P-Διαμερίσεις, Πολυώνυμα Euler και Ισημερινές Σφαίρες

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρήστος Σαρόγλου
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επιβλέπων καθηγητής : Χρήστος Αθανασιάδης

Σεπτέμβριος 2005

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε το Σεπτέμβριο του 2005 στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Την επιτροπή αξιολόγησής της αποτέλεσαν, εκτός του επιβλέποντα καθηγητή κ. Χρήστου Αθανασιάδη, οι κ. Κώστας Αθανασόπουλος και Αλέξης Κουβιδάκης.

Ευχαριστίες

Η περάτωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας δεν είναι μόνο αποτέλεσμα προσωπικής μου εργασίας αλλά και συνεργασιάς με ανθρώπους που με βοήθησαν πολύ. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγήτη μου κ.Χρήστο Αθανασιάδη για την άψογη συνεργασία μας και την συστηματική προσπάθειά του να μου μεταδώσει λίγες από τις γνώσεις του. Επίσης, πολλά ευχαριστώ χρωστώ σε όλους τους καθηγητές μου για τα τη βοήθεια και την κατανόησή τους, καθώς και στους συναδέλφους μεταπτυχιακούς φοιτητές για την συμπαράσταση και την παρέα τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συνδυαστική είναι ένας από τους κλάδους των μαθηματικών που τα τελευταία χρόνια σημείωσαν αλματώδη εξέλιξη. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται, εκτός από το ότι είναι αρκετά προχωρημένες, σχετίζονται σε πολλές περιπτώσεις με άλλες σύγχρονες περιοχές, όπως Αλγεβρική Τοπολογία, Αλγεβρική Γεωμετρία, Μεταθετική Άλγεβρα, Διακριτή Γεωμετρία, Θεωρία Αναπαραστάσεων κ.τ.λ.

Στόχος αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας είναι να φέρει τον αναγνώστη σε επαφή με τέτοιες μεθόδους (στην περίπτωσή μας είναι ως επί το πλείστον γεωμετρικές). Ιδιαίτερα, θα παρουσιαστούν κάποια αποτελέσματα-μερικά από αυτά έχουν εμφανιστεί σχετικά πρόσφατα-που αφορούν τη μελέτη των συνδυαστικών ιδιοτήτων (όπως αυτές που σχετίζονται με τις γραμμικές επεκτάσεις και το πολυώνυμο του $Euler$) των μερικώς διατεταγμένων συνόλων. Κυρίαρχο ρόλο εδώ κατέχει η θεωρία των $P-$διαμερίσεων, που οφείλεται στον $Stanley$ και την οποία ανέπτυξε στη διδακτορική του διατριβή.

Τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται εντάσσονται στον ευρύτερο τομέα της γεωμετρικής συνδυαστικής. Γι'αυτόν το λόγο, στα δύο πρώτα κεφάλαια γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση ορισμένων κλασσικών εννοιών και αποτελεσμάτων από τη γεωμετρία των κυρτών σωμάτων, που αποτελούν το βασικό υπόβαθρο για τη συνέχεια. Πιο συγκεκριμμένα, στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται κάποιοι στοιχειώδεις ορισμοί και προτάσεις σχετικά με πολύτοπα και πολυεδρικά συμπλέγματα, ενώ στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται οι συνδυαστικές δομές αυτών, μέσω της θεωρίας των αποφλοιώσεων και των $h-$διανυσμάτων.

Το Κεφάλαιο 4 σκοπεύει στην εξοικίωση του αναγνώστη με κάποιες στοιχειώδεις έννοιες που αφορούν τις μερικές διατάξεις, όπως οι γραμμικές επεκτάσεις και το πολυώνυμο $Euler$. Παράλληλα, για οποιοδήποτε μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ορίζεται το σύμπλεγμα της διάταξης και αποδεικνύεται μία βασική του ιδιότητα, δηλαδή το γεγονός ότι το $h-$διάνυσμα αυτού ταυτίζεται με το πολυώνυμο $Euler$ του P.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των $P-$διαμερίσεων. Πρόκειται για απεικονίσεις που ορίζονται σε κάποιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και αντιστρέφουν τη διάταξη. Η σημασία τους έγκειται στο ότι καθορίζουν και καθορίζονται απόλυτα από το P και, συνεπώς, η μελέτη των ιδιοτήτων τους συντελεί στην μελέτη της δομής του ίδιου του P.

Με βάση τις $P-$διαμερίσεις, στο Κεφάλαιο 6, για τυχαίο μερικώς διατεταγμένο σύνολο κατασκευάζεται ένα πολύτοπο, το πολύτοπο της διάταξης, από το οποίο προκύπτουν σημαντικότατες πληροφορίες για το σύνολο αυτό και ουσιαστικά, γίνεται η απαραίτητη προεργασία που απαιτείται για να προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το πολυώνυμο $Euler$ μιας ειδικής κατηγορίας μερικώς διατεταγμένων συνόλων, αυτής των διαβαθμισμένων. Ειδικότερα, θα δούμε μία απροσδόκητη ιδιότητα του πολυωνύμου $Euler$ αυτών: ταυτίζεται με το $h-$διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού πολυτόπου, που ονομάζεται ισημερινή σφαίρα. Κατά συνέπεια, από το $g-$θεώρημα, προκύπτει ότι η ακολουθία των συντελεστών του πολυωνύμου $Euler$ είναι συμμετρική και μονότροπη.

Κεφάλαιο 2

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 Κυρτά πολύτοπα

Πολλά συνδυαστικά προβλήματα αντιμετωπίζονται κάνοντας χρήση κάποιων κλασσικών αποτελεσμάτων από την γεωμετρία των κυρτών σωμάτων του ευκλείδιου χώρου. Τα βασικά αντικείμενα μελέτης είναι τα πολύτοπα. Για παράδειγμα, στο επίπεδο αυτά είναι τα γνωστά μας πολύγωνα. Βεβαίως, παρ'ότι τα τελευταία είχαν μελετηθεί ήδη από την αρχαιότητα, σε μεγαλύτερες διαστάσεις οι γνώσεις μας σχετικά με τα πολύτοπα είναι ακόμη ελλειπείς. Ξεκινάμε με τον ορισμό.

Ορισμός 2.1.1 *Ένα (κυρτό) πολύτοπο P είναι η κυρτή θήκη πεπερασμένου πλήθους σημείων του $\mathbb{R}^n$.*
Η διάσταση της αφφινικής θήκης του P ονομάζεται διάσταση του P και συμβολίζεται με $\dim P$.

Προφανώς, κάθε πολύτοπο είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Πολλά τριδιάστατα πολύτοπα είναι, ήδη, γνωστά και συναντώνται αρκετά συχνά, όπως π.χ. ο κύβος, το τετράδεδρο, η τετραγωνική πυραμίδα, τα πρίσματα κ.τ.λ.

Ορισμός 2.1.2 *Ένα υποσύνολο F ενός $d-$διάστατου πολυτόπου P ονομάζεται πλευρά του P, αν υπάρχει υπερεπίπεδο H του $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε:*
a)$V \cap P = F$
β)Το P περιέχεται εξ'ολοκλήρου στον έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους, που ορίζει το H.

Φυσιολογικά, οι πλευρές διάστασης 0 του P ονομάζονται κορυφές, οι πλευρές διάστασης 1 ακμές και οι πλευρές διάστασης $d-1$ ονομάζονται έδρες του P. Κατά σύμβαση, το κενό σύνολο θεωρείται και αυτό πλευρά του P, διάστασης -1, ενώ το ίδιο το P θεωρείται πλευρά διάστασης d.
Κάθε πλευρά διαφορετική του $\emptyset$ και του P ονομάζεται γνήσια πλευρά του P. Οι γνήσιες πλευρές απαρτίζουν το σύνορο ∂P του P.

Η απλούστερη μορφή πολυτόπου δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.3 *Αν $P = conv\{a_1, ..., a_d\}$ ένα πολύτοπο διάστασης d, όπου τα σημεία $a_1, ..., a_d$ είναι αφφινικώς ανεξάρτητα, τότε το P ονομάζεται $d-$μονόπλοκο.*
Επίσης, αν όλες οι έδρες ενός πολυτόπου είναι μονόπλοκα, τότε αυτό ονομάζεται μονοπλεκτικό.

Για παράδειγμα, το $0-$μονόπλοκο είναι το σημείο, το $1-$μονόπλοκο το ευθύγραμμο τμήμα, το $2-$μονόπλοκο το τρίγωνο και το $3-$μονόπλοκο το τετράεδρο.

Το επόμενο θεώρημα είναι θεμελιώδες στη θεωρία των πολυτόπων (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [26]).

Θεώρημα 2.1.4 *Έστω P ένα $d-$πολύτοπο. Ισχύουν τα παρακάτω:*
α)Αν $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι κορυφές του P, τότε $P = conv\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, δηλαδή το P είναι η κυρτή θήκη των κορυφών του .
β)Κάθε γνήσια πλευρά του P είναι, επίσης, πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$.
γ)Αν F είναι πλευρά του P, τότε κάθε πλευρά του πολυτόπου F είναι και πλευρά του πολυτόπου P.
δ)Η τομή δύο πλευρών F, G του P είναι κοινή πλευρά των F και G (και, συνεπώς, πλευρά του P).
ε)Κάθε γνήσια πλευρά του P ισούται με την τομή κάποιων εδρών του.
στ)Κάθε πολύτοπο είναι φραγμένη τομή πεπερασμένου πλήθους κλειστών ημιχώρων του $\mathbb{R}^n$ και αντίστροφα.

Ένα γεωμετρικό αντικείμενο που σχετίζεται άμεσα με την έννοια του πολυτόπου είναι ο πολυεδρικός κώνος, δηλαδή κάποιο σύνολο της μορφής

$$pos(\{v_1, v_2, ..., v_k\}) := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k : \lambda_1, ..., \lambda_k > 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

όπου $v_1, ...v_k$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Οι πλευρές του κώνου ορίζονται παρόμοια με τις πλευρές του πολυτόπου.

Ειδικότερα, οι μονοδιάστατες πλευρές του λέμε ότι είναι οι ημιευθείες που παράγουν τον κώνο. Προφανώς, κάθε κώνος είναι (μη φραγμένη) τομή ανοιχτών ημιχώρων και, συνεπώς, η τομή της κλειστότητας ενός κώνου και ενός πολυτόπου είναι πολύτοπο. Επιπλέον, οι προτάσεις (β)-(δ) του προηγούμενου θεωρήματος ισχύουν αυτούσια και για κώνους. Τέλος, λέμε ότι ένας κώνος είναι κώνος—μονόπλοκο, αν τα παράλληλα διανύσματα στις ευθείες που τον παράγουν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2.2 Μονοπλεκτικά συμπλέγματα

Ο παρακάτω ορισμός ουσιαστικά αποτελεί μία γενίκευση της έννοιας του πολυτόπου.

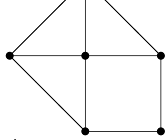
Ορισμός 2.2.1 *Ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα είναι μία πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{C}$ από πολύτοπα του $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:*
α)Για κάθε $F \in \mathcal{C}$ και κάθε πλευρά G του πολυτόπου F, ισχύει $G \in \mathcal{C}$.
β)Για κάθε $F\ , G \in \mathcal{C}$, η τομή $F\ \cap G$ είναι κοινή πλευρά των πολυτόπων F και G (πιθανώς η κενή).

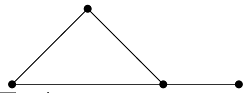
Κάθε στοιχείο του $\mathcal{C}$ ονομάζεται πλευρά του $\mathcal{C}$. Ο αριθμός

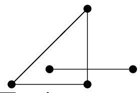
$$d := max\{\dim F : F \textit{ μεγιστική πλευρά του } \mathcal{C} \textit{ ως προς τη σχέση του εγκλεισμού } \}$$

ονομάζεται διάσταση του $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\dim \mathcal{C}$. Και, πάλι, οι μεγιστικές πλευρές του $\mathcal{C}$ ονομάζονται έδρες, οι πλευρές διάστασης 1 ακμές και οι 0-διάστατες πλευρές κορυφές του $\mathcal{C}$.
Ειδικότερα, αν κάθε μεγιστική πλευρά έχει την ίδια διάσταση d, το $\mathcal{C}$ ονομάζεται αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα, ενώ στο Σχήμα 2.2 ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα το οποίο δεν είναι αγνό. Αντιθέτως, στο Σχήμα 2.3 δεν απεικονίζεται κάποιο πολυεδρικό σύμπλεγμα. Εξάλλου, το σύνολο των πλευρών ενός πολυτόπου είναι, προφανώς, ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα, που ονομάζεται σύπλεγμα των πλευρών του P και συμβολίζεται με $\mathcal{C}(P)$, ενώ το σύνολο των γνήσιων πλευρών ενός πολυτόπου P είναι, επίσης, ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα, που ονομάζεται συνοριακό σύμπλεγμα του P και συμβολίζεται με $\mathcal{C}(\partial P)$.


Σχήμα 2.1


Σχήμα 2.2


Σχήμα 2.3

Ορισμός 2.2.2 *Δύο πολυεδρικά συμπλέγματα $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ ονομάζονται συνδυαστικώς ισοδύναμα (ισόμορφα), αν υπάρχει μία αμφίρριψη $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, που διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή $\forall F,\ G \in \mathcal{C}$, ισχύει $F \subset G$, αν και μόνο αν $f(F) \subset f(G)$.*

Ορισμός 2.2.3 *Αν f_i είναι το πλήθος των πλευρών διάστασης i του d-διάστατου πολυεδρικού συμπλέγματος $\mathcal{C}$, ορίζεται το διάνυσμα $f(\mathcal{C}) = (f_{-1}, f_0, ..., f_d)$, που ονομάζεται $f-$διάνυσμα του $\mathcal{C}$. Επίσης, το πολυώνυμο $f(\mathcal{C}, x) := f_{-1} + f_0x + f_1x^2 + ... + f_dx^{d+1}$ ονομάζεται $f-$πολυώνυμο του $\mathcal{C}$.*

Φυσιολογικά ορίζουμε:

$$f(P) := f(\mathcal{C}(\partial P)) \text{ και } f(P, x) := f(\mathcal{C}(\partial P), x).$$

Επιπλέον, δύο πολύτοπα λέγονται συνδυαστικώς ισοδύναμα, αν τα συνοριακά συμπλέγματά τους είναι συνδυαστικώς ισοδύναμα.

Παρατήρηση 2.2.1 *1)Η σχέση της συνδυαστικης ισομορφίας αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στην κλάση των πολυεδρικών συμπλεγμάτων.*
2)Προφανώς, δυο μονόπλοκα είναι συνδυαστικώς ισοδύναμα, αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση.

Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης (2) είναι λογικό ότι τα πιο απλά και πιο εύκολα στη μελέτη τους πολυεδρικά συμπλέγματα είναι αυτά, των οποίων τα στοιχεία είναι μονόπλοκα.

Ορισμός 2.2.4 *Ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα, του οποίου όλες οι πλευρές είναι μονόπλοκα ονομάζεται μονοπλεκτικό σύμπλεγμα.*

Παρατήρηση 2.2.2 *Σε απόλυτη αντιστοιχία με τα πολυεδρικά συμπλέγματα, μπορούμε να ορίσουμε συμπλέγματα πολυεδρικών κώνων, μονοπλεκτικά συμπλέγματα κώνων κ.ο.κ.*

Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα καθορίζεται πλήρως από τα σύνολα των κορυφών των μονοπλόκων από τα οποία αποτελείται. Επομένως, οι πληροφορίες που μας δίνει δεν εξαρτώνται από το ποια ακριβώς είναι αυτά τα μονόπλοκα, αλλά από τη διάταξη των κορυφών τους.
Απόροια αυτου του γεγονότος είναι ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 2.2.5 *Ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathcal{F}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο και πληρείται η παρακάτω συνθήκη:*

$$\text{Για οποιαδήποτε } F \in \mathcal{F} \text{ και } G \subset F, \text{ ισχύει } G \in \mathcal{F}.$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{F}$ καλούνται πλευρές του $\mathcal{F}$ ή αφηρημένα μονόπλοκα.
Κατ'αναλογίαν μπορούμε να ορίσουμε τη διάσταση, την έννοια της αγνότητας καθώς και την έννοια της ισομορφίας μεταξύ αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων.

Προφανώς, κάθε (γεωμετρικό) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα ορίζει μονοσημάντως (με προσέγγιση ισομορφίας) ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και αντίστροφα. Επομένως, δεν χρειάζεται να γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών.

Αν, τώρα, $\mathcal{C}$ είναι ένα $d-$διάστατο πολυεδρικό σύμπλεγμα, κάθε πλευρά του οποίου γράφεται ως ένωση στοιχείων ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ, λέμε ότι το Δ είναι ένας τριγωνισμός του $\mathcal{C}$. Αν Q είναι ένα $d-$πολύτοπο, ένας τριγω-νισμός του $\mathcal{C}(Q)$ ονομάζεται, απλώς, τριγωνισμός του Q.
Αποδεικνύεται ότι κάθε πολυεδρικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ διαθέτει έναν τριγωνισμό, του οποίου οι κορυφές είναι και κορυφές του $\mathcal{C}$. Ένα απλό παράδειγμα είναι ο λεξικογραφικός τριγωνισμός $\Delta(\mathcal{C})$. Για την κατασκευή του, θεωρούμε κάποια αρίθμηση των κορυφών του $\mathcal{C}$. Κατασκευάζουμε, επίσης τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα Δ_k, $k = 1, ..., n$, όπου το Δ_k είναι τριγωνισμός του $conv\{v_1, ..., v_k\}$ και το Δ_k προκύπτει από το Δ_{k-1} με την προσθήκη των μονοπλόκων $conv(\{v_i\} \cup F)$ (όταν αυτά περιέχονται στο $\mathcal{C}$), για τις πλευρές F του Δ_{k-1} που είναι ορατές από την κορυφή v_k (δηλαδή δεν υπάρχει κορυφή του $\mathcal{C}$ ή σημείο πλευράς του Δ_{k-1}, που να περιέχεται στο εσωτερικό του πολυτόπου $conv(\{v_i\} \cup F)$). Ο λεξικογραφικός τριγωνισμός $\Delta(\mathcal{C})$ ορίζεται να είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ_n.
Ένα άλλο, σημαντικό παράδειγμα είναι ο αντίστροφος λεξικογραφικός τριγωνισμός [14], [18], [25] $\Delta_\tau(\mathcal{C})$, όπου τ$=(v_1, ..., v_p)$ οποιαδήποτε αρίθμηση των κορυφών του $\mathcal{C}$. Ο $\Delta_\tau(\mathcal{C})$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:
$\Delta_\tau(\mathcal{C}) = v$, αν το $\mathcal{C}$ αποτελείται μόνο από την κορυφή v και

$$\Delta_\tau(\mathcal{C}) = \Delta_{\tau'}(\mathcal{C} \setminus v_p) \cup \bigcup_F \{conv(\{v_p\} \cup G) : \ G \in \Delta_{\tau''}(\mathcal{C}(F))\} \ ,$$

όπου το F διατρέχει όλες τις έδρες, που δεν περιέχουν την κορυφή v_p των μεγιστικών πλευρών του $\mathcal{C}$ που περιέχουν την v_p και τ$'$, τ $''$ η συμβατή με την τ αρίθμηση του συνόλου $\{v_1, ..., v_{p-1}\}$ και του συνόλου των κορυφών της F, αντιστοίχως.
Έστω, τώρα, Q ένα $d-$πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$, του οποίου οι κορυφές έχουν ακέραιες συντεταγμένες και A η αφφινική του θήκη. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο τριγωνισμός Δ του Q είναι βασικός, αν κάθε μεγιστικό στοιχείο αυτού είναι βασικό μονόπλοκο, δηλαδή το σύνολο των κορυφών του παράγει προσθετικά την ομάδα A$\cap\mathbb{Z}^n$ (ειδικότερα, οι κορυφές κάθε τέτοιου μονοπλόκου είναι ακέ-

ραιες). Για παράδειγμα, το μονόπλοκο $conv\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ είναι βασικό, ενώ το $conv\{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ δεν είναι βασι-κό μονόπλοκο.
Παρόμοια, ορίζονται και οι βασικοί κώνοι-μονόπλοκα, καθώς και οι βασικοί τριγωνισμοί πολυεδρικών κώνων.
Όπως ειπώθηκε πριν, κάθε πολύτοπο P διαθέτει τριγωνισμούς. Αντιθέτως, δεν επιδέχεται κάθε ακέραιο πολύτοπο βασικούς τριγωνισμούς. Παρόλ'αυτά, η ύπαρξη βασικών τριγωνισμών διευκολύνει τη συνδυαστική μελέτη του πολυ-τόπου, αφού τα βασικά μονόπλοκα διαθέτουν ιδιότητες που δεν ισχύουν για τυχαία ακέραια μονόπλοκα. Π.χ. είναι προφανές ότι κάθε βασικό μονόπλοκο του $\mathbb{R}^2$ έχει εμβαδό ίσο με $\frac{1}{2}$. (Η σημασία των βασικών τριγωνισμών θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο.)

Κεφάλαιο 3

ΑΠΟΦΛΟΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ h-ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε έναν τρόπο διάταξης των εδρών ενός πολυεδρικού συμπλέγματος, ούτως ώστε κάθε μία από αυτές να τέμνεται "κατάλ-ληλα" με τις προηγούμενες (όταν κάτι τέτοιο είναι δυνατό) από πλευράς συνδυαστικής. Ο επόμενος ορισμός είναι κλασσικός και οφείλεται κατά κύριο λόγο στους *Bruggester* και *Mani*.

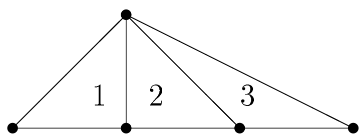
Ορισμός 3.0.6 *Έστω $\mathcal{C}$ ένα αγνό $k-$διάστατο πολυεδρικό σύμπλεγμα . Μία ολική διάταξη $F_1, F_2, ..., F_s$ των εδρών του ονομάζεται αποφλοίωση αν $k = 0$ ή ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:*
(i) Το συνοριακό σύμπλεγμα $\mathcal{C}(\partial F_1)$ της πρώτης πλευράς F_1 έχει μία αποφλοίωση.
(ii) Αν $j \in \{1, ..., s\}$, τότε

$$F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i) = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_r,$$

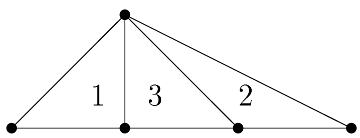
για κάποια αποφλοίωση $G_1, G_2, ..., G_t$ του $\mathcal{C}(\partial \mathcal{F}_|)$, $r \leq t$.
Ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα που έχει μία αποφλοίωση ονομάζεται αποφλοιώσιμο.
(Ειδικότερα, το σύμπλεγμα που ορίζει το $F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i)$ είναι αποφλοιώσιμο και, συνεπώς αγνό $(k-1)-$διάστατο και συνεκτικό).

Για παράδειγμα, η διάταξη των εδρών του μονοπλεκτικού συμπλέγματος που φαίνεται στο Σχήμα 3.1 είναι μία αποφλοίωση. Αντίθετα, η διάταξη στο Σχήμα 3.2 του ίδιου συμπλέγματος δεν είναι μία αποφλοίωση.

Παρατηρούμε ότι αν ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα, με τουλάχιστον δύο έδρες είναι αποφλοιώσιμο, τότε για κάθε έδρα του υπάρχει κάποια άλλη, τέτοια ώστε η τομή της με την πρώτη να είναι διάστασης $k-1$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Εντούτοις, αποδεικνύεται ότι κάθε πολύτοπο P είναι αποφλοιώσιμο (βλέπε [9]), με την έννοια ότι το συνοριακό σύμπλεγμα $\mathcal{C}(\partial P)$ είναι αποφλοιώσιμο.



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $\mathcal{C}$ το πολυεδρικό σύμπλεγμα που προκύπτει, αφαιρώντας από το συνοριακό σύμπλεγμα του $n-$διάστατου κύβου C_n δύο (οποιεσδήποτε) απέναντι έδρες. Αν το $\mathcal{C}$ είχε μία αποφλοίωση $F_1, F_2, ..., F_s$ και ονομάσουμε F_{s+1}, F_{s+2} τις έδρες που υπολείπονται, τότε προφανώς η αρίθμηση $F_1, F_2, ..., F_s, F_{s+1}, F_{s+2}$ θα ήταν μία αποφλοίωση του κύβου C_n. Όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, και η αντίστροφη αρίθμηση $F_{s+2}, F_{s+1}, ..., F_1$ είναι μία αποφλοίωση του C_n, πράγμα άτοπο αφού $F_{s+2} \cap F_{s+1} = \emptyset$, για $n > 1$. Άρα, το $\mathcal{C}$ δεν μπορεί να είναι αποφλοιώσιμο για $n > 1$.

Πρόταση 3.0.1 *Κάθε ολική διάταξη των εδρών ενός $d-$μονοπλόκου Δ είναι μία αποφλοίωση του Δ.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με επαγωγή πάνω στο d. Για $d = 0$ η ισχύς έπεται από τον ορισμό. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για τον φυσικό $d-1$ και $F_1, ..., F_d$ τυχούσα αρίθμηση των εδρών του $d-$μονοπλόκου Δ, τότε:

(i) Η πρώτη πλευρά F_1 έχει μία αποφλοίωση από την υπόθεση της επαγωγής (γεγονός που ούτως ή άλλως είναι τετριμμένο, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι τα πολύτοπα είναι αποφλοιώσιμα).

(ii)Αν $j \in \{1, ...d+1\}$, τότε:

$$F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i) = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_r,$$

για κάποιες έδρες $G_1, G_2, ..., G_t$ του μονοπλόκου F_j. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η τομή δύο εδρών ενός μονοπλόκου είναι κοινή έδρα αυτών.

Αν, τώρα, $\{G_1, ..., G_d\}$ το σύνολο των εδρών του $(d-1)-$μονοπλόκου F_j, τότε η αρίθμηση $G_1, ..., G_d$ είναι μία αποφλοίωση του F_j από την επαγωγική υπόθεση, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.□

Επομένως, η συνθήκη (i) του ορισμού 3.0.6 είναι περιττή, ενώ στην περίπτωση που το $\mathcal{C}$ είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, από τη συνθήκη (ii) και σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η αρίθμηση $F_1, ..., F_s$ των εδρών του $\mathcal{C}$ είναι αποφλοίωση αν και μόνο αν:
Για κάθε $j \in \{1, ..., s\}$, η τομή $F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i)$ γράφεται ως ένωση κάποιων εδρών του $\mathcal{C}$. Ή ισοδύναμα:

Ορισμός 3.0.7 *Η αρίθμηση $F_1, ..., F_s$ των εδρών του μονοπλεκτικού σύμπλεγματος $\mathcal{C}$ είναι μία αποφλοίωση του $\mathcal{C}$, αν:*
Για κάθε $j \in \{1, ..., s\}$, η τομή $F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i)$ ορίζει ένα αγνό $(d-1)-$διάστατο (μονοπλεκτικό) σύμπλεγμα.

Λόγω φυσιολογικής ταύτισης γεωμετρικών και αφηρημένων μονοπλεκτικών συμ-πλεγμάτων, ο ορισμός της αποφλοιωσιμότητας έχει νόημα και στις δύο περιπτώσεις. Από εδώ και στο εξής, για ευκολία θα θεωρούμε κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα αφηρημένο ταυτίζοντας τα μονόπλοκα (δηλαδή τις πλευρές των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων) με τα σύνολα των κορυφών τους.

Ορισμός 3.0.8 *Έστω $\mathcal{C}$ ένα αποφλοιώσιμο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και $F_1, ..., F_s$ μία αποφλοίωση των εδρών του. Για τυχόν $j \in \{1, ..., s\}$, ορίζουμε τον περιορισμό της πλευράς F_j:*

$$R_j = \{v \in F_j : F_j \setminus \{v\} \subset F_i \text{ για κάποιο } 1 \leq i < j\}.$$

Επίσης, ορίζουμε (σχετικά με την εν λόγω αποφλοίωση) τους αριθμους:

$$h_i := h_i(\mathcal{C}) := \#\{R_j : \#R_j = i,\, i = 1, ..., s\} \text{ },i = 0, ..., d+1.$$

Το διάνυσμα $h(\mathcal{C}) = (h_0, h_1, ..., h_d)$ ονομάζεται $h-$-διάνυσμα και το πολυώνυμο $h(x) = \sum_{i=0}^{d} h_i x^i$ ονομάζεται $h-$πολυώνυμο του $\mathcal{C}$.
Φυσιολογικά, αν P είναι ένα μονοπλεκτικό πολύτοπο, ορίζουμε το $h-$διάνυσμα και το $h-$πολυώνυμο του P να είναι το $h-$διάνυσμα και το $h-$πολυώνυμο του συνοριακού συμπλέγματος $\mathcal{C}(\partial P)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.0.9 *Αν $\mathcal{C}$ είναι ένα αγνό $(d-1)-$διάστατο, αποφλοιώσιμο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, ισχύουν οι τύποι:*
a)

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} h_i \binom{d-i}{k-i},\ k = -1, 0, 1, ..., d \tag{3.1}$$

β)

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} f_{i-1} \, \binom{d-i}{d-k}, \; k = 0, 1, ..., d \tag{3.2}$$

γ)

$$x^d f(x^{-1}) = (x+1)^d h((x+1)^{-1}), \tag{3.3}$$

όπου $f = (f_0, f_1, ..., f_{d-1})$, $h = (h_0, h_1, ..., h_d)$ το $f-$διάνυσμα και το $h-$διάνυσμα του $\mathcal{C}$ και $f(x)$, $h(x)$ το f-πολυώνυμο και h-πολυώνυμο του $\mathcal{C}$, αντίστοιχα. Ειδικότερα, το $h-$διάνυσμα είναι ανεξάρτητο της εκάστοτε αποφλοίωσης.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
α)Έστω $F_1, ..., F_s$ μία αποφλοίωση των εδρών του $\mathcal{C}$. Ονομάζουμε,

$$I_1 := \{G : G \text{ πλευρά της έδρας } F_1\}$$

και

$$I_j := \{G : G \text{ πλευρά της έδρας } F_j \text{ που δεν περιέχεται σε καμμία από τις } F_1, ..., F_{j-1}\},$$

$j = 2, ..., s$. Προφανώς, ισχύει $\mathcal{C} = \coprod_{j=1}^{s} I_j$. Θα δείξουμε ότι

$$I_j = \{G : G \text{ πλευρά της } F_j, \text{ με } R_j \subset G \subset F_j\},$$

όπου R_j ο περιορισμός της έδρας F_j σχετικά με την αποφλοίωση $F_1, ..., F_s$.
Πράγματι, αν $G \in I_j$, τότε $G \subset F_j$, εξ'ορισμού. Επίσης, οι γνήσιες πλευρές της F_j θα περιέχονται σε κάποια πλευρά της F_j, της μορφής $F_j \setminus \{v\}$, $v \in F_j$. Όμως, $F_j \setminus \{v\} \subset F_i$, για κάποιο $i < j$ ανν $v \in R_j$, δηλαδή $G \subset F_i$, για κάποιο $i < j$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποια κορυφή $v \in I_j$, με $v \in G$, οπότε $G \in I_j$ ανν η G περιέχεται στον περιορισμό R_j.
Επομένως, οι πλευρές διάστασης $k-1$, που περιέχονται στο I_j είναι πλήθους

$$\sum_{j=1}^{s} \binom{d - \#R_j}{k - \#R_j} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\#R_j = i} \binom{d-i}{k-i},$$

από όπου έπεται το ζητούμενο.
γ)Θέτουμε

$$F(x) := \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^{d-i} = x^d f(x^{-1})$$

$$H(x) := \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} = x^d h(x^{-1}).$$

Από τη σχέση (3.1), έχουμε:

$$F(x) = \Big[\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{k} h_i \binom{d-j}{k-j}\Big] x^{d-i} = H(x+1).$$

Άρα, ισχύει:

$$x^d f(x^{-1}) = (x+1)^d h((x+1)^{-1}).$$

β)Η σχέση (3.3) γίνεται :

$$x^d h(x^{-1}) = (x-1)^d f((x-1)^{-1})$$

$$\Leftrightarrow h_d + h_{d-1} + ... + h_0 x^d = f_{d-1} + f_{d-2}(x-1) + ... + f_{-1}(x-1)^d$$

$$\Leftrightarrow h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1},$$

$k = 0, 1, ..., d.$ □

Παρατήρηση 3.0.3 *Από τη Σχέση 3.2 προκύπτει ότι το $h-$διάνυσμα ενός αποφλοιώσιμου μονοπλεκτικού συμπλέγματος εξαρτάται μόνο από το $f-$διάνυσμα αυτού. Επιπλέον, μέσω της ίδιας σχέσης, μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του $h-$διανύσματος για συμπλέγματα, τα οποία δεν είναι μονοπλεκτικά ή ούτε καν αποφλοιώσιμα.*

Όπως φανερώνει το επόμενο Θεώρημα (γνωστό ως "εξισώσεις $Dehn-Sommer$
$ville$", που αποδείχτηκε στην γενική περίπτωση από τον $Sommerville$ [17], αν και όχι στη σημερινή του μορφή), μερικές φορές το $h-$διάνυσμα είναι πολύ πιο βολικό από το $f-$διάνυσμα για τους υπολογισμούς.

Θεώρημα 3.0.10 *Το $h-$διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού $d-$πολυτόπου P είναι συμμετρικό, δηλαδη:*

$$h_k = h_{d-k},\ k = 0, 1, ..., d.$$

Για την απόδειξη απαιτείται το επόμενο:

Λήμμα 3.0.11 *Αν η γραμμική διάταξη $F_1, F_2, ..., F_s$ είναι μία αποφλοίωση των εδρών ενός μονοπλεκτικού $d-$πολυτόπου Q, τότε και η αντίστροφη διάταξη $F_s, F_{s-1}, ..., F_1$ είναι, επίσης, μία αποφλοίωση αυτού.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με επαγωγή πάνω στο d. Για $d = 0$ δεν χρειάζεται να αποδείξουμε τίποτα. Στο βήμα της επαγωγής, παρατηρούμε ότι για $j = 1, 2, ..., s$ η τομή $F_j \cap (F_1 \cup ... \cup F_{j-1})$ ισούται με την ένωση $G_1 \cup ... \cup G_r$, για κάποια αποφλοίωση $G_1, ..., G_r$ του $(d-1)-$πολυτόπου F_j, για κάποιο $r < t$. Επίσης, είναι προφανές ότι $F_j \cap (F_1 \cup ... \cup F_{j-1} \cup F_{j+1} \cup ... \cup F_s) = G_1 \cup ... \cup G_t$ και, συνεπώς, ισχύει $F_j \cap (F_{j+1} \cup ... \cup F_s) \supset G_{r+1} \cup ... \cup G_t$. Από την άλλη, για οποιαδήποτε έδρα G_i της F_j υπάρχει μοναδική έδρα F_l του Q, τέτοια ώστε $F_j \cap F_j = G_i$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι $F_j \cap (F_{j+1} \cup ... \cup F_s) = G_{r+1} \cup ... \cup G_t$. Αλλά, από την επαγωγική υπόθεση, και η αντίστροφη διάταξη είναι αποφλοίωση, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.$\square$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 3.0.10

Έστω $F_1, ..., F_s$ μία αποφλοίωση των εδρών του P.Από το προηγούμενο λήμμα και η αντίστροφη διάταξη $F_s, F_{s-1}, ..., F_1$ είναι μία αποφλοίωση. Ονομάζουμε $R_j,\ R'_j$ τον περιορισμό της έδρας $F_j,\ j = 1, 2, ..., s$ ως προς την πρώτη και την δεύτερη αποφλοίωση, αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι:

$$\#R_j = d - \#R'_j$$

και το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι το $h-$διάνυσμα είναι ανεξάρτητο της εκάστοτε αποφλοίωσης.$\square$

Θα ορίσουμε, τώρα, μία πράξη μεταξύ μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, που εμφανίζεται πολύ συχνά στη Γεωμετρία.
Αν Δ_1, Δ_2 είναι δύο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, ορίζεται το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα

$$\Delta_1 * \Delta_2 := \{\sigma_1 \cup \sigma_2 : \sigma_1 \in \Delta_1, \sigma_2 \in \Delta_2\}.$$

Το σύμπλεγμα $\Delta_1 * \Delta_2$ ονομάζεται μονοπλεκτική ένωση των Δ_1 και Δ_2.
Προφανώς, ισχύει:

$$f_k(\Delta_1 * \Delta_2) = \sum_{i+j=k} f_i(\Delta_1) f_j(\Delta_2).$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$f(\Delta_1 * \Delta_2, t) = f(\Delta_1, t) f(\Delta_2, t), \tag{3.4}$$

οπότε από τη σχέση (3.3), παίρνουμε:

$$h(\Delta_1 * \Delta_2, t) = h(\Delta_1, t) h(\Delta_2, t). \tag{3.5}$$

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο αναφέροντας, χωρίς απόδειξη δύο κλασσικά θεωρήματα (το πρώτο εκ των οποίων είναι το διάσημο $g-$θεώρημα του $McMullen$), που είναι απαραίτητα για τη συνέχεια. (Βλέπε [5], [6], [13], [22] και [23] για το πρώτο, [10], [11] για το δεύτερο).

Για την κατανόηση του $g-$ θεωρήματος, θα χρειαστεί μία γενίκευση της έννοιας του μονοπλεκτικού συμπλέγματος.
Ως γνωστόν ένα πολυσύνολο A είναι μία πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών, οι οποίοι μπορεί και να επαναλαμβάνονται και των οποίων η σειρά δεν λαμβάνεται υπόψη και γι'αυτό γράφονται συνήθως σε φθίνουσα σειρά. Δηλαδή, θα μπορούσε, απλώς να ορίσει κάποιος το A ως μία φθίνουσα απεικόνιση $\phi : [n] \to \mathbb{R}$.
Ένα πολυσύμπλεγμα $\mathcal{C}$ είναι μία οικογένεια υπο-πολυσυνόλων του A (δηλαδή περιορισμών της ϕ), με την ιδιότητα:

$$K' \text{ υπο-πολυσύνολο του } K \text{ και } K \in \mathcal{C} \;\Rightarrow K' \in \mathcal{C}.$$

Ένα πολυσύνολο $F = \{b_1, ..., b_k\}$ λέμε, όπως και στην περίπτωση του μονοπλεκτικού συμπλέγματος, ότι είναι διάστασης $k-1$, ενώ παρόμοια ορίζεται και η διάσταση του $\mathcal{C}$:

$$\dim \mathcal{C} = max\{\dim F : F \in \mathcal{C}\}.$$

Τέλος, ακριβώς όμοια ορίζονται το $f-$διάνυσμα και το $f-$πολυώνυμο του $\mathcal{C}$.

Θεώρημα 3.0.12 *Έστω το διάνυσμα* $(h_0, h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$*, το οποίο υποθέτουμε συμμετρικό, δηλαδή* $h_k = h_{d-k},\ k = 0, 1, ..., d$.
Το h είναι το $h-$διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού $d-$πολυτόπου P αν και μόνο αν πληρείται μία (τουλάχιστον, άρα και οι δύο) από τις παρακάτω συνθήκες:
i) Το διάνυσμα $g := (h_0, h_1 - h_0, ..., h_{l+1} - h_l)$ *(το λεγόμενο $g-$διάνυσμα) είναι το $h-$διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού αποφλοιώσιμου $l-$συμπλέγματος, όπου* $l = \llcorner d/2 \lrcorner - 1$.
ii) Το διάνυσμα $g = (g_1, ..., g_{\llcorner d/2 \lrcorner})$ *είναι το $f-$διάνυσμα ενός πολυσυμπλέγματος $\mathcal{C}$.*

Ειδικότερα, επειδή για τα αποφλοιώσιμα πολυεδρικά συμπλέγματα ισχύει ότι κάθε μία από τις συνιστώσες του $h-$διανύσματος είναι μη αρνητική, η ακολουθία των συντελεστών του $h-$πολυωνύμου $h_0, ..., h_d$ του μονοπλεκτικού πολυτόπου P είναι εκτός από συμμετρική και μονότροπη ($unimodal$), δηλαδή υπάρχει κάποιο $l \in \{0, ..., d\}$ τέτοιο ώστε

$$h_0 \leq h_1 \leq ... \leq h_l \geq h_{l+1} \geq ... \geq h_d.$$

Προφανώς, στην περίπτωσή μας, ισχύει $l = \llcorner d/2 \lrcorner$.
Επιπλέον, από το (ii) προκύπτει ότι η $(k+1)-$συντεταγμένη του $g-$διανύσματος

του μονοπλεκτικού πολυτόπου P είναι μικρότερη ή ίση από το πλήθος των υποπολυσυνόλων διάστασης k του συνόλου $\cup\mathcal{C}$. Επομένως, αφού το $\mathcal{C}$ έχει g_1 το πλήθος στοιχεία, προκύπτει εύκολα ότι:

$$g_k \leq \binom{g_1 + k - 1}{k}. \tag{3.6}$$

Μάλιστα, η ισότητα στην τελευταία ανισότητα μπορεί να επιτευχθεί, αφού οι αριθμοί του δεξιού μέλους της (3.6) αντιστοιχούν στο $f-$διάνυσμα ενός πολυσυμπλέγματος.Το επόμενο Θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα του άνω και κάτω φράγματος, μπορεί τώρα να προκύψει ως άμεση συνέπεια του $g-$θεωρήματος.

Θεώρημα 3.0.13 *Έστω P ένα μονοπλεκτικό $d-$πολύτοπο, με n κορυφές. Ισχύουν τα εξής:*
α)Η μέγιστη τιμή, που μπορεί να πάρει η $(k+1)-$συνιστώσα f_k του $f-$διανύσματος του P είναι:

$$\sum_{j=0}^{\llcorner d/2 \lrcorner} \binom{n-d-2}{j} \left(\binom{d+1-j}{d+1-k} - \binom{j}{d+1-k} \right)$$

και λαμβάνεται αν και μόνο αν οι συνιστώσες g_i του $g-$διανύσματος είναι μέγιστες, δηλαδή ίσες με:

$$\binom{n-d-2}{d+1-i},$$

για $i \leq min\{k, \llcorner d/2 \lrcorner\}$.
β) Η ελάχιστη τιμή, που μπορεί να πάρει η $(k+1)-$συνιστώσα f_k του $f-$διανύσματος του P είναι:

$$\binom{d+1}{d+1-k}$$

και λαμβάνεται αν και μόνο αν οι συνιστώσες g_i του $g-$διανύσματος είναι ελάχιστες, δηλαδή $g_i = 0$, για $2 \leq i \leq min\{k, \llcorner d/2 \lrcorner\}$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
Καταρχήν από τη σχέση 3.2 έχουμε $g_1 = n - d - 1$. Ακόμη, για απλότητα

στους υπολογισμούς, θέτουμε $g_i = h_{i+1} - h_i$, για $i = \llcorner d/2 \lrcorner + 1, ..., d$, με $h_{d+1} := 0$. Ισχύουν:

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{d} \binom{d-i}{k-i} h_i = \sum_{i=0}^{d} \binom{d-i}{k-i} \sum_{j=0}^{i} g_j \sum_{i=0}^{d} \binom{d-i}{k-i} h_i$$

$$= \sum_{j=0}^{d+1} \sum_{i=j}^{d} \binom{d-i}{k-i} g_j = \sum_{j=0}^{d+1} \binom{d+1-j}{d+1-k} g_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\llcorner d/2 \lrcorner} g_j \Big(\binom{d+1-j}{d+1-k} - \binom{j}{d+1-k} \Big).$$

Τα ζητούμενα έπονται από τη σχέση 3.6, από το γεγονός ότι τα διανύσματα

$$\Big(\binom{n-d-2}{0}, \binom{n-d-2}{1}, \ \dots\ , \binom{n-d-2}{d} \Big) \textit{ και } (1, 0, ..., 0)$$

είναι $f-$διανύσματα κάποιων πολυσυμπλεγμάτων και από το $g-$θεώρημα.□

Παρ'ότι η απόδειξη είναι εύκολη με βάση το $g-$θεώρημα, το θεώρημα του ά-νω φράγματος και το θεώρημα του κάτω φράγματος είναι προγενέστερα και οι αποδείξεις τους (το πρώτο οφείλεται στον *McMullen* [15] και το δεύτερο στον *Barnette* [3], [4]) είναι ιδιαίτερα τεχνικές και δύσκολες.

Θεώρημα 3.0.14 *Αν Δ είναι ένας βασικός τριγωνισμός ενός $d-$πολυτόπου $Q \subset \mathbb{R}^d$, ισχύει:*

$$\sum_{m \geq 0} i(Q, m) t^m = \frac{h(\Delta, t)}{(1-t)^{d+1}} \ ,$$

όπου $i(Q, m) := \#(mQ \cap \mathbb{Z}^n)$ (οι συντελεστές $i(Q, m)$ ονομάζονται συντελεστές Ehrhart του Q).
Κατά συνέπεια, όλοι οι βασικοί τριγωνισμοί του Q έχουν το ίδιο $h-$διάνυσμα.

Κεφάλαιο 4

ΜΕΡΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

4.1 Εισαγωγικά

Μία μερική διάταξη $<_P$ ορισμένη σε ένα σύνολο P είναι μία διμελής σχέση, η οποία έχει την αντισυμμετρική (δηλαδή $\forall x, y \in P$, ισχύει $x <_P y \Rightarrow y \not<_P x$) και την μεταβατική ιδιότητα (δηλαδή $\forall x, y, z \in P$, με $x <_P y$ και $y <_P z$, ισχύει $x <_P z$).
Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία μερική διάταξη ονομάζεται μερικώς διατεταγμένο (*poset*). Ένας απλός τρόπος να παρασταθούν οι μερικές διατάξεις είναι τα διαγράμματα *Hasse* (βλέπε Σχήματα 4.1-4.6).
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα σύνολα, πράγμα που θα εννοείται και δεν χρειάζεται κάθε φορά να το αναφέρουμε. Μία σφαιρική ανάλυση αυτής της θεωρίας εμφανίζεται στο [19]. Αρχίζουμε με λίγη ορολογία.

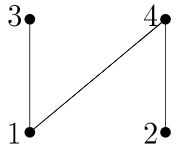
Ορισμός 4.1.1 *Δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα P και Q λεμε ότι είναι ισόμορφα (και συμβολίζουμε $P \cong Q$), αν υπάρχει μία αμφίρριψη Φ:$P \to Q$, για την οποία να ισχύει:*

$$x <_P y \Leftrightarrow \Phi(x) <_Q \Phi(y)$$

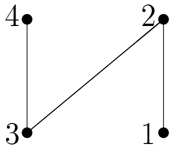
Ορισμός 4.1.2 *Ένα επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι ένα ζεύγος (P, γ), όπου P ένα (πεπερασμένο) μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $\gamma : P \to \mathbb{N}$ μια ένριψη, που ονομάζεται επιγραφή του εν λόγω συνόλου.*
Ιδιαίτερα, το (P, γ) ονομάζεται φυσικά επιγεγραμμένο, αν:

$$\text{Για κάθε } x, y \in P, \text{ με } x < y, \text{ ισχύει } \gamma(x) < \gamma(y).$$

Μία φυσική και μία μη-φυσική επιγραφή του ίδιου μερικώς διατεταγμένου συνόλου απεικονίζονται στα Σχήματα 4.1 και 4.2, αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2

Ορισμός 4.1.3 *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ονομάζεται διαβαθμισμένο, αν η πληθικότητα κάθε μεγιστικής αλυσίδας (δηλαδή η πληθικότητα κάθε μεγιστικού ολικά διατεταγμένου υποσυνόλου του P) είναι σταθερό.*

Προφανώς, τα Σχήματα 4.1-4.4 είναι διαγράμματα $Hasse$ διαβαθμισμένων μερικώς διατεταγμένων συνόλων, ενώ τα σχήματα 4.5 και 4.6 αντιστοιχούν σε μη διαβαθμισμένα.

Αν, τώρα, P τυχόν μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $x, y \in P$, θα λέμε ότι το x καλύπτει το y, αν $y <_P x$, ενώ δεν υπάρχει κανένα στοιχείο z του P (διάφορο των x, y) τέτοιο ώστε $y <_P z <_P x$.
Επίσης, αν c είναι τυχούσα αλυσίδα στοιχείων του P, $x_0 <_P x_1 <_P ... <_P x_n$, το μήκος της c ορίζεται ως:

$$l(c) = |c| - 1.$$

Η αλυσίδα c ονομάζεται κορεσμένη, αν το x_{i+1} καλύπτει το $x_i, \forall i \in \{1, 2, ...n\}$.

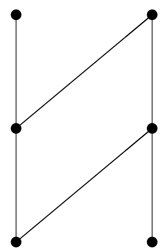
Ορισμός 4.1.4 *Αν P είναι ένα διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, η (μοναδική) απεικόνιση $\rho : P \to [n]$, με τις ιδιότητες:*
$\rho(x) = 0$, για κάθε ελαχιστικό στοιχείο x του P και
$\rho(z) = \rho(y) + 1$, οποτεδήποτε το z καλύπτει το y, όπου $y, z \in P$,
είναι καλώς ορισμένη και ονομάζεται συνάρτηση τάξης του P.

Αν $\rho(x) = i$, λέμε ότι το x είναι τάξης i. Συνήθως, η $i-$τάξη του P συμβολίζεται με P_i, δηλαδή $P_i = \{p \in P : \rho(p) = i\}$. Αν r η μέγιστη τάξη του P, ορίζεται το πολυώνυμο

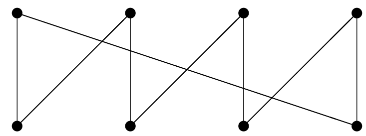
$$F(P, q) = \sum_{i=1}^{r} p_i q^i,$$

που ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση των τάξεων του P.

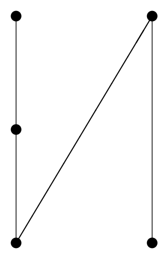
Για τυχόν μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, <_P)$ και $Q \subset P$, ορίζουμε το επαγώμενο υπο-σύνολο $(Q, <_Q)$ του $(P, <_P)$ ως το ζεύγος αποτελούμενο από το σύνολο Q και τον περιορισμό της σχέσης $<_P$ στο Q. Επομένως, αν το P είναι διαβαθμισμένο, κάθε τάξη του, θεωρούμενη ως επαγώμενο υπο-σύνολο του P, είναι μία αντι-αλυσίδα, δηλαδή η σχέση $<_P$ είναι το κενό σύνολο.



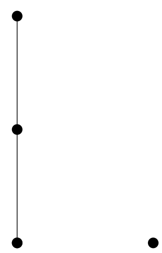
Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5



Σχήμα 4.6

Μία πολύ σημαντική (από συνδυαστικής άποψης) κλάση μερικώς διατεταγμένων συνόλων είναι τα λεγόμενα πλέγματα.

Ορισμός 4.1.5 *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ονομάζεται πλέγμα, αν για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων x, y υπάρχουν το $x \vee y$ και το $x \wedge y$, δηλαδή το κατώτατο άνω φράγμα (supremum) και, αντιστοίχως, το ανώτατο κάτω φράγμα (infimum) των x και y, που ορίζονται ως εξής:*

$z = x \vee y$ αν και μόνο αν $z \geq_P x, y$ και $z \leq_P w$,$\forall w \in P$, με $w \geq_P x, y$

και

$z = x \wedge y$ αν και μόνο αν $z \leq_P x, y$ και $z \geq_P w$,$\forall w \in P$ με $w \leq_P x, y$.

Ειδικότερα, αν σε ένα πλέγμα P οι τελεστές ικανοποιούν τις επιμεριστικές ιδιότητες

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

και

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

τότε το P λέγεται επιμεριστικό πλέγμα.

Είναι προφανές ότι κάθε πεπερασμένο πλέγμα έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, που συμβολίζονται με $\hat{1}$ και $\hat{0}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι το πλέγμα P αρκεί να ικανοποιεί τον έναν από τους δύο επιμεριστικούς τύπους για να είναι επιμεριστικό, επειδή κάθε ένας από τους δύο συνεπάγεται τον άλλον. Ένα παράδειγμα πλέγματος προκύπτει,επισυνάπτοντας το μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$ και το ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ στη μερική διάταξη του Σχήματος 4.4.

Ορισμός 4.1.6 *Ένα διατακτικό ιδεώδες (order ideal) ενός τυχόντος μερικώς διατεταγμένου συνόλου P είναι ένα υποσύνολο I του P, για το οποίο ισχύει:*
$\forall x \in I,\ y <_P x \Rightarrow y \in I$.
Ομοίως, ένα σύνολο $K \subset P$, για το οποίο ισχύει:
$\forall x \in K,\ y >_P x \Rightarrow y \in K$ *ονομάζεται δυικό διατακτικό ιδεώδες ή φίλτρο του P.*
Αν, μάλιστα, το I έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή ισχύει $I = \{x \in P : x \leq_P y\}$, για κάποιο $y \in P$, τότε το I ονομάζεται κύριο διατακτικό ιδεώδες και συμβολίζεται με $< y >$. Αντιστοίχως, ορίζεται και το κύριο δυικό διατακτικό ιδεώδες του P.

Είναι προφανές ότι κάθε φίλτρο ισούται με το συμπλήρωμα κάποιου διατακτικού ιδεώδους και αντίστροφα. Επομένως, σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, το πλήθος των φίλτρων ισούται με το πλήθος των διατακτικών ιδεωδών.
Για τυχόντα $x, y \in P$, με $x <_P y$, ορίζεται το κλειστό διάστημα $[x, y]$ ως το επαγόμενο υποσύνολο του P, πάνω στο σύνολο $[x, y] = \{z \in P : x \leq_P z \leq_P y\}$. Εύκολα προκύπτει ότι κάθε κλειστό διάστημα είναι η τομή ενός κυρίου διατακτικού ιδεώδους και ενός κυρίου δυικού διατακτικού ιδεώδους. Αντιστοίχως, ορίζονται και ανοιχτά ή ημιανοιχτά διαστήματα.

Συμβολίζουμε με $J(P)$ το σύνολο όλων των διατακτικών ιδεωδών του P, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη του εγκλεισμού.
Προφανώς, το $J(P)$ είναι ένα διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με n τάξεις, όπου $n = card(P)$. Πράγματι, αν $A, B \in J(P)$, με $A \subset B$ και $B \neq A$, τότε το σύνολο $C = A \cup \{y\}$, είναι επίσης στοιχείο του $J(P)$, όπου y κάποιο ελαχιστικό στοιχείο του $B \setminus A$.
Αυτό, όμως, σημαίνει ότι για κάθε μεγιστική αλυσίδα $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ διατακτικών ιδεωδών του P, ισχύει:

$card(I_k \setminus I_{k-1}) = 1$
Από την άλλη, $P \in J(P)$, άρα αναγκαστικά $t = n$.

Ορισμός 4.1.7 *Το $J(P)$ ονομάζεται επιμεριστικό πλέγμα ιδεωδών του P.*

Φυσικά, το $J(P)$ είναι όντως επιμεριστικό πλέγμα, αφου σε αυτήν την περίπτωση τον ρόλο των τελεστών $\vee$ και $\wedge$ παίζουν οι συνήθεις συνολοθεωρητικές πράξεις της ένωσης και της τομής, οι οποίες ως γνωστόν επιμερίζουν η μία την άλλη, ενώ σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\hat{0} = \emptyset$ και $\hat{1} = P$.
Τέλος, χωρίς απόδειξη, αναφέρουμε ότι για κάθε επιμεριστικό πλέγμα Π, υπάρχει ακριβώς ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P (βλέπε [7] για περισσότερες πληροφορίες), τέτοιο ώστε $\Pi = J(P)$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ:</u>

1)Το ολικά διατεταγμένο σύνολο $\mathbf{n}$, που αποτελείται απο τα στοιχεία 1,2,...,n και είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη.
2)Αν P, Q δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα, ορίζεται η αποσυνδετή ένωση αυτών ως το μερικώς διατεταγμένο σύνολο
$(P \bigsqcup Q, \prec)$, όπου:
$\forall x, y \in P \bigcup Q, x \prec y$ ανν $x, y \in P$ και $x <_P y$ ή $x, y \in Q$ και $x <_Q y$.(Πχ $\mathbf{m} \coprod \mathbf{n}$).
3)Ομοίως, ορίζεται το ευθύ άθροισμα των P, Q,
$(P \bigoplus Q, \prec)$, όπου:
$x \prec y$ αν και μόνο αν $x, y \in P$ και $x <_P y$ ή $x, y \in Q$ και $x <_Q y$ ή $x \in P$ και $y \in Q$.
4)Για τυχον μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ορίζεται το δυικό του $(P, \prec)$, όπου:
$x \prec y$ αν και μόνο αν $y <_P x$.
Προφανώς, κάθε φίλτρο του P είναι διατακτικό ιδεώδες του δυικού του.
5)Κάθε πολυεδρικό σύμπλεγμα Δ, όπως π.χ. το συνοριακό σύμπλεγμα ενός πολυτόπου, εφοδιασμένο με τη σχέση:
$G <_\Delta F$ αν και μόνο αν G πλευρά γνήσια της F, είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα.
6)Ειδικότερα, το σύνολο $\mathcal{C}(P)$ όλων των πλευρών ενός πολυτόπου P είναι, προφανως, ένα πλέγμα με $\hat{0} = \emptyset$ και $\hat{1} = P$.

4.2 Γραμμικές επεκτάσεις και το σύμπλεγμα της διάταξης

Ορισμός 4.2.1 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ και τυχούσα μετάθεση* $\pi= (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{S}_p$. *Ορίζουμε τα σύνολα*

$$D_\pi := \{i : \alpha_i > \alpha_{i+1}\}$$

και

$$A_\pi := \{i : \alpha_i < \alpha_{i+1}\}.$$

Τα στοιχεια τους ονομάζονται κάθοδοι και άνοδοι της π, αντιστοίχως.

Προφανώς, τα σύνολα των ανόδων και τών καθόδων της π συνδέονται με τη σχέση:

$$D_\pi = [p-1] \setminus A_\pi.$$

Μέσω των καθόδων των μεταθέσεων του p, ορίζεται το (γνωστό από την κλασσική συνδυαστική) $p-$οστό πολυώνυμο $Euler$ $W_p(t) := \sum_{i=0}^{p-1} W(p,i)x^i$, όπου $W(p,i) = \#\{\pi \in \mathcal{S}_p : \#D_\pi = i\}$, $i = 0, 1, ..., p-1$. Για παράδειγμα, τα πρώτα οκτώ πολυώνυμα $Euler$ καταγράφονται παρακάτω.
$W_1(t) = 1$
$W_2(t) = 1 + t$
$W_3(t) = 1 + 4t + t^2$
$W_4(t) = 1 + 11t + 11t^2 + t^3$
$W_5(t) = 1 + 26t + 66t^2 + 26t^3 + t^4$
$W_6(t) = 1 + 57t + 302t^2 + 302t^3 + 57t^4 + t^5$
$W_7(t) = 1 + 120t + 1191t^2 + 2416t^3 + 1191t^4 + 120t^5 + t^6$
$W_8(t) = 1 + 247t + 4293t^2 + 15619t^3 + 15619t^4 + 4293t^5 + 247t^6 + t^7$.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μία γενίκευση τόσο της έννοιας της μετάθεσης, όσο και του πολυωνύμου του $Euler$, στοχεύοντας σε ένα συσχετισμό με τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα.

Ορισμός 4.2.2 *Έστω P ένα επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, πάνω στο σύνολο $[p], p \in \mathbb{N}$. Μία γραμμική διάταξη $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ των στοιχείων του P, ονομάζεται γραμμική επέκταση του P, αν ισχύει η συνεπαγωγή:*
$\alpha_i <_P \alpha_j \Rightarrow i < j$.
Το σύνολο των γραμμικών επεκτάσεων του P συμβολίζεται με $\mathcal{L}(P)$ και ονομάζεται σύνολο $Jordan-Hölder$ (αναφορικά με το P).

Τέλος, ορίζουμε το πολυώνυμο

$$W(P,t) := \sum_{\pi \in \mathcal{L}(P)} t^{\#D_\pi},$$

που ονομάζεται πολυώνυμο Euler του P.

Είναι προφανές ότι ο συντελεστής του μονωνύμου t^k είναι, ακριβώς, το πλήθος των γραμμικών επεκτάσεων του P με k το πλήθος καθόδους.
Ειδικότερα, αν το P είναι μία αντιαλυσίδα, το σύνολο των γραμμικών επεκτάσεων του P ταυτίζεται με την ομάδα $\mathcal{S}_p$ και το πολυώνυμο *Euler* αυτού ταυτίζεται με το κλασσικό πολυώνυμο *Euler* $W_p(t)$.

Στην προσπάθεια να μελετήσουμε τις ιδιότητες των συντελεστών του $W(P,t)$, θα περιγράψουμε έναν τρόπο να βλέπουμε τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως γεωμετρικά αντικείμενα, αντιστοιχώντας σε κάθε ένα από αυτά ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα.

Ορισμός 4.2.3 *Σε κάθε αλυσίδα c του P, αντιστοιχούμε ένα (αφηρημένο) μονόπλοκο διάστασης ίσης με $l(c)$. Το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που δημιουργείται κατ'αυτόν τον τρόπο, ονομάζεται σύμπλεγμα της διάταξης του P.*

Έτσι, σε οποιαδήποτε αλυσίδα $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_k$ μη κενών διατακτικών ιδεωδών του P, αντιστοιχούμε το μονόπλοκο $\{I_1, ...I_k\}$. Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, αποτελούμενο από όλα αυτά τα μονόπλοκα (αλυσίδες διατακτικών ιδεωδών) είναι ακριβώς το σύμπλεγμα της διάταξης $\Delta J(P)$ του $J(P)$.
Είναι φανερό ότι $P \cong Q$ αν και μόνο αν $J(P) \cong J(Q)$. Θα δείξουμε ότι το P χαρακτηρίζεται από το σύμπλεγμα της διάταξης του επιμεριστικού πλέγματος $J(P)$. Έστω $F : \Delta J(P) \to \Delta J(Q)$ μία συνδυαστική ισοδυναμία. Από την υπόθεσή μας, αν $x_1 <_{J(P)} x_2 <_{J(P)} ... <_{J(P)} x_n$ είναι μία μεγιστική αλυσίδα του $J(P)$, τότε και το σύνολο $C = \{F(\{x_1\}), ..., F(\{x_n\})\}$ οφείλει να είναι μεγιστική αλυσίδα του $J(Q)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : J(P) \to J(Q)$, τέτοια ώστε, για $k = 1, 2, ..., n$ το $f(x_k)$ να ισούται με το στοιχείο τάξης k της αλυσίδας C. Η f είναι καλά ορισμένη, λόγω του ότι τα $J(P),\ J(Q)$ είναι διαβαθμισμένα και προφανώς αποτελεί μία συνδυαστική ισοδυναμία, γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Μέσω του $\Delta J(P)$, θα μας επιτραπεί να βρούμε μία άλλη έκφραση, πολύ χρήσιμη για τη συνέχεια, για τους συντεστές του πολυωνύμου *Euler* (που είναι και ο τελικός στόχος αυτής της παραγράφου), στην περίπτωση που το P είναι φυσικά επιγεγραμμένο.

Καταρχήν, σε κάθε μεγιστική αλυσίδα $\emptyset = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n = P$ δια-τακτικών ιδεωδών του P αντιστοιχεί η ακολουθία $J_1 = I_1, J_2 = I_2 \setminus I_1, ...J_n = I_n \setminus I_{n-1}$ (των λεγόμενων αλμάτων αυτής). Αν, λοιπόν, θέσουμε $J_k = \{w_k\}, k = 1, ..., n$, ορίζεται μονοσημάντως μία μετάθεση $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathcal{S}_n$. Μάλιστα, αν $w_k <_P w_j$, τότε $I_k \subset I_j$, οπότε $k < j$. Άρα, $w \in \mathcal{L}(P)$. Αντιστρόφως, κάθε γραμμική επέκταση $v = (v_1, ...v_n)$ του P αντιστοιχεί σε κάποια αλυσίδα ιδεωδών του P, και συγκεκριμμένα στην αλυσίδα $< v_1 >\subset< v_1 > \cup < v_2 >\subset ... \subset \cup_{i=1}^{n} < v_i >= P$.
Επομένως, η αντιστοιχία

$$\{I_1 \subset ... \subset I_n\} \mapsto (w_1, ..., w_n)$$

είναι μία αμφίρριψη μεταξύ του συνόλου των μεγιστικών αλυσίδων διατακτικών ιδεωδών και του συνόλου $\mathcal{L}(P)$ των γραμμικών επεκτάσεων του P.
Κατ'αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μία γραμμική διάταξη των εδρών του $\Delta J(P)$ (δηλαδή των μεγιστικών αλυσίδων ιδεωδών του P), σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη των στοιχείων του $\mathcal{L}(P)$, που αντιστοιχούν σε αυτές.
Έστω, τώρα $F = \{I_0 \subset ... \subset I_n\}$ μία μεγιστική αλυσίδα ιδεωδών του P, με αντίστοιχη γραμμική επέκταση $w \in \mathcal{L}(P)$. Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι η τομή της F με κάποια προηγούμενη (στη διάταξη που ορίσαμε) θα περιέχεται σε κάποια αλυσίδα μήκους n της μορφής:

$$I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_{k-1} \subset I_{k+1} \subset ... \subset I_n$$

αν και μόνο αν $k \in D_w$. Η τελευταία, όμως, περιέχεται στην μεγιστική αλυσίδα

$$G := I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_{k-1} \subset I_{k-1} \cup \{w_{k+1}\} \subset I_{k+1} \subset ... \subset I_n,$$

που προηγείται της F.
Κατά συνέπεια, η λεξικογραφική διάταξη των γραμμικών επεκτάσεων του P επάγει με τον τρόπο αυτόν μία αποφλοίωση του $\Delta J(P)$. Μάλιστα, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

$$\#\{\#R_i = j\} = \#\{D_w = j : w \in\}, j = 1, ..., n,$$

όπου R_i ο περιορισμός της $i-$έδρας του $\Delta J(P)$, ως προς την εν λόγω αποφλοίωση.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Θεώρημα 4.2.4 *Η λεξικογραφική διάταξη των γραμμικών επεκτάσεων του φυσικά επιγεγραμμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P επάγει μία αποφλοίωση του $\Delta J(P)$. Από αυτήν την αποφλοίωση προκύπτει:*

$$W(P, t) = h(\Delta J(P), t). \tag{4.1}$$

Κεφάλαιο 5

P-ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ

5.1 Εισαγωγικά

Μία κλασσική έννοια της συνδυαστικής είναι αυτή των διαμερίσεων ενός φυσικού αριθμού n. Ως γνωστόν, μία διαμέριση του n είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων $(c_1, c_2, ..., c_m)$, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{m} c_i = n$. Ισοδύναμα αν $\mathbf{m}$ είναι η αλυσίδα με m το πλήθος στοιχεία, μπορούμε να δούμε κάθε διαμέριση του n ως μία απεικόνιση $f : \mathbf{m} \to \mathbb{N}$, η οποία ικανοποιεί:

$$f(1) \geq f(2) \geq ... \geq f(m) \;\; \textit{και} \; f(1) + f(2) + ... + f(m) = n.$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό, αντικαθιστώντας την αλυσίδα $\mathbf{m}$ με ένα οποιοδήποτε φυσικά επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P. Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, μία απεικόνιση $f : P \to \mathbb{N}$ θα λέγεται $P-$διαμέριση του n, αν:

$$f(x) \geq f(y), \; \forall \; x, y \in P, \; \textit{με} \; x <_p y \;\; \textit{και} \; \sum_{x \in P} f(x) = n.$$

Προφανώς, κάτι τέτοιο ταυτίζεται με τον συνήθη ορισμό της διαμέρισης ενός αριθμού, όταν το P είναι αλυσίδα, επομένως έχει νόημα να προχωρήσουμε σε μία τέτοια μελέτη. Επίσης, αν για παράδειγμα, το P είναι η αντιαλυσίδα με $m-$στοιχεία, το πλήθος των $P-$διαμερίσεων του n ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης $x_1 + ... + x_m = n$, δηλαδή με

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

Η μελέτη των $P-$διαμερίσεων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία των μερικώς διατεταγμένων συνόλων, αφού όπως είναι φανερό καθορίζουν πλήρως τη μερική διάταξη, που έχει οριστεί πάνω στο P, ενώ όπως θα δούμε σχετίζονται με πολλά πράγματα που αφορούν σε αυτά, όπως π.χ. το σύνολο των καθόδων και το πολυώνυμο $Euler$. Η θεωρία, αυτή, αναπτύχθηκε από τον $Stanley$ στην διαδακτορική του διατριβή (βλέπε [20], [21] και [17]). Στην επόμενη παράγραφο θα περιγραφούν οι κυριότερες ιδιότητες των $P-$διαμερίσεων.

5.2 Βασικές ιδιότητες

Έστω (P, γ) ένα επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο πάνω στο σύνολο $[p], p \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω, ακόμη, $f : P \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f αντιστρέφει τη διάταξη (αντ. αντιστρέφει αυστηρά τη διάταξη), αν: $\forall i, j \in P$, με $i \leq_P j$ (αντ. $i <_P j$), ισχύει $f(i) \geq f(j)$ (αντ. $f(i) > f(j)$).

Ορισμός 5.2.1 *Μία $P-$διαμέριση είναι μία απεικόνιση $f : P \to \mathbb{R}_+$, τέτοια ώστε για οποιαδήποτε $x, y \in P$ με $x <_P y$ να πληρούνται οι συνθήκες:*
$i) f(x) \geq f(y)$
$ii) f(x) > f(y)$, όταν $\gamma(x) > \gamma(y)$.
Μία $P-$διαμέριση (αντ. αυστηρή) $P-$διαμέριση, που παίρνει ακέραιες τιμές και ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{i \in P} f(i) = n,$$

ονομάζεται $P-$διαμέριση (αντ. αυστηρή $P-$διαμέριση) του n.

Από εδώ και στο εξής με P θα συμβολίζουμε ένα φυσικά επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, οπότε το σύνολο των $P-$διαμερίσεων θα ταυτίζεται με το σύνολο των απεικονίσεων που αντιστρέφουν τη διάταξη και λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές.

Παρατήρηση 5.2.1 *Το πλήθος των P-διαμερίσεων (αντ. αυστηρών P-διαμερίσεων $f : P \to [m]$, ισούται με το πλήθος των απεικονίσεων*

$$f : P \to [m],$$

οι οποίες διατηρούν τη διάταξη, δηλαδή $f(i) \leq f(j), \forall i, j \in P$, με $i \leq_P j$ (αντ. διατηρούν αυστηρά τη διάταξη, δηλαδή $f(i) < f(j)$, αν $i <_P j$).
Πράγματι, είναι προφανές οτι η $f : P \to [m]$ είναι P-διαμέριση (αντ. αυστηρή $P-$διαμέριση), αν και μόνο αν η $g : P \to [m]$, με $g(x) = m+1-f(x)$ διατηρεί (αντ. διατηρεί αυστηρά) τη διάταξη.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(P)$, $\overline{\mathcal{A}}(P)$ το σύνολο των P-διαμερίσεων και αυστηρών $P-$διαμερίσεων (ακεραίων) αντίστοιχα. Κατά φυσιολογικό τρόπο, ορίζονται οι γεννήτριες συναρτήσεις, που αφορούν στις P-διαμερίσεις και αυστηρές P-διαμερίσεις (ακεραίων), ως εξής:

$$F_P(x_1,...,x_p) := \sum_{\sigma\in\mathcal{A}(P)} {x_1}^{\sigma(1)}...\ {x_p}^{\sigma(p)}$$

και

$$\overline{F}_P(x_1,...,x_p) := \sum_{\tau\in\overline{\mathcal{A}}(P)} x_1^{\tau(1)}...\ x_p^{\tau(p)}$$

Ορισμός 5.2.2 *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $f : [p] \to \mathbb{R}$ τυχούσα απεικόνιση και $\pi = (\alpha_1,...,\alpha_p) \in \mathcal{S}_p$, μία μετάθεση του $[p]$. Λέμε ότι η f είναι π-συμβατή (αντ.δυικώς π-συμβατή), αν:*
$i) f(\alpha_1) \geq ... \geq f(\alpha_p)$
$ii) \alpha_i > \alpha_{i+1} \Rightarrow f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$ (αντ. $\alpha_i < \alpha_{i+1} \Rightarrow f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$).

Το επόμενο λήμμα συσχετίζει, κατά κάποιο τρόπο, την έννοια της $P-$διαμέρισης και της διαμέρισης ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου.

Λήμμα 5.2.3 *Έστω $f : [p] \to \mathbb{R}$ τυχούσα απεικόνιση.*
α) Υπάρχει μοναδική π$\in \mathcal{S}_p$, τέτοια ώστε η f να είναι π-συμβατή.
β) Υπάρχει μοναδική ρ$\in \mathcal{S}_p$, τέτοια ώστε η f να είναι δυικώς π-συμβατή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α)Έστω $\{\beta_1,...,\beta_k\} = f([p])$, όπου $\beta_1 < ... < \beta_k$. Ονομάζουμε $B_i := \{\gamma_i^1,...,\gamma_i^{\lambda_i}\} =: f^{-1}(\{\beta_i\})$, όπου $\gamma_i^1 < ... < \gamma_i^{\lambda_i}$ και θέτουμε:

$$\pi = (\gamma_1^1,...,\gamma_1^{\lambda_1},\gamma_2^1,...,\gamma_2^{\lambda_2},...,\gamma_k^1,...,\gamma_k^{\lambda_k}) \in \mathcal{S}_p$$

.

Η μετάθεση π είναι η ζητούμενη.
Για τη μοναδικότητα, αν π$= (\alpha_1,...,\alpha_p)$ και π$'= (b_1,...b_p)$ μία μετάθεση του $[p]$, για την οποία η f είναι π-συμβατή, τότε $f(b_1) = maxf \Rightarrow b_1 \in B_1$.
Πράγματι,αν $b_1 \neq minB_1$, τότε θα υπήρχε $b_k \in B_1$, με $b_k < b_1$. Αυτό θα σήμαινε ότι $\exists l \in \{1,..k\}$, με $b_l > b_{l+1}$, με $f(b_l) > f(b_{l+1})$, πράγμα άτοπο από την υπόθεση.
Ομοίως, $b_2 = min(B_1\backslash\{b_1\})$, αν $B_1 \neq \{b_1\}$ ή $b_2 = minB_2$, αν $B_1 = \{b_1\}$. Άρα, $b_2 = \alpha_2$ κ.ο.κ., επομένως π=π$'$.
β)Προφανώς, αν ρ$= (\alpha_1,...,\alpha_p) \in \mathcal{S}_p)$, τότε η $f(x)$ είναι δυικώς ρ-συμβατή αν

και μόνο αν η $f(p+1-x)$ είναι $(p+1-\alpha_1, ..., p+1-\alpha_p)$-συμβατή.
Το ζητούμενο έπεται. $\square$

Το κεντρικό λήμμα για τη συνέχεια είναι το εξης:

Λήμμα 5.2.4 *Έστω π= $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{S}_p$, S_π το σύνολο των π-συμβατών απεικονίσεων και $\overline{S}_\pi$ το σύνολο των δυικώς π-συμβατων απεικονίσεων. Έστω, ακόμη $f : [p] \to \mathbb{N}$. Τότε:*
α)Αν $F_\pi(x_1, ..., x_p) := \sum_{f \in S_\pi} x_1^{f(1)} ...\ x_p^{f(p)}$, τότε

$$F_\pi(x_1, ..., x_p) = \frac{\prod_{j \in D_\pi} x_{\alpha_1} ...\ x_{\alpha_j}}{\prod_{i=1}^{p}(1 - x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_i})}.$$

β)Αν $\overline{F}_\pi(x_1, ..., x_p) := \sum_{f \in \overline{S}_\pi} x_1^{f(1)} ...\ x_p^{f(p)}$, τότε

$$\overline{F}_\pi(x_1, ..., x_p) = \frac{\prod_{j \in A_\pi} x_{\alpha_1} ...\ x_{\alpha_j}}{\prod_{i=1}^{p}(1 - x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_i})}.$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
α)Για τυχόν $f \in S_\pi$, θέτουμε

$$c_i = \begin{cases} f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}),\ \text{αν}\ \alpha_i < \alpha_{i+1} \\ f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}) - 1,\ \text{αν}\ \alpha_i > \alpha_{i+1} \end{cases},$$

$i = 1, ..., p$ και $f(p+1) = 0$.
Προφανώς, οι προηγούμενες σχέσεις ορίζουν μία αμφίρριψη μεταξύ των $p-$άδων φυσικών αριθμών και των π-συμβατών απεικονίσεων. Επιπλέον, ισχύει:

$$x_1^{f(1)} ... x_p^{f(p)} = \Big(\prod_{i=1}^{p}(x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_i})\Big)\Big(\prod_{j \in D_\pi} x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_j}\Big)$$

και, συνεπώς,

$$\sum_{f \in S_\pi} x_1^{f(1)} ... x_p^{f(p)} = \Big(\sum_{c_1, ..., c_p \geq 0} \prod_{i=1}^{p}(x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_i})\Big)\Big(\prod_{j \in D_\pi} x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_j}\Big)$$

Άρα, αρκεί να δειχτεί ότι:

$$\Big(\sum_{c_1, ..., c_p \geq 0} \prod_{i=1}^{p}(x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_i})\Big)\Big((1 - \prod_{j \in D_\pi} x_{\alpha_1} ... x_{\alpha_j})\Big) = 1$$

(ως ρητές συναρτήσεις).
Αρκεί,μάλιστα να υποθέσουμε $\alpha_i = i$, $i = 1, ..., p$ (αναδιατάσσοντας τους όρους, αν είναι αναγκαίο).
Με επαγωγή πάνω στο p. Για $p = 1$, εχουμε

$$\sum_{c_1 \geq 0} x_1^{c_1}(1 - x_1) = \sum_{c_1 \geq 0}(x_1^{c_1} - x_1^{c_1+1}) = 1,$$

αφού το τελευταίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό.
Στο βήμα της επαγωγής, έχουμε:

$$\Big(\sum_{c_1,...,c_p \geq 0} \prod_{i=1}^{p}(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})^{c_i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{p}(1 - x_1...x_i)\Big)$$

$$= \sum_{c_p \geq 0}\Big(\sum_{c_1,...,c_{p-1} \geq 0} \prod_{i=1}^{p}(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})^{c_i} \cdot \prod_{i=1}^{p-1}(1 - x_1...x_i)\Big) \cdot (x_1...x_p)^{c_p} \cdot (1 - x_1...x_p)$$

$$= \sum_{c_p \geq 0} 1 \cdot (x_1...x_p)^{c_p} \cdot (1 - x_1...x_p),$$

θέτοντας $X = x_1...x_p$ και εφαρμόζοντας την περίπτωση $p = 1$.
β)Αν ρ= $(p + 1 - \alpha_1, ..., p + 1 - \alpha_p)$, όπως και στο προηγούμενο Λήμμα (β), η f είναι π-συμβατή ανν η $f(p + 1 - x)$ είναι δυικώς ρ-συμβατή. Συνεπώς,

$$\overline{F}_\pi(x_1, ..., x_p) = \sum_{f \in \ S_\rho} x_1^{f(1)}...x_p^{f(p)} = \frac{\prod_{j \in D_\rho} x_{\alpha_1}...x_{\alpha_j}}{\prod_{i=1}^{p}(1 - x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})} \ .$$

Όμως, $D_\rho = \{i : p + 1 - \alpha_i > p + 1 - \alpha_{i+1}\} = \{i : \alpha_i < \alpha_{i+1}\} = A_\pi$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο.□

Λήμμα 5.2.5 *Έστω P ένα φυσικά επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο πάνω στο $[p]$ και $\mathcal{L}(P)$ το σύνολο των γραμμικών επεκτάσεων του P.*
α)Μία απεικόνιση $\sigma : P \to \mathbb{N}$ είναι μία $P-$διαμέριση αν και μόνο αν:
Υπάρχει $\pi \in \mathcal{L}(P)$ (αναγκαστικά μοναδική από το Λήμμα 5.2.3), τέτοια ώστε η σ να είναι π-συμβατή. Ισοδύναμα, ισχύει:

$$\mathcal{A}(P) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{L}(P)} S_\pi$$

β)Μία απεικόνιση τ: $P \to \mathbb{N}$ είναι μία αυστηρή $P-$διαμέριση αν και μόνο αν:
Υπάρχει $\pi \in \mathcal{L}(P)$ (αναγκαστικά μοναδική), τέτοια ώστε η τ να είναι δυικώς

π-συμβατή. Ισοδύναμα, ισχύει:

$$\overline{\mathcal{A}}(P) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{L}(P)} \overline{S}_\pi \ .$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $f : P \to \mathbb{N}$, οποία είναι είτε π-συμβατή είτε δυικώς π-συμβατή, για κάποια π$= (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{L}(P)$. Τότε,

$$f(a_1) \geq ... \geq f(a_p) \ . \tag{5.1}$$

Αν $\alpha_i <_P \alpha_j$, τότε $i < j$ (λόγω του ότι π$\in \mathcal{L}(P)$ και $f(\alpha_i) \geq f(\alpha_j)$, λόγω της (5.1). Άρα, η f είναι μία $P-$διαμέριση.

Επιπροσθέτως, αν η f είναι δυικώς π-συμβατή, τότε επειδή $\alpha_i <_P \alpha_j$ και το P είναι φυσικά επιγεγραμμένο, προκύπτει ότι $\alpha_i < \alpha_j$.

Επομένως, $\exists k \in \{i, ..., j-1\}$, τέτοιο ώστε $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, οπότε $f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1}) \Rightarrow f(\alpha_1) \geq ... \geq f(\alpha_i) \geq ... \geq f(\alpha_{k-1} \geq f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1}) \geq ... \geq f(\alpha_j) \geq ... \geq f(\alpha_p) \Rightarrow f(\alpha_i) > f(\alpha_j)$.

Άρα, η f είναι μία αυστηρή $P-$διαμέριση.

Αντίστροφα, αν η f είναι μία $P-$διαμέριση, τότε (από το Λήμμα 5.2.3) υπάρχει π$= (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{S}_p$, τέτοια ώστε η f να είναι π-συμβατή. Αν η π δεν είναι στοιχείο του $\mathcal{L}(P)$, τότε $\exists i, j$, με $i < j$ και $\alpha_j <_P \alpha_i$. Λόγω της φυσικής διάταξης, έχουμε $\alpha_j < \alpha_i$, άρα $\exists k \in \{i, i+1, ..., j-1\}$, με $\alpha_k > \alpha_{k+1}$.

Τότε, $f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1})$ (αφού η f είναι π-συμβατή) και, συνεπώς, $f(\alpha_i) \geq f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1}) \geq f(\alpha_j)$, πράγμα άτοπο αφού η f είναι $P-$διαμέριση.

Αν η f είναι, επιπλέον, αυστηρή $P-$διαμέριση και $\alpha_i < \alpha_j$, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

$(i)\alpha_i <_P \alpha_j$, οπότε εξόρισμού ισχύει $f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$.

(ii)Τα α_i, α_{i+1} δεν συγκρίνονται στο P.

Αν, τότε, $f(\alpha_i) = f(a_{i+1})$, η f θα ήταν και $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, ..., \alpha_p)$-συμβατή, εκτός από π-συμβατη (άτοπο από το Λήμμα 5.2.3).

Άρα, $f(\alpha_i) \neq f(\alpha_{i+1})$, οπότε $f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$, αφού η f είναι π-συμβατή.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η f είναι δυικώς π-συμβατή.□

Από τα δύο προηγούμενα Λήμματα έπεται άμεσα το εξής:

Θεώρημα 5.2.6 *Έστω P ένα φυσικά επιγεγραμμένο, μερικώς διατεταγμένο σύνολο πάνω $[p]$. Τότε, ισχύουν:*

$$F_P(x_1, ..., x_p) = \sum_{\pi \in \mathcal{L}(P)} \frac{\prod_{j \in D_\pi} x_{\pi(1)} ... x_{\pi(j)}}{\prod_{i=1}^{p} (1 - x_{\pi(1)} ... x_{\pi(i)})}$$

και

$$\overline{F}_P(x_1,...,x_p)=\sum_{\pi\in\mathcal{L}(P)}\frac{\prod_{j\in A_\pi}x_{\pi(1)}...x_{\pi(j)}}{\prod_{i=1}^{p}(1-x_{\pi(1)}...x_{\pi(i)})}\ .$$

Θεώρημα 5.2.7 *(Θεώρημα αντιστροφής για $P-$διαμερίσεις.)*
Για τις ρητές συναρτήσεις F_P και $\overline{F}_P$, ισχύει ο τύπος:

$$x_1...x_p\overline{F}_P(x_1,...,x_p)=(-1)^pF_P(\frac{1}{x_1},...,\frac{1}{x_p})$$

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Η απόδειξη έπεται άμεσα από το επόμενο Λήμμα, σε συνδυασμό με τα δύο προηγούμενα.□

Λήμμα 5.2.8 *Αν π∈ $\mathcal{L}(P)$, ισχύει:*

$$x_1...x_p\overline{F}_\pi(x_1,...,x_p)=(-1)^pF_\pi(\frac{1}{x_1},...,\frac{1}{x_p})\ .$$

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Αν π$=(\alpha_1,...,\alpha_p)$, έχουμε:

$$F_\pi(\frac{1}{x_1},...,\frac{1}{x_p})=\frac{\prod_{j\in D_\pi}(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_j})^{-1}}{\prod_{i=1}^{p}(1-(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})^{-1})}$$

$$=x_{\alpha_1^p}x_{\alpha_2}^{p-1}...x_{\alpha_p}\frac{\prod_{j\in D_\pi}(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_j})^{-1}}{\prod_{i=1}^{p}\Big((1-(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})^{-1})(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})\Big)}\ .$$

Επομένως, ισχύει:

$$F_\pi(\frac{1}{x_1},...,\frac{1}{x_p})=(-1)^px_{\alpha_1}^{p}x_{\alpha_2}^{p-1}...x_{\alpha_p}\frac{\prod_{j\in D_\pi}(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_j})^{-1}}{\prod_{i=1}^{p}(1-x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i})}\ . \tag{5.2}$$

Όμως, από την άλλη:

$$\Big(\prod_{j\in D_\pi}x_{\alpha_1}...x_{\alpha_i}\Big)\Big(\prod_{k\in A_\pi}x_{\alpha_1}...x_{\alpha_k}\Big)=x_{\alpha_1}^{p-1}x_{\alpha_2}^{p-2}...x_{\alpha_{p-1}}\ . \tag{5.3}$$

(Αυτό, προκύπτει από το γεγονός ότι αν το x_{α_i} εμφανίζεται $k-$φορές στο πρώτο γινόμενο, τότε το $x_{\alpha_{i+1}}$ εμφανίζεται $(k-1)$-φορές στο πρώτο γινόμενο και το x_{α_i} εμφανίζεται $(p-1-k)-$φορές στο δεύτερο γινόμενο.) Απο τις (5.2) και (5.3), προκύπτει το ζητούμενο.□

Ορισμός 5.2.9 *Για τυχόν $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τους αριθμούς $\alpha(n)$ και $\overline{\alpha}(n)$ να είναι το πλήθος των $P-$διαμερίσων και αυστηρών $P-$διαμερίσεων του n, αντίστοιχα.*
Οι γεννήτριες συναρτήσεις, που αντιστοιχούν στα $\alpha(n)$ και $\overline{\alpha}(n)$ είναι οι:

$$G_P(x) := \Sigma_{n\geq 0}\alpha(n)x^n$$

και

$$\overline{G}_P(x) := \Sigma_{n\geq 0}\overline{\alpha}(n)x^n \ .$$

Προφανώς, $G_P(x) = F_P(x,...,x)$ και $\overline{G}_P(x) = \overline{F}_P(x,...,x)$
Επιπλέον, για τυχούσα $\pi \in \mathcal{S}_n$, ορίζουμε τον πρωτεύοντα δείκτη της π, ως εξης: $l(\pi) = \Sigma_{j\in D_\pi} j$.

Άμεσα, από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα προκύπτει το εξής:

Πόρισμα 5.2.10 *Ισχύουν:*
(i)

$$G_P(x) = \frac{\sum_{\pi\in\mathcal{L}(P)} x^{l(\pi)}}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^p)}$$

(ii)

$$x^p\overline{G}_P(x) = (-1)^p G_P(\frac{1}{x}).$$

Πόρισμα 5.2.11 *Ισχύει ο τύπος:*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{S}_P} x^{l(\pi)} = (1+x)(1+x+x^2)...(1+x+x^2+...+x^{p-1}).$$

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Αν P είναι η αντιαλυσίδα με p το πλήθος στοιχεία, ισχύει:

$$\alpha(n) = \#\{f : [p] \to \mathbb{N} \Big| \sum_{i=1}^{p} = n\},$$

δηλαδή ο αριθμός $\alpha(n)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$, ήτοι με:

$$\binom{n+p-1}{p-1}.$$

Άρα,

$$G_P(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} x^n$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\frac{1}{(1-x)^{p-1}} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\Big)^{p-1} = \sum_{i_j\geq 0} x^{i_1+\ldots+i_{p-1}}.$$

Όμως, ο συντελεστής του x^n, $n \in \mathbb{N}$ ισούται με το πλήθος των $(p-1)-$άδων $(i_1, ..., i_{p-1})$, με $i_1 + ... + i_{p-1} = n$, δηλαδή με:

$$\binom{n+p-1}{p-1}.$$

Άρα,

$$G_P(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^{p-1}}. \tag{5.4}$$

Συνεπώς, από το προηγούμενο Θεώρημα παίρνουμε:

$$\sum_{\pi\in\mathcal{S}_P} x^{l(\pi)} = \frac{1}{(1-x)^p}(1-x)(1-x^2)...(1-x^p)$$

$$= \frac{(1-x)[(1-x)(1+x)][(1-x)(1+x+x^2)]...[(1-x)(1+x+x^2+...+x^{p-1})]}{(1-x)^p}$$

$$= (1+x)(1+x+x^2)...(1+x+x^2+...+x^{p-1}).\square$$

Κεφάλαιο 6

ΤΟ ΠΟΛΥΤΟΠΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Όπως και στην παράγραφο 4.2, σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να δούμε τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα από μία γεωμετρική σκοπιά, αντιστοιχώντας σε κάθε ένα από αυτά ένα πολύτοπο, το λεγόμενο πολύτοπο της διάταξης. Η μελέτη του τελευταίου είναι προϊόν της εργασίας του *Stanley* ([24]).

6.1 Θεμελιώδεις ορισμοί και ιδιότητες

Έστω ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P, με στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_n$. Το σύνολο των συναρτήσεων $f : P \to \mathbb{R}$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $< f, g >:= \sum_{i=1}^{n} f(i)g(i)$, είναι ένας ευκλείδιος $n-$διάστατος διανυσματικός χώρος, ο οποίος ταυτίζεται φυσιολογικά με τον $\mathbb{R}^n$, μέσω της ισομετρίας:

$$f \mapsto (f(x_1), ..., f(x_n)).$$

Ορισμός 6.1.1 *Το πολύτοπο της διάταξης $\mathbb{O}(P)$ του μερικώς διατεταγμένου συνόλου P ορίζεται ως το σύνολο των συναρτήσεων $f : P \to \mathbb{R}$, που πληρούν τις συνθήκες:*

$$(i)\ 0 \leq f(x) \leq 1\ , \forall x \in P$$

$$(ii)\ f(x) \geq f(y)\ , \alpha\nu\ x \leq_P y$$

Το $\mathbb{O}(P)$ είναι ένα πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$, πράγμα που προκύπτει από το γεγονός ότι αφ'ενός είναι φραγμένο και αφ'εταίρου ορίζεται από γραμμικές ανισότητες και, συνεπώς, από τομές κλειστών ημιχώρων. Για παράδειγμα, το πολύτοπο της διάταξης μίας αντιαλυσίδας με n στοιχεία είναι, προφανώς, ο $n-$κύβος.

Παρατήρηση 6.1.1 *i) Αν $A(P)$ είναι ο κώνος όλων των $P-$διαμερίσεων και το P είναι φυσικά επιγεγραμμένο, τότε*

$$\mathbb{O}(P) = A(P) \cap [0,1]^n.$$

ii) Επειδή $\mathbb{O}(P) \subset \mathbb{R}^n$, ισχύει $\dim(\mathbb{O}(P)) \leq n$. Επίσης, αν $\sigma \in \mathcal{L}(P)$ μία γραμμική επέκταση του P, προφανώς οι συναρτήσεις $f : P \to \mathbb{R}$, με $f(\sigma(1)) \geq f(\sigma(2)) \geq ... \geq f(\sigma(n))$, περιέχονται στο $\mathbb{O}(P)$ και σχηματίζουν ένα μονόπλοκο διάστασης n (μάλιστα, αν υποθέσουμε ότι το P είναι φυσικά επιγεγραμμένο, τότε η ταυτοτική μετάθεση είναι γραμμική επέκταση του P και το μονόπλοκο που σχηματίζεται κατ'αυτόν τον τρόπο έχει ως κορυφές του τα σημεία $(0,0,0,...,0),(1,0,0,...,0),(1,1,0,...,0),...,(1,1,1,...,1)$) και, συνεπώς, $\dim \mathbb{O}(P) \geq n$. Άρα, $\dim \mathbb{O}(P) = n$.

Το πολύτοπο της διάταξης είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στη μελέτη των μερικώς διατεταγμένων συνόλων. Αυτό, επειδή αφ'ενός το $\mathcal{O}(P)$ προσδιορίζει πλήρως το P και αφ'ετέρου έχει κάποιες ειδικές ιδιότητες που βοηθούν στη μελέτη του.
Για του λόγου το αληθές, στη συνέχεια θα δοθεί μία πλήρης περιγραφή των πλευρών του $\mathbb{O}(P)$.
Καταρχήν, παρατηρούμε ότι οι έδρες του $\mathbb{O}(P)$ είναι ακριβώς τα σύνολα των $f \in \mathbb{O}(P)$, οι οποίες πληρούν, ταυτόχρονα,μία ακριβώς εκ των συνθηκών:
i) $f(x) = 0$, για μοναδικό (αναγκαστικά μεγιστικό) $x \in P$.
i) $f(x) = 1$, για μοναδικό (αναγκαστικά ελαχιστικό) $x \in P$.
iii) $f(x) = f(y)$, για μοναδικά $x, y \in P$, τέτοια ώστε το y να καλύπτει το x.
Ειδικότερα, αν α το πλήθος των μεγιστικών, β το πλήθος των ελαχιστικών στοιχείων του P και $c(P)$ το πλήθος των ζευγών $(x,y) \in P \times P$, τέτοια ώστε το y να καλύπτει το x, τότε το πλήθος των εδρών του $\mathbb{O}(P)$ είναι $\alpha + \beta + c(P)$.
Εξάλλου, η τυχούσα πλευρά F του $\mathbb{O}(P)$ θα ισούται με την τομή κάποιων εδρών του, επομένως θα ορίζεται από κάποιες ισότητες της μορφής $f(x) = f(y)$, $x, y \in P$, όπου το y καλύπτει το x. Πιο συγκεκριμμένα, θα υπάρχει κάποια διαμέριση π$= \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ του P σε ξένα ανά δύο υποσύνολά (μέρη), τέτοια ώστε:

$$F = F_\pi := \{f \in \mathbb{O}(P) : f \text{ σταθερή σε κάθε ένα από τα } B_i\}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να προσδιορίσουμε για ποιες διαμερίσεις π του P η F_π είναι πλευρά του P.

Ορισμός 6.1.2 *Λέμε ότι η διαμέριση π$= \{B_1, ..., B_k\}$ του P είναι συνεκτική, αν κάθε ένα από τα επαγόμενα υποσύνολα B_i είναι συνεκτικά (δηλαδή, για οποιαδήποτε στοιχεία x, $y \in B_i$, υπάρχει κάποιο $z \in B_i$, το οποίο να συγκρίνεται με τα x και y). Επίσης, η π ονομάζεται συμβατή, αν η σχέση*

$$B_i <_\pi B_j \iff \exists x \in B_i \, , y \in B_j, \text{ με } x \leq_P y$$

είναι αντισυμμετρική (δηλαδή είναι σχέση διάταξης).

Το επόμενο Θεώρημα οφείλεται στον *Geissinger* (βλέπε [12]).

Θεώρημα 6.1.3 *Οι μη κενες πλευρές του $\mathbb{O}(P)$ είναι ακριβώς τα σύνολα F_π, όπου π συνεκτική συμβατή διαμέριση του P.*
Κατά συνέπεια, το πλέγμα των πλευρών του $\mathbb{O}(P)$ είναι ισόμορφο με το σύνολο των συνεκτικών και συμβατών διαμερίσεων του P, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη της αντίστροφης εκλέπτυνσης (δηλαδή $\pi < \pi' \Leftrightarrow \pi'$ λεπτότερη της π).

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Με επαγωγή πάνω στο $n = \#P$.
Για $n = 1$ είναι προφανές. Στο βήμα της επαγωγής, παρατηρούμε ότι το σύνολο $F_\pi, \pi = \{B_1, ..., B_k\}$ είναι πλευρά του P ανν είναι πλευρά κάποιας έδρας $G = \{f \in \mathbb{O}(P) : f(x) = f(y)\}$ ή $\{f \in A(P) : f(z) = 0\}$ ή $\{f \in A(P) : f(z) = 1\}$, για κάποια $x, y, z \in P$, όπου το y καλύπτει το x.
Όμως, είναι φανερό ότι $G \cong \mathbb{O}(P/\{x, y\})$ (αντιστοίχως, $G \cong \mathbb{O}(P \setminus \{z\})$) και $F_\pi \cong F_{\overline{\pi}}$, όπου το πηλικοσύνολο $P/\{x, y\}$ θεωρείται ως επαγώμενο υποσύνολο του P και
$\overline{\pi} = \{B_1/\{x, y\}, ..., B_n/\{x, y\}\}$ (αντιστοίχως, η $\overline{\pi} = \{B_1 \setminus \{z\}, ..., B_n \setminus \{z\}\}$) αντίστοιχη διαμέριση του $P/\{x, y\}$ (αντιστοίχως, του $P \setminus \{z\}$). Εξάλλου, $\#P/\{x, y\} = n - 1$, ενώ η $\overline{\pi}$ είναι συμβατή και συνεκτική αναφορικά με το $P/\{x, y\}$ αν και μόνο αν ισχύουν τα ίδια και για την π στο P.□

Άμεσα από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει:

Πόρισμα 6.1.4 *Οι κορυφές του $\mathbb{O}(P)$ είναι ακριβώς τα χαρακτηριστικά διανύσματα (χαρακτηριστικές συναρτήσεις) των διατακτικών ιδεωδών του P, δηλαδή οι απεικονίσεις $\chi_I : P \to \{0, 1\}$, με τύπο*

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \in I \\ 0, \text{ αν } x \notin I \end{cases},$$

όπου I διατακτικό ιδεώδες του P.

Παρατήρηση 6.1.2 *Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το πολύτοπο της διάταξης του P ως το πολύτοπο Q όλων των απεικονίσεων $f : P \to [0, 1]$ που διατηρούν τη διάταξη. Προφανώς, $Q = 1 - \mathbb{O}(p)$, επομένως $Q \cong \mathbb{O}(P)$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι κορυφές του είναι ακριβώς τα χαρακτηριστικά διανύσματα των φίλτρων του P.*
Επιπροσθέτως, είναι φανερό ότι $Q = \mathbb{O}(P >_P) \cong \mathbb{O}(P)$.

6.2 Το πολύτοπο της διάταξης και γραμμικές επεκτάσεις

Στην παράγραφο 4.2 και, συγκεκριμμένα, στο Θεώρημα 4.2.4 είδαμε πώς συνδέ-ονται το σύνολο των $Jordan - Hölder$ με το σύνολο των (ακέραιων) $P-$δια-μερίσεων ενός φυσικά επιγεγραμμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε άλλους τρόπους συσχέτισης αυτών, μέσω κατάλ-ληλων τριγωνισμών, που αφορούν στο πολύτοπο της διάταξης.

Για τυχόν $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathcal{S}_n$, ορίζουμε τον κώνο $\mathcal{A}(w) :=$
$\{f : [n] \to \mathbb{R} | f(w_i) \geq f(w_{i+1}), i = 1, 2, ..., n \text{ και } f(w_j) > f(w_{j+1}),\ j \in D_w\}$.
Προφανώς, για κάθε $w \in \mathcal{S}_n$, οι ευθείες που παράγουν τον κλειστό κώνο $\overline{A}(w)$ είναι της μορφής

$$\{f \in A(P) : f(w_1) = f(w_2) = ... = f(w_i) > f(w_{i+1}) = f(w_{i+2}) = ... = f(w_n)\},$$

που είναι n το πλήθος. Άρα, κάθε ένας απο τους κώνους $\overline{\mathcal{A}(w)}$ είναι κώνος$-$μονόπλοκο.

Πρόταση 6.2.1 *Ισχύουν τα παρακάτω:*

$$i)\ A(P) = \coprod_{w \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}(w).$$

Επιπλέον, το σύνολο των κλειστών κώνων $\overline{\mathcal{A}(w)}$, $w \in \mathcal{L}(P)$ *ορίζει έναν βασικό τριγωνισμό του κώνου* $A(P)$ *όλων των* P*-διαμερίσεων.*

$$ii)\ \mathbb{O}(P) = \coprod_{w \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}(w) \cap [0, 1]^n.$$

Αντίστοιχα, το σύνολο όλων των μονοπλόκων $\overline{\mathcal{A}(w)} \cap [0, 1]^n$ *ορίζει έναν βασικό τριγωνισμό του πολυτόπου της διάταξης* $\mathbb{O}(P)$.

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Το (ii) έπεται άμεσα από το (i), επομένως αρκεί να δειχτεί μόνο το (i).
Καταρχήν, παρατηρούμε ότι $\forall w \in \mathcal{P}$, ισχύει:

$$\mathcal{A}(w) = \{f : P \to \mathbb{R} \Big| f \quad w - \textit{συμβατή} \ \} \ ,$$

οπότε ισχύει $A(P) = \coprod_{w \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}(w)$, από το Λήμμα 5.2.3.
Εξάλλου, η τομή δύο κώνων $\overline{\mathcal{A}(w)}$ και $\overline{\mathcal{A}(w')}$ είναι ακριβώς η τομή του $\overline{\mathcal{A}(w)}$ (άρα και του $\overline{\mathcal{A}(w')}$) με κάποιο σύνολο της μορφής $\{f \in A(P) : f(w_i) =$

$f(w_{i+1}), i \in I\}$, επομένως είναι κοινή πλευρά των $\overline{\mathcal{A}(w)}$ και $\overline{\mathcal{A}(w')}$. Άρα, το σύνολο $\{\mathcal{A}(w) : w \in \mathcal{L}(P)\}$ ορίζει έναν τριγωνισμό του $A(P)$.
Μένει, μόνο, να δειχτεί ότι τα διανύσματα που είναι παράλληλα προς τις ευθείες που παράγουν τον τυχαίο κώνο $\mathcal{A}(w), w \in \mathcal{L}(P)$ παράγουν τον $\mathbb{Z}^n$. Αυτό, όμως είναι φανερό ,αφού ένα τέτοιο σύνολο διανυσμάτων είναι το: $\{e_{w_1}, e_{w_1} + e_{w_2}, ..., e_{w_1} + e_{w_2} + ... + e_{w_n}\}$, όπου $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{Z}^n$.$\square$

Ορισμός 6.2.1 *Ο παραπάνω τριγωνισμός ονομάζεται κανονικός τριγωνισμός του πολυτόπου της διάταξης $\mathbb{O}(P)$ και, αντιστοίχως, του κώνου των $P-$διαμερίσεων $A(P)$.*

Στόχος της επόμενης πρότασης είναι η συσχέτιση του πολυτόπου της διάταξης $\mathbb{O}(P)$ με το σύμπλεγμα $\Delta J(P)$.

Πρόταση 6.2.2 *i) Κάθε μη μηδενική $P-$διαμέριση f γράφεται μονοσημάντως στη μορφή*

$$f = \sum_{i=1}^{t} c_i \chi_{I_i},$$

όπου $t \in \{1, ..., n\}$, c_i είναι θετικοί πραγματικοί και $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ μία αλυσίδα διατακτικών ιδεωδών του P. Συνεπώς, ισχύει:

$$A(P) = \coprod_{\text{ιδεώδη } I_1 \subset ... \subset I_t} pos(\{\chi_{I_i}\}_{i=1}^{t}).$$

ii) Ο κανονικός τριγωνισμός του πολυτόπου της διάταξης $\mathbb{O}(P)$ είναι ισόμορφος (ως αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα) με το διατακτικό σύμπλεγμα $\Delta J(P)$.

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
(i) Ως γνωστόν, για οποιαδήποτε $P-$διαμέριση $f \neq 0$, $f \in \mathcal{P}$, υπάρχει μοναδική διαμέριση $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ του P, τέτοια ώστε η f να είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα υποσύνολα B_i του P και ταυτόχρονα να ισχύει:

$$f(B_1) > f(B_2) > ... > f(B_k).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$ το σύνολο $\cup_{j=1}^{i} B_j$ είναι διατακτικό ιδεώδες του P.
Πράγματι, αν $x \in \cup_{j=1}^{i} B_j$ και $y <_P x$, τότε εξ'ορισμού ισχύει $f(y) \geq f(x)$. Άρα, αν $x \in B_{i_1}$ και $y \in B_{i_2}$, τότε $i_2 \leq i_1$, οπότε $B_{i_2} \subset \cup_{j=1}^{i} B_j$, δηλαδή $y \in \cup_{j=1}^{i} B_j$.
Ορίζοντας $c_1 = f(B_1), c_i = f(B_i) - f(B_{i+1}),\ i \in [2, k-1]$, προκύπτει εύκολα ότι

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{\cup_{j=1}^{i} B_j}.$$

Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι αν $f = \sum_{i=1}^{\lambda} d_i \chi_{I_i}$, για κάποια διατακτικά ιδεώδη $I_1 \subset ... \subset I_\lambda$ και θετικούς πραγματικούς $d_1, ..., d_\lambda$, τότε η f είναι σταθερή στα σύνολα $I_1, I_2 \setminus I_1, ..., I_\lambda \setminus I_{\lambda-1}$ και παίρνει τιμές $d_1, d_2 ..., d_\lambda$ σε κάθε ένα από αυτά αντιστοίχως.
$ii)$Η αντιστοιχία

$$\Delta J(P) \ni \{I_1 \subset ... \subset I_t\} \mapsto pos\Big(\{\chi_{I_i}\}_{i=1}^{t}\Big) \cap [0,1]^n$$

είναι προφανώς μία αμφίρριψη, που διατηρει τη σχέση του εγκλεισμού. Επιπλέον, ισχύει:

$$pos\Big(\{\chi_{I_i}\}_{i=1}^{t}\Big) = \{f \in A(P) : f \ \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{\eta} \ \sigma\tau\alpha \ I_1, I_2 \setminus I_1, ..., I_t \setminus I_{t-1}\},$$

που είναι εξ'ορισμού πλευρά κάποιου κώνου $\mathcal{A}(w)$. Άρα, μέσω αυτής της αντιστοιχίας απεικονίζονται πλευρές του συμπλέγματος $\Delta J(P)$ σε πλευρές του κανονικού τριγωνισμού.
Κατά συνέπεια, η εν λόγω αντιστοιχία είναι μία συνδυαστική ισομορφία.□

Άμεση εφαρμογή αυτού του θεωρήματος και του Θεωρήματος 3.0.14 είναι το επόμενο, πολύ χρήσιμο για τη συνέχεια, πόρισμα:

Πόρισμα 6.2.2 *Ισχύει:*

$$\sum_{m \geq 0} i(\mathbb{O}(P), m) t^m = \frac{h(\Delta J(P), t)}{(1-t)^{n+1}} = \frac{W(P,t)}{(1-t)^{n+1}}, \tag{6.1}$$

όπου $i(\mathbb{O}(P), m) = \#(m\mathbb{O}(P) \cap \mathbb{Z}^n)$ *οι συντελεστές Ehrhart του* $\mathbb{O}(P)$.

6.3 Το πολυώνυμο της διάταξης

Μία ακόμη συνάρτηση που σχετίζεται με τις (ακέραιες) $P-$διαμερίσεις είναι αυτή που "μετράει" το πλήθος των $P-$διαμερίσεων (ή από την παρατήρηση 5.2.1 το πλήθος των απεικονίσεων που διατηρούν τη διάταξη) $\sigma : P \to [m]$, $m \in \mathbb{N}$.
Πιο συγκεκριμμένα, ορίζουμε το πολυώνυμο της διάταξης του φυσικά επιγεγραμμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P (ως συνάρτηση του m),

$$\Omega(P, m) := \#\{f : P \to [m] \mid f \ P - \delta\iota\alpha\mu\acute{\epsilon}\rho\iota\sigma\eta\}.$$

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με τη μελέτη κάποιων βασικών ιδιοτήτων του $\Omega(P, m)$ και θα δούμε πώς σχετίζεται με το πολύτοπο της διάταξης $\mathbb{O}(P)$.

Καταρχήν, για τη δικαίωση της ορολογίας θα δείξουμε ότι όντως το $\Omega(P, m)$ είναι πολυώνυμο.

Πρόταση 6.3.1 *Έστω b_i το πλήθος των αλυσίδων $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_i$ διατακτικών ιδεωδεών του P, με $i-$στοιχεία, $i \geq 1$. Ισχύει:*

$$\Omega(P, m) = \sum_{i=1}^{n} b_i \binom{m}{i}$$

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Πράγματι, αν $f : P \to [m]$ μία $P-$διαμέριση, τότε από την πρόταση 6.2.2, υπάρχει μοναδική αλυσίδα $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_i$ διατακτικών ιδεωδεών του P και $c_1, ..., c_i \in \mathbb{N}$ (αναγκαστικά) με $f = \sum_{j=1}^{i} c_j \chi_{I_j}$ και $c_1 + c_2 + ... + c_i \leq m$, οπότε:

$$\Omega(P, m) = \sum_{i=1}^{n} b_i \binom{m}{i},$$

όπου ο αριθμός $\binom{m}{i}$ ισούται ως γνωστόν με το πλήθος των $i-$άδων $(c_1, ..., c_i)$ με $c_1 + ... + c_i \leq m$ και $c_i > 0$.□

Όπως στο κεφάλαιο 5, που υπολογίσαμε τη συνάρτηση $G_P = \sum_{n \geq 0} x^n$, αντιστοίχως και εδώ θα υπολογίσουμε τη σχετική γεννήτρια συνάρτηση, δηλαδή τη δυναμοσειρά που έχει ως συντελεστή του όρου x^m το $\Omega(P, m)$.

Θεώρημα 6.3.1 *Ισχύει ο τύπος:*

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P, m) x^m = \frac{\sum_{\pi \in \mathcal{L}(P)} x^{1+\#D_\pi}}{(1-x)^{n+1}}$$

<u>*ΑΠΟΔΕΙΞΗ*</u>
Έστω $f : P \to [m]$ και $\pi = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{L}(P)$. Η f είναι π-συμβατή αν και μόνο αν $f(a_1) \geq f(a_2) \geq ... \geq f(a_n)$ και $f(a_i) > f(a_{i+1})$,$\forall i \in D_\pi$. Ισοδύναμα:

$$f(a_1) \geq f(a_2) \geq ... \geq f(a_n) \textit{ και } f(a_i) \geq f(a_{i+1}) + 1 \text{ ,} \forall i \in D_\pi \textit{ και } \forall j \leq i.$$

Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι αυτό είναι ισοδύναμο με :

$$f(a_1) \geq f(a_2) + d_1 \geq f(a_3) + d_2 \geq ... \geq f(a_n) + d_{n-1},$$

όπου $d_i = \#\{j : j \geq i \text{ , } j \in D_\pi\}$ (οπότε $d_1 = \#D_\pi$).
Συνεπώς, η f είναι π-συμβατή αν και μόνο αν:

$$m - \#D_\pi \geq f(a_1) - d_1 \geq ... \geq f(a_n) - d_{n-1} \geq 1.$$

Άρα, το πλήθος των π-συμβατών απεικονίσεων $f : [n] \to [m]$ είναι ίσο με το πλήθος των απεικονίσεων $f : [n] \to [m - \#D\pi]$, οι οποίες αντιστρέφουν τη διάταξη.
Τώρα, όπως και στην προηγούμενη πρόταση παρατηρούμε ότι κάθε απεικόνιση $f : [k] \to [\lambda]$, που αντιστρέφει τη διάταξη γράφεται μονοσημάντως ως:

$$f = \sum_{j=1}^{i} c_j \chi_{I_j},$$

όπου $c_i \in \mathbb{N}$,$c_1 + c_2 + ... + c_i \leq m$ και $c_k > 0$.Άρα,

$$\Omega(k, \lambda) = \binom{\lambda - (-k) - 1}{(k+1) - 1} = \binom{\lambda + k - 1}{k}.$$

Επομένως,

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P, m) x^m = \sum_{m \geq 0, \pi \in \mathcal{L}(P)} \binom{m - \#D_\pi - 1 + n}{n} x^m.$$

Το ζητούμενο έπεται από τη σχέση 5.4.□

Παρατήρηση 6.3.1 *Αντιστοίχως, ορίζεται το πολυώνυμο της αυστηρής διάταξης $\overline{\Omega}(P, m)$, των αυστηρών $P-$διαμερίσεων $f : P \to [m]$. Αποδεικνύεται ότι*

$$\sum_{m \geq 0} \overline{\Omega}(P, m) x^m = \frac{\sum_{\pi \in \mathcal{L}(P)} x^{1 + \#A_\pi}}{(1 - x)^{n+1}}.$$

Επιπλέον, όπως και στα θεωρήματα 5.2.6 και 5.2.10(ii), ισχύει και εδώ ο τύπος της αντιστροφής, δηλαδή

$$\overline{\Omega}(P, m) = (-1)^n \Omega(P, -m).$$

Το επόμενο (και τελευταίο αυτου του κεφαλαίου) Θεώρημα πρόκειται για μία ακόμη εξαιρετική ιδιότητα του Πολυτόπου της διάταξης.

Θεώρημα 6.3.2 *Ισχύει ο τύπος:*

$$i(\mathbb{O}(P), m) = \Omega(P, m + 1) \tag{6.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Εξ'ορισμού ισχύει:

$$i(\mathbb{O}(P), m) = \#\{mf : 0 \leq f(x) \leq 1 \, , f(x) \geq f(y) \, , \forall x, y \in P, \text{ με } x <_P y\} \cap \mathbb{Z}^n$$

$$= \#\{h-1| \ h : P \to [m], \ h \ P\text{-διαμέριση}\} = \Omega(P, m+1). \square$$

Παρατήρηση 6.3.2 *Από τη σχέση 6.2 έπεται ότι:*

$$\sum_{m \geq 0} i(P, m) x^m = \sum_{m \geq 0} \Omega(P, m+1) x^m,$$

άρα από το Θεώρημα 6.3.1, έχουμε:

$$\sum_{m \geq 0} i(P, m) x^m = \frac{1}{x} \frac{\sum_{\pi \in \mathcal{L}(P)} x^{1+\#D_\pi}}{(1-x)^{n+1}} = \frac{W(P, t)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Από το Θεώρημα 3.0.14 προκύπτει ότι $W(P, t) = h(\Delta(P), t)$ και, έτσι, έχουμε μία εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4.

Κεφάλαιο 7

Η ΙΣΗΜΕΡΙΝΗ ΣΦΑΙΡΑ

7.1 Ισημερινές σφαίρες ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα

Το πολύτοπο της διάταξης και το σύμπλεγμα της διάταξης θα είναι και σε αυτό το κεφάλαιο τα βασικά εργαλεία μελέτης. Στόχος είναι, για οποιοδήποτε φυσικά επιγεγραμμένο, διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (από εδώ και στο εξής, με P θα συμβολίζουμε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες) να κατασκευάσουμε ένα πολύτοπο (το σύνορο του οποίου ονομάζεται ισημερινή σφαίρα), του οποίου το $h-$διάνυσμα να ισούται με το $h-$διάνυσμα του συμπλέγματος της διάταξης $\Delta J(P)$. Τότε, λόγω του $g-$θεωρήματος έπεται ότι η ακολουθία των συντελεστών του πολυωνύμου $Euler$ είναι συμμετρική και μονότροπη.
Τα παρακάτω οφείλονται στους $Reiner$ και $Welker$ [16]. (Μάλιστα, οι αποδείξεις είναι πανομοιότυπες με αυτές στο [16].)

Ορισμός 7.1.1 *Έστω ότι το P έχει στοιχεία $1, 2, .., n$ και τάξεις $P_1, P_2, ..., P_r$. Μία P-διαμέριση f ονομάζεται $P-$διαμέριση σταθερής τάξης, αν είναι σταθερή σε κάθε τάξη, δηλαδή $f(p) = f(q), \forall p, q \in P_j$ ($j-$τάξη του P), $j \in [n]$.*
Η f ονομάζεται ισημερινή, αν:
$(i) min_{p\in P} f(p) = 0$
(ii)Για κάθε $j \in \{2, 3, ..., \}$, υπάρχουν $p_j \in P_j$ και $p_{j-1} \in P_{j-1}$ με $p_{j-1} <_P p_j$, τέτοια ώστε
$f(p_j) = f(p_{j-1})$.

Ένα διατακτικό ιδεώδες Ι ονομάζεται σταθερής τάξης (αντ. ισημερινό ιδεώδες), αν το χαρακτηριστικό του διάνυσμα χ_I είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή $P-$διαμέριση).
Παρόμοια, μία αλυσίδα διατακτικών ιδεωδών $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ ονομάζεται

σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή), αν η P-διαμέριση $\chi_{I_1} + \chi_{I_2} + ... + \chi_{I_t}$, που αντιστοιχεί στην πρώτη είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή).

Παρατήρηση 7.1.1 *1)Αν η P-διαμέριση $f = \chi_{I_1} + \chi_{I_2} + ... + \chi_{I_t}$ είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή), τότε κάθε ένα από τα $I_1, I_2, ..., I_t$ είναι διατακτικό ιδεώδες σταθερής τάξης (αντ. ισημερινό). Στην πρώτη περίπτωση ισχύει και το αντίστροφο, αντίθετα με τη δεύτερη. Επιπλέον, επειδή για το τυχόν $p \in P_j$, ισχύει :*

$$f(p) = \#\{k : p \in I_k\},$$

η f είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή) αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του P εμφανίζονται στο ίδιο πλήθος ιδεωδών αυτής της αλυσίδας (αντ. για οποιαδήποτε $k \in [t]$ και $j \in \{2, ..., r\}$, υπάρχει κάποιο ζεύγος $(p_{j-1}, p_j) \in P_{j-1} \times P_j$, με $p_{j-1} <_P p_j$, τέτοιο ώστε τα p_{j-1} και p_j, ταυτόχρονα, να ανήκουν στο I_k ή στο συμπλήρωμα αυτού).
Επομένως, είναι προφανές ότι η f είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινή) αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα του κώνου $pos(\{\chi_{I_j}\}_{j=1}^t)$ είναι σταθερής τάξης (αντ. ισημερινό).
2)Προφανώς τα μόνα διατακτικά ιδεώδη σταθερής τάξης είναι τα στοιχεία της αλυσίδας $I_1^{rc} \subset I_2^{rc} \subset ... \subset I_r^{rc}$, όπου $I_k^{rc} := \bigsqcup_{i=1}^k P_i$.
Επιπλέον, οποιοδήποτε μη κενό διατακτικό ιδεώδες του P είναι σταθερής τάξης αν και μόνο αν δεν είναι ισημερινό.

Όπως είδαμε, τα χαρακτηριστικά διανύσματα ιδεωδών παράγουν προσθετικά τον κώνο των $P-$διαμερίσεων. Κάτι ανάλογο ισχύει και για τις $P-$διαμερίσεις που ορίσαμε πριν από λίγο.

Πρόταση 7.1.1 *Κάθε μη μηδενική $P-$διαμέριση μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα ως άθροισμα μίας ισημερινής και μίας σταθερής τάξης $P-$διαμέρισης.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
Έστω $f \in A(P)$. Ορίζουμε,
$c_j := min\{f(p_j) - f(p_{j+1}) : p_j \in P_j, p_{j+1} \in P_{j+1}, p_j <_P p_{j+1}\}, j = 1, ..., r-1$
και
$c_r := min\{f(p_r) : p_r \in P_r\}$.
Επίσης, θέτουμε

$$f^{rc} := \sum_{j=1}^{r} c_j \chi_{I_j}$$

$$f^{eq} := f - f^{rc}.$$

Προφανώς, η f^{rc} είναι σταθερής τάξης $P-$διαμέριση, ενώ η f^{eq} είναι ισημερινή. Πράγματι αφενός $\exists p \in P$, με $f^{eq}(p) = 0$ (παίρνουμε, π.χ. $p \in f^{-1}(c_r)$) και αφετέρου $\forall j \in [r-1], \exists p_j^o \in P_j \ , P_{j+1}^o \in P_{j+1}$, με $p_j^o <_P p_{j+1}^o$ και $f(p_j)^o - f(p_{j+1}^o) = c_j$. Τότε:

$$f^{eq}(p_j^o) - f^{eq}(p_{j+1}^o) = f(p_j^o) - \sum_{i \geq j+1} c_i - f(p_{j+1}^o) + \sum_{i \geq j} c_i$$

$$= f(p_j^o) - f(p_{j+1}^o) + c_j = 0.$$

Αν, τώρα, $f = \sum_{j=1}^r d_j \chi_{I_j} + g^{eq}$, όπου $d_j \geq 0$ και g^{eq} ισημερινή $P-$διαμέριση, τότε διαλέγουμε p_j^o, p_{j+1}^o όπως πριν, οπότε:

$$c_j = f(p_j^o) - f(p_{j+1}^o) = d_j + g^{eq}(p_j^o) - g^{eq}(p_{j+1}^o) \ j = 1, ..., r-1.$$

Επίσης, για τυχαία $p_j \in P_j$ και $p_{j+1} \in P_{j+1}$ με $p_j <_P p_{j+1}$, ισχύει και πάλι:

$$c_j \leq f(p_j) - f(p_{j+1}) = d_j + g^{eq}(p_j) - g^{eq}(p_{j+1}) \ , j = 1, ...r-1.$$

Επομένως, $min\{g^{eq}(p_j) - g^{eq}(p_{j+1}) : p_j \in P_j, P_{j+1} \in P_{j+1}, p_j <_P p_{j+1}\} = g^{eq}(p_j^o) - g^{eq}(p_{j+1}^o) = c_j - d_j \ , j = 1, ..., r-1$. Επειδή, όμως, η g^{eq} είναι ισημερινή θα πρέπει αυτό το ελάχιστο να ισούται με 0, οπότε $d_j = c_j, j = 1, \ldots, r-1$. Ομοίως, προκύπτει ότι $d_r = c_r$. Άρα, η διάσπαση της f σε μία σταθερής τάξης και μία ισημερινή $P-$διαμέριση είναι μοναδική.$\Box$

Προφανώς, ο κώνος $pos(\{\chi_{I_j^{rc}}\}_{j=1}^r)$ όλων των $P-$διαμερίσεων σταθερής τάξης είναι κώνος$-$μονόπλοκο και r-διάστατος, αφού τα χαρακτηριστικά διανύσματα των διατακτικών ιδεωδών σταθερής τάξης είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και πλήθους r.
Η επόμενη πρόταση μας δίνει μία εικόνα του πού βρίσκεται αυτός ο κώνος σε σχέση με τον κώνο $A(P)$ όλων των $P-$διαμερίσεων.

Πρόταση 7.1.2 *Ο κώνος των $P-$διαμερίσεων σταθερής τάξης δεν περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο σύνορο του κώνου $A(P)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Αν ο κώνος, αυτός, βρισκόταν στο σύνορο του κώνου $A(P)$, τότε προφανώς θα περιείχετο σε κάποια έδρα του τελευταίου. Αυτό, όπως είδαμε θα σήμαινε ότι κάθε ένα από τα διανύσματα που τον παράγουν θα ήταν στοιχείο ενός συνόλου της μορφής $F = \{f \in A(P) : f(p) = f(q)\}$, για κάποια $p, q \in P$ τέτοια ώστε το p να καλύπτει το q. Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατο, αφού όπως γνωρίζουμε αν $j = rank(p)$, τότε $\chi_{I_j^{rc}}(p) = 1$ και $\chi_{I_j^{rc}(q)} = 0$ και, συνεπώς, $\chi_{I_j^{rc}} \notin F$.$\Box$

Αμέσως μετά θα δούμε έναν απλό χαρακτηρισμό των ισημερινών αλυσίδων διατακτικών ιδεωδών.

Πρόταση 7.1.3 *α)Μία αλυσίδα μη κενών διατακτικών ιδεωδών* $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ *είναι ισημερινή αν και μόνο αν τα άλματα (βλέπε παράγραφο 4.2)* $J_1, J_2, ..., J_t, J_{t+1}$ *(όπου από εδώ και στο εξής, ορίζουμε κατά σύμβαση* $J_{t+1} = P \setminus I_t$*) αυτής πληρούν την ακόλουθη συνθήκη:*
Για κάθε $j \in 2, ..., r$*, υπάρχουν* $p_{j-1} \in P_{j-1}$ *και* $p_j \in P_j$*, με* $p_{j-1} <_P p_j$ *και κάποιο* $i \in [t+1]$*, τέτοια ώστε* $\{p_{j-1}, p_j\} \subset J_i$*.*
β)Επιπροσθέτως, η αλυσίδα αυτή είναι μεγιστική στο σύνολο των ισημερινών αλυσίδων αν και μόνο αν τα άλματα $J_1, J_2, ..., J_{t+1}$ *αυτής πληρούν τις ακόλουθες συνθήκες:*
(i) *Κάθε ένα από τα* J_i *είναι κορεσμένη αλυσίδα του* P*.*
(ii)*Σε κάθε τάξη* P_j *του* P *υπάρχει μοναδικό στοιχείο* p_j *τέτοιο ώστε να μην είναι μέγιστο σε κάποιο άλμα της* J_k*,* $k = 1, 2, ..., t$ *της αλυσίδας.*
Επομένως, όταν η αλυσίδα $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ *είναι μεγιστική ως ισημερινή αλυσίδα, ισχύει* $t = n - r$*, αφού υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των μελών αυτής και του συνόλου των μέγιστων στοιχείων των αλμάτων αυτής, που είναι* $n - r$ *το πλήθος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α)Γνωρίζουμε ότι η $P-$διαμέριση $\chi_{I_1} + \chi_{I_2} + ... + \chi_{I_t}$ είναι σταθερή στα άλματα $J_1, ..., J_{t+1}$ της αλυσίδας $I_1 \subset ... \subset I_{t+1}$, η οποία είναι ισημερινή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \{2, ..., r\}$ είναι σταθερή σε κάποιο ζεύγος της μορφής $\{p_{j-1}, p_j\}$, όπου $p_{j-1} \in P_{j-1}, p_j \in P_j$ και το p_j καλύπτει το p_{j-1}, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.
β)Αν πληρούνται οι συνθήκες (i) και (ii), τότε η συνθήκη (i) σε συνδυασμό με το (α) εξασφαλίζουν ότι η αλυσίδα είναι ισημερινή. Αν, τώρα, υπάρχει διατακτικό ιδεώδες I του P και $k \in [t]$, τέτοια ώστε $I_k \subset I \subset I_{k+1}$,με $I \neq I_k, I_{k+1}$, τότε από τη συνθήκη (ii), υπάρχει κάποιο $j \in \{2, ..., r\}$, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο της τάξης P_j να είναι μέγιστο στοιχείο σε κάποιο άλμα της αλυσίδας $I_1 \subset ... \subset I_k \subset I \subset I_{k+1} \subset ... \subset I_t$. Αυτό, όμως αντίκειται στο (α), άρα η τελευταία δεν είναι ισημερινή αλυσίδα και, συνεπώς, η $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ είναι μεγιστική.
Αντίστροφα, αν η $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$ είναι μεγιστική ισημερινή αλυσίδα, τότε κάθε άλμα αυτής θα πρέπει να είναι αλυσίδα. Αν, αντιθέτως υπήρχε άλμα J_k αυτής, αλυσίδα c του P και A μη κενό υποσύνολο του P, τέτοια ώστε $J_k = c \coprod A$ και, επιπροσθέτως, για κανένα ελαχιστικό στοιχείο x του A να μην ισχύει $max c <_P x$, θα μπορούσαμε να εκλεπτύνουμε την c παίρνοντας την ισημερινή αλυσίδα

$$I_1 \subset ... \subset I_{k-1} \subset I_{k-1} \cup c \subset I_k \subset ... \subset I_t.$$

Επομένως, καθε ένα από τα άλματα της πρώτης είναι αλυσίδες και, προφανώς, κορεσμένες και αποδείξαμε τη συνθήκη (i). Με, ακριβώς, όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία ισημερινή αλυσίδα λεπτότερη της $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_t$, όταν δεν ισχύει η συνθήκη (ii).□

Είμαστε, τώρα σε θέση να ορίσουμε την ισημερινή σφαίρα και να δείξουμε την ισότητα του $h-$πολυωνύμου αυτής με το πολυώνυμο *Euler* του P. Για το σκοπό αυτό θα εργαστούμε όπως στο κεφάλαιο 5, χρησιμοποιώντας κατάλληλο τριγωνισμό του πολυτόπου της διάταξης του P.

Πρόταση 7.1.4 *Η οικογένεια των κώνων*

$$pos\Big(\{\chi_I : I \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}\}\Big),$$

όπου $\mathcal{R}$ κάποια μη κενή αλυσίδα ιδεωδών σταθερής τάξης και $\mathcal{E}$ μία μη κενή ισημερινή αλυσίδα ιδεωδών του P, ορίζει έναν βασικό τριγωνισμό του κώνου όλων των $P-$διαμερίσεων.
Κατά συνέπεια, η τομή της οικογένειας αυτής με το πολύτοπο της διάταξης αποτελεί έναν βασικό τριγωνισμό αυτού.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Καταρχήν, προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 7.1.1 ότι κάθε τέτοιος κώνος είναι κώνος$-$μονόπλοκο και ότι η τομή των κλειστοτήτων οποιωνδήποτε δύο από αυτούς τους κώνους είναι κοινή τους πλευρά. Επιπλέον, αναδιατυπώνοντας το γεγονός ότι κάθε $P-$ διαμέριση γράφεται μονοσημάντως ως άθροισμα μίας ισημερινής $P-$διαμέρισης και μίας $P-$διαμέρισης σταθερής τάξης προκύπτει ότι:

$$A(P) = \coprod_{\mathcal{R},\ \mathcal{E}} pos\Big(\{\chi_I : I \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}\}\Big),$$

όπου $\mathcal{R}$ μία μεγιστική αλυσίδα σταθερής τάξης και $\mathcal{E}$ μία μεγιστική ισημερινή αλυσίδα διατακτικών ιδεωδών του P. Αρκεί να δείξουμε ότι οι κώνοι, αυτοί, είναι βασικοί, όταν έχουν μέγιστη διάσταση (ίση με n).
Προφανώς, η διάσταση ενός τέτοιου κώνου είναι μέγιστη αν και μόνο αν είναι μεγιστικός, δηλαδή οι αλυσίδες $\mathcal{R}$ και $\mathcal{E}$ είναι μεγιστικές ως αλυσίδα σταθερής τάξης και ισημερινή αλυσίδα αντιστοίχα και, συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ έχει $n-r+r = n$ το πλήθος στοιχεία. Θα δείξουμε ότι κάθε κώνος μέγιστης διάστασης παράγει προσθετικά τον $\mathbb{Z}^n$, δηλαδή ότι το σύνολο των χαρακτηριστικών διανυσμάτων των διατακτικών ιδεωδών, που ανήκουν είτε στην $\mathcal{R}$ είτε στην $\mathcal{E}$ παράγουν κάθε ένα από τα διανύσματα της βάσης $\{e_1, ..., e_n\}$ του $\mathbb{Z}^n$. Ισοδύναμα, αρκεί να δειχτεί ότι αυτά είναι στοιχεία της προσθετικής ομάδας, που παράγουν τα χαρακτηριστικά διανύσματα των αλμάτων J_k, $k = 1, 2, ..., n-r+1$ της $\mathcal{E}$, σε συνδυασμό με τα χαρακτηριστικά διανύσματα όλων των τάξεων του P.
Θα δείξουμε, ισοδύναμα, ότι αν $s \in [n-r+1]$, τότε για οποιοδήποτε άλμα J

της αλυσίδας $\mathcal{E}$, με $rank(maxJ) = s$ και $\forall p \in J$, το e_p είναι στοιχείο αυτής της ομάδας. Αν το J είναι μονοσύνολο, ο ισχυρισμός ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι $\#J \geq 2$.
Με επαγωγή πάνω στο s:
Για $s = 1$ είναι προφανές, επειδή εξ'υποθέσεως, το J δεν μπορεί παρά να είναι μονοσύνολο. Στο βήμα της επαγωγής, αν $q = maxJ$, $p \in J$ με $p <_P q$ και $j = rank(p) < s$, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι κάθε στοιχείο α του συνόλου $P_j \setminus \{p\}$ είναι μέγιστο στοιχείο του άλματος στο οποίο ανήκει (αφού το p δεν είναι) και, συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση, το αντίστοιχο διάνυσμα e_α ανήκει στην ομάδα αυτή. Τότε ,όμως:

$$e_p = \chi_{P_j} - \sum_{\alpha \in P_j \setminus \{\alpha\}} e_\alpha,$$

άρα το e_p ανήκει στην ομάδα. Αλλά, αφού το p είναι τυχαίο στοιχείο του J και ισχύει:

$$e_q = \chi_{P_s} - \sum_{p \in J \setminus \{q\}} e_p,$$

προκύπτει ότι το e_q είναι στοιχείο της ομάδας, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.□

Ορισμός 7.1.2 *Ο παραπάνω τριγωνισμός του πολυτόπου της διάταξης ονομάζεται ισημερινός τριγωνισμός αυτού. Επιπλέον, το υποσύμπλεγμα διάστασης* $n - r - 1$ $\Delta_{eq}(P)$ *του* $\Delta J(P)$, *αποτελούμενο από όλα τα αφηρημένα μονόπλοκα που αντιστοιχούν στις ισημερινές αλυσίδες μη κενών διατακτικών ιδεωδών του* P *ονομάζεται ισημερινό σύμπλεγμα ή ισημερινή σφαίρα (αφού όπως θα δείξουμε είναι ισόμορφο με ένα πολύτοπο και, συνεπώς έχει την ομολογία της σφαίρας) του* P.

Για παράδειγμα, μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα ότι η ισημερινή σφαίρα του μερικώς διατεταγμένου συνόλου του Σχήματος 4.1 είναι ισόμορφη με ένα πεντάγωνο.

Πόρισμα 7.1.3 *Ο ισημερινός τριγωνισμός του πολυτόπου της διάταξης* $\mathbb{O}(P)$ *είναι ισόμορφος (ως αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα) με τη μονοπλεκτική ένωση (βλέπε κεφάλαιο 3)* $C(\sigma^r) * \Delta_{eq}(P)$, *όπου* σ^r *το* $r-$*μονόπλοκο, που παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα των διατακτικών ιδεωδών σταθερής τάξης του* P. *Επιπλέον, ισχύει:*

$$h(\Delta_{eq}(P), t) = h(\Delta J(P), t) = W(P, t)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 7.1.4. Για τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι:

$$h(C(\sigma^r) * \Delta_{eq}(P)) = h(C(\sigma^r))h(\Delta_{eq}(P)) = 1 \cdot h(\delta_{eq}(P).$$

Το ζητούμενο προκύπτει από το Πόρισμα 6.2.2, καθώς και από το γεγονός ότι ο ισημερινός τριγωνισμός είναι βασικός, από την προηγούμενη πρόταση.□

Παρατήρηση 7.1.2 *Είναι προφανές ότι αν η τάξη P_j του P είναι μονοσύνολο, ισχύει:*

$$\Delta_{eq}(P) \cong \Delta_{eq}\Big(\Big(\coprod_{i=1}^{j-1} P_i\Big) \bigoplus \Big(\coprod_{k=j+1}^{r} P_k\Big)\Big).$$

Κατά συνέπεια, κάθε ισημερινή σφαίρα διάστασης d είναι η ισημερινή σφαίρα ενός διαβαθμισμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου Q με τουλάχιστον δύο στοιχεία σε κάθε τάξη του. Επομένως αν $n = card(Q)$, έχουμε $n \geq 2r$, δηλαδή $2n \geq 2r + n$, άρα $n \leq 2n - 2r = 2(n - r) = 2d$. Επειδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος μερικώς διατεταγμένα σύνολα με το πολύ $2d-$στοιχεία, προκύπτει ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους ισημερινές σφαίρες διάστασης d.

7.2 Κυρτότητα και ισημερινές σφαίρες

Στην τελευταία παράγραφο αυτής της εργασίας θα αποδειχτεί ότι η ισημερινή σφαίρα είναι σύνορο ενός μονοπλεκτικού πολυτόπου, άρα πληροί τις συνθήκες του $g-$θεωρήματος. Για το σκοπό αυτό, αρχικά, θα προβάλουμε το πολύτοπο της διάταξης πάνω σε κατάλληλο διανυσματικό χώρο.

Με τον όρο "προβολή" κάποιου υποσυνόλου Q του $\mathbb{R}^n$ σε κάποιον διανυσματικό υπόχωρο V αυτού, εννοούμε το σύνολο

$$Q/V := \{q + V : q \in Q\},$$

που ονομάζεται σύνολο-πηλίκο. Προφανώς, αν το Q είναι πολύτοπο ή κώνος, τότε και το πηλίλο Q/V είναι αντιστοίχως πολύτοπο ή κώνος του χώρου, θεωρώντας τον ως ευκλείδιο διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 7.2.1 *Ο $r-$διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος $V^{rc} \subset \mathbb{R}^n$, που παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα των διατακτικών ιδεωδών σταθερής τάξης του P ονομάζεται διανυσματικός χώρος σταθερής τάξης.*

Πρόταση 7.2.1 *Η συλλογή των κώνων-πηλίκο*

$$\Big\{C_{\mathcal{E}} := pos\Big(\{\chi_I : I \in \mathcal{E}\}\Big)/V^{rc} : \mathcal{E} \text{ ισημερινή αλυσίδα του } P\Big\},$$

αποτελεί ένα αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα μέγιστης διάστασης, κώνων του $\mathbb{R}^n/V^{rc}$. *Επιπλέον, ισχύουν:*
$i)$ *Το εν λόγω μονοπλεκτικό σύμπλεγμα είναι βασικό σχετικά με την πηλικοομάδα* $\mathbb{Z}^n/(V^{rc} \cap \mathbb{Z}^n)$.
$ii)$ *Τα μονόπλοκα* $\Big(C_{\mathcal{E}} \cap \mathbb{O}(P)\Big)/V^{rc}$ *σχηματίζουν έναν βασικό τριγωνισμό του πολυτόπου-πηλίκο* $\mathbb{O}_{eq}(P) := \mathbb{O}(P)/V^{rc}$.
$iii)$ *Ο τριγωνισμός, αυτός, είναι ισόμορφος (με τη συνδυαστική έννοια) με τον κώνο* $0 * \Delta_{eq}(P)$, *όπου ως γνωστόν* $0_{\mathbb{R}^n/V^{rc}} = V_{rc}$.
Επομένως, αφού το $0 = V^{rc}$ *είναι εσωτερικό σημείο του* $\mathbb{O}_{eq}(P)$, *η ισημερινή σφαίρα* $\Delta_{eq}(P)$ *αποτελεί έναν τριγωνισμό της σφαίρας* $\partial\mathbb{O}_{eq}(P)$, *διάστασης* $n-r-1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή κάθε ένας από τους κώνους $C_{\mathcal{E}}$, όπου $\mathcal{E}$ ισημερινή αλυσίδα του P, παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα $\chi_I + V^{rc}$, $I \in \mathcal{E}$, τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n/V^{rc}$ (προφανές, από την Πρόταση 7.1.3) και $n-r$ το πλήθος, προκύπτει ότι κάθε ένας από τους κώνους, αυτούς, είναι μονοπλεκτικός και διάστασης $n - r = \dim \mathbb{R}^n/V^{rc}$. Επιπλέον, αν $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ δύο ισημερινές αλυσίδες διατακτικών ιδεωδών, ισχύει :

$$C_{\mathcal{E}'} \cap C_{\mathcal{E}''} = C_{\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''},$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι η συλλογή, αυτή, είναι ένα αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα από κώνους, μέγιστης διάστασης.
$i)$Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{R}$ η (μέγιστη) αλυσίδα ιδεωδών σταθερής τάξης $I_1^{rc} \subset ... \subset I_r^{rc}$ και $\mathcal{E}$ μία μεγιστική ισημερινή αλυσίδα, τότε

$$C_{\mathcal{E}} = pos\Big(\{\chi_I : I \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}\}\Big)/V^{rc}.$$

Από την Πρόταση 7.1.4 προκύπτει ότι κάθε διάνυσμα της μορφής $e_p + V^{rc}$, $p \in P$ παράγεται προσθετικά από τα διανύσματα $\chi_I + V^{rc}, I \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ και, συνεπώς, από τα διανύσματα $\chi_I + V^{rc}, I \in \mathcal{R}$, αφού $\chi_I = 0_{V^{rc}}$, $\forall I \in \mathcal{R}$. Άρα, κάθε μεγιστικός κώνος $C_{\mathcal{E}}$ είναι βασικός σχετικά με την ομάδα $\mathbb{Z}^n/(V^{rc} \cap \mathbb{Z}^n)$.
$ii)$Ισχύει:

$$\Big(C_{\mathcal{E}} \cap \mathbb{O}(P)/V^{rc}\Big) = \Big(C_{\mathcal{E}}/V^{rc}\Big) \cap \Big(\mathbb{O}(P)/V^{rc}\Big)$$

και το ζητούμενο έπεται.
$iii)$Έχουμε:

$$\Big(C_{\mathcal{E}}/V^{rc}\Big) \cap \Big(\mathbb{O}(P)/V^{rc}\Big) = conv\Big(\{0+V^{rc}\} \cup \{\chi_I + V^{rc} : I \in \mathcal{E}\}\Big)$$
$$= 0 * conv\Big(\{\chi_I + V^{rc} : I \in \mathcal{E}\}\Big).$$

Επομένως, υπάρχει μία (φυσικά ορισμένη) συνδυαστική ισομορφία μεταξύ του $0 * \Delta_{eq}(P)$ και του εν λόγω τριγωνισμού του πολυτόπου $\mathbb{O}_{eq}(P)$. □

Ειδικότερα, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η ισημερινή σφαίρα είναι όντως μία μονοπλεκτική σφαίρα. Για να δείξουμε ότι είναι ισομορφική με το σύνορο κάποιου πολυτόπου, θα παράγουμε ένα μονοπλεκτικό πολύτοπο από το (εν γένει) μη μονοπλεκτικό $\mathbb{O}_{eq}(P)$, "σπάζοντας" τις έδρες του με τέτοιο τρόπο, ώστε οι έδρες του $\Delta_{eq}(P)$ να είναι (έχοντας μετακινηθεί λίγο), ακριβώς οι έδρες του νέου πολυτόπου. Για το σκοπό, αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του τραβήγματος των κορυφών ενός πολυτόπου.

Ορισμός 7.2.2 *Έστω Q ένα $d-$πολύτοπο και v μία κορυφή αυτού. Λέμε ότι τραβάμε την κορυφή v του Q, αν την αντικαταστήσουμε με μία κορυφή $\widehat{v} \in \mathbb{R}^n$, η οποία αφενός είναι πολύ κοντά στην v (τόσο ώστε να μην επηρεάζει καμμία από τις πλευρές στις οποίες δεν ανήκει) και αφετέρου για κάθε έδρα F του Q, που περιέχει την v, η $\widehat{v}$ βρίσκεται σε εκείνον τον ανοιχτό ημιχώρο που ορίζει η F, ο οποίος δεν περιέχει το Q.*
Προκύπτει, λοιπόν, το πολύτοπο $conv\Big(\{w : w \text{ κορυφή του } Q, w \neq v\} \cup \{\widehat{v}\}\Big)$, που συμβολίζεται με $pull_v(Q)$.

Ένας απλός τρόπος να επιτύχουμε το τράβηγμα της v, όταν π.χ. $0 \in Q^o$, είναι η αντικατάσταση της v με την $\widehat{v} := (1+\varepsilon)v$, για ε πολύ μικρό. Πάντως, ασχέτως με το ποια θα είναι η επιλογή της $\widehat{v}$, είναι φανερό ότι το πολύτοπο $pull_v(Q)$ θα έχει πάντα την ίδια συνδυαστική δομή.
Επιπλέον, από κατασκευής, για οποιαδήποτε πλευρά F του Q, με $F \ni v$ η κορυφή v δεν ανήκει στην αφφινική θήκη της F. Το γεγονός, αυτό, σε συνδυασμό με το ότι η $\widehat{v}$ είναι κοντά στην v σημαίνει ότι οι έδρες του $pull_v(Q)$, οι οποίες περιέχουν την $\widehat{v}$ είναι ακριβώς της μορφής $\widehat{v} * G$, όπου G έδρα κάποιας έδρας του Q, τέτοια ώστε η v να μην περιέχεται στην G. Συνεπώς, αν όλες οι έδρες του Q που περιέχουν την v είναι μονόπλοκα, τότε $pull_v(Q) \cong Q$. Ειδικότερα, τραβώντας όλες τις κορυφές του Q, το πολύτοπο που προκύπτει είναι μονοπλεκτκό. Η επόμενη πρόταση θα αποσαφηνήσει την κατάσταση.

Πρόταση 7.2.2 *Έστω $\widehat{Q}$ το πολύτοπο που προκύπτει τραβώντας όλες τις κορυφές του πολυτόπου Q με κάποια σειρά $v_1, v_2, ..., v_s$.
Αν ονομάσουμε $\widehat{v}_1, ..., \widehat{v}_s$ τις αντίστοιχες κορυφές του πολυτόπου $\widehat{Q}$, που προκύπτει, τότε δύο κορυφές $\widehat{v}_j, \widehat{v}_k$ δεν περιέχονται σε κοινή ακμή του $\widehat{Q}$ αν και μόνο αν η ελάχιστη πλευρά F του Q που περιέχει τις v_j και v_k είναι είτε το ίδιο το Q είτε περιέχει κάποια κορυφή v_i, με $i < j, k$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω, π.χ. , ότι $j < k$. Αν υποθέσουμε ότι η ελάχιστη πλευρά F του Q, που περιέχει τις v_j, v_k είναι το ίδιο το Q, τότε για κάθε υπερεπίπεδο V του $\mathbb{R}^n$, που περιέχει τις v_j, v_k, το Q έχει σημεία και στους δύο ανοιχτούς ημιχώρους του V, γεγονός που δεν αλλάζει μετά από μικρές διαταραχές των κορυφών του, αφού αυτοί οι δύο ημιχώροι είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Άρα, οι v_j και v_k δεν ανήκουν σε κοινή ακμή του $\widehat{Q}$. Αν, τώρα, δεχτούμε ότι $\exists v_i \in F$ με $i < j, k$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = min\{l : v_l \in F, l < j, k\}$.
Τότε, η πλευρά F μένει ανεπηρέαστη από το τράβηγμα των κορυφών $v_1, ...v_{i-1}$, ενώ τραβώντας την κορυφή v_i του πολυτόπου $pull_{v_{i-1}}(...pull_{v_{i-2}}(Q)...)$ οι κορυφές v_j, v_k δεν ανήκουν σε καμμία κοινή έδρα του $pull_{v_i}(...pull_{v_{i-1}}(Q)...)$, οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
Πράγματι, αν οι v_j, v_k περιέχονται σε κάποια κοινή έδρα του τελευταίου, η οποία περιέχει την κορυφή $\widehat{v}_i$, τότε αυτή θα είναι της μορφής $v * G$, όπου G πλευρά του $pull_{v_{i-1}}(...pull_{v_{i-2}}(Q)...)$. Όμως, $G \supset F \ni v_i$, άτοπο αφού $v_i \notin pull_{v_i}(...pull_{v_{i-1}}(Q)...)$.
Αν, αντίθετα, η έδρα αυτή δεν περιέχει την $\widehat{v}_i$, σημαίνει ότι έμεινε ανεπηρέαστη από το τράβηγμα της v_i, επομένως είναι και έδρα του $pull_{v_{i-1}}(...pull_{v_{i-2}}(Q)...)$ και, συνεπώς, περιέχει την F, πράγμα άτοπο, όπως είδαμε.
Αντίστροφα, αν οι κορυφές $\widehat{v}_j, \widehat{v}_k$ δεν ανήκουν σε κάποια κοινή ακμή και η ελάχιστη πλευρά F του Q που περιέχει τις v_j, v_k δεν είναι ολόκληρο το Q, τότε υπάρχει $i < j, k$ με $v_i \in F$. Αλλιώς, η F θα έμενε αναλλοίωτη μέχρι να τραβηχτεί η κορυφή v_j, ενώ τραβώντας την τελευταία, το ευθύγραμμο τμήμα $v_j * v_k$ θα ήταν πλευρά του $pull_{v_j}(...pull_{v_{j-1}}(Q)...)$, οπότε προφανώς και του $\widehat{Q}$.□

Θεώρημα 7.2.3 *Το ισημερινό σύμπλεγμα $\Delta_{eq}(P)$ είναι ισόμορφο με το συνοριακό σύμπλεγμα ενός πολυτόπου.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κατασκευάζουμε ένα πολύτοπο $\widehat{Q}$, τραβώντας τις κορυφές $v_i := \chi_I + V^{rc}$ (όπου χ_I ισημερινό ιδεώδες του P) του $Q = \mathbb{O}_{eq}(P)$, με τέτοια σειρά, ώστε κορυφές που αντιστοιχούν σε ισημερινά διατακτικά ιδεώδη με μικρότερη πληθικότητα, να έρχονται πριν από αυτές που αντιστοιχούν σε ιδεώδη μεγαλύτερης πληθικότητας. Θα δείξουμε ότι $\Delta_{eq}(P) \cong \partial Q$. Αρκεί να δείξουμε (με το συμβολισμό

της προηγούμενης Πρότασης) ότι αν το σύνολο $\{\widehat{v}_{I_1},...,\widehat{v}_{I_k}\}$ είναι οι κορυφές κάποιας πλευράς του $\widehat{Q}$, τότε το σύνολο $\{I_1,...,I_k\}$ είναι μία ισημερινή αλυσίδα του P. Πράγματι, τότε θα έχουμε δείξει ότι ότι το $\partial\widehat{Q}$ είναι υποσύμπλεγμα του $\Delta_{eq}(P)$. Όμως, τόσο το $\partial\widehat{Q}$, όσο το $\Delta_{eq}(P)$ είναι τριγωνισμοί του $\partial\mathbb{O}_{eq}(P)$, άρα θα πρέπει να ταυτίζονται. Αρκεί, λοιπόν, να δειχτεί ότι όταν το σύνολο ιδεωδών $\{I_1,...,I_k\}$ του P δεν είναι ισημερινή αλυσίδα, τότε οι κορυφές $\widehat{v}_{I_1},...,\widehat{v}_{I_k}$ δεν ανήκουν σε κοινή πλευρά του $\widehat{Q}$.
Έστω, τώρα, F η μικρότερη πλευρά του $\mathbb{O}_{eq}(P)$, τέτοια ώστε $F\supset\{v_{I_1},...,v_{I_k}\}$. Υποθέτουμε ότι η F δεν είναι ολόκληρο το $\mathbb{O}_{eq}(P)$, γιατί αλλιώς θα είχαμε ήδη τελειώσει, αφού οι κορυφές $\widehat{v}_{I_1},...,\widehat{v}_{I_k}$ δεν θα άνηκαν σε κοινή έδρα του $\widehat{Q}$. Τότε, ως γνωστόν, υπάρχει υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n/V^{rc}$, που να εφάπτεται της F και ο ένας από τους δύο κλειστούς ημιχώρους, που ορίζει να περιέχει το $\mathbb{O}_{eq}(P)$. Με άλλα λόγια, υπάρχει γραμμική μορφή $f:\mathbb{R}^n/V^{rc}\to\mathbb{R}$, που να μεγιστοποιείται στις κορυφές της F και να παίρνει τιμές αυστηρά μικρότερες του $M:=max f$ στο σύνολο $\mathbb{O}_{eq}(P)\setminus F$. Σημειώνεται ότι επειδή το $0=V^{rc}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{O}_{eq}(P)$, προκύπτει ότι $0\notin F$, άρα $0=f(0)<M$.
Για το μη ισημερινό σύνολο ιδεωδών $\{I_1,...,I_k\}$, υπάρχουν οι εξής δύο περιπτώσεις:
1. Υπάρχουν $j,l\in\{1,...,k\}$ τέτοια ώστε $I_j\not\subset I_l$ και $I_l\not\subset I_j$. Τότε, προφανώς ισχύει:
$$\chi_{I_j}+\chi_{I_l}=\chi_{I_j\cap I_l}+\chi_{I_j\cap I_l},$$
οπότε:
$$f(v_{I_j})+f(v_{I_l})=f(v_{I_j\cap I_l})+f(v_{I_j\cap I_l}).$$
Όμως, έχουμε $f(v_{I_j})=f(v_{I_l})=M$ και $f(v_{I_j\cap I_l}),f(v_{I_j\cap I_l})\leq M$, άρα $v_{I_j\cap I_l},v_{I_j\cap I_l}\in F$. Από κατασκευής, επειδή $\#I_j\cap I_l<\#I_j,\#I_l$, προκύπτει ότι η κορυφή $v_{I_j\cap I_l}$ έχει τραβηχτεί πριν από τις v_{I_j} και v_{I_l}, άρα λόγω της προηγούμενης Πρότασης, οι κορυφές $\widehat{v}_{I_j}$ και $\widehat{v}_{I_l}$ δεν ανήκουν σε κοινή ακμή του $\widehat{Q}$ και, συνεπώς, οι κορυφές $v_{I_1},...,v_{I_k}$ δεν μπορεί να ανήκουν σε κοινή πλευρά του Q (αφού το $\widehat{Q}$ είναι μονοπλεκτικό).
2. Το σύνολο $\{I_1,...I_k\}$ είναι ολικά διατεταγμένο ως προς τη σχέση του εγκλεισμού, αλλά δεν είναι ισημερινή αλυσίδα. Τότε, υπάρχει μία τιμή $j\in\{1,...,r-1\}$, τέτοια ώστε κανένα ζεύγος $(p_j,P_{j+1})\in P_j\times P_{j+1}$, με $p_j<_P p_{j+1}$, να μην περιέχεται σε κάποιο από τα άλματα J_i , $i=1,2,...,k,k+1$ της αλυσίδας $I_1\subset...\subset I_k$.
Για $l=1,2,...,k-1$, ορίζουμε τα σύνολα
$$I'_l:=(I_{l+1}-I_j^{rc})\cup I_l.$$
Θα δείξουμε ότι κάθε ένα από τα I'_l είναι διατακτικό ιδεώδες του P. Πράγματι, αν δεν ήταν, θα υπήρχαν $p\in I_{l+1}\setminus I_l$, με $rank(p)\leq j+1$ και $p'\in I_{l+1}$, το οποίο

να καλύπτει το p. Επειδή το I_l είναι διατακτικό ιδεώδες και $p \notin I_l$, προκύπτει ότι $p' \notin I_l$. Άρα, $\{p, p'\} \subset I_{l+1} \setminus I_l = J_{l+1}$, άτοπο από την υπόθεσή μας.
Θα δείξουμε, τώρα, ότι:

$$\chi_{I_1} + ... + \chi_{I_k} = \chi_{I_j^{rc}} + \chi_{I'_1} + ... + \chi_{I'_{k-1}} \, . \tag{7.1}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το τυχόν $p \in P$ εμφανίζεται τόσες φορές στα διατακτικά ιδεώδη, όσες και στα $I_j^{rc}, I'_1, ..., I'_{k-1}$. Ορίζουμε,

$$i_0 := min\{i : p \in I_i\}.$$

Άρα, $p \in I_{i_0}, I_{i_0+1}, ..., I_k$ και $p \notin I_1, ..., I_{i_0-1}$ (θέτουμε $I_0 := \emptyset$, για να καλύψουμε και την περίπτωση $i_0 = 1$), ενώ $p \in I'_{i_0}, ..., I'_{k-1}$ και $p \notin I'_1, ..., I'_{i_0-2}$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
α)$rank(p) \geq j+1$. Τότε, $p \notin I_1 = J_1$, αλλιώς το άλμα J_1 θα περιείχε στοιχεία q, q' με $q <_P q'$ και $rank(q') = j+1 = rank(q)+1$. Επιπλέον, είναι προφανές ότι $p \notin I_j^{rc}$ και $p \in I'_{i_0-1}$, άρα το p τόσο στο αριστερό, όσο και στο δεξί μέλος εμφανίζεται $(i+1-i_0)$-φορές.
β)$rank(p) \leq j$. Τότε, προφανώς, $p \in I_j^{rc}$ και $p \notin I'_{i_0-1}$, άρα και πάλι ισχύει το ζητούμενο.
Θα δείξουμε, τώρα, ότι το σύνολο $\widehat{v}_{I_1}, ..., \widehat{v}_{I_k}$ δεν μπορεί να περιέχεται σε καμμία γνήσια πλευρά του $\widehat{Q}$. Αλλιώς, η ελάχιστη πλευρά F του $\mathbb{O}_{eq}(P)$, με $F \supset \{\widehat{v}_{I_1}, ..., \widehat{v}_{I_k}\}$ θα ήταν γνήσια πλευρά του $\mathbb{O}_{eq}(P)$, οπότε θα ίσχυε:

$$f(v_{I_1}) = ... = f(v_{I_k}) = M > 0.$$

Αλλά, από τη σχέση 7.1, προκύπτει άμεσα ότι:

$$f(v_{I_1}) + ... + f(v_{I_k}) = f(v_{I_j^{rc}}) + f(I'_{v_1}) + ... + f(I'_{v_{k-1}})$$

$$\Rightarrow kM = f(v_{I_j^{rc}}) + f(I'_{v_1}) + ... + f(I'_{v_{k-1}}).$$

Όμως, $v_{I_j^{rc}} = I_j^{rc} + V^{rc} = 0$, οπότε $f(v_{I_j^{rc}}) = 0$ και
$f(I'_{v_1}), ..., f(I'_{v_{k-1}}) \leq M$. Έχουμε, λοιπόν,

$$kM \leq (k-1)M \Rightarrow M \leq 0.$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε αντίφαση άρα το σύνολο $\{\widehat{v}_{I_1}, ..., \widehat{v}_{I_k}\}$ δεν μπορεί να περιέχεται σε καμμία γνήσια πλευρά του $\widehat{Q}$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.$\square$

Το επόμενο είναι άμεσο.

Πόρισμα 7.2.4 *i)Η ισημερινή σφαίρα είναι αποφλοιώσιμη.*
ii)Η ακολουθία των συντελεστών του πολυωνύμου Euler ικανοποιεί τις συνθήκες του $g-$θεωρήματος. Ειδικότερα, είναι συμμετρική και μονότροπη.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>
Το επόμενο θεώρημα αποτελεί μία γενίκευση του Θεωρήματος 7.2.3, η οποία δόθηκε από τον Χ. Αθανασιάδη [1] και βρίσκει εφαρμογή σε κλάση πολυτόπων πολύ γενικότερη από αυτήν του $\mathbb{O}(P)$.

Θεώρημα 7.2.5 *Έστω P ένα ακέραιο $m-$πολύτοπο και $\tau = (v_p, ..., v_1)$ μία αρίθμηση των κορυφών του, τέτοια ώστε:*
i)Ο αντίστροφος λεξικογραφικός τριγωνισμός $\Delta_\tau(P)$ είναι βασικός.
ii)Για κάποιο $n \in [p]$, το σύνολο $\{v_1, ..., v_n\}$ είναι το σύνολο κορυφών ενός μονοπλόκου Σ, το οποίο έχει την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε έδρα του P περιέχει ακριβώς $n-1$ κορυφές του Σ (τέτοιο μονόπλοκο ονομάζεται Ειδικό Μονόπλοκο αναφορικά με το P).
Τότε,

$$\sum_{r \geq 0} i(P, r)t^r = \frac{h(t)}{(1-t)^{m+1}}$$

και το $h(t)$ είναι το $h-$διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού πολυτόπου Q, διάστασης $d = m - n + 1$ και, συνεπώς, ικανοποιεί τις συνθήκες του $g-$θεωρήματος.
Επιπλέον, η επιλογή του Q μπορεί να γίνει έτσι ώστε το τελευταίο να είναι ισόμορφο με τον αντίστροφο λεξικογραφικό τριγωνισμό του συμπλέγματος $\mathcal{C}(P) \setminus \{v_1, ...v_p\}$, σχετικά με την αρίθμηση $(v_p, v_{p-1}, ..., v_1)$.

Ο ίδιος απέδειξε στο [2] ότι, αν P είναι ένα φυσικά επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε για τους συντελεστές q_i του πολυωνύμου $Euler$ $W(P, t)$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
$q_i \geq q_{d-i}$, για $1 \leq i \leq \llcorner d/2 \lrcorner$, $q_{\llcorner d/2 \lrcorner} \geq q_{\llcorner d/2 \lrcorner + 1} \geq ... \geq q_d$ και $q_j = 0$, για $j = d+1, ..., n$,
όπου $d := n - e$ και e ο μέγιστος αριθμός, για τον οποίο υπάρχει αλυσίδα $I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_e$ ιδεωδών του μερικώς διατεταγμένου συνόλου P^o, που παράγεται επισυνάπτοντας στο P ένα ελάχιστο στοιχείο $\widehat{0}$, με την ιδιότητα:
Για κάθε $\alpha \in I_{i-1}$, το σύνολο των στοιχείων του P, που καλύπτουν το α είναι μη κενό υποσύνολο του I_i, $i = 1, ..., e$.
Το συμπέρασμα, αυτό, ενισχύει την εικασία ότι η ακολουθία των συντελεστών του πολυωνύμου $Euler$ είναι μονότροπη, ακόμη και αν το P δεν είναι διαβαθμισμένο. Παρ'όλα αυτά, σε αυτήν την περίπτωση, το τελευταίο δεν είναι εν γένει συμμετρικό, αφού π.χ. το πολυώνυμο $Euler$ του φυσικά επιγεγραμμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου $\mathbf{1} \coprod \mathbf{3}$ (Σχήμα 4.6) είναι το $1 + 4x$, το οποίο δεν είναι συμμετρικό.

Επίσης, ο *P. Branden* γενίκευσε το Πόρισμα 7.2.4(*ii*) (η απόδειξή του αποφεύγει τη χρήση του $g-$θεωρήματος) [8], αποδεικνύοντας συμμετρικότητα και μονοτροπία των πολυωνύμων *Euler* μίας μεγαλύτερης κλάσης μερικώς διατεταγμένων συνόλων, τα λεγόμενα διαβαθμισμένα ως προς το πρόσημο ($sign - graded$). Τέτοια σύνολα χαρακτηρίζονται από την εξής ιδιότητα:
Το πλήθος των ανόδων μείον το πλήθος των καθόδων κάθε μεγιστικής αλυσίδας -θεωρούμενη ως επαγόμενο υποσύνολο του P-είναι πάντα σταθερό. (Προφανώς, αν το P είναι διαβαθμισμένο και φυσικά επιγεγραμμένο, πληροί την παραπάνω συνθήκη, αφού αυτή η διαφορά ισούται πάντα με την τάξη του P μείον ένα.)

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι το Πόρισμα 7.2.4(*ii*) δεν ισχύει όταν το P είναι διαβαθμισμένο, αλλά όχι φυσικά επιγεγραμμένο. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη $1,\ 3 < 2,\ 3 < 4$ (Σχήμα 4.2) είναι διαβαθμισμένο, αλλά το πολυώνυμο *Euler* αυτού είναι το $3x + 2x^2$, που δεν είναι συμμετρικό.

Βιβλιογραφία

[1] Christos A. Athanasiadis: Ehrhart polynomials, simplicial polytopes, magic squares and a conjectute of Stanley, J.Reine Angew. Math., **583** (2005), 163-174.

[2] Christos A. Athanasiadis: h^*-vectors, Eulerian polynomials and stable polytopes of graphs, Electron J. Combin. (2004/2005), no. **2** Research Paper 6, 13 pp.(electronic).

[3] David W. Barnette: The minimum number of vertices of a simple polytope, Israel J. Math. **10** (1971), 121-125.

[4] David W. Barnette: A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, Pacific J. Math. **46** (1973), 349-354.

[5] Louis J. Billera and Carl W. Lee: Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simpicial polytopes, Bulletin Amer. Math. Soc. **2** (1980), 181-185.

[6] Louis J. Billera and Carl W. Lee: A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes, J.combin. Theory, Ser. A **31** (1981), 237-255.

[7] Garett Birkhoff: On the combination of subalgebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. **2** (1933), 441-464.

[8] Peter Bränden: Sign-graded posets, unimodality of W-polynomials and the Charney-Davis conjectute, Electron. J. Combin. **11** (2004/2005), no. 2, Research Paper 9, 15 pp. (electronic).

[9] Heinz Bruggester and Peter Mani: Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand. **29** (1971), 197-205.

[10] Eugene Ehrhart: Sur un problém de géométrie diophantinne linéaire. I. Polyédres et **18** (1975), 138-154.

[11] EUGENE EHRHART: Sur un problém de géométrie diophantinne linéaire. II. Systeéms diophantiens linéares, J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 25-49.

[12] L. GEISSINGER: A polytope associated to a finite ordered set, preprint.

[13] CARL W. LEE: Counting the faces of simplicial polytopes, Ph.D Thesis, Cornel University (1981).

[14] CARL W. LEE: Regular triangulations of convex polytopes, in Applied Geometry and Discrete Mathematics - The Victor Klee Festschrift (P. Gritzmann and B. Sturmfels, eds), Amer. Math. soc., DIMACS Series **4**, Providence, RI, 1991, pp. 443-456.

[15] PETER MCMULLEN: The maximum numbers of faces of a convex polytope, Israel J. Math. **17** (1970), 179-184.

[16] VICTOR REINER and VOLKMAR WELKER: On the Charney-Davis and Neggers-Stanley conjectures, J. Combin. Theory Series A. **109** (2005), no. **2**, 247-280

[17] DUNKAN M'LAREN YOUNG SOMMERVILLE: The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimentions, Proc. Royal Society London Ser. A **115** (1927), 103-119.

[18] RICHARD P. STANLEY: Decompositions of rational convex polytopes, Annals of Discrete Math. **6** (1980), 333-342.

[19] RICHARD P. STANLEY: Enumerative Combinatorics Vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; second printing, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[20] RICHARD P. STANLEY: Ordered structures and partitions, Ph.D thesis, Harvard Univ., 1971.

[21] RICHARD P. STANLEY: Ordered structures and partitions, Memoirs Amer. Math. Soc., no. **119** (1972).

[22] RICHARD P. STANLEY: The number of faces of simplicial convex polytopes, Advances in Math. **35** (1980), 236-238.

[23] RICHARD P. STANLEY: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in: "Discrete Geometry and Convexity", New York 1982, (J.E. Goodman, E. Lutwak, J. Malkevitch and R. Pollack, eds.), Annals New York Academy of Sciences **440**, New York 1985, pp. 212-223.

[24] RICHARD P. STANLEY: Two poset polytopes, Discrete Comput. Geom. **1** (1986), 9-23.

[25] BERND STURMFELS: Gröbner Bases and Convex Polytopes, University Lecture Series **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[26] GÜNTER M. ZIEGLER: Lectures on Polytopes, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlang, New York, 1995.