ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ YOUNG ΚΑΙ BRASCAMP-LIEB

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΤΕΦΑΝΑΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1998

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Απρίλιο του 1998. Επιβλέπων ήταν ο Μ. Παπαδημητράκης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Παπαδημητράκης και Σ. Παπαδοπούλου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την απόδειξη ορισμένων ανισοτήτων: της βέλτιστης μορφής της ανισότητας του Young για συνελίξεις και της αντίστροφής της, μιάς ανισότητας των Brascamp-Lieb και μιάς νέας δυϊκής ανισότητας, που έχουν πολυάριθμες εφαρμογές στην κυρτότητα.

Το πρώτο κεφάλαιο πραγματεύεται την ανισότητα του Young και την αντίστροφή της. Η κλασσική ανισότητα του Young για συνελίξεις ισχυρίζεται οτι για όλες τις συναρτήσεις $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ έχουμε:

$$||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q,$$

όπου $p, q, r \geq 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Αυτή η ανισότητα είναι βέλτιστη, μόνο όταν p ή q είναι 1.

Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα του Young βρέθηκε από τον Beckner [3], ο οποίος χρησιμοποίησε tensorization arguments και αναδιατάξεις συναρτήσεων. Στο άρθρο [1], οι Brascamp-Lieb την εξήγαγαν από μια γενικότερη ανισότητα, στην οποία θα αναφερόμαστε με τον όρο 'ανισότητα των Brascamp-Lieb'. Η ανισότητα των Brascamp-Lieb εφαρμόστηκε επιτυχώς, επίσης, σε μερικά προβλήματα της κυρτής γεωμετρίας από τον K. Ball (δείτε το [8] για ένα παράδειγμα).

Η έκφραση της βέλτιστης σταθεράς για την ανισότητα του Young είναι μάλλον πολύπλοκη, αλλά μπορεί εύκολα να ανακαλείται με την βοήθεια μιάς απλής αρχής: λαμβάνεται όταν οι f και g είναι Gaussian συναρτήσεις στην πραγματική ευθεία:

$$f(x) = c_1 \exp(-p' x^2) \quad , \quad g(x) = c_2 \exp(-q' x^2),$$

όπου p', q' οι συζυγείς εκθέτες των p, q αντίστοιχα.

Αυτή η αρχή έχει ευρέως αναπτυχθεί από τον Lieb, στο πιο πρόσφατο άρθρο [6]. Μεταξύ πολλών άλλων αποτελεσμάτων, αυτό το άρθρο περιέχει μια νέα απόδειξη της ανισότητας των Brascamp-Lieb.

Μια αντίστροφη μορφή της ανισότητας του Young βρέθηκε από τον Leindler [5]: για $0 < p, q, r \leq 1$ και $f, g \geq 0$ ισχύει

$$||f * g||_r \geq ||f||_p ||g||_q.$$

Ξανά, αυτή η ανισότητα είναι βέλτιστη μόνο όταν p ή q είναι 1.

Η βέλτιστη αντίστροφη ανισότητα ανακαλύφθηκε από τους Brascamp-Lieb στο ίδιο άρθρο. Στο άρθρο [4] δείχνεται επίσης οτι, η αντίστροφη ανισότητα του Young συνεπάγεται μια άλλη σημαντική ανισότητα, την ανισότητα των Leindler και Prékopa, στενά σχετιζόμενη με την ανισότητα Brunn-Minkowski ([5], [7]).

Η απόδειξη από το [4], γι' αυτήν την βέλτιστη αντίστροφη μορφή της ανισότητας του Young, είναι μάλλον πολύπλοκη και χρησιμοποιεί πολλά συστατικά: tensorization arguments, συμμετρικοποίηση Schwarz, την ανισότητα Brunn-Minkowski, και κάποιο διαισθητικά όχι τόσο απλό φαινόμενο για το μέτρο σε μεγάλες διαστάσεις. Σε αντίθεση, το επιχείρημα του Barthe [1], το οποίο παρουσιάζουμε εδώ, είναι στοιχειώδες και δίνει μια ενοποιημένη μεταχείριση και των δύο περιπτώσεων: της ανισότητας του Young και της αντίστροφής της.

Είναι γνωστό οτι, tensorization arguments επιτρέπουν να συνάγουμε την πολυδιάστατη περίπτωση από την μονοδιάστατη: αν η βέλτιστη σταθερά είναι C για την πραγματική ευθεία, θα είναι C^n στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$. Το αποτέλεσμα αυτό περιέχεται στο άρθρο [3] και χάριν πληρότητας εμφανίζεται και σ' αυτήν την εργασία.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται την ανισότητα των Brascamp-Lieb. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους αναδιάταξης που αναπτύχθηκαν στο [9], οι Brascamp-Lieb απέδειξαν οτι, αν $c_1, \ldots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^m c_i = n$, και $v_1, \ldots, v_m$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\langle x, v_i \rangle) dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \leq \sup\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\langle x, v_i \rangle) dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} : f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2), \lambda_i > 0 \},$$

για θετικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(m \geq n)$. Η σταθερά που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της ανισότητας είναι βέλτιστη. Στη συνέχεια ο Lieb [6] έδωσε μια πολυδιάστατη εκδοχή αυτής της ανισότητας.

Δίνουμε μια νέα απόδειξη όλων των παραπάνω ανισοτήτων, που οφείλεται στον F. Barthe [1], [2] καθώς και μιας νέας δυϊκής ανισότητας [2].

I. ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ YOUNG ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ

Γιά κάθε $t > 0$ ορίζουμε τον t' από την σχέση $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$ (παρατηρείστε οτι $t' < 0$ όταν $t < 1$).

Γιά κάθε $t > 0$ ορίζουμε την σταθερά

$$C_t = \frac{t^{\frac{1}{2t}}}{|t'|^{\frac{1}{2t'}}}$$

και την

$$K(p,q,r) = \frac{p^{\frac{1}{2p}} q^{\frac{1}{2q}}}{r^{\frac{1}{2r}}}.$$

Είναι θέμα πράξεων να δούμε οτι η συνθήκη $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ είναι ισοδύναμη με την σχέση $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r'}$ γιά τους συζυγείς. Επίσης, οι p', q', r' είναι ομόσημοι αν, είτε $p, q, r > 1$ ή $0 < p, q, r < 1$.

Θέτουμε $c = \sqrt{r'/q'}$, $s = \sqrt{r'/p'}$ και παρατηρούμε οτι $c^2 + s^2 = 1$.

Το γενικό αποτέλεσμα έχει ως ακολούθως:

Θεώρημα 1. *Εστω $p, q, r > 0$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, και $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ μη-αρνητικές συναρτήσεις.*
Αν $p, q, r \geq 1$, τότε

$$\|f * g\|_r \leq \left(\frac{C_p C_q}{C_r}\right)^N \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1}$$

Αν $p, q, r \leq 1$, τότε

$$\|f * g\|_r \geq \left(\frac{C_p C_q}{C_r}\right)^N \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2}$$

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να ελέγξουμε οτι, όταν $N = 1$ και $p, q \neq 1$ ισχύει ισότητα στις (1) και (2) γιά τις συναρτήσεις

$$f(x) = \exp(-|p'|x^2) \quad , \quad g(x) = \exp(-|q'|x^2).$$

Ας δείξουμε οτι παίρνουμε ισότητα π.χ. στην (1) γιά τις συναρτήσεις αυτές. Από την γνωστή σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ , \ a > 0$$

με μιά απλή αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε την

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+\gamma)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(\gamma - \frac{b^2}{4a})} \ , \ a > 0.$$

Ετσι,

$$\|f\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pp'x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{pp'}},$$

το οποίο σημαίνει οτι

$$\|f\|_p = \left(\frac{\pi}{pp'}\right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Ομοίως, $\|g\|_q = (\pi/qq')^{\frac{1}{2q}}$. Ακόμη,

$$\frac{C_p C_q}{C_r} = \frac{(p^{1/2p}/(p')^{1/2p'})(q^{1/2q}/(q')^{1/2q'})}{r^{1/2r}/(r')^{1/2r'}} = \frac{K(p,q,r)}{K(p',q',r')}.$$

Οπότε, αφ' ενός

$$\frac{C_p C_q}{C_r}\|f\|_p\|g\|_q = \frac{\pi^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}}(r')^{\frac{1}{2r'}}}{(p')^{\frac{1}{2}}(q')^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2r}}},$$

αφ' ετέρου

$$\|f * g\|_r^r = \int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|^r dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy\right|^r dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'(x-y)^2} e^{-q'y^2} dy\right)^r dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'(x-y)^2 - q'y^2} dy\right)^r dx.$$

Ο εκθέτης γράφεται:

$$-p'(x-y)^2 - q'y^2 = -(p'+q')y^2 + 2p'xy - p'x^2$$

$$= -\left(\frac{p'q'}{r'}y^2 - 2p'xy + p'x^2\right).$$

Οπότε το εσωτερικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'(x-y)^2 - q'y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi r'}{p'q'}} e^{-r'x^2}.$$

Αρα,

$$\|f * g\|_r^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'(x-y)^2 - q'y^2} dy\right)^r dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\pi r'}{p'q'})^{r/2} e^{-r'rx^2} dx$$

$$= (\frac{\pi r'}{p'q'})^{r/2} \sqrt{\frac{\pi}{rr'}} = \left(\frac{C_p C_q}{C_r}\|f\|_p\|g\|_q\right)^r.$$

Η απόδειξη της ισότητας στην (2) είναι εντελώς όμοια. □

Οπως έχουμε ήδη πεί, αρκεί να αποδείξουμε τις (1), (2) όταν $N = 1$. Θα αποδείξουμε αυτήν την περίπτωση σε μιά τροποποιημένη μορφή (Θεώρημα 2). Παραθέτουμε λοιπόν το Θεώρημα 2, που είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 1 όταν $N = 1$ αρκεί τα p, q, r να είναι διαφορετικά από 1.

Θεώρημα 2. *Εστω $p, q, r > 0$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ και είτε $p, q, r > 1$ ή $0 < p, q, r < 1$. Εστω $c = \sqrt{r'/q'}$, $s = \sqrt{r'/p'}$, και έστω f, g μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$.*
Αν $p, q, r > 1$, τότε
$(1')$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r} \leq K(p, q, r)\left(\int f\right)^{1/p}\left(\int g\right)^{1/q}.$$

Αν $0 < p, q, r < 1$, τότε
$(2')$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r} \geq K(p, q, r)\left(\int f\right)^{1/p}\left(\int g\right)^{1/q}.$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ισότητα όταν $f(x) = \exp(-px^2)$, $g(x) = \exp(-qx^2)$.

Αποδεικνύουμε τώρα την ισοδυναμία των Θεωρημάτων 1 και 2 ($N = 1$ και $p, q, r \neq 1$).

Εστω $p, q, r > 1$ (η περίπτωση $p, q, r < 1$ αποδεικνύεται ομοίως). Παρατηρούμε οτι η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(w - z)g(z)dz\right)^r dw\right)^{1/r} \leq \frac{K(p, q, r)}{K(p', q', r')}\left(\int_{\mathbb{R}} f^p\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}} g^q\right)^{1/q}.$$

(a) Υποθέτουμε πρώτα οτι ισχύει το Θεώρημα 1 και θα δείξουμε το Θεώρημα 2. Εστω λοιπόν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f, g \geq 0$.

Στο $\int_{\mathbb{R}} f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx$ κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής: $z := sx + cy, w := y/c$ ή ισοδύναμα $x = \frac{z}{s} - \frac{cy}{s}, y = cw$ και $cx - sy = \frac{cz}{s} - \frac{y}{s}$. Οπότε,

$$I := \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s}f^{1/p}(\frac{cz}{s} - \frac{y}{s})g^{1/q}(z)dz\right)^r dy\right)^{1/r}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s}f^{1/p}(\frac{c}{s}(z - \frac{y}{c}))g^{1/q}(z)dz\right)^r dy\right)^{1/r}.$$

Τώρα, θέτουμε:

$$F(y) := f^{1/p}(-\frac{cy}{s}) \quad , \quad G(z) := g^{1/q}(z).$$

Ετσι,

$$I = \frac{c^{1/r}}{s}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} F(w - z)G(z)dz\right)^r dw\right)^{1/r}.$$

Ομως $F, G \geq 0$ και $F \in L^p(\mathbb{R})$, $G \in L^q(\mathbb{R})$, δηλαδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 γιά τις F, G. Οπότε,

$$I \leq \frac{c^{1/r}}{s} \frac{K(p,q,r)}{K(p',q',r')} \|F\|_p \|G\|_q.$$

Είναι

$$\|G\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{1/q} \quad , \quad \|F\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} f(-\frac{cy}{s})dy\right)^{1/p} = (\frac{s}{c})^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)dz\right)^{1/p}.$$

Απλές πράξεις επομένως δείχνουν οτι

$$I \leq K(p,q,r) \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{1/q}. \quad \square$$

(b) Γιά την απόδειξη του οτι το Θεώρημα 1 έπεται από το Θεώρημα 2, ακολουθούμε την αντίθετη πορεία επιχειρημάτων με τους ίδιους μετασχηματισμούς, οπότε θεωρούμε περιττή την επανάληψη. □

Γιά την απόδειξη του Θεωρήματος 2: Κατάρχήν, αρκεί να το δείξουμε γιά μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$ οι οποίες φράσσονται άνω από Gaussian συναρτήσεις. Διότι, γιά $f, g \geq 0$ στον $L^1(\mathbb{R})$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις

$$f_n(x) := \min(f(x), ne^{-x^2}) \ , \ g_n(x) := \min(g(x), ne^{-x^2}) \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $f_n \to f$, $g_n \to g$ καθώς $n \to \infty$, και αν ισχύουν οι (1′), (2′) γιά τις f_n, g_n, εφαρμογή του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης αποδεικνύει την ισχύ των (1′), (2′) γιά τις f, g.

Κατόπιν, αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και $0 \leq f, g \leq ce^{-x^2}$, τότε μπορούμε να βρούμε συνεχείς $f_n, g_n \in L^1(\mathbb{R})$ (και μάλιστα με συμπαγή φορέα), τέτοιες ώστε $f_n \to f$, $g_n \to g$ στον $L^1(\mathbb{R})$ και σχεδόν παντού (γνωστό θεώρημα). Αν επιπλέον θεωρήσουμε τις

$$\min(f_n, ce^{-x^2}) + \frac{1}{n}e^{-x^2} \ , \ \min(g_n, ce^{-x^2}) + \frac{1}{n}e^{-x^2}$$

τότε μπορούμε να υποθέσουμε οτι

$$0 < f_n, g_n \leq ce^{-x^2}.$$

Αν τώρα οι (1′), (2′) ισχύουν γιά τις f_n, g_n, τότε εφαρμογή του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης αποδεικνύει την ισχύ τους γιά τις f, g. (Σημείωση: η συνάρτηση $h_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f_n^{1/p}(cx - sy) g_n^{1/q}(sx + cy)dx$ φράσσεται άνω από Gaussian συνάρτηση, αφού οι f_n, g_n φράσσονται).

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 2 γιά συναρτήσεις συνεχείς, θετικές, άνω φραγμένες από Gaussian συναρτήσεις.

Παραθέτουμε τώρα ένα Λήμμα που είναι το κεντρικό σημείο του όλου ζητήματος:

Λήμμα 1. *Υποθέτουμε οτι $p, q, r > 1$ και οτι $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Εστω f, g, F, G συνεχείς, θετικές συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε*

$$\int f = \int F \quad , \quad \int g = \int G.$$

Τότε έχουμε

$$\left(\int \left(\int f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r} \tag{3}$$

$$\leq \int \left(\int F^{r/p}(cX - sY)G^{r/q}(sX + cY)dY\right)^{1/r} dX.$$

Ας σχολιάσουμε πρώτα αυτό το Λήμμα. Οι δύο αριθμοί $\frac{r}{p}$ και $\frac{r}{q}$ είναι μεγαλύτεροι του 1 και θα παίξουν το ρόλο των $\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}$ γιά κάποια $P, Q < 1$. Θέτοντας επίσης $\frac{1}{R} = r$, παίρνουμε $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1 + \frac{1}{R}$, έτσι ώστε το δεξί μέλος της ανισότητας (3) είναι παρόμοιο με το αριστερό μέλος, αλλά γιά εκθέτες μικρότερους του 1.

Ενας εύκολος υπολογισμός δείχνει οτι τα δύο μέλη της (3) είναι ίσα όταν

$$f(x) = F(x) = \exp(-px^2) \quad , \quad g(x) = G(x) = \exp(-qx^2).$$

Αυτές οι παρατηρήσεις δείχνουν οτι το Λήμμα 1 περιέχει και τις δύο: την ανισότητα του Young και την αντίστροφή της, με βέλτιστη σταθερά. Βεβαίως, το Λήμμα 1 ισχύει και γιά μη αρνητικές L^1 συναρτήσεις, κάτι που βλέπει κανείς με προσέγγιση όπως εξηγήσαμε πρωτύτερα.

Δείχνουμε τώρα πώς εφαρμόζεται το Λήμμα 1 στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2: Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 1 με τις

$$f(x) = F(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-px^2) \quad , \quad g(x) = G(x) = \sqrt{\frac{q}{\pi}}\exp(-qx^2),$$

(οι οποίες είναι συνεχείς, θετικές, στον $L^1(\mathbb{R})$, και ικανοποιούν τις $\int f = \int F$, $\int g = \int G$), παίρνουμε ισότητα στην (3) και τα δύο μέλη γίνονται ίσα με $K(p, q, r)$.

Πράγματι: το αριστερό μέλος της (3) γίνεται

$$I_1 := \left(\int \left(\int f^{1/p}(cx - sy)g^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r}$$

$$= \left(\int \left(\int (\frac{p}{\pi})^{1/2p}\exp(-(cx - sy)^2)(\frac{q}{\pi})^{1/2q}\exp(-(sx + cy)^2)dx\right)^r dy\right)^{1/r}$$

$$= \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}}}\left(\int \left(\int \exp(-[(cx - sy)^2 + (sx + cy)^2])dx\right)^r dy\right)^{1/r}.$$

Είναι $\pi^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}} = \pi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}$ και

$$\int \exp(-[(cx-sy)^2+(sx+cy)^2])dx = \int \exp(-(x^2+y^2))dx$$

$$= \exp(-y^2)\int \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}\exp(-y^2).$$

Αρα,

$$I_1 = \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}}\left(\int \pi^{r/2}\exp(-ry^2)dy\right)^{1/r}$$

$$= \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{1/2r}}\frac{\pi^{1/2r}}{r^{1/2r}} = K(p,q,r).$$

Γιά το δεξί μέλος της (3):

$$I_2 = \int\left(\int F^{r/p}(cX-sY)G^{r/q}(sX+cY)dY\right)^{1/r}dX$$

$$= \int\left(\int (\frac{p}{\pi})^{r/2p}\exp(-r(cX-sY)^2)(\frac{q}{\pi})^{r/2q}\exp(-r(sX+cY)^2)dY\right)^{1/r}dX$$

$$= \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}}\int\left(\int \exp(-r(X^2+Y^2))dY\right)^{1/r}dX$$

$$= \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}}\int \exp(-X^2)\frac{\pi^{1/2r}}{r^{1/2r}}dX$$

$$= \frac{p^{1/2p}q^{1/2q}}{\pi^{1/2}r^{1/2r}}\pi^{1/2} = K(p,q,r).$$

(a) Εστω τώρα οτι $p,q,r>1$. Θα δείξουμε οτι ισχύει η ($1'$): Εστω f,g συνεχείς, θετικές συναρτήσεις που φράσσονται άνω από Gaussian συνάρτηση (άρα είναι στον $L^1(\mathbb{R})$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε οτι $\int f = \int g = 1$ (λόγω της ομογένειας των δύο μελών της ($1'$)).

Θεωρούμε σαν F,G τις

$$F(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-px^2) \quad , \quad G(x) = \sqrt{\frac{q}{\pi}}\exp(-qx^2).$$

Αυτές είναι προφανώς συνεχείς, θετικές, και $\int F = 1 = \int f$, $\int G = 1 = \int g$. Εφαρμόζεται λοιπόν το Λήμμα 1, οπότε ισχύει η (3). Το αριστερό μέλος της (3) είναι ίδιο με το αριστερό μέλος της ($1'$). Το δεξί μέλος της (3) (γιά τις συγκεκριμένες F,G) είναι ίσο με $K(p,q,r)$, δηλαδή ίσο με το δεξί μέλος της ($1'$) (αφού $\int f = \int g = 1$). Ωστε, ισχύει η ($1'$).

(b) Γιά την ($2'$): Εστω $0<p_1,q_1,r_1<1$ με $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1} = 1+\frac{1}{r_1}$ και F,G συνεχείς, θετικές συναρτήσεις που φράσσονται άνω από Gaussian συνάρτηση (άρα είναι στον $L^1(\mathbb{R})$), με $\int F = \int G = 1$.

Ζητάμε να δείξουμε οτι

$$\left(\int\left(\int F^{1/p_1}(c_1Y-s_1X)G^{1/q_1}(s_1Y+c_1X)dY\right)^{r_1}dX\right)^{1/r_1}\geq K(p_1,q_1,r_1),$$

όπου $c_1:=\sqrt{r_1'/q_1'}$, $s_1:=\sqrt{r_1'/p_1'}$.

Ορίζουμε $(p,q,r):=(\frac{p_1}{r_1},\frac{q_1}{r_1},\frac{1}{r_1})$. Τότε, $p,q,r>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$.

Θεωρώντας και f,g θετικές, συνεχείς, με $\int f=\int g=1$ (τις οποίες θα κάνουμε πιό συγκεκριμένες παρακάτω), έχουμε οτι ισχύει η (3) του Λήμματος 1 γιά τις f,g,F,G και την τριάδα (p,q,r) (όπου $c:=\sqrt{r'/q'}$, $s:=\sqrt{r'/p'}$).

Ομως, με απλές πράξεις βλέπουμε οτι

$$c_1:=\sqrt{\frac{r_1'}{q_1'}}=\sqrt{\frac{r'}{p'}}=s\quad,\quad s_1:=\sqrt{\frac{r_1'}{p_1'}}=\sqrt{\frac{r'}{q'}}=c.$$

Ετσι, αν υψώσουμε την ανισότητα (3) στην δύναμη r και αντικαταστήσουμε τα c,s με s_1,c_1 και τα p,q,r με $\frac{p_1}{r_1},\frac{q_1}{r_1},\frac{1}{r_1}$ αντιστοίχως, παίρνουμε

$$\int\left(\int f^{r_1/p_1}(s_1x-c_1y)g^{r_1/q_1}(c_1x+s_1y)dx\right)^{1/r_1}dy$$

$$\leq\left(\int\left(\int F^{1/p_1}(s_1X-c_1Y)G^{1/q_1}(c_1X+s_1Y)dY\right)^{r_1}dX\right)^{1/r_1}.$$

Αν θέσουμε $\tilde{f}(x):=f(-x)$, $\tilde{F}(x):=F(-x)$, η τελευταία γίνεται

$$\int\left(\int \tilde{f}^{r_1/p_1}(c_1y-s_1x)g^{r_1/q_1}(s_1y+c_1x)dx\right)^{1/r_1}dy$$

$$\leq\left(\int\left(\int \tilde{F}^{1/p_1}(c_1Y-s_1X)G^{1/q_1}(s_1Y+c_1X)dY\right)^{r_1}dX\right)^{1/r_1}.$$

Δηλαδή, είναι η αντίστροφη μορφή της (3) εφαρμοσμένη γιά τις $\tilde{F},G,\tilde{f},g$ με $0<p_1,q_1,r_1<1$. Διαλέγοντας

$$f(x):=\sqrt{\frac{p_1}{\pi}}\exp(-p_1x^2)\quad,\quad g(x):=\sqrt{\frac{q_1}{\pi}}\exp(-q_1x^2)$$

παίρνουμε την $(2')$ (αφού το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης γίνεται ίσο με $K(p_1,q_1,r_1)$.)

Οι συναρτήσεις $f(x)=\exp(-px^2)$, $g(x)=\exp(-qx^2)$ δίνουν ισότητα στις $(1')$, $(2')$, όπως θα φανεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. □

Αποδεικνύουμε τώρα το Λήμμα 1:

Απόδειξη του Λήμματος 1: Η απόδειξη βασίζεται σε μιά παραμετρικοποίηση συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκε στο άρθρο [10] και πηγάζει με μία έννοια από την απόδειξη του Brunn γιά την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Υποθέτουμε οτι f, F, g, G είναι συνεχείς, θετικές συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε

$$\int f = \int F \quad , \quad \int g = \int G.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το ολοκλήρωμα I στο αριστερό μέλος της (3) είναι πεπερασμένο, διότι υποθέτοντας οτι το Λήμμα 1 ισχύει όταν το I είναι πεπερασμένο, μπορούμε να το δείξουμε και όταν $I = +\infty$.

Πράγματι, προσεγγίζουμε κατάλληλα –θα δούμε μετά πώς– τις f, g, F, G με f_n, g_n, F_n, G_n αντιστοίχως, που πληρούν τις ίδιες υποθέσεις (του Λήμματος 1) και επιπλέον το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι $I_n < +\infty$. Αρα, ισχύει το Λήμμα 1. Εχουμε $I_n \leq J_n$, και περνώντας στο όριο παίρνουμε $I \leq J$ (όπου J_n, J το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3) γιά την περίπτωση των F_n, G_n και F, G αντιστοίχως).

Αναλυτικά έχουμε: Με δοσμένες τις f, g συνεχείς, θετικές στον $L^1(\mathbb{R})$, θεωρούμε τις

$$f_n(x) := \min(f(x), ne^{-x^2}) \quad , \quad g_n(x) := \min(g(x), ne^{-x^2}).$$

Είναι $0 < f_n(x), g_n(x) \leq ne^{-x^2}$ και $f_n \to f$, $g_n \to g$ καθώς $n \to \infty$. Διπλή εφαρμογή του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης αποδεικνύει οτι, αν η (3) ισχύει γιά τα ζεύγη (f_n, g_n) τότε θα ισχύει και γιά το (f, g). Επιπλέον, το αριστερό μέλος της (3) είναι πεπερασμένο γιά τις (f_n, g_n) (επειδή οι f_n, g_n φράσσονται άνω από Gaussian συνάρτηση).

Περνούμε τώρα στην κυρίως απόδειξη του Λήμματος 1: Αφού $\int F = \int f$ και $\int G = \int g$, υπάρχουν δύο συναρτήσεις $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι

$$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F \quad , \quad \int_{-\infty}^{v(t)} g = \int_{-\infty}^{t} G.$$

Διότι, αν θέσουμε

$$H(t) := \int_{-\infty}^{t} F(x)dx \quad , \quad h(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

τότε ικανοποιούνται τα εξής:

(i) Οι H, h είναι συνεχείς και γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{t\to-\infty} H(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = 0$.

(iii) $\lim_{t\to+\infty} H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{t\to+\infty} h(t)$.

Εστω $t \in \mathbb{R}$. Είναι $0 < H(t) < \int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$. Λόγω των (i), (ii) και (iii), υπάρχουν $t_1 < t_2$ στο $\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$h(t_1) < H(t) < h(t_2).$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει μοναδικό $u(t) \in (t_1, t_2)$ τέτοιο ώστε $h(u(t)) = H(t)$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F.$$

Ετσι ορίζεται μιά συνάρτηση $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ (ομοίως ορίζεται και η $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Αφού οι f, g, F, G είναι συνεχείς και δεν μηδενίζονται πουθενά, οι u, v είναι γνησίως αύξουσες και επί του $\mathbb{R}$, και είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Πράγματι:

• Εστω $t_1 < t_2$. Τότε, $\int_{-\infty}^{t_1} F < \int_{-\infty}^{t_2} F$, άρα

$$h(u(t_1)) = \int_{-\infty}^{u(t_1)} f < \int_{-\infty}^{u(t_2)} f = h(u(t_2)).$$

Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, αυτό αποδεικνύει οτι η u είναι γνησίως αύξουσα.

• Η u είναι επί του $\mathbb{R}$: Εστω $y \in \mathbb{R}$. Ζητάμε $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u(t) = y$.

Θεωρούμε το $\int_{-\infty}^{y} f$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ακριβώς όπως και στην απόδειξη της ύπαρξης της u, συμπεραίνουμε οτι υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\int_{-\infty}^{y} f = \int_{-\infty}^{t} F = \int_{-\infty}^{u(t)} f.$$

Επεται οτι $u(t) = y$.

• Η u είναι συνεχώς παραγωγίσιμη: Αφού οι f, F είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οι H, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, και

$$H'(t_0) = F(t_0) \quad , \quad h'(t_0) = f(t_0).$$

Είναι $H(t) = h(u(t))$, άρα $u(t) = h^{-1}(H(t))$. Δηλαδή, $u = h^{-1} \circ H$.

Αρα, η u είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, ως σύνθεση τέτοιων συναρτήσεων (η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε x του πεδίου ορισμού της, διότι η h είναι παραγωγίσιμη και $h'(x) \neq 0$ γιά κάθε x).

Παραγωγίζοντας την $H(t) = h(u(t))$ παίρνουμε $H'(t) = h'(u(t))u'(t)$, δηλαδή $F(t) = f(u(t))u'(t)$. Επειδή είναι $f(y) \neq 0$ γιά κάθε $y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$u'(t) = \frac{F(t)}{f(u(t))}.$$

Συνεπώς, η u' είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και γιά την v.

Σημειώνουμε και πάλι οτι, γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$u'(t)f(u(t)) = F(t) \quad , \quad v'(t)g(v(t)) = G(t). \tag{4}$$

Τώρα, η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από την

$$T(x, y) = (u(x), v(y))$$

είναι ένα προς ένα και επί του $\mathbb{R}^2$ (αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός οτι οι u, v είναι ένα προς ένα και επί του $\mathbb{R}$).

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών $(x,y) = \Theta(X,Y)$ με $\Theta = R^t T R$, όπου R είναι η στροφή

$$R = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^2$. Αρα,

$$\Theta(X,Y) = \begin{pmatrix} cu(cX - sY) + sv(sX + cY) \\ -su(cX - sY) + cv(sX + cY) \end{pmatrix}$$

Η Θ είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Επίσης είναι ένα προς ένα και επί, πάλι ως σύνθεση τέτοιων συναρτήσεων. Η Ιακωβιανή της ορίζουσας $J\Theta$ σε ένα σημείο (X,Y) είναι ίση με

$$J\Theta(X,Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix}$$

που μετά από πράξεις γίνεται

$$J\Theta(X,Y) = u'(cX - sY)v'(sX + cY).$$

Τώρα, θέλουμε μιά άνω εκτίμηση γιά το ολοκλήρωμα (πεπερασμένο εξ υποθέσεως)

$$I := \left(\int \left(\int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx \right)^r dy \right)^{1/r}.$$

Χρησιμοποιώντας τον δυϊσμό $(L^r, L^{r'})$, βλέπουμε οτι υπάρχει μιά θετική συνάρτηση $h \in L^{r'}$ τέτοια ώστε $\|h\|_{r'} = 1$ και

$$I = \int \int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) h(y) dx dy.$$

[Αυτό γιά τον εξής λόγο: Αν θέσουμε

$$H(y) := \int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx,$$

έχουμε $H > 0$ και $H \in L^r$ διότι $\|H\|_r = I < +\infty$. Δεν έχουμε παρά να πάρουμε $h := H^{r-1}/\|H\|_r^{r-1}$.]

Με την αλλαγή μεταβλητών $(x,y) = \Theta(X,Y)$ βλέπουμε οτι το I είναι ίσο προς:

$$I = \int \int f^{1/p}(u(cX - sY)) g^{1/q}(v(sX + cY)) h(-su(cX - sY) + cv(sX + cY))$$

$$u'(cX - sY)v'(sX + cY) dX dY,$$

διότι $cx - sy = u(cX - sY)$ και $sx + cy = v(sX + cY)$.

Γιά να μικρύνουμε τους τύπους, γράφουμε:

$$U := u(cX - sY) \quad , \quad U' := u'(cX - sY)$$

$$V := v(sX + cY) \quad , \quad V' := v'(sX + cY).$$

Από τις (4) παίρνουμε:

$$I = \int\int f^{1/p}(u(cX - sY))g^{1/q}(v(sX + cY))h(-sU + cV)U'V'dXdY$$

$$= \int \left(\int F^{1/p}(cX - sY)G^{1/q}(sX + cY)h(-sU + cV)(U')^{1/p'}(V')^{1/q'}dY \right) dX.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder γιά το ολοκλήρωμα ως προς Y, με παραμέτρους r και r', παίρνουμε:

$$(*) \qquad I \leq \int \left(\int F^{r/p}(cX - sY)G^{r/q}(sX + cY)dY \right)^{1/r}$$

$$\left(\int h^{r'}(-sU + cV)(U')^{r'/p'}(V')^{r'/q'}dY \right)^{1/r'} dX.$$

Εστω

$$K(X) := \int h^{r'}(-sU + cV)(U')^{r'/p'}(V')^{r'/q'}dY.$$

Τότε,

$$K(X) = \int h^{r'}(\alpha(X,Y))(u'(cX - sY))^{s^2}(v'(sX + cY))^{c^2}dY,$$

όπου $\alpha(X,Y) := -su(cX - sY) + cv(sX + cY)$ (θυμηθείτε οτι $c = \sqrt{r'/q'}$, $s = \sqrt{r'/p'}$). Εχουμε

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Y} = s^2u'(cX - sY) + c^2v'(sX + cY).$$

Επίσης, $c^2 + s^2 = 1$, οπότε η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου δίνει:

$$(U')^{s^2}(V')^{c^2} \leq s^2U' + c^2V'.$$

Επειδή για σταθερό X έχουμε $\alpha(X,Y) \to \pm\infty$ καθώς $Y \to \pm\infty$ αντίστοιχα, έπεται οτι

$$K(X) \leq \int h^{r'}(\alpha(X,Y))\frac{\partial \alpha}{\partial Y}(X,Y)dY = \int h^{r'} = 1.$$

Αυτό αποδεικνύει οτι

$$I \leq \int \left(\int F^{r/p}(cX - sY)G^{r/q}(sX + cY)dY \right)^{1/r} dX,$$

κάτι που τελειώνει την απόδειξη του Λήμματος 1. □

Θεώρημα 3. *Εστω $p, q, r > 0$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, και είτε $p, q, r > 1$ ή $p, q, r < 1$. Εστω $c = \sqrt{r'/q'}$, $s = \sqrt{r'/p'}$, και f, g δύο μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$. Τότε,*

(5)
$$\left(\int \left(\int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx \right)^r dy \right)^{1/r} = K(p,q,r) \left(\int f \right)^{1/p} \left(\int g \right)^{1/q}$$

αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \geq 0$, $\lambda > 0$, και $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε σχεδόν γιά κάθε x

(6)
$$f(x) = a \exp(-\lambda p (x - y_0)^2) \quad , \quad g(x) = b \exp(-\lambda q (x - z_0)^2).$$

Απόδειξη: (α) Είναι εύκολο να αποδείξουμε οτι οι

$$f(x) = a \exp(-\lambda p (x - y_0)^2) \ , \ g(x) = b \exp(-\lambda q (x - z_0)^2)$$

όπου $a, b \geq 0$, $\lambda > 0$, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την (5).

(β) Δείχνουμε τώρα οτι μόνο οι συναρτήσεις του (α) ικανοποιούν την (5). Υποθέτουμε οτι $p, q, r > 1$ (η απόδειξη είναι παρόμοια όταν $0 < p, q, r < 1$).

1. Υποθέτουμε οτι οι f, g είναι θετικές, συνεχείς και ικανοποιούν την (5) (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε επίσης οτι $\int f = \int g = 1$). Θέτοντας

$$F(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-px^2) \quad , \quad G(x) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} \exp(-qx^2)$$

και θεωρώντας ως f, g τις παραπάνω, παίρνουμε ισότητα στην ανισοτική σχέση (3) του Λήμματος 1. (Διότι, το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$K(p,q,r) \left(\int f \right)^{1/p} \left(\int g \right)^{1/q} = K(p,q,r)$$

αφού οι f, g ικανοποιούν την (5), και το δεξί μέλος είναι ίσο με $K(p,q,r)$ όπως είδαμε στην σελίδα 11).

Δηλαδή έχουμε την ισότητα:

$$\begin{aligned} I &:= \left(\int \left(\int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx \right)^r dy \right)^{1/r} \\ &= \int \left(\int F^{r/p}(cX - sY) G^{r/q}(sX + cY) dY \right)^{1/r} dX. \end{aligned}$$

Το I είναι πεπερασμένο λόγω της (5).

Ακολουθούμε την απόδειξη του Λήμματος 1 βήμα προς βήμα. Παντού στην απόδειξη αυτή έχουμε ισότητα, διότι: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder, πήραμε (βλέπε (*))

$$I \leq \int \left(\int F^{r/p}(cX - sY) G^{r/q}(sX + cY) dY \right)^{1/r} (K(X))^{1/r'} dX,$$

και δείξαμε οτι $K(X) \leq 1$ γιά κάθε $X \in \mathbb{R}$. Ζητάμε $K(X) = 1$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, και επειδή οι $K(X), 1$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, θα είναι $K(X) = 1$ γιά κάθε $X \in \mathbb{R}$.

Εχουμε

$$I \leq \int \left(\int F^{r/p}(cX_sY)G^{r/q}(sX+cY)dY \right)^{1/r} K^{1/r'}(X)dX$$

$$\leq \int \left(\int F^{r/p}(cX_sY)G^{r/q}(sX+cY)dY \right)^{1/r} dX = I.$$

Αρα, $K(X) = 1$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, αφού $\int F^{r/p}G^{r/q}dY > 0$.
Ετσι, έχουμε ισότητα και στην ανισότητα του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου:

$$(U')^{s^2}(V')^{c^2} = s^2U' + c^2V',$$

όπου $U' := u'(cX - sY)$, $V' := v'(sX + cY)$. Υποχρεωτικά, πρέπει να είναι

$$u'(cX - sY) = v'(sX + cY)$$

γιά κάθε $X, Y \in \mathbb{R}$.

Ισχυρισμός: *Υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιος ώστε*

$$u'(cX - sY) = v'(sX + cY) = \mu$$

γιά κάθε $X, Y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Εστω $\xi \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε όλα τα $X, Y \in \mathbb{R}$ γιά τα οποία $sX + cY = \xi$, δηλαδή $Y = \frac{1}{c}\xi - \frac{s}{c}X, X \in \mathbb{R}$.

Τότε, $cX - sY = \frac{1}{c}X - \frac{s}{c}\xi$, άρα

$$u'(\frac{1}{c}X - \frac{s}{c}\xi) = v'(sX + cY) = v'(\xi),$$

και αφού το $\frac{1}{c}X - \frac{s}{c}\xi$ διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$ καθώς το X διατρέχει το $\mathbb{R}$, καταλήγουμε στην $u' = \mu = v'(\xi)$. Ομοίως, $v' = \mu = u'(\xi)$. Τέλος, $\mu > 0$ αφού οι u, v είναι γνησίως αύξουσες. □

Επεται οτι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u(t) = \mu(t - x_0)$, και η (4) μας δίνει

$$\mu f(\mu(t - x_0)) = F(t) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-pt^2),$$

δηλαδή

$$f(\mu t) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\frac{1}{\mu}\exp(-p(t + x_0)^2).$$

Ισοδύναμα,

$$f(t) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{1}{\mu^2}p(t + \mu x_0)^2),$$

δηλαδή η f είναι συνάρτηση της μορφής (6). $\square$

Γιά γενικές f, g χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 2. *Εστω $m \geq n$ φυσικοί, και $\alpha_i > 0, u_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε γιά όλες τις μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i, i = 1, \ldots, m$ στο $\mathbb{R}$ να έχουμε:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle) dx \leq M \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i \right)^{\alpha_i}, \tag{7}$$

και υποθέτουμε οτι ο M είναι η μικρότερη δυνατή σταθερά γιά την οποία αυτό είναι αληθινό.

Ας ονομάσουμε maximizer μιά m-άδα $(f_1, \ldots, f_m)$ μη μηδενικών συναρτήσεων γιά τις οποίες η ανισότητα (7) γίνεται ισότητα.

Αν $(f_1, \ldots, f_m)$ και $(g_1, \ldots, g_m)$ είναι maximizers, τότε είναι και η $(f_1 * g_1, \ldots, f_m * g_m)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε οτι $(f_1, \ldots, f_m)$ και $(g_1, \ldots, g_m)$ είναι maximizers και οτι

$$\int f_i = \int g_i = 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ορίζουμε δύο συναρτήσεις F, G στον $\mathbb{R}^n$ μέσω των:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle) \quad , \quad G(x) = \prod_{i=1}^{m} g_i^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle).$$

Είναι $\int F = \int G = M$, αφού $(f_1, \ldots, f_m)$, $(g_1, \ldots, g_m)$ είναι maximizers, και $\int F \int G = \int F * G$ από το θεώρημα του Fubini. Αρα,

$$\begin{aligned} M^2 = \int F \int G = \int F * G &= \int \int F(x-y) G(y) dy dx \\ &= \int \int \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}(\langle x - y, u_i \rangle) \prod_{i=1}^{m} g_i^{\alpha_i}(\langle y, u_i \rangle) dy dx \\ &= \int \left(\int \prod_{i=1}^{m} [f_i(\langle x, u_i \rangle - \langle y, u_i \rangle) g_i(\langle y, u_i \rangle)]^{\alpha_i} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Τώρα, θέτουμε $K_i(t) := f_i(\langle x, u_i \rangle - t) g_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Οι K_i είναι μη αρνητικές και ολοκληρώσιμες, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την (7). Εχουμε:

$$M^2 = \int \left(\int \prod_{i=1}^{m} K_i^{\alpha_i}(\langle y, u_i \rangle) dy \right) dx \leq \int [M \prod_{i=1}^{m} (\int K_i)^{\alpha_i}] dx$$

$$= M \int \prod_{i=1}^{m} \left(\int f_i(\langle x, u_i \rangle - t) g_i(t) dt \right)^{\alpha_i} dx = M \int \prod_{i=1}^{m} (f_i * g_i)^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle) dx.$$

Αρα,

$$M \leq \int \prod_{i=1}^{m} (f_i * g_i)^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle) dx.$$

Λόγω της (7) ισχύει και η

$$\int \prod_{i=1}^{m} (f_i * g_i)^{\alpha_i}(\langle x, u_i \rangle) dx \leq M \prod_{i=1}^{m} \left(\int f_i * g_i \right)^{\alpha_i}.$$

Αλλά

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\int f_i * g_i \right)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} \left(\int f_i \int g_i \right)^{\alpha_i} = 1.$$

Επομένως, ισχύει ισότητα και έτσι η $(f_1 * g_1, \ldots, f_m * g_m)$ είναι maximizer. □

Τώρα, τελειώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3:

2. Εστω f, g μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, που ικανοποιούν την ισότητα (5). Θα δείξουμε οτι είναι της μορφής (6). Τροποποιούμε το πρώτο μέλος της (5), ώστε να το φέρουμε σε ανάλογη μορφή με το πρώτο μέλος της (7):
Στή σχέση (5) ονομάζουμε

$$\phi(y) := \int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx.$$

Είναι $\phi \in L^r$ (λόγω της (5), όπου το δεξί μέλος είναι πεπερασμένο), $\phi \geq 0$ και $I = \|\phi\|_r$.

Επειδή $L^r \simeq (L^{r'})^*$, υπάρχει $h \in L^{r'}$ με $\|h\|_{r'} = 1$, $h \geq 0$ (εκ κατασκευής), τέτοια ώστε

$$I = \|\phi\|_r = \left| \int \phi(y) h(y) dy \right| = \int \int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) h(y) dx dy.$$

Είναι $\|h\|_{r'} = 1$, δηλαδή $\int h^{r'} = 1$. Θέτουμε $H := h^{r'}$, οπότε $h = H^{1/r'}$ και $\int H = 1$.
Αρα,

$$\begin{aligned} I &= \int \int f^{1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) H^{1/r'}(y) dx dy \\ &= K(p, q, r) \left(\int f \right)^{1/p} \left(\int g \right)^{1/q} \left(\int H \right)^{1/r'}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι η τελευταία ισότητα είναι ακριβώς η (7) σαν ισότητα, γιά

$$n = 2, m = 3, M = K(p, q, r),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{p}, \alpha_2 = \frac{1}{q}, \alpha_3 = \frac{1}{r'},$$

$$f_1 = f, f_2 = g, f_3 = H,$$

$$x = (x, y), u_1 = (c, -s), u_2 = (s, c), u_3 = (0, 1).$$

Τώρα, οι $\Gamma_p(x) = \exp(-px^2)$, $\Gamma_q(x) = \exp(-qx^2)$ ικανοποιούν την (5) (από το ευθύ του Θεωρήματος 3), οπότε, εντελώς ανάλογα όπως προηγουμένως, προκύπτει οτι υπάρχει συνάρτηση Δ μη αρνητική στον $L^{r'}$, με $\int \Delta = 1$, ώστε οι $\Gamma_p, \Gamma_q, \Delta$ να ικανοποιούν την (7) σαν ισότητα (γιά $n = 2, m = 3$ κλπ, όπως πριν). Δηλαδή, οι f, g, H και οι $\Gamma_p, \Gamma_q, \Delta$ ικανοποιούν την (7) σαν ισότητα, άρα –από το Λήμμα 2– και οι $f * \Gamma_p, g * \Gamma_q, H * \Delta$:

$$\begin{aligned}
&\int\int (f * \Gamma_p)^{1/p}(cx - sy)(g * \Gamma_q)^{1/q}(sx + cy)(H * \Delta)^{1/r'}(y)dxdy \\
&= K(p, q, r)\left(\int f * \Gamma_p\right)^{1/p}\left(\int g * \Gamma_q\right)^{1/q}\left(\int H * \Delta\right)^{1/r'} \\
&= K(p, q, r)\left(\int f * \Gamma_p\right)^{1/p}\left(\int g * \Gamma_q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

αφού $\int H * \Delta = \int H \int \Delta = 1$. Τώρα, με εφαρμογή της ανισότητας Hölder έχουμε:

$$\begin{aligned}
&K(p, q, r)\left(\int f * \Gamma_p\right)^{1/p}\left(\int g * \Gamma_q\right)^{1/q} \\
&= \int\int (f * \Gamma_p)^{1/p}(cx - sy)(g * \Gamma_q)^{1/q}(sx + cy)(H * \Delta)^{1/r'}(y)dxdy \\
&\leq \left(\int\left(\int (f * \Gamma_p)^{1/p}(cx - sy)(g * \Gamma_q)^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r}\left(\int H * \Delta(y)dy\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int\left(\int (f * \Gamma_p)^{1/p}(cx - sy)(g * \Gamma_q)^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r} \\
&\leq K(p, q, r)\left(\int f * \Gamma_p\right)^{1/p}\left(\int g * \Gamma_q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\left(\int\left(\int (f * \Gamma_p)^{1/p}(cx - sy)(g * \Gamma_q)^{1/q}(sx + cy)dx\right)^r dy\right)^{1/r} \\
&= K(p, q, r)\left(\int f * \Gamma_p\right)^{1/p}\left(\int g * \Gamma_q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Ωστε, οι $f * \Gamma_p$, $g * \Gamma_q$ ικανοποιούν την ισότητα (5). Ομως αυτές είναι συνεχείς και θετικές, άρα από το 1ο επιχείρημα είναι της μορφής (6), δηλαδή

$$\begin{aligned}
f * \Gamma_p(x) &= \alpha\exp(-\lambda p(x - y_0)^2) \\
g * \Gamma_q(x) &= b\exp(-\lambda q(x - z_0)^2)
\end{aligned}$$

γιά κάποια $\alpha, b \geq 0$, $\lambda > 0$ και $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Τέλος, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Fourier και τις ιδιότητές του γιά να λύσουμε ως προς f, g.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier μιάς $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$: Ορίζουμε $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}^n)$ με

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: Γιά κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύουν:

(α) $(\hat{f^y})(\xi) = \exp(-2\pi i y \cdot \xi)\hat{f}(\xi)$.

(β) $(f \hat{*} g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(γ) Αν $f(x) = \exp(-\pi\alpha|x|^2)$ γιά κάποιο $\alpha > 0$, τότε $\hat{f}(\xi) = \alpha^{-\pi/2} \exp(-\pi|\xi|^2/\alpha)$.

(δ) $\hat{f} \in L^\infty$.

(ε) $|\hat{f}(x)| \to 0$ καθώς $|x| \to +\infty$.

(ζ) Αν $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ γιά κάθε ξ, τότε $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.

Εδώ, αν θέσουμε $h(x) = \exp(-\lambda p x^2) = \exp(-\pi \frac{\lambda p}{\pi} x^2)$ έχουμε

$$(f \hat{*} \Gamma_p)(\xi) = (\alpha \exp[-\lambda \hat{p}(\xi - y_0)^2]) = \alpha(\hat{h^{y_0}})(\xi)$$

$$= \alpha \exp(-2\pi i y_0 \cdot \xi)\hat{h}(\xi) = \alpha \exp(-2\pi i y_0 \cdot \xi)(\frac{\lambda p}{\pi})^{-1/2} \exp(-\pi^2 \xi^2/\lambda p).$$

Αφετέρου,

$$\hat{\Gamma_p}(\xi) = (\frac{p}{\pi})^{-1/2} \exp(-\pi^2 \xi^2/p).$$

Αρα,

$$f \hat{*} \Gamma_p(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\Gamma_p}(\xi) = \hat{f}(\xi)(\frac{p}{\pi})^{-1/2} \exp(-\pi^2\xi^2/p)$$

$$= \alpha\lambda^{-1/2}(\frac{p}{\pi})^{-1/2} \exp(-2\pi i y_0 \cdot \xi) \exp(-\pi^2\xi^2/\lambda p).$$

Δηλαδή,

$$\hat{f}(\xi) = \alpha\lambda^{-1/2} \exp(\frac{\lambda - 1}{\lambda p}\pi^2\xi^2 - 2\pi i y_0 \cdot \xi) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$|\hat{f}(\xi)| = \alpha\lambda^{-1/2} \exp(\frac{\lambda - 1}{\lambda p}\pi^2\xi^2) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(α) Αν $\lambda > 1$, τότε $|\hat{f}(\xi)| \to +\infty$ όταν $|\xi| \to +\infty$ (άτοπο, λόγω της ιδιότητας (δ)). Αν $\lambda = 1$, τότε $|\hat{f}(\xi)| = \alpha$ σταθερό (άτοπο, λόγω της ιδιότητας (ε)).

Αρα $0 < \lambda < 1$. Με χρήση των ιδιοτήτων (α), (γ) βρίσκουμε οτι η συνάρτηση

$$\frac{\alpha\sqrt{p}}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{\lambda}{1-\lambda}p(x-y_0)^2)$$

έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με $\hat{f}(\xi)$. Βάσει της ιδιότητας (ζ) συμπεραίνουμε οτι η f είναι της μορφής (6). Ομοίως και η g. □

Λήμμα 3. *Η νόρμα συνέλιξης στις n διαστάσεις είναι C^n, όπου C είναι η μονοδιάστατη νόρμα συνέλιξης.*

Ορισμός: *Η n-διάστατη νόρμα συνέλιξης C_n ορίζεται από την*

$$C_n := \sup\frac{||f*g||_r}{||f||_p||g||_q} \quad , \quad f\in L^p(\mathbb{R}^n), g\in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Αποδεικνύεται οτι:

$$(**)\qquad C_n = \sup\frac{||f*g*h||_\infty}{||f||_p||g||_q||h||_{r'}},$$

όπου το sup είναι πάνω από όλες τις $f\in L^p(\mathbb{R}^n), g\in L^q(\mathbb{R}^n), h\in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$, και $1\le p,q,r\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$.

Η (∗∗) φαίνεται από τις σχέσεις:

$$\sup_h\frac{||f*g*h||_\infty}{||f||_p||g||_q||h||_{r'}} \le \frac{||f*g||_r}{||f||_p||g||_q} = \sup_h\frac{\int\tilde{h}(f*g)dx}{||f||_p||g||_q||h||_{r'}}$$
$$\le \sup\frac{||f*g*h||_\infty}{||f||_p||g||_q||h||_{r'}},$$

με $\tilde{h}(x)=h(-x)$. Η πρώτη ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Hölder και η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι:

$$\int\tilde{h}(f*g)dx = f*g*h(0)\le ||f*g*h||_\infty.$$

Απόδειξη του Λήμματος 3: Θεωρούμε $f,g,h:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ θετικές συναρτήσεις με $f\in L^p(\mathbb{R}^{n+m})$, $g\in L^q(\mathbb{R}^{n+m})$, $h\in L^{r'}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Γράφουμε $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)$, όπου $x,y,z\in\mathbb{R}^{n+m}$, $x_1,y_1,z_1\in\mathbb{R}^n$, $x_2,y_2,z_2\in\mathbb{R}^m$, οπότε $x-y-z=(x_1-y_1-z_1,x_2-y_2-z_2)$.

Αν $t\in\mathbb{R}^m$, ορίζουμε $F_{x_1},G_{y_1},H_{z_1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ μέσω των

$$F_{x_1}(t):=f(x_1,t)\quad,\quad G_{y_1}(t):=g(y_1,t)\quad,\quad H_{z_1}(t):=h(z_1,t).$$

Τότε,

$$||G_{y_1}||_q = \left(\int|G_{y_1}(t)|^q dt\right)^{1/q} = \left(\int|g(y_1,t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Ομοίως,

$$\|H_{z_1}\|_{r'} = \left(\int |h(z_1,t)|^{r'} dt\right)^{1/r'} \quad , \quad \|F_{x_1-y_1-z_1}\|_p = \left(\int |f(x_1-y_1-z_1,t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Επομένως,

$$f*g*h(x) = \int\int f(x-y-z)g(y)h(z)dydz$$

$$= \int\int\int\int f(x_1-y_1-z_1, x_2-y_2-z_2)g(y_1,y_2)h(z_1,z_2)dy_1dy_2dz_1dz_2$$

(από θεώρημα Tonelli)

$$= \int\int \left(\int\int f(x_1-y_1-z_1, x_2-y_2-z_2)g(y_1,y_2)h(z_1,z_2)dy_2dz_2\right) dy_1dz_1$$

$$= \int\int \left(\int\int F_{x_1-y_1-z_1}(x_2-y_2-z_2)G_{y_1}(y_2)H_{z_1}(z_2)dy_2dz_2\right) dy_1dz_1$$

$$= \int\int F_{x_1-y_1-z_1} * G_{y_1} * H_{z_1}(x_2)dy_1dz_1$$

$$\leq \int\int \|F_{x_1-y_1-z_1} * G_{y_1} * H_{z_1}\|_\infty dy_1dz_1$$

$$\leq \int\int C_m\|F_{x_1-y_1-z_1}\|_p\|G_{y_1}\|_q\|H_{z_1}\|_{r'}dy_1dz_1$$

(λόγω της (**))

$$= C_m\int\int \left(\int |f(x_1-y_1-z_1,t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int |g(y_1,t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\int |h(z_1,t)|^{r'} dt\right)^{1/r'} dy_1dz_1.$$

Τώρα, αν $t \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $F, G, H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$F(w) := \left(\int |f(w,t)|^p dt\right)^{1/p}$$

$$G(w) := \left(\int |g(w,t)|^q dt\right)^{1/q}$$

$$H(w) := \left(\int |h(w,t)|^{r'} dt\right)^{1/r'}.$$

Είναι

$$\|F\|_p = \left(\int |F(w)|^p dw\right)^{1/p} = \left(\int\int |f(w,t)|^p dtdw\right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Ομοίως, $||G||_q = ||g||_q$ και $||H||_{r'} = ||h||_{r'}$, οπότε

$$f * g * h(x) \leq C_m \int \int F(x_1 - y_1 - z_1) G(y_1) H(z_1) dy_1 dz_1$$

$$= C_m F * G * H(x_1) \leq C_m ||F * G * H||_\infty$$

$$\leq C_n C_m ||F||_p ||G||_q ||H||_{r'} = C_n C_m ||f||_p ||g||_q ||h||_{r'}.$$

Επεται οτι

$$C_{n+m} \leq C_n C_m.$$

Γιά να δείξουμε οτι $C_{n+m} = C_n C_m$ αρκεί να βρούμε $F_k, G_k, H_k : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\frac{||F_k * G_k * H_k||_\infty}{||F_k||_p ||G||_q ||H_k||_{r'}} \to C_n C_m$$

καθώς $k \to \infty$. Λόγω της (**) υπάρχουν $f_k^1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g_k^1 \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h_k^1 \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ τέτοιες ώστε

$$\frac{||f_k^1 * g_k^1 * h_k^1||_\infty}{||f_k^1||_p ||g_k^1||_q ||h_k^1||_{r'}} \to C_n,$$

και αντίστοιχες $f_k^2, g_k^2, h_k^2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ γιά την C_m.

Θεωρούμε γινόμενα συναρτήσεων μιάς μεταβλητής:

$$f_k(x, y) = f_k^1(x) f_k^2(y)$$

$$g_k(x, y) = g_k^1(x) g_k^2(y)$$

$$h_k(x, y) = h_k^1(x) h_k^2(y)$$

από τον $\mathbb{R}^{n+m}$ στο $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι

$$\frac{||f_k * g_k * h_k||_\infty}{||f_k||_p ||g_k||_q ||h_k||_{r'}} = \frac{||f_k^1 * g_k^1 * h_k^1||_\infty}{||f_k^1||_p ||g_k||_q ||h_k||_{r'}} \cdot \frac{||f_k^2 * g_k^2 * h_k^2||_\infty}{||f_k^2||_p ||g_k^2||_q ||h_k^2||_{r'}} \to C_n C_m.$$

Πράγματι:

$$||f_k||_p^p = \int \int |f_k(x, y)|^p dx dy = \int \int |f_k^1(x)|^p |f_k^2(y)|^p dx dy$$

$$= \int |f_k^1(x)|^p dx \int |f_k^2(y)|^p dy = ||f_k^1||_p^p ||f_k^2||_p^p.$$

Ομοίως,

$$||g_k||_q = ||g_k^1||_q ||g_k^2||_q \quad , \quad ||h_k||_{r'} = ||h_k^1||_{r'} ||h_k^2||_{r'},$$

και

$$||f_k * g_k * h_k||_\infty = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} |f_k * g_k * h_k(x, y)|$$

$$= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} \left| \int \int \int \int f_k(x - x_1 - x_2, y - y_1 - y_2) g_k(x_2, y_2) h_k(x_1, y_1) dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 \right|$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} \left| \int\int\int\int f_k^1(x-x_1-x_2) f_k^2(y-y_1-y_2) g_k^1(x_2) g_k^2(y_2) h_k^1(x_1) h_k^2(y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right|$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} | \left(\int\int f_k^1(x-x_1-x_2) g_k^1(x_2) h_k^1(x_1) dx_1 dx_2 \right)$$

$$\left(\int\int f_k^2(y-y_1-y_2) g_k^2(y_2) h_k^2(y_1) dy_1 dy_2 \right) |$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} |f_k^1 * g_k^1 * h_k^1(x) f_k^2 * g_k^2 * h_k^2(y)|$$

$$= ||f_k^1 * g_k^1 * h_k^1||_\infty ||f_k^2 * g_k^2 * h_k^2||_\infty.$$

Συνεπώς,

$$\frac{||f_k * g_k * h_k||_\infty}{||f_k||_p ||g_k||_q ||h_k||_{r'}} \to C_n C_m.$$

Αρα, $C_{n+m} = C_n C_m$ γιά κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Επεται οτι $C_n = C_1^n = C^n$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ (απλή επαγωγή). $\square$

II. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΥΠΟΥ BRASCAMP-LIEB ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια κανονική δομή του και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Εστω $m \geq n$ δύο φυσικοί αριθμοί και $c_1, \dots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^m c_i = n$. Εστω $v_1, \dots, v_m$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τους ακόλουθους πέντε αριθμούς:*

$$E := \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} : h \geq 0,\ h(\sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i) \geq \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i) \forall (\theta_i)_{i\leq m} \in \mathbb{R}^m \right\},$$

όπου το inf είναι πάνω από όλες τις επιλογές θετικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_1, \dots, f_m$ στο $\mathbb{R}$,

$$E_g := \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} : f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2), \lambda_i > 0 \right\},$$

$$F := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\langle x, v_i\rangle)dx : \int_{\mathbb{R}} f_i = 1 \right\},$$

$$F_g := \sup \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\langle x, v_i\rangle)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} : f_i(t) = \exp(-\lambda_i t^2), \lambda_i > 0 \right\},$$

$$D := \inf \left\{ \frac{\det(\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i v_i \otimes v_i)}{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}} : \lambda_i > 0 \right\}.$$

Τότε,

$$E = E_g = \sqrt{D}, \tag{1}$$

$$F = F_g = \frac{1}{\sqrt{D}}. \tag{2}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια των τριών επόμενων προτάσεων.

Πρόταση 1. *Με τους συμβολισμούς του θεωρήματος έχουμε:*

$$F_g = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Απόδειξη: Εστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$. Τότε,

$$\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda_i t^2)dt \right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m (\frac{\pi}{\lambda_i})^{c_i/2} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i}}}.$$

Αφ' ετέρου,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} [\exp(-\lambda_i \langle x, v_i\rangle^2)]^{c_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp[\sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i c_i \langle x, v_i\rangle^2)] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle \sqrt{\lambda_i c_i} v_i, x\rangle^2) dx.$$

Θα δείξουμε οτι το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\pi^{n/2} / \sqrt{\det(\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i v_i \otimes v_i)},$$

και η απόδειξη της Πρότασης 1 θα έχει τελειώσει. Δηλαδή, μετά από την αντικατάσταση $u_i := \sqrt{c_i \lambda_i} v_i, i = 1, \ldots, m$, θα δείξουμε οτι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^2) dx = \pi^{n/2} / \sqrt{\det(\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i)}.$$

Ο $\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i$ είναι συμμετρικός πίνακας και το στοιχείο της k-γραμμής και l-στήλης είναι το $u_1^k u_1^l + \ldots + u_m^k u_m^l$, όπου $u_i = (u_i^1, \ldots, u_i^n)$. Θεωρούμε τον πίνακα $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ που έχει τα u_i σαν γραμμές, και παρατηρούμε οτι

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i = T^* T.$$

Ο πίνακας T^*T είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος, αφού

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Οπότε,

$$\det\left(\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i\right) = \det(T^*T) \geq 0.$$

1η περίπτωση: Εστω οτι $\det(\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i) = 0$, δηλαδή ο T^*T δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε, υπάρχει $x_0 \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $T^*Tx_0 = 0$. Αυτό σημαίνει οτι $Tx_0 = 0$, δηλαδή $\langle u_i, x_0\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Αρα, σ' αυτήν την περίπτωση όλα τα u_i ανήκουν στο υπερεπίπεδο $x_0^{\perp}$ του $\mathbb{R}^n$.

Τώρα θεωρούμε οποιαδήποτε στροφή $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $R(x_0) = e_n$. Είναι

$$0 = \langle u_i, x_0\rangle = \langle Ru_i, Rx_0\rangle = \langle Ru_i, e_n\rangle,$$

δηλαδή $Ru_i \in e_n^{\perp}$, $i = 1, \ldots, m$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε $Ru_i = ((Ru_i)', 0)$, όπου συμβολίζουμε $x = (x', x_n)$ με $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Ετσι, θέτοντας $y := Rx$ έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^2)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle Ru_i, Rx\rangle^2)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle Ru_i, y\rangle^2)dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \exp[-\sum_{i=1}^{m} (\langle 0, y_n\rangle + \langle (Ru_i)', y'\rangle)^2]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle (Ru_i)', y'\rangle^2)dy' \int_{\mathbb{R}} dy_n = +\infty.$$

Αρα και τα δύο μέλη της αποδεικτέας είναι ίσα με $+\infty$.

2η περίπτωση: Εστω $\det(\sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i) > 0$, δηλαδή ο $T^*T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα προς ένα. Θεωρούμε την 'τετραγωνική ρίζα' B του T^*T, δηλαδή τον συμμετρικό, θετικά ορισμένο $n \times n$ πίνακα B για τον οποίο $B^*B = B^2 = T^*T$. Είναι $\det T^*T = (\det B)^2$, και $\det B > 0$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y := Bx$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^2 = ||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$$

$$= \langle B^*Bx, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = ||Bx||^2 = ||y||^2.$$

Αρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^2)dx = \frac{1}{\det B} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-||y||^2)dy = \pi^{n/2}/\sqrt{\det T^*T}. \quad \square$$

Πρόταση 2. *Με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος έχουμε:*

$$E_g \geq E \geq D \cdot F \geq D \cdot F_g.$$

Απόδειξη: (α) $E_g \geq E$: Παρατηρούμε οτι, αν θέσουμε

$$h(x) := \sup\{\prod_{i=1}^{m} f_i^{c_i}(\theta_i) : x = \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i v_i, (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m\},$$

τότε κάθε στοιχείο του συνόλου που δίνει το E_g, είναι στοιχείο και του συνόλου που δίνει το E.

(β) $D \cdot F \geq D \cdot F_g$: Επειδή $D \geq 0$ (διότι, όπως είδαμε, ο πίνακας $\sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i v_i \otimes v_i$ είναι θετικά ημιορισμένος), αρκεί να είναι $F \geq F_g$. Αυτό είναι προφανές.

(γ) Τέλος, δείχνουμε οτι $E \geq D \cdot F$ και αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση $D > 0$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ θετικές, συνεχείς, ολοκληρώσιμες.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $T_1, \ldots, T_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ από τις εξισώσεις

$$\frac{\int_{-\infty}^{T_i(t)} f_i}{\int f_i} = \frac{\int_{-\infty}^{t} g_i}{\int g_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

(ακριβώς όπως στο Κεφάλαιο 1, αφού $\int f_i/(\int f_i) = \int g_i/(\int g_i)$).

Οι $T_i, i = 1, \ldots, m$ είναι ένα προς ένα και επί, γνησίως αύξουσες και συνεχώς διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας την (3) ως προς t έχουμε:

$$T_i'(t) f_i(T_i(t)) = \frac{\int f_i}{\int g_i} g_i(t). \tag{4}$$

Θεωρούμε τώρα την $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$\Theta(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i(\langle y, v_i \rangle) v_i = (\Theta_1(y), \ldots, \Theta_n(y)). \tag{5}$$

Τότε,

$$\Theta_k(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i(\langle y, v_i \rangle) v_i^k \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

και

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial y_\nu}(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i'(\langle y, v_i \rangle) v_i^k \frac{\partial}{\partial y_\nu}(\langle y, v_i \rangle)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i T_i'(\langle y, v_i \rangle) v_i^k v_i^\nu \quad , \quad k, \nu = 1, \ldots, n,$$

και

$$D\Theta(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i'(\langle y, v_i \rangle) v_i \otimes v_i.$$

Επειδή $D > 0, \det(\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i v_i \otimes v_i$ για κάθε $\lambda_i > 0$, θα είναι

$$\det\left(\sum_{i=1}^{m} c_i T_i'(\langle y, v_i \rangle) v_i \otimes v_i\right) = \det(D\Theta(y)) > 0.$$

(Είναι $T_i'(t) > 0$, όπως φαίνεται από την (4)).

Αρα, ο $D\Theta(y)$ είναι συμμετρικός πίνακας, θετικά ορισμένος. Δηλαδή, $\langle D\Theta(y)h, h \rangle > 0$ αν $h \neq 0$.

Ισχυρισμός: *Η Θ είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε οτι δεν είναι, τότε υπάρχουν $y_1 \neq y_2$ στον $\mathbb{R}^n$ με $\Theta(y_1) = \Theta(y_2)$. Εστω $h \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε συνάρτηση $K_h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$K_h(\lambda) := \langle \Theta(\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, h \rangle.$$

Είναι $K_h(0) = K_h(1)$ και η K_h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Από Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $K_h'(\xi) = 0$. Αλλά

$$K_h(\lambda) = \Theta_1(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)h_1 + \ldots + \Theta_n(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)h_n$$

όπου $\Theta(y) = (\Theta_1(y), \ldots, \Theta_n(y))$ και $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Οπότε,

$$K_h'(\lambda) = \nabla\Theta_1(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)(y_1 - y_2)h_1 + \ldots + \nabla\Theta_n(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)(y_1 - y_2)h_n,$$

δηλαδή

$$K_h'(\lambda) = \langle D\Theta(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)(y_1 - y_2), h\rangle.$$

Αν θέσουμε $h := y_1 - y_2 \neq 0$, τότε για κάθε $\lambda \in [0,1]$ παίρνουμε

$$K_{y_1-y_2}'(\lambda) = \langle D\Theta(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)(y_1 - y_2), y_1 - y_2\rangle > 0,$$

που αντιφάσκει με το γεγονός οτι $K_h'(\xi) = 0$. Χρησιμοποιούμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής $x = \Theta(y)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx &\geq \int_{\Theta(\mathbb{R}^n)} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\Theta(y)=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)d\Theta(y) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(T_i(\langle y, v_i\rangle)) \cdot \det\left(\sum_{i=1}^m c_i T_i'(\langle y, v_i\rangle) v_i \otimes v_i\right) dy \\
&\geq D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m \{f_i(T_i(\langle y, v_i\rangle))T_i'(\langle y, v_i\rangle)\}^{c_i} dy \\
&= D \prod_{i=1}^m \left(\frac{\int f_i}{\int g_i}\right)^{c_i} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m g_i^{c_i}(\langle y, v_i\rangle)dy.
\end{aligned}$$

Η τρίτη ανισότητα ισχύει, διότι θέτοντας

$$\theta_i = T_i(\langle y, v_i\rangle) \;,\; i = 1, \ldots, m,$$

το $\Theta(y)$ γίνεται ίσο με $\sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i$ (βλέπε (5)). Η τέταρτη ανισότητα ισχύει εξαιτίας του ορισμού του D. Αρα:

$$(*) \qquad \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \geq D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m G_i^{c_i}(\langle y, v_i\rangle)dy$$

για $f_1, \ldots, f_m, G_1, \ldots, G_m$ θετικές, ολοκληρώσιμες, συνεχείς με $\int G_i = 1$. Θα δείξουμε την $(*)$ για θετικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

(α) Εστω λοιπόν $f_1, \ldots, f_m, G_1, \ldots, G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θετικές, ολοκληρώσιμες, με $\int G_i = 1$. Υπάρχουν απλές συναρτήσεις

$$0 \leq f_{i,1} \leq \ldots \leq f_{i,k} \leq \ldots \leq f_i$$

$$0 \leq G_{i,1} \leq \ldots \leq G_{i,k} \leq \ldots \leq G_i$$

όπου $i = 1, \ldots, m$, $k \in \mathbb{N}$, με $f_{i,k} \to f_i$ και $G_{i,k} \to G_i$ σχεδόν παντού, καθώς $k \to \infty$, και όλες οι $f_{i,k}, G_{i,k}$ έχουν τη μορφή

$$\sum_{\nu=1}^{M} c_\nu \chi_{E_\nu} \quad , \quad c_\nu \neq c_j \ , \ \nu \neq j,$$

όπου τα E_ν, $\nu = 1, \ldots, M$ είναι συμπαγή.

Υποθέτουμε οτι η $(*)$ ισχύει για απλές, μη-αρνητικές συναρτήσεις της παραπάνω μορφής. Εχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} &\geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_{i,k}^{c_i}(\theta_i)}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^m (\int f_{i,k})^{c_i}}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \cdot \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_{i,k}^{c_i}(\theta_i)}{\prod_{i=1}^m (\int f_{i,k})^{c_i}} \\
&\geq \frac{\prod_{i=1}^m (\int f_{i,k})^{c_i}}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \cdot D \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{i=1}^m G_{i,k}^{c_i}(\langle y, v_i\rangle) dy}{\prod_{i=1}^m (\int G_{i,k})^{c_i}} dy.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια (όταν $k \to \infty$) έχουμε την $(*)$ για τις $f_i, G_i, i = 1, \ldots, k$.

(β) Εστω τώρα $f_1, \ldots, f_m, G_1, \ldots, G_m$ απλές, μη-αρνητικές, με τα σύνολα E_ν συμπαγή, και $\int G_i = 1$. Υπάρχουν

$$f_{i,1} \geq \ldots \geq f_{i,k} \geq \ldots \geq f_i \geq 0$$

$$G_{i,1} \geq \ldots \geq G_{i,k} \geq \ldots \geq G_i \geq 0$$

όπου $i = 1, \ldots, m$, $k \in \mathbb{N}$, συνεχείς, που μηδενίζονται στο άπειρο, και

$$f_{i,k} \to f_i \quad , \quad G_{i,k} \to G_i$$

σχεδόν παντού καθώς $k \to \infty$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις $f_{i,1}, G_{i,1} \in L^1(\mathbb{R})$, οπότε το sup της $f_{i,k}$ ($G_{i,k}$ αντίστοιχα) σε όλο το $\mathbb{R}$ θα ισούται με το max της $f_{i,k}$ ($G_{i,k}$ αντίστοιχα). Είναι:

$$F_k(\theta) := \prod_{i=1}^m f_{i,k}^{c_i}(\theta_i) \to \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i) =: F(\theta) \quad , \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

όπου F_k είναι συνεχής, F απλή. Θα δείξουμε οτι

$$\sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} F_k(\theta) = F_k(\theta_{x,k}) \to \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} F(\theta).$$

Υποθέτουμε οτι τείνει σε αριθμό

$$A > \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} F(\theta)$$

όταν $k \to \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι τα $\theta_{x,k}$ βρίσκονται μέσα σ'ενα συμπαγές σύνολο ανεξάρτητο από τα x, k. Αρα υπάρχει υπακολουθία, την οποία συμβολίζουμε πάλι με $\theta_{x,k}$, ώστε $\theta_{x,k} \to \theta_x$ (όπου θ_x σημείο του ίδιου συνόλου).

Για $m \geq k$ έχουμε

$$F_k(\theta_{x,m}) \geq F_m(\theta_{x,m}) \to A,$$

και

$$F_k(\theta_{x,m}) \to F_k(\theta_x)$$

όταν $m \to \infty$. Οπότε, $F_k(\theta_x) \geq A$, άρα και $F(\theta_x) \geq A$ (αφού $F(\theta_x) = \lim_k F_k(\theta_x)$). Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την $A > \sup\{F(\theta) : x = \sum c_i\theta_i v_i\}$, δίνει άτοπο.

Υποθέτοντας τώρα οτι ισχύει η $(*)$ γιά τις $f_{i,k}, G_{i,k}$ και παίρνοντας όρια (όταν $k \to \infty$) έχουμε την $(*)$ για τις f_i, G_i.

Τέλος θεωρούμε $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h \geq 0$, τέτοια ώστε $h(\sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i) \geq \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)$, για κάθε $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$. Εστω $x \in \mathbb{R}^n$, δοθέν. Αν $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i$, τότε $h(x) \geq \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)$, άρα

$$h(x) \geq \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i).$$

Αρα,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx}{\prod_{i=1}^m (\int f_i)^{c_i}} \geq D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m G_i^{c_i}(\langle y, v_i \rangle)dy. \quad \square$$

Πρόταση 3. *Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε*

$$E_g F_g = 1.$$

Αν ο ένας αριθμός είναι 0, τότε ο άλλος είναι ∞.

Απόδειξη: Για το E_g γράφουμε

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i, (\theta_i)_{i\leq m} \in \mathbb{R}^m \} \cup \{ x : \forall (\theta_i)_{i\leq m} \in \mathbb{R}^n : x \neq \sum_{i=1}^m c_i\theta_i v_i \right\} =: A \cup A^c,$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx = \int_A \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx + \int_{A^c} 0dx.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $\det(\sum u_i \otimes u_i) = 0$, δηλαδή αν όλα τα $u_i = \sqrt{c_i\lambda_i}v_i$ ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ (οπότε όλα τα v_i ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο), τότε το

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^m \langle u_i, x\rangle^2)dx = +\infty$$

για κάθε $\lambda_i > 0$, όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1(α). Αρα, $F_g = +\infty$. Θα δείξουμε οτι τότε $E_g = 0$. Είναι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx = \int_A \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\theta_i)dx = 0$$

διότι $\mu(A) = 0$ αφού το A περιέχεται σε υπερεπίπεδο. Αρα, $E_g = 0$.

2. Εστω οτι $\det(\sum_{i=1}^m u_i \otimes u_i) > 0$ (δηλαδή τα $u_1, \ldots, u_m$ δεν ανήκουν σε υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$).

Για $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ ορίζουμε τη νόρμα

$$N_\lambda(x) := \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \langle u_i, x\rangle^2} = ||Bx||,$$

και το ελλειψοειδές

$$F_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : N_\lambda(x) \leq 1\}.$$

Σημειώνουμε οτι $N_\lambda(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, αφού $\det B > 0$. Είναι $F_\lambda = B^{-1}(B_2^n)$, όπου $B^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η αντίστροφη απεικόνιση της B, και B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα.

Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m (\exp(-\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2))^{c_i} dx}{\prod_{i=1}^m (\int \exp(-\lambda_i t^2)dt)^{c_i}} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i\langle x, v_i\rangle^2)dx}{\prod_{i=1}^m (\pi/\lambda_i)^{c_i/2}} \\
= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-N_\lambda^2(x))dx}{\pi^{n/2}\prod_{i=1}^n \lambda_i^{-c_i/2}} &= \pi^{-n/2}\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-||Bx||^2)dx \\
= \pi^{-n/2}\prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i/2}|\det B^{-1}| \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-||y||^2)dy &= \prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i/2}|\det B^{-1}|.
\end{aligned}$$

Αρα,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m (\exp(-\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2))^{c_i} dx}{\prod_{i=1}^m (\int \exp(-\lambda_i t^2)dt)^{c_i}} = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{c_i/2}|\det B^{-1}|. \tag{6}$$

Ομοίως, ορίζουμε τη νόρμα

$$M_\lambda(x) := \inf\{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\lambda_i}\theta_i^2} : x = \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i v_i\},$$

και το $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : M_\lambda(x) \leq 1\}$.

Ισχυρισμός: $E_\lambda = F_\lambda^*$.

Πράγματι, αν $h(K)(x)$, $g(K)(x)$ είναι η συνάρτηση στήριξης και η συνάρτηση στάθμης ενός κυρτού σώματος K, τότε:

$$h(E_\lambda)(x) = \sup_{y \in E_\lambda} \langle x, y\rangle = \sup_{M_\lambda(y) \leq 1} \langle x, y\rangle.$$

Αλλά

$$M_\lambda(y) = \inf\{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\lambda_i}\theta_i^2} : y = \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i v_i\} < 1,$$

άρα

$$\begin{aligned} h(E_\lambda)(x) &= \sup_{\sum c_i\theta_i^2/\lambda_i < 1} \langle x, \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i v_i\rangle = \sup_{\sum c_i\theta_i^2/\lambda_i \leq 1} \langle x, \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i v_i\rangle \\ &= \sup\{\sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i\langle x, v_i\rangle : \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\lambda_i}\theta_i^2 \leq 1, (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2}. \end{aligned}$$

Η ανισότητα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz, και η ισότητα φαίνεται αν επιλέξουμε $\theta_i = k\lambda_i\langle x, v_i\rangle$, όπου $k = 1/\sqrt{\sum c_i\lambda_i\langle x, v_i\rangle^2}$. Εχουμε λοιπόν,

$$h(E_\lambda)(x) = N_\lambda(x) = \inf\{\mu \geq 0 : N_\lambda(x) \leq \mu\}$$

$$= \inf\{\mu \geq 0 : x \in \mu F_\lambda\} = g(F_\lambda)(x) = h(F_\lambda^*)(x).$$

Αρα,

$$E_\lambda = F_\lambda^* = B^*(B_2^n),$$

που σημαίνει οτι είναι ελλειψοειδές. Τώρα με ανάλογο τρόπο όπως στην απόδειξη της (6) έχουμε:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^{m} (\exp(-\theta_i^2/\lambda_i))^{c_i} dx}{\prod_{i=1}^{m} (\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_i)dt)^{c_i}}$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \exp(-\sum \frac{c_i}{\lambda_i}\theta_i^2)dx}{\prod_{i=1}^{m} (\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_i)dt)^{c_i}}$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\inf_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \sum \frac{c_i}{\lambda_i}\theta_i^2)dx}{\prod_{i=1}^m (\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_i)dt)^{c_i}}$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-M_\lambda^2(x))dx}{\prod_{i=1}^m (\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_i)dt)^{c_i}}$$

$$= \prod_{i=1}^m \lambda_i^{-c_i/2}|\mathrm{det}B^*| = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{-c_i/2}|\mathrm{det}B|.$$

Αρα,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x=\sum c_i\theta_i v_i} \prod_{i=1}^m (\exp(-\theta_i^2/\lambda_i))^{c_i}dx}{\prod_{i=1}^m (\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_i)dt)^{c_i}} = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{-c_i/2}|\mathrm{det}B|. \tag{7}$$

Από τις (6), (7) είναι προφανές οτι $E_g F_g = 1$. $\square$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof*, Geometric and Functional Analysis (to appear).

[2] F. Barthe, *Inégalités de Brascamp–Lieb et convexité*, C.R. Acad. Sc. Paris (1997).

[3] W. Beckner, *Inequalities in Fourier Analysis*, Annals of Math. **102** (1975), 159-182.

[4] H.J. Brascamp and E.H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions*, Adv. Math. **20** (1976), 151-173.

[5] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder's inequality*, Acta Sc. Math. Szeged **33** (1972), 217-223.

[6] E.H. Lieb, *Gaussian kernels have only gaussian maximizers*, Invent. Math. **102** (1990), 179-208.

[7] A. Prékopa, *On logarithmically concave measures and functions*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 335-343.

[8] K.M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. **44** (1991), 351-359.

[9] H.J. Brascamp, E.H. Lieb and J.M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 227-237.

[10] R. Henstock and A.M. Macbeath, *On the measure of some sets.* (I) *the theorems of Brunn, Minkowski and Lyusternik*, Proc. London Math. Soc. **3** (1953), 182-194.