 \leq N_{\omega_2} \leq N_{\omega_1}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 2.3.3

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_2}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_1}) < 1. \tag{3.34}$$

Αν ο A είναι μη-αναγώγιμος οι παραπάνω ανισότητες είναι γνήσιες, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.4 .
Απόδειξη της (3.25):
Αν θεωρήσουμε αντί της διάσπασης του $\widetilde{A}$ σε :

$$\widetilde{A} = \frac{1}{\omega}[QD - \omega(PL - SD + \widehat{L})] - \frac{1}{\omega}[(1-\omega)QD + \omega(\widehat{D} + QU + \widehat{U})]$$

τη διάσπαση:

$$\widetilde{A} = M'' - (M'' - A),$$

με $M'' = \frac{1}{\omega}[(QD - \widehat{D}) - \omega(PL - SD + \widehat{L})]$. Ο M'' είναι μη-ιδιόμορφος M-πίνακας, γιατί προκύπτει από τον $\widetilde{A}$ θέτοντας κάποια στοιχεία του εκτός της κυρίας διαγωνίου του ίσα με μηδέν. Δηλαδή, $M''^{-1} \geq 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$\mathcal{L}_{\omega_{(QD-\widehat{D})^{-1}\widetilde{A}}} = [I - \omega(QD - \widehat{D})^{-1}(PL - SD + \widehat{L})]^{-1}(QD - \widehat{D})^{-1}$$

$$[(1-\omega)(QD - \widehat{D}) + \omega(QU + \widehat{U})] = \mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}}.$$

Επιπρόσθετα,

$$M^{-1}_{\omega_{(QD-\widehat{D})^{-1}\widetilde{A}}} = \omega[I - \omega(QD - \widehat{D})^{-1}(PL - SD + \widehat{L})]^{-1} \geq 0$$

και

$$N_{\omega_{(QD-\widehat{D})^{-1}\widetilde{A}}} = \frac{1}{\omega}[(1-\omega)I + \omega(QD - \widehat{D})^{-1}(QU + \widehat{U})] \geq 0.$$

Η αντίστοιχη διάσπαση είναι τότε κανονική, οπότε από το Θεώρημα 2.3.2(5) ισχύει:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}}) < 1. \tag{3.35}$$

Απόδειξη των (3.28):

Αν θεωρήσουμε όπως παραπάνω ω_1, ω_2 με $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq 1$, έπεται ότι $0 \leq N_{\omega_2} \leq N_{\omega_1}$ και άρα, από το Θεώρημα 2.3.3, έπεται ότι ισχύει

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{2_{\widetilde{A},2}}}) \leq \rho(\mathcal{L}_{\omega_{1_{\widetilde{A},2}}}) < 1. \tag{3.36}$$

Στην περίπτωση που ο A είναι μη-αναγώγιμος, από το Θεώρημα 2.3.4 διαπιστώνουμε ότι οι ανισότητες είναι γνήσιες.

Απόδειξη της (3.29):

Η σχέση (3.29) μπορεί να αποδειχθεί αν βασιστούμε σε μια παραλλαγή του θεωρήματος των Stein-Rosenberg, η οποία δίνεται στο ακόλουθο λήμμα ($Milas-zewicz$, [5]).

Λήμμα 3.1.2 *Αν $V, T \in I\!R^{n,n}$ με $V, T \geq 0$ για τους οποίους ισχύουν $\rho(V) < \rho(V+T)$, τότε η συνάρτηση $\rho(V+tT)$ σα συνάρτηση του $t \in [0,\infty)$ δεν είναι φραγμένη.*
Επίσης, αν $\rho(V) < 1$, υπάρχει μοναδικό $t_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\rho(V + t_1 T) = 1$. Το t_1 ικανοποιεί και τη $\rho((I-V)^{-1}T) = \frac{1}{t_1}$.

Θεωρούμε σα $V = \omega D^{-1}L$ και σαν $T = (1-\omega)I + \omega D^{-1}U$. (Σημείωση: Αν $\omega = 1$, οι V, T γίνονται $V = D^{-1}L$, $T = D^{-1}U$ και $V+T = D^{-1}(L+U) = B$, άρα $0 < \rho(B)$, η οποία δεν ισχύει παρά μόνο στην περίπτωση που $\rho(L+U) = 0$). Έχουμε, λοιπόν, ικανοποιήση των υποθέσεων του Λήμματος 3.1.2 και άρα υπάρχει $t_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\rho(V + t_1 T) = 1$. Επειδή ο πίνακας $V + t_1 T$ είναι μη-αρνητικός υπάρχει ένα διάνυσμα $x \geq 0$ (ιδιοδιάνυσμα) που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του (από το Θεώρημα 2.1.3(2)) και άρα τέτοιο ώστε:

$$(\omega D^{-1}L + t_1((1-\omega)I + \omega D^{-1}U))x = x.$$

Από την ισότητα αυτή μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά, και μετά από πράξεις, τις σχέσεις

$$\mathcal{L}_{\omega,A}x = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)x = \frac{1}{t_1}x$$

$$\Leftrightarrow P(\omega L + t_1((1-\omega)D + \omega U))x = PDx$$

$$(P \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow [\omega PL + t_1(1-\omega)QD + t_1(1-\omega)SD + \omega t_1 QU + \omega t_1 SU]x = [QD + SD]x$$

$$\Leftrightarrow [(QD - \widehat{D}) - \omega(PL - SD + \widehat{L})]x =$$

$$t_1[(1-\omega)(QD - \widehat{D}) + \omega(QU + \widehat{U})]x + (t_1 - 1)[(1-\omega)SD + \omega\widehat{L} + \widehat{D}]x$$

$$\geq t_1[(1-\omega)(QD-\widehat{D})+\omega(QU+\widehat{U})]x.$$
$$\Big((t_1-1)[(1-\omega)SD+\omega\widehat{L}+\widehat{D}]x\geq 0\Big)$$

Ισχύει επομένως ότι:

$$\mathcal{L}_{\omega_{\widetilde{A},2}}x\leq\frac{1}{t_1}x=\mathcal{L}_{\omega_A}x. \tag{3.37}$$

□

Θεώρημα 3.1.4 *Έστω A όπως στο Θεώρημα 3.1.3 και επιπλέον A μη-αναγώγιμος. Τότε για τη φασματική ακτίνα του πίνακα της SOR που συνδέεται με τον A ισχύουν οι εξής σχέσεις:*

$$\lim_{\omega\to 0^+}\rho(\mathcal{L}_\omega)=1 \tag{3.38}$$

και

$$\lim_{\omega\to 1^-}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\rho(H),\ \ \text{για } \omega\in(0,1). \tag{3.39}$$

Επιπλέον, υπάρχει μοναδικό $\omega(=\omega_s)$ στο διάστημα $(0,1)$ για το οποίο $\rho(\mathcal{L}_{\omega_s})=\rho(B)$.

Απόδειξη:
Κατά την απόδειξη της σχέσης (3.26) παρατηρήσαμε ότι αν θεωρήσουμε $0<\omega_1<\omega_2\leq 1$ και αν ο αρχικός πίνακας είναι μη-αναγώγιμος, έχουμε μια αντίστροφη σχέση για τις φασματικές ακτίνες του πίνακα της SOR με παραμέτρους ω_1 και ω_2. Δηλαδή, $\rho(\mathcal{L}_{\omega_2})<\rho(\mathcal{L}_{\omega_1})$. Συνεπώς, η φασματική ακτίνα του πίνακα της SOR ως συνάρτηση του $\omega\in[0,1]$ είναι γνήσια φθίνουσα. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\omega\to 0^+}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\rho(I)=1$$

και

$$\lim_{\omega\to 1^-}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\rho((D-L)^{-1}U)=\rho(H).$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $0<\rho(H)<\rho(B)<1$ (Θεώρημα 3.1.1) και έχουμε αποδείξει ότι

$$0<\lim_{\omega\to 1^-}\rho(\mathcal{L}_\omega)=\rho(H)<\rho(B)<1=\lim_{\omega\to 0^+}\rho(\mathcal{L}_\omega),$$

με τη συνάρτηση $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ όπως αποδείχτηκε γνήσια φθίνουσα στο $[0,1]$, έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $\omega=\omega_s\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\rho(\mathcal{L}_{\omega_s})=\rho(B)$. □

3.2 Δεύτερη περίπτωση: A μη-ιδιόμορφος, p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ της ειδικής μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & A_{p,p-1} & A_{pp} \end{bmatrix} = D - (D - A) \tag{3.40}$$

με $p \geq 2$ και με A_{ii}, $i = 1(1)p$, μη-ιδιόμορφους πίνακες για $i = 1(1)p$ (άρα και ο $D = \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$ είναι επίσης μη-ιδιόμορφος).

Τότε ο επαναληπτικός πίνακας της block Jacobi δίνεται από την έκφραση:

$$B = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & B_{32} & O_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & B_{p,p-1} & O_{pp} \end{bmatrix} (= I - D^{-1}A), \tag{3.41}$$

όπου $B_{i,i-1} = -A_{ii}^{-1}A_{i,i-1},\ i = 1(1)p$, και $A_{10} \equiv A_{1p}$, $B_{10} = B_{1p}$.

Λόγω της μορφής του συμπεραίνουμε από τον Ορισμό 2.1.5 ότι ο B είναι ασθενώς κυκλικός δείκτη p και άρα ο A είναι p-κυκλικός, με βάση τον Ορισμό 2.4.1 . Όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, ο A και ο B είναι συνεπώς διατεταγμένοι.

Εφαρμόζουμε απαλοιφή της πρώτης block στήλης του A. Πολλαπλασιάζουμε δηλαδή από αριστερά τον A επί τον προρρυθμιστή

$$P = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O_{12} & O_{13} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{31} & O_{32} & I_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & O_{p,p-1} & I_{pp} \end{bmatrix}.$$

Προκύπτει τότε ο πίνακας

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} I_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{21} & A_{22} & O_{23} & \dots & -A_{21}A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & A_{p,p-1} & A_{pp} \end{bmatrix} = \widetilde{D} - (\widetilde{D} - \widetilde{A})$$

με τον $\widetilde{D}$ να ορίζεται με τρόπο ανάλογο του ορισμού του D. Συνεπώς, ο πίνακας της block Jacobi που αντιστοιχεί στον $\widetilde{A}$ είναι ο:

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & -A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{31} & -A_{33}^{-1}A_{32} & I_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & -A_{pp}^{-1}A_{p,p-1} & O_{pp} \end{bmatrix}$$

ή

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & B_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & B_{21}B_{1p} \\ O_{31} & B_{32} & O_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & B_{p,p-1} & O_{pp} \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Ο πίνακας $\widetilde{B}_1$, που προκύπτει από τον $\widetilde{B}$ αν παραλείψουμε την πρώτη block γραμμή και την πρώτη block στήλη του, είναι τότε ασθενώς κυκλικός δείκτη $p-1$ (από τον Ορισμό 2.1.5). Συνεπώς ο $\widetilde{A}_1$ (που προκύπτει από τον $\widetilde{A}$ όπως ο $\widetilde{B}_1$ από τον $\widetilde{B}$) είναι $(p-1)$-κυκλικός.

Μπορούμε τώρα να συσχετίσουμε τα φάσματα των B^p και $\widetilde{B}_1^{p-1}$ χρησιμοποιώντας το ακόλουθο λήμμα (βλ. $Young$ [2]).

Λήμμα 3.2.1 *Αν $E \in \mathbb{C}^{n,m}$ και $F \in \mathbb{C}^{m,n}$, τότε η $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του EF αν και μόνο αν λ είναι ιδιοτιμή του FE.*

Ειδικότερα, καταλήγουμε στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω A ένας p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας που έχει τη μορφή (3.40). Τότε, οι B^p και $\widetilde{B}_1^{p-1}$ έχουν τις ίδιες μη-μηδενικές ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα,*

$$\sigma(\widetilde{B}_1^{p-1})\backslash\{0\} \equiv \sigma(B^p)\backslash\{0\}. \tag{3.43}$$

Απόδειξη:
Αν υψώσουμε τον $\widetilde{B}_1$ στην $p-1$ δύναμη μπορούμε να βρούμε ότι

$$\widetilde{B}_1^{p-1} = \begin{bmatrix} C_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ O_{22} & C_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & C_{pp} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

όπου $C_{ii} = B_{i,i-1}B_{i-1,i-2}\ldots(B_{21}B_{1p})B_{p,p-1}\ldots B_{i+1,i}$, $i = 2(1)p$, και $B_{10} = B_{1p}$. Επίσης,

$$B^p = \begin{bmatrix} N_{11} & O_{12} & O_{13} & \ldots & O_{1p} \\ O_{21} & N_{22} & O_{23} & \ldots & O_{2p} \\ O_{31} & O_{32} & N_{33} & \ldots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & O_{p3} & \ldots & N_{pp} \end{bmatrix}, \tag{3.45}$$

όπου $N_{ii} = B_{i,i-1}B_{i-1,i-2}\ldots B_{21}B_{1p}B_{p,p-1}\ldots B_{i+1,i}$, $i = 1(1)p$, και $B_{10} = B_{1p}$.

Ισχύουν όμως και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma(\widetilde{B_1}^{p-1})\backslash\{0\} \equiv \sigma(C_{ii})\backslash\{0\},\ i = 2(1)p,$$

και

$$\sigma(B^p)\backslash\{0\} \equiv \sigma(N_{jj})\backslash\{0\},\ j = 1(1)p.$$

Επειδή

$$\sigma(C_{ii})\backslash\{0\} \equiv \sigma(N_{jj})\backslash\{0\},\ i = 2(1)p,\ j = 1(1)p$$

έπεται ότι ισχύει(από το Λήμμα 3.2.1):

$$\sigma(B_{1p}B_{p,p-1}\cdots B_{32}B_{21})\backslash\{0\} \equiv \sigma(B_{21}B_{1p}B_{p,p-1}\cdots B_{32})\backslash\{0\}. \tag{3.46}$$

Ισοδύναμα,

$$\sigma(\widetilde{B_1}^{p-1})\backslash\{0\} = \sigma(B^p)\backslash\{0\}. \tag{3.47}$$

□

Επιπρόσθετα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω A ένας p-κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας που έχει τη μορφή (3.40). Αν για τον πίνακα της Jacobi B, που αντιστοιχεί στον A, έχουμε ότι ισχύει $0 < \rho(B) < 1$, τότε έχουμε ισχύουσες τις εξής σχέσεις:*

$$\rho(\widetilde{B}) < \rho(B) < 1 \tag{3.48}$$

με τους πίνακες $\widetilde{B}$, B να ορίζονται στις σχέσεις (3.42) και (3.41), αντίστοιχα. Για τους πίνακες της block Gauss-Seidel, H και $\widetilde{H}$, που συνδέονται με τους A, $\widetilde{A}$ αντίστοιχα, έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$\rho(\widetilde{H}) = \rho(H) < 1, \tag{3.49}$$

με $H = (D-L)^{-1}U$, $\widetilde{H} = (\widetilde{D}-\widetilde{L})^{-1}\widetilde{U}$, όπου οι L, U και $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$ είναι οι αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικές συνιστώσες-πίνακες των $D-A$ και $\widetilde{D}-\widetilde{A}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη:
Απόδειξη της (3.48):
Από τη μορφή των B^p και $\widetilde{B}_1^{p-1}$ στις (3.45) και (3.44), αντίστοιχα, έχουμε τις εξής ισότητες:

$$\rho(B_{1p}B_{p,p-1}\cdots B_{32}B_{21}) = \rho^p(B) \tag{3.50}$$

$$\rho(B_{21}B_{1p}B_{p,p-1}\cdots B_{32}) = \rho^{p-1}(\widetilde{B}_1) = \rho^{p-1}(\widetilde{B}) \tag{3.51}$$

Έπεται, λοιπόν, από τη σχέση (3.46), ότι ισχύει

$$\rho^p(B) = \rho^{p-1}(\widetilde{B}_1)$$

$$\Rightarrow \rho(\widetilde{B}_1) = \rho^{\frac{p-1}{p}}(B) < \rho(B)$$

(αφού $\rho(B) < 1$)

$$\Rightarrow \rho(\widetilde{B}_1) < \rho(B) < 1.$$

Δηλαδή,

$$\rho(\widetilde{B}) < \rho(B). \tag{3.52}$$

Απόδειξη της (3.49):
Από το Θεώρημα 2.4.2 η block Gauss-Seidel συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η block Jacobi και αν συγκλίνουν και οι δύο, τότε η φασματική ακτίνα της block Gauss-Seidel ισούται με την p-οστή δύναμη της φασματικής ακτίνας της block Jacobi.
Από την υπόθεση του θεωρήματος έχουμε $\rho(B) < 1$, όποτε για τον αντίστοιχο πίνακα της block Gauss-Seidel, H, έχουμε ότι $\rho(H) = \rho^p(B) < 1$.
Επίσης, από την (3.48) έπεται ότι και για τον πίνακα $\widetilde{B}$, που αντιστοιχεί στον $\widetilde{A}$, ισχύει ότι $\rho(\widetilde{B}) < 1$. Συνεπώς, για τον αντίστοιχο πίνακα της block Gauss-Seidel, $\widetilde{H}$, έχουμε ότι $\rho(\widetilde{H}) = \rho^{p-1}(\widetilde{B}) < 1$.
Από τις ισότητες (3.50),(3.51) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(\widetilde{H}) = \rho(H). \tag{3.53}$$

$\square$

Μπορούμε να έχουμε ανάλογες σχέσεις για τη βέλτιστη SOR για τους A, $\widetilde{A}$ με εκείνες του προηγούμενου θεωρήματος. Για το σκοπό αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το φάσμα ιδιοτιμών του B^p.

1η) Περίπτωση: $\sigma(B^p) \subset [0, \beta^p]$ *με* $\beta^p \in \sigma(B^p)$ *και* $\beta \in (0,1)$

Μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 3.2.3 *Υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας p-κυκλικός ($p \geq 3$) και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας, που έχει τη μορφή (3.40), και επιπλέον ότι οι ιδιοτιμές του B^p είναι πραγματικές και μη-αρνητικές με $0 < \rho(B) < 1$. Αν*

$\omega_{b,p}$, $\omega_{b,p-1}$ δηλώνουν τις βέλτιστες παραμέτρους χαλάρωσης της block SOR αντίστοιχα στον A και στον $\widetilde{A}$, τότε οι αντίστοιχοι block επαναληπτικοί πίνακες $\mathcal{L}_{\omega_{b,p}}$ και $\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}) < \rho(\mathcal{L}_{b,\omega_p}) < 1. \tag{3.54}$$

Απόδειξη:
Θέτουμε $r := \rho(B^p) \in (0,1)$. Επίσης, $r := \rho(B^k)$, για $k = p-1, p$. Από το Θεώρημα 2.4.2, έχουμε ότι η φασματική ακτίνα της SOR δίνεται από τη συνάρτηση

$$\rho := \rho(k) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_k}) = (k-1)(\omega_k - 1) \tag{3.55}$$

(για $k = p-1, p$) ως συνάρτηση του k, όπου ω_k η μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο $(1, \frac{k}{k-1})$ της εξίσωσης

$${\omega_k}^k r = k^k (k-1)^{1-k}(\omega_k - 1) \tag{3.56}$$

Έχουμε τότε :

$$\left(\frac{(k-1)(\omega_k-1)+(k-1)}{k-1}\right)^k r = k^k (k-1)^{-k}(k-1)(\omega_k-1)$$

$$\Rightarrow (\rho + k - 1)^k r = k^k \rho. \tag{3.57}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho := \rho(k)$ ως παραγωγίσιμη συνάρτηση του k για πραγματικό $k \in [p-1, p]$. Το ότι η $\rho = \rho(k)$ παίρνει τιμές μόνο στο διάστημα $(0,1)$ μπορεί να δειχτεί ως εξής. Η συνάρτηση

$$f(\rho(k)) := (\rho + k - 1)^k r - k^k \rho = 0,$$

είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, συνάρτηση του k, $\forall\ k \in [p-1, p]$. Αν η ρ έπαιρνε τιμές και έξω από το διάστημα $(0,1)$, τότε, λόγω της συνέχειάς της, θα υπήρχε τιμή του k, για την οποία $\rho(k) = 0$ ή $\rho(k) = 1$. Αλλά τότε $0 = f(0) = (k-1)^k r \neq 0$, αφού $k \geq 2$ και $r > 0$ (από υπόθεση) ή $0 = f(1) = k^k r - k^k = k^k(r-1) \neq 0$, αφού $k \geq 2$ και $r < 1$ (από υπόθεση). Άρα η ρ παίρνει τιμές μόνο στο διάστημα (0,1).
Λογαριθμώντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$k \ln(\rho + k - 1) + \ln r = k \ln k + \ln \rho. \tag{3.58}$$

Αφού λοιπόν $\rho(k) \in (0,1)$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την (3.58) ως προς k, οπότε:

$$\ln(\rho + k - 1) + k\frac{\rho' + 1}{\rho + k - 1} = \ln k + k\frac{1}{k} + \frac{\rho'}{\rho}.$$

ή, λύνοντας ως προς ρ', παίρνουμε

$$\rho' = \frac{\rho(\rho+k-1)\Bigg(\ln(\frac{\rho+k-1}{k})-1\Bigg)+\rho k}{(1-\rho)(k-1)}$$

με παρανομαστή θετικό. Ισοδύναμα έχουμε :

$$\frac{(k-1)(1-\rho)}{-\rho(\rho+k-1)}\rho' = 1-\frac{k}{\rho+k-1}+\ln(\frac{k}{\rho+k-1}). \tag{3.59}$$

Ορίζουμε

$$x := \frac{k}{\rho+k-1}(>1),$$

άρα το δεύτερο μέλος της ισότητας (3.59) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$y = 1-x+\ln x.$$

Επειδή

$$\frac{dy}{dx} = -1+\frac{1}{x} < 0,$$

έπεται ότι η y είναι φθίνουσα σύναρτηση του x. Για $x=1$ έχουμε $y=0$. Από τη μονοτονία, επομένως, της y συμπεραίνουμε ότι το δεξί μέλος της (3.59) είναι αρνητικό ,όπως και το αριστερό. Οπότε η παράγωγος της ρ είναι γνήσια θετική. Δηλαδή η ρ αυξάνει για $k \in [p-1,p]$. Ισχύει λοιπόν:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}) < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p}}). \tag{3.60}$$

$\square$

2η) Περίπτωση: $\sigma(B^p) \subset [-\alpha^p, 0]$ $\mu\varepsilon$ $-\alpha^p \in \sigma(B^p)$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha \in (0, \frac{p}{p-2})$

Μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα :

Θεώρημα 3.2.4 *Υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας p-κυκλικός ($p \geq 3$) και συνεπώς διατεταγμένος, που έχει τη μορφή (3.40), και επιπλέον οι ιδιοτιμές του B^p είναι πραγματικές και μη-θετικές και $0 < \rho(B) < \frac{p}{p-2}$. Αν $\omega_{b,p}$, $\omega_{b,p-1}$ δηλώνουν τις βέλτιστες παραμέτρους χαλάρωσης της block SOR αντίστοιχα στον A και στον $\widetilde{A}$, τότε οι αντίστοιχοι block επαναληπτικοί πίνακες $\mathcal{L}_{\omega_{b,p}}$ και $\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}$ ικανοποιούν την:*

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}) < \rho(\mathcal{L}_{b,\omega_p}) < 1. \tag{3.61}$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $r := \rho(B^p) \in (0, \left(\frac{p}{p-2}\right)^p)$. Επίσης, $r := \rho(B^k)$, για $k = p-1, p$.

Όπως στην πρώτη περίπτωση, από το Θεώρημα 2.4.3, έχουμε ότι η φασματική ακτίνα της SOR δίνεται από τη συνάρτηση

$$\rho := \rho(k) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_k}) = (k-1)(1-\omega_k) \tag{3.62}$$

(για $k = p-1, p$) ως συνάρτηση του k, όπου ω_k η μοναδική πραγματική θετική ρίζα στο $(1, \frac{k}{k-1})$ της εξίσωσης:

$$\omega_k{}^k r = k^k (k-1)^{1-k}(1-\omega_k). \tag{3.63}$$

Έχουμε τότε :

$$\left(\frac{(k-1)(\omega_k-1)-(k-1)}{k-1}\right)^k r = k^k(k-1)^{-k}(k-1)(1-\omega_k)$$

$$\Rightarrow (k-1-\rho)^k r = k^k \rho. \tag{3.64}$$

Θεωρούμε, όπως πριν ότι η $\rho := \rho(k)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του $k \in [p-1, p]$.Το ότι η $\rho = \rho(k)$ παίρνει τιμές μόνο στο διάστημα $(0,1)$ μπορεί να δειχτεί ως εξής. Η συνάρτηση

$$\phi(\rho(k)) := (k-1-\rho)^k r - k^k \rho = 0,$$

είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) συνάρτηση του k, $\forall\ k \in [p-1, p]$. Αν η ρ έπαιρνε τιμές και έξω από το διάστημα $(0,1)$, τότε, λόγω της συνέχειάς της, θα υπήρχε τιμή του k για την οποία $\rho(k) = 0$ ή $\rho(k) = 1$. Αλλά τότε $0 = \phi(0) = (k-1)^k r \neq 0$, αφού $k \geq 2$ και $r > 0$ (από υπόθεση) ή $0 = \phi(1) = (k-2)^k r - k^k \neq 0$, αφού $k \geq 2$ και $r < 1$ (από υπόθεση)).Άρα η ρ παίρνει τιμές μόνο στο διάστημα $(0,1)$.
Λογαριθμώντας την (3.64) έχουμε:

$$k\ln(k-1-\rho) + \ln r = k\ln k + \ln\rho. \tag{3.65}$$

Παραγωγίζουμε την (3.65) ως προς k και τότε :

$$\ln(k-1-\rho) + k\frac{1-\rho'}{k-1-\rho} = \ln k + k\frac{1}{k} + \frac{\rho'}{\rho}.$$

Οπότε :

$$\frac{(k-1)(1+\rho)}{-\rho(k-1-\rho)}\rho' = 1 - \frac{k}{k-1-\rho} + \ln(\frac{k}{k-1-\rho}). \tag{3.66}$$

Ορίζουμε αυτή τη φορά

$$x := \frac{k}{k-1-\rho} > 1,$$

και άρα:

$$y = 1 - x + \ln x.$$

Επειδή

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{1}{x} < 0,$$

έπεται ότι η y είναι φθίνουσα σύναρτηση του x. Για $x = 1$ έχουμε $y = 0$, όπως πριν. Από τη μονοτονία επομένως της y συμπεραίνουμε από την (3.66) ότι η ρ αυξάνει για $k \in [p-1, p]$. Ισχύει λοιπόν:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}) < \rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p}}). \tag{3.67}$$

□

Σημείωση: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι με μόνη την υπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του B^p είναι πραγματικές, μη-θετικές είναι δυνατόν να έχουμε γενικά τις εξής υποπεριπτώσεις:

(i) Αν $\rho(B) < \frac{p}{p-2} < \frac{p-1}{p-3}$, τότε συγκλίνουν και οι δύο πίνακες $\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}$, $\mathcal{L}_{\omega_{b,p}}$ και ισχύει η σχέση (3.67) για τις φασματικές ακτίνες που αποδείξαμε στα δυο προηγούμενα θεωρήματα.

(ii) Αν $\frac{p}{p-2} \le \rho(B) < \frac{p-1}{p-3}$, τότε ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,p-1}}) < 1 \le \rho(\mathcal{L}_{\omega,p}), \ \forall \omega \in I\!R \backslash \{0\}.$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής. Με την παραπάνω υπόθεση για την $\rho(B)$ θέτουμε

$$b_k = \frac{k}{k-2}, \ k = p-1, p \ \kappa\alpha\iota \ l := \max_{k=p-1,p}\{k : \ \rho(B) < \frac{k}{k-2}\}.$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2, παρατηρούμε ότι $\rho(\widetilde{B_1}^{p-1}) = \rho(B^p)$ και ακόμη ότι $\rho(\mathcal{L}_{\omega,k}) \ge 1$, για κάθε πραγματικό $\omega \ne 0$ και $k = p$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.4 έχουμε ότι:

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_{b,l}}) < 1 \le \rho(\mathcal{L}_{\omega,k}),$$

για κάθε πραγματικό $\omega \ne 0$ και $k = p$.

(iii) Αν $\frac{p}{p-2} < \frac{p-1}{p-3} \le \rho(B)$, τότε ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega,p-1}) \ge 1 \ \kappa\alpha\iota \ \rho(\mathcal{L}_{\omega,p}) \ge 1$$

για κάθε πραγματικό $\omega \ne 0$.

Παρατήρηση: Αν επαναδιαχωρίσουμε τον πίνακα A ώστε να έχει την block $(p-1)$-κυκλική μορφή:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} A_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & O_{23} & \dots & O_{2p} \\ \hline O_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & O_{3p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline O_{p1} & O_{p2} & \dots & A_{p,p-1} & A_{pp} \end{array} \right]$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε τότε ότι ο block Jacobi επαναληπτικός πίνακας, J, που αντιστοιχεί στον A μετά τον παραπάνω επαναδιαχωρισμό ταυτίζεται με τον block Jacobi επαναληπτικό πίνακα, $\widetilde{B}$, που αντιστοιχεί στον $\widetilde{A}$ (χωρίς οποιοδήποτε επαναδιαχωρισμό). Πράγματι είναι :

$$J = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & -A_{11}^{-1}A_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}A_{1p} \\ \hline O_{31} & -A_{33}^{-1}A_{32} & O_{33} & \dots & O_{3p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline O_{p1} & O_{p2} & \dots & -A_{pp}^{-1}A_{p,p-1} & O_{pp} \end{array} \right]$$

ή, με βάση τις $B_{i,i-1} = A_{ii}^{-1}A_{i,i-1},\ i = 1(1)p$, και $A_{10} \equiv A_{1p},\ B_{1,0} \equiv B_{1p}$

$$J = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & B_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & B_{21}B_{1p} \\ \hline O_{31} & B_{32} & O_{33} & \dots & O_{3p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline O_{p1} & O_{p2} & \dots & B_{p,p-1} & O_{pp} \end{array} \right]$$

και

$$\widetilde{B} = \left[\begin{array}{ccccc} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & B_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & B_{21}B_{1p} \\ O_{31} & B_{32} & O_{33} & \dots & O_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & B_{p,p-1} & O_{pp} \end{array} \right],$$

δηλαδή

$$J \equiv \widetilde{B}.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\sigma(J^{p-1})\backslash\{0\} \equiv \sigma(\widetilde{B})\backslash\{0\} \equiv \sigma(\widetilde{B}_1^{p-1})\backslash\{0\}.$$

Όμως από τη σχέση (3.43) του Θεωρήματος 3.2.1 έχουμε ότι

$$\sigma(\widetilde{B}_1^{p-1})\backslash\{0\} = \sigma(B^p)\backslash\{0\},$$

όπου ο B είναι ο block Jacobi επαναληπτικός πίνακας, που αντιστοιχεί στον A στον οποίο δεν έχουμε κάνει επαναδιαχωρισμό.
Επομένως, ισχύει ότι

$$\sigma(J^{p-1})\backslash\{0\} = \sigma(B^p)\backslash\{0\}.$$

Επίσης, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν ανάλογες σχέσεις για τις φασματικές ακτίνες των (βέλτιστων) επαναληπτικών πινάκων της block SOR με αυτές που αποδείχτηκαν στα Θεωρήματα 3.2.3, 3.2.4 .
Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι αν εφαρμόσουμε απαλοιφή στην πρώτη block στήλη του A τα αποτελέσματα που προκύπτουν συμπίπτουν με εκείνα που θα είχαν προκύψει αν επαναδιαχωρίζαμε τον A, όπως παραπάνω.

3.3 Τρίτη περίπτωση: A ιδιόμορφος M-πίνακας

Εκτός από τις ιδιότητες στον τίτλο (A ιδιόμορφος M-πίνακας) υποθέτουμε επιπλέον ότι ο A είναι μη-αναγώγιμος και ότι τα διαγώνια blocks του στη μορφή (2.21) είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες.
Αφού ο A είναι ιδιόμορφος, μη-αναγώγιμος M-πίνακας, από το Θεώρημα 2.5.2 (2), έπεται ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες A_{ii}, $i = 1(1)p$, είναι μη-ιδιόμορφοι M-πίνακες. Οι A_{ii} είναι επιπλέον μη-αναγώγιμοι άρα από το Θεώρημα 2.3.2(4), έπεται ότι ισχύει $A_{ii}^{-1} > 0,\ i = 1(1)p$.
Επίσης, από το Θεώρημα 2.3.2(1), συμπεραίνουμε ότι ο A_{11} μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο $A_{11} = L_{11}U_{11}$, όπου $L_{11} \in I\!R^{n_1,n_1}$ και $U_{11} \in I\!R^{n_1,n_1}$, είναι αντίστοιχα, κάτω και άνω τριγωνικοί M-πίνακες και άρα με θετικά διαγώνια στοιχεία. Ειδικότερα, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε, όπως στην παράγραφο 3.1, ότι ο L_{11} έχει διαγώνια στοιχεία μονάδες.

Στη συνέχεια μπορούμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 3.1.1 της παραγράφου 3.1.

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω $A \in I\!R^{n,n}$ ιδιόμορφος M-πίνακας, που είναι διαχωρισμένος σε blocks ως εξής:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

με $A_{ii},\ i = 1(1)p$, μη-αναγώγιμους πίνακες, και αν $D = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$, υποθέτουμε ότι ο $A - D$ είναι επίσης μη-αναγώγιμος. Έστω επιπλέον ότι ο πίνακας A αποτελεί τον πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.1) του οποίου επιζητούμε τη λύση. Αν εφαρμόσουμε από τα αριστερά του A τον προρρυθμιστή πίνακα P:

$$P = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1}A_{11}^{-1} & O_{p2} & \dots & I_{pp} \end{bmatrix} = Q + S,$$

όπως στην παράγραφο 3.1, όπου

$$Q = \mathrm{diag}(L_{11}^{-1}, I_{22}, \dots, I_{pp}),\ I_{ii} \in I\!R^{n_i,n_i},\ i = 2(1)p,$$

και

$$S = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1p} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & O_{22} & \dots & O_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{p1}A_{11}^{-1} & O_{p2} & \dots & O_{pp} \end{bmatrix},$$

προκύπτει ένα ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα το:

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b} \text{ με } \widetilde{A} = PA \text{ και } \widetilde{b} = Pb. \tag{3.68}$$

Τότε, ο πίνακας A *είναι μη-αναγώγιμος, και ο* $\widetilde{A}$ *και ο* $\widetilde{A}_1$, *που προκύπτει από τον* $\widetilde{A}$ *αν διαγράψουμε την πρώτη block γραμμή και την πρώτη block στήλη του, είναι ιδιόμορφοι M-πίνακες. Ειδικότερα, τα διαγώνια blocks του* $\widetilde{A}_1$ *είναι μη-αναγώγιμοι M-πίνακες, και αν* $\widetilde{D}_1 = \mathrm{diag}(\widetilde{A}_{22}, \widetilde{A}_{33}, \ldots, \widetilde{A}_{pp})$, *οι* $\widetilde{A}_1 - \widetilde{D}_1$ *και* $\widetilde{A}_1$ *είναι μη-αναγώγιμοι M-πίνακες.*

Απόδειξη:
Μπορούμε αρχικά να παρατηρήσουμε ότι με τις υποθέσεις για τον πίνακα A συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι μη-αναγώγιμος. Αυτό γιατί, αν a_{ij} τυχόν στοιχείο του A (μηδενικό ή μη), αυτό θα ανήκει είτε σε κάποιο από τα διαγώνια blocks του A, είτε στον $A - D$.
Αν a_{ij} ανήκει στον A_{kk}, με $k = 1(1)p$, τότε αυτό θα είναι είτε μη-μηδενικό είτε μηδέν, οπότε, επειδή οι A_{kk} είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες, θα υπάρχουν δείκτες $i_1, i_2, \ldots, i_s$ τέτοιοι ώστε

$$a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_s,j} \neq 0 \tag{3.69}$$

και το γινόμενο της (3.69) θα είναι γινόμενο στοιχείων του block A_{kk}.Συνεπώς, βάσει του Ορισμού 2.1.2, ο A είναι μη-αναγώγιμος.
Ομοίως, αν a_{ij} είναι στοιχείο του $A - D$, αυτό θα είναι μη-μηδενικό ή μηδέν. Στην περίπτωση, λοιπόν, που το στοιχείο αυτό είναι μηδέν και λόγω του ότι ο $A - D$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας, θα υπάρχουν δείκτες $i'_1, i'_2, \ldots, i'_s$ τέτοιοι ώστε

$$a_{i,i'_1} a_{i'_1,i'_2} \cdots a_{i'_s,j} \neq 0 \tag{3.70}$$

και το γινόμενο της (3.70) θα είναι γινόμενο στοιχείων του $A - D$. Άρα, σύμφωνα με τον προαναφερθέντα ορισμό, ο A είναι μη-αναγώγιμος πίνακας.

Η απόδειξη στη συνέχεια είναι αντίστοιχη με αυτή του Θεωρήματος 3.1.1, η οποία στηρίχτηκε στο Λήμμα 3.1.1, που μπορεί να εφαρμοστεί, αφού ο A είναι μη-αναγώγιμος M-πίνακας (άρα από το Θεώρημα 2.5.2(1), υπάρχει ένα $y > 0$ τέτοιο ώστε $Ay = 0$, άρα ικανοποιεί την υπόθεση του λήμματος).
Εφαρμόζουμε τη διαδικασία της απαλοιφής που περιγράφεται στο Λήμμα 3.1.1 μία φορά απαλείφοντας τα στοιχεία κάτω από το πρώτο (θετικό) διαγώνιο στοιχείο του A_{11}. Τότε, βάσει του Λήμματος 3.1.1, οι πίνακες $\widetilde{A}^{(2)} = L_1^{-1}A$ ($A^{(1)} = A$) και $\widetilde{A}_1^{(2)}$, που προκύπτει από τον $\widetilde{A}^{(2)}$ αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του, είναι M-πίνακες και ο $\widetilde{A}_1^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος M-πίνακας.
Ειδικότερα, τα διαγώνια blocks του $\widetilde{A}_1^{(2)}$, $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$, $i = 1(1)p$, και ο $\widetilde{A}_1^{(2)} - D_1^{(2)}$,

όπου $D_1^{(2)} = \mathrm{diag}(\widetilde{A}_{11}^{(2)}, \widetilde{A}_{22}^{(2)}, \ldots, \widetilde{A}_{pp}^{(2)})$, είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες. Αυτό γιατί:

Ο $\widetilde{A}_{11}^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας γιατί ουσιαστικά προκύπτει από τον μη-αναγώγιμο Μ-πίνακα A_{11} με απαλοιφή της πρώτης στήλης του κάτω από το πρώτο διαγώνιο στοιχείο του και διαγραφή της πρώτης γραμμής και στήλης του προκύπτοντα πίνακα. Επομένως, από το Λήμμα 3.1.1, ο $\widetilde{A}_{11}^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος Μ-πίνακας.
Θεωρούμε τώρα ένα στοιχείο $a_{f_1,f_2}^{(2)} = a_{n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+k,\ n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+l}^{(2)}$ που ανήκει στον $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$, $k,l = 1(1)n_i,\ i = 2(1)p$, και που έχει τη μορφή

$$a_{f_1,f_2}^{(2)} = a_{f_1,f_2} - a_{f_1,1}a_{11}^{-1}a_{1,f_2} \leq 0.$$

Αν αυτό είναι στοιχείο της διαγωνίου του $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$ τότε θα είναι θετικό, αφού ο $\widetilde{A}_1^{(2)}$ είναι Μ-πίνακας.
Αν το $a_{f_1,f_2}^{(2)}$ είναι στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου του $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$ και αν το $a_{f_1,f_2} \neq 0$, τότε δεν μπορεί να ισχύει ότι $a_{f_1,f_2}^{(2)} = 0$. Πράγματι, αφού το στοιχείο a_{f_1,f_2} είναι μη-μηδενικό (άρα αρνητικό, λόγω του ότι ο A είναι Μ-πίνακας) και το γινόμενο $-a_{f_1,1}a_{11}^{-1}a_{1,f_2}$ είναι μη-θετικό, έπεται λοιπόν ότι $a_{f_1,f_2}^{(2)} \neq 0$.
Αν όμως $a_{f_1,f_2} = 0$, τότε, λόγω του ότι το a_{f_1,f_2} είναι στοιχείο του μη-αναγώγιμου block A_{ii}, θα υπάρχουν δείκτες $k_1, k_2, \ldots, k_s$ τέτοιοι ώστε

$$a_{f_1,k_1}a_{k_1,k_2}\cdots a_{k_s,f_2} \neq 0$$

και το γινόμενο αυτό είναι γινόμενο στοιχείων του A_{ii}. Άρα και το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων του $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$ θα είναι μη-μηδενικό. Δηλαδή,

$$a_{f_1,k_1}^{(2)}a_{k_1,k_2}^{(2)}\cdots a_{k_s,f_2}^{(2)} \neq 0.$$

Έτσι από τον Ορισμό 2.1.2 συνεπάγεται ότι ο $\widetilde{A}_{ii}^{(2)}$, $i = 2(1)p$, είναι μη-αναγώγιμος πίνακας.

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχείο $a_{q_1,q_2}^{(2)} = a_{n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+k',\ n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}+l'}^{(1)}$ που ανήκει στον $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$, $k' = 1(1)n_i$, $l' = 1(1)n_j$, και που είναι της μορφής $a_{q_1,q_2}^{(2)} = a_{q_1,q_2} - a_{q_1,1}a_{11}^{-1}a_{1,q_2}$. Διακρίνουμε τότε τις παρακάτω περιπτώσεις:
Αν $a_{q_1,q_2} \neq 0$ ή $a_{q_1,1}a_{1,q_2} \neq 0$, τότε $a_{q_1,q_2}^{(2)} \neq 0$. Αν όμως $a_{q_1,q_2} = 0$ και $a_{q_1,1} = 0$ και $a_{1,q_2} \neq 0$, έχουμε ότι αφού ο $A - D$ είναι ένας μη-αναγώγιμος πίνακας θα υπάρχουν δείκτες $k_1', k_2', \ldots, k_s'$ τέτοιοι ώστε

$$a_{q_1,k_1'}a_{k_1',k_2'}\ldots a_{k_s',q_2} \neq 0$$

και ώστε τα στοιχεία του γινομένου αυτού είναι στοιχεία του $A-D$. Οπότε αν κανένας από τους παραπάνω δείκτες δεν είναι ίσος με 1, τότε από τον Ορισμό 2.1.2, ο $\widetilde{A}_1^{(2)} - D_1^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος. Αν υπάρχει κάποιος δείκτης $k'_r = 1$, τότε θα έχουμε ότι:

$$a_{q_1,k'_1} a_{k'_1,k'_2} \dots a_{k'_{r-1},1} a_{1,k'_{r+1}} \dots a_{k'_s,q_2} \neq 0.$$

Άρα,

$$\begin{gathered}
a_{q_1,k'_1} \neq 0 \Rightarrow a^{(2)}_{q_1,k'_1} \neq 0, \\
a_{k'_1,k'_2} \neq 0 \Rightarrow a^{(2)}_{k'_1,k'_2} \neq 0, \\
\vdots \\
a_{k'_{r-1},1} a_{1,k'_{r+1}} \neq 0 \Rightarrow a^{(2)}_{k'_{r-1},k'_{r+1}} \neq 0, \\
\vdots \\
a_{k'_s,q_2} \neq 0 \Rightarrow a^{(2)}_{k'_s,q_2} \neq 0.
\end{gathered}$$

Δηλαδή, για $k'_1, k'_2, \dots, k'_{r-1}, k'_{r+1}, \dots, k'_s$ έχουμε ότι

$$a^{(2)}_{q_1,k'_1} a^{(2)}_{k'_1,k'_2} \cdots a^{(2)}_{k'_{r-1},k'_{r+1}} \cdots a^{(2)}_{k'_s,q_2} \neq 0$$

και τα στοιχεία του γινομένου αυτού είναι στοιχεία του $A - D$. Άρα και σε αυτή την περίπτωση ο $\widetilde{A}_1^{(2)} - D_1^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας.

Επομένως, ο $\widetilde{A}_1^{(2)}$ είναι μη-αναγώγιμος πίνακας (το οποίο μπορεί να αποδειχθεί κατά τρόπο παρόμοιο με αυτόν που αποδείξαμε ότι ο A είναι μη-αναγώγιμος).

Έτσι, μετά το $k-1$ βήμα απαλοιφής, που εφαρμόζουμε, απαλείφοντας δηλαδή τα στοιχεία του A κάτω από τα πρώτα $k-1$ διαγώνια στοιχεία του A_{11}, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1, έχουμε έναν Μ-πίνακα τον $\widetilde{A}^{(k)}$, $k = 2(1)n_1$, του οποίου ο υποπίνακας που προκύπτει από αυτόν διαγράφοντας τις πρώτες $k-1$ γραμμές και τις $k-1$ πρώτες στήλες του είναι ένας ιδιόμορφος, μη-αναγώγιμος Μ-πίνακας. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει όπως παραπάνω, από το ότι τα διαγώνια blocks του προαναφερθέντος υποπίνακα του $\widetilde{A}^{(k)}$, του $\widetilde{A}_1^{(k)}$ καθώς και ο $\widetilde{A}_1^{(k)} - D_1^{(k)}$, όπου ο $D_1^{(k)}$ είναι ο block διαγώνιος πίνακας εκείνο που έχει στοιχεία τα διαγώνια blocks του $\widetilde{A}_1^{(k)}$, είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες). Άρα μετά από $n_1 - 1$ βήματα απαλοιφής έχουμε τον Μ-πίνακα $\widetilde{A}^{(n_1)}$ και ο υποπίνακας του ο $\widetilde{A}_1^{(n_1)}$ είναι τότε ένας ιδιόμορφος, μη-αναγώγιμος Μ-πίνακας (που έπεται από το ότι τα διαγώνια blocks του $\widetilde{A}_1^{(n_1)}$ και ο $\widetilde{A}_1^{(n_1)} - D_1^{(n_1)}$ είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες). Απαλείφοντας τώρα τα στοιχεία $\widetilde{A}^{(n_1)}$ κάτω από το

διαγώνιο στοιχείο του, το $\widetilde{a}_{n_1,n_1}^{(n_1)}$, προκύπτει ο Μ-πίνακας $\widetilde{A}$, του οποίου ο υποπίνακας που προκύπτει διαγράφοντας τις n_1 πρώτες γραμμές και τις n_1 πρώτες στήλες, ο $\widetilde{A}_1$, είναι Μ-πίνακας και επιπλέον μη-αναγώγιμος. Το τελευταίο έπεται και από το ότι τα διαγώνια blocks του $\widetilde{A}_1$, τα $\widetilde{A}_{ii},\ i = 2(1)p$ και ο $\widetilde{A}_1 - \widetilde{D}_1$ είναι μη-αναγώγιμοι Μ-πίνακας (όπου $\widetilde{D}_1 = \mathrm{diag}(\widetilde{A}_{22}, \widetilde{A}_{33}, \ldots, \widetilde{A}_{pp})$).
Εφαρμόζοντας δηλαδή τη διαδικασία που περιγράφεται στο Λήμμα 3.1.1, n_1 φορές με οδηγούς τα διαγώνια στοιχεία του A_{11} κάθε φορά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η παραπάνω διαδικασία είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό από αριστερά του πίνακα Α επί τον προρρυθμιστή πίνακα P, τον οποίο χρησιμοποιούμε για την απαλοιφή των n_1 πρώτων στηλών του Α.
Πολλαπλασιάζοντας επομένως τον Α επί τον P, έχουμε τον $\widetilde{A} = PA$, ο οποίος είναι ο $\widetilde{A}$, που αναφέραμε παραπάνω. $\square$

Όπως στην παράγραφο 3.1, ορίζουμε τους $\widehat{D}$ και SU

$$\widehat{D} = \mathrm{diag}(O_{11}, A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \ldots, A_{p1}A_{11}^{-1}A_{1p}) \tag{3.71}$$

$$SU = \hat{L} + \widehat{D} + \hat{U} \tag{3.72}$$

όπου $\hat{L}$ και $\hat{U}$ είναι αντίστοιχα οι αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικές συνιστώσες του SU.

Αν η (3.8) είναι η συνηθισμένη διάσπαση του Α θεωρούμε, τότε τις εξής διασπάσεις για τον $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{cases} QD - (PL - SD + \widehat{D} + \hat{L} + QU + \hat{U}) \\ (QD - \widehat{D}) - (PL - SD + \hat{L} + QU + \hat{U}) \end{cases}$$

Τότε, οι επαναληπτικοί πίνακες των "τύπου" Jacobi και Gauss-Seidel μεθόδων είναι οι (3.9)-(3.14).

Λήμμα 3.3.1 *Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1 για τον πίνακα Α οι διασπάσεις που μας δίνουν τους επαναληπτικούς πίνακες B, B', B'', H, H', H'', που ορίζονται στις (3.9)-(3.14) είναι Μ-διασπάσεις και άρα οι φασματικές τους ακτίνες είναι ίσες με τη μονάδα.*

Απόδειξη:

Η διάσπαση που μας δίνει τον Β είναι Μ-διάσπαση, γιατί ο D είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, αφού οι $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες. Επίσης, ο $L + U$ είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας. Από τον ορισμό της Μ-διάσπασης και το Θεώρημα 2.5.1, έπεται επομένως ότι

$$\rho(B) = 1. \tag{3.73}$$

Ομοίως, η διάσπαση που μας δίνει τον B' είναι Μ-διάσπαση, γιατί ο QD είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας. Αυτό, διότι οι U_{11}, A_{22}, A_{pp} είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες. Ενώ ο $PL - SD + \widehat{D} + \widehat{L} + QU + \widehat{U} \geq 0$. Οπότε από Θεώρημα 2.5.1 έπεται ότι

$$\rho(B') = 1. \tag{3.74}$$

Επίσης, ο $QD - \widehat{D}$ είναι μη-ιδιόμορφος Μ-πίνακας, γιατί $U_{11}, \widetilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \ldots \widetilde{A}_{pp} = A_{pp} - A_{p1}A_{11}^{-1}A_{1p}$ είναι μη-ιδιόμορφοι Μ-πίνακες (διότι οι $\widetilde{A}_{22}, \ldots, \widetilde{A}_{pp}$ είναι διαγώνιοι υποπίνακες του ιδιόμορφου, μη-αναγώγιμου πίνακα $\widetilde{A}$). Επειδή, $PL - SD + \widehat{L} + QU + \widehat{U} \geq 0$, έπεται ότι ο B'' που προκύπτει από την Μ-διάσπαση αυτή έχει φασματική ακτίνα (από το Θεώρημα 2.5.1)

$$\rho(B'') = 1. \tag{3.75}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα με τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι οι διασπάσεις που μας δίνουν τους Η, H' και H'' είναι Μ-διασπάσεις και άρα οι φασματικές τους ακτίνες είναι ίσες με τη μονάδα. □

Λήμμα 3.3.2 *Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.3.1 για τον Α, οι επαναληπτικοί πίνακες Β, B', B'', Η, H' και H'', που ορίζονται στις (3.9)-(3.14) είναι ημισυγκλίνοντες.*

Απόδειξη:

Η απόδειξη βασίζεται στον Ορισμό 2.5.5 ενός ημισυγκλίνοντα πίνακα της παραγράφου 2.2.5.
Ειδικότερα, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν για τον επαναληπτικό πίνακα Τ καθεμιά από τις παρακάτω συνθήκες.
(1) $\rho(T) \leq 1$ και
(2) Αν $\rho(T) = 1$, τότε όλα τα Jordan blocks που συνδέονται με την ιδιοτιμή 1 του Τ είναι 1×1 και
(3) Αν $\rho(T) = 1$, τότε για $\lambda \in \sigma(T)$, έχουμε ότι αν $|\lambda| = 1$ τότε $\lambda = 1$.
Η συνθήκη (1) του ορισμού ικανοποιείται από όλους τους πίνακες της διατύπωσης του λήμματος, όπως αποδείχτηκε στο Λήμμα 3.3.1 . Απομένει επομένως να δειχθεί ότι ισχύουν οι (2) και (3).
Ειδικότερα:
Με την υπόθεση της μη-αναγωγιμότητας για τον πίνακα $A - D$ (ή τον $D - A$), μπορούμε να συμπεράνουμε για τον πίνακα Β, που είναι της μορφής:

$$B = \begin{bmatrix} O_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1p} \\ B_{21} & O_{22} & \ldots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \ldots & O_{pp} \end{bmatrix},$$

όπου $B_{ij} = -A_{ii}^{-1}A_{ij},\ i,j = 1(1)p,\ i \neq j$, ότι είναι μη-αναγώγιμος. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:
Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο $b_{f_1,f_2} = b_{n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+k,\ n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}+l}$ που ανήκει στον B_{ij}, με $k = 1(1)n_i,\ l = 1(1)n_j$, και $i,j = 1(1)p,\ i \neq j$, τότε αυτό θα είναι της μορφής

$$b_{f_1,f_2} = \sum_{m=n_1+\ldots+n_{i-1}+1}^{n_1+\ldots+n_{i-1}+n_i} a'_{f_1,m}(-a_{m,f_2})\ \mu\varepsilon\ a'_{f_1,m} \in A_{ii}^{-1}$$

Αν το στοιχείο αυτό είναι μη-μηδενικό, τότε οι κόμβοι R_{f_1}, R_{f_2} συνδέονται απευθείας στο γράφημα $\Gamma(B)$ του B. Στην περίπτωση που το στοιχείο b_{f_1,f_2} είναι μηδέν, τότε καθένα από τα γινόμενα $a'_{f_1,m}(-a_{m,f_2}) = 0$ ή $a_{m,f_2} = 0$, για κάθε $m = n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1(1)n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i$ (αφού τα στοιχεία του A_{ii}^{-1} είναι θετικά). Όμως, επειδή τα $-a_{m,f_2} = 0$,για κάθε $m = n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1(1)n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i$ είναι στοιχεία του μη-αναγώγιμου πίνακα $D - A$, μπορούμε για καθένα από αυτά να βρούμε ένα σύνολο δεικτών $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_s}$ τέτοιων ώστε

$$(-a_{m,m_{i_1}})(-a_{m_{i_1},m_{i_2}}) \cdots (-a_{m_{i_s},f_2}) \neq 0,$$

όπου αυτό είναι γινόμενο στοιχείων του $D - A$. Άρα οι κόμβοι R_{f_1}, R_{f_2} συνδέονται στο γράφημα $\Gamma(B)$ του B μέσω των R_m, $R_{m_{i_1}}$,…,$R_{m_{i_s}}$.
Άρα από τον Ορισμό 2.1.2, ο B είναι ένας μη-αναγώγιμος πίνακας. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η φασματική ακτίνα του, που ισούται με 1 είναι *απλή* ιδιοτιμή του B, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.2(4). Άρα το μόνο Jordan block που συνδέεται με την ιδιοτιμή αυτή είναι 1×1.

Ανάλογα για τον πίνακα

$$B' = \begin{bmatrix} O_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1p} \\ O_{21} & B_{21}B_{12} & \ldots & B_{2p} + B_{21}B_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & B_{p2} + B_{p1}B_{12} & \ldots & B_{p1}B_{1p} \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι ο υποπίνακας του B'_1, ο οποίος προκύπτει από τον B' διαγράφοντας την πρώτη block γραμμή και την πρώτη block στήλη του, είναι μη-αναγώγιμος. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο $b'_{f'_1,f'_2} = b'_{n_1+\ldots+n_{i-1}+k',\ n_1+\ldots+n_{j-1}+l'}$, $k' = 1(1)n_i,\ l' = 1(1)n_j$ του B'_1 σε κάποιο block εκτός των διαγώνιων blocks, τότε αυτό θα είναι στοιχείο του

$$B'_{ij} = B_{ij} + B_{i1}B_{1j} = A_{ii}^{-1}(-\widetilde{A}_{ij}),\ i,j = 2(1)p,\ i \neq j,$$

όπου ο $-\widetilde{A}_{ij},\ i,j=2(1)p,\ i\neq j$, είναι ένα block στοιχείο του μη-αναγώγιμου πίνακα $\widetilde{D}_1-\widetilde{A}_1$. Άρα,

$$b'_{f'_1,f'_2}=\sum_{m'=n_1+\ldots+n_{i-1}+1}^{n_1+\ldots+n_{i-1}+n_i} a'_{f'_1,m'}(-\widetilde{a}_{m',f'_2})$$

με $a'_{f'_1,m'}$ στοιχείο του θετικού πίνακα A_{ii}^{-1} και $\widetilde{a}_{m',f'_2}$ στοιχείο του μη-θετικού πίνακα $\widetilde{A}_{ij}$.
Αν $\widetilde{a}_{m',f'_2}\neq 0$, για κάποιο $m'=n_1+\ldots+n_{i-1}+1(1)n_1+\ldots+n_{i-1}+n_i$, τότε $b'_{f'_1,f'_2}\neq 0$. Ενώ, αν $\widetilde{a}_{m',f'_2}=0$, για κάποιο $m'=n_1+\ldots+n_{i-1}+1(1)n_1+\ldots+n_{i-1}+n_i$, θα υπάρχουν δείκτες $i'_1,i'_2,\ldots,i'_s$ τέτοιοι ώστε

$$\widetilde{a}_{m',i'_1}\widetilde{a}_{i'_1,i'_2}\cdots\widetilde{a}_{i'_s,f'_2}\neq 0$$

ώστε το παραπάνω γινόμενο να είναι γινόμενο στοιχείων του $\widetilde{D}_1-\widetilde{A}_1$. Οπότε, οι κόμβοι $R_{f'_1}$, $R_{f'_2}$ συνδέονται μέσω των R'_m, $R_{i'_1}$,…,$R_{i'_s}$ στο γράφημα $\Gamma(B'_1)$ του B'_1. Από τον Ορισμό 2.1.2, επομένως, ο $B'_1-D_1^{-1}\widehat{D}_1$ είναι μη-αναγώγιμος, όπου οι D_1 και $\widehat{D}_1$ προκύπτουν αντίστοιχα από τους D και $\widehat{D}$.
Αν θεωρήσουμε τώρα ένα στοιχείο, το οποίο ανήκει σε κάποιο από τα διαγώνια blocks του B'_1, δηλαδή ένα $b'_{q_1,q_2}=b'_{n_1+\ldots+n_{i-1}+r_1,\ n_1+\ldots+n_{i-1}+r_2}$ του $B'_{ii},\ r_1,r_2=1(1)n_i-n_{i-1}+1,\ i=2(1)p,\ r_1\neq r_2$, αυτό θα είναι της μορφής

$$b'_{q_1,q_2}=\sum_{r=1}^{n_1} b_{q_1,r}b_{r,q_2}.$$

Τότε, είτε $b'_{q_1,q_2}\neq 0$, ή $b'_{q_1,q_2}=0$, οπότε $b_{q_1,r}b_{r,q_2}=0$, για κάθε $r=1(1)n_1$. Αν λοιπόν $b_{q_1,r}=0$ και $b_{r,q_2}\neq 0$, για κάποιο $1\leq r\leq n_1$, τότε, επειδή ο B είναι μη-αναγώγιμος πίνακας, θα υπάρχουν δείκτες $k_1,k_2,\ldots,k_s$ τέτοιοι ώστε

$$b_{q_1,k_1}b_{k_1,k_2}\cdots b_{k_s,r}\neq 0.$$

Συνεπώς, οι κόμβοι R_{q_1}, R_{q_2} συνδέονται μέσω των κορυφών R_{k_1}, …, R_{k_s} και R_r στο γράφημα $\Gamma(B'_1)$ του B'_1 .
Αν $b_{q_1,r}=0$ και $b_{r,q_2}=0$, τότε εκτός από το παραπάνω σύνολο κόμβων που θα ενώνει τους R_{q_1} και R_r, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό όπως πριν, θα υπάρχουν $R_{l_1},R_{l_2},\ldots,R_{l_q}$ που θα συνδέουν τους R_r και R_{q_2}. Δηλαδή, οι κόμβοι R_{q_1} και R_{q_2} θα συνδέονται μέσω των R_{k_1}, …, R_{k_s},R_r,$R_{l_1},R_{l_2},\ldots,R_{l_q}$ στο γράφημα $\Gamma(B'_1)$ του B'_1.
Συμπεραίνουμε έτσι ότι ο B'_1 είναι μη-αναγώγιμος πίνακας.

Συνεπώς, η ιδιοτιμή 1 του B'_1 (φασματική ακτίνα του B'_1 και του B') είναι *απλή* ιδιοτιμή του, από το Θεώρημα 2.1.2(4), και επομένως το μόνο Jordan

block που συνδέεται με αυτήν είναι 1×1.
Όσον αφορά τον πίνακα

$$B'' = \left[\begin{array}{cccc} O_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & (I_{22} - B_{21}B_{12})^{-1}(B_{2p} + B_{21}B_{1p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & (I_{pp} - B_{p1}B_{1p})^{-1}(B_{p2} + B_{p1}B_{12}) & \dots & O_{pp} \end{array} \right],$$

ο υποπίνακάς του B''_1, που προκύπτει, όπως ο B'_1 από τον B', ισούται με

$$B''_1 = (I - D_1^{-1}\widehat{D}_1)^{-1}(B'_1 - D_1^{-1}\widehat{D}_1).$$

Όπως είδαμε παραπάνω ο $B'_1 - \widehat{D}_1$ είναι ένας μη-αναγώγιμος πίνακας.
Το ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να έχουμε και για τα διαγώνια blocks του $\overline{D} = (I - D_1^{-1}\widehat{D}_1)^{-1}$, διότι

$$\begin{array}{rcl} \overline{D}_{ii} & = & (I_{ii} - A_{ii}^{-1}A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i})^{-1} \\ & = & (A_{ii} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1i})^{-1}A_{ii} \\ & = & \widetilde{A}_{ii}^{-1}A_{ii}, \ i = 2(1)p, \end{array}$$

όπου ο A_{ii} είναι ένας μη-αναγώγιμος πίνακας, ο οποίος πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά επί ένα θετικό πίνακα.
Επομένως, ο B''_1 είναι μη-αναγώγιμος πίνακας. Έτσι, η ιδιοτιμή 1 του B''_1, που είναι φασματική ακτίνα του B''_1 (και του B''), είναι *απλή* ιδιοτιμή του, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.2(4). Οπότε το μόνο Jordan block που συνδέεται με την ιδιοτιμή 1 είναι 1×1.

Με ανάλογο με τον παραπάνω συλλογισμό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τρεις επαναληπτικοί πίνακες της block Gauss-Seidel και "τύπου" block Gauss-Seidel μεθόδων H, H', H'' είναι ημισυγκλίνοντες.

Πριν προχωρήσουμε στο τελευταίο συμπέρασμα αυτής της παραγράφου θα αποδείξουμε δυο προτάσεις.

Λήμμα 3.3.3 *Υποθέτουμε ότι $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας ημισυγκλίνων πίνακας που έχει τη μορφή που περιγράφεται στο Λήμμα 2.5.1, δηλαδή, υπάρχει μη-ιδιόμορφος πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε*

$$T = P \left[\begin{array}{cc} I_r & O \\ O & K_{n-r} \end{array} \right] P^{-1}, \ I_r \in \mathbb{C}^{r,r}, \ K_{n-r} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}, \ 0 < r < n,$$

όπου $\rho(K_{n-r}) < 1$. Τότε, ο Drazin αντίστροφος του $I - T$ είναι ο

$$(I - T)^D = P \left[\begin{array}{cc} O_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & (I_{n-r} - K_{n-r})^{-1} \end{array} \right] P^{-1}. \qquad (3.76)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\lim_{j\to\infty} T^j = P \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.77}$$

Απόδειξη:
Για να υπολογίσουμε τον *Drazin* αντίστροφο, $(I-T)^D$, του $I-T$, καθώς και τον πίνακα

$$I - E = I - (I-T)(I-T)^D$$

του Λήμματος 2.5.2, θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή του T που δώσαμε στην υπόθεση του λήμματος. Λόγω επομένως της μορφής του T, έχουμε ότι

$$I - T = P \begin{bmatrix} O_r & O \\ O & I_{n-r} - K_{n-r} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Για τον υπολογισμό του $(I-T)^D$, ο οποίος θα είναι γενικά της μορφής

$$(I-T)^D = P \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} P^{-1}$$

με $Q_1 \in \mathbb{C}^{r,r}$, $Q_2 \in \mathbb{C}^{r,n-r}$, $Q_3 \in \mathbb{C}^{n-r,r}$, $Q_1 \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$, αρκεί να ανατρέξουμε στον Ορισμό 2.5.6 (με δείκτη $k = 1$ για τον πίνακα A) και να απαιτήσουμε να ικανοποιεί ο πίνακας $(I-T)^D$ τις (2.26)-(2.28). Ειδικότερα :
Η (2.26) δίνει

$$P \begin{bmatrix} Q_2(I_{n-r} - K_{n-r})Q_3 & Q_2(I_{n-r} - K_{n-r})Q_4 \\ Q_4(I_{n-r} - K_{n-r})Q_3 & Q_4(I_{n-r} - K_{n-r})Q_4 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Η (2.27) δίνει

$$P \begin{bmatrix} O & O \\ (I_{n-r} - K_{n-r})Q_3 & (I_{n-r} - K_{n-r})Q_4 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} O & Q_2(I_{n-r} - K_{n-r}) \\ O & Q_4(I_{n-r} - K_{n-r}) \end{bmatrix} P^{-1}$$

ενώ από τη σχέση (2.28) έχουμε

$$P \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} - K_{n-r} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} O & Q_2(I_{n-r} - K_{n-r})^2 \\ O & Q_4(I_{n-r} - K_{n-r})^2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Από τις παραπάνω ισότητες πινάκων προκύπτει τελικά ότι

$$Q_1 = O_{r,r},\ Q_2 = O_{r,n-r},\ Q_3 = O_{n-r,r},\ Q_4 = (I_{n-r} - K_{n-r})^{-1}$$

(ο αντίστροφος του $I_{n-r} - K_{n-r}$ ορίζεται, διότι $\rho(K_{n-r}) < 1$). Δηλαδή,

$$(I-T)^D = P \begin{bmatrix} O_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & (I_{n-r} - K_{n-r})^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Λήμμα 2.5.2 θα ισχύει ότι

$$\lim_{j\to\infty} T^j = I - E.$$

ή

$$\lim_{j\to\infty} P \left[\begin{array}{cc} I_r^j & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & K_{n-r}^j \end{array} \right] P^{-1} = P \left[\begin{array}{cc} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array} \right] P^{-1}. \tag{3.78}$$

□

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω $A = M - N$ με $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ πίνακας με δείκτη ένα και M ένας μη-ιδιόμορφος πίνακας. Υποθέτουμε επίσης, ότι ο $T = M^{-1}N$, είναι ένας ημισυγκλίνων πίνακας. Τότε, για $c = M^{-1}b$, η επαναληπτική μέθοδος*

$$x^{(m+1)} = Tx^{(m)} + c \tag{3.79}$$

συγκλίνει σε κάποια λύση $x(x^{(0)})$ του $Ax = b$, $\forall\ x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, με $b \in \mathrm{range}(A)$ και ειδικότερα ισχύει ότι

$$\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = P \left[\begin{array}{c} (P^{-1}x^{(0)})_1 \\ (I_{n-r} - K_{n-r})^{-1}(P^{-1}c)_2 \end{array} \right] P^{-1} \tag{3.80}$$

όπου ο P είναι ο μη-ιδιόμορφος πίνακας του Λήμματος 2.5.1 και $(P^{-1}x^{(0)})_1 \in \mathbb{C}^r$ και $(P^{-1}c)_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$ είναι η πρώτη και η δεύτερη block συνιστώσα των διανυσμάτων $P^{-1}x^{(0)}$, $P^{-1}c$ αντίστοιχα.

Απόδειξη:
Από το Λήμμα 2.5.3, έπεται ότι υποθέτοντας τα παραπάνω για τους A και T θα ισχύει για την επαναληπτική μέθοδο (3.79) ότι,

$$\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = (I-T)^D c + (I-E)x^{(0)} \tag{3.81}$$

όπου $E = (I-T)(I-T)^D$. Ο $(I-T)^D$ έχει τη μορφή (3.76), ενώ ο $I-E$ είναι ο πίνακας του δεύτερου μέλους της σχέσης (3.78). Ισοδύναμα λοιπόν, ισχύει ότι:

$$\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = P \left[\begin{array}{cc} O_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & (I_{n-r}-K_{n-r})^{-1} \end{array} \right] P^{-1}c + P \left[\begin{array}{cc} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array} \right] P^{-1}x^{(0)}. \tag{3.82}$$

Έτσι, αν $P^{-1}c = \begin{bmatrix} (P^{-1}c)_1 \\ (P^{-1}c)_2 \end{bmatrix}$ με $(P^{-1}c)_1 \in \mathbb{C}^r$, $(P^{-1}c)_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$ και $P^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} (P^{-1}x^{(0)})_1 \\ (P^{-1}x^{(0)})_2 \end{bmatrix}$ με $(P^{-1}x^{(0)})_1 \in \mathbb{C}^r$, $(P^{-1}x^{(0)})_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$, έχουμε ότι:

$$\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = P \begin{bmatrix} (P^{-1}x^{(0)})_1 \\ (I_{n-r} - K_{n-r})^{-1}(P^{-1}c)_2 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.83}$$

□

Άμεσα πορίσματα των παραπάνω προτάσεων είναι τα ακόλουθα.

Πόρισμα 3.3.1 *Αν $A = M - N$ κανονική διάσπαση του A του Θεωρήματος 3.3.2 και αν ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας T είναι ημισυγκλίνων (ισοδύναμα το (3.79) συγκλίνει στο (3.81) για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$) έπεται ότι $\gamma(T) < 1$.*

Πόρισμα 3.3.2 *Αν ο A είναι όπως στο Θεώρημα 3.3.1, τότε για καθέναν από τους μη-αναγώγιμους ημισυγκλίνοντες πίνακες T του Λήμματος 3.3.2 ισχύει η σχέση (3.77), όπου όμως $r = 1$ (αφού οι T είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες) καθώς επίσης και $\gamma(T) < 1$, από το προηγούμενο πόρισμα. Ειδικότερα, για τα αντίστοιχα επαναληπτικά σχήματα ισχύει η σχέση (3.80), όπου όμως το όριο της ακολουθίας $x^{(j)}$ οριακά εξαρτάται από το μονοδιάστατο μιγαδικό διάνυσμα $(P^{-1}x^{(0)})_1$.*

Το τελευταίο αποτελεί και το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής.

4 Επίλογος

Όπως επισημάνθηκε στην Εισαγωγή, η εργασία αυτή αποτελεί μια προσπάθεια να μεταφερθούν στην block περίπτωση, και με αυτόν τον τρόπο να γενικευθούν, αποτελέσματα που δόθηκαν σε προγενέστερες εργασίες, στις οποίες οι ερευνητές είχαν ασχοληθεί μόνο με point προρρυθμιστές.

Έτσι, στην παράγραφο 3.1 με τη θεώρηση του συγκεκριμένου block προρρυθμιστή, που δίνεται εκεί, επεκτείναμε μέρος των συμπερασμάτων της εργασίας [18] στην block περίπτωση. Μελετήσαμε, επίσης, και καταλήξαμε σε συμπεράσματα, στην περίπτωση που εφαρμόζουμε την block SOR στο αρχικό και το ισοδύναμο, μετά την απαλοιφή, σύστημα. Ανοιχτό πρόβλημα παραμένει ωστόσο το αν ο προρρυθμιστής που χρησιμοποιήσαμε είναι ο βέλτιστος δυνατός και αν είναι πάντοτε καλύτερος από τον αντίστοιχο point.

Στην επόμενη παράγραφο 3.2 παρατηρήσαμε ότι η εφαρμογή block απαλοιφής στον πίνακα A ακολουθούμενη από κλασική επαναληπτική μέθοδο, μας οδηγεί σε ταυτόσημα συμπεράσματα με εκείνα, που θα προέκυπταν αν εφαρμόζαμε κατάλληλο block κυκλικό επαναδιαχωρισμό του αρχικού πίνακα και έπειτα την κλασική επαναληπτική μέθοδο. Η τελευταία περίπτωση, όπως αναφέρθηκε, έχει μελετηθεί εκτενώς σε μια σειρά από εργασίες ([11], [12], [13], [14]). Ανοιχτό για περαιτέρω έρευνα παραμένει το αν, στη 2η περίπτωση που εξετάσαμε εκεί, μπορούμε να έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για τις επαναληπτικές μεθόδους της block Jacobi με εκείνα της block SOR (βλ. Σημείωση).

Τέλος, στην παράγραφο 3.3 ασχοληθήκαμε με την περίπτωση όπου ο πίνακας του αρχικού συστήματος, στον οποίο εφαρμόσαμε απαλοιφή, είναι ένας ιδιόμορφος, μη-αναγώγιμος M-πίνακας (πίνακας δείκτη 1) και φτάσαμε σε συμπεράσματα που γενίκευσαν μέρος των συμπερασμάτων των εργασιών [15] και [17]. Ανοιχτό παραμένει το πρόβλημα της κατευθείαν σύγκρισης των ταχυτήτων σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου εφαρμοζόμενης στο αρχικό και στο προρρυθμισμένο σύστημα.

Πριν κλείσουμε πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν ακόμη γενικότερα ανοιχτά προβλήματα. Όπως:

Η μελέτη της περίπτωσης, όπου στη θέση του συγκεκριμένου block προρρυθμιστή χρησιμοποιούμε άλλον κατάλληλο block προρρυθμιστή τύπου (1.3), που χρησιμοποιήθηκε στις εργασίες [15], [16], [17] και [18].

Η μελέτη της "αναμενόμενης" βελτίωσης της ταχύτητας σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων (για καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες πινάκων που μελετήθηκαν στις τρεις παραγράφους του Κεφαλαίου 3) μετά την κατάλληλη εισαγωγή παραμέτρων στους block προρρυθμιστές που προαναφέραμε, όπως έγινε στις εργασίες [16], [17] και [18].

Αναφορές

[1] R.S.Varga, *Matrix Iterative Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1962.(Also: 2nd Edition , Revised and Expanded, Springer, Berlin, 2000)

[2] D.M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems.* Academic Press, New York, 1971.

[3] A.Berman and R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1994.

[4] R.E. Funderlic and R.J. Plemmons, *LU Decomposition of M-matrices by Elimination Without Pivoting.* Linear Algebra Appl. 41 (1981), 99-110.

[5] J.P. Milaszewicz, *A Generalization of the Stein-Rosenberg Theorem to Banach Spaces.* Numer. Math. 34 (1980), 403-409.

[6] J.P. Milaszewicz, *On Modified Jacobi Linear Operators.* Linear Algebra Appl. 51 (1983), 127-136.

[7] J.P. Milaszewicz, *Improving Jacobi and Gauss-Seidel Iterations.* Linear Algebra Appl. 93 (1987), 161-170.

[8] M.L. Juncosa and T.W. Mulliken, *On the Increase of Convergence Rates of Relaxation Procedures for Elliptic Partial Differential Equations.* J. Assoc. Comput. Mach. 7 (1960), 29-36.

[9] F. Robert, *Algorithmes tronqués de découpe linéaire.* RAIRO, revue de l' AFCET, Jul. 1972, 45-64.

[10] F. Robert, *Autour du théorème de Stein-Rosenberg.* Numer. Math. 27(1976), 133-141.

[11] T.L. Markham, M. Neumann, R.J. Plemmons, *Convergence of a Direct-Iterative Method for Large-Scale Least Squares Problem.* Linear Algebra Appl. 69 (1985), 155-167.

[12] D.J. Pierce, *Parallel Least Squares Computations and Related Material.* Ph.D. thesis, North Carolina State University, Raleigh, NC, (1987).

[13] D.J. Pierce, A. Hadjidimos and R.J. Plemmons, *Optimality Relationships for p-Cyclic SOR*. Numer. Math. 56 (1990), 635-643.

[14] S. Galanis and A. Hadjidimos, *Best Cyclic Repartitioning for Optimal Overrelaxation Convergence*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 13 (No. 1) (1992), 102-120.

[15] A.D. Gunawardena, S.K. Jain and L. Snyder, *Modified Iterative Methods for Consistent Linear Systems*. Linear Algebra Appl. 154-156 (1991), 123-143.

[16] T. Kohno, H. Niki, and M. Usui, *Improving the Gauss-Seidel Method for Z-matrices*. Linear Algebra Appl. 267 (1997), 113-123.

[17] W. Li and W. Sun, *Modified Gauss-Seidel type methods for Z-matrices*. Linear Algebra Appl. 317 (2000), 227-240.

[18] A.Hadjidimos, D. Noutsos and M. Tzoumas, *More on Modifications and Improvements of Classical Iterative Schemes for Z-matrices*. TR 01-1, Department of Mathematics, University of Crete, Heraklion, Greece, 2001.

[19] Z. Woźnicki, *Nonnegative Splitting Theory*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 11 (1994), 289-342.

[20] Β. Δουγαλή, Δ. Νούτσου και Α. Χατζηδήμου, Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο, Ιούνης 2001.