

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΤΗΣ  
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑΣ Μ. ΣΑΡΙΔΑΚΗ

**ΜΗΚΟΣ, ΕΜΒΑΔΟΝ, ΟΓΚΟΣ**

**ΤΡΕΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ  
ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

**ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ  
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΑΛΥΚΑΚΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ  
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» και υπεβλήθη τον Νοέμβριο του 2006.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Δημήτριος Καλυκάκης. Η τριμελής επιτροπή αξιολόγησης αποτελείτο από τους παρακάτω καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης:

κ. Ιωάννη Αντωνιάδη, Καθηγητή, Πρόεδρο του Τμήματος Μαθηματικών,

κ. Δημήτριο Καλυκάκη, Εντεταλμένο Επίκουρο Καθηγητή και

κ. Μιχαήλ Λάμπρου, Καθηγητή.

## Ευχαριστίες

Θεωρώ καθήκον μου να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Δημήτρη Καλυκάκη, για την καθοδήγηση και τη βοήθεια του στην εκπόνηση της εργασίας αυτής, αφιερώνοντας αρκετό χρόνο εργασίας και συζήτησης.

Επίσης ευχαριστώ, τους καθηγητές μου κ. Ιωάννη Αντωνιάδη και κ. Μιχάλη Λάμπρου, που με τις διορθώσεις και τις υποδείξεις τους συντέλεσαν στην αρτιότερη παρουσίαση της παρούσας εργασίας.

Ακόμα, οφείλω ευχαριστίες στη συνάδελφο, μαθηματικό Δέσποινα Χριστοφόρου για την βοήθεια της στο σχεδιαστικό μέρος της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ την οικογένεια μου, που μου πρόσφερε και συνεχίζει να μου προσφέρει, αγάπη και υλικά αγαθά, εφόδια πολύτιμα για την επίτευξη των στόχων μου.

Την παρούσα εργασία  
την αφιερώνω  
στους γονείς μου,  
Μάρκο και Ειρήνη

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|                |   |
|----------------|---|
| ΕΙΣΑΓΩΓΗ ..... | 7 |
|----------------|---|

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

|   |    |
|---|----|
| 1.1 Εισαγωγή .....  | 12 |
| 1.2 Η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης .....                                 | 13 |
| 1.3 Η καμπύλη των Cantor-Lebesgue .....   | 17 |
| 1.4 Ο γεωμετρικός ορισμός του μήκους καμπύλης .....                             | 21 |
| 1.5 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης .....  | 27 |
| 1.6 Χαρακτηρισμός καμπύλων που έχουν πεπερασμένο μήκος .....                    | 30 |
| 1.7 Το μήκος του κύκλου και ο αριθμός $\pi$ .....                               | 36 |
| 1.8 Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ ..... | 38 |
| 1.9 Το μήκος κλασικών καμπυλών .....  | 40 |
| 1.10 Διαδρομές ελάχιστου μήκους στο επίπεδο και στη σφαίρα .....                | 45 |
| 1.11 Ένας ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων .....                         | 48 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....  | 50 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

|  |    |
|--|----|
| 2.1 Εισαγωγή .....   | 52 |
| 2.2 Φραγμένα πολυγωνικά σχήματα .....  | 53 |
| 2.3 Τα τρία αξιώματα του εμβαδού για<br>φραγμένα πολυγωνικά σχήματα .....                    | 55 |
| 2.4 Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου .....  | 59 |
| 2.5 Τύποι εμβαδού $n$ -γώνων (με $n \geq 3$ ) .....  | 63 |
| 2.6 Εμβαδόν φραγμένου, όχι κατ' ανάγκη πολυγωνικού, σχήματος .....                           | 67 |
| 2.7 Ο υπολογισμός του εμβαδού μέσω απλού,<br>διπλού και επικαμπύλιου ολοκληρώματος .....     | 70 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Το εμβαδόν κυρτού πολυγώνου συναρτήσει<br>των συντεταγμένων των κορυφών του ..... | 79 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....   | 84 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

|   |     |
|---|-----|
| 3.1 Εισαγωγή .....  | 85  |
| 3.2 Ο Μύθος της Διδούς .....  | 86  |
| 3.3 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα και η ισοπεριμετρική ανισότητα .....                                   | 88  |
| 3.4 Πρώτη στοιχειώδης απόδειξη: Επαγωγικά με επιχείρημα<br>συμπάγειας και επιχείρημα J. Steiner ..... | 89  |
| 3.5 Δεύτερη στοιχειώδης απόδειξη: τύπου Bonnesen (I) .....  | 102 |
| 3.6 Τρίτη στοιχειώδης απόδειξη: Επιχείρημα σύγκρισης του Lawlor ..                                    | 105 |
| 3.7 Τέταρτη στοιχειώδης απόδειξη: τύπου Bonnesen (II)<br>– ισχυρή έκδοση .....                        | 109 |
| 3.8 Πέμπτη απόδειξη: του A. Hurwitz, με χρήση<br>λήμματος Wirtinger .....                             | 114 |
| 3.9 Έκτη απόδειξη: του E. Schmidt .....   | 117 |
| 3.10 Έβδομη απόδειξη: του A. Hurwitz, με χρήση σειρών Fourier .....                                   | 120 |
| 3.11 Όγδοη απόδειξη: του T. Carleman, με χρήση δυναμοσειρών .....                                     | 124 |
| BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....  | 125 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 Εισαγωγή .....   | 127 |
| 4.2 Η παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας .....  | 128 |
| 4.3 Μια πρώτη απόπειρα ορισμού του εμβαδού<br>επιφάνειας – το αντιπαράδειγμα του H.A. Schwarz .....  | 134 |
| 4.4 Ο γεωμετρικός ορισμός του εμβαδού επιφάνειας<br>και ο χαρακτηρισμός του μέσω του $\iint  \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v  dudv$ ..... | 138 |
| 4.5 Αξιοσημείωτες ιδιότητες του εμβαδού επιφάνειας .....   | 145 |
| 4.6 Εμβαδά κλασικών επιφανειών .....   | 147 |
| BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....   | 149 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΟΓΚΟΣ

|  |     |
|--|-----|
| 5.1 Εισαγωγή .....   | 151 |
| 5.2 Τα τρία αξιώματα του όγκου για<br>φραγμένες πολυεδρικές περιοχές ..... | 152 |
| 5.3 Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου .....                                | 155 |
| 5.4 Η Αρχή του Cavalieri για φραγμένες πολυεδρικές περιοχές .....          | 159 |
| 5.5 Όγκος φραγμένης, όχι κατ' ανάγκην πολυεδρικής, περιοχής .....          | 164 |
| 5.6 Εφαρμογές της Αρχής του Cavalieri .....                                | 165 |
| BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....   | 167 |

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία μας αυτή ασχολούμαστε με τις τρεις θεμελιώδεις έννοιες της γεωμετρίας, και των μαθηματικών γενικότερα: το μήκος, το εμβαδόν και τον όγκο.

Συγκεκριμένα, ασχολούμαστε, από άποψης θεμελιώσης (και φυσικά διδακτικής παρουσίασης) με τις έννοιες α) του μήκους επίπεδης καμπύλης, β) του εμβαδού επίπεδου σχήματος, γ) του εμβαδού επιφανείας του χώρου και δ) του όγκου τρισδιάστατου στερεού. Έννοιες που διατρέχουν τα μαθηματικά από την πρώτη μέχρι την τρίτη βαθμίδα της εκπαίδευσης.

Οι περισσότεροι είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τι ακριβώς μετριέται από τους τύπους :

$$2\pi r, \pi r^2, 4\pi r^2, \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Πώς όμως προκύπτουν αυτοί οι τύποι; Από ποιες γεωμετρικές παραδοχές; Και με τι γεωμετρικά επιχειρήματα; Αν για παράδειγμα, κληθεί ένας φοιτητής ή ένας νέος καθηγητής μαθηματικών να αποδείξει ότι το εμβαδόν του μοναδιαίου ημικυκλίου είναι ίσο με  $\frac{\pi}{2}$ , το πιθανότερο είναι να στηρίξει την απάντηση του, μέσω του ολοκληρώματος  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  και της παραδοχής ότι το εμβαδόν μιας περιοχής της μορφής

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

δίδεται από τον τύπο:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Για μας είναι ένα ανοικτό ερώτημα το κατά πόσο ένας που δίνει μια τέτοια, κατά τα άλλα ορθή, απάντηση κατανοεί ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα απλά συγκεκριαλιώνει με έναν οικονομικό τρόπο τη μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου - Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού και συνεπώς, εκτός από κάποια αλγεβρικά τεχνάσματα και υπολογισμούς, εφαρμόζει μια αμιγώς γεωμετρική μέθοδο για να απαντήσει στο αρχικό ερώτημα.

Επειδή ζούμε σε μια εποχή που, και στην εκπαίδευση των μαθηματικών, το ζητούμενο της είναι κυρίως η ταχύτητα και η ποσότητα αποφασίσαμε να εστιάσουμε τη προσοχή μας στους γνωστούς τύπους:

α)  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  για το μήκος καμπύλης,

β)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ,  $\iint_A 1 dx dy$ ,  $\frac{1}{2} \oint_{\gamma} (x dy - y dx)$  για το εμβαδόν επίπεδου σχήματος,

γ)  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$  για το εμβαδόν επιφανείας,

δ) την αρχή του Cavalieri, που συγκεφαλαιώνει τους γνωστούς τύπους μέσω διπλού και τριπλού ολοκληρώματος, για τον υπολογισμό του όγκου των στερεών

και να παρουσιάσουμε σε μια ενιαία εργασία πως αυτές προκύπτουν από τις πιο απλές γεωμετρικές παραδοχές που μπορούμε να δεχτούμε.

Στα περισσότερα βιβλία απειροστικού λογισμού και γεωμετρίας οι παραπάνω τύποι τίθενται ως ορισμοί των αντίστοιχων εννοιών, αντί να προκύπτουν ως συνέπεια κάποιων γεωμετρικών αξιωμάτων.

Για να γίνει κατανοητή και να αναδειχθεί η ιδιαιτερότητα κάθε τέτοιας έννοιας παραθέτουμε, όπου κρίναμε απαραίτητο, χαρακτηριστικά παραδείγματα και εφαρμογές που έχουν παρθεί από την ιστορική εξέλιξη των εννοιών. Σε καμία όμως περίπτωση δεν επιχειρήσαμε να παρουσιάσουμε την ιστορική εξέλιξη αυτών, κάτι που αποτελεί αντικείμενο ξεχωριστής εργασίας. Εδώ ασχολούμαστε αποκλειστικά με μια πρόταση θεμελίωσης των εννοιών με τρόπο σύντομο, επιστημονικά τεκμηριωμένο και από διδακτικής απόψεως λειτουργικό και αποτελεσματικό.

Για το σκοπό αυτό, ανατρέξαμε σε βιβλία Απειροστικού Λογισμού και Γεωμετρίας τόσο στην ελληνική όσο και στην διεθνή βιβλιογραφία και αρθρογραφία. Στην ελληνική γλώσσα τα ευρήματα ήταν πολύ φτωχά. Από την άποψη αυτή, η παρούσα εργασία, πιστεύουμε, καλύπτει, ένα μέρος από το κενό αυτό. Όσον αφορά την διεθνή βιβλιογραφία ανατρέξαμε σε έργα πρωτοπόρων μαθηματικών και σε εργασίες από επιστημονικά περιοδικά.



Η εργασία μας αναπτύσσεται σε πέντε κεφάλαια ως εξής:

Στο **πρώτο κεφάλαιο** παρουσιάζουμε την έννοια του μήκους επίπεδης καμπύλης. Εστιάζουμε αρχικά την προσοχή μας στις απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες συνάρτησεις μιας καμπύλης ώστε η καμπύλη να έχει κάποιες επιθυμητές γεωμετρικές ιδιότητες. Παραθέτουμε το παράδειγμα της καμπύλης των Cantor – Lebesgue η οποία είναι συνεχής, σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και καλύπτει όλο το μοναδιαίο τετράγωνο. Έχει δηλαδή θετικό διδιάστατο μέτρο.

Στη συνέχεια αφού ορίσουμε το μήκος ως το ελάχιστο άνω φράγμα των μηκών των εγγεγραμμένων στην καμπύλη πολυγωνικών γραμμών, χαρακτηρίζουμε τις καμπύλες που έχουν πεπερασμένο μήκος, μέσω των συντεταγμένων συναρτήσεων τους, και αποδεικνύουμε την έκφραση του μήκους, μέσω του τύπου:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τέλος τον τύπο αυτό για τον υπολογισμό του μήκους κλασικών καμπυλών, τον προσδιορισμό των ελάχιστων διαδρομών στο επίπεδο και στη σφαίρα και για τον ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** ασχολούμαστε με το εμβαδόν επιπέδων σχημάτων. Συνήθως τα περισσότερα, αν όχι όλα, τα εγχειρίδια γεωμετρίας ξεκινούν με την παραδοχή ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεων του. Αυτή η παραδοχή είναι μεν σωστή αλλά σε καμιά περίπτωση δεν είναι η στοιχειωδέστερη. Εμείς εδώ ξεκινάμε από αυτό που δέχεται κάθε άνθρωπος: ότι μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο, δηλαδή το τετράγωνο πλευράς 1 που του αποδίδεται, για λόγους κανονικότητας, η τιμή 1. Έτσι ξεκινάμε από τα τρία αξιώματα του εμβαδού, μέθοδο που ακολούθησε ο Giuseppe Peano (1858-1932)

Αξίωμα 1 (του Αναλλοίωτου)

Αν το  $A$  είναι ένα φραγμένο πολυγωνικό σχήμα και  $\varphi$  μια ισομετρία του επιπέδου που απεικονίζει το  $A$  στο  $\varphi(A)$ , τότε

$$E(A) = E(\varphi(A)).$$

Αξίωμα 2 (της Προσθετικότητας)

Αν  $A, B$  είναι φραγμένα πολυγωνικά σχήματα με  $A \cap B = \emptyset$ , τότε

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B).$$

### Αξίωμα 3 (της Κανονικότητας)

Το εμβαδόν ενός ανοικτού τετραγώνου (χωρίς σύνορο) με πλευρά 1, είναι ίσο με 1.

και αποδεικνύουμε τους γνωστούς τύπους του εμβαδού για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο τρίγωνο, το τυχαίο τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο και το τραπέζιο. Να σημειωθεί ότι για την απόδειξη των παραπάνω τύπων γίνεται, κατά ουσιαστικό τρόπο, χρήση του αξιώματος πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια, με τη μέθοδο της εξάντλησης, επεκτείνουμε τον ορισμό του εμβαδού και σε μη ευθύγραμμα σχήματα από τον οποίο αποδεικνύουμε τους τύπους του εμβαδού μέσω ολοκληρώματος:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \iint_A 1dxdy, \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (xdy - ydx).$$

Στο **τρίτο κεφάλαιο** μελετάμε τη σχέση που συνδέει το μήκος  $\ell$  μιας απλής, κλειστής καμπύλης με το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείει, δηλαδή την περίφημη ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος.

Αρχικά συνδέουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα με το μύθο της Διδούς (και το ισοπεριμετρικό πρόβλημα), όπως έχει διασωθεί σε ένα από τα κλασικότερα έργα της Λατινικής Γραμματείας, την Αινειάδα του Βιργίλιου.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε οκτώ διαφορετικές αποδείξεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας, τέσσερεις, κατά κάποιο τρόπο, στοιχειώδεις και τέσσερεις που απαιτούν περισσότερη μαθηματική ωριμότητα. Μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνεται η απόδειξη του J. Steiner (1796-1863) συνοδευμένη με ένα επιχείρημα συμπάγειας (το οποίο λύνει το πρόβλημα της ύπαρξης λύσης του ισοπεριμετρικού προβλήματος), η απόδειξη του T. Bonnesen, δύο του Adolf Hurwitz (1859-1919), μια του Erhard Schmidt (1876-1959) και μια με χρήση δυναμοσειρών.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού των επιφανειών του τριδιάστατου χώρου. Έννοια που ο γεωμετρικός της ορισμός ουσιαστικά ξεκαθαρίστηκε μέσα από το περίφημο παράδειγμα του Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα,

από το οποίο φάνηκε ότι το εμβαδόν μιας επιφάνειας δεν μπορεί να προσεγγιστεί με τρόπο όμοιο προς τον ορισμό του μήκους καμπύλης δηλαδή, ως όριο των εμβαδών κατάλληλων εγγεγραμμένων στη δοθείσα επιφάνεια πολυέδρων. Αναλύουμε διεξοδικά το παράδειγμα του Schwarz, αφού πρώτα έχουμε συζητήσει αρκετά τον ορισμό της επιφάνειας και τους λόγους που μας οδηγούν στην επιβολή ορισμένων συγκεκριμένων συνθηκών στους ορισμούς.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον γεωμετρικό ορισμό του εμβαδού επιφάνειας και αποδεικνύουμε τον χαρακτηρισμό του μέσω του ολοκληρώματος  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$  κάτι που, οφείλουμε να σημειώσουμε, εμφανίζεται πολύ σπάνια στη βιβλιογραφία. Ο παραπάνω τύπος, για τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων  $z = f(x, y)$ , παίρνει τη μορφή  $\iint_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$  η οποία είναι ανάλογη του τύπου (2) για το μήκος καμπύλης.

Τέλος, στο **πέμπτο κεφάλαιο** παρουσιάζουμε τον όγκο στερεών με τρόπο ανάλογο με αυτόν του δεύτερου κεφαλαίου: από τα τρία αξιώματα στους τύπους. Αν και οι τεχνικές απαιτήσεις, στην περίπτωση αυτή, είναι πολύ περισσότερες, φροντίσαμε η παρουσίασή μας να είναι πλήρης, κάτι που δεν μπορέσαμε να το εντοπίσουμε αλλού στη βιβλιογραφία.

Ο στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να αναδείξουμε τη διδακτική αξία της αρχής του Cavalieri μέσω της οποίας συγκεφαλαιώνεται η μέθοδος της εξάντλησης, και συνδέει την έννοια του όγκου με την έννοια του εμβαδού. Γενικά, πρόκειται για ένα εργαλείο που δίνει γρήγορα αποτελέσματα. Επεξεργαζόμαστε την αρχή του Cavalieri στη μορφή:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt$$

όπου,  $V(X)$  είναι ο όγκος ενός φραγμένου υποσυνόλου  $X$  του  $\mathbb{R}^3$  και  $\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}$ .

Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε παραγράφους που κάθε μια της έχει τη δική της αρίθμηση στα θεωρήματα και στις σχέσεις. Η πρώτη παράγραφος είναι πάντοτε μια εισαγωγή στο κεφάλαιο, το οποίο πάντοτε κλείνει με παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

## ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

### 1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την έννοια του μήκους επίπεδων καμπυλών. Αρχικά, στις δύο πρώτες παραγράφους, μελετάμε κάποιες παθολογικές περιπτώσεις καμπυλών, όπως αυτή των Cantor-Lebesgue, απ' όπου οδηγούμαστε στον εντοπισμό ορισμένων συγκεκριμένων συνθηκών που πρέπει να επιβάλουμε στους ορισμούς.

Στη συνέχεια, ορίζουμε το μήκος καμπύλης ως το ελάχιστο άνω φράγμα των μηκών όλων των εγγεγραμμένων στην καμπύλη τεθλασμένων γραμμών, αποδεικνύοντας κάποιες βασικές ιδιότητες. Έπειτα, χαρακτηρίζουμε τις καμπύλες που έχουν πεπερασμένο μήκος μέσω των συντεταγμενικών συναρτήσεων και το μήκος της καμπύλης μέσω ενός ορισμένου ορίου. Ως εφαρμογή μελετάμε το μήκος του κύκλου.

Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό ορισμό του μήκους, αποδεικνύουμε το γνωστό τύπο

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

και υπολογίζουμε τα μήκη κλασικών καμπυλών. Ως εφαρμογή, προσδιορίζουμε τις διαδρομές ελάχιστου μήκους στο επίπεδο και στη σφαίρα και παρουσιάζουμε, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

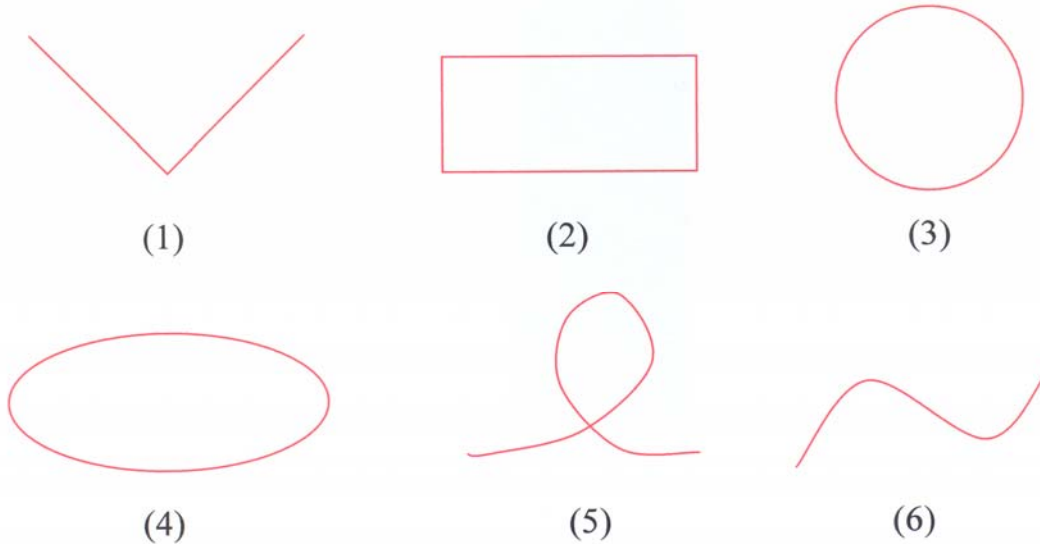
έναν ορισμό για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Ας σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τον C. H. Edwards [6], ο παραπάνω τύπος πρωτοχρησιμοποιήθηκε το 1657 από τον Άγγλο William Neil, υπό τη μορφή  $\int_a^b \sqrt{1 + g(x)^2} dx$ , θεωρώντας τη συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε

$$\int_a^x g(t) dt = f(x).$$

## 1.2 Η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης

Με τον όρο «επίπεδη καμπύλη» αυτό που εποπτικά αναμένουμε είναι ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο στο Ευκλείδειο επίπεδο, όπως, ας πούμε, τα παρακάτω σχήματα:



(Σχήμα 1)

Άλλες από αυτές τις καμπύλες έχουν γωνίες όπως η (1), (2), άλλες έχουν αυτοτομές όπως η (5), άλλες είναι κλειστές όπως οι (2), (3), (4) και άλλες όχι, όπως η (6). Υπάρχει, καθώς αντιλαμβανόμαστε, μια ποικιλία ενδεχομένων.

Το τι θα δεχθούμε ως ορισμό της καμπύλης εξαρτάται από την γενικότητα που θέλουμε να καλύψουμε και τις έννοιες που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Κατά καιρούς και από διάφορους μαθηματικούς έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί, εκ των οποίων άλλοι είναι κατάλληλοι για ένα εισαγωγικό μάθημα απειροστικού λογισμού και αναλυτικής γεωμετρίας, άλλοι είναι εκείνοι που υιοθετούνται σε ένα μάθημα κλασικής διαφορικής γεωμετρίας και άλλοι σε ένα μεταπτυχιακό μάθημα γεωμετρίας του Riemann.

Εμείς ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε και να μελετήσουμε την έννοια του μήκους τουλάχιστον για τις καμπύλες που περιλαμβάνει ένα συνηθισμένο πρόγραμμα μαθηματικών στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης, δηλαδή τεθλασμένες γραμμές, πολύγωνα, κωνικές τομές, κλασικές καμπύλες όπως π.χ. του Καρτέσιου, του Αρχιμήδη, κ.λπ.

Θα ορίσουμε μια επίπεδη καμπύλη ως απεικόνιση παρά ως υποσύνολο σημείων του επιπέδου.

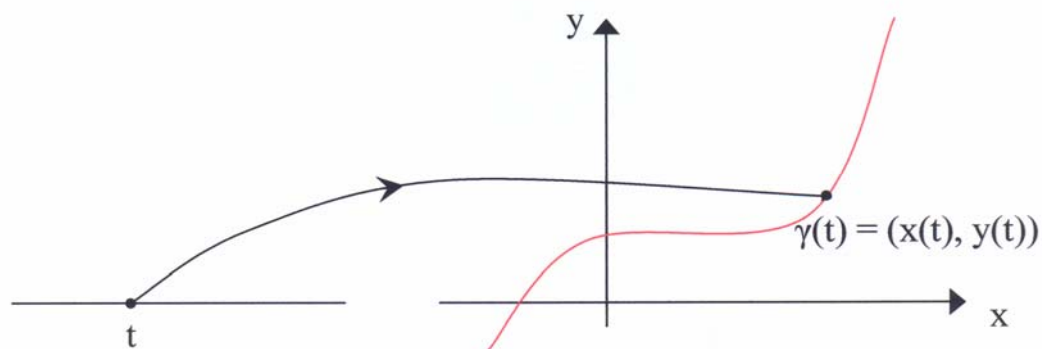
ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω  $I$  ένα διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών και

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

μια απεικόνιση με

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I \quad (1)$$

όπου  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. Κάθε τέτοια απεικόνιση ονομάζεται παραμετρική καμπύλη.



(Σχήμα 2)

Επίσης, κάνοντας κατάχρηση, με τον όρο καμπύλη σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , θα εννοούμε το σύνολο των σημείων  $(x(t), y(t))$  για όλα τα  $t \in I$ .

Για παράδειγμα, οι παραμετρικές παραστάσεις των καμπύλων του Σχήματος 1 θα μπορούσε να ήταν ως εξής για κάθε μια περίπτωση:

- 1)  $\gamma(t) = (t, \alpha|t|)$ ,
- 2) κατά τμήματα της μορφής  $\gamma(t) = (\alpha + \beta t, \alpha' + \beta' t)$ ,
- 3)  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,
- 4)  $\gamma(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)$ ,
- 5)  $\gamma(t) = \left( \frac{3rt}{1+t^3}, \frac{3rt^2}{1+t^3} \right)$ ,
- 6)  $\gamma(t) = (t, t^3 - t)$ , για κατάλληλα διαστήματα της παραμέτρου  $t$ .

ΣΧΟΛΙΟ: Σημειώνουμε, χωρίς να επεκταθούμε περισσότερο, μια και δεν είναι απόλυτα απαραίτητο για το σκοπό μας, ότι μια καμπύλη ως υποσύνολο σημείων του επιπέδου είναι δυνατόν να έχει περισσότερες από μία παραμετρικές παραστάσεις. Παραδείγματος χάριν, το ημικύκλιο

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$  με κέντρο την αρχή των αξόνων έχει παραμετρική παράσταση την  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , την  $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  και την  $\gamma_3(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$

$-1 \leq t \leq 1$ . Θα μπορούσε να γίνει μια ολόκληρη συζήτηση για τις επιτρεπτές αλλαγές παραμέτρου μιας καμπύλης. Εκείνο που επιθυμούμε να κρατήσουμε για τα παρακάτω είναι το γεγονός ότι οποιαδήποτε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου και αν επιχειρήσει κάποιος σε μια καμπύλη, οι γεωμετρικές της ιδιότητες (όπως το μήκος της) παραμένουν αναλλοίωτες ακόμα και αν αυτές ορίζονται με χρήση παραμέτρου.

Με τον όρο *επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου* εννοούμε την ύπαρξη μιας αύξουσας συνάρτησης  $f$  ώστε  $s = f(t)$ , όπου  $t$  είναι η παλιά παράμετρος και  $s$  είναι η νέα παράμετρος.

Ο μονοδιάστατος χαρακτήρας κάθε καμπύλης  $\gamma$  φαίνεται από το γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της απεικόνισης  $\gamma$  είναι χώρος διάστασης 1.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο πάντοτε και με το πεδίο τιμών της απεικόνισης  $\gamma$  !! Μόλις στα τέλη του 19<sup>ου</sup> και τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα μια σειρά μεγάλων μαθηματικών έδωσαν παραδείγματα απεικονίσεων της μορφής  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , οι οποίες μάλιστα ήταν και συνεχείς, που έχουν ως εικόνα ολόκληρο το κλειστό τετράγωνο  $[0,1] \times [0,1]$ . Το πρώτο τέτοιο παράδειγμα δόθηκε από τον Giuseppe Peano (το 1890), ακολούθησε ο David Hilbert (το 1891), ο Eliakim Moore (το 1900), ο Henri Lebesgue (το 1904), ο Wacław Sierpinski (το 1912), ο George Polya (το 1913) και ακολούθησαν και άλλοι.

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε το παράδειγμα της καμπύλης των Cantor-Lebesgue  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  η οποία α) είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , β) είναι παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  εκτός από ένα αριθμησιμο πλήθος σημείων και γ) η εικόνα της είναι ακριβώς το σύνολο  $[0,1] \times [0,1]$ .

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: υπάρχουν προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η παράσταση (1) να περιγράφει καμπύλη στο επίπεδο όπως την θέλουμε εποπτικά, δηλαδή ως ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο σαν αυτά του Σχήματος 1; Η απάντηση είναι θετική.

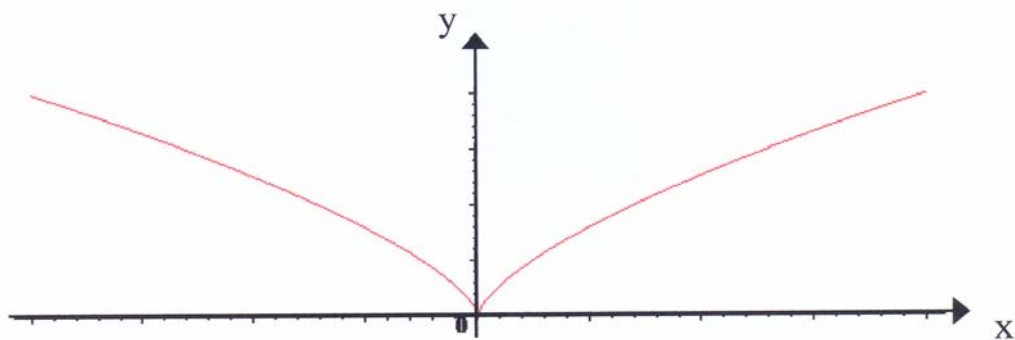
Αν απαιτήσουμε οι συναρτήσεις  $x(t), y(t)$  στην παράσταση (1) να είναι παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο (ή και απόλυτα συνεχείς),

τότε, όπως θα δείξουμε σε μια από τις επόμενες παραγράφους, φαινόμενα σαν και τα παραπάνω δεν μπορούν να συμβούν. Δηλαδή, το σύνολο  $\{\gamma(t) : t \in I\}$  δεν μπορεί να έχει θετικό διδιάστατο μέτρο.

Επισημαίνουμε τούτο: το να απαιτήσουμε οι συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  στη παράσταση (1) να είναι παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η καμπύλη εποπτικά δεν παρουσιάζει γωνίες, όπως άλλωστε δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

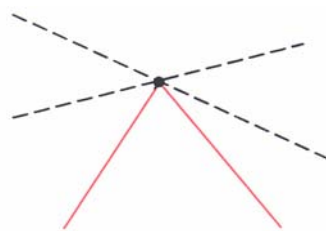
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (Συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη που παρουσιάζει γωνία)

Η καμπύλη  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (βλ. Σχήμα 3) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, αλλά στο σημείο  $(0,0)$  η εικόνα της σχηματίζει γωνία. Παρατηρούμε ότι στο σημείο  $(0,0)$ , το διάνυσμα της ταχύτητας  $\gamma'(0)$  μηδενίζεται.

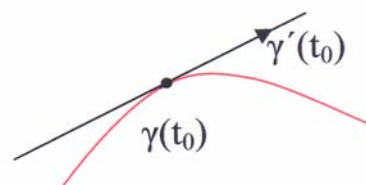


(Σχήμα 3)

Γεωμετρικά, η ύπαρξη γωνίας σημαίνει μη-ύπαρξη εφαπτόμενης ευθείας (βλ. Σχήμα 4). Όμως η εφαπτόμενη ευθεία μιας καμπύλης  $\gamma$ , στο τυχαίο της σημείο  $\gamma(t_0)$ , καθορίζεται από το (εφαπτόμενο) διάνυσμα  $\gamma'(t_0)$  (βλ. Σχήμα 5). Το οποίο για να ορίζει την κατεύθυνση μιας ευθείας οφείλει να είναι μη-μηδενικό διάνυσμα.



(Σχήμα 4)



(Σχήμα 5)

Συνεπώς, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό:



ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$  λέγεται ομαλή (ή λεία) εάν,

- i) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή οι συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι παραγωγίσιμες και οι παράγωγοι συνεχείς συναρτήσεις και
- ii)  $\gamma'(t) \neq (0,0)$ , για κάθε  $t \in I$ .

Στο εξής εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε καμπύλες που είναι κατά τμήματα ομαλές δηλαδή τετράγωνα, κύκλους, κ.α.

Αν  $I=[\alpha, \beta]$ , τότε το σημείο  $\gamma(\alpha)$  ονομάζεται αρχικό σημείο της καμπύλης ενώ το  $\gamma(\beta)$  τελικό σημείο της καμπύλης.

### 1.3 Η καμπύλη των Cantor-Lebesgue

Σύμφωνα με τον H. Sagan [9], μέχρι τα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα οι καμπύλες που γνώριζαν ότι έχουν εικόνες διδιάστατα αντικείμενα δεν ήταν πουθενά παραγωγίσιμες. Το 1904 ο Henri Leon Lebesgue (1875-1941) κατασκεύασε μια συνεχή απεικόνιση  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με εικόνα ολόκληρο το σύνολο  $[0,1] \times [0,1]$ , η οποία ήταν σχεδόν παντού παραγωγίσιμη (παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του  $[0,1]$  εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος). Την κατασκευή του αυτή ο Lebesgue τη στήριξε στο γεγονός ότι υπάρχει απεικόνιση από το σύνολο του Cantor σε ολόκληρο το  $[0,1] \times [0,1]$  η οποία είναι επί, συνεχής αλλά πουθενά παραγωγίσιμη. Συγκεκριμένα:



Henri Leon Lebesgue (1875-1941)

Το σύνολο  $\Gamma$  του Cantor αποτελείται από όλα τα σημεία που δίδονται από την παράσταση,

$$\frac{2t_1}{3} + \frac{2t_2}{3^2} + \frac{2t_3}{3^3} + \dots,$$

όπου  $t_i = 0$  ή  $1$ . Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το τριαδικό σύστημα αρίθμησης, το σύνολο  $\Gamma$  του Cantor μπορεί να περιγραφεί και ως εξής:

$$\Gamma = \{0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots : t_i = 0 \text{ ή } 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $g: \Gamma \rightarrow [0,1]$  με

$g(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = 0_2 t_1 t_2 t_3 \dots$  είναι κατά τετριμμένο τρόπο 1-1 και επί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Η απεικόνιση  $f : \Gamma \rightarrow [0,1] \times [0,1]$  με τύπο

$$f(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = (0_2 t_1 t_3 t_5 \dots, 0_2 t_2 t_4 t_6 \dots) \quad (1)$$

όπου  $t_i = 0$  ή  $1$  είναι:

α) επί

β) συνεχής

γ) πουθενά παραγωγίσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. α) Τετριμμένο.

β) Έστω  $t, t_0 \in \Gamma$  με  $|t - t_0| < \frac{1}{3^{2n}}$ . Τότε, τα  $t, t_0$  δεν διαφέρουν στα πρώτα  $2n$  τριαδικά ψηφία, άρα

$$\begin{aligned} t_0 &= 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2t_{2n+1})\dots, \\ t &= 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2\tau_{2n+1})\dots \end{aligned}$$

Πράγματι, αν ίσχυε  $t_{2n} \neq \tau_{2n}$ , τότε  $|t_{2n} - \tau_{2n}| = 1$ , αφού  $t_{2n}, \tau_{2n} = 0, 1$ . Άρα,

$$t - t_0 = \frac{(2\tau_{2n+1} - 2t_{2n+1})}{3^{2n+1}} + \frac{(2\tau_{2n+2} - 2t_{2n+2})}{3^{2n+2}} + \dots$$

επομένως,

$$|t - t_0| \geq \left(\frac{2}{3^{2n+1}}\right) - \left(\frac{2}{3^{2n+2}}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \left(\frac{2}{3^{2n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3^{2n}}\right) = \frac{1}{3^{2n}}$$

που είναι άτοπο.

Συνεπώς,

$$f(t) - f(t_0) = \left( \begin{array}{l} (\tau_{2n+1} - t_{2n+1})/2^{n+1} + (\tau_{2n+3} - t_{2n+3})/2^{n+2} + \dots \\ (\tau_{2n+2} - t_{2n+2})/2^{n+1} + (\tau_{2n+4} - t_{2n+4})/2^{n+2} + \dots \end{array} \right),$$

και άρα  $\|f(t) - f(t_0)\| < \frac{\sqrt{2}}{2^n}$  το οποίο αποδεικνύει τη συνέχεια.

γ) Για την απόδειξη του σκέλους αυτού θα κάνουμε χρήση του παρακάτω λήμματος:

ΛΗΜΜΑ: Έστω  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση και  $t \in [0,1]$ . Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$  με  $0 < \alpha_n \leq t < \beta_n < 1$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = t = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  τέτοιες ώστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_n) - f(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$  να μην υπάρχει, τότε η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $t$ .

Έστω,

$$t = 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2t_{2n+1})(2t_{2n+2})\dots,$$

$$t_n = 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2\tau_{2n+1})(2t_{2n+2})\dots,$$

όπου  $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1(\text{mod } 2)$ . Τότε

$$|t - t_n| = \frac{2}{3^{2n+1}}.$$

Εάν με  $\varphi$  δηλώνουμε την πρώτη συνιστώσα της  $f$ , έχουμε

$$\varphi(t) - \varphi(t_n) = \frac{t_{2n+1} - \tau_{2n+1}}{2^{n+1}}$$

και για τον λόγο αυτό,

$$\frac{|\varphi(t) - \varphi(t_n)|}{|t - t_n|} = \frac{3}{4} \left( \frac{9}{2} \right)^n \rightarrow \infty,$$

άρα  $\varphi$ , από το παραπάνω λήμμα, δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $\Gamma$ . Όμοια αποδεικνύεται το ίδιο και την δεύτερη συνιστώσα της  $f$ .  $\square$

Ο Lebesgue το 1904 επέκτεινε την απεικόνιση  $f$  όπως ορίζεται στην (1) με συνεχή τρόπο στο  $[0,1]$  κάνοντας γραμμική παρεμβολή όπως θα δείξουμε αμέσως με στην Πρόταση 2. Ας σημειωθεί ότι κατά την κατασκευή του συνόλου  $\Gamma$  του Cantor από το διάστημα  $[0,1]$ , σε κάθε βήμα αφαιρούμε κάποια διαστήματα. Συμβολίζουμε με  $(\alpha_n, \beta_n)$  το (κάθε) διάστημα που αφαιρούμε κατά το  $n$ -οστό βήμα και συνεπώς το σύνολο  $[0,1] \setminus \Gamma$  είναι η ένωση όλων αυτών των διαστημάτων, όπου θα επεκτείνουμε την  $f$  με γραμμική παρεμβολή.

Συγκεκριμένα,

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Η απεικόνιση  $F: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$  με

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{αν } t \in \Gamma \\ \frac{f(\alpha_n)(\beta_n - t) + f(\beta_n)(t - \alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} & \text{αν } t \in (\alpha_n, \beta_n) \end{cases} \quad (2)$$

είναι:

α) επί,

β) συνεχής,

γ) παραγωγίσιμη στο  $[0,1] \setminus \Gamma$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. α) Η  $F$  είναι επί, αφού η  $f$ , από την Πρόταση 1, είναι επί.

β) Εάν  $t_0 \in [0,1] \setminus \Gamma$ , τότε η  $F$  είναι συνεχής στο  $t_0$  από κατασκευή. Εάν  $t_0 \in \Gamma$  τότε αυτό θα είναι είτε αριστερό σημείο συσσώρευσης, είτε δεξιό σημείο συσσώρευσης, είτε αριστερό και δεξιό σημείο συσσώρευσης. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο  $\Gamma$  του Cantor έχει την ιδιότητα να ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων συσσώρευσής του. Ειδικότερα, όλα τα σημεία της μορφής  $0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots(2t_n)\bar{2}$  είναι δεξιά σημεία συσσώρευσης, όλα τα σημεία της μορφής  $0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots(2t_n)$  είναι αριστερά σημεία συσσώρευσης, ενώ όλα τα άλλα σημεία του  $\Gamma$  είναι αριστερά και δεξιά σημεία συσσώρευσης. Θα θεωρήσουμε ότι το  $t_0$  είναι αριστερό σημείο συσσώρευσης, δηλαδή είναι δεξί άκρο ενός διαστήματος που αφαιρέθηκε κατά την κατασκευή του  $\Gamma$ . Τότε γράφεται σε τριαδική μορφή  $0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots(2t_n)$ . Από την Πρόταση 1, η  $f$  (ως περιορισμός της  $F$  στο  $\Gamma$ ) είναι συνεχής στο  $\Gamma$  και επειδή το  $\Gamma$  είναι συμπαγές θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $\Gamma$ . Άρα, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon, \quad (3)$$

για όλα τα  $t_1, t_2 \in \Gamma$  για τα οποία  $|t_1 - t_2| < \delta$ .

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:  $t \in \Gamma$  ή  $t \in [0,1] \setminus \Gamma$ . Εάν  $t \in \Gamma$  τότε από την (3) έχουμε:

$$\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon, \quad \text{για } |t - t_0| < \delta, \quad t \in \Gamma. \quad (4)$$

Εάν  $t \in [0,1] \setminus \Gamma$ , τότε  $t \in (\alpha, \beta)$ , όπου  $(\alpha, \beta)$  είναι ένα διάστημα το οποίο αφαιρείται κατά την κατασκευή του συνόλου  $\Gamma$ .

Από την (2) έχουμε,

$$F(t) - F(t_0) = \frac{1}{\beta - \alpha} [(f(\beta) - f(t_0))(t - \alpha) + (f(\alpha) - f(t_0))(\beta - t)],$$

για κάθε  $t \in (\alpha, \beta)$ . Τώρα έστω  $(\alpha, \beta)$  ένα οποιοδήποτε τέτοιο διάστημα με  $t_0 < \alpha < b < t_0 + \delta$ . Λόγω της (4) έχουμε,

$$\|F(t) - F(t_0)\| < \frac{1}{\beta - \alpha} (t - \alpha + \beta - t)\varepsilon = \varepsilon,$$

για κάθε  $t \in (\alpha, \beta) \subset [0, 1] \setminus \Gamma$ .

Αυτό μαζί με το ότι αριστερά του  $t_0$  η  $F$  είναι συνεχής από κατασκευή αποδεικνύει την συνέχεια της  $F$  στο  $t_0 \in \Gamma$ . Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε την συνέχεια και στα δεξιά σημεία συσσώρευσης και στα υπόλοιπα.

γ) Καθώς η  $F$  ορίζεται μέσω της γραμμικής παρεμβολής (2) σε αριθμήσιμο αριθμό ανοικτών ξένων διαστημάτων με ένωση το  $[0, 1] \setminus \Gamma$ , προκύπτει ότι η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1] \setminus \Gamma$ , ενώ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη στο  $\Gamma$ , όπως προκύπτει από την Πρόταση 1. Το ζητούμενο πλέον έπεται από το γεγονός ότι το σύνολο  $\Gamma$  του Cantor είναι αριθμήσιμο.  $\square$

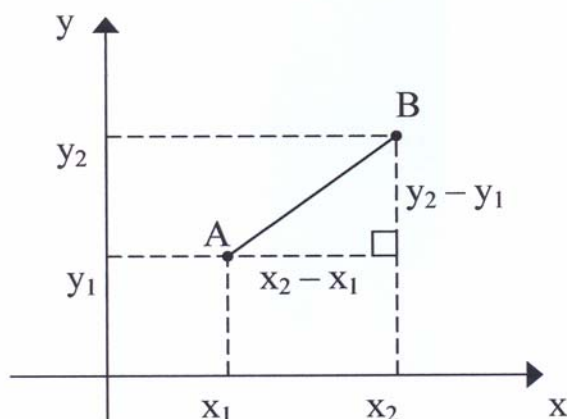
## 1.4 Ο γεωμετρικός ορισμός του μήκους καμπύλης

A. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος.

Το Ευκλείδειο μήκος  $|AB|$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  με άκρα τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  (βλ. Σχήμα 6) δίδεται από τον τύπο

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

που ως γνωστό, είναι απόρροια του Πυθαγορείου θεωρήματος και του γεγονότος ότι το μήκος ενός διαστήματος  $[\alpha, \beta]$  είναι ίσο με  $\beta - \alpha$ .



(Σχήμα 6)

ΣΧΟΛΙΟ. Το ότι το μήκος  $\ell([a, \beta])$  ενός διαστήματος  $[a, \beta]$  της πραγματικής ευθείας είναι ίσο με  $\beta - a$  μπορεί εύκολα να συναχθεί από τα τρία αξιώματα του μήκους:

(α) *Αξίωμα του αναλλοίωτου*: το μήκος ενός διαστήματος είναι αναλλοίωτο κάτω από τις μετατοπίσεις δηλαδή:

$$\ell(I) = \ell(x + I), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και κάθε διάστημα } I.$$

(β) *Αξίωμα αθροιστικότητας*:  $\ell(I_1 \cup I_2) = \ell(I_1) + \ell(I_2)$ , για κάθε δύο διαστήματα  $I_1$  και  $I_2$  που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

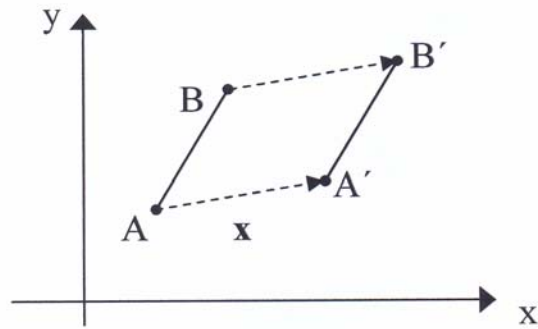
(γ) *Αξίωμα κανονικότητας*:  $\ell([0, 1]) = 1$ .

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα του μήκους ευθύγραμμου τμήματος είναι η εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ. Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες του επιπέδου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι ισομετρίες του επιπέδου είναι οι μετατοπίσεις, οι στροφές και οι συνθέσεις αυτών.

Έστω  $AB$  ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο μετατοπίζουμε κατά  $x = (x, y)$  και  $A'B'$  το αποτέλεσμα της μετατόπισης (βλ. Σχήμα 7). Τούτο, εξορισμού, σημαίνει ότι αν  $A = (\alpha_1, \alpha_2)$  και  $B = (\beta_1, \beta_2)$ , τότε  $A' = (\alpha_1 + x, \alpha_2 + y)$  και  $B' = (\beta_1 + x, \beta_2 + y)$ .



(Σχήμα 7)

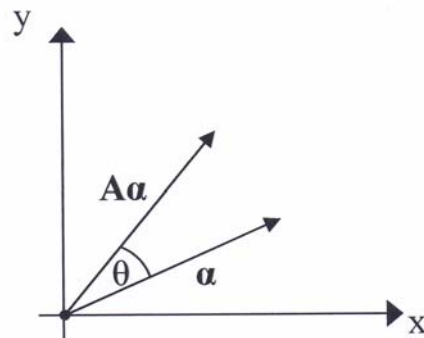
Άρα,

$$|AB| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$$

και

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{[(\alpha_1 + x) - (\beta_1 + x)]^2 + [(\alpha_2 + y) - (\beta_2 + y)]^2} \\ &= \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2} \\ &= |AB|. \end{aligned}$$

Έστω  $\mathbf{a}$  ένα διάνυσμα το οποίο στρέφουμε κατά γωνία  $\theta$ . Το διάνυσμα που προκύπτει από την στροφή είναι το  $\mathbf{Aa}$ , όπου  $\mathbf{A}$  ένας ορθογώνιος πίνακας (βλ. Σχήμα 8).



(Σχήμα 8)

Ισχύει:

$$|\mathbf{Aa}|^2 = (\mathbf{Aa})^T \mathbf{Aa} = \mathbf{a}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Aa} = \mathbf{a}^T \mathbf{Ia} = |\mathbf{a}|^2.$$

Άρα,

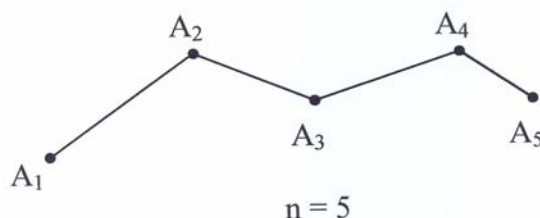
$$|\mathbf{Aa}| = |\mathbf{a}|.$$

Αφού αποδείξαμε ότι το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι αναλλοίωτο στις μετατοπίσεις και στις στροφές θα είναι αναλλοίωτο και στις συνθέσεις τους.  $\square$

### B. Μήκος πολυγωνικής γραμμής.

Το μήκος  $\ell$  μιας τεθλασμένης γραμμής  $A_1A_2A_3\dots A_n$  (βλ. Σχήμα 9) ορίζεται να είναι το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων που την απαρτίζουν:

$$\ell(A_1A_2\dots A_n) = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_{n-1}A_n|.$$



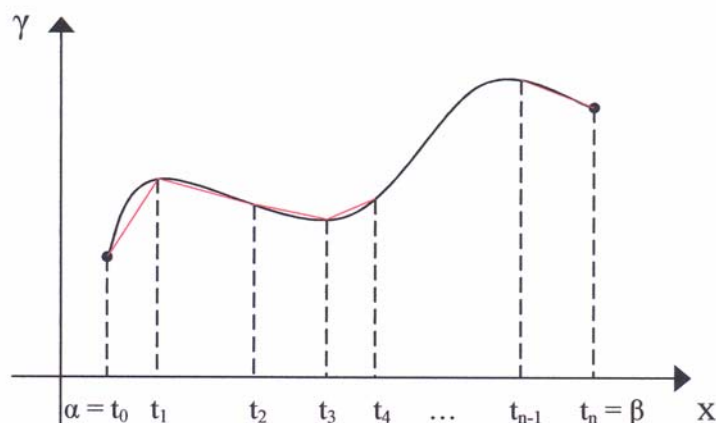
(Σχήμα 9)

### Γ. Μήκος καμπύλης.

Έστω  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  μια καμπύλη και  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  μια διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  δηλαδή,  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ . Ορίζουμε τον αριθμό

$$\begin{aligned} \ell(\Delta, \gamma) &= \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}. \end{aligned}$$





(Σχήμα 10)

Σε αυτό το άθροισμα ο  $i$  τάξεως όρος είναι η απόσταση στον  $\mathbb{R}^2$  μεταξύ των σημείων  $\gamma(t_{i-1})$  και  $\gamma(t_i)$ . Επομένως ο αριθμός  $\ell(\Delta, \gamma)$  ισούται με το μήκος της πολυγωνικής γραμμής με κορυφές τα σημεία  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ .

Καθώς η διαμέριση εκλεπτύνεται, το μήκος της καινούργιας πολυγωνικής γραμμής, λόγω της τριγωνικής ανισότητας, θα είναι μεγαλύτερο από το μήκος της προηγούμενης. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε πολυγωνικές γραμμές με όλο και μεγαλύτερο μήκος, που τείνουν να ταυτιστούν με το πεδίο τιμών της καμπύλης  $\gamma$ . Συνεπώς είναι εύλογο να ορίσουμε ως μήκος της καμπύλης  $\gamma$  το ελάχιστο άνω φράγμα των  $\ell(\Delta, \gamma)$  υπεράνω όλων των δυνατών διαμερίσεων  $\Delta$  του  $[\alpha, \beta]$ , δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  μια καμπύλη και  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  μια διαμέριση του διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ . Το μήκος  $\ell(\gamma)$  της καμπύλης  $\gamma$  ορίζεται από τη σχέση

$$\ell(\gamma) = \sup \ell(\Delta, \gamma)$$

όπου

$$\begin{aligned} \ell(\Delta, \gamma) &= \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

και το supremum λαμβάνεται υπεράνω όλων των δυνατών διαμερίσεων  $\Delta$  του  $[\alpha, \beta]$ .

Μια καμπύλη που έχει πεπερασμένο μήκος λέγεται *ευθυγραμμίσιμη*.

Αξίζει να τονίσουμε ότι οι πολυγωνικές γραμμές που προσεγγίζουν την καμπύλη μας, έχουν κορυφές σημεία της καμπύλης.

ΣΧΟΛΙΟ. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η *ευθεία είναι η συντομότερη οδός στο Ευκλείδειο επίπεδο* (αρκεί να επιλέξει κανείς τη διαμέριση  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$  του διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ ). Μια δεύτερη ενδιαφέρουσα απόδειξη του γεγονότος αυτού θα δούμε στην Παράγραφο 1.10.

ΘΕΩΡΗΜΑ. (Ιδιότητες του μήκους καμπύλης)

α) Αναλλοίωτου: Το μήκος μιας καμπύλης είναι αναλλοίωτο ως προς τις *ισομετρίες του επιπέδου*.

β) Αθροιστικότητας: Έστω μια ευθυγραμμίσιμη καμπύλη  $\gamma$  στο  $[\alpha, \beta]$  με μήκος  $l(\gamma)$ . Αν  $\alpha < x_0 < \beta$  και  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι τα τμήματα της καμπύλης στα διαστήματα  $[\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta]$  τότε οι καμπύλες  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι ευθυγραμμίσιμες και  $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

γ) Κανονικότητας:  $l([0, 1]) = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

α) Άμεση συνέπεια του ορισμού του μήκους καμπύλης και της προηγούμενης πρότασης.

β) Έστω  $\Delta_1, \Delta_2$  οποιεσδήποτε διαμερίσεις των  $[\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta]$  αντίστοιχα. Τότε, η ένωση των  $\Delta_1, \Delta_2$  είναι μια νέα διαμέριση  $\Delta$  του  $[\alpha, \beta]$  για την οποία ισχύει:

$$l(\Delta_1, \gamma) + l(\Delta_2, \gamma) = l(\Delta, \gamma) \leq l(\gamma).$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι  $l(\Delta_1, \gamma), l(\Delta_2, \gamma)$  είναι φραγμένα προς τα άνω, άρα  $\gamma_1, \gamma_2$  είναι ευθυγραμμίσιμες. Από την ίδια σχέση έχουμε:

$$l(\Delta_1, \gamma) \leq l(\gamma) - l(\Delta_2, \gamma).$$

Ας κρατήσουμε σταθερή την διαμέριση  $\Delta_2$  και ας υποθέσουμε ότι  $\Delta_1$  είναι οποιαδήποτε διαμέριση του  $[\alpha, x_0]$ . Αφού  $l(\gamma) - l(\Delta_2, \gamma)$  είναι ένα φράγμα για όλα τα  $l(\Delta_1, \gamma)$  θα είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο άνω φράγμα των  $l(\Delta_1, \gamma)$ . Άρα,

$$l(\gamma_1) \leq l(\gamma) - l(\Delta_2, \gamma)$$

και

$$\ell(\Delta_2, \gamma) \leq \ell(\gamma) - \ell(\gamma_1).$$

Όμοια με πριν, συμπαιρένουμε ότι:

$$\ell(\gamma_2) \leq \ell(\gamma) - \ell(\gamma_1)$$

άρα,

$$\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) \leq \ell(\gamma). \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε τώρα την αντίστροφη ανισότητα. Αρχίζουμε με μια οποιαδήποτε διαμέριση  $\Delta$  του  $[\alpha, \beta]$ . Αν στη διαμέριση αυτή προσθέσουμε και το σημείο  $x_0$  λαμβάνουμε μία διαμέριση  $\Delta_1$  του  $[\alpha, x_0]$  και μία διαμέριση  $\Delta_2$  του  $[x_0, \beta]$  για τις οποίες ισχύει:

$$\ell(\Delta, \gamma) \leq \ell(\Delta_1, \gamma) + \ell(\Delta_2, \gamma) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

Αφού το  $\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$  είναι ένα φράγμα για όλα τα  $\ell(\Delta, \gamma)$ , θα είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο άνω φράγμα των  $\ell(\Delta, \gamma)$ . Άρα,

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2). \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) συμπαιρένουμε ότι:

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

$\gamma$ ) Είναι προφανές. □

## 1.5 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Μια συνάρτηση  $f(x)$  λέγεται *φραγμένης κύμανσης* σε ένα διάστημα  $\alpha \leq x \leq \beta$  αν τα αθροίσματα,

$$S = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

είναι φραγμένα για όλες τις δυνατές διαμερίσεις,

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$$

στο  $[\alpha, \beta]$ .

Αν η  $f(x)$  είναι μονότονη στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε είναι φραγμένης κύμανσης, γιατί όλα τα παραπάνω αθροίσματα είναι ίσα με  $|f(\beta) - f(\alpha)|$ .

Το ίδιο ισχύει και αν η  $f(x)$  είναι μόνο κατά τμήματα μονότονη στο  $[\alpha, \beta]$ , επειδή το  $[\alpha, \beta]$  μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων σε κάθε ένα από τα οποία η  $f(x)$  είναι μονότονη. Αλλά μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι πάντοτε φραγμένης κύμανσης.

Η συνάρτηση, για παράδειγμα,

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ για } x \neq 0 \text{ και } f(0) = 0$$

δεν είναι φραγμένης κύμανσης στο  $0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ , γιατί αν το  $n$  είναι ένας περιττός ακέραιος, η διαμέριση

$$0, \frac{2}{n\pi}, \frac{2}{(n-1)\pi}, \dots, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{2\pi}$$

δίνει,

$$S = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{3} \right),$$

που τείνει στο άπειρο, όταν  $n \rightarrow \infty$ .

*Αν η  $f(x)$  έχει φραγμένη παράγωγο στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το θεώρημα μέσης τιμής εγγυάται ότι η  $f(x)$  είναι φραγμένης κύμανσης.*

Πράγματι, αν  $|f'(x)| < M$ , τότε

$$S = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) < M(\beta - \alpha).$$

Σημειώνουμε ότι μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης σε ένα κλειστό διάστημα είναι επίσης φραγμένη.

Πράγματι, αν  $x$  ένα τυχαίο σημείο του διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$|f(x) - f(\alpha)| + |f(\beta) - f(x)| < M,$$

συνεπώς,  $|f(x) - f(\alpha)| < M$  και άρα  $|f(x)| < M + |f(\alpha)|$ . □

Ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης. Αν και το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, εντούτοις έχουμε τον ακόλουθο ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης σε ένα κλειστό διάστημα μπορεί πάντα να εκφραστεί σαν διαφορά δύο αύξουσών συναρτήσεων σ' αυτό το διάστημα.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ας συμβολίσουμε με  $F(x)$  το supremum όλων των αθροισμάτων  $S$  στο διάστημα  $[\alpha, x]$ . Ορίζοντας  $F(\alpha) = 0$ , η  $F(x)$  τότε είναι φραγμένη, μονότονη και αύξουσα συνάρτηση στο  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Τώρα γράφουμε

$$f(x) = \frac{F(x) + f(x)}{2} - \frac{F(x) - f(x)}{2} = p(x) - q(x).$$

Τότε, οι  $p(x)$  και  $q(x)$  είναι μονότονες αύξουσες συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ , γιατί αν πάρουμε  $x_1 < x_2$ , ο ορισμός της  $F(x)$  μας δείχνει ότι

$$F(x_2) - F(x_1) \geq |f(x_2) - f(x_1)|,$$

και άρα

$$p(x_2) - p(x_1) = \frac{1}{2}[F(x_2) - F(x_1) + f(x_2) - f(x_1)] \geq 0,$$

$$q(x_2) - q(x_1) = \frac{1}{2}[F(x_2) - F(x_1) + f(x_2) - f(x_1)] \geq 0. \quad \square$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι το γεγονός ότι: *κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης σε ένα διάστημα είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό.*

## 1.6 Χαρακτηρισμός καμπύλων που έχουν πεπερασμένο μήκος

Δεν είναι πάντοτε το μήκος μιας καμπύλης  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , πεπερασμένο δεδομένου ότι το σύνολο

$$\left\{ \sum_{\kappa=1}^n |\gamma(t_{\kappa-1}) - \gamma(t_{\kappa})| : \Delta = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta\} \text{ διαμέριση του } [\alpha, \beta] \right\}$$

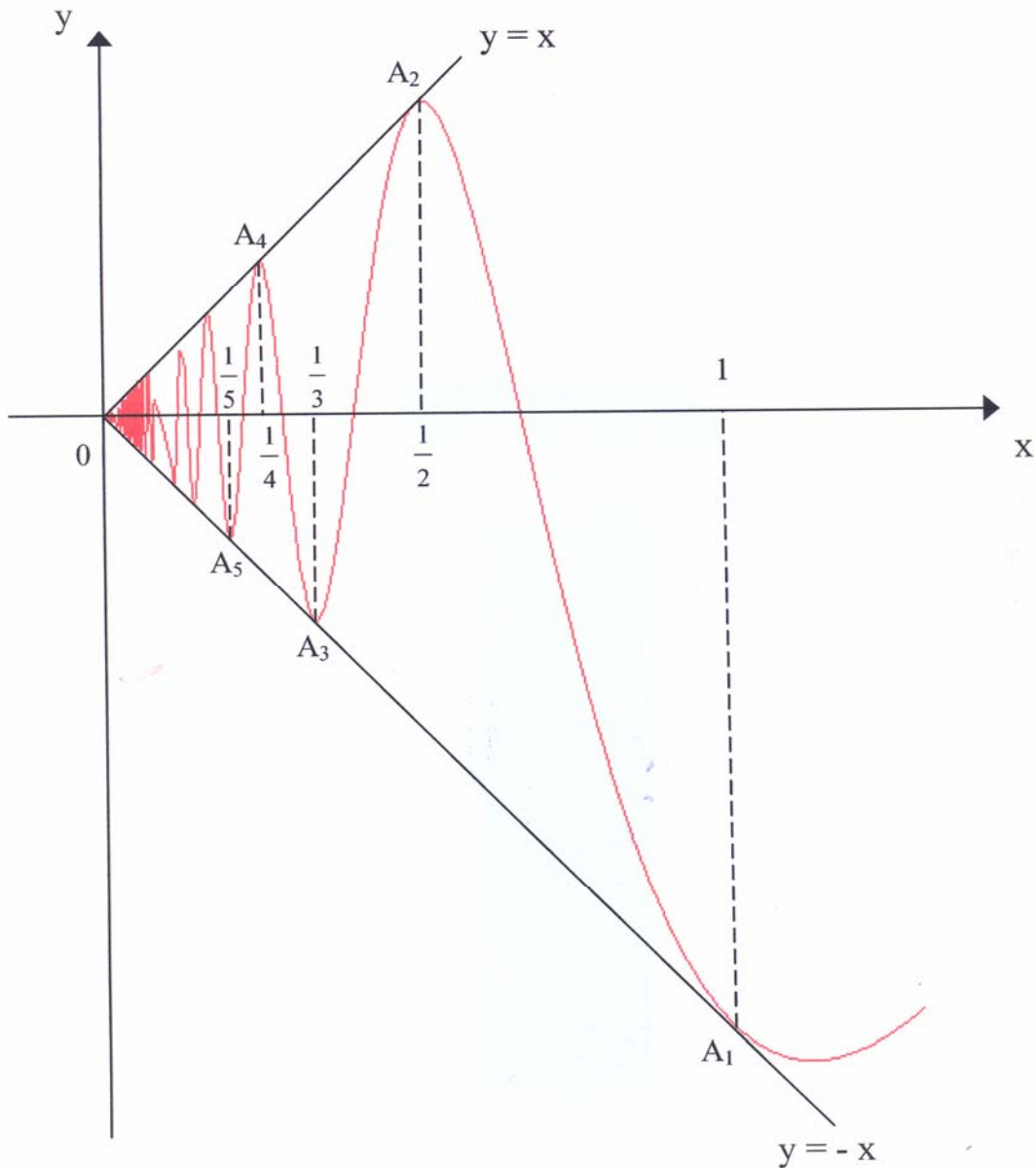
ενδεχομένως να μην είναι φραγμένο άνω, δηλαδή τα μήκη των εγγεγραμμένων πολυγωνικών γραμμών ενδεχομένως να τείνουν στο  $+\infty$ . Ακριβώς μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (συνεχούς καμπύλης με μη-πεπερασμένο μήκος)

Η καμπύλη  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (t, t \cos(\pi/t))$ , για  $t \neq 0$  και  $\gamma(0) = (0, 0)$ , δεν έχει πεπερασμένο μήκος (βλ. Σχήμα 11).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την εξής διαμέριση  $\Delta$  του διαστήματος  $[0, 1]$ :

$$\Delta_n = \left\{ 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots$$



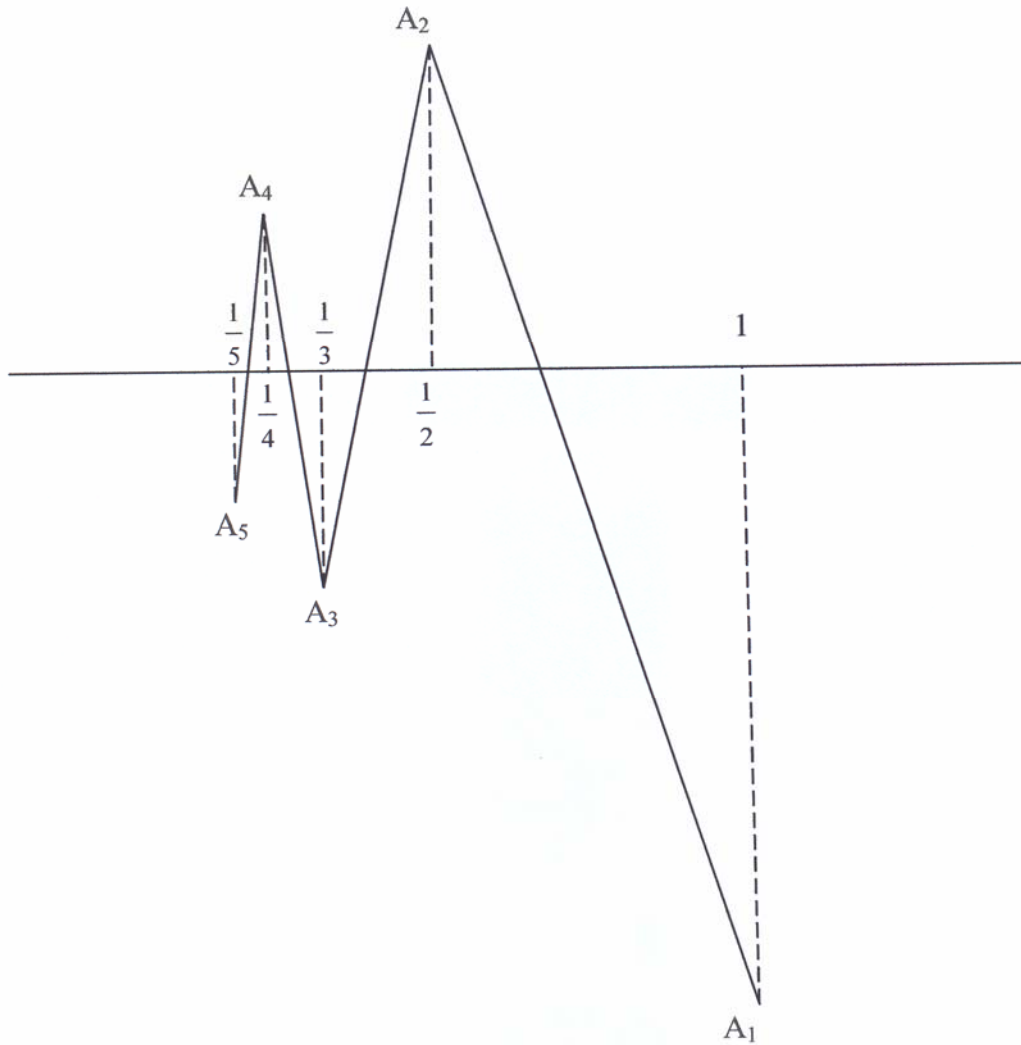
(Σχήμα 11)

Παρατηρούμε ότι:

για  $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}$  η καμπύλη τέμνει τη  $1^{\eta}$  διχοτόμο  $y = x$  στα σημεία  $A_2, A_4, A_6, \dots, A_{2n}$ , αντίστοιχα.

Ενώ για  $t = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}$  η καμπύλη τέμνει τη  $2^{\eta}$  διχοτόμο  $y = -x$  στα σημεία  $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{2n-1}$ , αντίστοιχα.

Θα εκτιμήσουμε τώρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής  $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$  (βλ. Σχήμα 12).



(Σχήμα 12)

Αφού κάθε σημείο  $A_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, 3, \dots, 2n$ ) έχει υψόμετρο ίσο με  $\frac{1}{\kappa}$  έπεται, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, ότι:

$$A_1A_2 > 1, A_2A_3 > \frac{1}{2}, A_3A_4 > \frac{1}{3}, \dots, A_{2n-1}A_{2n} > \frac{1}{2n-1}.$$

Συνεπώς το μήκος της τεθλασμένης γραμμής  $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$  είναι μεγαλύτερο από το  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}$  που τείνει στο  $+\infty$ , καθώς

$n \rightarrow +\infty$  (αφού  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ). Άρα, το μήκος της καμπύλης  $\gamma$  δεν είναι πεπερασμένο. □



Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι το εξής: Υπάρχει κριτήριο που να αποφαινεται κατά πόσο το μήκος μιας καμπύλης είναι πεπερασμένο ή όχι; Η απάντηση είναι θετική και δίδεται από το επόμενο θεώρημα το οποίο χαρακτηρίζει τις καμπύλες πεπερασμένου μήκους μέσω των συντεταγμένων συναρτήσεων τους.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** (Χαρακτηρισμός καμπύλων με πεπερασμένο μήκος)

Μια καμπύλη  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$  έχει πεπερασμένο μήκος αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι φραγμένης κύμανσης.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$  μια διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$ . Τότε,

$$\sum_{\kappa=1}^n |\gamma(t_{\kappa-1}) - \gamma(t_{\kappa})| = \sum_{\kappa=1}^n \sqrt{(x(t_{\kappa-1}) - x(t_{\kappa}))^2 + (y(t_{\kappa-1}) - y(t_{\kappa}))^2}.$$

Όμως, για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς  $A, B$  ισχύει:

$$|A|, |B| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq |A| + |B|,$$

συνεπώς,

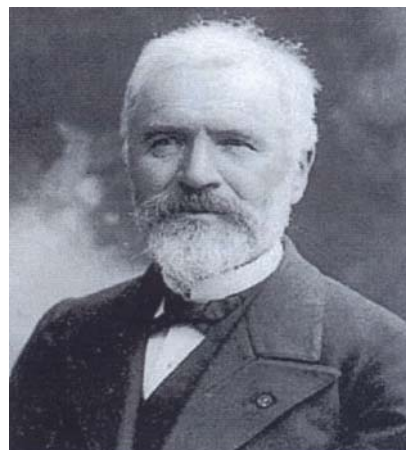
$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^n |x(t_{\kappa-1}) - x(t_{\kappa})|, \sum_{\kappa=1}^n |y(t_{\kappa-1}) - y(t_{\kappa})| &\leq \sum_{\kappa=1}^n |\gamma(t_{\kappa-1}) - \gamma(t_{\kappa})| \leq \\ &\leq \sum_{\kappa=1}^n |x(t_{\kappa-1}) - x(t_{\kappa})| + \sum_{\kappa=1}^n |y(t_{\kappa-1}) - y(t_{\kappa})| \end{aligned}$$

για κάθε διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  και άρα το ζητούμενο έπεται.  $\square$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος και της συζήτησης που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι το επόμενο πόρισμα.

**ΠΟΡΙΣΜΑ:** Κάθε συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη  $\gamma$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  έχει πεπερασμένο μήκος.

Το ακόλουθο θεώρημα αποδίδεται στον Γάλλο μαθηματικό Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) και η απόδειξη που παραθέτουμε έχει ληφθεί από το έργο του [8].



Camille Jordan (1838-1922)

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** *Αν μια καμπύλη  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  έχει (πεπερασμένο) μήκος  $\ell$ , τότε το εμβαδόν  $E$  του υποσυνόλου  $\gamma([\alpha, \beta])$  του  $\mathbb{R}^2$  είναι ίσο με μηδέν.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$ . Καλύπτουμε το  $\mathbb{R}^2$  με ένα δίκτυο που απαρτίζεται από τετράγωνα πλευράς  $\frac{\ell}{n}$  και χωρίζουμε την καμπύλη  $\gamma$  σε

$n$  το πλήθος μήκους κομμάτια,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , έκαστο μήκους ίσο με  $\frac{\ell}{n}$ .

Κάθε τέτοιο κομμάτι περνά, το πολύ, από τέσσερα τετράγωνα του δικτιού. Οπότε,

$$E = E(\gamma) = E(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n) \leq E(\gamma_1) + \dots + E(\gamma_n) \leq 4 \frac{\ell^2}{n^2} + \dots + 4 \frac{\ell^2}{n^2} = 4 \frac{\ell^2}{n}$$

Αφήνοντας το  $n$  να τείνει στο  $+\infty$ , έπεται  $E = 0$ . □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** (Το μήκος της καμπύλης των Cantor-Lebesgue) *Η καμπύλη των Cantor-Lebesgue έχει άπειρο μήκος, λόγω του παραπάνω θεωρήματος.*

Στην μεθεπόμενη παράγραφο θα εκφράσουμε το μήκος μιας καμπύλης συναρτήσεως των συντεταγμένων συναρτήσεων  $x(t)$ ,  $y(t)$ , χρησιμοποιώντας τα δύο βασικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού: την παράγωγο και το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Κλείνουμε την παράγραφο με ένα τελευταίο αποτέλεσμα για τις καμπύλες πεπερασμένου μήκους, σύμφωνα με το οποίο το μήκος μιας καμπύλης μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός ορίου. Άμεση χρήση του παρακάτω θεωρήματος θα γίνει στην επόμενη παράγραφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν μια καμπύλη  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  είναι συνεχής και έχει πεπερασμένο μήκος  $\ell$ , τότε:

$$\ell = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2},$$

όπου  $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$  και  $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για μια οποιαδήποτε διαμέριση  $\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$  του διαστήματος  $[\alpha, \beta]$ , λεπτότητας  $\delta$ ,

θέτουμε  $\lambda = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$ . Έστω  $\Delta$  μια τυχαία

διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  και έστω  $\varepsilon > 0$ . Από τον ορισμό του μήκους καμπύλης, υπάρχει μια είναι μια διαμέριση  $\Delta_1$  του  $[\alpha, \beta]$  για την οποία  $\lambda_1 > \ell - \frac{1}{2}\varepsilon$ . Έστω ότι η διαμέριση  $\Delta_1$  έχει  $\kappa$  σημεία ανάμεσα στα  $\alpha$  και  $\beta$ .

Στο εξής κρατάμε τη διαμέριση  $\Delta_1$  σταθερή, οπότε και το  $\kappa$  παραμένει σταθερό. Επειδή οι συνεχείς συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ , μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό  $\delta_1$  έτσι ώστε

$$\sqrt{[x(t) - x(t')]^2 + [y(t) - y(t')]^2} < \frac{\varepsilon}{4\kappa}, \text{ όταν } |t - t'| < \delta_1.$$

Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση  $\Delta_2$  που σχηματίζεται από τα σημεία και της διαμέρισης  $\Delta$  και της διαμέρισης  $\Delta_1$ . Για αυτή τη νέα διαμέριση  $\Delta_2$ , και εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας, το μήκος  $\lambda_2$  της αντίστοιχης τεθλασμένης γραμμής είναι

$$\lambda_2 \geq \lambda_1 > \ell - \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (1)$$

Τώρα, η διαμέριση  $\Delta$  έχει δύο τύπους υποδιαστημάτων: i) εκείνα που δεν περιέχουν σημεία της  $\Delta_1$  και ii) εκείνα που περιέχουν σημεία της  $\Delta_1$ .

Τα υποδιαστήματα του τύπου (i) συνεισφέρουν ένα ποσό στο  $\lambda_2$  το οποίο σίγουρα είναι μικρότερο από το  $\lambda$ . Τα υποδιαστήματα του τύπου (ii) έχουν πλήθος το πολύ  $\kappa$  και περιέχουν το πολύ  $2\kappa$  υποδιαστήματα της  $\Delta_2$ . Όταν  $\delta < \delta_1$  η συνολική συνεισφορά τους στο  $\lambda_2$  είναι μικρότερη από

$$2\kappa \frac{\varepsilon}{4\kappa} = \frac{1}{2}\varepsilon. \text{ Έτσι,}$$

$$\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon > \lambda_2$$

οπότε, με βάση την (1),

$$\lambda > \ell - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Άρα,

$$\ell \geq \lambda > \ell - \varepsilon, \text{ όταν } \delta < \delta_1,$$

Και κατά συνέπεια  $\lambda \rightarrow \ell$ , όταν  $\delta \rightarrow 0$ . □

### 1.7 Το μήκος του κύκλου και ο αριθμός $\pi$

Κατ' αρχήν,

*Κάθε κύκλος ακτίνας  $R$  ( $R > 0$ ) έχει πεπερασμένο μήκος*

Πράγματι, το μήκος μιας καμπύλης είναι αναλλοίωτο κάτω από τις ισομετρίες, συνεπώς ας θεωρήσουμε τον κύκλο με εξίσωση  $x^2 + y^2 = R^2$ . Λόγω συμμετρίας, το μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = R^2$  είναι δύο φορές το μήκος του ημικυκλίου  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$  το οποίο είναι το σύνολο των σημείων:

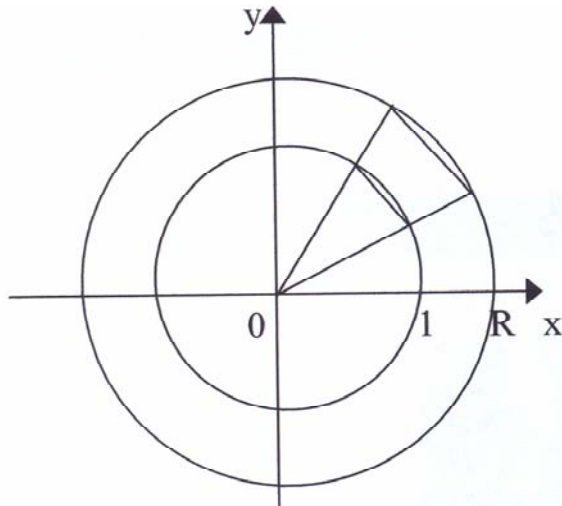
$$(x, \sqrt{R^2 - x^2}), \quad -R \leq x \leq R.$$

Οι συντεταγμένες όμως συναρτήσεις είναι κατά τμήματα μονότονες, συνεπώς φραγμένης κύμανσης και άρα το μήκος του ημικυκλίου (και επομένως του κύκλου) είναι πεπερασμένο.

Επίσης,

*Σε κάθε κύκλο ο λόγος  $\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}}$  είναι ίσος με μια σταθερά ανεξάρτητη της ακτίνας.*

Πράγματι, αν  $C_1$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος και  $C_R$  ο κύκλος ακτίνας  $R$  (και οι δύο κεντραρισμένοι στο  $(0,0)$ ), τότε το σύνολο των εγγεγραμμένων τεθλασμένων γραμμών  $\Pi_1$  στο  $C_1$  βρίσκεται σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των εγγεγραμμένων τεθλασμένων γραμμών  $\Pi_R$  στο  $C_R$ . Μάλιστα λόγω ομοιότητας ισχύει,



$$\text{μήκος } (\Pi_R) = R \cdot \text{μήκος } (\Pi_1).$$

Παίρνοντας supremum στην τελευταία σχέση προκύπτει,

$$\text{μήκος } (C_R) = R \cdot \text{μήκος } (C_1).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με  $2R$  έχουμε,

$$\frac{\text{μήκος } (C_R)}{2R} = \frac{\text{μήκος } (C_1)}{2}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}} = \text{σταθερά} = \frac{\text{μήκος μοναδιαίου κύκλου}}{2}. \quad (1)$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ (Ορισμός του  $\pi$ ). Τη σταθερά της σχέσης (1) την συμβολίζουμε με το γράμμα  $\pi$ .

Συνεπώς, η σχέση (1) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

*Το μήκος κάθε κύκλου ακτίνας  $R$  είναι ίσο με  $2\pi R$ .*

Ειδικότερα,

*το μήκος του μοναδιαίου κύκλου είναι ίσο με  $2\pi$ .*

ΣΧΟΛΙΟ: Σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα της παραγράφου 1.6, αν επιλέξουμε τη διαμέριση που αντιστοιχεί στο κανονικό εγγεγραμμένο n-γωνο, έχουμε ότι

$$\text{μήκος μοναδιαίου κύκλου} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{μήκος κανονικού εγγεγραμμένου n-γώνου})$$

ή ισοδύναμα,

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \right),$$

δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{\pi}{n} \right) = \pi.$$

Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στο Κεφάλαιο 2 στον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

## 1.8 Το ολοκλήρωμα $\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

Ειδικά για τις συνεχώς παραγωγίσιμες καμπύλες το μήκος τους εκφράζεται μέσω ενός ορισμένου ολοκληρώματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εάν  $\gamma$  είναι μία καμπύλη στο  $[a, \beta]$  με συνεχή παράγωγο  $\gamma'$ , τότε η  $\gamma$  έχει πεπερασμένο μήκος και ισχύει η ισότητα*

$$\ell(\gamma) = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^\beta |\gamma'(t)| dt. \quad (1)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θεωρούμε μία διαμέριση  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  του  $[a, \beta]$ . Τότε για κάθε  $i = 1, \dots, n$  είναι

$$|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt.$$

Επομένως,

$$\ell(\Delta, \gamma) \leq \int_a^\beta |\gamma'(t)| dt,$$

για κάθε διαμέριση  $\Delta$  του  $[a, \beta]$ . Κατά συνέπεια,

$$\ell(\gamma) \leq \int_a^\beta |\gamma'(t)| dt.$$

Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας, θεωρούμε  $\varepsilon > 0$ . Αφού η  $\gamma'$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , άρα υπάρχει  $\delta > 0$  για κάθε  $t, s \in [\alpha, \beta]$  ούτως ώστε αν  $|t - s| < \delta$  να ισχύει  $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$ .

Ας είναι  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  μια διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  με  $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| < \delta$  για κάθε δείκτη  $i=1, \dots, n$ . Εάν  $x_{i-1} < t < x_i$  για κάποιον δείκτη  $i=1, \dots, n$  τότε από ομοιόμορφη συνέχεια  $|\gamma'(t)| \leq |\gamma'(x_i)| + \varepsilon$ . Άρα, για κάθε  $i=1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (|\gamma'(x_i)| + \varepsilon) dt = |\gamma'(x_i)| \Delta x_i + \varepsilon \Delta x_i \\ &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq |\gamma'(x_i) - \gamma'(x_{i-1})| + 2\varepsilon \Delta x_i \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές ως προς τον δείκτη  $i$ , λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt \leq \ell(\Delta, \gamma) + 2\varepsilon(\alpha - \beta) \leq \ell(\gamma) + 2\varepsilon(\alpha - \beta).$$

Αφήνοντας το  $\varepsilon$  να τείνει στο μηδέν προκύπτει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt \leq \ell(\gamma).$$

Άρα, ολοκληρώθηκε η απόδειξη. □

**ΠΟΡΙΣΜΑ 1.** Εάν  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (t, f(t))$  τότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το μήκος της είναι ίσο με:

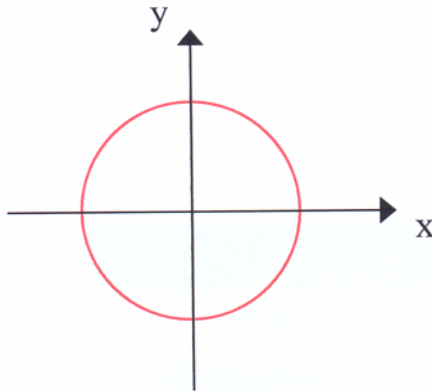
$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 2.** Εάν μία καμπύλη  $\gamma$  έχει εξίσωση  $r = f(\theta)$  σε πολικές συντεταγμένες και με την συνάρτηση  $f$  συνεχή στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , τότε το μήκος της μεταξύ των ευθειών  $\theta = \alpha$  και  $\theta = \beta$  είναι ίσο με:

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

## 1.9 Το μήκος κλασικών καμπυλών

1) Κύκλος ακτίνας  $r$



Εξίσωση σε παραμετρική μορφή:  
 $x(t) = r \cos t$ ,  $y(t) = r \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

Μήκος καμπύλης:

$$x'(t) = -r \sin t, \quad y'(t) = r \cos t$$

$$[x'(t)]^2 = r^2 \sin^2 t, \quad [y'(t)]^2 = r^2 \cos^2 t$$

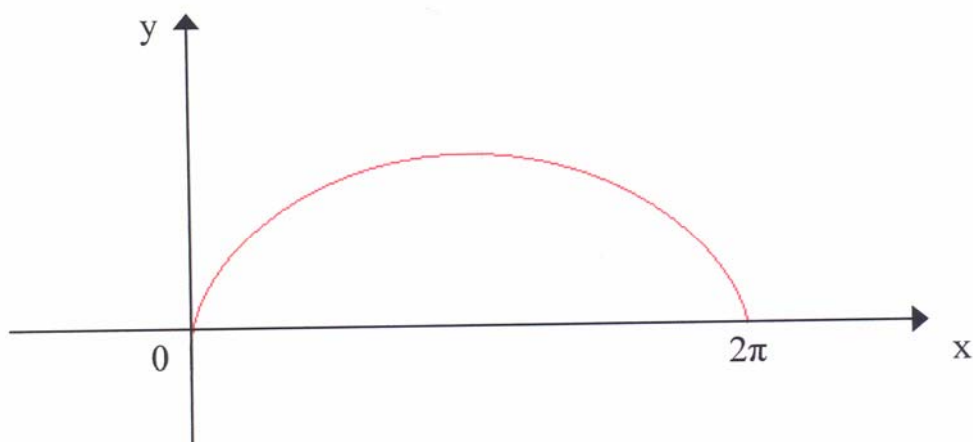
$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

Άρα,

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = 2\pi r.$$



2) Κυκλοειδής καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο κύκλου ακτίνας  $r$  όταν κυλάει κατά τον άξονα  $x$ .



Εξίσωση σε παραμετρική μορφή:  
 $x(t) = r(t - \sin t)$ ,  $y(t) = r(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

Μήκος καμπύλης:  
 $x'(t) = r(1 - \cos t)$ ,  $y'(t) = r \sin t$

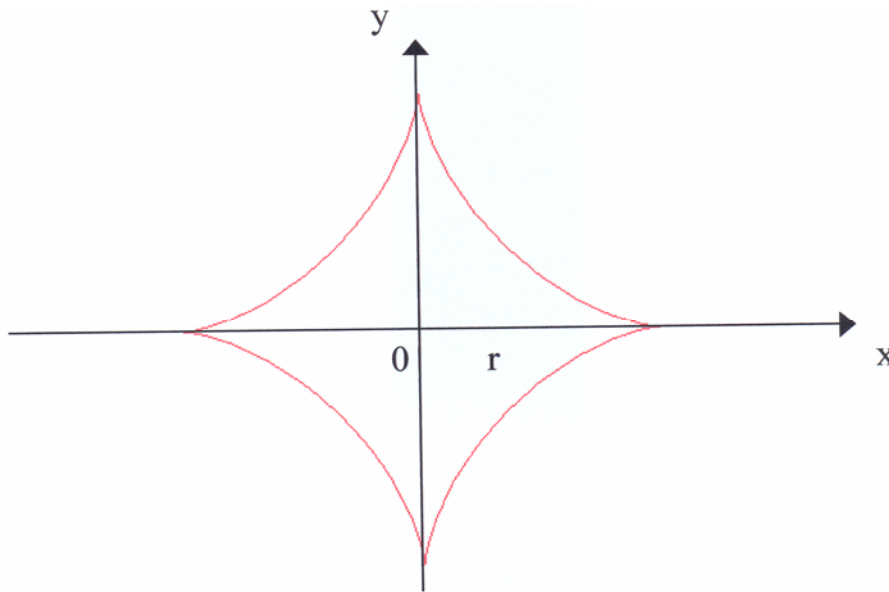
$$[x'(t)]^2 = r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t), [y'(t)]^2 = r^2 \sin^2 t$$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = r^2(1 - 2\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t) = 2r^2(1 - \cos t) = 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 2r \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \omega} 2d\omega = 4r \int_0^{\pi} \sin \omega d\omega = 8r. \end{aligned}$$

3) Αστροειδής ή υποκυκλοειδής καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σημείο κύκλου ακτίνας  $r/4$  καθώς κυλάει εσωτερικά κατά μήκος κύκλου ακτίνας  $r$ .



Εξίσωση σε παραμετρική μορφή:

$$x(t) = r \cos^3 t, \quad y(t) = r \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Μήκος καμπύλης:

$$x'(t) = -3r \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3r \sin^2 t \cos t$$

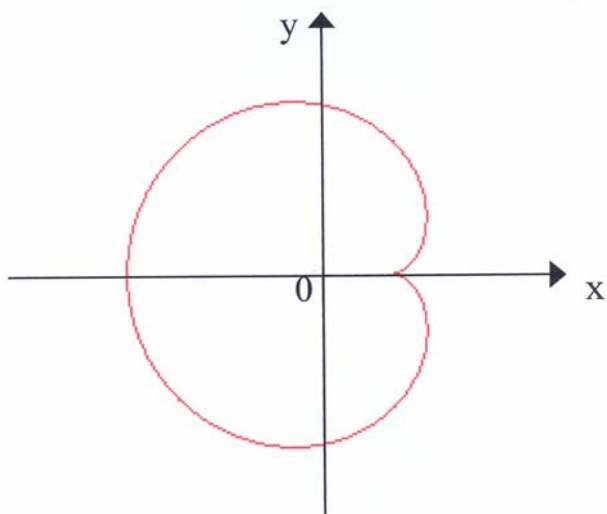
$$[x'(t)]^2 = 9r^2 \cos^4 t \sin^2 t, \quad [y'(t)]^2 = 9r^2 \sin^4 t \cos^2 t$$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 9r^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9r^2 [\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)] \\ = 9r^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9r^2 \sin^2 t \cos^2 t} dt = 3r \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = \\ &= 3r \left[ \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \cos t dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin t \cos t dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin t \cos t dt \right] = \\ &= 3r \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} - 3r \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} + 3r \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{\pi}^{3\pi/2} - 3r \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{3\pi/2}^{2\pi} = \\ &= 3r \frac{1}{2} - 3r \left( -\frac{1}{2} \right) + 3r \frac{1}{2} - 3r \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{12r}{2} = 6r. \end{aligned}$$

4) Καρδιοειδής καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σημείο ενός κύκλου ακτίνας  $r$ , καθώς κυλάει στο εξωτερικό ενός σταθερού κύκλου ακτίνας  $r$ .



Εξίσωση σε παραμετρική μορφή:

$$x(t) = r(2\cos t - \cos(2t)), \quad y(t) = r(2\sin t - \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Μήκος καμπύλης:

$$[x'(t)]^2 = 4r^2(\sin^2 t - 2\sin t \sin(2t) + \sin^2(2t)),$$

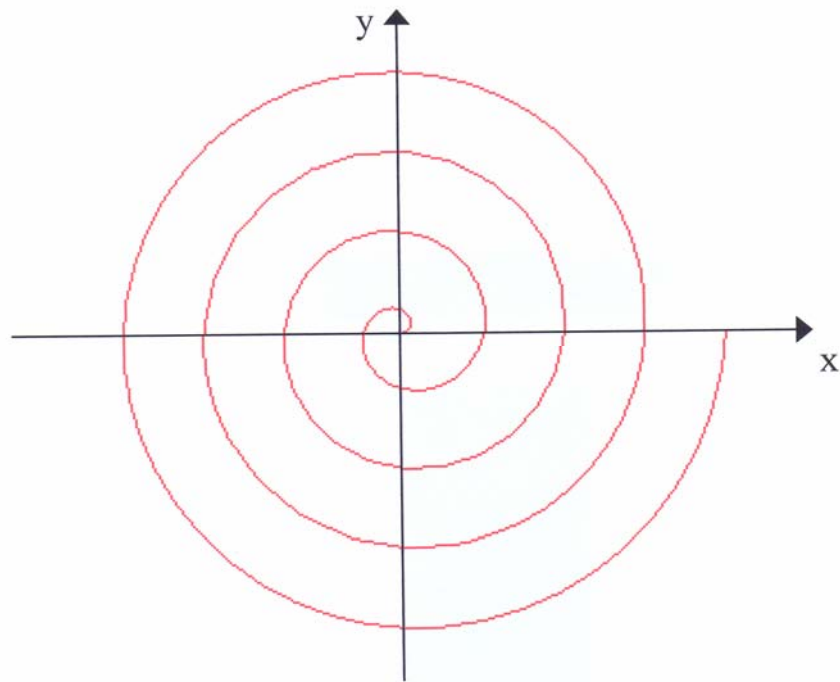
$$[y'(t)]^2 = 4r^2(\cos^2 t - 2\cos t \cos(2t) + \cos^2(2t))$$

$$\begin{aligned} [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 &= 4r^2(\sin^2 t - 2\sin t \sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2 t - 2\cos t \cos(2t) + \cos^2(2t)) = \\ &= 4r^2(2 - 2\cos(2t - t)) = 8r^2(1 - \cos t) = 16r^2 \sin^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16r^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4r \int_0^{2\pi} |\sin \omega| 2d\omega = \\ &= 8r \int_0^{\pi} \sin \omega d\omega = 16r. \end{aligned}$$

### 5) Έλικά του Αρχιμήδη



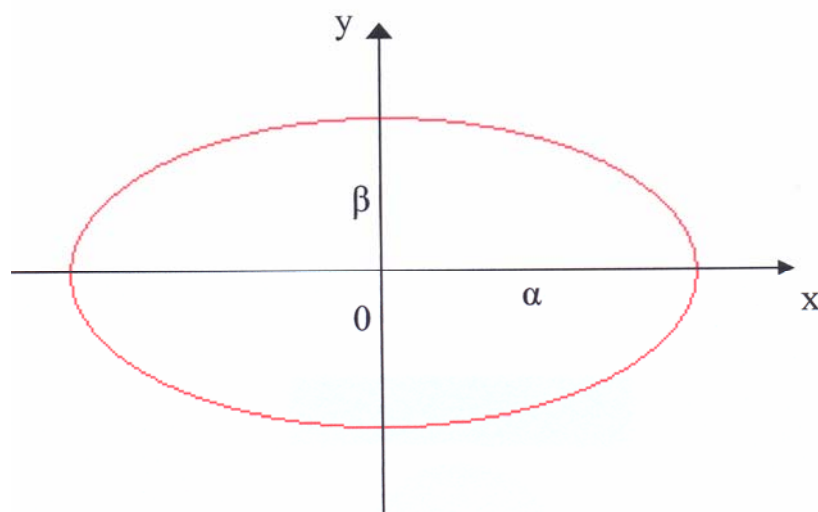
Εξίσωση σε πολική μορφή:  
 $f(\theta) = \alpha\theta$

Μήκος καμπύλης:  
 $f'(\theta) = \alpha$

Άρα,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\theta^2 + \alpha^2} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \\ &= \alpha \left[ \frac{\theta}{2} \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right| \right]_0^{2\pi}. \end{aligned}$$

## 6) Έλλειψη



Εξίσωση σε παραμετρική μορφή:

$$x(t) = \alpha \cos t, \quad y(t) = \beta \sin t$$

Μήκος καμπύλης:

Το μήκος της έλλειψης δεν μπορεί να υπολογιστεί με το ορισμένο ολοκλήρωμα. Χρειάζεται την μελέτη ελλειπτικών συναρτήσεων. Απλά θα δώσουμε την προσέγγιση του μήκους ή οποία δόθηκε το 1914 από τον Ramanujan:

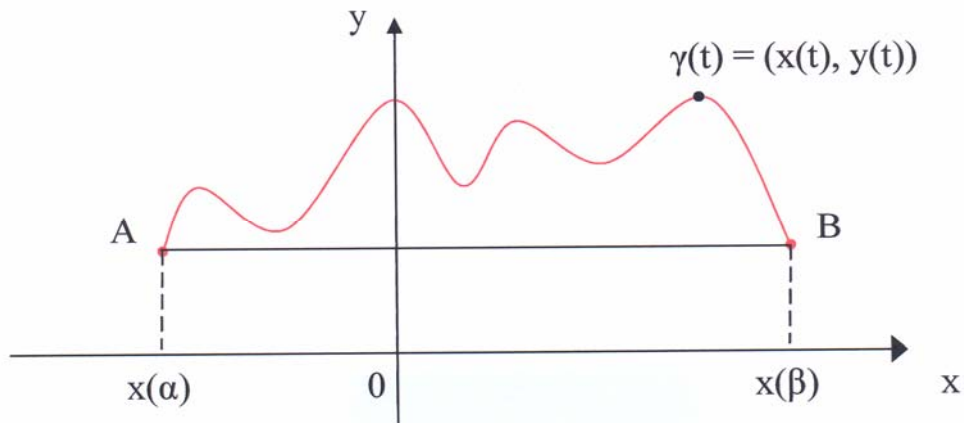
$$\ell(\gamma) \approx \pi[3(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + 3\beta)(3\alpha + \beta)}].$$

### 1.10 Διαδρομές ελάχιστου μήκους στο επίπεδο και στη σφαίρα

A) Διαδρομές ελάχιστου μήκους στο Ευκλείδειο επίπεδο

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** Αν  $A, B$  δύο σημεία του επιπέδου, τότε ο συντομότερος δρόμος (καμπύλη συνεχώς παραγωγίσιμη) από το  $A$  στο  $B$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.**  $\alpha'$  τρόπος: Έστω  $A, B$  δύο σημεία του  $\mathbb{R}^2$ . Επειδή, το μήκος είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες του επιπέδου εφαρμόζουμε κατάλληλη στροφή ώστε να φέρουμε το  $AB$  να είναι παράλληλο στον  $x$ -άξονα.

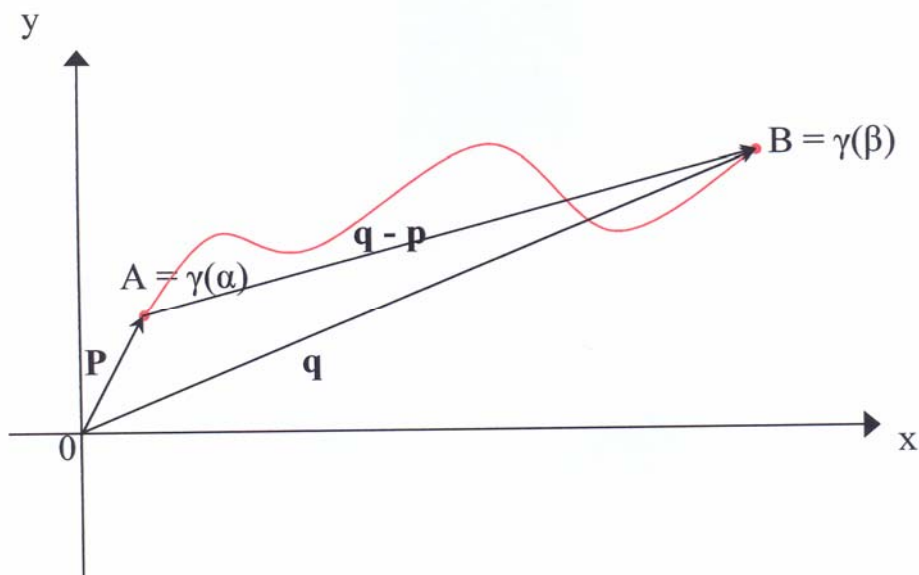


Έστω  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  μια συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη τέτοια ώστε  $A = \gamma(\alpha)$  και  $B = \gamma(\beta)$ .

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |x'(t)| dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} x'(t) dt \\ &= x(\beta) - x(\alpha) = |AB|. \end{aligned}$$

*β' τρόπος:* Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{v}$  ισχύει:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt \text{ αφού:}$$



$$\begin{aligned}
(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} &= (\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)) \cdot \mathbf{v} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(\gamma(t) \cdot \mathbf{v}) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma'(t) \cdot \mathbf{v} dt \\
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t) \cdot \mathbf{v}| dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| |\mathbf{v}| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt.
\end{aligned}$$

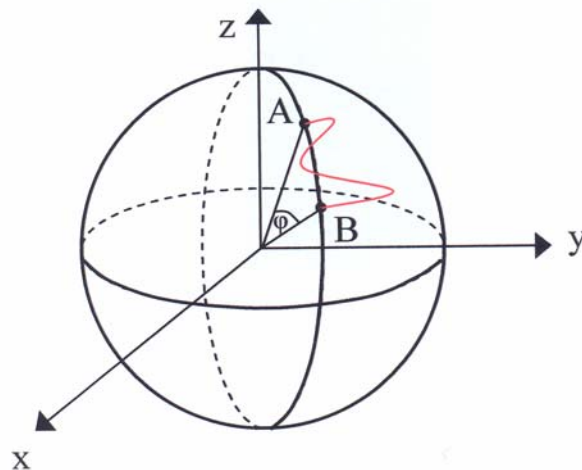
Αν θέσουμε  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}$ , τότε  $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|} \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$ , άρα

$$|\mathbf{q} - \mathbf{p}| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt \quad \square$$

### B) Διαδρομές ελάχιστου μήκους στην σφαίρα

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** Αν  $A$  και  $B$  δύο σημεία της σφαίρας τότε ο συντομότερος δρόμος (καμπύλη συνεχώς παραγωγίσιμη) από το  $A$  στο  $B$  είναι το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία αυτά. (Ως μέγιστος κύκλος νοείται ο κύκλος αυτός που λαμβάνεται ως τομή της σφαίρας και του επιπέδου που ορίζουν τα σημεία  $A, B$  και το κέντρο του κύκλου).

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $A, B$  δύο σημεία της σφαίρας  $S$ . Με μία κατάλληλη στροφή μπορούμε να τα φέρουμε σε τέτοια θέση ώστε ο μέγιστος κύκλος που ορίζουν να είναι ένας μεσημβρινός.



Έστω  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow S$  μια συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη τέτοια ώστε  $\gamma(\alpha) = A$  και  $\gamma(\beta) = B$ . Θα δείξουμε ότι  $\ell(\gamma) \geq \ell(\widehat{AB})$ .

Έχουμε λοιπόν:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

$$\begin{aligned}\text{όπου } x(t) &= R \cos \theta(t) \sin \varphi(t), \\ y(t) &= R \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \\ z(t) &= R \cos \varphi(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα, } x'(t) &= R (\cos \theta(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) - \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \theta'(t)), \\ y'(t) &= R (\sin \theta(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) - \cos \theta(t) \sin \varphi(t) \theta'(t)), \\ z'(t) &= -R \sin \varphi(t) \varphi'(t).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}[x'(t)]^2 &= R^2 [\cos^2 \theta(t) \cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 - 2 \cos \theta(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \theta'(t) + \sin^2 \theta(t) \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2] \\ [y'(t)]^2 &= R^2 [\sin^2 \theta(t) \cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 - 2 \sin \theta(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \cos \theta(t) \sin \varphi(t) \theta'(t) + \cos^2 \theta(t) \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2] \\ [z'(t)]^2 &= R^2 \sin^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2\end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned}[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 &= R^2 [\cos^2 \theta(t) \cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 + \sin^2 \theta(t) \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2 + \\ &\quad + \sin^2 \theta(t) \cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 + \cos^2 \theta(t) \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2 + \\ &\quad + \sin^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2] = \\ &= R^2 [\cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 (\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)) + \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2 (\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)) + \sin^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2] = \\ &= R^2 [\cos^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2 + \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2 + \sin^2 \varphi(t) [\varphi'(t)]^2] = \\ &= R^2 [[\varphi'(t)]^2 (\cos^2 \varphi(t) + \sin^2 \varphi(t)) + \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2] = \\ &= R^2 [[\varphi'(t)]^2 + \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2].\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} R \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + \sin^2 \varphi(t) [\theta'(t)]^2} dt \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} R \sqrt{[\varphi'(t)]^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} R |\varphi'(t)| dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} R \varphi'(t) dt = R (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) = \ell(\widehat{AB}). \quad \square\end{aligned}$$

### 1.11 Ένας ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τις κυκλικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin x$  και  $\cos x$ . Ο πιο σύντομος ίσως είναι μέσω των δυναμοσειρών



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, -\infty < x < \infty.$$

Όλοι τους φυσικά αυτοί οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους αφού ισχύει το εξής θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν η  $f(x)$  έχει παντού δεύτερη παράγωγο και

$$f''(x) + f(x) = 0,$$

$$f(0) = \alpha,$$

$$f'(0) = \beta,$$

τότε,

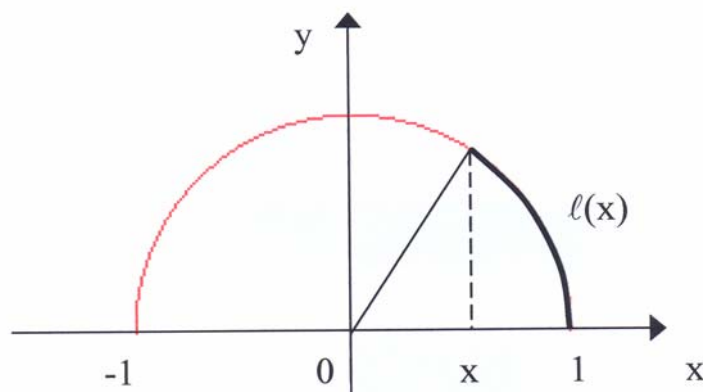
$$f(x) = \beta \sin x + \alpha \cos x.$$

Το θεώρημα αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών  $f''(x) + f(x) = 0$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$  έχει μοναδική λύση τη συνάρτηση  $f \equiv 0$ , το οποίο με τη σειρά του είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής μια και

$$\left[ (f')^2 + f^2 \right]' = 2(ff'' + ff').$$

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό του μήκους καμπύλης μέσω ολοκληρώματος για να δώσουμε έναν ορισμό για το  $\cos x$  και  $\sin x$ .

Έστω  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , με  $-1 \leq x \leq 1$ .



Το μήκος  $\ell(x)$  της καμπύλης  $f$  στο  $[x,1]$  δίνεται από τον τύπο:

$$\ell(x) = \int_x^1 \sqrt{1+[f'(t)]^2} dt = \int_x^1 \sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Άρα,

$$\ell'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ για } -1 < x < 1.$$

Ορίζουμε ως  $\pi$  το  $\ell(-1)$ . Για  $0 \leq x \leq \pi$  ορίζουμε τη συνεχή και επί απεικόνιση  $\ell: [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$ . Αφού είναι επί για κάθε  $x \in [0,\pi]$  υπάρχει  $F(x) \in [0,1]$  τέτοια ώστε  $\ell(F(x)) = x$ .

Επομένως,

$$\ell'(F(x)) = 1 \Leftrightarrow -\frac{F'(x)}{\sqrt{1-F^2(x)}} = 1 \Leftrightarrow F'(x) = -\sqrt{1-F^2(x)}$$

και

$$F''(x) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{1-F^2(x)}} = -F(x).$$

Άρα,

$$F''(x) + F(x) = 0 \text{ με } F(0)=1 \text{ και } F'(0)=0$$

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα,

$$F(x) = \cos x.$$

Τέλος, ορίζουμε το  $\sin x$  να είναι:  $\sin x = \sqrt{1-F^2(x)}$ .

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Tom M. Apostol, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Τόμος I, II, Μ. Πεχλιβανίδης, Αθήνα, 1962
- [2] Luis Brand, *Μαθηματική Ανάλυση* (μτφ), Ε.Μ.Ε., 1984
- [3] Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, New Jersey 1976
- [4] J. L. Coolidge, *The Length of Curves*, The American Mathematical Monthly, vol. 60, No. 2 (1953) 89-93

- [5] R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis I, II*, Springer, 1965
- [6] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer – Verlag, 1991
- [7] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover, New York, 1977
- [8] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l' Ecole Polytechnique*, Tome Premier, Troisieme Edotion, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [9] Hans Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer – Verlag, 1994
- [10] Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (μτφ)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1991
- [11] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

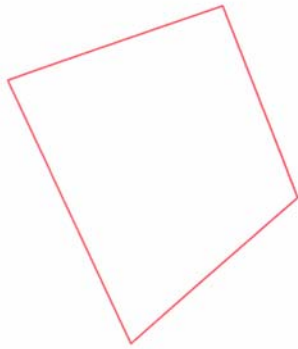
#### 2.1 Εισαγωγή

Στα σχολικά εγχειρίδια [1], η έννοια του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος παρουσιάζεται ως το αποτέλεσμα της σύγκρισης αυτού με ένα άλλο επίπεδο σχήμα το οποίο επιλέγεται ως μονάδα μέτρησης.

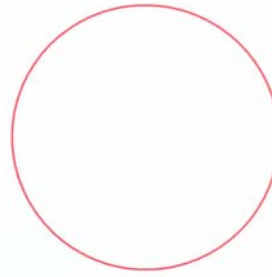
Στις μικρότερες συνήθως τάξεις, για εποπτικούς κυρίως λόγους, το εμβαδόν παραλληλίζεται με την ποσότητα του χρώματος που απαιτείται για να καλυφτεί ένα σχήμα στο επίπεδο. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο πλευράς 2 μέτρων χρειάζεται 4 φορές περισσότερο χρώμα από ένα τετράγωνο πλευράς 1 μέτρου. Αυτός ο παραλληλισμός, αν και στερείται μαθηματικής ακρίβειας, είναι κατάλληλος για την επισήμανση δύο σημαντικών ιδιοτήτων του εμβαδού: την ιδιότητα του αναλλοίωτου (το χρώμα που απαιτείται για να βαφτεί η επιφάνεια μιας σανίδας είναι το ίδιο ανεξάρτητα αν την μετατοπίσουμε λίγο πιο πέρα ή την στρέψουμε κατά μία γωνία) και την ιδιότητα της προσθετικότητας (αν μια σανίδα την κόβουμε σε δύο κομμάτια τότε το χρώμα που απαιτείται για να βαφτεί η επιφάνεια της αρχικής σανίδας είναι το ίδιο που απαιτείται για να βαφτούν τα δύο επιμέρους κομμάτια).

Στο κεφάλαιο αυτό θα θέσουμε ως αξιώματα την ιδιότητα του αναλλοίωτου και την ιδιότητα της προσθετικότητας και θα δεχθούμε ως μονάδα μέτρησης το εμβαδόν, του μοναδιαίου τετραγώνου που, για λόγους κανονικότητας, θα του αποδώσουμε την τιμή 1. Στόχος μας είναι βασισμένοι σ' αυτά τα τρία μόνο αξιώματα να εξάγουμε σε πρώτη φάση τους γνωστούς τύπους της στοιχειώδους γεωμετρίας για το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου και σε δεύτερη φάση τους γνωστούς τύπους για το εμβαδόν μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος, του διπλού ολοκληρώματος και του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στα **φραγμένα** υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  διακρίνοντας δύο κατηγορίες α) τα φραγμένα πολυγωνικά σχήματα (βλ. Σχήμα 1) και β) τα φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  που δεν είναι κατά ανάγκη πολυγωνικά σχήματα (βλ. Σχήμα 2). Για τα τελευταία θα προσδιορίσουμε τη συνθήκη που θα εγγυάται την δυνατότητα μέτρησης (ύπαρξης) του εμβαδού. Πρόκειται στην ουσία για την μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου.



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

## 2.2 Φραγμένα πολυγωνικά σχήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Κλειστό ημι-επίπεδο  $H$  του ευκλείδειου επιπέδου είναι ένα υποσύνολο που σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma \geq 0\}$$

όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι σταθερές με  $\alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$ .

Ανοικτό ημι-επίπεδο  $H$  του ευκλείδειου επιπέδου είναι ένα υποσύνολο που σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται

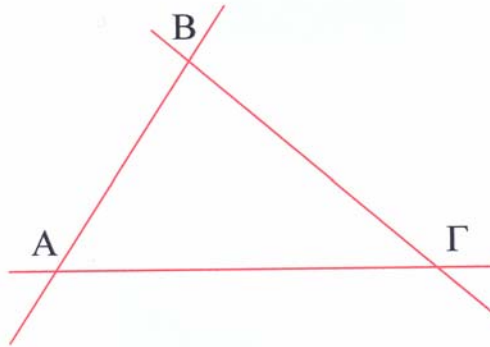
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma > 0\}$$

όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι όπως παραπάνω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Πολυγωνική περιοχή (ή πολυγωνικό σχήμα) του ευκλείδειου επιπέδου είναι ένα υποσύνολό του που λαμβάνεται ως τομή ή ένωση πεπερασμένου πλήθους ανοικτών ή κλειστών ημι-επιπέδων.

Για παράδειγμα, εάν  $H_1, H_2, H_3, H_4$  είναι ημι-επίπεδα τότε τα σύνολα  $(H_1 \cap H_2) \cup (H_3 \cap H_4)$ ,  $H_1 \cap H_3 \cap H_4$  είναι πολυγωνικές περιοχές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το εσωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  (βλ. Σχήμα 3) είναι ένα πολυγωνικό σχήμα, αφού ταυτίζεται με την τομή  $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ , όπου α)  $H_1$  το ανοικτό ημι-επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία  $AB$  και περιέχει το σημείο  $\Gamma$ , β)  $H_2$  το ανοικτό ημι-επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία  $AG$  και περιέχει το σημείο  $B$  και γ)  $H_3$  το ανοικτό ημι-επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία  $B\Gamma$  και περιέχει το σημείο  $A$ .



(Σχήμα 3)

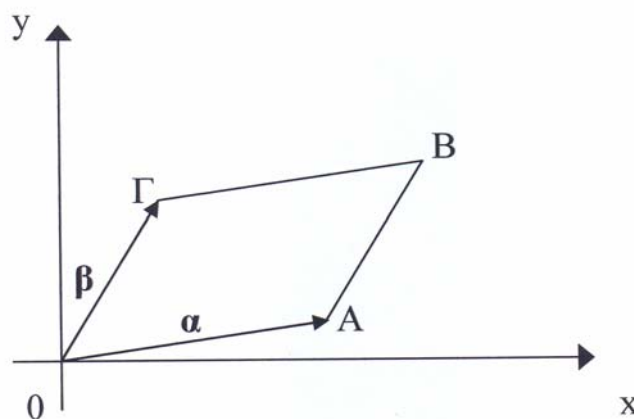
Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η τομή και η ένωση πολυγωνικών περιοχών είναι πάλι πολυγωνική περιοχή.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 3.** Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^2$  λέγεται φραγμένο αν είναι υποσύνολο κάποιου κυκλικού δίσκου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή ενός παραλληλογράμμου είναι φραγμένα σύνολα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι το εσωτερικό κάθε παραλληλογράμμου είναι φραγμένο σύνολο, αφού κάθε τρίγωνο περιέχεται σε ένα παραλληλόγραμμο.

Επιλέγουμε μια από τις κορυφές του παραλληλογράμμου να είναι η αρχή των αξόνων. Έστω λοιπόν παραλληλόγραμμο  $OAB\Gamma$  (βλ. Σχήμα 4).



(Σχήμα 4)

Με  $\alpha$  συμβολίζουμε τη διανυσματική ακτίνα του σημείου  $A$  και με  $\beta$  τη διανυσματική ακτίνα του σημείου  $\Gamma$ . Τότε η διανυσματική ακτίνα  $r$

για κάθε εσωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \text{με } 0 < \lambda, \mu < 1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}|^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \\ &= \lambda^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu^2 |\mathbf{b}|^2 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\leq \lambda^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\lambda\mu |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| + \mu^2 |\mathbf{b}|^2 < \\ &< |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = \\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 \end{aligned}$$

(\*) Ισχύει από Cauchy-Schwarz ανισότητα.

Επομένως, το εσωτερικό του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ περιέχεται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ . Άρα, είναι φραγμένο σύνολο.  $\square$

### 2.3 Τα τρία αξιώματα του εμβαδού για φραγμένα πολυγωνικά σχήματα

Το εμβαδόν  $E$  είναι μία απεικόνιση από το σύνολο των φραγμένων πολυγωνικών σχημάτων του  $\mathbb{R}^2$  στο σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, δηλαδή μια απεικόνιση της μορφής:

$$E: (\text{σύνολο φραγμένων πολυγωνικών σχημάτων του } \mathbb{R}^2) \rightarrow [0, +\infty),$$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

Αξίωμα 1 (του Αναλλοίωτου)

Αν το  $A$  είναι ένα φραγμένο πολυγωνικό σχήμα και  $\varphi$  μια ισομετρία του επιπέδου που απεικονίζει το  $A$  στο  $\varphi(A)$ , τότε

$$E(A) = E(\varphi(A)).$$

Αξίωμα 2 (της Προσθετικότητας)

Αν  $A, B$  είναι φραγμένα πολυγωνικά σχήματα με  $A \cap B = \emptyset$ , τότε  
$$E(A \cup B) = E(A) + E(B).$$

Αξίωμα 3 (της Κανονικότητας)

Το εμβαδόν ενός ανοικτού τετραγώνου (χωρίς σύνορο) με πλευρά 1, είναι ίσο με 1.

ΣΧΟΛΙΟ: Ισομετρία του Ευκλείδειου επιπέδου λέμε έναν μετασχηματισμό  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , που είναι σύνθεση πεπερασμένου πλήθους μεταφορών ή στροφών.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) (Πεπερασμένη Προσθετικότητα) Αν  $A_1, \dots, A_n$  είναι ξένα μεταξύ τους και φραγμένα πολυγωνικά σχήματα, τότε:

$$E(A_1 \cup \dots \cup A_n) = E(A_1) + \dots + E(A_n). \quad (1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για  $n = 2$  η σχέση (1) ισχύει από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για  $n=k$ , δηλαδή ότι ισχύει:

$$E(A_1 \cup \dots \cup A_k) = E(A_1) + \dots + E(A_k). \quad (2)$$

Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για  $n = k + 1$ . Αφού  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$  είναι ξένα μεταξύ τους, θα είναι επίσης ξένα τα σύνολα  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  και  $A_{k+1}$ , άρα από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα

$$E((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = E(A_1 \cup \dots \cup A_k) + E(A_{k+1})$$

ή ισοδύναμα, λόγω της (2),

$$E(A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) = E(A_1) + \dots + E(A_k) + E(A_{k+1})$$

και το ζητούμενο έπεται. □

2) (Μονοτονία) Αν  $A, B$  είναι φραγμένα πολυγωνικά σχήματα και  $A \subseteq B$ , τότε  $E(A) \leq E(B)$  και μάλιστα  $E(B) = E(A) + E(B \setminus A)$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα σύνολα  $A, B \setminus A$  είναι ξένα μεταξύ τους, φραγμένα πολυγωνικά σχήματα η ένωση των οποίων ισούται με το σύνολο  $B$ . Συνεπώς, από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα



$$E(B) = E(A \cup (B \setminus A)) = E(A) + E(B \setminus A).$$

Δεδομένου ότι  $E(B \setminus A) \geq 0$ , έπεται ότι  $E(A) \leq E(B)$ . □

ΣΧΟΛΙΟ: Τα αξιώματα της προσθετικότητας και της κανονικότητας γενικεύονται ως εξής:

Αξίωμα 2 (Γενικευμένη έκδοση) Αν  $A, B$  είναι φραγμένα πολυγωνικά σχήματα για τα οποία η τομή  $A \cap B$  είναι το κενό σύνολο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα, τότε

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B)$$

και,

Αξίωμα 3 (Γενικευμένη έκδοση) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 1 είναι ίσο με 1, ανεξάρτητα αν το τετράγωνο είναι ανοικτό, κλειστό ή περιλαμβάνει κάποιες πλευρές του.

Η ισχύς των δύο αυτών γενικευμένων εκδόσεων στηρίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ . Το εμβαδόν κάθε ευθύγραμμου τμήματος είναι μηδέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη του λήμματος αυτού θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

1<sup>ο</sup> Βήμα: Το εμβαδόν ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , μήκους 1, που δεν περιέχει τα άκρα του, είναι ίσο με μηδέν.

Έστω  $n \in \mathbb{N}$ , με  $n \geq 2$  και  $T$  ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση 1 και ύψος  $1/n$ . Χρησιμοποιώντας  $n$  αντίτυπα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $T$  και  $n-1$  αντίτυπα του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και τοποθετώντας τα το ένα πάνω στο άλλο (με τη σειρά: παραλληλόγραμμο - ευθύγραμμο τμήμα - παραλληλόγραμμο - ευθύγραμμο τμήμα - κ.λπ.) κατασκευάζουμε ένα ανοικτό τετράγωνο πλευράς 1.

Συνεπώς, από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας, το 1<sup>ο</sup> και το 3<sup>ο</sup> Αξίωμα έχουμε:

$$nE(T) + (n-1)E(AB) = 1.$$

Όμως,  $nE(T) \geq 0$ , άρα

$$E(AB) \leq \frac{1}{n-1}, \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Συνεπώς, αφήνοντας  $n \rightarrow \infty$ , έπεται  $E(AB)=0$ .

*2<sup>ο</sup> Βήμα: Το εμβαδόν σημείου είναι μηδέν.*

Πράγματι, αφού κάθε σημείο είναι υποσύνολο ενός ανοικτού ευθύγραμμου τμήματος μήκους ένα, τότε, από το 1<sup>ο</sup> Βήμα και την ιδιότητα της μονοτονίας, το ζητούμενο έπεται.

*3<sup>ο</sup> Βήμα: Το εμβαδόν κάθε ευθύγραμμου τμήματος, που έχει μήκος ίσο με έναν φυσικό αριθμό είναι μηδέν.*

Πράγματι, κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει μήκος ίσο με έναν φυσικό αριθμό, είτε περιλαμβάνει τα άκρα του είτε όχι, γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών ευθύγραμμων τμημάτων μήκους 1 και κάποιων σημείων. Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας και τα προηγούμενα βήματα, το εμβαδόν του ισούται με μηδέν.

*4<sup>ο</sup> Βήμα: Το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος είναι μηδέν.*

Πράγματι, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα με μήκος  $a$ , όπου  $a > 0$  και  $a \in \mathbb{R}$ , υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα με μήκος φυσικό αριθμό, π.χ.  $[a]+1$ , που το περιέχει. Άρα, από την ιδιότητα της μονοτονίας, το ζητούμενο έπεται. □

## 2.4 Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Ο σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση τα αξιώματα του εμβαδού.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεών του.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

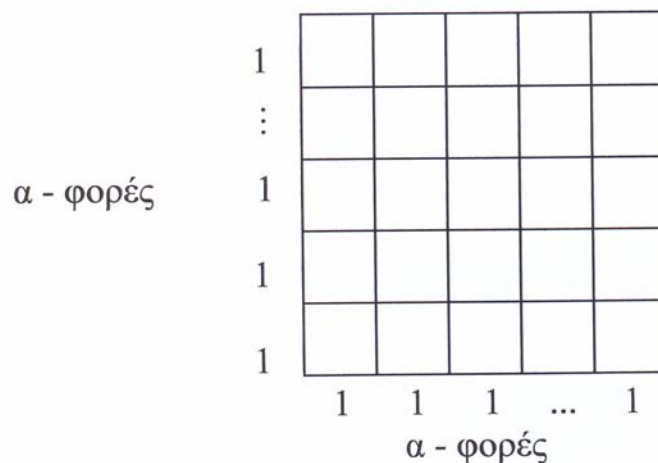
**ΛΗΜΜΑ.** Το εμβαδόν τετραγώνου  $T$  πλευράς  $a$  ( $a > 0$ ) είναι ίσο με  $a^2$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η απόδειξη θα δοθεί σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για  $a \in \mathbb{N}$ , στο δεύτερο για  $a \in \mathbb{Q}$  και στο τρίτο γενικά για  $a \in \mathbb{R}$ .

Με  $T_\kappa$  θα συμβολίζουμε το τετράγωνο πλευράς  $\kappa$  ( $\kappa > 0$ ).

*1<sup>ο</sup> Βήμα:* Έστω  $a \in \mathbb{N}$  και  $T_a$  τετράγωνο πλευράς  $a$ .

Χωρίζουμε την κάθε πλευρά του τετραγώνου  $T_a$  σε  $a$  ίσα μέρη, έκαστο μήκος 1, φέρνοντας  $a-1$  το πλήθος οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα (βλ. Σχήμα 5). Έτσι, σχηματίζονται  $a^2$  το πλήθος τετράγωνα  $T_1$ , έκαστο πλευράς 1.



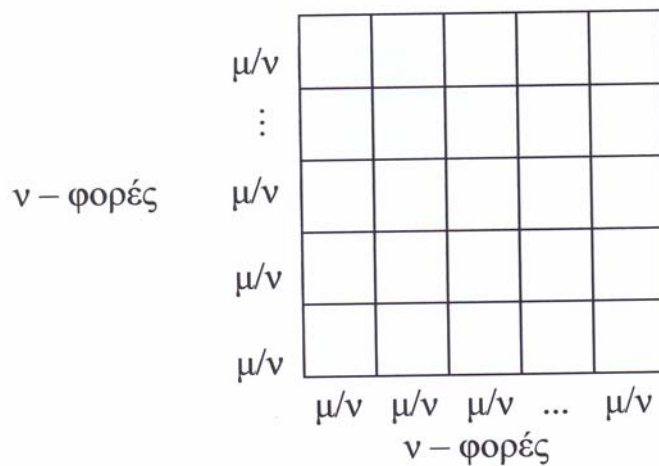
(Σχήμα 5)

Συνεπώς, το αρχικό τετράγωνο  $T_a$  μπορεί να γραφεί ως ένωση  $a^2$  το πλήθος τετραγώνων πλευράς 1. Άρα, από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα, την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας και το 3<sup>ο</sup> Αξίωμα,

$$E(T_\alpha) = \alpha^2 E(T_1) = \alpha^2 \cdot 1 = \alpha^2.$$

2<sup>ο</sup> Βήμα: Έστω  $\alpha = \frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}$ , με  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$  και  $T_\mu$  τετράγωνο πλευράς  $\mu$ .

Χωρίζουμε την κάθε πλευρά του τετραγώνου  $T_\mu$  σε  $\nu$  ίσα μέρη, έκαστο μήκος  $\mu/\nu$ , φέρνοντας  $\nu-1$  το πλήθος οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα (βλ. Σχήμα 6). Έτσι, σχηματίζονται  $\nu^2$  το πλήθος τετράγωνα  $T_{\frac{\mu}{\nu}}$ .



(Σχήμα 6)

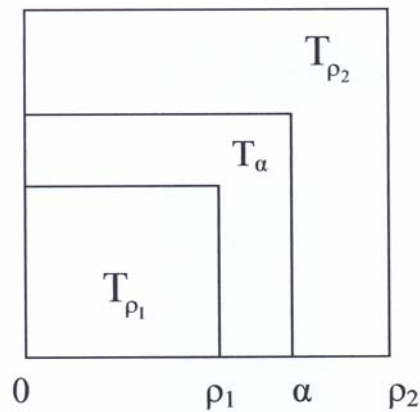
Συνεπώς, από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα, την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας και το 1<sup>ο</sup> Βήμα,

$$\mu^2 = E(T_\mu) = \nu^2 E(T_{\frac{\mu}{\nu}}).$$

Άρα,

$$E(T_{\frac{\mu}{\nu}}) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2.$$

3<sup>ο</sup> Βήμα: Έστω  $\alpha > 0$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\rho_1, \rho_2$  τυχαίοι ρητοί αριθμοί ώστε  $\rho_1 < \alpha < \rho_2$ . Τότε, (βλ. Σχήμα 7)



(Σχήμα 7)

$$T_{\rho_1} \subseteq T_\alpha \subseteq T_{\rho_2}$$

οπότε, από την μονοτονία,

$$E(T_{\rho_1}) \leq E(T_\alpha) \leq E(T_{\rho_2}).$$

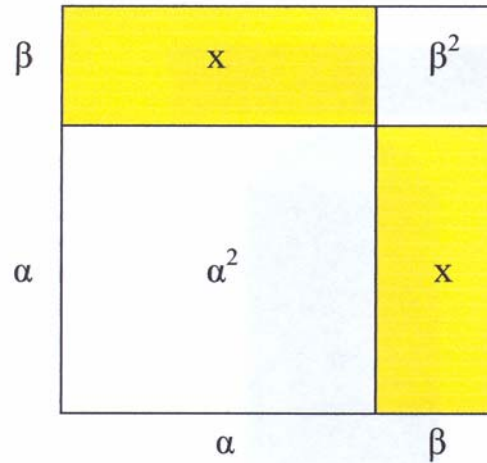
Επομένως, από Βήμα 2,

$$\rho_1^2 \leq E(T_\alpha) \leq \rho_2^2.$$

Αν αφήσουμε  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \alpha$ , τότε  $E(T_\alpha) = \alpha^2$ . □

Είμαστε τώρα σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ. Έστω  $\alpha, \beta$  οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς  $(\alpha+\beta)$  το οποίο το χωρίζουμε σε ένα τετράγωνο με πλευρά  $\alpha$ , σε ένα τετράγωνο με πλευρά  $\beta$  και σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις  $\alpha, \beta$  (βλ. Σχήμα 8).



(Σχήμα 8)

Από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα του εμβαδού, τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο εμβαδόν, ας το συμβολίσουμε με  $x$ , αφού μέσω κατάλληλης μετατόπισης και στροφής μπορούμε να τα ταυτίσουμε. Επίσης, από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας, το εμβαδόν του τετραγώνου, που ισούται με  $(\alpha + \beta)^2$ , λόγω προηγούμενου λήμματος, είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τεμαχίων του. Δηλαδή,

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2x$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2x$$

Άρα,

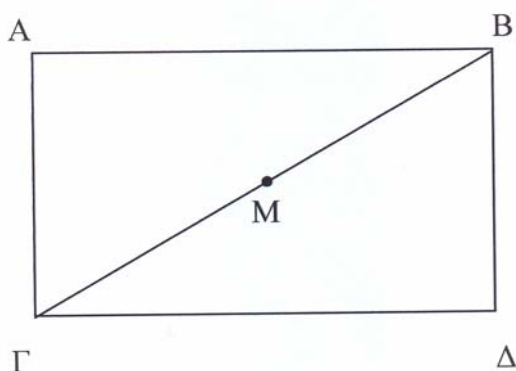
$$x = \alpha\beta.$$

□

## 2.5 Τύποι εμβαδού n-γώνων (με $n \geq 3$ )

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίσο με  $\frac{1}{2}$  (βάση)(ύψος).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω  $AB\Gamma$  ένα ορθογώνιο τρίγωνο και  $M$  το μέσο της υποτείνουσας του  $B\Gamma$ . Εκτελώντας συμμετρία ως προς το  $M$ , λαμβάνουμε τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  (βλ. Σχήμα 9).



(Σχήμα 9)

Από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα τα εμβαδά των δύο τριγώνων θα είναι ίσα, συνεπώς  $E(AB\Gamma\Delta) = 2E(AB\Gamma)$ . Όμως

$$E(AB\Gamma\Delta) = (AB)(A\Gamma)$$

άρα,

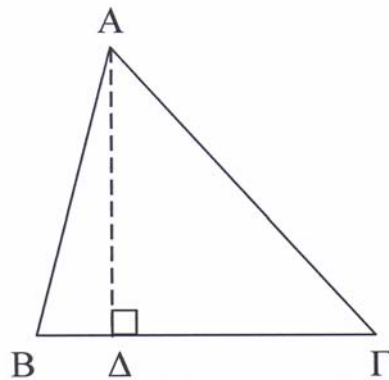
$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma).$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Το εμβαδόν οποιουδήποτε τριγώνου είναι ίσο με  $\frac{1}{2}$  (βάση)(ύψος).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω  $AB\Gamma$  ένα τυχαίο τρίγωνο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, το ίχνος του ύψους από την κορυφή  $A$  να είναι σημείο  $\alpha$ ) της βάσης  $B\Gamma$  (βλ. Σχήμα 10) ή  $\beta$ ) της προέκτασης της βάσης  $B\Gamma$  (βλ. Σχήμα 11).

1<sup>η</sup> περίπτωση: Το ίχνος του ύψους από την κορυφή Α είναι σημείο της βάσης ΒΓ του τριγώνου.



(Σχήμα 10)

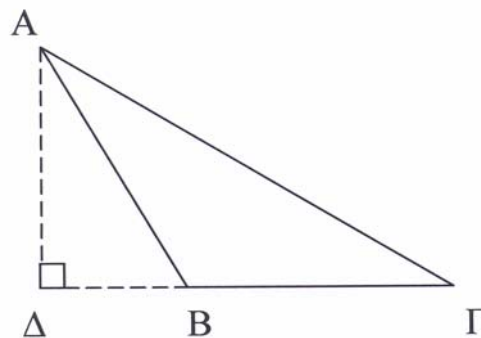
Από την αρχή της προσθετικότητας έπεται

$$E(AB\Gamma) = E(AB\Delta) + E(A\Delta\Gamma).$$

Άρα,

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Delta)(B\Delta) + \frac{1}{2}(A\Delta)(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(A\Delta)[(B\Delta) + (\Gamma\Delta)] = \frac{1}{2}(A\Delta)(B\Gamma).$$

2<sup>η</sup> περίπτωση: Το ίχνος του ύψους από την κορυφή Α είναι σημείο της προέκτασης της βάσης ΒΓ.



(Σχήμα 11)

Από την αρχή της προσθετικότητας έπεται

$$E(AB\Gamma) = E(A\Delta\Gamma) - E(A\Delta B).$$

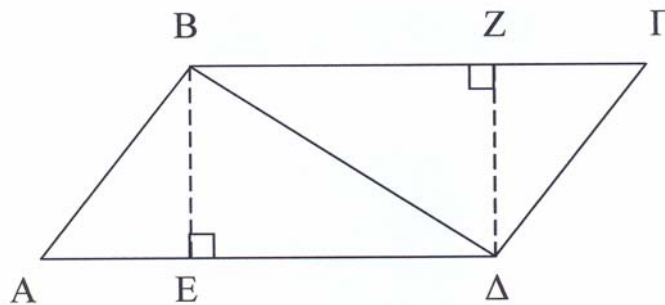
Άρα,



$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Delta)(\Delta\Gamma) - \frac{1}{2}(A\Delta)(\Delta B) = \frac{1}{2}(A\Delta)(B\Gamma). \quad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Το εμβαδόν  $E$  ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ .  $BE$  είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση  $A\Delta$  και  $\Delta Z$  το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση  $B\Gamma$  (βλ. Σχήμα 12).



(Σχήμα 12)

Από το αξίωμα της προσθετικότητας έχουμε

$$E(AB\Gamma\Delta) = E(AB\Delta) + E(B\Gamma\Delta)$$

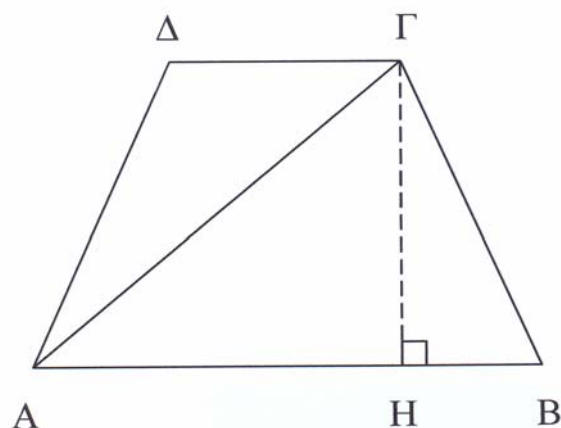
με  $E(AB\Delta) = \frac{1}{2}(A\Delta)(BE)$  και  $E(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(B\Gamma)(\Delta Z)$ .

Όμως,  $(BE) = (\Delta Z)$  και  $(A\Delta) = (B\Gamma)$ , άρα

$$E(AB\Gamma\Delta) = 2 \frac{1}{2}(A\Delta)(BE) = (A\Delta)(BE). \quad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Το εμβαδόν  $E$  ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. ΓΗ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ΑΒ (βλ. Σχήμα 13).



(Σχήμα 13)

Από το αξίωμα της προσθετικότητας,

$$E(ΑΒΓΔ) = E(ΑΒΓ) + E(ΑΔΓ).$$

Όμως,  $E(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} (ΑΒ)(ΓΗ)$  και  $E(ΑΔΓ) = \frac{1}{2} (ΓΔ)(ΓΗ)$ , άρα

$$E(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} [(ΑΒ)+(ΓΔ)](ΓΗ). \quad \square$$

ΣΧΟΛΙΟ. Κάθε φραγμένη πολυγωνική περιοχή μπορεί να διασπαστεί σε τρίγωνα που ανά δύο δεν έχουν κανένα κοινό εσωτερικό σημείο. Συνεπώς, το εμβαδόν μιας πολυγωνικής περιοχής ισούται, από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας, με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων αυτών.

Στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού, χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα αποδεικνύουμε εύχρηστους τύπους για το εμβαδόν κυρτών n-γώνων συναρτήσει των συντεταγμένων των κορυφών τους.

## 2.6 Εμβαδόν φραγμένου, όχι κατ' ανάγκη πολυγωνικού, σχήματος

Ο πρώτος που όρισε τυπικά το εμβαδόν ενός Ευκλείδειου επίπεδου σχήματος, όπως δίνεται στην συνέχεια, ήταν ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano (1858-1932) στο βιβλίο του [6]. Ο τρόπος που το όρισε είναι μία αναδιατύπωση της μεθόδου της εξάντλησης.



Giuseppe Peano (1858-1932)

Η μέθοδος της εξάντλησης οφείλεται στον Έλληνα Μαθηματικό Εύδοξο. Τη μέθοδο αυτή χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Την ακριβή διατύπωση της αρχής αυτής δίνει, η πρώτη πρόταση του X βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη:

*Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐάν ἀπό τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῆ μείζον ἢ το ἡμισυ και τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ το ἡμισυ, και τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταιί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.*

(Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, εἴν ἀπό το μεγαλύτερο ἀφαιρεθεῖ τμήμα μεγαλύτερο ἢ ἴσο του μισοῦ του και ἀπό το υπόλοιπο ἀφαιρέσουμε πάλι μεγαλύτερο ἢ ἴσο του μισοῦ του και ἀν συνεχίσουμε την διαδικασία αὐτή, θα καταλήξουμε σε ἕνα μέγεθος μικρότερο ἀπό οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ἴδιου εἶδους).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Ἐστω  $A$  ἕνα φραγμένο υποσύνολο του ευκλείδειου επιπέδου. Ορίζουμε το εσωτερικό εμβαδόν του  $A$ , συμβολιζόμενο με  $\underline{E}(A)$ , να είναι το ελάχιστο ἄνω φράγμα των εμβαδῶν ὅλων των φραγμένων πολυγώνων που περιέχονται στο  $A$ , δηλαδή:

$$\underline{E}(A) = \sup \{E(\Pi) : \Pi \text{ φραγμένο πολύγωνο, } \Pi \subseteq A\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ἐστω  $A$  ἕνα φραγμένο υποσύνολο του ευκλείδειου επιπέδου. Ορίζουμε το εξωτερικό εμβαδόν του  $A$ , συμβολιζόμενο με  $\bar{E}(A)$ , να είναι το μέγιστο κάτω φράγμα των εμβαδῶν ὅλων των φραγμένων πολυγώνων που περιέχουν το  $A$ , δηλαδή:

$$\bar{E}(A) = \inf \{E(\Pi') : \Pi' \text{ φραγμένο πολύγωνο, } A \subseteq \Pi'\}.$$

ΣΧΟΛΙΟ: Ἀπό την μονοτονία του εμβαδού πολυγωνικῶν σχημάτων ἔπεται ὅτι

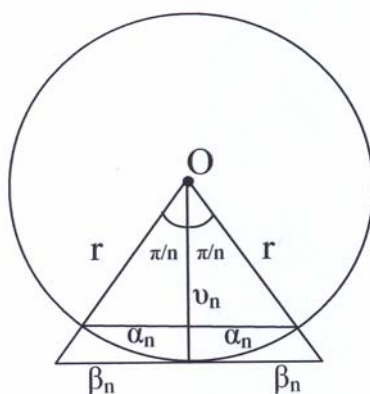
$$\underline{E}(A) \leq \bar{E}(A),$$

για κάθε φραγμένο υποσύνολο  $A$  του Ευκλείδειου επιπέδου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Αν  $A$  είναι υποσύνολο του Ευκλείδειου επιπέδου και ισχύει  $\underline{E}(A) = \bar{E}(A)$ , τότε ο κοινός αυτός αριθμός καλείται εμβαδόν του  $A$  και συμβολίζεται  $E(A)$ .

ΣΧΟΛΙΟ: Αν  $A$  είναι φραγμένο πολύγωνο, τότε  $\underline{E}(A) = \bar{E}(A) =$  το εμβαδόν του  $A$  όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 2.3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (εμβαδόν κυκλικού δίσκου)



(Σχήμα 14)

Στον κυκλικό δίσκο  $A$  ακτίνας  $r$  εγγράφουμε κανονικό  $n$ -γωνο  $\Pi_n$  και περιγράφουμε κανονικό  $n$ -γωνο  $\Pi_n'$ .

Η επίκεντρη γωνία είναι  $\frac{2\pi}{n}$  και το ύψος  $u_n = r \cos \frac{\pi}{n}$ . Κάθε πλευρά του  $\Pi_n$  είναι ίση με  $2\alpha_n = 2r \sin \frac{\pi}{n}$  και κάθε πλευρά του  $\Pi_n'$  είναι

ίση με  $2\beta_n = 2r \tan \frac{\pi}{n}$  (βλ. Σχήμα 14).

Το εμβαδόν του  $\Pi_n$  είναι:

$$\begin{aligned} E(\Pi_n) &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \frac{\pi}{n} \cdot r \cos \frac{\pi}{n} \\ &= r^2 \cdot n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \pi \cdot 1 = \pi r^2 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν του  $\Pi_n'$  είναι:

$$\begin{aligned}
E(\Pi_n') &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \tan \frac{\pi}{n} \cdot r \\
&= r^2 \cdot n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \pi \cdot 1 = \pi r^2.
\end{aligned}$$

Από ιδιότητα μονοτονίας ισχύει:

$$E(\Pi_n) \leq \underline{E}(A) \leq \bar{E}(A) \leq E(\Pi_n').$$

Παίρνοντας  $n \rightarrow \infty$ , έπεται

$$\underline{E}(A) = \bar{E}(A) = \pi r^2.$$

Συνεπώς,

$$E(A) = \pi r^2. \quad \square$$

ΣΧΟΛΙΟ: Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{\pi}{n} \right) = \pi \text{ το οποίο έχουμε αποδείξει στην Παράγραφο 1.7.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (φραγμένο σχήμα που δεν έχει εμβαδόν)

Το σύνολο  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ και } x, y \in \mathbb{Q}\}$  δεν έχει εμβαδόν.

Πράγματι, το σύνολο  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ και } x, y \in \mathbb{Q}\}$  έχει εξωτερικό εμβαδόν ίσο με 1, αφού το μικρότερο πολύγωνο που περιέχει το  $K$  είναι το  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Το εσωτερικό του εμβαδόν είναι ίσο με μηδέν, αφού το σύνολο  $K$  δεν περιέχει πολύγωνα (μια και έχει κενό εσωτερικό) εκτός του εκφυλισμένου 1-γωνου (μονοσύνολο) που έχει εμβαδόν μηδέν. Άρα,  $1 = \bar{E}(A) \neq \underline{E}(A) = 0$ . Επομένως, το  $K$  δεν έχει εμβαδόν.  $\square$

## 2.7 Ο υπολογισμός του εμβαδού μέσω απλού, διπλού και επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι ο υπολογισμός του εμβαδού φραγμένων σχημάτων με χρήση α) ορισμένου ολοκληρώματος, β) διπλού ολοκληρώματος και γ) επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

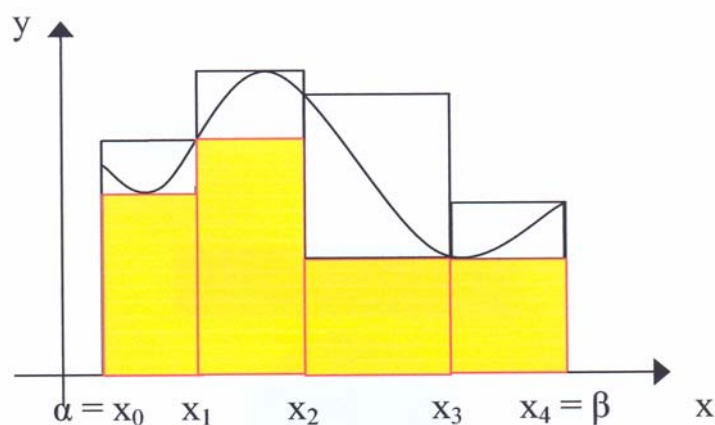
### A. Ο υπολογισμός του εμβαδού μέσω απλού ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μια μη-αρνητική, συνεχής συνάρτηση και

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Τότε, υπάρχει το εμβαδόν  $E(A)$  της περιοχής  $A$  και ισούται με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε μια διαμέριση  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  του  $[\alpha, \beta]$  η οποία διαμερίζει το  $[\alpha, \beta]$  στα υποδιαστήματα  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{n-1}, x_n]$ .



(Σχήμα 15)

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής, συνεπώς σε κάθε διάστημα  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , λαμβάνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή  $M_k = f(\xi_k)$  και  $m_k = f(\zeta_k)$  αντίστοιχα, για κατάλληλα  $\xi_k, \zeta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Τότε,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \underline{E}(A) \leq \bar{E}(A) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Η συνάρτηση όμως  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , άρα και Riemann ολοκληρώσιμη. Επομένως, τόσο το δεξί όσο και το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας τείνουν σε ένα κοινό όριο: στο  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ .

Παίρνοντας λοιπόν όρια, καθώς  $n \rightarrow \infty$ , έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \underline{E}(A) \leq \bar{E}(A) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Άρα,

$$\underline{E}(A) = \bar{E}(A) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

συνεπώς

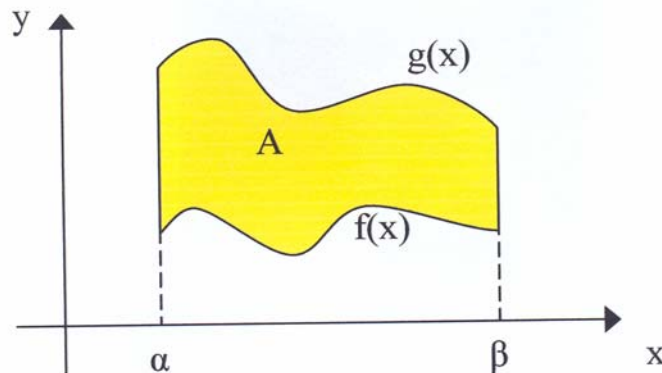
$$E(A) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \quad \square$$

### B. Ο υπολογισμός του εμβαδού μέσω διπλού ολοκληρώματος

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες  $f(x) \leq g(x)$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Κάθε σύνολο  $A$  της μορφής,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

λέμε ότι είναι τύπου 1 (βλ. Σχήμα 16).



(Σχήμα 16)

ΛΗΜΜΑ 1. Το εμβαδόν του παραπάνω χωρίου  $A$  είναι ίσο με,

$$\iint 1 dx dy.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω  $A_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$  και

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Τότε,  $A_g = A \cup A_f$  και τα χωρία  $A$ ,  $A_f$  έχουν ως τομή τη γραφική παράσταση της  $f$  η οποία έχει εμβαδόν ίσο με μηδέν (αφού έχει πεπερασμένο μήκος). Άρα, από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα,

$$E(A_g) = E(A) + E(A_f)$$

ή ισοδύναμα,

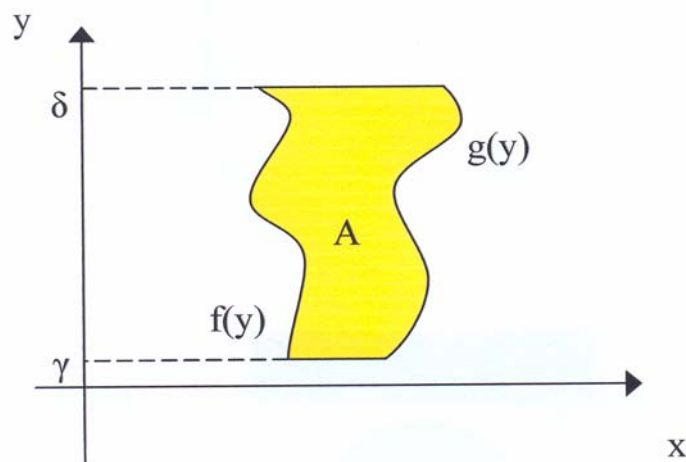
$$\begin{aligned} E(A) &= E(A_g) - E(A_f) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} 1 dy \right) dx \\ &= \iint_A 1 dx dy. \end{aligned}$$

□

**ΟΡΙΣΜΟΣ 2.** Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες  $f(y) \leq g(y)$ , για κάθε  $y \in [\gamma, \delta]$ . Κάθε σύνολο  $A$  της μορφής,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\gamma, \delta], f(y) \leq x \leq g(y)\},$$

λέμε ότι είναι τύπου 2 (βλ. Σχήμα 17).



(Σχήμα 17)

**ΛΗΜΜΑ 2.** Το εμβαδόν του παραπάνω χωρίου  $A$  είναι ίσο με,

$$\iint 1 dx dy.$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω  $A_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\gamma, \delta], 0 \leq x \leq g(y)\}$  και

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\gamma, \delta], 0 \leq x \leq f(y)\}.$$

Τότε,  $A_g = A \cup A_f$  και τα χωρία  $A$ ,  $A_f$  έχουν ως τομή τη γραφική παράσταση της  $f$  η οποία έχει εμβαδόν ίσο με μηδέν (αφού έχει πεπερασμένο μήκος). Άρα, από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα,

$$E(A_g) = E(A) + E(A_f)$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} E(A) &= E(A_g) - E(A_f) \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} g(y)dy - \int_{\gamma}^{\delta} f(y)dy \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} (g(y) - f(y))dy \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} \left( \int_{f(y)}^{g(y)} 1dx \right) dy \\ &= \iint_A 1dx dy. \end{aligned}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** Το εμβαδόν κάθε χωρίου  $A$  που είναι πεπερασμένη ένωση χωρίων τύπου 1 και/ή τύπου 2 δίνεται από τον τύπο:

$$E(A) = \iint_A 1dx dy.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση απόρροια της ιδιότητας της προσθετικότητας και των παραπάνω δύο λημμάτων. □

**ΣΧΟΛΙΟ.** Ισχύει και κάτι παραπάνω: το μοναδικό συναρτησοειδές της μορφής  $\iint_A f(x, y)dx dy$  που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του εμβαδού (το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα ικανοποιείται ούτως ή άλλως) είναι αυτό για το οποίο  $f(x, y) \equiv 1$ , όπως προκύπτει από την ακόλουθη πρόταση.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Για κάθε υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^2$  (που έχει εμβαδόν) ορίζουμε

$$\varepsilon(A) = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Αν α) το  $\varepsilon$  είναι αναλλοίωτο κάτω από κάθε ισομετρία του επιπέδου, δηλαδή  $\varepsilon(A) = \varepsilon(\varphi(A))$ , για κάθε ισομετρία  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  και κάθε σύνολο  $A$  και β)  $\varepsilon([0,1] \times [0,1]) = 1$ , τότε

$$f(x, y) \equiv 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $f(x, y) \equiv$  σταθερά, αφού τότε το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης β).

Με μια αλλαγή μεταβλητών για διπλά ολοκληρώματα έχουμε:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{A}} f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) \frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y}, \quad (1)$$

όπου,  $x = x(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $y = y(\bar{x}, \bar{y})$  είναι συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους που ορίζουν τον μετασχηματισμό  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{A} = T^{-1}(A)$  και

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}$$

η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού  $T$ . Στην περίπτωσή μας, ο μετασχηματισμός είναι ισομετρία, άρα η Ιακωβιανή είναι:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα και την (1) παίρνουμε,

$$\iint_A f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y} = \iint_{\bar{A}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}.$$

Καθώς αυτό αληθεύει για κάθε  $A$ , έχουμε

$$f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε ζεύγος σημείων  $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$  του  $\mathbb{R}^2$  υπάρχει ισομετρία  $F$  τέτοια ώστε  $F(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$ . Επομένως,

$$f(x, y) = (f \circ F)(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

και άρα  $f(x, y) \equiv$  σταθερά, όπως επιθυμούσαμε. □

### Γ. Ο υπολογισμός του εμβαδού μέσω επικαμπυλίου ολοκληρώματος

Θα αποδείξουμε ότι: το εμβαδόν  $E(A)$  μιας περιοχής  $A$  που περιβάλλεται από μια απλή (δηλαδή, χωρίς αυτοτομές), κλειστή, τάξης  $C^1$ , καμπύλη  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , μπορεί να υπολογιστεί μέσω των παρακάτω τριών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων:

$$E(A) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (x dy - y dx) = \oint_{\gamma} x dy = - \oint_{\gamma} y dx, \quad (2)$$

όπου

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (x dy - y dx) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt, \\ \oint_{\gamma} x dy &= \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt, \\ \oint_{\gamma} y dx &= \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt. \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ. Η δεύτερη και η τρίτη ισότητα στη σχέση (2) είναι άμεση συνέπεια του τύπου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} x dy &= \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt \\ &= [x(t)y(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)y(t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 - \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)y(t) dt \\ &= - \oint_{\gamma} y dx. \end{aligned}$$

Η (\*) ισχύει επειδή η καμπύλη είναι κλειστή.  
Άρα,

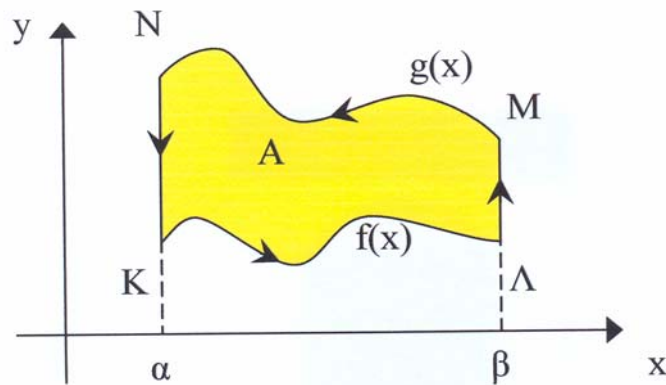
$$\oint_{\gamma} xdy = -\oint_{\gamma} ydx. \quad (3)$$

Τότε όμως,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (xdy - ydx) &= \frac{1}{2} \left( \oint_{\gamma} xdy - \oint_{\gamma} ydx \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left( \oint_{\gamma} xdy + \oint_{\gamma} xdy \right) \\ &= \oint_{\gamma} xdy. \end{aligned}$$

ΛΗΜΜΑ 3. Η σχέση (2) ισχύει για κάθε χωρίο τύπου 1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) \leq g(x)$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και  $A$  ένα χωρίο τύπου 1 (βλ. Σχήμα 18).



(Σχήμα 18)

Έχουμε δείξει ότι

$$E(A) = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x))dx$$

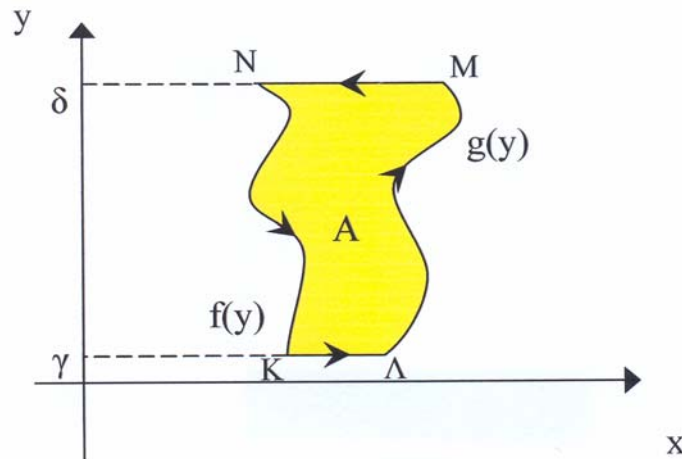
ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
E(A) &= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + 0 + \left(-\int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx\right) + 0 = \\
&= \left(-\oint_{\text{K}\Lambda} ydx\right) + \left(-\oint_{\Lambda\text{M}} ydx\right) + \left(-\oint_{\text{M}\text{N}} ydx\right) + \left(-\oint_{\text{N}\text{K}} ydx\right) = \\
&= -\oint_{\text{K}\Lambda\text{M}\text{N}\text{K}} ydx.
\end{aligned}$$

□

ΛΗΜΜΑ 4. Η σχέση (2) ισχύει για κάθε χωρίο τύπου 2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(y) \leq g(y)$ , για κάθε  $y \in [\gamma, \delta]$  και  $A$  ένα χωρίο τύπου 2 (βλ. Σχήμα 19).



(Σχήμα 19)

Έχουμε δείξει ότι

$$E(A) = \int_{\gamma}^{\delta} (g(y) - f(y))dy$$

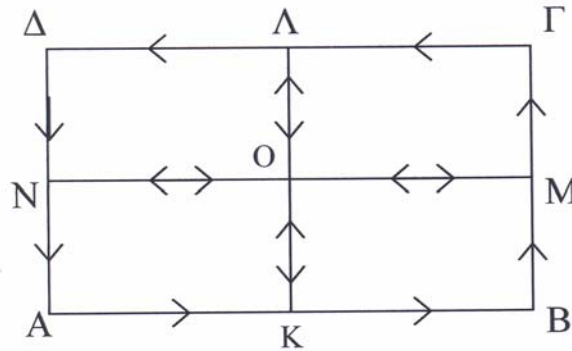
ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
E(A) &= 0 + \int_{\gamma}^{\delta} g(y)dy + 0 + \left(-\int_{\gamma}^{\delta} f(y)dy\right) = \\
&= \left(\oint_{\text{K}\Lambda} xdy\right) + \left(\oint_{\Lambda\text{M}} xdy\right) + \left(\oint_{\text{M}\text{N}} xdy\right) + \left(\oint_{\text{N}\text{K}} xdy\right) = \\
&= \oint_{\text{K}\Lambda\text{M}\text{N}\text{K}} xdy.
\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Η σχέση (2) ισχύει για κάθε περιοχή  $A$  που είναι πεπερασμένη ένωση χωρίων τύπου 1 και/ή τύπου 2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ιδέα της απόδειξης μπορεί να φανεί καθαρά στην παρακάτω ειδική περίπτωση. Θεωρούμε το χωρίο  $AB\Gamma\Delta$  του Σχήματος 20.



(Σχήμα 20)

Από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας έχουμε ότι:

$$E(AB\Gamma\Delta) = E(AKON) + E(KBMO) + E(M\Gamma\Lambda O) + E(\Lambda\Delta NO)$$

ή ισοδύναμα, με χρήση των Λημμάτων 3 και 4 και του γεγονότος ότι  $\oint_{-\gamma} = -\oint_{\gamma}$ , για κάθε καμπύλη  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} 2E(AB\Gamma\Delta) &= \oint_{AK} (xdy - ydx) + \oint_{KO} (xdy - ydx) + \oint_{ON} (xdy - ydx) + \oint_{NA} (xdy - ydx) + \\ &+ \oint_{KB} (xdy - ydx) + \oint_{BM} (xdy - ydx) + \oint_{MO} (xdy - ydx) + \oint_{OK} (xdy - ydx) + \\ &+ \oint_{M\Gamma} (xdy - ydx) + \oint_{\Gamma\Lambda} (xdy - ydx) + \oint_{\Lambda O} (xdy - ydx) + \oint_{OM} (xdy - ydx) + \\ &+ \oint_{\Lambda\Delta} (xdy - ydx) + \oint_{\Delta N} (xdy - ydx) + \oint_{NO} (xdy - ydx) + \oint_{O\Lambda} (xdy - ydx) = \\ &= \oint_{AK} (xdy - ydx) + \oint_{KB} (xdy - ydx) + \oint_{BM} (xdy - ydx) + \oint_{M\Gamma} (xdy - ydx) + \\ &+ \oint_{\Gamma\Lambda} (xdy - ydx) + \oint_{\Lambda\Delta} (xdy - ydx) + \oint_{\Delta N} (xdy - ydx) + \oint_{NA} (xdy - ydx) = \\ &= \oint_{AB\Gamma\Delta\Lambda} (xdy - ydx). \end{aligned}$$

□

ΣΧΟΛΙΟ. Ο τύπος  $E(A) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (x dy - y dx)$  μπορεί να συναχθεί με έναν

πολύ εύκολο τρόπο στην περίπτωση που το χωρίο  $A$  είναι ένα κυρτό σύνολο ως εξής: Το εμβαδόν του  $A$  μπορεί να προσεγγιστεί από τα εμβαδά κατάλληλων εγγεγραμμένων στην  $\gamma$  κυρτών πολυγώνων. Όμως στο Παράρτημα αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν ενός κυρτού  $n$ -γώνου  $P$  με κορυφές  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  δίδεται από τον τύπο

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{n-1} (x_{\kappa} y_{\kappa+1} - y_{\kappa} x_{\kappa+1}),$$

υπό την προϋπόθεση ότι οι κορυφές διαγράφονται με την αντιωρολογιακή φορά. Παίρνοντας λοιπόν όρια στον τύπο του εμβαδού  $E(P)$ , λαμβάνουμε το εμβαδό του χωρίου  $A$  ως εξής:

$$E(A) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x(y + dy) - y(x + dx) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

Το επιχείρημα αυτό μπορεί να γενικευτεί και για μη-κυρτά σύνολα.

### **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Το εμβαδόν κυρτού πολυγώνου συναρτήσει των συντεταγμένων των κορυφών του**

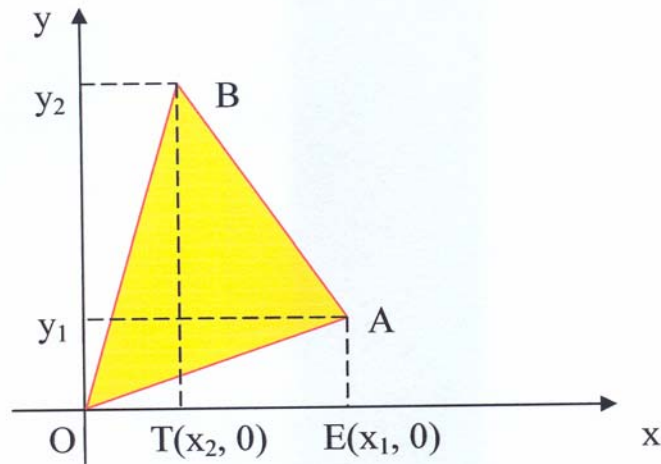
*A. Εύρεση εμβαδού τριγώνου που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων  $(0,0)$ .*

Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $OAB$  με κορυφές  $O(0,0)$ ,  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  (βλ. Σχήμα 21) ισούται με:

$$E(OAB) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

εάν η διαδρομή  $O-A-B$  είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά ισούται με την αρνητική αυτή ποσότητα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.**



(Σχήμα 21)

$$E(OAB) = E(OTB) + E(TEAB) - E(OEA)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}x_1y_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

*B. Εύρεση εμβαδού τριγώνου που οι κορυφές του είναι διαφορετικές από την αρχή  $O(0,0)$ .*

Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  και  $\Gamma(x_3, y_3)$  ισούται με:

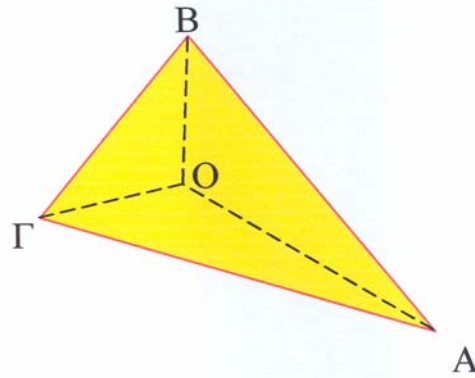
$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right], \quad (1)$$

εάν η διαδρομή  $A-B-\Gamma$  είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά με την αρνητική αυτή ποσότητα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.**

*1<sup>η</sup> περίπτωση:* Το σημείο  $O(0,0)$  είναι στο εσωτερικό του τριγώνου (βλ. Σχήμα 22).

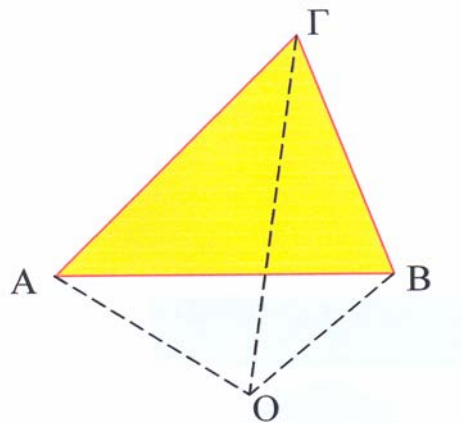




(Σχήμα 22)

$$\begin{aligned}
 E(AB\Gamma) &= E(ABO) + E(B\Gamma O) + E(\Gamma AO) \\
 &= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right].
 \end{aligned}$$

2<sup>η</sup> Περίπτωση: Το σημείο O(0,0) είναι στο εξωτερικό του τριγώνου (βλ. Σχήμα 23).



(Σχήμα 23)

$$\begin{aligned}
 E(AB\Gamma) &= E(O\Gamma A) + E(OB\Gamma) - E(OBA) \\
 &= \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2) \\
 &= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right]. \quad \square$$

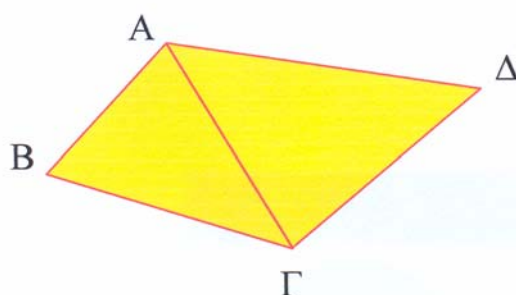
### Γ. Εύρεση εμβαδού τετραπλεύρου

Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με κορυφές Α(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>), Β(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>), Γ(x<sub>3</sub>,y<sub>3</sub>) και Δ(x<sub>4</sub>,y<sub>4</sub>) (βλ. Σχήμα 24) ισούται με:

$$E(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right], \quad (2)$$

εάν η διαδρομή Α-Β-Γ-Δ είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά με την αρνητική αυτή ποσότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χωρίζουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ.



(Σχήμα 24)

Άρα,

$$E(ΑΒΓΔ) = E(ΑΒΓ) + E(ΑΓΔ)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[ - \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

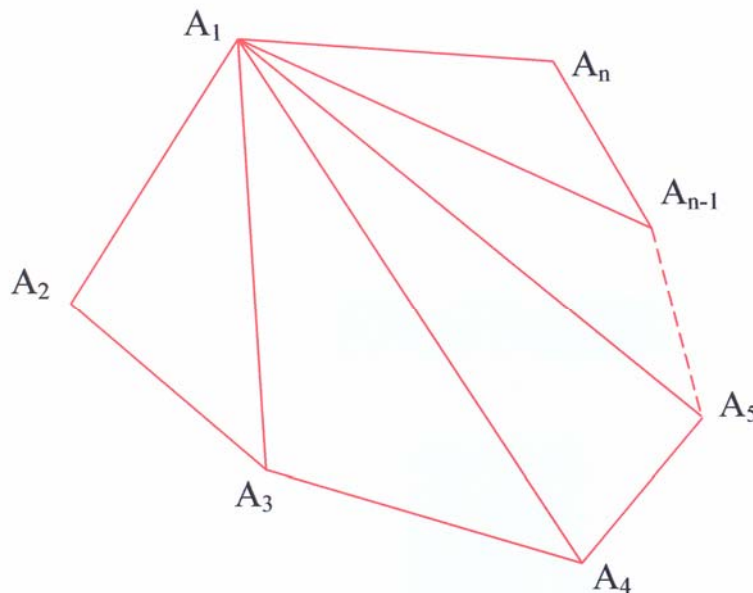
Δ. Εύρεση εμβαδού οποιουδήποτε κυρτού πολυγώνου

Το εμβαδόν ενός κυρτού n-γώνου με κορυφές  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ , ...,  $A_n(x_n, y_n)$  (βλ. Σχήμα 25) ισούται με:

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right], \quad (3)$$

εάν η διαδρομή  $A_1-A_2-\dots-A_n$  είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά με την αρνητική αυτή ποσότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χωρίζω το n-γωνο σε τρίγωνα φέρνοντας όλες τις δυνατές διαγώνιους από την  $A_1$ .



(Σχήμα 25)

Για  $n=4$  η σχέση (3) ισχύει από το αποτέλεσμα της προηγούμενης υποενότητας.

Θα υποθέσουμε ότι η σχέση (3) ισχύει για  $n=k$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για  $n=k+1$ .

Ισχύει,

$$E(A_1 A_2 \dots A_{k+1}) = E(A_1 A_2 \dots A_k) + E(A_1 A_k A_{k+1}) =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{k-1} & x_k \\ y_{k-1} & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & x_1 \\ y_k & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_k \\ y_1 & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & x_1 \\ y_{k+1} & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{k-1} & x_k \\ y_{k-1} & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & x_1 \\ y_{k+1} & y_1 \end{vmatrix} \right]. \quad \square$$

Ένας μνημονικός κανόνας εύρεσης του εμβαδού ενός κυρτού  $n$ -γώνου με κορυφές  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ , ...,  $A_n(x_n, y_n)$ , όπου η διαδρομή  $A_1$ - $A_2$ -...- $A_n$  είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, είναι ο ακόλουθος [5]:

Γράφουμε σε δύο γραμμές τις συντεταγμένες του  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_1$ , ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε τετμημένη με την τεταγμένη της επόμενης στήλης και προσθέτουμε τα γινόμενα, στη συνέχεια κάθε τεταγμένη με την τετμημένη της επόμενης στήλης και προσθέτουμε και αυτά τα γινόμενα. Τέλος, αφαιρούμε από το πρώτο άθροισμα το δεύτερο και διαιρούμε με το δύο.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Α. Αλιμπινίσης, Ζ. Αντύπας, Ε. Ευσταθόπουλος, Ν. Κλαουδάτος, Σ. Παπασταυρίδης, *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, 2004
- [2] H.W. Bailey, *Area of a Plane Polygon*, The American Mathematical Monthly, vol.68 (1961) 935-937
- [3] Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, New Jersey 1976
- [4] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer – Verlag, 1991
- [5] H.C. Pang, *Areas of Plane Figures*, The American Mathematical Monthly, vol.55 (1948) 244-247
- [6] G. Peano, *Applicazione Geometriche del Calcolo Infinitesimale*, Torino, Bocca, 1887
- [7] J. Roe, *Elementary Geometry*, Oxford Univ. Publ., 1993
- [8] C. A. Rogers, *Length, Area and Volume*, The Mathematical Gazette, vol. 57 (1973) 100-110
- [9] M. G. Stone, *A mnemonic for Areas of Polygons*, The American Mathematical Monthly, vol.93 (1986) 479-480
- [10] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

### ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

#### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τη σχέση που συνδέει την έννοια του μήκους με την έννοια του εμβαδού για όλες τις κλειστές καμπύλες που δεν έχουν αυτοτομές. Η σχέση αυτή είναι μια ανισωτική σχέση γνωστή ως *ισοπεριμετρική ανισότητα* σύμφωνα με την οποία: *Το εμβαδόν  $E$  που περικλείει μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους  $\ell$  ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

*Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι ο κύκλος περιμέτρου  $\ell$ .*

Η ισοπεριμετρική ανισότητα είναι, όπως θα δούμε, ισοδύναμη με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα το οποίο, σύμφωνα με τους ειδικούς, είναι ίσως το αρχαιότερο πρόβλημα μεγιστοποίησης, που με απλά λόγια λέει το εξής: *Από όλες τις καμπύλες του επιπέδου που έχουν το ίδιο μήκος, αυτή που περικλείει χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν είναι ο κύκλος (και μόνον).*

Στην Παράγραφο 3.2 παρουσιάζουμε το πώς η παράδοση συνδέει το ισοπεριμετρικό πρόβλημα με το μύθο της Διδούς, της βασίλισσας της Καρχηδόνας, όπως τον διέσωσε ο Βιργίλιος στο επικό του ποίημα την *Αινειάδα*.

Στην Παράγραφο 3.3 αναλύουμε την ισοδυναμία του ισοπεριμετρικού προβλήματος με την ισοπεριμετρική ανισότητα δίνοντας έμφαση στη βασική δυσκολία (την ύπαρξη της λύσης) που υπήρχε μέχρι να δοθεί μία πλήρης λύση στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα.

Στις επόμενες οκτώ παραγράφους δίδουμε οκτώ διαφορετικές αποδείξεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας. Οι τέσσερις πρώτες είναι στοιχειώδεις. Εκτός από την προσέγγιση ενός κυρτού σχήματος από κυρτά πολύγωνα, τα υπόλοιπα επιχειρήματα εντάσσονται στη στοιχειώδη γεωμετρία, χωρίς καμία χρήση της έννοιας του ολοκληρώματος. Ας σημειωθεί ότι στην πρώτη απόδειξη (Παράγραφος 3.4) παρουσιάζουμε μια απόδειξη της ύπαρξης της λύσης του ισοπεριμετρικού προβλήματος, χρησιμοποιώντας ένα κλασικό επιχείρημα συμπάγειας. Εκεί παρουσιάζεται και το γνωστό *επιχείρημα του Steiner*. Στις Παραγράφους 3.4, 3.6 και 3.7 προτείνονται τρεις διαφορετικοί (πιο στοιχειώδεις) τρόποι

για να αποφευχθεί η χρήση του επιχειρήματος συμπάγειας. Στις τέσσερις τελευταίες παραγράφους παρουσιάζουμε ισάριθμες αποδείξεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας οι οποίες στηρίζονται στους τύπους του εμβαδού μέσω ολοκληρώματος. Μπορεί να γίνουν κατανοητές από έναν δευτεροετή φοιτητή μαθηματικού τμήματος και κάθε μια τους χρησιμοποιεί διαφορετική τεχνική.

### 3.2 Ο Μύθος της Διδούς

Η παράδοση συνδέει το ισοπεριμετρικό πρόβλημα με το μύθο της Διδούς, της βασίλισσας της Καρχηδόνας, που τοποθετείται περίπου στον 9<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα, και που ο Βιργίλιος διασώζει στο επικό του ποίημα την *Αινειάδα*.

Ο Βιργίλιος – Publius Vergilius Maro (70 π.Χ. – 19π.Χ.) είναι ο εθνικός ποιητής των Ρωμαίων και η *Αινειάδα* του (*Aeneis*) θεωρείται κλασικό έργο όχι μόνο της ρωμαϊκής αλλά και ολόκληρης της ευρωπαϊκής λογοτεχνίας, το οποίο είναι ισάξιο των ποιημάτων του Ομήρου. Αποτελείται από δώδεκα βιβλία και είναι γραμμένο σε λατινικούς εξάμετρους στίχους. Θέμα του έργου είναι η αναχώρηση Αινεία – του μυθικού γενάρχη των Ρωμαίων – από την Τροία, οι πολυτάραχες περιπλανήσεις του στη Μεσόγειο και η περιπετειώδης εγκατάστασή του στο Λάτιο της Ιταλίας.



Βιργίλιος (70 π.Χ. – 19π.Χ.)

Όπως αναφέρει ο Βιργίλιος στο πρώτο βιβλίο της *Αινειάδας*, κατά την διάρκεια των περιπλανήσεων του Αινεία πριν την εγκατάστασή του στο Λάτιο, κάποια στιγμή φτάνει στις ακτές της Βόρειας Αφρικής, στην Καρχηδόνα της οποίας βασίλισσα είναι η Διδώ, μια πριγκίπισσα με καταγωγή από την Τύρο της Φοινίκης. Πως είχε όμως βρεθεί η Διδώ από την Τύρο στη Καρχηδόνα; Σύμφωνα με τον μύθο, προσπαθώντας να ξεφύγει από την καταδίωξη του αδερφού της Πυγμαλίωνα, ο οποίος είχε δολοφονήσει τον σύζυγό της Σιχαίο, η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης αναχώρησε δυτικά παραπλέοντας τις ακτές της Μεσογείου, σε αναζήτηση ασύλου. Μια τοποθεσία στο κόλπο της Τύνιδας τράβηξε την

προσοχή της. Η Διδώ ήρθε σε διαπραγμάτευση με τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα, βασιλιά της Νουμιδίας, για να αγοράσει γη, περιορίζοντας στο ελάχιστο τις απαιτήσεις της. Δεν ζητούσε παρά μόνο όση έκταση μπορούσε «να κυκλωθεί με το τομάρι ενός ταύρου» (Αινειάδα, 367-368). Η Διδώ κατάφερε να πείσει τον Ιάρβα και η συμφωνία κλείστηκε. Τότε, η πονηρή πριγκίπισσα τεμάχισε το τομάρι ενός ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδεσε τη μία με την άλλη και κύκλωσε μια μεγάλη έκταση γης όπου έκτισε ένα φρούριο, το οποίο το ονόμασε Βύρσα (=δέρμα) και κοντά του την πόλη της Καρχηδόνας της οποίας έγινε η πρώτη βασίλισσα.

Εκεί λοιπόν την συνάντησε ο Αινείας. Η Διδώ τον ερωτεύτηκε, όμως ο δεσμός τους δεν κράτησε πολύ αφού ο Αινείας την εγκατέλειψε για να αναζητήσει μια νέα πατρίδα στην Ιταλία. Η Διδώ απελπισμένη από την προδοσία του αγαπημένου της αυτοκτόνησε. Σε αυτή την άτυχη ερωτική περιπέτεια αποδίδει η μυθολογία την προαιώνια εχθρότητα μεταξύ των Καρχηδονίων απογόνων της Διδούς και των Ρωμαίων απογόνων του Αινεία, που εκδηλώθηκε με τους Καρχηδονιακούς Πολέμους του 3<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα.



Ο Αινείας και η Διδώ στο ανάκτορο της Καρχηδόνας

Από αυτόν τον μύθο της Διδούς, που διασώζει ο Βιργίλιος στην *Αινειάδα*, προκύπτει το εξής γεωμετρικό πρόβλημα, γνωστό έκτοτε ως Πρόβλημα της Διδούς ή Κλασικό Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα: *Πώς έπρεπε να τοποθετήσει πάνω στη γη η Διδώ το δερμάτινο σκοινί που έφτιαξε ώστε να περικλείει στο εσωτερικό του τη μεγαλύτερη δυνατή έκταση; Και η απάντηση, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι ότι η Διδώ*

έπρεπε να τοποθετήσει το δερμάτινο σκοινί με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει σχήμα κύκλου.

### 3.3 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα και η ισοπεριμετρική ανισότητα

Η διατύπωση λοιπόν του κλασικού ισοπεριμετρικού προβλήματος έχει ως εξής:

**ΚΛΑΣΙΚΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Από όλες τις απλές, κλειστές καμπύλες του επιπέδου με δοσμένο μήκος, εκείνη που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν είναι ο κύκλος και μόνον αυτός.

Όμως, το εμβαδόν  $E$  του κύκλου περιμέτρου  $\ell$  είναι ίσο με  $\frac{\ell^2}{4\pi}$ .

Συνεπώς το ισοπεριμετρικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα μέσω μιας ανισοτικής σχέσης μεταξύ εμβαδού και μήκους, γνωστής με τον όρο: ισοπεριμετρική ανισότητα.

**ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ.** Το εμβαδόν  $E$  που περικλείει μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους  $\ell$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι ο κύκλος περιμέτρου  $\ell$ .

Παρατηρούμε ότι η ισοπεριμετρική ανισότητα, μέσω της συγκεκριμένης εκτίμησης συνδέει την έννοια του μήκους με την έννοια του εμβαδού για όλες τις κλειστές καμπύλες του επιπέδου που δεν έχουν αυτοτομές.

Η παλαιότερη απόδειξη για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα που γνωρίζουμε αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό Ζηνόδωρο (περίπου 200 π.Χ. - 140 π.Χ.), ο οποίος απέδειξε την εξής πρόταση [13]: *Αν υπάρχει ένα  $n$ -γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των  $n$ -γώνων με δοθείσα περίμετρο, τότε αυτό πρέπει να είναι κανονικό  $n$ -γωνο.* Αν και θεώρησε δεδομένη την ύπαρξη ενός  $n$ -γώνου με μέγιστο εμβαδόν, η πρόταση αυτή παίζει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη του ισοπεριμετρικού προβλήματος, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, αφού τα κανονικά  $n$ -γωνα προσεγγίζουν τον κύκλο, καθώς το  $n$  να τείνει στο  $+\infty$ .

Δυστυχώς το έργο του Ζηνόδωρου «περί ισομέτρων σχημάτων», όπου διαπραγματεύεται το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, δεν έχει σωθεί. Ότι είναι γνωστό προέρχεται από σχετικά σχόλια του Θέωνα του



Αλεξανδρέως για το πρώτο βιβλίο της *Σύνταξης* του Πτολεμαίου και τα σχόλια του Πάππου. Λέγεται ότι και ο Αρχιμήδης είχε δώσει λύση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Όμως δεν έχει σωθεί ούτε η απόδειξη ούτε κάποια σχετικά σχόλια.

Μετά τον Ζηνόδωρο, ουσιαστικά, η εξέλιξη του προβλήματος συνεχίζεται με τον Ελβετό μαθηματικό Jacob Steiner (1796-1863). Παρ' όλο που ο Steiner βρήκε μια απλή απόδειξη για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, άφησε εντούτοις ένα κενό: την απόδειξη ύπαρξης της λύσης. Οι πρώτες αυστηρές αποδείξεις δόθηκαν από τον Γερμανό Karl Weierstrass (1815-1897) μέσω της Θεωρίας Λογισμού Μεταβολών και από τους Amandus Schwarz (1843-1921) και Wilhelm Blaschke (1885-1962) στις αρχές του 20ου αιώνα.

Μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν και έδωσαν τις δικές τους αποδείξεις για την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας είτε στοιχειώδεις τρόπους είτε τεχνικές της διαφορικής γεωμετρίας, της αρμονικής ανάλυσης, της μιγαδικής ανάλυσης ή άλλων κλάδων. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζουμε οκτώ από αυτές.

Το τρισδιάστατο ανάλογο του ισοπεριμετρικού προβλήματος είναι το *ισεμβαδικό πρόβλημα*, σύμφωνα με το οποίο από όλες τις κλειστές επιφάνειες του χώρου με δεδομένο εμβαδόν  $E$ , αυτή που περικλείει το μέγιστο όγκο  $V$ , είναι η σφαίρα. Η ισοδύναμα, με όρους αλγεβρικούς,

$$V^2 \leq \frac{E^3}{36\pi}.$$

### 3.4 Πρώτη στοιχειώδης απόδειξη: Επαγωγικά με επιχείρημα συμπάγειας και επιχείρημα J. Steiner

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα επαγωγικά: από τα τρίγωνα στα πολύγωνα και από εκεί στις απλές κλειστές καμπύλες. Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας περνάει μέσα από το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Εδώ, μεταξύ των άλλων, παρουσιάζουμε μια απόδειξη της ύπαρξης λύσης του ισοπεριμετρικού προβλήματος με χρήση επιχειρήματος συμπάγειας α λα Weierstrass και το γνωστό επιχείρημα συμμετρίας (κατοπτρισμού) του J. Steiner.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** (Ισοπεριμετρική ανισότητα για τα τρίγωνα) *Για κάθε τρίγωνο με εμβαδόν  $E$  και περίμετρο  $\ell$  ισχύει:*

$$E \leq \frac{\ell^2}{12\sqrt{3}}.$$

*Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ΑΒΓ ένα τυχαίο τρίγωνο με μήκη πλευρών  $\alpha, \beta, \gamma$ . Τότε, από τον τύπο του Ήρωνα (10 μ.Χ. – 75 μ.Χ), έχουμε

$$E = \sqrt{\frac{\ell}{2} \left(\frac{\ell}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\ell}{2} - \beta\right) \left(\frac{\ell}{2} - \gamma\right)},$$

όπου  $\ell = \alpha + \beta + \gamma$ . Από την άλλη, λόγω της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, είναι

$$\left(\frac{\ell}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\ell}{2} - \beta\right) \left(\frac{\ell}{2} - \gamma\right) \leq \left[ \frac{\left(\frac{\ell}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\ell}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\ell}{2} - \gamma\right)}{3} \right]^3 = \left(\frac{\ell}{6}\right)^3 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με  $\frac{\ell}{2}$ , παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες και λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του Ήρωνα έχουμε,

$$E \leq \frac{\ell^2}{12\sqrt{3}}.$$

Η ισότητα στη τελευταία σχέση ισχύει όταν ισχύει ισότητα στη σχέση (1), δηλαδή αν και μόνο αν  $\frac{\ell}{2} - \alpha = \frac{\ell}{2} - \beta = \frac{\ell}{2} - \gamma$  ή ισοδύναμα  $\alpha = \beta = \gamma$ .

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** (Ισοπεριμετρική ανισότητα για τα τετράπλευρα) Για κάθε τετράπλευρο με εμβαδόν  $E$  και περίμετρο  $\ell$  ισχύει:

$$E \leq \frac{\ell^2}{16}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ με μήκη πλευρών ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ. Τότε, από τον τύπο του Brahmagupta έχουμε,

$$16E^2 = (\alpha + \beta + \gamma - \delta)(\alpha + \beta - \gamma + \delta)(\alpha - \beta + \gamma + \delta)(-\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 16\alpha\beta\gamma\delta \cos^2 \left( \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} \right)$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} 16E^2 &= (\ell - 2\alpha)(\ell - 2\beta)(\ell - 2\gamma)(\ell - 2\delta) - 16\alpha\beta\gamma\delta \cos^2\left(\frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2}\right) \\ &\leq \left[ \frac{(\ell - 2\alpha) + (\ell - 2\beta) + (\ell - 2\gamma) + (\ell - 2\delta)}{4} \right]^4 + 0 \\ &= \frac{\ell^4}{16} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$E \leq \frac{\ell^2}{16}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $\ell - 2\alpha = \ell - 2\beta = \ell - 2\gamma = \ell - 2\delta$  και  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \pi$  ή ισοδύναμα  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

ΣΧΟΛΙΟ. Ο τύπος του Ινδού μαθηματικού Brahmagupta (598 μ.Χ. – 670 μ.Χ.) είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το εμβαδόν ενός τετράπλευρου είναι ίσο με το εμβαδόν δύο τριγώνων και του νόμου των συνημιτόνων.

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι ειδικές περιπτώσεις (για  $n = 3$  και  $n = 4$ , αντίστοιχα) του παρακάτω γενικότερου αποτελέσματος:

*Αν  $E$  είναι το εμβαδόν και  $\ell$  η περίμετρος ενός οποιουδήποτε  $n$ -γώνου τότε*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

*Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το  $n$ -γώνο είναι κανονικό.*

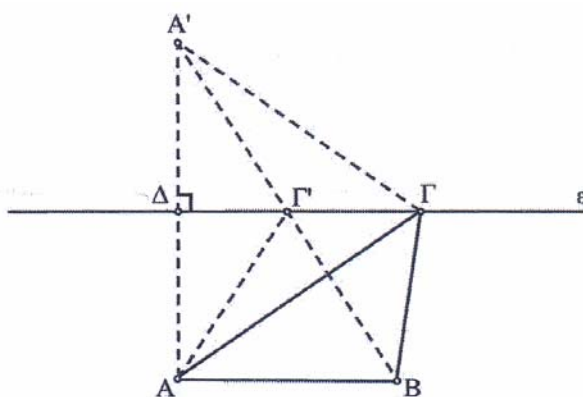
Το επόμενο αποτέλεσμα αποδίδεται, εκτός το σκέλος α), στον Ζηνόδωρο. Η απόδειξη που παραθέτουμε είναι διαφορετική από αυτή του Ζηνόδωρου την οποία ο αναγνώστης μπορεί να δει στο [13].

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3.** *Αν υπάρχει ένα  $n$ -γώνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των  $n$ -γώνων με δοθείσα περίμετρο, τότε αυτό πρέπει α) να είναι κυρτό β) να έχει ίσες πλευρές και γ) να έχει ίσες γωνίες.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3 θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 1. *Απ' όλα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  με σταθερή βάση  $AB$  και εμβαδόν  $E$ , το ισοσκελές έχει την ελάχιστη περίμετρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όλα αυτά τα τρίγωνα θα έχουν το ίδιο ύψος, συνεπώς η κορυφή  $\Gamma$  θα κείται σε μία ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη προς τη βάση  $AB$  σε απόσταση  $\frac{2E}{|AB|}$ .



Αν  $A'$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  και  $\Delta, \Gamma'$  τα σημεία που τέμνουν τα ευθύγραμμα τμήματα  $AA'$  και  $BA'$  αντίστοιχα την ευθεία  $\varepsilon$ , τότε:

$A\Gamma' = A'\Gamma'$  και  $A\Gamma = \Gamma'B$ , αφού

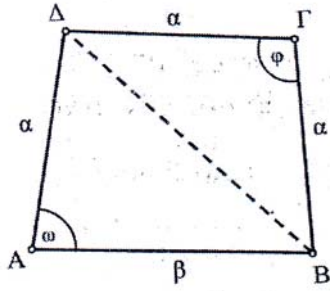
$\widehat{B\hat{A}\Gamma'} = \widehat{A\hat{\Gamma}'\Delta} = \widehat{\Delta\hat{\Gamma}'A'} = \widehat{B\hat{\Gamma}'\Gamma} = \widehat{\Gamma'\hat{B}A}$ . Άρα,

$A\Gamma + \Gamma B = A'\Gamma' + \Gamma B \geq A'B = A'\Gamma' + \Gamma'B = A\Gamma' + \Gamma'B$ .

Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma'$  έχει την ελάχιστη περίμετρο.  $\square$

ΛΗΜΜΑ 2. *Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = a$  και  $AB = \beta$ . Το εμβαδόν  $E$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται μέγιστο, όταν τούτο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.



Αν  $\omega = \hat{A}$  και  $\phi = \hat{\Gamma}$  αρκεί να δείξουμε ότι  $\omega + \phi = 180^\circ$ .  
Αφού,

$$\text{Εμβ}(AB\Delta) = \frac{1}{2}\alpha\beta\sin\omega,$$

και

$$\text{Εμβ}(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\alpha^2\sin\phi$$

έπεται

$$\frac{2\text{Εμβ}(AB\Gamma\Delta)}{\alpha} = \beta\sin\omega + \alpha\sin\phi. \quad (2)$$

Επίσης, από τον τύπο του συνημιτόνου για την πλευρά BΔ έπεται

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega = 2\alpha^2 - 2\alpha^2\cos\phi = B\Delta^2$$

οπότε,

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha} = \beta\cos\omega - \alpha\cos\phi. \quad (3)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις (2) και (3) και προσθέτοντας έχουμε,

$$\left(\frac{2E}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}\right)^2 = \beta^2 + \alpha^2 + 2(\sin\omega\sin\phi - \cos\omega\cos\phi)\alpha\beta$$

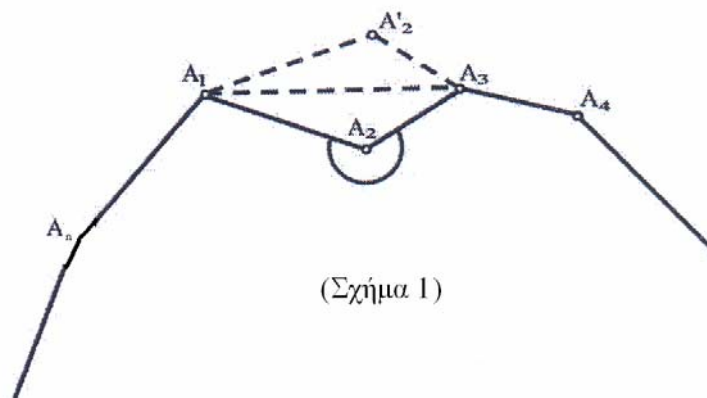
ή ισοδύναμα,

$$\left(\frac{2E}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}\right)^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta\cos(\omega + \phi).$$

Τα μεγέθη  $\alpha, \beta$  είναι σταθερά, συνεπώς το εμβαδόν  $E$  γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι μέγιστο, δηλαδή όταν  $\cos(\omega + \phi) = -1$  ή ισοδύναμα, όταν  $\omega + \phi = \pi$ .  $\square$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 3. Έστω  $A_1A_2\dots A_n$  ένα  $n$ -γώνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των  $n$ -γώνων με δοσμένη περίμετρο.

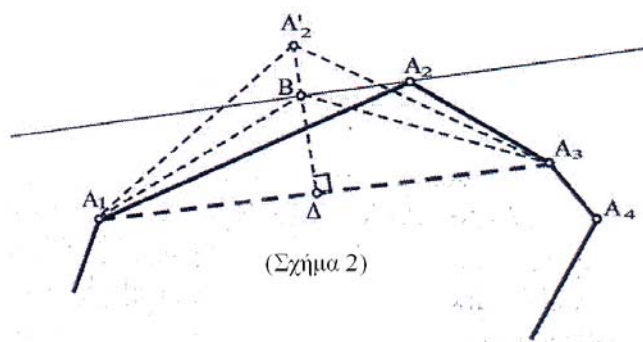
α) Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι κυρτό. Τότε κάποια γωνία του, έστω η  $\hat{A}_1A_2A_3$ , θα ήταν μεγαλύτερη από  $180^\circ$  (βλ. Σχήμα 1). Αν  $A_2'$  το συμμετρικό σημείο του  $A_2$  ως προς την



(Σχήμα 1)

ευθεία  $A_1A_3$ , τότε το  $n$ -γώνο  $A_1A_2'A_3\dots A_n$  αν και έχει την ίδια περίμετρο με το αρχικό, έχει μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα το  $n$ -γώνο είναι κυρτό.

β) Έστω  $A_1A_2$  και  $A_2A_3$  δύο διαδοχικές άνισες μεταξύ τους πλευρές. Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A_2$  και είναι παράλληλη στην πλευρά  $A_1A_3$  (βλ. Σχήμα 2). Αν  $B$  είναι το σημείο της ευθείας  $\varepsilon$  με  $BA_1 = BA_3$ , τότε τα τρίγωνα

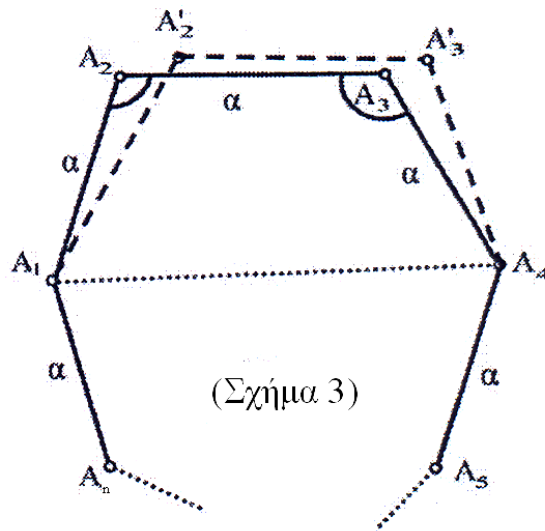


(Σχήμα 2)

$A_1A_2A_3$  και  $A_1BA_3$  έχουν το ίδιο εμβαδόν, αφού έχουν κοινή βάση και το ίδιο ύψος, αλλά  $A_1B + BA_3 < A_1A_2 + A_2A_3$ , βάση του Λήμματος 1. Συνεπώς αν μετατοπίσουμε το σημείο  $B$  κατάλληλα προς την κατεύθυνση που είναι κάθετη προς την ευθεία  $\varepsilon$ , μπορούμε να λάβουμε το σημείο  $A_2'$  ώστε  $A_1A_2' + A_2'A_3 = A_1A_2 + A_2A_3$ .

Τότε όμως  $\text{Εμβ}(A_1A_2'A_3) > \text{Εμβ}(A_1A_2A_3)$ , αφού έχουν κοινή βάση και άνισα ύψη. Κατασκευάσαμε, συνεπώς  $n$ -γώνο  $A_1A_2'A_3\dots A_n$  με περίμετρο ίση με το  $n$ -γώνο  $A_1A_2\dots A_n$  αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα, όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους.

γ) Έστω ότι υπάρχουν δύο διαδοχικές γωνίες που είναι άνισες, ας πούμε οι  $\hat{A}_2$  και  $\hat{A}_3$  (βλ. Σχήμα 3). Από το β), ήδη γνωρίζουμε ότι  $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_1A_n = \alpha$ . Το τετράπλευρο  $A_1A_2A_3A_4$  δεν είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού  $\hat{A}_2 \neq \hat{A}_3$ . Οπότε, από το Λήμμα 2, αν  $A_1A_2A_3A_4$  το εγγράψιμο τετράπλευρο με  $A_1A_2' = A_2'A_3' = A_3'A_4 = \alpha$  τότε, το  $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$  έχει την ίδια περίμετρο με το  $A_1A_2 \dots A_n$  αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα, όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.  $\square$



ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Αν  $E$  το εμβαδόν και  $\ell$  η περίμετρος ενός κανονικού  $n$ -γώνου, τότε,

$$E = \frac{\ell^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η περίμετρος  $\ell$  ενός κανονικού  $n$ -γώνου δίδεται από τον τύπο  $\ell = 2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου,

ενώ το εμβαδόν  $E$  από τον τύπο  $E = \frac{r\ell}{2}$ , όπου  $r$  η ακτίνα του

εγγεγραμμένου κύκλου. Όμως  $r = R \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , συνεπώς

$$E = \frac{\ell^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \quad \square$$

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό γιατί συμπληρώνει τη πρόταση του Ζηνόδωρου, βεβαιώνοντας την ύπαρξη  $n$ -γώνου με μέγιστο εμβαδόν.



Karl Weierstrass (1815-1897)

Η απόδειξη βασίζεται στο κλασικό επιχείρημα συμπάγειας του Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.** Υπάρχει  $n$ -γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των  $n$ -γώνων με δοθείσα περίμετρο.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Επαγωγή ως προς  $n$ . Για  $n = 3$  το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα 1. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για τα πολύγωνα με πλήθος πλευρών μικρότερο ή ίσο του  $n-1$ . Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει  $n$ -γωνο μέγιστου εμβαδού μεταξύ των  $n$ -γώνων με δοσμένη περίμετρο  $\ell$ . Επειδή αν υπάρχει τέτοιο  $n$ -γωνο πρέπει να είναι κυρτό, θα περιοριστούμε στη κλάση των κυρτών  $n$ -γώνων.

Ένα  $n$ -γωνο  $A_1A_2\dots A_n$  καθορίζεται από τις  $n$  το πλήθος κορυφές του  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ , δηλαδή από τους  $2n$  αριθμούς  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ . Για το λόγο αυτό θα δουλέψουμε στο  $\mathbb{R}^{2n}$  κάθε σημείο του οποίου στο εξής θα το αντιλαμβανόμαστε ως μία  $n$ -άδα σημείων του επιπέδου.

Το εμβαδόν κάθε κυρτού  $n$ -γώνου  $A_1A_2\dots A_n$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \dots, A_1A_{n-1}A_n$ . Συνεπώς, το εμβαδόν  $E$  του  $n$ -γώνου  $A_1A_2\dots A_n$  με  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$  δίδεται από το τύπο

$$E(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix}$$

ο οποίος ορίζει για συνεχή συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας όχι σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^{2n}$  αλλά σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του  $K$  που καθορίζεται από τις παρακάτω τέσσερις συνθήκες:

(α) Τα  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  είναι κορυφές του κυρτού  $n$ -γώνου.

(β)  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \dots + \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} = \ell$ .

(γ)  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ .

Η συνθήκη (γ) δεν περιορίζει το γεωμετρικό ζητούμενο της προς απόδειξη πρότασης, δεδομένου ότι τόσο το μήκος όσο και το εμβαδόν είναι γεωμετρικά μεγέθη που παραμένουν αναλλοίωτα από τις ισομετρίες του επιπέδου. Συνεπώς δεν περιορίζεται η γενικότητα εάν υποθέσουμε



ότι η κορυφή  $A_1$  του  $n$ -γώνου ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του επιπέδου.

Η τέταρτη συνθήκη που θα θέσουμε έχει τεχνικό χαρακτήρα και τίθεται για τον αποκλεισμό περιπτώσεων εκφυλισμού. Για τη διατύπωση της επιλέγουμε αυθαίρετα έναν αριθμό  $\alpha$  μεταξύ του εμβαδού του κανονικού  $(n-1)$ -γώνου και του εμβαδού του κανονικού  $n$ -γώνου, περιμέτρου  $\ell$ . Δηλαδή,

$$\frac{\ell^2}{4(n-1)\tan\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} < \alpha < \frac{\ell^2}{4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Η τέταρτη συνθήκη περιορίζει τα  $n$ -γωνα σε αυτά που έχουν εμβαδόν τουλάχιστον  $\alpha$ :

$$(\delta) \ E(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \geq \alpha.$$

Το σύνολο  $K$  είναι προφανώς μη κενό, αφού περιέχει το κανονικό  $n$ -γωνο. Το σύνολο  $K$  είναι επίσης κλειστό και φραγμένο. Το ότι είναι φραγμένο είναι άμεση συνέπεια των συνθηκών  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ . Το να είναι το σύνολο  $K$  κλειστό σημαίνει ότι αν μια ακολουθία  $n$ -γώνων  $P_1, P_2, \dots, P_\kappa, \dots$  πληρεί τις συνθήκες  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\delta)$  και συγκλίνει σε ένα  $n$ -γωνο  $P$ , τότε το  $P$  πληρεί τις συνθήκες  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\delta)$ . Η σύγκλιση των  $n$ -γώνων  $P_\kappa = A_1^{(\kappa)}A_2^{(\kappa)}\dots A_n^{(\kappa)}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$  στο  $P = A_1A_2\dots A_n$  νοείται με την έννοια ότι  $A_1^{(\kappa)} \rightarrow A_1$ ,  $A_2^{(\kappa)} \rightarrow A_2$ ,  $\dots$ ,  $A_n^{(\kappa)} \rightarrow A_n$  καθώς  $\kappa \rightarrow +\infty$ , ως σημεία του επιπέδου.

Γνωρίζουμε ότι το όριο διατηρεί τις ισότητες και τις ανισότητες. Επομένως, το οριακό  $n$ -γωνο  $P$ , πληρεί τις συνθήκες  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\delta)$  και το μισό τις συνθήκης  $(\alpha)$ , την κυρτότητα, αφού ένα πολύγωνο είναι κυρτό αν κάθε γωνία του είναι  $\leq \pi$ . Αυτό που μένει είναι να δειχθεί ότι το  $P$  είναι όντως  $n$ -γωνο, δηλαδή ότι τα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι ανά δύο διαφορετικά. Μια τέτοια όμως περίπτωση εκφυλισμού αποκλείεται από τη συνθήκη  $(\delta)$ . Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι  $A_1 \equiv A_2$  ενώ όλες οι άλλες κορυφές είναι ανά δύο διαφορετικές. Τότε, δεν έχουμε  $n$ -γωνο αλλά  $(n-1)$ -γωνο, το  $A_1A_3A_4\dots A_n$ , που εξακολουθεί, λόγω συνθήκης  $(\beta)$ , να έχει περίμετρο  $\ell$ . Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει  $(n-1)$ -γωνο μέγιστου εμβαδού, το οποίο, από θεώρημα 2, είναι αναγκαστικά το κανονικό  $(n-1)$ -γωνο. Άρα,

$$E(A_1 A_3 A_4 \dots A_n) \leq \frac{\ell^2}{4(n-1) \tan\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} < \alpha.$$

Όμως,  $E(A_1^{(\kappa)} A_2^{(\kappa)} \dots A_n^{(\kappa)}) \geq \alpha$ , για κάθε  $\kappa = 1, 2, \dots$ . Παίρνοντας όρια, καθώς  $\kappa \rightarrow +\infty$ , έπεται  $E(A_1 A_3 A_4 \dots A_n) \geq \alpha$ , που αντιφάσκει στην παραπάνω ανισότητα. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις μπορούν να αποκλειστούν όμοια.

Την απόδειξη ολοκληρώνει το θεώρημα του Weierstrass, το οποίο εγγυάται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης, λαμβάνει μέγιστη τιμή.  $\square$

Τα Θεωρήματα 3 και 4 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 5.** *Απ' όλα τα  $n$ -γωνα με σταθερή περίμετρο  $\ell$ , το κανονικό  $n$ -γωνο, και μόνο αυτό, έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης και του Θεωρήματος 5 είναι το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΠΟΡΙΣΜΑ 1.** *(Ισοπεριμετρική ανισότητα για  $n$ -γωνα) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν και  $\ell$  η περίμετρος ενός οποιουδήποτε  $n$ -γώνου τότε,*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

*Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το  $n$ -γωνο είναι κανονικό.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4 και της Πρότασης 1.  $\square$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 2.** *Αν  $E$  είναι το εμβαδόν και  $\ell$  η περίμετρος ενός οποιουδήποτε  $n$ -γώνου, τότε*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 1, και του γεγονότος ότι  $\tan \alpha \geq \alpha$ , για κάθε  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . □

Ένα από τα πλεονεκτήματα της τελευταίας ανισότητας είναι ότι οι σταθερές που περιέχει είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία απλή, κλειστή καμπύλη μήκους  $\ell$  που περικλείει εμβαδόν  $E$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων  $P_n$ , περιμέτρου  $\ell_n$  και εμβαδού  $E_n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  ώστε

$$\ell_n \rightarrow \ell \text{ και } E_n \rightarrow E.$$

Όμως για τα πολύγωνα, από το Πόρισμα 2, έχουμε

$$E_n \leq \frac{\ell_n^2}{4\pi}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Αφήνοντας το  $n$  να τείνει στο άπειρο, έχουμε

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

Συνεπώς,

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6.** *Το εμβαδόν  $E$  που περικλείει μία απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους  $\ell$  ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

*Ή ισοδύναμα,*

*Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μια οποιαδήποτε απλή, κλειστή καμπύλη με δεδομένο μήκος δεν υπερβαίνει το εμβαδόν που περικλείει ένας κύκλος με περιφέρεια ίδιου μήκους.*

Ολοκληρώνουμε αποδεικνύοντας ότι η ισότητα στην τελευταία ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος, δηλαδή ότι αν μια απλή, κλειστή καμπύλη με δεδομένο μήκος περικλείει χωρίο με μέγιστο εμβαδόν, τότε αυτή πρέπει να είναι κύκλος. Η απόδειξη που ακολουθεί οφείλεται στον Ελβετό μαθηματικό Jacob Steiner (1796-1863) που είναι πολύ γνωστός για την συνεισφορά του στην προβολική γεωμετρία.



Jacob Steiner (1796-1863)

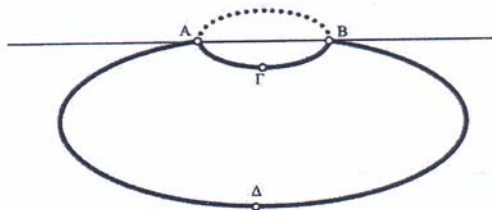
**ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (J. Steiner).** *Αν μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη περικλείει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των απλών, κλειστών επιπέδων καμπυλών με δοσμένο μήκος, τότε:*

*α) Αυτή πρέπει να είναι κυρτή, δηλαδή το εσωτερικό της να είναι κυρτό σύνολο.*

*β) Αν δύο σημεία  $A, B$  διαιρούν την καμπύλη σε δύο μέρη ίσου μήκους, τότε η χορδή  $AB$  διαιρεί το χωρίο που περικλείει η καμπύλη σε δύο ισεμβαδικά χωρία.*

*γ) Έστω  $A, B$  δύο σημεία που διαιρούν την καμπύλη σε δύο μέρη ίσου μήκους. Αν το  $\Gamma$  είναι οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, τότε η γωνία  $AGB$  είναι ορθή. Δηλαδή η καμπύλη είναι κύκλος.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** α) Αν δεν ήταν κυρτή τότε θα περιείχε δύο σημεία  $A, B$  τέτοια ώστε τα τόξα  $AGB$  και  $A\Delta B$  που συνδέουν τα  $A$  και  $B$  να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας  $AB$  (βλ. Σχήμα 4). Αντικαθιστώντας το τόξο  $AGB$  με το συμμετρικό του ως προς την ευθεία  $AB$  λαμβάνουμε μια νέα καμπύλη με το ίδιο μήκος αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο, προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού.



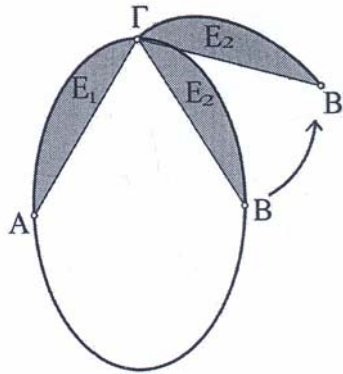
(Σχήμα 4)

β) Αν η χορδή  $AB$  διαιρούσε το χωρίο σε δύο μέρη με άνισα εμβαδά, τότε το σχήμα που θα δημιουργείτο από το μέρος με το μεγαλύτερο εμβαδόν και το συμμετρικό του ως προς τη χορδή  $AB$  θα αντιπροσώπευε ένα σχήμα με ίση περίμετρο και μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο, προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού.

Σημειώνουμε ότι τέτοια σημεία  $A, B$  που διχοτομούν μια απλή, κλειστή καμπύλη με πεπερασμένο μήκος πάντα υπάρχουν και δεν είναι βέβαια μοναδικά.

γ) Θα χρειαστούμε να έχουμε υπόψη μας ότι: *Μεταξύ όλων των τριγώνων  $AB\Gamma$  που έχουν τις πλευρές  $GA$  και  $GB$  δοσμένου μήκους, το ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία τη  $\Gamma$ , έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, το οποίο είναι*

$$\text{έμεση συνέπεια του τύπου } \text{Εμβ}(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |GA| |GB| \sin \hat{\Gamma} .$$

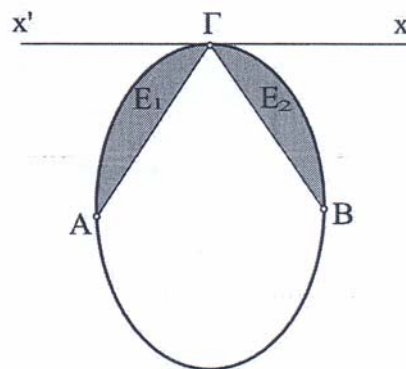


(Σχήμα 5)

Έστω ότι υπήρχε σημείο  $\Gamma$  της καμπύλης για το οποίο η γωνία  $\hat{A}\Gamma B$  δεν είναι ορθή. Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma A$ , και  $E_2$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma B$  (βλ. Σχήμα 5). Στρέφουμε το χωρίο  $E_2$  γύρω από το σημείο  $\Gamma$  μέχρις ότου η γωνία  $\hat{A}\Gamma B'$  να γίνει ορθή. Τότε  $\text{Εμβ}(AB\Gamma) < \text{Εμβ}(AB'\Gamma)$  και συνεπώς το νέο χωρίο  $A\Gamma B'A$  έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το χωρίο  $A\Gamma B A$  ενώ το μήκος της νέας καμπύλης  $A\Gamma B'$  είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης  $A\Gamma B$ .

Το σχήμα που θα διαμορφωθεί από το νέο χωρίο  $A\Gamma B'A$  και το συμμετρικό του ως προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  θα έχει ίση περίμετρο με το αρχικό αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο, ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού.

Υπάρχει ένα σημείο που πρέπει να διασαφηνιστεί. Όλα όσα αναφέραμε ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι μετά τη στρέψη το νέο χωρίο με εμβαδόν  $E_2$  δεν έχει κοινή επικάλυψη με το  $E_1$ .



(Σχήμα 6)

Τούτο δεν είναι αληθές διότι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, λόγω α), είναι κυρτό και επομένως σε κάθε σημείο της καμπύλης, και άρα και στο  $\Gamma$ , υπάρχει ευθεία στήριξης  $x'x$  η οποία αφήνει όλο το κυρτό σύνολο από τη μια πλευρά του (βλ. Σχήμα 6). Συνεπώς το αν τα χωρία  $E_1, E_2$  μετά από στρέψη περί το σημείο  $\Gamma$  αποκτήσουν κοινή επικάλυψη καθορίζεται από το πότε οι ημιευθείες  $\Gamma x, \Gamma x'$  συναντηθούν μετά την στρέψη περί το σημείο  $\Gamma$ . Αν λοιπόν η ημιευθεία  $\Gamma x'$  παραμένει σταθερή τότε η ημιευθεία  $\Gamma x$  έχει ένα περιθώριο  $180^\circ$ , περιστρεφόμενη περί το  $\Gamma$  αντιωρολογιακά, για να συναντήσει την  $\Gamma x'$ , δηλαδή πολύ περισσότερο από ότι χρησιμοποιήσαμε στην επιχειρηματολογία μας.

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.  $\square$

Άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 6 και 7 είναι το ακόλουθο θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 8.** (Ισοπεριμετρική ανισότητα για απλές, κλειστές καμπύλες)  
*Το εμβαδόν  $E$  που περικλείει μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους  $\ell$  ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

*Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι ο κύκλος περιμέτρου  $\ell$ .*

### 3.5 Δεύτερη στοιχειώδης απόδειξη: τύπου Bonnesen (I)

Το κρίσιμο σημείο στην απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi} \quad (1)$$

για κάθε απλή κλειστή καμπύλη, είναι η απόδειξη της στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη είναι κυρτό πολύγωνο, (αφού από τα κυρτά πολύγωνα, μέσω ορίου, περνάμε στις κυρτές καμπύλες και από τις κυρτές καμπύλες στις απλές καμπύλες μέσω του τεχνάσματος της κυρτής θήκης: η κυρτή θήκη ενός σχήματος έχει μεγαλύτερο εμβαδόν αλλά μικρότερη περίμετρο).

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας (1) για κυρτά πολύγωνα πέρασε μέσα από ένα επιχείρημα συμπάγειας. Τώρα θα αποδείξουμε την ίδια ανισότητα με ένα στοιχειωδέστερο τρόπο, χωρίς χρήση συμπάγειας, ακολουθώντας την επιχειρηματολογία του N. Δεργιαδέ [8].

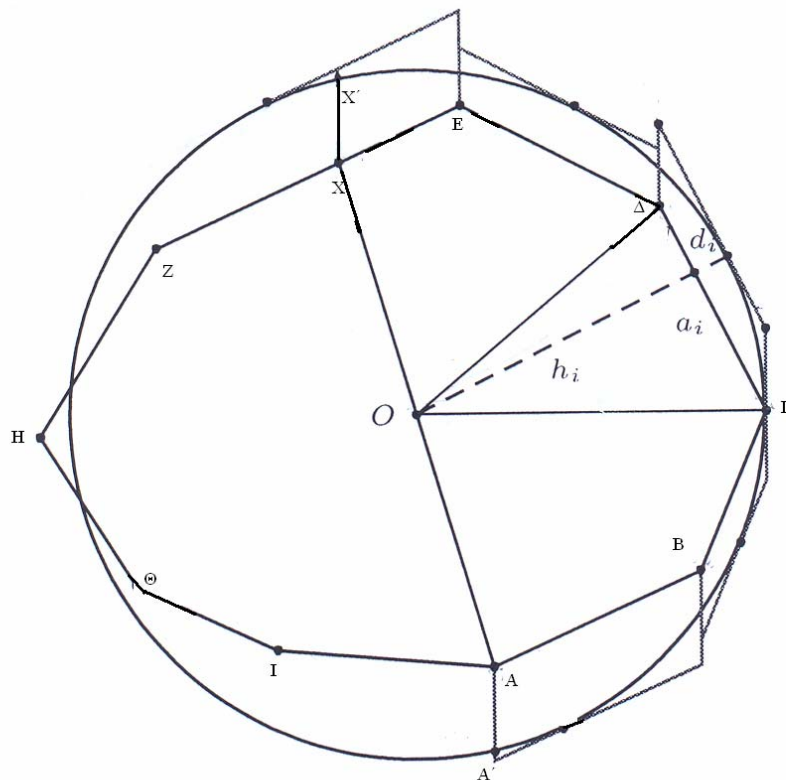
ΘΕΩΡΗΜΑ. Για κάθε κυρτό πολύγωνο με περίμετρο  $\ell$  και εμβαδόν  $E$  ισχύει:

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ένα κυρτό πολύγωνο  $ΑΒΓ\dots Ι$ . Επιλέγω δύο σημεία του πολυγώνου, ας πούμε την κορυφή  $A$  και το σημείο  $X$ , που διχοτομούν την περίμετρο. Το ευθύγραμμο τμήμα  $ΑΧ$  χωρίζει την πολυγωνική περιοχή σε δύο περιοχές, ενδεχομένως όχι ισεμβαδικές. Συνεπώς,

(α)  $ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΧ = \frac{\ell}{2}$  και ας δεχτούμε ότι

(β) η πολυγωνική περιοχή  $ΑΒΓΔΕΧΑ$  είναι μεγαλύτερη από την συμπληρωματική της, δηλαδή αν  $E_1$  το εμβαδόν της περιοχής  $ΑΒΓΔΕΧΑ$ , τότε  $E_1 \geq \frac{E}{2}$ .



Έστω  $O$  το μέσο του  $ΑΧ$  και έστω  $\Gamma$  η πιο απομακρυσμένη κορυφή του πολυγώνου  $ΑΒΓΔΕΧΑ$  από το σημείο  $O$ . Έστω  $ΟΓ = \rho$ . Με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$  σχεδιάζουμε κύκλο. Από τα σημεία  $A$  και  $X$  φέρνουμε κάθετες προς την ακτίνα  $ΟΓ$  που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία  $A'$ ,  $X'$  αντίστοιχα. Τότε, λόγω συμμετρίας, το κομμάτι

ΑΑ'ΓΧ'ΧΑ του κυκλικού δίσκου έχει εμβαδόν ίσο με  $\frac{1}{2}\pi\rho^2$ .

Κατασκευάζουμε τώρα, έξω από το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΧ, παραλληλόγραμμα τα οποία εφάπτονται του κύκλου και έχουν βάσεις τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΧ.

Η πολυγωνική περιοχή ΑΒΓΔΕΧΑ είναι ένωση των τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ, ΟΕΧ. Αν με  $\alpha_i$  συμβολίσουμε τη βάση κάθε τέτοιου τριγώνου, με  $h_i$  το ύψος και  $d_i = \rho - h_i$ , τότε

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i h_i.$$

Αν με  $E_2$  συμβολίσουμε το εμβαδόν των παραλληλογράμμων, τότε

$$E_2 = \sum_i \alpha_i d_i = \sum_i \alpha_i (\rho - h_i) = \rho \cdot \frac{\ell}{2} - 2E_1.$$

Όμως,

$$E_1 + E_2 \geq \frac{1}{2}\pi\rho^2$$

επομένως,

$$\rho \cdot \frac{\ell}{2} - E_1 \geq \frac{1}{2}\pi\rho^2$$

δηλαδή,

$$\pi\rho^2 - \ell\rho + 2E_1 \leq 0$$

ή ισοδύναμα,

$$\pi \left( \rho - \frac{\ell}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{\ell^2}{4\pi} - 2E_1 \right)^2 \leq 0$$

απ' όπου έπεται,

$$\frac{\ell^2}{4\pi} - 2E_1 \geq 0.$$

Όμως  $E_1 \geq \frac{E}{2}$ , συνεπώς

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}. \quad \square$$

Η παραπάνω απόδειξη απλοποιεί την απόδειξη του Bonnesen [2], [3].

Για το πότε ισχύει η ισότητα στην ισοπεριμετρική ανισότητα, το παραπάνω επιχείρημα δεν δίνει απάντηση. Απάντηση μπορεί να δοθεί π.χ. με το επιχείρημα του Steiner. Μια παρεμφερή (αλλά κατά ουσιώδη τρόπο διαφορετική) απόδειξη που καλύπτει και το ερώτημα της ισότητας, παρουσιάζουμε στην μεθεπόμενη παράγραφο.



### 3.6 Τρίτη στοιχειώδης απόδειξη: Επιχείρημα σύγκρισης του Lawlor

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η ισοπεριμετρική ανισότητα

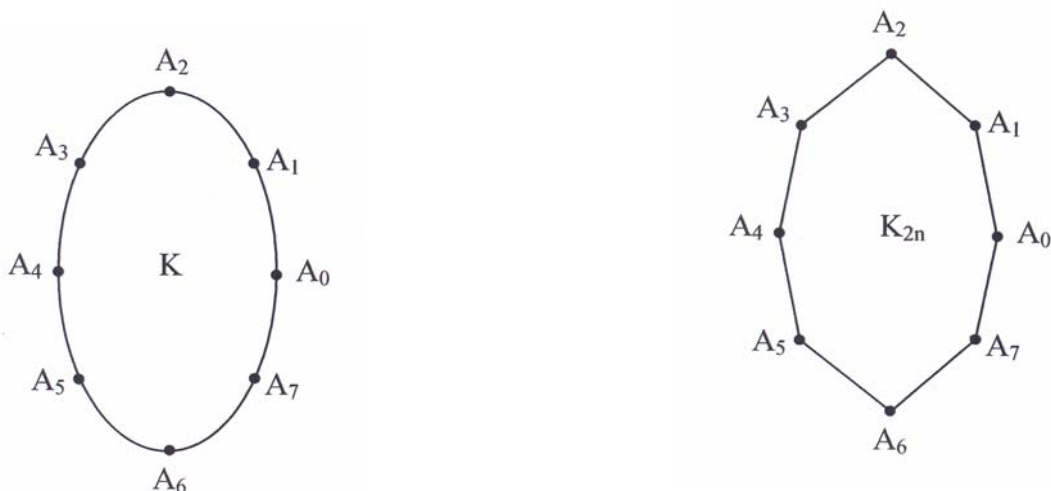
$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi} \quad (1)$$

δεν είναι τίποτα άλλο από μια αναδιατύπωση της γεωμετρικής πρότασης: μεταξύ όλων των απλών, κλειστών καμπυλών με δοσμένη περίμετρο  $\ell$ , ο κύκλος περικλείει το μέγιστο εμβαδόν.

Υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού υποβιβάζει την απόδειξη μονάχα στη περίπτωση των κυρτών (και όχι όλων των απλών) κλειστών καμπυλών. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη της σχέσης (1) συγκρίνοντας με έναν ορισμένο τρόπο το εμβαδόν ενός τυχαίου κυρτού σχήματος περιμέτρου  $\ell$  με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου περιμέτρου  $\ell$ , ακολουθώντας το [18].

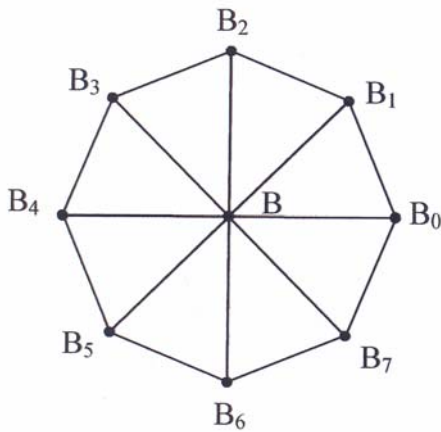
Έστω  $K$  η περιοχή που περικλείεται από μια κυρτή κλειστή καμπύλη και  $n \geq 2$  ένας φυσικός αριθμός.

Επιλέγουμε  $2n$  σημεία  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  πάνω στη κυρτή καμπύλη έτσι ώστε το μήκος της κυρτής καμπύλης μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών σημείων να είναι ακριβώς  $\frac{\ell}{2n}$ . Συμβολίζουμε με  $K_{2n}$  το κυρτό πολύγωνο που ορίζεται από τις κορυφές  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  αν τις ενώσουμε διαδοχικά.

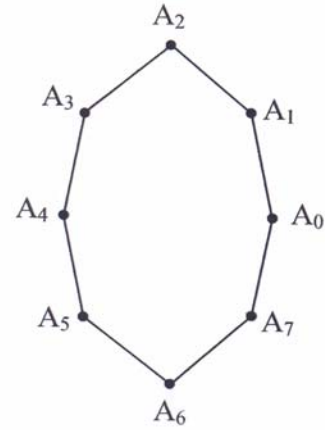


Θεωρούμε το κανονικό  $2n$ -γωνο  $H_{2n}$  με κέντρο  $B$  και κορυφές  $B_0, B_1, \dots, B_{2n-1}$  κάθε πλευρά του οποίου έχει μήκος  $\frac{\ell}{2n}$ .

Έτσι το μεν πολύγωνο  $K_{2n}$  είναι μια προσέγγιση της κυρτής περιοχής  $K$  το δε πολύγωνο  $H_{2n}$  είναι μια προσέγγιση του κυκλικού δίσκου περιμέτρου  $\ell$ .



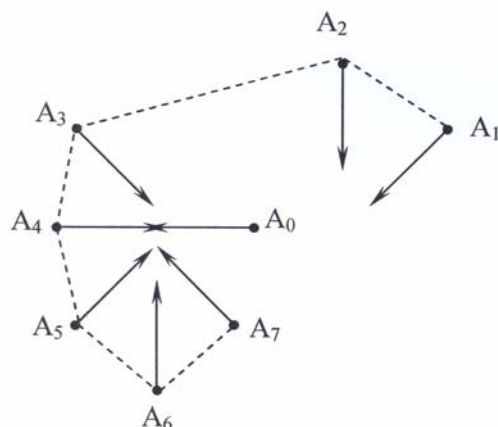
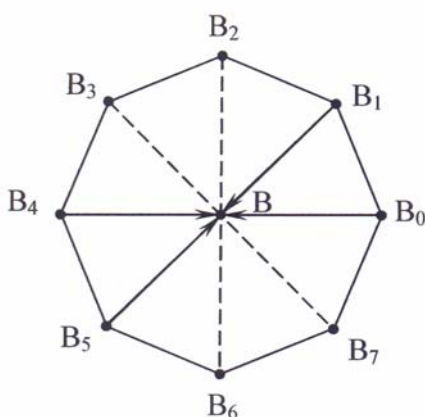
κανονικό  $2n$ -γωνο  $H_{2n}$



κυρτό  $2n$ -γωνο  $K_{2n}$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι τόσο το ευθύγραμμο τμήμα  $A_0A_n$  όσο και το  $B_0B_n$  είναι παράλληλα προς τον ορίζοντα (αλλιώς εκτελούμε κατάλληλη στροφή που ως γνωστό αφήνει αναλλοίωτα τόσο τα μήκη όσο και τα εμβαδά).

Από κάθε κορυφή  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ) φέρνουμε ημιευθεία  $r_i$  η οποία είναι παράλληλη και έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα  $B_iB$ . Κάθε δύο διαδοχικές ημιευθείες  $r_i$  και  $r_{i+1}$  μπορεί να τέμνονται μπορεί όμως και όχι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Αν οι ημιευθείες  $r_i$  και  $r_{i+1}$  τέμνονται σε κάποιο σημείο  $P_i$ , τότε την τριγωνική περιοχή  $A_iA_{i+1}P_i$  την συμβολίζουμε με  $T_i$ . Αλλιώς, το  $T_i$  θα συμβολίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $A_iA_{i+1}$ .

Θα αποδείξουμε ότι:

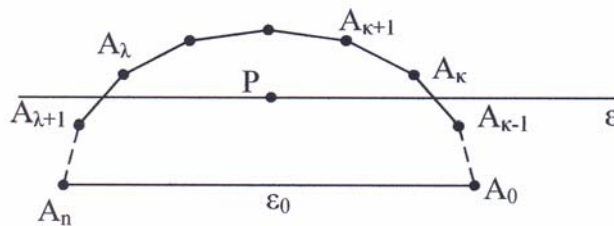
$$(α) \text{Εμβ}(T_i) \leq \text{Εμβ}(B_i B_{i+1} B), \text{ για κάθε } i = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

$$(β) K_{2n} \subset \bigcup_{i=0}^{2n-1} T_i.$$

Όσο αφορά τη σχέση (α): Αν το  $T_i$  είναι ευθύγραμμο τμήμα τότε  $\text{Εμβ}(T_i) = 0$  και η ανισότητα αληθεύει κατά τετριμμένο τρόπο. Αν το  $T_i$  είναι τρίγωνο, τότε: i) η βάση  $B_i B_{i+1}$  του τριγώνου  $B_i B_{i+1} B$  έχει μήκος ακριβώς  $\frac{\ell}{2n}$  και ii) οι άλλες δύο πλευρές του  $T_i$  είναι, εκ κατασκευής, παράλληλες προς τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου  $B_i B_{i+1} B$ . Άρα,  $\text{Εμβ}(T_i) \leq \text{Εμβ}(B_i B_{i+1} B)$ .

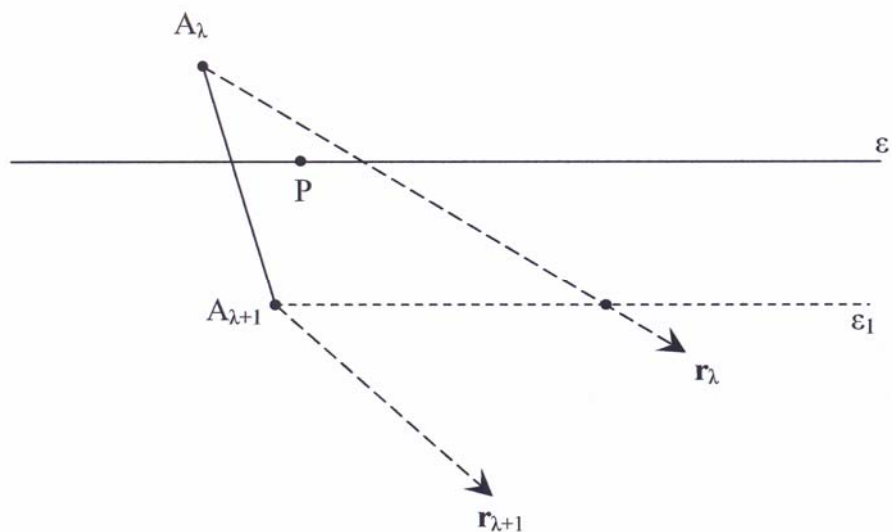
Όσο αφορά τη σχέση (β): θα την αποδείξουμε με απαγωγή στο άτοπο. Ας είναι  $P$  ένα σημείο του  $K_{2n}$  που δεν ανήκει σε κανένα  $T_i$ . Φυσικά το σημείο  $P$  ανήκει στο εσωτερικό του  $K_{2n}$ , αφού κάθε  $T_i$  περιέχει την πλευρά  $A_i A_{i+1}$ . Αν  $\varepsilon_0$  είναι η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από τις κορυφές  $A_0$  και  $A_n$ , τότε η ευθεία  $\varepsilon_0$  χωρίζει το  $K_{2n}$  σε δύο κομμάτια: ένα πάνω ( $K_{2n}'$ ) και ένα κάτω ( $K_{2n}''$ ). Ας υποθέσουμε ότι  $P \in K_{2n}'$ . Η απόδειξη για την περίπτωση που  $P \in K_{2n}''$  είναι όμοια. Ας σημειωθεί ότι οι ημιευθείες  $r_0$  και  $r_n$  ανήκουν πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_0$  και η φορά της μιας είναι αντίθετη προς τη φορά της άλλης.

Φέρνουμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $P$  και είναι παράλληλη στον ορίζοντα. Ας είναι  $A_\kappa, A_{\kappa+1}, \dots, A_\lambda$  οι κορυφές του  $K_{2n}'$  που βρίσκονται πάνω από την ευθεία  $\varepsilon$ . Φυσικά μπορεί  $\kappa = \lambda$ . Όμως όλες οι ημιευθείες  $r_1, \dots, r_{n-1}$  έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω.



Για τις ημιευθείες  $r_\kappa$  και  $r_\lambda$  υπάρχουν οι εξής τρεις περιπτώσεις:

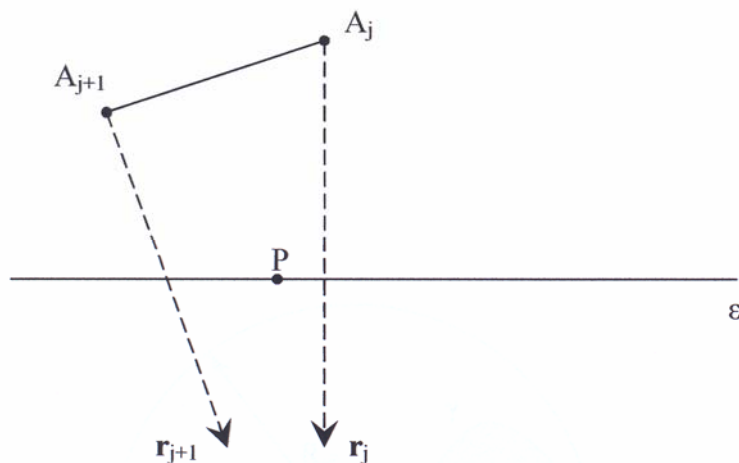
*Περίπτωση 1<sup>ο</sup>*: Η ημιευθεία  $r_\lambda$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  δεξιά του  $P$ ,



τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα το  $P$  οφείλει να περιέχεται στο τρίγωνο  $T_\lambda$ , πράγμα άτοπο.

*Περίπτωση 2<sup>η</sup>*: Η ημιευθεία  $r_\kappa$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  αριστερά του  $P$ .  
(όμοια επιχειρηματολογία όπως στην Περίπτωση 1)

*Περίπτωση 3<sup>η</sup>*: Η ημιευθεία  $r_\kappa$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  δεξιά του  $P$  και η ημιευθεία  $r_\lambda$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  αριστερά του  $P$ .



Τότε υπάρχει δείκτης  $j$ , με  $\kappa \leq j \leq \lambda$ , ώστε οι ημιευθείες  $r_\kappa, r_{\kappa+1}, \dots, r_j$  τέμνουν την ευθεία  $\varepsilon$  δεξιά του  $P$  ενώ οι ημιευθείες  $r_{j+1}, \dots, r_\lambda$  την τέμνουν αριστερά του  $P$ . Τότε όμως,  $P \in T_j$ , πράγμα άτοπο.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας.

Από τη σχέση (1) προκύπτει

$$\begin{aligned} \text{Εμβ}(K_{2n}) &\leq \text{Εμβ}(T_0) + \text{Εμβ}(T_1) + \dots + \text{Εμβ}(T_{2n-1}) \\ &\stackrel{(α)}{\leq} \text{Εμβ}(B_0B_1B) + \text{Εμβ}(B_1B_2B) + \dots + \text{Εμβ}(B_{2n-1}B_0B) \\ &= \text{Εμβ}(H_{2n}) \end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\text{Εμβ}(K_{2n}) \leq \text{Εμβ}(H_{2n}).$$

Όμως το εμβαδόν του πολυγώνου  $K_{2n}$  προσεγγίζει το εμβαδόν  $E$  της κυρτής περιοχής  $K$  ενώ το εμβαδόν του κανονικού  $2n$ -γώνου  $H_{2n}$  προσεγγίζει το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου περιμέτρου  $\frac{\ell}{2n}$ , το οποίο είναι ίσο με  $\frac{\ell^2}{4\pi}$ . Παίρνοντας λοιπόν το όριο καθώς  $n \rightarrow \infty$  στην τελευταία ανισότητα, προκύπτει

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}. \quad \square$$

### 3.7 Τέταρτη στοιχειώδης απόδειξη: τύπου Bonnesen (II) – ισχυρή έκδοση

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας:

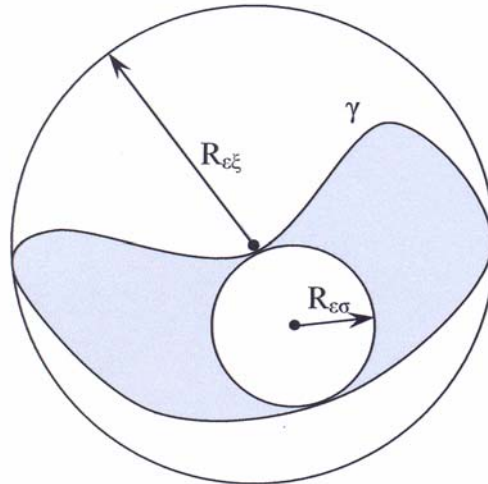
(α) αν μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη  $\gamma$  έχει μήκος  $\ell$  και περικλείει περιοχή εμβαδού  $E$ , τότε

$$E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

(β) αν ισχύει η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα, τότε η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος

η οποία στηρίζεται στην εξής απλή ιδέα:

Εγγράφουμε και περιγράφουμε δύο κατάλληλους κύκλους στην καμπύλη  $\gamma$  με ακτίνες  $R_{\epsilon\sigma}$  και  $R_{\epsilon\xi}$  αντίστοιχα.



Θα αποδείξουμε ότι:

$$\ell^2 - 4\pi E \geq \pi^2 (R_{\varepsilon\xi} - R_{\varepsilon\sigma})^2.$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει κατά προφανή τρόπο και το σκέλος (α) και το σκέλος (β) της ισοπεριμετρικής ανισότητας, αφού  $\pi^2 (R_{\varepsilon\xi} - R_{\varepsilon\sigma})^2 \geq 0$ , ενώ αν  $\ell^2 - 4\pi E = 0$  τότε  $R_{\varepsilon\xi} = R_{\varepsilon\sigma}$  και άρα η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος. Αυτό ακριβώς το σημείο της παρούσας απόδειξης είναι και ένα από τα πλεονεκτήματά της έναντι των τριών προηγούμενων αποδείξεων, οι οποίες απαιτούσαν διαφορετική επιχειρηματολογία για το σκέλος (β).

Η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια μιας γενικότερης ανισότητας που απόδειξε ο Bonnesen το 1929 [2]. Εδώ θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Fejes-Toth [10] που συμπεριλαμβάνεται στο άρθρο [21] του R. Osserman, στο οποίο παρέχεται μια εκτενέστερη πληροφόρηση πάνω στις ανισότητες τύπου Bonnesen.

Όπως έχουμε ήδη δει αρκεί να αποδείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα για **κυρτές** καμπύλες, αφού η γενική περίπτωση μπορεί να καλυφθεί με το επιχείρημα της κυρτής θήκης η οποία έχει μεγαλύτερο εμβαδόν αλλά μικρότερη περίμετρο.

Έστω  $K$  η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη  $\gamma$ . Συμβολίζουμε με  $R_{\varepsilon\xi}$  την ακτίνα του μικρότερου κυκλικού δίσκου που περιέχει το  $K$  και με  $R_{\varepsilon\sigma}$  την ακτίνα του μεγαλύτερου κυκλικού δίσκου που περιέχεται στο  $K$ . Ακριβέστερα,

$$R_{\varepsilon\xi} = \inf\{r > 0 : \text{υπάρχει } p \in \mathbb{R}^2 \text{ με } K \subset D(p,r)\}$$

$$R_{\varepsilon\sigma} = \sup\{r > 0 : \text{υπάρχει } p \in \mathbb{R}^2 \text{ με } D(p,r) \subset K\},$$

όπου  $D(p,r)$  είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου  $p$  και ακτίνας  $r$ .

Η ανισότητα του Bonnesen συνδέει τα τέσσερα γεωμετρικά μεγέθη  $\ell$ ,  $E$ ,  $R_{\varepsilon\sigma}$ ,  $R_{\varepsilon\xi}$ .

**ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BONNESEN.** *Αν μια κυρτή, κλειστή καμπύλη  $\gamma$  έχει μήκος  $\ell$  και περικλείει περιοχή εμβαδού  $E$ , τότε*

$$\pi s^2 - \ell s + E \leq 0,$$

για κάθε  $R_{\varepsilon\sigma} \leq s \leq R_{\varepsilon\xi}$ .

**ΠΟΡΙΣΜΑ.** *Αν μια κυρτή, κλειστή καμπύλη  $\gamma$  έχει μήκος  $\ell$  και περικλείει περιοχή εμβαδού  $E$ , τότε*

$$\ell^2 - 4\pi E \geq \pi^2 (R_{\varepsilon\xi} - R_{\varepsilon\sigma})^2.$$

Τόσο η ανισότητα του Bonnesen όσο και το πόρισμα ισχύουν γενικότερα για κάθε απλή, κλειστή καμπύλη. Εμάς, όπως εξηγήσαμε, μας αρκεί να τις αποδείξουμε στην περίπτωση των κυρτών, κλειστών καμπύλων.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ.** Θεωρούμε το τριώνυμο  $\pi s^2 - \ell s + E$ . Αν η διακρίνουσα του  $\ell^2 - 4\pi E$  ήταν αρνητική τότε  $\pi s^2 - \ell s + E > 0$ , για κάθε  $s \in \mathbb{R}$ , πράγμα άτοπο προς την ανισότητα του Bonnesen. Άρα,  $\ell^2 - 4\pi E \geq 0$ . Όποτε, τόσο το  $R_{\varepsilon\sigma}$  όσο και το  $R_{\varepsilon\xi}$  βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου. Επομένως,

$$R_{\varepsilon\xi} \leq \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 4\pi E}}{2\pi}$$

$$\frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 4\pi E}}{2\pi} \leq R_{\varepsilon\sigma}.$$

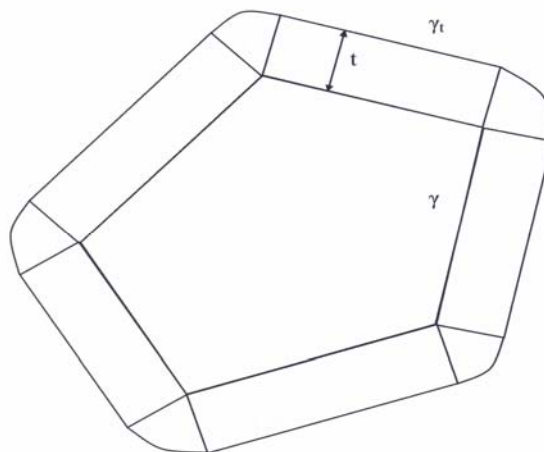
Αφαιρώντας τις δύο ανισότητες προκύπτει

$$R_{\varepsilon\xi} - R_{\varepsilon\sigma} \leq \frac{\sqrt{\ell^2 - 4\pi E}}{\pi}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, το ζητούμενο έπεται. □

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ BONNESEN. Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση του κυρτού πολυγώνου αφού για κάθε κυρτή, κλειστή καμπύλη υπάρχει ακολουθία κυρτών πολυγώνων  $P_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  ώστε  $\ell_n \rightarrow \ell$ ,  $E_n \rightarrow E$ ,  $(R_n)_{\varepsilon\sigma} \rightarrow R_{\varepsilon\sigma}$  και  $(R_n)_{\varepsilon\xi} \rightarrow R_{\varepsilon\xi}$  [3], οπότε περνώντας στα όρια προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Έστω λοιπόν  $\gamma$  ένα κυρτό πολύγωνο με περίμετρο  $\ell$  που περικλείει περιοχή εμβαδού  $E$ . Για κάθε  $t > 0$  ορίζουμε την καμπύλη  $\gamma_t$  να αποτελείται από όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται έξω από το πολύγωνο αλλά σε απόσταση ακριβώς  $t$  από την  $\gamma$ . Η καμπύλη  $\gamma_t$ , συνεπώς, αποτελείται από ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων παράλληλων και ίσων σε μήκος προς τις πλευρές του πολυγώνου, που βρίσκονται σε απόσταση  $t$ , και ένα σύνολο κυκλικών τόξων ακτίνας  $t$ , με κέντρα στις κορυφές του πολυγώνου, τα οποία συμπληρώνουν έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας  $t$ .



Άρα, αν  $D_t$  είναι η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη  $\gamma_t$  τότε,

$$E_{\text{μβ}}(D_t) = E + \ell t + \pi t^2 \quad (1).$$

Αν περιορίσουμε τη διακύμανση του  $t$  στο διάστημα  $R_{\varepsilon\sigma} < t < R_{\varepsilon\xi}$  τότε, από τον ορισμό των  $R_{\varepsilon\sigma}$ ,  $R_{\varepsilon\xi}$  και  $D_t$ , έπεται ότι κάθε κύκλος ακτίνας  $t$  με κέντρο στο  $D_t$  τέμνει το πολύγωνο  $\gamma$ . Βασιζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση θα δώσουμε μια δεύτερη εκτίμηση για το  $E_{\text{μβ}}(D_t)$  ως εξής:

Φανερά, το  $D_t$  μπορεί να γραφεί ως ένωση ξένων υποσυνόλων του

$$D_t = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

όπου κάθε  $A_k$  αποτελείται από εκείνα τα σημεία  $x$  του  $D_t$  για τα οποία ο κύκλος με κέντρο  $x$  και ακτίνα  $t$  τέμνει το πολύγωνο  $\gamma$  σε ακριβώς  $k$  σημεία.

Οπότε, αν  $E_k = E_{\text{μβ}}(A_k)$ ,  $k=1, 2, \dots$  τότε,

$$E_{\text{μβ}}(D_t) = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n + \dots$$



Από την άλλη πλευρά το πολύγωνο  $\gamma$  είναι κλειστό, συνεπώς κάθε κύκλος θα τέμνει το πολύγωνο  $\gamma$  σε άρτιο πλήθος πλευρών, συνεπώς τα σύνολα  $A_1, A_3, \dots$  είναι κενά και άρα,  $E_{2\kappa+1} = 0$ , για κάθε  $\kappa = 0, 1, \dots$   
Επομένως,

$$E_{\text{μβ}}(D_t) = E_2 + E_4 + \dots + E_{2n} + \dots \quad (2)$$

Είτε η πολυγωνική γραμμή  $\gamma$  είναι κλειστή είτε όχι, τα εμβαδά  $E_1, E_2, \dots$  και το μήκος  $\ell$  της  $\gamma$  συνδέονται ως εξής:

$$4t\ell = E_1 + 2E_2 + 3E_3 + \dots + nE_n + \dots \quad (3)$$

Δεχόμενοι τη σχέση αυτή έχουμε, από τις σχέσεις (1), (2),

$$\begin{aligned} E + \ell t + \pi t^2 &= E_{\text{μβ}}(D_t) \\ &= E_2 + E_4 + E_6 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(2E_2 + 2E_4 + 2E_6 + \dots) \\ &\leq \frac{1}{2}(2E_2 + 4E_4 + 6E_6 + \dots) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4t\ell \\ &= 2t\ell, \end{aligned}$$

για κάθε  $R_{\varepsilon\sigma} < t < R_{\varepsilon\xi}$ . Η ισοδύναμα,

$$\pi t^2 - \ell t + E \leq 0, \quad \text{για κάθε } R_{\varepsilon\sigma} < t < R_{\varepsilon\xi}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς  $t \rightarrow R_{\varepsilon\sigma}$  και  $t \rightarrow R_{\varepsilon\xi}$  συμπληρώνεται η απόδειξη της ανισότητας του Bonnesen.

Μένει λοιπόν η απόδειξη της σχέσης (3) η οποία ισχύει για κάθε πολυγωνική καμπύλη  $\gamma$  μήκους  $\ell$  και η οποία αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή (ως προς το πλήθος των πλευρών της καμπύλης  $\gamma$ ) ως εξής:

Αν η  $\gamma$  αποτελείται από μία πλευρά, μήκους  $\ell$  τότε κάθε κύκλος τέμνει την πλευρά αυτή σε ένα ή δύο σημεία και συνεπώς η σχέση (3) γράφεται,

$$4t\ell = E_1 + 2E_2 \quad (4)$$

Όμως,  $D_t = A_1 \cup A_2$ , όπου  $A_1 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2)$ ,  $A_2 = D_t \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2)$  και  $\Delta_1, \Delta_2$  οι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $t$  με κέντρα στα δύο άκρα της πλευράς. Ο έλεγχος της σχέσης (4) είναι τετριμμένος μια και  $E_1 = E\mu\beta(A_1)$ ,  $E_2 = E\mu\beta(A_2)$ .

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση (3) ισχύει για κάθε πολυγωνική γραμμή με  $n$  πλευρές. Αν επισυνάψουμε μια ακόμα πλευρά, τότε θα έχουμε τη σχέση (4) για την πλευρά αυτή. Προσθέτοντας τις (3), (4) τότε τα αριστερά μέλη προσθέτονται στο σωστό τύπο για ένα πολύγωνο με  $(n+1)$  πλευρές, ενώ τα σύνολα  $A_1, A_2$  της επιπλέον αυτής πλευράς, συνδιαζόμενα με τα αντίστοιχα σύνολα του αρχικού  $n$ -γώνου, αυξάνουν τους συντελεστές κατά 1 ή 2 και συνεπώς προκύπτει η σωστή σχέση και στο δεξί μέλος. Επομένως, η σχέση (3) ισχύει για κάθε πολυγωνική γραμμή.

### 3.8 Πέμπτη απόδειξη: του A. Hurwitz, με χρήση λήμματος Wirtinger

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια εξαιρετικά κομψή απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας που οφείλεται στον Γερμανό μαθηματικό Adolf Hurwitz (1859-1919). Ο Hurwitz μελέτησε το γένος μιας Riemann επιφάνειας και πως οι σχέσεις μεταξύ των κλάσεων αριθμών προέρχονται από ισοϋπόλοιπες συναρτήσεις.



Adolf Hurwitz (1859-1919)

Η καμπύλη οφείλει να έχει κάποιο βαθμό παραγωγισιμότητας, συγκεκριμένα να είναι κλάσης  $C^1$ .

Πρόκειται για μια πολύ απλή απόδειξη που βασίζεται στο παρακάτω λήμμα, που αποδίδεται στον Wilhelm Wirtinger (1865-1945), και αφορά απλές κλειστές καμπύλες της τάξης  $C^1$ . Στη πραγματικότητα η απόδειξη ισχύει για την ευρύτερη κλάση των καμπυλών  $\gamma : x=x(t), y=y(t)$ , για της οποίες η  $y^2(t)$  και η  $[y'(t)]^2$  είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

**ΛΗΜΜΑ (Wirtinger).** Αν  $y(t)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$  και επιπλέον  $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$  τότε:

$$\int_0^{2\pi} y^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω  $y(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)]$  το ανάπτυγμα

Fourier της συνάρτησης  $y(t)$ . Τότε  $\alpha_0 = 0$ , αφού  $\int_0^{2\pi} y(t) dt = 0$ .

Συνεπώς, 
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)]$$

$$\text{και } y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-n\alpha_n \sin(nt) + n\beta_n \cos(nt)].$$

Όμως,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

Βάσει του θεωρήματος του Parseval ( $y, y' \in L^2$ ).

Επομένως, οι σειρές στα δεξιά μέλη είναι συγκλίνουσες. Αφαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$\int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt - \int_0^{2\pi} y^2(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)(n^2 - 1) \geq 0$$

δηλαδή,

$$\int_0^{2\pi} y^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt.$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν για κάθε  $n \geq 2$  είναι  $\alpha_n = \beta_n = 0$ . Στη περίπτωση αυτή η  $y(t)$  γράφεται  $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$ . □

Μια διαφορετική απόδειξη, χωρίς χρήση αναπτυγμάτων Fourier, μπορεί να δει κανείς στο [12], σελ. 185.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Ισοπεριμετρικής ανισότητας  $\ell^2 - 4\pi E \geq 0$ ). Επειδή τόσο το μήκος όσο και το εμβαδόν παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τις ισομετρίες του επιπέδου, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για καμπύλες που το κέντρο βάρους τους  $(\bar{x}, \bar{y})$  ταυτίζεται με την αρχή των

αξόνων, (ειδάλλως εκτελούμε μια απλή μετατόπιση ώστε το κέντρο βάρους  $(\bar{x}, \bar{y})$  να μετατοπιστεί στο σημείο  $(0,0)$ ).

Θα παραμετρήσουμε την καμπύλη  $\gamma$  στο διάστημα  $0 \leq t \leq 2\pi$  ως εξής: αν  $s$  είναι η παράμετρος μήκους τόξου με  $0 \leq s \leq \ell$ , θεωρούμε τη νέα παράμετρο  $t$  μέσω της σχέσης

$$t = \frac{2\pi}{\ell} s.$$

Οπότε  $0 \leq t \leq 2\pi$  και

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$E = -\int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt$$

όπου ο προσανατολισμός της καμπύλης  $\gamma$  υποτίθεται θετικός ως προς το εσωτερικό της.

Όμως, εξ' ορισμού της παραμέτρου μήκους τόξου,

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{2\pi} [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 dt = \int_0^{2\pi} [s'(t)]^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 dt = \frac{\ell^2}{2\pi}$$

και άρα,

$$\ell^2 - 4\pi E = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + 2y(t)x'(t) \right] dt$$

ή ισοδύναμα,

$$\ell^2 - 4\pi E = 2\pi \int_0^{2\pi} [x'(t) + y(t)]^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ [y'(t)]^2 - y^2(t) \right] dt \quad (1).$$

Όμως το κέντρο βάρους  $(\bar{x}, \bar{y})$  ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων και συνεπώς :

$$\int_0^{2\pi} y(t) dt = 0.$$

Άρα, από το παραπάνω λήμμα και τη σχέση (1) προκύπτει άμεσα ότι

$$\ell^2 - 4\pi E \geq 0.$$

Επίσης,  $\ell^2 - 4\pi E = 0$  αν και μόνο αν

$$\int_0^{2\pi} [x'(t) + y(t)]^2 dt = 0 \text{ και } \int_0^{2\pi} \left[ [y'(t)]^2 - y^2(t) \right] dt = 0$$

οπότε βάση του λήμματος ,

$$x'(t) + y(t) = 0 \text{ και } y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

ή ισοδύναμα,

$$x(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t \text{ και } y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

δηλαδή,

$$x^2(t) + y^2(t) = \alpha^2 + \beta^2 = \text{σταθερά.}$$

Συνεπώς,  $l^2 - 4\pi E = 0$  αν και μόνο αν η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος.  $\square$

### 3.9 Έκτη απόδειξη: του E. Schmidt

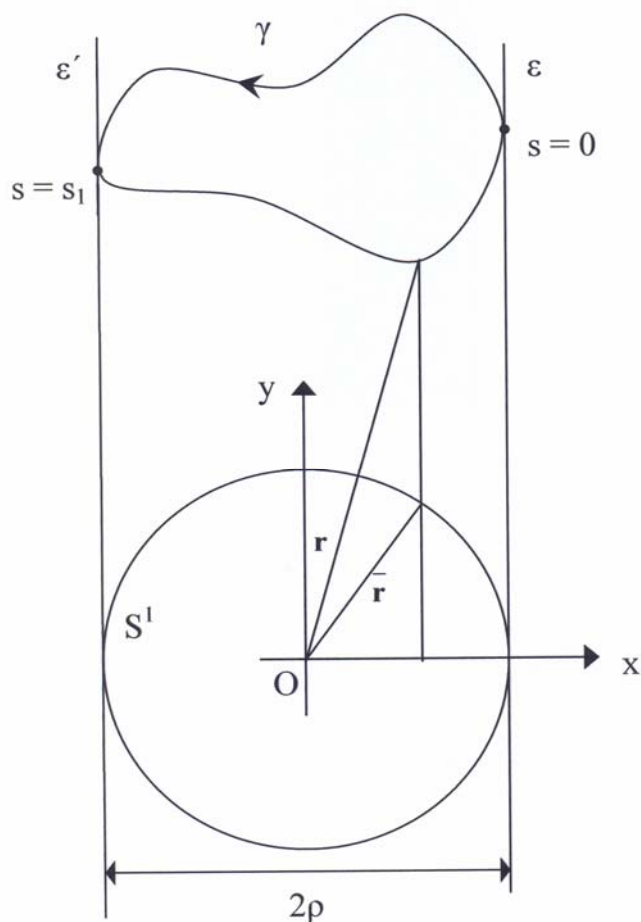
Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας που παρουσιάζουμε στην παράγραφο αυτή οφείλεται στον Γερμανό μαθηματικό Erhard Schmidt (1876-1959) και περιέχεται στην εκτεταμένη εργασία του [24]. Ο Schmidt είναι πολύ γνωστός από την διαδικασία κανονικοποίησης Gram-Schmidt που μετατρέπει οποιαδήποτε βάση του χώρου σε ορθοκανονική.

Για την καμπύλη  $\gamma$  απαιτείται βαθμός παραγωγισιμότητας της κλάσης  $C^1$ .



Erhard Schmidt (1876-1959)

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ** (Ισοπεριμετρικής ανισότητας  $l^2 - 4\pi E \geq 0$ ). Έστω  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  δύο παράλληλες ευθείες εφαπτόμενες της καμπύλης  $\gamma$ , έτσι ώστε η καμπύλη να περιέχεται στη ζώνη που ορίζουν οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$ . Θεωρούμε κύκλο  $S^1$  που εφάπτεται στις ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  και δεν συναντά την  $\gamma$ . Συμβολίζουμε με  $O$  το κέντρο του κύκλου και θεωρούμε ότι το επίπεδο του κύκλου (και της καμπύλης) αναφέρεται στο σύστημα  $Oxy$ , όπου ο άξονας των  $x$  είναι κάθετος στις ευθείες  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ . Θεωρούμε την παραμετρική έκφραση της καμπύλης  $\gamma$  με παράμετρο το μήκος τόξου της, δηλαδή  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in [0, l]$  έτσι ώστε να είναι θετικά προσανατολισμένη και τα σημεία επαφής της με τις ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  να είναι αντίστοιχα, τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου  $s = 0$  και  $s = s_1$ . (βλ. Σχήμα 7).



(Σχήμα 7)

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παραμετρική μορφή του κύκλου  $S^1$  είναι

$$\bar{\mathbf{r}}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), y(s)), \quad s \in [0, \ell], \quad (1)$$

και έστω ότι  $2\rho$  είναι η απόσταση μεταξύ των ευθειών  $\varepsilon, \varepsilon'$ .

Το εμβαδόν  $E$  που περικλείεται από μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη με εξίσωση  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)), s \in [0, \ell]$ , δίδεται από τη σχέση:

$$E = -\int_0^\ell y(s)x'(s)ds = \int_0^\ell x(s)y'(s)ds = \frac{1}{2} \int_0^\ell (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))ds.$$

Αν  $\bar{E}$  είναι το εμβαδόν του κύκλου  $S^1$ , τότε έχουμε

$$E = \int_0^\ell xy'ds \quad \text{και} \quad \bar{E} = \pi\rho^2 = -\int_0^\ell \bar{y}\bar{x}'ds$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
E + \pi\rho^2 &= \int_0^\ell (xy' - \bar{y}x') ds \\
&\leq \int_0^\ell \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} ds \\
&\leq \int_0^\ell \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)} ds \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_0^\ell \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} ds \\
&\stackrel{(**)}{=} \int_0^\ell \rho ds = \ell\rho \tag{2}
\end{aligned}$$

όπου (\*):  $-2xx'\bar{y}y' \leq x^2x'^2 + \bar{y}^2y'^2$  και (\*\*):  $(x')^2 + (y')^2 = 1$ .

Θυμίζουμε τώρα, ότι ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών είναι μικρότερος ή ίσος του αριθμητικού μέσου αυτών και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί είναι ίσοι. Άρα, λόγω της σχέσης (2),

$$\sqrt{E}\sqrt{\pi\rho^2} \leq \frac{E + \pi\rho^2}{2} \leq \frac{1}{2}\ell\rho. \tag{3}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, έχουμε

$$4\pi E\rho^2 \leq \ell^2\rho^2$$

ή ισοδύναμα

$$\ell^2 - 4\pi E \geq 0$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι  $\ell^2 - 4\pi E = 0$ . Τότε η ισότητα πρέπει να ισχύει παντού στις σχέσεις (2) και (3). Όμως, από την σχέση (3) έχουμε  $E = \pi\rho^2$ , οπότε η σχέση  $\ell^2 - 4\pi E = 0$  γράφεται  $\ell^2 - 4\pi\rho^2 = 0$  και άρα  $\ell = 2\pi\rho$ . Το  $\rho$  δεν εξαρτάται από την εκλογή της διεύθυνσης της  $\varepsilon$ . Επί πλέον η ισότητα στη σχέση (2) δίνει:

$$(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

ή ισοδύναμα,

$$(xx' + \bar{y}y')^2 = 0$$

δηλαδή  $\frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'}$ .

Επομένως

$$\frac{x^2}{y'^2} = \frac{\bar{y}^2}{x'^2} = \frac{x^2 + \bar{y}^2}{x'^2 + y'^2}$$

και κατά συνέπεια:

$$\frac{x}{y'} = \frac{\bar{y}}{x'} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \pm \sqrt{x^2 + \bar{y}^2}.$$

Αλλά από την (1) εύκολα έχουμε ότι  $\sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}(s)| = \rho$ . Οπότε  $\frac{x}{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \pm \rho$ . Έτσι,  $x = \pm \rho y'$ . Αφού όμως το  $\rho$  δεν εξαρτάται από την εκλογή της διεύθυνσης της ευθείας  $\varepsilon$ , μπορούμε να εναλλάξουμε τους ρόλους των  $x$  και  $y$  στην τελευταία σχέση οπότε  $y = \pm \rho x'$ . Επομένως,

$$x^2 + y^2 = \rho^2((x')^2 + (y')^2) = \rho^2 \cdot 1 = \rho^2$$

και κατά συνέπεια η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.  $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η ισοπεριμετρική ανισότητα επαληθεύεται από μία ευρεία κλάση καμπυλών. Εδώ, περιοριζόμαστε να σημειώσουμε ότι η ισοπεριμετρική ανισότητα ισχύει για κατά τμήματα  $C^1$  καμπύλες, όπως για παράδειγμα η καμπύλη στο Σχήμα 8.



(Σχήμα 8)

### 3.10 Έβδομη απόδειξη: του A. Hurwitz, με χρήση σειρών Fourier

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια δεύτερη απόδειξη του A. Hurwitz για την ισοπεριμετρική ανισότητα στη οποία γίνεται εκτεταμένη χρήση των αναπτυγμάτων Fourier. Παρατηρήστε ότι αν η καμπύλη με παραμετρική μορφή  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  είναι συνεχής και έχει πεπερασμένο μήκος έπεται ότι οι συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι συνεχείς και φραγμένης κύμανσης, άρα σχεδόν παντού παραγωγίσιμες, κάτι που μας αρκεί. Θα υποθέσουμε όμως ότι είναι επιπλέον κλάσης  $C^1$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Της ισοπεριμετρικής ανισότητας) Ας είναι  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $0 \leq s \leq \ell$  η παραμετρική παράσταση της επίπεδης, ομαλής, απλής, κλειστής, καμπύλης  $\gamma$  και  $s$  η παράμετρος μήκους τόξου. Υποθέτουμε επίσης ότι η καμπύλη  $\gamma$  διαγράφεται με τη θετική φορά. Θεωρούμε τον επιτρεπτό μετασχηματισμό παραμέτρου



$$s = \frac{\ell}{2\pi} t.$$

Τότε οι συναρτήσεις

$$x = x\left(\frac{\ell}{2\pi} t\right), \quad y = y\left(\frac{\ell}{2\pi} t\right) \quad (1)$$

έχουν περίοδο  $2\pi$ . Επειδή οι συναρτήσεις (1) είναι της κλάσεως  $C^1$ , μπορούμε να τις αναπτύξουμε σε σειρές του Fourier:

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)), \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{\kappa_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n \cos(nt) + \lambda_n \sin(nt)). \quad (3)$$

Ως γνωστόν, η σύγκλιση των σειρών αυτών είναι ομοιόμορφη. Θεωρούμε τις σειρές, που προκύπτουν αν τυπικά παραγωγίσουμε τους όρους των σειρών (2) και (3), δηλαδή:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n \sin(nt) + \beta_n \cos(nt))n, \quad (4)$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\kappa_n \sin(nt) + \lambda_n \cos(nt))n. \quad (5)$$

Ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς  $t$ . Εφαρμόζοντας τη σχέση πληρότητας έχουμε:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [x'(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) n^2,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n^2 + \lambda_n^2) n^2.$$

Είναι γνωστό, ότι τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων είναι σειρές συγκλίνουσες. Συνεπώς, με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} ([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \kappa_n^2 + \lambda_n^2) n^2. \quad (6)$$

Το εμβαδόν  $E$  της επιφανείας, που περικλείεται από την καμπύλη  $\gamma$ , δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \quad (7)$$

Στο ζεύγος των σειρών (2), (5) καθώς και στο ζεύγος (3), (4) εφαρμόζουμε τον τύπο του Parseval και βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n - \kappa_n \beta_n)n,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n \beta_n - \lambda_n \alpha_n)n.$$

Οι σειρές στα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων είναι απόλυτα συγκλίνουσες. Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n - \kappa_n \beta_n)n.$$

Συνεπώς, η σχέση (7) γράφεται,

$$E = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n - \kappa_n \beta_n)n. \quad (8)$$

Εξάλλου είναι

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 = 1,$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = \frac{\ell^2}{4\pi^2}. \quad (9)$$

Με χρήση της (9), η (6) γράφεται

$$\frac{\ell^2}{2\pi} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \kappa_n^2 + \lambda_n^2)n^2. \quad (10)$$

Από τους τύπους (8) και (10) προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{\ell^2}{2\pi} - 2E &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \kappa_n^2 + \lambda_n^2)n^2 - 2(\alpha_n\lambda_n - \beta_n\kappa_n)n\} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{(n\alpha_n - \lambda_n)^2 + (n\beta_n + \kappa_n)^2 + (n^2 - 1)(\kappa_n^2 + \lambda_n^2)\}.\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι

$$\frac{\ell^2}{2\pi} - 2E \geq 0,$$

δηλαδή

$$\ell^2 - 4\pi E \geq 0. \quad (11)$$

Στην παραπάνω σχέση η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν ισχύουν οι ισότητες

$$\alpha_1 = \lambda_1, \quad \beta_1 + \kappa_1 = 0$$

και

$$\alpha_n = \beta_n = \kappa_n = \lambda_n = 0, \quad \text{για κάθε } n=2,3,\dots$$

οπότε οι τύποι (2), (3) γράφονται

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \lambda_1 \cos t - \kappa_1 \sin t,$$

$$y(t) = \frac{\kappa_0}{2} + \kappa_1 \cos t - \lambda_1 \sin t.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις απαλείφουμε την παράμετρο  $t$  και βρίσκουμε

$$\left(x - \frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\kappa_0}{2}\right)^2 = \kappa_1^2 + \lambda_1^2,$$

δηλαδή στον τύπο (11) η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν η καμπύλη  $\gamma$  είναι περιφέρεια κύκλου.  $\square$

### 3.11 Όγδοη απόδειξη: του T. Carleman, με χρήση δυναμοσειρών

Ακολουθούμε το [6] για να αποδείξουμε ότι αν  $\ell$  είναι το μήκος μιας απλής, κλειστής καμπύλης  $\gamma$  και  $E$  το περικλειόμενο εμβαδόν, τότε  $E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$ , με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος.

Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι η καμπύλη  $\gamma$  είναι η εικόνα του μοναδιαίου δίσκου μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης  $f$ . Οπότε,

$$\ell = \int_0^{2\pi} |f'(z)| d\theta \text{ και } E = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f'(z)|^2 r dr d\theta.$$

Όμως υπάρχει αναλυτική συνάρτηση  $F$  στο μοναδιαίο δίσκο ώστε  $F^2 = f'$ . Συνεπώς, αν

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n$$

είναι το ανάπτυγμα της  $F$  σε δυναμοσειρά, τότε

$$\ell = \int_0^{2\pi} |F^2(z)| d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

και, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z_n$ , όπου  $\beta_n = \alpha_n \alpha_0 + \alpha_{n-1} \alpha_1 + \dots + \alpha_0 \alpha_n$ , έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 |F^2(z)|^2 r dr d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\beta_n|^2 r^{2n+1} dr d\theta \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|^2}{n+1}. \end{aligned}$$

Άρα, η σχέση  $E \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$  ισοδύναμα γράφεται,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_n|^2}{n+1} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Cauchy αφού,

$$\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &= |(\alpha_n \alpha_0) \cdot 1 + (\alpha_{n-1} \alpha_1) \cdot 1 + \dots + (\alpha_0 \alpha_n) \cdot 1|^2 \\
&\leq (|\alpha_n \alpha_0|^2 + |\alpha_{n-1} \alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_0 \alpha_n|^2) \cdot (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \\
&= (|\alpha_n|^2 |\alpha_0|^2 + |\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_0|^2 |\alpha_n|^2) \cdot (n+1).
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν οι αριθμοί  $\alpha_n \alpha_0, \alpha_{n-1} \alpha_1, \dots, \alpha_0 \alpha_n$  είναι ίσοι μεταξύ τους, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Δηλαδή, αν υπάρχει αριθμός  $\alpha$  ώστε  $\alpha_n = \alpha_0 \alpha^n$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Συνεπώς,

$$f'(z) = F^2(z) = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha z)^2}$$

δηλαδή,

$$f(z) = \frac{\beta}{1 - \alpha z} + \gamma,$$

για κατάλληλες σταθερές  $\beta$  και  $\gamma$ .

Όμως, μια τέτοια απεικόνιση τον μοναδιαίο κύκλο τον απεικονίζει σε κύκλο. Επομένως,  $E = \frac{\ell^2}{4\pi}$  μόνο εάν η καμπύλη  $\gamma$  είναι κύκλος.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] W. Blaschke, *Kreis and Kugel*, Λειψία 1916, Βερολίνο 1956
- [2] T. Bonnesen, *Les Problemes des Isoperimetres et des Isephanes*, Paris, Gauthier-Villars 1929, 59-61
- [3] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der Convexen Korper*, Chelsea Publ., New York, 1948, 111-112
- [4] Yu D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer – Verlag, 1988
- [5] V. Blasjo, *The Isoperimetric Problem*, The American Mathematical Monthly, Vol.112, No 6 (2005) 526-566
- [6] T. Carleman, *Zur Theorie der Minimalflächen*, Math. Z. (1921), 154-160
- [7] Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey 1976

- [8] N. Dergiades, *An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality*, Forum Geometricorum, vol. 2 (2002) 129-130
- [9] *Ευκλείδης Β'*, Θέματα Πανελληνίου Διαγωνισμού Ε.Μ.Ε. 1983 Β' Λυκείου, τεύχος Σεπτ.-Οκτ. 1983, σελ. 12
- [10] L. Fejes-Toth, *Elementarer Beweis einer Isoperimetrischen Ungleichung*, Acta Math. Sci. Hungaricae 1 (1950) 273-275
- [11] Pierre Grimal, *Λεξικό της Ελληνικής και Ρωμαϊκής Μυθολογίας*, University Studio Press, Θεσσαλονίκη 1991
- [12] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934
- [13] T. Heath, *History of Greek Mathematics*, vol. II, Dover (σελ. 206)
- [14] A. Hurwitz, *Sur le probleme des isoperimetres*, Comptes Rendus, 132 (1901) 401-403 [Werke, I, 490-491]
- [15] Δημήτρης Καλυκάκης, *Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα και ο μύθος της Διδούς*, Πρακτικά 23<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Πάτρα 2006, σελ. 181-194
- [16] Μ. Κατσοπρινάκης, Μ. Λάμπρου, *Ο Ευκλείδης Γ' σας απαντά, Ευκλείδης Γ'*, τόμος 2, τεύχος 2(4), Σεπτ. 1984, σελ. 122-124.
- [17] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972
- [18] G. Lawlor, *A New Area Maximization Proof for the Circle*, Mathematical Intelligencer, 20 (1999) 29-30
- [19] L. A. Lyusternik, *Convex Figures and Polyhedra*, D. C. Heath and Company, Univ. of Chicago, 1966
- [20] R. Osserman, *The Isoperimetric Inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 84, No. 6 (1978) 1182-1238
- [21] R. Osserman, *Bonnesen-Style Isoperimetric Inequalities*, The American Mathematical Monthly, vol. 86, No1 (1979) 1-29
- [22] Π. Πάμφιλου, *Γεωμετρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, 1989
- [23] H.J. Rose, *Ιστορία της Λατινικής Λογοτεχνίας*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1978
- [24] E. Schimdt, *Über das Isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen*, Mathematische Zeitschrift, 44 (1939) 689-788
- [25] J. Steiner, *Einfache Beweise der Isoperimetrischen Hauptsätze*, J. Reine Angew. Math., 18 (1838) 281-296
- [26] V. M. Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society & Mathematical Association of America, 1990
- [27] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

### ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

#### 4.1 Εισαγωγή

Ο υπολογισμός του εμβαδού επιφάνειας του χώρου, υπήρξε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων. Ο Αρχιμήδης, για παράδειγμα, είχε επινοήσει συγκεκριμένη μέθοδο, στηριγμένη στη μέθοδο της εξάντλησης, για τον υπολογισμό του εμβαδού μιας συγκεκριμένης κατηγορίας επιφανειών: των κυρτών επιφανειών [4].

Το πρόβλημα του γεωμετρικού ορισμού μιας οποιασδήποτε επιφάνειας όμως, ξεκαθαρίστηκε μόλις στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, με το περίφημο αντιπαράδειγμα του Ολλανδού μαθηματικού Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Ο Schwarz, με το παράδειγμά του αυτό, απέδειξε ότι το εμβαδόν μιας επιφάνειας δεν μπορεί να οριστεί με τρόπο όμοιο προς τον ορισμό του μήκους καμπύλης, δηλαδή ως όριο των εμβαδών κατάλληλων εγγεγραμμένων στη δοθείσα επιφάνεια πολυέδρων. Κάτι που, μέχρι τότε, θεωρείτο σωστό! Όλα αυτά τα αναλύουμε διεξοδικά στην Παράγραφο 4.3, αφού πρώτα έχουμε συζητήσει στην Παράγραφο 4.2 αρκετά τον ορισμό της επιφάνειας και τους λόγους που μας οδηγούν στην επιβολή ορισμένων συγκεκριμένων συνθηκών στους ορισμούς.

Στην Παράγραφο 4.4 δίνουμε έναν γεωμετρικό ορισμό για το εμβαδόν μιας επιφάνειας βάσει του οποίου αποδεικνύουμε τον γνωστό τύπο  $\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$  για το εμβαδόν ομαλής επιφάνειας. Στις δύο τελευταίες παραγράφους αποδεικνύουμε ορισμένες αξιοσημείωτες ιδιότητες του εμβαδού επιφάνειας και υπολογίζουμε το εμβαδόν κάποιων κλασικών επιφανειών.

#### 4.2 Η παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας

Ορίζουμε μία επιφάνεια ως απεικόνιση και όχι ως υποσύνολο σημείων του χώρου. Θεωρούμε το Ευκλείδειο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  με καρτεσιανές συντεταγμένες  $(u,v)$  και τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  με καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x,y,z)$ .

Έστω  $D$  ένα απλό συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  με σύνορο μια απλή κλειστή καμπύλη που ως επί το πλείστον, στις παραγράφους που ακολουθούν, θα είναι ή ένα παραλληλόγραμμο της μορφής  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq u \leq \beta, \gamma \leq v \leq \delta\}$  ή ένας κυκλικός δίσκος.

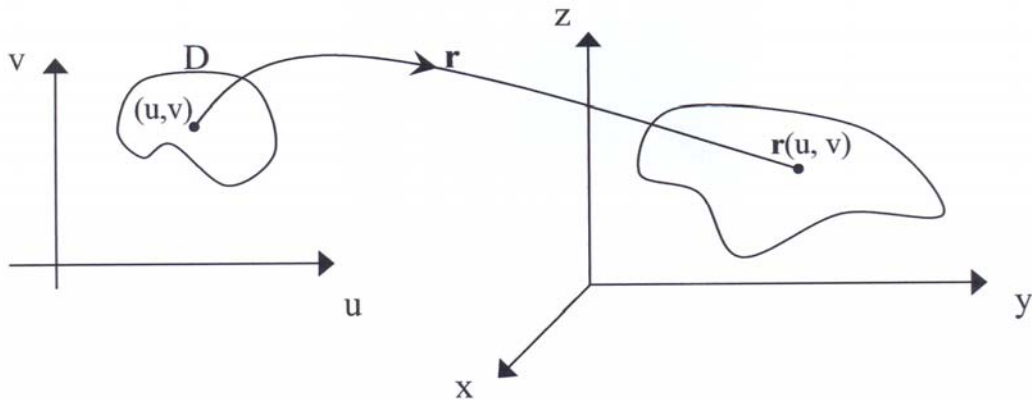
Ας θεωρήσουμε μία απεικόνιση, που ας τη συμβολίζουμε  $\mathbf{r}$ , από το  $D$  στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  (βλ. Σχήμα 1), δηλαδή

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D \quad (1)$$

όπου  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών.



(Σχήμα 1)

Φιλοδοξούμε το σύνολο όλων των σημείων  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  με  $(u, v) \in D$  του χώρου, δηλαδή η εικόνα (ή σύνολο τιμών)  $\mathbf{r}(D)$  της απεικόνισης  $\mathbf{r}$ , να περιγράφει επιφάνεια στο χώρο όπως τη θέλουμε εποπτικά, δηλαδή ως ένα ομαλό διδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο μέσα στο τριδιάστατο χώρο.

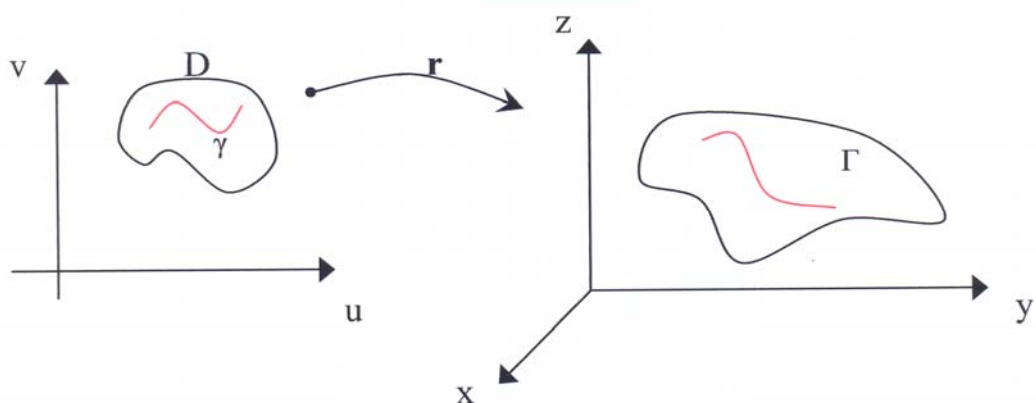
Αν, για παράδειγμα, οι συντεταγμένες συναρτήσεις  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  είναι ανεξάρτητες από το  $v$  ή είναι σταθεροί αριθμοί, τότε η εικόνα  $\mathbf{r}(D)$  θα είναι μια καμπύλη ή ένα σημείο.

Ένα άλλο παράδειγμα εκφυλισμού λαμβάνουμε αν  $x(u, v) = u+v$ ,  $y(u, v) = (u+v)^2$ ,  $z(u, v) = (u+v)^3$  με  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Αν θέσουμε  $t = u + v$  βλέπουμε ότι η εικόνα  $\mathbf{r}(D)$  ανάγεται στη καμπύλη του χώρου με παραμετρικές εξισώσεις  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ , με  $0 \leq t \leq 2$ .



Συνεπώς, η παράσταση (1) χωρίς επιπλέον περιορισμούς ενδέχεται να μην περιγράφει επιφάνεια στο χώρο όπως την θέλουμε εποπτικά.

Με σκοπό να βρούμε τι χρειάζεται επιπλέον για έναν ικανοποιητικό ορισμό της επιφάνειας, ας θεωρήσουμε μια ομαλή επίπεδη καμπύλη  $\gamma$  μέσα στο χωρίο  $D$  με  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , δηλαδή i)  $\gamma'(t) = (u'(t), v'(t))$  υπάρχει και είναι συνεχής, για κάθε  $t$  και ii)  $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ , για κάθε  $t$ .



(Σχήμα 2)

Η εικόνα  $\Gamma$  της  $\gamma$  μέσω της απεικόνισης  $\mathbf{r}$  (βλ. Σχήμα 2), δηλαδή η καμπύλη  $\Gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ , είναι μια νέα καμπύλη με παράμετρο πάλι  $t$ , πάνω στο σύνολο  $\mathbf{r}(D)$ . Είναι φυσικό να απαιτήσουμε να είναι και αυτή μια ομαλή καμπύλη, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(u(t), v(t)) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} v'(t),$$

όπου τα διανύσματα

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$$

είναι λογαριασμένα στο  $u = u(t)$  και  $v = v(t)$ , από τη μια να υπάρχει παντού και να μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο και από την άλλη να μην μηδενίζεται πουθενά.

Η μεν πρώτη συνθήκη πληρείται αν απαιτήσουμε οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  να υπάρχουν και να είναι συνεχείς (κάτι που σημαίνει ότι οι αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις  $x(u,v)$ ,  $y(u,v)$ ,  $z(u,v)$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης), ενώ η δεύτερη συνθήκη πληρείται εάν τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δεδομένου ότι εξ' υποθέσεως  $(u'(t), v'(t)) \neq (0,0)$ , για κάθε  $t$ .

Να σημειωθεί ότι για κάθε σημείο  $(u_0, v_0) \in D$  και για κάθε δυάδα αριθμών  $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$  υπάρχει ομαλή καμπύλη  $\gamma$  στο  $D$  που διέρχεται από το  $(u_0, v_0)$  με εφαπτομένη  $(\alpha, \beta)$ , για παράδειγμα το ευθύγραμμο τμήμα  $u(t) = \alpha t + u_0$ ,  $v(t) = \beta t + v_0$ . Επομένως, η υπόθεση ότι για κάθε ομαλή καμπύλη  $(u(t), v(t))$  στο  $D$  η εικόνα  $\mathbf{r}(u(t), v(t))$  είναι και πάλι ομαλή καμπύλη σημαίνει,

$$\alpha \mathbf{r}_u + \beta \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}, \quad \text{για κάθε } (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

δηλαδή  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  γραμμικώς ανεξάρτητα, για κάθε  $(u, v) \in D$  ή ισοδύναμα  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$  για κάθε  $(u, v) \in D$ .

Σε κάθε σημείο  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$  του συνόλου  $\mathbf{r}(D)$  το σύνολο όλων των ελεύθερων διανυσμάτων  $\alpha \mathbf{r}_u + \beta \mathbf{r}_v$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  συνιστά το *εφαπτόμενο επίπεδο* της επιφάνειας στο σημείο  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ .

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη της ανεξαρτησίας των  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  καθιστά αδύνατη την εμφάνιση εκφυλισμού του εφαπτόμενου επιπέδου σε ευθεία ή σημείο.

Συνεπώς, έχουμε οδηγηθεί στον παρακάτω ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** Μια ομαλή επιφάνεια του χώρου  $\mathbb{R}^3$  σε παραμετρική παράσταση είναι μια απεικόνιση της μορφής

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  που είναι 1-1 στο εσωτερικό του  $D$  και ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες

i)  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  υπάρχουν και είναι συνεχείς για κάθε  $(u, v) \in D$

ii)  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ , για κάθε  $(u, v) \in D$ .

Με τον όρο επιφάνεια θα αναφερόμαστε και στην απεικόνιση  $\mathbf{r}$  και στην εικόνα της  $\mathbf{r}(D)$  χωρίς κίνδυνο σύγχυσης. Τα σημεία μιας επιφάνειας στα οποία  $\mathbf{r}_u$  ή  $\mathbf{r}_v$  δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις ή  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$  λέγονται ανώμαλα σημεία της επιφάνειας και τέτοια σημεία υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν. Για το λόγο αυτό με τον όρο επιφάνεια θα εννοούμε πάντοτε ομαλή επιφάνεια σε παραμετρική μορφή.

Οι μεταβλητές  $u, v$  λέγονται *παράμετροι* ή *σύστημα παραμέτρων*.

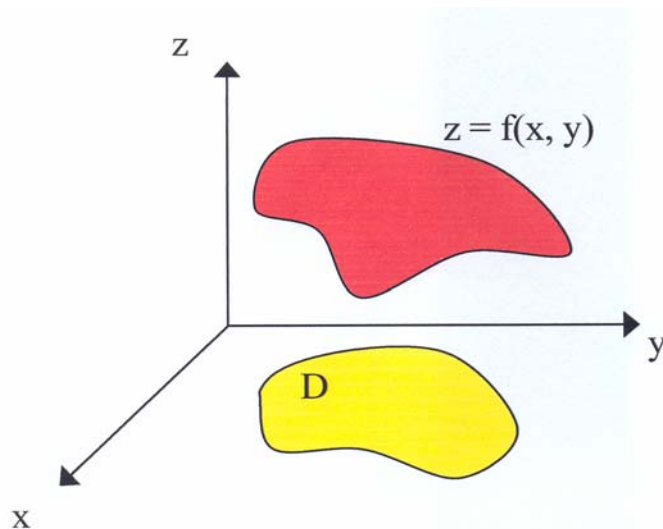
Όσον αφορά την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης  $\mathbf{r}(u, v)$  στον ορισμό απαιτήθηκε να είναι της τάξης  $C^1$ , κάτι που είναι αρκετό για τους σκοπούς της ενότητας αυτής. Θα μπορούσε να είχε υποτεθεί τάξης  $C^k$  για κάποιο (ή για κάθε)  $k = 1, 2, \dots$

Επίσης η συνθήκη 1-1 τέθηκε για αποφυγή αυτοτομών της επιφάνειας που αντιστοιχούν σε εσωτερικά σημεία του χωρίου  $D$ .

Παραδείγματα κλασικών επιφανειών σε παραμετρική παράσταση παρουσιάζονται στην παράγραφο 4.6 παρακάτω. Εδώ περιοριζόμαστε σε ένα μόνο παράδειγμα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.** *Επιφάνειες με παράσταση  $z = f(x, y)$ .* Αν  $f$  είναι μία συνάρτηση  $C^1$  δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα απλό συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $xy$ -επιπέδου τότε η γραφική της παράσταση  $\{x, y, f(x, y) : (x, y) \in D\}$  μπορεί να θεωρηθεί ως επιφάνεια με  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ,  $(x, y) \in D$  (βλ. Σχήμα 3). Εδώ η συνθήκη ανεξαρτησίας  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y \neq \mathbf{0}$  ισχύει πάντοτε αφού

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

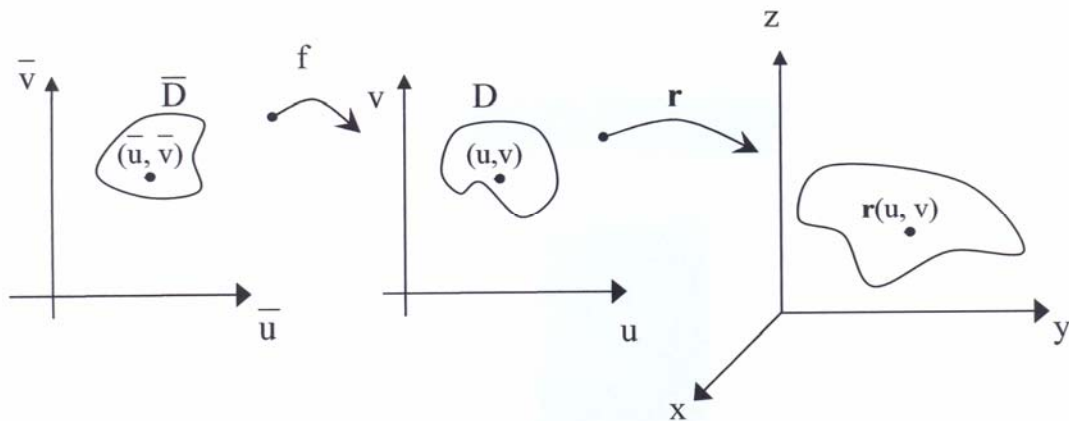


(Σχήμα 3)

Αμέσως παρακάτω θα δείξουμε και κάτι παραπάνω: Κάθε επιφάνεια μπορεί να παρασταθεί τοπικά σε μία τουλάχιστον από τις τρεις μορφές:  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$ ,  $z = z(x, y)$ .

Το γεγονός αυτό είναι άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας των  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  δηλαδή της συνθήκης ii) του ορισμού της επιφάνειας. Πριν όμως το αναλύσουμε αυτό ας αναφερθούμε λίγο στη δυνατότητα αναπαράμετρησης μιας επιφάνειας.

Η εισαγωγή νέων παραμέτρων  $(\bar{u}, \bar{v})$  μέσω μιας 1-1 και επί απεικόνισης  $f : \bar{D} \rightarrow D$ ,  $u = \varphi_1(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $v = \varphi_2(\bar{u}, \bar{v})$ , όπου  $\bar{D}$  είναι ένα απλά συνεκτικό χωρίο του  $\bar{u}\bar{v}$ -επιπέδου (βλ. Σχήμα 4), είναι επιτρεπτή αν η απεικόνιση  $\mathbf{r}$  ο  $f$  πληρεί τις συνθήκες i) και ii).



(Σχήμα 4)

Όσο αφορά τη συνθήκη i) αρκεί να απαιτήσουμε οι συναρτήσεις  $\varphi_1, \varphi_2$  να έχουν συνεχή μερική παράγωγο σε κάθε σημείο του  $\bar{D}$ . Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} &= \left( \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \times \left( \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v. \quad (*)$$

Δηλαδή, η συνθήκη ii) για την παραμετρηση  $(\bar{u}, \bar{v})$  πληρείται εάν

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τέτοιες αλλαγές παραμέτρων ονομάζονται *επιτρεπτές* και οι επιφάνειες  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r} \circ f$  θεωρούνται ταυτόσημες.

Σημειώνουμε ότι από τη σχέση (\*) προκύπτει ότι εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας δεν εξαρτάται από τη παραμετρική παράσταση που χρησιμοποιούμε για να το ορίσουμε.

Εκείνο όμως που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι μία αλλαγή παραμέτρων μπορεί να αλλάξει τον προσανατολισμό της επιφάνειας. Για παράδειγμα αν  $u = \bar{v}$  και  $v = \bar{u}$ , δηλαδή αν αλλάξουμε τη διάταξη των παραμέτρων τότε:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

και άρα  $\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} = -\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ .

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια σημαντική επίπτωση της γραμμικής ανεξαρτησίας των  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ .

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v) \\ &= \left( \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) \neq (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι  $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$  στο σημείο  $(u_0, v_0)$ . Τότε, λόγω συνέχειας, η ορίζουσα θα είναι διάφορη του μηδενός σε μία ανοιχτή περιοχή του  $(u_0, v_0)$ . Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$$

είναι αντιστρέψιμη σε μία περιοχή του  $(u_0, v_0)$ , δηλαδή μπορούμε να εκφράσουμε μονοσήμαντα τα  $u, v$  ως προς  $x, y$ :

$$u = u(x, y) \text{ και } v = v(x, y).$$

Εισάγοντας το νέο σύστημα συντεταγμένων  $(x, y)$  η παραμετρική παράσταση της επιφάνειας είναι τώρα

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

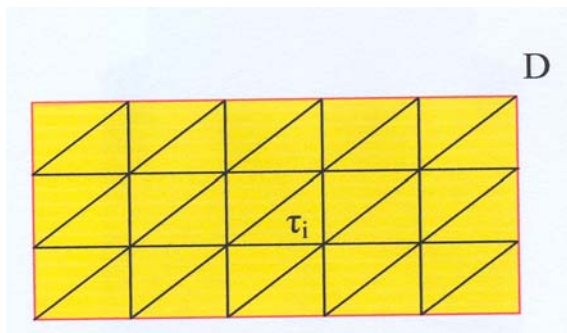
όπου  $z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$  και ισχύει στα σημεία  $(x, y)$  του επιπέδου  $z=0$  που κείνται σε μία κατάλληλη περιοχή του σημείου  $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ .

Έτσι, τοπικά, η επιφάνεια παρίσταται ως γραφική παράσταση συνάρτησης δύο μεταβλητών (ή  $x, y$  ή  $x, z$  ή  $y, z$ ).

### 4.3 Μια πρώτη απόπειρα ορισμού του εμβαδού επιφανείας – το αντιπαράδειγμα του H.A. Schwarz

Ο ορισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι μπορεί να διατυπωθεί με όμοιο τρόπο προς τον ορισμό του μήκους μιας καμπύλης, δηλαδή ως όριο των εμβαδών κατάλληλων

εγγεγραμμένων στη δοθείσα επιφάνεια πολυέδρων. Αυτά τα εγγεγραμμένα πολύεδρα στην παραμετρική επιφάνεια  $r:D \rightarrow \mathbb{R}^3$  θα μπορούσαν να ληφθούν ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι το  $D$  είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έστω  $\Delta = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\kappa\}$  μια διαμέριση του παραλληλογράμμου  $D$  σε μικρά τρίγωνα  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \kappa$  όπως στο Σχήμα 5.



(Σχήμα 5)

Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, \kappa$  έστω  $T_i$  το τρίγωνο στο  $\mathbb{R}^3$  του οποίου οι κορυφές είναι οι εικόνες, μέσω της  $r$ , των τριών κορυφών του  $\tau_i$ . Τότε, τα εγγεγραμμένα πολύεδρα που θα προσεγγίζουν την επιφάνεια είναι τα

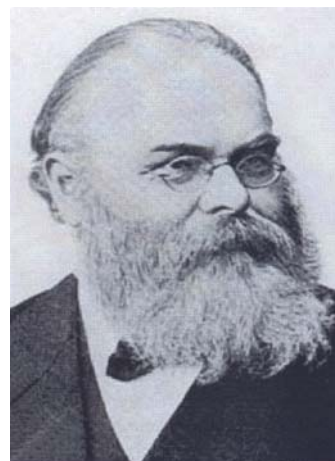
$$P = \bigcup_{i=1}^{\kappa} T_i, \text{ με εμβαδόν } E(P) = \sum_{i=1}^{\kappa} E(T_i).$$

Θα μπορούσε τότε να οριστεί το εμβαδόν  $E$  της επιφάνειας ως το όριο

$$E = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} E(P),$$

υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι το όριο υπάρχει με την έννοια ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν μια διαμέριση  $\Delta$  του  $D$  έχει πλάτος  $|\Delta| < \delta$ , τότε  $|E - E(P)| < \varepsilon$ .

Όμως το όριο  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} E(P)$  υπάρχει πιθανότητα να ΜΗΝ υπάρχει! Ο πρώτος που έδωσε κατάλληλο αντιπαράδειγμα ήταν ο Ολλανδός Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα το οποίο και θα παρουσιάσουμε παρακάτω.



Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Ο λόγος που το όριο  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} E(P)$  δεν υπάρχει είναι ότι τα τρίγωνα  $T_i$  δεν προσεγγίζουν την επιφάνεια με τον ίδιο τρόπο που τα εγγεγραμμένα ευθύγραμμα τμήματα ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου προσεγγίζουν μια λεία καμπύλη. Για μια διαμέριση με κατάλληλα μικρό πλάτος, τα εγγεγραμμένα ευθύγραμμα τμήματα στην καμπύλη έχουν **κλίσεις** προσεγγιστικά ίσες προς τα αντίστοιχα τμήματα της καμπύλης. Ενώ στη περίπτωση μιας επιφάνειας, η διαμέριση  $\Delta$  μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε και κατάλληλα μικρό πλάτος να έχει και κάθε τρίγωνο  $T_i$  να είναι σχεδόν κάθετο (και όχι εφαπτόμενο) στην επιφάνεια.

Συνεπώς, μπορεί να προκύψουν εγγεγραμμένα πολύεδρα  $P$  με  $|\Delta|$  αυθαίρετα μικρό και εμβαδόν  $E(P)$  αυθαίρετα μεγάλο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (του Hermann Amandus Schwarz (1843-1921))

Ας θεωρήσουμε τον κύλινδρο

$$S: x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

και ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για το εμβαδόν του τμήματος  $H$  του  $S$  που ορίζεται από  $0 \leq z \leq 1$ .

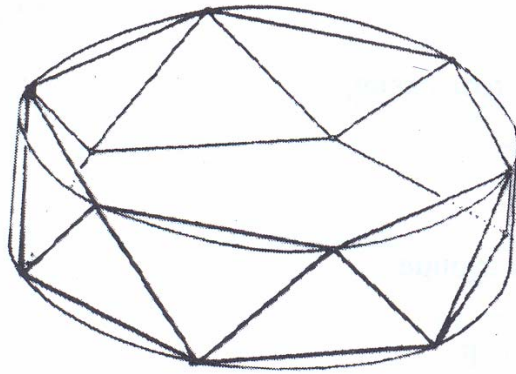
Κατασκευάζουμε ένα τμήμα  $\Pi$  ενός πολυέδρου που αποτελείται από ισοδύναμα τρίγωνα ως εξής:

Στο τμήμα επιφάνειας  $H$  θεωρούμε ισαπέχοντες, παράλληλους προς το  $Oxy$  επίπεδο κύκλους, οι οποίοι ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$z = 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k} \quad (2)$$

Προφανώς, οι κύκλοι που ορίζονται από τις εξισώσεις  $z = 0$  και  $z = 1$  αποτελούν το σύνορο του  $H$ . Διαιρούμε καθένα απ' αυτούς τους κύκλους σε ισοδύναμα τόξα, έτσι ώστε τα πέρατα των τόξων στον ένα κύκλο, να είναι πάνω από τα μέσα των τόξων του άλλου κύκλου (βλ. Σχήμα 6). Ενώνοντας τα πέρατα των τόξων σε κάθε κύκλο, παίρνουμε ένα κανονικό  $n$ -γωνο. Ας ενώσουμε τώρα, κάθε πλευρά  $a$  αυτών των πολυγώνων με εκείνες τις δύο κορυφές των πλησιέστερων πολυγώνων, οι οποίες απέχουν απόσταση ελάχιστη από την  $a$ .





(Σχήμα 6)

Μ' αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε το τμήμα  $\Pi$  ενός πολυέδρου που αποτελείται από  $2kn$  ισοσκελή ισοδύναμα τρίγωνα. Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων, για τις πλευρές των κανονικών πολυγώνων, έχουμε

$$\alpha^2 = 1 + 1 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n} = 2(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n}) = 4\eta\mu^2\frac{\pi}{n}$$

Άρα,  $\alpha = 2\eta\mu\frac{\pi}{n}$  και, από το θεώρημα του Πυθαγόρα, το ύψος κάθε τριγώνου θα είναι

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{k^2} + (1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{k^2} + 4\eta\mu^4\frac{\pi}{2n}}. \quad (3)$$

Επομένως, το εμβαδόν του  $\Pi$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(k, n) = 2n\eta\mu\frac{\pi}{n}\sqrt{1 + 4k^2\eta\mu^4\frac{\pi}{2n}}. \quad (4)$$

Το όριο αυτής της έκφρασης εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο τα  $k$  και  $n$  τείνουν στο άπειρο και επομένως δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το  $n$  θεωρηθεί σταθερό, τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(k, n) = \infty. \quad (5)$$

Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι απλός. Η γωνία μεταξύ κάθε τριγώνου και του εφαπτόμενου επιπέδου στον κύλινδρο αν τείνει στο  $\frac{\pi}{2}$ ,

το εμβαδόν κάθε τριγώνου τείνει σε κάποια πεπερασμένη τιμή μη μηδενική και ο αριθμός των τριγώνων τείνει στο άπειρο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα  $k$  και  $n$  αυξάνονται αυθαίρετα έτσι ώστε  $k = n^m$ . Τότε, αν  $m = 1$  η έκφραση  $E(k, n)$  τείνει στο  $2\pi$ . Αν  $m = 2$ ,

η έκφραση  $E(k, n)$  τείνει στο  $2\pi\sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}}$ . Αν  $m = 3$ , τότε η έκφραση αυτή τείνει στο άπειρο, αφού τότε η έκφραση  $E(k, n)$  γράφεται ως εξής:

$$E(n^m, n) = 2n\eta\mu \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + 4n^{2m}\eta\mu^4 \frac{\pi}{2n}}. \quad (6)$$

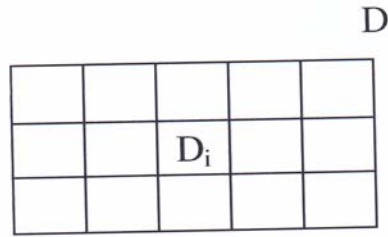
Επομένως, όταν μία ακολουθία πολυέδρων συγκλίνει σ' ένα τμήμα  $H$  μιας επιφάνειας  $S$ , τα εμβαδά αυτών των πολυέδρων μπορεί να μη συγκλίνουν στο εμβαδόν του  $H$ .

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι αντίστοιχο πρόβλημα στον ορισμό του μήκους τόξου καμπύλης δεν υφίσταται, αφού σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, η διεύθυνση μιας χορδής  $AB$  εγγεγραμμένης στην καμπύλη  $\gamma$  τείνει στην κατεύθυνση της εφαπτομένης της  $\gamma$  στο σημείο  $A$ , καθώς το σημείο  $B$  τείνει προς το σημείο  $A$ .

#### 4.4 Ο γεωμετρικός ορισμός του εμβαδού επιφάνειας και ο χαρακτηρισμός του μέσω του $\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$

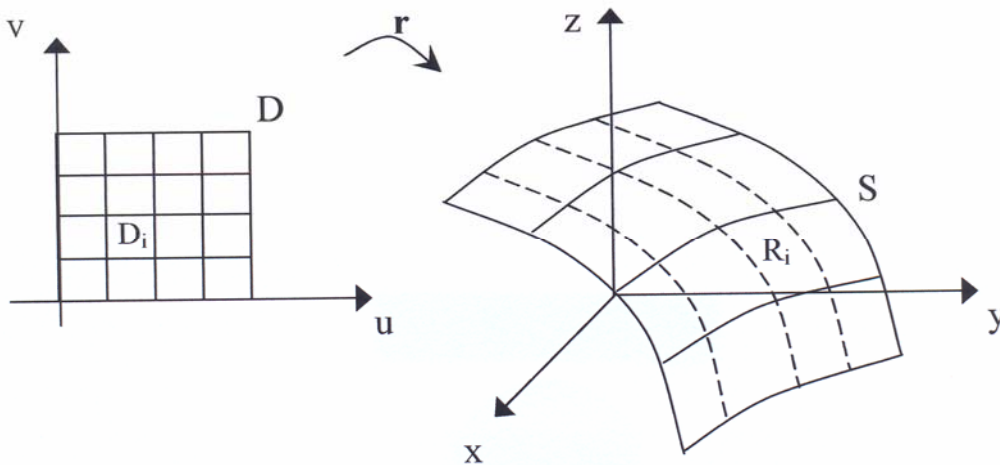
Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο ορισμός του εμβαδού επιφάνειας αποτυγχάνει μέσω προσεγγίσεων με εγγεγραμμένα πολύεδρα. Εδώ θα δείξουμε ότι ο ορισμός του εμβαδού επιφάνειας πετυχαίνεται μέσω προσεγγίσεων με περιγεγραμμένα πολύεδρα τα οποία α) αντί για τριγωνικές έδρες θα έχουν έδρες σε σχήμα παραλληλογράμμου και β) ως επιφάνειες δεν είναι αναγκαστικά συνεχείς.

Συγκεκριμένα, έστω  $S$  μια επιφάνεια με παραμετρική παράσταση  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $D$  ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα στο  $uv$ -επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Ας είναι  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_\kappa\}$  μία διαμέριση του παραλληλογράμμου σε μικρά παραλληλόγραμμα  $D_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \kappa$  όπως στο Σχήμα 7.

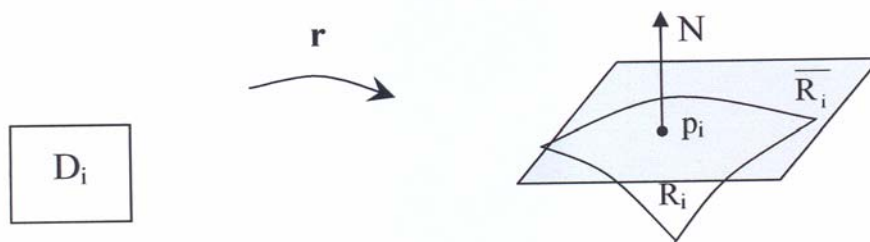


(Σχήμα 7)

Έστω  $R_i$  η εικόνα κάθε  $D_i$  μέσω της  $\mathbf{r}$ , οπότε  $\{R_1, R_2, \dots, R_\kappa\}$  είναι μια διαμέριση της επιφάνειας, δηλαδή  $S = \bigcup_{i=1}^{\kappa} R_i$  (βλ. Σχήμα 8). Σε κάθε  $R_i$  επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $p_i \in R_i$  και προβάλλουμε το  $R_i$  πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο της  $S$  στο σημείο  $p_i$ , στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος  $\mathbf{N}$  της  $S$  στο σημείο  $p_i$ . Το αποτέλεσμα της προβολής είναι ένα επίπεδο χωρίο το οποίο το συμβολίζουμε με  $\bar{R}_i$  εμβαδού  $E(\bar{R}_i)$  (βλ. Σχήμα 9).



(Σχήμα 8)



(Σχήμα 9)

Το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i)$  είναι μια προσέγγιση αυτού που εποπτικά καταλαβαίνουμε ως εμβαδόν της επιφάνειας  $S$ . Διατυπώνουμε λοιπόν τον εξής (γεωμετρικό) ορισμό για το εμβαδόν μιας επιφάνειας  $S$ :

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν το όριο  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i)$  υπάρχει (ανεξάρτητα από κάθε επιλογή), τότε λέμε ότι η επιφάνεια  $S$  έχει εμβαδόν, συμβολιζόμενο  $E(S)$ , και είναι ίσο με το παραπάνω όριο, δηλαδή

$$E(S) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i),$$

πιο συγκεκριμένα,

για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$ , ώστε αν μια διαμέριση  $\Delta$  του  $D$  έχει πλάτος  $|\Delta| < \delta$  τότε, ανεξάρτητα από την επιλογή των σημείων  $p_i$ ,

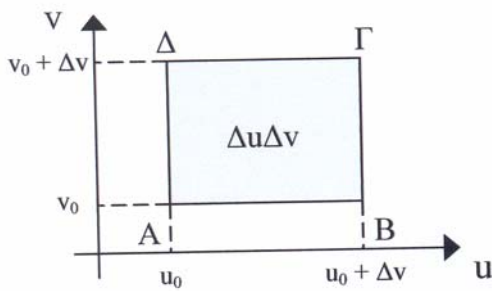
$$\left| E - \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i) \right| < \varepsilon.$$

ΣΧΟΛΙΟ: Το πλάτος  $|\Delta|$  μιας διαμέρισης  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_{\kappa}\}$  είναι η μέγιστη διαγώνιος των ορθογωνίων  $D_1, D_2, \dots, D_{\kappa}$ .

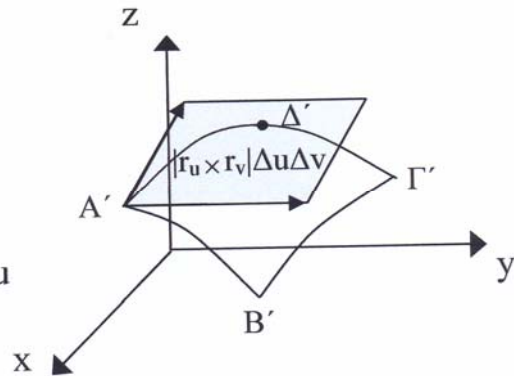
Υπάρχει όμως πάντοτε το όριο  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i)$ ; Το επόμενο θεώρημα δίνει καταφατική απάντηση στο ερώτημα στην περίπτωση των ομαλών επιφανειών και μάλιστα χαρακτηρίζει το εμβαδόν της επιφάνειας μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα,

$$E(S) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv.$$

Πριν προχωρήσουμε όμως θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι κατά κάποιο τρόπο η εμπλοκή του ολοκληρώματος  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$  στον υπολογισμό του εμβαδού επιφάνειας ήταν αναμενόμενη. Πράγματι, έστω  $(u_0, v_0)$  ένα σημείο του χωρίου  $D$ . Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με κορυφές  $A = (u_0, v_0)$ ,  $B = (u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $\Gamma = (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ ,  $\Delta = (u_0, v_0 + \Delta v)$  που έχει εμβαδόν ίσο με  $\Delta u \cdot \Delta v$  (βλ. Σχήμα 10).



(Σχήμα 10)



(Σχήμα 11)

Θεωρούμε τις εικόνες  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Delta'$ , των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  πάνω στην επιφάνεια οι οποίες μορφώνουν το καμπυλόγραμμο σχήμα  $A'B'\Gamma'\Delta'$  (βλ. Σχήμα 11). Όμως,

$$A'B' = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

$$A'D' = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

Οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής και την συνέχεια των  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  έχουμε προσεγγιστικά,

$$A'B' \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u, \quad A'D' \approx \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v$$

Τα δεξιά μέλη, ας σημειωθεί, είναι διανύσματα στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο  $A'$ .

Αν θεωρήσουμε το καμπυλόγραμμο σχήμα  $A'B'\Gamma'\Delta'$  ως παραλληλόγραμμο τότε το εμβαδόν του είναι

$$|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Συνεπώς το εμβαδόν της επιφάνειας αναμένεται να προκύπτει από το άθροισμα όλων αυτών των μικρών εμβαδών, δηλαδή μέσω του ολοκληρώματος  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ .

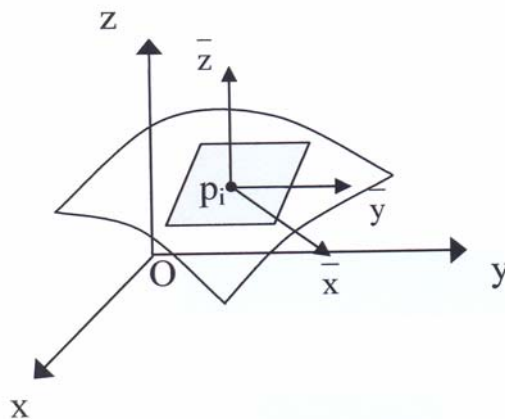
**ΘΕΩΡΗΜΑ.** Έστω  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  η παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας  $S$ . Τότε,

$$E(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υιοθετούμε την ορολογία που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω στον γεωμετρικό ορισμό του εμβαδού της επιφάνειας. Λόγω συμπάγειας, τόσο του ορθογωνίου  $D$  όσο και της επιφάνειας  $S=\mathbf{r}(D)$ , υπάρχει αριθμός, ο λεγόμενος αριθμός Lebesgue, που αν το πλάτος μιας διαμέρισης  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_\kappa\}$  είναι μικρότερο από αυτόν, τότε κάθε δύο κάθετα στο  $R_i = \mathbf{r}(D_i)$  διανύσματα ( $i = 1, 2, \dots, \kappa$ ) να μην είναι κάθετα μεταξύ τους.

Σταθεροποιούμε μια περιοχή  $R_i$  και επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $p_i \in R_i$ . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να υπολογίσουμε το εμβαδόν της προβολής  $\bar{R}_i$  του  $R_i$  στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο  $p_i$ .

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων  $p_i \bar{x} \bar{y} \bar{z}$  στο  $\mathbb{R}^3$  το οποίο λαμβάνεται από το  $Oxyz$  κατόπιν μετατόπισης κατά  $Op_i$  και κατάλληλης στροφής, ώστε ο  $z$ -άξονας να έρθει στην κάθετη ευθεία της επιφάνειας στο σημείο  $p_i$  και τα δύο συστήματα να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.



Στο νέο αυτό σύστημα αξόνων η παραμετρική παράσταση της επιφάνειας γράφεται

$$\bar{\mathbf{r}}(u, v) = (\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v)),$$

όπου το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{r}}(u, v)$  λαμβάνεται από το  $\mathbf{r}(u, v)$  μέσω μιας μετατόπισης και ενός ορθογώνιου γραμμικού μετασχηματισμού.

Παρατηρούμε ότι  $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \neq 0$ , στο  $D_i$ . Αλλιώς η  $\bar{z}$ -συνιστώσα ενός κάθετου διανύσματος στο  $R_i$  θα ήταν μηδέν και άρα θα υπήρχαν δύο κάθετα στο  $R_i$  διανύσματα που θα ήταν μεταξύ τους κάθετα.

Το εμβαδόν  $E(\bar{R}_i)$  δίδεται από τον τύπο

$$E(\bar{R}_i) = \iint_{\bar{R}_i} d\bar{x}d\bar{y}.$$

Δεδομένου ότι  $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \neq 0$ , μπορούμε να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητών  $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ ,  $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$ , με  $(u, v) \in D_i$ , οπότε

$$E(\bar{R}_i) = \iint_{D_i} \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Να σημειωθεί ότι, στο  $p_i$ , τα διανύσματα  $\bar{x}_u$  και  $\bar{x}_v$  ανήκουν στο  $\bar{x} \bar{y}$ -επίπεδο, συνεπώς  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0$ , στο  $p_i$ . Άρα

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right|, \text{ στο } p_i$$

και επομένως υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f_i(u, v)$ , με  $(u, v) \in D_i$  με  $f_i(\mathbf{r}^{-1}(p_i)) = 0$  και

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| = f_i(u, v)$$

ή ισοδύναμα,

$$\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - f_i(u, v),$$

αφού οι ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$  αφήνουν τα μήκη αναλλοίωτα.

Έστω  $M_i$ ,  $m_i$  η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης  $f_i$  στο συμπαγές σύνολο  $D_i$ . Τότε

$$m_i \leq \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial v} \right| \leq M_i.$$

Ολοκληρώνοντας όλα τα μέλη της παραπάνω σχέσης πάνω από το  $D_i$  και αθροίζοντας από  $i = 1$  έως  $\kappa$  έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\kappa} m_i E(D_i) \leq \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i) - \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \leq \sum_{i=1}^{\kappa} M_i E(D_i).$$

Αφήνοντας το πλάτος της διαμέρισης  $\Delta$  να τείνει στο 0, έχουμε ότι η διαφορά  $M_i - m_i$  τείνει στο μηδέν και συνεπώς,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\kappa} E(\bar{R}_i) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad \square$$



## 4.5 Αξιοσημείωτες ιδιότητες του εμβαδού επιφανείας

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε της ιδιότητες του εμβαδού επιφανείας ως απόρροια του τύπου

$$\text{Εμβαδόν επιφανείας} = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv.$$

1. Κάθε ισομετρία του χώρου  $\mathbb{R}^3$  αφήνει το εμβαδό της επιφανείας αναλλοίωτο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού οι ισομετρίες αφήνουν τα μήκη αναλλοίωτα, η ολοκληρωτέα συνάρτηση παραμένει ως έχει. Ο Ιακωβιανός πίνακας μιας μετατόπισης είναι ο ταυτοτικός, ενώ μιας στροφής είναι ένας ορθογώνιος πίνακας  $A$  (με  $AA^t = I$ ). Και των δύο αυτών πινάκων η απόλυτη τιμή της ορίζουσας τους είναι  $+1$ , απ' όπου έπεται το ζητούμενο.  $\square$

2. Κάθε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων της επιφάνειας αφήνει το εμβαδόν της αναλλοίωτο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν από το σύστημα παραμέτρων  $(u, v)$  περάσουμε στο νέο σύστημα παραμέτρων  $(\bar{u}, \bar{v})$  τότε  $\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ . Οποτε

$$\iint_{\bar{D}} |\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}}| \, d\bar{u} \, d\bar{v} = \iint_{\bar{D}} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \, d\bar{u} \, d\bar{v} = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι ο τύπος αλλαγής μεταβλητών για τα διπλά ολοκληρώματα.  $\square$

3. Αν μια επιφάνεια  $S$  συντίθεται από δύο επιμέρους επιφάνειες  $S_1, S_2$ , δηλαδή  $S = S_1 \cup S_2$ , οι οποίες δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία τότε

$$E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια της ιδιότητας του ολοκληρώματος  $\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$  εάν τα  $D_1, D_2$  δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.  $\square$

4. Το εμβαδόν μιας επιφάνειας σε σχήμα τετραγώνου πλευράς 1 είναι ίσο με 1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μια παραμετρική παράσταση μιας τέτοιας επιφάνειας είναι η  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{\beta} + v\mathbf{\gamma}$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$  όπου  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{\beta}$ ,  $\mathbf{\gamma}$  σταθερά διανύσματα με  $|\mathbf{\beta}| = |\mathbf{\gamma}| = 1$  και  $\mathbf{\beta} \perp \mathbf{\gamma}$ .

Άρα,  $|\mathbf{\beta} \times \mathbf{\gamma}| = |\mathbf{\beta}||\mathbf{\gamma}|\sin 90^\circ = 1$  και συνεπώς,

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \iint_{[0,1] \times [0,1]} |\mathbf{\beta} \times \mathbf{\gamma}| \, du \, dv = \iint_{[0,1] \times [0,1]} 1 \, du \, dv = 1. \quad \square$$

5. (Γενίκευση της προηγούμενης ιδιότητας)

Αν μια επιφάνεια είναι επίπεδη, δηλαδή είναι υποσύνολο κάποιου επιπέδου τότε το ολοκλήρωμα  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$  ταυτίζεται με το εμβαδό

όπως έχει οριστεί στο Ευκλείδειο επίπεδο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω της Ιδιότητας 1, μπορούμε να εφαρμόσουμε κατάλληλα ισομετρία ώστε το επίπεδο στο οποίο ανήκει η (επίπεδη) επιφάνεια να ταυτιστεί με το  $xy$ -επίπεδο, χωρίς να αλλάξει το εμβαδόν με την έννοια του  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$ . Στο  $xy$ -επίπεδο το κάθετο

διάνυσμα είναι το  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , οπότε

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \iint_D 1 \, du \, dv = \text{εμβαδόν του } D \text{ ως σχήματος του } \mathbb{R}^2.$$

□

6. Αν η επιφάνεια δίδεται υπό τη μορφή  $z = f(x, y)$  με  $(x, y) \in D$  τότε,

$$E(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ποσότητα  $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$  είναι ακριβώς το  $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|$ , για  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , με  $(x, y) \in D$ . □

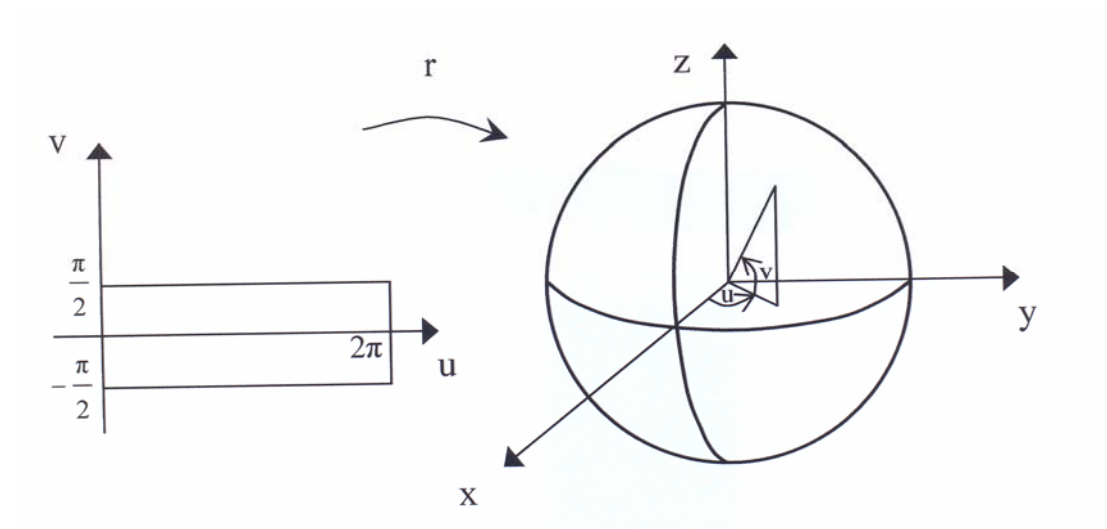
Παρατηρούμε ότι το εμβαδό επιφάνειας ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του εμβαδού (ιδιότητες 1, 3, 4). Ισχύει και κάτι παραπάνω: Το εμβαδόν μιας επιφάνειας  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  είναι το μοναδικό συναρτησοειδές της μορφής  $\iint_D \Phi \, du \, dv$ , με  $\Phi = \Phi(u, v, \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ , που ικανοποιεί της Ιδιότητες 1, 3, 4.

## 4.6 Εμβαδά κλασικών επιφανειών

1. Εμβαδόν επιφανείας σφαίρας κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\alpha$

Παραμετρική παράσταση:

$$\mathbf{r}(u, v) = (\alpha \cos u \cos v, \alpha \sin u \cos v, \alpha \sin v)$$



Άρα,

$$\mathbf{r}_u = (-\alpha \sin u \cos v, \alpha \cos u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{r}_v = (-\alpha \cos u \sin v, -\alpha \sin u \sin v, \alpha \cos v)$$

και

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\alpha^2 \cos u \cos^2 v, \alpha^2 \sin u \cos^2 v, \alpha^2 \sin u \cos v).$$

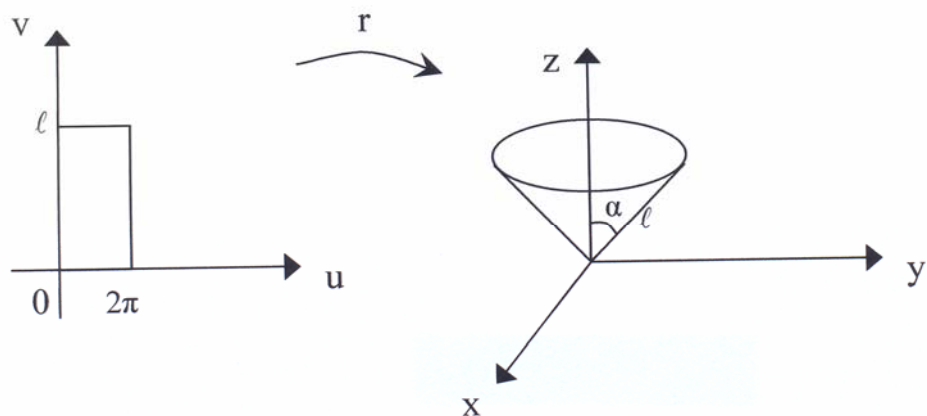
Επομένως, το εμβαδόν της σφαίρας είναι ίσο με

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \cos v \, dv \, du = 2\pi\alpha^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv = 4\pi\alpha^2.$$

2. Εμβαδόν πλευρικής επιφανείας ορθού κυκλικού κώνου με ημίανοιγμα στην κορυφή του τη γωνία  $\alpha$ .

Παραμετρική παράσταση:

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \sin \alpha \cos u, v \sin \alpha \sin u, v \cos \alpha)$$



Άρα,

$$\mathbf{r}_u = (-v \sin \alpha \sin u, v \sin \alpha \cos u, 0)$$

$$\mathbf{r}_v = (\sin \alpha \cos u, \sin \alpha \sin u, \cos \alpha)$$

και

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (v \sin \alpha \cos \alpha \cos u, v \sin \alpha \cos \alpha \sin u, -v \sin^2 \alpha).$$

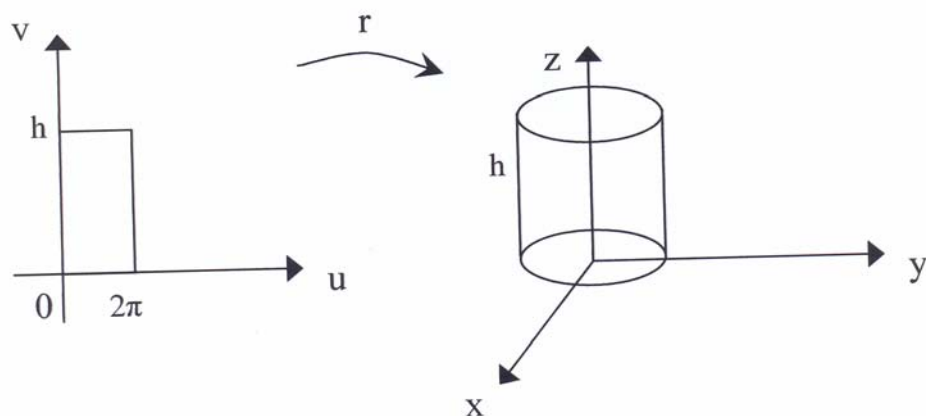
Επομένως, το εμβαδόν της πλευρικής επιφανείας του κώνου είναι ίσο με

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\ell v \sin \alpha \, dv \, du = 2\pi \sin \alpha \frac{\ell^2}{2} = \pi \frac{r}{\ell} \ell^2 = \pi r \ell.$$

3. Εμβαδόν πλευρικής επιφανείας ορθού κυλίνδρου ύψους  $h$  και ακτίνα βάσης  $r$ .

Παραμετρική παράσταση:

$$\mathbf{r}(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$$



Άρα,

$$\mathbf{r}_u = (-r \sin u, r \cos u, 0)$$

$$\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$$

και

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (r \cos u, r \sin u, 0).$$

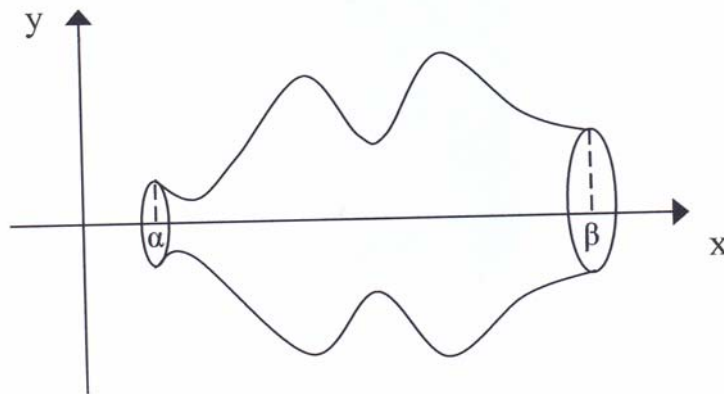
Επομένως, το εμβαδόν της πλευρικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^h r \, dv \, du = 2\pi r h.$$

4. Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας του στερεού εκ περιστροφής του γραφήματος μιας συνάρτησης  $y=f(x)$  γύρω από τον άξονα  $x$ .

Παραμετρική παράσταση:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$$



Άρα,

$$\mathbf{r}_u = (1, f'(u) \cos v, f'(u) \sin v)$$

$$\mathbf{r}_v = (0, -f(u) \sin v, f(u) \cos v)$$

και

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (f'(u)f(u), -f(u) \cos v, -f(u) \sin v).$$

Επομένως, το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας του στερεού εκ περιστροφής του γραφήματος μιας συνάρτησης  $y=f(x)$  γύρω από τον άξονα  $x$  είναι ίσο με

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \, du \, dv = 2\pi \int_\alpha^\beta |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \, du.$$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Tom M. Apostol, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Τόμος Ι, ΙΙ, Μ. Πεχλιβανίδης, Αθήνα, 1962

- [2] Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, New Jersey 1976
- [3] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, vol. II, Wiley Classics Library, 1988 (πρώτη έκδοση: 1936)
- [4] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer – Verlag, 1991
- [5] T. Rado, *What is the Area of a Surface?*, The American Mathematical Monthly, vol.50, No. 3 (1943) 139-141
- [6] T. Rado, *Length and Area*, Colloquium Publications, vol. 30, American Mathematical Society, New York, 1948
- [7] J. Serrin, *On the Area of a Curved Surfaces*, The American Mathematical Monthly, vol.68, No. 5 (1961) 435-440
- [8] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

## ΟΓΚΟΣ

### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε την έννοια του όγκου κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό του εμβαδού στο κεφάλαιο 2. Αρχικά ορίζουμε τον όγκο για φραγμένες πολυεδρικές περιοχές  $\mathbb{R}^3$ , μέσω τριών αξιωμάτων: του αναλλοίωτου, της προσθετικότητας και της κανονικότητας. Τα τρία αυτά αξιώματα είναι τρεις απλές γεωμετρικές παραδοχές που υπαγορεύονται από την αντίληψη που έχουμε για την έννοια του όγκου.

Ο πρώτος μας στόχος, που υλοποιείται στην Παράγραφο 5.2, είναι να αποδείξουμε, βασιζόμενοι μονάχα στα τρία παραπάνω αξιώματα, ότι ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι ίσος με το γινόμενο των διαστάσεων του. Ο αναγνώστης θα αντιληφθεί ότι η απόδειξη αυτού του απλού αποτελέσματος κάνει ουσιαστική χρήση του αξιώματος της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Επίσης, ο τύπος αυτός, εάν αναγνωστεί με λίγο περισσότερη προσοχή, είναι μια πρόφητη έκδοση της αρχής του Cavalieri

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt,$$

όπου με  $V$  συμβολίζεται ο όγκος, με  $E$  το εμβαδόν και  $\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}$ .

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού, αφιερώνεται στην απόδειξη της παραπάνω αρχής από τα τρία αξιώματα του όγκου. Αρχικά την αποδεικνύουμε για ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με έδρες παράλληλες στα συντεταγμενικά επίπεδα, μετά για στερεά που είναι ενώσεις τέτοιων ορθογωνίων, στη συνέχεια για κάθε φραγμένη πολυεδρική περιοχή και τέλος για κάθε στερεό για το οποίο ορίζεται η έννοια του όγκου.

Τέλος, στην Παράγραφο 5.6, συναγάγουμε τους γνωστούς τύπους του όγκου πυραμίδας, κώνου, κυλίνδρου και σφαίρας, ως εφαρμογή της αρχής του Cavalieri η οποία συγκεφαλαιώνει με έναν εξαιρετικά συνοπτικό και εύκολο τρόπο τόσο τη μέθοδο της εξάντλησης όσο και τις γνωστές τεχνικές του διπλού και τριπλού ολοκληρώματος σε σχέση με τον όγκο.

Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να ενημερωθεί για την ιστορική εξέλιξη του υπολογισμού του όγκου των στερεών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, ας ανατρέξει στο πολύ ενδιαφέρον βιβλίο του C. H. Edwards, Jr. [3].

Ας ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς.

Ανοικτός ημί-χώρος είναι κάθε σύνολο της μορφής

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta > 0\}, \text{ με } \alpha\beta\gamma \neq 0$$

ενώ,

κλειστός ημί-χώρος είναι κάθε σύνολο της μορφής

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \geq 0\}, \text{ με } \alpha\beta\gamma \neq 0.$$

Ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  ονομάζεται *πολυεδρική περιοχή* εάν μπορεί να θεωρηθεί ως τομή ή ένωση πεπερασμένου πλήθους ημι-χώρων, κλειστών ή ανοικτών.

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^3$  λέγεται *φραγμένο* αν είναι υποσύνολο κάποιας σφαίρας.

## 5.2 Τα τρία αξιώματα του όγκου για φραγμένες πολυεδρικές περιοχές

Ο όγκος  $V$  είναι μία απεικόνιση από το σύνολο των φραγμένων πολυεδρικών περιοχών του  $\mathbb{R}^3$  στο σύνολο των μη αρνητικών αριθμών, δηλαδή μια απεικόνιση της μορφής:

$$V: (\text{σύνολο φραγμένων πολυεδρικών περιοχών του } \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty),$$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

Αξίωμα 1 (του Αναλλοίωτου)

Αν το  $A$  είναι πολυεδρική περιοχή και  $\varphi$  ισομετρία του χώρου που απεικονίζει το  $A$  στο  $\varphi(A)$ , τότε

$$V(A) = V(\varphi(A)).$$

Αξίωμα 2 (της Προσθετικότητας)

Αν  $A, B$  είναι πολυεδρικές περιοχές με  $A \cap B = \emptyset$ , τότε

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$



Αξίωμα 3 (της Κανονικότητας)

Ο όγκος ενός ανοικτού κύβου (χωρίς σύνορο), με πλευρά 1 είναι ίσος με 1.

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.**

1) (Πεπερασμένη Προσθετικότητα) Αν  $A_1, \dots, A_n$  είναι ξένες μεταξύ τους φραγμένες πολυεδρικές περιοχές, τότε

$$V(A_1 \cup \dots \cup A_n) = V(A_1) + \dots + V(A_n).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επαγωγή ως προς n. □

2) (Μονοτονία) Αν  $A, B$  είναι φραγμένες πολυεδρικές περιοχές με  $A \subseteq B$ , τότε  $V(A) \leq V(B)$  και μάλιστα  $V(B) = V(A) + V(B \setminus A)$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα σύνολα  $A, B \setminus A$  είναι ξένες μεταξύ τους φραγμένες πολυεδρικές περιοχές η ένωση των οποίων ισούται με το σύνολο  $B$ . Συνεπώς, από το 2<sup>ο</sup> Αξίωμα

$$V(B) = V(A \cup (B \setminus A)) = V(A) + V(B \setminus A).$$

Δεδομένου ότι  $V(B \setminus A) \geq 0$ , έπεται ότι  $V(A) \leq V(B)$ . □

ΣΧΟΛΙΟ: Τα αξιώματα της προσθετικότητας και της κανονικότητας μπορούν να γενικευτούν ως εξής:

Αξίωμα 2 (Γενικευμένη έκδοση) Αν  $A, B$  είναι φραγμένες πολυεδρικές περιοχές για τις οποίες η τομή  $A \cap B$  είναι το κενό σύνολο ή ένα φραγμένο επίπεδο σχήμα, τότε

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B)$$

και,

Αξίωμα 3 (Γενικευμένη έκδοση) Ο όγκος του μοναδιαίου κύβου είναι ίσος με ένα, ανεξάρτητα αν είναι ανοικτός, κλειστός ή περιλαμβάνει κάποιες έδρες του.

Η ισχύς των παραπάνω δύο γενικευμένων εκδόσεων βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. Ο όγκος κάθε φραγμένου επίπεδου πολυγωνικού σχήματος είναι μηδέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη του λήμματος αυτού θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

1<sup>ο</sup> Βήμα: Ο όγκος κάθε ανοικτού τετραγώνου πλευράς 1 (που θα το συμβολίζουμε με  $T$ ), είναι ίσος με μηδέν.

Πράγματι, έστω  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 2$  και  $\Pi$  ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς 1 και ύψος  $1/n$ . Χρησιμοποιώντας  $n$  αντίτυπα του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου  $\Pi$  και  $(n-1)$  αντίτυπα του ανοικτού τετραγώνου  $T$  και τοποθετώντας τα το ένα πάνω στο άλλο (με τη σειρά: παραλληλεπίπεδο – τετράγωνο – παραλληλεπίπεδο – τετράγωνο – κ.λπ.) κατασκευάζουμε έναν ανοικτό μοναδιαίο κύβο.

Συνεπώς, από την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας, το 1<sup>ο</sup> και το 3<sup>ο</sup> Αξίωμα έχουμε:

$$nV(\Pi) + (n-1)V(T) = 1.$$

Όμως,  $nV(\Pi) \geq 0$ , άρα

$$V(T) \leq \frac{1}{n-1}, \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Συνεπώς, αφήνοντας  $n \rightarrow \infty$ , έπεται  $V(T) = 0$ .

2<sup>ο</sup> Βήμα: Ο όγκος α) κάθε σημείου και β) κάθε ανοικτού ευθύγραμμου τμήματος μήκους ένα, είναι ίσος με μηδέν.

Πράγματι, αφού κάθε σημείο και κάθε ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα μήκους ένα, είναι υποσύνολο ενός ανοικτού τετραγώνου πλευράς ένα, τότε από το 1<sup>ο</sup> Βήμα και την ιδιότητα της μονοτονίας, το ζητούμενο έπεται.

3<sup>ο</sup> Βήμα: Ο όγκος κάθε τετραγώνου πλευράς  $n$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ , είναι μηδέν.

Πράγματι, κάθε τετράγωνο πλευράς  $n$  γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών τετραγώνων πλευράς ένα, ανοικτών ευθύγραμμων τμημάτων μήκους ένα και κάποιων σημείων. Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας και τα δύο προηγούμενα βήματα, ο όγκος του ισούται με μηδέν.

*4<sup>ο</sup> Βήμα:* Ο όγκος κάθε φραγμένου επίπεδου πολυγωνικού σχήματος είναι μηδέν.

Πράγματι, για κάθε φραγμένο επίπεδο πολυγωνικό σχήμα, υπάρχει τετράγωνο με πλευρά φυσικό αριθμό, που το περιέχει. Άρα, από την ιδιότητα της μονοτονίας το ζητούμενο έπεται.  $\square$

### 5.3 Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ο σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε τον τύπο που δίνει τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τα τρία αξιώματα του όγκου.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ο όγκος κάθε ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το γινόμενο των διαστάσεων του.

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρειαζόμαστε τα παρακάτω δύο λήμματα.

Με  $K_a$  θα συμβολίζουμε στο εξής τον κύβο ακμής  $a$ , ανεξάρτητα αν είναι ανοικτός, κλειστός ή περιλαμβάνει κάποιες έδρες του.

**ΛΗΜΜΑ 1.** Ο όγκος του κύβου  $K_a$  είναι ίσος με  $a^3$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η απόδειξη θα δοθεί σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για  $a \in \mathbb{N}$ , στο δεύτερο για  $a \in \mathbb{Q}$  και στο τρίτο γενικά για  $a \in \mathbb{R}$ .

*1<sup>ο</sup> Βήμα:* Έστω  $a \in \mathbb{N}$  και  $K_a$  ένας κύβος ακμής  $a$ . Χωρίζουμε την κάθε ακμή του  $K_a$  σε  $a$  ίσα μέρη, έκαστο μήκος 1. Έτσι, σχηματίζονται  $a^3$  το πλήθος κύβοι  $K_1$  ακμής 1. Άρα, από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα, την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας και το 3<sup>ο</sup> Αξίωμα,

$$V(K_a) = a^3 V(K_1) = a^3 \cdot 1 = a^3.$$

2<sup>ο</sup> Βήμα: Έστω  $\alpha = \frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}$ , όπου  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$  και  $K_\mu$  ένας κύβος ακμής  $\mu$ .

Χωρίζουμε κάθε ακμή του  $K_\mu$  σε  $\nu$  ίσα μέρη, έκαστο μήκος  $\mu/\nu$ . Έτσι, σχηματίζονται  $\nu^3$  κύβοι  $K_{\mu/\nu}$  ακμής  $\mu/\nu$ . Άρα, από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα, την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας και το 1<sup>ο</sup> Βήμα,

$$\mu^3 = V(K_\mu) = \nu^3 V(K_{\mu/\nu})$$

άρα,

$$V(K_{\mu/\nu}) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3.$$

3<sup>ο</sup> Βήμα: Έστω  $\alpha > 0$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\rho_1, \rho_2$  τυχαίοι ρητοί αριθμοί ώστε  $\rho_1 < \alpha < \rho_2$ . Τότε,

$$K_{\rho_1} \subseteq K_\alpha \subseteq K_{\rho_2}$$

οπότε, από την μονοτονία,

$$V(K_{\rho_1}) \leq V(K_\alpha) \leq V(K_{\rho_2}).$$

Επομένως, από το 2<sup>ο</sup> Βήμα,

$$\rho_1^3 \leq V(K_\alpha) \leq \rho_2^3.$$

Αν αφήσουμε  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \alpha$ , τότε  $V(K_\alpha) = \alpha^3$ . □

Με  $\Pi_\beta$  θα συμβολίζουμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση πάντα τετράγωνο πλευράς  $\alpha$  και ύψος ίσο με  $\beta$ .

ΛΗΜΜΑ 2. Ο όγκος του  $\Pi_\beta$  είναι ίσος με  $\alpha^2\beta$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο πρώτα για  $\beta < \alpha$  και έπειτα για  $\beta \geq \alpha$ .

i) Έστω  $\beta < \alpha$ .

1<sup>η</sup> Περίπτωση: Έστω  $\beta = \frac{\alpha}{\kappa}$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{N}$ , τότε τοποθετώ  $\kappa$  αντίτυπα του ορθογωνίου  $\Pi_\beta$  το ένα πάνω στο άλλο και έτσι λαμβάνω έναν κύβο ακμής  $\alpha$ . Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας και το Λήμμα 1, έχουμε

$$V(K_\alpha) = \kappa V(\Pi_\beta),$$

άρα,

$$V(\Pi_\beta) = \frac{\alpha^3}{\kappa} = \alpha^2\beta.$$

2<sup>η</sup> Περίπτωση: Έστω  $\beta = \frac{\mu}{\nu}\alpha$  με  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$  με  $\mu < \nu$ . Τότε, τοποθετώ  $\mu$  αντίτυπα του ορθογωνίου  $\Pi_{\alpha/\nu}$  το ένα πάνω στο άλλο και έτσι λαμβάνω το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $\Pi_\beta$ . Συνεπώς, από την ιδιότητα της προσθετικότητας και την Περίπτωση 1, έχουμε

$$V(\Pi_\beta) = \mu V(\Pi_{\alpha/\nu}) = \mu \frac{\alpha^3}{\nu} = \alpha^2\beta.$$

3<sup>η</sup> Περίπτωση: Έστω  $\beta = \lambda\alpha$ , όπου  $\lambda < 1$ , και  $\rho, \mu$  τυχαίοι ρητοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\rho < \lambda < \mu.$$

Τότε,

$$\Pi_{\rho\alpha} \subseteq \Pi_{\lambda\alpha} \subseteq \Pi_{\mu\alpha}$$

οπότε, λόγω μονοτονίας,

$$V(\Pi_{\rho\alpha}) \leq V(\Pi_{\lambda\alpha}) \leq V(\Pi_{\mu\alpha})$$

ή ισοδύναμα, λόγω Περίπτωσης 2,

$$\alpha^2 \cdot \rho\alpha \leq V(\Pi_\beta) \leq \alpha^2 \cdot \mu\alpha.$$

Αφήνουμε τώρα  $\rho, \mu \rightarrow \lambda$ , και προκύπτει

$$V(\Pi_{\lambda\alpha}) = \alpha^2\beta.$$

ii) Εάν  $\beta \geq \alpha$ , τότε  $\beta = \kappa\alpha + \upsilon$  όπου  $0 \leq \upsilon < \alpha$ . Άρα, από πεπερασμένη προσθετικότητα,

$$V(\Pi_\beta) = \kappa V(\Pi_\alpha) + V(\Pi_\upsilon) = \kappa\alpha^3 + \alpha^2\upsilon = \alpha^2(\kappa\alpha + \upsilon) = \alpha^2\beta. \quad \square$$

Είμαστε τώρα σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ.** Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $\Pi$  με διαστάσεις  $\alpha, \beta, \gamma$ , όπου  $\alpha < \beta$ . Το Σχήμα 1 δείχνει ένα τέτοιο στερεό κομμένο σε δύο μέρη, το ένα με τετραγωνική βάση πλευράς  $\alpha$  και το άλλο με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $\alpha$  και  $\beta - \alpha$ . Και τα δύο μέρη έχουν ύψος  $\gamma$ . Το δεύτερο κομμάτι θα το ονομάσω  $T$ . Τότε από το 1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup> Αξίωμα και το Λήμμα 2 έχουμε:

$$V(\Pi) = \alpha^2\gamma + V(T). \quad (1)$$

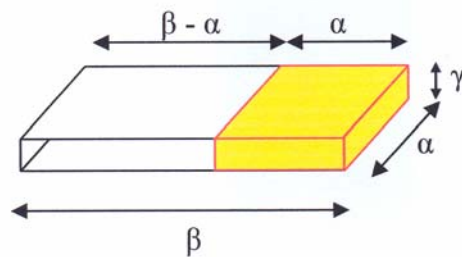
Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς  $\alpha + \beta$  και ύψος  $\gamma$ . Ο όγκος του από το 2<sup>ο</sup> λήμμα είναι  $(\alpha + \beta)^2\gamma$ . Το στερεό αυτό το διαιρούμε σε εννέα μέρη (βλ. Σχήμα 2). Στις τέσσερις γωνίες του έχουμε από ένα τετραγωνικό πρίσμα με όγκο  $\alpha^2\gamma$  και το κεντρικό μέρος είναι τετραγωνικό πρίσμα με όγκο  $(\beta - \alpha)^2\gamma$ . Τα τέσσερα μέρη που απομένουν ισούνται το καθένα με το T άρα έχουν όγκο το καθένα ίσο με  $V(T)$ . Άρα, από το 1<sup>ο</sup> Αξίωμα και την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας, έχουμε

$$(\alpha + \beta)^2\gamma = 4\alpha^2\gamma + 4V(T) + (\beta - \alpha)^2\gamma \stackrel{(1)}{=} 4V(\Pi) + (\beta - \alpha)^2\gamma$$

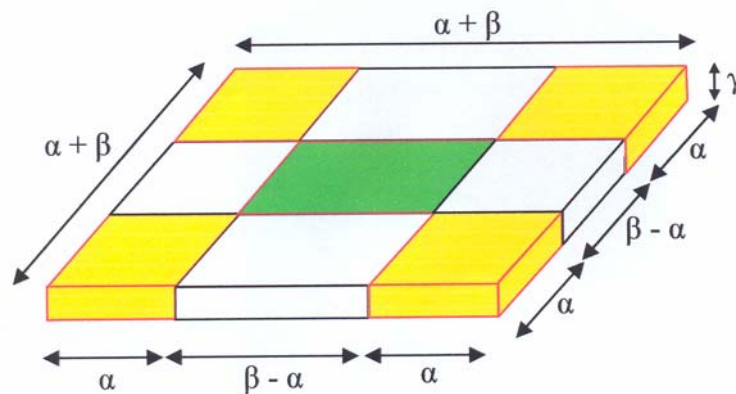
ή ισοδύναμα,

$$V(\Pi) = \frac{(\alpha + \beta)^2\gamma - (\beta - \alpha)^2\gamma}{4} = \alpha\beta\gamma$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

Στην πρόταση που ακολουθεί αναδιατυπώνουμε τον τύπο του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χρησιμοποιώντας απλό ολοκλήρωμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Αν  $X$  είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων  $\alpha, \beta, \gamma$  με έδρες παράλληλες στα συντεταγμενικά επίπεδα, δηλαδή

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_0 < x < x_0 + \alpha, y_0 < y < y_0 + \beta, z_0 < z < z_0 + \gamma\}$$

τότε,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt \quad (2)$$

όπου

$$\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το εμβαδόν του  $X \cap \Pi(t)$ , εάν  $z_0 < t < z_0 + \gamma$ , είναι ίσο με  $\alpha\beta$  διαφορετικά είναι μηδέν.

Άρα,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt = \int_{z_0}^{z_0+\gamma} \alpha\beta dt = \alpha\beta\gamma. \quad \square$$

Από την ιδιότητα της προσθετικότητας για τον όγκο και το εμβαδόν, έπεται ότι και το αριστερό και το δεξί μέλος της σχέσης (2) είναι προσθετικό πάνω στις ξένες ενώσεις. Συνεπώς, έχουμε το παρακάτω γενικότερο αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Αν  $X$  είναι ένωση ξένων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με έδρες παράλληλες στα συντεταγμενικά επίπεδα τότε

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt$$

όπου

$$\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι η σχέση (2) ισχύει γενικότερα για κάθε φραγμένη πολυεδρική περιοχή.

## 5.4 Η Αρχή του Cavalieri για φραγμένες πολυεδρικές περιοχές

ΘΕΩΡΗΜΑ. (Αρχή του Cavalieri). Για κάθε φραγμένη πολυεδρική περιοχή  $X$  του Ευκλείδειου χώρου ισχύει

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt$$

όπου

$$\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΟ: Δεν υπάρχει λόγος ανησυχίας που το ολοκλήρωμα είναι από  $-\infty$  σε  $+\infty$  γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση θα είναι μηδέν έξω από ένα φραγμένο διάστημα.

Ο Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) γεννήθηκε στο Μιλάνο και από το 1615 άνηκε στο τάγμα των Ιησουϊτών. Το 1621 ενώ βρισκόταν στην Πίζα παρακολούθησε μαθήματα του Benedetto Castelli και γνωρίστηκε με τον Γαλιλαίο που ήταν στην Φλωρεντία. Την μεγάλη φήμη του την οφείλει στο έργο του *Γεωμετρία των αδιαιρέτων* το οποίο δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1635. Στην διάθεσή μας όμως υπάρχει η αναδημοσίευση του έργου του αυτού το 1653, στην οποία φαίνονται πιο καθαρά οι ιδέες του επί του θέματος. Μία πρόταση που αποτελεί τον πυρήνα των στοχασμών του Cavalieri είναι η εξής: *Δύο επίπεδα σχήματα (ή δύο στερεά) είναι προς ἄλληλα ὡς το σύνολον τῶν εὐθειῶν (ή τῶν ἐπιπέδων των) δοθείσης διευθύνσεως [4].*



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Με σύγχρονους όρους ο Cavalieri ισχυρίστηκε ότι:

Αν δύο επίπεδα σχήματα βρίσκονται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών και οι τομές τους με κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτές είναι ίσες, τότε τα εμβαδά των σχημάτων είναι ίσα και αντίστοιχα, αν δύο στερεά βρίσκονται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων και οι τομές τους με κάθε επίπεδο παράλληλο σε αυτά είναι ίσες, τότε οι όγκοι των στερεών είναι ίσοι.

Παρόλο που ο Cavalieri διατύπωσε τα παραπάνω, ως Αρχή του Cavalieri είναι γνωστό το παραπάνω θεώρημα το οποίο συνοψίζει την μέθοδο της εξάντλησης.

Για να αποδείξουμε την Αρχή του Cavalieri χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. Έστω  $X$  μία φραγμένη πολυεδρική περιοχή του Ευκλείδειου χώρου. Για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει περιοχή  $Q \subseteq X$  η οποία είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ξένων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με έδρες παράλληλες στα συντεταγμενικά επίπεδα τέτοια ώστε  $V(X) - V(Q) < \varepsilon$ .



ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΛΗΜΜΑΤΟΣ. Χάριν απλότητας, κατά τη διάρκεια της απόδειξης, κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες παράλληλες στα συντεταγμενικά επίπεδα θα το συμβολίζουμε με το γράμμα  $I$  (με κάποιο δείκτη ή τόνο) και θα το καλούμε απλά ορθογώνιο.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν ορθογώνια  $I_1', \dots, I_{n_1}'$ , με  $X \subset I_1' \cup \dots \cup I_{n_1}'$  και ορθογώνια  $I_1, \dots, I_{n_2}$  που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία και  $I_1 \cup \dots \cup I_{n_2} \subset X$ , τέτοια ώστε

$$\sum_{j=1}^{n_1} V(I_j') - \sum_{i=1}^{n_2} V(I_i) < \varepsilon. \quad (1)$$

Τότε όμως,  $V(X) \leq V(I_1' \cup \dots \cup I_{n_1}') \leq V(I_1') + \dots + V(I_{n_1}')$  και αν  $Q = I_1 \cup \dots \cup I_{n_2}$ , τότε  $V(Q) = V(I_1) + \dots + V(I_{n_2})$ .

Συνεπώς, από τη σχέση (1), προκύπτει το ζητούμενο.

Αρκεί λοιπόν, να αποδείξουμε τη σχέση (1).

Το σύνορο  $\partial X$  του πολυέδρου  $X$  απαρτίζεται από τις έδρες του, δηλαδή από ένα πεπερασμένο πλήθος επίπεδων πολυγωνικών περιοχών που κάθε μια τους έχει όγκο ίσο με μηδέν. Άρα,  $V(\partial X) = 0$ . Τότε όμως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ορθογώνια  $I_1'', \dots, I_{n_3}''$  με

$$\partial X \subset I_1'' \cup \dots \cup I_{n_3}'', \text{ ώστε } \sum_{\kappa=1}^{n_3} V(I_\kappa'') < \varepsilon.$$

Αφού το πολύεδρο  $X$  είναι φραγμένο, έστω  $I_0$  ένα ορθογώνιο τέτοιο ώστε,

$$X \subset I_1'' \cup \dots \cup I_{n_3}'' \subset I_0.$$

Έστω  $\wp$  μια συλλογή ορθογωνίων που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία και η ένωση τους είναι ακριβώς το ορθογώνιο  $I_0$  (δηλαδή το  $\wp$  είναι μια διαμέριση του  $I_0$ ), τέτοια ώστε το  $X \setminus (I_1'' \cup \dots \cup I_{n_3}'')$  και κάθε  $I_\kappa''$ ,  $\kappa = 1, \dots, n_3$  να είναι ένωση στοιχείων του  $\wp$ .

Αν  $I_1, \dots, I_{n_2}$  είναι τα ορθογώνια του  $\wp$  τα οποία περιέχονται στο  $X$  και  $I_1', \dots, I_{n_1}'$  είναι τα ορθογώνια του  $\wp$  τα οποία περιέχονται στο

$$X \cup \bigcup_{\kappa=1}^{n_3} I_\kappa'', \text{ τότε } X \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j' \text{ και } \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j' - \bigcup_{i=1}^{n_2} I_i \subset \bigcup_{\kappa=1}^{n_3} I_\kappa''.$$

Αφού τα ορθογώνια  $I_1, \dots, I_{n_2}$  περιέχονται ανάμεσα στα ορθογώνια  $I_1', \dots, I_{n_1}'$  έπεται ότι,

$$\sum_{j=1}^{n_1} V(I_j') - \sum_{i=1}^{n_2} V(I_i) \leq \sum_{\kappa=1}^{n_3} V(I_\kappa'') < \varepsilon$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε.  $\square$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ. Έστω  $\varepsilon > 0$  και  $Q$  η ένωση ξένων ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων που εξασφαλίζεται από το λήμμα και για την οποία ισχύει η σχέση (2) της παραγράφου 5.3. Τότε,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} E(Q \cap \Pi(t)) dt = V(Q) > V(X) - \varepsilon.$$

Αν  $\varepsilon \rightarrow 0$ , έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt \geq V(X).$$

Σκοπός μας είναι να μετατρέψουμε την παραπάνω ανισότητα σε ισότητα. Το πολύεδρο  $X$  σίγουρα περιέχεται μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $Q'$ . Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα για την πολυεδρική περιοχή  $Q' \setminus X$ . Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E((Q' \setminus X) \cap \Pi(t)) dt \geq V(Q' \setminus X).$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (E(X \cap \Pi(t)) + E((Q' \setminus X) \cap \Pi(t))) dt \geq V(X) + V(Q' \setminus X)$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(Q' \cap \Pi(t)) dt \geq V(Q').$$

Όμως για το  $Q'$  ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση. Άρα, και οι ανισώσεις από τις οποίες προήρθε οφείλουν να είναι ισότητες. Επομένως,

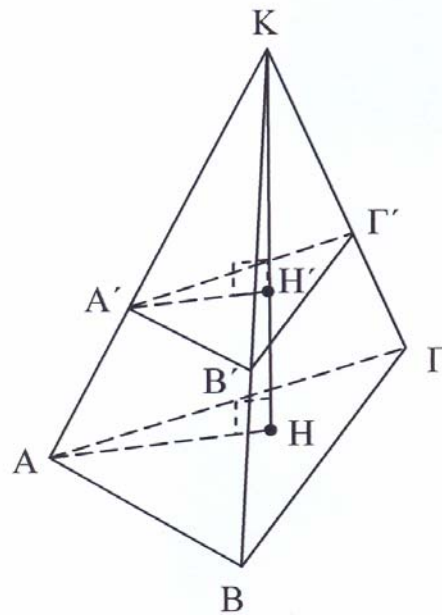
$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt = V(X). \quad \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (Όγκος τετραέδρου)

Έστω  $X$  μια τριγωνική πυραμίδα με βάση  $AB\Gamma$  πάνω στο  $xy$ -επίπεδο, η οποία έχει κορυφή  $K$  στο άνω ημι-επίπεδο σε ύψος  $h$ . Θα

αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri, ότι ο όγκος της είναι ίσος με  $\frac{1}{3} \cdot E(AB\Gamma) \cdot h$ .

Πράγματι, φέρουμε επίπεδο  $z = t$  παράλληλο στη βάση, το οποίο τέμνει τις ακμές και το ύψος της πυραμίδας στα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$  και  $H'$  αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 3).



(Σχήμα 3)

Τα τρίγωνα  $KAB$  και  $KA'B'$  είναι όμοια αφού έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες. Άρα, ισχύει  $\frac{KA}{KA'} = \frac{AB}{A'B'}$ . Επίσης τα τρίγωνα  $KHA$  και

$KHA'$  είναι όμοια. Άρα, ισχύει  $\frac{KA}{KA'} = \frac{KH}{KH'}$ . Συνεπώς,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{KH}{KH'} = \frac{h}{h-t}.$$

Τέλος τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοια οπότε  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h-t}$ . Άρα,

$$\frac{E(AB\Gamma)}{E(A'B'\Gamma')} = \left( \frac{h}{h-t} \right)^2$$

ή ισοδύναμα

$$E(A'B'\Gamma') = \left(\frac{h-t}{h}\right)^2 \cdot E(AB\Gamma) = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^2 \cdot E(AB\Gamma).$$

Συνεπώς, από την Αρχή του Cavalieri έχουμε:

$$V(X) = \int_0^h E(X \cap \Pi(t)) dt = \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^2 \cdot E(AB\Gamma) dt = \frac{1}{3} \cdot E(AB\Gamma) \cdot h. \quad \square$$

### 5.5 Όγκος φραγμένης, όχι κατ' ανάγκην πολυεδρικής, περιοχής

Ο όγκος φραγμένων υποσυνόλων του  $\mathbb{R}^3$  που δεν είναι αναγκαστικά πολυεδρικές περιοχές, υπολογίζεται μέσω της μεθόδου της εξάντλησης όπως αυτή διατυπώνεται στον Ορισμό 3 παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω  $X$  ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ . Ορίζουμε τον εσωτερικό όγκο του  $X$ , συμβολιζόμενο με  $\underline{V}(X)$ , να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των όγκων όλων των πολυεδρικών περιοχών που περιέχονται στο  $X$ , δηλαδή:

$$\underline{V}(X) = \sup\{V(\Pi) : \Pi \text{ πολύεδρο, } \Pi \subseteq X\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Έστω  $X$  ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ . Ορίζουμε τον εξωτερικό όγκο του  $X$ , συμβολιζόμενο με  $\overline{V}(X)$ , να είναι το μέγιστο κάτω φράγμα των όγκων όλων των πολυεδρικών περιοχών που περιέχουν το  $X$ , δηλαδή:

$$\overline{V}(X) = \inf\{V(\Pi') : \Pi' \text{ πολύεδρο, } X \subseteq \Pi'\}.$$

Από την μονοτονία του όγκου των πολυεδρικών περιοχών έπεται ότι

$$\underline{V}(X) \leq \overline{V}(X).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Αν  $X$  είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  και ισχύει ότι  $\underline{V}(X) = \overline{V}(X)$ , τότε ο κοινός αυτός αριθμός καλείται όγκος του  $X$  και συμβολίζεται με  $V(X)$ .

ΣΧΟΛΙΑ: 1) Αν  $X$  είναι φραγμένη πολυεδρική περιοχή τότε:  $\underline{V}(X) = \overline{V}(X) = V(X)$ .

2) Υπάρχουν φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$  που δεν έχουν όγκο. Για παράδειγμα το

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x, y, z \in \mathbb{Q}\}.$$

3) Με βάση τον παραπάνω ορισμό και με επιχειρήματα όμοια με εκείνα της απόδειξης του λήμματος της προηγούμενης παραγράφου, μπορεί να αποδειχθεί ότι: ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  έχει όγκο αν και μόνο αν το σύνορο του έχει όγκο ίσο με μηδέν.

Αν το  $X$  είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  που έχει όγκο  $V(X)$ , τότε προσεγγίζοντας το  $X$  με πολύεδρα τόσο από μέσα, όσο και από έξω και εφαρμόζοντας την αρχή του Cavalieri στα πολύεδρα αυτά λαμβάνουμε το ακόλουθο θεώρημα:

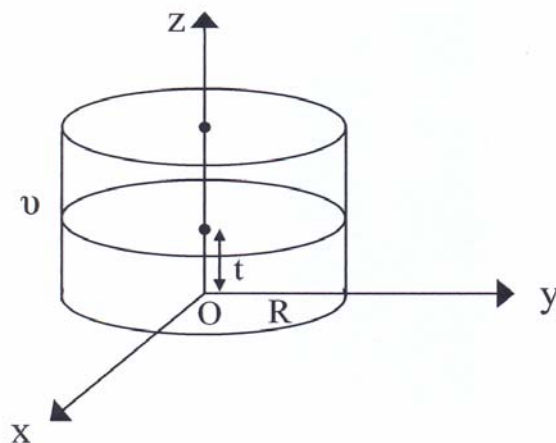
**ΘΕΩΡΗΜΑ.** (Γενική μορφή Αρχής Cavalieri) Έστω  $X$  ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  που έχει όγκο  $V(X)$  και για κάθε  $t$  το σύνολο  $X \cap \Pi(t)$  έχει εμβαδόν, όπου  $\Pi(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\}$ . Τότε,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \cap \Pi(t)) dt.$$

## 5.6 Εφαρμογές της Αρχής του Cavalieri

i) *Εύρεση του όγκου κυλίνδρου*

Έστω  $X$  ένας κύλινδρος ύψους  $h$  με βάση ένα κυκλικό δίσκο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$  ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο  $Oxy$ . Φέρουμε επίπεδο  $z = t$  παράλληλο στη βάση. Η τομή του στερεού με το επίπεδο είναι κυκλικός δίσκος ίσος με την βάση. Σύμφωνα λοιπόν με την Αρχή του Cavalieri

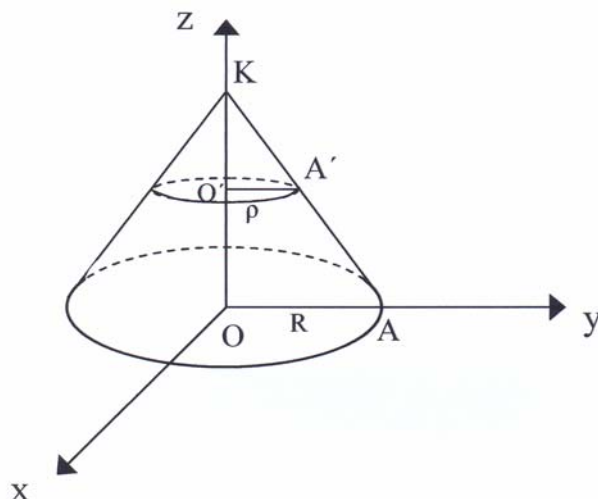


$$V(X) = \int_0^h E(X \cap \Pi(t)) dt = \int_0^h \pi R^2 dt = \pi R^2 h$$

δηλαδή, προέκυψε ο γνωστός τύπος: (εμβαδόν βάσης)  $\cdot$  (ύψος). □

ii) *Εύρεση του όγκου κώνου*

Έστω  $X$  ένας κώνος με κορυφή  $K$ , ύψος  $h$  και με βάση που βρίσκεται στο επίπεδο  $Oxy$  η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και ακτίνα  $R$ .



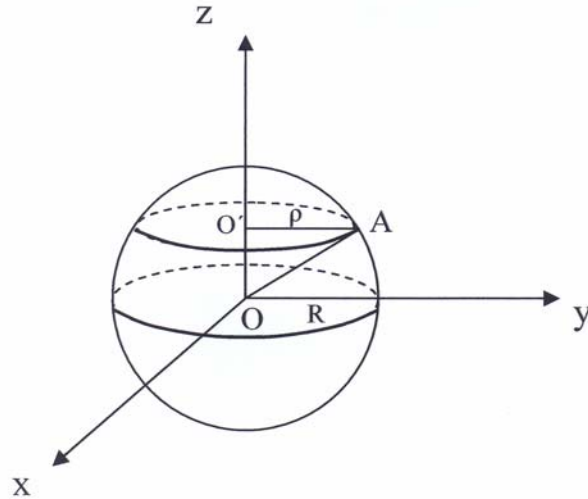
Φέρουμε επίπεδο  $z = t$  παράλληλο στη βάση. Τότε, η τομή του στερεού με το επίπεδο, είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας  $\rho$ . Τα τρίγωνα  $KOA$  και  $KO'A'$  είναι όμοια, άρα ισχύει  $\frac{R}{\rho} = \frac{h}{t}$ . Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με κέντρο  $O'$  και ακτίνα  $\rho$  είναι ίσο με  $\pi\rho^2 = \pi R^2 \frac{t^2}{h^2}$ . Σύμφωνα λοιπόν με την Αρχή του Cavalieri, έχουμε

$$V(X) = \int_0^h E(X \cap \Pi(t)) dt = \int_0^h \pi R^2 \frac{t^2}{h^2} dt = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Προέκυψε δηλαδή, ο γνωστός τύπος:  $\frac{1}{3} \cdot (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ .  $\square$

iii) *Εύρεση του όγκου σφαίρας*

Έστω  $X$  μια σφαίρα με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ . Λόγω συμμετρίας, ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με το διπλάσιο του όγκου του άνω ημισφαιρίου  $X'$ . Φέρουμε επίπεδο  $z = t$  παράλληλο στη βάση του άνω ημισφαιρίου. Τότε, η τομή του στερεού αυτού με το επίπεδο είναι κυκλικός δίσκος κέντρου  $O'$  και ακτίνας  $\rho$ . Το εμβαδόν του δίσκου αυτού είναι ίσο με  $\pi\rho^2 = \pi(R^2 - t^2)$ . Σύμφωνα λοιπόν με την Αρχή του Cavalieri, προκύπτει ο γνωστός τύπος για τον όγκο της σφαίρας:



$$\begin{aligned}
 V(X) &= 2V(X') = 2 \int_0^R E(X' \cap \Pi(t)) dt \\
 &= 2 \int_0^R \pi(R^2 - t^2) dt \\
 &= 2\pi R^3 - 2\pi \frac{R^3}{3} \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

□

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σιδεράς, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ, 2003
- [2] R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis I, II*, Springer, 1965
- [3] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer – Verlag, 1991
- [4] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, τ. 1, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (μτφ.), Εκδόσεις Παπαζήση, 1971
- [5] J. Roe, *Elementary Geometry*, Oxford Univ. Publ., 1993
- [6] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>