Το Πρόβλημα των Brill-Noether για επιφάνειες Riemann

Ελένη Ν. Τζανάκη

10 Οκτωβρίου 2002

0.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα των Brill-Noether που μπορεί, περιγραφικά, να διατυπωθεί ως εξής:

- *Με πόσους τρόπους μπορεί να απεικονισθεί (με αναλυτικό τρόπο) μια επιφάνεια Riemann S στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^r$ ως αλγεβρική καμπύλη βαθμού d;*

Ως πρώτο βήμα για την προσέγγιση του παραπάνω προβλήματος χρειάζεται να βρούμε έναν 'βολικό' τρόπο να παραμετρίσουμε τις παραπάνω απεικονίσεις. Αυτό γίνεται με την θεωρία των διαιρετών και την αντιστοιχία μεταξύ απεικονίσεων και γραμμικών συστημάτων που παρουσιάζεται στην Παράγραφο 3.2.5. Κατόπιν, ανάγουμε το πρόβλημα σε περιγραφή ορισμένων υποσυνόλων της Ιακωβιανής της επιφάνειας Riemann που παριστούν τους χώρους παραμέτρων των παραπάνω απεικονίσεων. Για την περιγραφή των παραπάνω υποσυνόλων καθοριστικό ρόλο παίζει η απεικόνιση Abel - Jacobi που μελετάται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 4. Γίνονται λεπτομερείς αποδείξεις των σχετικών θεωρημάτων, στοιχεία των οποίων χρειάζονται για την μελέτη του προβλήματος. Στο τελευταίο κεφάλαιο, τίθεται το πρόβλημα των Brill-Noether και εξετάζεται η γεωμετρία των αντιστοίχων χώρων παραμέτρων του προβλήματος. Σημείο - κλειδί στην διερεύνηση του προβλήματος είναι η συσχέτιση της γεωμετρίας των παραπάνω χώρων παραμέτρων με την γεωμετρία της εμβυθισμένης επιφάνειας Riemann στον προβολικό χώρο, κάτω από την κανονική εμβύθιση. Η παρουσίαση χωρίζεται σε δύο σκέλη: το πρώτο αφορά την μελέτη του προβλήματος σε οποιαδήποτε επιφάνεια Riemann, βλ. Παράγραφο 5.2 και το δεύτερο την μελέτη για την 'γενική' επιφάνεια Riemann, βλ. Παράγραφο 5.3. Τέλος, στην παράγραφο 5.4 γίνεται η πλήρης περιγραφή της λύσης του προβλήματος για τις περιπτώσεις επιφανειών με μικρό γένος ($g = 0, \ldots, 5$).

Η εργασία βασίστηκε στο άρθρο επισκόπισης του Griffiths [Gr2]. Πέρα από το παραπάνω άρθρο, ως βασικές πηγές χρησιμοποιήθηκαν τα βιβλία [ACGH], [DS], [GH2], [Gr1], [Mi].

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Επιφάνειες Riemann

1.1 Ορισμοί

1.1.1 Μιγαδικές πολλαπλότητες

Ορισμός 1.1 (Χάρτης) *1. Εστω M μια συνεκτική τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης $2n$. Ενας μιγαδικός χάρτης στην M είναι ένας ομοιομορφισμός $\phi : U \longrightarrow V$, όπου $U \subseteq M$ ένα ανοικτό της M και $V \subseteq \mathbb{C}^n$ ανοικτό του $\mathbb{C}^n$.*
2. Δύο μιγαδικοί χάρτες $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$, $i = 1, 2$ της M λέγονται συμβατοί αν, στην περίπτωση που $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, έχουμε ότι η απεικόνιση $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ (αλλαγή χαρτών) είναι ολόμορφη.

Ορισμός 1.2 (Ατλας) *1. Μιγαδικός άτλας στην M είναι μιά οικογένεια μιγαδικών χαρτών $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$, $i \in \mathcal{A}$, που είναι ανά δύο συμβατοί με $\cup_{i\in\mathcal{A}} U_i = M$.*
2. Δύο μιγαδικοί άτλαντες λέγονται ισοδύναμοι αν κάθε χάρτης του ενός είναι συμβατός με κάθε χάρτη του άλλου. Η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, την ένωση των χαρτών όλων των ατλάντων που περιέχονται στην κλάση, το οποίο λέγεται μέγιστος μιγαδικός άτλας στην M.

Ορισμός 1.3 (Μιγαδικές πολλαπλότητες- Επιφάνειες Riemann) *Εστω M μια συνεκτική Hausdorff τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.*
1. Μιγαδική δομή στην M λέγεται ένας μέγιστος μιγαδικός άτλας στην M.
2. Μια πολλαπλότητα M όπωςπαραπάνω εφοδιασμένη με μια μιγαδική δομή λέγεται μιγαδική πολλαπλότητα διάστασης n.
3. (Συμπαγής) Επιφάνεια Riemann λέγεται μιά (συμπαγής) μιγαδική πολλαπλότητα διάστασης 1.

Σημείωση 1.1 Στα παρακάτω όταν λέμε επιφάνεια Riemann, θα εννοούμε **συμπαγή** επιφάνεια Riemann, εκτός αν διαφορετικά αναφέρουμε.

Σημείωση 1.2 Αν στα παραπάνω αντικαταστίσουμε το $\mathbb{C}^n$ με το $\mathbb{R}^n$ και την ολόμορφη απεικόνιση με την $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση τότε έχουμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας.

Ορισμός 1.4 *Η βασική τοπολογική αναλλοίωτη μιας επιφάνειας Riemann είναι το γένος της, που διαισθητικά είναι ο αριθμός από τις οπές που περικλείει. Δύο επιφάνειες Riemann με το ίδιο γένος είναι τοπολογικά ισόμορφες.*

1.1.2 Συναρτήσεις - Απεικονίσεις

Εστω S επιφάνεια Riemann και f συνάρτηση στην S που ορίζεται σε γειτονειά του σημείου p.

Ορισμός 1.5 *Η συνάρτηση f λέγεται ολόμορφη στο σημείο p αν υπάρχει χάρτης $\phi : U \longrightarrow V$ του p τέτοιος ώστε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1}$ να είναι ολόμορφη στο $\phi(p)$.*

Εστω f συνάρτηση στην S που ορίζεται σε γειτονειά του σημείου p και είναι ολόμορφη σε όλα τα σημεία της γειτονιάς, εκτός ενδεχομένως στο p.

Ορισμός 1.6 *Η συνάρτηση f λέμε ότι έχει ιδιομορφία που αίρεται, πόλο ή ουσιώδη ιδιομορφία στο σημείο p αν υπάρχει χάρτης $\phi : U \longrightarrow V$ του p τέτοιος ώστε για την συνάρτηση $f \circ \phi^{-1}$ να ισχύει η ανάλογη ιδιότητα. Μια συνάρτηση στην S που οι ιδιομορφίες της δεν είναι ουσιώδεις λέγεται μερόμορφη συνάρτηση.*

Ορισμός 1.7 *Εστω f συνάρτηση στο σημείο p και $\phi : U \longrightarrow V$ χάρτης του p. Ορίζουμε σειρά Laurent της f στο p ως προς τον χάρτη ϕ την αντίστοιχη σειρά Laurent της $f \circ \phi^{-1}$ στο σημείο $\phi(p)$.*

Σημείωση 1.3 Η παραπάνω σειρά Laurent εξαρτάται από τον χάρτη ϕ. Ομως η τάξη της σειράς, δηλ. ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίον ο αντίστοιχος συντελεστής της σειράς είναι μη μηδενικός, αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητα του χάρτη.

Ορισμός 1.8 *Τάξη της συνάρτησης f στο σημείοp, συμβ. $\mathrm{ord}_p f$, ορίζεται η τάξη της αντίστοιχης σειράς Laurent ως προς κάποιον χάρτη.*

Το παρακάτω θεώρημα είναι συνέπεια της αρχής του μεγίστου.

Θεώρημα 1.1 *Αν η f είναι ολόμορφη συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann S τότε είναι σταθερή.*

Ορισμός 1.9 *Εστω X, Y επιφάνειες Riemann. Μια απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$ λέγεται ολόμορφη στο $p \in X$ αν υπαρχει χάρτης $\phi : U \longrightarrow V$ του p και χάρτης $\psi : U^{'} \longrightarrow V^{'}$ του $F(p)$ έτσι ώστε η συνάρτηση $psi \circ F \circ \phi^{-1}$ να είναι ολόμορφη στο $\phi(p)$. Η F λέγεται ολόμορφη απεικόνιση αν είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο.*

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα τοπικής δομής) *Εστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη, μη σταθερή, απεικόνιση επιφανειών Riemann και $p \in X$. Τότε υπάρχει μοναδικός θετικός ακέραιος m, που εξαρτάται μόνον από την απεικόνιση F και το σημείο p, με την ιδιότητα: για κάθε χάρτη $\phi : U \longrightarrow V$ του p υπάρχει χάρτης $\psi : U' \longrightarrow V'$ του $F(p)$ με την ιδιότητα $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(z) = z^m$.*

Ορισμός 1.10 *Με τον συμβολισμό του παραπάνω θεωρήματος, ο ακέραιος m λέγεται ramification index (δείκτης διακλαδώσεως) της απεικόνισης F στο σημείο p και συμβολίζεται με $\mathrm{mult}_p(F)$. Αποδεικνύεται ότι για πεπερασμένα μόνο σημεία p της X έχουμε $\mathrm{mult}_p F \geq 2$ τα οποία λέγονται ramification σημεία. Αν $p \in X$ είναι ramification σημείο τότε το σημείο $F(p) \in Y$ λέγεται branch σημείο.*

Ορισμός 1.11 *Εστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη, μη σταθερή, απεικόνιση επιφανειών Riemann. Ο βαθμός της απεικόνισης F ορίζεται ως ο αριθμός $d := \sum_{p\in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p(F)$, για κάποιο $q \in Y$ (αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητος της επιλογής του $q \in Y$). Συμβολίζεται με $\deg(F)$.*

Ο βασικός τύπος που συνδέει τα αριθμητικά δεδομένα μια ολόμορφης απεικόνισης μεταξύ επιφανειών Riemann είναι ο παρακάτω τύπος του Hurwitz.

Πρόταση 1.1 (Τύπος του Hurwitz) *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann. Αν $g(X)$, $g(Y)$ το γένος των X, Y αντίστοιχα και $\deg(F)$ ο βαθμός της απεικόνισης, αυτά συνδέονται με τον παρακάτω τύπο*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p\in X}[\mathrm{mult}_p(F) - 1].$$

Σημείωση 1.4 Στην περίπτωση που $Y = \mathbb{P}^1$, έχουμε $g(Y) = 0$ και ο τύπος του Hurwitz δίδει $\displaystyle\sum_{p\in X}[\mathrm{mult}_p(F) - 1] = 2g(X) - 2 + 2\deg(F)$.

1.2 Διαφορικές Μορφές

1.2.1 Μορφές σε ανοικτό του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{C}$

1-μορφές

Οι $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφές είναι, εκ κατασκευής, τα αντικείμενα τα οποία μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μήκος μονοπατιών σε μια επιφάνεια Riemann. Ομοίως, οι $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφές ολοκληρώνονται πάνω σε 2-διάστατα χωρία της επιφάνειας Riemann.

Ορισμός 1.12 *Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε ένα ανοικτό U του $\mathbb{R}^2$, με τιμές στους μιγαδικούς, είναι μια έκφραση της μορφής $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$, όπου*

$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις, δηλ. είναι $\mathcal{C}^\infty$ θεωρούμενες ως απεικονίσεις από το $U \subseteq \mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ και όπου d είναι ο συνήθης διαφορικός τελεστής συναρτήσεων του $\mathbb{R}^2$.

Αν γ είναι ένα κατά τμήματα ομαλό μονοπάτι στο U, δηλ. ορίζεται από μια συνεχή απεικόνιση $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ που είναι κατά τμήματα $\mathcal{C}^\infty$, τότε ορίζομε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ ως τον μιγαδικό αριθμό που προκύπτει από την συνήθη ολοκλήρωση στον απειροστικό λογισμό του πραγματικού και του μιγαδικού μέρους της παραπάνω μορφής (τα οποία ορίζονται με τον προφανή τρόπο).

Αν V είναι ανοικτό του $\mathbb{C}$ ορίζομε ως $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή στο V μιά έκφραση όπως παραπάνω ταυτίζοντας το V με το αντίστοιχο ανοικτό του $\mathbb{R}^2$. Αν z η μιγαδική συντεταγμένη του V, τότε μπορούμε εκφράσουμε την παραπάνω μορφή με χρήση των z και $\bar{z}$ ως ακολούθως. Είναι

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy \ \text{ και } \ x = (z + \bar{z})/2,\ y = (z - \bar{z})/2i.$$

Εχουμε,

$$dz = dx + idy,\ d\bar{z} = dx - idy \ \text{ και } \ dx = (dz + d\bar{z})/2,\ dy = (dz - d\bar{z})/2i.$$

Επομένως, κάθε έκφραση της μορφής $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ μπορεί να γραφεί ως $F(z,\bar{z})dz + G(z,\bar{z})d\bar{z}$ ως εξής: $f(x,y)dx + g(x,y)dy = \frac{f_1(z,\bar{z})}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{g_1(z,\bar{z})}{2i}(dz - d\bar{z}) = 1/2(f_1(z,\bar{z}) - ig_1(z,\bar{z}))dz + 1/2(f_1(z,\bar{z}) + ig_1(z,\bar{z}))d\bar{z} = F(z,\bar{z})dz + G(z,\bar{z})d\bar{z}$, όπου $f_1(z,\bar{z}) = f(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i})$ και ομοίως για την g_1. Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις $F(z,\bar{z}), G(z,\bar{z})$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις (θεωρούμενες ως απεκονίσεις των x, y). Και αντίστροφα, αν έχομε $\omega = F(z,\bar{z})dz + G(z,\bar{z})d\bar{z}$ με $F(z,\bar{z}), G(z,\bar{z})$ να είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις, τότε με όμοιο τρόπο η ω μπορεί να γραφεί ως $f(x,y)dx + g(x,y)dy$, όπου οι $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις. Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.13 *1. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε ένα ανοικτό V του $\mathbb{C}$, είναι μια έκφραση ω της μορφής $\omega = f(z,\bar{z})dz + g(z,\bar{z})d\bar{z}$, όπου οι f, g είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις του V.*
2. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε ένα ανοικτό V του $\mathbb{C}$ έχει τύπο $(1,0)$ (αντ. $(0,1)$) αν εχει την μορφή $\omega = f(z,\bar{z})dz$ (αντ. $\omega = g(z,\bar{z})d\bar{z}$), όπου οι f, g είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτησεις του V.

Αν έχομε μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f, παραγωγίζομε (τυπικά) ως προς z και $\bar{z}$ και παίρνομε:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

και
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Ορίζομε επομένως τους εξής διαφορικούς τελεστές:
$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$
και
$$\frac{\partial}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Εύκολα φαίνεται ότι μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f είναι ολόμορφη, αν και μόνον αν $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ (συνθήκες $Cauchy - Riemann$). Εχομε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.14 *1. Μια ολόμορφη 1-μορφή σε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{C}$ είναι μία έκφραση της μορφής $\omega = f(z)dz$, όπου f είναι ολόμορφη συνάρτηση στο V.*
2. Μια μερόμορφη 1-μορφή σε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{C}$ είναι μία έκφραση της μορφής $\omega = f(z)dz$, όπου f είναι μερόμορφη συνάρτηση στο V. Σημειώνουμε ότι μια μερόμορφη μορφή δεν είναι, εν γένει, $\mathcal{C}^\infty$ μορφή.

Αν $T : U^{'} \longrightarrow U$ μιά $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση με $z = T(w)$ και $\omega = f(z,\bar z)dz + g(z,\bar z)d\bar z$ μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή στο U, τότε ορίζομε $T^*\omega := f(T(w),\overline{T(w)})\,T'(w)\,dw + g(T(w),\overline{T(w)})\,\overline{T'(w)}\,d\bar w$ το οποίο είναι μιά $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή στο $U^{'}$.

Πρόταση 1.2 *Εχομε ότι αν $\gamma^{'}$ είναι ένα κατά τμήματα ομαλό μονοπάτι στο U τότε $\int_{T_*(\gamma^{'})}\omega = \int_{\gamma^{'}} T^*\omega$, όπου $T_*(\gamma^{'}) = T\circ\gamma^{'} : [0,1] \longrightarrow U$.*

Σημείωση 1.5 Αν η ω είναι μια $(1,0)$ (αντ. $(0,1)$) 1-μορφή στο U τότε η $T^*\omega$ είναι μια $(1,0)$ (αντ. $(0,1)$) 1-μορφή στο U'.

2-μορφές

Ορισμός 1.15 *Μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή σε ένα ανοικτό U του $\mathbb{R}^2$, με τιμές στους μιγαδικούς, είναι μια έκφραση της μορφής $f(x,y)\,dx\wedge dy$, όπου $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση.*

Αν D ένα τριγωνοποιήσιμο 2-διάστατο χωρίο του U, τότε ορίζομε το ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)\,dx\wedge dy$ ως τον μιγαδικό αριθμό που προκύπτει από την συνήθη ολοκλήρωση $\int_D f(x,y)\,dxdy$ στον απειροστικό λογισμό του πραγματικού και του μιγαδικού μέρους της $f(x,y)$.

Ορισμός 1.16 *Μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή σε ένα ανοικτό V του $\mathbb{C}$, είναι μια έκφραση ω της μορφής $\omega = f(z,\bar z)dz\wedge d\bar z$, όπου η f είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση του V.*

Σημειώνουμε ότι $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$. Επίσης, $dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz$, $dz \wedge dz = 0 = d\bar{z} \wedge d\bar{z}$ και $dz \wedge d\bar{z} = -2i\, dx \wedge dy$.

Αν $T : U' \longrightarrow U$ μιά $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση με $z = T(w)$ και $\omega = f(z, \bar{z})dz$ μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή στο U, τότε ορίζομε $T^*\omega := f(T(w), \overline{T(w)})|T'(w)|^2 dw \wedge d\bar{w}$ πού είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή στο U'. Ισχύει το ανάλογο της Πρότασης 1.2 για την ολοκλήρωση 2-μορφών σε χωρία:

Πρόταση 1.3 *Αν D' είναι ένα τριγωνοποιήσιμο χωρίο στο U' τότε $\int_{T_* D'} \omega = \int_{D'} T^*\omega$.*

Πράξεις με διαφορικά και μορφές

Εστω f μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση σε ανοικτό V του $\mathbb{C}$, την οποία και θα αποκαλούμε $\mathcal{C}^\infty$ 0-μορφή στο V. Μπορούμε τότε να ορίσουμε στο V τις παρακάτω $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφές:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz, \qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \qquad df = \partial f + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Επίσης ισχύουν,

$$d(fg) = f dg + g df, \qquad \partial(fg) = f\partial g + \partial f g, \qquad \bar{\partial}(fg) = f\bar{\partial} g + g\bar{\partial} f.$$

Εστω ότι ω_1 και ω_2 είναι δύο $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφές σε ανοικτό V του $\mathbb{C}$ με $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ και $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$. Τότε, μέσω αυτών των δύο, μπορούμε να ορίσουμε μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή στο V, την οποία καλούμε αντισυμμετρικό γινόμενο (wedge product) των ω_1 και ω_2 ως εξής:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge d\bar{z}.$$

Πρίν είδαμε ότι, αν έχουμε μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f, δηλ. μια $\mathcal{C}^\infty$ 0-μορφή, μπορούμε να διαφορίσουμε και να πάρουμε μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή. Αντίστοιχα, μπορούμε να διαφορίσουμε μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή και να πάρουμε $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή. Πράγματι, αν $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$, τότε ορίζομε:

$$\partial\omega = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}, \quad \bar{\partial}\omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

και

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}) dz \wedge d\bar{z}.$$

Παρατηρούμε ότι μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή ω με τύπο $(1, 0)$ είναι ολόμορφη ανν $\bar{\partial}\omega = 0$. Αν ω μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή και f μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση τότε έχουμε τούς παρακάτω κανόνες γινομένου:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega, \qquad \partial(f\omega) = \partial f \wedge \omega + f\partial\omega,$$

$$\bar{\partial}(f\omega) = \bar{\partial} f \wedge \omega + f\bar{\partial}\omega.$$

Επίσης,

$$ddf = \partial\partial f = \bar{\partial}\bar{\partial} f = 0, \qquad \partial\bar{\partial} f = -\bar{\partial}\partial f.$$

Σημείωση 1.6 Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω διαφορικοί τελεστές $d, \partial, \bar{\partial}$ αντιμετατίθενται με το T^*, όπου T μιά $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση.

Ορισμός 1.17 *1. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή ω σε ανοικτό $V \subseteq \mathbb{C}$, λέγεται ακριβής, αν υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f στο V τέτοια ώστε $df = \omega$.*
2. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε ανοικτό $V \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται d-κλειστή (ή απλώς κλειστή) αν $d\omega = 0$, ∂-κλειστή αν $\partial\omega = 0$ και $\bar{\partial}$-κλειστή αν $\bar{\partial}\omega = 0$.

Σημείωση 1.7 1. Παρατηρούμε ότι, αφού $ddf = 0$, κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή.
2. Αν ω ολόμορφη 1-μορφή τότε $d\omega = 0$, δηλαδή είναι κλειστή. Πράγματι, έστω $\omega = g(z)dz$, $g(z)$ ολόμορφη. Έχομε $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$. Άρα,

$$d\varphi = d(gdz) = dg \wedge dz = (\frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\bar{z}) \wedge dz = (\frac{\partial g}{\partial z}dz) \wedge dz = \frac{\partial g}{\partial z}(dz \wedge dz) = 0.$$

3. Αντίστροφα, με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι αν ω είναι τύπου $(1,0)$ και κλειστή, τότε είναι ολόμορφη.

1.2.2 Μορφές σε επιφάνειες Riemann - ολοκλήρωση

Μορφές

Ορισμός 1.18 *1. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1 ή 2-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann S είναι μια αντιστοιχία σε κάθε χάρτη $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}$ της S μιας 1 ή 2-μορφής ω_i που ικανοποιούν την εξής συνθήκη συμβατότητας: Αν $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i$, $i = 1, 2$ δύο χάρτες με μή κενή τομή και $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ η αντίστοιχη αλλαγή χαρτών, τότε πρέπει $T^*(\omega_2) = \omega_1$.*
2. Με όμοιο τρόπο ορίζομε τις ολόμορφες ή μερόμορφες μορφές σε επιφάνειες Riemann.
3. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της μορφής με τύπο $(1,0)$ ή $(0,1)$.

Σημείωση 1.8 1. Για να ορίσομε τις παραπάνω μορφές αρκεί να τις ορίσομε στους χάρτες ενός άτλαντα της S. Μετά μπορούμε να τίς επεκτείνουμε σε κάθε χάρτη της S χρησιμοποιώντας τις αλλαγές χαρτών. Ομοίως, μια και οι αλλαγές χαρτών διατηρούν των τύπο της μορφής, βλ. Σημείωση 1.5, για να ορίσουμε μια $(1,0)$ ή $(0,1)$ μορφή, αρκεί να την ορίσουμε στους χάρτες ενός άτλαντα.

Ορισμός 1.19 *Έστω ω μια μερόμορφη 1-μορφή, ορισμένη σε γειτονιά ενός σημείου p. Διαλέγοντας κάποια τοπική συντεταγμένη γύρω από το p, δηλ. ένα* *χάρτη που περιέχει το p, γράφουμε $\omega = f(z)dz$. Ορίζουμε τάξη της ω στο σημείο p, την τάξη $\mathrm{ord}_p(\omega) = \mathrm{ord}_p f$. Αποδεικνύεται ότι η τάξη είναι ανεξάρτητη από την επιλογή τοπικής συντεταγμένης διότι οι αλλαγές χαρτών είναι ολόμορφοι ισομορφισμοί.*

Ορισμός 1.20 *Αν ω είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ 0 ή 1 - μορφή στην επιφάνεια Riemann S τότε μπορούμε να ορίσουμε τις μορφές $\partial\omega$, $\bar\partial\omega$, $d\omega$ σε αναλογία με τους αντίστοιχους ορισμούς σε μορφές σε ανοικτό του $\mathbb{C}$. Ο ορισμός δίνει μια καλά ορισμένη $\mathcal{C}^\infty$ 1 ή 2 - μορφή διότι οι παραπάνω τελεστές αντιμετατίθενται με τις αλλαγές χαρτών, βλ. Σημείωση 1.6.*

Ορισμός 1.21 *1. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή ω σε επιφάνεια Riemann S, λέγεται ακριβής, αν υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f στην S τέτοια ώστε $df = \omega$.*
2. Μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή στην S λέγεται d-κλειστή (ή απλώς κλειστή) αν $d\omega = 0$, ∂-κλειστή αν $\partial\omega = 0$ και $\bar\partial$-κλειστή αν $\bar\partial\omega = 0$ (προφανώς όλα αυτά είναι τοπικές συνθήκες).

Σημείωση 1.9 *Ολοι οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν αν αντί για την επιφάνεια Riemann θεωρήσουμε ένα ανοικτό υποσύνολό της.*

Ολοκλήρωση 1-μορφών κατά μήκος μονοπατιών

Αν έχουμε ένα κατά τμήματα ομαλό μονοπάτι γ σε μια επιφάνεια Riemann και μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε μια ανοικτή γειτονία του γ, τότε μπορούμε ορίσομε το ολοκλήρωμα της 1-μορφής κατά μήκος του γ ως ακολούθως. Λόγω της συμπάγειας μπορούμε να χωρίσουμε το γ σε πεπερασμένα το πλήθος μονοπάτια γ_i, τέτοια ώστε η εικόνα του καθενός να περιέχεται σε ακριβώς ένα χάρτη και να είναι ομαλό. Οπότε, αν φ_i είναι ο αντίστοιχος χάρτης και $[a_i, a_{i+1}]$ το πεδίο ορισμού του γ_i, το ολοκλήρωμα της ω κατά μήκος του γ ορίζεται ως

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{t=a_{i-1}}^{t=a_i} [f_i(z(t), \bar z(t))\, z'(t) + g_i(z(t), \bar z(t))\, \bar z'(t)]\, dt.$$

Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλ. δεν εξαρτάται από την επιλεχθείσα διαμέριση του μονοπατιού λόγω της Πρότασης 1.2.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα μερόμορφων 1-μορφών: Αν ω είναι μια μερόμορφη 1-μορφή σε μια επιφάνεια Riemann S και p ένα σημείο αυτής, τότε επιλέγοντας χάρτη γύρω από το p και τοπική συνταταγμένη z με κέντρο το p, μπορούμε να γράψουμε την ω σε σειρά Laurent ως εξής:

$$\omega = f(z)dz = (\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n)dz,$$

όπου $c_{-M} \neq 0$, ώστε $\mathrm{ord}_p(\omega) = -M$. Ορίζουμε $\mathrm{Res}_p(\omega) = c_{-1}$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος των επιλογών που κάναμε διότι αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega,$$

όπου γ ένας οποιοσδήποτε μικρός 'κύκλος' γύρω από το p που στο εσωτερικό του δεν περιέχει άλλο πόλο της ω εκτός ενδεχομένως του p. Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της επιλογής του γ λόγω του παρακάτω Θεωρήματος του Stokes 1.3. Ισχύει, επίσης, ότι

$$\mathrm{Res}_p(df/f) = \mathrm{ord}_p(f).$$

Ολοκλήρωση 2-μορφών

Αν T είναι ένα τρίγωνο σε μια επιφάνεια Riemann, αρκετά μικρό ώστε η εικόνα του να περιέχεται σε ένα χάρτη φ, και αν $\eta = f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ μια $\mathcal{C}^\infty$ 2-μορφή σε αυτόν τον χάρτη, ορίζουμε:

$$\int\int_T \eta = \int\int_{\varphi(T)} f(z,\bar{z})\,dz\wedge d\bar{z} = \int\int_{\varphi(T)} (-2i)f(x+iy, x-iy)\,dx\wedge dy,$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το συνηθισμένο ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}^2$. Στην περίπτωση που έχουμε ένα τριγωνοποιήσιμο χωρίο D, παίρνουμε τριγωνοποίηση τέτοια ώστε η εικόνα κάθε τριγώνου να ανήκει σε ένα χάρτη και ορίζομε το ολοκλήρωμα $\int\int_D \eta$ ως το άθροισμα των επιμέρους ολοκληρωμάτων πάνω στα επιλεγμένα τρίγωνα. Οπως στην περίπτωση της ολοκλήρωσης 1-μορφών σε μονοπάτια, ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος της τριγωνοποίησης, βλ. Πρόταση 1.3.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα του Stokes) *1. Αν D είναι ένα τριγωνοποιήσιμο κλειστό χωρίο μιας επιφάνειας Riemann και ω μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε μια ανοικτή γειτονιά του D, τότε*

$$\int_{\partial D}\omega = \int\int_D d\omega.$$

2. Ειδικότερα, αν ω είναι μια κλειστή $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή σε μια ανοικτή γειτονιά του D, τότε $\int_{\partial D}\omega = 0$.

Επίσης, ισχύει και το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

Θεώρημα 1.4 *Εστω ω μια μερόμορφη 1-μορφή σε επιφάνεια Riemann S. Τότε*

$$\sum_{p\in S}\mathrm{Res}_p(\omega) = 0.$$

Πόρισμα 1.1 *Αν f μια μη σταθερή, μερόμορφη συνάρτηση σε επιφάνεια Riemann S τότε*

$$\sum_{p\in S}\mathrm{Res}_p(f) = 0.$$

1.2.3 Ομοτοπία, ομολογία και ολοκλήρωση

Υπενθυμίζουμε σ' αυτή την παράγραφο τους ορισμούς των ομάδων ομοτοπίας και ομολογίας και περιγράφομε τις παραπάνω ομάδες στην περίπτωση μιας επιφάνειας Riemann S.

Εστω $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to S$ μια συνεχής συνάρτηση, και $\gamma_s : [a,b] \to X$ με $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι τα γ_s έχουν ίδια αρχή και τέλος (δηλαδή ότι η Γ είναι σταθερή στα σύνολα $\{a\} \times [0,1]$ και $\{b\} \times [0,1]$).

Ορισμός 1.22 *1. Η απεικόνιση Γ ορίζει μια ομοτοπία μεταξύ των μονοπατιών γ_0 και γ_1 στην S. Τότε λέμε ότι τα μονοπάτια γ_0 και γ_1 είναι ομοτοπικά.*
2. Η ομάδα ομοτοπίας της επιφάνειας Riemann S με βάση ένα σημείο $p \in S$ ορίζεται ως η ομάδα των κλάσεων ομοτοπίας των (κλειστών) μονοπατιών της S με αρχή και τέλος το σημείο p και συμβολίζεται με $\pi_1(S,p)$.

Πρόταση 1.4 *Αν γ_0 και γ_1 είναι κατά τμήματα ομαλά ομοτοπικά μονοπάτια σε επιφάνεια Riemann S και ω μια κλειστή $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή (δηλ. $d\omega = 0$), τότε*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Απόδειξη: Αν πάρουμε τη διαφορά $\gamma_1 - \gamma_0$ των δύο μονοπατιών, αυτή είναι το σύνορο κάποιου απλά συνεκτικού συνόλου D, αφού τα μονοπάτια είναι ομοτοπικά. Δηλαδή $\gamma_1 - \gamma_0 = \partial D$. Οπότε, από το Θεώρημα του Stokes, θα έχουμε

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_0} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int \int_D d\omega = 0,$$

αφού η ω είναι κλειστή. □

Σημείωση 1.10 Αποδεικνύεται ότι αν γ ένα μονοπάτι στην S τότε υπάρχει πάντα ένα κατά τμήματα ομαλό μονοπάτι γ' ομοτοπικό με το γ. Μπορούμε τότε να ορίσομε το ολοκλήρωμα μιας *κλειστής* $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφής ω κατά μήκος του γ ως $\int_\gamma \omega := \int_{\gamma'} \omega$ και ο ορισμός είναι καλός, δηλ. δεν εξαρτάται από την επιλογή του γ', λόγω της παραπάνω πρότασης.

Παρατηρούμε ότι αφού κάθε ολόμορφη 1-μορφή είναι κλειστή, η ολοκλήρωση ολόμορφων 1-μορφών εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας του μονοπατιού πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε. Επομένως, αν $\pi_1(S,p)$ είναι η θεμελιώδης ομάδα ομοτοπίας της S, η συνάρτηση

$$\int_{--} \omega : \pi_1(S,p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

η οποία στέλνει την κλάση ομοτοπίας του γ στο $\int_\gamma \omega$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση που ορίζει ομομορφισμό ομάδων.

Στην περίπτωση των επιφανειών Riemann η ομάδα ομοτοπίας έχει την εξής περιγραφή. Μπορούμε να θεωρήσουμε την επιφάνεια Riemann γένους g (ως προς την τοπολογική της δομή) ως ένα κανονικό πολύγωνο $4g$ πλευρών, στις πλευρές του οποίου κάνουμε κάποιες ταυτίσεις. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{P}_g$ είναι κανονικό πολύγωνο $4g$ πλευρών, ονοματίζομε διαδοχικά τις πλευρές με $a_i, b_i, a'_i, b'_i,\ i = 1, \ldots, g$, όπου στις δύο πρώτες προσδίδομε κατεύθυνση αντίθετη της φοράς του ρολογιού και στις δύο τελευταίες την κατεύθυνση της φοράς του ρολογιού. Η επιφάνεια Riemann S, προκύπτει αν ταυτίσομε τα a_i με τα a'_i και τα b_i με τα $b'_i,\ i = 1, \ldots, g$, έτσι ώστε οι κατευθύνσεις τους να συμπίπτουν. Παρατηρείστε ότι ολες οι κορυφές του πολυγώνου αυτού, ταυτίζονται σε ένα σημείο, έστω p. Τότε η ομάδα ομοτοπίας με βάση το σημείο p είναι η ελεύθεση ομάδα που παράγεται από τα κλειστά μονοπάτια $a_i,\ b_i,\ i = 1, \ldots, g$, με μοναδική σχέση την $\sqcap_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1$ δηλ.

$$\pi_1(S,p) = < a_1, b_i,\ i = 1, \ldots, g > / \sqcap_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\ .$$

Η ομάδα αυτή είναι μή αντιμεταθετική για $g \geq 2$. Η αβελιανοποίηση της, δηλαδή η ομάδα πηλίκο

$$\frac{\pi_1(S,p)}{[\pi_1(S,p), \pi_1(S,p)]}$$

είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με $2g$ γεννήτορες, τις κλάσεις των $a_i, b_i,\ i = 1, \ldots, g$, την οποία ονομάζουμε πρώτη ομάδα ομολογίας της επιφάνειας S και την συμολίζομε με $H_1(S, \mathbb{Z})$.

Γεωμετρικός ορισμός της πρώτης ομάδας ομολογίας: Έστω $CLCH(S)$ οι κλειστές αλυσίδες στην επιφάνεια Riemann S. Με κλειστές αλυσίδες εννοούμε τα τυπικά αθροίσματα κλειστών μονοπατιών πάνω στην επιφάνεια. Εστω $BCH(S)$ το σύνολο των συνοριακών αλυσίδων (δηλ. στοιχεία της μορφής $\partial\Omega$, όπου Ω τριγωνοποιήσιμο χωρίο της επιφάνειας). Τότε η ομάδα ομολογίας $H_1(S, \mathbb{Z})$ μπορεί να ορισθεί και ως το πηλίκο

$$\frac{CLCH(S)}{BCH(S)}\ .$$

Για να καταλάβουμε διαισθητικά την ισοδυναμία των δύο ορισμών της ομάδας ομολογίας, ας δεχθούμε ότι την έχομε ορίσει με τον τελευταίο τρόπο δηλ. έστω ότι $H_1(S, \mathbb{Z}) = \frac{CLCH(S)}{BCH(S)}$ και ας σκιαγραφίσουμε το πώς αυτή είναι ισόμορφη με την $\frac{\pi_1(S,p)}{[\pi_1(S,p), \pi_1(S,p)]}$. Ορίζουμε

$$\varphi : \pi_1(S,p) \longrightarrow H_1(S, \mathbb{Z})$$

με

$$[\gamma] \mapsto [\bar{\gamma}]$$

Με $[\gamma]$ εννοούμε την κλάση modulo ομοτοπία με σταθερό σημείο το p και με $[\bar{\gamma}]$ την κλάση του ίδιου στοιχείου modulo ομολογία. Για να αποδειχθεί ο ισομορφισμός, πρέπει να δείξουμε ότι: α) η φ είναι επιμορφισμός και β) $Ker(\varphi) = \{$μεταθέτες$\}$.

Για το α): Έστω $[\bar{\gamma}]$ στοιχείο της $H_1(S, \mathbb{Z})$. Αν $q = \gamma(0) = \gamma(1)$ παίρνουμε ένα μονοπάτι σ που συνδέει τα σημεία q και p. Δηλαδή $\sigma(0) = q$ και $\sigma(1) = p$. Τότε το $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ είναι στοιχείο της $\pi_1(S, p)$ και $\varphi([\sigma\gamma\sigma^{-1}]) = [\bar{\gamma}]$.

Για το β): $\{$μεταθέτες$\} \subseteq Ker(\varphi)$ είναι προφανές, αφού η $H_1(S, \mathbb{Z})$ είναι αντιμεταθετική. Ο εγκλεισμός $\{$μεταθέτες$\} \supseteq Ker(\varphi)$ είναι πιο δύσκολο να αποδειχθεί.

Σημειώνουμε ότι ο πυρήνας του ομομορφισμού $\int_{--} \omega : \pi_1(S, p) \to \mathbb{C}$ περιέχει την υποομάδα των μεταθετών της ομάδας $\pi_1(S, p)$ και επομένως έχομε τον επαγόμενο ομομορφισμό

$$\int_{--} \omega : H_1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

1.3 Προσανατολισμός - Τομές κλειστών μονοπατιών

1.3.1 Προσανατολισμός διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων

Ορισμός 1.23 *Ενας διαφορομορφισμός (αμφιδιαφόριση) $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται orientation preserving αν $\mathcal{J}(T) > 0$. Σημειώνουμε ότι αφού T διαφορομορφισμός έχουμε ότι η $\mathcal{J}(T)$ δεν μηδενίζεται πουθενά.*

Σημείωση 1.11 Εστω $(x_1, \ldots, x_n)$ το σύνηθες ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$. Παρατήρησε ότι αν $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορομορφισμός (αμφιδιαφόριση) τότε $T^*(dx_1 \wedge \cdots dx_n) = \mathcal{J}(T)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Επομένως ο T είναι orientation preserving αν και μόνον αν το $T^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του $dx_1 \wedge \cdots dx_n$ σε κάθε σημείο.

Ορισμός 1.24 *Εστω M διαφορίσιμη πολλαπλότητα με άτλα (U_a, ϕ_a). Λέμε ότι ο άτλας είναι προσανατολισμένος (oriented) αν ολες οι συναρτήσεις αλλαγής συντεταγμένων είναι orientation preserving, δες Ορισμό 1.23. Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M λέγεται προσανατολίσιμη (orientable) αν έχει προσανατολισμένο άτλα.*

Σημείωση 1.12 Υπενθυμίζομε ότι η διαφορίσιμη δομή σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα καθορίζεται από έναν άτλα. Η παραπάνω πολλαπλότητα επιδέχεται και άλλους άτλαντες που καθορίζουν την ίδια δομή, αυτούς που είναι συμβατοί με τον δοσμένο (δηλ. οι αντίστοιχες αλλαγες συντεταγμένων των μεταξύ τους χαρτών είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις). Η ένωση όλων των συμβατών μεταξύ τους άτλαντων ορίζει τον (μοναδικό) μέγιστο άτλα της διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Σημειώνουμε ότι μια πολλαπλότητα ενδεχομένως να έχει δύο (συμβατούς) άτλαντες που ο ένας να είναι προσανατολισμένος και ο άλλος όχι. Π.χ. $M = \mathbb{R}$ με πρώτο άτλαντα τον ταυτοτικό (προσανατολισμένος) και δεύτερο άτλαντα τον $\{(U_1 = \{x > -1\}, \phi_1 = \mathrm{id}),\ (U_2 = \{x < 1\}, \phi_2 = -\mathrm{id})\}$ που δεν είναι προσανατολισμένος.

Πρόταση 1.5 *Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, διάστασης n, έιναι προσανατολίσιμη αν και μόνον αν έχει μια n-μορφή που δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο.*

Απόδειξη: Με χρήση της Σημείωσης 1.11. Για πλήρη απόδειξη, βλ. [BT] Proposition 3.2. □

Σε μια προσανατολίσιμη διαφορίσιμη πολλαπλότητα οι δύο n-μορφές ω_1, ω_2 που δεν μηδενίζονται πουθενά διαφέρουν κατά μιά συνάρτηση f που δεν μηδενίζεται πουθενά: $\omega_1 = f\,\omega_2$. Ορίζομε σχέση ισοδυναμίας στο παρπάνω σύνολο των n-μορφών που δεν μηδενίζονται πουθενά, λέγοντας ότι δύο τέτοιες είναι ισοδύναμες αν διαφέρουν κατά μία θετική συνάρτηση. Η σχέση ορίζει δύο κλασεις ισοδυναμίας στο παραπάνω σύνολο. Κάθε μία από αυτές τις δύο κλάσεις λέγεται προσανατολισμός orientation στην πολλαπλότητα. Επιλογή προσανατολισμού σημαίνει επιλογή μια από των δύο κλασεων (ισοδύναμες n-μορφές ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό).

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{R}^3$ οι μορφές $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$ ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό ενω οι $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$ ορίζουν αντίθετο προσανατολισμό.

Ορισμός 1.25 *Ονομάζουμε θετικό προσανατολισμό του $\mathbb{R}^n$ αυτόν που ορίζεται από την μορφή $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.*

Σημείωση 1.13 Εστω $(w_1, \ldots, w_n)$ ένα σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$, δηλ. ορίζουν αμφιδιαφόριση $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $T^*x_i = w_i$. Τότε η μορφή $dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n$ ορίζει προσανατολισμό στο $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, $dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n = \mathcal{J}(T) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, με $\mathcal{J}(T)$ πουθενά μηδεν. Αρα ένα σύστημα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^n$ ορίζει ένα επαγόμενο προσανατολισμό στον $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 1.2 *Εστω M διαφορίσιμη πολλαπλότητα με άτλα (U_a, ϕ_a). Τότε ο άτλας είναι προσανατολισμένος αν σε κάθε $U_a \cap U_b$ οι μορφές $\phi_a^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ και $\phi_b^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ διαφέρουν κατά μία θετική συνάρτηση. Δηλαδή, τα αντίστοιχα τοπικά συστήματα συντεταγμένων επάγουν συμβατούς προσανατολισμούς. Θα λέμε ότι ο προσανατολισμός είναι ο θετικός (αντιστ. αρνητικός) αν η n-μορφή που τον ορίζει επάγει σε κάθε χάρτη τον θετικό (αντιστ. αρνητικό) προσανατολισμό.*

Ορισμός 1.26 *Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ με επιλεγμένο προσανατολσμο τον θετικό (αντιστ. αρνητικό). Εστω v, w δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε γωνία των v, w την γωνία με αρχική πλευρα το v τελική το w και φορά διαγραφής την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (αντιστ. των δεικτών του ρολογιού).*

Σημείωση 1.14 Αν (w_1, w_2) σύστημα συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^2$. Εστω ϕ η γωνία που ορίζουν τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα με επιλεγμένο προσανατολισμό τον θετικό. Τότε ο επαγόμενος προσανατολισμός απο το σύστημα συντεταγμένων είναι ο θετικός εάν και μόνον εάν η ϕ είναι $< \pi$.

Πρόταση 1.6 *Εστω $\mathbb{C}$ το μιγαδικό επίπεδο με συνταταγμένη $z = x + iy$ όπου x, y οι κανονικές συντεταγμένες του αντίστοιχου πραγματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Εστω $u = f(z)$ μια ολόμορφη αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων (δηλ. μια 1-1, επί ολόμορφη συνάρτηση). Τότε η αντίστοιχη αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^2$ διατηρεί τον (επαγόμενο) προσανατολισμό. (Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για το $\mathbb{C}^n$).*

Απόδειξη: εστω $f(x, y) = f(x + iy) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Τότε $x_1 = \mathrm{Re}f$, $y_1 = \mathrm{Im}f$ οι αντίστοιχες συντεταγμένες. Η Ιακωβιανή δίδεται απο $\frac{\partial \mathrm{Re}f}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{Im}f}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Re}f}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{Im}f}{\partial x}$. Με χρήση των συνθηκών του Cauchy το τελευταίο ισούται με $(\frac{\partial \mathrm{Re}f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \mathrm{Re}f}{\partial y})^2 > 0$.
□

Πρόταση 1.7 *Εστω S επιφάνεια Riemann με άτλα (U_a, ϕ_a), $a \in A$. Τότε, θεωρούμενη ως πραγματική πολλαπλότητα, ο άτλας είναι προσανατολισμένος και άρα κάθε επιφάνεια Riemann είναι προσανατολίσιμη. Το ίδιο ισχύει για οποιασδήποτε διάστασης μιγαδική πολλαπλότητα.*

Απόδειξη: Πόρισμα της Πρότασης 1.6. □

Σημείωση 1.15 1. Ισόμορφισμός επιφανειών Riemann διατηρεί τον προσανατολισμό.
3. Εχοντας διαλέξει τον θετικό προσανατολισμό, μπορούμε για δύο εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια να ορίσουμε την γωνία τους όπως παραπάνω.

1.3.2 Τομές κλειστών μονοπατιών

Δύο μονοπάτια σε επιφάνεια Riemann S λέμε ότι τέμνονται εγκάρσια στο σημείο P, αν το P είναι σημείο τομής τους, τα μονοπάτια είναι ομαλά στο P, και τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ολα τα παραπάνω υπολοιούνται με χρήση χάρτη).

Ορισμός 1.27 *Εστω γ, σ δύο μονοπάτια σε επιφάνεια Riemann S που τέμνονται εγκάρσια στο P. Τότε ορίζουμε τον αριθμό τομής τους στο P ως $+1$ αν η γωνία* *που σχηματίζουν τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα είναι $< \pi$ και -1 αν είναι $> \pi$ (η γωνία λαμβάνεται ως προς τον θετικό προσανατολισμό στην S).*

Λήμμα 1.1 (Βασικό) *Εστω γ, σ δύο κλειστά μονοπάτια σε επιφάνεια Riemann S. Τότε μπορούμε να τις μετακινήσουμε μέσα στην κλάση ομολογίας τους ώστε να τέμνονται εγκάρσια.*

Ορισμός 1.28 *Εστω γ, σ δύο κλειστά μονοπάτια σε επιφάνεια Riemann S. Ορίζουμε τον αριθμό τομής τους ως εξής:*
1. Τις μεταβάλουμε μεσα στην κλάση ομολογίας τους ώστε να τέμνονται εγκάρσια
2. Στις επαγόμενες καμπύλες αθροίζουμε τους αντίστοιχους τοπικούς αριθμούς τομής στα σημεία τομής των μονοπατιών και αυτός είναι ο αριθμός τομής $\gamma \cdot \sigma$.

Πρόταση 1.8 *1. Ο παραπάνω αριθμός είναι καλά ορισμένος, δηλ. εξαρτάται μόνο από την κλάση ομολογίας.*
2. Ορίζει μια διγραμμική απεικόνιση $I : H_1(S,\mathbb{Z}) \times H_1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.
3. Διαλέγοντας την κανονική βάση $< a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g >$ στην $H_1(S,\mathbb{Z})$, οι αντίστοιχοι αριθμοί τομής είναι $a_i \cdot a_j = 0 = b_i \cdot b_j$ και $a_i \cdot b_j = \delta_{ij} = -b_j \cdot a_i$.

Απόδειξη: Το 1. είναι μεγάλο θεώρημα. Τα υπόλοιπα από τον ορισμό. □

Πρόταση 1.9 (Poincare duality) *Η παραπάνω διγραμμική μορφή επάγει ένα φυσιολογικό ισομορφισμό ομάδων $\phi : H_1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(S,\mathbb{Z}) := Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ που στέλνει το $\gamma \in H_1(S,\mathbb{Z})$ στο $\phi_\gamma : H_1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\phi_\gamma(\sigma) = \gamma \cdot \sigma$.*

Απόδειξη: Καταρχήν, για το 1-1, δείχνουμε ότι $ker(\varphi) = 0$. Εχουμε $Ker(\varphi) = \{\gamma \in H_1(S,\mathbb{Z}) \text{ με } \varphi_\gamma \equiv 0\} = \{\gamma \in H_1(S,\mathbb{Z}) \text{ με } \gamma \cdot \gamma' = 0,\ \forall \gamma' \in H_1(S,\mathbb{Z})\}$. Αν $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ μία βάση του $H_1(S,\mathbb{Z})$, το παραπάνω σύνολο είναι ίσο με $\{\gamma : \gamma \cdot a_i = 0,\ \gamma \cdot b_i = 0,\ i = 1, \ldots, g\}$. Το παραπάνω σύνολο περιέχει μόνο τη μηδενική κλάση, διότι αν γράψουμε $\gamma = n_1 a_1 + \ldots + n_g a_g + m_1 b_1 + \ldots + m_g b_g$ και λάβουμε υπ' όψιν τις τομές των καμπυλών όπως στην Πρόταση 1.8 (3), παίρνουμε $n_i = m_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, g$.

Για το επί: Έστω $\psi \in H^1(S,\mathbb{Z})$. Ψάχνουμε $\gamma \in H_1(S,\mathbb{Z})$ τέτοιο ώστε $\varphi_\gamma = \psi$. Δηλαδή, $\gamma \cdot a_i = \psi(a_i)$ και $\gamma \cdot b_i = \psi(b_i)$, για κάθε $i = 1, \ldots, g$. Αν γράψουμε $\gamma = n_1 a_1 + \ldots + n_g a_g + m_1 b_1 + \ldots + m_g b_g$, τα παραπάνω δίδουν $m_i = \psi(a_i)$ και $n_i = \psi(b_i)$. Άρα, βρήκαμε το ζητούμενο γ. □

1.4 Τα θεωρήματα των Hodge και de Rham

Με $\Omega^1(S)$ συμβολίζουμε τις ολόμορφες 1-μορφές πάνω στην επιφάνεια Riemann S, γένους g. Ένα πολύ βασικό θεώρημα είναι το εξής.

Θεώρημα 1.5 *Αν S επιφάνεια Riemann γένους g τότε* $\dim \Omega^1(S) = g$.

Εδώ, ανάμεσα στα άλλα, θα αποδείξουμε και την ανισότητα:

$$\dim \Omega^1(S) \leq g.$$

Έστω $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ μια $\mathbb{Z}$-βάση της ομάδας ομολογίας $H_1(S, \mathbb{Z})$ της επιφάνειας S. Γεωμετρικά, γύρω από κάθε 'τρύπα' της επιφάνειας, αντιστοιχούν δύο από τα στοιχεία της βάσης, έστω τα γ_i και γ_{g+i}, εκ των οποίων το ένα την περικλείει οριζοντίως και το άλλο καθέτως.

Οπότε, αν γ μια κλειστή καμπύλη στην S, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_{2g} \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^{2g} n_i [\gamma_i] \ \in H_1(S, \mathbb{Z}).$$

Ισοδύναμα,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i + \partial \Omega,$$

όπου Ω τριγωνοποιήσιμο χωρίο της επιφάνειας. Τώρα, από το θεώρημα του Stokes φαίνεται εύκολα ότι:

Πρόταση 1.10 *Αν λ μια κλειστή 1-μορφή στο S, η απεικόνιση*

$$\eta_\lambda : H_1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

με

$$[\gamma] \mapsto \int_\gamma \lambda,$$

όπου γ είναι κλειστή καμπύλη στην S, είναι καλά ορισμένη.

Απόδειξη: Αν γ' μια καμπύλη ομόλογη με τη γ, τότε η διαφορά τους $\gamma' - \gamma = \partial \Omega$, όπου Ω μια τριγωνοποιήσιμη περιοχή στην S. Τότε, απο Stokes έχουμε:

$$\eta_\lambda(\gamma) - \eta_\lambda(\gamma') = \int_{\gamma - \gamma'} \lambda = \int_{\partial \Omega} \lambda = \int \int_\Omega d\lambda = 0$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.11 *Αν λ είναι μια κλειστή $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή στην S και αν επιπλέον για κάθε $i = 1, \ldots, 2g$ ισχύει ότι $\int_{\gamma_i} \lambda = 0$, τότε η λ είναι μια ακριβής $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή. Δηλαδή, υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f με $\lambda = df$.*

Απόδειξη: Καταρχήν, σταθεροποιούμε κάποιο βασικό σημείο p_0 στην S. Στη συνέχεια, για κάθε $p \in S$, διαλέγουμε μονοπάτι γ από το p_0 στο p και ορίζουμε την απεικόνιση

$$f(p) = \int_\gamma \lambda.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του γ που διαλέγουμε. Πράγματι, αν $\gamma^{'}$ ένα άλλο μονοπάτι από το p_0 στο p, τότε η διαφορά $\gamma - \gamma^{'}$ είναι μία κλειστή καμπύλη στην S και όπως πριν θα έχουμε:

$$\gamma - \gamma^{'} = \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i + \partial\Omega.$$

Τώρα, από την ιδιότητα

$$\int_{\gamma_i} \lambda = 0, \qquad i = 1, \ldots, 2g$$

και αφού

$$\int_{\partial\Omega} \lambda = \int\int_{\Omega} d\lambda = 0,$$

συνάγουμε ότι

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_{\gamma^{'}} \lambda\,,$$

δηλαδή ότι η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη. Επίσης, η συνάρτηση f είναι και $\mathcal{C}^{\infty}$, διότι ολοκληρώνουμε μια $\mathcal{C}^{\infty}$ 1-μορφή. Άρα, βρήκαμε μια καλά ορισμένη $\mathcal{C}^{\infty}$ συνάρτηση, τέτοια ώστε $df = \lambda$. $\square$

Πρόταση 1.12 *Έστω S επιφάνεια Riemann και ω, $\varphi \in \Omega^1(S)$. Αν*

$$\omega + \bar{\varphi} = df,$$

όπου f μια $\mathcal{C}^{\infty}$ συνάρτηση στην S, τότε $\omega = \varphi = 0$.

Απόδειξη: Γραφουμε τις μορφές ω και φ τοπικά στη μορφή $\omega = h(z)dz$ και $\varphi = g(z)dz$. Τότε, $\omega \wedge \varphi = 0$ (διότι δεν έχουμε μέρος με $d\bar{z}$ στα διαφορικά). Επίσης,

$$\frac{i}{2}\,\varphi \wedge \bar{\varphi} = |g(z)|^2 \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z} = |g(z)|^2 du \wedge dv,$$

όπου u και v οι αντίστοιχες πραγματικές μεταβλητές. Θα δείξουμε, με εις άτοπον απαγωγή, ότι $\varphi = 0$. Έστω ότι είχαμε $\varphi \neq 0$. Τότε,

$$\frac{i}{2}\int\int_S \varphi \wedge \bar{\varphi} = \int\int_S |g(z)|^2 du \wedge dv > 0.$$

Επίσης,

$$\varphi \wedge \bar{\varphi} = \varphi \wedge \bar{\varphi} + 0 = \varphi \wedge \bar{\varphi} + \varphi \wedge \omega = \varphi \wedge (\omega + \bar{\varphi}) = \varphi \wedge df.$$

Θα δείξουμε παρακάτω ότι

$$\int\int_S \varphi \wedge df = 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση, οπότε θα πρέπει τελικά να είναι $\varphi = 0$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρούμε:

$$d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f \wedge d\varphi.$$

Αφού $\varphi \in \Omega^1(S)$, τότε $d\omega = 0$, βλ. Σημείωση 1.7. Οπότε,

$$\varphi \wedge df = -df \wedge \varphi = -d(f\varphi).$$

Και αφού $f\varphi$ είναι μια $\mathcal{C}^\infty$ 1-μορφή, ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int\int_S d(f\varphi) = 0$$

το οποίο, στη συνέχεια δίνει

$$\int\int_S \varphi \wedge df = -\int\int_S d(f\varphi) = 0.$$

Ομοίως, δείχνουμε ότι $\omega = 0$. □

Πρόταση 1.13 *Έστω S επιφάνεια Riemann γένους g. Ισχύει ότι:*

$$\dim \Omega^1(S) \leq g.$$

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε ότι $\dim \Omega^1(S) \geq g+1$ και θα φτάσουμε σε άτοπο. Έστω $\omega_1, \cdots, \omega_{g+1} \in \Omega^1(S)$ γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{C}$. Παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^{g+1} (\lambda^j \omega_j + k^j \bar{\omega}_j) = 0,\ i = 1, \ldots, 2g,$$

όπου γ_i μια $\mathbb{Z}$-βάση του $H_1(S, \mathbb{Z})$. Τώρα, θεωρούμε τα $\lambda^1, \ldots, \lambda^{g+1}, k^1, \ldots, k^{g+1}$ σαν αγνώστους και έχουμε $2g$ γραμμικές εξισώσεις με $2g+2$ αγνώστους. Το σύστημα αυτό έχει μή τετριμμένες λύσεις, και έστω $\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^{g+1}, k_0^1, \ldots, k_0^{g+1}$ μια από αυτές. Θέτουμε

$$\omega = \sum_{j=1}^{g+1} \lambda_0^j\, \omega_j \in \Omega^1(S), \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{g+1} \bar{k}_0^j\, \omega_j \in \Omega^1(S).$$

Και τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, 2g$ έχουμε

$$\int_{\gamma_i} (\omega + \bar{\varphi}) = \int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^{g+1} (\lambda_0^j\, \omega_j + k_0^j\, \omega_j) = 0.$$

Οπότε, από την Πρόταση 1.11 έχουμε ότι υπάρχει μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $\omega + \bar{\varphi} = df$ και από την Πρόταση 1.12 συμπεραίνουμε ότι $\omega = \varphi = 0$. Τότε όμως, θα έξουμε ότι τα $\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^{g+1}, k_0^1, \ldots, k_0^{g+1}$ θα είναι όλα μηδέν, το οποίο είναι άτοπο, αφού τα πήραμε ως μη τετριμμένη λύση του συστήματος. □

Ορισμός 1.29 *Έστω S μια επιφάνεια Riemann. Η πρώτη ομάδα συνομολογίας της S (με μιγαδικούς συντελεστές) είναι:*

$$H^1(S,\mathbb{C}) := Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{C}).$$

Ορισμός 1.30 *Η πρώτη ομάδα συνομολογίας De Rham της S είναι το πηλίκο*

$$H^1_{DR}(S) := \frac{\{\textit{κλειστές } \mathcal{C}^\infty \text{ 1-μορφές}\}}{\{\textit{ακριβείς } \mathcal{C}^\infty \text{ 1-μορφές}\}}.$$

Σημείωση 1.16 Έχουμε την ισότητα

$$Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{C}) = H^1(S,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}.$$

Αυτή προκύπτει εύκολα, από τα εξής:
1. Αν M και N είναι $R-modules$, τότε

$$Hom_R(M,N)\cong M^*\otimes_R N,$$

όπου $M^* = Hom_R(M,R)$.
2.

$$H^1(S,\mathbb{Z}) := H_1(S,\mathbb{Z})^* = Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}).$$

Με αυτόν τον τρόπο το $H^1(C,\mathbb{Z})$, που είναι ένα $\mathbb{Z}$-module, το επεκτείνουμε στο $H^1(S,\mathbb{C})$ που αντιστοιχεί σε ομομορφισμούς με τιμές στους μιγαδικούς και είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $2g$.

Τώρα, θα προσπαθήσουμε να δούμε πώς συνδέονται οι παραπάνω έννοιες. Κατ΄ αρχήν, αν έχουμε μια κλειστή 1-μορφή λ, είδαμε ότι μπορούμε να ορίσουμε τη γραμμική συνάρτηση $\eta_\lambda\in H^1(S,\mathbb{C})$ με

$$\eta_\lambda : H_1(S,\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$[\gamma]\mapsto\int_\gamma\lambda\,.$$

Οπότε, επάγεται ο ομομορφισμός

$$\eta : \{\text{κλειστές } \mathcal{C}^\infty \text{ 1-μορφές}\}\longrightarrow H^1(S,\mathbb{C})$$
$$\lambda\mapsto\eta_\lambda.$$

Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού η είναι το σύνολο $\{\lambda : \eta_\lambda\equiv 0\}$. Όμως, αν $\eta_\lambda\equiv 0$, έχουμε ότι $\int_{\gamma_i}\lambda = 0$, για κάθε $i = 1,\cdots,2g$ και από την Πρόταση 1.11 έχουμε ότι η λ είναι ακριβής. Αυτό τότε, μας δίνει ότι η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση $F_{DR} : H^1_{DR}(S)\longrightarrow H^1(S,\mathbb{C})$ θα έχει τετριμμένο πυρήνα, άρα θα είναι $1-1$. Επίσης, από την Πρόταση 1.12, έχουμε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$\Omega^1(S)\oplus\bar{\Omega}^1(S)\xrightarrow{F_H} H^1_{DR}(S)$$

$$\omega \oplus \bar{\varphi} \mapsto \omega + \bar{\varphi}$$

είναι $1-1$. Οπότε, κατασκευάζουμε την ακολουθία απο $1-1$ γραμμικές απεικονίσεις

$$\Omega^1(S) \oplus \bar{\Omega}^1(S) \xrightarrow{F_H} H^1_{DR}(S) \xrightarrow{F_{DR}} H^1(S, \mathbb{C}).$$

Το πρώτο και τελευταίο στοιχείο της ακολουθίας είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικοί χώροι διάστασης $2g$. Και επειδή οι απεικονίσεις είναι $1-1$, θα έχουμε τελικά ισομορφισμούς. Συνεπώς έχουμε αποδείξει τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1.6 (Hodge) *Σε μία επιφάνεια Riemann S, ισχύει:*

$$\Omega^1(S) \oplus \bar{\Omega}^1(S) \cong H^1_{DR}(S).$$

Θεώρημα 1.7 (De Rham) *Σε μία επιφάνεια Riemann S, ισχύει:*

$$H^1_{DR}(S) \cong H^1(S, \mathbb{C}).$$

1.4.1 Αριθμός τομής μονοπατιών και ολοκληρώματα

Αρχίζουμε με ένα Λήμμα το οποίο θα χρειαστούμε παρακάτω.

Λήμμα 1.2 *Έστω σ και τ $\mathcal{C}^\infty$ κλειστές μορφές σε επιφάνεια Riemann S και $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ η κανονική βάση του $H_1(S, \mathbb{Z})$, βλ. Παράγραφο 1.2.3. Τότε ισχύει*

$$\int_S \sigma \wedge \tau = \sum_{i=1}^{g} \int_{a_i} \sigma \int_{b_i} \tau - \int_{b_i} \sigma \int_{a_i} \tau.$$

Απόδειξη: Καταρχήν, αναπτύσουμε την επιφάνεια S στο κανονικό πολύγωνο $\mathcal{P} = a_1 b_1 a_1^{'} b_1^{'} \dots a_g b_g a_g^{'} b_g^{'}$ θεωρώντας τις γνωστές ταυτίσεις στις πλευρές, βλ. Παράγραφο 1.2.3. Στα παρακάτω, ταυτίζουμε τις μορφές στην S με το pull back τους στο $\mathcal{P}$. Το (διπλό) ολοκλήρωμα της 2-μορφής $\sigma \wedge \tau$ στην επιφάνεια S είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του pull back της ίδιας μορφής στο πολύγωνο $\mathcal{P}$, διότι τα S και $\mathcal{P}$ διαφέρουν κατά κάτι 'λεπτό'.

Επίσης, αν σταθεροποιήσουμε ένα βασικό σημείο p_0, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f_\sigma(p) = \int_{p_0}^{p} \sigma$ είναι καλά ορισμένη, διότι η σ είναι κλειστή και το $\mathcal{P}$ είναι απλά συνεκτικό. Κάτι άλλο που χρησιμοποιούμε είναι ότι αν $q \in a_i$ και έστω $q^{'} \in a_i^{'}$ το ισοδύναμο του q στην αντίστοιχη πλευρά, τότε έχουμε ότι

$$f_\sigma(q^{'}) - f_\sigma(q) = \int_{p_0}^{q^{'}} \sigma - \int_{p_0}^{q} \sigma = \int_{q}^{q^{'}} \sigma = \int_{b_i} \sigma,$$

διότι η σ είναι μορφή στην S και η εικόνα του ευθυγράμου τμήματος $qq^{'}$ στην S είναι κλειστό μονοπάτι ομόλογο με το b_i. Ομοίως, αν $q \in b_i$ και $q' \in b_i^{'}$ το ισοδύναμό του, θα είναι

$$f_\sigma(q') - f_\sigma(q) = -\int_{a_i} \sigma.$$

Τέλος παρατηρούμε ότι, $d(f_\sigma \tau) = df_\sigma \wedge \tau + f_\sigma d\tau$. Όμως, τ κλειστή, άρα $d\tau = 0$ και $df_\sigma = \sigma$ επόμένως $d(f_\sigma \tau) = \sigma \wedge \tau$. Οπότε, από Stokes, θα έχουμε

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f_\sigma \tau = \int\int_{\mathcal{P}} d(f_\sigma \tau) = \int\int_{\mathcal{P}} \sigma \wedge \tau. \tag{1.1}$$

Χρησιμοποιόντας όλα τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int\int_S \sigma \wedge \tau &= \int\int_{\mathcal{P}} \sigma \wedge \tau = \int_{\partial \mathcal{P}} f_\sigma \tau = \sum_{i=1}^{g} (\int_{a_i} + \int_{b_i} - \int_{a_i'} - \int_{b_i'}) f_\sigma \tau \quad (1.2) \\ &= \sum_{i=1}^{g} (\int_{p \in a_i} [f_\sigma(p) - f_\sigma(p')]\tau) + \sum_{i=1}^{g} (\int_{p \in b_i} [f_\sigma(p) - f_\sigma(p')]\tau) \\ &= \sum_{i=1}^{g} \int_{b_i} \sigma \int_{a_i} \tau - \int_{a_i} \sigma \int_{b_i} \tau, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Οπως έχουμε δει στην Παράγραφο 1.3.2, ο αριθμός τομής κλειστών μονοπατιών στην επιφάνεια Riemann S επάγει την διγραμμική απεικόνιση

$$H_1(S, \mathbb{Z}) \times H_1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\gamma, \sigma) \longmapsto \gamma \cdot \sigma \ .$$

Η Πρόταση 1.9 αναφέρει ότι υπάρχει φυσιολογικός ισομορφισμός από την ομάδα $H_1(S, \mathbb{Z})$ στην ομάδα $H^1(S, \mathbb{Z})$ που κατασκευάζεται με χρήση του γινομένου τομής και στέλνει το $\gamma \in H_1(S, \mathbb{Z})$ στο $\varphi_\gamma \in H^1(S, \mathbb{Z})$. Επομένως, η παραπάνω διγραμμική απεικόνιση επάγει την παρακάτω διγραμμική απεικόνιση:

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \times H^1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\varphi_\gamma, \varphi_\sigma) \longmapsto \gamma \cdot \sigma \ .$$

Την παραπάνω διγραμμική απεικόνιση μπορούμε να την επεκτείνουμε, εισάγοντας μιγαδικούς συντελεστές, και να την θεωρήσουμε ως διγραμμική απεικόνιση στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $H^1(S, \mathbb{C}) := Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(S, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$. Αν $\gamma_i,\ i = 1, \ldots, 2g$ βάση της ομάδας ομολογίας $H_1(S, \mathbb{Z})$ και $\varphi_{\gamma_i} \in H^1(S, \mathbb{Z})$ τα αντίστοιχα στοιχεία όπως παραπάνω, τότε τα $\varphi_{\gamma_i},\ i = 1, \ldots, 2g$ είναι $\mathbb{C}$-βάση του $H^1(S, \mathbb{C})$ και η επέκταση δίδεται από

$$H^1(S, \mathbb{C}) \times H^1(S, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\sum_{i=1}^{2g} c_i \varphi_{\gamma_i}, \sum_{j=1}^{2g} d_j \varphi_{\gamma_j}) \longmapsto \sum_{0 \leq i,j \leq 2g} c_i d_j\ \gamma_i \cdot \gamma_j \ ,$$

όπου τα c_i, d_j είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τέλος, έχουμε τον ισομορφισμό De Rham, βλ. Θεώρημα 1.7,

$$H^1_{DR}(S) \xrightarrow{F_{DR}} H^1(S, \mathbb{C})$$

$$\omega \longmapsto (\Pi_\omega : \gamma \mapsto \int_\gamma \omega).$$

Συνεπώς παίρνουμε μια επαγόμενη γραμμική απεικόνιση

$$H^1_{DR}(S) \times H^1_{DR}(S) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Παρακάτω δείχνουμε ότι η τελευταία επαγόμενη απεικόνιση είναι η φυσιολογική απεικόνιση που ορίζεται από $(\eta_1, \eta_2) \longmapsto \int_S \eta_1 \wedge \eta_2$. Εστω $\gamma \in H_1(S, \mathbb{Z})$ και $\varphi_\gamma \in H^1(S, \mathbb{C})$ το αντίστοιχο στοιχείο όπως παραπάνω. Το στοιχείο $F_{DR}^{-1}(\varphi_\gamma) \in H^1_{DR}(S)$ το συμβολίζουμε με η_γ και εξ' ορισμού έχουμε ότι $\Pi_{\eta_\gamma} = \varphi_\gamma$. Δηλαδή,

$$\Pi_{\eta_\gamma}(\sigma) = \varphi_\gamma(\sigma) = \gamma \cdot \sigma\,.$$

Τα στοιχεία $F_{DR}^{-1}(\varphi_{\gamma_i}) = \eta_{\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, 2g$ είναι $\mathbb{C}$-βάση του $H^1_{DR}(S)$. Λόγω διγραμμικότητας αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_S \eta_{\gamma_i} \wedge \eta_{\gamma_j} = \gamma_i \cdot \gamma_j,\ \forall\ i, j \text{ με } 1 \le i, j \le 2g. \tag{1.3}$$

Επιλέγουμε τώρα ως βάση του $H_1(S, \mathbb{Z})$ την κανονική βάση $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ και αποδεικνύουμε την σχέση (1.3) χρησιμοποιώντας αυτήν την βάση. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του τύπου στο Λήμμα 1.2 λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\Pi_{\eta_{a_i}}(a_j) = a_i \cdot a_j = 0, \quad \Pi_{\eta_{a_i}}(b_j) = a_i \cdot b_j = \delta_{ij} = -\Pi_{\eta_{b_i}}(a_j), \quad \Pi_{\eta_{b_i}}(b_j) = b_i \cdot b_j = 0.$$

Κεφάλαιο 2

Αναλυτικά και Αλγεβρικά σύνολα

2.1 Αναλυτικά σύνολα

Ορισμός 2.1 *Εστω M μια μιγαδική πολλαπλότητα. Ενα υποσύνολο V της M θα λέγεται αναλυτικο σύνολο (πολλαπλότητα) αν είναι κλειστό υποσύνολο της M και αν υπάρχει κάλυψη του V από ανοικτά σύνολα $U_a, a \in A$, του M τέτοια ώστε γιά κάθε $a \in A$ να έχουμε ότι $V \cap U_a = V(f_i^a, i = 1, \ldots, n_a)$, όπου f_i^a είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο U_a. Με άλλα λόγια, το V δίδεται τοπικά ως λύσεις συστήματος αναλυτικών συναρτήσεων του M. Αν το V (αντιστ. W) είναι αναλυτικό υποσύνολο της M (αντιστ. N), τότε μιά απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ λέγεται αναλυτική αν τοπικά είναι ο περιορισμός αναλυτικής απεικόνισης απο το M στο N.*

Πρόταση 2.1 *Ενα V αναλυτικό υποσύνολο της (συνεκτικής) μιγαδικής πολλαπλότητας M, με $V \neq M$. Τότε το V λεπτό στην M, δηλ. η κλειστότητα του $M \backslash V$ είναι το M*

Σημείωση 2.1 Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι αν μια αναλυτική συνάρτηση μηδενίζεται σε ανοικτό του M τότε μηδενίζεται στο M.

Ορισμός 2.2 *Ενα αναλυτικό σύνολο V λέγεται ανάγωγο αν δεν μπορεί να γραφεί ως $V = V_1 \cup V_2$ με $V_i, i = 1, 2$, αναλυτικά σύνολα και $V_i \nsubseteq V_j$ για $1 \leq i \neq j \leq 2$.*

Πρόταση 2.2 *Κάθε αναλυτικό σύνολο V γράφεται μοναδικά (μέχρι μεταθέσεως) ως $V = \cup_{i \in I} V_i$, όπου τα V_i ανάγωγα αναλυτικά και $V_i \nsubseteq V_j$, $\forall i \neq j$. Τα V_i λέγονται ανάγωγες (αναλυτικές) συνιστώσες του V_i.*

Ορισμός 2.3 *Εστω $V \subseteq M$ ένα αναλυτικό σύνολο, όπου M πολλαπλότητα διάστασης n. Λέμε ότι το V είναι ομαλό στο σημείο $p \in V$ αν υπάρχει γειτονιά U*

του p στην οποία η V να δίδεται ως $V = V(f_1, \ldots, f_k)$, $k \leq n$, με $\mathcal{J}(f_1, \ldots, f_k)$ να έχει τάξη k. Διαφορετικά λέμε ότι η V εχει ιδιομορφία στο σημείο p.

Πρόταση 2.3 *Διατηρώντας τον παραπάμω συμβολισμό, έστω V^* το σύνολο των ομαλών σημείων του V και V_{sing} το σύνολο των ιδιόμοφων σημείων του. Τότε:*
1. Το V λέγεται ομαλό αν $V = V^*$. Σε αυτή την περίπτωση το V είναι (εξ' ορισμού) μιγαδική υποπολλαπλότητα της M.
2. Το σύνολο V_{sing} εναι αναλυτικό σύνολο που περιέχεται γνήσια στο V.
3. Το αναλυτικό σύνολο V είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το V^* είναι συνεκτικό.
4. Εστω V ένα ανάγωγο αναλυτικό σύνολο σε μια μιγαδική πολλαπλότητα M διάστασης n. Τότε από το θεώρημα πεπελεγμένης συνάρτησης, το V^* είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα της M. Ορίζομε ως διάσταση του V την διάσταση της μιγαδικής πολλαπλότητας V^*. Αν γύρω από ένα $p \in V^*$ η V δίδεται ως $V = V(f_1, \ldots, f_k)$, $k \leq n$, με $\mathcal{J}(f_1, \ldots, f_k)$ να έχει τάξη k, τότε η V έχει διάσταση $n - k$ (σημειώνουμε ότι λόγω συνεκτικότητας η παραπάνω τάξη δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου $p \in V^*$).
5. Διάσταση ενός αναλυτικού συνόλου ορίζομε την μέγιστη διάσταση των ανάγωγων συνιστωσών του. Ενα αναλυτικό σύνολο λέμε ότι είναι pure διάστασης m αν κάθε ανάγωγη συνιστώσα του έχει διάσταση m.

Ορισμός 2.4 *1. Εστω V ένα αναλυτικό σύνολο σε μια μιγαδική πολλαπλότητα M διάστασης n που τοπικά γύρω από το σημείο $p \in V$ δίδεται ως $V = V(f_1, \ldots, f_k)$. Εστω F_i το πρώτο (μικρότερου βαθμού) μή μηδενικό ομογενές πολυώνυμο που εμφανίζεται στην ανάλυση Taylor του f_i. Τότε ορίζομε ως εφαπτόμενο κώνο του V στο p το υποσύνολο του ολόμομορφου εφαπτόμενου επιπέδου της M στο p που δίδεται από τις εξισώσεις $\{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z_i}|_P$, με $F_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$, $i = 1, \ldots, k\}$. Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω χώρος είναι ανεξάρτητος της επιλογής των εξισώσεων που ορίζουν τοπικά την V.*

Σημείωση 2.2 α) Ο εφαπτόμενος κώνος του V στο σημείο P μπορεί να ιδωθεί και ως η ένωση των εφαπτόμενων ευθειών στο σημείο P στα αναλυτικά τόξα της M που περιέχονται στο V και διέρχονται από το σημείο P. Σημειώνουμε ότι με αναλυτικό τόξο στην M εννοούμε μια αναλυτική εμβύθιση κάποιου ανοικτού $U \subseteq \mathbb{C}$ στο M.
β) Σταθεροποιώντας την βάση $< \frac{\partial}{\partial z_i}|_P$, $i = 1, \ldots, n >$ του εφαπτόμενου χώρου $T_P M$ του M στο P, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε το $T_P M$ με το $\mathbb{C}^n$. Ο εφαπτόμενος κώνος ως υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$ δίδεται τότε ως σύνολο μηδενισμού $V(F_i(z_1, \ldots, z_n)$, $i = 1, \ldots, k)$ *ομογενών* εξισώσεων. Επομένως ορίζει και ένα αλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^{n-1}$ που λέγεται *προβολικός εφαπτόμενος κώνος*.
γ) Αν το σημείο p είναι ομαλό, τότε υπάρχει τοπική παράσταση της V γύρω α-

πό το p έτσι ώστε όλα τα F_i να είναι γραμμικά και άρα ο εφαπτόμενος κώνος είναι γραμμικός χώρος (=εφαπτόμενο επίπεδο). Ενδέχεται όμως ο εφαπτόμενος κώνος να έναι γραμμικός χώρος, αλλά το αντίστοιχο σημείο να είναι ιδιόμορφο, δες π.χ. μιά cusp στο επίπεδο.

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης) *Εστω $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ ανοικτά και $f : U \longrightarrow V$ αναλυτική απεικόνιση. Εστω $P \in U$ και έστω ότι $\det\mathcal{J}(f)|_P \neq 0$. Τότε η f είναι τοπικά γύρω στο P ισομορφισμός δηλ. η f είναι τοπικά 1-1 και η αντίστροφή της είναι αναλυτική.*

Πόρισμα 2.1 *Εστω $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$ ανοικτά με $m \geq n$. Εστω $f : U \longrightarrow V$ αναλυτική απεικόνιση με $\mathcal{J}(f)|_P$ να έχει μέγιστη τάξη n στο $P \in U$. Τότε η f είναι τοπικά 1-1 γύρω από το P, δηλ. είναι τοπικά εμβύθιση γύρω από το P.*

Πρόταση 2.4 *Εστω $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ ανοικτά και $f : U \longrightarrow V$ αναλυτική απεικόνιση που είναι 1-1. Τότε $\det\mathcal{J}(f)|_P \neq 0, \forall P \in U$. Επομένως από το Θεώρημα 2.1 η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} είναι ολόμορφη.*

Θεώρημα 2.2 (Proper mapping theorem) *Εστω M, N μιγαδικές πολλαπλότητες και $f : M \longrightarrow N$ αναλυτική απεικόνιση. Εστω το $V \subseteq M$ αναλυτικό και έστω ότι ο περιορισμός $f|_V : V \longrightarrow N$ είναι proper απεικόνιση. Τότε το $f(V) \subseteq N$ είναι αναλυτικό.*

Σημείωση 2.3 Εστω M, N μιγαδικές πολλαπλότητες και $f : M \longrightarrow N$ αναλυτική απεικόνιση. Αν W αναλυτικό του N είναι εύκολο να δούμε ότι $f^{-1}(W)$ αναλυτικό του M.

Πόρισμα 2.2 *Εστω M, N συμπαγείς μιγαδικές πολλαπλότητες και $f : M \longrightarrow N$ αναλυτική απεικόνιση. Αν $V \subseteq M$ αναλυτικό τότε και το $f(V) \subseteq N$ αναλυτικό.*

Πρόταση 2.5 *Εστω $\phi : N \longrightarrow M$ μια 1-1 αναλυτική απεικόνιση μιγαδικών πολλαπλοτήτων. Τότε από το Θεώρημα 2.2 το $\phi(N)$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του M. Αν η ϕ είναι εμβύθιση, δηλ. η $\mathcal{J}(\phi)$ έχει μέγιστη τάξη, τότε το $\phi(N)$ είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα της M.*

Θεώρημα 2.3 (Θεώρημα επέκτασης του Riemann) *Εστω $U \subseteq \mathbb{C}^d$ ανοικτό σύνολο και $X \subset U$ $(X \neq U)$ αναλυτικό υποσύνολο. Εστω f αναλυτική συνάρτηση στο $U \backslash X$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του x στο U όπου η f να είναι φραγμένη. Τότε η f επεκτείνεται ως αναλυτική (ολόμορφη) συνάρτηση στο U. Σημειώνουμε ότι αν η f είναι αναλυτική στο $U \backslash X$ και συνεχής στο U τότε οι παραπάνω προϋποθέσεις ικανοποιούνται.*

Πόρισμα 2.3 (2ο θεώρημα επέκτασης του Riemann) *Εστω $U \subseteq \mathbb{C}^d$ ανοικτό σύνολο και $X \subset U$ $(X \neq U)$ αναλυτικό υποσύνολο συνδιάστασης ≥ 2. Τότε αν η $f : U \backslash X \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι αναλυτική συνάρτηση, αυτή επεκτείνεται ως αναλυτική συνάρτηση σε όλο το U.*

Θεώρημα 2.4 (Θεώρημα διάστασης απεικονίσεων αναλυτικών συνόλων) *Εστω X, Y ανάγωγα αναλυτικά σύνολα με $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ μια αναλυτική απεικόνιση που είναι επί. Τότε:*
1. Εστω $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, μια fiber της f. Αυτό είναι αναλυτικό υποσύνολο του X (ως προεικόνα αναλυτικού). Εστω F μια ανάγωγη συνιστώσα του. Τότε $\dim F \geq n - m$.
2. Το $Y_k := \{y \in Y \text{ με } \dim f^{-1}(y) \geq k\}$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του Y.
3. Εχουμε ότι $Y_{n-m+1} \neq Y$, άρα το σύνολο $U = Y \backslash Y_{n-m+1} = \{y \in Y \text{ με } \dim f^{-1}(y) = n - m\}$ είναι ένα μεγάλο ανοικτό του U, δηλ. η κλειστότητά του $\bar{U} = Y$, βλ. Πρόταση 2.1. Με άλλα λόγια, η γενική fiber της f έχει την ελάχιστη δυνατή διάσταση $n - m$.

2.2 Αλγεβρικά σύνολα

Ορισμός 2.5 *Αφφινικό αλγεβρικό σύνολο στο $\mathbb{C}^n$ λέγεται ένα σύνολο που αντιστοιχεί στις λύσεις αλγεβρικων εξισώσεων, δηλ. έχει την μορφή $V = \{p \in \mathbb{C}^n,\ f_i(p) = 0,\, i \in I\}$, όπου τα f_i είναι πολυώνυμα n μεταβλητών.*

Ορισμός 2.6 *Ενα αφφινικό αλγεβρικό σύνολο V στο $\mathbb{C}^n$ λέγεται ανάγωγο αν δεν γράφεται στην μορφή $V = V_1 \cup V_2$, όπου $V_1, V_2 \neq V$ αφφινικά αλγεβρικά σύνολα.*

Σημείωση 2.4 Τα αφφινικά αλγεβρικά σύνολα ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Οι τομές και οι πεπερασμένες ενώσεις αφφινικών αλγεβρικών συνόλων είναι αφφινικά αλγεβρικά σύνολα.

2. Κάθε αλγεβρικό σύνολο V αναλύεται μοναδικά (μέχρι ανακατατάξης όρων) ως πεπερασμένη ένωση ανάγωγων αφφινικών αλγεβρικών συνόλων της μορφής $V = V_1 \cap \cdots \cap V_m$, με $V_i \nsubseteq V_j$, $i \neq j$. Τα V_i λέγονται ανάγωγες συνιστώσες του V.

Ορισμός 2.7 *Προβολικό αλγεβρικό σύνολο στο $\mathbb{P}^n$ λέγεται ένα σύνολο που αντιστοιχεί στις λύσεις ομογενών αλγεβρικων εξισώσεων, δηλ. έχει την μορφή $V = \{p \in \mathbb{P}^n,\ f_i(p) = 0,\, i \in I\}$, όπου τα f_i είναι ομογενή πολυώνυμα $n + 1$ μεταβλητών.*

Σημείωση 2.5 Σημειώνουμε ότι αν και ένα ομογενές πολυώνυμο σε $n+1$ μεταβλητές δεν ορίζει (καλά ορισμένη) συνάρτηση στο $\mathbb{P}^n$, εν τούτοις τα μηδενικά του είναι καλά ορισμένα (λόγω του ομογενούς). Για τα προβολικά αλγεβρικά σύνολα, που είναι συμπαγή σύνολα, ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με τα αφφινικά.

2.3 Σχέση αναλυτικών και αλγεβρικών συνόλων

Είναι προφανές, εξ΄ ορισμού, ότι τα αλγεβρικά σύνολα (αφφινικά ή προβολικά) είναι και αναλυτικά σύνολα (των πολλαπλοτήτων $\mathbb{C}^n$ ή $\mathbb{P}^n$ αντίστοιχα). Από την άλλη μεριά, υπάρχουν αναλυτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}^n$ που δεν είναι αλγεβρικά. Γιά παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι το αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^2$ που ορίζεται από την αναλυτική συνάρτηση $y - e^z = 0$ δεν είναι αλγεβρικό. Στον προβολικό χώρο όμως, λόγω της συμπάγειας έχουμε ότι:

Θεώρημα 2.5 (Θεώρημα του Chow) *Κάθε αναλυτικό υποσύνολο του προβολικού χώρου είναι αλγεβρικό. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής (κλειστή) μιγαδική υποπολλαπλότητα του προβολικού χώρου είναι αλγεβρική.*

Γενικοτερα, έχουμε το παρακάτω, περιγραφικά διατυπωμένο, θεώρημα που ωφείλεται στον J.P. Serre:

Θεώρημα 2.6 (Serre) *Αν S αναλυτικό (=αλγεβρικό) υποσύνολο του προβολικού χώρου τότε οτιδήποτε αναλυτικό πάνω στο S είναι και αλγεβρικό. Γιά παράδειγμα, οι μερόμορφες συναρτήσεις του S είναι ακριβώς οι ρητές συναρτήσεις.*

Σημείωση 2.6 Το παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί το ανάλογο του θεωρήματος των μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής που αναφέρει ότι αν $f(z)$ είναι μια μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ τότε η $f(z)$ είναι ρητή.

Από το Θεώρημα 2.5, έχουμε ότι τα αναλυτικά υποσύνολα μιάς προβολικής (συμπαγούς) αλγεβρικής πολλαπλότητας είναι τα αλγεβρικά. Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.2, έχουμε ότι:

Πόρισμα 2.4 *Αν $f : M \longrightarrow N$ αναλυτική απεικόνιση μεταξύ συμπαγών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων τότε αν $V \subseteq M$ αλγεβρικό συνεπάγεται ότι και το $f(V) \subseteq N$ αλγεβρικό.*

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά Συστήματα

3.1 Διαιρέτες

Ορισμός 3.1 *Διαιρέτης D πάνω σε επιφάνεια Riemann S, είναι το τυπικό ά-θροισμα*

$$\sum_{p \in S} D(p) \cdot p,$$

όπου $D(p) \in \mathbb{Z}$ και μόνο για πεπερασμένα το πλήθος $p \in S$ είναι $D(p) \neq 0$.

Το σύνολο των διαιρετών στην επιφάνεια S το συμβολίζουμε με $Div(S)$ και είναι ομάδα με πράξη το τυπικό άθροισμα.

Ορισμός 3.2 *Βαθμός ενός διαιρέτη D στην S, είναι το άθροισμα*

$$\sum_{p \in S} D(p).$$

Συμβολίζομε με $\deg D$ τον βαθμό του διαιρέτη D.

Ο ορισμός αυτός φαίνεται αφηρημένος, βοηθάει όμως στο να εκφράσουμε τα μηδενικά και τους πόλους μερόμορφων συναρτήσεων και 1- μορφών και να βγάλουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα.

3.1.1 Διαιρέτες συναρτήσεων

Ορισμός 3.3 *Έστω μερόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στην επιφάνεια S. Ορίζουμε διαιρέτη της f το άθροισμα*

$$div(f) = \sum_{p \in S} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p.$$

Ένας τέτοιος διαιρέτης λέγεται κύριος και το σύνολο όλων αυτών των διαιρετών συμβολίζεται με $PDiv(S)$.

Εύκολα φαίνονται οι ιδιότητες:

- $div(fg) = div(f) + div(g)$.
- $div(f/g) = div(f) - div(g)$.
- $div(1/f) = -div(f)$.

Από αυτές τις ιδιότητες βλέπουμε ότι το σύνολο $PDiv(S)$ είναι υποομάδα του $Div(S)$.

Πρόταση 3.1 *Έστω f μια μη σταθερή μερόμορφη συνάρτηση, ορισμένη σε επιφάνεια Riemann S. Τότε ισχύει*

$$\sum_{p \in S} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

Απόδειξη: Παίρνουμε την επαγόμενη $F : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ που είναι ολόμορφη και συμβολίζουμε με x_i τα μηδενικά και με y_i τους πόλους της f. Δηλαδή, $F(x_i) = 0$ και $F(y_i) = \infty$. Τώρα, επειδή ο βαθμός ολόμορφης συνάρτησης μεταξύ δύο επιφανειών είναι σταθερός, έστω d, θα έχουμε $d = \sum_i \mathrm{mult}_{x_i}(F)$ και $d = \sum_{y_i} \mathrm{mult}_{y_i}(F)$. Επίσης, όλα τα άλλα σημεία είναι απλά, και $\mathrm{mult}_{x_i}(F) = \mathrm{ord}_{x_i}(f)$, $\mathrm{mult}_{y_i}(F) = -\mathrm{ord}_{y_i}(f)$ και συνδυάζοντας όλα αυτά έχουμε

$$\sum_p \mathrm{ord}_p(f) = \sum_i \mathrm{ord}_{x_i}(f) + \sum_i \mathrm{ord}_{y_i}(f) = \mathrm{mult}_{x_i}(F) - \sum_i \mathrm{mult}_{y_i}(F) = d - d = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Έναν κύριο διαιρέτη μπορούμε να τον χωρίσουμε σε δύο μέρη, αυτό που αντιπροσωπεύει τα μηδενικά και αυτό που αντιπροσωπεύει τους πόλους.

Ορισμός 3.4 *Ο διαιρέτης των μηδενικών μιας μερόμορφης συνάρτησης f είναι το άθροισμα*

$$div_0(f) = \sum_{p:\ \mathrm{ord}_p(f) > 0} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p$$

και διαιρέτης των πόλων είναι αντίστοιχα

$$div_\infty(f) = \sum_{p:\ \mathrm{ord}_p(f) < 0} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p.$$

3.1.2 Διαιρέτες 1-μορφών (Κανονικοί διαιρέτες)

Μπορούμε να ορίσουμε διαιρέτες μερόμορφων 1-μορφών όπως ακριβώς ορίσαμε διαιρέτες συναρτήσεων.

Ορισμός 3.5 *Αν ω είναι μια μερόμορφη 1-μορφή στην S, ορίζουμε*

$$div(\omega) = \sum_p \mathrm{ord}_p(\omega) \cdot p,$$

βλ. Ορισμό 1.19. Κάθε διαιρέτης τέτοιας μορφής ονομάζεται κανονικός. Το σύνολο των κανονικών διαιρετών το συμβολίζουμε με $KDiv(S)$.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι οποιδήποτε δύο κανονικοί διαιρέτες διαφέρουν κατά τον διαιρέτη μιας μερόμορφης συνάρτησης. Αυτό φαίνεται από το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.1 *Έστω ω_1 και ω_2 δύο μη μηδενικές μερόμορφες 1-μορφές. Τότε, υπάρχει μοναδική μερόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στην S με $\omega_1 = f\omega_2$.*

Απόδειξη: Αν z μία τοπική συντεταγμένη, τότε μπορούμε τοπικά να γράψουμε $\omega_1(z) = g_1(z)dz$ και $\omega_2(z) = g_2(z)dz$, όπου g_1 και g_2 μερόμορφες συναρτήσεις. Η ζητούμενη συνάρτηση ορίζεται ως $f = \frac{g_2}{g_1}$. Η f είναι καλά ορισμένη, ανεξάρτητη του χάρτη που διαλέξαμε. Πράγματι αν πάρουμε w μια άλλη τοπική συντεταγμένη, γράφουμε $\omega_1 = h_1(w)dw$ και $\omega_2 = h_2(w)dw$ με h_1, h_2 ολόμορφες. Έστω τώρα $z = T(w)$ η αλλαγή συντεταγμένων. Από τον τρόπο που ορίσαμε τις μορφές σε ολόκληρη την επιφάνεια, θα έχουμε $h_1(w) = g_1(T(w))T'(w)$ και $h_2(w) = g_2(T(w))T'(w)$. Από αυτό βλέπουμε ότι το πηλίκο $\frac{h_2}{h_1}$ δίνει την ίδια τιμή, δηλαδή η f είναι καλά ορισμένη. □

Τώρα, αν ω μια μερόμορφη 1-μορφή και f μία συνάρτηση, έχουμε $div(f\omega) = div(f) + div(\omega)$. Οπότε, αν $\omega_1 = f\omega_2$, θα έχουμε $div(\omega_1) = div(f) + div(\omega_1)$, που είναι η παραπάνω ιδιότητα.

Πρόταση 3.2 *Κάθε κανονικός διαιρέτης σε επιφάνεια Riemann S γένους g, έχει βαθμό $2g - 2$.*

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Hurwitz, βλ. Πρόταση 1.1. Επίσης, θα χρειαστούμε και το παρακάτω

Λήμμα 3.2 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann και ω μερόμορφη 1-μορφή στο Y. Έστω $p \in X$. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathrm{ord}_p(F^*(\omega)) = (1 + \mathrm{ord}_{F(p)}(\omega))\mathrm{mult}_p(F) - 1.$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την Πρόταση 3.2. Κατ΄ αρχήν παίρνουμε μια μη σταθερή μερόμορφη συνάρτηση $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ και την επαγόμενη $F : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, η οποία θα είναι ολόμορφη, βλ. Παράγραφο 3.2.2 παρακάτω. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη της ύπαρξης μή σταθερής μερόμορφης συνάρτησης f στην επιφάνεια S

είναι πολύ δύσκολη. Στη συνέχεια, δουλεύουμε στην επιφάνεια $\mathbb{P}^1$ στην οποία οι υπολογισμοί είναι πιό εύκολοι. Παίρνουμε την μερόμορφη 1-μορφή $\omega = dz$ στην $\mathbb{P}^1$ η οποία έχει βαθμό 2. Τότε, το pullback αυτής μέσω της ολόμορφης F θα είναι μερόμορφη 1-μορφή στην S. Έστω $\eta = F^*(\omega)$. Για τον υπολογισμό του βαθμού του κανονικού διαιρέτη στην S αρκεί να υπολογίσουμε το $\deg(div(\eta))$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\deg(div(\eta)) &= \sum_{p\in S}\mathrm{ord}_p(\eta) = \sum_{p\in S}\mathrm{ord}_p(F^*(\omega))\\ &\overset{3.2}{=} \sum_{p\in S}[(1+\mathrm{ord}_{F(p)}(\omega))\mathrm{mult}_p(F)-1] = \\ = \sum_{\substack{q\neq\infty\\ p\in F^{-1}(q)}}&[\mathrm{mult}_p(F)-1] + \sum_{p\in F^{-1}(\infty)}(-\mathrm{mult}_p(F)-1)\\ &= \sum_{p\in S}[\mathrm{mult}_p(F)-1] - \sum_{p\in F^{-1}(\infty)}2\mathrm{mult}_p(F)\\ &= 2g(S)-2+2\deg(F)-2\deg(F) = 2g(S)-2.\end{aligned}$$

□

Αν έχουμε μιά ολόμορφη απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$ όπως πριν και έναν διαιρέτη στην Y, μπορούμε μέσω της F^* να ορίσουμε διαιρέτη στην X.

Ορισμός 3.6 *Έστω $q \in Y$. Ορίζουμε το pullback του σημείου q μέσω της F να είναι*

$$F^*(q) = \sum_{p\in F^{-1}(q)}\mathrm{mult}_p(F)\cdot p.$$

Ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται και σε διαιρέτη. Δηλαδή, αν $D = \sum_{q\in Y} n_q \cdot q$ διαιρέτης στην Y, ορίζουμε

$$F^*(D) = \sum_{q\in Y} n_q F^*(q).$$

Δηλαδή, κατά σημείο

$$F^*(D)(p) = \mathrm{mult}_p(F)D(F(p)).$$

Ο τύπος του Hurwitz, βλ. Πρόταση 1.1, είναι συνεπεια του παρακάτω Θεωρήματος του Hurwitz που συσχετίζει τους κανονικούς διαιρέτες μιας απεικόνισης.

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα του Hurwitz) *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann. Αν K_X, K_Y κανονικοί διαιρέτες στις X, Y αντίστοιχα τότε έχουμε*

$$K_X \sim F^*K_Y + \sum_{p\in X}[\mathrm{mult}_p(F)-1]\,p.$$

3.1.3 Γραμμική ισοδυναμία διαιρετών

Ορισμός 3.7 *Δύο διαιρέτες D_1, D_2 λέγονται γραμμικώς ισοδύναμοι αν διαφέρουν κατά ένα κύριο διαιρέτη. Ισοδύναμα, αν η διαφορά τους είναι διαιρέτης μερόμορφης συνάρτησης. Την ισοδυναμία αυτή τη γράφουμε συμβολικά $D_1 \sim D_2$.*

Παρατηρήσεις για την γραμμική ισοδυναμία διαιρετών: Έστω S επιφάνεια Riemann. Τότε έχουμε:

1. Η γραμμική ισοδυναμία είναι σχεση ισοδυναμίας.

2. Ένας διαιρέτης είναι γραμμικώς ισοδύναμος με το 0 αν και μόνο αν είναι κύριος.

3. Αν η επιφάνεια S είναι και $D_1 \sim D_2$ τότε θα είναι $\mathrm{deg}D_1 = \mathrm{deg}D_2$.

4. Αν f μερόμορφη συνάρτηση ορισμένη στην S, έχουμε ότι $div_0(f) \sim div_\infty(f)$.

5. Οι κανονικοί διαιρέτες είναι ανά δύο γραμμικά ισοδύναμοι και αν ένας διαιρέτης είναι ισοδύναμος με κάποιον κανονικό τότε είναι και αυτός κανονικός.

Αναφέρουμε εδώ την απόδειξή της σχέσης 3: Αν η επιφάνεια S είναι συμπαγής, έχουμε την επιπλέον ιδιότητα ότι για κάθε συνάρτηση $\mathrm{deg}div(f) = 0$, βλ. Πρόταση 3.1. Επομένως, $D_1 \sim D_2 \Longrightarrow D_1 = div(f) + D_2$ για κάποια f και παίρνοντας βαθμούς $\mathrm{deg}D_1 = \mathrm{deg}div(f) + \mathrm{deg}D_2$, δηλαδή $\mathrm{deg}D_1 = \mathrm{deg}D_2$.

3.1.4 Διαιρέτες τομής

Εστω S μία επιφάνεια Riemann στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n$ και έστω $F(x_0, \ldots, x_n)$ ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού m. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον (θετικό) διαιρέτη τομής $div(F)$ στην S που έχει ως support τα σημεία τομής του $V(F)$ με την S και συντελεστές που αντιστοιχούν στις πολλαπλότητες τομής οι οποίοι ορίζονται ως εξής: Αν $p \in S$ τότε παίρνουμε ένα υπερεπίπεδο που δίδεται από την εξίσωση $A = 0$ με $p \notin V(A)$. Θεωρούμε την ρητή συνάρτηση $f = \frac{F}{A^m}$ του $\mathbb{P}^n$ και την περιορίζουμε στην S. Ορίζουμε τότε $div(F)(p) = \mathrm{ord}_p(f)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω τάξη δεν εξαρτάται από την επιλογή του υπερεπιπέδου. Σημειώνουμε ότι όταν $p \notin V(F)$ τότε $div(F)(p) = 0$. Επίσης, όταν $p \in V(F)$ τότε $div(F)(p) \geq 1$.

Στην πράξη τώρα όταν θέλουμε να βρούμε το $div(F)(p)$, δουλεύουμε ως εξής: Εστω π.χ. ότι το $p \in U_0$, όπου ως συνήθως με U_0 συμβολίζουμε τον αφφινικό χάρτη με $X_0 \neq 0$. Διαλέγουμε ως υπερεπίπεδο το $X_0 = 0$ και θέτοντας $x_i := X_i/X_0$ η παραπάνω συνάρτηση $f = \frac{F}{A^m}$ γίνεται πολυώνυμο $f(x_1, \ldots, x_n)$ των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$. Βρίσκουμε τοπική συντεταγμένη z γύρω από το p με $z = 0$ να αντιστοιχεί στο p και γράφουμε την επιφάνεια τοπικά ως $(\beta_1(z), \ldots, \beta_n(z))$, με $\beta_i(z)$ ολόμορφες συναρτήσεις. Ο περιορισμός του $f(x_1, \ldots, x_n)$στην S τοπικά γύρω από το p είναι η ολόμορφη συνάρτηση $h(z) := f(\beta_1(z), \ldots, \beta_n(z))$. Τότε το $div(F)(p)$ είναι η τάξη μηδενισμού του $h(z)$ στο $z = 0$. Με άλλα λόγια, έχουμε $div(F)(p) = m$ αν και μόνον αν $h^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, \ldots, m-1$ και $h^m(0) \neq 0$. Εχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 3.3 *Εστω F ομογενές πολυώνυμο βαθμού m και H ομογενές πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Τότε $div(F) \sim m\, div(H)$.*

Απόδειξη: Πράγματι, $div(F) = div(H) + (F/H^m)$. □

Σημείωση 3.1 Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του $div(F)$ και σε ρητές συναρτήσεις. Πράγματι αν $\rho = F/G$ μια ρητή συνάρτηση του $\mathbb{P}^n$, όπου τα F, G είναι πολυώνυμα του ιδίου βαθμού σε $n+1$ μεταβλητές, τότε ορίζουμε $div(h) = div(F) - div(G)$.

3.2 Γραμμικά συστήματα

Ορισμός 3.8 *Έστω S επιφάνεια Riemann, D διαιρέτης και $\mathcal{M}(S)$ το σύνολο των μερόμορφων συναρτήσεων στην S. Ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο*

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(S) \,|div(f) \geq -D\}.$$

Τώρα, έστω $f \in \mathcal{L}(D)$. Αν γράψουμε $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$ και $D = D^+ - D^-$, η ανισότητα $div(f) \leq -D$ δίνει δύο επιμέρους ανισότητες: $div_0(f) \leq D^-$ και $D^+ \leq div_\infty(f)$. Η πρώτη δίνει κάποιον περιορισμό για την τάξη των μηδενικών της f, ενώ η δεύτερη επιτρέπει πόλους από μία ορισμένη τάξη και πάνω. Επίσης, με τον ίδιο τρόπο φαίνεται ότι αν $D_1 \leq D_2$ τότε $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$. Στην περίπτωση που $D = 0$, τότε ο χώρος $\mathcal{L}(D)$ περιέχει μερόμορφες συναρτήσεις με $div(f) \geq 0$, δηλαδή τις ολόμορφες συναρτήσεις. Τέλος, αν $\deg D < 0$, ο χώρος $\mathcal{L}(D)$ θα έχει συναρτήσεις με περισσότερους πόλους από ότι μηδενικά, πράγμα που δεν γίνεται, δηλαδή το $\mathcal{L}(D)$ θα είναι το κενό σύνολο.

3.2.1 Πλήρη γραμμικά συστήματα

Ορισμός 3.9 *Έστω επιφάνεια Riemann S και διαιρέτης D. Το πλήρες γραμμικό σύστημα του D συμβολίζεται με $|D|$ και αποτελείται από όλους τους θετικούς διαιρέτες που είναι γραμμικώς ισοδύναμοι με τον D. Δηλαδή,*

$$|D| = \{E \in Div(S) \text{ με } E \sim D \text{ και } E \geq 0\}.$$

Μπορούμε να δούμε το $|D|$ σαν προβολικοποίηση του $\mathcal{L}(D)$, διότι η απεικόνιση

$$\Pi : \mathbb{P}\mathcal{L}(D) \longrightarrow |D|$$

με

$$f \longmapsto div(f) + D,$$

είναι καλά ορισμένη και 1-1 απεικόνιση μεταξύ προβολικών διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 3.10 *Γραμμικό υποσύστημα ενός πλήρους γραμμικού συστήματος $|D|$, είναι ένα υποσύνολο Q του $|D|$, το οποίο αντιστοιχεί μέσω της Π σε προβολικό γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{P}\mathcal{L}(D)$. Διάσταση του γραμμικού συστήματος Q είναι η (προβολική) διάσταση του αντίστοιχου υπόχωρου μέσω της Π, θεωρούμενος μέσα στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}\mathcal{L}(D)$.*

Συμβολισμός 3.1 Αν Q γραμμικό σύστημα, συμβολίζουμε με $\dim_{\mathbb{P}}Q$ την (προβολική) διάστασή του. Αν $Q = |D|$ είναι το πλήρες γραμμικό σύστημα που ορίζεται από τον διαιρέτη D τότε συμβολίζομε την (προβολική) διάστασή του με $r(D)$, δηλ. $r(D) := \dim_{\mathbb{P}}|D|$.

Πρόταση 3.4 *Έστω D_1 και D_2 δυο ισοδύναμοι διαιρέτες. Τότε, οι χώροι $\mathcal{L}(D_1)$ και $\mathcal{L}(D_2)$ είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη: Αν $D_1 = D_2 + div(h)$, τότε η απεικόνιση

$$\mu_h : \mathcal{L}(D_1) \longrightarrow \mathcal{L}(D_2)$$

με

$$f \longmapsto f\,h$$

είναι καλά ορισμένη και δίνει τον ζητούμενο ισομορφισμό. □

3.2.2 Απεικονίσεις στον προβολικό χώρο

Ορισμός 3.11 *Έστω S επιφάνεια Riemann. Μία απεικόνιση $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ είναι ολόμορφη στο $p \in S$, αν υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $g_0, g_1, \ldots, g_n$ ορισμένες γύρω από το p και όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε για x κοντά στο p να είναι $\varphi(x) = [g_0(x) : g_1(x) : \ldots g_n(x)]$. Επίσης, λέμε ότι η φ είναι ολόμορφη σε όλη την επιφάνεια, αν το παραπάνω ισχύει για όλα τα σημεία της S.*

Τώρα, αφού η επιφάνεια S είναι συμπαγής, δεν υπάρχουν ολόμορφες μη σταθερές συναρτήσεις που να επεκτείνονται σε όλη την S. Διαλέγοντας όμως $n+1$ μερόμορφες συναρτήσεις $g_0, \ldots, g_n$ στην S, τότε μπρούμε να ορίσουμε μια ολόμορφη απεικόνιση $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ως εξής: έστω $P \in S$ και z τοπική συντεταγμένη με κέντρο το P. Εστω $s = \min_i \mathrm{ord}_P g_i$. Τότε ορίζουμε

$\varphi(P) := [z^{-s}g_0(P) : \ldots : z^{-s}g_n(P)]$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι ολόμορφη απεικόνιση.

Για να εκφράσουμε μία ολόμορφη φ στη S, αρκεί να ξέρουμε σε ένα χάρτη από ποιές $g_0, \ldots, g_n$ ορίζεται. Και αντίστροφα, έστω σύνολα μερόμορφων συναρτήσεων $f = \{f_0, \ldots, f_n\}$ και $g = \{g_0, \ldots, g_n\}$ και φ_f και φ_g επαγόμενες ολόμορφες στην S. Αν $\varphi_f \equiv \varphi_g$, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση λ τέτοια ώστε $g_i = \lambda f_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$.

3.2.3 Γραμμικό σύστημα ολόμορφης απεικόνισης

Έστω ολόμορφη απεικόνιση $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Μπορούμε σε αυτήν την απεικόνιση να αντιστοιχίσουμε ένα γραμμικό σύστημα ώς εξής: Γράφουμε την $\varphi = [f_0 : f_1 : \ldots : f_n]$ και στη συνέχεια παίρνουμε τον γραμμικό χώρο $V_f =< f_0, f_1, \ldots, f_n >$ που παράγεται από τις $f_0, f_1, \ldots f_n$. Παίρνουμε, επίσης, τον διαιρέτη $D = -\min_i\{div(f_i)\}$, δηλ. για κάθε $P \in S$ ο αριθμός $-D(P)$ είναι το ελάχιστο των $\mathrm{ord}_P f_i$. Ορίζουμε το γραμμικό σύστημα που επάγεται από την φ να είναι το σύνολο

$$|\varphi| = \{div(g) + D|\ g \in V_f\}.$$

Το $|\varphi|$ είναι υποσύστημα του πλήρους γραμμικού συστήματος $|D|$. Διότι για κάθε f_i είναι $-D \leq \min_i(div(f_i))$, άρα $-D \leq div(f_i)$ και επομένως $D + div(f_i) \geq 0$, άρα $f_i \in \mathcal{L}(D)$. Συνεπώς, για κάθε $f \in V_f$ θα έχουμε $div(f) + D \geq 0$, δηλαδή $f \in \mathcal{L}(D)$. Άρα, $V_f \subseteq \mathcal{L}(D)$ και επομένως $|\varphi| \subseteq |D|$. Η κατασκευή του $|\varphi|$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του συνόλου $f = \{f_0, \ldots, f_n\}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν $g = \{g_0, \ldots, g_n\}$ ένα άλλο σύνολο μερόμορφων συναρτήσεων με $\varphi_f \equiv \varphi_g$, τότε θα είναι και $|\varphi_f| = |\varphi_g|$.

Παρατηρείστε ότι αν η εικόνα της απεικόνισης φ είναι non degenerate αυτό είναι ισοδύναμο με την γραμμική ανεξαρτησία των $f_0, f_1, \ldots, f_n$ που ορίζουν την φ. Διότι στην περίπτωση που κάποια f_i ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, η εικόνα της φ δεν θα 'εκμεταλλευόταν' όλη τη διάσταση του χώρου. Εχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.12 *Έστω ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ με εικόνα non degenerate. Το γραμμικό σύστημα $|\varphi|$ (προβολικής διάστασης n και βαθμού $d = \deg D$) λέγεται γραμμικό σύστημα της απεικόνισης φ.*

Συμβολισμός 3.2 *Ένα γραμμικό σύστημα προβολικής διάστασης r με διαιρέτες βαθμού d το συμβολίζουμε με g_d^r.*

3.2.4 Βασικά σημεία γραμμικών συστημάτων

Ορισμός 3.13 *Έστω Q ένα γραμμικό σύστημα σε επιφάνεια Riemann S. Ένα σημείο $p \in S$ ονομάζεται βασικό σημείο του Q αν για κάθε διαιρέτη $E \in Q$ έχουμε ότι $p \in E$ (δηλαδή $E \geq p$). Στην περίπτωση που το σύστημα δεν έχει κανένα βασικό σημείο λέμε ότι είναι base point free .*

Το παρακάτω λήμμα, δίνει παράδειγμα base point free γραμμικού συστήματος.

Λήμμα 3.3 *Έστω $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ολόμορφη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $p \in S$ υπάρχει $E \in |\varphi|$ τέτοιος ώστε $p \notin E$. Επομένως, το φ είναι base point free.*

Απόδειξη: Έστω $p \in S$ και $\varphi = [f_0 : f_1 : \ldots : f_n]$, όπου f_i μερόμορφες συναρτήσεις. Αν $D = -\min_i(div(f_i))$, υποθέτουμε ότι το $\min_i(div(f_i))(p)$ πιάνεται σε κάποιο f_j και έχει τιμή k. Τότε $D(p) = -k$ και αν πάρουμε τον διαιρέτη $E = div(f_j) + D$ θα είναι $E(p) = \mathrm{ord}_p(f_j) + D(p) = k - k = 0$, δηλαδή $p \notin E$. □

Κάποια άλλα κριτήρια για το αν ένα σημείο είναι βασικό σημείο ενός γραμμικού συστήματος μας δίνουν οι παρακάτω προτάσεις.

Λήμμα 3.4 *Έστω $p \in S$ και γραμμικό συστήμα $Q \subseteq |D|$.*

1. *Αν $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(D)$ με $|V| = Q$, τότε το p είναι βασικό σημείο του Q αν και μόνο αν $V \subseteq \mathcal{L}(D-p)$.*

2. *Για το πλήρες γραμμικό σύστημα, το p είναι βασικό σημείο αν και μόνο αν $\mathcal{L}(D-p) = \mathcal{L}(D)$.*

Απόδειξη: Για το 1: Έχουμε $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ τον γραμμικό υπόχωρο που αντιστοιχεί στο Q. Οπότε, τα στοιχεία του Q είναι ακριβώς της μορφής $div(f) + D$ όπου $f \in V$. Οι διαιρέτες του Q είναι όλοι θετικοί, επομένως για κάθε $p \in S$ και για κάθε $f \in V$ έχουμε $\mathrm{ord}_p(f) + D(p) \geq 0$ για κάθε $f \in V$. Τώρα, αν το p είναι βασικό σημείο του Q θα πρέπει επιπλέον να είναι $\mathrm{ord}_p(f) + D(p) \geq 0$ για κάθε $f \in V$ και για κάθε $p \in S$. Τότε όμως $f \in \mathcal{L}(D-p)$. Το αντίστροφο είναι προφανές. Ομοίως αποδεικνύεται και το 2. □

Ορισμός 3.14 *Εστω $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(D)$ και $|V| = Q$. Αν $p_1, \ldots, p_k \in S$, ορίζουμε το γραμμικό σύστημα $Q - p_1 - \cdots - p_k \subseteq |D - p_1 - \cdots - p_k||$ ως $Q - p_1 - \cdots - p_k := |V \cap \mathcal{L}(D - p_1 - \cdots - p_k)|$.*

Σημειώνουμε ότι η διάσταση του $\mathcal{L}(D-p)$ μπορεί να είναι το πολύ κατά ένα μικρότερη από αυτή του $\mathcal{L}(D)$ διότι τα στοιχεία του $\mathcal{L}(D-p)$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του $\mathcal{L}(D)$ που υπόκεινται σε μία 'επιπλέον' γραμμική συνθήκη. Σε συνδυασμό με το παραπάνω Λήμμα έχουμε το εξής αριθμητικό κριτίριο για το πότε ένα σημείο base point ενός πλήρους γραμμικού σύστημα :

Πρόταση 3.5 *Έστω σημείο $p \in S$ και διαιρέτης D. Το p είναι βασικό σημείο του $|D|$ αν και μόνο αν $\dim\mathcal{L}(D-p) = \dim\mathcal{L}(D)$. Επομένως, το $|D|$ είναι base point free αν και μόνο αν $\dim\mathcal{L}(D-p) = \dim\mathcal{L}(D) - 1$. Γενικότερα, αν Q γραμμικό σύστημα τότε το Q είναι base point free αν και μόνον αν $\dim_{\mathbb{P}}(Q-p) = \dim_{\mathbb{P}}Q - 1$.*

3.2.5 Απεικονίσεις στον προβολικό χώρο και γραμμικά συστήματα

Σε αυτήν τη παράγραφο θα συνδέσουμε τις ολόμορφες απεικονίσεις της επιφάνειας Riemann με τα γραμμικά συστήματα. Έστω $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ολόμορφη απεικόνιση. Αν αυτή ορίζεται από τις συναρτήσεις $f_0, f_1, \ldots, f_n$, τότε το γραμμικό σύστημα $|\varphi|$ αποτελείται από συναρτήσεις f με $div(f) + D \geq 0$, όπου $D = -\min_i(div(f_i))$. Υπάρχει όμως και τρόπος να περιγράψουμε πιό γεωμετρικά το $|\varphi|$. Θεωρούμε την καμπύλη $\varphi(S) \subseteq \mathbb{P}^n$ εμβυθισμένη στον προβολικό χώρο. Εστω $H \subseteq \mathbb{P}^n$ υπερεπίπεδο και $div(H)$ ο αντίστοιχος διαιρέτης τομής στην $\varphi(S)$. Τοτε το pull back $\varphi^* div(H)$ είναι διαιρέτης της S.

Ορισμός 3.15 *Τον διαιρέτη που κατασκευάσαμε με τον παραπάνω τρόπο τον συμβολίζουμε με $\varphi^*(H)$ και τον ονομάζουμε διαιρέτη υπερεπιπέδου της φ.*

Το παρακάτω λήμμα και το πόρισμάτου μας επιτρέπει να μεταφράσουμε γεωμετρικά τα στοιχεία του γραμμικού συστήματος που ορίζει την απεικόνιση.

Λήμμα 3.5 *Έστω $[x_o, x_1, \ldots, x_n]$ ομογενείς συντεταγμένες του $\mathbb{P}^n$, H υπερεπίπεδο με εξίσωση $L = \{\sum_i a_i x_i = 0\}$ και $\varphi = [f_0 : f_1 : \ldots : f_n] : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ολόμορφη απεικόνιση. Αν $D = -\min_i(div(f_i))$ και η $\varphi(S)$ δεν περιέχεται στο υπερεπίπεδο H έχουμε ότι*

$$\varphi^*(H) = div(\sum_i a_i f_i) + D.$$

Απόδειξη: Δείχνουμε την ισότητα αποδεικνύοντάς την κατά σημείο. Εστω $p \in S$ και έστω j ο δείκτης για τον οποίον έχουμε $\mathrm{ord}_p f_j = -D(p)$. Τότε, από τον ορισμό της απεικόνισης, συνάγουμε ότι το υπερεπίπεδο $x_j = 0$ δεν περνά από το $p \in S$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $div(H)(p) = \mathrm{ord}_p(\sum_i a_i x_i / x_j)$. Τότε όμως $\varphi^*(H)(p) = \mathrm{ord}_p(\sum_i a_i f_i / f_j) = \mathrm{ord}_p(\sum_i a_i f_i) - \mathrm{ord}_p f_j = \mathrm{ord}_p(\sum_i a_i f_i) + D(p)$. □

Πόρισμα 3.1 *Έστω $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ολόμορφη συνάρτηση. Το σύνολο $\{\varphi^*(H)\}$ είναι ακριβώς το γραμμικό σύστημα $|\varphi|$ της συνάρτησης.*

Πρόταση 3.6 *Έστω $Q \subseteq |D|$ base point free γραμμικό σύστημα προβολικής διάστασης n σε επιφάνειαRiemann S. Τότε υπάρχει μοναδική (modulo αλλαγή συντεταγμένων του $\mathbb{P}^n$) ολόμορφη απεικόνιση $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ τέτοια ώστε $Q = |\varphi|$.*

Απόδειξη: Την φ την βρίσκουμε ως εξής: Έστω $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στο Q. Τότε τα στοιχεία του Q είναι της μορφής $div(f)+D$ όπου $f \in V$. Τώρα, αφού $\dim_{\mathbb{P}} Q = n$ θα είναι $\dim V = n+1$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε μερόμορφες συναρτήσεις $f_0, f_1, \dots, f_n$ που παράγουν το V. Και αν ορίσουμε $\varphi = [f_0, f_1, \dots, f_n]$ θα είναι $|\varphi| = Q$.

Για τη μοναδικότητα της φ: Έστω ότι υπήρχε άλλη φ' με $|\varphi| = |\varphi'|$. Αν $g_0, g_1, \dots, g_n$ οι συναρτήσεις που ορίζουν την φ' και $D' = -\min_i(div(g_i))$, αναδιατάσοντας την σειρά των f_i, g_i έχοουμε $div(f_i) + D = div(g_i) + D'$ για κάθε $i = 0, \dots, n$. Δηλαδή $div(\frac{f_i}{g_i}) = D' - D$ για κάθε i. Επειδή όμως η διαφορά $D' - D$ δεν έχει εξάρτηση από το i έχουμε ότι $div(\frac{f_i}{g_i}) = div(h)$ για κάποια μερόμορφη συνάρτηση h. Από αυτό βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $f_i = chg_i$, όπου c σταθερά. Επομένως $\varphi = \varphi'$ που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Σημείωση 3.2 Εστω ότι η καμπύλη $\varphi(S)$ έχει βαθμό m στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n$ δηλ. $\deg div(H) = m$. Αν k είναι ο βαθμός της απεικόνισης φ τότε $\deg D = km$. Σημειώνουμε ότι αν η φ είναι 1-1 τότε $\deg D = \deg div(H)$ δηλ. η εικόνα της S είναι καμπύλη στο $\mathbb{P}^n$ βαθμού όσος και ο βαθμός του γραμμικού συστήματος που ορίζει την φ. Αυτό θα ισχύει και στην περίπτωση που η φ δεν είναι 1-1, θεωρόντας όμως ότι η εικόνα $\varphi(S)$ είναι καμπύλη με πολλαπλότητα πάχους k. Επομένως ένα base point free γραμμικό σύστημα διάστασης n και βαθμού d απεικονίζει την επιφάνεια Riemann στον $\mathbb{P}^n$ ως καμπύλη βαθμού d.

Η παραπάνω πρόταση και η σημείωση μας δίνουν την εξής 1-1 αντιστοιχία:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Base point free γραμμικά} \\ \text{συστήματα διάστασης } n \text{ και} \\ \text{βαθμού } d \text{ στην } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ολόμορφες απεικονίσεις } \varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{με non degenerate εικόνα βαθμού } d \\ \text{modulo συντεταγμένες του } \mathbb{P}^n \end{array} \right\}$$

Σημείωση 3.3 Στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό σύστημα Q με βασικά σημεία μπορούμε και πάλι να ορίσουμε μιά ολόμορφη απεικόνιση αφαιρώντας αυτά τα βασικά σημεία: αν F είναι το σύνολο των βασικών σημείων του Q, τοτε το $|Q-F|$ είναι base point free και $Q \equiv Q - F$.

Εστω τώρα $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ απεικόνιση που ορίζεται από το base point free γραμμικό σύστημα $Q = \mathbb{P}V$, $V \subseteq \mathcal{L}(D)$. Παρακάτω θα δώσουμε αριθμητικά κριτήρια για το πότε η φ είναι 1-1 ή είναι εμβύθιση. Τα παραπάνω κριτήρια στηρίζονται στην μελέτη των διαστάσεων των διανυσματικών χώρων $V \supseteq V - p \supseteq V - p - q$, όπου $p, q \in S$. Σε κάθε βήμα η διάσταση μπορεί να πέφτει το πολυ κατά ένα. Η παρακάτω πρόταση, την απόδειξη τηςοποίας παραλείπουμε, δίδει την συνθήκη για το πότε η απεικόνιση είναι 1-1.

Πρόταση 3.7 *Εστω $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ απεικόνιση που ορίζεται από το γραμμικό σύστημα $Q = \mathbb{P}V$, $V \subseteq \mathcal{L}(D)$. Αν p, q δύο διαφορετικά σημεία της επιφάνειας* *τότε η απεικόνιση φ είναι 1-1 αν και μόνο αν* $\dim(V-p-q)=\dim V-2$, *γιά κάθε δύο διαφορετικά σημεία p,q της S.*

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης 3.7 ουσιαστικά στηρίζεται στο ότι το γραμμικό σύστημα διαχωρίζει δύο διαφορετικά σημεία. Επιτρέποντας τα σημεία να ταυτίζονται τότε η συνθήκη της Πρότασης δίδει ότι τό σύστημα διαχωρίζει εφαπτόμενες που αντιστοιχεί στο ότι η εικόνα είναι ομαλή. Ετσι έχουμε:

Πρόταση 3.8 *Εστω $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ απεικόνιση που ορίζεται από το γραμμικό σύστημα $Q=\mathbb{P}V$, $V\subseteq\mathcal{L}(D)$. Έστω επιφάνεια Riemann και $|D|$ base point free γραμμικό σύστημα. Τότε η φ εμβυθίζει ολόμορφα την S στο $\mathbb{P}^n$ αν και μόνο αν, για κάθε $p,q\in S$ ισχύει* $\dim(V-p-q)=\dim V-2$.

3.3 Το RIEMANN-ROCH και η γεωμετρική εκδοχή του

3.3.1 Το θεώρημα RIEMANN-ROCH

Το θεώρημα RIEMANN-ROCH είναι το ακόλουθο, η απόδειξη του οποίου είναι εκτενής και δεν θα την αναφέρουμε.

Θεώρημα 3.2 (Riemann - Roch) *Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g και D ένας διαιρέτης βαθμού d στην S. Αν K ένας κανονικός διαρέτης στην S τότε έχουμε:*

$$\dim\mathcal{L}(D)-\dim\mathcal{L}(K-D)=d-g+1.$$

Πόρισμα 3.2 *Κάθε επιφάνεια Riemann S εμβυθίζεται στον προβολικό χώρο, δηλ. είναι αλεβρική καμπύλη.*

Απόδειξη: Πάρε διαιρέτη D με βαθμό $d\geq 2g+1$. Αν $p,q\in S$ τότε $\dim\mathcal{L}(K-D)=\dim\mathcal{L}(K-(D-p))=\dim\mathcal{L}(K-(D-p-q)=0$ διότι ο βαθμός των διαιρετών είναι αρνητικός. Επομένως από το Θεώρημα Riemann - Roch έχουμε $\dim\mathcal{L}(D)=\dim\mathcal{L}(D-p-q)-2$ και από την Πρόταση 3.8 παίρνουμε ότι η αντίστοιχη απεικόνιση είναι εμβύθιση στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{d-g}$. □

3.3.2 Η κανονική εμβύθιση

Εστω $\eta\in\Omega^1(S)$ ένα ολόμορφο διαφορικό στην S και $K=(\eta)$ ο αντίστοιχος κανονικός διαιρέτης. Εστω $< g_1=1,g_2,\ldots,g_g >$ βάση του $\mathcal{L}(K)$ και συμβολίζουμε με $\phi_{\mathrm{can}} : S\longrightarrow\mathbb{P}^{g-1}$ την αντίστοιχη απεικόνιση. Σημειώνουμε ότι αν $\eta^{'}\in\Omega^1(S)$ μια διαφορετική επιλογή τότε $\eta=f\eta^{'}$, για κάποια μερόμορφη συνάρτηση f στην S. Επομένως, αν $K=(\eta^{'})$, τότε $K\sim K^{'}$ και άρα $\mathcal{L}(K)\cong\mathcal{L}(K^{'})$

και $|K| = |K^{'}|$. Συνεπώς, η απεικόνιση ϕ_{can} δεν εξαρτάται από την επιλογή του K και λέγεται κανονική απεικόνιση της S.

Πρόταση 3.9 *Εστω ότι η S επιφάνεια Riemann γένους g.*
1. Αν η S είναι μη υπερελλειπτική τότε η κανονική απεικόνιση ϕ_{can} είναι εμβύθιση.
2. Αν η S είναι υπερελλειπτική, με αντίστοιχη υπερελλειπτική απεικόνιση $\alpha : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, τότε $\phi_{\mathrm{can}} = \beta \circ \alpha$, οπου $\beta : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ είναι η εμβύθιση του Veronese, δηλ. η απεικόνιση που ορίζεται από $[z_0, z_1] \longmapsto [z_0^g, z_0^{g-1} z_1, \ldots, z_0^1 z_1^{g-1}, z_1^g]$. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση η κανονική απεικόνιση ϕ_{can} είναι μια $2 : 1$ απεικόνιση.

Απόδειξη: Κατάρχήν, παρατηρούμε ότι το κανονικό σύστημα $|K|$ σε αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 1$ δεν έχει βασικά σημεία. Διότι, έστω $p \in S$ τυχόν σημείο στην επιφάνεια. Ξέρουμε ότι $\dim\mathcal{L}(K) = g$ και θα δείξουμε ότι $\dim\mathcal{L}(K - p) = g - 1$. Εφαρμόζουμε Riemann-Roch και έχουμε $\dim\mathcal{L}(K - p) = \deg(K - p) + g - 1 + \dim\mathcal{L}(p)$ δηλαδή $\dim\mathcal{L}(K - p) = 2g - 1 + g - 1 + 1 = g - 1 = \dim\mathcal{L}(K) - 1$, που είναι αυτό που θέλαμε.

Με βάση την Πρόταση 3.8, η απεικόνιση ϕ_{can} που επάγεται από το κανονικό σύστημα, δεν θα είναι εμβύθιση αν υπάρχουν $p, q \in S$, με $\dim\mathcal{L}(K - p - q) \neq \dim\mathcal{L}(K) - 2$. Δηλαδή $\dim\mathcal{L}(K - p - q) = \dim\mathcal{L}(K) - 1 = g - 1$. Οπότε, από Riemann-Roch θα έχουμε

$$\dim\mathcal{L}(K - p - q) = \deg(K - p - q) + 1 - g + \dim\mathcal{L}(p + q) = g - 3 + \dim\mathcal{L}(p + q).$$

Επομένως, η κανονική απεικόνιση δεν θα είναι εμβύθιση, αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία $p, q \in S$ τέτοια ώστε $\dim\mathcal{L}(p + q) = 2$. Τότε όμως, υπάρχει μή σταθερή συνάρτηση $f \in \mathcal{L}(p + q)$, με $f : S \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$. Άρα, η επιφάνεια S είναι υπερελλειπτική. Και αντιστρόφως, αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε υπάρχει μία $2 : 1$ απεικόνιση από την S στο $\mathbb{P}^1$. Αν p, q οι προεικόνες του ∞ αυτής της απεικόνισης, τότε ο χώρος $\mathcal{L}(p + q)$, εκτός από την σταθερή, έχει και την παραπάνω 2:1 συνάρτηση. Δηλαδή, $\dim\mathcal{L}(p + q) = 2$. Επομένως, η μοναδική περίπτωση που η κανονική απεικόνιση δεν είναι εμβύθιση είναι όταν η επιφάνεια S είναι υπερελλειπτική.

Στην περίπτωση της υπερελλειπτικής επιφάνειας, μπορούμε να εκφράσουμε την ϕ_{can} μέσω της γνωστής $2 : 1$ απεικόνισης και της απεικόνισης Veronese. Και πάλι το κανονικό σύστημα είναι base point free, όμως δεν δίνει εμβύθιση. Η υπερελλειπτική επιφάνεια S περιγράφεται από κάποια εξίσωση $y^2 = h(x)$, όπου $h(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2g + 1$ ή $2g + 2$ με ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

Τότε, ο χώρος των ολόμορφων 1-μορφών στην S είναι το σύνολο

$$\Omega^1(S) = \{p(x)\frac{dx}{y}|\text{deg}p(x) \leq g-1\}.$$

Αν K κανονικός διαιρέτης τότε οι χώροι $\Omega^1(S)$ και $\mathcal{L}(K)$ είναι ισόμορφοι. Οπότε αν πάρουμε τον κανονικό διαιρέτη $K = div(\frac{dx}{y})$, μία βάση του $\mathcal{L}(K)$ είναι $\{1, x, x^2, \ldots, x^{g-1}\}$. Επομένως, η κανονική απεικόνιση θα είναι

$$\phi_{can} = [1 : x : x^2 : \ldots : x^{g-1}].$$

Αν τώρα,

$$\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

η απεικόνιση με

$$(x, y) \longmapsto x,$$

η κανονική απεικόνιση είναι η σύνθεση της π με την απεικόνιση Veronese που ορίζεται από βάση του χώρου $\mathcal{L}((g-1)\cdot\infty)$, δηλαδή τις συναρτήσεις $1, x, x^2, \ldots, x^{g-1}$. $\square$

Σημείωση 3.4 Στα παρακάτω, θα υποθέτουμε σιωπηρώς ότι η επιφάνεια Riemann είναι μη υπερελλειπτική και επομένως θα αναφερόμαστε στην ϕ_{can} ως κανονική εμβύθιση. Η θεωρία που θα αναπτύξουμε εν γένει επεκτείνεται, με μικρές τροποποιήσεις, στην περίπτωση των υπερελλειπτικών επιφανειών Riemann λόγω και της απλής περιγραφής της κανονονικής απεικόνισης σε αυτή την περίπτωση.

Υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(K) & \longrightarrow & \Omega^1(S) \\ f & \longmapsto & f\eta \end{array}$$

με αντίστροφη απεικόνιση την $\omega \longrightarrow \eta/\omega$. Εστω $< g_1 = 1, g_2, \ldots, g_g >$ βάση του δ.χ. $\mathcal{L}(K)$. Τότε $< \omega_1 = \eta, \omega_2 = g_2\eta, \ldots, \omega_g = g_g\eta >$ είναι βάση του $\Omega^1(S)$. Αν λοιπόν $\eta = f(z)dz$ τοπική παράσταση της η, τότε για τα στοιχεία της παραπάνω βάσης του $\Omega^1(S)$ θα έχουμε τοπικές παραστάσεις τις $\omega_i = f_i(z)dz$, όπου $f_i(z) = f(z)g_i(z)$. Και αντίστροφα, επιλέγονται βάση $< \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g >$του $\Omega^1(S)$, κάθε τοπική παράσταση $\omega_i = f_i(z)dz$ των στοιχείων της είναι της παραπάνω μορφής. Συνεπώς, αν $p \in S$ με συντεταγμένη z, τότε η εικόνα του κάτω από την κανονική απεικόνιση δίδεται από

$$\phi_{\text{can}}(p) = [\omega_1(p), \omega_2(p), \ldots, \omega_g(p)] := [f_1(z), f_2(z), \ldots, f_g(z)] \in \mathbb{P}^{g-1}.$$

3.3.3 Γραμμική επέκταση διαιρετών στην κανονική εμβύθιση

Εστω S μια επιφάνεια Riemann και έστω $i : S \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ μια εμβύθιση της S στον προβολικό χώρο. Στο εξής ταυτίζουμε την S με την εικόνα της $i(S)$ στον $\mathbb{P}^n$. Εστω $H = \sum_{i=0}^{n} k_i X_i$ ένα υπερεπίπεδο στο $\mathbb{P}^n$ και $p \in S$ και υποθέτουμε χ.β.γ. ότι $p \in U_0$ όπως παραπάνω. Θα αναλύσουμε τί σημαίνει $div(H) \geq mp$, όπου $div(H)$ είναι ο διαιρέτης τομής του υπερεπιπέδου H με την $S \equiv i(S)$, βλ. Παράγραφο 3.1.4. Παίρνουμε τοπική συντεταγμένη z γύρω από το p με $z = 0$ να αντιστοιχεί στο p. Τότε η παραπάνω εμβύθιση δίδεται τοπικά από $i(z) = [a_0(z) : \ldots : a_n(z)]$ με $a_i(z)$ ολόμορφες συναρτήσεις. Εχουμε $p = [a_0(0) : \ldots : a_n(0)] \in S$ και από υπόθεση $a_0(0) \neq 0$. Λόγω συνέχειας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_0(z) \neq 0$, $\forall z$. Τότε, τοπικά γύρω από το p, η επιφάνεια S γράφεται ως $(\frac{a_1(z)}{a_0(z)}, \ldots, \frac{a_n(z)}{a_0(z)})$. Ο περιορισμός της ρητής συνάρτησης H/X_0 στην S γύρω από το p είναι η

$$h(z) = \frac{1}{a_0(z)} \sum_{i=0}^{n} k_i a_i(z).$$

Έχουμε την ισοδυναμία

$$div(H) \geq mp \Longleftrightarrow h(0) = 0, \ldots, h^{(m-1)}(0) = 0.$$

Δείχνουμε ότι το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το

$$\sum_{i=0}^{n} k_i a_i^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k = 1, \ldots, m-1.$$

Πράγματι, αν κάνουμε πράξεις, παίρνουμε ότι η k-οστή παράγωγος της $h(z)$ στο μηδέν είναι

$$h^{(k)}(0) = \mu_0 \sum_{i=0}^{n} k_i a_i^{(0)}(0) + \mu_1 \sum_{i=0}^{n} k_i a_i^{(1)}(0) + \cdots + \mu_{k-1} \sum_{i=0}^{n} k_i a_i^{(k-1)}(0) + \frac{1}{a_0(0)} \sum_{i=0}^{n} k_i a_i^{(k)}(0),$$

όπου τα μ_i είναι εκφράσεις του $a_0(0)$ και των παραγώγων του. Επομένως έχουμε ότι

$$h(0) = h^{(1)}(0) = \cdots = h^{(m-1)}(0) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} k_i a^{(k)}(0) = 0, \ \ \forall k = 0, \ldots, m-1.$$

Ορισμός 3.16 *Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g εμβυθισμένη στον $\mathbb{P}^n$ και $D = p_1 + \cdots + p_d$ ένας θετικός διαιρέτης στην S. Ορίζουμε ως γραμμική επέκταση (span) του D, συμβ. $span\overline{D}$, την τομή $\cap_H H$, όπου H υπερεπίπεδο του $\mathbb{P}^n$ με $div(H) \geq D$.*

Εστω τώρα ότι την επιφάνεια S την εμβυθίζουμε στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{g-1}$ με την κανονική εμβύθιση $\phi_{\text{can}} : S \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$, που ορίζεται μετά από επιλογή βάσης $\omega_1, \ldots, \omega_g$ του $\Omega^1(S)$. Στο εξής ταυτίζουμε S με την $\phi_{\text{can}}(S)$. Τοπικά αν

$\omega_i = f_i(z)dz$, όπου $f_i(z)$ ολόμορφη, τότε σύμφωνα με την Παράγραφο **;;** η κανονική εμβύθιση δίδεται από $\Omega(z) := \phi_{\text{can}}(z) = [f_1(z), \dots, f_g(z)]$. Εστω D διαιρέτης στην S. Θέλουμε να βρούμε την διάσταση του επιπέδου $span\overline{D}$. Θα το κάνουμε αυτό στην περίπτωση που ο διαιρέτης έχει την μορφή $D = kp_1 + p_2 + \cdots + p_{d-k}$, με $p_1, \dots, p_{d-k}$ διαφορετικά μεταξύ τους, διαιρέτης στην S. Η γενίκευση της μελέτης για οποιονδήποτε διαιρέτη θα είναι προφανής. Γύρω από κάθε p_i βρίσκουμε τοπική συντεταγμένη z_i και γράφουμε $\omega_1 = f_{1i}(z_i)dz_i, \dots, \omega_g = f_{gi}(z_i)dz_i$. Τότε $\Omega(p) := \Omega(0) = [f_{1i}(0), \dots, f_{gi}(0)] = \phi_{\text{can}}(p_i)$.

Αν $H = \sum_{i=0}^{g-1} a_i X_i$ υπερεπίπεδο που διέρχεται από το p_1 με πολλαπλότητα $\geq k$ τότε, σύμφωνα με την Παράγραφο 3.1.4, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις

$$a_0 f_{11}(0) + \cdots + a_{g-1} f_{g1}(0) = 0$$

$$a_0 f_{11}^{(1)}(0) + \cdots + a_{g-1} f_{g1}^{(1)}(0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 f_{11}^{(k-1)}(0) + \cdots + a_{g-1} f_{g1}^{(k-1)}(0) = 0.$$

Επίσης, για τα υπόλοιπα σημεία που είναι απλά, θα έχουμε

$$a_0 f_{12}(0) + \cdots + a_{g-1} f_{g2}(0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 f_{1(d-k)}(0) + \cdots + a_{g-1} f_{g(d-k)}(0) = 0.$$

Δηλαδή, τα υπερεπίπεδα H με $div(H) \geq D$ θα παραμετρίζονται από g-άδες $(a_0, \dots, a_{g-1})$ που είναι λύσεις του συστηματος με πίνακα

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} f_{11}(0) & \cdots & f_{g1}(0) \\ f_{11}^{(1)}(0) & \cdots & f_{g1}^{(1)}(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{11}^{(k-1)}(0) & \cdots & f_{g1}^{(k-1)}(0) \\ f_{12}(0) & \cdots & f_{g2}(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1(d-k)}(0) & \cdots & f_{g(d-k)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1(p_1) & \cdots & \omega_g(p_1) \\ \omega_1^{(1)}(p_1) & \cdots & \omega_g^{(1)}(p_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{(k-1)}(p_1) & \cdots & \omega_g^{(k-1)}(p_1) \\ \omega_1(p_2) & \cdots & \omega_g(p_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1(p_{d-k}) & \cdots & \omega_g(p_{d-k}) \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 3.17 *Ο παραπάνω πίνακας* $\mathbf{A}_D$ *λέγεται Brill-Noether πίνακας του θετικού διαιρέτη* D.

Ο χώρος λύσεων αυτού του συστήματος έχει διάσταση $g - \text{rank}(\mathbf{A}_D)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε υπερεπίπεδα $H_1, \dots, H_{g-\text{rank}(\mathbf{A}_D)}$ που να είναι βάση του παραπάνω χώρου. Θέλουμε τώρα να βρούμε την διάσταση της τομής αυτών των υπερεπιπέδων. Έστω $H_j = \sum_{i=0}^{g-1} a_i^j X_i = 0$. Τότε ψάχνουμε την διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος με πίνακα

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_{g-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{g-\mathrm{rank}\mathbf{A}_D} & a_1^{g-\mathrm{rank}\mathbf{A}_D} & \cdots & a_{g-1}^{g-\mathrm{rank}(\mathbf{A}_D)} \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας έχει μέγιστη τάξη, διότι διαλέξαμε τα $H_1, \ldots, H_{g-\mathrm{rank}\mathbf{A}_D}$ να είναι βάση. Άρα, ο χώρος λύσεων έχει διάσταση $g - (g - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_D))$ δηλαδή $\mathrm{rank}(\mathbf{A}_D)$. Επομένως η (προβολική) διάσταση του $span\overline{D}$ ισούται με $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = \mathrm{rank}(\mathbf{A}_D) - 1$.

3.3.4 Το γεωμετρικό Θεώρημα R-R και εφαρμογές

Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g που την εμβυθίζουμε στον $\mathbb{P}^{g-1}$ με την κανονική εμβύθιση $\phi_{\mathrm{can}} : S \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Εστω $D = \sum_{i=1}^{d} P_i$ θετικός διαιρέτης στην S βαθμού d. Ταυτίζουμε την S με την εικόνα της $\phi_{\mathrm{can}}(S)$, οπότε ο D ταυτίζεται με τον $\sum_{i=1}^{d} \Omega(P_i)$, βλ. τον συμβολισμό της Παραγράφου 3.3.3.

Θεώρημα 3.3 (Γεωμετρικό Θεώρημα R-R) *Με τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε ότι*

$$r(D) = \deg D - 1 - \dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = \deg D - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_D),$$

όπου $\mathbf{A}_D$ είναι ο Brill-Noether πίνακας του διαιρέτη D, βλ. Ορισμό 3.17.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα R-R, βλ. Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι: $r(D) = \deg D - g + \dim\mathcal{L}(K - D)$. Το γραμμικό σύστημα K είναι το γραμμικό σύστημα των διαιρετών υπερεπιπέδων του $\mathbb{P}^{g-1}$ στην S. Το $|K - D|$ είναι το γραμμικό (υπο)σύστημα των διαιρετών υπερεπιπέδων που περιέχουν τον διαιρέτη D. Επομένως, από τον ορισμό του $span\overline{D}$ έχουμε ότι $\dim\mathcal{L}(K - D) = g - 1 - \dim_{\mathbb{P}} span\overline{D}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.10 *Εστω S μια μη υπερελλειπτική επιφάνεια Riemann γένους g. Τότε*

1. Για τον γενικό D θετικό διαιρέτη βαθμού $\deg D \leq g$ έχουμε ότι $r(D) = 0$.

2. Για τον γενικό D θετικό διαιρέτη βαθμού $\deg D \geq g$ έχουμε ότι $r(D) = \deg D - g$.

Απόδειξη: Πράγματι, όταν ο D είναι θετικός γενικός διαιρέτης βαθμού $\deg D \leq g$, τότε η εικόνα του κάτω από την κανονική απεικόνιση αντιστοιχεί σε $d = \deg D \leq g$ ανεξάρτητα σημεία στο $\mathbb{P}^{g-1}$. Συνεπώς, $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = d - 1$ και από το γεωμετρικό R-R παίρνουμε ότι $r(D) = d - 1 - (d - 1) = 0$. Από την άλλη μεριά, όταν $d = \deg D \geq g$, τότε $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = g - 1$ και τότε το γεωμετρικό R-R δίνει ότι $r(D) = d - 1 - (g - 1) = d - g$. □

3.4 Το Θεώρημα Clifford

Πρόταση 3.11 *Εστω D διαιρέτης και $V \subseteq \mathcal{L}(D)$ γραμμικός υπόχωρος. Τότε έχω την ισοδυναμία : $\dim_{\mathbb{P}}|V| \geq r$ αν και μόνο αν για κάθε r σημεία $p_1, \cdots, p_r \in S$ υπάρχει διαιρέτης $D' \in |V|$ με $D' \geq p_1 + \cdots + p_r$.*

Απόδειξη: " $\Rightarrow$ ": Έστω ότι $\dim_{\mathbb{P}}|V| \geq r$ και $p_1, \cdots, p_r$ τυχόντα σημεία. Ξέρουμε ότι για κάθε p, η διάσταση $\dim_{\mathbb{P}}|V-p|$ πέφτει το πολύ κατά ένα. Άρα, παίρνοντας τα $p_1, \cdots, p_r$ διαδοχικά, έχουμε $\dim_{\mathbb{P}}|V-(p_1+\cdots+p_r| \geq 0$, άρα υπάρχει $\tilde{D} \in |V-(p_1+\cdots+p_r)|$. Οπότε παίρνοντας $D' = \tilde{D}+(p_1+\cdots+p_r) \in |V|$ έχουμε $D' \geq p_1+\cdots+p_r$, αφού $\tilde{D} \geq 0$.
" $\Leftarrow$ ": Έχουμε ότι αν το p δεν είναι σημείο βάσης για το γραμμικό σύστημα $|V|$ τότε $\dim_{\mathbb{P}}|V-p| = \dim_{\mathbb{P}}|V|-1$. Τώρα, μπορούμε να διαλέξουμε διαδοχικά τα p_i, $i=1,\ldots,r$ να μην είναι βασικά σημεία των γραμμικών συστημάτων $|V-(p_1+\cdots+p_{i-1})|$ (τα σημεία βάσης είναι πεπερασμένα). Τότε έχουμε τους διαδοχικούς εγκλεισμούς

$$|V| \supset |V-p_1| \supset |V-(p_1+p_2)| \supset \cdots \supset |V-(p_1\cdots+p_r)|$$

και σε κάθε βήμα η διάσταση πέφτει κατά ένα. Τώρα, από υπόθεση το $|V-(p_1+\cdots+p_r)|$ είναι μή κενό , άρα $\dim_{\mathbb{P}}|V-(p_1+\cdots+p_r)| \geq 0$, άρα από τα παραπάνω θα έχουμε $\dim_{\mathbb{P}}|V| \geq r$.

Λήμμα 3.6 *Έστω $D_1 \geq 0$ και $D_2 \geq 0$ δύο διαιρέτες με $r(D_1) = r_1(\geq 0)$ και $r(D_2) = r_2(\geq 0)$. Ορίζουμε την απεικόνιση του Petri*

$$\mu_0 : \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2) \to \mathcal{L}(D_1+D_2)$$

με

$$\sum c_{ij} f_i^{(1)} \otimes f_j^{(2)} \mapsto \sum c_{ij} f_i^{(1)} f_j^{(2)}.$$

Θέτουμε $V = Im(\mu_0)$, γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(D_1+D_2)$. Τότε

$$\dim_{\mathbb{P}}|V| \geq r_1 + r_2.$$

Απόδειξη:
Έστω $p_1,\ldots,p_{r_1+r_2}$ σημεία της επιφάνειας S. Αφού $r(D_1) = r_1$, από την Πρόταση 3.11 έχουμε ότι υπάρχει $D_1' \in |D_1|$ με $D_1' \geq p_1+\cdots+p_{r_1}$. Είναι $D_1' = D_1+(f_1)$ με $f_1 \in \mathcal{L}(D_1)$. Ομοίως, υπάρχει $D_2' \in D_2$ με $D_2' \geq p_{r_1+1}+\cdots+p_{r_1+r_2}$. Είναι $D_2' = D_2+(f_2)$ με $f_2 \in \mathcal{L}(D_2)$. Τότε όμως, $D_1+D_2+(f_1f_2) \geq p_1+\cdots+p_{r_1+r_2}$ και αφού $f_1f_2 = \mu_0(f_1 \otimes f_2)$, έχουμε ότι $D_1+D_2+(f_1f_2) \in |V|$ και τότε από την Πρόταση 3.11 θα έχουμε $\dim_{\mathbb{P}}V \geq r_1+r_2$.

Σημείωση 3.5 Το παραπάνω Λήμμα μπορεί να αποδειχθεί και ως συνέπεια της εξής πρότασης που ωφείλεται στον H.Hopf: Εστω ότι οι A, B, C είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικοί χώροι. Αν $\nu : A \otimes B \longrightarrow C$ γραμμική απεικόνιση που είναι 1-1 σε κάθε παράγοντα ξεχωριστά, τότε $\dim \nu(A \otimes B) \geq \dim A + \dim B - 1$.

Ορισμός 3.18 *Ένας διαιρέτης D λέγεται special αν $i(D) = \dim\mathcal{L}(K - D) \neq 0$ (K ο κανονικός διαιρέτης), ισοδύναμα, αν ο διανυσματικός χώρος $H^0(\Omega^1(-D))$ των ολόμορφων διαφορικών που μηδενίζονται στον D είναι μή κενός.*

Θεώρημα 3.4 (Clifford) *Άν D special διαιρέτης στην S, τότε*

$$r(D) \leq \deg D/2.$$

Επιπλέον, ισότητα έχω ακριβώς όταν:

1. Ο D είναι κανονικός διαιρέτης, ή $D = 0$, ή

2. Η επιφάνεια S είναι υπερελλειπτική και $D \sim kD_0$, όπου D_0 ο υπερελλειπτικός διαιρέτης.

Απόδειξη: Θα κάνουμε χρήση του εξής πορίσματος του παραπάνω Λήμματος 3.6. Αν $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$ διαιρέτες στην S τότε

$$r(D_1 + D_2) \geq r(D_1) + r(D_2).$$

Έστω $d = \deg D$. Αν $r(D) = -1$ τότε η πρόταση ισχύει. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r(D) \geq 0$ και επομένως ότι $D \geq 0$. Αφού ο διαιρέτης D είναι special, υπάρχει διαιρέτης $D' \geq 0$ βαθμού $2g - 2 - d$ τέτοιος ώστε $D + D' = K$, όπου K ο κανονικός διαιρέτης. Έχουμε $\dim\mathcal{L}(D') = \dim\mathcal{L}(K - D)$ και

$$r(D + D') = r(K) = \dim_{\mathbb{P}} H^0(\Omega^1) = g - 1.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα με $D_1 = D$ και $D_2 = D'$, έχουμε

$$r(D) + r(D') \leq g - 1$$

και από Riemann-Roch στους ίδιους διαιρέτες έχουμε

$$r(D) - r(D') = d - g + 1$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$2\,r(D) \leq d,$$

δηλαδή,

$$r(D) \leq d/2$$

πού είναι αυτό που θέλουμε.

Για την ισότητα, χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα το οποίο δεν θα αποδείξουμε.

Λήμμα 3.7 *Εστω S μια non degenerate καμπύλη στο $\mathbb{P}^n$. Τότε τα σημεία τομής της S με ένα γενικό υπερεπίπεδο βρίσκονται σε γενική θέση, δηλαδή, οποιαδήποτε n από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Υποθέτουμε ότι η S δεν είναι υπερελλειπτική. Τοτε η κανονική άπεικόνιση είναι εμβύθιση. Οταν έχουμε ισότητα στο θεώρημα ότε πρέπει να έχουμε ισότητα σε κάθε βήμα. Συνεπώς, $r(D) + r(D^{'}) = g - 1$ και άρα $|K| = |D| + |D^{'}|$. Επομένως, κάθε υπερεπίπεδο στο $\mathbb{P}^{g-1}$ τέμνει την καμπύλη σε σημεία που είναι η ένωση σημείων διαιρετών από τα $|D|$ και $|D^{'}|$. Εχουμε ότι $\mathrm{deg}D + \mathrm{deg}D^{'} = 2g-2$ και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d = \mathrm{deg}D \leq g-1$. Αν $r(D) = 0$ τότε $r(D^{'}) = g - 1$ και επομένως $d = 0$ δηλ. $D = 0$. Διαφορετικά έχουμε $r(D) > 0$. Τότε όμως από το γεωμετρικό R-R έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = d-1-r(D) < d-1$ δηλ. τα σημεία των διαιρετών του $|D|$ είναι γραμμικά εξηρτημένα. Τότε όμως τα σημεία τομής οποιουδήποτε υπερεπιπέδου με την καμπύλη, περιέχουν $d \leq g-1$ γραμμικά εξηρτημένα σημεία και συνεπώς και $g-1$ γραμμικά εξηρτημένα σημεία. , πράγμα άτοπο από το παραπάνω λήμμα.

Από την άλλη μεριά τώρα. Αν $D = K$ ο κανονικός διαιρέτης, έχουμε

$$r(K) = g - 1 = \frac{\mathrm{deg}K}{2}.$$

Ομοίως αν $D = 0$ έχουμε

$$r(0) = 0 = \frac{\mathrm{deg}0}{2}.$$

Εστω τώρα ότι η επιφάνεια S είναι υπερελλειπτική. Τότε, ξέρουμε ότι υπάρχει μία $2:1$ ολόμορφη απεικόνιση $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Θα δείξουμε ότι αν D special και $D \sim d\pi^*(p_0)$, με $p_0 \in \mathbb{P}^1$, τότε έχουμε ισότητα. Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε μέσω της π τον κανονικό διαιρέτη της S. Ο $K_{\mathbb{P}^1} = -2p_0$ είναι κανονικός διαιρέτης στο $\mathbb{P}^1$, επομένως από τον τύπο του Hurwitz, βλ. Πρόταση 1.1 έχουμε

$$K_S = \pi^*(K_{\mathbb{P}^1}) + R_\pi. \quad (*)$$

Ο R_π είναι ο ramification διαιρέτης της απεικόνισης π, δηλαδή

$$R_\pi = \sum_{p \in S} (\mathrm{mult}_p(\pi) - 1)p = \sum_{\substack{p \in S \\ p\ ramif.\ point}} p,$$

αφού τα μόνα σημεία με πολλαπλότητα > 1 έχουν πολλαπλότητα ακριβώς 2. Στη συνέχεια συνδέουμε τον R_π με τον B_π (branch διαιρέτης), ο οποίος είναι διαιρέτης στην επιφάνεια $\mathbb{P}^1$ επομένως υπολογίζεται εύκολα. Έχουμε

$$B_\pi = \sum_{y \in \mathbb{P}^1} (\sum_{p \in \pi^{-1}(y)} \mathrm{mult}_p(\pi) - 1)y = \sum_{\substack{y \in \mathbb{P}^1 \\ y\ branchpoint}} y.$$

Όμως,

$$\pi^*(B_\pi) = \pi^*(\sum_{\substack{y\in\mathbb{P}^1 \\ y\ branchpoint}} y) = \sum_{\substack{y\in\mathbb{P}^1 \\ y\ branchpoint}} \pi^*(y) = 2\sum_{\substack{p\in S \\ p\ ramif.\ point}} p = 2R_\pi.$$

Στο $\mathbb{P}^1$ ξέρουμε ακριβώς τον B_π διότι $\deg B_\pi = 2g+2$. Άρα $B_\pi = (2g+2)p_0$ (μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε σημείο, αλλά εδω το p_0 εξυπηρετεί στους υπολογισμούς.) Συνδυάζοντας τα παραπάνω, ο τύπος (*) γίνεται

$$K_S = \pi^*(K_{\mathbb{P}^1}) + \frac{1}{2}\pi^*(B_\pi) = \pi^*(-2p_0) + \frac{1}{2}\pi^*(2(g+1)p_0) = (g-1)\pi^*(p_0).$$

Κατ' αρχήν, αν $d > g-1$ τότε $\deg D = 2d > 2(g-1)$ δηλαδή ο D δεν είναι special . Εστω λοιπόν ότι $d \leq g-1$. Θα δείξουμε ότι έχουμε ισότητα στο Clifford, δηλ. ότι:

$$2\dim\mathcal{L}(D) = \deg D + 2,$$

ή

$$2\dim\mathcal{L}(d\pi^*(p_0)) = \deg\pi^*(dp_0) + 2 = 2d+2,$$

ή

$$\dim\mathcal{L}(d\pi^*(p_0)) = d+1.$$

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim\mathcal{L}(d\pi^*(p_0)) = d+1$.

Οταν $d \leq g-1$ τότε ο D είναι special διότι $K - D = \pi^*(g-1-d)p_0 \geq 0$. Επομένως από το θεώρημα έχουμε ότι $\dim\mathcal{L}(d\pi^*(p_0)) \leq d+1$. Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει και η αντιστροφη ανισότητα $\geq$ ως εξής: Εφαρμόζοντας Riemann Roch στο $\mathbb{P}^1$ για τον διαιρέτη dp_0 , βρίσκουμε ότι $r(dp_0) = d$. Αρα

$$\mathcal{L}(dp_0) = \mathbb{C} < 1, f, f^2, \ldots, f^d >,$$

όπου η f έχει απλό πόλο στο σημείο p_0. Συνεπώς,

$$\mathcal{L}(\pi^*(dp_0)) = \mathbb{C} < \pi^*(1), \pi^*(f), \pi^*(f^2), \ldots, \pi^*(f^d) > .$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις ανήκουν στο χώρο $\mathcal{L}(\pi^*(dp_0))$. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες πράγμα που συνεπάγεται την ανισότητα $\dim\mathcal{L}(\pi^*(dp_0)) \geq d+1$ που θέλουμε. Αν όχι, θα υπήρχαν $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$ με

$$a_0\pi^*(1) + a_1\pi^*(f) + a_2\pi^*(f^2) + \ldots + a_d\pi^*(f^d) \equiv 0,$$

ή

$$\pi^*(a_0 1 + a_1 f + \ldots + a_d f^d) \equiv 0,$$

ή

$$(a_0 1 + a_1 f + \ldots + a_d f^d)(\pi(x)) \equiv 0 \ \ \forall x \in S,$$

όμως η $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ είναι επί, άρα

$$(a_0 1 + a_1 f + \ldots + a_d f^d)(z) \equiv 0 \;\; \forall z \in \mathbb{P}^1,$$

που είναι άτοπο διότι οι $1, f, \ldots, f^d$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Κεφάλαιο 4

Συμμετρικά γινόμενα και η Ιακωβιανή

4.1 Συμμετρικά γινόμενα επιφάνειας Riemann

Εστω S επιφάνεια Riemann. Ορίζουμε το d-συμμετρικό της γινόμενο, συμβ. $S_{(d)}$, ως το σύνολο πηλίκο $S^{\times d}/\mathrm{Sym}_d$, όπου Sym_d είναι η συμμετρική ομάδα των d στοιχείων που δρα στο γινόμενο $S^{\times d}$ με τον φυσιολογικό τρόπο. Τα σημεία του $S_{(d)}$ αντιστοιχούν (παραμετρίζουν) σε μη διατεταγμένες d-άδες σημείων της S που τις συμβολίζουμε με $p_1 + \cdots + p_d$, όπου $p_i \in S$, $i = 1, \ldots, d$. Το υποσύνολο των $p_1 + \cdots + p_d$ με $p_i = p_j$, για κάποια $i \neq j$, λέγεται διαγώνιος του συμμετρικού γινομένου. Εστω $\pi : S^{\times d} \longrightarrow S_{(d)}$ η κανονική απεικόνιση. Το $S_{(d)}$ είναι τοπολογικός χώρος, με την επαγόμενη τοπολογία πηλίκο απο το $S^{\times d}$, συνεκτικός και Hausdorff. Θα ορίσουμε τώρα χαρτογράφηση του $S_{(d)}$ που τον καθιστά μιγαδική πολλαπλότητα.

Για κάθε σημείο $p_1^0 + \cdots + p_d^0 \in S_{(d)}$ θα κατασκευάσουμε ένα χάρτη του $S_{(d)}$ που να το περιέχει, ως ακολούθως. Για κάθε $i = 1, \ldots, d$ παίρνουμε χάρτη $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \in \mathbb{C}$ του p_i^0 στην S με τοπική συντεταγμένη z_i. Το $U := \pi(U_1 \times \cdots \times U_d)$ είναι ανοικτό σύνολο του $S_{(d)}$ που περιέχει το παραπάνω σημείο. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}^d$ με $\phi(p_1 + \cdots + p_d) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, όπου τα σ_i είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα των $\phi_1(p_1), \ldots, \phi_d(p_d) \in \mathbb{C}$. Η ϕ είναι 1-1 απεικόνιση λόγω του θεμελιώδους θεωρήματος της Αλγεβρας. Η σύνθεση $\alpha = \phi \circ \pi : U_1 \times \cdots \times U_d \subseteq S^{\times d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ ως απεικόνιση μιγαδικών πολλαπλοτήτων είναι ολόμορφη (ως πολυωνυμική). Από αυτό συνάγουμε ότι η ϕ είναι συνεχής, διότι αν $V \subseteq \mathbb{C}^d$ ανοικτό τότε $\phi^{-1}(V)$ ανοικτό αφού το $\pi^{-1}(\phi^{-1}(V)) = \alpha^{-1}(V)$ είναι ανοικτό. Επίσης, η ϕ^{-1} είναι συνεχής διότι αν $W \subseteq U \subseteq S_{(d)}$ ανοικτό, τότε $\phi(W) = \alpha(\pi^{-1}(W))$ που είναι ανοικτό διότι η α είναι ολόμορφη και τοπικά 1-1 (διαφορετικές, μέχρι και συμμετρίας, n-άδες ριζών $\longmapsto$

συμμετρικά πολυώνυμα = συντελεστές του αντιστοίχου πολυωνύμου) άρα είναι ανοικτή (τοπικά είναι ισομορφισμός). Δείχνουμε τώρα ότι οι αλλαγές χαρτών είναι ολόμορφες απεικονίσεις. Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος επέκτασης του Riemann, βλ. Θεώρημα 2.3.

Εστω $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}^d$, $\phi' : U' \longrightarrow \mathbb{C}^d$ δύο χάρτες του $S_{(d)}$ όπως παραπάνω και θεωρούμε την $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \longrightarrow \phi'(U \cap U')$. Εστω $X = \phi(\Delta) \cap \phi(U \cap U'))$, όπου Δ η διαγώνιος στο $S_{(d)}$. Το X είναι αναλυτικό γνήσιο υποσύνολο του $\phi(U \cap U')$ διότι εξ' ορισμού περιέχει τα $(w_1, \ldots, w_d)$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(w_1, \ldots, w_d; z) := z^d + w_1 z^{d-1} + \cdots + w_{d-1} z + w_d$ έχει διπλή ρίζα ως προς z, άρα $X = V(R)$, όπου $R(w_1, \ldots, w_d)$ είναι η resultant ως προς z των πολυωνύμων P, $\frac{\partial P}{\partial z}$. Η $\phi' \circ \phi^{-1}$ είναι συνεχής στο $\phi(U \cap U')$. Δείχνουμε ότι είναι αναλυτική στο $\phi(U \cap U') \backslash X$ οπότε θα είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο $\phi(U \cap U')$ λόγω του παραπάνω θεωρήματος. Η απεικόνιση $\phi' \circ \phi^{-1}$ στέλνει το $(w_1, \ldots, w_d) \in \phi(U \cap U')$ στην d-άδα του $\mathbb{C}^d$ που αντιστοιχεί στα συμμετρικά πολυώνυμα των $\phi'_1 \circ \phi_1^{-1}(z_1), \ldots \phi'_d \circ \phi_d^{-1}(z_d)$, όπου $z_1, \ldots, z_d$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P_{(w_1, \ldots w_d)}(z) = z^d + w_1 z^{d-1} + \cdots + w_{d-1} z + w_d$. Επειδή οι απεικονίσεις $\phi'_1 \circ \phi_1^{-1}$ είναι ολόμορφες (αντιστοιχούν σε αλλαγές χαρτών της S) αρκεί να δείξουμε ότι οι ρίζες $z_1, \ldots, z_d$ αντιστοιχούν τοπικά σε ολόμορφες συναρτήσεις του $(w_1, \ldots, w_d)$. Ομως, εφαρμόζοντας το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης στην $P(w_1, \ldots, w_d; z) := 0$ έχουμε ότι αν $(w_1, \ldots, w_d) \notin X$ τότε $z_i = z_i(w_1, \ldots, w_d)$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

Πρόταση 4.1 *Υπάρχει αναλυτική εμβύθιση του συμμετρικού γινομένου $S_{(d)}$ στον προβολικό χώρο. Επομένως το συμμετρικό γινόμενο μιας επιφάνειας Riemann είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο.*

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια του γενικότερου θεωρήματος, ότι κάθε πεπερασμένο πηλίκο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου είναι και αυτό προβολικό αλγεβρικό. Εδώ, το συμμετρικό γινόμενο $S_{(d)}$ είναι πεπερασμένο πηλίκο του καρτεσιανού γινομένου $S^{\times d}$ το οποίο είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο ως γινόμενο τέτοιων. □

4.2 Ιακωβιανή και η απεικόνιση ABEL – JACOBI

Υπενθυμίζουμε ότι η πρώτη ομάδα ομολογίας μιάς επιφάνειας Riemann S είναι το πηλίκο

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = \frac{CLCH(S)}{BCH(S)},$$

όπου $CLCH = \{$κλειστές αλυσίδες $\}$ και $BCH = \{$συνοριακές αλυσίδες$\}$. Έστω ω μιά $\mathcal{C}^\infty$ κλειστή 1-μορφή στην S. Αν D κάποιο τριγωνοποιήσιμο υποσύνολο της S, από το θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\int_{\partial D} \omega = \int\int_D d\omega = \int\int_D 0 = 0.$$

Δηλαδή, ολοκλήρωση κλειστής μορφής πάνω σε σύνοριακή αλυσίδα είναι 0. Επομένως, αν $[c] \in H_1(S, \mathbb{Z})$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{[c]} \omega = \int_c \omega$$

είναι καλά ορισμένο, ανεξάρτητα από επιλογή αντιπροσώπου, αφού όλοι οι αντιπρόσωποι μιας κλάσης διαφέρουν κατά στοιχείο του $BCH(S)$. Ειδικότερα, αφού κάθε ολόμορφη 1-μορφή είναι κλειστή, η απεικόνιση

$$\int_{[c]} \text{--} : \Omega^1(S) \longrightarrow \mathbb{C}$$

είναι καλά ορισμένη. Με βάση το παραπάνω, ορίζουμε τα εξής συναρτησοειδή:

Ορισμός 4.1 *Ενα γραμμικό συναρτησοειδές $\lambda : \Omega^1(S) \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται περίοδος αν είναι της μορφής $\int_{[c]} \text{--}$, για κάποιο στοιχείο $[c] \in H_1(S, \mathbb{Z})$.*

Το σύνολο των περιόδων το συμβολίζουμε με Λ και είναι μιά ελεύθερη αβελιανή υποομάδα του $\Omega^1(S)^*$. Οι γεννήτορές της κατασκευάζονται ως εξής. Εστω $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ μια βάση της $H_1(S, \mathbb{Z})$. Τότε οι περίοδοι $\int_{\gamma_1} \text{--}, \ldots, \int_{\gamma_{2g}} \text{--}$ είναι βάση της ελεύθερης αβελιανής ομάδας Λ. Ορίζουμε τώρα την Ιακωβιανή μιάς επιφάνειας Riemann ως ακολούθως.

Ορισμός 4.2 *Έστω S μία επιφάνεια Riemann. Η Ιακωβιανή της S, που συμβολίζεται με $Jac\,(S)$, είναι το πηλίκο*

$$Jac\,(S) = \frac{\Omega^1(S)^*}{\Lambda}.$$

Δηλαδή, τα γραμμικά συναρτησοειδή του $\Omega^1(S)$ modulo την υποομάδα Λ.

Στα παρακάτω, κάνοντας την ταύτιση του χώρου των συναρτησοειδών με τον δυικό του, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω πηλίκο με όρους διανυσματικών χώρων και μέγιστων πλεγμάτων (lattices).

Εστω $\omega_1, \ldots, \omega_g$ βάση του $\Omega^1(S)$. Τότε κάθε στοιχείο λ του $\Omega^1(S)^*$ μπορούμε να το ταυτίσουμε με ένα διάνυσμα του $\mathbb{C}^g$, μέσω του δυϊκού ισομορφισμού

$$\lambda \longleftrightarrow (\lambda(\omega_1), \ldots, \lambda(\omega_g))^T.$$

Οπότε, αν $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ μια βάση της $H_1(S, \mathbb{Z})$, τα αντίστοιχα συναρτησοειδή, μέσω της παραπάνω ταύτισης, θα μας δώσουν τα διανύσματα

$$\pi_i = (\int_{\gamma_i} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_i} \omega_g)^T,$$

με $i = 1, \ldots, 2g$.

Πρόταση 4.2 *Τα διανύσματα $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε θα υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_{2g}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_1\pi_1 + \cdots + a_{2g}\pi_{2g} = 0.$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε ένα $g \times 2g$ σύστημα. Τώρα, μπορούμε να πάρουμε την συζυγή σχέση και να διπλασιάσουμε τον αριθμό εξισώσεων. Δηλαδή,

$$a_1\bar{\pi}_1 + \cdots + a_{2g}\bar{\pi}_{2g} = 0.$$

Οπότε τελικά θα πάρουμε ένα $2g \times 2g$ σύστημα με πίνακα συντελεστών τον

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1}\omega_1 & \int_{\gamma_2}\omega_1 & \ldots & \int_{\gamma_{2g}}\omega_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_{\gamma_1}\bar{\omega}_1 & \int_{\gamma_2}\bar{\omega}_1 & \ldots & \int_{\gamma_{2g}}\bar{\omega}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

που έχει μη τετριμμένη λύση. Αρα ο πίνακας Ω θα έχει τάξη $< 2g$. Επομένως, το ίδιο θα ισχύει και για τον Ω^T (ανάστροφος) και άρα θα υπάρχουν μιγαδικοί $\lambda^1, \ldots, \lambda^g, \eta_1, \ldots, \eta^g$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$\int_{\gamma_i}(\sum_{j=1}^{g}\lambda^j\omega_j + \sum_{j=1}^{g}\eta^j\bar{\omega}_j) = 0,$$

$i = 1, \ldots, 2g$. Και τώρα παρατηρούμε ότι αν θέσουμε

$$\omega = \sum_{j=1}^{g}\lambda^j\omega_j \quad \text{και} \quad \varphi = \sum_{j=1}^{g}\eta^j\omega_j\,,$$

η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_{\lambda_i}(\omega + \bar{\varphi}) = 0,$$

για κάθε $i = 1, \ldots, 2g$. Οπότε, από την Πρόταση 1.11 έχουμε ότι υπάρχει μια $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $\omega + \bar{\varphi} = df$ και από την Πρόταση 1.12 συμπεραίνουμε ότι $\omega = \varphi = 0$. Ισοδύναμα,

$$\sum_{j=1}^{g}\lambda^j\omega_j = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{g}\eta^j\omega_j = 0,$$

που είναι άτοπο, διότι τα $\omega_1, \ldots, \omega_g$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Αφού τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το

$$\Lambda = \{\sum_{j=1}^{2g} m_j\pi_j | m_j \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}^g$$

είναι μέγιστο πλέγμα και, επομένως, το πηλίκο $\mathbb{C}^g/\Lambda$ είναι ένας μιγαδικός τόρος διάστασης g. Οπότε, έχομε την παρακάτω ισοδύναμο ορισμό για την Ιακωβιανή της S:

Ορισμός 4.3 *Έστω S επιφάνεια Riemann. Τον g-διάστατο τόρο $\mathbb{C}^g/\Lambda$, τον συμβολίζουμε με $J(S)$ και τον ονομάζουμε Ιακωβιανή της επιφάνειας S.*

Για να εξετάσουμε καλύτερα τις ιδιότητες της Ιακωβιανής πρέπει να δούμε πώς ακριβώς αυτή συνδέεται με την ίδια την επιφάνεια S. Στην μελέτη αυτή, μας βοηθάει η απεικόνιση Abel-Jacobi A, η οποία ορίζεται ως εξής: Σταθεροποιούμε ένα βασικό σημείο p_0 στην S και για κάθε $p \in S$ διαλέγουμε ένα μονοπάτι γ_p από το p στο p_0. Παίρνουμε την

$$\tilde{A} : S \longrightarrow \Omega^1(S)^*,$$

με

$$\tilde{A}(p)(\omega) = \int_{\gamma_p} \omega.$$

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι καλά ορισμένη διότι εξαρτάται από την επιλογή του παραπάνω μονοπατιού. Παρ΄ όλα αυτά, η διαφορά δύο τέτοιων μονοπατιών, θα είναι ένα στοιχείο του $H_1(S, \mathbb{Z})$, άρα η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων θα είναι στοιχείο της ομάδας των περιόδων Λ. Οπότε συμπεραίνουμε ότι η ίδια απεικόνιση modulo Λ είναι καλά ορισμένη. Ορίζουμε λοιπόν ως απεικόνιση Abel-Jacobi A την

$$A : S \longrightarrow Jac\,(S)$$

με

$$A(p) = \int_{\gamma_p} -- \,.$$

Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από την επιλογή του βασικού σημείου p_0.

Μπορούμε να δούμε την απεικόνιση Abel-Jacobi ταυτίζοντας, όπως πρίν, τον χώρο $\Omega_1(S)^*$ με τον $\mathbb{C}^g$, ύστερα από επιλογή βάσης. Δηλαδή, αν $\omega_1, \ldots, \omega_g$ βάση του $\Omega_1(S)^*$, θα έχουμε

$$A(p) = (\int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g)^T mod\Lambda.$$

Επέκταση της A στο σύνολο των διαιρετών: Θέλουμε τώρα να γενικεύσουμε την παραπάνω απεικόνιση ώστε να είναι ανεξάρτητη του βασικού σημείου p_0. Γι΄ αυτό την επεκτείνουμε στο σύνολο των διαιρετών με φυσιολογικό τρόπο. Δηλαδή

$$A : Div(S) \longrightarrow Jac\,(S),$$

με

$$A(\sum n_p p) = \sum n_p A(p),$$

ή αλλιώς

$$D \mapsto (\sum_{i=1}^{k} n_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{p_0}^{p_i} \omega_g)^T,$$

όπου $D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$. Η απεικόνιση αυτή είναι ομομορφισμός ομάδων.

Την παραπάνω απεικόνιση μπορούμε να την περιορίσουμε σε σύνολο διαιρετών συγκεκριμένου βαθμού. Μάλιστα, για τους διαιρέτες $Div^0(S)$ βαθμού μηδέν, που είναι υποομάδα του $Div(S)$, έχουμε πάλι ομομορφισμό ομάδων

$$A_0 : Div^0(S) \longrightarrow Jac\,(S).$$

Τώρα, το σύνολο $Div^d(S)$των διαιρετών βαθμού $d \in \mathbb{Z}$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους διαιρέτες βαθμού μηδέν (σε κάθε διαιρέτη βαθμού μηδέν προσθέτουμε d φορές κάποιο σταθερό σημείο). Οπότε, η γνώση του περιορισμού της απεικόνισης A στο σύνολο των διαιρετών βαθμού d, ουσιαστικά ισοδυναμεί με την γνώση της απεικόνισης A_0. Τώρα έχουμε:

Λήμμα 4.1 *Η απεικόνιση Abel-Jacobi A_0 είναι ανεξάρτητη από την επιλογή βασικού σημείου p_0 της S.*

Απόδειξη: Αν D διαιρέτης βαθμού μηδέν, τον γράφουμε ως $D = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i$, επιτρέποντας επαναλήψεις σημείων. Τότε

$$\begin{aligned} A_0(D) &= (\sum_{i=1}^{k} \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \int_{p_0}^{p_i} \omega_g)^T - (\sum_{i=1}^{k} \int_{p_0}^{q_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \int_{p_0}^{q_i} \omega_g)^T \\ &= (\sum_{i=1}^{k} \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \int_{q_i}^{p_i} \omega_g)^T, \end{aligned}$$

που είναι ανεξάρτητο του βασικού σημείου p_0. $\square$

4.3 Το θεώρημα του ABEL

Ένα από τα θεωρήματα που θα αποδείξουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι το θεώρημα του Abel, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα Abel) *Έστω S επιφάνεια Riemann γένους g και $A_0 : Div^0(S) \longrightarrow Jac\,(S)$ η απεικόνιση Abel-Jacobi. Έστω $D \in Div^0(S)$. Τότε ο D είναι διαιρέτης μερόμορφης συνάρτησης ορισμένης στην S, δηλ. είναι κύριος διαιρέτης, αν και μόνο αν $A_0(D) = 0$ στην $Jac\,(S)$.*

Πόρισμα 4.1 *Έστω S επιφάνεια Riemann γένους g και $A_d : Div^d(S) \longrightarrow Jac\,(S)$ ο περιορισμός της απεικόνισης Abel-Jacobi στο σύνολο των διαιρετών βαθμού $d \in \mathbb{Z}$. Εστω $D \in Div^d(S)$. Τότε η fiber του A_d που διέρχεται από το D, δηλ. το σύνολο $A_d^{-1}(A_d(D))$, ισούται με το σύνολο των διαιρετών γραμμικά ισοδύναμων με τον διαιρέτη D.*

Απόδειξη: Πράγματι, $D^{'} \in A_d^{-1}(A_d(D)) \Longleftrightarrow A_d(D^{'}) = A_d(D) \Longleftrightarrow A_0(D^{'} - D) = 0$, οπότε από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι $D^{'} = D + (f)$, για κάποια μερόμορφη συνάρτηση f στην S. □

Θα αρχίσουμε με τον ορισμό κάποιων έννοιών οι οποίες θα χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος του Abel. Έστω ολόμορφη απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$, μεταξύ επιφανειών Riemann. Αν έχουμε μία μερόμορφη συνάρτηση ή μορφή ορισμένη στην Y, ξέρουμε πώς να πάρουμε το pull back αυτής και να ορίσουμε μία μερόμορφη συνάρτηση στην X. Κάτι αντίστοιχο μπορεί να γίνει και αντίστροφα. Δηλαδή να ξεκινήσουμε από μία συνάρτηση (ή μορφή) h στην X και μέσω της F να ορίσουμε μία συνάρτηση (ή μορφή) στην Y. Την καινούρια αυτή συνάρτηση (ή μορφή) την ονομάζουμε ίχνος και την συμβολίζουμε με $Tr(h)$. Η διαδικασία για την κατασκευή του $Tr(h)$ έχει ως ακολούθως.

Έστω h μία μερόμορφη συνάρτηση ορισμένη στην X και σημείο q στην Y το οποίο δεν είναι σημείο καμπής (branch point) της F. Αν η F έχει βαθμό d, θα έχουμε ακριβώς d διαφορετικές προεικόνες του q, έστω $p_1, \ldots, p_d$. Η συνάρτηση $Tr(h)$ θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν τις προεικόνες κάθε σημείου, και αυτό γίνεται αν δούμε την F τοπικά. Δηλαδή, παίρνουμε ένα χάρτη U γύρω από το q τέτοιον ώστε οι προεικόνες $V_1, \ldots, V_d$ του U να είναι ανά δύο ξένες. Τότε $F|_{V_i}$ είναι αμφιμονοσήμαντες, επομένως μπορούμε να πάρουμε τις αντίστροφες

$$\varphi_i : U \longrightarrow V_i.$$

Παρατηρούμε ότι

$$U \xrightarrow{\varphi_i} V_i \xrightarrow{h} \mathbb{C},$$

δηλαδή οι $h \circ \varphi_i$ είναι συναρτήσειςστο ανοικτό U της Y. Τώρα, ορίζουμε

$$Tr(h) : U \longrightarrow \mathbb{C},$$

με

$$Tr(h) = \sum_{i=1}^{d} h \circ \varphi_i = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i^*(h|_{V_i}).$$

Παρατηρούμε ότι κατά σημείο

$$Tr(h)(q) = \sum_{\{p \in F^{-1}(q)\}} h(p),$$

όταν το q δεν είναι σημείο καμπής της F και όταν η h δεν έχει πόλους στα σημεία $p \in F^{-1}(q)$. Οπότε, όταν η h είναι ολόμορφη, η $Tr(h)$ είναι μία καλώς ορισμένη ολόμορφη συνάρτηση στο σύνολο $Y - \{$ σημεία καμπής της $F\}$.

Μας μένει ακόμα να δούμε τι γίνεται στα σημεία καμπής της F. Προφανώς, η ιδιομορφία της F θα μεταφέρεται στην $Tr(h)$ και πρέπει να μελετήσουμε αν αυτή είναι άρσιμη, πόλος ή ουσιώδης. Τελικά θα δούμε ότι η ιδιομορφία γίνεται, στη χειρότερη περίπτωση, πόλος. Έστω, λοιπον, q σημείο καμπής της F και χωρίς βλάβη γενικότητος υποθέτουμε ότι αυτό έχει μία προεικόνα πολλαπλότητας m. Τότε, η F τοπικά θα γράφεται $w^m = z$, όπου z τοπική συντεταγμένη γύρω από το q και w τοπική συντεταγμένη γύρω από το p. Επίσης, αναπτύσουμε την h γύρω απο το p σε σειρά Laurent $\sum_n c_n w^n$, θέτουμε $\zeta = exp(2\pi i/m)$ και συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε βρίσκουμε την σειρά Laurent της $Tr(h)(z)$.

$$\begin{aligned} Tr(h)(z) &= Tr(h)(w^m) = \sum_{\{z:w^m=z\}} h(z) = \sum_{i=0}^{m-1} h(\zeta^i w) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_n c_n (\zeta^i w)^n = \sum_n c_n (\sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{in}) w^n. \end{aligned}$$

Αν το m διαιρεί το n τότε $\zeta^{in} = 1$ ενώ αν δεν το διαιρεί, το άθροισμα των m-ριζών της μονάδας είναι μηδέν. Άρα, οι μόνοι όροι που θα εμφανιστούν τελικά στο άθροισμα είναι τα $n = km$ και θα πάρουμε

$$Tr(h)(z) = \sum_k m c_{km} w^{km} = \sum_k m c_{km} z^k.$$

Από αυτόν τον τύπο, βλέπουμε ότι η ιδιομορφία πόλου διατηρείται και ποτέ δεν θα έχουμε ουσιώδη ανωμαλία. Επίσης, αν η h είναι ολόμορφη τότε και το ίχνος $Tr(h)$ θα είναι ολόμορφη.

Ακριβώς τα ίδια μπορούμε να εφαρμόσουμε για μορφές. Δηλαδή, αν ω μία μορφή στην X τότε επάγεται μέσω της F μία μορφή $Tr(\omega)$ στην Y. Με συμβολισμούς όπως πρίν, θα είναι

$$Tr(\omega) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i^*(\omega|_{V_i})$$

και με τοπικές συντεταγμένες, ο τύπος αυτός γίνεται

$$Tr(\omega) = \sum_k c_{km-1} z^{k-1} dz.$$

Και πάλι, αν ω ολόμορφη τότε και το $Tr(\omega)$ θα είναι ολόμορφη μορφή.

Όλα αυτά, τα ορίσαμε για να μπορούμε να μεταφέρουμε ένα ολοκλήρωμα από μία επιφάνεια X, μέσω της F, σε μία επιφάνεια Y στην οποία μπορούμε ενδεχομένως να ολοκληρώνουμε πιο εύκολα. Κατ΄ αρχήν, οι τοπικές μορφές που βρήκαμε παραπάνω, μας δίνουν σχέση ολοκληρωτικών υπολοίπων των ω και $Tr(\omega)$.

Λήμμα 4.2 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μία μή σταθερή ολόμορφη συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann και ω μία μερόμορφη 1-μορφή στην X. Τότε, για κάθε*

$q \in Y$ *ισχύει*

$$Res_q(Tr(\omega)) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} Res_p(\omega).$$

Επίσης, ολοκληρώματα των ω και $Tr(\omega)$ συνδέονται ως εξής:

Λήμμα 4.3 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μια μή σταθερή ολόμορφη συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann, ω μία ολόμορφη 1-μορφή στην X και γ αλυσίδα στην Y. Τότε*

$$\int_{F^*\gamma} \omega = \int_\gamma Tr(\omega).$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την μία κατεύθυνση του θεωρήματοςτου Abel.

" $\Longrightarrow$ " Αν $D = div(f)$ διαιρέτης μίας μή σταθερής μερόμορφης συνάρτησης στην επιφάνεια S, τότε $A_0(D) = 0$ στην $Jac(S)$.

Απόδειξη: Η $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ που είναι μερόμορφη, επάγει μία ολόμορφη $F : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty = \mathbb{P}^1$. Αυτήν την F θα χρησιμοποιήσουμε για να μεταφέρουμε τα ολοκληρώματα της Abel-Jacobi, από την επιφάνεια S στη σφαίρα $\mathbb{C}^\infty$, στην οποία ξέρουμε ότι η μοναδική ολόμορφη 1-μορφή είναι η μηδενική.

Έστω, ότι η $F : S \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ είναι βαθμού d και $p_1, \dots, p_d$ τα μηδενικά της f $q_1, \dots, q_d$ οι πόλοι της f . Παίρνουμε στην $\mathbb{C}^\infty$ μονοπάτι γ που συνδέει το 0 με το ∞, τέτοιο ώστε να μην περνάει από τα σημεία καμπής της F. Αν πάρουμε τώρα το $F^*\gamma$, θα μας δώσει άθροισμα d μονοπατιών $\sum_{i=1}^d \gamma_i$, εκ των οποίων το καθένα θα συνδέει κάθε πόλο q_i με ένα ακριβώς μηδενικό p_i της f. Δηλαδή, $\gamma_i(0) = q_i$ και $\gamma_i(1) = p_i$. Οπότε, $D = \sum_{i=1}^d (p_i - q_i)$. Με βάση αυτά, θα γράψουμε την απεικόνιση Abel-Jacobi. Σταθεροποιούμε ένα βασικό σημείο $x_0 \in S$, μια βάση $\omega_1, \dots, \omega_g$ του $\Omega^1(S)$ και έχουμε

$$A_0(D) = \sum_{i=1}^d (\int_{x_0}^{p_i} \omega_1, \dots, \int_{x_0}^{p_i} \omega_g)^T - (\int_{x_0}^{q_i} \omega_1, \dots, \int_{x_0}^{q_i} \omega_g)^T \quad mod\Lambda.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$(\int_{x_0}^{p_i} + \int_{p_i}^{q_i} + \int_{q_i}^{x_0} \omega_1, \dots, \int_{x_0}^{p_i} + \int_{p_i}^{q_i} + \int_{q_i}^{x_0} \omega_g)^T,$$

$i = 1, \dots, d$ είναι στοιχεία του Λ. Οπότε, αν αφαιρέσουμε το άθροισμα τους από το $A_0(D)$, δεν αλλάζει τίποτα. Άρα,

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{i=1}^d (\int_{p_i}^{q_i} \omega_1, \dots, \int_{p_i}^{q_i} \omega_g)^T mod\Lambda = \sum_{i=1}^d (\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_i} \omega_g)^T mod\Lambda \\ &= (\int_{F^*(\gamma)} \omega_1, \dots, \int_{F^*(\gamma)} \omega_g)^T mod\Lambda = (\int_\gamma Tr(\omega_1), \dots, \int_\gamma Tr(\omega_g))^T. \end{aligned}$$

Οι μορφές $Tr(\omega_i)$ είναι ολόμορφες πάνω στην $\mathbb{C}^\infty$. Όμως, στην σφαίρα $\mathbb{C}^\infty$ η μόνη ολόμορφη μορφή είναι η μηδενική, άρα $A_0(D) = 0$, που είναι αυτό που θέλαμε. □

Η αντίστροφη κατεύθυνση του θεωρήματος είναι δυσκολότερη και θα χρειαστουν κάποια λήμματα. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι $A_0(D) = 0$ και θέλουμε να βρούμε μία μερόμορφη συνάρτηση f με $div(f) = D$.

Όπως έχουμε αναφέρει και πρίν, βλ. Παράγραφο 1.2.3, μπορούμε την επιφάνεια Riemann γένους g να την εκφράσουμε ως ένα κανονικό πολύγωνο $\mathcal{P}$, $4g$ πλευρών $\{a_i, a_i', b_i, b_i'\}$, $i = 1, \ldots, g$, στις οποίες έχουμε κάνει κάποιες ταυτίσεις. Με τις ταυτίσεις αυτές, τα a_i και b_i γίνονται κλειστά μονοπάτια. Έστω σ μία κλειστή μορφη στην S. Θέτουμε

$$A_i(\sigma) = \int_{a_i} \sigma \quad \textit{και} \quad B_i(\sigma) = \int_{b_i} \sigma.$$

Τα A_i τα ονομάζουμε a-περιόδους της μορφής σ και τα B_i b-περιόδους. Χρησιμοποιόντας τους παραπάνω συμβολισμούς, θα αποδείξουμε κάποια λήμματα.

Λήμμα 4.4 *Έστω ω μία ολόμορφη 1-μορφή στην επιφάνεια S. Τότε*

$$Im \sum_{i=1}^{g} A_i(\omega)\bar{B}_i(\omega) < 0$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.2 και χρησιμοποιόντας τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε

$$\int\int_{\mathcal{P}} \omega \wedge \bar{\omega} = \sum_{i=1}^{g} [A_i(\omega)B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega})B_i(\omega)].$$

Γράφουμε τοπικά $\omega = f(z)dz$, $\bar{\omega} = \bar{f}(z)d\bar{z}$. Τότε $\omega \wedge \bar{\omega} = |f|^2 dz \wedge d\bar{z} = -2i|f|^2 dx \wedge dy$. Οπότε, $Im \int\int_S \omega \wedge \bar{\omega} < 0$ και συνεπώς

$$Im \sum_{i=1}^{g} [A_i(\omega)B_i(\bar{\omega}) - A_i(\bar{\omega})B_i(\omega)] < 0.$$

Όμως, $A_i(\bar{\omega}) = \overline{A_i(\omega)}$ και $B_i(\bar{\omega}) = \overline{B_i(\omega)}$, άρα το παραπάνω άθροισμα γίνεται $2Im \sum_{i=1}^{g} A_i(\omega)\bar{B}_i(\omega) < 0$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πόρισμα 4.2 *Αν ω είναι ολόμορφη 1-μορφή με $A_i(\omega) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots g$, τότε $\omega = 0$. Ομοίως και για τα B_i.*

Κάποια πολυ χρήσιμα συμπεράσματα παίρνουμε από τους $g \times g$ πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ με στοιχεία $A_i(\omega_j)$ και $B_i(\omega_j)$ αντίστοιχα.

Λήμμα 4.5 *Οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μη ιδιάζοντες.*

Απόδειξη: Αν, για παράδειγμα ο $\mathbf{A}$ ήταν ιδιάζων, θα υπήρχε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_g)^T$ τέτοιο ώστε $\mathbf{Ac} = 0$. Δηλαδή $\sum_j c_j A_i(\omega_j) = 0$, για κάθε $i = 1, \ldots, g$. Αν πάρουμε, τώρα, την ολόμορφη μη μηδενική 1-μορφή $\omega = \sum_j c_j \omega_j$, θα είναι $A_i(\omega) = \sum_j c_j A_i(\omega_j) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, g$ και από το Πόρισμα 4.2 έχουμε $\omega = 0$ που είναι άτοπο. □

Λήμμα 4.6 *Για τους πίνακες* $\mathbf{A}$ *και* $\mathbf{B}$ *ισχύει* $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}$.

Απόδειξη: Το jk στοιχείο του $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ είναι $\sum_{i=1}^{g} A_i(\omega_j)B_i(\omega_k)$ και του $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$ είναι $\sum_{i=1}^{g} A_i(\omega_k)B_i(\omega_j)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτά είναι ίσα. Αυτό όμως είναι συνέπεια του Λήμματος 1.2 διότι $\omega_j \wedge \omega_k = 0$ (μορφές τύπου (1,0)) και $d\omega_k = 0$ λόγω ολομορφίας. □

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ένα λήμμα το οποίο σχεδόν ολοκληρώνει την αποδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης του θεωρήματος του Abel.

Λήμμα 4.7 *Έστω D διαιρέτης βαθμού μηδέν σε επιφάνεια Riemann S, τέτοιος ώστε $A_0(D) = 0$ στην $Jac(S)$. Τότε, υπάρχει μερόμορφη 1-μορφή ω στην S, τέτοια ώστε*

- *η ω έχει απλούς πόλους στα σημεία του διαιρέτη D.*
- *$Res_p(\omega) = D(p)$ για κάθε $p \in S$.*
- *οι a και b περίοδοι του ω είναι ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.*

Απόδειξη: Θα κάνουμε χρήση του εξής το οποίο δεν αποδεικνύουμε, βλ. π.χ. Λήμμα 1.15 στο [Mi]: Αν έχουμε δοσμένα σημεία $p_1, \ldots, p_d$ και ακεραίους $r_1, \ldots, r_d$ τότε υπάρχει μερόμορφη μορφή ω με απλούς πόλους σε αυτά τα σημεία και $Res_{p_i}(\omega) = r_i$, αν και μόνο αν, $\sum_{i=1}^{d} r_i = 0$. Επομένως, αφού $\deg D = 0$ υπάρχει μορφή που να ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνθήκες. Το δύσκολο είναι να την διαλέξουμε έτσι ώστε να ισχύει και το τρίτο.

Αν τ μία τέτοια μορφή, τότε και η $\omega = \tau - \sum_{i=1}^{g} c_i\omega_i$ με c_i τυχαίες σταθερές, ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνθήκες (διότι προσθέτουμε κάτι ολόμορφο, άρα δεν γίνεται καμία αλλαγή στους πόλους). Αρκεί, λοιπόν, να διαλέξουμε c_i τέτοια ώστε να ικανοποιείται και η τρίτη συνθήκη. Έχουμε, επίσης, το δεδομένο ότι $A_0(D) = 0$ στην $Jac(S)$. Ενας αντιπρόσωπος της k-οστής συντεταγμένης αυτής της απεικόνισης δίδεται από

$$\rho_k = \sum_{p \in \mathcal{P}} D(p) \int_{p_0}^{p} \omega_k = \sum_{p \in \mathcal{P}} D(p) f_{\omega_k}(p),$$

όπου $f_{\omega_k}(p)$ η συνάρτηση στο πολύγωνο $\mathcal{P}$ που ορίσθηκε στην απόδειξη του Λήμματος 1.2. Παρατηρούμε ότι η f_{ω_k} είναι ολόμορφη και $Res_p(\tau) = D(p)$, άρα $Res_p(f_{\omega_k}\tau) = D(p)f_{\omega_k}(p)$. Επομένως, με βάση το Λήμμα 1.2 και τον τύπο (1.1) στην απόδειξη του ιδίου Λήμματος, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho_k &= \sum_{p\in\mathcal{P}} Res_p(f_{\omega_k}\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{P}} f_{\omega_k}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{g}(A_i(\omega_k)B_i(\tau) - A_i(\tau)B_i(\omega_k)). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Δηλαδή, το διάνυσμα $(\rho_1,\ldots,\rho_)g^T = 0$ στην $Jac\,(S)$, άρα μπορούμε να το γράψουμε ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των περιόδων, δηλαδή

$$(\rho_1,\ldots,\rho_g) = \sum_{i=1}^{g} m_i(A_i(\omega_1),\ldots,A_i(\omega_g)) - \sum_{i=1}^{g} n_i(B_i(\omega_1),\ldots,B_i(\omega_g)),$$

με $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$. Κατά συντεταγμένη, παίρνουμε

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{g} m_i A_i(\omega_k) - \sum_{i=1}^{g} n_i B_i(\omega_k). \qquad (4.2)$$

Εξισώνοντας τίς (4.1) και (4.2), έχουμε

$$\sum_{i=1}^{g}(B_i(\tau) - 2\pi i m_i)A_i(\omega_k) = \sum_{i=1}^{g}(A_i(\tau) - 2\pi i n_i)B_i(\omega_k),$$

για κάθε $k = 1,\ldots,g$. Η παραπάνω σχέση γράφεται και $\mathbf{A}^T b = \mathbf{B}^T a$, όπου $a = (A_1(\tau) - 2\pi i n_1,\ldots,A_g(\tau) - 2\pi i n_g)$ και $b = (B_1(\tau) - 2\pi i m_1,\ldots,B_g(\tau) - 2\pi i m_g)$. Από αυτήν τη σχέση, περνάμε σε γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathbb{C}^g \xrightarrow{T_1} \mathbb{C}^{2g} \xrightarrow{T_2} \mathbb{C}^g$$

όπου

$$T_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}.$$

Από το Λήμμα 4.6 συμπεραίνουμε ότι $T_2 \circ T_1 = 0$, δηλαδή $Im(T_1) \subseteq Ker(T_2)$ και λόγω διαστάσεων έχουμε ακριβώς ισότητα.

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ είναι στοιχείο του $ker(T_2)$ άρα και του $Im(T_1)$. Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{C}^g$ με $T_1(c) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ή, πιό αναλυτικά $\mathbf{A}c = a$ και $\mathbf{B}c = b$. Οι συντεταγμένες $c_1,\ldots,c_g$ του c είναι τα c_i που ψάχναμε, διότι

$$A_i(\omega) = A_i(\tau) - \sum_{j=1}^{g} c_j A_i(\omega_j) = A_i(\tau) - (A_i(\tau) - 2\pi i n_i) = 2\pi i n_i$$

και ομοίως $B_i(\omega) = 2\pi i m_i$. □

Ύστερα από αυτό το λήμμα, μπορούμε να αποδείξουμε το αντίστροφο του θεωρήματος. Δηλαδή, αν $A_0(D) = 0$ στην $Jac\,(S)$, υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $div(f) = D$.

Απόδειξη: Έστω μερόμορφη 1-μορφή ω που ικανοποιεί τις τρείς συνθήκες του Λήμματος 4.7. Παίρνουμε βασικό σημείο p_0 και σχηματίζουμε την συνάρτηση

$$f(p) = \exp(\int_{p_0}^{p} \omega).$$

Η f είναι καλά ορισμένη, διότι όποιο μονοπάτι και αν πάρουμε από το p_0 στο p το ολοκλήρωμα θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$ και με την εκθετική θα γίνεται μονάδα. Θα δείξουμε ότι η f είναι η συνάρτηση που ζητάμε.

Κατάρχήν, στα σημεία που η ω είναι ολόμορφη, είναι και η f ολόμορφη. Έστω τώρα, σημείο p με $D(p) = n \neq 0$. Το p είναι απλός πόλος της ω άρα μπορούμε να την γράψουμε τοπικά γύρω από το p ως $\omega = \frac{n}{z} + g(z)$, με $g(z)$ ολόμορφη. Με την ολοκλήρωση αυτό γίνεται $n\ln(z) + h(z)$, όπου $h(z)$ ολόμορφη και στην συνέχεια, με την εκθετική $f(z) = z^n e^{h(z)}$. Άρα, η f είναι μερόμορφη στο σημείο p, με $\mathrm{ord}_p(f) = n$. Άρα, $div(f) = D$. Δηλαδή, η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση. □

4.4 Το Θεώρημα αντιστροφής του JACOBI

Σ' αυτή την παράγραφο θα αποδέιξουμε το κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα 4.2 (Θεώρημα αντιστροφής του Jacobi) *Έστω S επιφάνεια Riemann γένους g. Η απεικόνιση Abel-Jacobi $A_0 : Div^0(S) \longrightarrow Jac(S)$ είναι επί.*

Στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε μια ισχυρότερη μορφή του παρπάνω θεωρήματος. Οπως είδαμε στην Παράγραφο 4.2, η γνώση της απεικόνισης A_0 ισοδυναμεί με την γνώση της απεικόνισης $A_d : Div^d(S) \longrightarrow Jac(S)$, $d \in \mathbb{Z}$ με την διαφορά ότι η τελευταία ορίζεται μετά από επιλογή σταθερού σημείου $p_0 \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η απεικόνιση A_g είναι επί. Θεωρούμε το συμμετρικό γινόμενο $S_{(g)} \subset Div^g(S)$. Περιορίζουμε την A_g στο $S_{(g)}$ και συμβολίζουμε την επαγόμενη απεικόνιση με $u_g = u : S_{(g)} \longrightarrow Jac(S)$. Το πλεονέκτημα αυτού του περιορισμού είναι ότι το $S_{(g)}$ είναι μιγαδική πολλαπλότητα, εν αντιθέσει με το $Div^g(S)$ που δεν έχει καθορισμένη δομή. Πριν συνεχίσουμε με την απόδειξη του θεώρηματος αντιστροφής του Jacobi, διατυπώνουμε μια πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια:

Πρόταση 4.3 *Εστω $u_d : S_{(d)} \longrightarrow Jac(S)$ ο περιορισμός της απεικόνισης Abel-Jacobi στο σύνολο $S_{(d)}$ των θετικών διαιρετών βαθμού d. Εστω $D \in S_{(d)}$ με $r = r(D)$. Τότε $u_d^{-1}(u_d(D)) = |D| \cong \mathbb{P}^r$.*

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 4.1 στο Θεώρημα του Abel έχουμε ότι $A_d^{-1}(A_d(D))$ ισούται με τους διαιρέτες γραμμικά ισοδύναμους με τον D. Επομένως, έχουμε ότι $u_d^{-1}(u_d(D)) =$ ισούται με τους θετικούς διαιρέτες γραμμικά ισοδύναμους με τον D, δηλ. $u_d^{-1}(u_d(D)) = |D| \cong \mathbb{P}^r$, όπου $r = r(D)$. $\square$

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του θεώρηματος αντιστροφής του Jacobi, αποδεικνύοντας το παρακάτω ισχυρότερο θεώρημα:

Θεώρημα 4.3 (Ισχυρό θεώρημα αντιστροφής του Jacobi) *Έστω S επιφάνεια Riemann γένους g. Η απεικόνιση Abel-Jacobi $u : S_{(g)} \longrightarrow Jac(S)$ είναι επί και, εν γένει, εμβύθιση.*

Για το επί: Εστω $D = p_1 + \cdots p_g$ διαιρέτης βαθμού g με $p_i \neq p_j$ για $i \neq j$. Δείχνουμε ότι η Ιακωβιανή της απεικόνισης u_g στο σημείο D δίδεται από τον πιναχα ... Απο το Γεωμετρικό θεώρημα R.R. έχουμε ότι όταν ο διαιρέτης D είναι γενικός, τότε η Ιακωβιανή της u_g στο σημείο D έχει μέγιστη τάξη. Από το Θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης 2.1 έχουμε ότι ο u_g είναι τοπικά ισομορφισμός γύρω από το σημείο D. Από την άλλη μεριά, από το proper mapping theorem 2.2, έχουμε ότι το $u_g(S_{(g)})$ είναι αναλυτικό υποσύνολο της $Jac(S)$, το οποίο είναι, επίσης, και συνεκτικό ως εικόνα συνεκτικού κάτω από συνεχή συνάρτηση. Επομένως είναι ένα αναλυτικό, συνεκτικό σύνολο της $Jac(S)$ που περιέχει μια ανοικτή περιοχή της $Jac(S)$, συνεπώς $u_g(S_{(g)}) = Jac(S)$.

Οτι είναι εν γένει εμβύθιση: Από την Γεωμετρική εκδοχή του Θεωρήματος R.R. έχουμε ότι όταν ο D είναι γενικός διαιρέτης βαθμού g, τότε $r(D) = 0$. Επομένως, από την Πρόταση 4.3 έχουμε ότι $u_g^{-1}(u_g(D)) = \{D\} \cong \mathbb{P}^0$. Αρα, ο u_g είναι εν γένει 1-1 και επίσης είναι εμβύθιση σε ένα τέτοιο σημείο η Ιακωβιανή έχει μέγιστη τάξη, βλ. παραπάνω. $\square$

Το παρακάτω Πόρισμα που είναι συνέπεια του Πορίσματος 4.1 και του Θεωρήματος 4.2

Πόρισμα 4.3 *Έστω S επιφάνεια Riemann και $d \in \mathbb{Z}$. Τότε η Ιακωβιανή $Jac(S)$ παραμετρίζει κλάσεις διαιρετών $[D]$ στην S βαθμού d, όπου κλάση διαιρετών= διαιρέτες modulo γραμμική ισοδυναμία.*

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια Πρόταση, η απόδειξη της οποίας στηρίζεται στην θεωρία των συναρτήσεων θήτα και στην οποία δεν θα αναφερθούμε.

Πρόταση 4.4 *Υπάρχει αναλυτική εμβύθιση της Ιακωβιανής $Jac(S)$ στον προβολικό χώρο. Επομένως η Ιακωβιανή μιας επιφάνειας Riemann είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο.*

Κεφάλαιο 5

Το πρόβλημα των Brill-Noether

5.1 Εισαγωγή

Στην μελέτη μας για τους διαιρέτες σε μια επιφάνεια Riemann, είδαμε ότι οι αναλυτικές απεικονίσεις βαθμού d μιας επιφάνειας Riemann γένους g στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^r$ αντιστοιχούν στα (base point free) γραμμικά συστήματα g^r_d στην S. Το κεντρικό ερώτημα γύρω από το οποίο επικεντρώνεται το πρόβλημα των Brill-Noether είναι το εξής:

- *Με πόσους τρόπους μπορεί να απεικονισθεί (με αναλυτικό τρόπο) μια επιφάνεια Riemann S στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^r$ ως καμπύλη βαθμού d;*

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί πιο συνοπτικά με όρους που χρησιμοποιούν τις έννοιες του moduli χώρου $\mathcal{M}_g$ των επιφανειών Riemann γένους g που παραμετρίζει κλάσεις των επιφανειών Riemann μέχρι αναλυτικής ισομορφίας και του Hilbert scheme $\mathcal{H}_{g,r,d}$ που παραμετρίζει καμπύλες (αριθμητικού) γένους g και βαθμού d στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^r$. Η έννοια του αριθμητικού γένους, που δεν θα την ορίσουμε, είναι η επέκταση της έννοιας του γένους επιφανειών Riemann (δηλ. ομαλών αλγεβρικών καμπυλών) σε αλγεβρικές καμπύλες με ιδιομορφίες. Είναι γνωστό ότι το σύνολο $\mathcal{M}_g$, είναι ένας μη συμπαγής τοπολογικός χώρος διάστασης $3g-3$ που επιδέχεται αναλυτική δομή. Επίσης, το $\mathcal{M}_g$ επιδέχεται μια φυσιολογική συμπαγοποίηση $\bar{\mathcal{M}}_g$ με σύνορο συνδιάστασης 1, τα στοιχεία του οποίου παραμετρίζουν κάποιες κλάσεις αλγεβρικών καμπυλών με ιδιομορφίες. Το $\bar{\mathcal{M}}_g$ είναι αναλυτική πολλαπλότητα που μπορεί να εμβυθιστεί στον προβολικό χώρο, και συνεπώς είναι μια προβολική αλγεβρική πολλαπλότητα. Αρα, το $\mathcal{M}_g$ είναι ένα (μεγάλο) ανοικτό σύνολο σε μια προβολική αλγεβρική πολλαπλότητα. Επίσης, το σύνολο $\mathcal{H}_{g,r,d}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο, με ενδεχομένως πολλές ανάγωγες συνιστώσες. Σε ορισμένες από τις συνιστώσες του ενδέχεται όλα τους τα σημεία να αντιστοιχούν σε καμπύλες με ιδιομορφίες. Αν όμως κάποια συνιστώσα περιέχει σημείο που αντιστοιχεί σε ομαλή καμπύλη, τότε αποδεικνύεται ότι και το γενικό σημείο της συνιστώσας αντιστοιχεί σε ομαλή καμπύλη. Με άλλα λόγια, σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο των σημείων της συνιστώσας που περιέχει τα σημεία που αντιστοιχούν σε καμπύλες με ιδιομορφίες είναι αλγεβρικό υποσύνολο συνδιάστασης ≥ 1. Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}_{g,r,d}^{'}$ την ένωση των ανάγωγων συνιστωσών του $\mathcal{H}_{g,r,d}$ που περιέχουν σημεία που αντιστοιχούν σε ομαλή καμπύλη. Τότε μπορούμε να ορίσουμε φυσιολογικά μια ρητή απεικόνιση (δηλ. απεικόνση ορισμένη σχεδόν παντού)

$$\Phi : \mathcal{H}_{g,r,d}^{'} \longrightarrow \mathcal{M}_g.$$

Η παραπάνω απεικόνιση στέλνει το σημείο του $\mathcal{H}_{g,r,d}$ που αντιστοιχεί σε κάποια ομαλή εμβυθισμένη καμπύλη, στο σημείο του $\mathcal{M}_g$ που αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη επιφάνεια Riemann, δηλ. ξεχνάμε την εμβύθιση και την θεωρούμε ως (αφηρημένη) επιφάνεια Riemann. Το πρόβλημα Brill-Noether δεν είναι τίποτε άλλο παρά η μελέτη των fibers της απεικόνισης Φ. Το πρόβλημα το εξετάζουμε από δύο σκοπιές. Η πρώτη, αφορά την περιγραφή μιας οποιασδήποτε fiber. Η δεύτερη αφορά την περιγραφή της γενικής fiber. Ως προς το πρώτο, τα αποτελέσματα αφορούν κυρίως θεωρήματα ύπαρξης και εύρεσης της ελάχιστης διάστασης της fiber όταν κάποια αριθμητική συνθήκη μεταξύ των g, r, d ικανοποιείται. Στην περίπτωση όμως που η παραπάνω αριθμητική συνθήκη δεν ικανοποιείται, η θεωρία δεν έχει αναπτυχθεί ακόμη και υπάρχουν αρκετές αναπάντητες εικασίες. Ως προς το δεύτερο, γίνεται πλήρης περιγραφή της γενικής fiber της απεικόνισης.

Η σημασία της μελέτης του παραπάνω προβλήματος συνοψίζεται στις παρακάτω παρατηρήσεις:

1. Είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε με πόσους τρόπους μπορεί η (αφηρημένη) επιφάνεια Riemann να υλοποιηθεί ως αλγεβρική καμπύλη στον προβολικό χώρο. Ειδικότερα μας ενδιαφέρει δοσμένης μιας επιφάνειας Riemann πώς μπορούμε να την απεικονίσομε σε δοσμένο προβολικό χώρο ούτως ώστε η εικόνα να έχει τον ελάχιστο δυνατό βαθμό. Και αυτό διότι όσο μικρότερος είναι ο βαθμός της καμπύλης τόσο πιο εύκολη είναι η μελέτη της.

2. Ο χώρος $\mathcal{M}_g$ που παραμετρίζει επιφάνειες Riemann γένους g βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας στην αλγεβρική γεωμετρία. Ενας από τους τρόπους με τους οποίους προσεγγίζουμε την μελέτη του χώρου $\mathcal{M}_g$ είναι δια μέσου της παραπάνω απεικόνισης Φ. Ο χώρος Hilbert $\mathcal{H}_{g,r,d}^{'}$ μελετάται σχετικά πιο εύκολα από τον $\mathcal{M}_g$ διότι τα αντικείμενα που παραμετρίζει είναι αλγεβρικές καμπύλες στον προβολικό χώρο, εν αντιθέσει με τον $\mathcal{M}_g$ που παραμετρίζει (αφηρημένες) επιφάνειες Riemann. Η γνώση των fibers μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τα συμπεράσματα της μελέτης του $\mathcal{H}_{g,r,d}^{'}$ στο $\mathcal{M}_g$.

3. Στην αλγεβρική γεωμετρία είναι γενική αρχή ότι με την μελέτη του χώρου παραμέτρων κάποιων αντικειμένων μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ίδια τα αντικείμενα. Για παράδειγμα, ο Kleiman μελετώντας τον χώρο παραμέτρων του παραπάνω προβλήματος, δηλ. τις fibers της απεικόνισης Φ, συμπέρνανε ότι για $r \geq 3$ το γενικό σημείο της fiber αντιστοιχεί σε εμβύθιση.

5.2 Αποτελέσματα για οποιαδήποτε επιφάνεια Riemann

5.2.1 Εκτίμηση για τις διαστάσεις

Για να εξετάσουμε το πρόβλημα Brill-Noether θα πρέπει, κατ' αρχάς, να ορίσουμε ένα σύνολο που να παραμετρίζει τους τρόπους με τους οποίους η επιφάνεια Riemann S μπορεί να απεικονισθεί στον προβολικό χώρο όπως παραπάνω. Δηλ. να ορίσουμε ένα σύνολο που να παραμετρίζει τα g^r_d. Αυτό θα κάνουμε ακολούθως και όπως θα διαπιστώσουμε το παραπάνω σύνολο είναι αλγεβρικό σύνολο, πράγμα που επιβεβαιώνει την γενική αρχή που ισχύει στην Αλγεβρική Γεωμετρία: *Οι χώροι παραμέτρων αλγεβρογεωμετρικών αντικειμένων είναι και οι ίδιοι αλγεβρογεωμετρικοί*, επομένως μπορούν να μελετηθούν στα πλαίσια της Αλγεβρικής Γεωμετρίας.

Για να επιλέξουμε ένα γραμμικό σύστημα g^r_d, χρειάζεται πρώτα να επιλέξουμε μια κλάση διαιρετών $[D]$ βαθμού d με $r(D) \geq r$. Κατόπιν, το g^r_d προσδιορίζεται από την επιλογή ενος (προβολικού) γραμμικού υπόχωρου $V \subseteq |D|$ διάστασης r. Η τελευταία όμως επιλογή αντιστοιχεί στα σημεία της γνωστής Grassmanian πολλαπλότητας $G(r+1, r(D)+1)$ που παραμετρίζει γραμμικούς υπόχωρους διάστασης $r+1$ στον μιγαδικό χώρο $\mathbb{C}^{r(D)+1}$. Η διάσταση αυτής της Grassmanian πολλαπλότητας είναι $\dim G(r+1, r(D)+1) = (r+1)(r(D)-r)$. Επομένως, αυτό που ουσιαστικά χρειάζεται είναι να παραμετρίσουμε τις κλάσεις διαιρετών $[D]$ βαθμού d με $r(D) \geq r$, δηλ. τα σημεία $[D]$ της Ιακωβιανής $Jac(S)$, βλ. Πόρισμα 4.3, με $r(D) \geq r$. Δίδουμε λοιπόν τον κάτωθι ορισμό:

Ορισμός 5.1 *Ορίζουμε* $W^r_d := \{[D] \in Jac(S) \text{ με } r(D) \geq r\} \subseteq Jac(S)$.

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο W^r_d είναι αλγεβρικό υποσύνολο της $Jac(S)$ και στην περίπτωση που $W^r_d \neq \emptyset$ θα βρούμε μια εκτίμηση της διάστασής του. Προς τούτο χρησιμοποιούμε την απεικόνιση Abel-Jacobi $u_d : S_{(d)} \longrightarrow Jac(S)$. Σημειώνουμε πρώτα ότι αν $g - d + r < 0$ τότε θα είναι $W^r_d = W^{d-g}_d = Jac(S)$. Πράγματι, από το Θεώρημα Riemann Roch, αν D είναι διαιρέτης βαθμού d έχουμε ότι $r(D) \geq d - g$. Υποθέτουμε λοιπόν στα παρακάτω ότι $g - d + r \geq 0$. Δίνουμε τον κάτωθι ορισμό:

Ορισμός 5.2 *Ορίζουμε* $C_d^r := \{D \in S_{(d)},\ \mu\epsilon\ r(D) \geq r\} \subseteq S_{(d)}$.

Από τον ορισμό των W_d^r και C_d^r και από την περιγραφή των fibers της απεικόνισης u_d που δίδεται στην Πρόταση 4.3 έχουμε ότι $u_d(C_d^r) = W_d^r$ και $C_d^r = u_d^{-1}(W_d^r)$. Δείχνουμε τώρα ότι το C_d^r είναι αναλυτικό (αλγεβρικό) υποσύνολο του $S_{(d)}$ και στην περίπτωση που $C_d^r \neq \emptyset$ εκτιμούμε την διάστασή του. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε αυτά τα αποτελέσματα για να μελετήσουμε το σύνολο W_d^r.

Από το Γεωμετρικό Θεώρημα R-R 3.3, έχουμε ότι το C_d^r είναι το υποσύνολο του $S_{(d)}$ που αποτελείται από τους θετικούς διαιρέτες D βαθμού d, για τους οποίους ο αντίστοιχος Brill-Noether πίνακας $\mathbf{A}_D$ έχει $\mathrm{rank}\mathbf{A}_D \leq d-r$. Υπενθυμίζουμε από την Πρόταση 4.1 ότι το συμμετρικό γινόμενο $S_{(d)}$ είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Τοπικά, σε γειτονιά του συμμετρικού γινομένου ισόμορφη με γειτονιά του $\mathbb{C}^d$, τα στοιχεία του Brill-Noether πίνακα είναι αναλυτικές συναρτήσεις των συντεταγμένων. Συνεπώς το C_d^r, όταν δεν είναι το κενό σύνολο, είναι αναλυτικό (και άρα αλγεβρικό) υποσύνολο του $S_{(d)}$ διότι, τοπικά, είναι σύνολο μηδενισμού αναλυτικών εξισώσεων που ορίζονται από τις $(d-r+1)\times(d-r+1)$ υποορίζουσες του $d \times g$ πίνακα $\mathbf{A}_D$. Το πλήθος των εξισώσεων που ορίζουν το C_d^r είναι $([d-(d-r)]\cdot[g-(d-r)] = r(g-d+r)$ και επομένως, αφού κάθε εξίσωση ρίχνει την διάσταση το πολύ κατά ένα, παίρνουμε ότι $\mathrm{codim}_{S_{(d)}} C_d^r \leq r(g-d+r)$. Συνεπώς έχουμε $\mathrm{dim} C_d^r \geq d - r(g-d+r) = r + g - (r+1)(g-d+r)$.

Ορισμός 5.3 *Ορίζουμε ως Brill-Noether αριθμό που αντιστοιχεί στα* g, r, d *τον*

$$\rho = \rho(g,r,d) := g - (r+1)(g-d+r).$$

Εχουμε επομένως δείξει ότι

Πρόταση 5.1 *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, το* C_d^r *είναι αλγεβρικό υποσύνολο του* $S_{(d)}$ *και για την διάστασή του έχουμε*

$$\mathrm{dim} C_d^r \geq r + \rho(g,r,d),$$

με την προϋπόθεση ότι $C_d^r \neq \emptyset$.

Πρόταση 5.2 *Εστω ότι* $g - d + r \geq 0$. *Τότε καμμία συνιστώσα του αλγεβρικού συνόλου* C_d^r *δεν περιέχεται, εξ' ολοκλήρου, στο* C_d^{r+1}. *Με άλλα λόγια, κάθε ανάγωγη συνιστώσα του αλγεβρικού συνόλου* C_d^r *περιέχει διαιρέτη* D *με* $r(D) = r$.

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε το αντίθετο και θα φτάσουμε σε άτοπο. Δηλαδή έστω ότι υπήρχε συνιστώσα U του C_d^r που βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο C_d^{r+1}. Έστω $r_0 > r$ η ελάχιστη διάσταση $r(D)$ με $D \in U$. Τότε ο γενικός διαιρέτης έχει διάσταση ακριβώς r_0. Πράγματι, όπως είδαμε και παραπάνω, οι διαιρέτες D του U με $r(D) \geq r_0 + 1$ είναι ένα αναλυτικό σύνολο (τοπικά είναι το σύνολο μηδενισμού των $(d - r_0) \times (d - r_0)$ υποοριζουσών του Brill-Noether πίνακας $\mathbf{A_D}$) που περιέχεται γνήσια στο ανάγωγο αναλυτικό σύνολο U. Συνεπώς η συνδιάστασή του στο U είναι ≥ 1 και άρα το σύνολο των διαιρετών του U με $r(D) > r_0$ είναι 'λεπτό' μέσα στο U. Έχουμε λοιπόν $r(D) = r_0 > r$, όπου D γενικός διαιρέτης στο U.

Τώρα, παίρνουμε σημείο q της επιφάνειας. Τότε, αφού $r(D) \geq 1$, υπάρχει θετικός διαιρέτης E με $D \sim E + q$, βλ. Πρόταση 3.11, δηλ. $[D] = [E + q]$. Επίσης, αφού το q είναι οποιοδήποτε σημείο μπορούμε να υποθέσουμε και ότι δεν είναι βασικό σημείο του $|D|$ (τα βασικά σημεία είναι πεπερασμένα). Άρα

$$r(E) = r(D) - 1 \geq r \geq 0,$$

και από το Riemann Roch έχουμε

$$r(K - E) = r(K - D) = g - d + r(D) - 1 \geq g - d + r \geq 0.$$

Επομένως, αν p γενικό σημείο της καμπύλης τότε το p δεν είναι βασικό σημείο του $|K - E|$, διότι $r(K - E) \geq 0$, άρα τα βασικά του σημεία είναι πεπερασμένα. Σημειώνουμε ότι η επιλογή του E εξαρτάται από την επιλογή του q και άρα το παραπάνω q δεν μπορεί να θεωρηθεί ως γενικό σημείο (μάλιστα μπορούμε να δούμε ότι το q είναι βασικό σημείο του $|K - E|$). Αρα θα έχουμε

$$r(K - (E + p)) = r(K - E) - 1$$

και συνεπώς από το Riemann Roch

$$r(E + p) = r(E) = r(D) - 1 \geq r.$$

Δηλαδή, βρήκαμε διαιρέτη $E + p \in C_d^r$ με $r(E + p) = r_0 - 1 < r_0$. Θα έχουμε άτοπο αν ο διαιρέτης αυτός ανήκει στην συνιστώσα U του C_r^d. Όμως, αφού το p είναι γενικό σημείο μπορούμε να το επιλέξουμε κοντά στο q, οπότε το σημείο $[E + p]$ του W_d^r θα είναι 'κοντά' στο σημείο $[E + q]$, άρα στην ίδια συνιστώσα U. □

Υπενθυμίζουμε από την Πρόταση 4.4 ότι η Ιακωβιανή $Jac\,(S)$ είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Η $u_d : S_{(d)} \longrightarrow Jac\,(S)$ είναι αναλυτική απεικόνιση μεταξύ συμπαγών μιγαδικών πολλαπλοτήτων. Αφού τώρα το C_d^r είναι αναλυτικό (άρα και αλγεβρικό) υποσύνολο της μιγαδικής (αλγεβρικής) πολλαπλότητας $S_{(d)}$, από το Πόρισμα 2.2 συνάγουμε ότι το $W_d^r = u_d(C_d^r)$ είναι αναλυτικό (και άρα αλγεβρικό) υποσύνολο στην $Jac\,(S)$. Συμβολίζουμε με $u_{r,d} : C_d^r \longrightarrow W_d^r$ τον περιορισμό της απεικόνισης u_d στο C_d^r. Αυτή είναι μια αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αναλυτικών (αλγεβρικών) συνόλων που είναι επί. Εχουμε ότι αν $D \in C_d^r$, τότε $u_{r,d}^{-1}(u_{r,d}(D)) \cong \mathbb{P}^{r_1}$, όπου $r_1 = r(D)$. Εξ' ορισμού του C_d^r έχουμε ότι $r_1 \geq r$. Επίσης, από την παραπάνω Πρόταση 5.2 έχουμε ότι υπάρχει $D \in C_d^r$ με $u_{r,d}^{-1}(u_{r,d}(D)) \cong \mathbb{P}^r$. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.4 εφαρμοσμένο στην απεικόνιση $u_{r,d}$ συνάγουμε ότι

Πρόταση 5.3 *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, το W_d^r είναι αλγεβρικό υποσύνολο της $Jac(S)$ και για την διάστασή του έχουμε ότι*

$$\dim W_d^r = \dim C_d^r - r \geq \rho(g,r,d),$$

με την προϋπόθεση ότι $W_d^r \neq \emptyset$.

Από την παραπάνω συζήτηση συνάγουμε επίσης την παρακάτω Πρόταση που είναι το ανάλογο της Πρότασης 5.2 για τα W_d^r.

Πρόταση 5.4 *Κάθε ανάγωγη συνιστώσα του αλγεβρικού συνόλου W_d^r περιέχει διαιρέτη D με $r(D) = r$ άρα κάθε ανάγωγη συνιστώσα του αλγεβρικού συνόλου W_d^{r+1} περιέχεται γνήσια μεσα στην αντίστοιχη ανάγωγη συνιστώσα του αλγεβρικού συνόλου W_d^r. Συνεπώς το σύνολο W_d^{r+1} είναι 'λεπτό' μέσα στο σύνολο W_d^r.*

Το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης ωφείλεται στους Kempf και Kleiman-Laksov [K], [KL1], [KL2]. Η απόδειξη του θεωρήματος στηρίζεται σε μια 'ολική περιγραφή' του C_d^r ως υποσυνόλου του $S_{(d)}$ που αντιστοιχεί στα σημεία όπου μια απεικόνιση μεταξύ κατάλληλα ορισμένων διανυσματικών δεσμών στο $S_{(d)}$ έχει τάξη $\leq d - r$. Για την απόδειξη, η οποία είναι πολύ τεχνική, χρησιμοποιούνται εργαλεία των determinandal varieties, των κλάσεων Chern και του Schubert calculus.

Πρόταση 5.5 *Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g και d, r ακέραιοι με $d \geq 1$, $g, r \geq 0$. Τότε αν*

$$\rho(g,r,d) \geq 0$$

έχουμε ότι $C_d^r \neq \emptyset$.

Σημείωση 5.1 Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Με άλλα λόγια, υπάρχουν επιφάνειες με $C_d^r \neq \emptyset$ στην περίπτωση που $\rho(g,r,d) < 0$. Για παράδειγμα, όταν το $g \geq 3$ οι υπερελλειπτικές επιφάνειες έχουν $C_2^1 \neq \emptyset$ και $\rho(g,1,2) = -g + 2 < 0$.

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 5.3 και 5.5 συνάγουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 5.1 *Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g και d, r ακέραιοι με $d \geq 1$, $g, r \geq 0$. Τότε αν $\rho(g,r,d) \geq 0$ έχουμε ότι $\dim W_d^r \geq \rho(g,r,d) \geq 0$.*

Εξετάζουμε ορισμένες τιμές των $d \geq 1,\ g, r \geq 0$ για τις οποίες η περιγραφή του W_d^r είναι εύκολη. Υπενθυμίζουμε πως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g - d + r \geq 0$ διότι διαφορετικά, όπως έχουμε δεί, $W_d^r = W_d^{d-g}$ $(= Jac(S)$, όπως θα δούμε στο 2. παρακάτω).

1. Αν $r = 0$: Τότε, από την Πρόταση 5.3, έχουμε ότι $\dim W_d^0 = \dim C_d^0 = \dim C_{(d)} = d$ και το W_d^0 είναι αμφιρήτως (δηλ. σχεδόν παντού) ισόμορφο με το $C_{(d)}$.

2. Αν $g - d + r = 0$ δηλ. $r = d - g \geq 0$: Από το Θεώρημα Riemann Roch η απεικόνιση u_d είναι επί και από την Πρόταση 3.10 έχουμε ότι η γενική fiber είναι προβολικός χώρος διάστασης $r = d - g$. Συνεπώς $W_d^r = Jac(S)$.

3. Αν $d > 2g - 2$: Τότε από το Θεώρημα Riemann Roch η απεικόνιση u_d είναι επί και κάθε fiber είναι προβολικός χώρος διάστασης $r = d - g$. Συνεπώς, $W^{d-g} = Jac(S)$ και $W_d^r = \emptyset$, για $g - d + r > 0$.

4. Αν $g \leq d \leq 2g - 2$: Τότε $W_d^r \cong W_{2g-2-d}^{g-d+r-1}$, με τον ισομορφισμό που δίδεται από $[D] \longmapsto [K - D]$. Πράγματι, πάλι από το Θεώρημα Riemann Roch έχουμε ότι $r(D) = r$ αν και μόνον αν $r(K - D) = g - d + r - 1$.

5. Αν $d \leq g - 1$: Τότε ο διαιρέτης βαθμού d είναι special και από το Θεώρημα Clifford 3.4 έχουμε ότι $W_d^r = \emptyset$ για κάθε $r > d/2$.

Με βάση τα παραπάνω, αρκεί λοιπόν να μελετήσουμε τα W_d^r στην περίπτωση που $r \geq 1$ και $2r \leq d \leq g - 1$. Σημειώνουμε ότι σε αυτό το πεδίο τιμών, η αρχική συνθήκη $g - d + r \geq 0 \Longleftrightarrow r \geq d - g$ αυτομάτως ικανοποιείται διότι $d - g < 0$ και $r > 0$.

5.2.2 Ιδιομορφίες των W_d^r.

Υπενθυμίζουμε την απεικόνιση Abel Jacobi

$$u_d : S_{(d)} \longrightarrow J(S)$$

$$u_d(p_1 + \ldots + p_d) = (\sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{p_i} \omega_g),$$

όπου g το γένος της επιφάνειας S και $\omega_1, \ldots, \omega_g$ μια βάση του $\Omega^1(S)$.

Στην Παράγραφο 5.2.1 δείξαμε ότι το $W_d := W_d^0 \subset J(S)$ είναι αναλυτικό (αλγεβρικό) υποσύνολο της Ιακωβιανής και παραμετρίζει τις κλάσεις γραμμικά ισοδύναμων θετικών διαιρετών βαθμού d. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την γεωμετρία του W_d. Συγκεκριμένα θα περιγράψουμε τον προβολικό εφαπτόμενο κώνο $T_{u_d(D)}(W_d)$ του W_d στο σημείο $u_d(D)$ ως υποσύνολο του προβολικού εφαπτόμενου χώρου της Ιακωβιανής στο σημείο $u_d(D)$, τον οποίον μπορούμε να ταυτίζουμε με το $\mathbb{P}^{g-1}$ (διότι η $Jac\,(S)$ είναι ένας g-διάστατος τόρος και επομένως τοπικά ταυτίζεται με ανοικτό του $\mathbb{C}^g$). Η περιγραφή του $T_{u_d(D)}(W_d)$ επιτυγχάνεται με τον συσχετισμό που γίνεται με τη γεωμετρία του διαιρέτη D στην κανονική εμβύθιση της καμπύλης S στο $\mathbb{P}^{g-1}$. Στα επόμενα ταυτίζουμε την S με την εμβύθισή της στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{g-1}$ και επομένως και τα σημεία p της S με τις εικόνες τους $[\omega_1(p), \ldots, \omega_g(p)] \in \mathbb{P}^{g-1}$.

Μελετάμε πρώτα την περίπτωση όπου $r(D) = 0$: Από το γεωμετρικό Riemann Roch, τα σημεία του D παράγουν μέσα στην εμβυθισμένη S, έναν γραμμικό υπόχωρο διάστασης $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = d - 1 - r(D) = d - 1$.

Πρόταση 5.6 *Αν $r(D) = 0$ τότε το W_d είναι ομαλό στο σημείο $u_d(D)$ με εφαπτόμενο χώρο $T_{u_d(D)}(W_d) = span\overline{D} \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$.*

Απόδειξη: Αν $D = p_1 + \cdots + p_d$ διαιρέτης με σημεία διαφορετικά ανα δύο, η απόδειξη έχει ως εξής. Παίρνουμε γύρω από κάθε p_i τοπική συντεταγμένη z_i . Τότε, γύρω από το $p_1 + \cdots + p_d$, μία χαρτογράφηση είναι ακριβώς η $(z_1, \ldots, z_d)$. Δηλαδή δεν εμπλέκονται οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις των z_i διότι τα σημεία είναι διακεκριμμένα. Επομένως, γύρω από το D η απεικόνιση u_d θα είναι

$$u_d(z_1, \ldots, z_d) = (\sum_i \int_{p_0}^{z_i} \omega_1, \ldots, \sum_i \int_{p_0}^{z_i} \omega_g).$$

Οπότε, παραγωγίζοντας, η Ιακωβιανή της απεικόνισης στο σημείο $p_1 + \cdots + p_d$ είναι

$$\mathcal{J}(u_d) = \begin{bmatrix} \omega_1(p_1) & \ldots & \omega_g(p_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1(p_d) & \ldots & \omega_g(p_d) \end{bmatrix}.$$

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(1) $d < g$, διότι από το Θεώρημα Riemann Roch έχουμε $r(D) - r(K - D) = d + 1 - g$, δηλαδή $d + 1 - g \leq 0$, και άρα $d < g$.

(2) Η τάξη του πίνακα $\mathcal{J}(u_d)$ είναι ακριβώς d, διότι οι γραμμές $\Omega(p_i) = (\omega_1(p_i), \ldots, \omega_g(p_i))^T$ του πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (παράγουν τον υπόχωρο $span\overline{D}$, που όπως δείξαμε έχει προβολική διάσταση $d - 1$).

Δηλαδή, ο πίνακας $\mathcal{J}(u_d)$ έχει μέγιστη τάξη και από το Πόρισμα 2.1 η u_d είναι τοπικά εμβύθιση γύρω από το D, άρα η εικόνα W_d είναι ομαλή γύρω από $u_d(D)$ με εφαπτόμενο επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\Omega(p_i)$, $i = 1, \ldots, d$. Αρα το προβολικό εφαπτόμενο επίπεδο είναι $T_{\mu(D)}(W_d) = span\overline{D}$. Σημειώνουμε ότι αν πάρουμε άλλες τοπικές συντεταγμένες δεν αλλάζει η τάξη του πίνακα.

Τώρα πρέπει να μελετήσουμε και την περίπτωση που τα σημεία του διαιρέτη D δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους: Παίρνουμε την περίπτωση που

$D = 2p_1 + p_3 + \ldots + p_d$, με $p_1, p_3, \ldots, p_d$ όλα διαφορετικά ανά δύο. Η απόδειξη με περισσότερες επαναλήψεις σημείων γίνεται με τον ίδιο τρόπο, αλλά είναι πιο πολύπλοκη στον συμβολισμό. Στην περίπτωση του παραπάνω διαιρέτη D, παίρνουμε πάλι $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_d$ τοπικές συντεταγμένες γύρω από κάθε p_i, όπου z_1, z_2 είναι ανεξάρτητες τιμές της ίδιας τοπικής συντεταγμένης z γύρω από το διπλό σημείο p_1. Σε αυτήν τη περίπτωση, οι τοπικές συντεταγμένες γύρω από το σημείο D στο $S_{(d)}$ δίδονται από $w_1 = \frac{z_1+z_2}{2}$, $w_2 = z_1 z_2$ και $z_3, \ldots, z_d$. Και τότε η τοπική παράσταση της απεικόνισης u_d θα είναι

$$u_d(w_1, w_2, z_3, \ldots, z_d) =$$

$$(\int_{p_0}^{w_1} \omega_1 + \int_{p_0}^{w_2} \omega_1 + \sum_{i=3}^{d} \int_{p_0}^{z_i} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{w_1} \omega_g + \int_{p_0}^{w_2} \omega_g + \sum_{i=3}^{d} \int_{p_0}^{z_i} \omega_g).$$

Τώρα, θέλουμε να βρούμε την τάξη του πίνακα της Ιακωβιανής αυτής της απεικόνισης. Και οι μεταβλητές μας σε αυτήν την περίπτωση είναι $w_1, w_2, z_3, \ldots, z_d$. Για τον υπολογισμό αυτό ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F_k(w_1, w_2) = \int_{p_0}^{z_1} \omega_k + \int_{p_0}^{z_2} \omega_k, \quad k = 1, \ldots, g,$$

όπου τα z_1, z_2 τα θεωρούμε συναρτήσεις των w_1, w_2. Εστω ότι $\omega_k = f_k(z)dz$ στην περιοχή του p_1. Εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστη d, παίρνουμε την παρακάτω ισότητα 1-μορφών:

$$\frac{\partial F_k}{\partial w_1} d(\frac{z_1 + z_2}{2}) + \frac{\partial F_k}{\partial w_2} d(z_1 z_2) = f_k(z_1)dz_1 + f_k(z_2)dz_2.$$

Εξισώνοντας τα dz_i μέρη, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial w_1} + z_2 \frac{\partial F_k}{\partial w_2} = f_k(z_1) \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F_k}{\partial w_1} + z_1 \frac{\partial F_k}{\partial w_2} = f_k(z_2).$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\frac{\partial F_k}{\partial w_1} = 2\frac{z_1 f_k(z_1) - z_2 f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial F_k}{\partial w_2} = \frac{f_k(z_2) - f_k(z_1)}{z_1 - z_2}.$$

Επειδή θέλουμε να μελετήσουμε την απεικόνιση u στο $D = 2p_1 + p_3 + \ldots + p_d$, θέτουμε στις παραπάνω σχέσεις $z_1, z_2 \to 0$ ($z_1 = z_2 = 0$ είναι οι τιμές της τοπικής συντεταγμένης που αντιστοιχούν στο σημείο p_1). Και τότε

$$\frac{\partial F_k}{\partial w_1}|_0 = 2f_k(0) = \omega_k(p_1) \ \text{ και } \ \frac{\partial F_k}{\partial w_2}|_0 = -f_k(0) = -\omega_k(p_1).$$

Επομένως, η Ιακωβιανή της απεικόνισης στο σημείο $D = 2p_1 + p_3 + \ldots + p_d$, δίνεται από τον πίνακα

$$\mathcal{J}(u_d) = \begin{bmatrix} 2\omega_1(p_1) & \ldots & 2\omega_g(p_1) \\ -\omega_1'(p_1) & \ldots & -\omega_g'(p_1) \\ \omega_1(p_3) & \ldots & \omega_g(p_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1(p_d) & \ldots & \omega_g(p_d) \end{bmatrix},$$

του οποίου η τάξη είναι ίση με την τάξη του πίνακα Brill Noether, που όπως έχουμε δείξει είναι ιση με $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} + 1 = (d-1)+1$. Οπότε, συνεχίζουμε την απόδειξη όπως και πριν. Η απόδειξη για την τάξη της $\mathcal{J}(u_d)$ όταν ο D είναι ένας οποιοσδήποτε διαιρέτης, δίδεται στην Πρόταση 5.7 παρακάτω. □

Γενικεύουμε τώρα τα προηγούμενα στην περίπτωση που ο διαιρέτης D κινείται σε ένα r-διάστατο γραμμικό σύστημα, δηλαδή $r(D) = r \geq$.

Θεώρημα 5.2 *Αν $r(D) = r$, τότε ο προβολικός εφαπτόμενος κώνος στο σημείο $u_d(D)$ της επιφάνειας W_d είναι*

$$T_{u_d(D)}(W_d) = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} span\overline{D_\lambda}.$$

Οταν $r \geq 1$, η ένωση αυτή δεν είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{P}^{g-1}$ και επομένως το σημείο $u_d(D)$ είναι ιδιάζον, βλ. Σημείωση 2.2.

Απόδειξη: Αφού $r(D) = r$, μπορούμε να θεωρήσουμε $|D| \cong \mathbb{P}^r$ και να παραμετρήσουμε τους διαιρέτες του $|D|$ ως εξής:

$$D_\lambda = p_1(\lambda) + \ldots + p_d(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{P}^r.$$

Τώρα, από το γεωμετρικό Riemann Roch, για κάθε D_λ θα είναι $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D_\lambda} = d - r + 1$. Δηλαδή, τα $p_i(\lambda)$ παράγουν ένα $d-1-r$ επίπεδο $span\overline{D_\lambda}$ του $\mathbb{P}^r$. Για να βρούμε τον εφαπτόμενο κώνο στο $u_d(D)$ της επιφάνειας W_d, παίρνουμε όλα τα αναλυτικά τόξα που διέρχονται από το $u_d(D)$ και στη συνέχεια τις εφαπτόμενες τους στο συγκεκριμμένο σημείο. Η ένωση αυτών αποτελεί τον εφαπτόμενο κώνο στο σημείο $u_d(D)$, βλ. Σημείωση 2.2.

Τα αναλυτικά τόξα στο W_d που περνούν από το $u_d(D)$ είναι οι εικόνες, μέσω της u_d, των αναλυτικών τόξων του $S_{(d)}$ που περνούν από τα σημεία $D_\lambda \in u_d^{-1}(u_d(D))$. Δηλαδή, αν $D(t) = q_1(t) + \ldots + q_d(t)$ είναι μονοπάτι στο $S_{(d)}$ με $D(0) = D_\lambda = p_1(\lambda) + \ldots + p_d(\lambda)$ τότε, μέσω της u_d, θα πάρουμε το τόξο $w(t) = u_d(D(t))$ με $w(0) = u_d(D)$. Επίσης, κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα $p_i(\lambda)$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, οπότε αν $z_i(t)$ τοπική συντεταγμένη γύρω από κάθε $q_i(t)$, θα έχουμε

$$w(t) = u_d(q_1(t)) + \ldots + u_d(q_d(t)) = (\sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{z_i(t)} f_1(z_i)dz_i, \ldots, \sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{z_i(t)} f_g(z_i)dz_i),$$

όπου $\omega_k = f_k(z_i)dz_i$.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την καμπύλη ως προς t και για $t = 0$ παίρνουμε την εφαπτόμενη στο σημείο $u_d(D)$. Δηλαδή

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\ldots, \sum_{i=1}^{d} f_k(z_i(t)) z_i'(t), \ldots),$$

οπότε, για $t = 0$, η εφαπτόμενη θα έχει την κατεύθυνση του διανύσματος

$$(\sum_{i=1}^{d} z_i'(0) f_1(p_i(\lambda)), \ldots, \sum_{i=1}^{d} z_i'(0) f_g(p_i(\lambda)).$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ΄ όψιν ότι η εικόνα του σημείου $p_i(\lambda) \in S$ κάτω από την κανονική εμβύθιση δίδεται από το $[f_1(p_i(\lambda)), \ldots, f_k(p_i(\lambda))]$ και ότι οι αριθμοί $z_i'(0)$ και $\lambda \in \mathbb{P}^r$ μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή, συνάγουμε

$$T_{u_d(D)}(W_d) = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} \overline{p_1(\lambda), \ldots, p_d(\lambda)}.$$

Η ένωση $\cup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} \overline{p_1(\lambda), \ldots, p_d(\lambda)}$ περιέχει την κανονικά εμβυθισμένη καμπύλη η οποία είναι non degenerate, άρα ο μόνος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{P}^{g-1}$ που μπορεί να την περιέχει είναι το ίδιο το $\mathbb{P}^{g-1}$. Άρα, η μόνη επιλογή για να είναι ο εφαπτόμενος κώνος γραμμικός χώρος, είναι να ταυτίζεται με το $\mathbb{P}^{g-1}$. Θα δείξουμε ότι αυτό δεν ισχύει, βρίσκοντας μια εκτίμηση της διάστασης του $T_{u_d(D)}(W_d)$.

Ορίζουμε το σύνολο $A = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} \{(\lambda, p) \text{ με } p \in span\overline{D_\lambda}\} \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{g-1}$ και τις δύο προβολές:

$$\pi_1 : A \longrightarrow \mathbb{P}^r \text{ με } (\lambda, p) \mapsto \lambda$$

και

$$\pi_2 : A \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \text{ με } (\lambda, p) \mapsto p.$$

Παρατηρούμε ότι η π_1 είναι επί και $\pi_2(A) = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} span\overline{D_\lambda}$, επομένως χρησιμοποιώντας την fiber της π_1 έχουμε: Άν $\lambda_0 \in \mathbb{P}^r$ τότε $\pi_1^{-1}(\lambda_0) = \{(\lambda_0, p)\ , p \in span\overline{D_{\lambda_0}}\}$, επομένως, $\dim_{\mathbb{P}} \ \pi_1^{-1}(\lambda_0) = \dim_{\mathbb{P}} span\overline{D_{\lambda_0}} = d - r - 1$. Άρα, $\dim(A) = d - r + 1 + r = d - 1 \leq g - 2$. Τότε όμως, $\dim \pi_2(A) \leq \dim(A) \leq g - 2$, που είναι αυτό που θέλαμε. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο υπολογίζοντας την τάξη της Ιακωβιανής $\mathcal{J}(u_d)$ σε ένα οποιδήποτε σημείο D, γενικεύοντας την περίπτωση $D = 2p_1 + p_3 + \ldots + p_d$ και επιτρέποντας επαναλήψεις και στα υπόλοιπα σημεία (βλ. απόδειξη της Πρότασης 5.6).

Πρόταση 5.7 *Έστω διαιρέτης $D = \sum_i h_i p_i$ βαθμού d, όπου τα σημεία p_i είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε, η απεικόνιση Abel Jacobi u_d, έχει στο D Ιακωβιανή τάξεως $d - r(D)$.*

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θα χρειαστούν κάποιες παρατηρήσεις. Ο διαιρέτης D είναι στοιχείο του $S_{(d)}$, για το οποίο συνήθως χρησιμοποιούμε ως τοπικές συντεταγμένες τις στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις d μεταβλητών. Στα παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές τοπικές συντεταγμένες οι οποίες μας διευκολύνουν για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής της u_d.

Θεωρούμε τις στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις h μεταβλητών

$$\sigma_j(x_1,\ldots,x_h) = \sum_{i_1<\ldots<i_j} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_j},\ \ j=1,\ldots,h.$$

Αυτές παράγουν τον δακτύλιο των συμμετρικών συναρτήσεων h μεταβλητών. Είναι γνωστό ότι ένα άλλο σύνολο γεννητόρων του παραπάνω δακτυλίου είναι οι συνταρτήσεις Newton

$$v_i(x_1,\ldots,x_h) = x_1^i + \ldots + x_h^i,\ \ i=1,\ldots,h.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε, χωρίς απόδειξη, ότι αν

$$v_n = v_n(x_1,\ldots,x_h),\ \text{με}\ n \geq h+1$$

τότε

$$v_n \in (v_1,\ldots,v_h)^2,\ \ n\geq h+1. \quad (*)$$

Δηλαδή, τα πολυώνυμα αυτά δεν έχουν γραμμικό όρο.

Λήμμα 5.1 *Έστω $g(w)$ ολόμορφη συνάρτηση σε μία περιοχή του $0\in\mathbb{C}$. Αν $v_i = v_i(w_1,\ldots,w_h) = w_1^i+\ldots+w_h^i,\ \ i=1,\ldots,h$ οι συναρτήσεις Newton, θέτουμε*

$$\gamma(v_1,\ldots,v_h) = \sum_{i=1}^{h} g(w_i).$$

Τότε,

$$\gamma(v_1,\ldots,v_h) = hg(0) + \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i\,!}\frac{d^ig}{dw^i}(0)v_i\ + O((v_1,\ldots,v_h)^2).$$

Απόδειξη: Αναπτύσουμε κατά Taylor την g γύρω από το w_j και παίρνουμε

$$g(w_j) = g(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\,!}\frac{d^ig}{dw^i}(0)w_j^i.$$

Τότε,

$$\gamma(v_1,\ldots,v_h) = \sum_{i=1}^{h} g(w_i) = hg(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\,!}\frac{d^ig}{dw^i}(0)v_i.$$

Όμως, λόγω της (*) , δεν έχουμε γραμμικούς όρους για $i\geq h+1$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την Πρόταση 5.7. Έστω $D=\sum_{i=1}^n h_ip_i \in S_{(d)}$, με p_i διαφορετικά. Παίρνουμε z_i τοπική συντεταγμένη γύρω από το p_i με $z_i=0$ να αντιστοιχεί ακριβώς στο σημείο p_i. Τότε, οι καινούριες τοπικές συντεταγμένες που παίρνουμε γύρω από το D είναι

$$\zeta_i(\sum q_j) = v_i(z_1(q_1),\ldots,z_1(q_{h_1})),\ \ i=1,\ldots,h_1$$

$$\zeta_i(\sum q_j) = v_{i-h_1}(z_2(q_{h_1+1}), \ldots, z_2(q_{h_1+h_2})), \;\; i = h_1+1, \ldots, h_1+h_2$$

κ.τ.λ. Επίσης, γράφουμε

$$\omega_k = f_{k\ i}(z_i)dz_i.$$

Αν $u_{d,k}$ είναι η k-συντεταγμένη της απεικόνισης Abel Jacobi, θέλουμε να υπολογίσουμε την τάξη του πίνακα $(\frac{\partial u_{d,k}}{\partial \zeta_i})$. Όμως, $u_{d,k} = \sum_i \int_{p_0}^{p_i} f_{k\ i}(z_i)dz_i$ οπότε, κάθε άθροισμα $u_{d,k}(\sum_j q_j)$ μπορούμε να το γράψουμε $u_{d,k}(\sum_j q_j) = \sum_j u_{d,k}(q_j)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\gamma_{h_1} = \sum_{j=1}^{h_1} u_{d,k}(q_j),$$

$$\gamma_{h_2} = \sum_{j=h_1+1}^{h_2} u_{d,k}(q_j),$$

κ.τ.λ. θεωρώντας τις σαν συναρτήσεις των $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$.

Τώρα, από το Λήμμα 5.1, συμπεραίνουμε ότι αν $\frac{\partial^n u_{d,k}}{\partial z_i^n} = f_{k\ i}^{(n)}$, με τις καινούριες συντεταγμένες θα είναι $\frac{\partial^n u_{d,k}}{\partial \zeta_i^n} = \frac{1}{(1-n)\,!} f_{k\ i}^{(n-1)}$.

Επομένως, η Ιακωβιανή της u_d στο D, ως προς τις $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ είναι

$$\begin{pmatrix} f_{11}(0) & f_{11}^{(1)}(0) & \ldots & \frac{1}{(h_1-1)!}f_{11}^{(h_1-1)}(0) & f_{12}(0) & f_{12}^{(1)}(0) & \ldots & \frac{1}{(h_2-1)!}f_{12}^{(h_2-1)}(0) & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ f_{g1}(0) & f_{g1}^{(1)}(0) & \ldots & \frac{1}{(h_1-1)!}f_{g1}^{(h_1-1)}(0) & f_{g2}(0) & f_{g2}^{(1)}(0) & \ldots & \frac{1}{(h_2-1)!}f_{g2}^{(h_2-1)}(0) & \ldots \end{pmatrix}$$

Η τάξη του παραπάνω πίνακα είναι ίση με την τάξη του πίνακα Brill Noether, δηλαδή $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} + 1 = (d-r-1)+1 = d-r$. $\square$

5.2.3 Συσχέτιση με την απεικόνιση του Petri

Συσχετίζουμε τώρα την γεωμετρία του W_d^r στο σημείο D με την απεικόνιση $\mu_0 : \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D) \longrightarrow \mathcal{L}(K)$ του Petri που ορίσαμε στην Παράγραφο 3.4 και εφαρμόζουμε εδώ στην περίπτωση που $D_1 = D$ και $D_2 = K - D$. Θα εισάγουμε κατ' αρχήν την έννοια του Zariski εφαπτόμενου χώρου σε σημείο αλγεβρικού συνόλου. Αυτός είναι ένας προβολικός χώρος που στα ομαλά σημεία του συνόλου (όπου τοπικά το αλγεβρικό σύνολο είναι μια πολλαπλότητα), συμπίπτει με την προβολικοποίηση του συνήθους εφαπτόμενου χώρου.

Ορισμός 5.4 *Εστω M αλγεβρικό σύνολο, που ορίζεται από τα ομογενή πολυώνυμα f_i, $i = 1, \ldots, k$. Εστω F_i, $i = 1, \ldots, k$ το γραμμικό μέρος του f_i. Ορίζουμε ως Zariski εφαπτόμενο χώρο στο σημείο $p \in V$ τον προβολικό χώρο*

$$T_pM = \{q, \;\; \mu\epsilon\ F_i(q) = 0, \;\; i = 1, \ldots, k\}.$$

Ισχύει το παρακάτω κριτήριο για το πότε ένα σημείο του αλγεβρικού συνόλου είναι ομαλό ή ιδιάζον με την χρήση του Zariski εφαπτόμενου χώρου.

Πρόταση 5.8 *Εστω* $s = \min_{p\in M}\dim T_pM$. *Τότε* $s = \dim M$ *και το σημείο* $p \in M$ *είναι ομαλό αν και μόνον αν* $\dim T_pM = s$.

Πρόταση 5.9 *Το* W_d^r *είναι ομαλό στο σημείο* $[D]$ *με* $r(D) = r$ *και (η αντίστοιχη ανάγωγη συνιστώσα) έχει την αναμενόμενη διάσταση* ρ*, αν και μόνον αν, η απεικόνιση* μ_0 *του Petri είναι 1-1.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα το ανάλογο της Πρότασης 5.6 για την περίπτωση του W_d^r. Πρός τούτο θα προσπαθήσουμε (όχι αυστηρά) να ορίσουμε τον Zariski εφαπτόμενο χώρο $T_{[D]}(W_d^r)$ στα σημεία $[D]$ με $r(D) = r$ (τα οποία αναμένουμε να είναι ομαλά σημεία του W_d^r). Θεωρούμε την μονοπαραμετρική οικογένεια $[D_t]$ από κλάσεις διαιρετών με $D_0 = D$ (δηλαδή τόξο με αρχή το D). Για κάθε D_t (κοντά στο D) θα είναι $r(D_t) = r$ επομένως $|D| \cong \mathbb{P}^r$. Άρα, τα στοιχεία κάθε $|D_t|$ παραμετρίζονται ως εξής:

$$D_{t,\lambda} \in |D_t| \quad \lambda \in \mathbb{P}^r.$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα ξ στο τόξο $[D_t]$ της Ιακωβιανής $\mathcal{J}(S)$, είναι η εικόνα μέσω της u_* του εφαπτόμενου τόξου σε κάθε (ομαλό) τόξο $D_{t,\lambda} \in S_{(d)}$ που αντιστοιχεί σε επιλογή του $\lambda \in \mathbb{P}^r$. Ο εφαπτόμενος χώρος, θα πρέπει να περιέχει την τομή αυτών των τόξων και αυτό μας οδηγεί διαισθητικά στο ότι

$$T_{[D]}(W_d^r) = \bigcap_{D_\lambda \in |D|} span\overline{D_\lambda}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την διάσταση της τομής $\bigcap_{D_\lambda\in|D|} span\overline{D_\lambda}$. Έχουμε $D_\lambda \in |D| = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$, επομένως στο D_λ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάποια συνάρτηση του $\mathcal{L}(D)$:

$$D_\lambda \longleftrightarrow f_\lambda \in \mathcal{L}(D).$$

Εχουμε

$$f_\lambda \cdot \mathcal{L}(K - D) = \mathcal{L}(K - D_\lambda) \subseteq \mathcal{L}(K).$$

Πράγματι, αν $f \in \mathcal{L}(K - D)$, τότε $(ff_\lambda) + K - D_\lambda = (f_\lambda) + (f) + K - D_\lambda = (f_\lambda) + D + (f) + K - D - D_\lambda \overset{f_\lambda + D = D_\lambda}{=} (f) + K - D \geq 0$. Και αντιστρόφως, αν $g \in \mathcal{L}(K - D_\lambda)$, γράφουμε $g = f_\lambda \frac{g}{f_\lambda}$ και αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{g}{f_\lambda} \in \mathcal{L}(K - D)$. Αυτό ισχύει, διότι $(g) - (f_\lambda) + K - D = (g) + K - (D + f_\lambda) = (g) + K - D_\lambda \geq 0$.

Από το παραπάνω συνάγουμε ότι $\mathbb{P}(f_\lambda \cdot \mathcal{L}(K - D)) = \mathbb{P}\mathcal{L}(K - D_\lambda)$, το οποίο είναι το σύνολο από τους διαιρέτες υπερεπιπέδων του $\mathbb{P}^{g-1}$ που περιέχουν το D_λ. Επίσης, έχουμε $span\overline{D_\lambda} = \bigcap_{H\geq D_\lambda} H$, όπου με $H \geq D_\lambda$ εννοούμε τους διαιρέτες υπερεπιπέδων του $\mathbb{P}^{g-1}$ που περιέχουν το D_λ. Με άλλα λόγια, οι εξισώσεις που ορίζουν το $span\overline{D_\lambda}$ προέρχονται από τα στοιχεία του γραμμικού υπόχωρου $\mathcal{L}(K-D_\lambda)$.

Τώρα μπορούμε να συνδέσουμε τα παραπάνω με την απεικόνιση Petri:

$$\mu_0 : \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D) \longrightarrow \mathcal{L}(K),$$

$$(f_\lambda, f) \longmapsto f_\lambda f.$$

Καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{P}^r$, το f_λ διατρέχει το σύνολο $\mathcal{L}(D)$ και η τομή $\bigcap_{D_\lambda \in |D|} span\overline{D_\lambda}$ ορίζεται μέσω της απεικόνισης μ_0. Συγκεκριμένα έχουμε

$$T_{[D]}(W_d^r) = \bigcap_{D_\lambda \in |D|} span\overline{D_\lambda} = (Im\mu_0)^\perp. \tag{5.1}$$

Τώρα υπολογίζουμε διαστάσεις :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D)) &= \dim\mathcal{L}(D) \cdot \dim\mathcal{L}(K-D) \\ &= (r+1)(g-d+r) = g-\rho \end{aligned}$$

και

$$\dim \bigcap_{D_\lambda \in |D|} span\overline{D_\lambda} = \dim Im\mu_0)^\perp) = g - (g - \rho - \dim(Ker\mu_0)),$$

δηλαδή

$$\dim T_{[D]}(W_d^r) = \rho + \dim(ker\mu_0).$$

Οπότε, στην περίπτωση που το σημείο $[D]$ με $r(D) = r$ είναι ομαλό και η διάσταση της πολλαπλότητας W_d^r είναι η αναμενόμενη δηλ. $\dim(W_d^r) = \rho$, τότε η διάσταση του εφαπτόμενου χώρου είναι η ελάχιστη δυνατή και ίση με την διάσταση της πολλαπλότητας. Επομένως $\dim T_{[D]}(W_d^r) = \rho$ και συνεπώς $\dim(Ker\mu_0) = 0$ δηλ. η απεικόνιση μ_0 είναι 1-1.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η μ_0 είναι 1-1, δηλαδή ότι $\dim(Ker\mu_0) = 0$ και θέλουμε να καταλήξουμε ότι το σημείο $[D]$ είναι ομαλό και ότι $\dim(W_d^r) = \rho$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος σε αυτο το σημείο έχει την ελάχιστη δυνατή διάσταση, το οποίο όμως ισχύει διότι $\dim(T_{[D]}(W_d^r)) = \rho + \dim(Ker\mu_0) = \rho$.

Συνεπώς, η πολλαπλότητα W_d^r είναι ομαλή με διάσταση ρ, αν και μόνον αν, η απεικόνιση μ_0 είναι 1-1. $\square$

Ως εφαρμογή του παραπάνω δίδουμε το παρακάτω θεώρημα που ωφείλεται στον H. Martens, βλ. [Ma].

Θεώρημα 5.3 (Martens) *Εστω S επιφάνεια Riemann γένους g και έστω $d \leq g-1$. Τότε*

$$\dim W_d^r \leq d - 2r,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν η S είναι υπερελλειπτική.

Απόδειξη: Εστω $[D] \in W_d^r$ ένα ομαλό σημείο, και επομένως $\dim W_d^r = \dim(T_{[D]}(W_d^r))$, το οποίο το διαλέγω να έχει $r(D) = r$, δηλ. να βρίσκεται στο $W_d^r \backslash W_d^{r+1}$. Μπορώ να κάνω τέτοια επιλογη διότι το σύνολο των ιδιαζόντων σημείων είναι ένα 'λεπτό' υποσύνολο σε κάθε αλγεβρικό σύνολο όπως, επίσης, τό ίδιο συμπεραίνουμε από την Προταση 5.4 και για το σύνολο των σημείων $[D]$ με $r(D) \geq r+1$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε ότι, βλ. Σημείωση 3.5:

$$\begin{aligned}
\dim(Im\mu_0) &\geq \dim\mathcal{L}(D) + \dim\mathcal{L}(K-D) - 1 \\
&= (r+1) + (g-d+r) - 1 = g - d + 2r.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, βλ. Σχέση 5.1, έχουμε

$$\dim W_d^r = g - \dim(Im\mu_0) \leq d - 2r.$$

Αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε $|D| = rg_2^1 + p_1 + \cdots + p_{d-2r}$, όπου τα p_i ανήκουν σε διαφορετικές fibers της υπερελλειπτικής απεικόνισης, βλ. Πρόταση 5.12. Αρα η επιλογή του $|D|$ εξαρτάται από $d-2r$ παραμέτρους και συνεπώς $\dim W_d^r = d - 2r$.
□

5.3 Αποτελέσματα γιά την γενική επιφάνεια Riemann

Αν I είναι μία ιδιότητα που αναφέρεται στις επιφάνειες Riemann γένους g, τότε λέμε ότι η ιδιότητα ισχύει για την γενική επιφάνεια αν το σύνολο των επιφανειών που δεν ισχύει περιέχεται σε ένα αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{M}_g$ συνδιάστασης ≥ 1. Οταν γράφουμε την έκφραση 'έστω S γενική επιφάνεια Riemann γένους g' θα αναφερόμαστε, σιωπηρώς, ως προς κάποια ιδιότητα. Το παρακάτω θεώρημα έχει διατυπωθεί από τους Brill και Noether.

Θεώρημα 5.4 *Εστω S γενική επιφάνεια Riemann γένους $g \geq 0$. Εστω $d, r \in \mathbb{Z}$ με $d \geq 1$, $r \geq 0$ και $g - d + r \geq 0$.*

1. *Αν ο Brill-Noether αριθμός $\rho < 0$ τότε το $W_d^r = \emptyset$.*

2. *Αν ο Brill-Noether αριθμός $\rho \geq 0$ τότε κάθε ανάγωγη συνιστώσα του W_d^r έχει διάσταση ρ και $W_{d\,\mathrm{sing}}^r = W_d^{r+1}$.*

3. *Αν ο Brill-Noether αριθμός $\rho \geq 1$ τότε το W_d^r είναι ανάγωγο (διάστασης ρ).*

Σημείωση 5.2 Οταν $g - d + r \leq 0$ τότε, όπως έχουμε δεί στην προηγούμενη Παράγραφο 5.2, για κάθε επιφάνεια Riemann έχουμε ότι $\dim W_d^r = g$ $(= \rho(g, d - g, d))$, δηλαδή $W_d^r = Jac\,(S)$.

Σημείωση 5.3 Τα 1), 2) του παραπάνω θεωρήματος απεδείχθησαν από τους Griffiths-Harris [GH] και το 3) από τους Fulton-Lazarsfeld [FL].

Για να δούμε το πώς παραμετρίζουμε με βάση το παραπάνω Θεώρημα 5.4 τους τρόπους με τους οποίους η γενική επιφάνεια Riemann γένους g απεικονίζεται στο $\mathbb{P}^r$ με εικόνα καμπύλη βαθμού d (με $g - d + r \geq 0$), θεωρούμε την εξής fibration:

$$\alpha : G \longrightarrow W_d^r,$$

που ορίζεται ως εξής. Θεωρούμε την φυσιολογική διαστρωμμάτωση του W_d^r:

$$W_d^r \supset W_d^{r+1} \supset W_d^{r+2} \supset \cdots$$

Η fibration α πάνω από σημείο του στρώμματος $S_k := W_d^{r+k} \backslash W_d^{r+k+1}$ έχει ως fiber την Grassmannian $G(r + 1, r + k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Το G είναι ακριβώς το σύνολο που παραμετρίζει τους τρόπους με τους οποίους η γενική επιφάνεια Riemann γένους g απεικονίζεται στο $\mathbb{P}^r$ με εικόνα καμπύλη βαθμού d. Αποδεικνύεται ότι το G είναι ένα ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο για $\rho \geq 1$ και η απεικόνιση α είναι μια αναλυτική απεικόνιση μεταξύ ανάγωγων αλγεβρικών (αναλυτικών) συνόλων. Η ελάχιστη διάσταση της fiber είναι 0, που αντιστοιχεί στις fibers πάνω από το στρώμμα $S_0 := W_d^r \backslash W_d^{r+1}$ (και που είναι η διάσταση της γενικής fiber). Επομένως από το Θεώρημα 2.4, έχουμε ότι $\dim G = \dim W_d^r = \rho$. Πιό αναλυτικά εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε την διάσταση του καμματιού $G_k = \alpha^{-1}(S_k)$ της G που βρίσκεται πάνω από τό k στρώμμα S_k. Αυτή θα είναι $\dim G_k = \rho(g, r + k, d) + (r + 1)k$ (=διάσταση βάσης + διάσταση fiber). Παρατηρούμε ότι $\dim G_k = \rho(g, r, d) - k(g - d + r + k) \leq \rho(g, r, d) = \dim G_0$.

Πόρισμα 5.1 *Κάθε επιφάνεια Riemann μπορεί να απεικονισθεί στο $\mathbb{P}^1$ με απεικόνιση βαθμού d όταν το $d \geq [\frac{g+2}{2}]$. Η γενική επιφάνεια Riemann μπορεί να απεικονισθεί στο $\mathbb{P}^1$ με απεικόνιση βαθμού d ακριβώς όταν το $d \geq [\frac{g+2}{2}]$. Επιφάνειες Riemann που απεικονίζονται στο $\mathbb{P}^1$ με βαθμό $d < [\frac{g+2}{2}]$ είναι ειδικές επιφάνειες.*

Θα αποδείξουμε εδώ το 1) στο παραπάνω Θεώρημα 5.4 στην περίπτωση που $r = 1, 2$.

- $r = 1$: Θα αποδείξουμε ότι αν S γενική επιφάνεια Riemann γένους g και $\rho(d, g, 1) < 0$ τότε η S δεν επιδέχεται μία d προς 1 απεικόνιση στο $\mathbb{P}^1$. Σημειώνουμε ότι $\rho(d, g, 1) < 0 \iff d < [\frac{g+2}{2}]$. Θα αποδείξουμε το παραπάνω δείχνοντας ότι η οικογένεια των επιφανειών Riemann γένους g που επιδέχονται d προς 1 απεικόνιση στο $\mathbb{P}^1$ με $d < [\frac{g+2}{2}]$ έχει διάσταση $< 3g-3$ που είναι η διάσταση της οικογένειας των επιφανειών Riemann γένους g. Μια d προς 1 απεικόνιση στο $\mathbb{P}^1$ μιας επιφάνειας Riemann γένους g έχει $2g-2+2d$ branch σημεία. Από την άλλη μεριά είναι γνωστό ότι, δοσμένων $2g-2+2d$ σημείων στο $\mathbb{P}^1$, υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες επιφάνειες Riemann γένους g που να απεικονίζονται d προς 1 στο $\mathbb{P}^1$ και να έχουν τα παραπάνω ως branch σημεία. Επομένως η οικογένεια των παραπάνω επιφάνειων Riemann έχει διάσταση το πολύ $2g-2+2d$. Από την άλλη μεριά κάθε απεικόνιση στο $\mathbb{P}^1$ μπορεί να συντεθεί με έναν αυτομορφισμό του $\mathbb{P}^1$. Είναι γνωστό ότι οι αυτομορφισμοί του $\mathbb{P}^1$ μπορούν να στείλουν τρία σημεία σε τρία άλλα σημεία και συνεπώς η παραπάνω οικογένεια έχει διάσταση το πολύ $2g-2+2d-3 = 2g+2d-5$. Εχουμε τώρα $2g+2d-5 < 3g-3 \iff 2d < g+2 \iff d < [\frac{g+2}{2}]$ που είναι αυτό που θέλουμε.

- $r = 2$: Θα αποδείξουμε ότι αν S γενική επιφάνεια Riemann γένους g και $\rho(d, g, 2) < 0$ τότε η S δεν επιδέχεται μία απεικόνιση στο $\mathbb{P}^2$ που η εικόνα της είναι καμπύλη βαθμού d. Σημειώνουμε ότι $\rho(d, g, 2) < 0 \iff d < [\frac{2g+6}{3}]$. Οπως παραπάνω θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό δείχνοντας ότι η οικογένεια των επίπεδων καμπύλων βαθμού $d < [\frac{2g+6}{3}]$ και γένους g έχει διάσταση $< 3g-3$. Είναι γνωστό ότι στη παραπάνω οικογένεια, οι καμπύλες που οι ιδιομορφίες τους είναι χειρότερες από nodes έχουν συνδιάσταση > 1 (διότι ικανοποιούν περισσότερες εξισώσεις). Από την άλλη μεριά, μια επίπεδη καμπύλη με δ nodes έχει γεωμετρικό γένος $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$. Σημειώνουμε ότι το γεωμετρικό γένος είναι το γένος της επιφάνειας Riemann που είναι η ομαλοποίηση της επίπεδης καμπύλης και που στην περίπτωσή μας θα είναι η επιφάνεια που απεικονίζεται στην καμπύλη. Μια επίπεδη καμπύλη βαθμού d ορίζεται από ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού d. Υπάρχουν $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$ τέτοια πολυώνυμα (μέχρι πολλαπλασιασμόυ με σταθερά). Κάθε node στην καμπύλη επιβάλλει μιά συνθήκη επομένως απο τα παραπάνω πολυώνυμα αυτά που ορίζουν καμπύλες βαθμού d με δ nodes είναι $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 - \delta$. Για να έχει η καμπύλη γένος g θα πρέπει, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο να έχουμε $\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$. Συνεπώς η οικογένεια των πολυωνύμων που ορίζουν επίπεδες καμπύλες γένους g, βαθμού d με δ nodes έχει διάσταση $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g = 3d + g - 1$. Από την άλλη μεριά, το $PGL(3)$ που έχει προβολική διάσταση 8, δρα στο $\mathbb{P}^2$. Επομένως η οικογένεια των επιφανειών Riemann γένους g που απεικονίζονται στο επίπεδο ως καμπύλες βαθμού d έχει διάσταση το πολύ $3d+g-1-8=3d+g-9$. Εχουμε τώρα $3d+g-9<3g-3 \Longleftrightarrow d<[\frac{2g+6}{3}]$ που είναι το ζητούμενο.

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την Πρόταση 5.9, η απόδειξη του 2. του παραπάνω Θεωρήματος 5.4 είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω εικασίας του Petri.

Πρόταση 5.10 (Εικασία του Petri) *Εστω S γενική επιφάνεια Riemann, και D διαιρέτης στην S. Τότε η απεικόνιση*

$$\mu_0 : \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D) \longrightarrow \mathcal{L}(K)$$

είναι 1-1.

Η παραπάνω εικασία έχει αποδειχθεί από τους Gieseker [Gi], Eisenbud-Harris [EH1], [EH2] και Lazarsfeld [La]. Η απόδειξη του Gieseker βασίζεται σε μια παλιά ιδέα του ιταλού αλγεβρογεωμέτρη G. Castelnuovo και στηρίζεται σε τεχνικές που μελετούν την οριακή μορφή των γραμμικών συστημάτων όταν η επιφάνεια Riemann εμπεριέχεται σε μιά οικογένεια που το όριό της είναι καμπύλη με ιδιομορφίες. Οι Eisenbud-Harris για την απόδειξη της παραπάνω εικασίας χρειάστηκε να συστηματοποιήσουν την παραπάνω τεχνική και να αναπτύξουν την θεωρία των limit linear series. Η απόδειξη του Lazarsfeld είναι διαφορετικής υφής και χρησιμοποιεί μια ειδική οικογένεια καμπύλων σε K-3 επιφάνειες και τεχνικές των διανυσματικών δεσμών.

Σημείωση 5.4 Οταν $\rho(r,g,d)<0$, τότε από το παραπάνω Θεώρημα 5.4 έχουμε για την γενική επιφάνεια Riemann S ότι $W_d^r=\emptyset$. Τίθεται επομένως φυσιολογικά το ερώτημα της περιγραφής στο $\mathcal{M}_g$ του συνόλου των σημείων για τα οποία οι αντίστοιχες επιφάνειες Riemann έχουν $W_d^r \neq \emptyset$. Η έρευνα ως προς αυτή την κατεύθυνση βρίσκεται ακόμη στα πρώτα της βήματα και η κύρια εικασία ως προς το παραπάνω, που ωφείλεται στους Eisenbud - Harris είναι η εξής:

Εικασία 5.1 *Εστω $\rho(r,g,d)<0$. Τότε το σύνολο των σημείων του $\mathcal{M}_g$ για τα οποία οι αντίστοιχες επιφάνειες Riemann έχουν $W_d^r \neq \emptyset$ είναι αναλυτικό υποσύνολο συνδιάστασης $-\rho(r,g,d)$ στο $\mathcal{M}_g$.*

5.3.1 Η περίπτωση $r=1$

Δείνουμε σε αυτή την παράγραφο το Θεώρημα 5.4 (2), όταν $r=1$, αποδεικνύοντας την Εικασία του Petri 5.10 στην αντίστοιχη περίπτωση.

Πρόταση 5.11 *Εστω S γενική επιφάνεια Riemann, και D διαιρέτης στην S με $r(D)=1$. Τότε η απεικόνιση*

$$\mu_0 : \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D) \longrightarrow \mathcal{L}(K)$$

είναι 1-1.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Ker}\mu_0 \neq \{0\}$ και θα φθάσουμε σε άτοπο. Εστω ότι $\mathcal{L}(D) = < f_0, f_1 >$. Τότε υπαρχει $\xi \neq 0$ της μορφής $\xi = f_0 \otimes g_0 + f_1 \otimes g_1 \in \mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(K-D)$, όπου $g_0, g_1 \in \mathcal{L}(K-D)$, με $\mu_0(\xi) = 0$ δηλαδή $f_0 g_0 + f_1 g_1 = 0$. Ορίζουμε $t = g_0/f_1 = -g_1/f_0$, άρα $g_0 = f_1 t$, $g_1 = f_2 t$. Εχουμε $(t) + K - 2D \leq 0$ και συνεπώς $t \in \mathcal{L}(K-2D)$. Το γραμμικό σύστημα D ορίζει μια απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Από το Θεώρημα του Hurwitz, βλ. Θεώρημα 3.1 έχουμε ότι $K_S = \phi^* K^1_{\mathbb{P}} + R$, οπου $R \geq 0$ ο ramification διαιρέτης. Ειναι $K^1_{\mathbb{P}} = -2p$, $p \in \mathbb{P}^1$ συνεπώς $\phi^* K^1_{\mathbb{P}} = -2D$. Αρα $R = K + 2D$ και συνεπώς $K - 2D = 2K - R$ και άρα $t \in \mathcal{L}(2K - R) \subseteq \mathcal{L}(2K)$. Εχουμε λοιπόν κατασκευάσει μια γραμμική απεικόνιση $\mu_1 : \mathrm{Ker}\mu_0 \longrightarrow \mathcal{L}(2K)$ με $\mu_1(\xi) = t$. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός, που αποδεικνύεται από την deformation θεωρία του moduli χώρου $\mathcal{M}_g$, ότι ο συνεφαπτομενος χώρος του $\mathcal{M}_g$ στο σημείο που αντιστοιχεί στην επιφάνεια S μπορεί φυσιολογικά να ταυτιστεί με τον χώρο $\mathcal{L}(2K)$. Μπορούμε τότε να δούμε ότι για κάθε τόξο στον $\mathcal{M}_g$ που διέρχεται από το σημείο $[S]$που αντιστοιχεί στην S και με εφαπτόμενο διάνυσμα $\theta \in \mathcal{L}(2K)^\vee$ στο $[S]$, έχουμε ότι $\mu_1(\xi)(\theta) = 0$, για κάθε $\xi \in Ker\mu_0$. Αυτή η σχέση όμως επιβάλλει μη τετριμμένες απειροστές συνθήκες σε αυτο το σημείο του $\mathcal{M}_g$ πράγμα που συνεπάγεται ότι η S δεν μπορεί να είναι γενική επιφάνεια Riemann.

5.4 Οι περιπτώσεις με μικρό γένος

Θα μελετήσουμε σε αυτήν την παράγραφο τα σύνολα W^r_d στην περίπτωση που το γένος είναι ≤ 5. Με βάση αυτά που αναφέραμε στο τέλος της Παραγράφου 5.2.1 αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $r \geq 1$ και $2r \leq d \leq g-1$. Αρχίζουμε με μια προταση σχετική με τις υπερελλειπτικές επιφάνειες.

Πρόταση 5.12 *1. Αν S υπερελλειπτική επιφάνεια γένους g τότε υπάρχει μοναδική, μέχρι αυτομορφισμού του $\mathbb{P}^1$, απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Η απεικόνιση ϕ λέγεται υπερελλειπτική απεικόνιση της S.*

2. *Εστω S υπερελλειπτική επιφάνεια γένους g και έστω g^r_d ένα πλήρες γραμμικό σύστημα με $0 \leq d \leq g-1$. Τότε $g^r_d = r g^1_2 + p_1 + \cdots p_{d-2r}$, όπου κανένα ζεύγος από τα σημεία p_i δεν ανήκει στην ίδια fiber που ορίζει η υπερελλειπτική απεικόνιση.*

3. *Ο χώρος παραμέτρων $\mathcal{H}_g$ των υπερελλειπτικών επιφανειών γένους g έχει διάσταση $2g-1$.*

Απόδειξη: Για το 1). Από την Πρόταση 3.9 έχουμε ότι η κανονική απεικόνιση είναι η σύνθεση της υπερελλειτικής απεικόνισης με την Veroneze. Η κανονική απεικόνιση και η Veroneze είναι μοναδικά ορισμένες απεικονίσεις, επομένως και η υπερελλειπτική απεικόνιση είναι μοναδικά ορισμένη.

Για το 2). Έστω D ο διαιρέτης βαθμού d και διάστασης $r(D) = r$, ο οποίος αντιπροσωπεύει το γραμμικό σύστημα g^r_d. Γράφουμε $D = p_1 + p_2 + \ldots + p_d$. Τώρα ομαδοποιούμε όσα p_i είναι στην ίδια fiber της ϕ. Αν $2m$ το πλήθος αυτών των σημείων, μπορούμε να γράψουμε τον

$$D = \phi^*(q_1) + \phi^*(q_2) + \ldots + \phi^*(q_m) + p_{2m+1} + \ldots + p_d,$$

όπου $q_i \in \mathbb{P}^1$ και p_i ανά δύο όχι στην ίδια fiber. Τώρα,όλα τα q_i είναι ισοδύναμα στο $\mathbb{P}^1$ επομένως μπορούμε να απλοποιήσουμε και να γράψουμε

$$\phi^*(q_1) + \ldots + \phi^*(q_m) \sim m\phi^*(q_0),$$

όπου $q_0 \in \mathbb{P}^1$ οποιοδήποτε σημείο. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι: Αν $D = m\phi^*(q_0) + p_{2m+1} + \cdots + p_d$, τότε $\dim\mathcal{L}(D) = m + 1$, δηλαδή $r(D) = m$. Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι στην υπερελλειπτική καμπύλη μπορούμε να δώσουμε γεωμετρική ερμηνεία στα στοιχεία του κανονικού συστήματος $|K|$ και με βάση αυτήν να περιγράψουμε τα στοιχεία του συστήματος $|K - D|$.

Από την Πρόταση 3.9 έχουμε ότι η κανονική απεικόνιση $\phi_{\text{can}} : S \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ είναι η σύνθεση της υπερελλειπτικής απεικόνισης $\phi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ με την Veronese $\beta : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Το pull back, με την απεικόνιση ϕ_{can}, ενός διαιρέτη υπερεπιπέδου θα είναι επομένως της μορφής $\phi^*(q_1 + \cdots + q_{g-1})$, $q_i \in \mathbb{P}^1$. Από την άλλη μεριά, από το Πόρισμα 3.1, ξέρουμε ο παραπάνω διαιρέτης είναι ένας κανονικός διαιρέτης K στην S. Συνεπώς $K \sim (g-1)\phi^*(q)$, $q \in \mathbb{P}^1$ και επομένως $\phi^*(\mathcal{L}((g-1)q)) \subseteq \mathcal{L}(K)$. Ομως, $\dim\phi^*(\mathcal{L}((g-1)q)) = \dim\mathcal{L}((g-1)q) = g = \dim\mathcal{L}(K)$. Αρα $\phi^*(\mathcal{L}((g-1)q)) = \mathcal{L}(K)$ και επομένως $|K| = \phi^*|(g-1)q| = \phi^*\{q_1 + \cdots + q_{g-1}\}$, $q_i \in \mathbb{P}^1$. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία του $|K|$ είναι ακριβώς τα αθροίσματα από $g-1$ fibers της απεικόνισης ϕ. Επομένως τα στοιχεία του $|K - D|$ είναι ακριβώς τα αθροίσματα από $g - 1 - m$ fibers της ϕ που περιέχουν τα σημεία $p_{2m+1}, \ldots, p_d$. Συνεπώς $r(K - D) = g - 1 - m - (d - 2m) = g + m - d - 1$ (εδω χρησιμοποούμε και την συνθήκη $d \leq g - 1$). Αρα από το Θεώρημα R-R έχουμε ότι

$$r(D) = d - g + 1 + g + m - d - 1 = m.$$

Όμως, ξέρουμε ότι $r(D) = r$, άρα $m = r$ και τότε

$$D = r\phi^*(q_0) + p_{2m+1} + \ldots + p_d,$$

με τα p_i ανά δύο όχι στην ίδια fiber.

Για το 3). Η υπερελλειπτική καμπύλη ορίζεται από τα branch σημεία που ορίζει στο $\mathbb{P}^1$, modulo αυτομορφισμούς του $\mathbb{P}^1$. Το πλήθος αυτών των σημείων είναι $2g+2$. Οι αυτομορφισμοί του $\mathbb{P}^1$ καθορίζονται από την (μεταβατική) δράση τους σε τρία σημεία. Επομένως μια υπερελλειπτική καμπύλη καθορίζεται απο $2g-1$ σημεία και συνεπώς η οικογένεια των υπερελλειπτικών καμπυλών έχει διάσταση $2g-1$. $\square$

Πριν συνεχίσουμε με τις περιπτώσεις μικρού γένους, αναφέρουμε μια κατασκευή που θα χρησιμοποιήσουμε στα παρακάτω: Όταν μία ομαλή προβολική καμπύλη είναι εμβυθιμένη στον προβολικό χώρο μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις υπερεπιφάνειες που την περιέχουν. Έστω μιά ολόμορφη εμβύθιση $\phi : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Μία υπερεπιφάνεια στον χώρο $\mathbb{P}^n$ προσδιορίζεται από ομογενές πολυώνυμο βαθμού k με $n+1$ μεταβλητές. Επομένως, αν $\mathcal{P}(n,k)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ομογενών πολυωνύμων βαθμού k με $n+1$ μεταβλητές, θα είναι

$$dim\mathcal{P}(n,k) = \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}.$$

Έστω $|\phi| = \phi_{|D|}$ και F_0 ομογενές πολυώνυμο βαθμού k το οποίο να μήν μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω στην επιφάνεια S. Επειδή οι διαιρέτες υπερεπιπέδων της S είναι τα στοιχεία του γραμμικού συστήματος $|D|$ και αφού $div(F_0) = kdiv(H)$ για κάποιο υπερεπίπεδο H, θα έχουμε ότι $div(F_0) = kD$.

Μπορούμε τώρα, να ορίσουμε την γραμμική απεικόνιση

$$\mathcal{R}_k : \mathcal{P}(n,k) \longrightarrow \mathcal{L}(kD)$$

με

$$F \longmapsto F/F_0.$$

Το πηλίκο $f = F/F_0$ είναι μία καλά ορισμένη συνάρτηση στην επιφάνεια S και $f \in \mathcal{L}(kD)$ διότι $div(f) + kD = div(F) - div(F_0) + kD \sim div(F) - kD + kD = div(F) \geq 0$. Με την απεικόνιση $\mathcal{R}_k$ παίρνουμε ουσιαστικά το πηλίκο F/F_0 και το περιορίζουμε στην επιφάνεια S. Οπότε, ένα πολυώνυμο F ανήκει στον πυρήνα της $\mathcal{R}_k$ αν και μόνον αν το F μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω στην επιφάνεια. Επομένως, ο πυρήνας $ker\mathcal{R}_k$ αποτελείται από εξισώσεις υπερεπιπέδων που περιέχουν την S. Άν αφησουμε το k ελεύθερο, παίρνουμε πολλές τέτοιες απεικονίσεις και ο πυρήνας κάθε τέτοιας απεικόνισης δίνει και κάποια επιπλέον στοιχεία για την επιφάνεια που μελετάμε.

Αρχίζουμε τώρα την μελέτη των W^r_d στηνπερίπτωση που το γένος της επιφάνειας Riemann είναι ≤ 5.

- *Γένος* $g = 0, 1, 2$*:* Είμαστε έξω από το πεδίο των ανισοτήτων που αναφέρονται στην αρχή της παραγράφου.

- *Γένος* $g = 3$*:* Η μόνη περίπτωση που χρειάζεται να μελετήσουμε είναι $r = 1,\ d = 2$: Εχουμε $\rho = 3-2(3-2+1) = -1$. Αν η S επιδέχεται ενός g^1_2

τότε είναι υπερελειπτική και τότε υπάρχει μοναδικό g_2^1 σε αυτήν. Επομένως η γενική επιφάνεια γένους 3 έχει $W_2^1 = \emptyset$, διότι $\dim\mathcal{M}_3 = 6$ και $\mathcal{H}_3 = 5$. Αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε W_2^1=σημείο, και άρα $\dim W_2^1 = 0$.

- *Γένος $g = 4$:* Εχουμε να μελετήσουμε τις περιπτώσεις $r = 1,\ d = 2, 3$.

  1. $r = 1, d = 2$: Εχουμε $\rho = 4 - 2(4 - 2 + 1) = -2$. Οπως παραπάνω, η γενική επιφάνεια έχει $W_2^1 = \emptyset$, ενώ αν S υπερελλειπτική, τότε W_2^1=σημείο, και άρα $\dim W_2^1 = 0$.

  2. $r = 1, d = 3$: Εχουμε $\rho = 4-2(4-3+1) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, από το θεώρημα του Clifford συμπεραίνουμε ότι το γραμμικό σύστημα g_3^1 είναι πλήρες. Αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε από την παραπάνω Πρόταση 5.12 έχουμε $g_3^1 = g_2^1 + p$, γιά κάποιο $p \in S$. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση τα g_3^1 παραμετρίζονται από τα σημεία της S συνεπώς $W_3^1 \cong S$ και $\dim W_3^1 = 1 > \rho = 0$. Στην γενική περίπτωση τώρα, όπου η S δεν είναι υπερελλειπτική, παίρνουμε την κανονική της εμβύθιση στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^3$ και μελετούμε την εικόνα της, που την συμβολίζουμε πάλι με S. Ο δ.χ. V_2 των δευτεροβάθμιων ομογενών πολυωνύμων στο $\mathbb{P}^3$ έχει διάσταση $\begin{pmatrix} 3+2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$. Εστω D διαιρέτης υπερεπιπέδου στην S, επομένως κανονικός διαιρέτης. Αν F_0 δευτεροβάθμιο ομογενές πολυώνυμο τότε για τον αντίστοιχο διαιρέτη τομής, βλ. Παράγραφο 3.1.4, θα έχουμε $divF = 2H$. Μπορούμε να ορίσουμε επομένως την γραμμική απεικόνιση $R_2 : V_2 \longrightarrow \mathcal{L}(2D)$ με $F \longmapsto F/F_0$. Εχουμε $\dim\mathcal{L}(2D) = \dim\mathcal{L}(2K) = 2(2g-2)-g+1 = 9$. Συνεπώς $KerR_2 \neq \emptyset$. Εστω $0 \neq F \in KerR_2$, τότε η $F = 0$ ορίζει μια δευτεροβάθμια επιφάνεια Q στην οποία περιέχεται η S. Η Q είναι ανάγωγη διότι διαφορετικά η F θα ήταν γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων δηλ. η Q θα ήταν ένωση δύο υπερεπιπέδων και αυτό θα ήταν άτοπο διότι η S είναι non degenerate και άρα δεν μπορεί να περιέχεται σε μια τέτοια ένωση. Δουλεύοντας όπως παραπάνω με τα τριτοβάθμια πολυώνυμα έχουμε $\dim V_3 = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$ και $\dim\mathcal{L}(3D) = \dim\mathcal{L}(3K) = 3(2g-2) - g + 1 = 15$. Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση $R_3 : V_3 \longrightarrow \mathcal{L}(3D)$ έχει πυρήνα διάστασης $\dim KerR_3 \geq 5$. Υπάρχει στοιχείο G του πυρήνα που δεν είναι πολλαπλάσιο του F, διότι τα τριτοβάθμια πολλαπλάσια του F είναι συνδιασμοί των xF, yF, zF, wF άρα γενούν υπόχωρο διάστασης 4. Εστω C η αντίστοιχη τριτοβάθμια επιφάνεια που θα περιέχει την S άλλά όχι την Q. Η τομή των C και Q, που θα περιέχει την καμπύλη S, είναι καμπύλη βαθμού $2 \cdot 3 = 6$ δηλ. όσος και ο βαθμός της καμπύλης S

(που είναι $2g-2=2\cdot 4-2=6$). Αρα $S=C\cap Q$. Εστω τώρα ένα g_3^1 στην S και D διαιρέτης που ανήκει στο g_3^1. Τότε από το γεωμετρκό Riemann-Roch τα τρία σημεία του D εκτείνουν μια ευθεία η οποία βρίσκεται στην Q (διότι μια ευθεία που δεν ανήκει στην δευτεροβάθμια επιφάνεια Q θα την τέμνει το πολύ σε δύο σημεία). Επομένως οι διαιρέτες του g_3^1 είναι τομές δέσμης ευθειών στην Q. Αν η Q είναι ομαλή τότε είναι ισόμορφη με το $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ και περιέχει δύο δέσμες ευθειών. Συνεπώς σε αυτη την περίπτωση $W_3^1=$ δύο σημεία. Αν η Q δεν είναι ομαλή τότε είναι κώνος και έχει μια δέσμη ευθειών και τότε W_3^1=ένα σημείο. Αρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $\dim W_3^1=0\,(=\rho)$.

- *Γένος $g=5$:* Εχουμε να μελετήσουμε τις περιπτώσεις $r=1,\ d=2,3,4$ και $r=2,\ d=4$.

  1. $r=1, d=2$: Εχουμε $\rho=5-2(5-2+1)=-3$. Οπως παραπάνω, η γενική επιφάνεια έχει $W_2^1=\emptyset$, ενώ αν S υπερελλειπτική, τότε W_2^1=σημείο, και άρα $\dim W_2^1=0$.

  2. $r=1, d=3$: Εχουμε $\rho=5-2(5-3+1)=-1$. Αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε όπως παραπάνω (περίπτωση γένους $g=4$) βρίσκουμε ότι $W_3^1\cong S$ και άρα $\dim W_d^1=1$. Αν η S δεν είναι υπερελλειπτική τότε θεωρούμε την κανονική εμβύθιση της S στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^5$. Με ανάλυση παρόμια της περίπτωσης γένους $g=4$ δείχνουμε ότι η S είναι βρίσκεται στην τομή τριών δευτεροβάθμιων καμπυλών. Στην γενική περίπτωση η S είναι ακριβώς η τομή αυτών των επιφανειών. Οταν όμως η S επιδέχεται ένα g_3^1 τα πράγματα αλλάζουν. Σημειώνουμε ότι η γενική καμπύλη γένους $g=5$ δεν επιδέχεται ένα g_3^1 διότι, όπως και στην περίπτωση των υπερελλειπτικών, μπορούμε να δείξουμε ότι η οικογένεια επειφανειών που επιδέχονται ένα g_3^1 έχει διάσταση 11 που είναι μικρότερη από την διάσταση $\dim\mathcal{M}_5=12$. Εξετάζουμε την περίπτωση που η S επιδέχεται ένα g_3^1 δηλ. $W_3^1\neq\emptyset$. Σημειώνουμε ότι το g_3^1 δεν έχει base points, διαφορετικά η S θα ήταν υπερελλειπτική (αν p ένα base point, τότε το g_3^1-p είναι ένα g_2^1). Εστω D διαιρέτης που ανήκει στο g_3^1. Από το Θεώρημα Clifford έχουμε ότι $r(D)\leq 3/2$, άρα $r(D)=1$ δηλ. $g_3^1=|D|$. Από το γεωμετρικό R-R έχουμε ότι

  $$\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D}=\deg D-1-r(D)=3-1-1=1,$$

  συνεπώς τα τρία σημεία του D ανήκουν σε κάποια ευθεία l. Η τομή της ευθείας l με κάθε μια από τις παραπάνω δευτεροβάθμιες επιφάνεις είναι περιέχει τρία σημεία συνεπώς θα πρέπει ολόκληρη η ευθεία l να ανήκει στην τομή των δευτεροβάθμιων επιφανειών. Καθώς ο D διατρέχει το g^1_3 οι ευθείες αυτές ορίζουν μία ευθειογενή επιφάνεια που είναι ακριβώς η τομή των τριών δευτεροβάθμιων επιφανειών και που περιέχει την S. Αυτή η επιφάνεια δεν περιέχει άλλη οικογένεια ευθειών και συνεπώς έχουμε ότι W^1_3 =σημείο (και επομένως $\dim W^1_3 = 0$).

3. $r = 1, d = 4$: Εχουμε $\rho = 5 - 2(5 - 4 + 1) = 1$. Αν η S είναι υπερελλειπτική, τότε όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι $W^1_4 \cong S_{(2)}$ και συνεπώς $\dim W^1_4 = 2 > \rho$. Αν η S δεν είναι υπερελλειπτική τότε δείχνουμε ότι $\dim W^1_4 = 1 (= \rho)$. Από το Θεώρημα του Martens, βλ. Θεώρημα 5.3, έχουμε ότι $\dim W^1_4 \leq 1$. Για να αποδείξουμε την ισότητα παίρνουμε την κανονική εμβύθιση της S στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^4$ και μελετούμε την εικόνα της. Κατ' αρχάς, από το Θεώρημα Clifford, κάθε g^1_4 είναι ένα πλήρες γραμμικό σύστημα και έστω D διαιρέτης που ανήκει στο g^1_4, άρα $g^1_4 = |D|$. Από το Θεώρημα R-R έχουμε ότι και το $|K - D|$ είναι ένα g^1_4. Εστω $F, F^{'}$ οι διαιρέτες των βασικών σημείων των $|D|, |K-D|$ αντίστοιχα. Αν D_1, D_2 (αντιστ. $D^{'}_1, D^{'}_2$) διαιρέτες ξένοι μεταξύ τους με $D_i + F \in |D|,\ i = 1, 2$ (αντιστ. $D^{'}_i + F^{'} \in |K - D|$), τότε αφού $D_i + F + D^{'}_j + F^{'} \in |K|$, υπάρχουν υπερεπίπεδα $H_{ij},\ i, j = 1, 2$ με $H_{ij} \cdot S = D_i + F + D^{'}_j + F^{'}$. Αν L_{ij} η εξίσωση του H_{ij} τότε η μερόμορφη συνάρτηση $L = L_{11}L_{22}/L_{12}L_{21}$ του $\mathbb{P}^4$ περιορίζεται σε ολόμορφη συνάρτηση στην S, συνεπώς σταθερή. Επομένως η S περιέχεται σε μια υπερεπιφάνεια Q 2ου βαθμού της μορφής $L_{11}L_{22} - cL_{12}L_{21} = 0$ η οποία έχει ιδιομορφία στα σημεία τομής των τεσσάρων υπερεπιπέδων $H_{ij},\ i, j = 1, 2$. Η επιφάνεια Q περιέχει δύο οικογένειες επιπέδων, οι οποίες ορίζουν στην S τα γραμμικά συστήματα $|D|$ και $|K - D|$. Γεωμετρικά, η επιλογή του g^1_4 στην S προσδιορίζει την Q ως εξής. Αν D διαιρέτης που ανήκει στο g^1_4, τότε από γεωμετρικό R-R έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{P}} span\overline{D} = 2$ δηλαδή τα σημεία του D ορίζουν ένα επίπεδο. Οταν το D διατρέχει την μονοπαραμετρική οικογένεια g^1_4 τα αντίστοιχα επίπεδα σχηματίζουν την Q (και αποτελούν μια από τις δύο οικογένεις επιπέδων της Q). Αντίστροφα, τωρα κάθε ιδιόμορφη τετραγωνική υπερεπιφάνεια που περιέχει την S ορίζει στην S ένα g^1_4 και το δυικό του $K - g^1_4$. Πράγματι, κάθε τέτοια επιφάνεια περιέχει δύο (εν γένει διαφορετικές) οικογένειες επιπέδων, οι τομές των οποίων με την S ορίζουν τα παραπάνω γραμμικά συστήματα. Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω συστήματα συμπίπτουν μόνο για πεπερασμένες επιλογές των g^1_4, διότι σε αυτές τις περιπτώσεις ο αντίστοιχος διαιρέτης D θα ικανοποιεί την σχέση $[D] = [K - D]$, δηλ. $[2D] = [K]$ και υπάρχουν πεπερε-

σμένες τέτοιες επιλογές στην Ιακωβιανή (2^{10}). Επομένως, μένει να προσδιορίσουμε τις ιδιόμορφες τετραγωνικές επιφάνειες που περιέχουν την S. Ο χώρος των τετραγωνικών υπερεπιφανειών που περιέχουν την S είναι τριδιάστατος και έστω Q_0, Q_1, Q_2 οι συμμετρικοί πίνακες που ορίζουν τις εξισώσεις τους (πίνακες που στην θέση ij έχουν τον συντελεστή του όρου $X_iX_j = X_jX_i$). Οι ιδιόμορφες τετραγωνικές υπερεπειφάνειες που περιέχουν την S θα δίδονται τότε από συντελεστές που ικανοποιούν εξίσωση της μορφής $\det(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = 0$. Επομένως τέτοιες επιφάνειες αντιστοιχούν στα σημεία της πεμπτοβάθμιας καμπύλης Γ του επιπέδου $\mathbb{P}^2$ με συτεταγμένες τα $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$ που δίδεται από την παραπάνω εξίσωση. Κάθε σημείο της Γ αντιστοιχεί σε δύο, εν γένει διαφορετικά, g_4^1. Επομένως το W_4^1 είναι μια καμπύλη (άρα $\dim W_4^1 = 1$) που απεικονίζεται 2 προς 1 στην καμπύλη Γ και τα ramification σημεία της απεικόνισης αντιστοιχούν στα g_4^1 για τα οποία έχουμε ότι $g_4^1 = K - g_4^1$.

4. $r = 2, d = 4$: Εχουμε $\rho = 5 - 3(5-4+2) = -4$. Σε αυτή την περιπτωση ισχύει η ισότητα στο Θεώρημα του Clifford και συμπεραίνουμε ότι αν η S δεν είναι υπερελλειπτική (γενική περίπτωση) τότε $W_4^2 = \emptyset$. Διαφορετικά, αν η S είναι υπερελλειπτική τότε το γραμμικό σύστημα g_4^2 είναι πλήρες και από την παραπάνω Πρόταση 5.12 έχουμε $g_4^2 = 2g_2^1$. Αρα $W_4^2 =$σημείο και $\dim W_4^2 = 0$.

Βιβλιογραφία

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, Ph. Griffiths and J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves (I)*, Springer-Verlag, 1985

[BT] R. Bott and L. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.

[DS] V.I. Danilov, V.V. Shokurov: *Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes*, Springer-Verlag, 1998.

[EH1] D. Eisenbud, J. Harris: *Divisors on general curves and cuspidal rational curves*, Invent. Math. 74 (1983), 371-418.

[EH2] D. Eisenbud, J. Harris: *A simpler proof of the Gieseker-Petri Theorem for special divisors*, Invent. Math. 74 (1983), 269-280.

[FL] W. Fulton, R. Lazarsfeld: *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors*, Acta Math. 146 (1981), 271-283.

[Gi] D. Gieseker: *Stable curves and special divisors*, Invent. Math. 66 (1982), 251-275.

[Gr1] Ph. Griffiths: *Introduction to Algebraic Curves*, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 76, A.M.S., 1989.

[Gr2] Ph. Griffiths: *An introduction to the Theory of Special Divisors on Algebraic Curves*, Regional Conferences Series in Mathematics, No 44, A.M.S., 1980.

[GH] Ph. Griffiths, J. Harris: *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. 47 (1980), 223-272.

[GH2] Ph. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, John Wislley & Sons, 1978.

[K] G. Kempf: *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Publications of Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972.

[KL1] S. Kleiman, D. Laksov: *On the existence of special divisors*, Amer.J. Math. 22 (1976), 1-23.

[KL2] S. Kleiman, D. Laksov: *Another proof of the existence of special divisors*, Acta Math. 132 (1974), 163-176.

[La] R. Lazarsfeld: *Brill-Noether-Petri without degenerations*, J.Diff. Geom. 23 (1986), 299-307.

[Ma] H. Martens: *On the varietes of special divisors on a curve*, J. reiner Angew. Math. 227 (1967), 111-120.

[Mi] R. Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.5, A.M.S., 1995.