

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΝΟΜΟΓΡΑΦΙΑ: ΕΝΑΣ ΞΕΧΑΣΜΕΝΟΣ ΚΛΑΔΟΣ ΤΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΚΑΛΛΙΟΠΗ ΜΙΧΑΗΛ ΠΕΡΟΓΙΑΝΝΑΚΗ  
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΙΧΑΗΛ ΛΑΜΠΡΟΥ**

**ΗΡΑΚΛΕΙΟ – ΜΑΪΟΣ 2009**



**UNIVERSITY OF CRETE  
INTERDEPARTMENTAL PROGRAM OF STUDY  
«MATHEMATICS AND THEIR APPLICATIONS»**

**MASTER THESIS**

**NOMOGRAPHY: A FORGOTTEN BRANCH OF APPLIED  
MATHEMATICS**

**KALLIOPI MICHAIL PEROYANNAKI  
ADVISOR: MICHAIL LAMPROY**

**HERAKLION – MAY 2009**



Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Μιχαήλ Λάμπρου. Η τριμελής επιτροπή είναι:

Μιχαήλ Λάμπρου (Καθηγητής)  
Χρήστος Κουρουγιώτης (Επίκουρος Καθηγητής)  
Μενέλαος Καραβέλας (Επίκουρος Καθηγητής).



*Στον Χρήστο.*





## Περίληψη.

Η νομογραφία είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και σχετίζεται με τη γραφική επίλυση μαθηματικών εκφράσεων και τύπων. Στο πρώτο κεφάλαιο, ορίζουμε τη νομογραφία και αφηγούμαστε μια σύντομη ιστορία της. Στα τέλη του 19 αι. ο Philbert Maurice D' Ocagne μελετώντας τη γεωμετρική αναμόρφωση του Léon Lalanne όρισε τη νομογραφία και την κατέστησε ξεχωριστό κλάδο των Μαθηματικών. Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε νομογραφήματα που χρησιμοποιούμε για να εκτελέσουμε τις πράξεις αριθμών όπως τον γραμμικό συνδυασμό και τον πολλαπλασιασμό δύο ή περισσότερων αριθμών, τη δύναμη ενός αριθμού και τις εφαρμογές τους στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (Πυθαγόρειο Θεώρημα και το εμβαδόν ενός τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές και την περιεχόμενη γωνία του). Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετάμε εξισώσεις πρώτου μέχρι και πέμπτου βαθμού με χρήση νομογραφημάτων και μια γενική μέθοδο επίλυσής τους οποιουδήποτε βαθμού. Στο τέταρτο κεφάλαιο, περιγράφουμε νομογραφήματα επίλυσης τριγωνομετρικών εξισώσεων και την εξίσωση του Kepler. Στο πέμπτο κεφάλαιο, περιγράφουμε νομογραφήματα τα οποία επιλύουν τρίγωνα στην επίπεδη και στη σφαιρική γεωμετρία καθώς και εφαρμογές τους στην αστρονομία και στη ναυσιπλοΐα. Στο επόμενο κεφάλαιο, καταγράφουμε έτοιμα νομογραφήματα διαφόρων τύπων που είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε άλλες επιστήμες όπως την επίλυση συστήματος δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται μια σύντομη αναφορά στα στερεά νομογραφήματα τα οποία επιλύουν τις μαθηματικές εκφράσεις και τους τύπους των προηγούμενων κεφαλαίων. Στο τέλος της εργασίας, παρατίθεται ένα παράρτημα το οποίο περιλαμβάνει έτοιμα παραδείγματα των παραπάνω νομογραφημάτων.

**Λέξεις-κλειδιά:** νομογραφία, νομογράφημα, γραφική επίλυση



## Abstract.

Nomography is a branch of Applied Mathematics and related to graphical solution of mathematical expressions and formulas. In the first chapter, we give the definition and a brief history of nomography. As Philbert Maurice D' Ocagné was studying geometrical anamorphosis defined by Léon Lalanne, he introduced nomography as a different branch of mathematics. In the second chapter, we study nomograms of the power of a number and of number operations, such as linear combination and multiplication of two or more numbers, and examine the way we apply them at Euclidian Geometry (Pythagorean Theorem and area of a triangle given two sides and included angle). In the third chapter, we study nomograms that provide the solutions of equations of first to fifth degree and a method providing the solution of an equation of any degree. In the fourth chapter, we describe nomograms connected with the solution of trigonometrical equations which we applied the equation of Kepler. In the fifth chapter, we describe nomograms connected with the solution of plane and spherical triangles which are applied at astronomy and navigation. In the next chapter, we list a number of different formulas used at sciences as simultaneous equations. In the last chapter, a brief reference to stereo nomograms of the above formulas is made. Finally, there is an appendix of examples of the described nomograms.

**Key words:** nomography, nomograms, graphical solution



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Κεφάλαιο 1. Νομογραφία και η ιστορία της</b>	1
1.1 Νομογραφία.	1
1.2 Ιστορία της νομογραφίας.	1
<b>Κεφάλαιο 2. Πράξεις με χρήση νομογραφημάτων</b>	10
2.1 Γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσότερων αριθμών με σταθερούς συντελεστές.	10
2.2 Ειδική περίπτωση: υπολογισμός της παράστασης $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\delta}}$ για δοθέντα	11
$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ .	
2.3 Πολλαπλασιασμός δύο ή περισσότερων αριθμών.	21
2.4 Ειδική περίπτωση: επίλυση του τύπου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ με $\alpha, \beta, \gamma$ μεταβλητά και $x$ το	22
ζητούμενο.	
2.5 Δυνάμεις ενός αριθμού.	28
2.6 Εφαρμογές.	31
<b>Κεφάλαιο 3. Επίλυση εξισώσεων <math>n</math>-οστού βαθμού με χρήση νομογραφημάτων</b>	33
3.1 Επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.	33
3.2 Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.	33
3.3 Επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού.	40
3.4 Επίλυση εξισώσεων τετάρτου βαθμού.	48
3.5 Επίλυση εξισώσεων πέμπτου βαθμού.	54
3.6 Επίλυση εξισώσεων $n$ -οστού βαθμού.	55
<b>Κεφάλαιο 4. Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων με χρήση νομογραφημάτων</b>	60
4.1 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \eta \mu t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	60
4.2 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \sigma \nu t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	60
4.3 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \epsilon \varphi t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	62
4.4 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \eta \mu t + \beta \sigma \nu t = \gamma, \gamma \neq 0$ με $\alpha, \beta, \gamma$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	63
4.5 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \epsilon \varphi t + \frac{\beta}{\sigma \nu t} + 1 = 0$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	70
4.6 Επίλυση εξισώσεων $\sigma \varphi t = \alpha + \beta \epsilon \varphi t$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	75
4.7 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \eta \mu 2t + \beta \eta \mu t + 1 = 0$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.	79

4.8 Εφαρμογές.	79
<b>Κεφάλαιο 5. Επίλυση τριγώνου με χρήση νομογραφημάτων</b>	82
5.1 Επίλυση τριγώνου από τις δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.	82
5.2 Επίλυση τριγώνου από μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.	83
5.3 Επίλυση τριγώνου από τις τρεις πλευρές.	87
5.4 Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.	88
5.5 Εφαρμογές.	100
<b>Κεφάλαιο 6. Επίλυση τύπων με χρήση νομογραφημάτων</b>	104
6.1 Επίλυση συστήματος δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.	104
6.2 Επίλυση του τύπου $\gamma = \alpha\beta + \sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}$ .	104
6.3 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ .	107
6.4 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ .	107
6.5 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\alpha\beta\dots\gamma}{\delta\varepsilon\dots\zeta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots, \zeta$ .	109
6.6 Γενικές εξισώσεις με γινόμενο.	115
6.7 Γενικές εξισώσεις με πηλίκο.	123
6.8 Κατασκευή νομογραφήματος οποιουδήποτε τύπου με δυο μεταβλητές $\alpha, \beta$ και τον άγνωστο $t$ .	126
<b>Κεφάλαιο 7. Στερεά νομογραφήματα</b>	134
7.1 Γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσοτέρων αριθμών με σταθερούς συντελεστές.	134
7.2 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ .	135
7.3 Επίλυση του τύπου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{t}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ και $t$ ο άγνωστος.	136
7.4 Υπολογισμός της παράστασης $\alpha\beta\gamma + (\alpha-\beta)$ για $\alpha, \beta, \gamma$ δοθέντα.	137
7.5 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$ για $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ δοθέντα.	139
7.6 Τύποι με γινόμενο.	140
7.7 Επίλυση εξισώσεων $n$ -στού βαθμού.	143
7.8 Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων.	149
7.9 Επίλυση επίπεδου και σφαιρικού τριγώνου.	152
<b>Παράρτημα</b>	158
<b>Βιβλιογραφία</b>	254



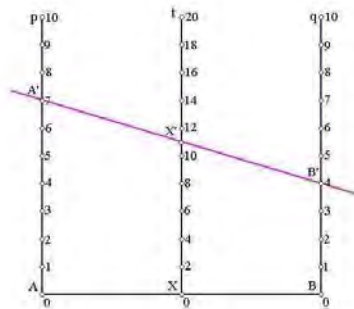
## ΝΟΜΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της νομογραφίας και μία σύντομη ιστορία της.

### 1.1 Νομογραφία.

Η νομογραφία είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και σχετίζεται με τη γραφική επίλυση τύπων και μαθηματικών εκφράσεων. Τα γραφήματα αυτά αποκαλούνται νομογραφήματα. Η λέξη «νομογραφία» προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις νόμος και γράφος. Η λέξη νόμος ερμηνεύεται ως κανόνας και η λέξη γράφος ως σχήμα. Επομένως, νομογράφημα καλούμε το σχήμα που ικανοποιεί έναν μαθηματικό κανόνα (μια εξίσωση ή μια μαθηματική έκφραση).

Ένα νομογράφημα αποτελείται από κατάλληλα διαβαθμισμένες καμπύλες καθεμία από τις οποίες αναπαριστά μια μεταβλητή του τύπου. Διαβάζοντας τις δεδομένες μεταβλητές στους αντίστοιχους άξονες ή καμπύλες, βρίσκουμε με απλή γεωμετρική κατασκευή (π.χ. ευθεία ή παραβολή) τη ζητούμενη τιμή στο σημείο που τέμνονται δύο καμπύλες. Παραδείγματος χάριν, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα δυο αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$  τότε παίρνουμε δύο άξονες  $Ap \parallel Bq$  και τους διαβαθμίζουμε με την ίδια μονάδα μέτρησης (βλ. Σχήματα 1 και 2). Το σημείο  $X$  χωρίζει το  $AB$  στο μέσο του και παίρνουμε άξονα  $Xt \perp AB$ . Ο  $Xt$  διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής. Παίρνουμε  $AA' = \alpha$  και  $BB' = \beta$  και υποθέτουμε ότι η  $A'B'$  τέμνει τον  $Xt$  στο  $X'$  με  $XX' = t$  τότε, αν λάβουμε υπόψη και την κλίμακα, έχουμε ότι  $t = \alpha + \beta$ .

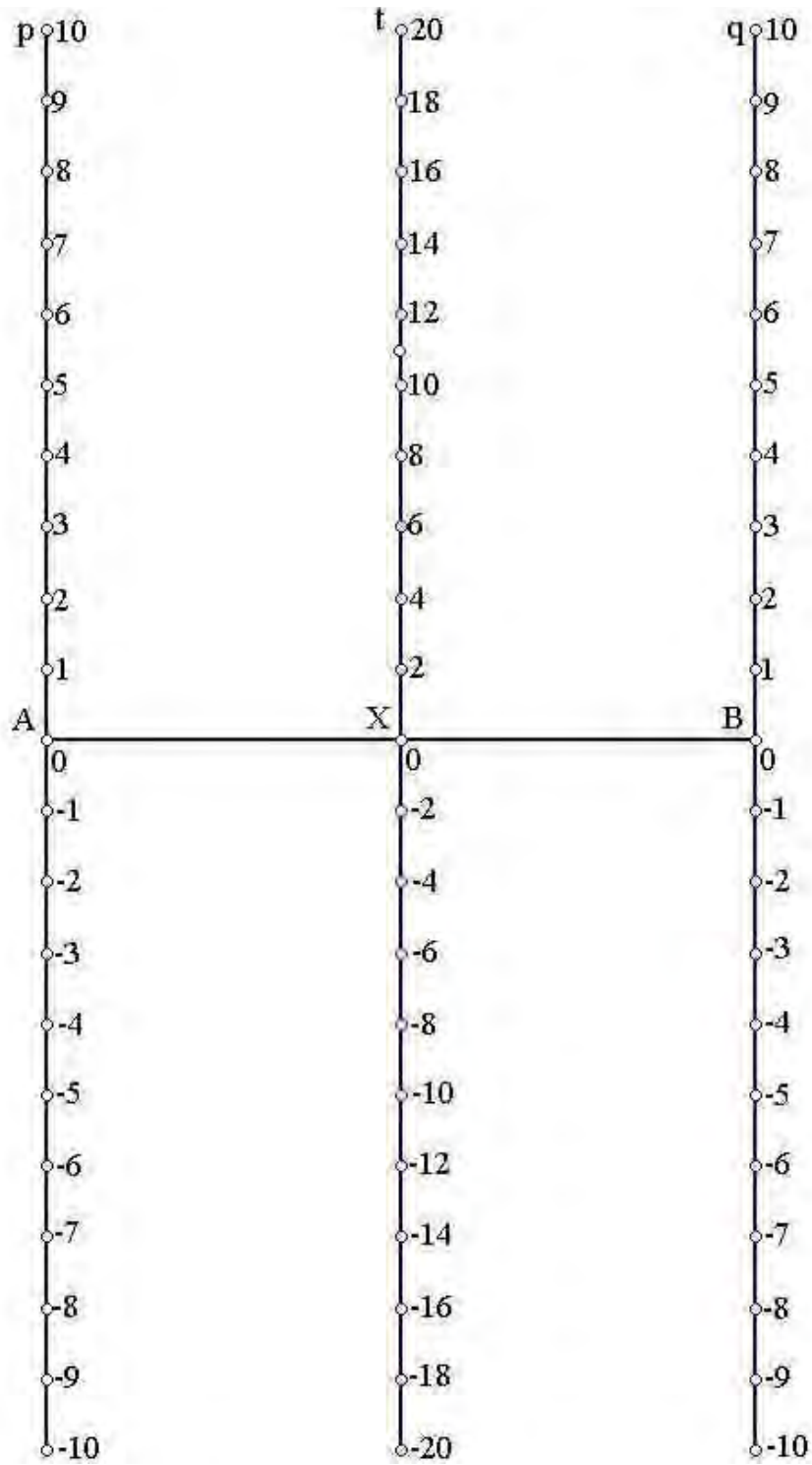


Σχήμα 1.

### 1.2 Ιστορία της νομογραφίας.

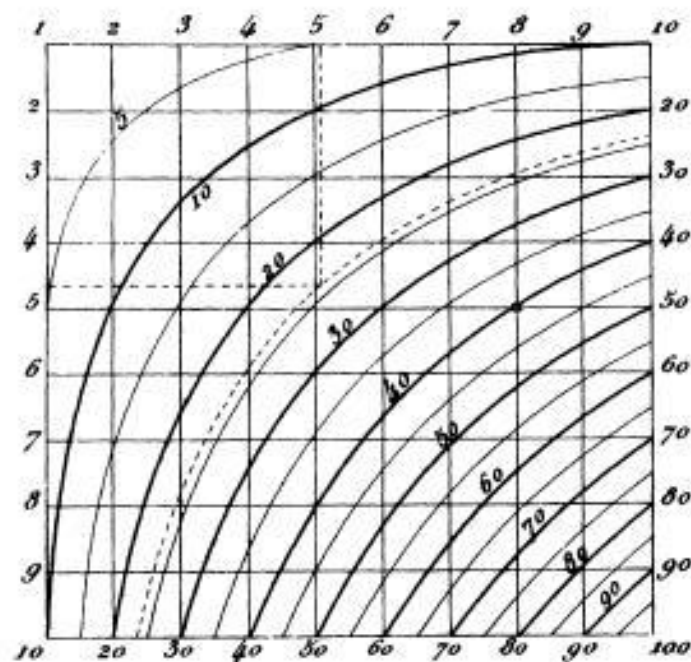
Το 1795 η γαλλική κυβέρνηση αλλάζοντας τις μονάδες μέτρησης του βάρους, του μήκους και του νομίσματος, δημοσιοποίησε ένα σχήμα που γινόταν η μετατροπή και ελαχιστοποιούσε τους υπολογισμούς. Με αφορμή αυτό, ο Louis - Ézéchiél Rouchet (επεξεργαστής βαμβακιού) μελετώντας τη μέθοδο δημοσίευσε μια εργασία στην οποία περιέγραφε τις πράξεις των αριθμών, την τετραγωνική ρίζα και τη δύναμη στο τετράγωνο. Παραδείγματος χάριν, στον πολλαπλασιασμό δυο αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$  η μέθοδός του ισοδυναμούσε με τον Πυθαγόρειο πίνακα. Παρά τις προσπάθειές του, όμως η μέθοδος του Rouchet δεν έγινε αποδεκτή. Σχεδίασε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις υπερβολές  $C_i$ :  $xy = c_i$  (βλ. Σχήμα 3) και διαβάθμισε τους άξονες με την ίδια μονάδα μέτρησης. Σε κάθε άξονα διάβασε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ . Έστω ότι το σημείο  $X$  με συντεταγμένες  $(\alpha, \beta)$  ανήκει στην υπερβολή  $C_i$  για κάποια τιμή  $c_i$ . Η τιμή αυτή είναι η ζητούμενη.





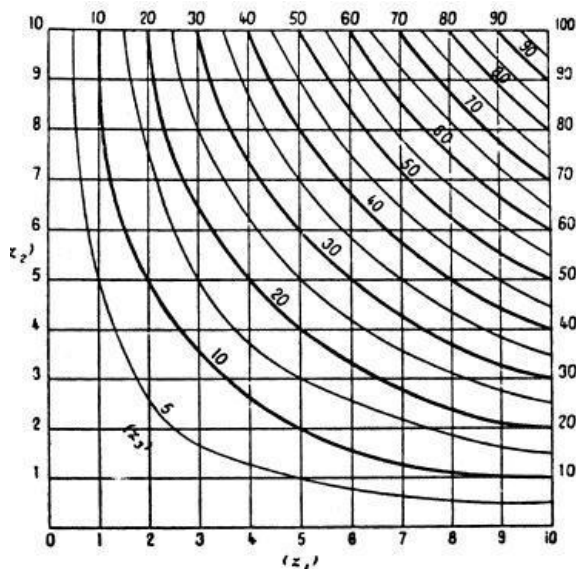
Σχήμα 2. Νομογράφημα για την πρόσθεση δυο αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες  $A_p$ ,  $B_q$  και  $X_t$  αντίστοιχα.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

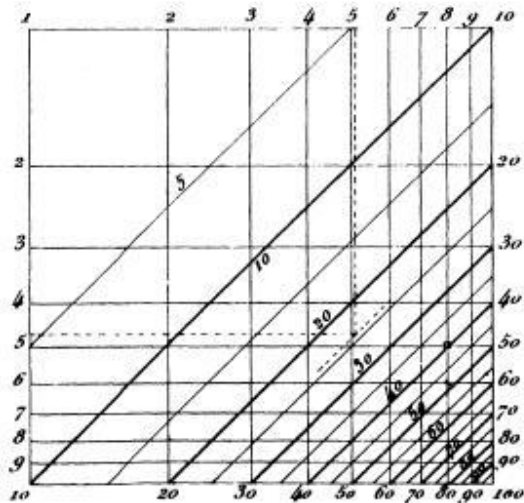


Σχήμα 3. Ο Πυθαγόρειος πίνακας και το διάγραμμα του Pouchet. Αναφέρεται από τον Lalanne στο άρθρο του, Mémoire sur le tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur στο περιοδικό Annales de ponts et Chaussées (1846).

Το 1842 ο Léon Lalanne, μηχανικός στο Pont et Chaussées, παρατήρησε ότι μπορούμε να διαβάσουμε διαφορετικά τις τιμές των καρτεσιανών συντεταγμένων. Στο διάγραμμα του Pouchet μετέφερε την αρχή των αξόνων ώστε η διάταξη των αριθμών να μοιάζει με αυτή του συστήματος συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 4). Στο ίδιο σχήμα χρησιμοποίησε πρώτος τους λογαριθμούς στους άξονες μετατρέποντας τις υπερβολές σε ευθείες (βλ. Σχήμα 5).



Σχήμα 4. Παραλλαγή του διαγράμματος του Pouchet από τον Lalanne. Αναφέρεται από τον Ocagné στο βιβλίο του, *Le calcul simplifié par des procédés mécaniques et graphiques* (1893).

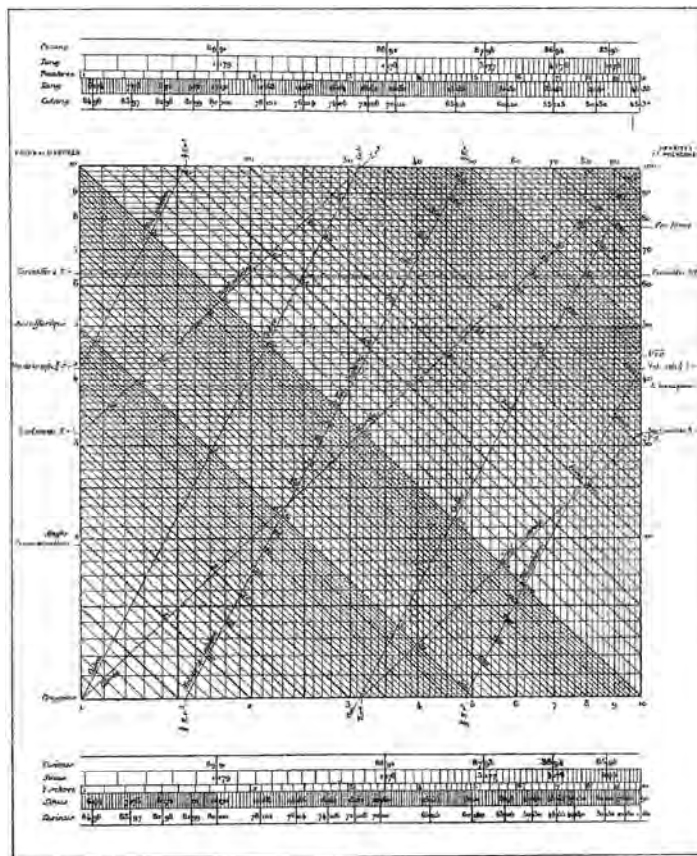


Σχήμα 5. Παραλλαγή του διαγράμματος του Pouchet από τον Lalanne, με χρήση λογαριθμών. Αναφέρεται από τον Ocagné στο βιβλίο του, *Le calcul simplifié par des procédés mécaniques et graphiques* (1893).

Το 1845 αυτές οι μέθοδοι ήταν γνωστές στην Αγγλία από το βιβλίο “A complete Course in Meteorology”, του οποίου ο Lalanne έγραψε το παράρτημα. Σ’ αυτό σχεδίασε τα αντίστοιχα γραφήματα των πινάκων της πρώτης έκδοσης του βιβλίου (Kaentz 1845). Τον επόμενο χρόνο διαπίστωσε ότι οι μονάδες μέτρησης στους άξονες μπορούν να ποικίλουν. Αν σε ένα γράφημα με καρτεσιανές συντεταγμένες εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό τότε η ακρίβεια υπολογισμού του διαγράμματος παραμένει ίδια. Ακόμη, παρατήρησε ότι μπορούσε να κατασκευάσει ένα διάγραμμα με απλούστερες καμπύλες, διαβάζοντας διαφορετικά τους άξονες. Αυτή τη μέθοδο την αποκάλεσε γεωμετρική αναμόρφωση (la géométrie

anamorphique) ή απλά αναμόρφωση. Την παρουσίασε για πρώτη φορά το 1843 στην Ακαδημία Επιστημών της Γαλλίας. Στο ακροατήριο ήταν και ο Cauchy ο οποίος μαζί με τον Lalanne διαπίστωσαν ότι αν έχουμε δυο συναρτήσεις  $p, q$  των  $x, y$  αντίστοιχα και  $h$  μια από τις δύο διαβαστεί ως ευθεία τότε οδηγούμαστε σε ένα σχήμα το οποίο ικανοποιεί τον τύπο  $f(z)=g(z)p(x)+h(z)q(y)$  όπου οι  $f, g, h$  είναι συναρτήσεις του  $x$  ή του  $y$ .

Τον ίδιο χρόνο στη βιβλιογραφία ενός άρθρου ο Lalanne αναφέρεται στο βιβλίο του “Universal calculator”. Ένα αντίτυπο αυτού του βιβλίου βρίσκεται στο Μουσείο Επιστημών στο Λονδίνο σε μορφή ημερολογίου τσέπης. Αποτελείται από 64 σελίδες στις οποίες αναφέρεται σε ένα νομογράφημα που βρίσκεται στο οπισθόφυλλο (βλ. Σχήμα 6). Περιγράφει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση αριθμών, τη δύναμη σε ακέραιο εκθέτη και την αντίστοιχη ρίζα του, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση με το  $\pi$ , το εμβαδόν κύκλου και τον όγκο σφαίρας και την αναλογία των μορίων στα άτομα των στοιχείων στη δομή τους.

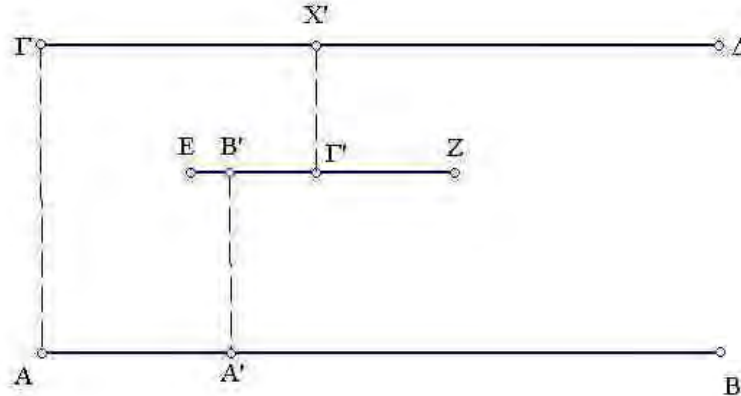


Σχήμα 6. Το διάγραμμα του Universal Calculator του Lalanne.

Ως πολιτικός μηχανικός, ο Lalanne συνέβαλε στην κατασκευή των σιδηροδρομικών γραμμών στη Γαλλία και έγραψε σχετικά άρθρα στα οποία φαίνονταν οι αρχές και η χρήση των διαγραμμάτων της αναμόρφωσης.

Ενώ το 1867 ο Paul de Saint-Robert, μελετώντας τους λογαριθμικούς κανόνες (slide rules), μετέτρεψε τους πίνακες που υπολογίζουν τη διαφορά του ύψους μεταβάλλοντας τη βαρομετρική πίεση και τη θερμοκρασία σε λογαριθμικό κανόνα και συμπέρανε ότι αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής  $F(x,y,z)=0$ , τότε μπορεί να κατασκευαστεί λογαριθμικός κανόνας με κατάλληλη διαβάθμιση ώστε να την επιλύει (Saint-Robert 1871). Το πρόβλημα που έθεσε ήταν το παρακάτω: Έστω ότι έχουμε μια εξίσωση  $F(x,y,z)=0$  με τρεις μεταβλητές, τότε αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή  $f(z)=g(x)+h(y)$  με  $f, g, h$  πραγματικές συναρτήσεις, η τελευταία εξίσωση μπορεί να παρουσιαστεί γραφικά σε δυο σταθερούς άξονες και έναν μεταβλητό. Ειδική περίπτωση του προβλήματος είναι το άθροισμα δυο αριθμών. Παίρνουμε

AB, ΓΔ σταθερούς άξονες και EZ μεταβλητό (βλ. Σχήμα 7). Στους άξονες AB, EZ και ΓΔ διαβάζουμε, αντίστοιχα, τις τιμές α, β και α+β. Στον άξονα AB παίρνουμε σημείο A' με AA'=α, στον άξονα EZ παίρνουμε σημεία B', Γ' έτσι ώστε B'Γ'=β και B'A' || ΑΓ. Φέρνουμε Γ'X' || A'B' με ΓX'=t. Τότε ισχύει t=α+β.



Σχήμα 7. Οι τιμές α, β και t διαβάζονται στους άξονες AB, EZ και ΓΔ, αντίστοιχα.

Το 1884 ο πολιτικός μηχανικός Junius Massau (1852-1909) δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο αναφερόταν όχι μόνο στη κατασκευή των σιδηροδρομικών γραμμών της Γαλλίας αλλά και στο πρόβλημα του Saint-Robert. Ειδικότερα κατέστησε τις οριζουσες ως εργαλείο για την κατασκευή διαγραμμάτων και απέδειξε ότι αν η  $F(x,y,z)=0$  γράφεται στη μορφή  $f(z)p(x)+g(z)q(y)=1$  τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε διαγράμματα τριών μεταβλητών που να την επαληθεύουν.

Τον ίδιο χρόνο, σε ηλικία 22 ετών, ο Philbert Maurice D' Ocagné (Παρίσι, 25 Μαρτίου 1862, Le Havre 23 Σεπτεμβρίου 1938) (βλ. Σχήμα 8) έγραψε το πρώτο του άρθρο στο οποίο πρότεινε μια μέθοδο απεικόνισης των διαγραμμάτων. Με τη χρήση της προβολικής Γεωμετρίας, αντικατέστησε τις καμπύλες στις οποίες δινόταν οι τιμές με σημεία και συνέδεσε τον ορισμό των συνευθειικών σημείων με την κατασκευή των νομογραφημάτων. Όρισε νέα συστήματα συντεταγμένων, όπως του συστήματος των παράλληλων συντεταγμένων (πρωταρχική ιδέα του Plucker 1830). Στο σύστημα αυτό οι συντεταγμένες ενός σημείου σχεδιάζονται με ευθείες παράλληλες στους άξονες και επομένως κάθε ευθεία παράλληλη στους άξονες αποτελεί ένα σημείο του. Το 1891 εξέδωσε το πρώτο του βιβλίο με τίτλο "Nomographie, les calculs usuels effectués au moyen de abaques" στο οποίο γράφει για πρώτη φορά τη λέξη νομογραφία και με αυτόν τον τρόπο την καθιστά ξεχωριστό κλάδο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Δεν παραγκωνίζει τα διαγράμματα του Lalanne. Στο βιβλίο του αναφέρεται περιληπτικά σ' αυτά και θεωρεί ότι αποτελούν ισοδύναμη μορφή των νομογραφημάτων του. Μελετά το πρόβλημα και το κριτήριο του Saint-Robert καθώς και το συμπέρασμα του Massau. Αναφερόμενος σ' αυτό καταλήγει στο συμπέρασμα ότι: «Δεν είναι πάντα εφικτό να γράψουμε μια εξίσωση με τη μορφή οριζουσας 3x3» και ότι «κοινό χαρακτηριστικό των εξισώσεων που γράφονται στη μορφή αυτή είναι ότι ισοδυναμούν με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων».



Σχήμα 8. Philbert Maurice D' Ocagné.

Το 1893, ο Ocagné ταξίδεψε στο Σικάγο για να παρουσιάσει το άρθρο "Nomographie. Mathematical papers read at the International Congress" στο συνέδριο World's Columbian Exposition και το 1896 επισκέφτηκε το Imperial College στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου. Τρία χρόνια αργότερα, εξέδωσε το βιβλίο του με τίτλο "Traité de Nomographie" (Gauthier-Villars) και το επανεξέδωσε το 1921. Στο βιβλίο του παρουσιάζει την ιστορία της επίλυσης εξισώσεων γραφικά μέχρι το τέλος του 19<sup>ου</sup> αι. και νομογραφήματα που επιλύουν τύπους της Μηχανικής.

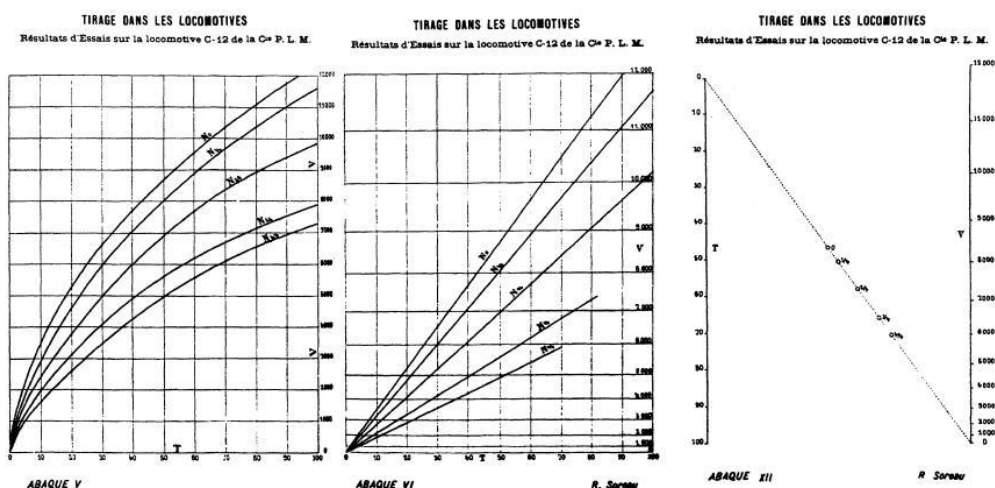
Ο D' Ocagné σπούδασε στο Collégé Chaptal και στο Lycée Fountages. Φοίτησε και αργότερα εργάστηκε ως βοηθός (répétiteur) στο École Polytechnique. Επίσης, εργάστηκε ως μηχανικός ναυτικού ενώ το 1901 ανέλαβε διευθυντής χαρτών και διαγραμμάτων στο Nivellement General, στο τμήμα εδάφους στη Γαλλία. Σπούδασε πολιτικός μηχανικός στο École des Ponts et Chaussées και αργότερα δίδαξε σ' αυτό ως καθηγητής. Το 1912 δίδαξε ως καθηγητής της Γεωμετρίας στο École Polytechnique. Στα χρόνια της ακαδημαϊκής του καριέρας, βοηθούσε τους φοιτητές του να δημοσιεύσουν νέα νομογραφήματα. Το 1920 ανέλαβε τη θέση του επιθεωρητή στην οδοποιία και στην κατασκευή γεφυρών και στις 30 Ιανουαρίου εκλέχθηκε ως μέλος στην Ακαδημία Επιστημών. Σε άρθρα εκείνης της εποχής φαίνεται η επιρροή της ενασχόλησής του με τη νομογραφία. Ο Ocagné δεν ασχολήθηκε μόνο με τα νομογραφήματα αλλά και με τα Μαθηματικά και με την ιστορία των Μαθηματικών. Η δουλειά του δημοσιοποιήθηκε στα παρακάτω περιοδικά:

1. Comptes rendus des Seances de l' Académie des sciences
2. Revue de mathématiques spéciales
3. Nouvelles annals de mathématiques
4. Annales des ponts et chausses
5. Bulletin de la Société mathématique de France
6. Enseignement mathématique
7. Mathésis

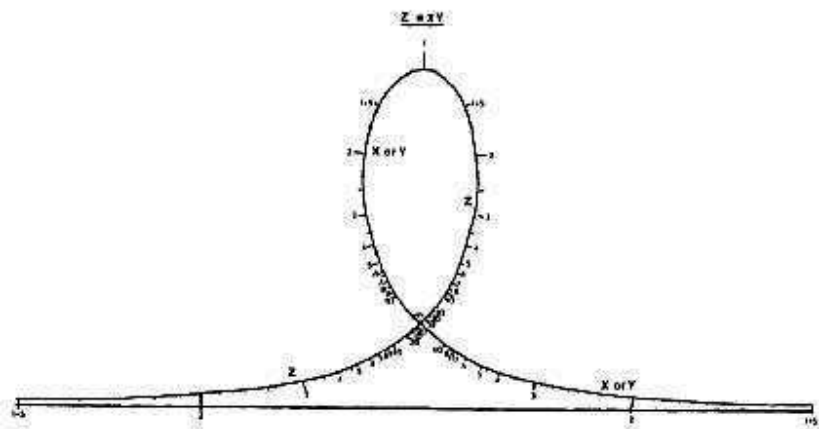
και στα βιβλία του:

1. Le calcul simplifié par des procédés mécaniques et graphiques (εξέδωσε 1893, 2<sup>η</sup> έκδοση 1905, 3<sup>η</sup> έκδοση 1928)
2. Calcul graphique et nomographie (1908, 2<sup>η</sup> έκδοση 1914)
3. Souvenirs et causeries(1928)
4. Hommes et choses de science (3 τόμοι) (1930-1932).

Παράλληλα, το 1902, ο Rodolphe Soreau εξέδωσε το βιβλίο “Contributions á la théorie et aux applications de la nomographie” (Libraire Polytechnique) στο οποίο περιέχεται ένα παράδειγμα διαγράμματος του Lalanne με το αντίστοιχο νομογράφημα του Ocagné (βλ. Σχήμα 9). Εκείνη την εποχή, η νομογραφία χρησιμοποιήθηκε στη στρατιωτική μηχανική και στη ναυσιπλοΐα. Παραδείγματος χάριν, στον υπολογισμό του αζιμούθιου ενός αστεριού με δεδομένα την απόσταση του από τη Γη, την ωρική γωνία και την απόκλιση του (Perret 1904), σε μελέτες του εδάφους για την αντοχή των σιδηροδρομικών γεφυρών στον Καναδά (Boulad 1906), στον υπολογισμό της ταχύτητας που αναπτύσσει το νερό κατά τη ροή του σε ένα κανάλι και κατά την υπερχειλίση των ποταμών στην Αίγυπτο, στον υπολογισμό της βαλλιστικής στην Ισπανία και άλλα (Ocagné 1907). Το 1906 εξέδωσε ένα άρθρο στο οποίο μελετά την διδασκαλία της νομογραφίας και το επόμενο έτος ο Clark από το École Polytechnique κατασκεύασε μια σειρά νομογραφημάτων όπως στο Σχήμα 10. Ακόμη, το 1908 η νομογραφία γίνεται γνωστή στις ΗΠΑ μέσα από μια σειρά άρθρων του Peddle στο “The American Machinistic” (Peddle).



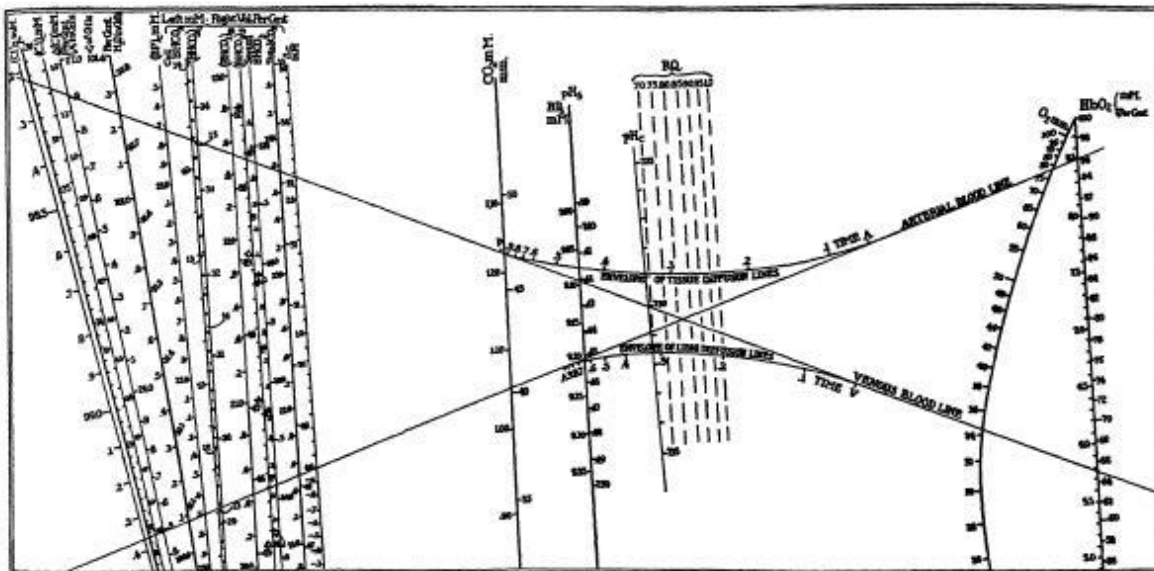
Σχήμα 9.



Σχήμα 10. Νομογράφημα του Clark για τον πολλαπλασιασμό δυο μεταβλητών.

Το 1912 ο Gronwall από το Σικάγο δημοσίευσε σε ένα γαλλικό περιοδικό ένα άρθρο του στο οποίο επισημαίνει τη δυσκολία του προβλήματος του Saint-Robert χρησιμοποιώντας συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Τρία χρόνια μετά, ο Kellogg προσεγγίζει το ίδιο πρόβλημα με στοιχειώδη μαθηματικά τα οποία είναι το ίδιο αξιόλογα με αυτά του Gronwall.

Το 1920 ο Lawrence Joseph Henderson (1878-1942) ο οποίος μελετούσε τη μεταβολή του pH στο αίμα με τη προσθήκη διαφόρων ουσιών κατασκεύασε ένα διάγραμμα παρόμοιο με νομογράφημα (βλ. Σχήμα 11). Επισκεπτόμενος τον E. Wilson στο MIT πληροφορήθηκε για τα νομογραφήματα και το επόμενο έτος επισκέφθηκε τον Ocagné στο École des Ponts et Chaussées στο Παρίσι. Ο Ocagné εξέφρασε τον θαυμασμό του για το διάγραμμα του Henderson και του δίδαξε μεθόδους κατασκευής νομογραφημάτων.



Σχήμα 11. Διάγραμμα του Henderson για το αίμα.

Αργότερα, το πρόβλημα του Saint-Robert απασχόλησε τους M. Warmus (1959) και G. E. Dzhems-Levi από τη Ρωσία (1959). Ο πρώτος προσέγγισε το πρόβλημα αλγεβρικά περιγράφοντας μια διαδικασία μετατροπής της εξίσωσης σε οριζούσα  $3 \times 3$  στην περίπτωση που ήταν εφικτό ενώ στις υπόλοιπες κατασκεύασε πρακτικά νομογραφήματα. Ο δεύτερος χρησιμοποίησε τις προσεγγιστικές μεθόδους του Gorodskii (1939) για να κατασκευάσει νομογραφήματα.

Ακολουθεί ένας κατάλογος βιβλίων και άρθρων που γράφτηκαν για τη νομογραφία,

1. Nomography or the graphic Representation of formulae του Hezlet (1913) (Μετάφραση του βιβλίου του Ocagné με τίτλο *Traité de Nomographie*).
2. A first course in nomography του Brodetsky (1920).
3. *Nomographie on traité des Abaques* (2 τόμοι) του Soreau (1921).
4. The nomogram των Allcock H. J. , Reginald Jones (1932) και επανέκδοση το 1963 από κοινού με τον J. G. L. Michel.
5. Συλλογή νομογραφημάτων και σχεδίων των νομογραφημάτων στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας (1950).
6. Δημοσίευση στο περιοδικό *Vyshislitel'naya Matematika* (τόμος 4) με θέμα τη νομογραφία (νομογραφήματα χρήσιμα στις βιομηχανίες πετρελαίου και χημικών) (1959).
7. Νομογράφημα του Van Gerdenen (1977) για τη μορφομετρική ανάλυση αμμοχάλικου.
8. A graphical procedure for computing the effective rate of interest, στο περιοδικό *Bulletin of the Institute of Mathematics and its applications* (1980). Το άρθρο περιέχει νομογραφήματα υπολογισμού ποσοτήτων με τρόπο ταχύτερο από ότι ο υπολογισμός με ηλεκτρονικό υπολογιστή.



## ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

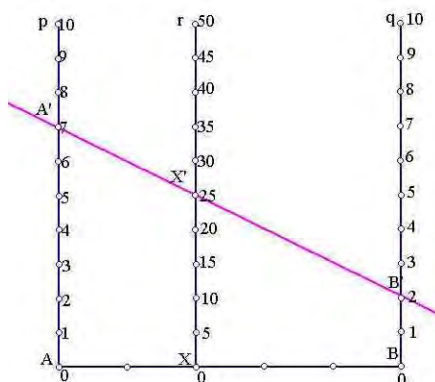
Το κεφάλαιο αυτό μελετά με χρήση νομογραφημάτων τον υπολογισμό στοιχειωδών μαθηματικών εκφράσεων όπως το άθροισμα και το γινόμενο δυο αριθμών ή τη δύναμη ενός αριθμού.

### 2.1 Γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσότερων αριθμών με σταθερούς συντελεστές.

Αρχικά, θα μελετήσουμε νομογραφήματα που υπολογίζουν τον γραμμικό συνδυασμό δύο αριθμών. Έστω  $\alpha, \beta$  οι αριθμοί και  $\lambda, \mu$  οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές τους. Αν  $x$  είναι η τιμή της ποσότητας  $\lambda\alpha + \mu\beta$  τότε έχουμε το παρακάτω νομογράφημα:

Παίρνουμε άξονες  $Ap \perp AB, Bq \perp AB$  και τους διαβαθμίζουμε με την ίδια μονάδα μέτρησης (βλ. Σχήματα 12, 14 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 1). Το  $X$  χωρίζει το  $AB$  έτσι ώστε  $AX : BX = \mu : \lambda$ . Παίρνουμε άξονα  $Xr \perp AB$  και τον διαβαθμίζουμε με μονάδα μέτρησης ίση με το  $\frac{1}{\lambda + \mu}$  της αρχικής μονάδας. Αν  $AA' = \alpha, BB' = \beta$  και αν η ευθεία  $A'B'$  τέμνει τον

$Xr$  στο  $X'$ , τότε το  $XX'$  δίνει την τιμή του  $x = \lambda\alpha + \mu\beta$ .



Σχήμα 12.

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $\lambda > 0$  και  $\mu > 0$  είναι απλό να αποδείξουμε ότι

$$XX' = \frac{\lambda\alpha + \mu\beta}{\lambda + \mu},$$

οπότε ως προς τη διαβάθμιση του άξονα  $Xr$  είναι  $x = \lambda\alpha + \mu\beta$ .

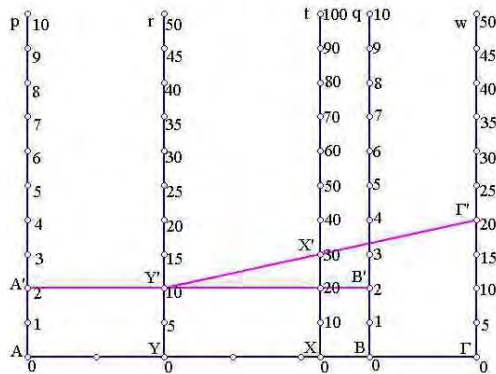
Για  $\lambda > 0$  και  $\mu < 0$  έχουμε δύο επιλογές: είτε το  $X$  χωρίζει εξωτερικά το  $AB$  σε λόγο  $\mu : \lambda$  είτε κάνουμε το αντίστοιχο νομογράφημα για  $-\mu$  και το  $\beta$  να διαβάζεται ως  $-\beta$  στον άξονα  $Bq$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι η τοποθέτηση του σημείου  $X$  ως μέσο του  $AB$  (βλ. Σχήμα 15 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 2). Οι άξονες  $Ap, Bq$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης και ο  $Xr$  με το μισό της αρχικής μονάδας. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται  $\lambda\alpha$  και  $\mu\beta$  αντίστοιχα.

Γενικότερα, ο υπολογισμός της τιμής  $\lambda\alpha + \mu\beta + c$ , όπου  $c$  σταθερά, μπορεί είτε να βρεθεί με τα παραπάνω νομογραφήματα στα οποία η τιμή  $\alpha$  θα διαβάζεται  $\alpha - \frac{c}{\lambda}$  είτε με ένα νέο νομογράφημα το οποίο θα υπολογίζει παραστάσεις της μορ-

φής  $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$  με  $\alpha, \beta, \gamma$  μεταβλητά και  $\lambda, \mu, \nu$  σταθερά. Αν  $x$  είναι η τιμή της παράστασης τότε έχουμε το νομογράφημα:



Σχήμα 13.

Παίρνουμε σημεία  $A, B, \Gamma$  συνευθειακά και τους άξονες  $Ap, Bq, \Gamma w \perp A\Gamma$  (βλ. Σχήματα 13, 16 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 3). Οι άξονες  $Ap$  και  $Bq$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο  $\Gamma w$  με μονάδα μέτρησης ίση με το  $\frac{1}{\lambda+\mu}$  της αρχικής. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται αντίστοιχα στους άξονες  $Ap, Bq$  και  $\Gamma w$ . Το σημείο  $Y$  χωρίζει το  $AB$

σε λόγο  $\mu : \lambda$ . Παίρνουμε άξονα  $Yr \perp A\Gamma$  στον οποίο διαβάσκουμε την τιμή  $\lambda+\mu$  και τον διαβαθμίζουμε με τη μονάδα μέτρησης του  $\Gamma w$ . Το σημείο  $X$  χωρίζει τη  $Y\Gamma$  σε λόγο  $\nu$ . Παίρνουμε άξονα  $Xt \perp Y\Gamma$  στον οποίο διαβάσκουμε τη ζητούμενη τιμή και τον διαβαθμίζουμε με μονάδα μέτρησης ίση με το  $\frac{1}{1+\nu}$  αυτής του άξονα  $\Gamma w$ .

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $\lambda > 0, \mu > 0$  και  $\nu > 0$  όπου  $AA' = \alpha, BB' = \beta$  και  $\Gamma\Gamma' = \gamma$  και η  $A'B'$  τέμνει τον  $Yr$  στο  $YY' = y$ , έχουμε  $y = \lambda + \mu$ . Στη συνέχεια, η  $Y'\Gamma'$  τέμνει τον  $Xt$  στο  $X'$ , με  $XX' = x$ . Τότε, έχουμε  $x = y + \nu\gamma$  δηλαδή,  $x = \lambda + \mu + \nu\gamma$ . Όμοια εργαζόμαστε και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

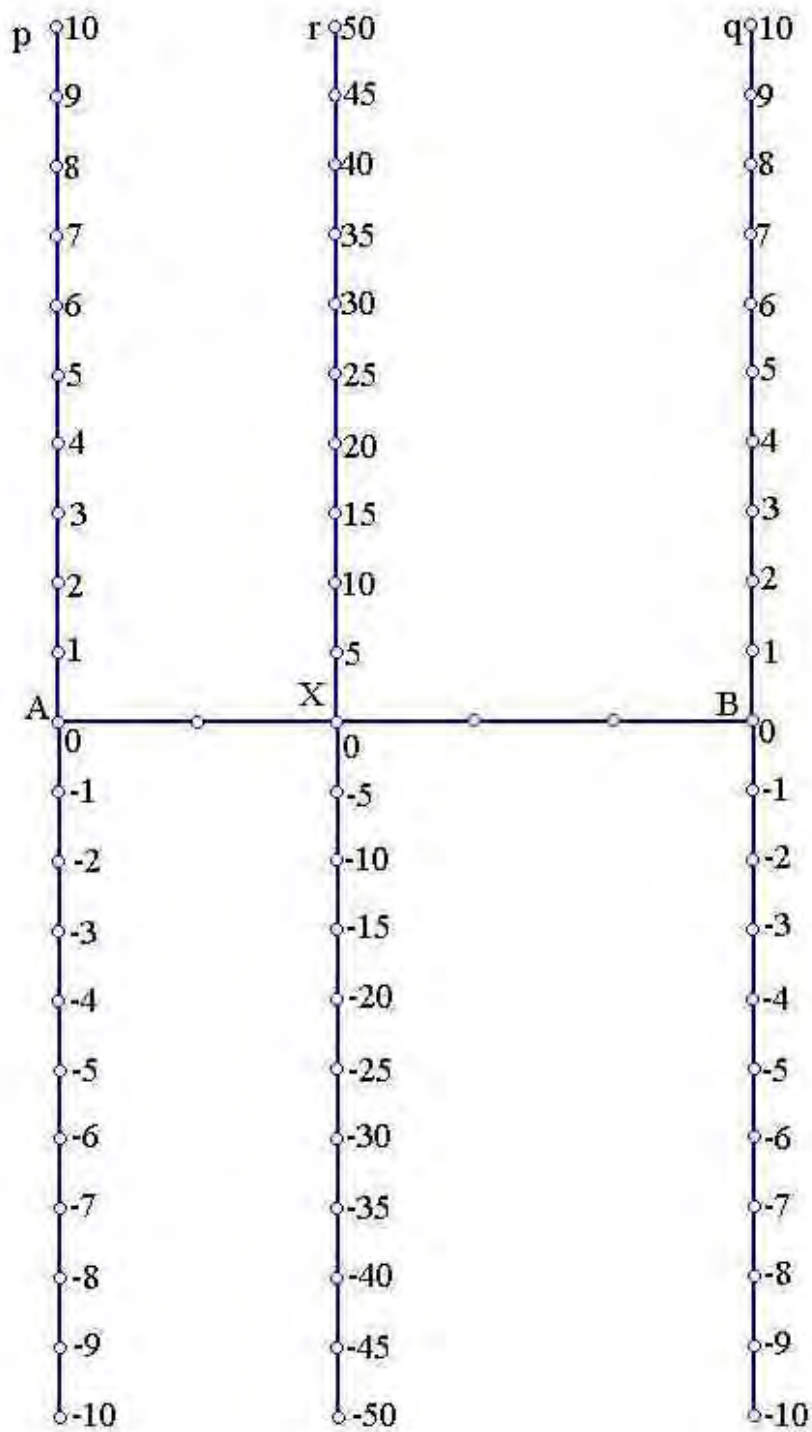
Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι να πάρουμε το σημείο  $Y$  μέσο του  $AB$  και το σημείο  $X$  μέσο του  $Y\Gamma$ . Οι άξονες  $Ap$  και  $Bq$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι άξονες  $Xt$  και  $\Gamma w$  διαβαθμίζονται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής ενώ ο  $Xt$  με το  $\frac{1}{4}$  της. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται  $\lambda, \mu$  και  $\nu$  αντίστοιχα.

Όμοια έχουμε το νομογράφημα που υπολογίζει την ποσότητα  $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \dots + \kappa\delta + c$  με  $\lambda, \mu, \nu, \dots, \kappa, c$  σταθερά και  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$  μεταβλητά.

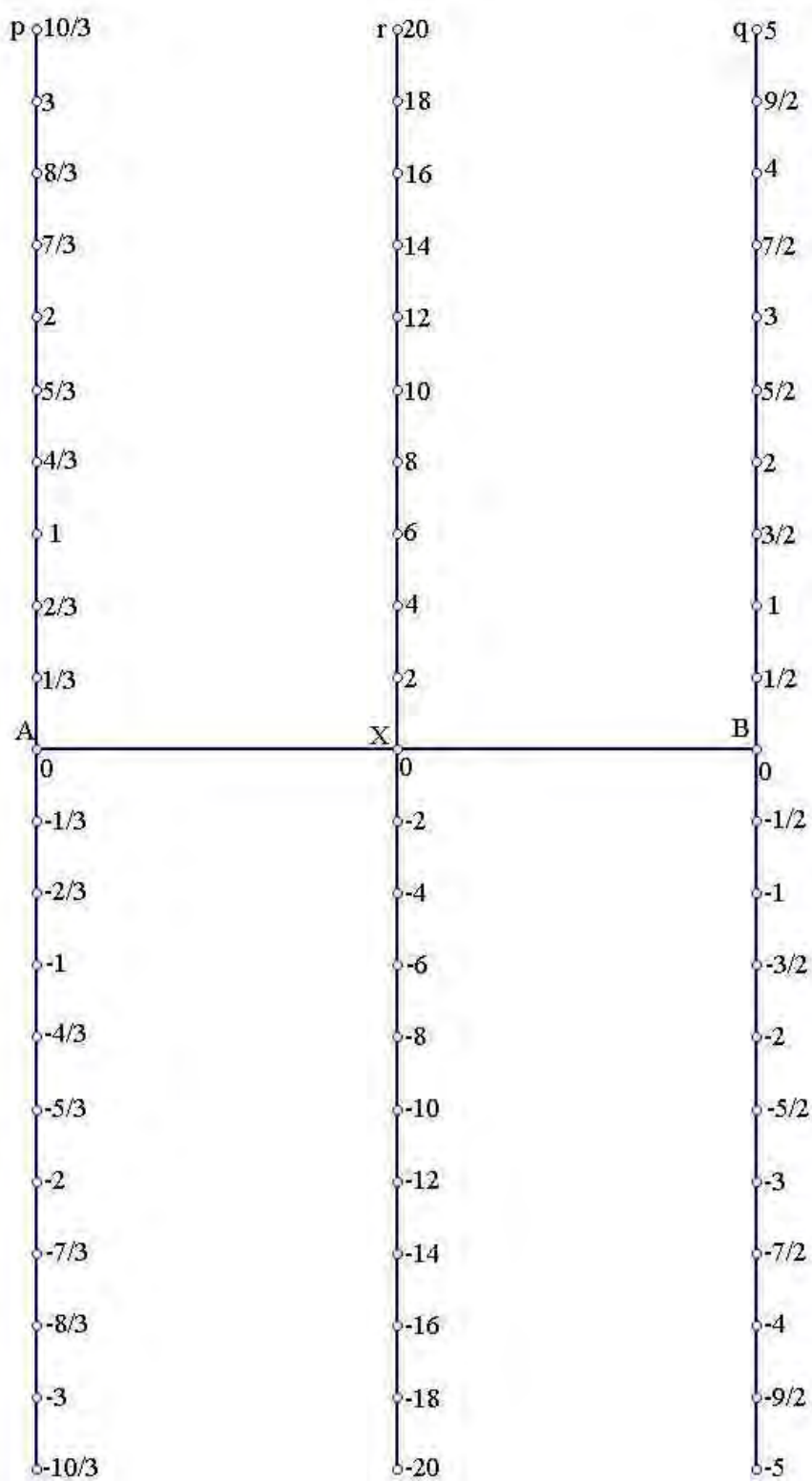
## 2.2 Ειδική περίπτωση: υπολογισμός της παράστασης $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\delta}}$ για δοθέντα

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ .

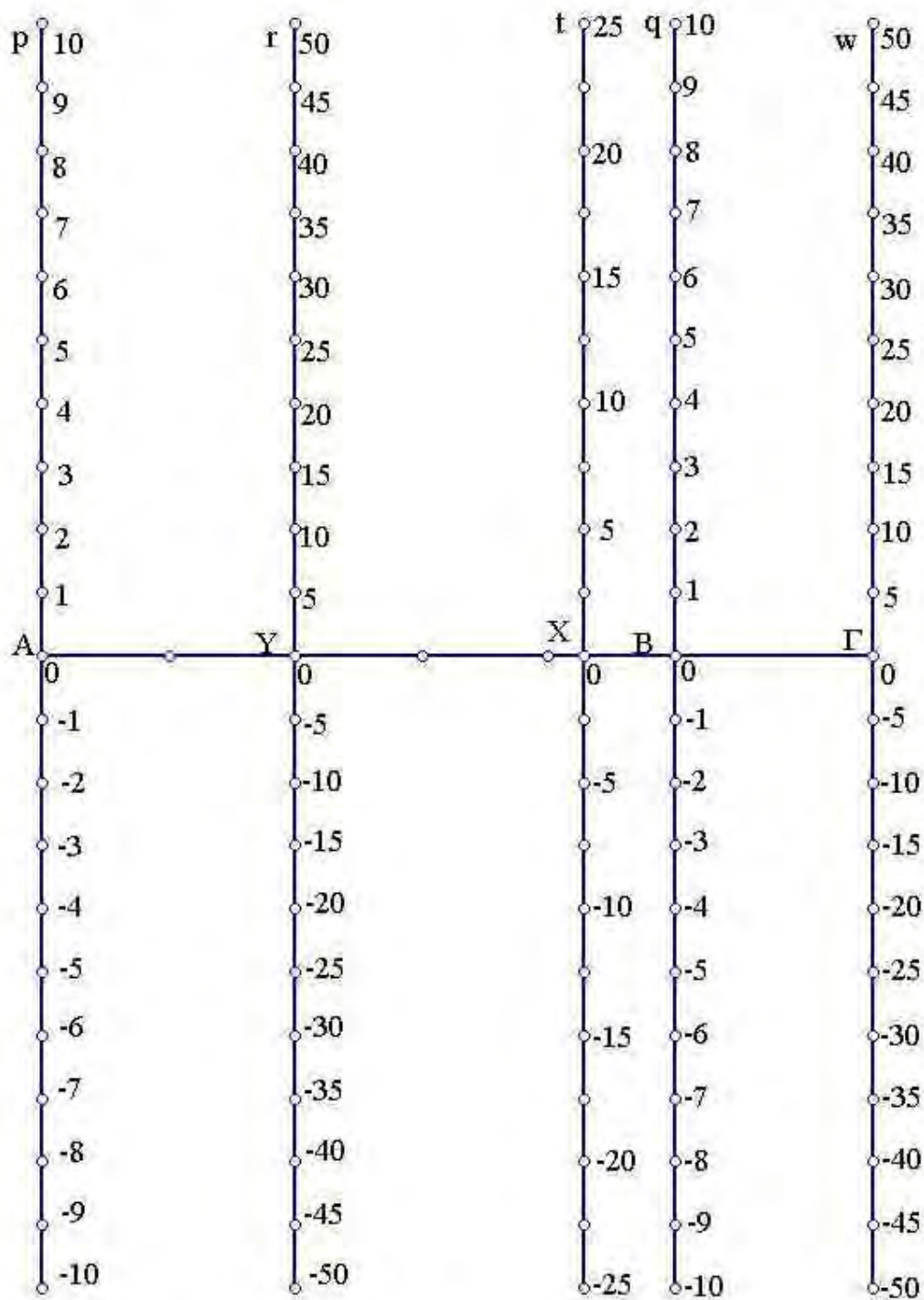
Γράφοντας  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\delta}$  χρειαζόμαστε την τιμή  $x$ . Η επίλυση του τύπου γίνεται με τα νομογραφήματα της πρόσθεσης στα οποία κάθε τιμή  $\alpha$  και ο άγνωστος  $x$  διαβάσκονται ως  $\frac{1}{\alpha}$  και  $\frac{1}{x}$  αντίστοιχα.



Σχήμα 14. Νομογράφημα τον υπολογισμό της τιμής  $3\alpha+2\beta$  με  $AX:XB=2:3$ . Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  και  $3\alpha+2\beta$  διαβάζονται, αντιστοίχα, στους άξονες Αρ, Βq και Χr.



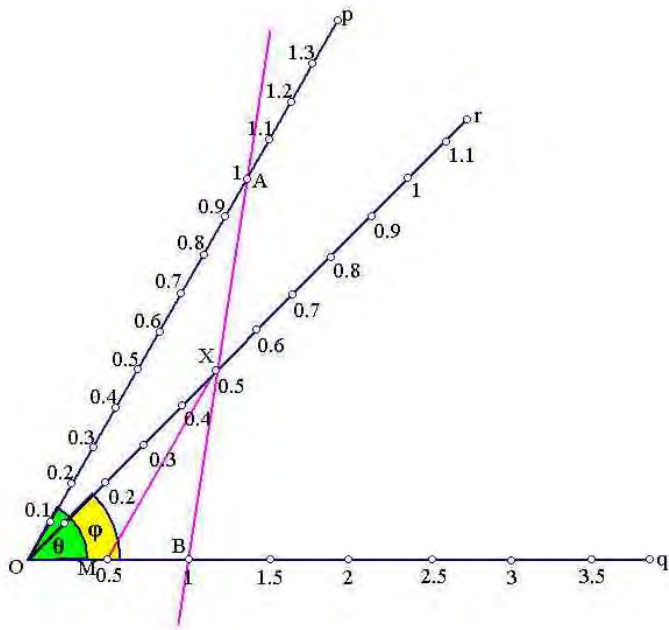
Σχήμα 15. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $3\alpha + 2\beta$  με  $X$  το μέσο του  $AB$ . Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  και  $3\alpha + 2\beta$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $Ap$ ,  $Bq$  και  $Xr$ .



Σχήμα 16. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $3\alpha+2\beta+\gamma$  με λόγους  $AY : YB=2 : 3$ ,  $YX : X\Gamma=1$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $3\alpha+2\beta$ ,  $\gamma$  και  $3\alpha+2\beta+\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $A\rho$ ,  $Bq$ ,  $Yr$ ,  $\Gamma w$  και  $Xt$ .

Άλλος τρόπος κατασκευής νομογραφήματος για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι η χρήση αξόνων που διέρχονται από ένα κοινό σημείο  $O$ . Πρώτα θα δούμε την περίπτωση όπου έχουμε μόνο δύο μεταβλητές  $\alpha$  και  $\beta$ .

Παίρνουμε άξονες  $Op, Oq$  έτσι ώστε  $\widehat{pOq} = \theta$ , με  $\theta$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήματα 17, 18 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 4). Οι άξονες  $Op, Oq$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες  $Op$  και  $Oq$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα. Παίρνουμε άξονα  $O\Gamma$  έτσι ώστε  $\widehat{\Gamma Oq} = \varphi$ , με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας και τον διαβαθμίζουμε με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα  $O\Gamma$  διαβάζουμε την τιμή  $x$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta, x$  διαβάζονται ως  $\alpha\eta\mu\varphi, \beta\eta\mu(\theta-\varphi), x\eta\mu\theta$  αντίστοιχα.



Σχήμα 17.

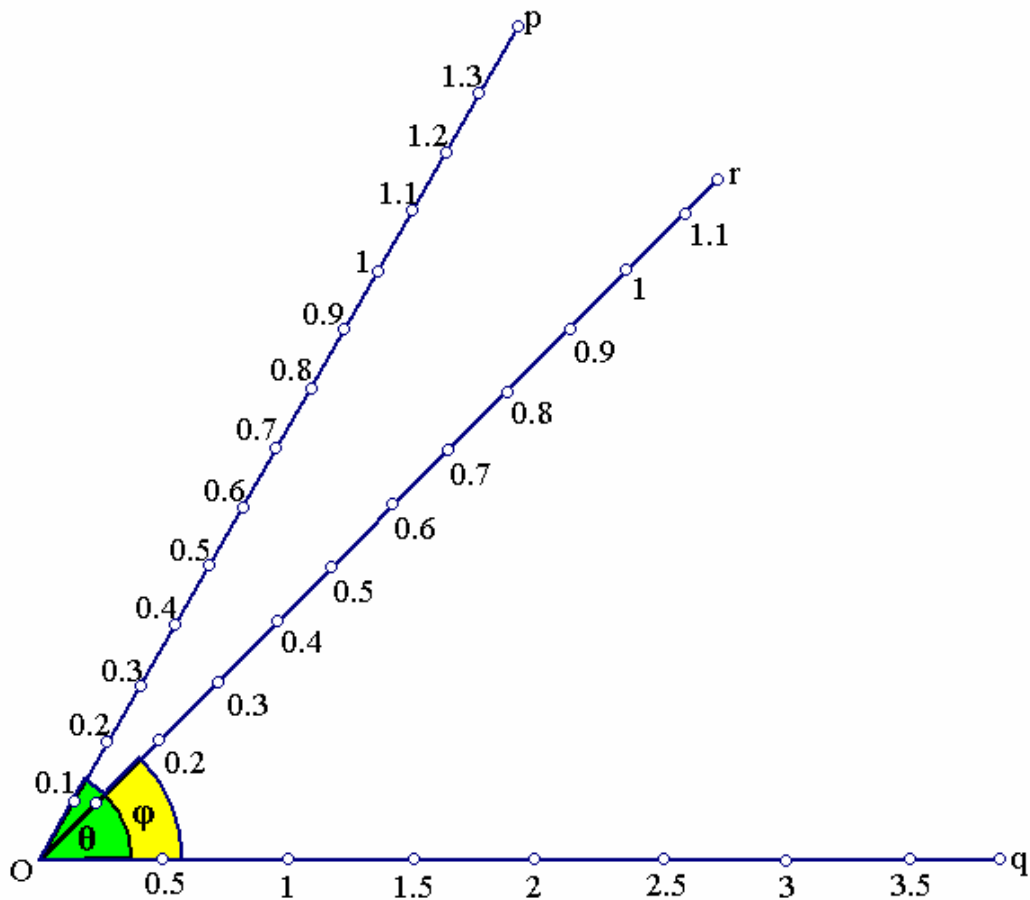
*Απόδειξη.* Παίρνουμε  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει τον  $O\Gamma$  στο  $X$ . Φέρνουμε  $Xt \parallel Op$ . Η  $Xt$  τέμνει τον  $Oq$  στο  $M$ . Απόμνη, ισχύει

$$\frac{XM}{OA} = \frac{MB}{OB} \quad \text{και} \quad \frac{XM}{\eta\mu\varphi} = \frac{OX}{\eta\mu\theta} = \frac{OM}{\eta\mu(\theta-\varphi)},$$

δηλαδή, έχουμε

$$\frac{OX\eta\mu\varphi}{OA\eta\mu\theta} = \frac{OB - \frac{OX\eta\mu(\theta-\varphi)}{\eta\mu\theta}}{OB}.$$

Τότε, έχουμε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .



Σχήμα 18. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  έτσι ώστε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ,  $\theta=60^\circ$  και  $\varphi=45^\circ$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $x$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $Op$ ,  $Oq$  και  $Or$ .

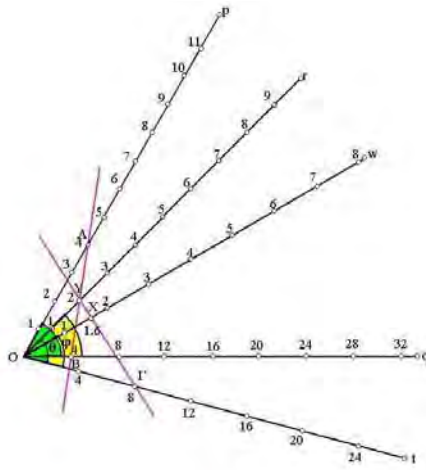
Το παραπάνω νομογράφημα επεκτείνεται και για την επίλυση του ίδιου τύπου με περισσότερες τιμές. Θα δούμε την περίπτωση που έχουμε τρεις, τις  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  (βλ. Σχήματα 19, 20 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 5). Έστω  $\theta$ ,  $\varphi$  γνωστά μέτρα γωνίας με  $\theta > \varphi$ . Παίρνουμε άξονες  $Op$ ,  $Oq$  και  $Or$  έτσι ώστε  $\widehat{Oq} = \theta$  και  $\widehat{Or} = \varphi$ . Οι άξονες  $Op$ ,  $Oq$ ,  $Or$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης και οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$  διαβάζονται σ' αυτούς, αντίστοιχα. Παίρνουμε άξονες  $Ot$ ,  $Ow$  έτσι ώστε  $\widehat{Ot} = \theta$  και  $\widehat{Ow} = \varphi$ . Οι άξονες  $Ot$  και  $Ow$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης και διαβάζονται οι τιμές  $\gamma$ ,  $x$  αντίστοιχα. Ακόμη, οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $x$  διαβάζονται, αντίστοιχα,  $\frac{\alpha \eta \mu \varphi}{\eta \mu \theta}$ ,  $\frac{\beta \eta \mu(\theta - \varphi)}{\eta \mu \theta}$ ,  $\frac{\gamma \eta \mu(\theta - \varphi)}{\eta \mu \varphi}$  και  $\frac{x \eta \mu \theta}{\eta \mu \varphi}$ .

*Απόδειξη.* Παίρνουμε  $OA = \alpha$ ,  $OB = \beta$  και  $OG = \gamma$ . Η  $AB$  τέμνει τον  $OG$  στο  $Y$  με  $OY = y$ .

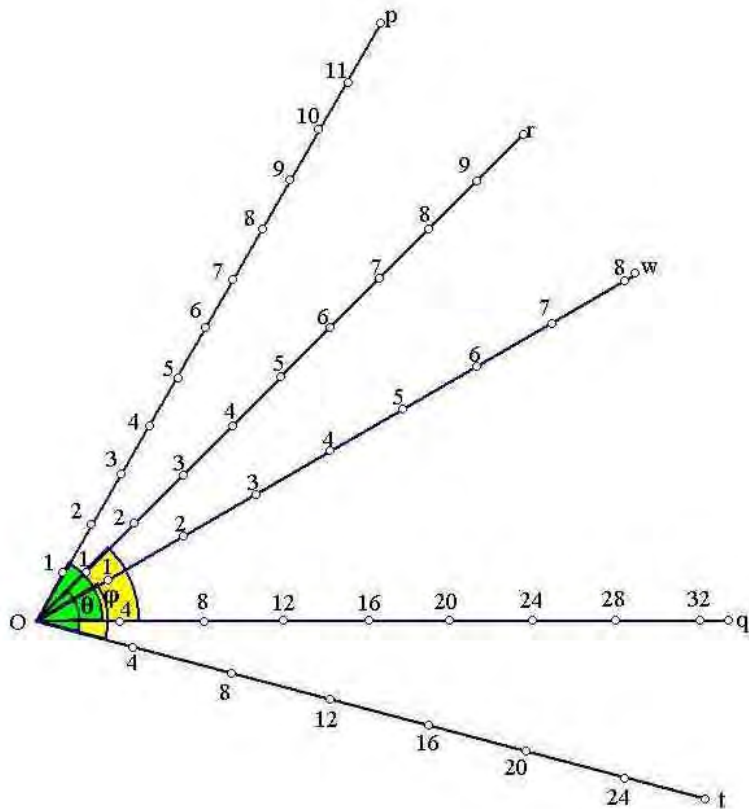
Τότε, έχουμε  $\frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .

Ακόμη, η  $Y\Gamma$  τέμνει τον  $Ow$  στο  $X$  με  $OX = x$  και έχουμε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{\gamma}$ .

Οπότε ισχύει ο τύπος  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ .



Σχήμα 19.



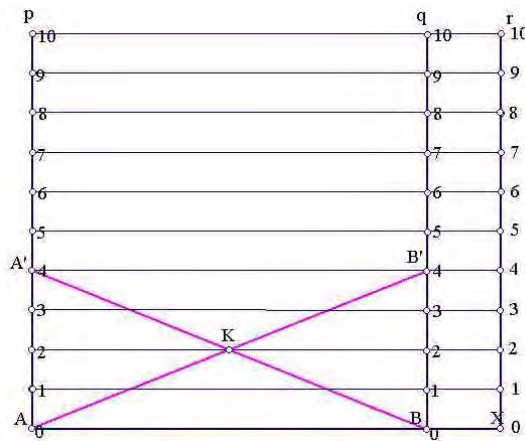
Σχήμα 20. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  έτσι ώστε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ ,  $\theta=60^\circ$ ,  $\varphi=45^\circ$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ,  $\gamma$  και  $x$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $Op$ ,  $Oq$ ,  $Or$ ,  $Ot$  και  $Ow$ .



Άλλο νομογράφημα για τον υπολογισμό του  $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$  είναι το παρακάτω: Παίρνουμε  $Ap, Bq \perp AB$  με  $AB=1$ , με  $l$  γνωστό

μήκος (βλ. Σχήματα 21, 23 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 6). Παίρνουμε σημείο  $X$  εξωτερικό του  $AB$  και τον αντίστοιχο άξονα  $Xr$  με  $Xr \perp AB$ . Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, x$  διαβάζονται στους άξονες  $Ap, Bq, Xr$  αντίστοιχα. Από κάθε τιμή  $x$  φέρνουμε ευθεία  $\epsilon_x \parallel AB$ .

Παίρνουμε  $AA'=\alpha, BB'=\beta$ . Οι  $A'B, AB'$  τέμνονται στο  $K$ . Το σημείο  $K$  ανήκει σε κάποια  $\epsilon_x$  με δεδομένο  $x$ . Τότε, έχουμε την τιμή  $x$  να δίνει το ζητούμενο.



Σχήμα 21.

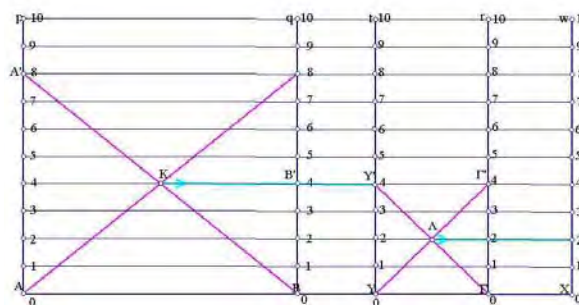
*Απόδειξη.* Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή  $A$  και άξονες των  $x$  και  $y$  τους  $Ap$  και  $Bq$  αντίστοιχα. Οι  $AB', A'B$  με εξισώσεις  $y = \frac{\beta}{1}x, y = -\frac{\alpha}{1}x + \alpha$ , αντίστοιχα, τέμνονται στο  $K$ . Η τεταγμένη  $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$  του  $K$  είναι η τιμή  $x$ . Οπότε  $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

τε έχουμε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .

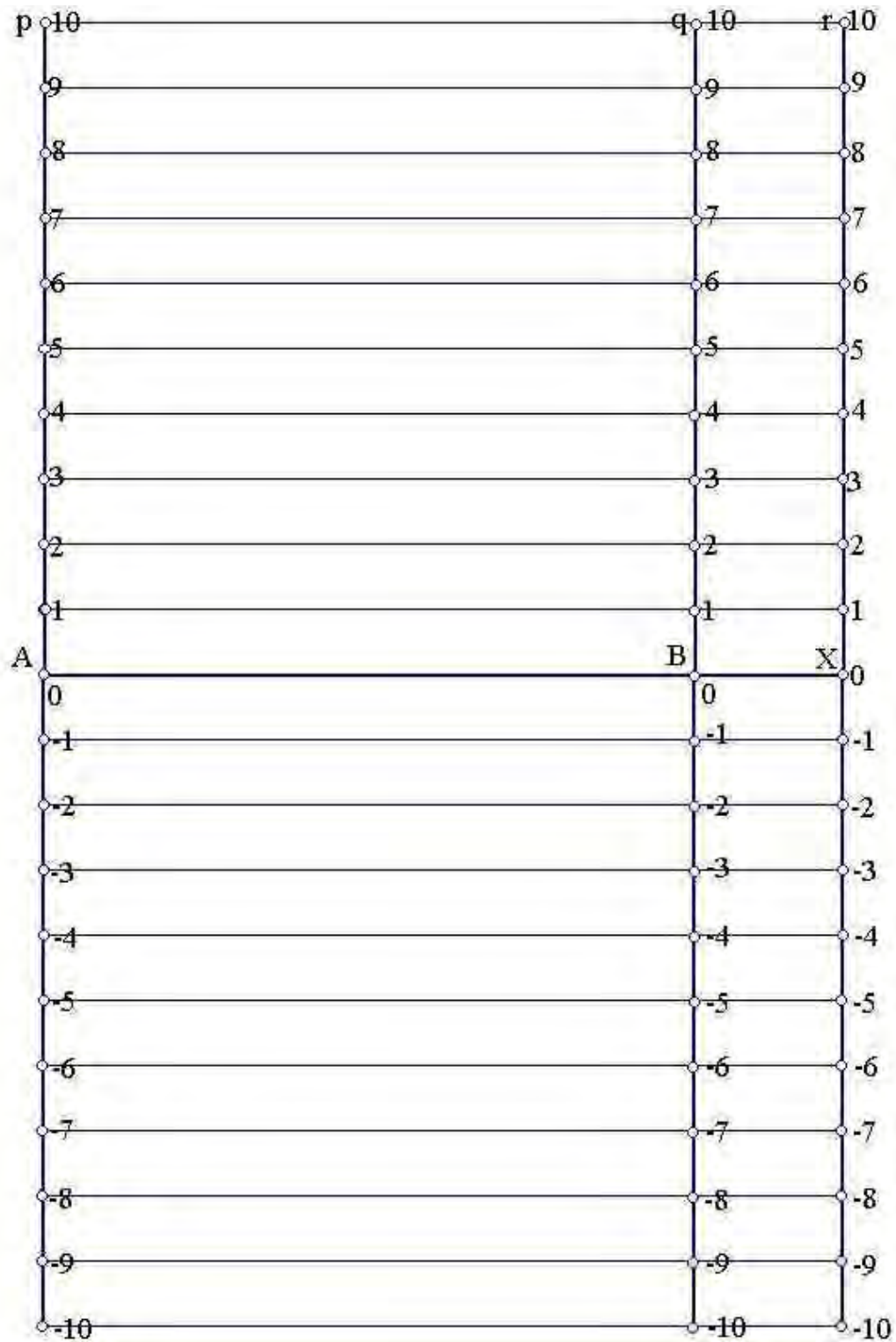
Γενικότερα, για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  από τον τύπο  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\delta}$  έχουμε ένα νομογράφημα παρόμοιο με

αυτό των τριών μεταβλητών,  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ .

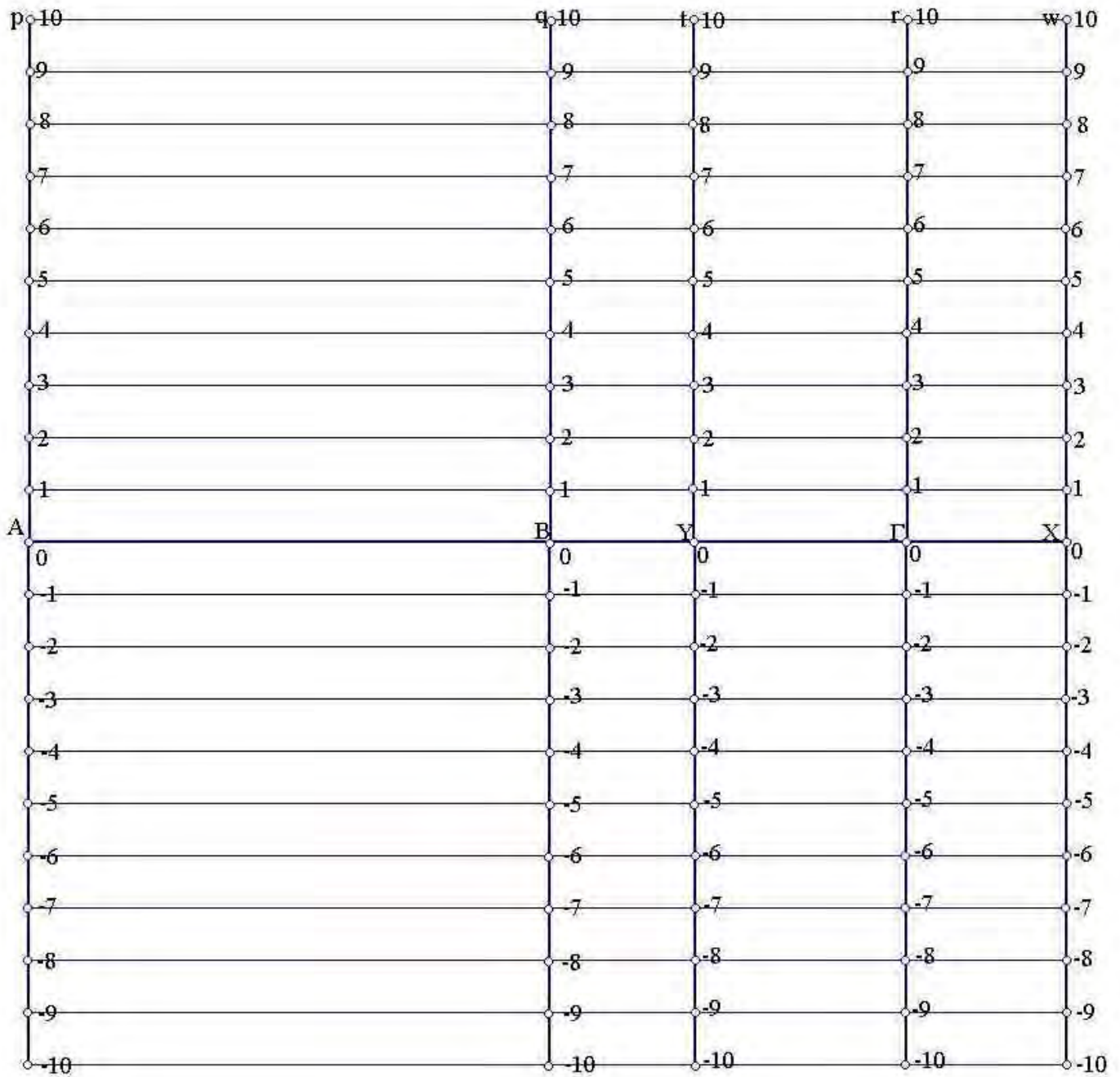
Παίρνουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  $AB, B\Gamma$  έτσι ώστε  $AB = 1, B\Gamma = l'$  με  $l, l'$  γνωστά μήκη (βλ. Σχήματα 22, 24 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 7) και σημεία  $Y, X$  σημεία του  $AG$  (εδώ,  $Y$  εσωτερικό σημείο του  $B\Gamma$  και  $X$  εξωτερικό σημείο του  $AG$ ). Ορίζουμε τους άξονες  $Ap, Bq, Gr, Yt$  και  $Xw \perp AG$  οι οποίοι διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές που διαβάζονται σ' αυτούς είναι κατά σειρά οι  $\alpha, \beta, \gamma, y$  και  $x$ . Από κάθε τιμή  $x$  φέρνουμε ευθεία  $\epsilon_x \parallel AG$ .



Σχήμα 22.



Σχήμα 23. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  έτσι ώστε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $x$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $A_p$ ,  $B_q$  και  $X_r$ .



Σχήμα 24. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  έτσι ώστε  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ,  $\gamma$  και  $x$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες Ap, Bq, Yt, Γr και Xw.

*Απόδειξη.* Παίρνουμε  $AA'=\alpha$ ,  $BB'=\beta$  και  $\Gamma\Gamma'=\gamma$ . Οι  $AB'$ ,  $A'B$  τέμνονται στο  $K$ . Το  $K$  διέρχεται από την  $\varepsilon_y$  η οποία τέμνει τον  $Yt$  στο  $Y'$  με  $YY'=y$ . Τότε, έχουμε

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

Οι  $Y'\Gamma$ ,  $Y'\Gamma'$  τέμνονται στο  $\Lambda$ . Το  $\Lambda$  διέρχεται από την  $\varepsilon_x$  η οποία τέμνει τον  $Xw$  στο  $X'$  με  $XX'=x$  και

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma},$$

οπότε έχουμε

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

### 2.3 Πολλαπλασιασμός δύο ή περισσότερων αριθμών.

Ορίζουμε  $x$  την ποσότητα  $\alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu \dots \delta^x$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$  μεταβλητά και  $\lambda, \mu, \nu, \dots, x$  σταθερά. Η παραπάνω ποσότητα μπορεί να υπολογιστεί με τα νομογραφήματα της πρόσθεσης αν κάθε τιμή  $\alpha$  διαβαστεί ως  $\log \alpha$ .

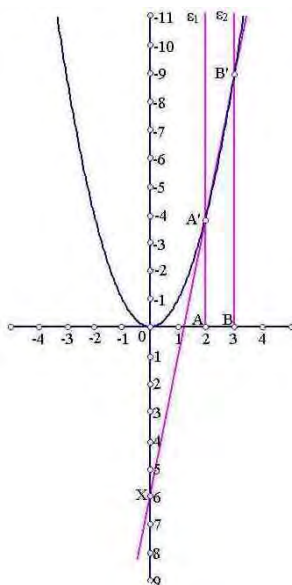
Άλλο νομογράφημα για τον πολλαπλασιασμό δύο ή περισσότερων αριθμών είναι βασισμένο στο γράφημα της παραβολής. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση με δύο αριθμούς  $\alpha, \beta$  και σταθερές  $\lambda=\mu=1$ . Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την παραβολή  $y=x^2$  (βλ. Σχήματα 25, 27 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 8). Διαβαθμίζουμε τους άξονες με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $x$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha, \beta$  παίρνοντας  $OA=\alpha$  και  $OB=\beta$  με  $\beta > \alpha > 0$ . Από τα σημεία  $A$  και  $B$  φέρνουμε ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  παράλληλη του άξονα των  $y$  οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα  $A', B'$  αντίστοιχα. Η  $A'B'$  τέμνει στον άξονα των  $y$  στο  $X$ . Η τεταγμένη του  $X$  διαβάζεται ως  $-x$ .

*Απόδειξη.* Η  $A'B'$  έχει εξίσωση

$$y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$$

και τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $X$ , με  $OX=-\alpha\beta$ , δηλαδή τη ζητούμενη τιμή  $x$ . Άρα, έχουμε  $x=\alpha\beta$ .

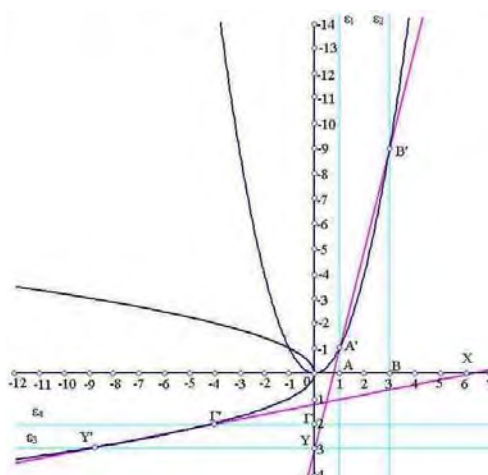
Όμοια, εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.



Σχήμα 25.

Παραλλαγή του νομογραφήματος είναι να πάρουμε την παραβολή  $y=-x^2$ . Αν θέλουμε να βρούμε την τιμή  $x=\alpha\beta$  με  $c$  σταθερά, σχεδιάζουμε την παραβολή  $y=cx^2$  στη θέση της  $y=x^2$ . Γενικότερα, αν έχουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$\alpha\beta\gamma\dots\delta$ , παίρνουμε το παρακάτω νομογράφημα. Συγκεκριμένα, θα δούμε την περίπτωση που έχουμε τρεις όρους,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις παραβολές  $y=x^2$  και  $x=-y^2$  (βλ. Σχήματα 26, 28 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 9). Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $x$  διαβάζονται οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\alpha\beta$  ενώ στον άξονα των  $y$  οι τιμές  $\gamma$  και  $\alpha\beta$ . Ακόμη, οι τιμές  $\gamma$  και  $\alpha\beta$  του άξονα των  $y$  διαβάζονται ως  $-\gamma$  και  $-\alpha\beta$ . Παίρνουμε  $OA=\alpha$ ,  $OB=\beta$  και  $OG=\gamma$ . Στον άξονα των  $x$  παίρνουμε  $OA$  και  $OB$ . Από τα  $A$ ,  $B$  φέρνουμε ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2 \perp x'x$ . Οι  $\epsilon_1, \epsilon_2$  τέμνουν την  $y=x^2$  στα  $A', B'$ . Η  $A'B'$  τέμνει τον άξονα των  $y$  στο σημείο  $Y$ . Παίρνουμε  $OG$  στον άξονα των  $y$ . Από τα  $Y, G$  φέρνουμε  $\epsilon_3, \epsilon_4 \perp y'y$ . Οι  $\epsilon_3, \epsilon_4$  τέμνουν την  $x=-y^2$  στα  $Y', G'$ . Η  $Y'G'$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $X$  με  $OX=x$ . Τότε, έχουμε ότι η  $x$  είναι η ζητούμενη τιμή.



Σχήμα 26.

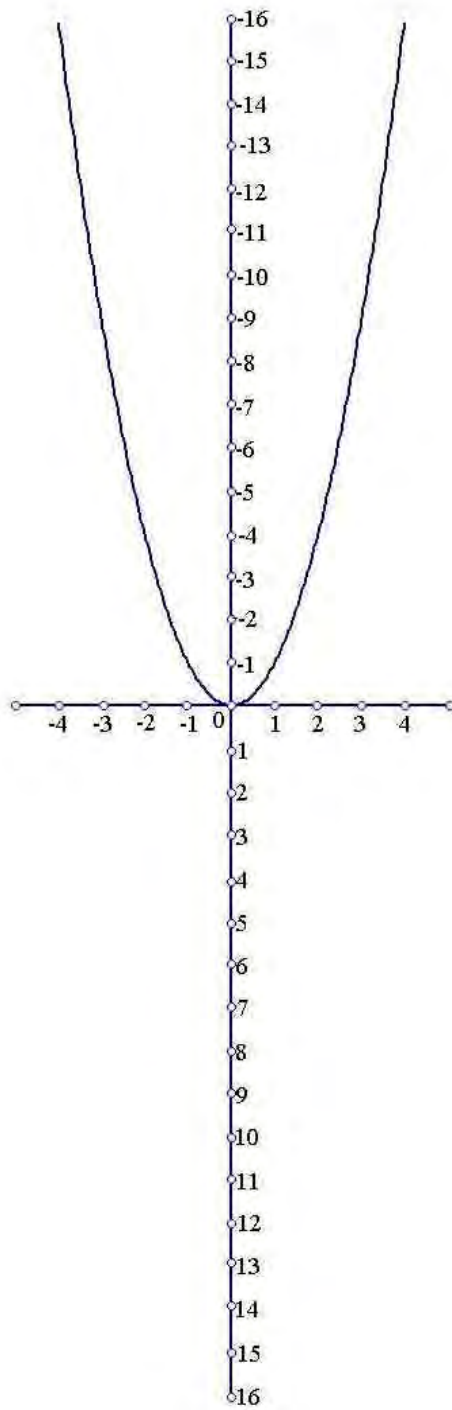
*Απόδειξη.* Για  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  έχουμε ότι η  $A'B'$   $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$  τέμνει τον  $y'y$  στο σημείο  $Y$  και έχουμε  $OY=\alpha\beta$ . Η  $G'Y'$  έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{\alpha\beta + \gamma} x - \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma}$$

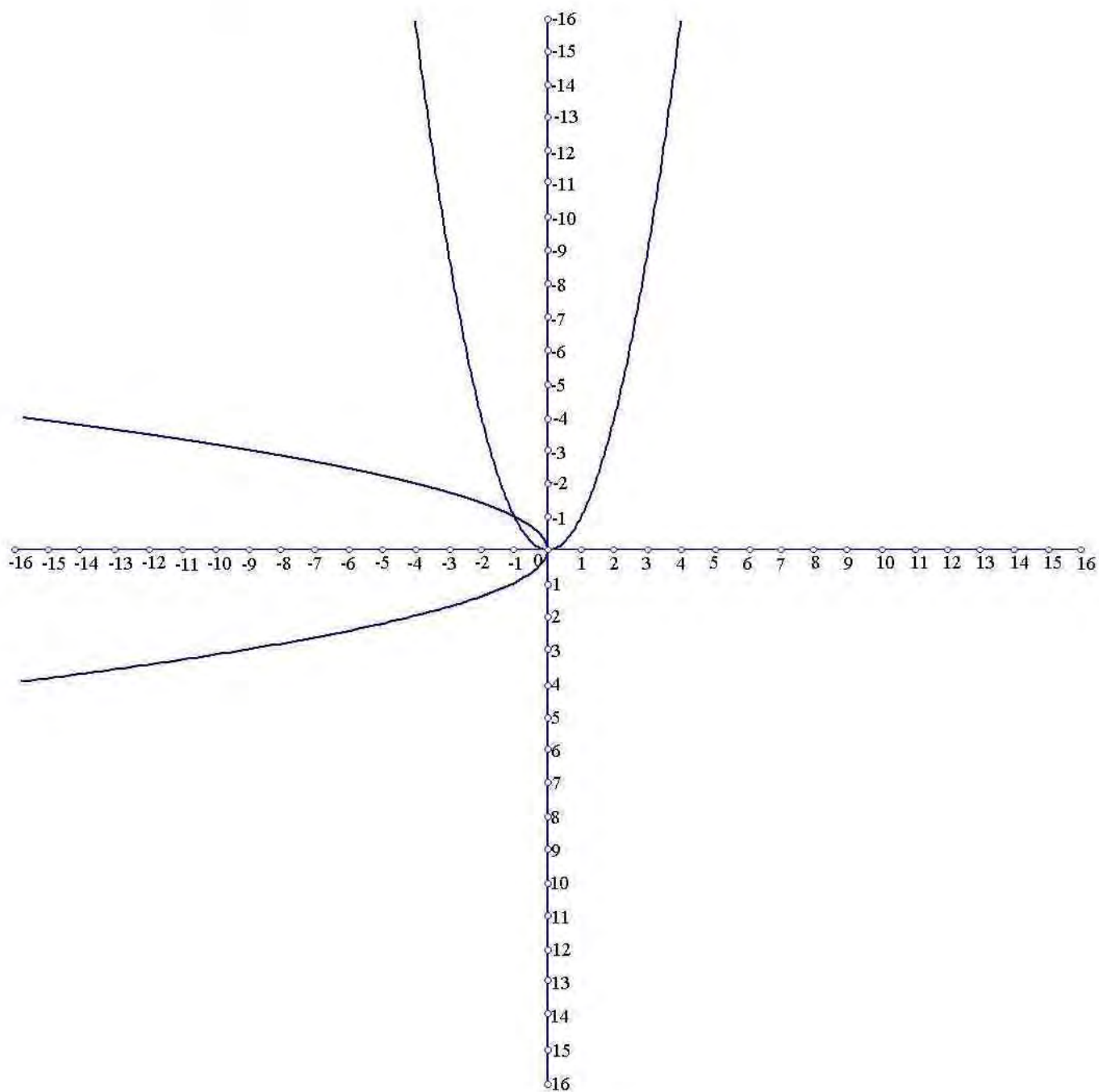
και τέμνει τον  $x'x$  στο  $X$  με  $OX=\alpha\beta\gamma$ . Άρα, έχουμε  $x=\alpha\beta\gamma$ . Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

## 2.4 Ειδική περίπτωση: επίλυση του τύπου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ με $\alpha, \beta, \gamma$ μεταβλητά και $x$ το ζητούμενο.

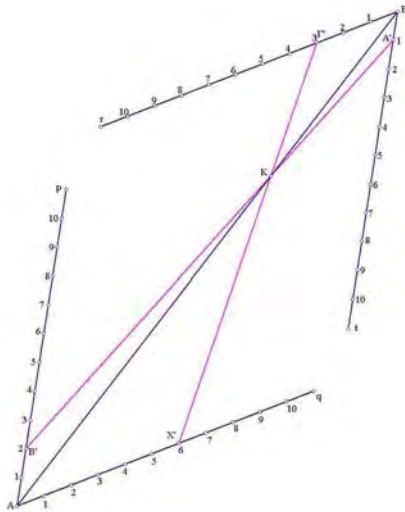
Ο παραπάνω τύπος μπορεί να υπολογισθεί με νομογραφήματα του πολλαπλασιασμού με τρεις μεταβλητές  $\alpha, \beta, \gamma$  διαβάζοντας την τιμή  $\alpha$  ως  $\frac{1}{\alpha}$ . Άλλα νομογραφήματα είναι τα παρακάτω τα οποία βασίζονται στην ομοιότητα σχημάτων. Συγκεκριμένα, παίρνουμε άξονες  $A\rho, A\eta$  έτσι ώστε  $\rho\hat{A}\eta = \varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήματα 29, 31 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 10). Παίρνουμε τμήμα  $AB$  και άξονες  $B\rho, B\eta$  έτσι ώστε  $\eta\hat{B}\rho = \varphi$  και  $B\rho \parallel A\eta$ . Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma, x$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $B\eta, A\rho, B\rho$  και  $A\eta$ .



Σχήμα 27. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $αβ$  με τη χρήση της  $y = x^2$ . Οι τιμές  $α, β$  διαβάζονται στον άξονα των  $x$  ενώ η τιμή  $αβ$  στον άξονα των  $y$ .



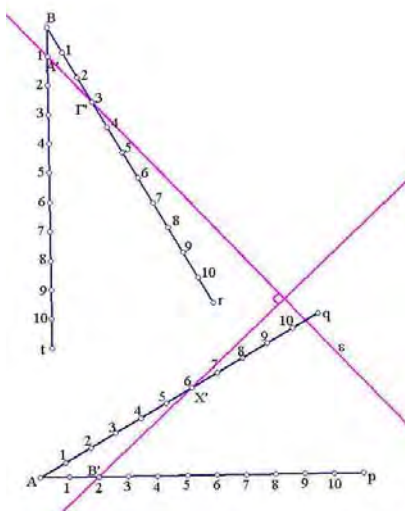
Σχήμα 28. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $\alpha\beta\gamma$  με τη χρήση των  $y=x^2$  και  $x=y^3$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\alpha\beta\gamma$  διαβάζονται στον άξονα των  $x$  ενώ οι τιμές  $\alpha\beta$  και  $\gamma$  στον άξονα των  $y$ .



Σχήμα 29.

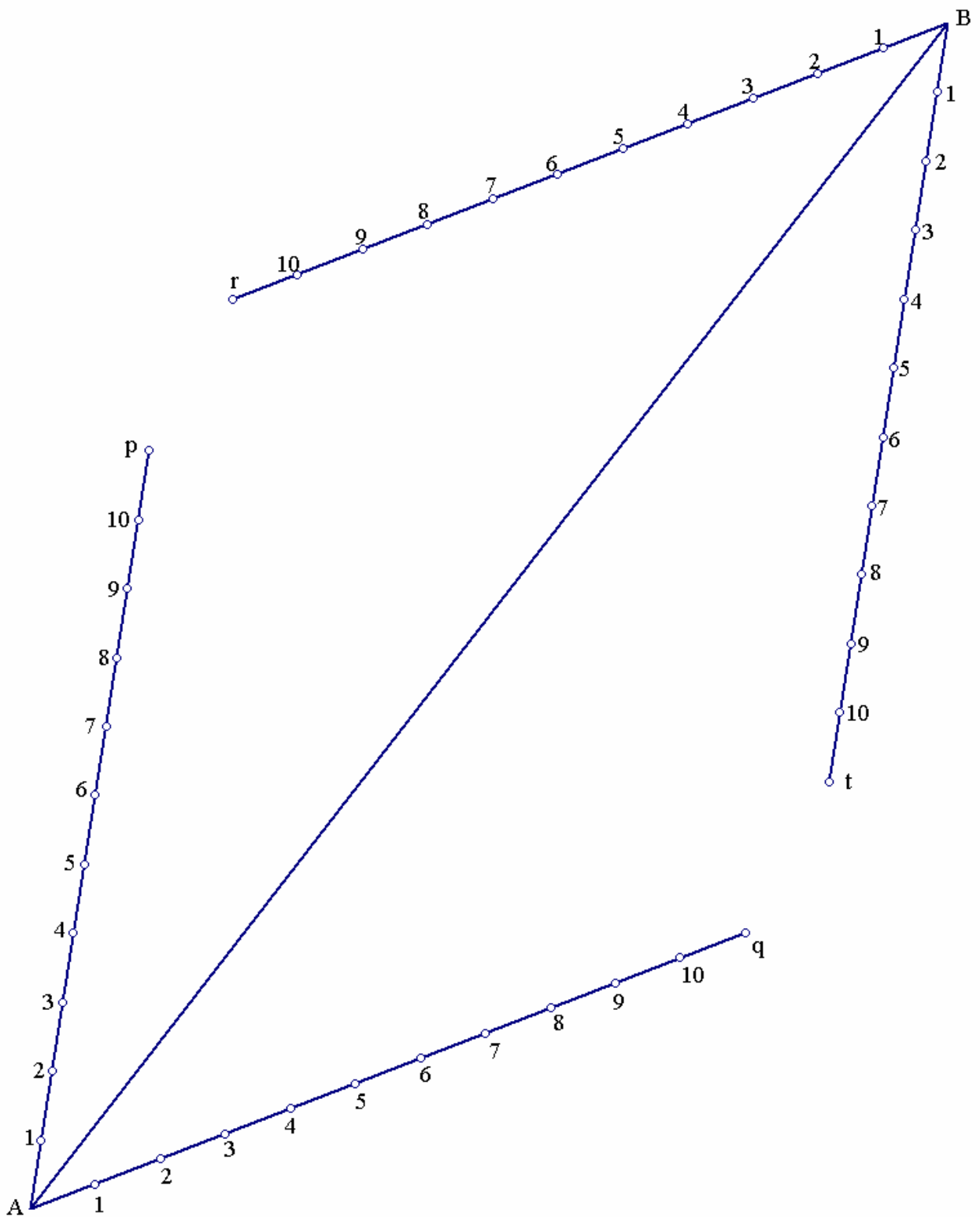
*Απόδειξη.* Πάιρνουμε  $BA' = \alpha$ ,  $AB' = \beta$  και  $B\Gamma' = \gamma$ . Η  $A'B'$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $K$ . Η  $K\Gamma'$  τέμνει τον  $A\gamma$  στο  $X'$  με  $AX' = x$ . Τότε, έχουμε  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ .

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι να πάρουμε  $B'X' \parallel A'\Gamma'$  με  $AX' = x$  (βλ. Σχήμα 31 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 11). Άλλη παραλλαγή του είναι με  $B\Gamma' \perp A\gamma$  (βλ. Σχήματα 30, 32 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 12). Τότε, παίρνοντας  $B'w \perp A'\Gamma'$  έχουμε ότι η  $B'w$  τέμνει τον  $A\gamma$  στο  $AX' = x$ .

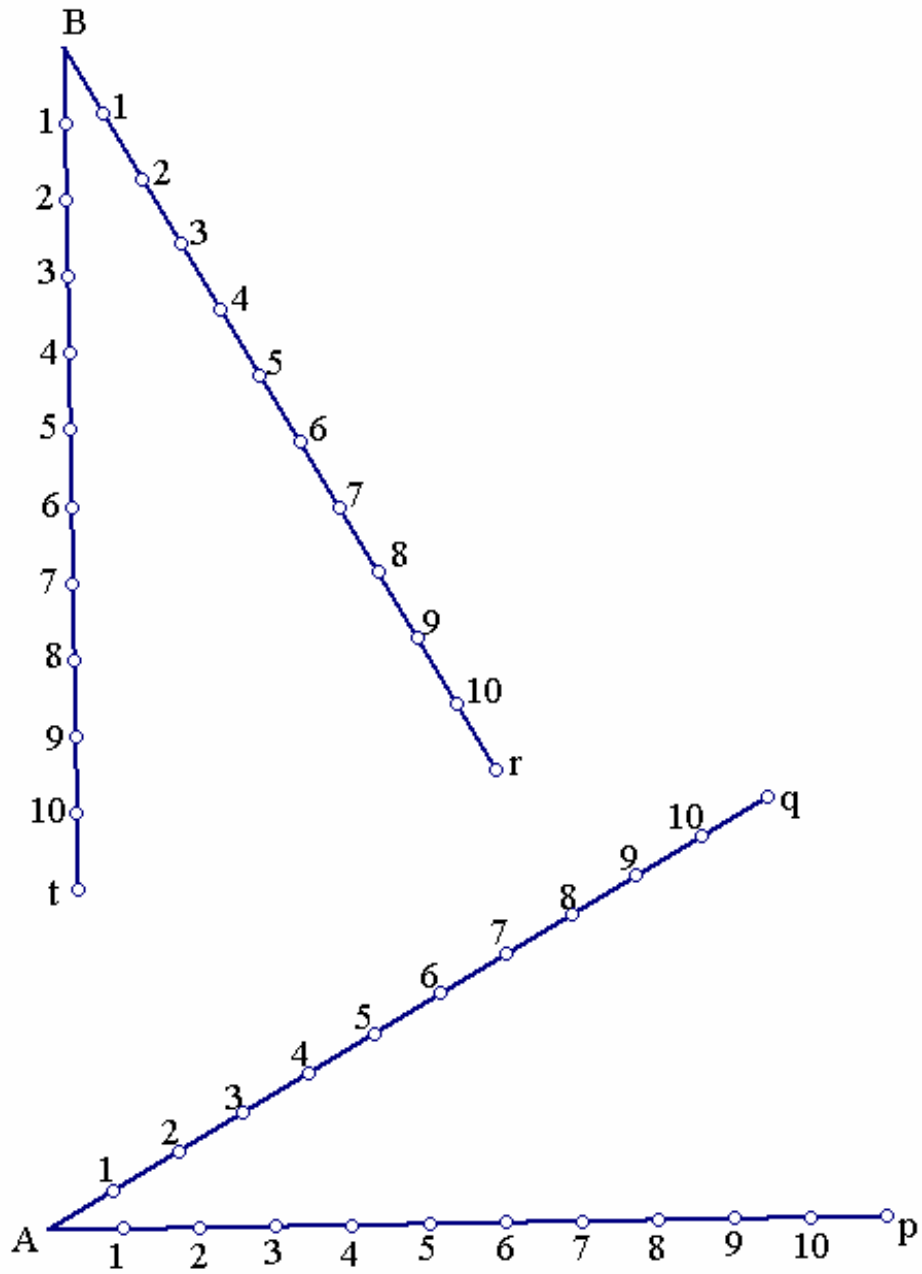


Σχήμα 30.





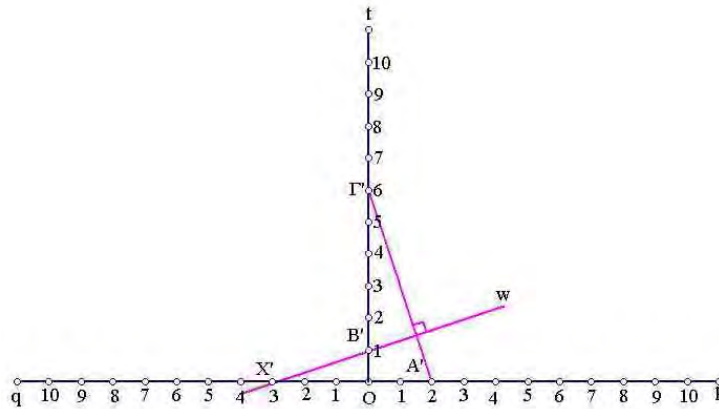
Σχήμα 31. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  με  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  όπου οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $x$  δια-  
βάζονται στους Bt, Ap, Br και Aq.



Σχήμα 32. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  με  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  όπου οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $x$  δια-  
βάζονται στους Bt, Ap, Br και Aq.

Ακόμη, έχουμε νομογραφήματα στα οποία οι άξονες διαβάζονται με δύο τιμές, ταυτίζοντας τις γωνίες του παραπάνω νομογραφήματος (βλ. Παράρτημα στο Σχήμα 13). Οι τιμές  $\alpha$  και  $\gamma$  διαβάζονται στον  $\Lambda\rho$  και οι  $\beta$ ,  $x$  στον  $\Lambda\eta$ . Η τιμή  $x$  υπολογίζεται παίρνοντας  $\Gamma'X' \parallel \Lambda'B'$  με  $\Lambda X' = x$ .

Άλλο νομογράφημα με διπλό άξονα είναι παίρνοντας άξονες  $O\rho$ ,  $O\eta$  με  $\rho\hat{O}\eta = 180^\circ$  και  $O\tau \perp O\rho$  (βλ. Σχήματα 33, 35 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 14). Οι τιμές  $\alpha$ ,  $x$  διαβάζονται στους δυο πρώτους ενώ οι υπόλοιπες στον τελευταίο. Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης.



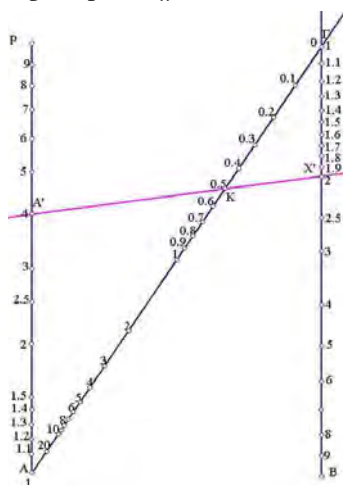
Σχήμα 33.

Παίρνουμε  $OA' = \alpha$ ,  $OB' = \beta$  και  $OG' = \gamma$ . Τότε, παίρνοντας  $B'w \perp A'G'$ , έχουμε ότι η  $B'w$  τέμνει τον  $O\eta$  στο  $X'$  με  $OX' = x$ . Άρα, έχουμε το ζητούμενο.

## 2.5 Δυνάμεις ενός αριθμού.

Ορίζουμε  $x$  την ποσότητα  $\alpha^x$  με  $\alpha$ ,  $x$  μεταβλητά. Χρησιμοποιώντας τα νομογραφήματα του πολλαπλασιασμού δύο μεταβλητών  $\alpha$ ,  $x$  μπορούμε να υπολογίσουμε την παραπάνω ποσότητα διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha$  και  $x$  ως  $\log \alpha$  και  $\log x$  αντίστοιχα.

Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω (βλ. Σχήματα 34, 36 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 15). Παίρνουμε άξονες  $\Lambda\rho \parallel B\eta$  και ημιευθεία  $\Lambda\chi$ . Η  $\Lambda\chi$  τέμνει τον  $B\eta$  στο  $\Gamma$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $x$  και  $x$  διαβαθμίζονται στους άξονες  $\Lambda\rho$ ,  $\Lambda\Gamma$  και  $\Gamma B$



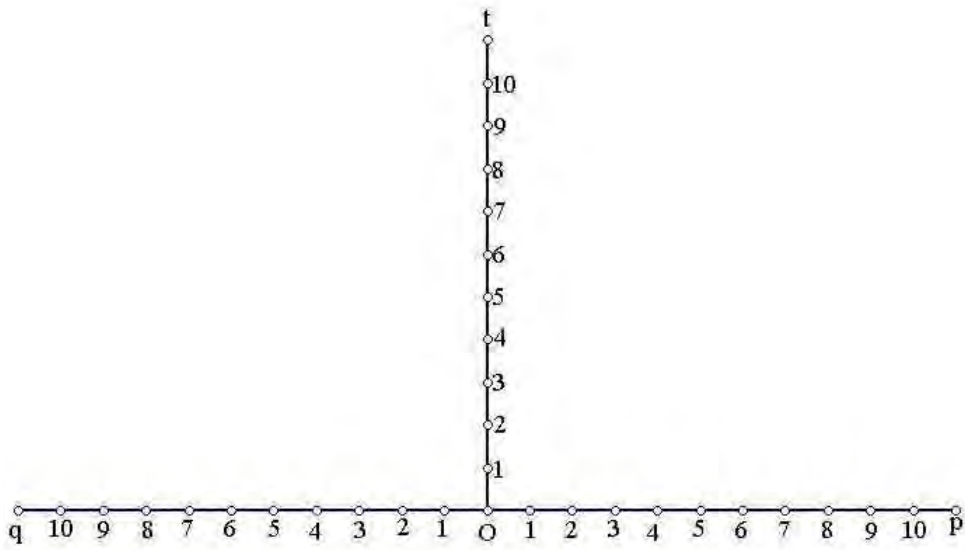
Σχήμα 34.

αντίστοιχα και οι άξονες τους διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $x$  διαβάζονται ως  $\log \alpha$  και  $\log x$  ενώ η τιμή  $x$  στο σημείο  $K$  επιλέγεται ως ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος  $\Gamma\Lambda$  με  $\frac{\Gamma K}{K\Lambda} = x$ .

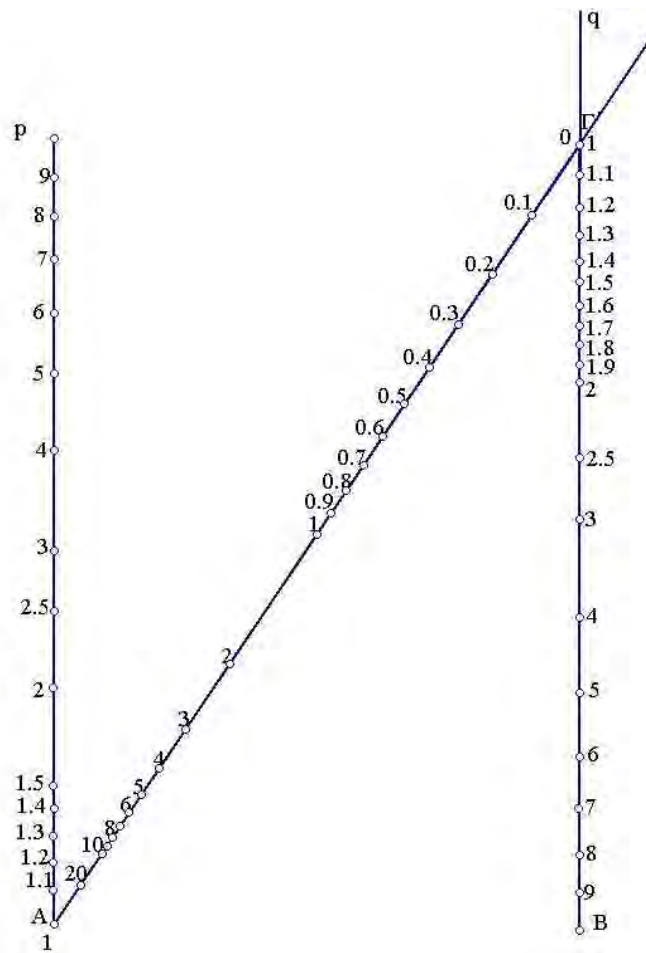
Παίρνουμε  $\Lambda A' = \alpha$  και  $\Gamma K = x$ . Η  $\Lambda'K$  τέμνει την  $\Gamma B$  στο  $X'$  με  $\Gamma X' = x$ . Τότε, έχουμε  $x = \alpha^x$ .

Υπάρχει και τρίτο νομογράφημα για την ίδια εργασία σε σχήμα τεταρτοκυκλίου. Σχεδιάζουμε τεταρτοκύκλιο  $\widehat{B\Gamma}$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα 1 και  $K$  σημείο του με  $\widehat{BK} = \text{τοξοφν}$  για κάποιο  $n > 0$  (βλ. Σχήματα 37, 38 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 16). Οι  $OB$ ,  $O\Gamma$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης και στο σημείο  $K$  διαβάζεται η τιμή  $n$ . Στον  $OB$  διαβάζεται η τιμή  $\alpha$  ως  $\log \alpha$  και στον  $O\Gamma$  η τιμή  $x$  ως  $\log x$ .

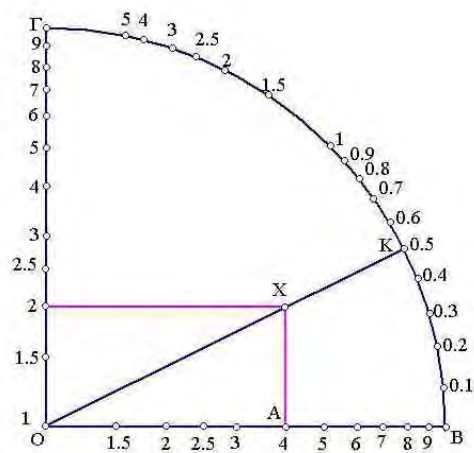
Παίρνουμε  $OA = \alpha$  και  $\widehat{BK} = n$ . Τότε, η  $\Lambda\rho \perp OB$  τέμνει την  $OK$  στο  $X$  με  $\Lambda X = x$ . Οπότε έχουμε  $x = \alpha^x$ .



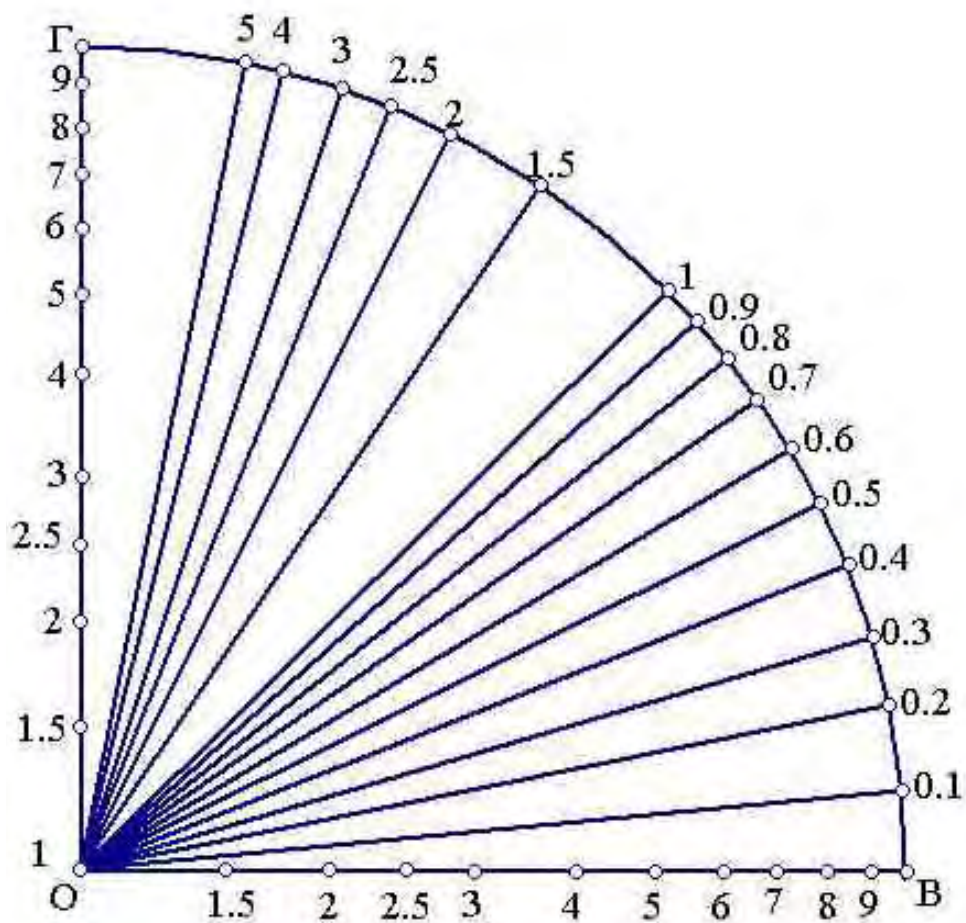
Σχήμα 35. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  με  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  όπου οι τιμές  $\beta, \gamma$  διαβάζονται στον  $Ot$ ,  $\eta$   $\alpha$  στον  $Oq$  και  $\eta$   $x$  στον  $Oq$ .



Σχήμα 36. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  με  $x = \alpha^x$  όπου οι τιμές  $\alpha, x$  και  $x$  διαβάζονται στον  $Ap$ ,  $\Gamma\alpha$  και  $\Gamma B$ .



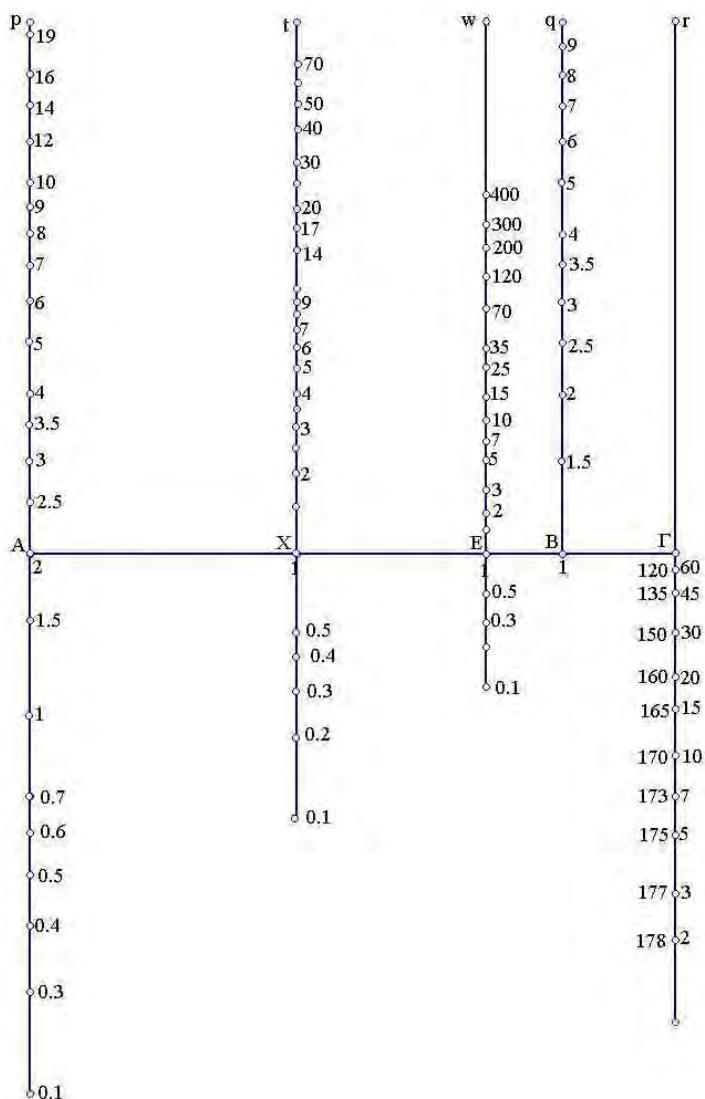
Σχήμα 37.



Σχήμα 38. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $x$  με  $x = a^x$  όπου οι τιμές  $a$ ,  $x$  και  $x$  διαβάζονται στον  $OB$ ,  $\widehat{B\Gamma}$  και  $OG$ .

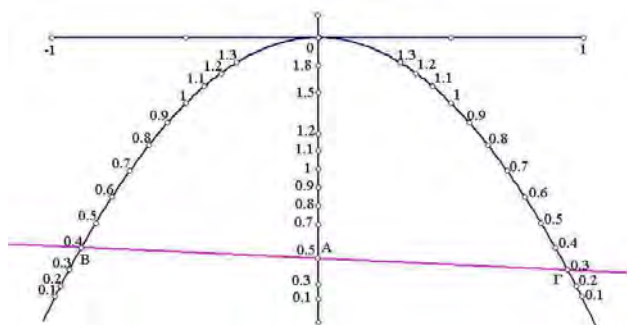
## 2.6 Εφαρμογές.

Τα νομογράφηματα που είδαμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρύτερα. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... και  $x$  μπορούν να διαβαστούν, αντίστοιχα,  $f(\alpha)$ ,  $g(\beta)$ ,  $h(\gamma)$ , ... ,  $t(x)$  όπου οι  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , ... ,  $t$  πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές του,  $\alpha$ ,  $\beta$  και την περιεχόμενη γωνία τους  $\hat{\Gamma}$ , τότε στο νομογράφημα του πολλαπλασιασμού τριών μεταβλητών διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\hat{\Gamma}$  ως  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta$  και  $\eta\mu\hat{\Gamma}$  αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 39 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 17). Δηλαδή, παίρνουμε  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $\Gamma r$  άξονες στους οποίους διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\hat{\Gamma}$  και από τους οποίους οι  $Ap$ ,  $Bq$  διαβάζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο  $\Gamma r$  με το μισό της. Το  $X$  είναι μέσο του  $AB$  και  $Xt \perp AB$ . Ο  $Xt$  διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής. Αν το  $E$  είναι μέσο του  $X\Gamma$  και ο  $Ew \perp X\Gamma$  τότε ο  $Ew$  διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το  $\frac{1}{4}$  της αρχικής.



Σχήμα 39. Νομογράφημα για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και την περιεχόμενη γωνία τους  $\hat{\Gamma}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\hat{\Gamma}$  και  $E$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Xt$ ,  $\Gamma r$  και  $Ew$ .

Ακόμη, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την υποτεινούσα  $\alpha$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με δεδομένες τις δυο κάθετες πλευρές του,  $\beta$  και  $\gamma$ , χρησιμοποιούμε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού με την παραβολή  $y=-x^2$  (βλέπε σελίδα 21). Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την παραβολή  $y=-x^2$  (βλ. Σχήματα 40, 41 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 18). Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στο γράφημα της, διαβάζουμε τις τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  έτσι ώστε η τιμή  $\beta$  να διαβάζεται στο σημείο  $B$  με τεταγμένη  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta^2}$  ενώ η τιμή  $\gamma$  στο σημείο  $\Gamma$   $\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma^2}$  (το  $\frac{1}{2}$  δεν είναι ουσιαστικό). Στη θέση του μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιαδήποτε άλλη σταθερά). Η  $B\Gamma$  τέμνει τον άξονα των  $y$  στο σημείο  $A$ . Η τεταγμένη του  $A$  διαβάζεται ως  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha^2}$ .



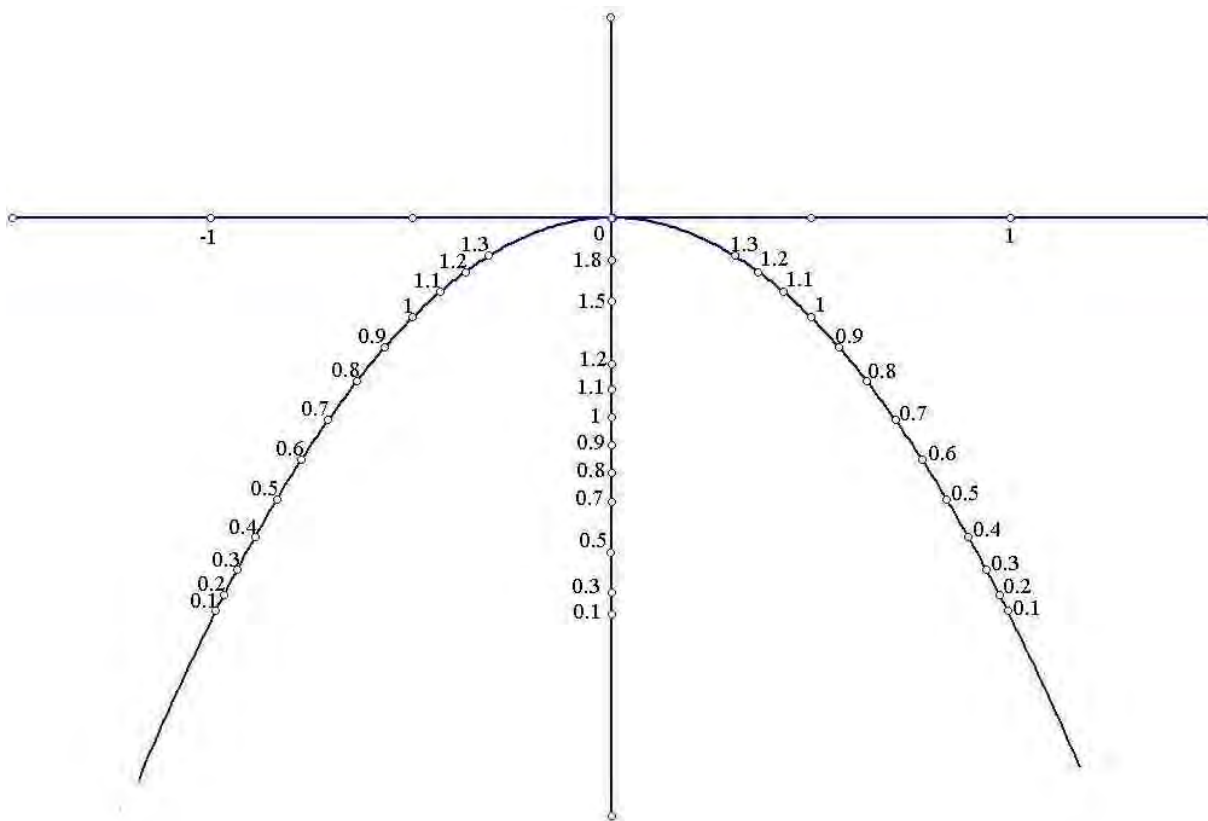
Σχήμα 40.

Απόδειξη. Η  $B\Gamma$  έχει εξίσωση

$$y = \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{\beta^2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{\gamma^2} \right) x + \left( \frac{1}{2} \right)^{\beta^2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\gamma^2}.$$

Το σημείο  $A$  έχει τεταγμένη  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta^2+\gamma^2}$ .

Τότε, έχουμε  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ .



Σχήμα 41. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της πλευράς  $\alpha$  ενός ορθογωνίου τριγώνου με δεδομένες τις πλευρές  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται στην παραβολή ενώ η τιμή  $\alpha$  στον άξονα των  $y$ .

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Ν-ΟΣΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Το κεφάλαιο αυτό μελετά την επίλυση εξισώσεων ν-οστού βαθμού για ν=1, 2, 3, 4, 5 και για εξισώσεις ειδικής μορφής όταν το ν είναι τυχαίος φυσικός αριθμός.

### 3.1 Επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Έστω  $\alpha x + \beta = 0$  με  $\alpha, \beta$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος. Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή έχουμε δυο βασικές επιλογές: είτε να χρησιμοποιήσουμε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας την τιμή  $\alpha$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$  είτε το νομογράφημα του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{y}{x}$  λαμβάνοντας την τιμή  $\gamma$  ως  $-1$ .

### 3.2 Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Έστω  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  με  $\alpha, \beta$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε νομογραφήματα που λύνουν εξισώσεις τόσο με πραγματικές όσο και με μιγαδικές ρίζες.

Αρχικά, θα μελετήσουμε νομογραφήματα που μας δίνουν τις πραγματικές λύσεις μιας εξίσωσης. Το πρώτο νομογράφημα τέτοιου είδους οφείλεται στον Philbert Maurice D' Ocagne. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την ευθεία  $x = -1$  και την υπερβολή  $y = -\frac{x^2}{x+1}$  στο  $(-1, 0]$  (βλ. Σχήματα 42, 43 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 19). Η ευθεία τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x = -1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x = -1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\beta$  και  $\alpha$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $O'A' = \alpha$  και  $OB' = \beta$ . Η

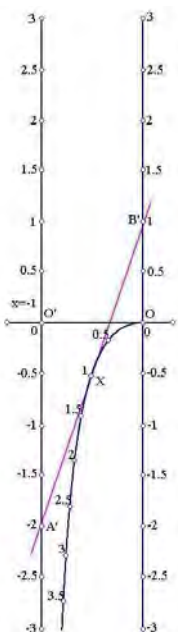
$A'B'$  τέμνει την υπερβολή στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι η ζητούμενη τιμή.

*Απόδειξη.* Η  $A'B'$  έχει εξίσωση  $y = (\beta - \alpha)x + \beta$ .

Ακόμη, έχουμε  $-\frac{y}{x} = \frac{x}{x+1}$  και  $\frac{y}{x} = \beta \frac{(1+x)}{x} - \alpha$ ,

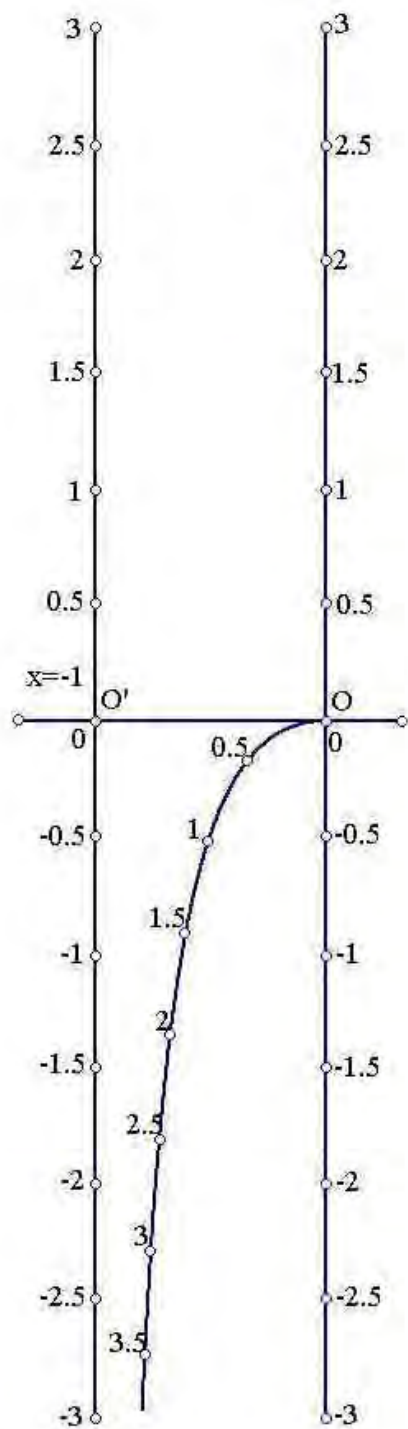
οπότε  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{y}{x}\right) + \beta = 0$ .

Άλλο νομογράφημα είναι το κυκλικό νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τον κύκλο  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  με διάμετρο  $OO'$  (βλ. Σχήματα 44, 47 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 20). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στη διάμετρο  $OO'$ , αντίστοιχα. Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται ως  $-\frac{1}{\alpha}$  ενώ η τιμή  $\beta$  στο σημείο  $B$  επιλέγεται ως ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος  $OO'$  με  $\frac{O'B}{BO} = -\beta$ . Παίρνουμε  $OA = \alpha$  και  $O'B = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει τον κύκλο στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι η ζητούμενη τιμή.

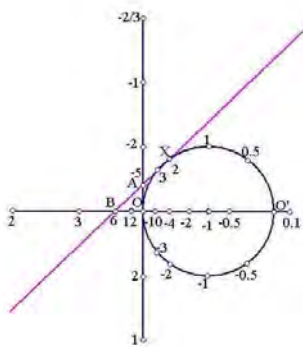


Σχήμα 42.





Σχήμα 43. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + ax + b = 0$  όπου οι τιμές  $a$  και  $b$  διαβάζονται στην  $x = -1$  και στον άξονα των  $y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 44.

*Απόδειξη.* Η AB έχει εξίσωση  $y = \frac{1-\beta}{\alpha}x - \frac{1}{\alpha}$ .

Ακόμη, έχουμε  $\frac{y}{x} = \frac{1-\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha x}$  και  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1-x}{x}$ ,

οπότε

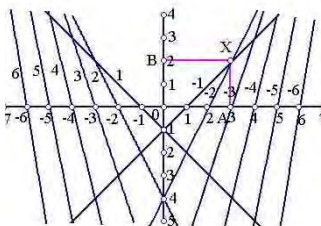
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{y}{x}\right) + \beta = 0.$$

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία  $x=1$  στη θέση του  $OO'$  διαβαθμίζοντας την ευθεία με μονάδα μέτρησης ίση με αυτή του άξονα των  $x$  (βλ.

Σχήμα 48 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 21). Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία διαβάζουμε, αντίστοιχα, τις τιμές  $-\frac{1}{\alpha}$

και  $-\frac{\beta}{\alpha}$ .

Υπάρχει και τέταρτο νομογράφημα, το νομογράφημα με τις ευθείες. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την ευθεία  $\epsilon_c: y = -cx - c^2$  για κάθε τιμή  $c$  (βλ. Σχήματα 45, 50 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 22). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Το σημείο  $X(\alpha, \beta)$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_c: y = -cx - c^2$  για κάποιο  $c$ . Η τιμή  $c$  είναι η ζητούμενη ρίζα.

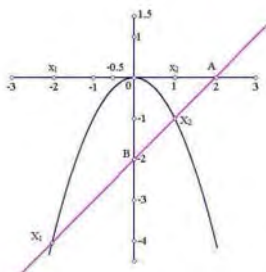


Σχήμα 45.

*Απόδειξη.* Άμεσα έχουμε ότι το σημείο  $X$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_c$  όποτε,  $c^2 + \alpha c + \beta = 0$ .

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε νομογραφήματα που δίνουν τις μιγαδικές λύσεις μιας εξίσωσης. Αρχικά, σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την παραβολή  $y = -x^2$  (βλ. Σχήματα 46, 49 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 23). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\frac{2\beta - \alpha^2}{2\alpha}$  και  $\frac{\alpha^2 - \beta}{2}$ ,

αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \frac{2\beta - \alpha^2}{2\alpha}$  και  $OB = \frac{\alpha^2 - \beta}{2}$ . Η AB τέμνει την παραβολή στα  $X_1, X_2$ . Αν  $x_1, x_2$  οι τετμημένες των



Σχήμα 46.

$X_1, X_2$ , αντίστοιχα, τότε υπολογίζοντας τις τιμές  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $\frac{x_1 - x_2}{2}$  έχουμε ότι οι

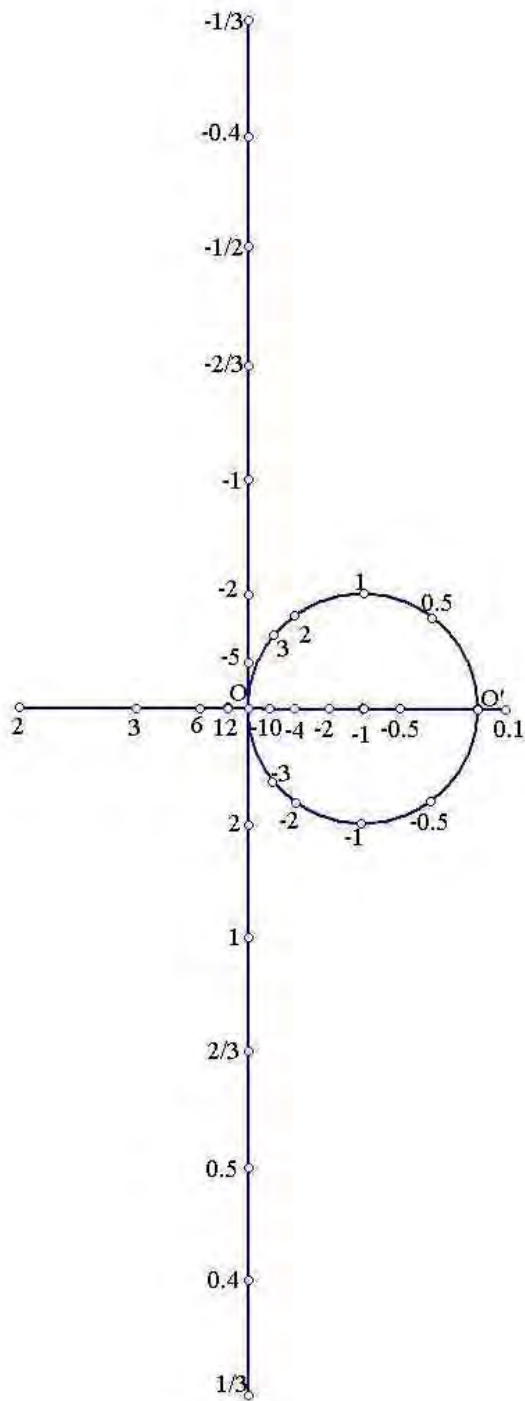
$\frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{x_1 - x_2}{2}$  είναι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης.

*Απόδειξη.* Η AB έχει εξίσωση  $y = \alpha x + \frac{\alpha^2 - 2\beta}{2}$  και οι τετμημένες των  $X_1, X_2$  δίνονται από τον

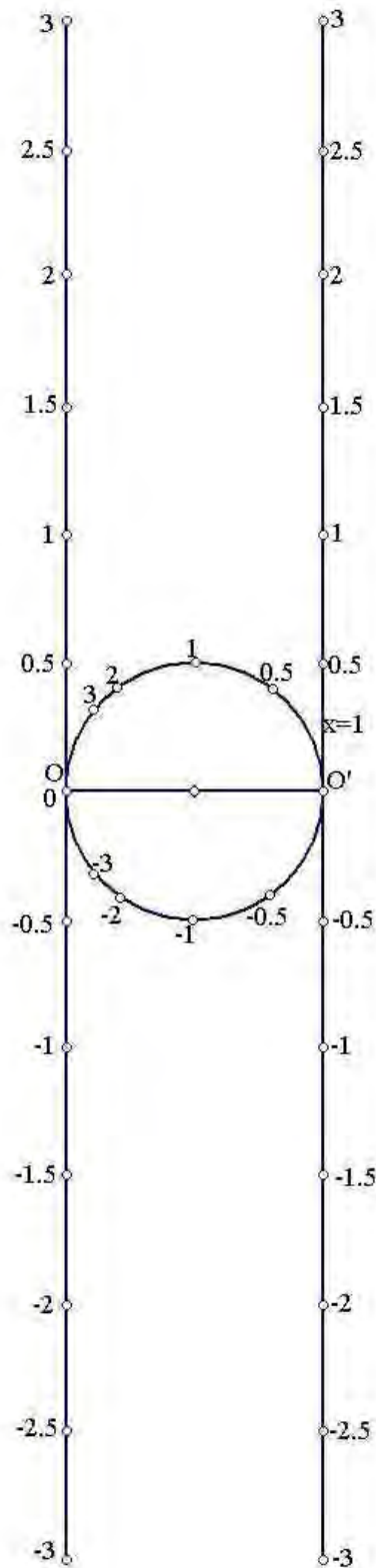
τύπο:

$$x_{1,2} = -\frac{\alpha \pm \sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}. \text{ Ακόμη, ισχύει } \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\alpha}{2} \text{ και } \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}.$$

Τότε, για την τιμή  $-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$  έχουμε ότι

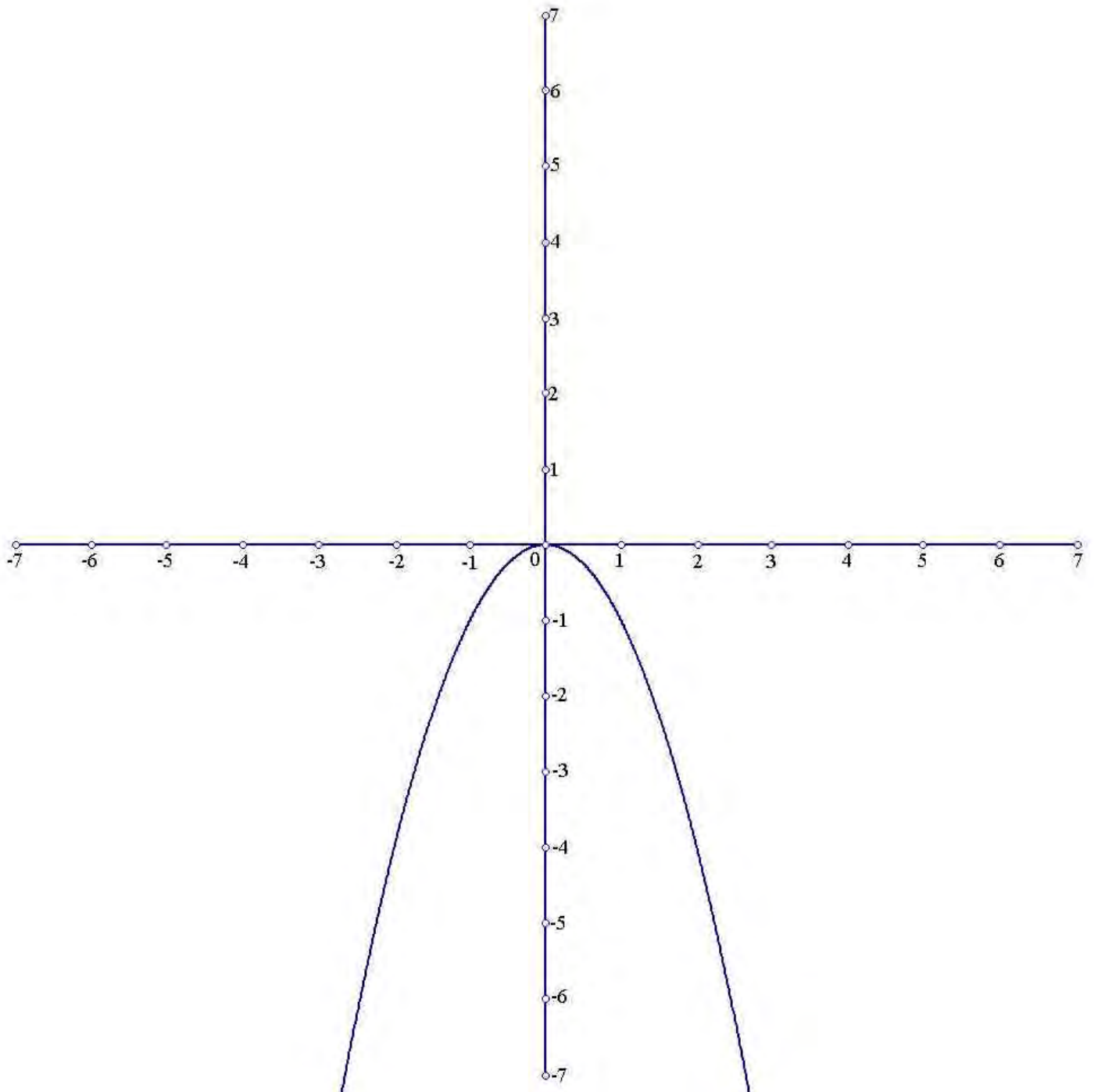


Σχήμα 47. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + ax + b = 0$  όπου οι τιμές  $a$  και  $b$  διαβάζονται στους άξονες των  $y$  και  $x$ , αντίστοιχα.

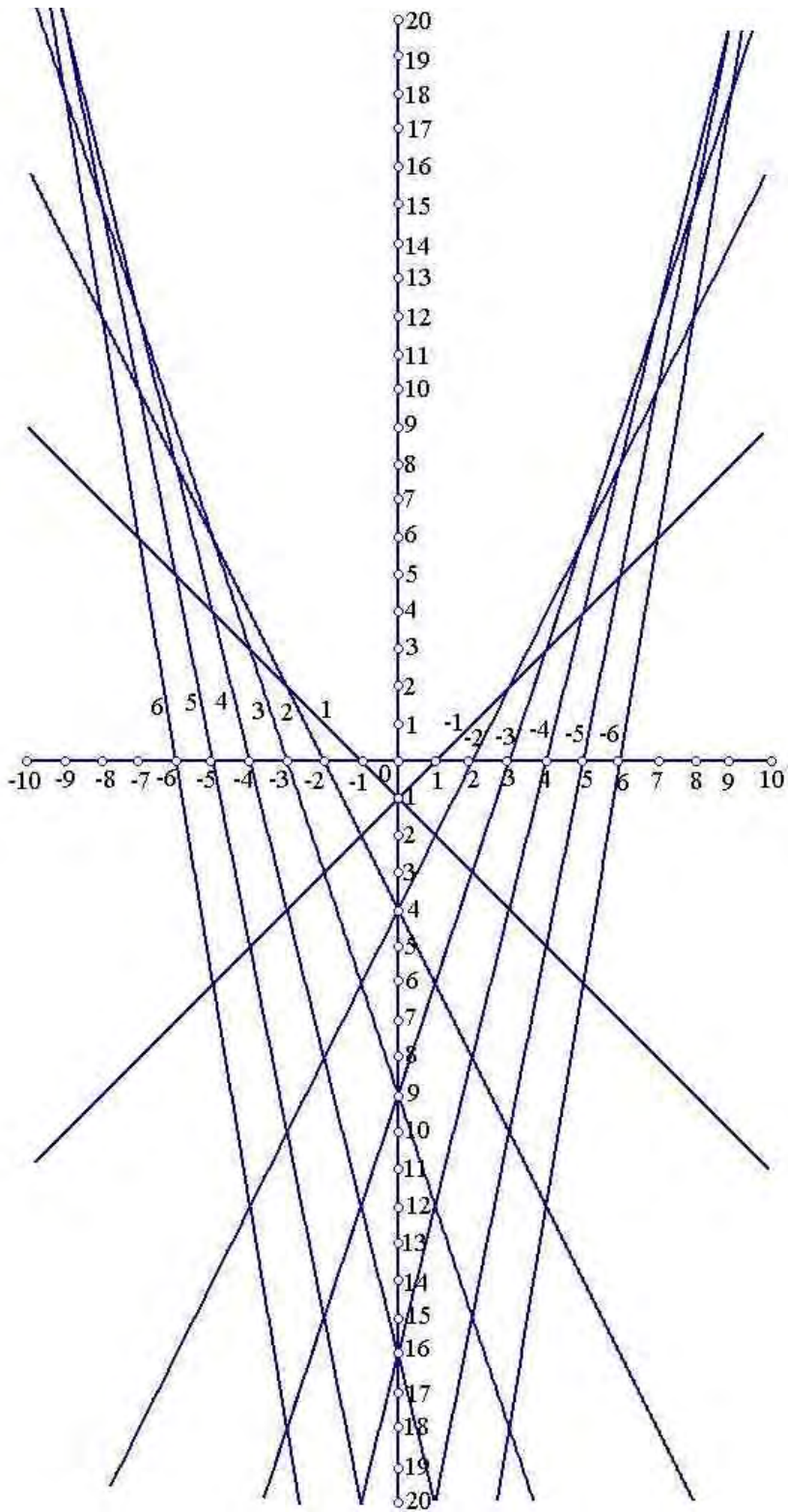


Σχήμα 48. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  όπου οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζο-

νται στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{\beta}{\alpha}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 49. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  όπου οι τιμές  $\frac{2\beta - \alpha^2}{2\alpha}$  και  $\frac{\alpha^2 - \beta}{2}$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 50. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + ax + b = 0$  όπου οι τιμές  $a$  και  $b$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , αντίστοιχα.

$$\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}i\right)^2 + \alpha\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}i\right) + \beta = 0.$$

Όμοια εργαζόμαστε για την περίπτωση της  $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}i$ .

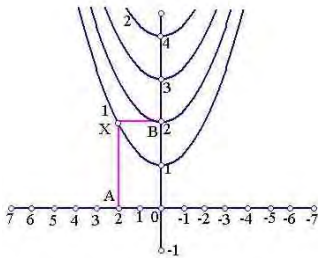
Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την παραβολή  $C_c: y=x^2+c^2$  για κάθε τιμή  $c$  (βλ. Σχήματα 51, 53 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 24). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $x$  διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$  ως  $-\frac{1}{2}\alpha$  και στον άξονα των  $y$  την τιμή  $\beta$ . Παίρνουμε  $OA=\alpha$

και  $OB=\beta$ . Το σημείο  $X(-\frac{1}{2}\alpha, \beta)$  ανήκει στην ευθεία  $C_c: y=x^2+c^2$  για κάποιο  $c$ . Οι τιμές  $-\frac{1}{2}\alpha \pm ci$  είναι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης.

*Απόδειξη.* Το σημείο  $X(-\frac{1}{2}\alpha, \beta)$  ανήκει στην παραβολή  $C_c: y=x^2+c^2$  και έχουμε ότι

$$\frac{1}{4}\alpha^2 + c^2 = \beta. \text{ Οπότε, για την τιμή } -\frac{1}{2}\alpha + ci \text{ έχουμε ότι}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha + ci\right)^2 + \alpha\left(-\frac{1}{2}\alpha + ci\right) + \beta = 0$$

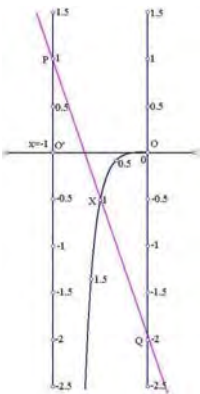


Σχήμα 51.

Όμοια εργαζόμαστε για την περίπτωση της  $-\frac{1}{2}\alpha - ci$ .

### 3.3 Επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού.

Έστω  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $x = \frac{y}{s} - \frac{\beta}{\alpha}$  για κατάλληλο  $s$  η εξίσωση παίρνει τη μορφή  $x^3 + px + q = 0$  για κάποια  $p, q$ . Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε νομογραφήματα που λύνουν εξισώσεις τόσο με πραγματικές όσο και με μιγαδικές ρίζες.



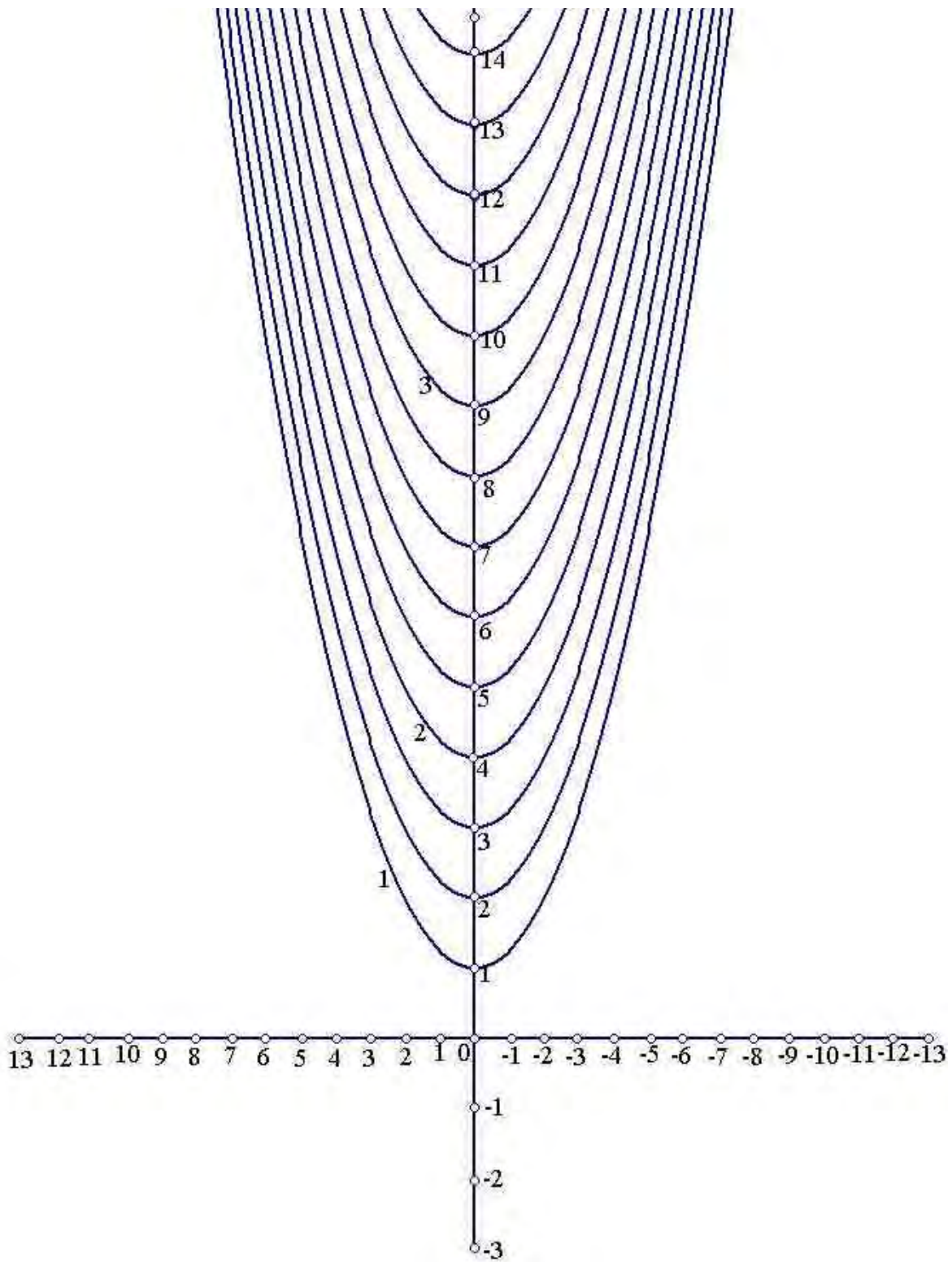
Σχήμα 52.

Αρχικά, θα μελετήσουμε νομογραφήματα που λύνουν εξισώσεις μόνο με πραγματικές ρίζες. Το πρώτο νομογράφημα είναι το παρακάτω. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=-1$  και την καμπύλη  $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$  στο  $(-1, 0]$  (βλ. Σχήματα 52, 57 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 25). Η ευθεία τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=-1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία διαβάζουμε τις τιμές  $q$  και  $p$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $O'P=p$  και  $OQ=q$ . Η  $PQ$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή  $\sqrt{\frac{y}{x}}$  είναι η ζητούμενη ρίζα.

*Απόδειξη.* Η  $PQ$  έχει εξίσωση  $y=(q-p)x+q$ .

Λιόμνη, έχουμε  $\frac{y}{x} = q \frac{1+x}{x} - p$  και  $\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)} = -\frac{x}{x+1}$ ,

οπότε



Σχήμα 53. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  όπου οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , αντίστοιχα.

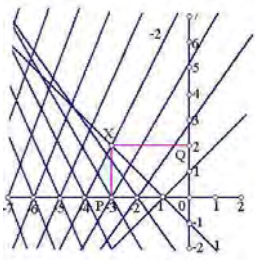


$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^3 + p\sqrt{\frac{y}{x}} + q = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{\frac{y}{x}} + p\sqrt{\frac{y}{x}} + q = 0.$$

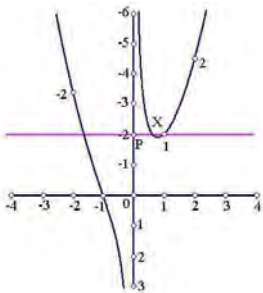
Άλλο νομογράφημα είναι με το νομογράφημα με τις ευθείες. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $\epsilon_c: y = -cx - c^3$  για κάθε τιμή  $c$  (βλ. Σχήματα 54, 58 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 26). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $p$  και  $q$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OP=p$  και  $OQ=q$ . Το σημείο  $X(p, q)$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_c: y = -cx - c^3$  για κάποιο  $c$ . Η τιμή  $c$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



*Απόδειξη.* Άμεσα έχουμε ότι το σημείο  $X$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_c$  οπότε,  $c^3 + pc + q = 0$ .

Επιλέγοντας το  $s$  έτσι ώστε  $s^3 = \frac{3\alpha^2}{3\delta\alpha - \beta\gamma}$ , η εξίσωση γίνεται  $x^3 + px + 1 = 0$  για κάποιο  $p$ .

Σχήμα 54.



Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την καμπύλη  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  για  $x \neq 0$  (βλ. Σχήματα 55, 59 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 27). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $p$  ως  $-p$  παίρνοντας  $OP=p$ . Η ευθεία  $y = -p$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη τιμή.

*Απόδειξη.* Η ευθεία  $y = -p$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  και ισχύει  $x^2 + \frac{1}{x} = -p$ .

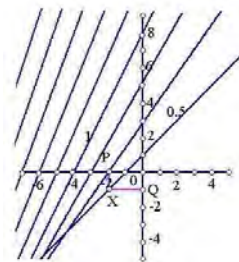
Τότε, έχουμε  $x^3 + px + 1 = 0$ .

Σχήμα 55.

Τέλος, έχουμε νομογραφήματα που δίνουν και τις μιγαδικές ρίζες μιας εξίσωσης:

Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $\epsilon_\alpha: y = 2\alpha x + 8\alpha^3$  για κάθε τιμή  $\alpha$  (βλ. Σχήματα 56, 60 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 28). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $p$  και  $q$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OP=p$  και  $OQ=q$ . Το σημείο  $X(p, q)$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_\alpha: y = 2\alpha x + 8\alpha^3$  για κάποιο  $\alpha$ .

Υπολογίζοντας την τιμή  $\beta$  έτσι ώστε  $\beta^2 = p + 3\alpha^2$  έχουμε ότι οι τιμές  $-2\alpha, \alpha \pm \beta i$  είναι οι ζητούμενες ρίζες.



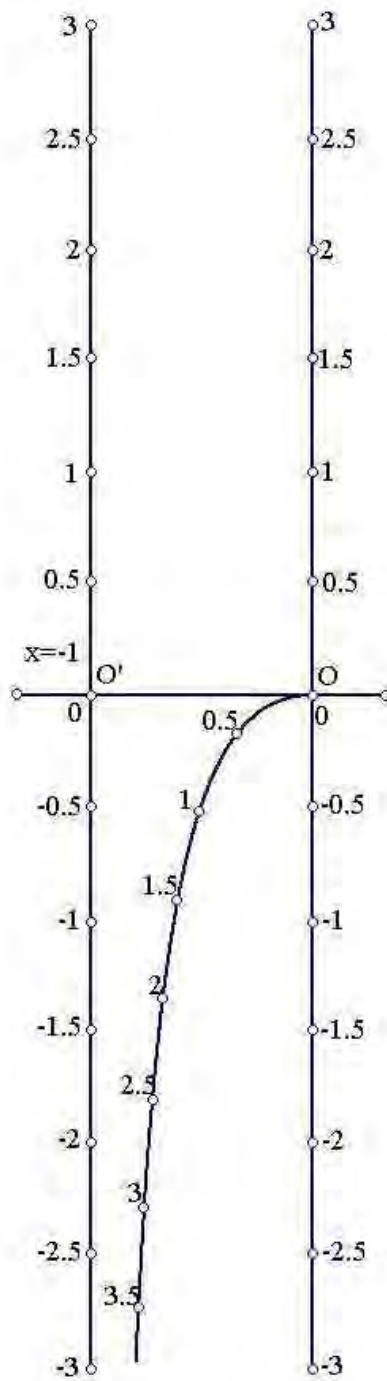
*Απόδειξη.* Το σημείο  $X(p, q)$  ανήκει στην ευθεία  $\epsilon_\alpha: y = 2\alpha x + 8\alpha^3$  και έχουμε ότι  $2\alpha p + 8\alpha^3 = q$ . Οπότε, για την τιμή  $-2\alpha$  έχουμε ότι

$$(-2\alpha)^3 + p(-2\alpha) + q = 0.$$

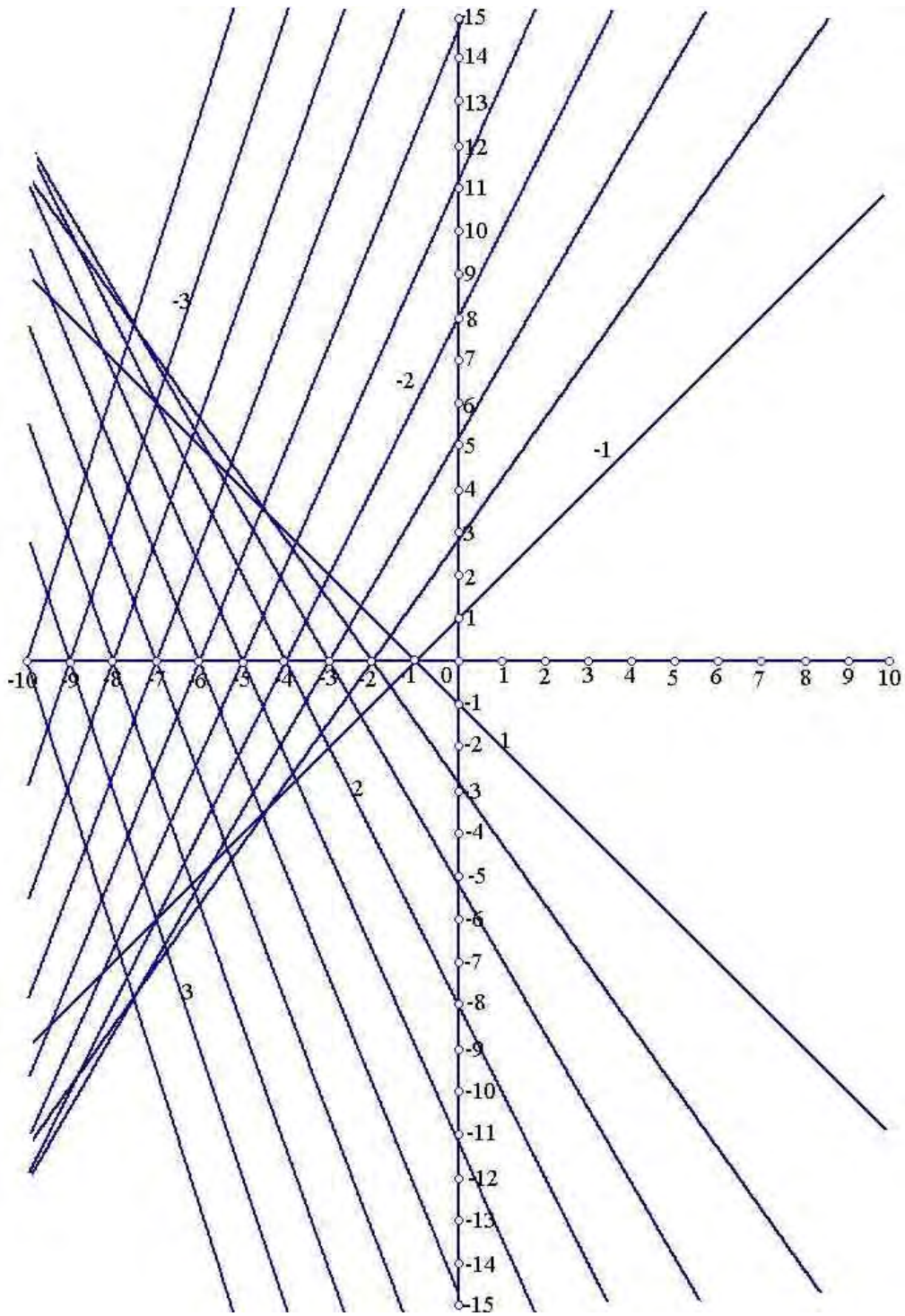
Όμοια εργαζόμαστε για τις περιπτώσεις των  $\alpha \pm \beta i$ .

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να σχεδιάσουμε την ευθεία  $\epsilon_\alpha: y = 2\alpha x + 8\alpha^3$ , σχεδιάσουμε την καμπύλη  $C_\beta: y^2 = \frac{4}{27}(\beta^2 - x)(4\beta^2 - x)^2$  για κάθε τιμή  $\beta$  (βλ. Σχήμα

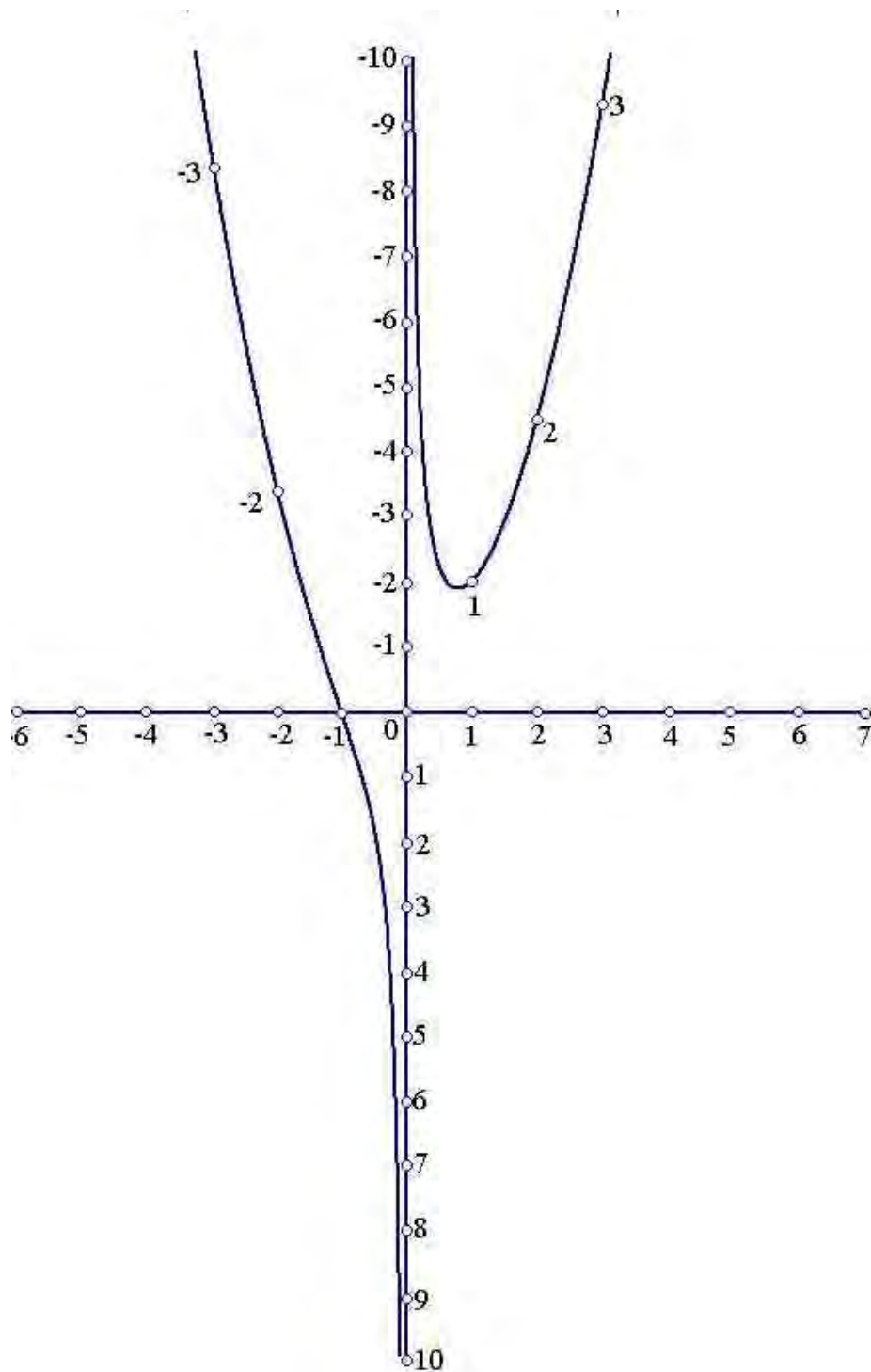
Σχήμα 56.



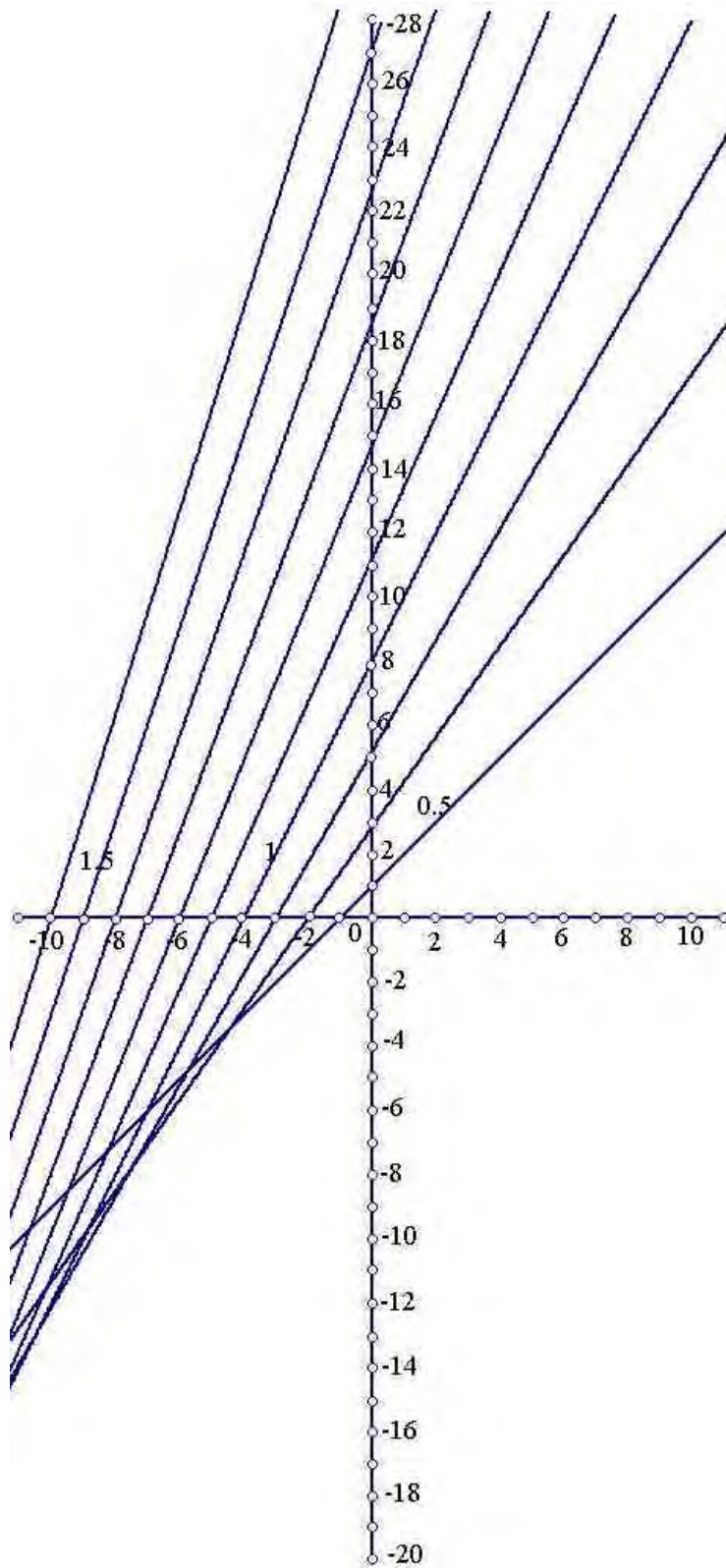
Σχήμα 57. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + px + q = 0$  όπου οι τιμές  $p$  και  $q$  διαβάζονται στην ευθεία  $x = -1$  και στον άξονα των  $y$ , αντίστοιχα.



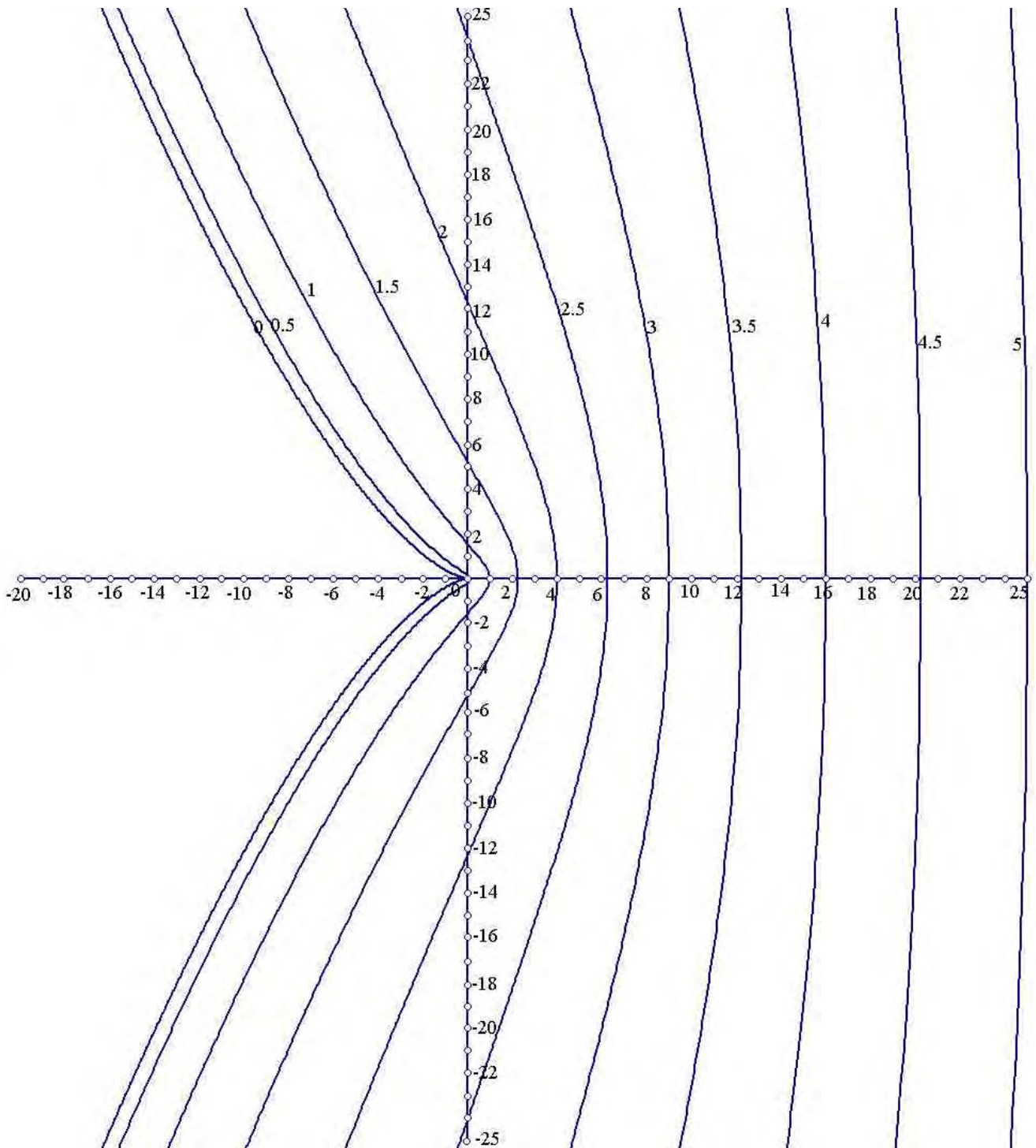
Σχήμα 58. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + px + q = 0$  όπου οι τιμές  $p$  και  $q$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 59. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + px + 1 = 0$  όπου η τιμή  $p$  διαβάζεται στον άξονα των  $y$ .



Σχήμα 60. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + px + q = 0$  όπου οι τιμές  $p$  και  $q$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 61. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + px + q = 0$  όπου οι τιμές  $p$  και  $q$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ ,  $y$ , αντίστοιχα.

61 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 29). Υπολογίζοντας την τιμή  $\alpha$  από τη σχέση  $\alpha^2 = \frac{\beta^2 - p}{3}$  και την εξίσωση με τιμή  $-2\alpha$  έχουμε ότι οι τιμές  $-2\alpha$ ,  $\alpha \pm \beta i$  είναι οι ζητούμενες ρίζες.

### 3.4 Επίλυση εξισώσεων τετάρτου βαθμού.

Έστω  $ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε νομογραφήματα που λύνουν εξισώσεις τόσο με πραγματικές όσο και με μιγαδικές ρίζες.

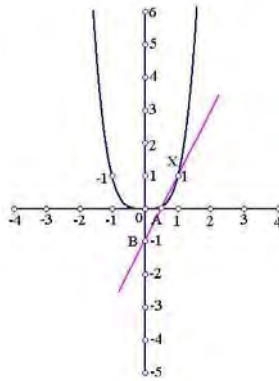
Αρχικά, θα μελετήσουμε νομογραφήματα που λύνουν εξισώσεις μόνο με πραγματικές ρίζες. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $x = ry - \frac{\beta}{4\alpha}$  όπου  $r^2 = \frac{|8\alpha\gamma - 3\beta^2|}{8\alpha^2}$  μετατρέπουμε την εξίσωση στην  $x^4 + px^2 + qx + t = 0$  όπου

$$p = \begin{cases} 1, & 8\alpha\gamma - 3\beta^2 > 0 \\ 0, & 8\alpha\gamma - 3\beta^2 = 0 \\ -1, & 8\alpha\gamma - 3\beta^2 < 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται χρησιμοποιώντας το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την καμπύλη  $y = x^4 + px^2$  (βλ. Σχήματα 62, 63-65 και στο Παράρτημα στα Σχήματα 30-32). Οι άξονες των  $x, y$

διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $x$  διαβάζουμε την τιμή  $-\frac{t}{q}$  και στον άξονα των  $y$  την  $-t$ ,

αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = -\frac{t}{q}$  και  $OB = -t$ . Η  $AB$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



Σχήμα 62.

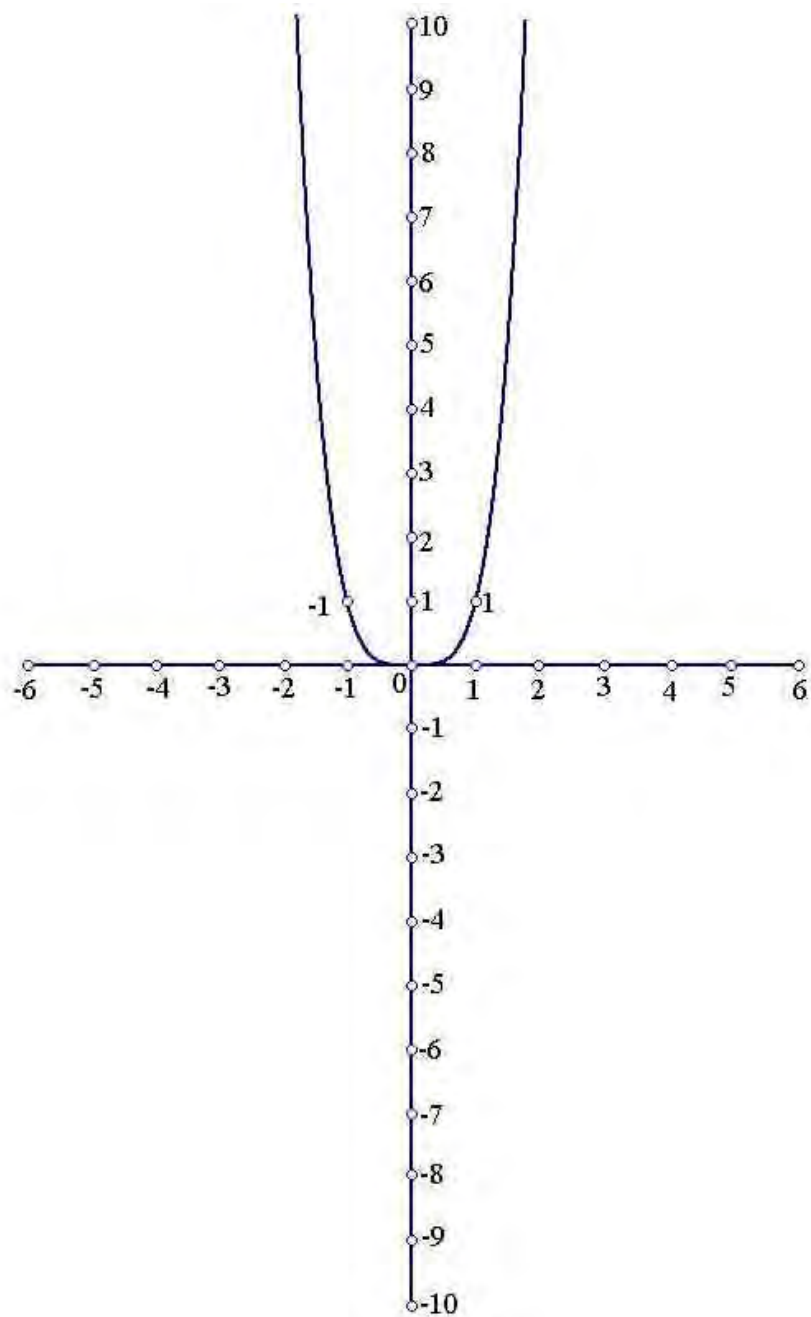
*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $p=0$ , η  $AB$  έχει εξίσωση  $y = -qx - t$ . Τότε, έχουμε  $x^4 + px^2 + qx + t = 0$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $x = \sqrt[3]{\frac{\delta}{\beta}}y$  λαμβάνουμε την εξίσωση  $px^4 + x^3 + qx^2 + rx + t = 0$  όπου

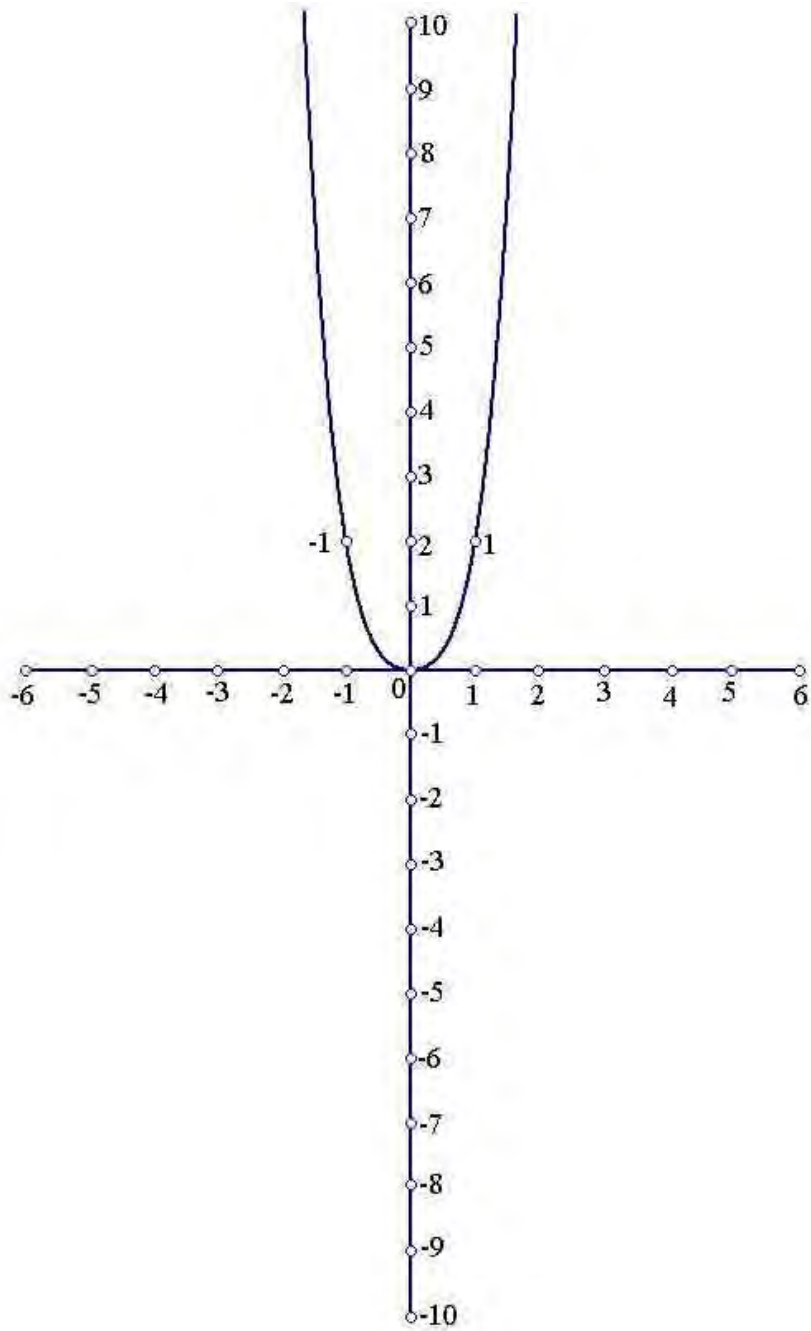
$$r = \begin{cases} 1, & \delta\beta > 0 \\ -1, & \delta\beta < 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται με το παρακάτω νομογράφημα: Αν  $c$  βοηθητική παράμετρος, τότε σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $y=1$ ,  $y=-1$  και την καμπύλη  $\kappa(t) = (x(t), y(t))$  έτσι ώστε

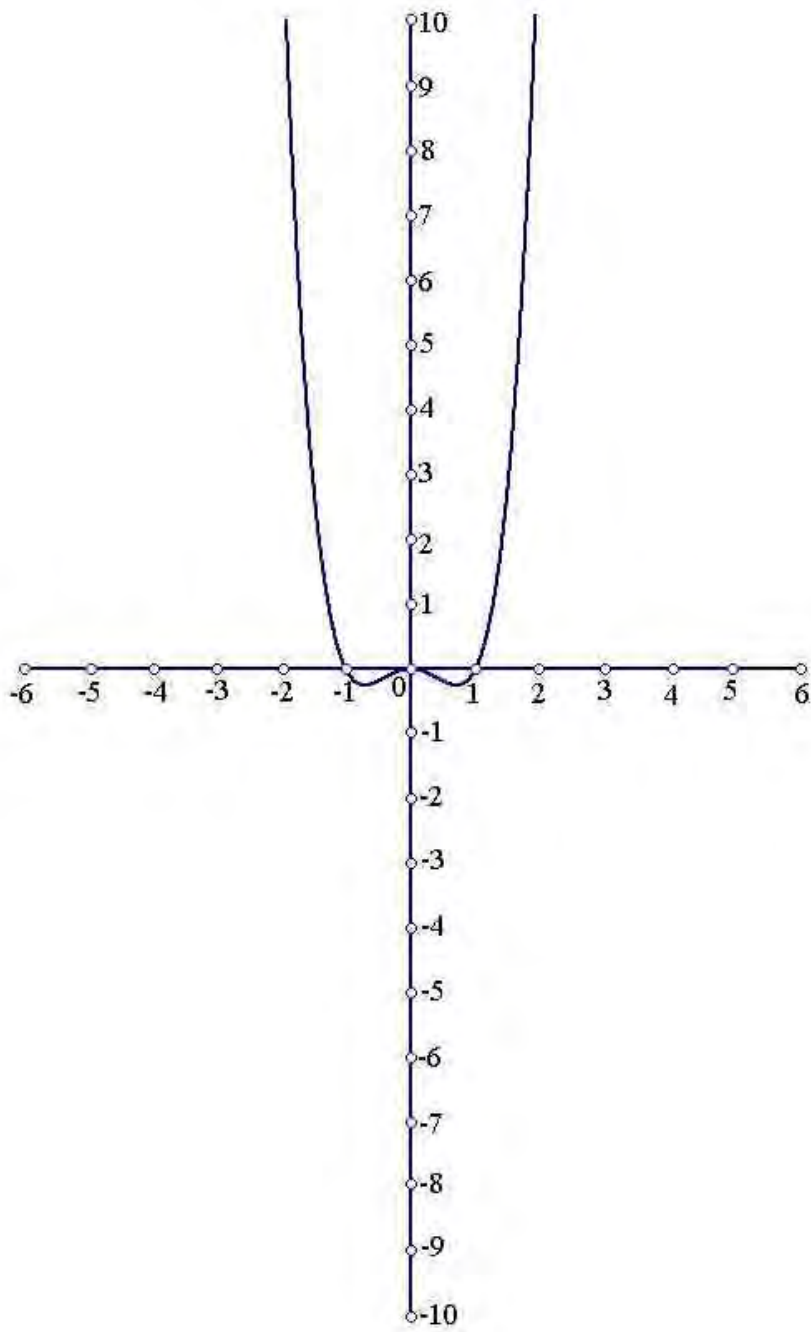


Σχήμα 63. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^4 + qx + t = 0$  όπου οι τιμές  $-\frac{t}{q}$  και  $-t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.





Σχήμα 64. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + qx + t = 0$  όπου οι τιμές  $-\frac{t}{q}$  και  $-t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.



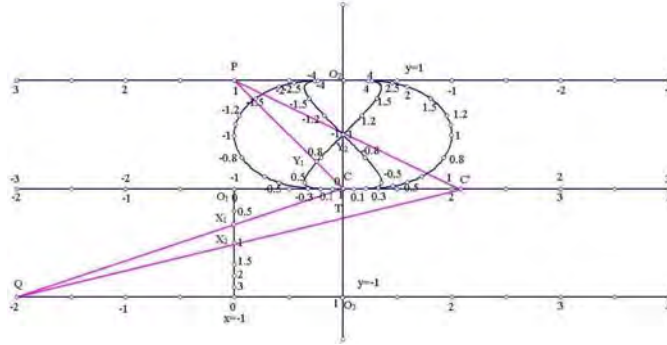
Σχήμα 65. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^4 - x^2 + qx + t = 0$  όπου οι τιμές  $-\frac{t}{q}$  και  $-t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^3+t}{t^4+1}, & r = 1 \\ \frac{t^3-t}{t^4+1}, & r = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{t^4}{t^4+1}$$

(βλ. Σχήματα 66, 67 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 33).

Οι άξονες των  $x, y$  και οι ευθείες  $y=1, y=-1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $x$  διαβάζουμε τις τιμές  $c, c+t$  έτσι ώστε η τιμή  $t$  να διαβάζεται στην τιμή  $c=0$  (εδώ, θα υποθέσουμε ότι η τιμή  $t=1$ ). Καλούμε  $O_1$  το σημείο στο οποίο ο άξονας  $c+t$  παίρνει την τιμή μηδέν. Σχεδιάζουμε την ευθεία  $x=-t$  ( $t=1$ ) και την διαβαθμίζουμε με την μονάδα μέτρησης του άξονα των  $x$ . Οι ευθείες  $y=1, y=-1$  τέμνουν τον άξονα των  $y$  στα σημεία  $O_2$  και  $O_3$  αντίστοιχα. Στην ευθεία  $y=1$  διαβάζουμε την τιμή  $p$  ως  $-p$  και στην  $y=-1$  την τιμή  $q-t$ . Παίρνοντας  $OC=c, O_1T=-t, O_2P=p$  και  $O_3Q=q-t$  έχουμε ότι η  $QT$  τέμνει την  $x=-1$  στο  $X_1$ . Η τεταγμένη του  $X_1$  είναι η απόλυτη τιμή της ζητούμενης τιμής και διαβάζεται ως  $-\frac{x^2}{x^2+1}$ . Η  $CP$  τέμνει την καμπύλη στο σημείο  $Y_1$ . Οι συντεταγμένες του  $Y_1$  δίνονται μέσω της καμπύλης για κάποιο  $t$ .

Η τιμή αυτή δίνει το πρόσημο της τιμής στο  $X_1$ . Ακόμη, σχεδιάζουμε τις ευθείες  $PC'$  και  $C'Q$  με  $C'$  κάποιο σημείο στον άξονα  $x$  έτσι ώστε αν  $Y_2, X_2$  είναι τα σημεία τομής της καμπύλης με την  $PC'$  και της  $x=-1$  με την  $C'Q$ , αντίστοιχα τότε οι τιμές σ' αυτά τα σημεία είναι ίσες κατά απόλυτη τιμή. Η τιμή στο  $Y_2$  είναι η δεύτερη ρίζα.



Σχήμα 66.

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $r = -1$ , (εδώ  $c=0$ ) τα σημεία  $Q, X_1, C$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{vmatrix} q-t & -1 & 1 \\ -t & -\frac{x^2}{x^2+1} & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ισοδύναμα,

$$qx^2 + c + t = 0.$$

Ακόμη, για τα σημεία  $C, Y_1, P$  έχουμε ότι

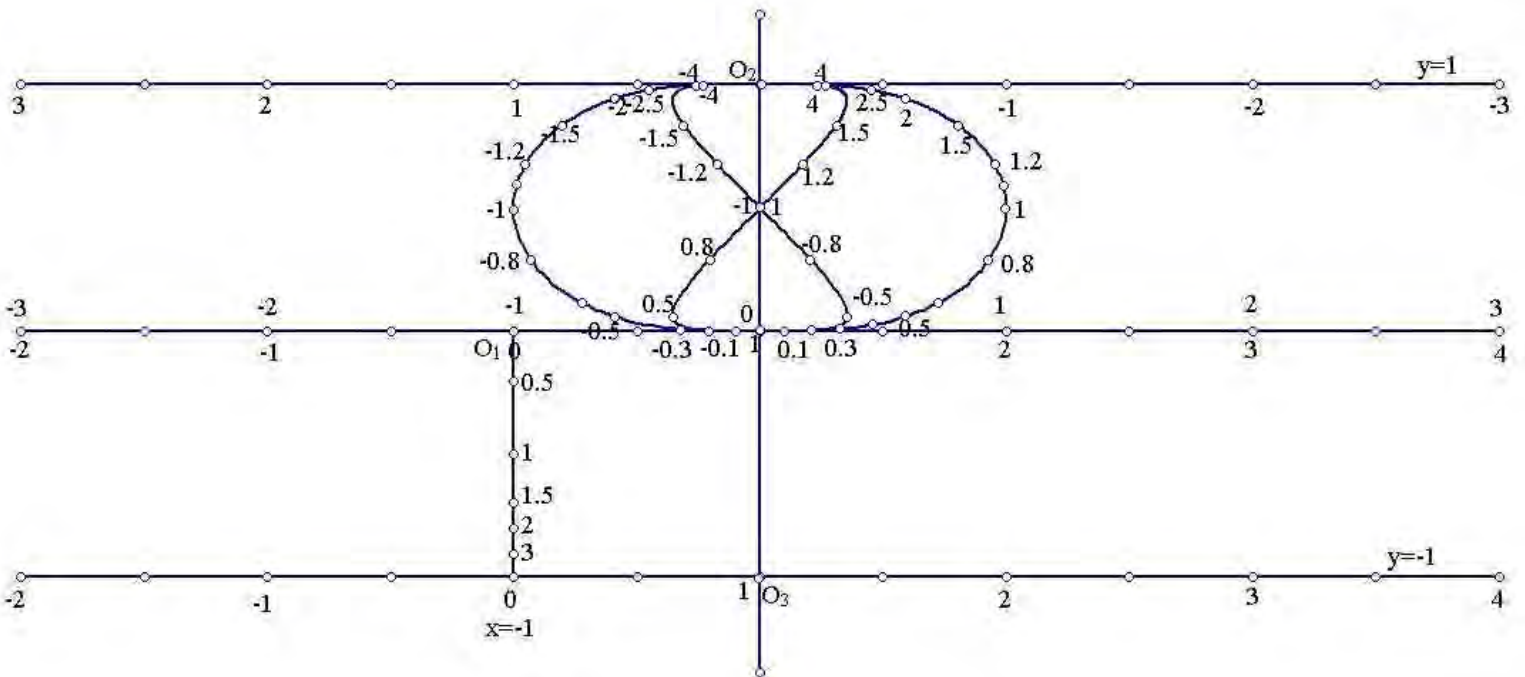
$$\begin{vmatrix} c & 0 & 1 \\ \frac{x^3-x}{x^4+1} & \frac{x^4}{x^4+1} & 1 \\ -p & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ισοδύναμα,

$$px^4 + x^3 - x - c = 0.$$

Τότε, έχουμε  $px^4 + x^3 + qx^2 - x + t = 0$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.



Σχήμα 67. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $px^4 + x^3 + qx^2 \pm x + t = 0$  (εδώ  $t=1$ ) όπου οι τιμές  $p$  και  $q$  διαβάζονται στις ευθείες  $y=1$  και  $y=-1$ , αντίστοιχα. Ακόμη η τιμή  $x$  διαβάζεται στην  $x=-t$  και  $x(t)$ .

Γενικότερα, αν θέλουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση για κάθε  $t$ , μετακινούμε τον άξονα της τιμής  $c+t$ , έτσι ώστε η τιμή του,  $t$  να ταυτιστεί με την τιμή μηδέν του άξονα του  $c$ .

Ακόμη έχουμε νομογραφήματα που δίνουν και τις μιγαδικές ρίζες μιας εξίσωσης. Χρησιμοποιώντας τα νομογραφήματα που επιλύουν εξισώσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού (βλ. σελίδες 33 και 40, αντίστοιχα) μπορούμε να βρούμε τις πραγματικές και τις μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης. Αρχικά, χρησιμοποιούμε το νομογράφημα της εξίσωση τρίτου βαθμού για την  $x^3 + \left(\alpha\gamma - 4\delta - \frac{\beta^2}{3}\right)x + \left(\frac{2\beta^3}{27} + \frac{\alpha\gamma\beta + 8\beta\delta}{3} - \alpha^2\delta - \gamma^2\right) = 0$  για  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  δοθέντα. Ακόμη, υπολογίζοντας τις τιμές  $c, d$  με  $c = x + \frac{\beta}{3}$  και  $d = \beta - c$ , αντίστοιχα, έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x^2 - cx + d = 0 \text{ και } x^2 - dx + \alpha = 0.$$

Αν οι ρίζες τους είναι οι  $p, q$  και  $r, t$  αντίστοιχα και επαληθεύουν και τον τύπο  $pt + qr = \gamma$  τότε οι τιμές  $p, q, r$  και  $t$  είναι οι συντελεστές των εξισώσεων

$$x^2 + px + q = 0 \text{ και } x^2 + rx + t = 0.$$

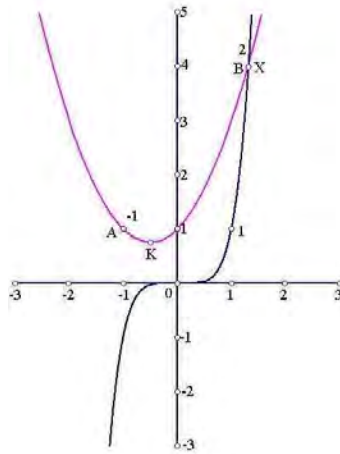
Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το νομογράφημα για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού βρίσκουμε όλες τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων. Οι τιμές αυτές είναι και οι ζητούμενες ρίζες.

### 3.5 Επίλυση εξισώσεων πέμπτου βαθμού.

Έστω  $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \zeta = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος (εδώ  $\alpha > 0$ ). Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $x = sy - \frac{\beta}{5\alpha}$  με  $s^2 = \frac{|5\alpha\gamma - 2\beta^2|}{5\alpha^2}$  έχουμε την εξίσωση  $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$  όπου

$$p = \begin{cases} 1, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 > 0 \\ 0, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 = 0 \\ -1, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 < 0 \end{cases}$$

Αρχικά, έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων την καμπύλη  $y = x^5 + px^3$  (βλ. Σχήματα 68, 70-72 και στο Παράρτημα στα Σχήματα 34-36). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Παίρνοντας τα σημεία  $K\left(-\frac{r}{2q}, \frac{r^2 - 4qt}{4q}\right)$ ,  $A(-1, -q+r-t)$  και  $B(1, -q-r-t)$  σχεδιάζουμε την παραβολή με κορυφή το  $K$  και διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ . Η παραβολή τέμνει την καμπύλη στο σημείο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



Σχήμα 68.

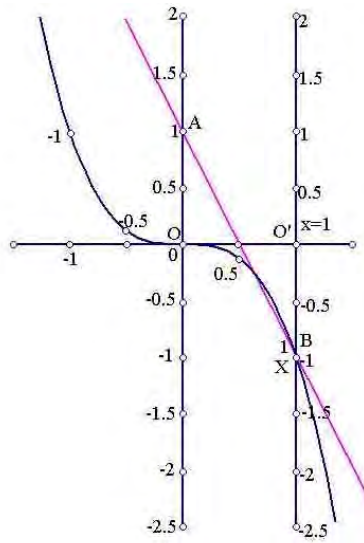
*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $p=0$ , η παραβολή έχει εξίσωση  $y = -qx^2 - rx - t$ .

Τότε, έχουμε  $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

### 3.6 Επίλυση εξισώσεων ν-οστού βαθμού.

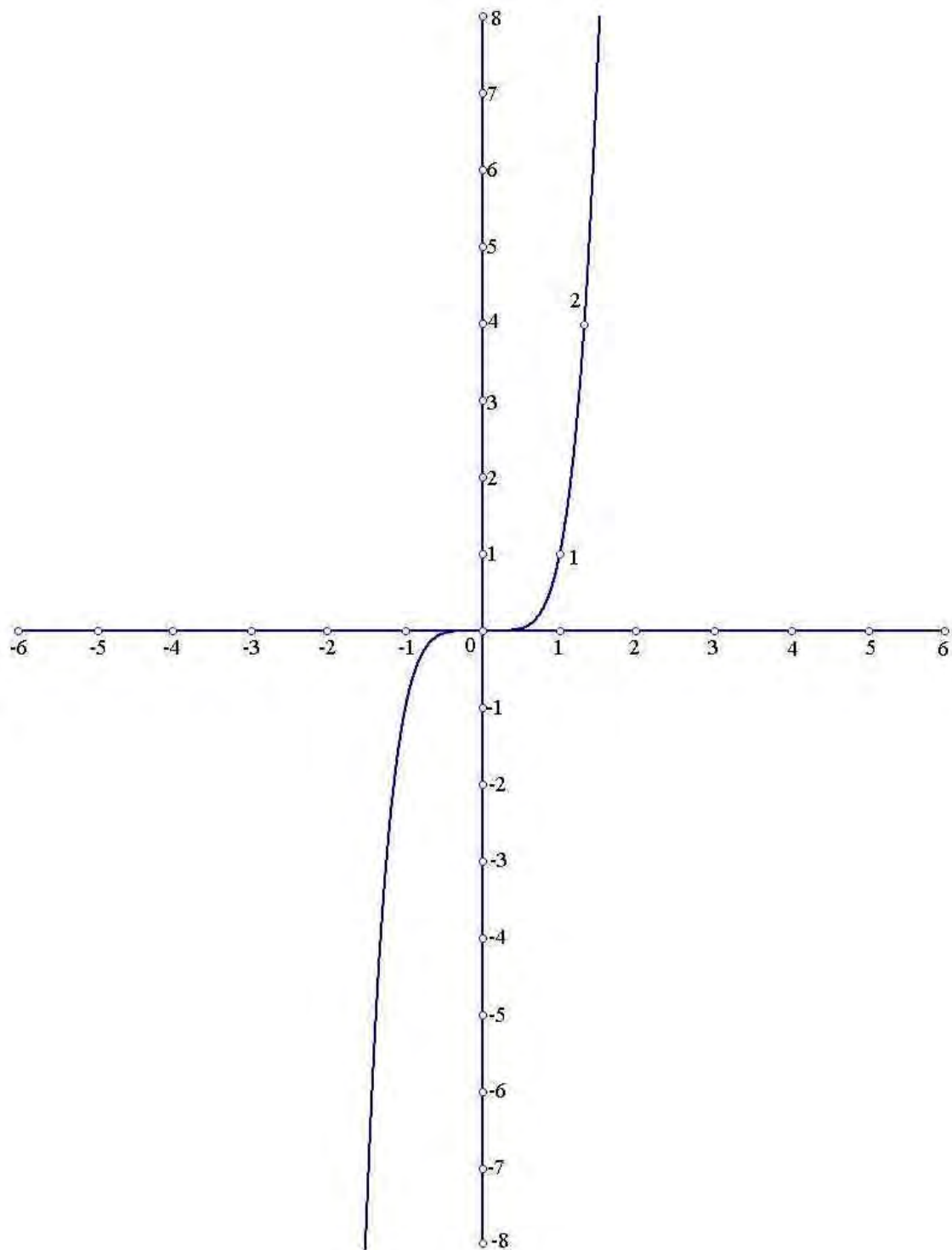
Γενικότερα, αν έχουμε την εξίσωση της μορφής  $\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \gamma = 0$ , με  $n, \alpha, \beta, \dots, \gamma$  δεδομένα και  $x$  ο άγνωστος στην περίπτωση που μπορεί να γραφεί στη μορφή  $x^n + \alpha x + \beta = 0$  με  $\alpha, \beta$  δοθέντα και  $x$  ο άγνωστος τότε έχουμε το παρακάτω νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$  και την καμπύλη  $y = -x^n$  (εδώ θα δούμε για  $n=3$ ) (βλ. Σχήματα 69, 73 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 37). Η ευθεία τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία διαβάζουμε, αντίστοιχα, τις τιμές  $\beta$  και  $\alpha + \beta$  παίρνοντας  $O'A = \alpha + \beta$  και  $OB = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



Σχήμα 69.

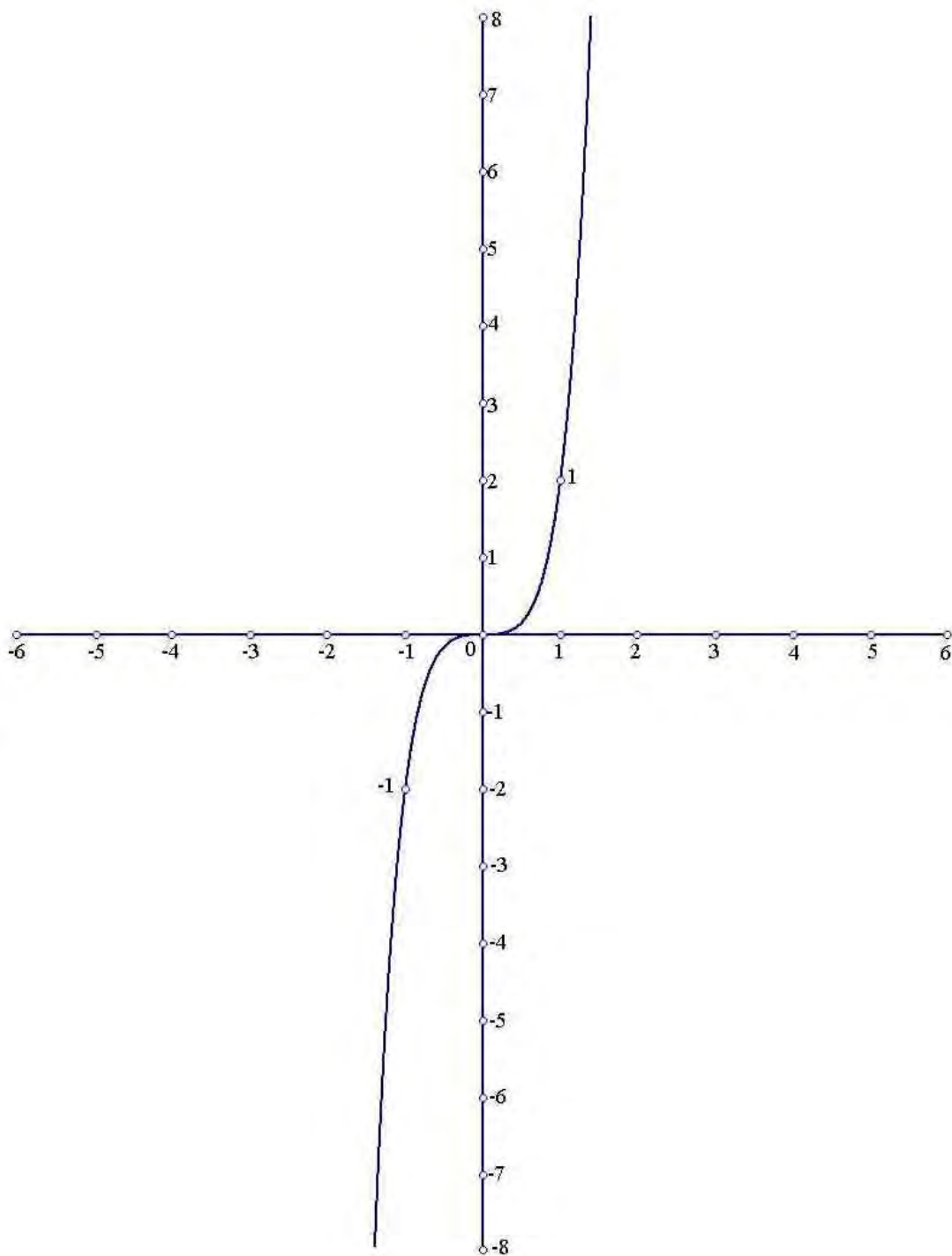
*Απόδειξη.* Η Α'Β' έχει εξίσωση  $y=ax+\beta$ , οπότε έχουμε  $x^3+ax+\beta=0$ .

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι να σχεδιάσουμε την ευθεία  $x=1$  στη θέση του άξονα των  $y$  και να διαβάσουμε σ' αυτή την τιμή  $\beta-\alpha$ .



Σχήμα 70. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3+qx^2+rx+t=0$  όπου η παραβολή σχεδιάζεται από τα

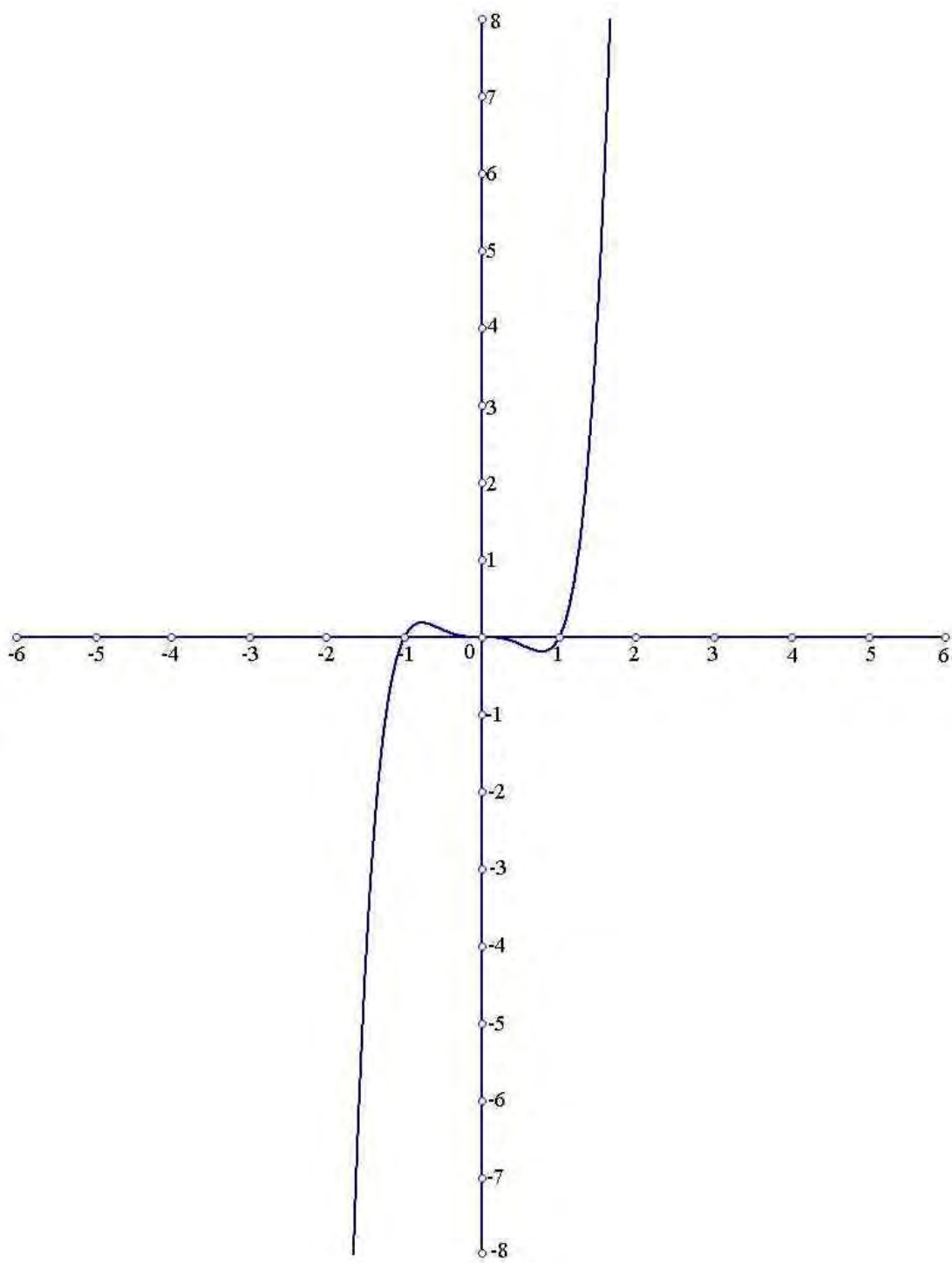
$$\text{σημεία } K\left(-\frac{r}{2q}, \frac{r^2-4qt}{4q}\right), \Lambda(-1, -q+r-t) \text{ και } B(1, -q-r-t).$$



Σχήμα 71. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + x^2 + qx + t = 0$  όπου η παραβολή σχεδιάζεται από

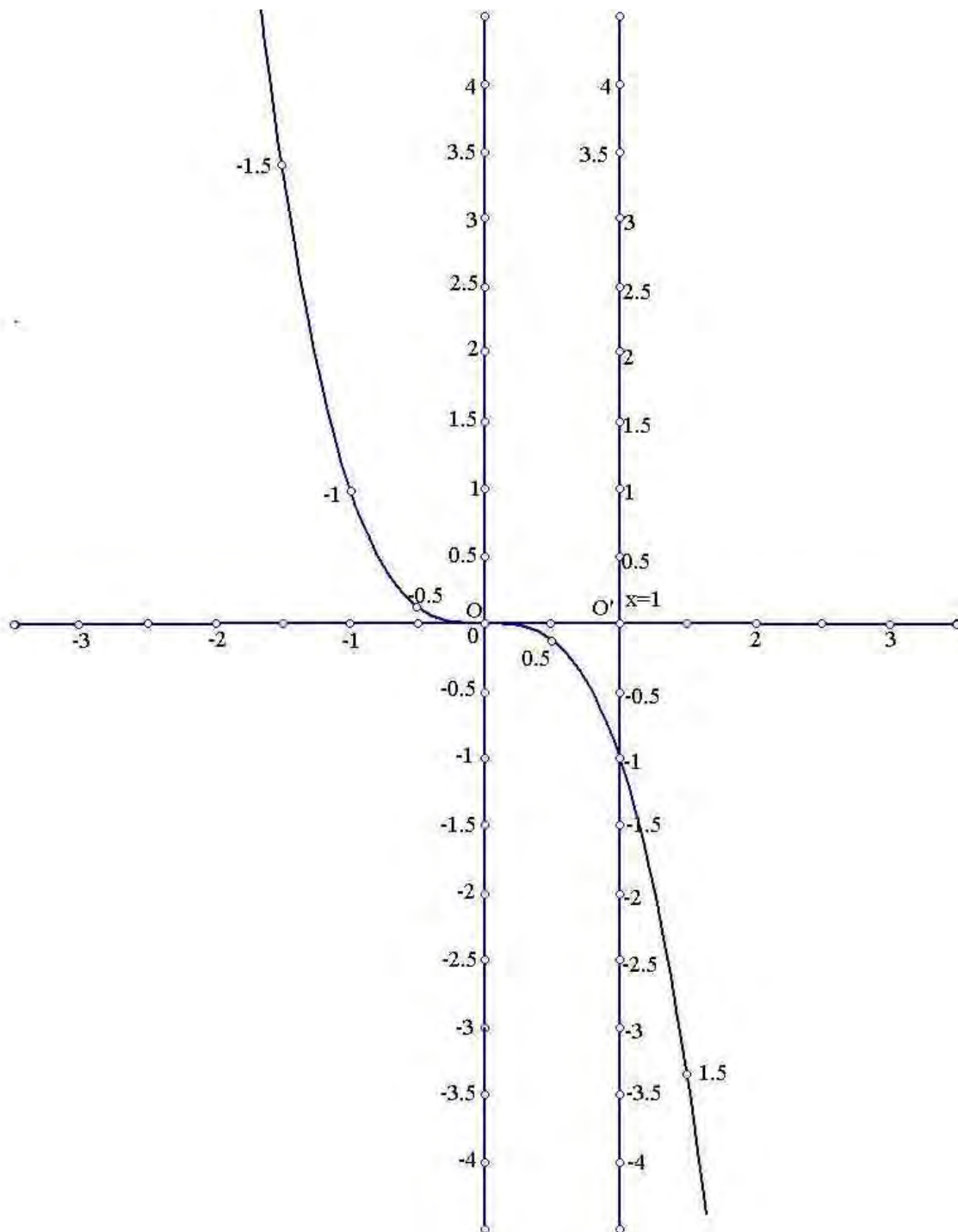
τα σημεία  $K\left(-\frac{r}{2q}, \frac{r^2 - 4qt}{4q}\right)$ ,  $A(-1, -q+r-t)$  και  $B(1, -q-r-t)$ .





Σχήμα 72. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^5 - x^3 + qx^2 + rx + t = 0$  όπου η παραβολή σχεδιάζεται από

τα σημεία  $K\left(-\frac{r}{2q}, \frac{r^2 - 4qt}{4q}\right)$ ,  $A(-1, -q+r-t)$  και  $B(1, -q-r-t)$ .



Σχήμα 73. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $x^3 + \alpha x + \beta = 0$  όπου οι τιμές  $\beta$ ,  $\alpha + \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$ , αντίστοιχα.

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΟΜΟ- ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

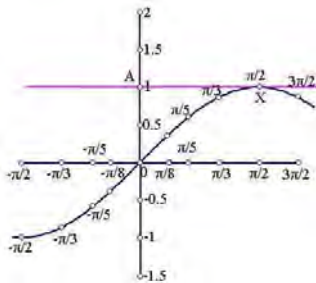
Το κεφάλαιο αυτό μελετά την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων όπως την επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων και της εξίσωσης του Kepler.

### 4.1 Επίλυση εξισώσεων $\alpha\eta\mu t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αν θέλουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού δυο μεταβλητών (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας, αντίστοιχα, τις τιμές  $\alpha$  και  $t$  ως  $\frac{1}{\alpha}$  και τοξημ $t$ , είτε το νομογρά-

φημα ισότητας δυο λόγων (βλέπε σελίδα 22) με  $\frac{\eta\mu t}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζοντας την τιμή  $t$  ως τοξημ $t$  και λαμβάνοντας την τιμή  $\gamma$  ως 1.

Άλλο νομογράφημα για την επίλυσή της είναι το παρακάτω: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την καμπύλη  $y = \eta\mu x$  στο  $[-\pi, \pi]$  (βλ. Σχήματα 74, 75 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 38). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  παίρνοντας  $OA = \frac{\beta}{\alpha}$ . Η ευθεία  $y = \frac{\beta}{\alpha}$  τέμνει το γράφημα του ημιτόνου στο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



Σχήμα 74.

*Απόδειξη.* Η ευθεία  $y = \frac{\beta}{\alpha}$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  και ισχύει  $\eta\mu t = \frac{\beta}{\alpha}$ , οπότε  $\alpha\eta\mu t = \beta$ .

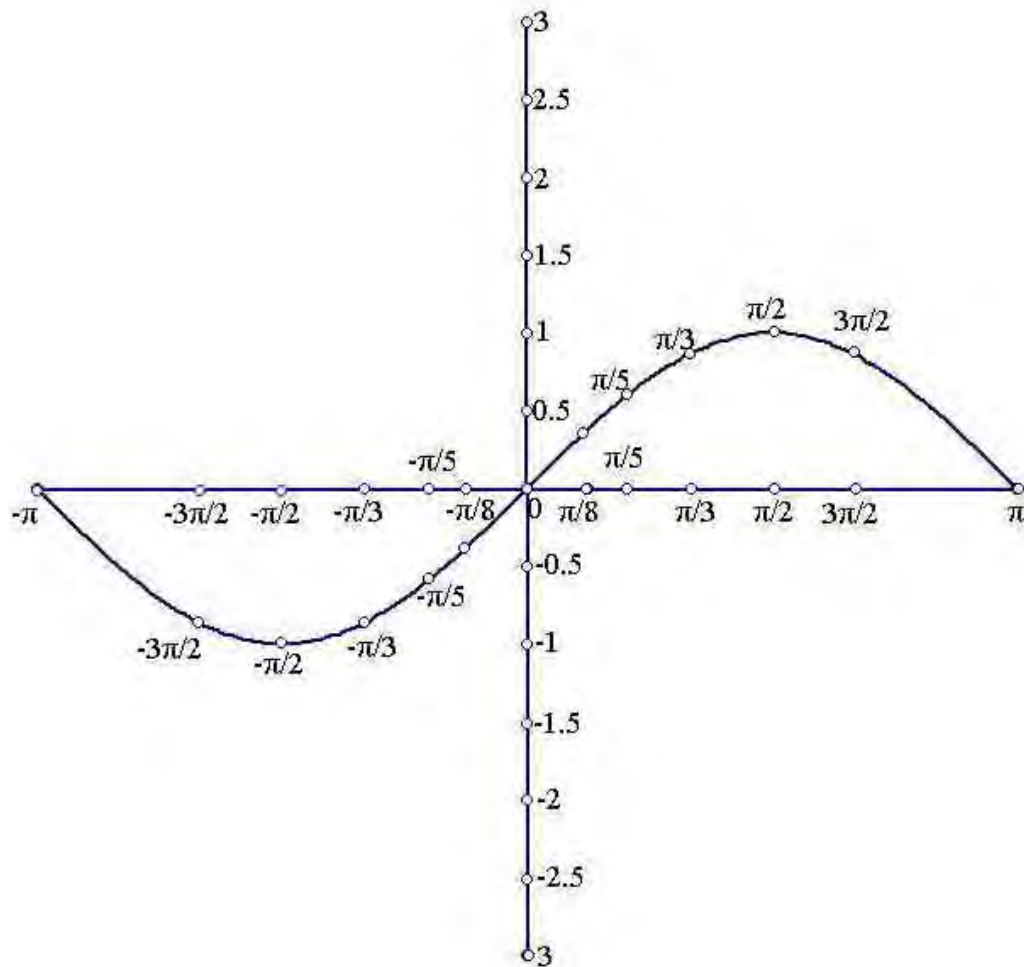
### 4.2 Επίλυση εξισώσεων $\alpha\sigma\upsilon\eta t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αν θέλουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού δυο μεταβλητών (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha$  και  $t$  ως  $\frac{1}{\alpha}$  και τοξσυν $t$ , αντίστοιχα, είτε το νομογρά-

φημα ισότητας δυο λόγων (βλέπε σελίδα 22) με  $\frac{\sigma\upsilon\eta t}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζοντας την τιμή  $t$  ως τοξσυν $t$  και λαμβάνοντας την τιμή  $\gamma$

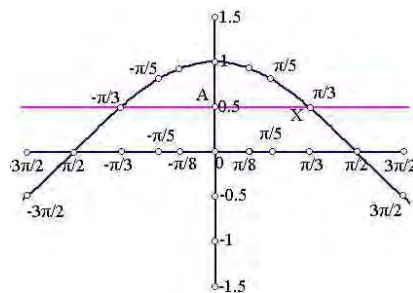
ως 1.

Άλλο νομογράφημα για την επίλυση της είναι το παρακάτω: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την καμπύλη  $y = \sigma\upsilon\eta x$  στο  $[-\pi, \pi]$  (βλ. Σχήματα 76, 78 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 39). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με



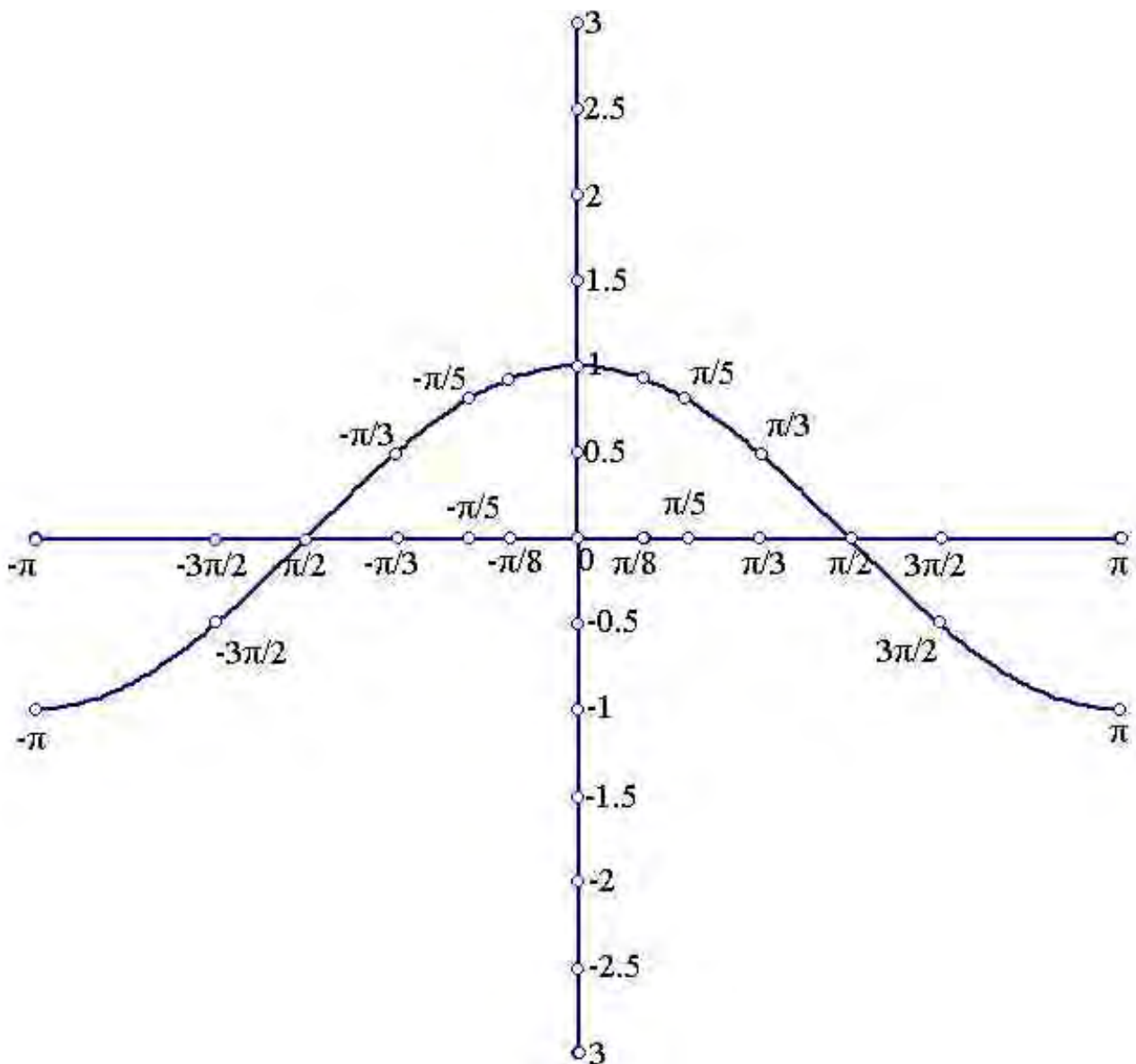
Σχήμα 75. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha \eta \mu \tau = \beta$  όπου η τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζεται στον άξονα των  $y$ .

την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  παίρνοντας  $OA = \frac{\beta}{\alpha}$ . Η ευθεία  $y = \frac{\beta}{\alpha}$  τέμνει το γραφικό του συνημίτονου στο  $X$ . Η τετμημένη του  $X$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



Σχήμα 76.

Η απόδειξη είναι τετριμμένη δεδομένου ότι η ευθεία  $y = \frac{\beta}{\alpha}$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  και ισχύει  $\sin \tau = \frac{\beta}{\alpha}$ , οπότε  $\alpha \sin \tau = \beta$ .



Σχήμα 77. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha \sin t = \beta$  όπου η τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζεται στον άξονα των  $\gamma$ .

### 4.3 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \sin t = \beta$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού δυο μεταβλητών (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha$  και  $t$  ως  $\frac{1}{\alpha}$  και το  $\beta$ , αντίστοιχα είτε το νομογράφημα ισότητας δυο λόγων (βλέπε σελίδα 22) με  $\frac{\alpha \sin t}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζοντας την τιμή  $t$  ως το  $\beta$  και λαμβάνοντας την τιμή  $\gamma$  ως 1.

Εννοείται ότι ένας άλλος χρήσιμος αλλά τετριμμένος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την καμπύλη  $y = \epsilon\phi x$  στο  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (βλ. Σχήμα 79 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 40). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται

με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  παίρνοντας  $OA = \frac{\beta}{\alpha}$ . Η ευθεία  $y = \frac{\beta}{\alpha}$  τέμνει το γράφημα του εφαπτομένης στο X. Η τετμημένη του X είναι η ζητούμενη ρίζα. Η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Επειδή η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή  $\beta \phi x = \alpha$  έχουμε το παρακάτω νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την καμπύλη  $y = \sigma\phi x$  στο  $(-\pi, \pi)$  (βλ. Σχήμα 80 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 41).

Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\frac{\alpha}{\beta}$  παίρνοντας

$OA = \frac{\alpha}{\beta}$ . Η ευθεία  $y = \frac{\alpha}{\beta}$  τέμνει το γράφημα του συναρπτομένης στο X. Η τετμημένη του X είναι η ζητούμενη ρίζα.

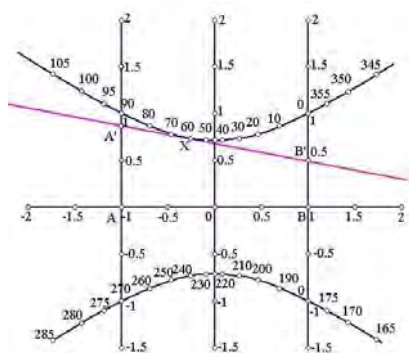
#### 4.4 Επίλυση εξισώσεων $a\eta\mu t + b\sigma\upsilon\eta t = \gamma, \gamma \neq 0$ με $a, b, \gamma$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αρχικά, θα κατασκευάσουμε ένα νομογράφημα όπου εμφανίζεται μια υπερβολή. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων τις ευθείες  $x = -1, x = 1$  και την υπερβολή  $2y^2 - x^2 = 1$  (βλ. Σχήματα 78, 81 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 42). Οι ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Οι ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\frac{\alpha}{\gamma}$  και  $\frac{\beta}{\gamma}$ , αντίστοιχα, παίρνοντας

$AA' = \frac{\alpha}{\gamma}$  και  $BB' = \frac{\beta}{\gamma}$ , για δεδομένο  $\gamma$ . Η A'B' τέμνει την υπερβολή στο X με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή

το  $\xi\epsilon\phi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (90^\circ, 180^\circ), & x < -1 \text{ και } y > 0 \text{ ή } x > 1 \text{ και } y < 0 \\ (0^\circ, 90^\circ), & |x| < 1 \text{ και } y > 0 \\ (270^\circ, 360^\circ), & x > 1 \text{ και } y > 0 \text{ ή } x < -1 \text{ και } y < 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & |x| < 1 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 78.

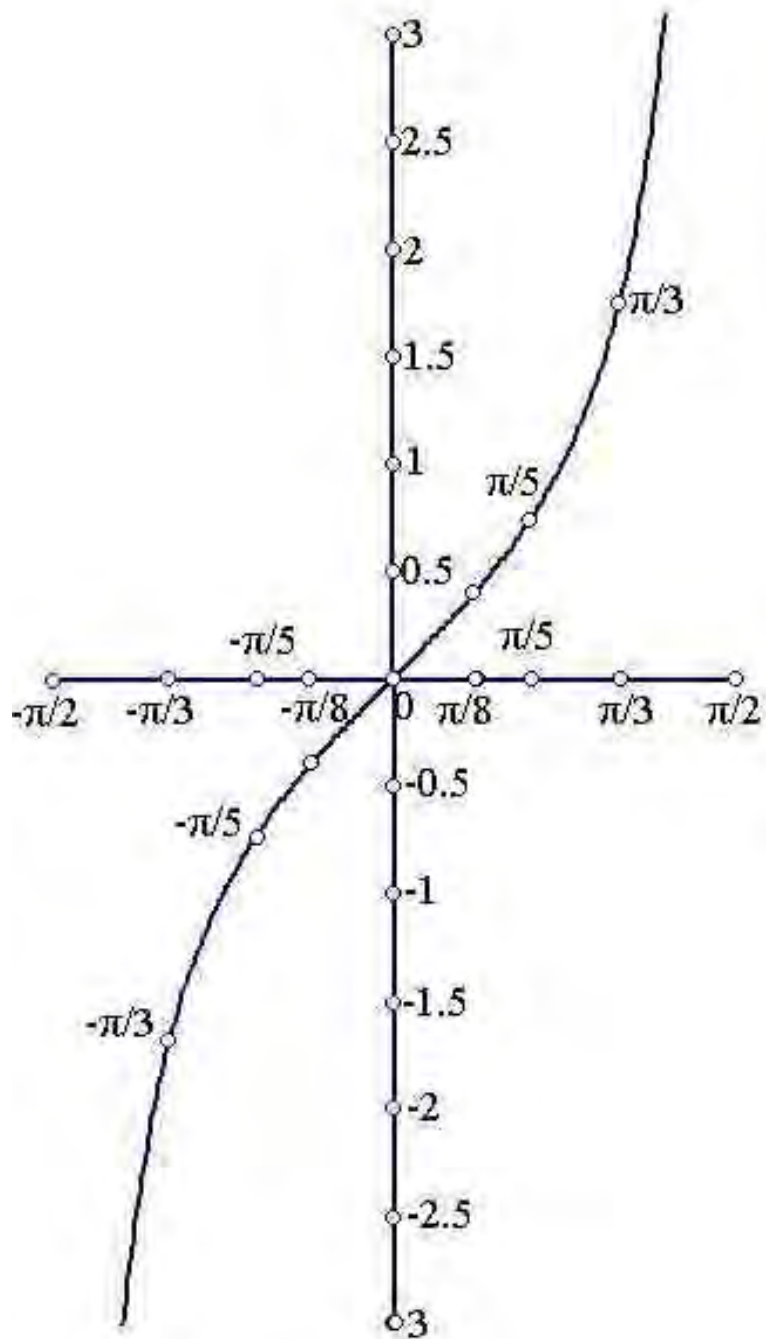
Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $|x| < 1$  και  $y > 0$  έχουμε ότι η A'B' έχει

εξίσωση  $y = \frac{(\beta - \alpha)}{2\gamma}x + \frac{\beta + \alpha}{2\gamma}$ . Ακόμη, έχουμε

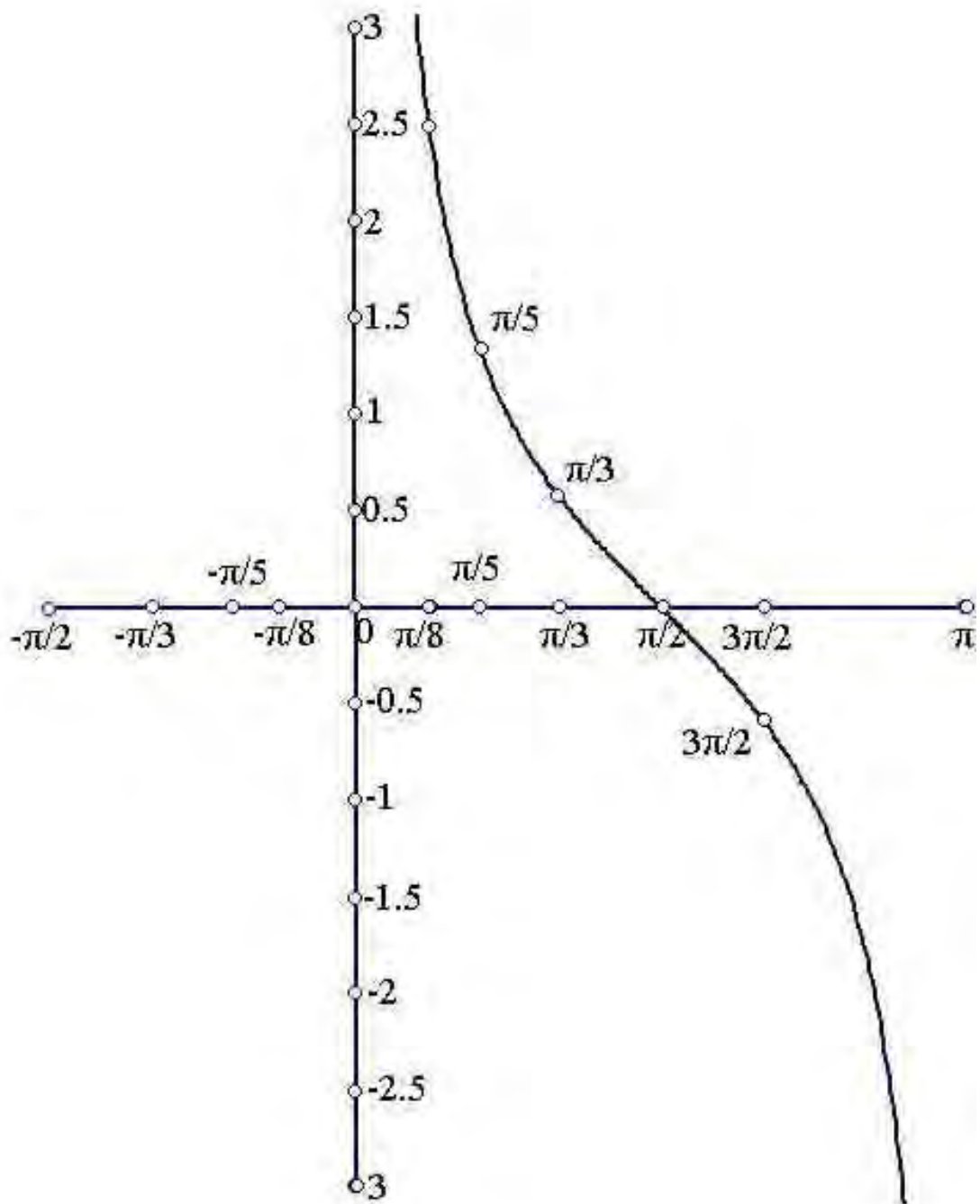
$$x = \frac{1 - \epsilon\phi t}{1 + \epsilon\phi t} \text{ και } y = \frac{\beta}{\gamma(1 + \epsilon\phi t)} + \frac{\alpha}{\gamma(1 + \epsilon\phi t)} \epsilon\phi t,$$

οπότε  $a\eta\mu t + b\sigma\upsilon\eta t = \gamma$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

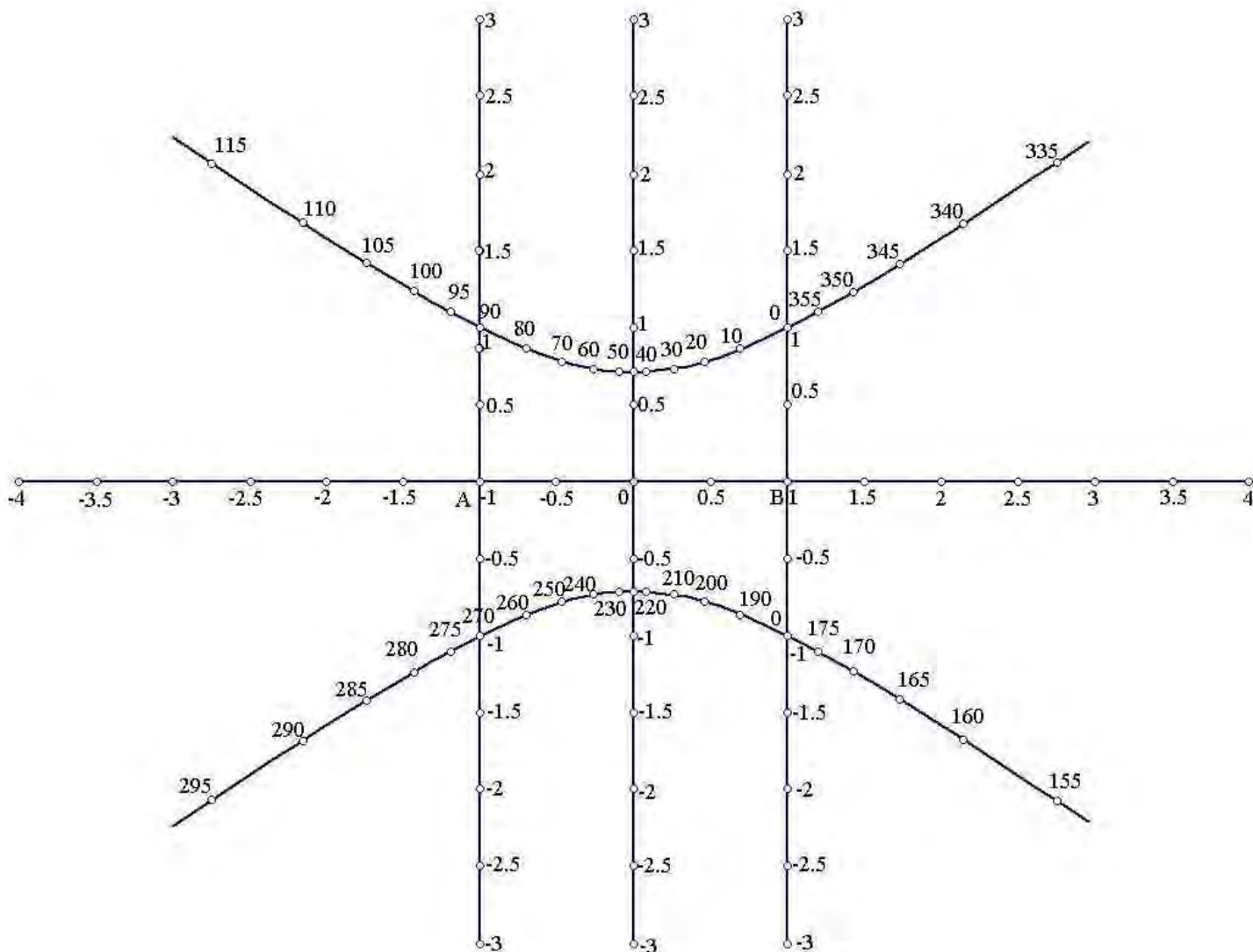


Σχήμα 79. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha \sin \beta = \beta$  όπου η τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$  διαβάζεται στον άξονα των  $y$ .



Σχήμα 80. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\beta \sin t = \alpha$  όπου η τιμή  $\frac{\alpha}{\beta}$  διαβάζεται στον άξονα των  $y$ .



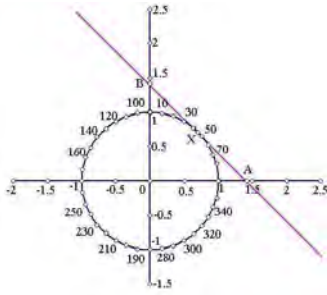


Σχήμα 81. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha \mu + \beta \sigma \nu \tau = \gamma$  όπου οι τιμές  $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$  διαβάζονται στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ , αντίστοιχα.

Άλλο νομογράφημα είναι ένα νομογράφημα όπου εμφανίζεται ένας κύκλος. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  (βλ. Σχήματα 82, 84 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 43). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\frac{\gamma}{\alpha}$  και  $\frac{\gamma}{\beta}$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \frac{\gamma}{\alpha}$  και  $OB = \frac{\gamma}{\beta}$ , για δεδομένο  $\gamma$ . Η  $AB$  τέμνει τον κύκλο στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξομικ είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (0^\circ, 90^\circ), & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ (90^\circ, 180^\circ), & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & x < 0 \text{ και } y < 0 \\ (270^\circ, 360^\circ), & x > 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $x > 0$  και  $y > 0$  έχουμε ότι τα  $A, B, X$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν



Σχήμα 82.

$$\begin{vmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\gamma}{\beta} & 1 \\ \eta\mu t & \sigma\upsilon\nu t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα, έχουμε  $\alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\nu t = \gamma$ .  
Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να σχεδιάσουμε τον μοναδιαίο κύκλο, να σχεδιάσουμε τους κύκλους  $C_{|\gamma|}$ :  $x^2 + y^2 = \frac{1}{\gamma^2}$ , για κάθε τιμή  $\gamma$  και να διαβάσουμε, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x, y$  τις τιμές  $\frac{\text{sgn}(\gamma)}{\alpha}$  και  $\frac{\text{sgn}(\gamma)}{\beta}$

(βλ. Σχήμα 85 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 44). Παίρνοντας  $OA = \frac{\text{sgn}(\gamma)}{\alpha}$  και  $OB = \frac{\text{sgn}(\gamma)}{\beta}$ . Η  $AB$  τέμνει τον κύκλο

$C_{|\gamma|}$  για δεδομένο  $\gamma$  στο  $X$ . Η  $OX$  τέμνει τον μοναδιαίο κύκλο στο σημείο  $Y(x', y')$ . Η τιμή τοξήμ $x'$  είναι η ζητούμενη ρίζα.

Διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με την τιμή  $\alpha$ , η εξίσωση παίρνει τη μορφή  $\eta\mu t = \alpha + \beta\sigma\upsilon\nu t$  με  $\alpha$  την τιμή  $\frac{\gamma}{\alpha}$  και  $\beta$  την

$-\frac{\beta}{\alpha}$ . Έτσι προκύπτει ένα νομογράφημα όπου εμφανίζεται μια παραβολή. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμέ-

νων την ευθεία  $x=1$  και την παραβολή  $y^2 = -2x+1$  (βλ. Σχήματα 83, 88 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 45). Η ευθεία  $x=1$

τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $O'B = \beta$ . Η  $AB$

τέμνει την παραβολή στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξήμ $\left(\frac{x}{1-x}\right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα

$\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (270^\circ, 360^\circ), & 0 < x < \frac{1}{2} \text{ και } y < 0 \\ (90^\circ, 180^\circ), & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & x < 0 \text{ και } y < 0 \\ (0^\circ, 90^\circ), & 0 < x < \frac{1}{2} \text{ και } y > 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y = (\beta - \alpha)x + \alpha$ . Ακόμη, έχουμε

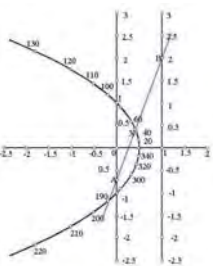
$$x = \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1 + \sigma\upsilon\nu t} \text{ και } y = \frac{\beta\sigma\upsilon\nu t + \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu t}.$$

οπότε έχουμε  $\eta\mu t = \alpha + \beta\sigma\upsilon\nu t$ .

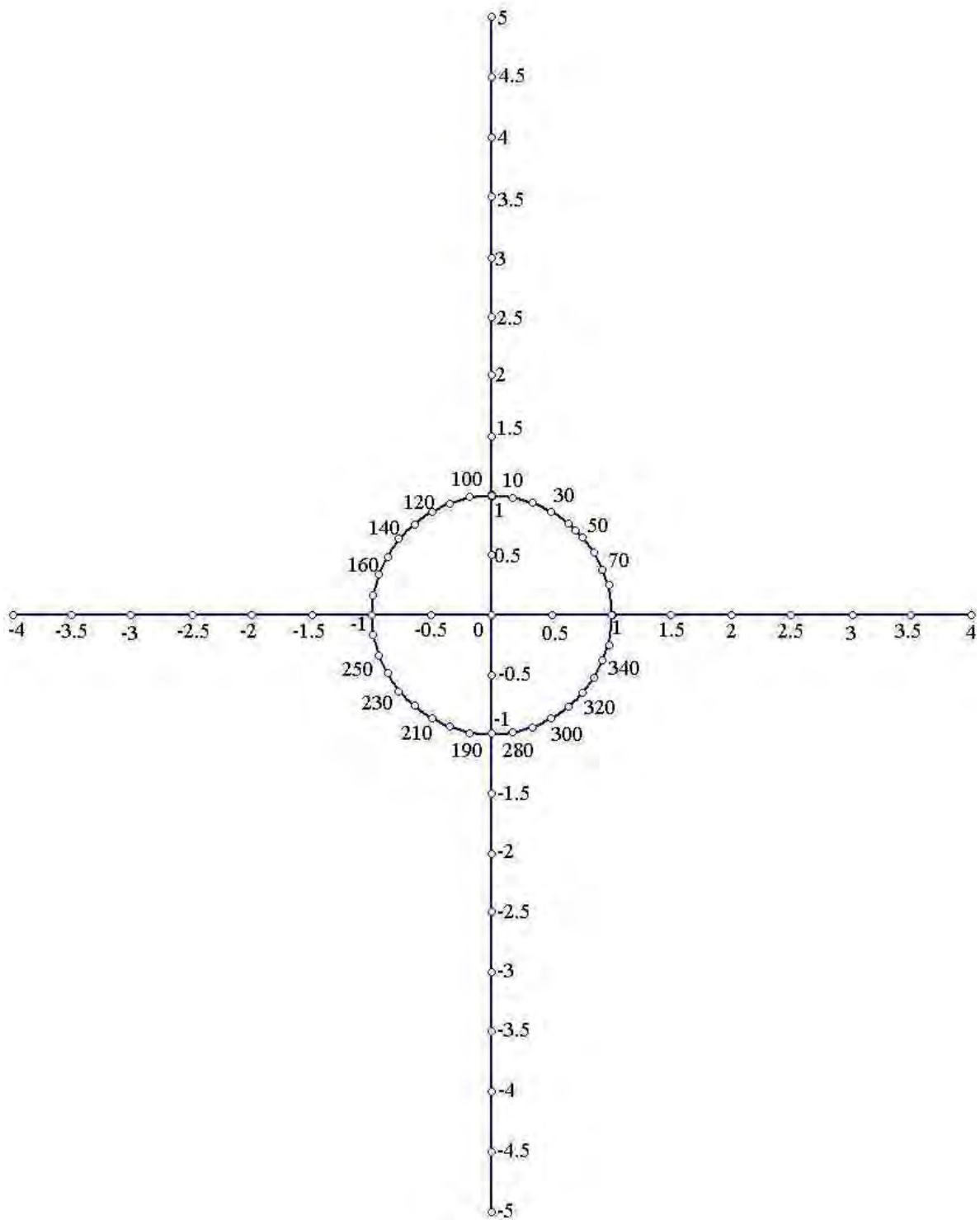
Άλλο νομογράφημα είναι το νομογράφημα με την υπερβολή. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$  (βλ. Σχήματα 86, 90 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 46). Ο

άξονας των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις

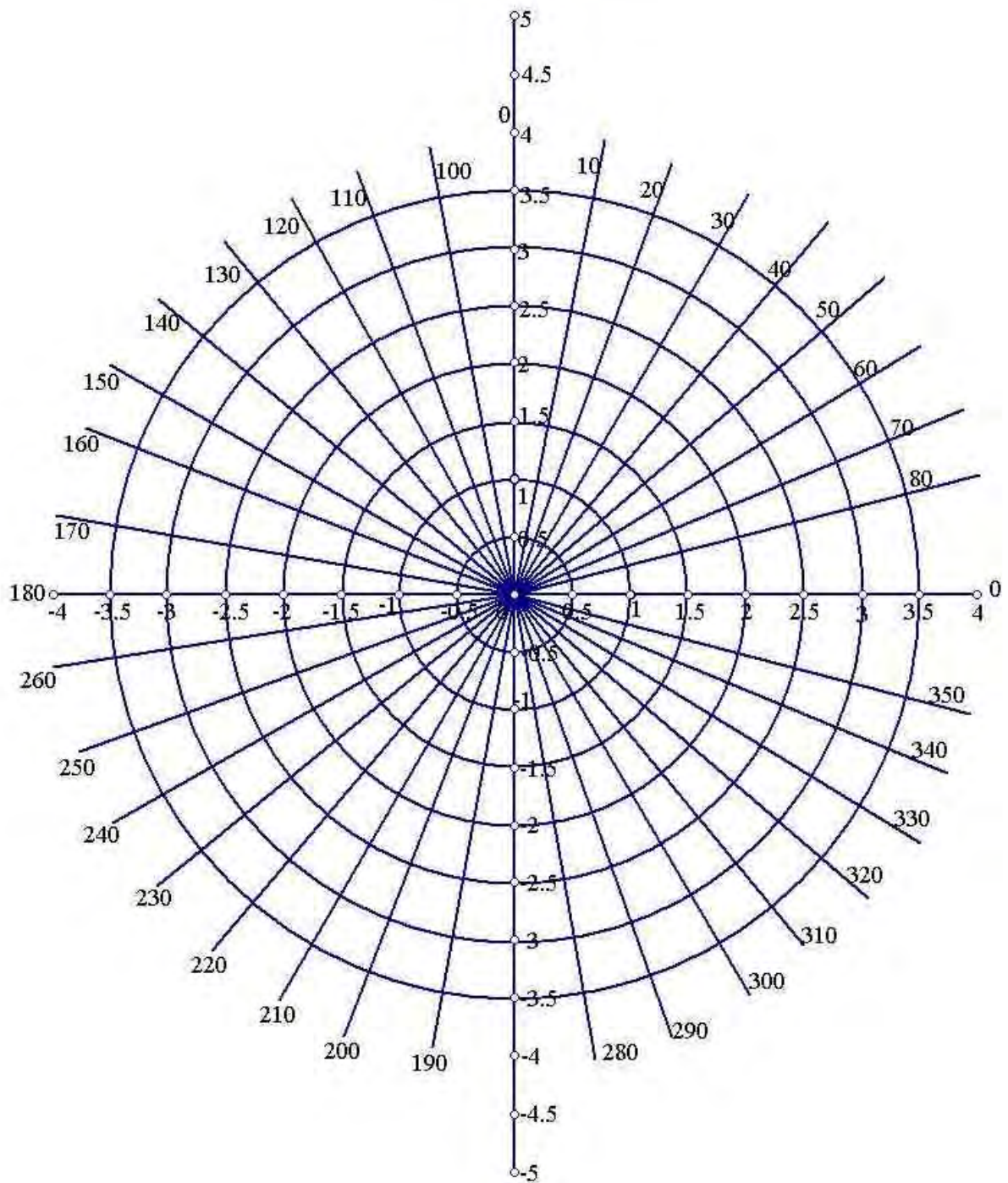
τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$ , παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει την υπερβολή



Σχήμα 83.



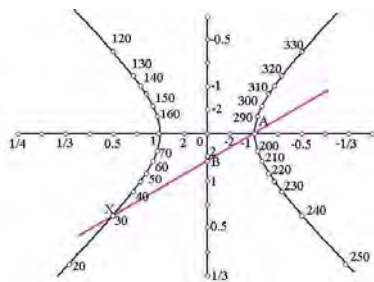
Σχήμα 84. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $ax + by = \gamma$  όπου οι τιμές  $\frac{\gamma}{a}$ ,  $\frac{\gamma}{b}$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και των  $y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 85. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $a \sin t + b \cos t = \gamma$  όπου οι τιμές  $\frac{\text{sgn}(\gamma)}{\alpha}$ ,  $\frac{\text{sgn}(\gamma)}{\beta}$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξοσυν $\left(\frac{y}{x}\right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (270^\circ, 360^\circ), & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ (90^\circ, 180^\circ), & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & x > 0 \text{ και } y < 0 \\ (0^\circ, 90^\circ), & x < 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 86.

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $x < 0$  και  $y < 0$  έχουμε ότι η  $AB$  έχει εξίσωση

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{1}{\beta}. \text{ Λιόμνη, έχουμε}$$

$$x = -\frac{1}{\alpha + \beta \text{ συν}t} \text{ και } y = -\frac{\text{συν}t}{\alpha + \beta \text{ συν}t},$$

οπότε έχουμε  $\eta\mu t = \alpha + \beta \text{ συν}t$ .

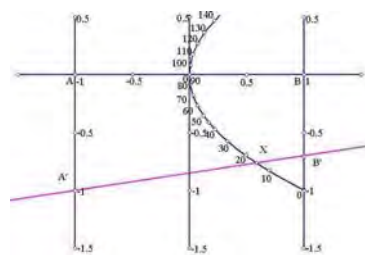
Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

#### 4.5 Επίλυση εξισώσεων $\alpha \text{ εφ}t + \frac{\beta}{\text{συν}t} + 1 = 0$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αρχικά, θα κατασκευάσουμε ένα νομογράφημα όπου εμφανίζεται μια παραβολή. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$  και την παραβολή  $x = y^2$  (βλ. Σχήματα 87, 91 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 47). Οι ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $AA' = \alpha$  και  $BB' = \beta$ . Η  $A'B'$  τέμνει την παραβολή στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξοσυν $\left(-\frac{2y}{1+x}\right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα και

ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (90^\circ, 180^\circ), & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ (0^\circ, 90^\circ), & x > 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$



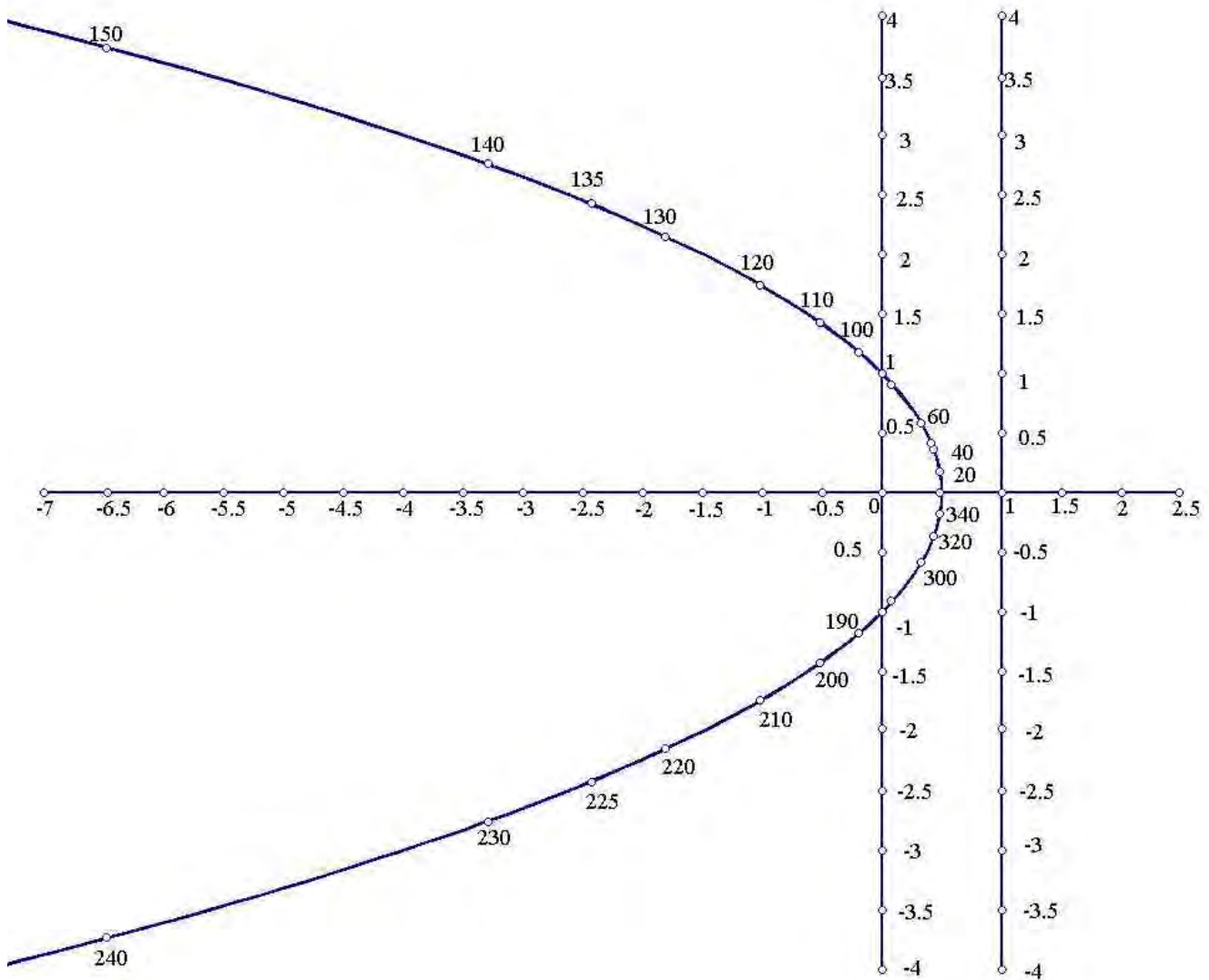
Σχήμα 87.

*Απόδειξη.* Η  $A'B'$  έχει εξίσωση  $y = \frac{(\beta - \alpha)}{2}x + \frac{\beta + \alpha}{2}$ . Λιόμνη, έχουμε  $x = -\frac{\beta + \alpha + \text{συν}t}{\beta - \alpha + \text{συν}t}$

$$\text{και } y = \frac{\alpha \text{ συν}t}{\beta - \alpha + \text{συν}t}, \text{ οπότε έχουμε } \alpha \text{ εφ}t + \frac{\beta}{\text{συν}t} + 1 = 0.$$

Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την υπερβολή  $y^2 - x^2 = 1$  (βλ. Σχήματα 89, 92 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 48). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης.

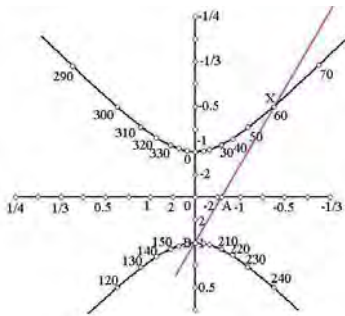
Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει την υπερβολή στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξοεφ είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με



Σχήμα 88. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\eta\mu t = \alpha + \beta \sigma\upsilon\eta t$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$ , αντίστοιχα.

$$\Delta = \begin{cases} (0^\circ, 90^\circ), & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ (270^\circ, 360^\circ), & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ (90^\circ, 180^\circ), & x < 0 \text{ και } y < 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & x > 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$

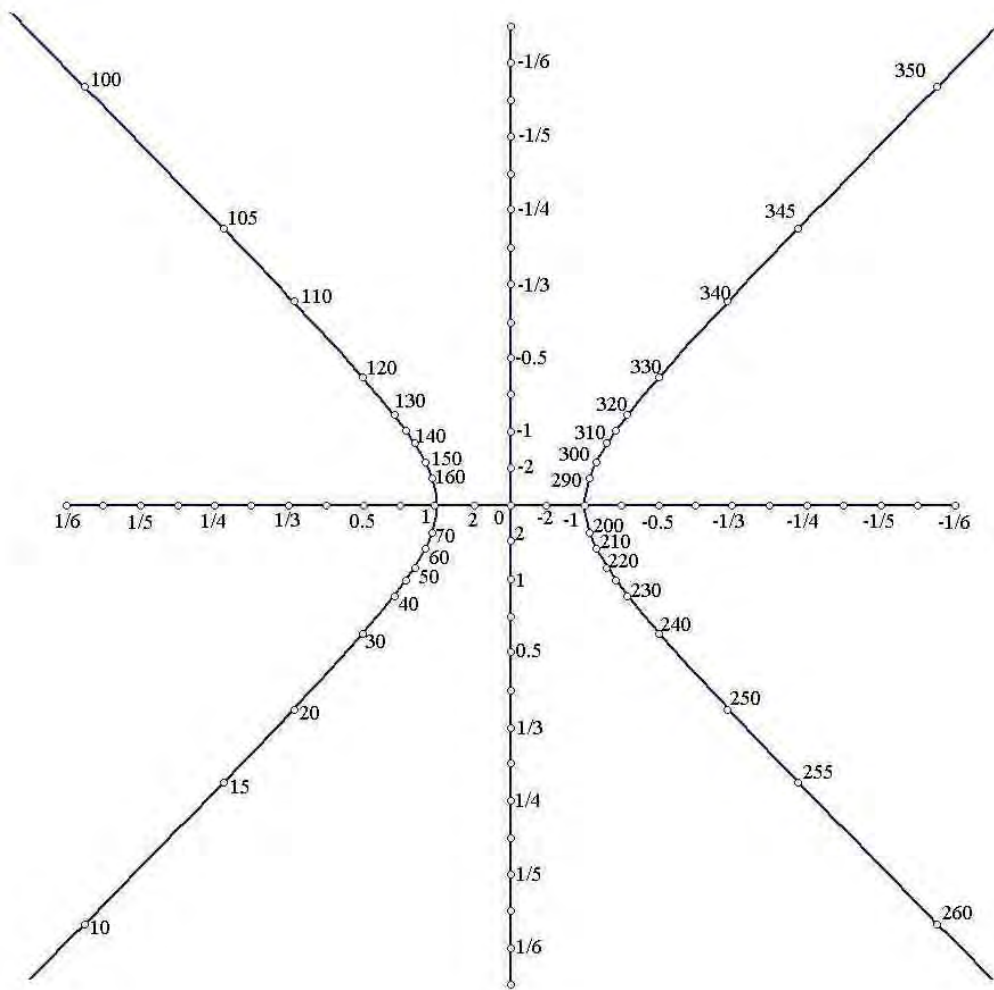
*Απόδειξη.* Αν  $\sigma\upsilon\eta t = \frac{1}{y}$  και  $\eta\mu t = \frac{x}{y}$  τότε έχουμε ότι τα  $A, B, X$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν



Σχήμα 89.

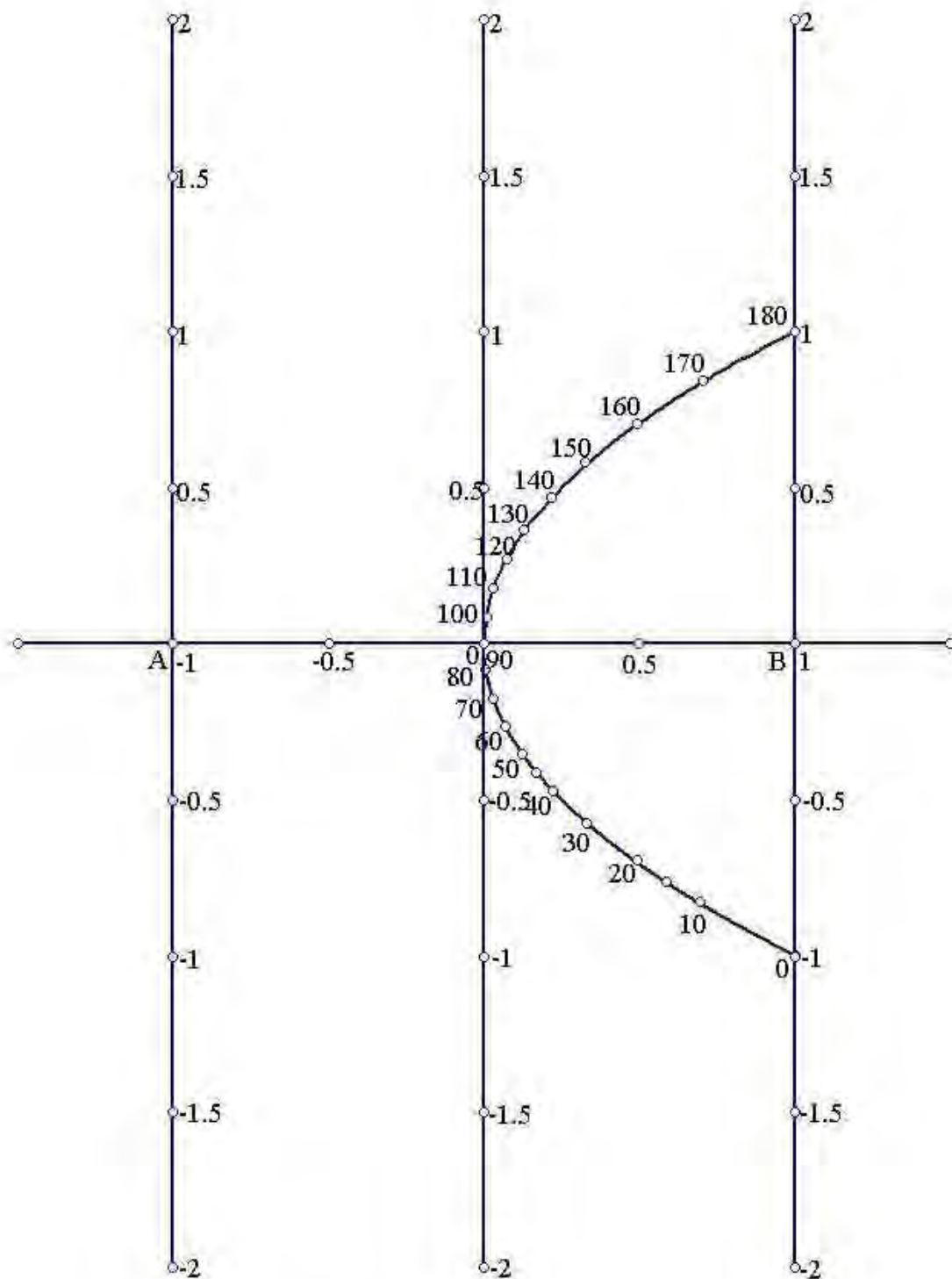
$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 1 \\ \epsilon\varphi\tau & \frac{1}{\sigma\upsilon\tau} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα, έχουμε  $\epsilon\varphi\tau + \frac{\beta}{\sigma\upsilon\tau} + 1 = 0$ .



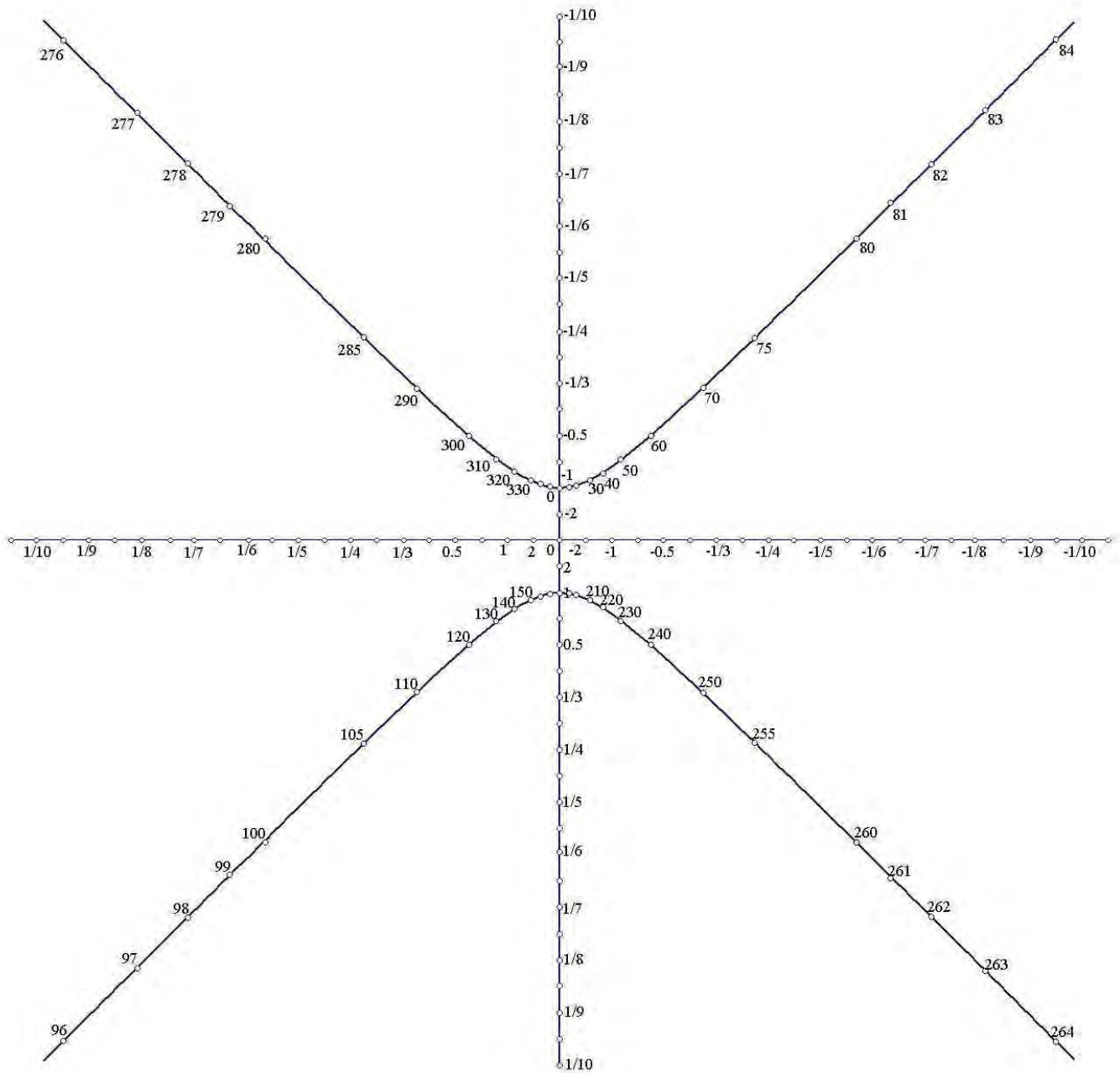
Σχήμα 90. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\eta\mu\tau = \alpha + \beta\sigma\upsilon\tau$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$

διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και των  $y$  ως  $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 91. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha\sqrt{\beta} + 1 = 0$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάσσονται στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ , αντίστοιχα.





Σχήμα 92. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $a\epsilon + \frac{\beta}{\sigma} + 1 = 0$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβά-  
 ζονται στους άξονες των  $x$  και των  $y$ , αντίστοιχα.

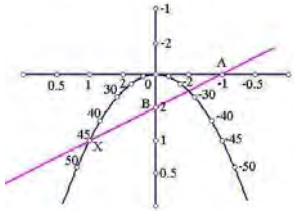
#### 4.6 Επίλυση εξισώσεων $\sigma\varphi t = \alpha + \beta \epsilon\varphi t$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αν θέλουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού  $\beta \epsilon\varphi^2 t + \alpha \epsilon\varphi t - 1 = 0$  διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha, \beta$  και  $t$  ως  $\frac{\alpha}{\beta}, -\frac{1}{\beta}$  και το  $\epsilon\varphi t$ , αντίστοιχα (βλ.

σελίδα 33). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 93 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 49 έχουμε το νομογράφημα του Ocagne.

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται και με άλλα νομογράφημα. Αρχικά, έχουμε ένα νομογράφημα όπου εμφανίζεται μια παραβολή. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την παραβολή  $y = -x^2$  με  $x \neq 0$  (βλ. Σχήματα 93, 95 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 50). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$  αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η AB τέμνει την παραβολή στο X με

συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή το  $\epsilon\varphi t \left( \frac{y}{x} \right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα.



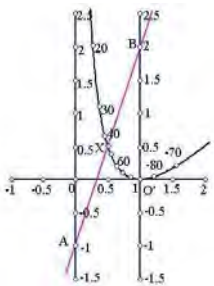
Σχήμα 93.

*Απόδειξη.* Η AB έχει εξίσωση  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{1}{\beta}$ . Ανόμνη, έχουμε

$$x = -\frac{1}{\alpha + \beta \epsilon\varphi t} \text{ και } y = -\frac{\epsilon\varphi t}{\alpha + \beta \epsilon\varphi t}.$$

οπότε έχουμε  $\sigma\varphi t = \alpha + \beta \epsilon\varphi t$ .

Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x = 1$  και την καμπύλη  $y = \frac{(1-x)^2}{x}$  (βλ. Σχήματα 94, 97 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 51). Η ευθεία  $x = 1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x = 1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x = 1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $O'A = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η AB τέμνει την καμπύλη στο X με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή το  $\epsilon\varphi t \left( \frac{1-x}{y} \right)$  είναι η ζητούμενη ρίζα.

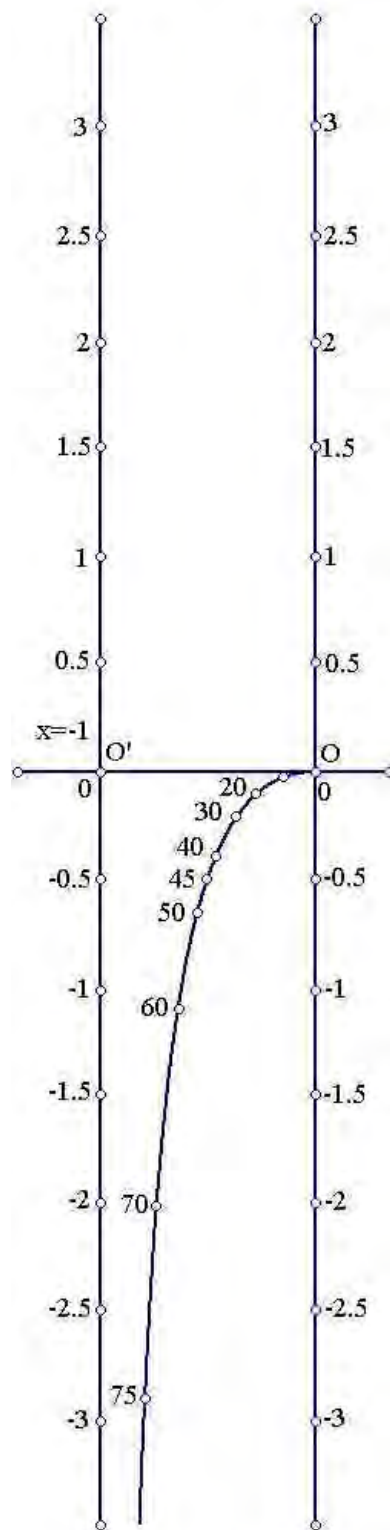


Σχήμα 94.

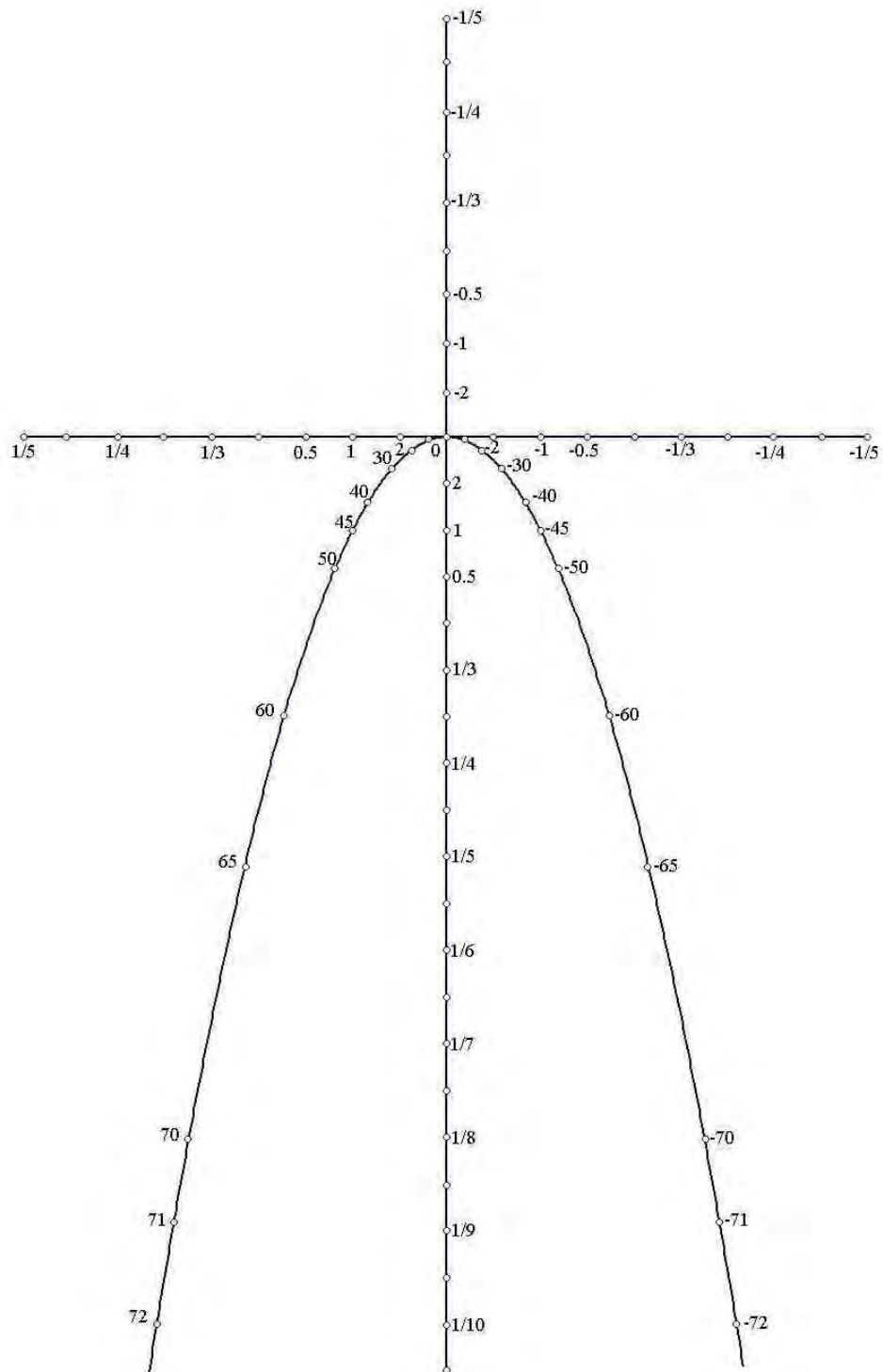
*Απόδειξη.* Η AB έχει εξίσωση  $y = (\beta - \alpha)x + \alpha$ . Ανόμνη, έχουμε

$$x = \frac{\sigma\varphi t - \alpha}{\beta - \alpha + \sigma\varphi t} \text{ και } y = \frac{\beta \sigma\varphi t}{\beta - \alpha + \sigma\varphi t}.$$

οπότε έχουμε  $\sigma\varphi t = \alpha + \beta \epsilon\varphi t$ .

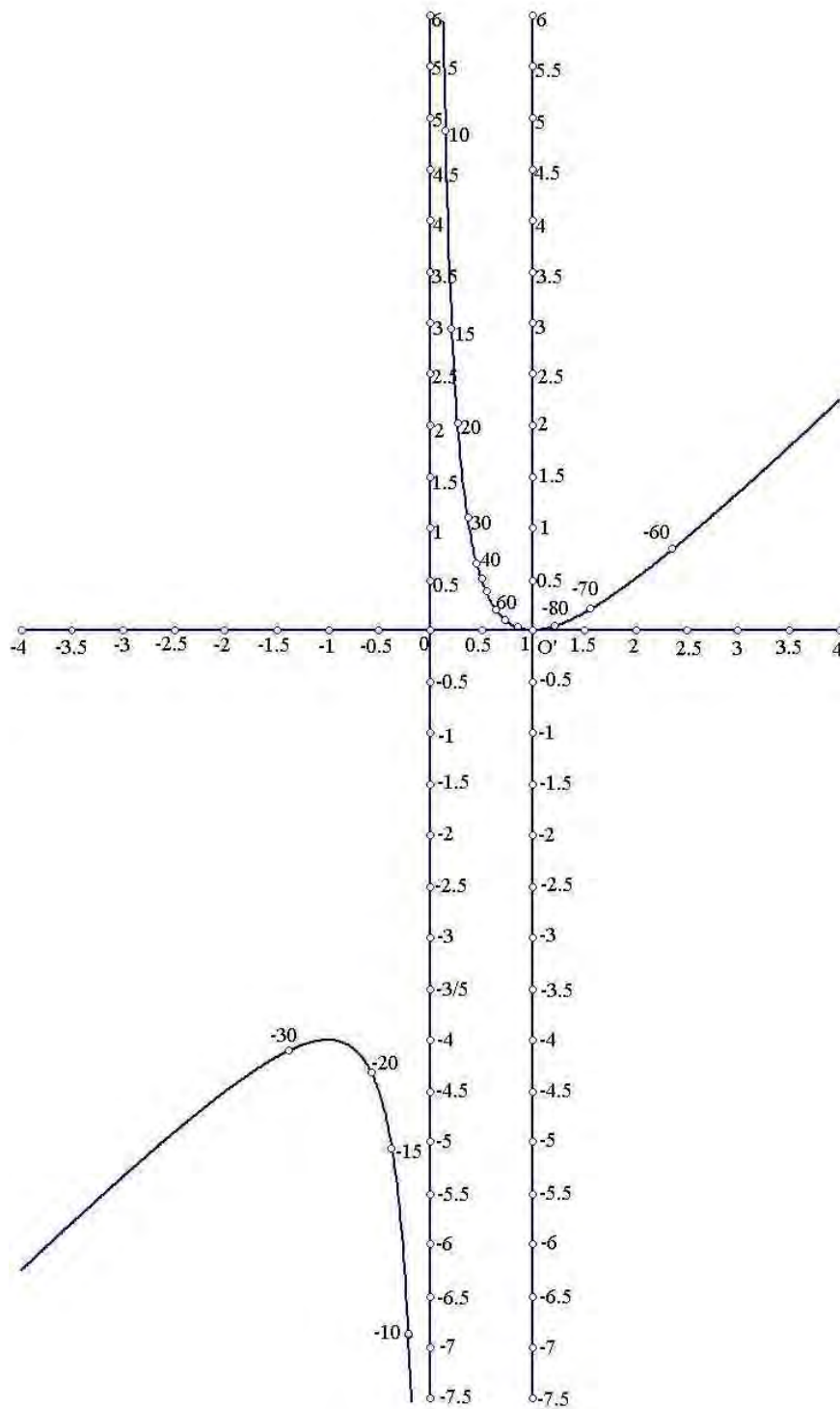


Σχήμα 95. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\sin t = \alpha + \beta t$  όπου οι τιμές  $\frac{\alpha}{\beta}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=-1$  και στον άξονα των  $y$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 96. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\sin t = \alpha + \beta t$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$

διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και των  $y$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$ , αντίστοιχα.

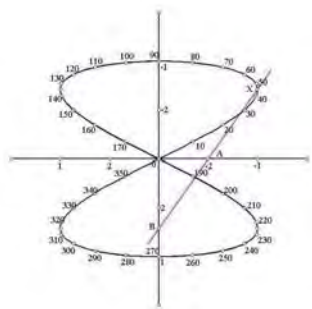


Σχήμα 97. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\sin t = \alpha + \beta t$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$ , αντίστοιχα.

#### 4.7 Επίλυση εξισώσεων $\alpha\eta\mu 2t + \beta\eta\mu t + 1 = 0$ με $\alpha, \beta$ δοθέντα και $t$ ο άγνωστος.

Αν θέλουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την καμπύλη  $r(t) = (\eta\mu 2t, \eta\mu t)$  (βλ. Σχήματα 98, 100 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 52). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$  αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA = \alpha$  και  $OB = \beta$ . Η  $AB$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξημυ είναι η ζητούμενη ρίζα και ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} (0^\circ, 90^\circ), & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ (90^\circ, 180^\circ), & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ (270^\circ, 360^\circ), & x < 0 \text{ και } y < 0 \\ (180^\circ, 270^\circ), & x > 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 98.

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για  $x > 0$  και  $y > 0$  έχουμε ότι η  $AB$  έχει εξίσωση  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{1}{\beta}$ . Ακόμη, έχουμε

$$x = -\frac{\beta\eta\mu t + 1}{\alpha} \text{ και } y = \eta\mu t,$$

οπότε έχουμε  $\alpha\eta\mu 2t + \beta\eta\mu t + 1 = 0$ .

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

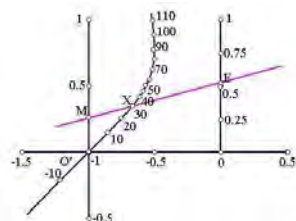
#### 4.8 Εφαρμογές.

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται σε άλλες επιστήμες. Παραδείγματος χάριν τέτοια είναι η εξίσωση του Kepler, η οποία χρησιμοποιείται στην αστρονομία και υπολογίζει την έκκεντρη ανωμαλία  $t$  (σε μοίρες) αν γνωρίζουμε την εκκεντρότητα της τροχιάς  $e$  και τη μέση απόκλιση της τροχιάς  $\mu$ . Ο τύπος της εξίσωσης είναι ο παρακάτω:

$$\mu + e \sin t = t \text{ όπου } \mu \in [-\pi, \pi] \text{ και } 0 < e \leq 1.$$

Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την ευθεία  $x = -1$  και την καμπύλη  $r(t) = \left( -\frac{1}{1 + \eta\mu t}, \frac{t}{1 + \eta\mu t} \right)$  (βλ. Σχήμα

99, 101 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 53). Η ευθεία  $x = -1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x = -1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x = -1$  διαβάζουμε τις τιμές  $e$  και  $\mu$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $O'A = \mu$  και  $OB = e$ . Η  $ME$  τέμνει την καμπύλη στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή  $-\frac{y}{x}$  (σε μοίρες) είναι η ζητούμενη ρίζα.

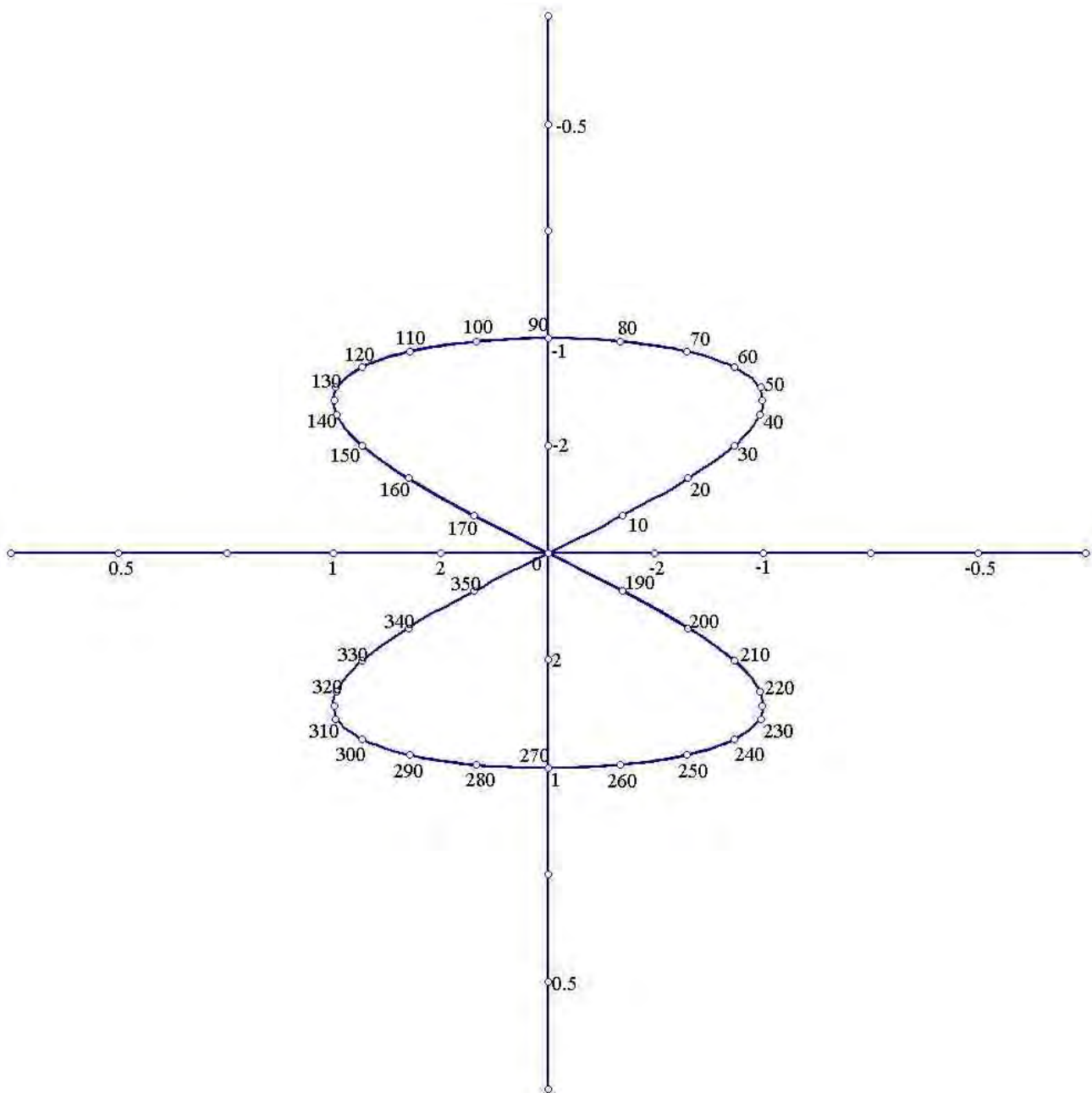


Σχήμα 99.

*Απόδειξη.* Η  $ME$  έχει εξίσωση  $y = (e - \mu)x + e$ . Ακόμη, έχουμε

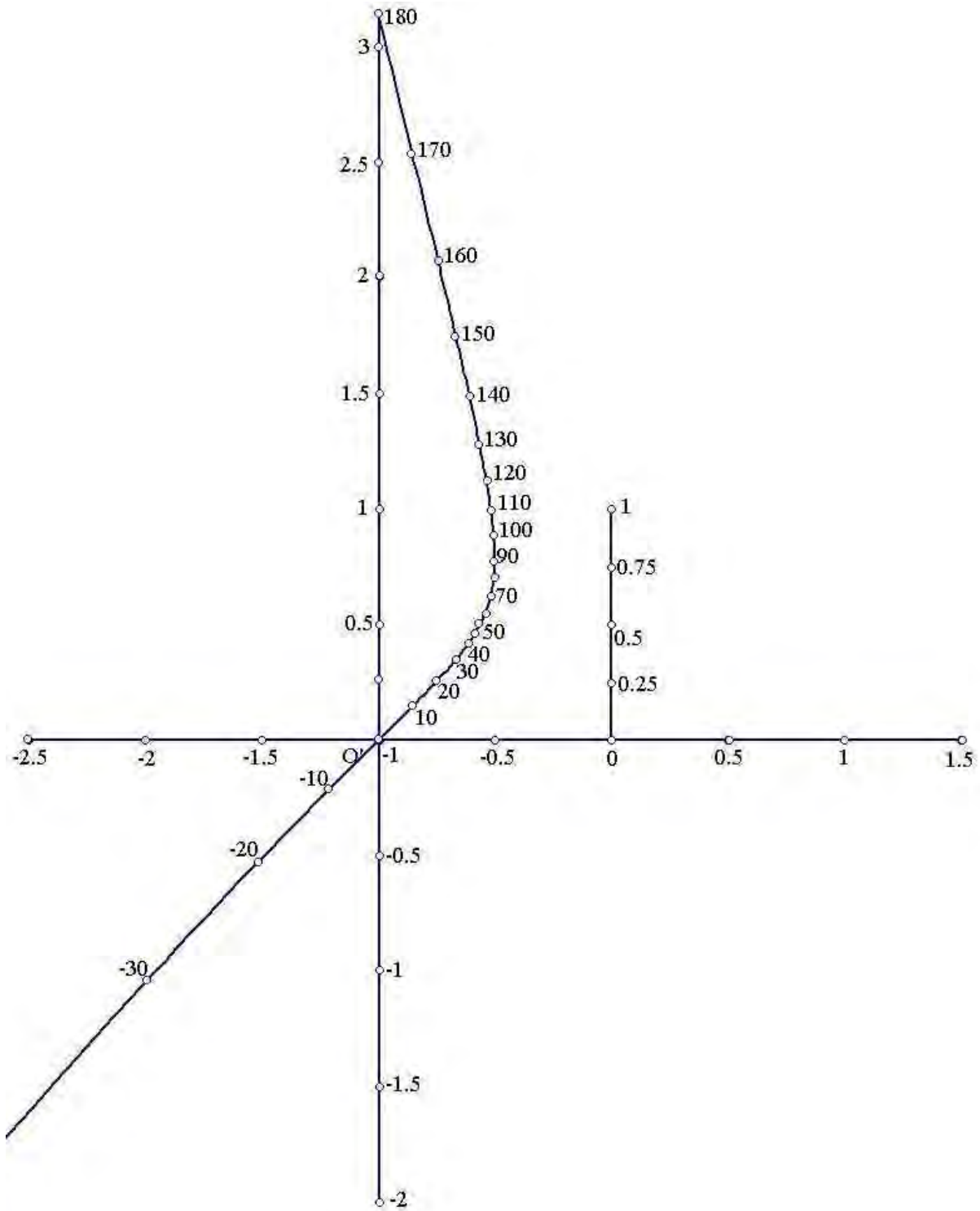
$$x = -\frac{1}{1 + \eta\mu t} \text{ και } y = \frac{\mu + e\eta\mu t}{1 + \eta\mu t}.$$

οπότε έχουμε  $t = \mu + e\eta\mu t$ .



Σχήμα 100. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha\mu 2t + \beta\eta\mu t + 1 = 0$  όπου οι τιμές  $\alpha, \beta$

διαβάζονται στους άξονες των  $x$  και των  $y$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$  και  $-\frac{1}{\beta}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 101. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t = \mu + \epsilon \eta \mu t$  όπου οι τιμές  $\epsilon$ ,  $\mu$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x = -1$ , αντίστοιχα.



## ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Το κεφάλαιο αυτό μελετά με χρήση νομογραφημάτων την επίλυση τριγώνων στην επίπεδη και σφαιρική γεωμετρία.

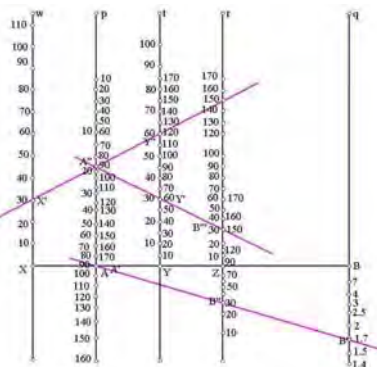
### 5.1 Επίλυση τριγώνου από τις δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.

Αν έχουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με δεδομένες τις πλευρές του,  $\beta, \gamma$  και την περιεχόμενη γωνία τους  $\hat{A}$  μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου χρησιμοποιώντας τα παρακάτω νομογραφήματα.

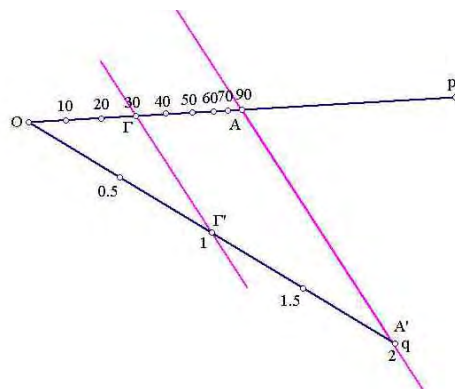
Αρχικά, περιγράφουμε ένα νομογράφημα στο οποίο βρισκόμαστε τη διαφορά  $\hat{B}-\hat{\Gamma}$  από τον τύπο  $\operatorname{ερ}\left(\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right) = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} \operatorname{σφ}\frac{\hat{A}}{2}$ .

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να επιλυθεί με το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού δυο μεταβλητών (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας τις τιμές  $\frac{\beta}{\gamma}$ ,  $\hat{A}$  και  $\hat{B}-\hat{\Gamma}$  ως  $\frac{\beta-1}{\beta+1}$ ,  $\operatorname{σφ}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$  και  $\operatorname{ερ}\left(\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right)$ , αντίστοιχα (βλ. Σχήματα 102α, 104 και στο

Παράρτημα στο Σχήμα 54α). Δηλαδή, παίρνουμε  $A\rho, B\rho$  άξονες στους οποίους διαβάζουμε τις τιμές  $\hat{A}$  και  $\frac{\beta}{\gamma}$  αντίστοιχα. Οι  $A\rho, B\rho$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Το  $Z$  είναι μέσο του  $AB$  και  $Zr \perp AB$ . Ο  $Zr$  διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής και στον οποίο διαβάζουμε την τιμή  $\hat{B}-\hat{\Gamma}$ . Επειδή ξέρουμε ότι  $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ-\hat{A}$ , διαβαθμίζουμε τον άξονα  $A\rho$  με μια επιπλέον μονάδα μέτρησης η οποία είναι ίση με το μισό της αρχικής και διαβάζουμε την τιμή  $\hat{A}$  ως  $180^\circ-\hat{A}$ . Στο ευθύγραμμο τμήμα  $AZ$  διαλέγουμε τα σημεία  $X, Y$  του  $AZ$  εσωτερικά και εξωτερικά έτσι ώστε το σημείο  $A$  να είναι μέσο του  $XY$ . Παίρνουμε άξονες  $Xw, Yt \perp A\rho$  στους οποίους διαβάζουμε τις τιμές  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{B}$ . Ο  $Yt$  διαβαθμίζεται με δύο μονάδες μέτρησης με μονάδα μέτρησης ίση το μισό της αρχικής και στη συνέχεια με την αρχική. Ακόμη χρησιμοποιώντας τον νόμο του ημιτόνου και το νομογράφημα της ισότητας δύο λόγων υπολογίζουμε την πλευρά  $\alpha$ . Συγκεκριμένα, παίρνουμε άξονες  $O\rho, Oq$  έτσι ώστε  $\rho\hat{O}q = \varphi$ , με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας. Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον  $O\rho$  διαβάζουμε τη γωνία  $\hat{A}$  ως  $\eta\mu\hat{A}$  ενώ στον  $Oq$  την πλευρά  $\alpha$  (βλ. Σχήματα 102β, 105 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 54β).



(α)

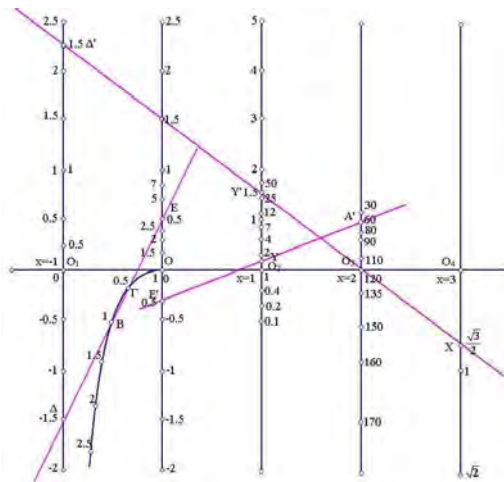


(β)

Σχήμα 102.

Άλλος τρόπος να υπολογίσουμε την πλευρά  $\alpha$  είναι να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των συνημίτονων. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $x=-1, x=1, x=2, x=3$  και την υπερβολή  $y=-\frac{x^2}{x+1}$  στο  $(-1,0]$  (βλέπε σελίδα

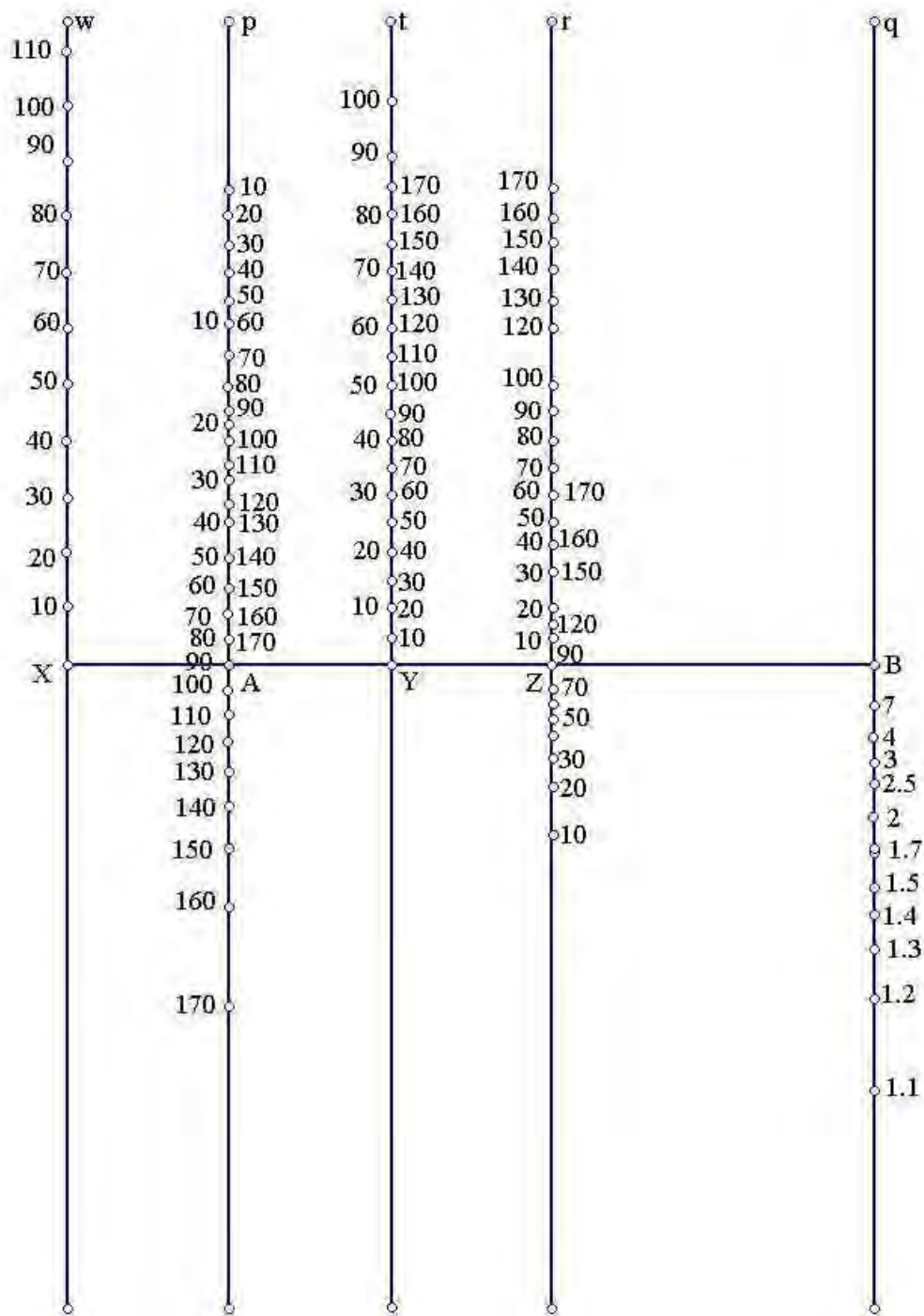
33). Οι ευθείες  $x=-1, x=1, x=2$  και  $x=3$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $O_1, O_2, O_3$  και  $O_4$  αντίστοιχα (βλ. Σχήματα 103, 107 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 55). Στην υπερβολή διαβάζουμε τις τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ , αντίστοιχα. Η  $B\Gamma$  τέμνει την ευθεία  $x=-1$  και τον άξονα των  $y$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  έτσι ώστε  $O_1\Delta=\beta+\gamma$  και  $OE=\beta\gamma$ . Στον άξονα των  $y$  τοποθετούμε μια δεύτερη μονάδα μέτρησης ίση με την αρχική διαβάζοντας την τιμή  $\beta\gamma$  ως  $\log(\beta\gamma)$ . Στην ευθεία  $x=2$  διαβάζουμε τη γωνία  $\hat{A}$  ως  $\log(2(1+\sin\hat{A}))$  με μονάδα μέτρησης ίση με την αρχική. Παίρνοντας  $OE'=\beta\gamma$  και  $O_3A'=\hat{A}$  έχουμε ότι η  $E'A'$  τέμνει την ευθεία  $x=1$  στο σημείο  $Y$  με  $O_2Y=2\beta\gamma(1+\sin\hat{A})$ . Η ευθεία αυτή διαβαθμίζεται με δυο μονάδες μέτρησης ίσες με το μισό της αρχικής και διαβάζουμε την τιμή  $2\beta\gamma(1+\sin\hat{A})$  ως  $\log(2\beta\gamma(1+\sin\hat{A}))$  και  $2\beta\gamma(1+\sin\hat{A})$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, στην ευθεία  $x=-1$  τοποθετούμε και μια δεύτερη μονάδα μέτρησης ίση με την αρχική διαβάζοντας την τιμή  $|\beta+\gamma|$  ως  $(\beta+\gamma)^2$ . Παίρνοντας  $O_2Y'=2\beta\gamma(1+\sin\hat{A})$  και  $O_1\Delta'=|\beta+\gamma|$  έχουμε ότι η  $\Delta'Y'$  τέμνει την ευθεία  $x=3$  στο  $X$  με  $O_4X=\alpha$ . Η ευθεία αυτή διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με την αρχική και η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται ως  $-\sqrt{\alpha}$ .



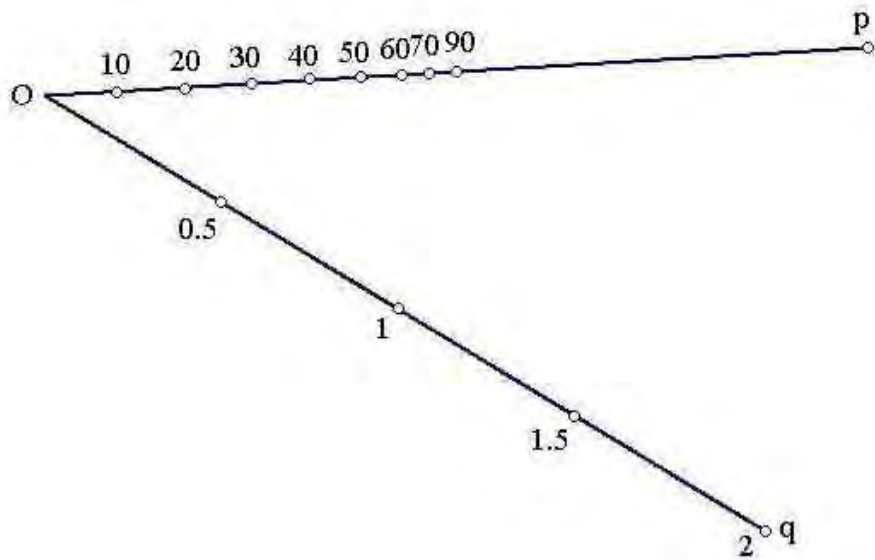
Σχήμα 103.

## 5.2 Επίλυση τριγώνου από μια πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες.

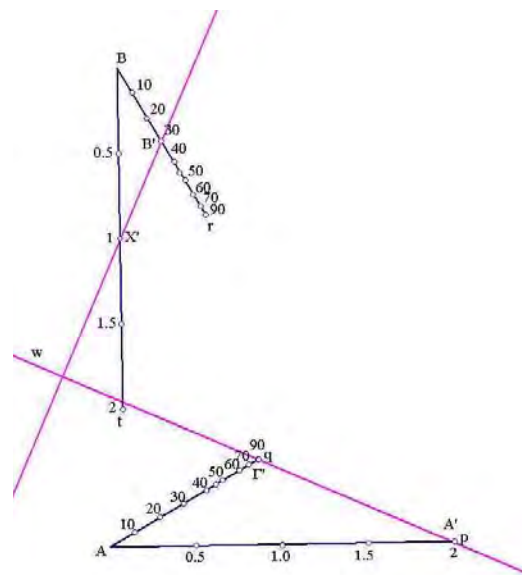
Αν έχουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με δεδομένα την πλευρά  $\alpha$  και τις προσκείμενες γωνίες του,  $\hat{B}, \hat{\Gamma}$  μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά  $\beta$  του τριγώνου από το νόμο του ημιτόνου, χρησιμοποιώντας νομογραφήματα ισότητας των δυο λόγων με μεταβλητές  $\alpha, \beta, \hat{B}, \hat{B}+\hat{\Gamma}$  από τις οποίες οι τιμές  $\hat{B}$  και  $\hat{B}+\hat{\Gamma}$  διαβάζονται ως  $\eta\mu\hat{B}$  και  $\eta\mu(\hat{B}+\hat{\Gamma})$  αντίστοιχα. Παραδείγματος χάριν, παίρνουμε άξονες  $A\rho, A\sigma$  έτσι ώστε  $\rho\hat{A}\sigma=\varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήματα 106, 108 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 56). Παίρνουμε τμήμα  $AB$  και άξονες  $B\rho, B\sigma$  έτσι ώστε  $\rho\hat{B}\sigma=\varphi$  και  $B\rho \perp A\sigma$ . Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \hat{B}$  και  $\hat{B}+\hat{\Gamma}$  διαβάζονται αντίστοιχα στους άξονες  $A\rho, B\sigma, A\sigma$  και  $B\rho$ . Αν πάρουμε  $AA'=\alpha, AB'=\hat{B}, B\Gamma'=\hat{B}+\hat{\Gamma}$  και  $\Gamma'w \perp A'B'$  έχουμε ότι η  $\Gamma'w$  τέμνει τον  $B\sigma$  στο  $BX'=\beta$ .



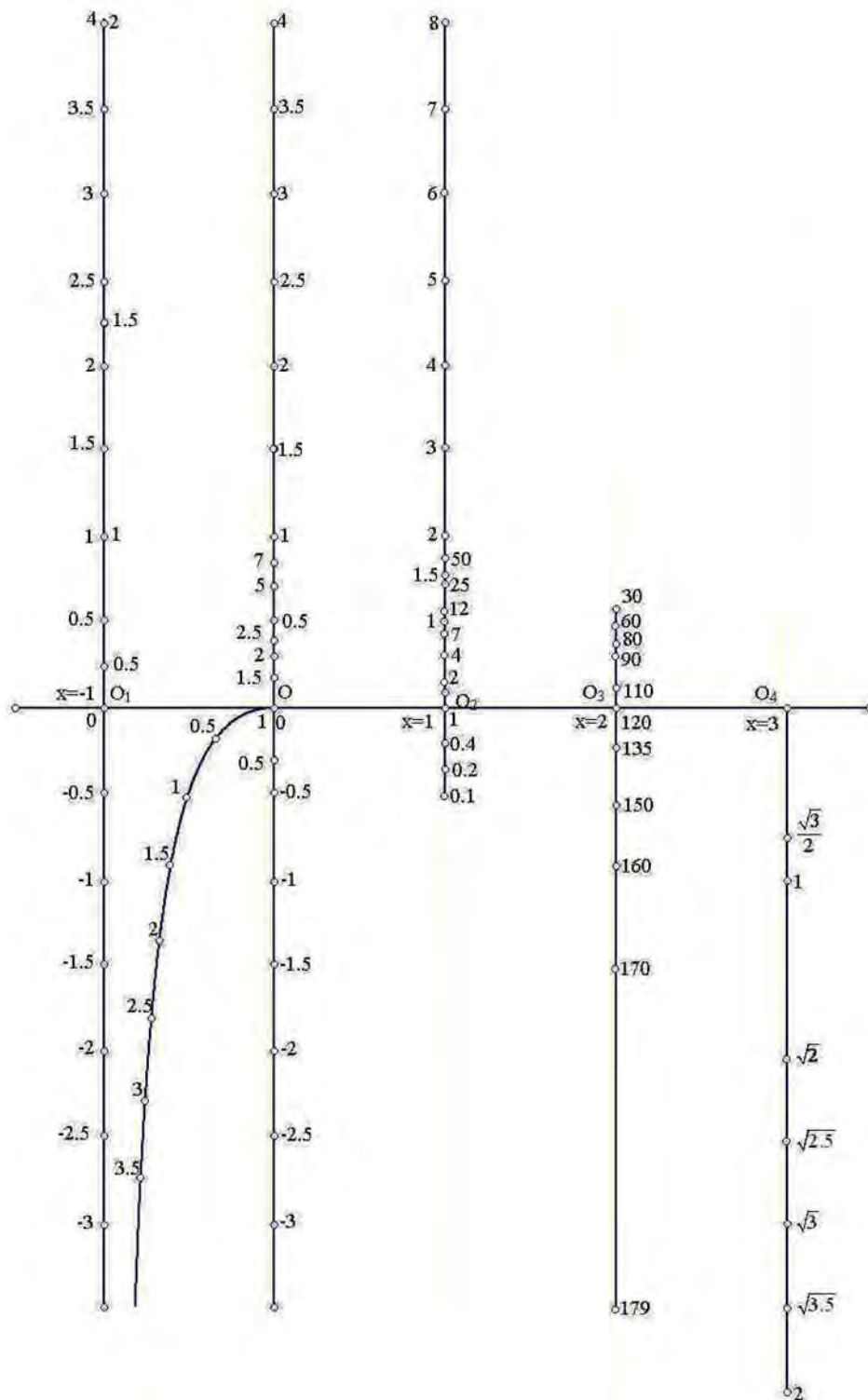
Σχήμα 104. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta$ ,  $\gamma$  και την περιεχόμενη γωνία τους,  $\hat{A}$ . Οι τιμές  $\hat{A}$ ,  $\frac{\beta}{\gamma}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  στους άξονες Ap, Bq, Zt, Xw και Yt, αντίστοιχα.



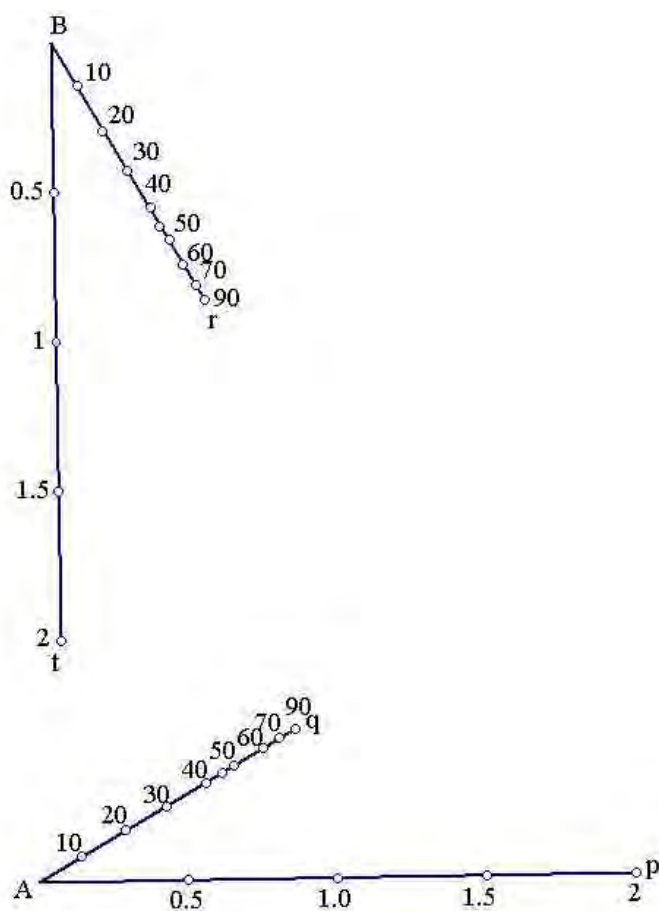
Σχήμα 105. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  και την πλευρά  $\beta$ . Οι τιμές  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  διαβάζονται στον άξονα Op ενώ οι πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  στον Oq.



Σχήμα 106.



Σχήμα 107. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta$ ,  $\gamma$  και την περιεχόμενη γωνία τους,  $\hat{A}$ . Οι τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται στην υπερβολή ενώ οι τιμές  $\beta+\gamma$ ,  $(\beta+\gamma)^2$  στην ευθεία  $x=-1$ . Ακόμη, οι τιμές  $\beta\gamma$ ,  $2\beta\gamma(1+\sigma\upsilon\nu \hat{A})$ ,  $\hat{A}$  και  $\alpha$  στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$ , στην ευθεία  $x=2$  και  $x=3$ , αντίστοιχα. Από το Σχήμα 105 βρίσκουμε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 108. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένη την πλευρά  $\alpha$  και τις προσκειμένες τους γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{B}\hat{H}$ ,  $\beta$  διαβάζονται στους άξονες Bt, Aq, Br και Ap, αντίστοιχα.

### 5.3 Επίλυση τριγώνου από τις τρεις πλευρές.

Αν έχουμε το τρίγωνο ABΓ με δεδομένες τις πλευρές του,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου από το νόμο του συνημίτονου χρησιμοποιώντας τα παρακάτω νομογραφήματα:

Αρχικά, έχουμε το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού για δυο μεταβλητές (βλέπε σελίδα 21) διαβάζοντας τις τιμές  $\beta+\gamma-\alpha$ ,  $\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2\beta\gamma}$  και άγνωστη τη  $\hat{A}$ . Η  $\hat{A}$  διαβάζεται ως  $1+\sigma\alpha\hat{A}$ . Δηλαδή, παίρνουμε Ap, Bq άξονες στους οποίους διαβά-

ζουμε τις τιμές  $\beta+\gamma-\alpha$  και  $\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2\beta\gamma}$ , αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 111 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 57). Οι Ap, Bq διαβαθμι-

ζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Το X είναι μέσο του AB και  $Xr \perp AB$ . Ο Xr διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής και στον οποίο διαβάζουμε την τιμή  $\hat{A}$ .

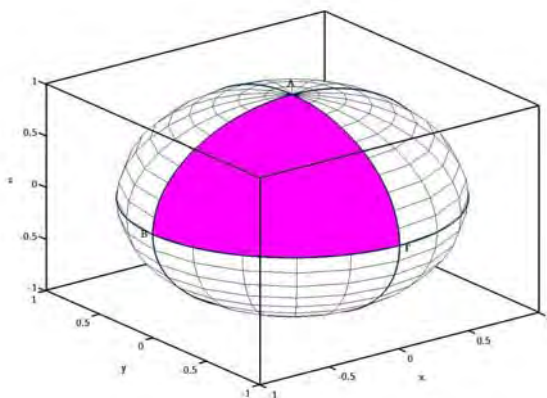
Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι το νομογράφημα του πολλαπλασιασμού με τρεις μεταβλητές (βλέπε σελίδα 21), τις  $\beta+\gamma-\alpha$ ,  $\beta+\gamma+\alpha$  και τη  $2\beta\gamma$ , διαβάζοντας τις τιμές  $\hat{A}$  και  $2\beta\gamma$  ως  $1+\sigma\alpha\hat{A}$  και  $-2\beta\gamma$ , αντίστοιχα. Δηλαδή, παίρνουμε Ap, Bq, Γr άξονες στους οποίους διαβάζουμε τις τιμές  $\beta+\gamma-\alpha$ ,  $\beta+\gamma+\alpha$ ,  $2\beta\gamma$  και από τους οποίους οι Ap, Bq διαβάζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο Γr με το μισό της. Το Y είναι μέσο του AB και  $Yt \perp AB$ . Ο Yt διαβαθ-

μίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής. Αν το E είναι μέσο του YΓ και ο  $Ew \perp Y\Gamma$  τότε ο Ew διαβαθμίζεται με μονάδα μέτρησης ίση με το  $\frac{1}{4}$  της αρχικής.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τα νομογραφήματα ισότητας των δυο λόγων (βλέπε σελίδα 22) με μεταβλητές  $\beta+\gamma-\alpha$ ,  $\beta+\gamma+\alpha$ ,  $2\beta\gamma$  και  $\hat{A}$  διαβάζοντας τις τιμές  $\hat{A}$  και  $2\beta\gamma$  ως  $-2\beta\gamma$  και  $1+\sin\hat{A}$ , αντίστοιχα, έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Παραδείγματος χάριν, παίρνουμε άξονες Ap, Aq έτσι ώστε  $p\hat{A}q = \varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήματα 111 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 58). Παίρνουμε τμήμα AB και άξονες Br, Bt έτσι ώστε  $r\hat{B}t = \varphi$  και  $Br \perp Aq$ . Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\beta+\gamma-\alpha$ ,  $\beta+\gamma+\alpha$ ,  $2\beta\gamma$  και  $\hat{A}$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες Bt, Aq, Br και Ap.

## 5.4 Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.

Ορίζουμε το σφαιρικό τρίγωνο ABΓ με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$ . Οι πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι τα τόξα μέγιστων κύκλων (βλ. Σχήμα 109). Με δεδομένες τις πλευρές θα υπολογίσουμε τη γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου χρησιμοποιώντας τα παρακάτω νομογραφήματα:

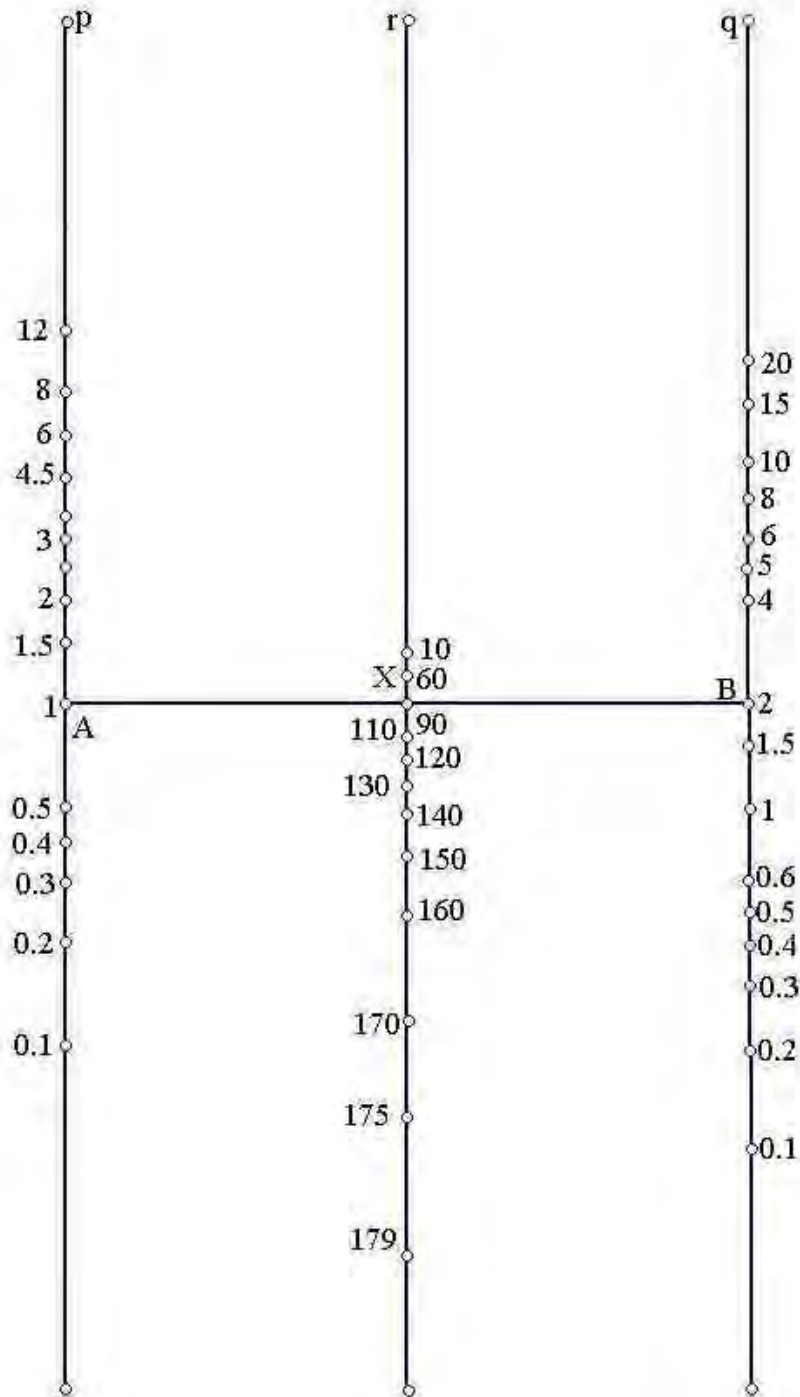


Σχήμα 109.

Αρχικά, έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=6$  (το 6 δεν είναι ουσιαστικό αλλά για να είναι το γράφημα πιο ευκρινές. Θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε άλλη σταθερά.) και ένα δίκτυο ευθειών που έχουν σημεία τομής στη μορφή:

$$r(\beta,\gamma) = \left( \frac{84(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma))}{14(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma)) - 40}, \frac{140(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma))}{14(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma)) - 40} \right)$$

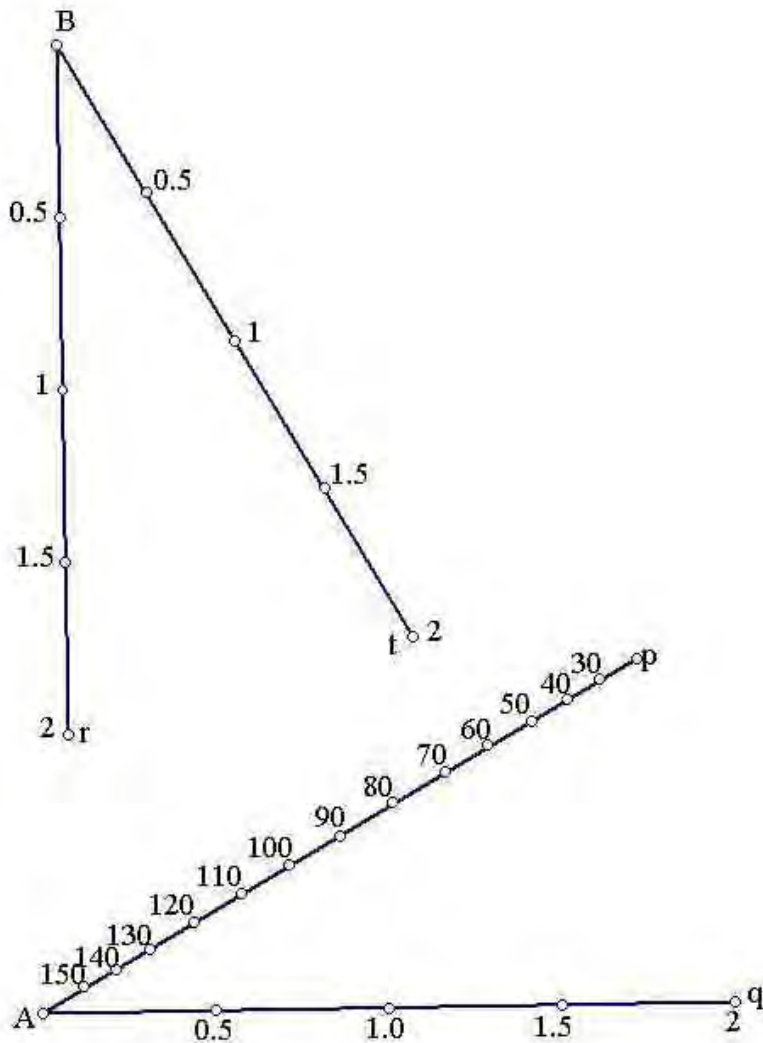
για κάθε ζεύγος τιμών  $(\beta,\gamma)$  (βλ. Σχήματα 112, 113 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 59). Η ευθεία  $x=6$  τέμνει τον άξονα των x στο σημείο O'. Ο άξονας των y και η ευθεία  $x=6$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στο δίκτυο διαβάζουμε τις τιμές  $\beta-\gamma$ ,  $\beta+\gamma$  και έχουμε το σημείο  $P(\beta+\gamma,\beta-\gamma)$ . Στον άξονα των y διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$  ως  $7\sigma\alpha$ , παίρνοντας  $OA=\alpha$ . Η PA τέμνει την ευθεία  $x=6$  στο X με συντεταγμένες  $(6,y)$ . Η τιμή τοξου  $\left(\frac{y}{10}\right)$  είναι η ζητούμενη γωνία.



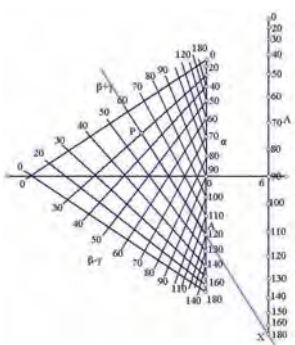
Σχήμα 110. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές

$$\beta + \gamma - \alpha, \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2\beta\gamma}, \hat{A} \text{ διαβάζονται στους άξονες } Ap, Bq \text{ και } Xr, \text{ αντίστοιχα.}$$





Σχήμα 111. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $a, \beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta+\gamma-\alpha, \beta+\gamma+\alpha, 2\beta\gamma$  και  $\hat{A}$  διαβάζονται στους άξονες Bt, Aq, Br και Ap, αντίστοιχα.



Σχήμα 112.

Απόδειξη. Τα σημεία P, A, X είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \frac{84(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))}{14(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))-40} & \frac{140(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))}{14(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))-40} & 1 \\ 0 & 7\sigma\upsilon\alpha & 1 \\ 6 & 10\sigma\upsilon\alpha\hat{A} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ισοδύναμα, } \begin{vmatrix} 42(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)) & 70(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)) & 14(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma))-40 \\ 0 & 7\sigma\upsilon\alpha & 1 \\ 6 & 10\sigma\upsilon\hat{\Lambda} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

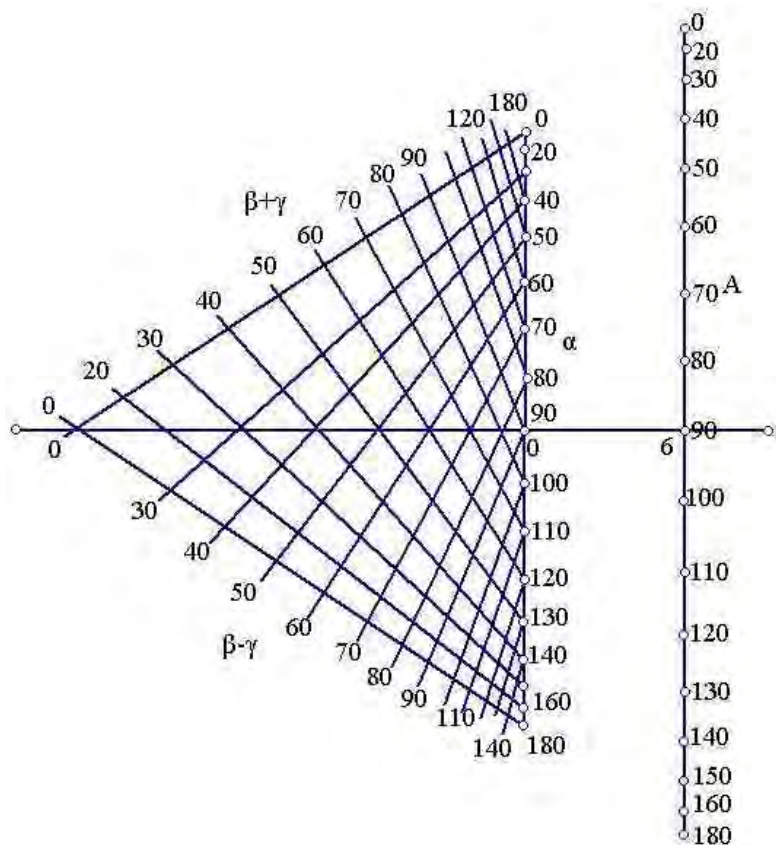
$$\text{ισοδύναμα, } \begin{vmatrix} 7\sigma\upsilon\upsilon\beta\sigma\upsilon\eta\gamma & -70\eta\mu\beta\eta\mu\gamma & 10 \\ 0 & 7\sigma\upsilon\alpha & -1 \\ 1 & 10\sigma\upsilon\hat{\Lambda} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

οπότε έχουμε  $\sigma\upsilon\alpha = \eta\mu\beta\eta\mu\gamma + \sigma\upsilon\upsilon\beta\sigma\upsilon\eta\gamma\hat{\Lambda}$ .

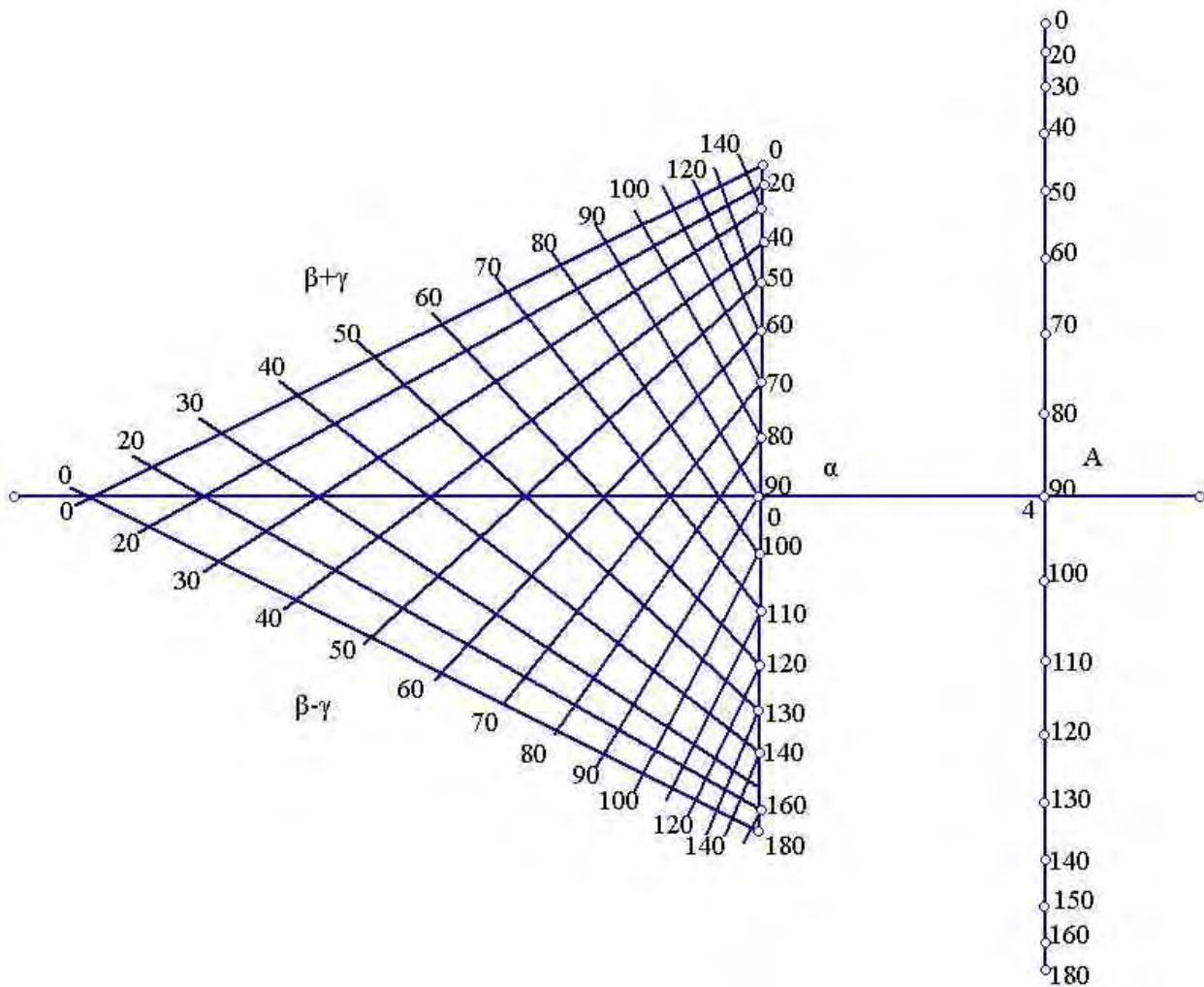
Το ίδιο νομογράφημα μπορούμε να κατασκευάσουμε από τον γνωστό τύπο  $\sigma\upsilon\alpha = \sigma\upsilon\upsilon\beta\sigma\upsilon\eta\gamma + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\hat{\Lambda}$  σχεδιάζοντας στη θέση της ευθείας  $x=6$  και του δικτύου την ευθεία  $x=4$  και το δίκτυο με σημεία τομής στη μορφή:

$$r(\beta, \gamma) = \left( \frac{88(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma))}{22(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma)) + 60}, \frac{220(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma))}{22(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma)) + 60} \right)$$

για κάθε ζεύγος τιμών  $(\beta, \gamma)$  (βλ. Σχήμα 114 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 60). Η ευθεία  $x=4$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=4$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$  ως  $\frac{22}{3}\sigma\upsilon\alpha$  ενώ στην ευθεία  $x=4$  την τιμή  $\hat{\Lambda}$  ως  $10\sigma\upsilon\hat{\Lambda}$ .



Σχήμα 113. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  και  $\hat{\Lambda}$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στο δίκτυο, στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=6$  ως  $(\beta+\gamma, \beta-\gamma)$ ,  $7\sigma\upsilon\alpha$  και  $10\sigma\upsilon\hat{\Lambda}$ .



Σχήμα 114. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  και  $\hat{A}$  διαβάζονται στο δίκτυο, στον άξονα των  $\gamma$  και στην ευθεία  $x=4$  ως  $(\beta+\gamma, \beta-\gamma)$ ,  $\frac{22}{3}$  συν  $\alpha$  και  $10 \sin \hat{A}$ .

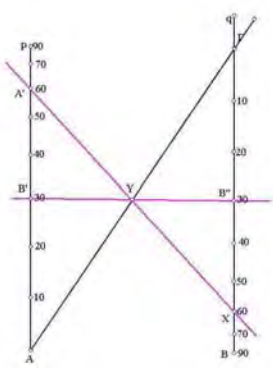
Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να σχεδιάσουμε το δίκτυο των ευθειών, να σχεδιάσουμε ένα δίκτυο καμπύλων:

$$r(\beta, \gamma) = \left( \frac{88(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma))}{22(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma)) + 60}, \frac{220(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma))}{22(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta-\gamma)) + 60} \right),$$

για κάθε ζεύγος τιμών  $(\beta, \gamma)$ . Διαβάζοντας τις τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$  στις καμπύλες  $r_\beta$ ,  $r_\gamma$ , αντίστοιχα έχουμε ως σημείο τομής P με συντεταγμένες  $(x_p, y_p)$ . Το σημείο P ανήκει στο διάστημα  $\Delta$  με

$$\Delta = \begin{cases} x_p < 0 \text{ και } y_p > 0 & \text{αν } \beta, \gamma \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα} \\ x_p > 0 \text{ και } y_p > 0 & \text{αν } \beta \in (270^\circ, 360^\circ) \text{ και } \gamma \in (0^\circ, 90^\circ) \text{ ή } \beta \in (180^\circ, 270^\circ) \text{ και } \gamma \in (90^\circ, 180^\circ) \\ x_p > 0 \text{ και } y_p < 0 & \text{αν } \beta \in (180^\circ, 270^\circ) \text{ και } \gamma \in (0^\circ, 90^\circ) \text{ ή } \beta \in (270^\circ, 360^\circ) \text{ και } \gamma \in (90^\circ, 180^\circ) \\ x_p < 0 \text{ και } y_p < 0 & \text{αν } \beta \in (90^\circ, 180^\circ) \text{ και } \gamma \in (0^\circ, 90^\circ) \text{ ή } \beta \in (270^\circ, 360^\circ) \text{ και } \gamma \in (180^\circ, 270^\circ) \end{cases}$$

(βλ. Σχήμα 116 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 61).

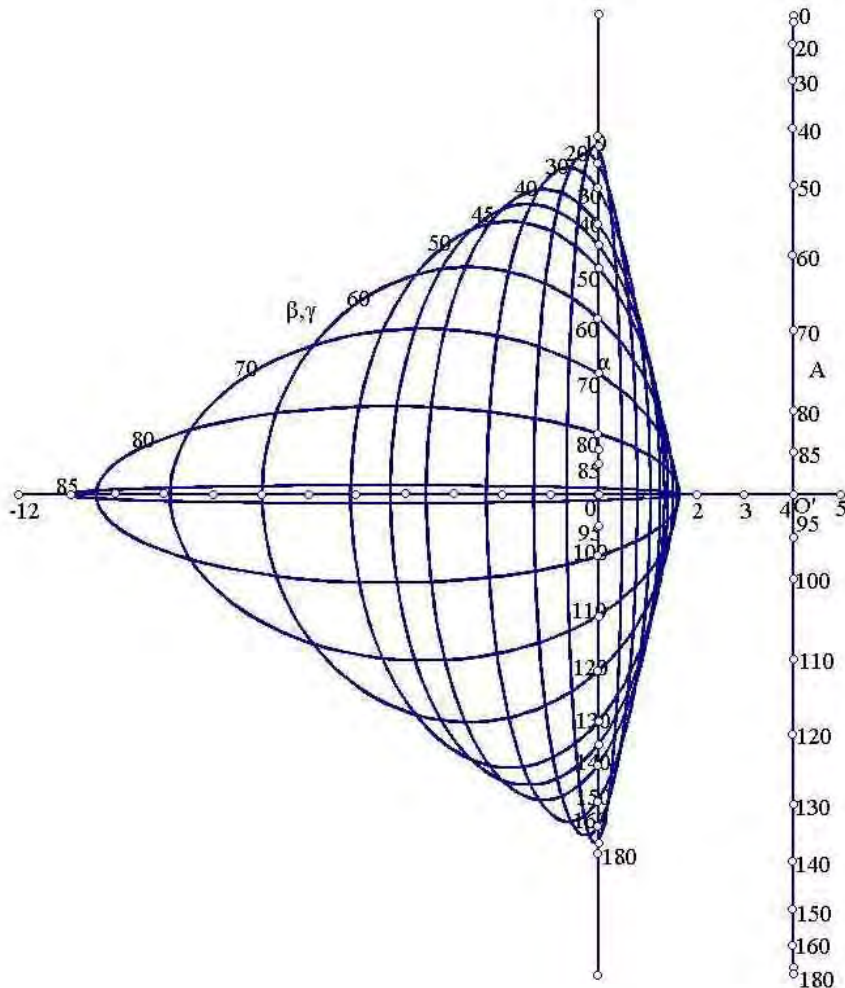


Σχήμα 115.

Άλλο τρόπο να υπολογίσουμε τη γωνία  $\hat{A}$  με δεδομένες τις πλευρές  $\alpha, \beta$  και τη γωνία  $\hat{B}$  είναι τα νομογραφήματα ισότητας των δυο λόγων (βλέπε σελίδα 22). Παραδειγματος χάριν, παίρνουμε άξονες  $Ap \perp Bq$  και ημιευθεία  $Ax$ . Η  $Ax$  τέμνει τον  $Bq$  στο  $\Gamma$ . Οι τιμές των πλευρών  $\alpha, \beta$  και οι τιμές των γωνιών  $\hat{A}, \hat{B}$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $Ap$  και  $\Gamma B$  (βλ. Σχήματα 115, 117 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 62). Οι άξονες  $Ap$  και  $\Gamma B$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές των πλευρών  $\alpha$  και των γωνιών  $\hat{A}$  διαβάζονται ως  $\eta\mu\hat{A}$  και  $\eta\mu\hat{A}$ , αντίστοιχα.

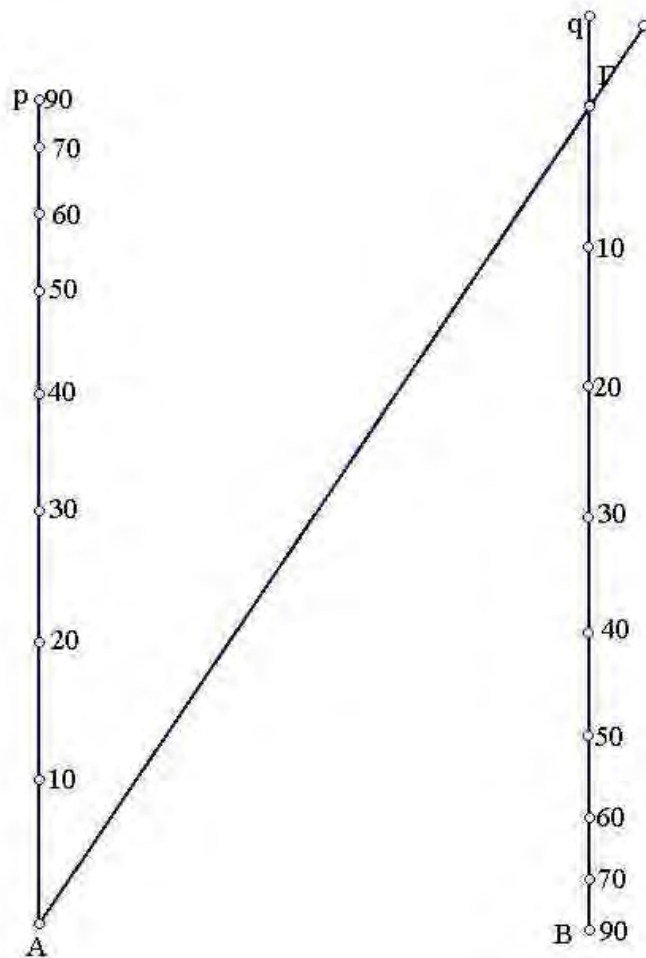
Παίρνουμε  $AA'=\alpha, \Gamma B''=\hat{B}, AB'=\beta$  και έστω ότι η  $BB''$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Y$ . Η  $YA'$  τέμνει τον  $\Gamma B$  στο  $X$  με  $\Gamma X=\hat{A}$ . Η τιμή  $\hat{A}$  είναι η ζητούμενη γωνία.

$$\text{Οπότε έχουμε } \frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\beta}.$$



Σχήμα 116. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta, \gamma, \alpha$  και  $\hat{A}$

διαβάζονται, αντίστοιχα, στο δίκτυο, στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=4$  ως  $(\beta+\gamma, \beta-\gamma), \frac{22}{3}$  συνα και  $10\sigma\upsilon\upsilon\hat{A}$ .



Σχήμα 117. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha, \beta$  και τη γωνία  $\hat{B}$ . Οι πλευρές  $\alpha, \beta$  και οι γωνίες  $\hat{B}, \hat{A}$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες Ap, Bq. Κάθε πλευρά  $\alpha$  και κάθε γωνία  $\hat{A}$  διαβάζεται ως  $\eta\mu\alpha$  και  $\eta\mu\hat{A}$ , αντίστοιχα.

Τα παραπάνω νομογραφήματα δεν δίνουν αποτελέσματα στις περιπτώσεις που το άθροισμα των πλευρών  $\beta, \gamma$  είναι μεγαλύτερο από  $180^\circ$  ή η πλευρά  $\alpha$  είναι αρνητικά κοντά στο  $0^\circ$  ή στο  $180^\circ$ . Στην πρώτη περίπτωση, επιλύουμε το τρίγωνο με πλευρές  $180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma, \alpha$  και βρισκουμε τη γωνία  $\hat{A}$  να διαβάζεται ως  $-\hat{A}$ . Ενώ, στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω νομογραφήματα.

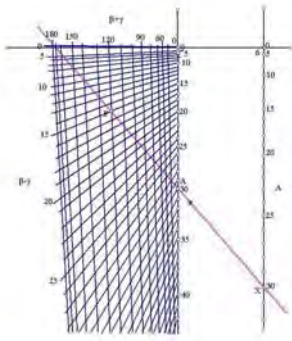
Αρχικά, έχουμε το παρακάτω νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=6$  και ένα δίκτυο ευθειών που έχουν σημεία τομής στη μορφή:

$$r(\beta, \gamma) = \left( \frac{48(\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma))}{8(\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma)) + 27}, \frac{2000(-1 + \sin(\beta - \gamma))}{8(\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma)) + 27} \right)$$

για κάθε ζεύγος τιμών  $(\beta, \gamma)$  (βλ. Σχήματα 118, 119 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 63). Η ευθεία  $x=6$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=6$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στο δίκτυο, διαβάζουμε τις τιμές  $\beta - \gamma, \beta + \gamma$  και έχουμε το σημείο  $P(\beta + \gamma, \beta - \gamma)$ . Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$  ως  $-\frac{1000}{13,5}(1 - \sin\alpha)$ ,

παιρνοντας  $OA = \alpha$ . Η PA τέμνει την ευθεία  $x=6$  στο X με συντεταγμένες  $(6, y)$ . Η τιμή  $\text{τοξ}\sin\left(\frac{y}{125} + 1\right)$  είναι η ζητούμενη γωνία.

*Απόδειξη.* Τα σημεία P, A, X είναι συνευθειακά αν και μόνο αν



Σχήμα 118.

$$\begin{vmatrix} \frac{48(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))}{8(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))+27} & \frac{-2000(1-\sin(\beta-\gamma))}{8(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))+27} & 1 \\ 0 & -\frac{1000}{13,5}(1-\sin\alpha) & 1 \\ 6 & -125(1-\sin\hat{\Lambda}) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ισοδύναμα, } \begin{vmatrix} 48(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)) & 2000(-1+\sin(\beta-\gamma)) & 8(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))+27 \\ 0 & -1000(1-\sin\alpha) & 13,5 \\ 6 & -125(1-\sin\hat{\Lambda}) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ισοδύναμα, } \begin{vmatrix} 8(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)) & -16+16\sin(\beta-\gamma) & 27 \\ 0 & -8+8\sin\alpha & 13,5 \\ 1 & -1+\sin\hat{\Lambda} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

που ισοδυναμεί με τον γνωστό τύπο  $\sin\alpha = \sin\beta\sin\gamma + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sin\hat{\Lambda}$ .

Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=9$  και ένα δίκτυο ευθειών που έχουν σημεία τομής στη μορφή:

$$r(\beta, \gamma) = \left( \frac{9(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))}{(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))+5}, \frac{2000(-1+\sin(\beta-\gamma))}{(\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma))+5} \right)$$

για κάθε ζεύγος τιμών  $(\beta, \gamma)$  (βλ. Σχήμα 120 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 64). Η ευθεία  $x=9$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=9$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στο δίκτυο, διαβάζουμε τις τιμές  $\beta-\gamma$ ,  $\beta+\gamma$  και έχουμε το σημείο  $P(\beta+\gamma, \beta-\gamma)$ . Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$  ως  $-400(1-\sin\alpha)$ , παίρνο-

ντας  $OA=\alpha$ . Η  $PA$  τέμνει την ευθεία  $x=9$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(9, y)$ . Η τιμή  $\text{τοξ}\sin\left(\frac{y}{1000}+1\right)$  είναι η ζητούμενη γωνία.

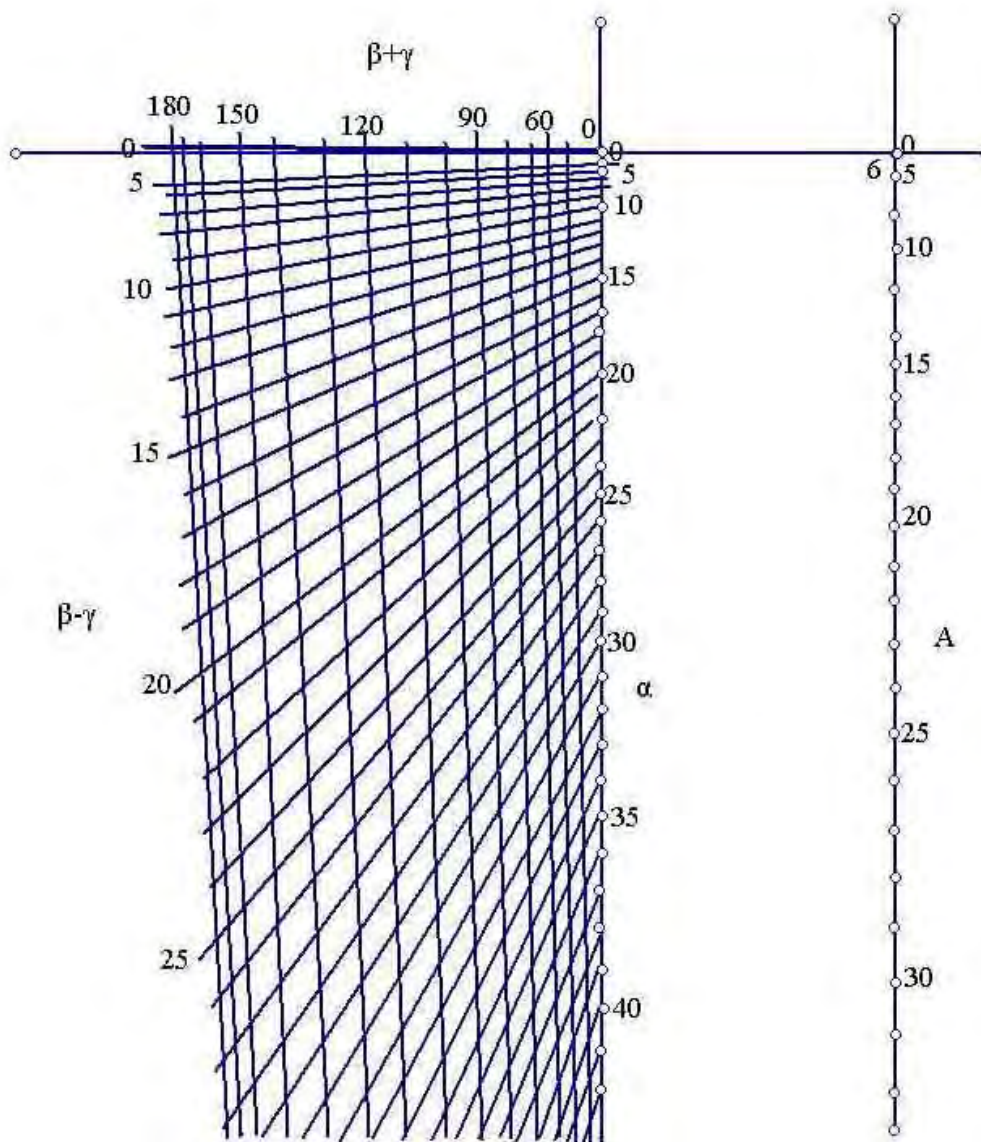
Ακόμη, έχουμε τα σφαιρικά τρίγωνα στα οποία η διαφορά των πλευρών  $\alpha-(\beta-\gamma)$  είναι κοντά στο μηδέν τότε χρησιμοποιούμε τα παρακάτω νομογράφημα υπολογίζοντας την παραπάνω διαφορά  $\delta$  και ικανοποιούν τον τύπο

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)\left(\eta\mu\delta+\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}\right)+\left(\eta\mu^2\frac{\delta}{2}-\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}\right)=0.$$

Αρχικά, έχουμε το νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=5$  και τις καμπύλες:

$$r_s(\delta) = \left( \frac{1,1\eta\mu\delta-5\eta\mu^2\frac{\delta}{2}}{0,0065+0,22\eta\mu\delta-\eta\mu^2\frac{\delta}{2}}, \frac{-3,7\eta\mu\delta}{0,0065+0,22\eta\mu\delta-\eta\mu^2\frac{\delta}{2}} \right)$$

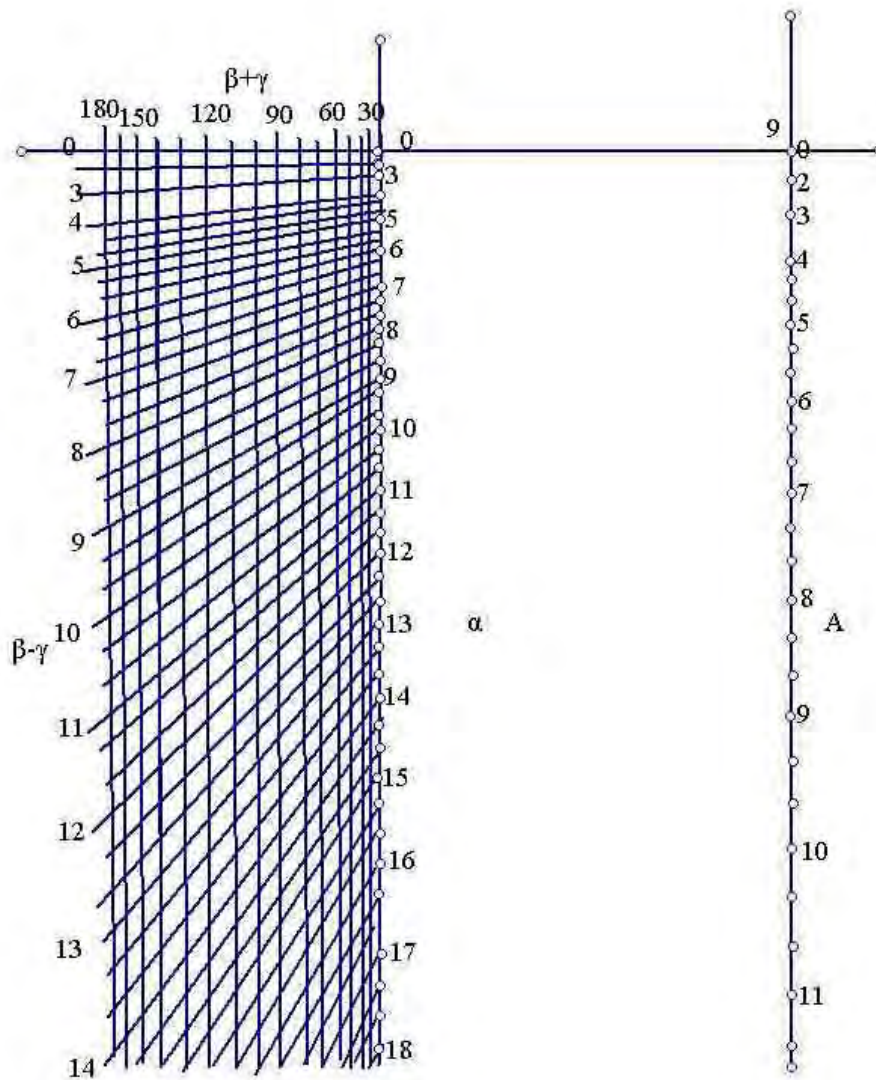
$$r(\beta, \Lambda) = \left( \frac{-(1,1\eta\mu^2\beta-5\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}}{0,0065-(0,22\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}}, \frac{3,7\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}}{0,0065-(0,22\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2\frac{\hat{\Lambda}}{2}} \right)$$



Σχήμα 119. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  και  $\hat{A}$  διαβάζονται στο δίκτυο, στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=6$  ως  $(\beta+\gamma, \beta-\gamma)$ ,  $-\frac{1000}{13,5}(1-\sigma\eta\nu\alpha)$  και  $-125(1-\sigma\eta\nu\hat{A})$ , αντίστοιχα.

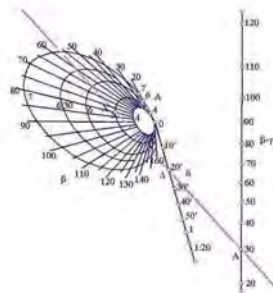
για κάθε τιμή  $\delta$  και ζεύγος τιμών  $(\beta, \hat{A})$  (βλ. Σχήματα 121, 122 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 65). Η ευθεία  $x=5$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=5$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στην ευθεία  $x=5$  διαβάζουμε την τιμή  $\beta-\gamma$  στο σημείο  $A(5, y)$  ως το ξεφ  $\left(-\left(\frac{7,4}{y}+0,44\right)\right)$  και στην καμπύλη  $r_\delta(\delta)$  την τιμή  $\delta$  στο

σημείο  $\Delta$ . Με δεδομένο ότι η πλευρά  $\beta$  είναι η μεγαλύτερη, η  $\Delta A$  τέμνει την καμπύλη  $r_\beta(\beta, \hat{A})$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή  $\hat{A}$  για την οποία επαληθεύεται η καμπύλη  $r_\beta(\beta, \hat{A})$  στο σημείο  $X$  είναι η ζητούμενη γωνία.



Σχήμα 120. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  και  $\hat{A}$  διαβάζονται, στο δίκτυο, στον άξονα των  $\gamma$  και στην ευθεία  $x=9$  ως  $(\beta+\gamma, \beta-\gamma)$ ,  $-400(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)$  και  $-1000(1-\sigma\upsilon\nu\hat{A})$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Τα σημεία  $\Delta$ ,  $\Lambda$ ,  $X$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν



Σχήμα 121.



$$\begin{vmatrix} \frac{1,1\eta\mu\delta-5\eta\mu^2}{2} \frac{\delta}{2} & -3,7\eta\mu\delta & 1 \\ 0,0065+0,22\eta\mu\delta-\eta\mu^2 \frac{\delta}{2} & 0,0065+0,22\eta\mu\delta-\eta\mu^2 \frac{\delta}{2} & 1 \\ 5 & -\frac{7,4}{0,44+\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)} & 1 \\ -\frac{(1,1\eta\mu2\beta-5\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2}{2} \frac{\hat{A}}{2} & 3,7\eta\mu2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & 1 \\ 0,0065-(0,22\eta\mu2\beta+\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & 0,0065-(0,22\eta\mu2\beta+\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ισοδύναμα,} \quad \begin{vmatrix} 1,1\eta\mu\delta-5\eta\mu^2 \frac{\delta}{2} & -3,7\eta\mu\delta & 0,0065+0,22\eta\mu\delta-5\eta\mu^2 \frac{\delta}{2} \\ 2,2+5\varepsilon\varphi(\beta-\gamma) & -7,4 & 0,44+\varepsilon\varphi(\beta-\gamma) \\ -(1,1\eta\mu2\beta-5\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & 3,7\eta\mu2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & 0,0065-(0,22\eta\mu2\beta+\eta\mu^2\beta)\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

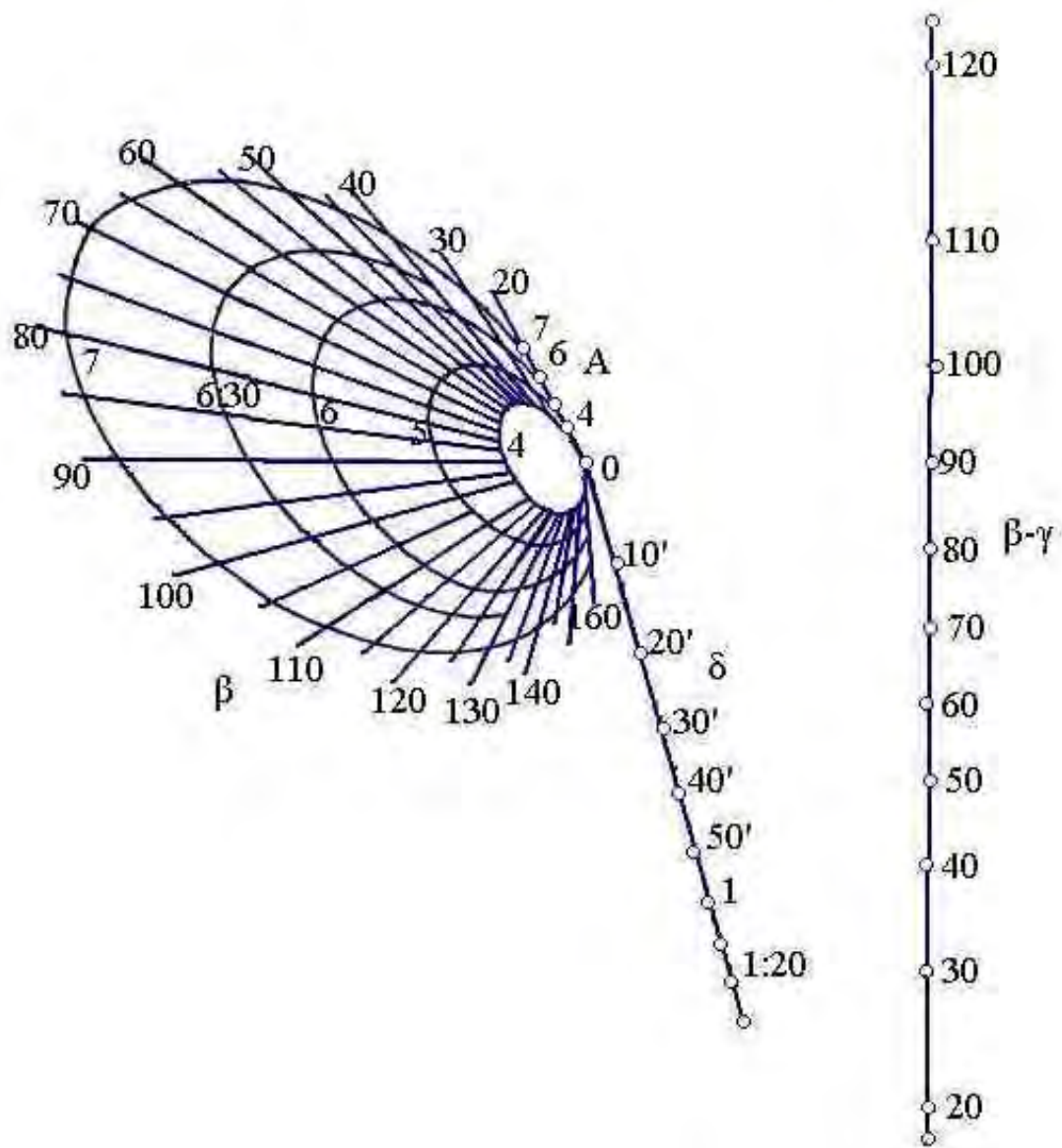
$$\text{ισοδύναμα,} \quad \begin{vmatrix} -\eta\mu^2 \frac{\delta}{2} & -\eta\mu\delta & -0,0135 \\ \varepsilon\varphi(\beta-\gamma) & -2 & 0 \\ -\eta\mu^2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & \eta\mu2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2} & -0,0135 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{που ισοδυναμεί με τον γνωστό τύπο} \quad \frac{1}{2}\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)\left(\eta\mu\delta+\eta\mu2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2}\right)+\left(\eta\mu^2 \frac{\delta}{2}-\eta\mu^2\beta\eta\mu^2 \frac{\hat{A}}{2}\right)=0.$$

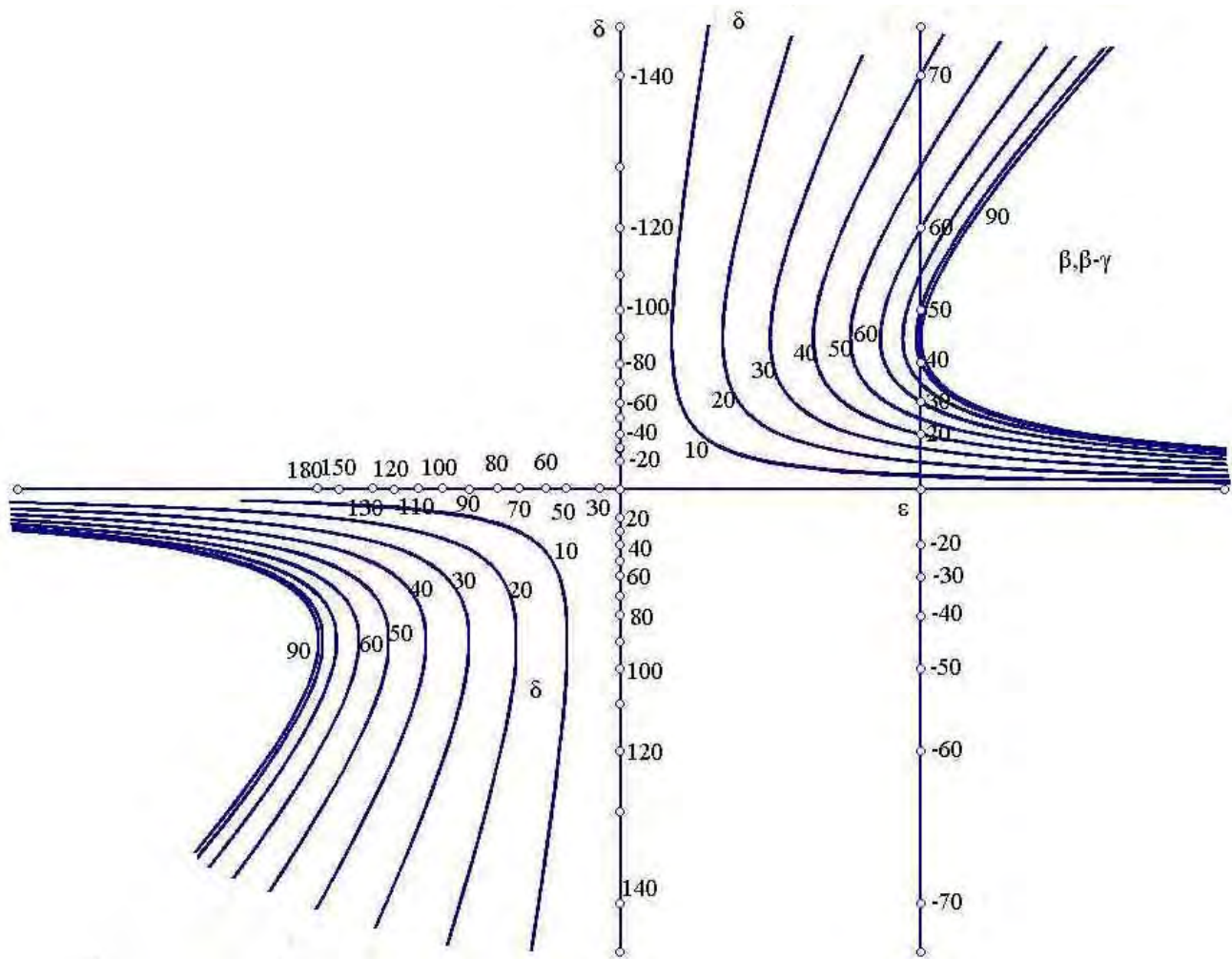
Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να σχεδιάσουμε την ευθεία  $x=5$  και τις καμπύλες  $r_\delta(\delta)$ ,  $r_\beta(\beta, \hat{A})$ , να σχεδιάσουμε την καμπύλη

$$r'(\beta, \delta) = \left( \frac{\eta\mu\delta}{\eta\mu2\beta}, \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\beta \right) \text{ (βλ. Σχήμα 123 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 66).}$$

Στην καμπύλη  $r'(\beta, \delta)$  στο σημείο P με συντεταγμένες  $(x_p, y_p)$  διαβάζουμε τις τιμές  $\beta$  και  $\delta$  ως τοξεφ( $2y_p$ ) και τοξημ( $x_p, \eta\mu(\text{τοξεφ}(2y_p))$ ), αντίστοιχα. Στον άξονα των  $y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\beta-\gamma$  και  $\delta$  στα σημεία Γ και Δ με τεταγμένες  $y_\Gamma$  και  $y_\Delta$ , αντίστοιχα. Οι τιμές  $\beta-\gamma$  και  $\delta$  διαβάζονται ως 2τοξεφ( $y_\Gamma$ ) και 2τοξεφ( $-2y_\Delta$ ), αντίστοιχα (στο νομογράφημα οι τιμές  $\beta$  και  $\beta-\gamma$  αναγράφονται για ευκολία στην ευθεία  $\varepsilon$ ). Παίρνοντας ημιευθεία Δz παράλληλη στον άξονα των  $x$  έχουμε ότι η Δz τέμνει την ΡΓ στο Χ με τεταγμένη  $x$ . Η τιμή 2τοξημ( $\sqrt{-x}$ ) είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 122. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  όπου η τιμή  $\delta$  είναι η  $\alpha - (\beta - \gamma)$  και διαβάζεται στην  $r_\delta(\delta)$ , η τιμή  $\beta - \gamma$  στην  $x=5$  και οι τιμές  $\beta$ ,  $\hat{A}$  στην  $r_\beta(\beta, \hat{A})$ .



Σχήμα 123. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Η τιμή  $\delta$  διαβάζεται στην καμπύλη  $\epsilon_\delta$  ( $\beta, \delta$ ) και στον άξονα των  $y$ . Ακόμη οι τιμές  $\beta-\gamma$  και  $\beta$  διαβάζονται στην ευθεία  $\epsilon$  ενώ η γωνία  $A$  στον άξονα των  $x$ .

## 5.5 Εφαρμογές.

Η επίλυση σφαιρικών τριγώνων με χρήση νομογραφημάτων εφαρμόζεται στη ναυσιπλοΐα και στην αστρονομία.

Αρχικά, θα δούμε μια εφαρμογή στη ναυσιπλοΐα. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το υψόμετρο  $u$  δυο πόλεων,  $A$ ,  $B$  με δεδομένα τα γεωγραφικά τους πλάτη  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  και την ωρική τους γωνία  $\omega$  από τον τύπο  $\eta\mu u = \eta\mu\varphi_A\eta\mu\varphi_B + \sigma\upsilon\nu\varphi_A\sigma\upsilon\nu\varphi_B\sigma\upsilon\nu\omega$ , έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε την ευθεία  $x = \frac{125}{22}$  και ένα δίκτυο ευθειών με σημεία τομής στη μορφή:

$$r(\varphi_A, \varphi_B) = \left( -\frac{125(\sigma\upsilon\nu(\varphi_A + \varphi_B) + \sigma\upsilon\nu(\varphi_A - \varphi_B))}{60 - 22(\sigma\upsilon\nu(\varphi_A + \varphi_B) + \sigma\upsilon\nu(\varphi_A - \varphi_B))}, \frac{880(\sigma\upsilon\nu(\varphi_A + \varphi_B) - \sigma\upsilon\nu(\varphi_A - \varphi_B))}{60 - 22(\sigma\upsilon\nu(\varphi_A + \varphi_B) + \sigma\upsilon\nu(\varphi_A - \varphi_B))} \right)$$

για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi_A, \varphi_B)$  (βλ. Σχήμα 125 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 67). Η ευθεία  $x = \frac{125}{22}$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x = \frac{125}{22}$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στο δίκτυο, διαβάζουμε τις τιμές  $\varphi_A - \varphi_B$ ,  $\varphi_A + \varphi_B$  και έχουμε το σημείο  $P(\varphi_A - \varphi_B, \varphi_A + \varphi_B)$ . Στην ευθεία  $x = \frac{125}{22}$  διαβάζουμε την τιμή  $\omega$  ως 40συνω, παίρνοντας  $O\Omega = \omega$ . Η  $P\Omega$  τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $X$  με τεταγμένη  $y$ . Η τιμή τοξημ  $\left(\frac{3y}{88}\right)$  είναι το ζητούμενο υψόμετρο.

Ακόμη έχουμε το νομογράφημα που χρησιμοποιείται στην αστρονομία για τον προσδιορισμό της θέσης ενός ουράνιου σώματος υπολογίζοντας την κλίση  $\theta$ .

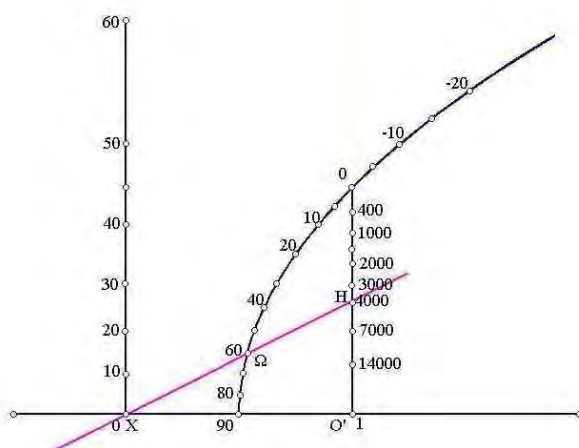
Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την κλίση  $\theta$  του ουράνιου σώματος με δεδομένα τη γωνία εδάφους  $\omega$  και την απόσταση  $h$  από τη γη. Η θεωρία δίνει τον τύπο:

$$\varepsilon\varphi\theta = \sigma\varphi\omega - \frac{1}{\eta\mu\omega} \left( \frac{3960}{3960+h} \right).$$

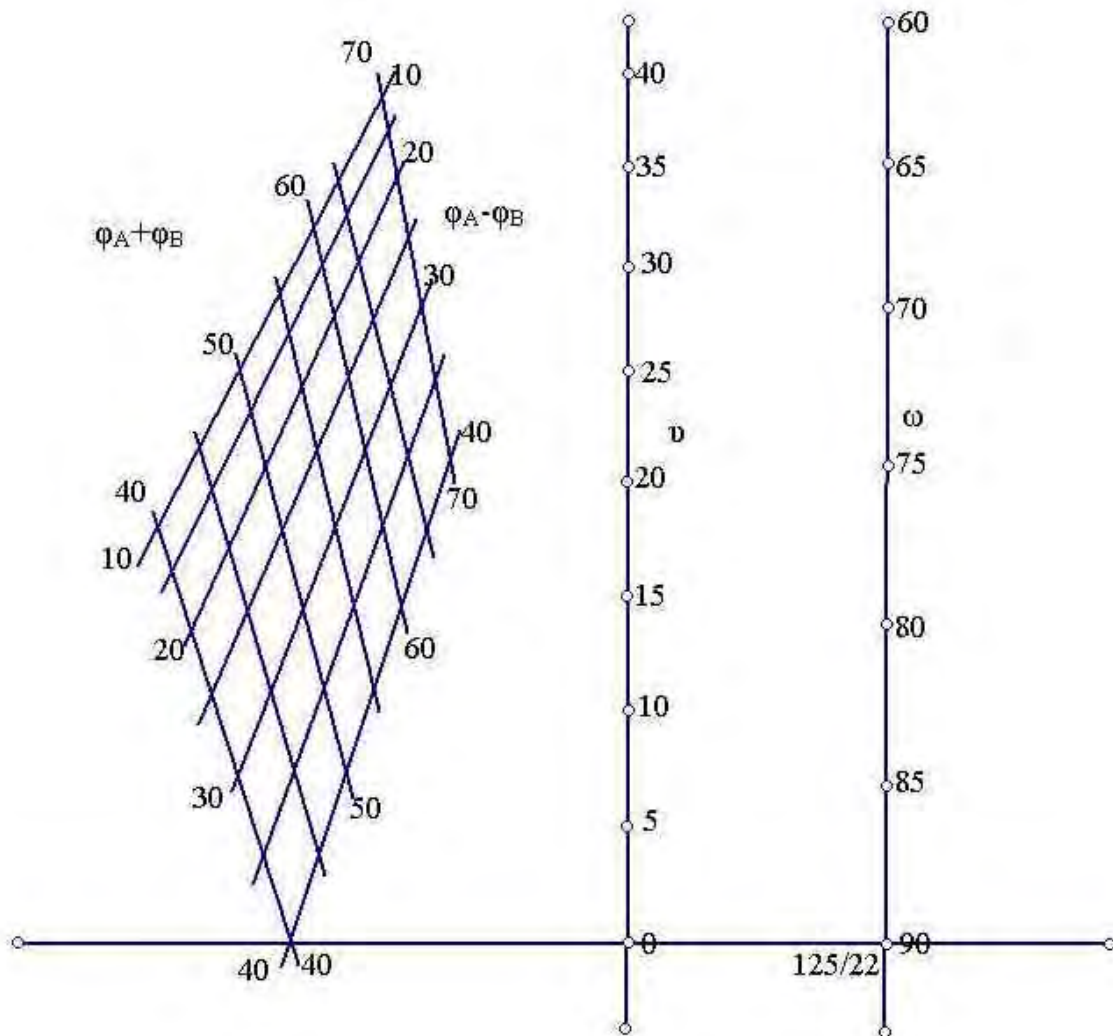
Για τον σκοπό αυτό κατασκευάζουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε την ευθεία  $x=1$  και την καμπύλη:

$$r(\omega) = \left( \frac{1}{1+\eta\mu\omega}, \frac{\sigma\varphi\omega}{1+\eta\mu\omega} \right)$$

(βλ. Σχήματα 124, 126 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 68). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στην ευθεία  $x=1$  διαβάζουμε την τιμή  $h$  ως  $\frac{3960}{3960+h}$  στο σημείο  $H$  ενώ στην καμπύλη  $r(\omega)$  την τιμή  $\omega$  στο σημείο  $\Omega$  με συντεταγμένες  $(x_\omega, y_\omega)$  ως τοξημ  $\left(\frac{1-x}{x}\right)$ . Η  $H\Omega$  τέμνει άξονα των  $y$  στο σημείο  $X$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Η τιμή τοξεφ( $y$ ) είναι η ζητούμενη κλίση.



Σχήμα 124.

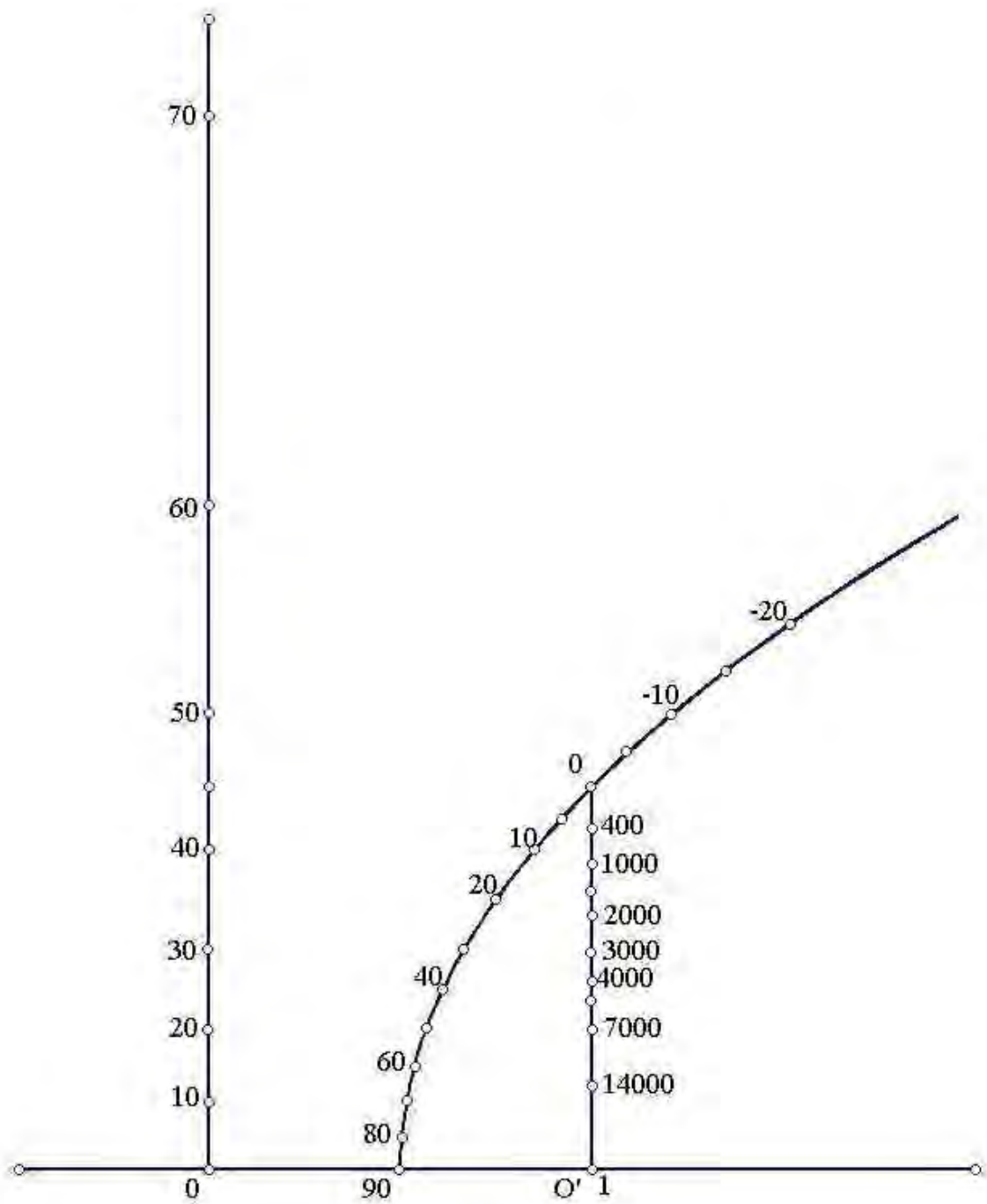


Σχήμα 125. Νομογράφημα για τον υπολογισμό του υψομέτρου  $υ$  δυο πόλεων  $A, B$  με δεδομένα τα γεωγραφικά τους πλάτη  $\varphi_A, \varphi_B$  και την ωριαία τους γωνία  $\omega$ .

*Απόδειξη.* Τα σημεία  $H, \Omega, X$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{3960}{3960+h} & 1 \\ \frac{1}{\eta\mu\omega+1} & \frac{\sigma\upsilon\eta\omega}{\eta\mu\omega+1} & 1 \\ 0 & \epsilon\varphi\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα,  $\epsilon\varphi\theta = \sigma\varphi\omega - \frac{1}{\eta\mu\omega} \left( \frac{3960}{3960+h} \right)$ .



Σχήμα 126. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της κλίσης  $\theta$  με δεδομένα τη γωνία εδάφους  $\omega$  και την απόσταση  $h$  του ουράνιου σώματος. Οι τιμές  $h$ ,  $\omega$  και  $\theta$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=1$ , στην καμπύλη  $r(\omega)$  και στον άξονα τον  $y$ , αντίστοιχα.

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την επίλυση διαφόρων μορφών τύπων με τη χρήση νομογραφημάτων καθώς και μια γενική μέθοδο κατασκευής νομογραφημάτων.

### 6.1 Επίλυση συστήματος δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

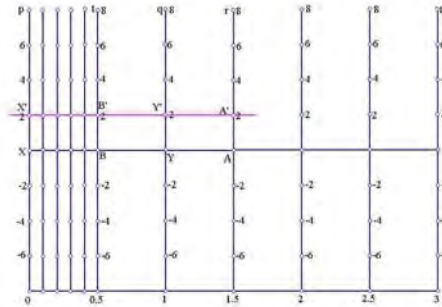
Ορίζουμε το παρακάτω σύστημα με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$  δοθέντα,  $x, y$  οι άγνωστοι και επαληθεύουν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \delta x + \epsilon y = \zeta \end{cases}$$

Για το σύστημα αυτό κατασκευάζουμε το παρακάτω νομογράφημα:

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $XY$  και άξονες  $Xp, Yq \perp XY$  οι οποίοι διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Το σημείο  $A_\alpha$  χωρίζει το  $XY$  έτσι ώστε  $XA_\alpha : A_\alpha Y = \alpha$  για κάθε τιμή  $\alpha$  (βλ. Σχήματα 127, 128 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 69). Παίρνουμε άξονες  $A_\alpha r_\alpha \perp XY$  οι οποίοι διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Επιλέγουμε άξονες  $Ar, Bt$  έτσι ώστε τα  $A, B$  χωρίζουν το  $XY$  σε λόγο  $XA : AY = \beta : \alpha$  και  $XB : BY = \epsilon : \delta$ , αντίστοιχα. Οι τιμές  $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}, \frac{\zeta}{\delta+\epsilon}, x, y$  διαβάζονται στους άξονες  $Ar, Bt, Xp, Yq$  αντίστοιχα. Παίρνοντας  $AA' = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}, BB' = \frac{\zeta}{\delta+\epsilon}$  έχουμε

ότι η  $A'B'$  τέμνει τους άξονες  $Xp, Yq$  στα σημεία  $X', Y'$  με  $XX' = x, YY' = y$  αντίστοιχα. Το ζεύγος των τιμών  $(x, y)$  είναι η λύση του συστήματος.



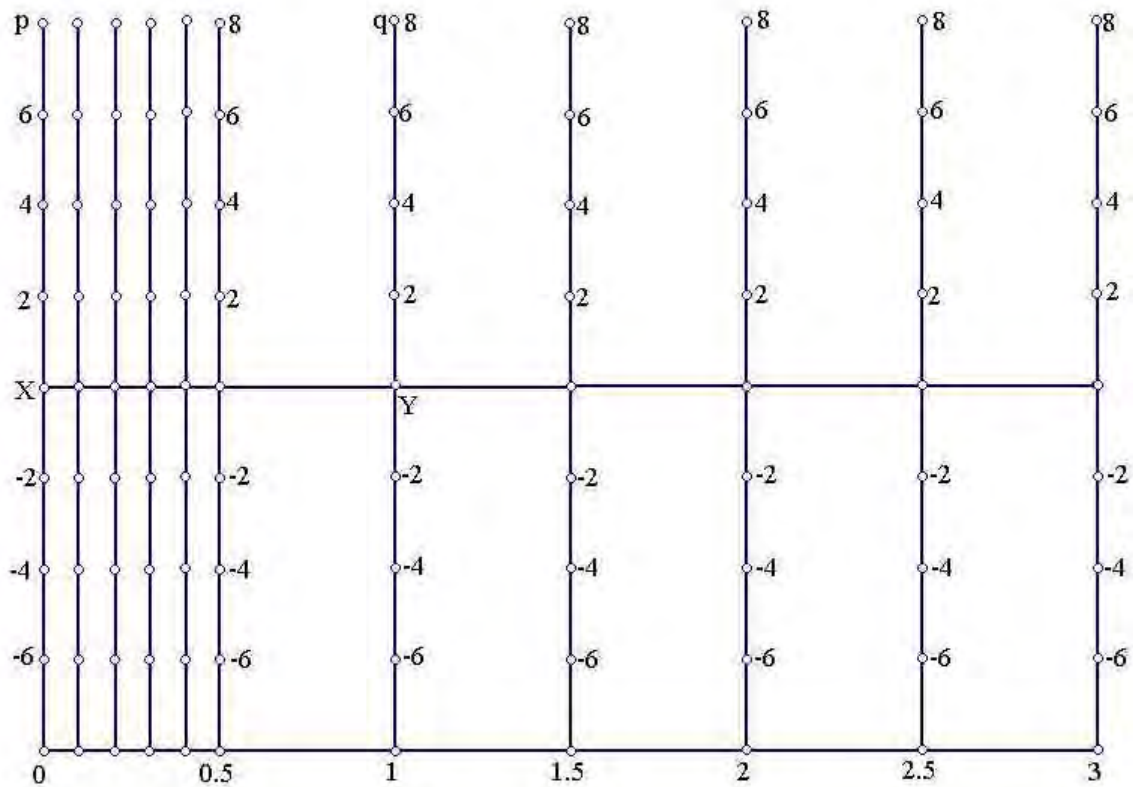
Σχήμα 127.

### 6.2 Επίλυση του τύπου $\gamma = \alpha\beta + \sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}$ .

Αν θέλουμε να λύσουμε τον παραπάνω τύπο με δεδομένες τις δύο από τις τρεις τιμές, τότε έχουμε το παρακάτω νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$ , την ευθεία  $x = \frac{\beta}{\beta + \sqrt{1+\beta^2}}$  για κάθε

τιμή  $\beta$  και την καμπύλη  $C_{|\gamma|}: y^2 = \gamma^2(1-2x)$  για κάθε τιμή  $\gamma \geq 0$  (βλ. Σχήματα 129, 130 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 70). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης και στους οποίους διαβάζουμε την τιμή  $\alpha$ . Η τιμή  $\alpha$  στον άξονα των  $y$  διαβάζεται ως  $\sqrt{1+\alpha^2}$ . Επειδή η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται σε δυο άξονες, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

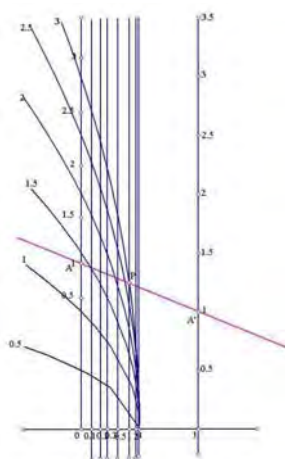
Αν η τιμή  $\alpha$  μαζί με την τιμή  $\gamma$  είναι δεδομένες τότε υπολογίζουμε την τιμή  $\beta$  ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία: Παίρνοντας  $OA = \alpha, O'A' = \alpha$  έχουμε ότι η  $AA'$  τέμνει την καμπύλη  $C_{|\gamma|}$  στο  $P$  για δεδομένο  $\gamma$ . Η τιμή  $\beta$  για την



Σχήμα 128. Νομογράφημα για την επίλυση του συστήματος. Στους άξονες  $X_p$ ,  $Y_q$  διαβάζουμε τη λύση του συστήματος  $(x, y)$ .

οποία το σημείο P διέρχεται από την ευθεία  $x = \frac{\beta}{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}$  είναι η ζητούμενη τιμή.

Ενώ, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή  $\alpha$  με δεδομένες τις τιμές  $\beta$ ,  $\gamma$  έχουμε ότι η ευθεία  $x = \frac{\beta}{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}$  για δε-



Σχήμα 129.

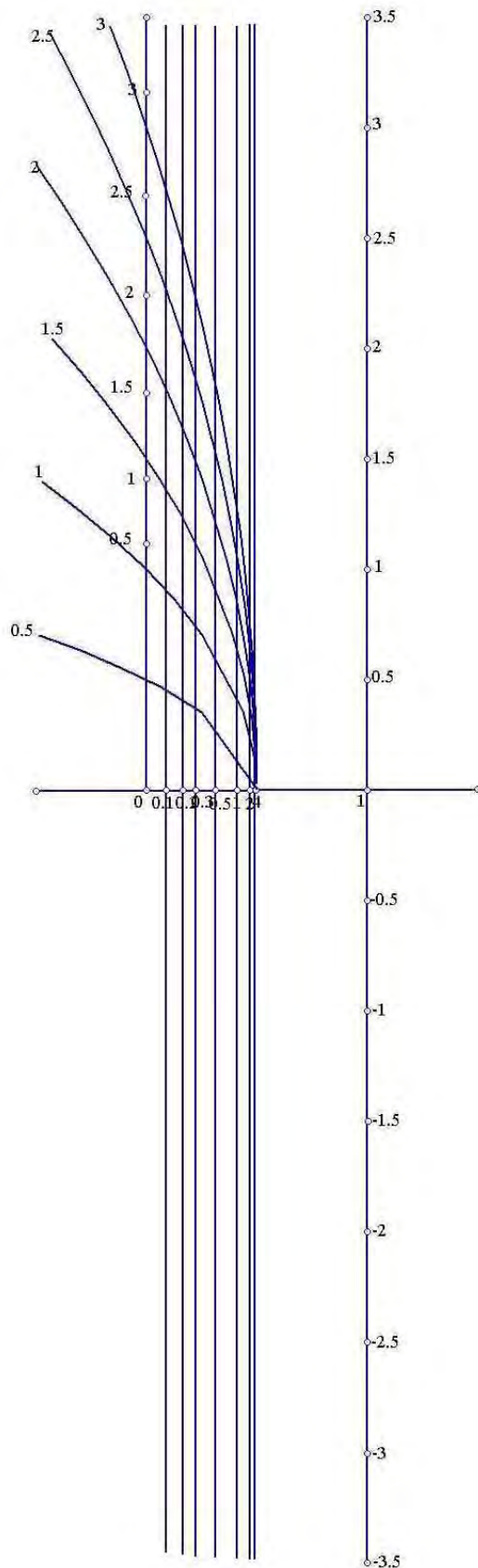
δομένο  $\beta$  και η καμπύλη  $C_{|\gamma|}$  για δεδομένο  $\gamma$  τέμνονται στο P. Παίρνοντας ευθεία  $\epsilon$  έτσι ώστε να διέρχεται από το P και να τέμνει την ευθεία  $x=1$  και τον άξονα των  $y$  στην ίδια τιμή  $\alpha$ . Η παραπάνω τιμή  $\alpha$  είναι η ζητούμενη.

*Απόδειξη.* Τα σημεία A, P, A' είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \sqrt{1 + \alpha^2} & 1 \\ \frac{\beta}{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}} & \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

οπότε  $\gamma = \alpha\beta + \sqrt{1 + \alpha^2} \sqrt{1 + \beta^2}$ .





Σχήμα 130. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\gamma = \alpha\beta + \sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}$ . Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται στον άξονα των  $\gamma$  και στην ευθεία  $x=1$ , η τιμή  $\beta$  στην ευθεία  $x=\beta$  ενώ η τιμή  $\gamma$  στην καμπύλη  $C_H$ .

### 6.3 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ .

Γράφοντας  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$  χρειαζόμαστε την τιμή  $t$ . Η επίλυση του τύπου γίνεται με τα παρακάτω νομογραφήματα:

1) Παίρνουμε σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  συνευθειακά έτσι ώστε το  $B$  να είναι μέσο του  $A\Gamma$ . Παίρνουμε άξονες  $A\rho, B\sigma, \Gamma\tau, \Delta\upsilon \perp A\Delta$  και την ημιευθεία  $\Gamma\chi$ . Η  $\Gamma\chi$  τέμνει τον  $\Delta\upsilon$  στο  $O$  (βλ. Σχήμα 131 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 71) άξονες  $A\rho, \Gamma\tau, O\Delta$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο  $B\sigma$  με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες  $A\rho, B\sigma, O\Delta, \Gamma\tau$  και  $O\Gamma$  αντίστοιχα. Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται ως  $-\alpha$  ενώ η τιμή  $t$  στο σημείο  $X$  επιλέγεται να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $O\Gamma$  σε λόγο  $\frac{OX}{X\Gamma} = t$ . Παίρνουμε  $AA' = \alpha$ ,

$BB' = \beta$  και  $O\Gamma' = \gamma$ . Η  $A'B'$  τέμνει τον  $\Gamma\tau$  στο  $Y$ . Η  $Y\Gamma'$  τέμνει τον  $O\Gamma$  στο  $X$  με  $OX = t$ . Τότε, έχουμε  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$ .

2) Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω. Παίρνουμε άξονες  $A\rho \parallel B\sigma$  και ημιευθεία  $A\chi$  (βλ. Σχήμα 132 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 72). Η  $A\chi$  τέμνει τον  $B\sigma$  στο  $\Gamma$ . Οι άξονες  $A\rho, B\sigma$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο  $A\Gamma$  με μονάδα μέτρησης ίση με το μήκος του. Οι τιμές  $\alpha, \gamma$  διαβάζονται στον  $\Gamma B$ , η τιμή  $\beta$  στον  $A\rho$  ενώ η  $t$  στον  $\Gamma A$ . Παίρνουμε  $\Gamma A' = \alpha, AB' = \beta$  και  $\Gamma\Gamma' = \gamma$ . Η τιμή  $t$  υπολογίζεται παίρνοντας  $\Gamma'X \parallel A'B'$  με  $\Gamma X = t$ .

3) Υπάρχει και ένα τρίτο νομογράφημα. Παίρνουμε άξονες  $A\rho, A\sigma, B\tau, B\upsilon$  έτσι ώστε  $B\tau \perp A\sigma$  και  $\rho\hat{A}\sigma = \tau\hat{B}\upsilon = \varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήμα 133 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 73). Παίρνουμε άξονα  $\Gamma\omega$  παράλληλο του  $B\tau$ . Ο  $\Gamma\omega$  τέμνει τον  $B\upsilon$  στο  $\Delta$ . Οι άξονες  $A\sigma, B\tau, \Delta\Gamma$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ ο  $A\rho$  με μονάδα μέτρησης ίση με το  $B\Delta$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $B\tau, \Delta\Gamma, A\sigma$  και  $A\rho$ . Παίρνουμε  $BA' = \alpha, \Delta B' = \beta$  και  $A\Gamma' = \gamma$ . Η τιμή  $t$  υπολογίζεται παίρνοντας  $\Gamma'X \perp A'B'$  με  $AX = t$ .

Γενικότερα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή  $t$  για την οποία ισχύει ο τύπος  $f(\alpha) + g(\beta) = \frac{h(\gamma)}{p(t)}$  όπου οι  $f, g, h, p$

είναι πραγματικές συναρτήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω νομογραφήματα διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  ως  $f(\alpha), g(\beta), h(\gamma)$  και  $p(t)$ , αντίστοιχα.

### 6.4 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \gamma$ .

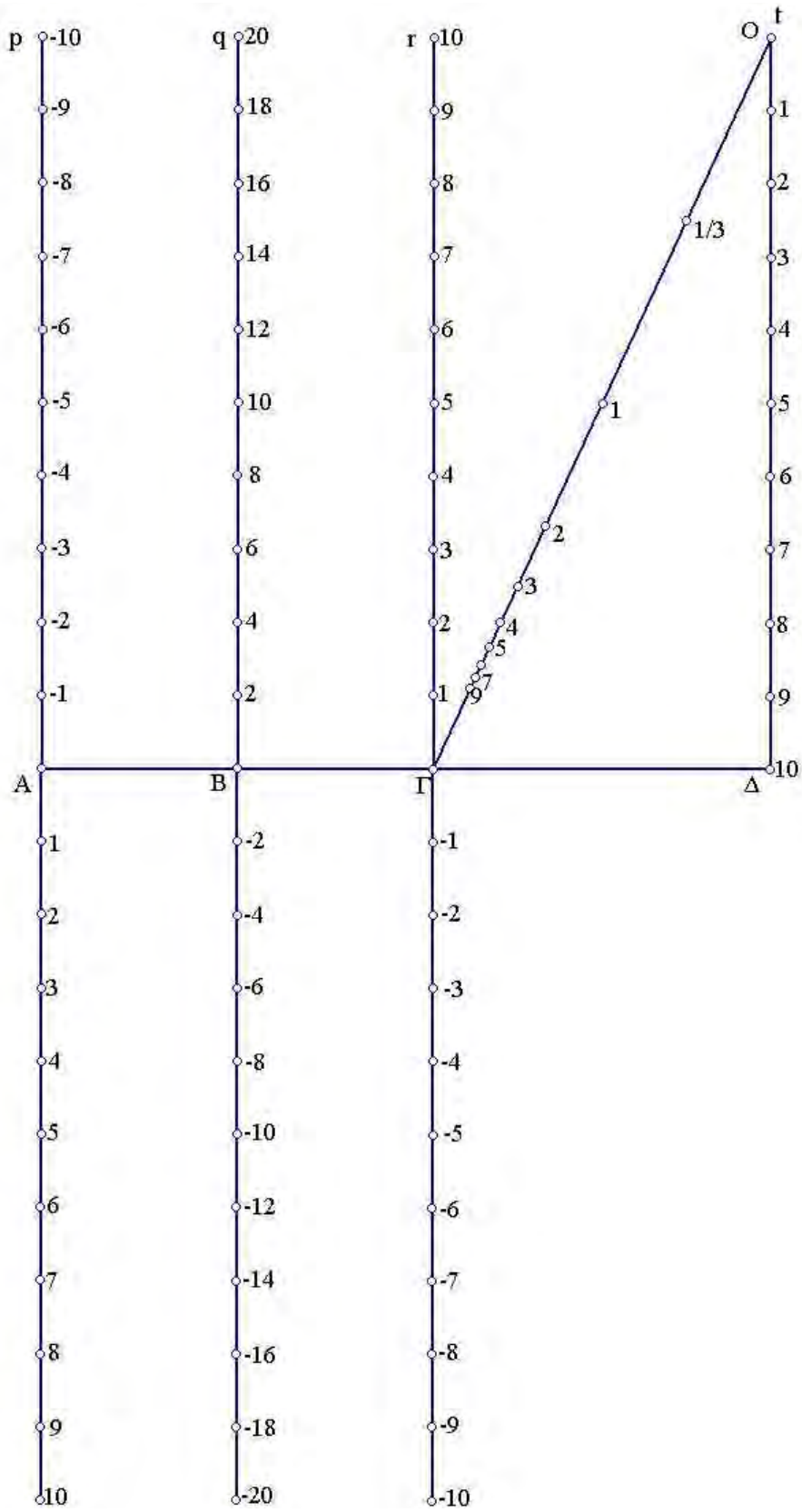
Γράφοντας  $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma}{t}$  χρειαζόμαστε την τιμή  $t$ . Η επίλυση του τύπου γίνεται με τα παρακάτω νομογραφήματα:

1) Παίρνουμε  $A, B, \Gamma, X$  συνευθειακά σημεία έτσι ώστε  $AB = 2B\Gamma, \Gamma X = 3B\Gamma$  (βλ. Σχήμα 134 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 74). Παίρνουμε άξονες  $A\rho, B\sigma, \Gamma\tau, X\upsilon \perp AX$ . Οι άξονες  $A\rho, \Gamma\tau$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης ενώ οι  $\Gamma\tau, X\upsilon$  με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό και το τριπλάσιο της αρχικής, αντίστοιχα. Παίρνουμε  $AA' = \alpha, \Gamma B' = \beta$  και  $B\Gamma' = \gamma$ . Η  $A'B'$  τέμνει το  $AX$  στο  $Y$ . Η  $B'Y$  τέμνει τον  $X\upsilon$  στο  $X'$  με  $XX' = t$ . Η τιμή  $t$  διαβάζεται ως  $-t$ .

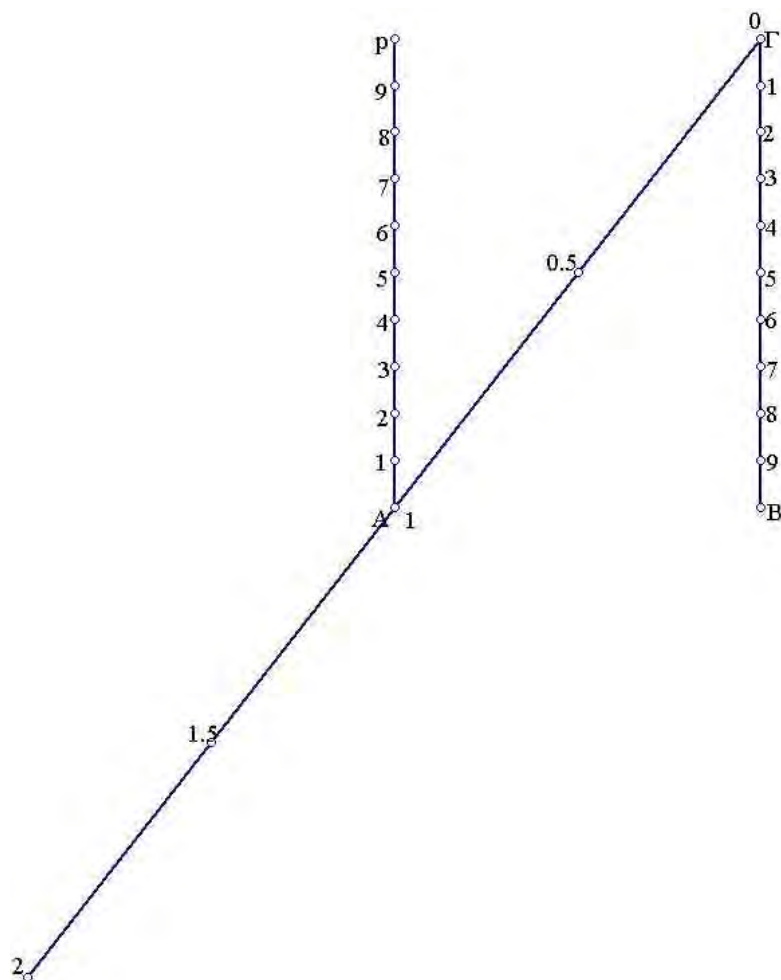
2) Άλλο νομογράφημα είναι το παρακάτω. Παίρνουμε άξονες  $O\rho, O\sigma$  έτσι ώστε  $\rho\hat{O}\sigma = 45^\circ$  (βλ. Σχήμα 135 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 75). Παίρνουμε άξονες  $O\tau, O\upsilon$  έτσι ώστε  $O\tau \perp O\rho$  και  $O\upsilon \perp O\sigma$ . Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $O\rho, O\tau, O\sigma$  και  $O\upsilon$ . Παίρνουμε  $OA = \alpha, OB = \beta$  και  $O\Gamma = \gamma$ . Η τιμή  $t$  υπολογίζεται παίρνοντας  $\Gamma X \parallel AB$  με  $\Gamma X = t$ .

Γενικότερα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή  $t$  για την οποία ισχύει ο τύπος  $\frac{f(\alpha) + g(\beta)}{f(\alpha) - g(\beta)} = \frac{h(\gamma)}{p(t)}$  όπου οι  $f, g, h$

και  $p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω νομογραφήματα διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  ως  $f(\alpha), g(\beta), h(\gamma)$  και  $p(t)$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 131. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{y}{t} = \alpha + \beta$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha + \beta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες Αρ, Βq, ΟΔ, Γr και ΟΓ, αντίστοιχα.

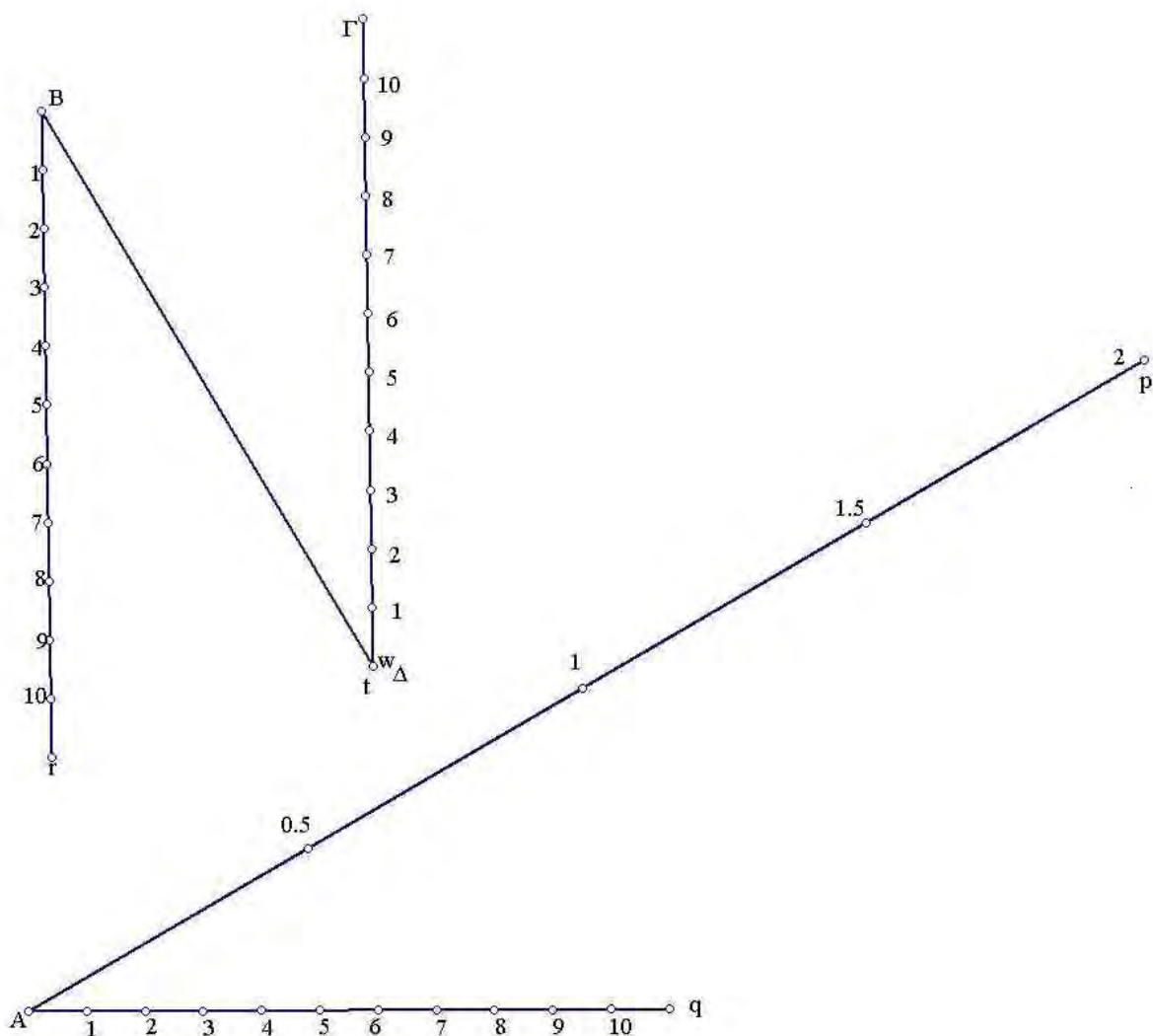


Σχήμα 132. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$ . Οι τιμές  $\alpha, \gamma$  διαβάζονται στο ΓΒ, η τιμή  $\beta$  στον άξονα Αρ και η τιμή  $t$  στον ΓΑ.

## 6.5 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\alpha\beta\dots\gamma}{\delta\varepsilon\dots\zeta}$ για δοθέντα $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots, \zeta$ .

Γράφοντας  $\alpha\beta\dots\gamma = \delta\varepsilon\dots\zeta t$  χρειαζόμαστε την τιμή  $t$ . Η επίλυση του τύπου γίνεται με τα νομογραφήματα του γινομένου (βλέπε σελίδα 21) στα οποία οι τιμές  $\delta, \varepsilon, \dots, \zeta$  διαβάζονται ως  $\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\varepsilon}, \dots, \frac{1}{\zeta}$ , αντίστοιχα.

Αρχικά, θα μελετήσουμε την περίπτωση που έχουμε τέσσερις μεταβλητές, επιλύοντας τον τύπο  $\alpha\beta\gamma = \delta t$ . Ο παραπάνω τύπος μπορεί να επιλυθεί με το παρακάτω νομογράφημα. Παίρνουμε άξονες Αρ, Αq έτσι ώστε  $\hat{r}\hat{A}q = \varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήμα 137 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 76). Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και άξονες Βr, Βt έτσι ώστε  $\hat{r}\hat{B}t = \varphi$  και Βr || Αq. Παίρνουμε τμήμα ΒΓ και άξονα Γw παράλληλο του Αq. Οι άξονες Αρ, Αq, Βr, Βt και ΓΒ διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \delta$  και  $t$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες Αq, Αρ, Βr, Βt ενώ η τιμή  $\gamma$  στο σημείο Γ' επιλέγεται να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ σε λόγο  $\frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'B} = \gamma$ .



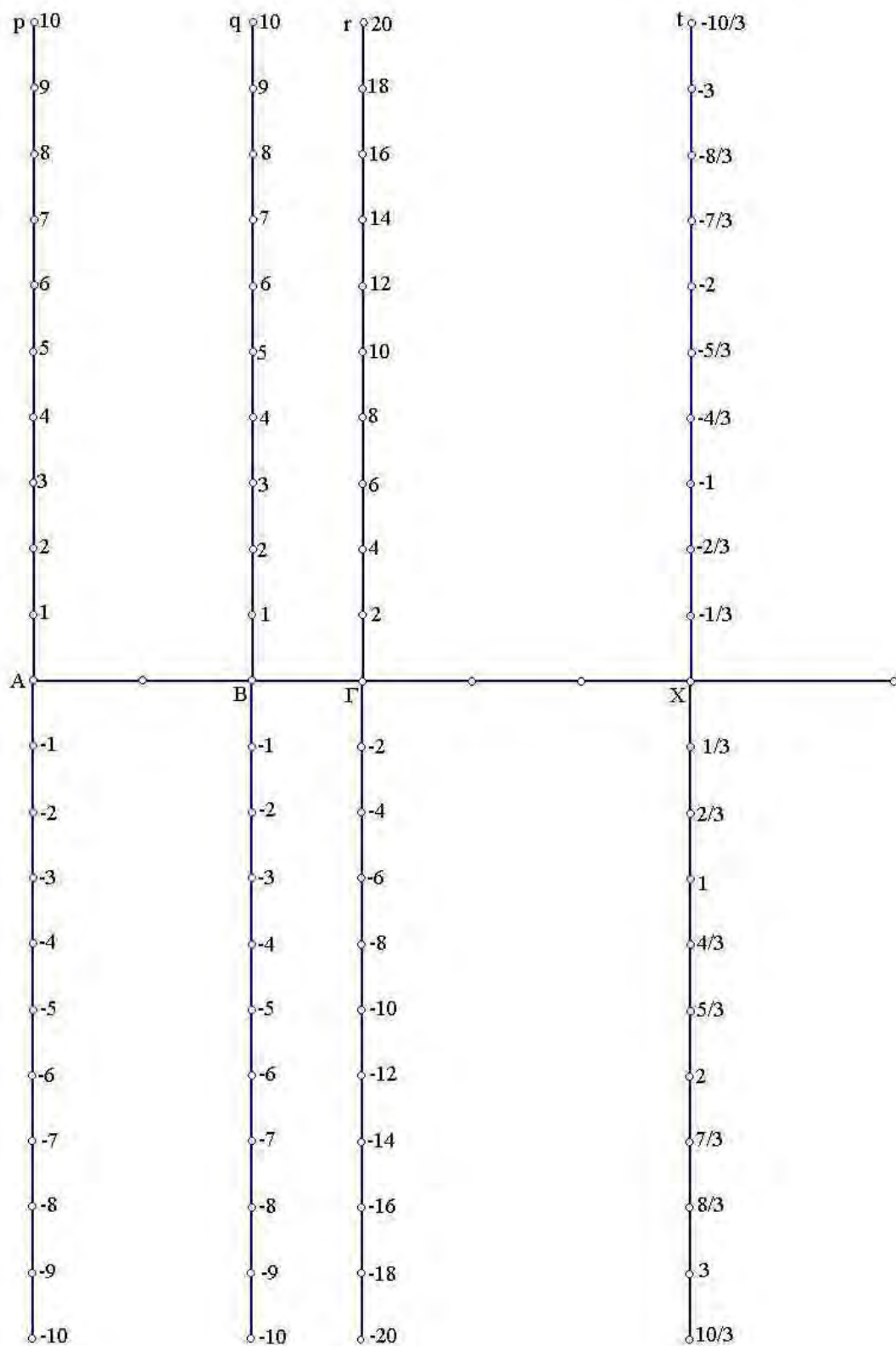
Σχήμα 133. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες ΒΓ, ΔΓ, Αq και Αρ, αντίστοιχα.

$AB' = \beta$ ,  $\Gamma\Gamma' = \gamma$  και  $B\Delta' = \delta$ . Η  $A'\Delta'$  τέμνει την  $AB$  στο  $M$ . Η  $MB'$  τέμνει τον  $Aq$  στο  $Y'$ . Η τιμή  $t$  υπολογίζεται παίρνοντας τη  $Y'\Gamma'$  έτσι ώστε να τέμνει τον  $\Gamma w$  στο  $X'$  με  $\Gamma X' = t$ .

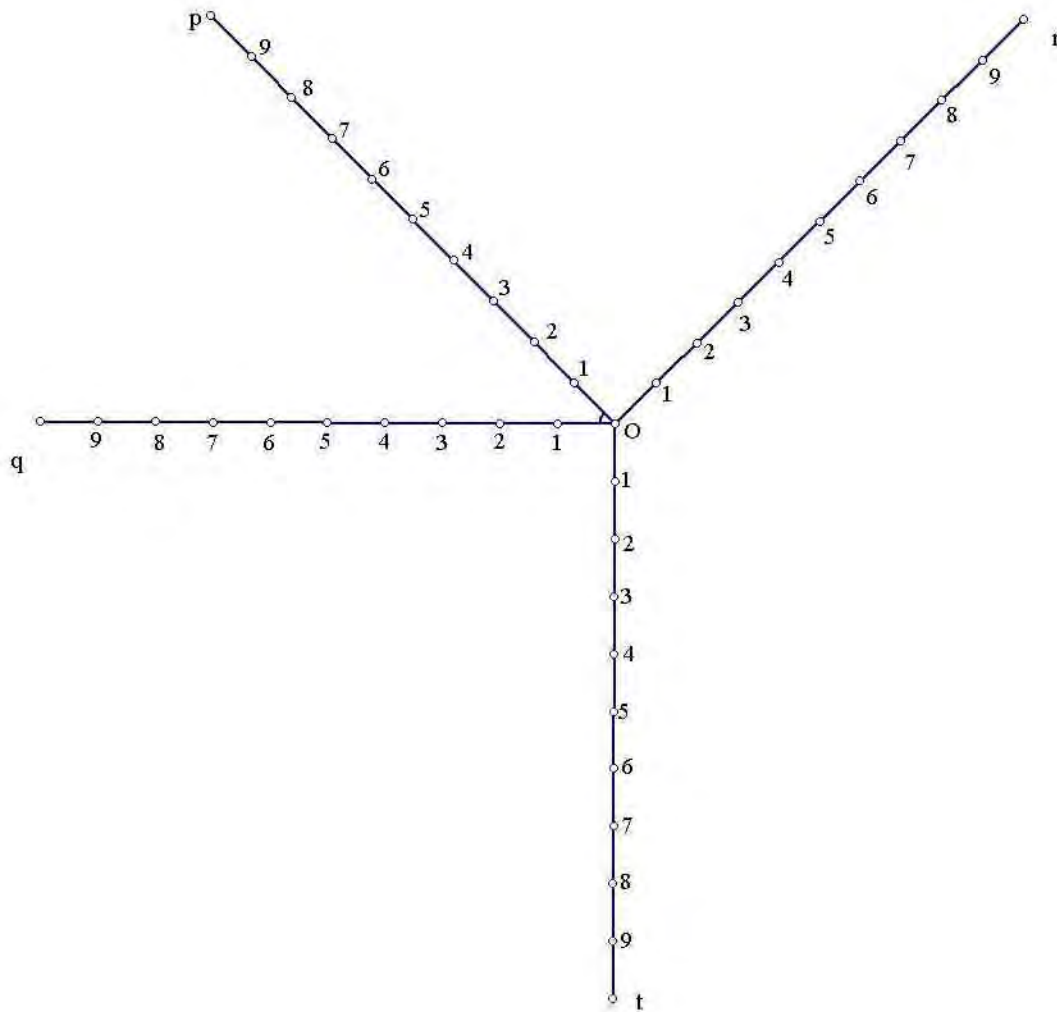
Στην περίπτωση που θέλουμε να επιλύσουμε τον τύπο  $\alpha\beta\gamma = \delta\epsilon t$  έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Παίρνουμε άξονες  $A\rho$ ,  $Aq$  έτσι ώστε  $\rho\hat{A}q = \varphi$  με  $\varphi$  γνωστό μέτρο γωνίας (βλ. Σχήμα 138 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 77). Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και άξονες  $Br$ ,  $Bt$  έτσι ώστε  $r\hat{B}t = \varphi$  και  $Br \parallel Aq$ . Παίρνουμε τμήμα  $A\Gamma$  και άξονες  $\Gamma w$ ,  $\Gamma x$  έτσι ώστε  $w\hat{\Gamma}x = 180^\circ - \varphi$  και  $\Gamma x \parallel Aq$ . Ακόμη παίρνουμε άξονα  $Az$  έτσι ώστε  $z\hat{A}q = 180^\circ - \varphi$ . Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  και  $t$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες  $A\rho$ ,  $Br$ ,  $\Gamma w$ ,  $Bt$ ,  $\Gamma x$  και  $Az$ . Παίρνουμε  $AA' = \alpha$ ,  $BB' = \beta$ ,  $\Gamma\Gamma' = \gamma$ ,  $B\Delta' = \delta$  και  $\Gamma E' = \epsilon$ . Αν η  $A'\Delta'$  τέμνει την  $AB$  στο  $M$  και η  $MB'$  τέμνει τον  $Aq$  στο  $Y$  τότε η  $YE'$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $N$ . Τότε, η  $\Gamma'N$  τέμνει τον  $Az$  στο  $X$  με  $AX = t$ .

Γενικότερα, αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta \dots \gamma = \delta\epsilon \dots \zeta t$  έχουμε το παρακάτω κυκλικό νομογράφημα. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τους παρακάτω τύπους:

$$\alpha\beta = \gamma t \text{ και } \alpha\beta\gamma = \delta t.$$



Σχήμα 134. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες Αρ, Γρ, Βq και Χt, αντίστοιχα.



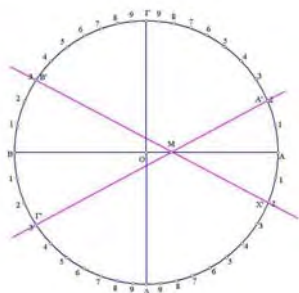
Σχήμα 135. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες  $O_p$ ,  $O_r$ ,  $O_q$  και  $O_t$  αντίστοιχα.

Η επίλυση του πρώτου τύπου γίνεται με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $r$  (βλ. Σχήματα 136, 139 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 78). Φέρνουμε διαμέτρους  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  έτσι ώστε  $AB \perp \Gamma\Delta$ . Στα τόξα  $\widehat{A\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Delta}$ ,  $\widehat{A\Delta}$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$ , αντίστοιχα. Τα τόξα διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται ως 2τοξεφα,  $180^\circ$ -2τοξεφβ,  $180^\circ+2$ τοξεφγ και  $-2$ τοξεφτ, αντίστοιχα. Παίρνουμε  $AA'=\alpha$ ,  $BB'=\beta$  και  $B\Gamma'=\gamma$ . Η  $A'\Gamma'$  τέμνει το  $AB$  στο σημείο  $M$ . Τότε, η  $MB'$  τέμνει το τόξο  $\widehat{\Delta A}$  στο  $X'$  με  $AX'=t$ .

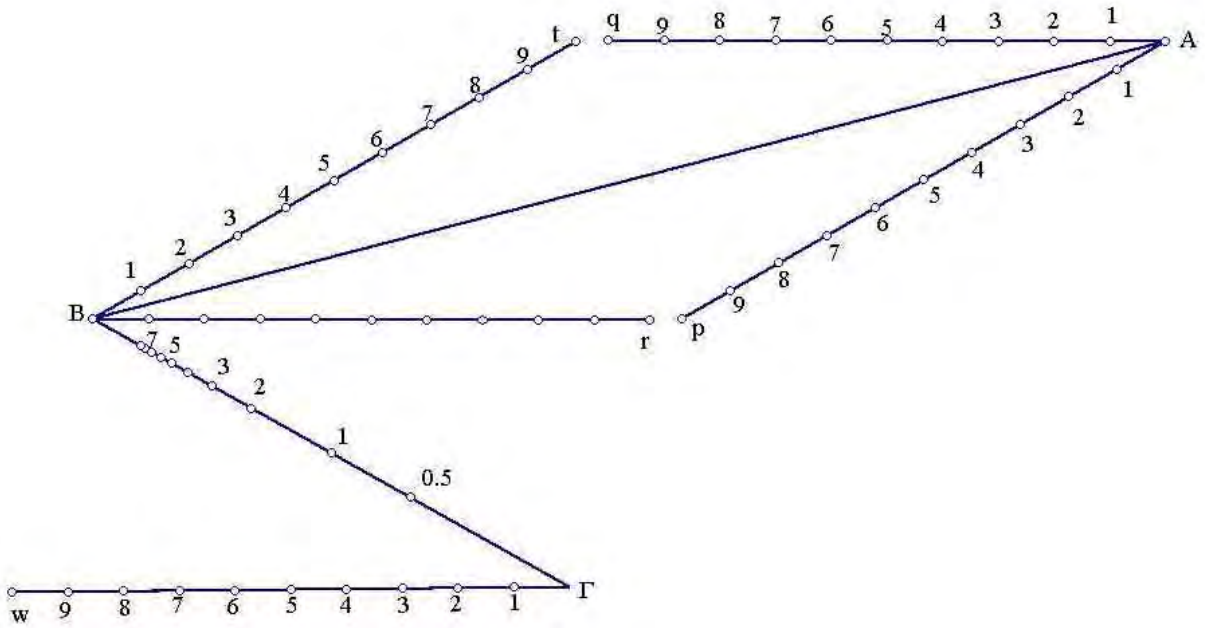
Απόδειξη. Στο τρίγωνο  $OA'M$  ισχύει ότι

$$A\hat{M}A' = \frac{AA'+B\Gamma'}{2} \text{ και } O\hat{A}'M = \frac{B\Gamma'-AA'}{2},$$

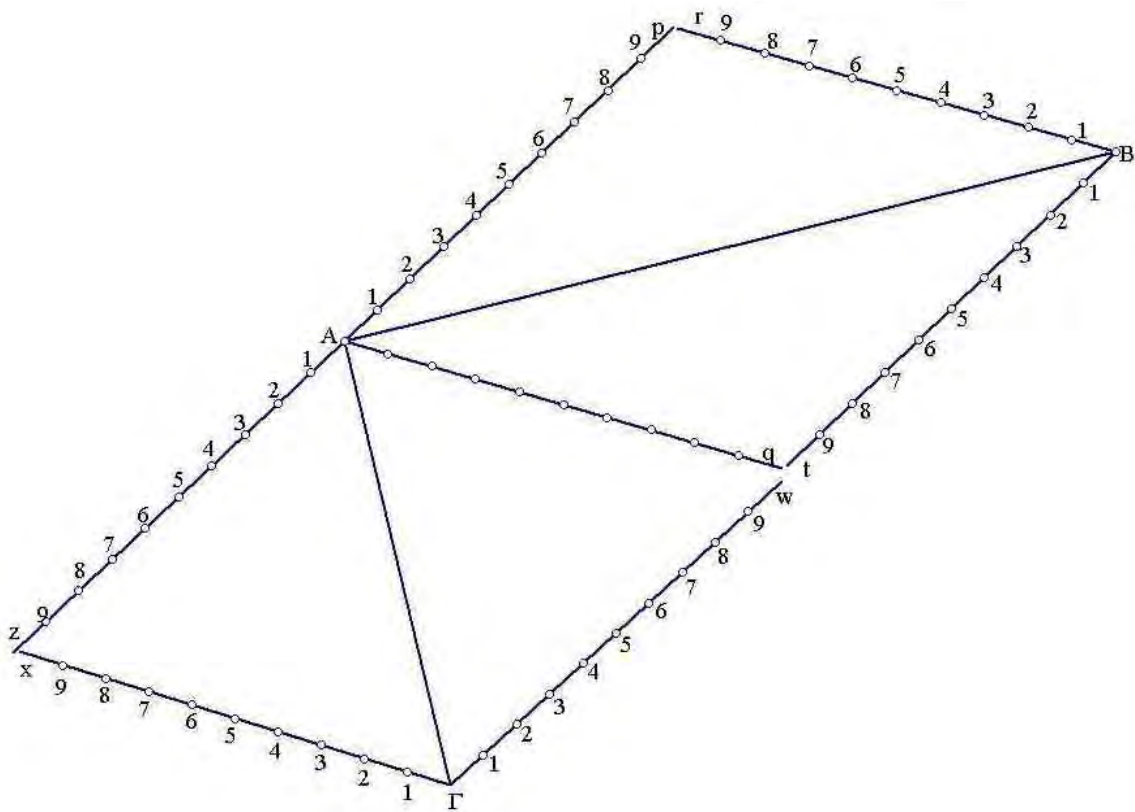
$$\text{οπότε } OM = OA' \frac{\eta\mu\left(\frac{B\Gamma'-AA'}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B\Gamma'+AA'}{2}\right)}$$



Σχήμα 136.



Σχήμα 137. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες Bt, Aq, BΓ, Ap και Γw, αντίστοιχα.

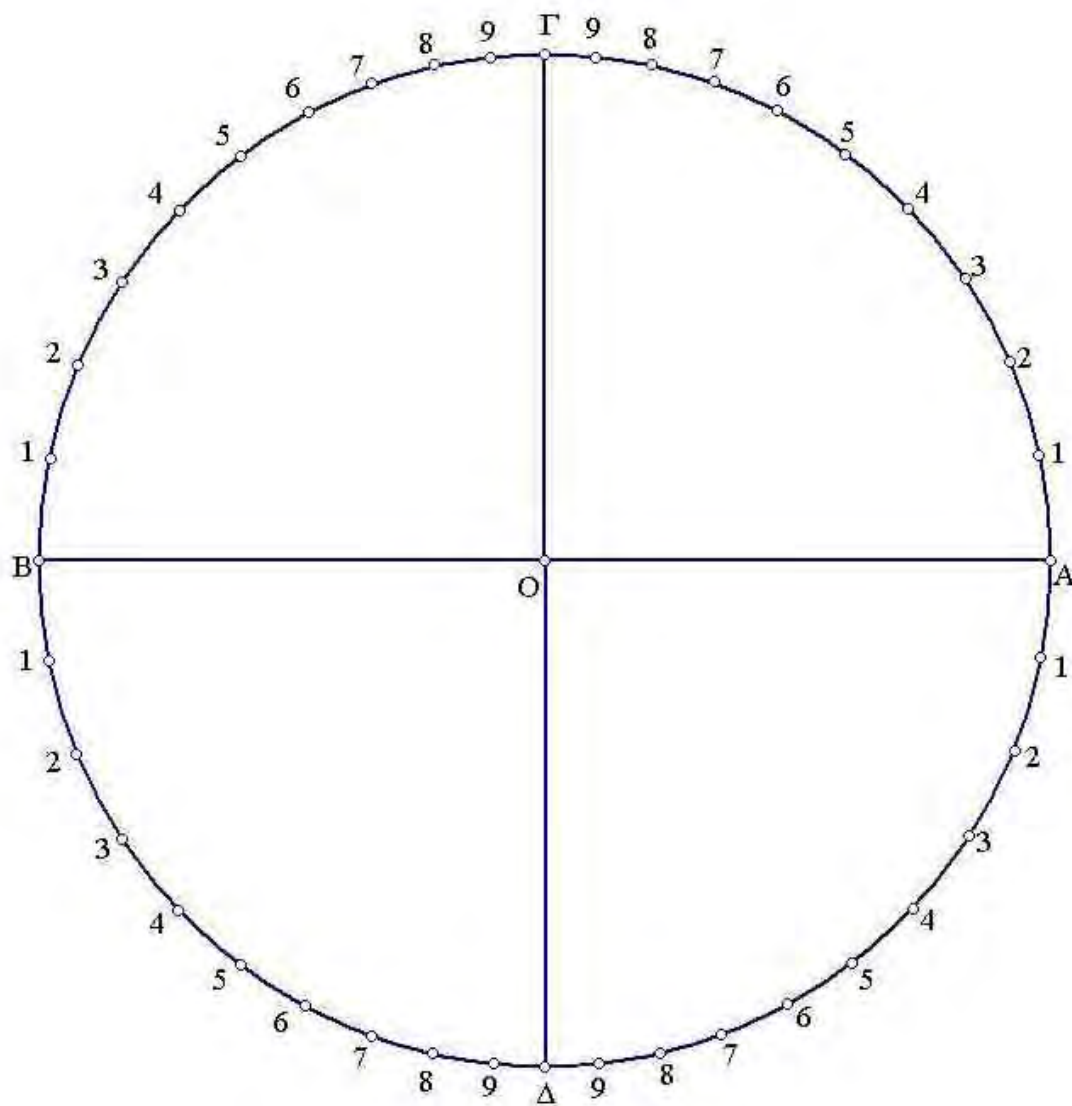


Σχήμα 138. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\epsilon t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες Ap, Br, Γw, Bt, Γx και Az, αντίστοιχα.



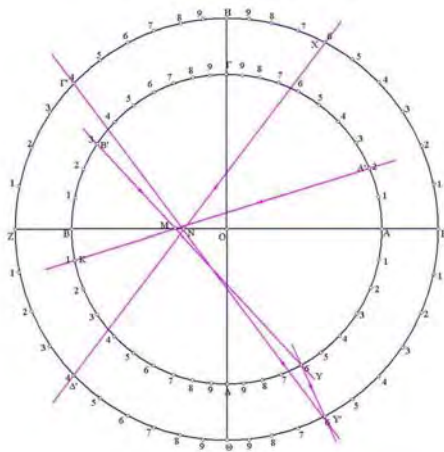
Όμοια έχουμε ότι  $OM=OX \frac{\eta\mu\left(\frac{BB'-AX'}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{BB'+AX'}{2}\right)}$ .

Τότε, έχουμε  $\alpha\beta=\gamma\tau$ .



Σχήμα 139. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta=\gamma\tau$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\tau$  διαβάζονται στα τόξα  $\widehat{A\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Delta}$  και  $\widehat{A\Delta}$ , αντίστοιχα.

Στην περίπτωση του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta t$  έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $r_1, r_2$  έτσι ώστε  $r_1 < r_2$  (βλ. Σχήματα 140, 141 και στο Παράρτημα στα Σχήματα 79,80). Στον κύκλο με ακτίνα  $r_1$ , φέρνουμε διαμέτρους  $AB, \Gamma\Delta$  έτσι ώστε  $AB \perp \Gamma\Delta$ . Προεκτείνοντας τις παραπάνω διαμέτρους, τέμνουν τον κύκλο με ακτίνα  $r_2$  στα σημεία  $E, Z, H$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Στα τόξα  $\widehat{A\Gamma}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{B\Delta}, \widehat{A\Delta}$  και  $\widehat{HE}$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $\delta$ , αντίστοιχα. Τα τόξα διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta$  και  $t$  διαβάσκονται ως 2τοξεφα,  $180^\circ-2\text{τοξεφ}\beta, 180^\circ-2\text{τοξεφ}\gamma, 180^\circ+\text{τοξεφ}\delta, -2\text{τοξεφ}(\alpha\beta)$  και  $2\text{τοξεφ}t$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 140.

Παίρνουμε  $AA'=\alpha, BB'=\beta, Z\Gamma'=\gamma$  και  $E\Delta'=\delta$ . Επιλέγοντας  $BK=1$ , έχουμε ότι η  $A'K$  τέμνει το  $AB$  στο σημείο  $M$ . Ακόμη, η  $MB'$  τέμνει το  $\widehat{A\Delta}$  στο  $Y$  με  $AY=y$ . Παίρνοντας  $EY'=y$  έχουμε ότι η  $Y'\Gamma'$  τέμνει το  $AB$  στο  $N$ . Η  $N\Delta'$  τέμνει το τόξο  $\widehat{E\Theta}$  στο  $X$  με  $EX=t$ .

*Απόδειξη.* Επειδή οι  $A'K, B'Y$  τέμνονται στο  $M$  έχουμε ότι  $y=\alpha\beta$ . Ακόμη ισχύει  $\gamma\gamma=\delta t$ .

Άρα έχουμε  $\alpha\beta\gamma=\delta t$ .

Τα παραπάνω νομογραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρύτερα διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots, \epsilon$  και  $t$  ως  $f(\alpha), g(\beta), \dots, h(\gamma), k(\delta), \dots, l(\epsilon)$  και  $p(t)$ , αντίστοιχα, όπου οι  $f, g, \dots, h, k, \dots, l, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις.

## 6.6 Γενικές εξισώσεις με γινόμενο.

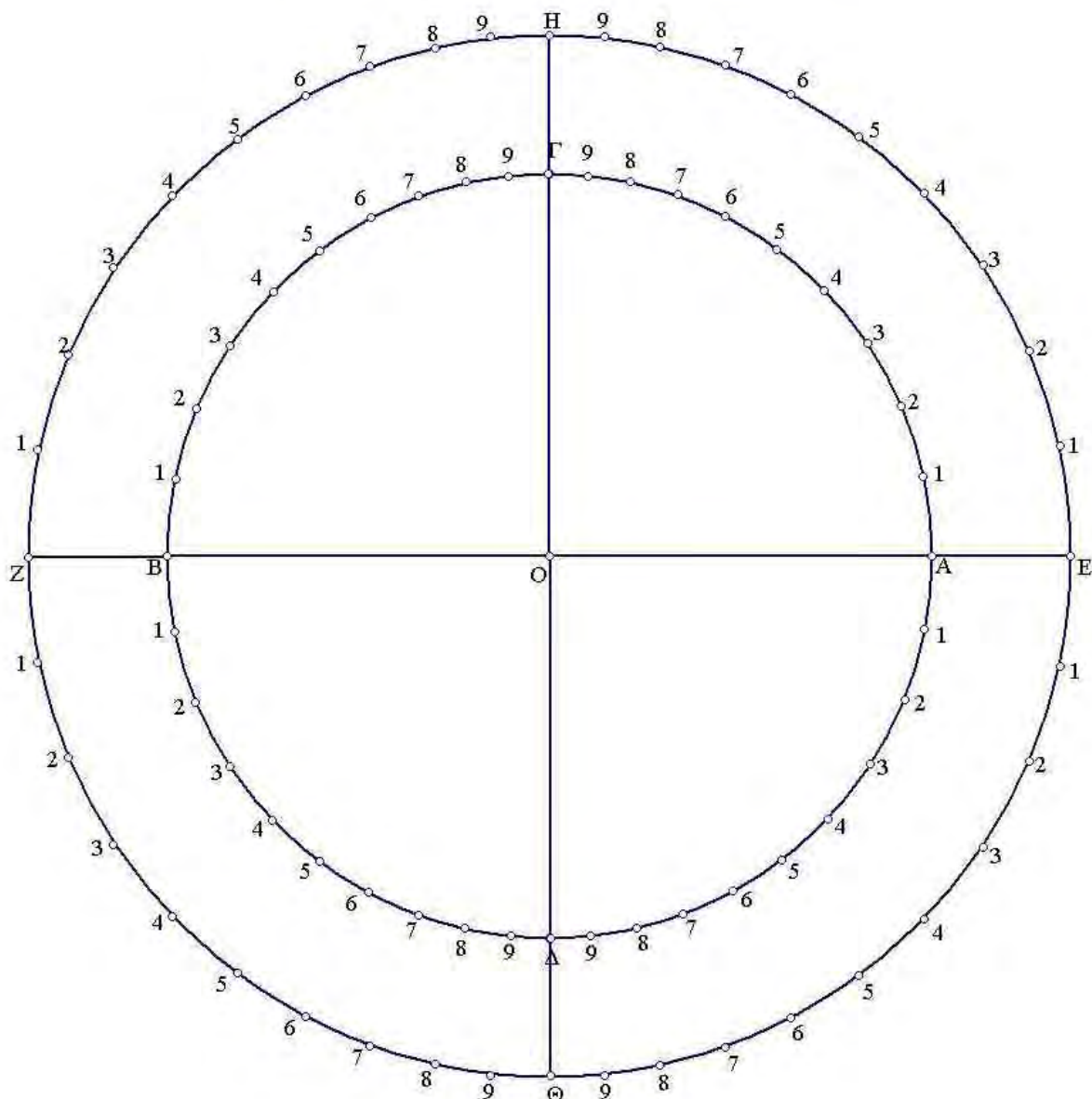
Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε νομογραφήματα για την επίλυση γενικών εξισώσεων γινομένου δεδομένης μορφής. Για διευκόλυνση του αναγνώστη έχουμε εξειδικεύσει πολλές από αυτές σε απλούστερες που συναντά κανείς, συχνά, ιδίως σε άλλες επιστήμες όπου χρειάζονται έτοιμα εξειδικευμένα νομογραφήματα

Αρχικά μελετάμε το νομογράφημα για τον τύπο  $f(\alpha)+g(\beta)h(\gamma)=p(t)$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδειγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως τις ταυτοτικές έχουμε τον τύπο  $\alpha+\beta\gamma=t$ . Παίρνουμε σημεία  $A, B, \Gamma$  συνευθειακά και τους άξονες  $A\rho, B\sigma, \Gamma\tau \perp A\Gamma$  (βλ. Σχήμα 142 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 81). Παίρνουμε ημιευθεία  $B\chi$  η οποία τέμνει τον  $A\rho$  στο  $\Delta$ . Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται στους άξονες  $\Gamma\tau, \Delta A$  και  $B\Delta$ . Η τιμή  $\gamma$  στο σημείο  $\Gamma'$  επιλέγεται να χωρίζει

το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Delta$  σε λόγο  $\frac{B\Gamma'}{\Gamma'\Delta}=\gamma$ . Το  $X$  χωρίζει το  $B\Gamma$  στο μέσο του. Παίρνουμε άξονα  $Xt \perp A\Gamma$  και τον

διαβαθμίζουμε με μονάδα μέτρησης ίση με το μισό της αρχικής. Παίρνουμε  $\Gamma A'=\alpha, \Delta B'=\beta$  και  $B\Gamma'=\gamma$ . Η  $B'\Gamma'$  τέμνει τον  $B\sigma$  στο  $Y$ . Η  $Y\Gamma'$  τέμνει τον  $Xt$  στο  $X'$  με  $XX'=t$ . Άρα έχουμε  $\alpha+\beta\gamma=t$ .

Άλλος τύπος είναι ο  $f(\alpha)g(\beta)+h(\gamma)p(t)=1$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδειγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως τις ταυτοτικές έχουμε τον τύπο  $\alpha\beta+\gamma t=1$ . Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $x=-1, y=-2x$  στο  $[-1,0)$ ,  $x=1$  και  $y=1-x$  στο  $[0,1]$  (βλ. Σχήμα 144 και στο Παράρτημα



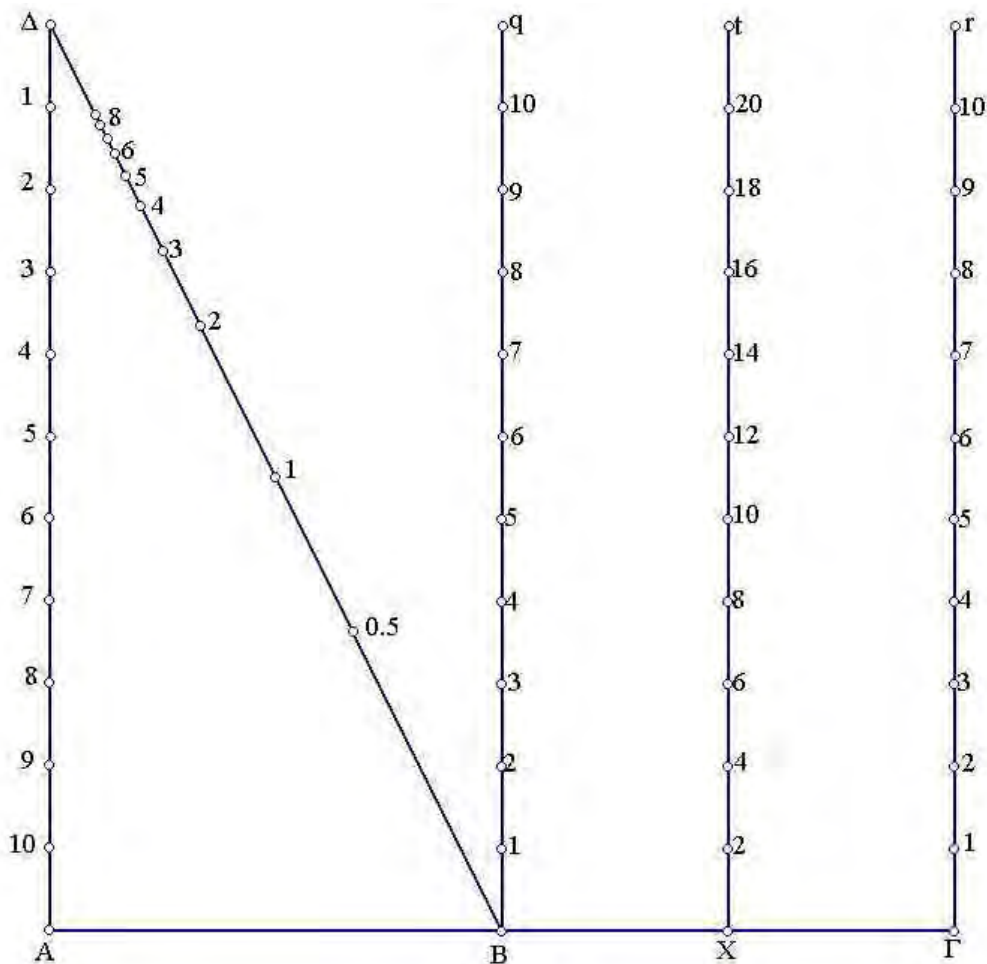
Σχήμα 141. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\det$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  και  $t$  διαβάζονται στα τόξα  $\widehat{A\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Delta}$ ,  $\widehat{A\Delta}$ ,  $\widehat{H\Theta}$  και  $\widehat{E\Theta}$ , αντίστοιχα.

στο Σχήμα 81). Οι ευθείες  $x=-1$  και  $x=1$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $O_1, O_2$ , αντίστοιχα. Ακόμη η ευθεία  $y=-x$  τέμνει την ευθεία  $x=-1$  στο  $O_3$  ενώ η ευθεία  $y=1-x$  τον άξονα των  $y$  στο  $O_4$ . Ο άξονας των  $y$  και όλες οι ευθείες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στις ευθείες  $x=-1, x=1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha, \gamma$ , παίρνοντας  $O_1A=\alpha, O_2\Gamma=\gamma$ . Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται ως  $2-\alpha$  ενώ η τιμή  $\beta$  στο σημείο B επιλέγεται να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $OO_3$  σε λόγο  $\frac{O\Gamma'}{\Gamma'O_3}=\beta$ . Η BA τέμνει τον άξονα των  $y$  στο Y. Η YΓ τέμνει την ευθεία  $y=1-x$  στο X με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Η

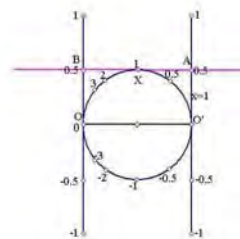
τιμή  $\frac{x}{1-x}$  είναι η ζητούμενη.

Στη συνέχεια, μελετάμε το νομογράφημα για τον τύπο  $f(\alpha)+g(\beta)h(t)=p(t)$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις συναρτήσεις  $f, g, p$  ως τις ταυτοτικές ενώ την  $h$  ως  $h(t)=t^2$ , έχουμε τον τύπο  $\alpha+\beta t^2=t$ . Η παρακάτω εξίσωση επιλύεται με τα νομογραφήματα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (βλέπε σελίδα 33) διαβάζοντας τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  ως  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{\beta}{\alpha}$ , αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, έχουμε το νομογράφημα όπου

εμφανίζεται ένας κύκλος (βλέπε σελίδα 37). Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$  και τον κύκλο  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$  (βλ. Σχήματα 143, 145 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 83). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία  $x=1$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=1$  και στον άξονα  $y$ , αντίστοιχα. Παίρνουμε  $O'A=\alpha$  και  $OB=\beta$ . Η  $AB$  τέμνει τον κύκλο στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι η ζητούμενη τιμή.



Σχήμα 142. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha+\beta\gamma=t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha\beta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες  $\Gamma\gamma$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $B\alpha$ ,  $B\gamma$  και  $Xt$ , αντίστοιχα.



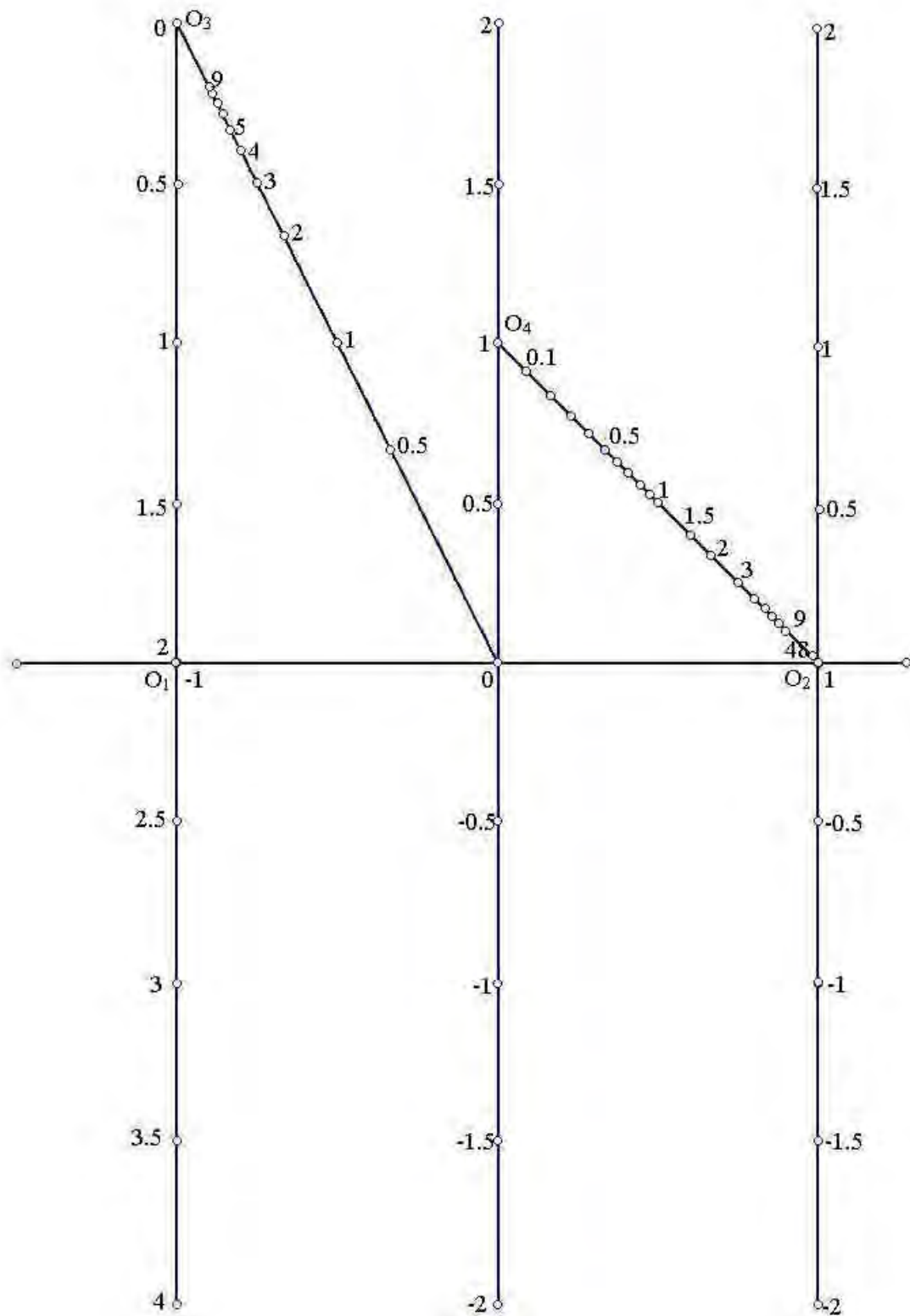
Σχήμα 143.

Απόδειξη. Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=(\alpha-\beta)x+\beta$ , οπότε ισχύει  $\frac{y}{x}=\alpha+\beta\frac{1-x}{x}$ .

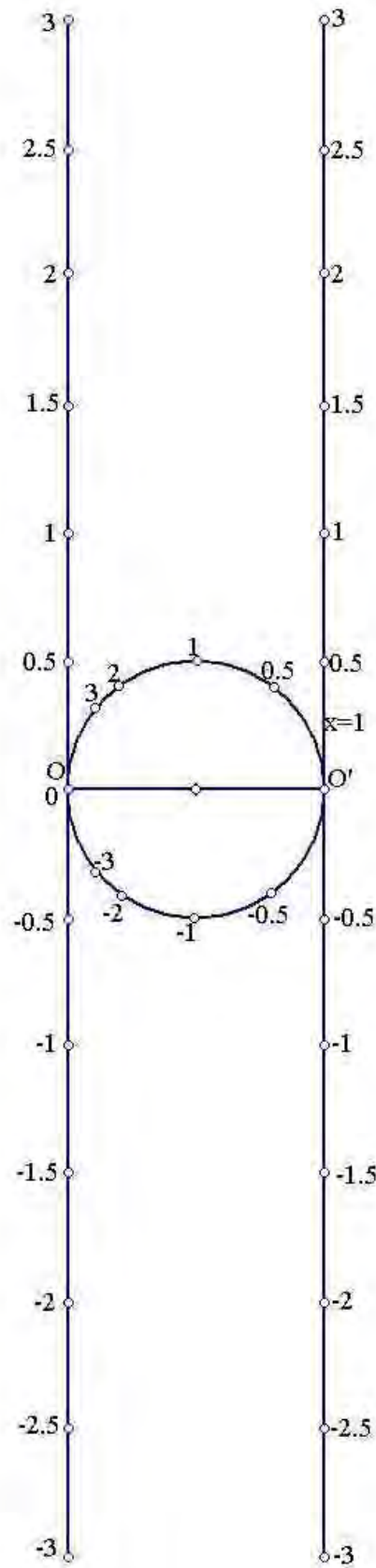
Επίσης, από τον κύκλο έχουμε  $\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{1-x}{x}$ ,

Οπότε

$$\alpha+\beta\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{y}{x}.$$



Σχήμα 144. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha\beta$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες  $O_3O_1$ ,  $OO_3$ , στην ευθεία  $x=1$ , στον άξονα των  $\gamma$  και στον  $O_4O_2$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 145. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha + \beta^2 = t$ . Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=1$  και στον άξονα των  $y$ , αντίστοιχα.

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται στη μορφή  $f(\alpha)g(\beta)+h(\gamma)p(t)=q(t)$  όπου οι  $f, g, p, h$  και  $q$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις συναρτήσεις  $f, g, h$  και  $q$  ως ταυτοτικές ενώ την  $p$  ως  $p(t)=t^2$ , έχουμε τον τύπο  $\alpha\beta+\gamma t^2=t$ . Το παρακάτω νομογράφημα βασίζεται σε νομογραφήματα του πολλαπλασιασμού και της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (βλέπε σελίδες 21 και 33 αντίστοιχα). Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις

ευθείες  $x=-1, y=-2x, x=1$  και τον κύκλο  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$  στο  $[0,1]$  (βλ. Σχήματα 146, 148 και στο Παράρτημα στο

Σχήμα 84). Οι ευθείες  $x=-1$  και  $x=1$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $O_1, O_2$  αντίστοιχα. Ακόμη η ευθεία  $y=-2x$  τέμνει την ευθεία  $x=-1$  στο  $O_3$ . Ο άξονας των  $y$  και όλες οι ευθείες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στις ευθείες  $x=-1, x=1$  και στο  $O_3O$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται ως  $2-\alpha$  ενώ η τιμή  $\beta$  στο σημείο  $B$  επιλέγεται να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $O_3O$  σε λόγο  $\frac{O_3B}{BO}=\frac{1}{\beta}$ . Παίρνοντας  $O_1A=\alpha, O_3B=\beta$  και  $O_2\Gamma=\gamma$  έ-

χουμε ότι η  $AB$  τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $Y$  με  $OY=y$ . Η  $Y\Gamma$  τέμνει την υπερβολή στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Η τιμή  $\frac{y}{1-x}$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 146.

Τέλος έχουμε τον τύπο  $f(\alpha)g(\beta)+h(\gamma)p(t)=q(t)+r(\beta)$  όπου οι  $f, g, p, h, q$  και  $r$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις συναρτήσεις  $f, g$  και  $h$  ως τις ταυτοτικές ενώ τις  $p, q$  και  $r$  ως  $p(t)=t^2, q(t)=t^3, r(\beta)=\beta^3$ , έχουμε τον τύπο  $\alpha\beta+\gamma t^2=t^3+\beta^3$  με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $x=-1, x=1$  και τις καμπύλες  $C_\beta: y=-\frac{x^3}{(1+x)^2}$  και  $C_x: y=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$  στα διαστήματα  $(-1,2], [0,1]$  αντί-

στοιχα (βλ. Σχήματα 147, 149 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 85). Οι ευθείες  $x=-1$  και  $x=1$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $O_1, O_2$  αντίστοιχα. Ο άξονας των  $y$  και οι ευθείες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$  και  $\gamma$  διαβάζονται στις ευθείες  $x=-1$  και  $x=1$  αντίστοιχα, ενώ η τιμή  $\beta$  στο σημείο  $B$  με συντεταγμένες  $(x_B, y_B)$  διαβάζεται στη  $C_\beta$  ως  $\frac{x_B}{x_B+1}$ . Παίρνουμε  $O_1A=\alpha$  και  $O_2\Gamma=\gamma$  και  $\beta$  στο σημείο  $B$ . Η  $AB$  τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $Y$ . Η  $Y\Gamma$

τέμνει την  $C_x$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι η ζητούμενη τιμή.

Απόδειξη. Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=(\alpha\beta-\beta^3-\alpha)x+\alpha\beta-\beta^3$ .

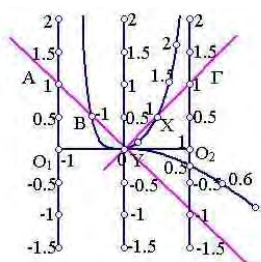
Επίσης, έχουμε  $OY=\alpha\beta-\beta^3$  και η  $Y\Gamma$  έχει εξίσωση  $y=\gamma x+(\alpha\beta-\beta^3)(1-x)$ .

Ακόμη, ισχύει

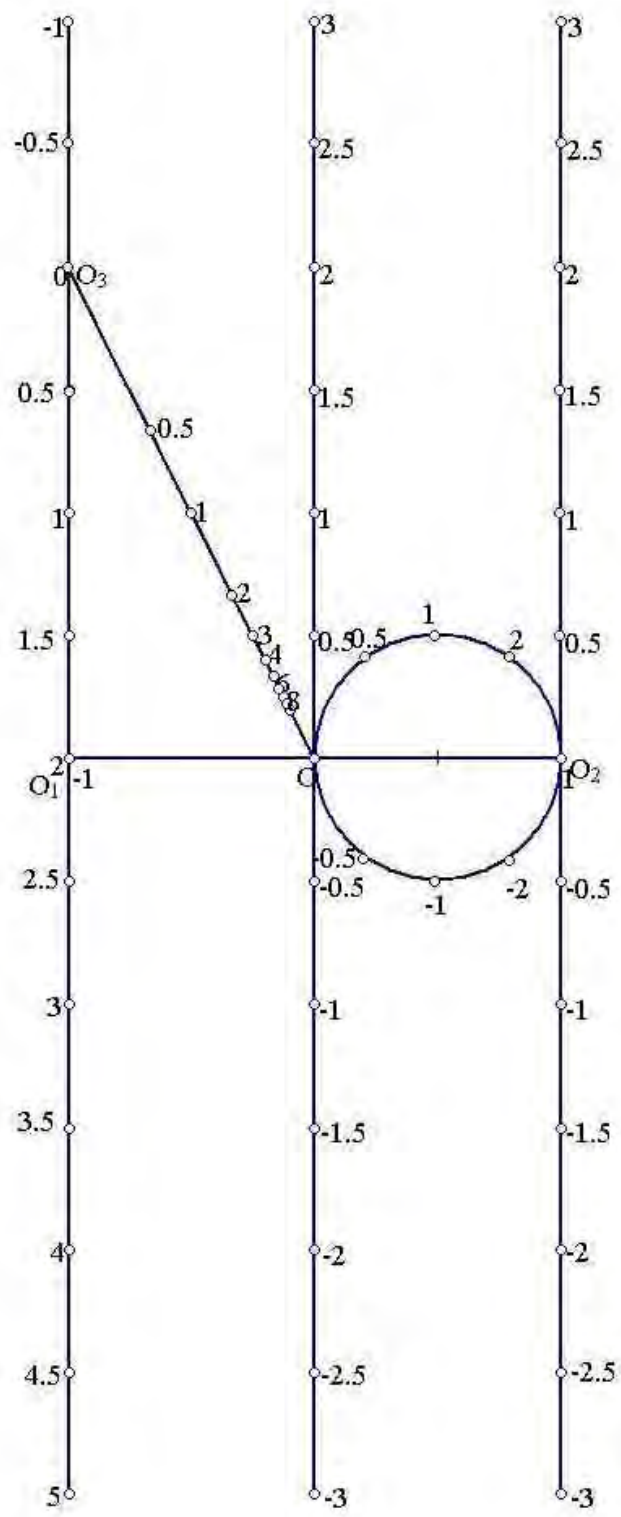
$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{και} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{y}{1-x},$$

οπότε

$$\alpha\beta+\gamma\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{y}{x}\right)^3+\beta^3.$$

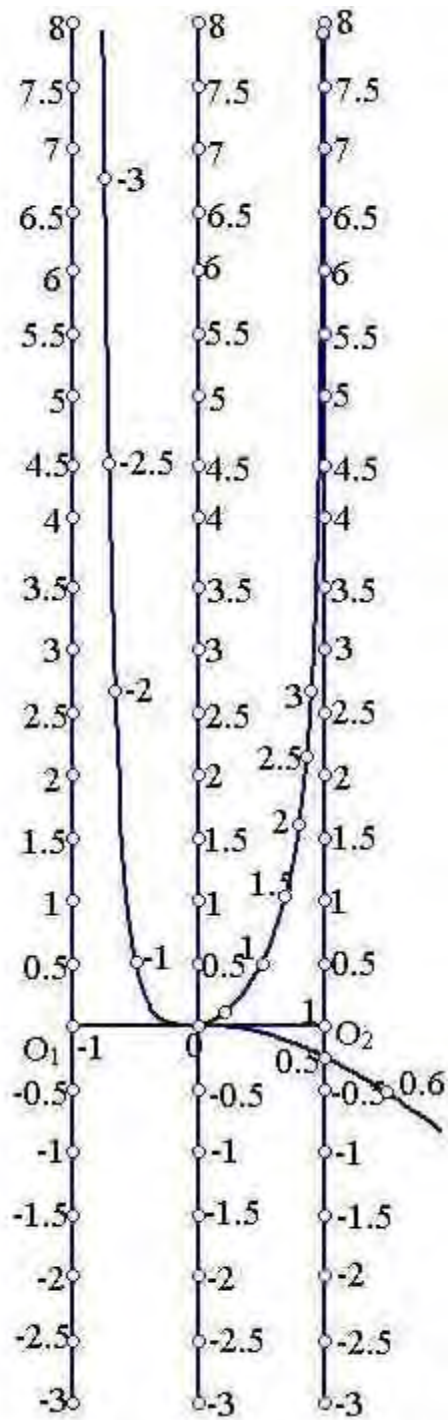


Σχήμα 147.



Σχήμα 148. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta + \gamma^2 = t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha\beta$  και  $t$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=-1$ , στο  $O_3O_1$ , στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$  και στον κύκλο, αντίστοιχα.





Σχήμα 149. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta + \gamma^2 = t^3 + \beta^3$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha\beta$  και  $t$  διαβάζονται στην ευθεία  $x=-1$ , στην καμπύλη  $C_\beta$ , στην ευθεία  $x=1$ , στον άξονα των  $y$  και στην καμπύλη  $C_\alpha$ , αντίστοιχα.

## 6.7 Γενικές εξισώσεις με πηλίκο.

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε νομογραφήματα για την επίλυση γενικών εξισώσεων πηλίκου δεδομένης μορφής. Για διευκόλυνση του αναγνώστη έχουμε εξειδικεύσει πολλές από αυτές σε απλούστερες που συναντά κανείς, συχνά, ιδίως σε άλλες επιστήμες όπου χρειάζονται έτοιμα εξειδικευμένα νομογραφήματα.

Αρχικά μελετάμε το νομογράφημα για τον τύπο  $\frac{f(\alpha)}{g(\beta)} + \frac{1}{h(\gamma)} = \frac{1}{p(t)}$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Παραδείγματος χάριν, αν επιλέξουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως τις ταυτοτικές έχουμε τον τύπο  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{t}$ . Η επί-

λυση του βασίζεται σε νομογραφήματα που επιλύουν τον τύπο  $\frac{1}{t} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  (βλ. σε-

λίδα 11). Έστω  $\theta, \varphi$  γνωστά μέτρα γωνίας με  $\theta > \varphi$ . Παίρνουμε άξονες  $O\rho, O\sigma$  και

$O\tau$  έτσι ώστε  $\rho\hat{O}\sigma = \theta$  και  $\tau\hat{O}\sigma = \varphi$  (βλ. Σχήματα 150, 152 και στο Παράρτημα

στο Σχήμα 86). Παίρνουμε ημιεθεία  $O\chi$  και σημείο της  $O'$ . Παίρνουμε άξονα

$O't \parallel O\sigma$ . Οι άξονες  $O\rho, O\sigma, O\tau$  και  $OO'$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα

μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται, αντίστοιχα,  $OO', O't$  και  $O\rho$ . Οι

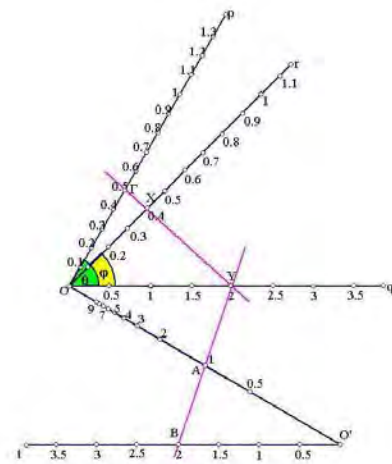
τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται βημ $(\theta - \varphi)$  και γημ $\varphi$  ενώ η τιμή  $\alpha$  στο σημείο  $A$  επιλέγεται

να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $O'O$  σε λόγο  $\frac{O'A}{AO} = \alpha$ . Παίρνοντας  $O'A = \alpha$ ,

$O'B = \beta$  και  $OG = \gamma$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει τον  $O\sigma$  στο  $Y$  με  $OY = \frac{\beta}{\alpha}$ . Η τιμή  $\frac{\beta}{\alpha}$

διαβάσκεται ως  $\frac{\beta}{\alpha}$  ημ $(\theta - \varphi)$ . Η  $Y\Gamma$  τέμνει τον  $O\tau$  στο  $X$  με  $OX = t$ . Η τιμή  $t$  διαβά-

ζεται ως τημ $\theta$ .



Σχήμα 150.

Όμοια εργαζόμαστε για τον τύπο  $\frac{f(\alpha)}{g(\beta)} + \frac{p(t)}{h(\gamma)} = 1$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος

χάριν, αν επιλέξουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως τις ταυτοτικές έχουμε τον

τύπο  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{\gamma} = 1$  με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα

$Oxy$  συντεταγμένων τις ευθείες  $x=1, y=-1$  και  $y=-x$  (βλ. Σχήματα 151, 153

και στο Παράρτημα στο Σχήμα 87). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$

στο  $O_1$  ενώ η ευθεία  $y=-x$  και ο άξονας των  $y$  τέμνουν την ευθεία  $y=-1$  στα

$O_2, O_3$  αντίστοιχα. Οι άξονες των  $x, y$  και οι ευθείες διαβαθμίζονται με την

ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται στους  $OO_2, O_2O_3$  και

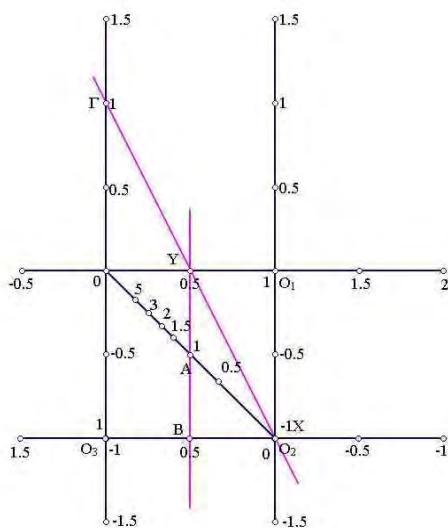
στον άξονα των  $y$ . Η τιμή  $\beta$  διαβάσκεται ως  $1-\beta$  στο σημείο  $B$  ενώ η τιμή  $\alpha$  στο

σημείο  $A$  επιλέγεται να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $O_2O$  σε λόγο

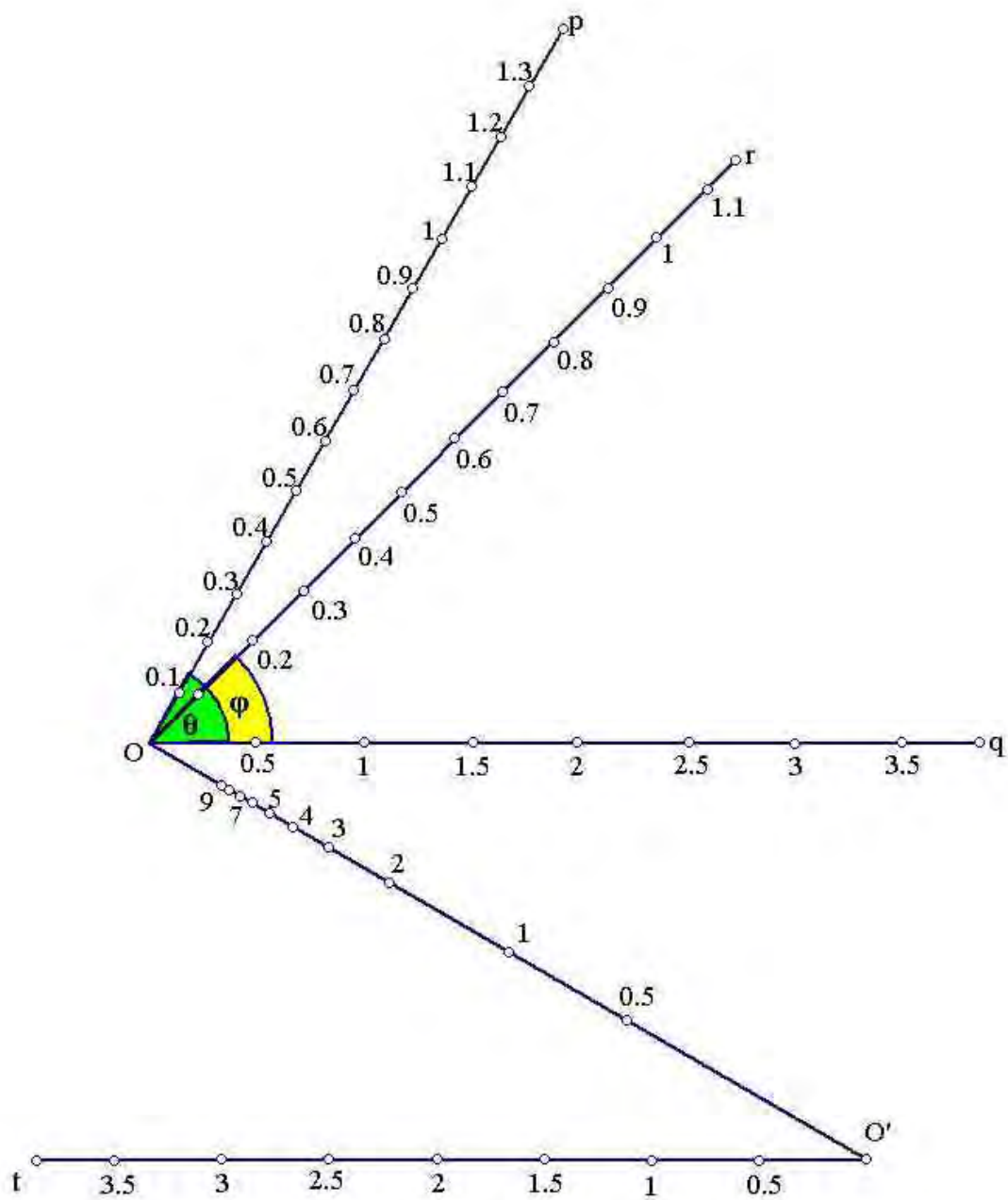
$\frac{O_2A}{AO} = \alpha$ . Παίρνοντας  $O_2A = \alpha$ ,  $O_2B = \beta$  και  $OG = \gamma$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει

τον άξονα των  $x$  στο  $Y$  με  $OY = \frac{\beta}{\alpha}$ . Η  $Y\Gamma$  τέμνει την  $x=1$  στο  $X$ . Η τεταγμέ-

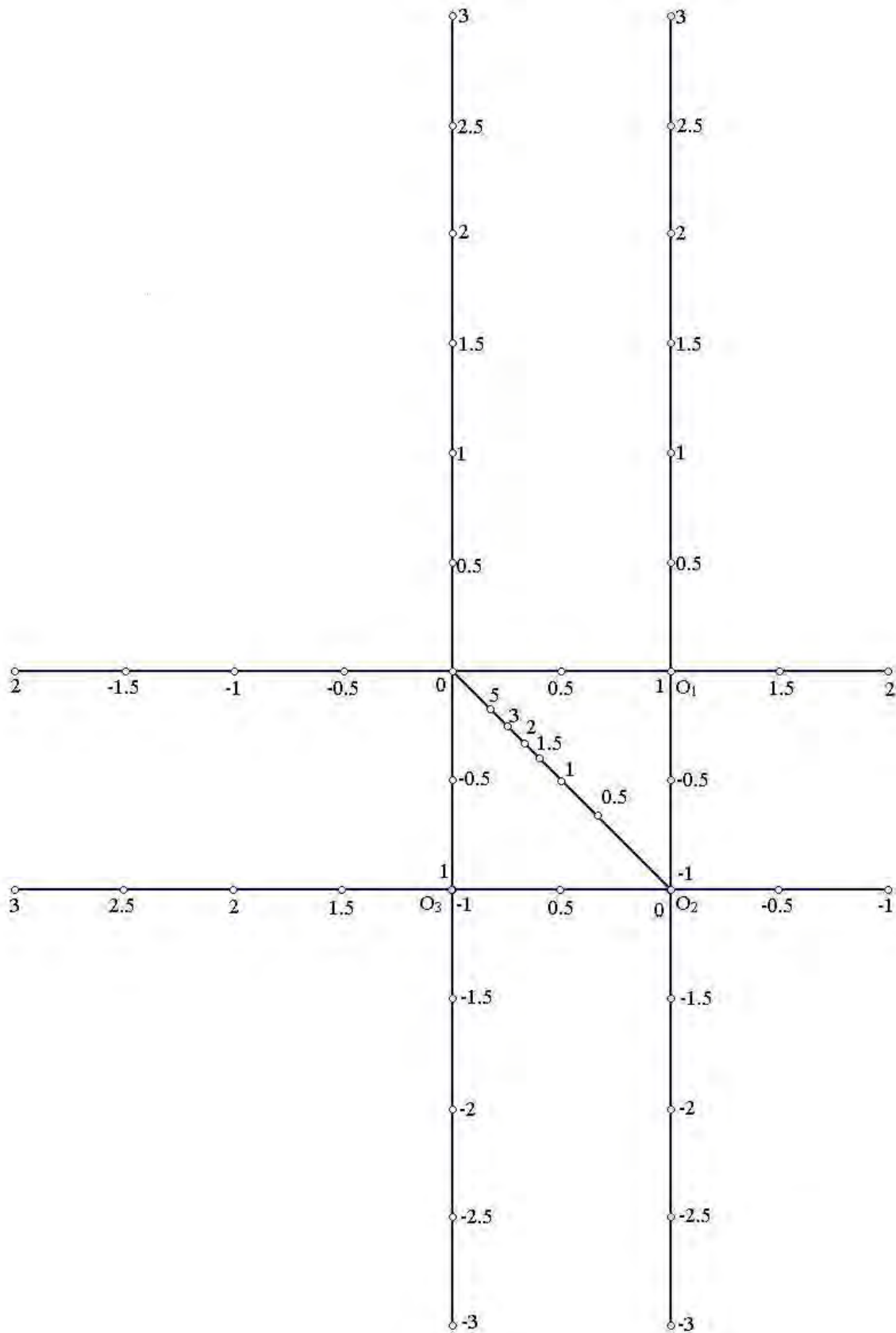
νη του  $X$  είναι η ζητούμενη τιμή.



Σχήμα 151.



Σχήμα 152. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{t}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονες των  $OO'$ ,  $O't$ ,  $Oq$ ,  $Op$  και  $Or$ , αντίστοιχα.

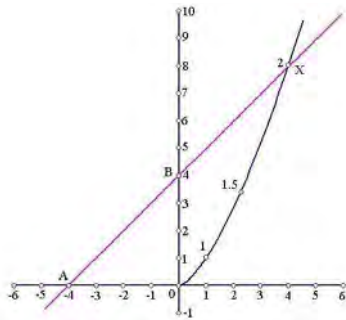


Σχήμα 153. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{\gamma} = 1$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $O_2O_1$ ,  $O_2O_3$ , στον άξονα των  $x$ , στον άξονα των  $y$  και στην ευθεία  $x=1$ , αντιστοίχα.

Τέλος, έχουμε τον τύπο  $\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{h(t)}{g(\beta)} = \frac{1}{p(t)}$  όπου οι  $f, g, h, p$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν,

αν επιλέξουμε τις συναρτήσεις  $f, g, h$  και  $q$  ως τις ταυτοτικές ενώ την  $p$  ως  $p(t)=t^2$ , έχουμε τον τύπο  $\frac{1}{\alpha} + \frac{t}{\beta} = \frac{1}{t^2}$  με το

παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων την καμπύλη  $C: y=\sqrt{x^3}$  (βλ. Σχήματα 154, 156 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 88). Οι άξονες των  $x, y$  διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στους άξονες των  $x, y$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, παίρνοντας  $OA=\alpha$  και  $OB=\beta$ . Η  $AB$  τέμνει την  $C$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι η ζητούμενη τιμή.



Σχήμα 154.

*Απόδειξη.* Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$ .

Η εξίσωση έχει την παραμετρική μορφή

$$x=\frac{\alpha\beta}{\alpha t+\beta} \text{ και } y=\frac{\alpha\beta t}{\alpha t+\beta},$$

οπότε

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{t}{\beta} = \frac{1}{t^2}.$$

## 6.8 Κατασκευή νομογραφήματος οποιουδήποτε τύπου με δυο μεταβλητές $\alpha, \beta$ και τον άγνωστο $t$ .

Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $t$  σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων δυο ευθείες και μια καμπύλη. Στις ευθείες διαβάζουμε κατάλληλα τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  ενώ στην καμπύλη την τιμή  $t$ . Συγκεκριμένα, έχουμε τα παρακάτω παραδείγματα τύπων.

Αρχικά θα κατασκευάσουμε το νομογράφημα για τον υπολογισμό της παράστασης  $\lambda\alpha+\mu\beta$  με  $\lambda, \mu$  σταθερές και η τιμή της. Η παραπάνω τιμή υπολογίζεται με τα νομογραφήματα της πρόσθεσης (βλέπε σελίδα 10). Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων τις ευθείες  $x=1$  και  $x=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  (βλ. Σχήματα 155, 157 και στο Παράρτημα στο Σχή-

μα 89). Οι ευθείες  $x=1$  και  $x=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  τέμνουν τον άξονα των  $x$  στα  $O_1, O_2$ , αντίστοιχα. Ο άξονας των  $y$  και οι ευθείες

διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην  $x=1$ , αντίστοιχα. Παίρνοντας  $OA=\alpha$  και  $O_1B=\beta$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει την  $x$

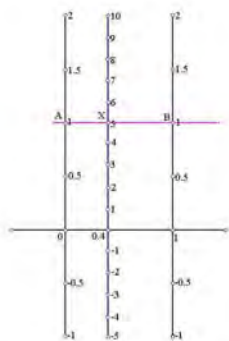
$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  στο  $X$  με τεταγμένη  $y$ . Η τιμή  $y(\lambda+\mu)$  είναι η ζητούμενη.

*Απόδειξη.* Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=(\beta-\alpha)x+\alpha$ .

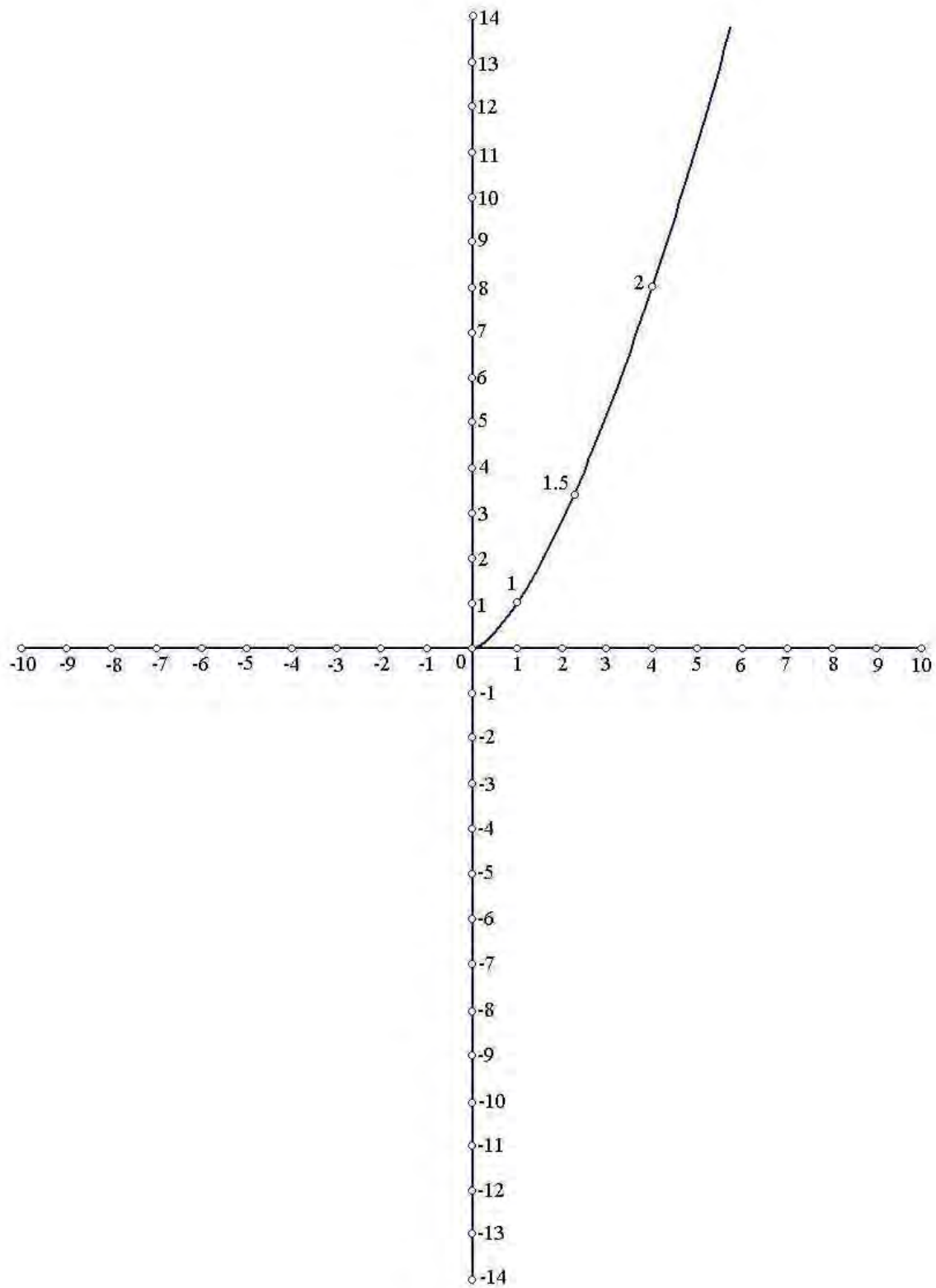
Το σημείο  $X$  έχει τεταγμένη  $y=\frac{\lambda\alpha+\mu\beta}{\lambda+\mu}$ ,

οπότε

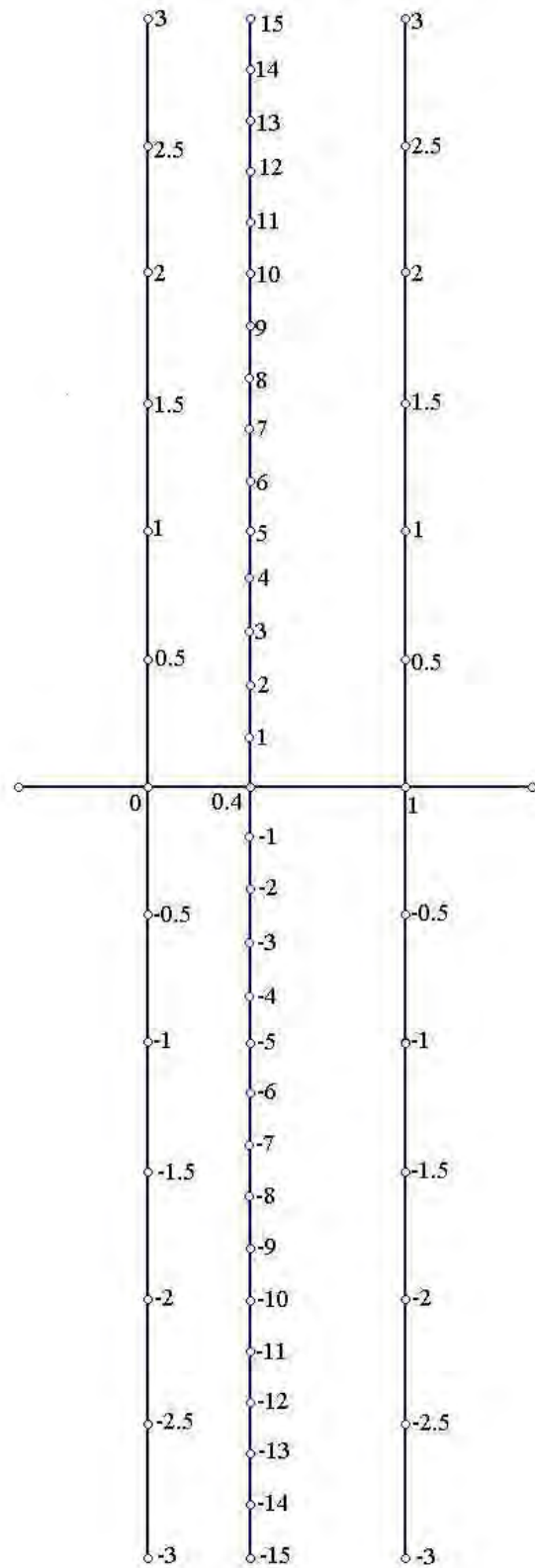
$$t=\lambda\alpha+\mu\beta.$$



Σχήμα 155.



Σχήμα 156. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{1}{\alpha} + \frac{t}{\beta} = \frac{1}{t^2}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $x$ , στον άξονα των  $y$  και στην καμπύλη  $C$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 157. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $t=3\alpha+2\beta$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$  και στην ευθεία  $x=0.4$ , αντίστοιχα.

Ακόμη μπορούμε να κατασκευάσουμε νομογραφήματα για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων. Παραδείγματος χάριν, θα μελετήσουμε το νομογράφημα του τύπου  $\alpha\eta\mu\tau + \beta\sigma\upsilon\tau = 1$ . Ο τύπος αυτός επιλύεται με τα αντίστοιχα νομογραφήματα του κεφαλαίου 4 (βλέπε σελίδα 64) και με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα

Οxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$  και την καμπύλη  $C: r(t) = \left( \frac{\sigma\upsilon\tau}{\eta\mu\tau + \sigma\upsilon\tau}, \frac{1}{\eta\mu\tau + \sigma\upsilon\tau} \right)$  στο

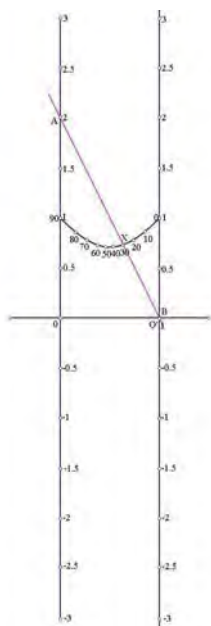
$[0, \frac{\pi}{2}]$  (βλ. Σχήμα 158, 160 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 90). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην  $x=1$  αντίστοιχα. Παίρνοντας  $OA=\alpha$  και  $O'B=\beta$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει την  $C$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Η τιμή  $\text{τοξ}\sigma\upsilon\tau\left(\frac{x}{y}\right)$  είναι η ζητούμενη.

*Απόδειξη.* Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=(\beta-\alpha)x+\alpha$ .

Ακόμη, ισχύει  $\frac{1}{\eta\mu\tau + \sigma\upsilon\tau} = \alpha \left( 1 - \frac{\sigma\upsilon\tau}{\eta\mu\tau + \sigma\upsilon\tau} \right) + \beta \frac{\sigma\upsilon\tau}{\eta\mu\tau + \sigma\upsilon\tau}$ ,

οπότε

$$\alpha\eta\mu\tau + \beta\sigma\upsilon\tau = 1.$$



Σχήμα 158.

Φέροντας την εξίσωση σε ισοδύναμη μορφή μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλο νομογράφημα πιο χρήσιμο σε κάποιες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα για την τριγωνομετρική εξίσωση  $\eta\mu\tau = \alpha + \beta\sigma\upsilon\tau$ , έχουμε το παρακάτω. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$  και την καμπύλη  $C: r(t) = \left( \frac{\sigma\upsilon\tau}{1 + \sigma\upsilon\tau}, \frac{\eta\mu\tau}{1 + \sigma\upsilon\tau} \right)$  στο  $[0, \pi)$  (βλ.

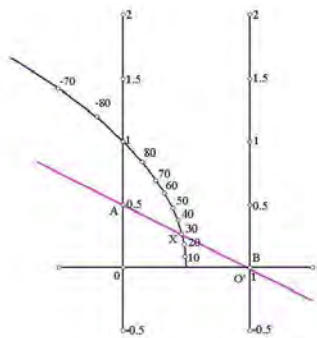
Σχήματα 159, 161 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 91). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και στην  $x=1$  αντίστοιχα. Παίρνοντας  $OA=\alpha$  και  $O'B=\beta$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει την  $C$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Η τιμή  $\text{τοξ}\epsilon\phi\left(\frac{y}{x}\right)$  είναι η ζητούμενη.

*Απόδειξη.* Η  $AB$  έχει εξίσωση  $y=(\beta-\alpha)x+\alpha$ .

Ακόμη, ισχύει  $\frac{\eta\mu\tau}{1 + \sigma\upsilon\tau} = \alpha \left( 1 - \frac{\sigma\upsilon\tau}{1 + \sigma\upsilon\tau} \right) + \beta \frac{\sigma\upsilon\tau}{1 + \sigma\upsilon\tau}$ ,

οπότε

$$\eta\mu\tau = \alpha + \beta\sigma\upsilon\tau.$$



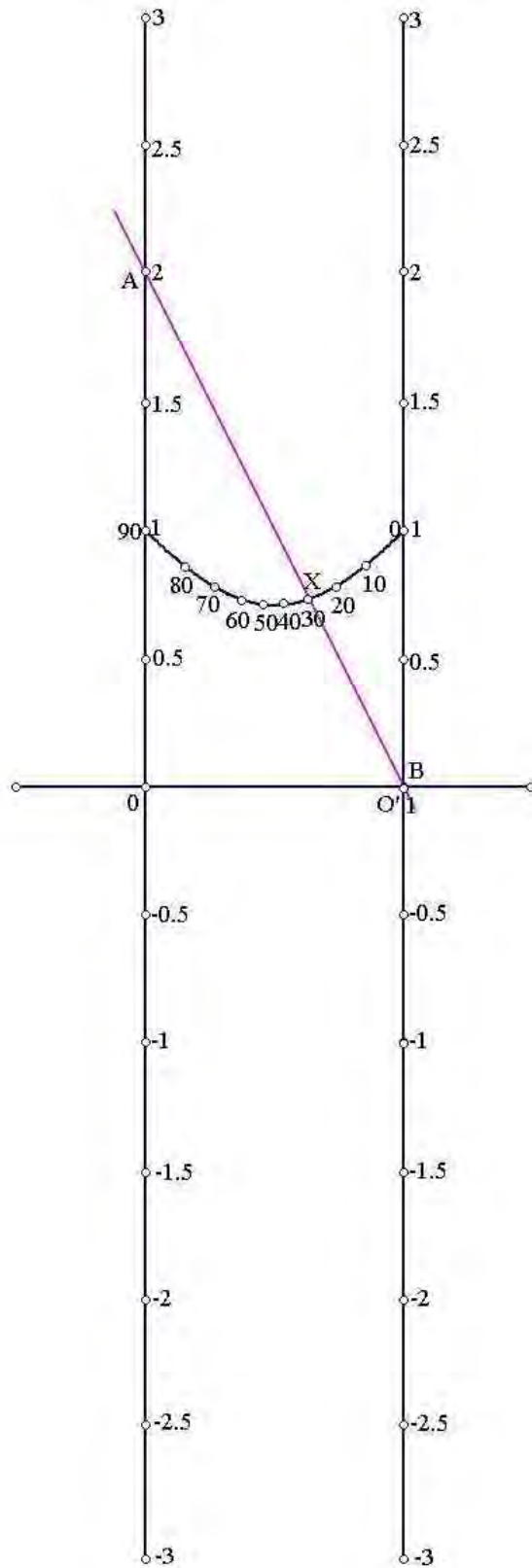
Σχήμα 159.

Στη συνέχεια, έχουμε νομογραφήματα για την επίλυση εκθετικών εξισώσεων. Παραδείγματος χάριν, για τον τύπο  $\beta\tau = \alpha'$  κατασκευάζουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$

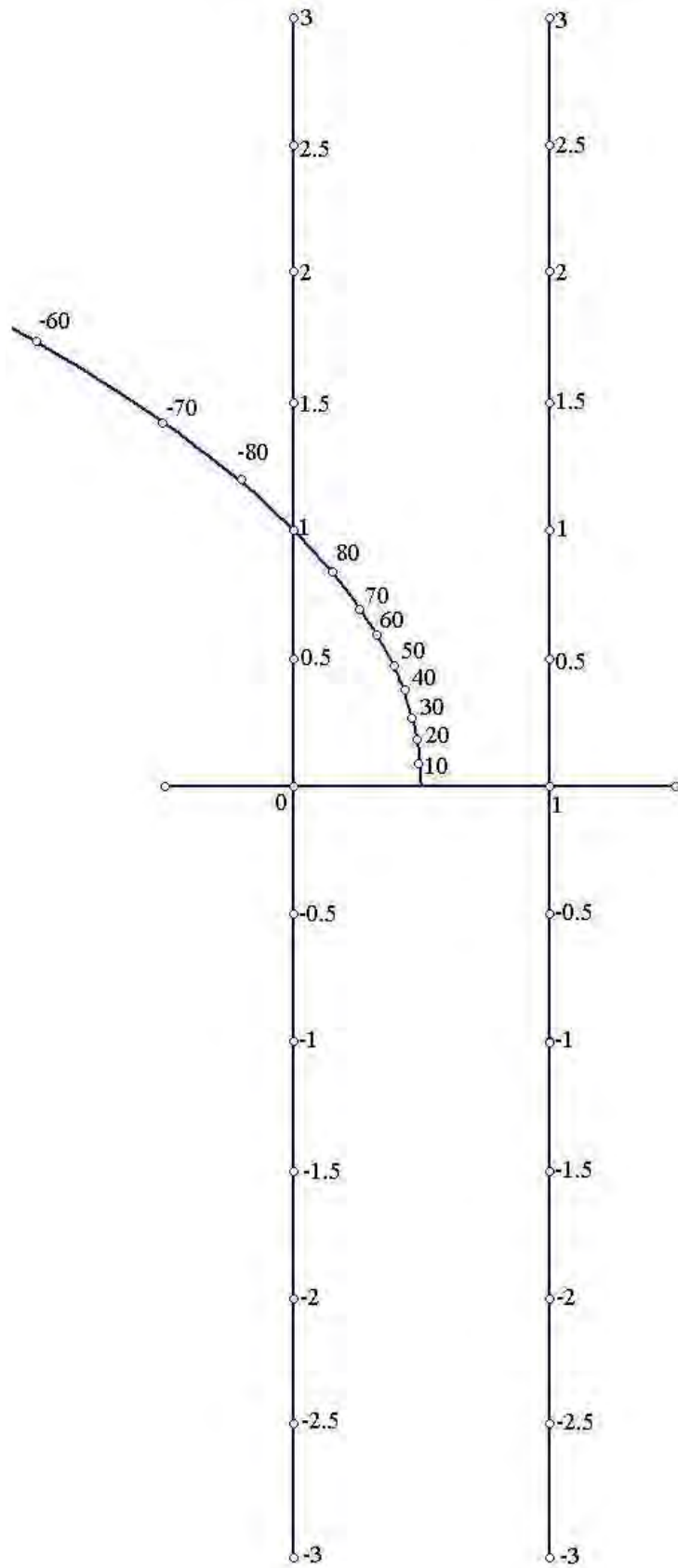
και την καμπύλη  $C: r(t) = \left( \frac{1}{1-t}, -\frac{\log t}{1-t} \right)$  στο  $[0,1)$  (βλ. Σχήματα 162, 164 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 92). Η ευ-

θεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο  $O'$ . Ο άξονας των  $y$  και η ευθεία διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στον άξονα των  $y$  και στην  $x=1$  ως  $\log \alpha, \log \beta$ . Παίρνουμε  $OA=\alpha$  και  $O'B=\beta$  έχουμε ότι η  $AB$  τέμνει την  $C$  στο  $X$  με συντεταγμένες  $(x,y)$ . Η τιμή  $10^{\frac{y}{x}}$  είναι η ζητούμενη.

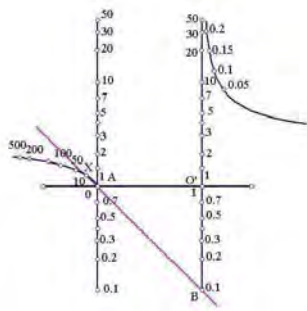




Σχήμα 160. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha t + \beta(1-t) = 1$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$  και στην καμπύλη  $C$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 161. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\eta\mu t = \alpha + \beta \sin t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$  και στην καμπύλη  $C$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 162.

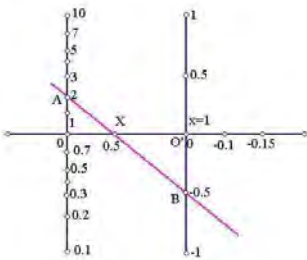
Απόδειξη. Η AB έχει εξίσωση  $y = (\log\beta - \log\alpha)x + \log\alpha$ .

Ακόμη, ισχύει  $-\frac{\log t}{1-t} = \log\alpha \left(1 - \frac{1}{1-t}\right) + \log\beta \frac{1}{1-t}$ ,

οπότε  $\beta t = \alpha'$ .

Τέλος, για τον τύπο  $\alpha' = t^\beta$  έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων την ευθεία  $x=1$  (βλ. Σχήματα 163, 165 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 96). Η ευθεία  $x=1$  τέμνει τον άξονα των x στο O'. Οι άξονες των x, y και η ευθεία διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές t, α, β διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των x, y και στην  $x=1$ . Οι τιμές α και t διαβάζονται ως  $\log\alpha$  και  $\frac{\log t}{\log t-t}$ . Παίρνοντας  $OA = \alpha$  και

$OB = \beta$  έχουμε ότι η AB τέμνει τον άξονα των x στο X με  $OX = t$ .



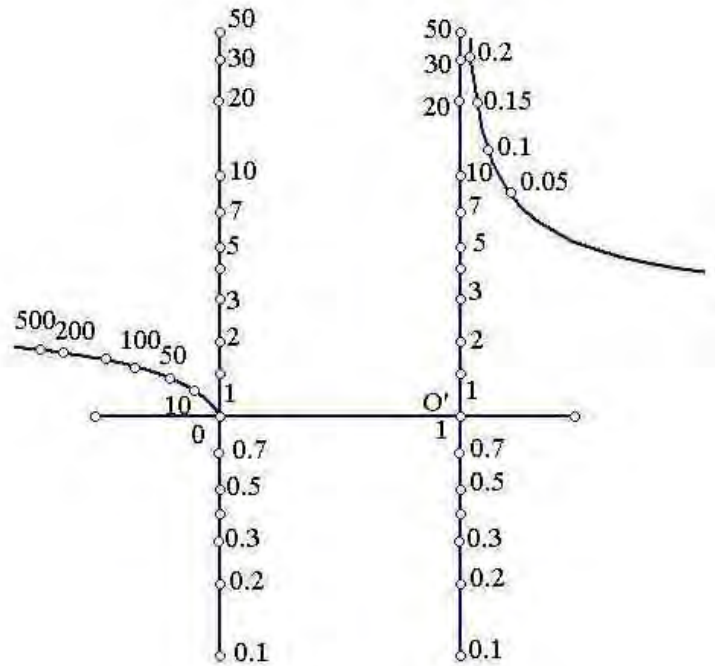
Σχήμα 163.

Απόδειξη. Η AB έχει εξίσωση  $y = (\beta - \log\alpha)x + \log\alpha$  και τέμνει τον άξονα των x στο X

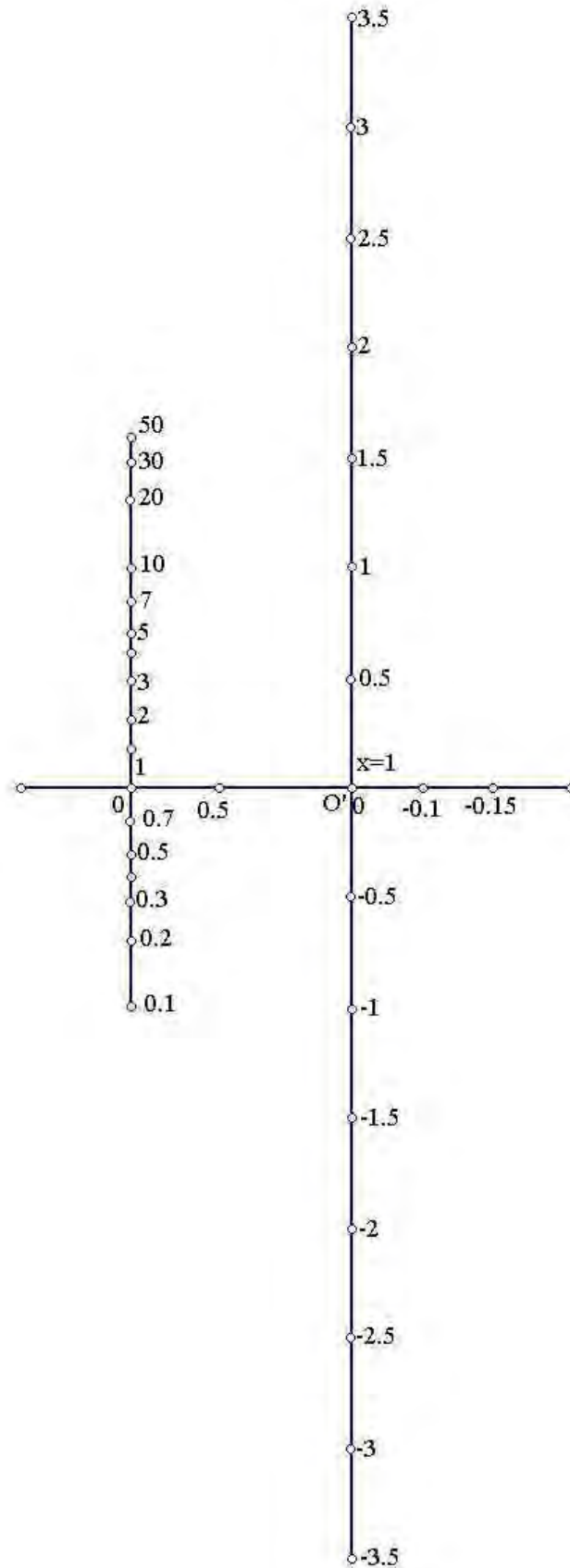
με  $OX = \frac{\log\alpha}{\log\alpha - \beta}$ .

Ακόμη, ισχύει  $\frac{\log t}{\log t - t} = \frac{\log\alpha}{\log\alpha - \beta}$ ,

οπότε  $t^\beta = \alpha'$ .



Σχήμα 164. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\beta t = \alpha'$ . Οι τιμές α, β και t διαβάζονται στον άξονα των y, στην ευθεία  $x=1$  και στην καμπύλη C, αντίστοιχα.



Σχήμα 165. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $t^\beta = \alpha^t$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $t$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$ , στην ευθεία  $x=1$  και στον άξονα των  $x$ , αντίστοιχα.

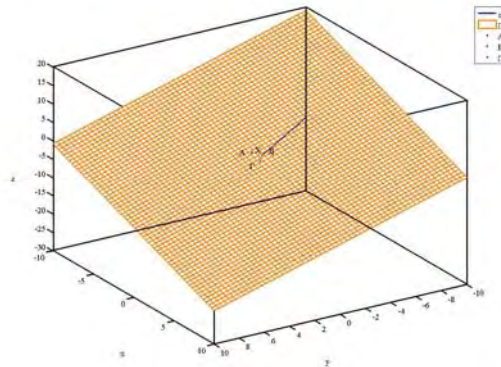
## ΣΤΕΡΕΑ ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε επίλυση εξισώσεων και υπολογισμών παραστάσεων με τη χρήση στερεών νομογραφημάτων.

### 7.1 Γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων αριθμών με σταθερούς συντελεστές.

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  οι αριθμοί και  $\lambda, \mu, \nu$  οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές τους. Αν  $t$  είναι η τιμή της ποσότητας  $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$  τότε η παραπάνω ποσότητα υπολογίζεται είτε με τα αντίστοιχα νομογραφήματα που περιγράψαμε στο δεύτερο κεφάλαιο (βλέπε σελίδα 10) είτε με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την ευθεία  $\varepsilon: r(t) = (t, t, t)$  για  $t \neq 0$  (βλ. Σχήματα 166, 167 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 94). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x, y, z$  ως  $-\frac{1}{\lambda\alpha}, -\frac{1}{\mu\beta}, -\frac{1}{\nu\gamma}$ . Παίρνουμε  $OA = \alpha, OB = \beta$  και  $OG = \gamma$ . Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το  $\Pi$

τέμνει την  $\varepsilon$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $-\frac{1}{t}$  είναι η ζητούμενη.

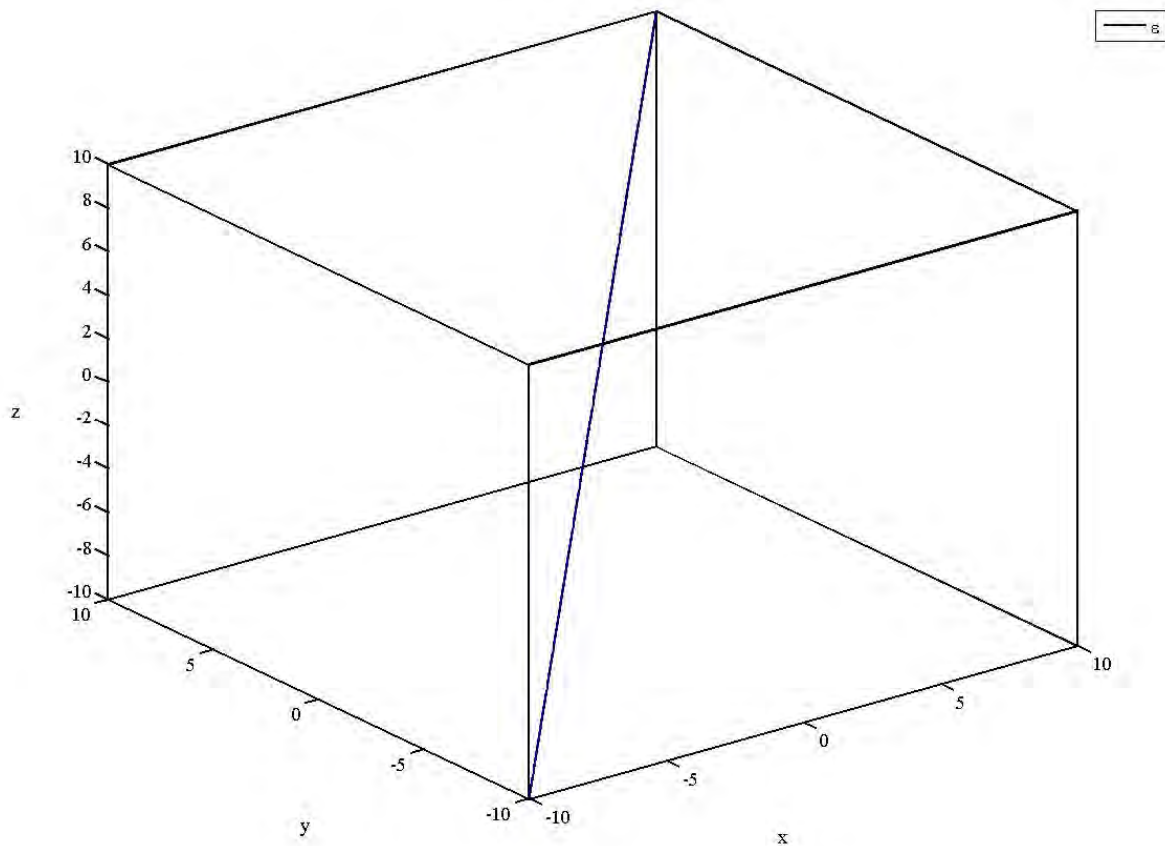


Σχήμα 166.

*Απόδειξη.* Τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $X$  ανήκουν στο ίδιο επίπεδο αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\lambda\alpha} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\mu\beta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\nu\gamma} & 1 \\ -\frac{1}{t} & -\frac{1}{t} & -\frac{1}{t} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα,  $t = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ .

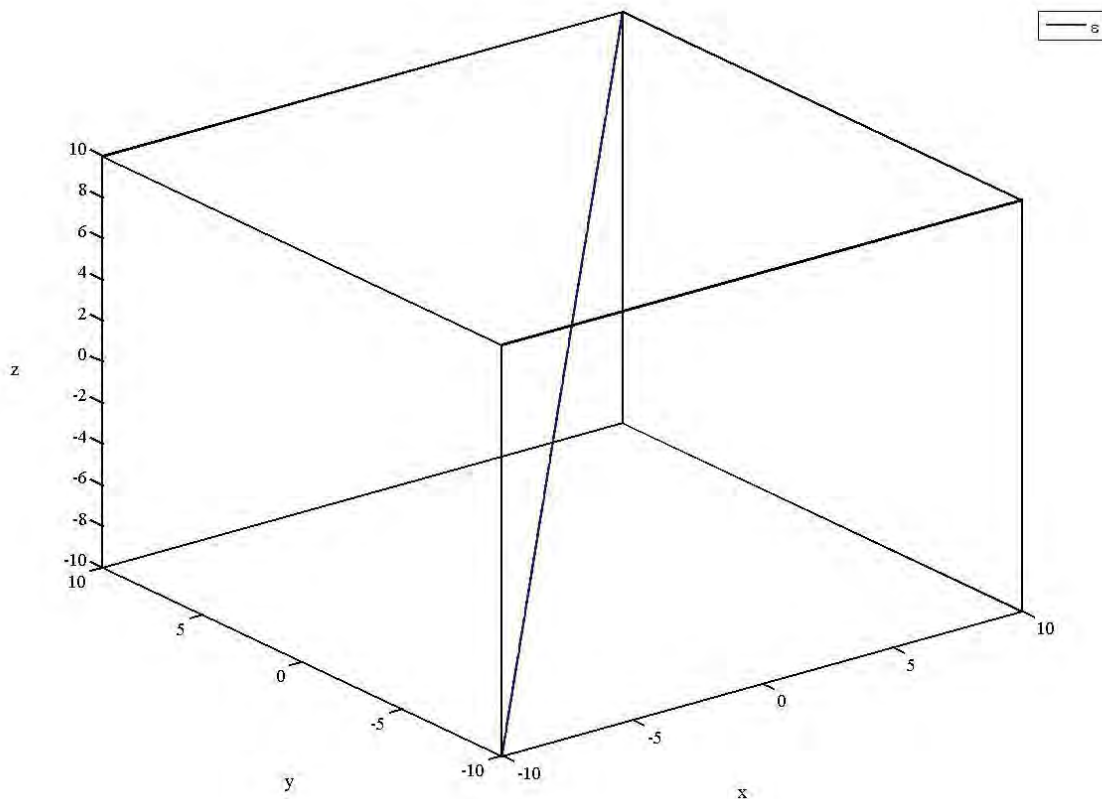


Σχήμα 167. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $3\alpha+2\beta+\gamma$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και στην ευθεία  $\epsilon$ , αντίστοιχα.

Παραλλαγή του παραπάνω σχήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  ως  $-\frac{1}{\lambda\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\mu\beta}$ ,  $-\frac{1}{\nu\gamma}$ , να τις διαβάσουμε ως  $-\frac{1}{\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$ , αντίστοιχα, και να σχεδιάσουμε την ευθεία  $\epsilon'$ :  $r(t) = (\lambda t, \mu t, \nu t)$  στη θέση της  $\epsilon$ .

## 7.2 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}}$ για δοθέντα $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ .

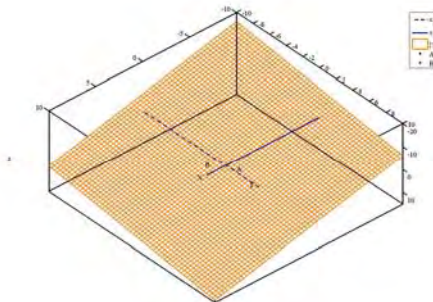
Γράφοντας  $\frac{1}{t} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$  χρειαζόμαστε την τιμή  $t$ . Η επίλυση του τύπου μπορεί να βρεθεί με τα αντίστοιχα νομογράφημα του επιπέδου (βλέπε σελίδα 11) είτε με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  την ευθεία  $\epsilon: r(t)=(t,t,t)$  (βλ. Σχήμα 168). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  παίρνοντας  $OA=\alpha$ ,  $OB=\beta$  και  $OG=\gamma$ . Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Η ευθεία  $\epsilon$  τέμνει το  $\Pi$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



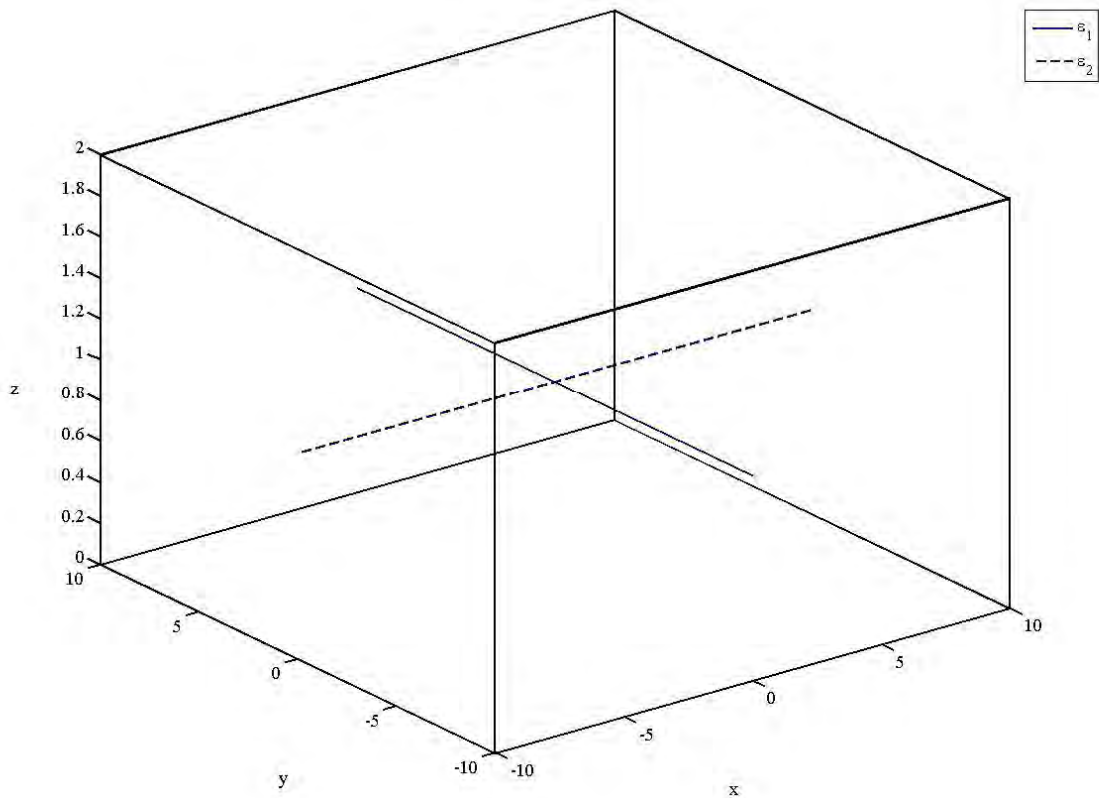
Σχήμα 168. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{1}{t} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και στην ευθεία  $\epsilon$ , αντίστοιχα.

### 7.3 Επίλυση του τύπου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{t}$ για δοθέντα $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ και $t$ ο άγνωστος.

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να επιλυθεί είτε με τα αντίστοιχα νομογραφήματα του επιπέδου (βλέπε σελίδα 22) είτε με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxyz συντεταγμένων τις ευθείες  $\epsilon_1: r(t) = (0,t,1)$  και  $\epsilon_2: r(\gamma) = (\gamma,0,1)$  (βλ. Σχήματα 169, 170 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 95). Όλοι οι άξονες και οι ευθείες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται στους άξονες των  $y$ ,  $x$  και στην ευθεία  $\epsilon_2$ . Παίρνοντας  $OA=\alpha$ ,  $OB=\beta$  και  $OG=\gamma$  έχουμε ότι τα  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Η ευθεία  $\epsilon_1$  τέμνει το  $\Pi$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



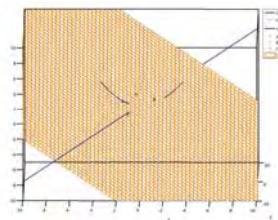
Σχήμα 169.



Σχήμα 170. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{t}$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $y$ , των  $x$ , στην ευθεία  $e_2$  και στην ευθεία  $e_1$ , αντίστοιχα.

#### 7.4 Υπολογισμός της παράστασης $\alpha\beta\gamma + (\alpha - \beta)$ για $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ δοθέντα.

Αν  $t$  η τιμή της παραπάνω παράστασης τότε έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την ευθεία  $e_1: r(t) = (0, t, 1)$ . (βλ. Σχήμα 171, 172 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 96). Στο  $xy$ -επίπεδο σχεδιάζουμε την παραβολή  $C: y = x^2$  ενώ στο  $xz$ -επίπεδο την ευθεία  $e_2: z = -x$ . Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στην παραβολή  $C$  ενώ η τιμή  $\gamma$  στην ευθεία  $e_2$ . Η τιμή  $\beta$  στο σημείο  $B$  διαβάζεται ως  $-\beta$ , η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται στο σημείο  $A$  ως η τετμημένη του,  $x_A$  ενώ η τιμή  $\gamma$  στο σημείο  $\Gamma$  με συντεταγμένες  $(x_\Gamma, 0, z_\Gamma)$  διαβάζεται ως  $\frac{x_\Gamma + 1}{x_\Gamma}$ . Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Η ευθεία  $e_1$  τέμνει το  $\Pi$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



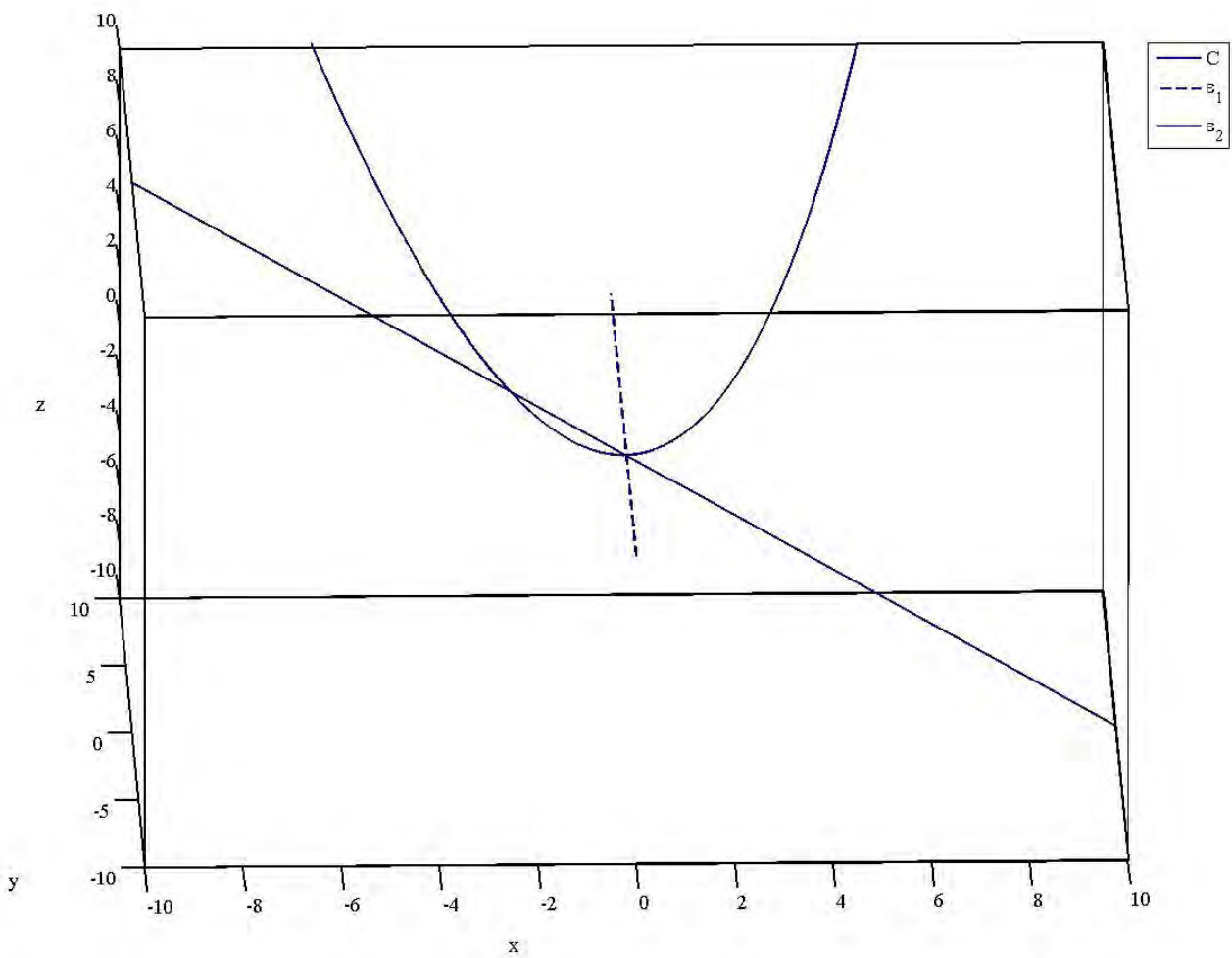
Σχήμα 171.  
137



Απόδειξη. Τα σημεία Α, Β, Γ και Χ ορίζουν το επίπεδο Π αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 \\ -\beta & \beta^2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\gamma-1} & 0 & -\frac{1}{\gamma-1} & 1 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα,  $t = \alpha\beta\gamma + (\alpha - \beta)$ .

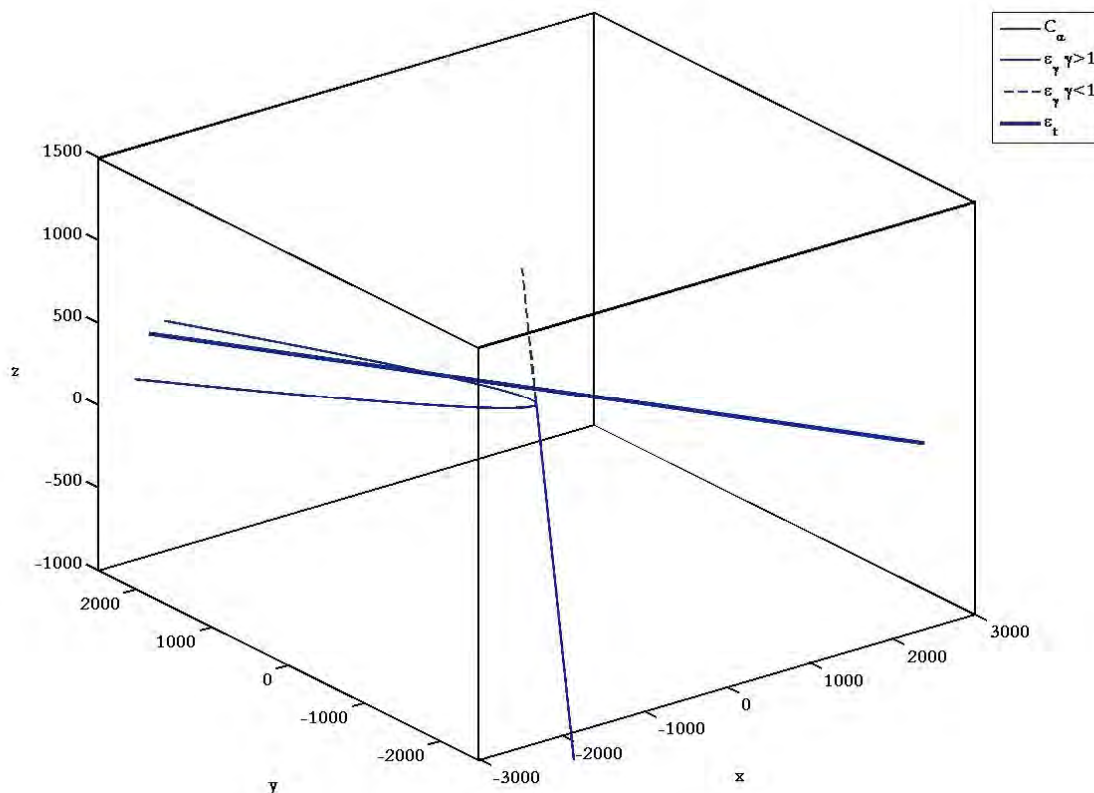


Σχήμα 172. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $\alpha\beta\gamma + (\alpha - \beta)$ . Οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  διαβάζονται στην παραβολή C, η τιμή  $\gamma$  στην ευθεία  $e_2$  ενώ η τιμή  $t$  στην  $e_1$ .

Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι το παρακάτω. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την παραβολή  $C_\alpha: r(\alpha)=(56\alpha-21\alpha^2, 42\alpha+28\alpha^2, 140)$  και τις ευθείες  $\epsilon_\gamma: r(\gamma)=\left(\frac{56}{\gamma-1}, \frac{42}{\gamma-1}, \frac{20(7\gamma-12)}{\gamma-1}\right)$  για  $\gamma \neq 1$  και  $\epsilon_t: r(t)=(-21t, 28t, 240)$  (βλ. Σχήμα 173). Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Στην παραβολή  $C_\alpha$  διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  στα σημεία  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Η τιμή  $\beta$  διαβάζεται ως  $-\beta$ . Ακόμη η τιμή  $\gamma$  διαβάζεται στο σημείο  $\Gamma$  στην ευθεία  $\epsilon_\gamma$  για δεδομένο  $\gamma$ . Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Η ευθεία  $\epsilon_t$  τέμνει το  $\Pi$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

### 7.5 Υπολογισμός της παράστασης $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\epsilon}$ για $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ δοθέντα.

Αν  $t$  η τιμή της παραπάνω παράστασης τότε η  $t$  μπορεί να βρεθεί είτε με τα αντίστοιχα επίπεδα νομογραφήματα (βλέπε σελίδα 110) είτε με το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων τις ευθείες  $\epsilon_1: r(t) = (0, t, 1)$  και  $\epsilon_2: r(t) = (t, 0, 1)$  (βλ. Σχήμα 174 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 97). Όλοι οι άξονες και οι ευθείες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \delta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$ , οι  $\beta, \epsilon$  στον άξονα των  $x$  ενώ η  $\gamma$  διαβάζεται στην ευθεία  $\epsilon_1$ . Παίρνουμε  $OA=\alpha, OB=\beta, OG=\gamma, OD=\delta$  και  $OE=\epsilon$ . Τα σημεία  $B, \Gamma$  και  $\Delta$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi_1$  το οποίο τέμνει την  $\epsilon_2$  στο  $Y$  με  $OY=\frac{\beta\gamma}{\delta}$  (βλ. στο Παράρτημα στο Σχήμα 97α). Στη συνέχεια, τα σημεία  $A, E$  και  $Y$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi_2$  (βλ. στο Παράρτημα στο Σχήμα 97β). Το  $\Pi_2$  τέμνει την ευθεία  $\epsilon_1$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 173. Νομογράφημα για τον υπολογισμό της τιμής  $\alpha\beta\gamma+(\alpha-\beta)$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta$  διαβάζονται στην παραβολή  $C_\alpha$ , η τιμή  $\gamma$  στην  $\epsilon_\gamma$  και η τιμή  $t$  στην ευθεία  $\epsilon_t$ .

## 7.6 Τύποι με γινόμενο.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε διάφορους τύπους δεδομένης μορφής που επιλύονται με τη χρήση στερεών νομογραφημάτων. Οι τύποι αυτοί περιέχουν τρεις μεταβλητές,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και τον άγνωστο  $t$ .

Αρχικά, θα περιγράψουμε το νομογράφημα του τύπου:

$$f(\alpha)[\lambda p(\beta) + \mu q(\gamma) + \nu r(t) + c_1] + g(\alpha)[\lambda' p(\beta) + \mu' q(\gamma) + \nu' r(t) + c_2] + h(\alpha)[\lambda'' p(\beta) + \mu'' q(\gamma) + \nu'' r(t) + c_3] = c,$$

όπου οι  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $q$  και  $r$  πραγματικές συναρτήσεις,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $c_1$ ,  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$ ,  $c_2$ ,  $\lambda''$ ,  $\mu''$ ,  $\nu''$ ,  $c_3$  και  $c$  σταθερές. Για ευκολία του αναγνώστη επιλέγουμε να μελετήσουμε το νομογράφημα με τύπο:

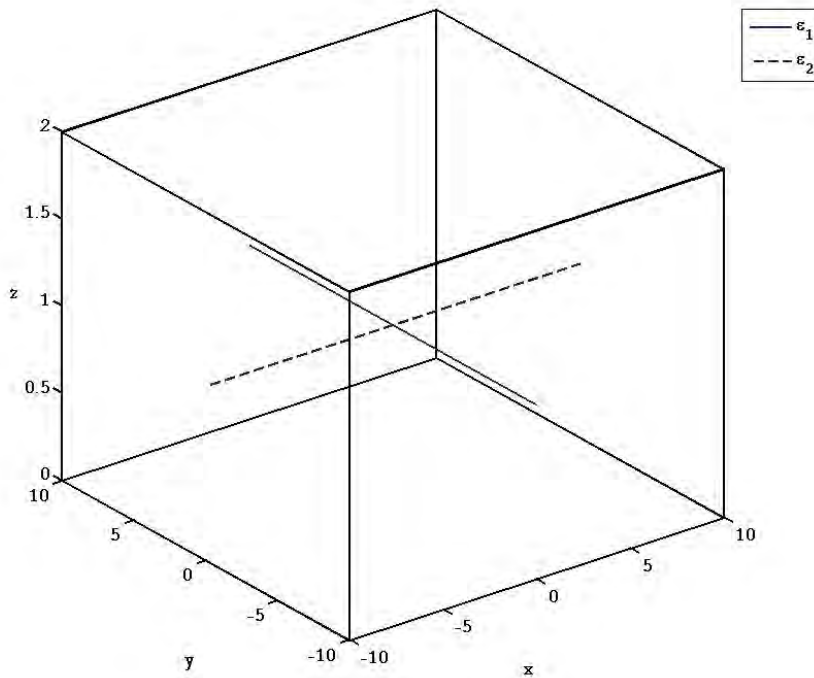
$$\alpha[\gamma+3] + \alpha^2 \frac{\alpha-3}{\alpha-1} [2\beta+3\gamma-t+1] + \frac{\alpha^3}{\alpha-2} [3\beta+\gamma+t+1] = 1.$$

Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων τις ευθείες  $\varepsilon_\beta$ :  $r(\beta) = \left(-\frac{4}{10-5\beta}, \frac{1}{10-5\beta}, \frac{1}{10-5\beta}\right)$ ,  $\varepsilon_t$ :

$r(t) = \left(-\frac{7}{5t+20}, \frac{3}{5t+20}, -\frac{2}{5t+20}\right)$  και την καμπύλη  $C_\alpha$ :  $r(\alpha) = \left(-\alpha, \frac{\alpha^2(3-\alpha)}{\alpha-1}, \frac{\alpha^3}{2-\alpha}\right)$  (βλ. Σχήμα 175). Οι άξονες δια-

βαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στη καμπύλη  $C_\alpha$ , στην ευθεία  $\varepsilon_\beta$  και στον άξονα των  $x$ . Η τιμή  $\gamma$  διαβάζεται ως  $-\frac{1}{\gamma+3}$  παίρνοντας  $OG = \gamma$ . Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται στο σημείο  $A$  για

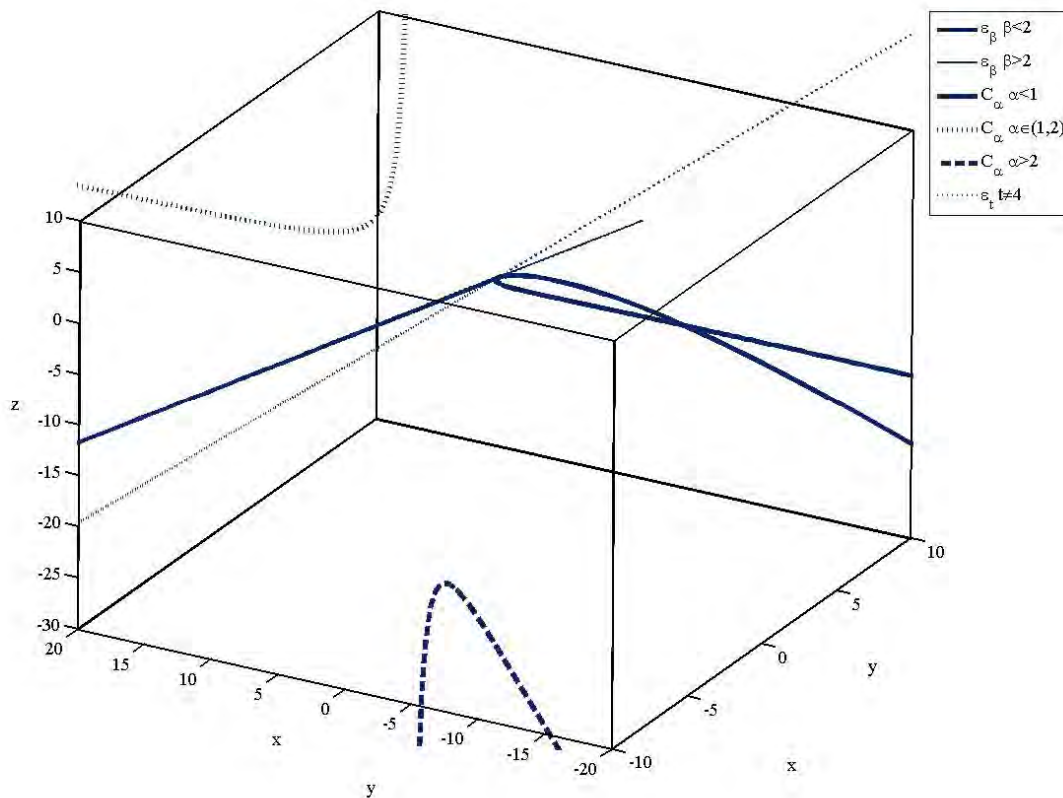
δεδομένο  $\alpha$  ενώ η τιμή  $\beta$  στο  $B$  για δεδομένο  $\beta$ . Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$  τέμνει την  $\varepsilon_2$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



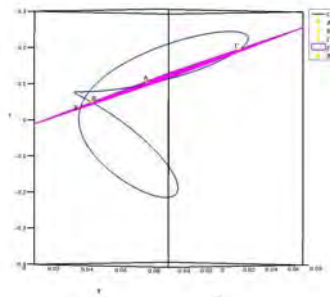
Σχήμα 174. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma = \det$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\delta$  διαβάζονται στον άξονα των  $y$  και οι τιμές  $\beta$ ,  $\varepsilon$  στον άξονα των  $x$ . Ακόμη η τιμή  $\frac{\beta\gamma}{\delta}$  διαβάζεται στην  $\varepsilon_2$  και οι  $\gamma$ ,  $t$  στην  $\varepsilon_1$ , αντίστοιχα.

Άλλος τύπος είναι ο  $f(\alpha)g(\beta)h(\gamma)p(t)+q(t)[f(\alpha)+g(\beta)+h(\gamma)+r(t)]=c$  όπου οι  $f, g, h, p, q$  και  $r$  πραγματικές συναρτήσεις και  $c$  σταθερά. Παραδείγματος χάριν επιλέγουμε να περιγράψουμε το νομογράφημα του τύπου  $\alpha\beta\gamma t+3(\alpha+\beta+\gamma+t)=40$ .

Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Οxyz συντεταγμένων την καμπύλη  $C: r(t)=\left(\frac{t}{t^4+40}, \frac{t^2}{t^4+40}, \frac{t^3+3}{t^4+40}\right)$  (βλ. Σχήματα 176-178 και στο Παράρτημα στο Σχήμα 96). Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται στην καμπύλη  $C$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  επιλέγοντας την τιμή  $t$  ίση για  $\alpha, \beta, \gamma$  αντίστοιχα. Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$  τέμνει τη  $C$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 175. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha[\gamma+3]+\alpha^2\frac{\alpha-3}{\alpha-1}[2\beta+3\gamma-t+1]+\frac{\alpha^3}{\alpha-2}[3\beta+\gamma+t+1]=1$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  διαβάζονται στην καμπύλη  $C_\alpha$ , στην ευθεία  $\epsilon_\beta$ , στον άξονα των  $x$  και στην ευθεία  $\epsilon_t$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 176.

Απόδειξη. Τα σημεία Α, Β, Γ και Χ ορίζουν το επίπεδο Π αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^4+40} & \frac{\alpha^2}{\alpha^4+40} & \frac{\alpha^3+3}{\alpha^4+40} & 1 \\ \frac{\beta}{\beta^4+40} & \frac{\beta^2}{\beta^4+40} & \frac{\beta^3+3}{\beta^4+40} & 1 \\ \frac{\gamma}{\gamma^4+40} & \frac{\gamma^2}{\gamma^4+40} & \frac{\gamma^3+3}{\gamma^4+40} & 1 \\ \frac{t}{t^4+40} & \frac{t^2}{t^4+40} & \frac{t^3+3}{t^4+40} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ισοδύναμα,  $(\beta-\gamma)(t-\gamma)(t-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-t)(\alpha\beta\gamma t+3(\alpha+\beta+\gamma+t)-40)=0$ ,

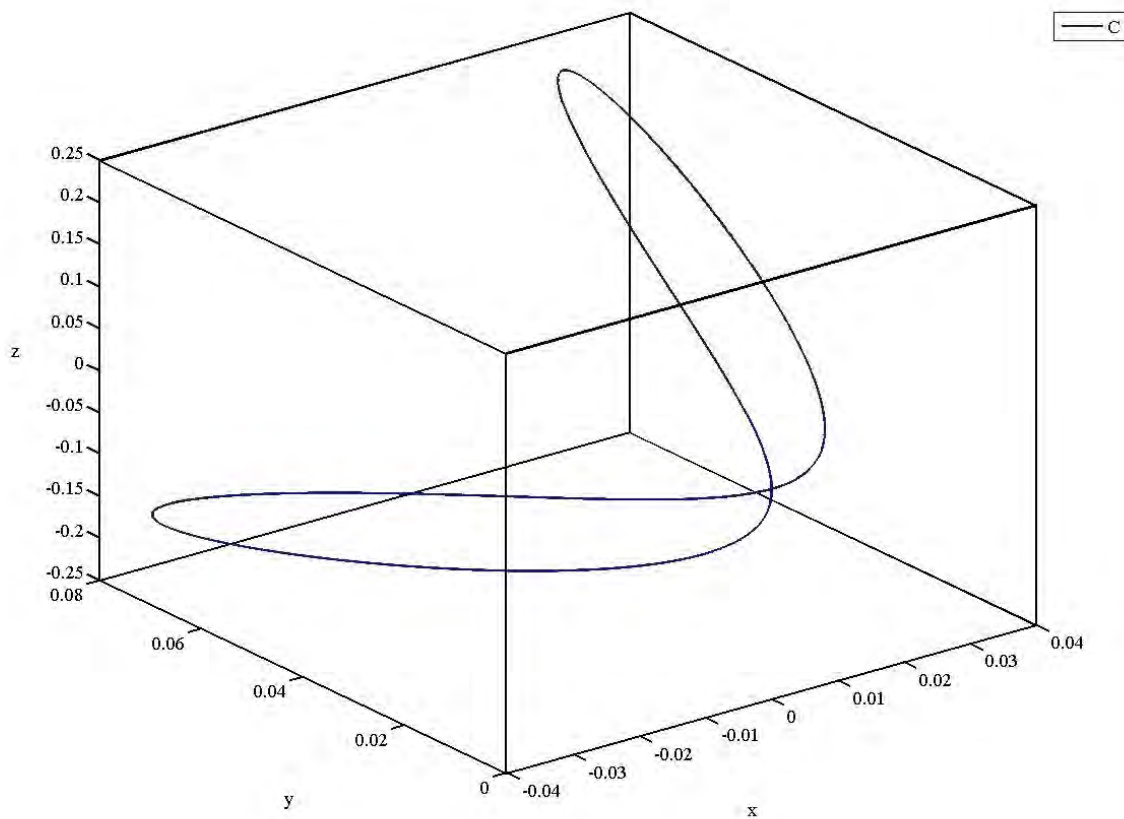
ισοδύναμα έχουμε  $\alpha\beta\gamma t+3(\alpha+\beta+\gamma+t)=40$ .

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται στη μορφή:

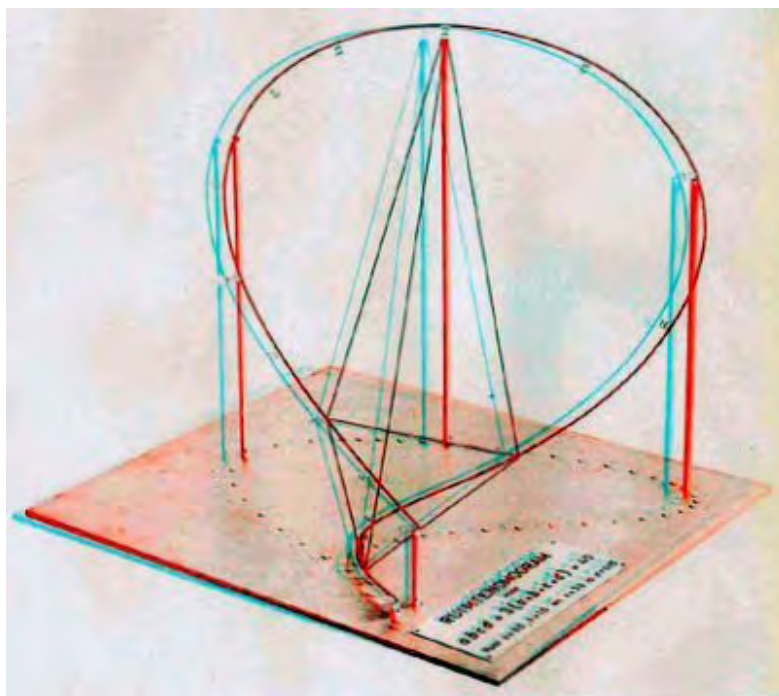
$$f(\alpha)g(\beta)h(\gamma)p(t)+q(t)[f(\alpha)g(\beta)+g(\beta)h(\gamma)+h(\gamma)f(\alpha)]+r(t)[f(\alpha)+g(\beta)+h(\gamma)]=c,$$

όπου οι  $f, g, h, p, q$  και  $r$  πραγματικές συναρτήσεις και  $c$  σταθερά. Παραδείγματος χάριν επιλέγουμε να περιγράψουμε το νομογράφημα του τύπου

$$\alpha\beta\gamma t+2t^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3t^3(\alpha+\beta+\gamma+t)=1.$$



Σχήμα 177. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma t+3(\alpha+\beta+\gamma+t)=40$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta,$  και  $t$  διαβάζονται στην καμπύλη C.



Σχήμα 178. Τριδιάστατη κατασκευή του νομογραφήματος για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma+3(\alpha+\beta+\gamma)=40$  (Stereo nomograms του N. D. Haasbroek, Netherlands Geodetic Commission, δημοσιεύτηκε στο Geodesy New Series, τόμος 1, με αριθμό 3 το έτος 1962).

Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων τις καμπύλες  $C_1: r(t)=(t, t^2, t^3)$  και  $C_2: r(t)=(-2t, 3t^2, \frac{1}{t})$  (βλ. Σχήμα 179). Οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται στην καμπύλη  $C_1$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  επιλέγοντας την τιμή  $t$  ίση για  $\alpha, \beta, \gamma$  αντίστοιχα. Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$  τέμνει την  $C_2$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

### 7.7 Επίλυση εξισώσεων $n$ -στου βαθμού.

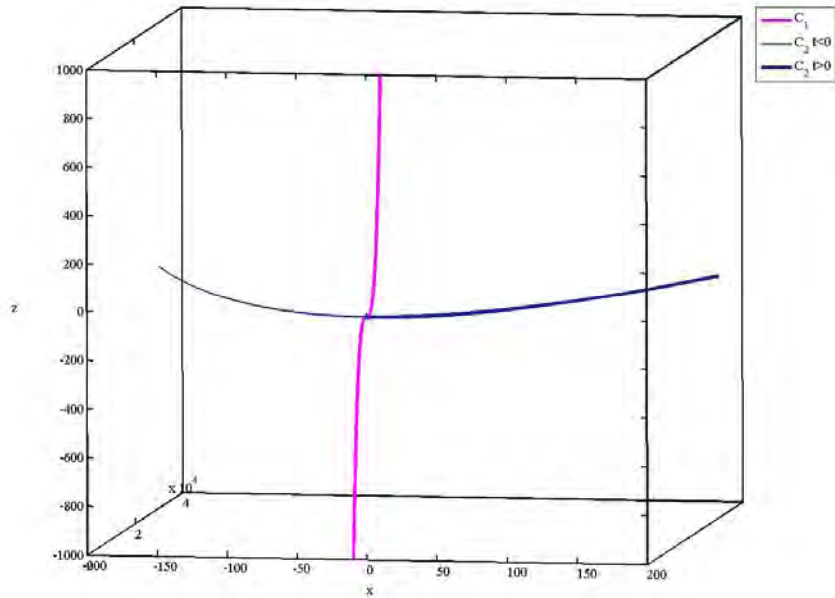
Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μερικά παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων  $n$ -στου βαθμού για  $n=2, 3, 4$  και  $5$  (βλέπε 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο) με τη χρήση στερεών νομογραφήματων.

Αρχικά θα μελετήσουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής  $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  μεταβλητά και  $t$  ο άγνωστος (βλέπε σελίδα 33). Η παραπάνω εξίσωση επιλύεται με τα παρακάτω νομογραφήματα.

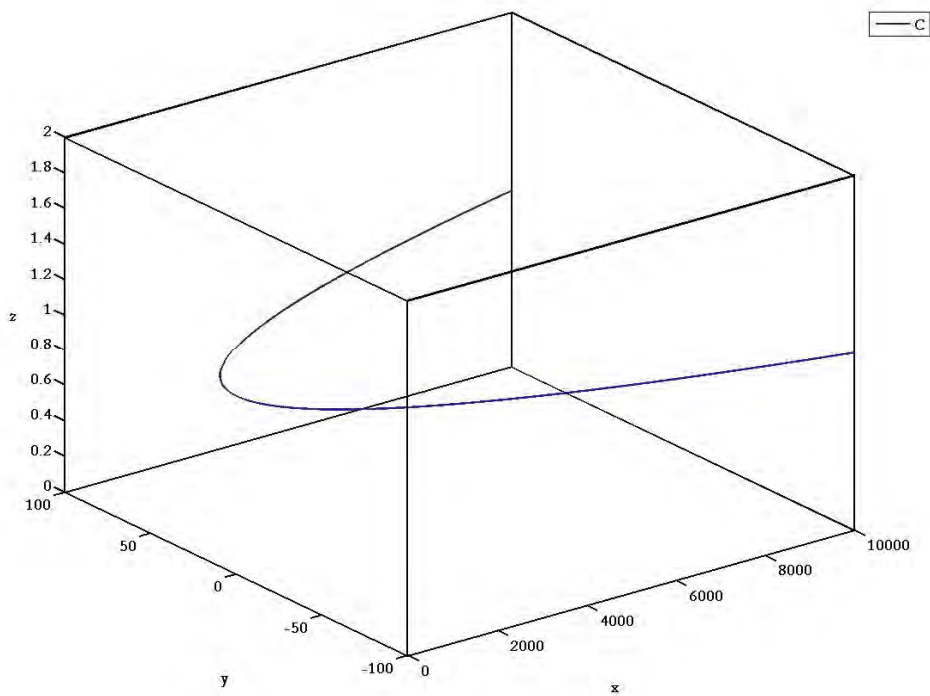
1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την καμπύλη  $C: r(t)=(t^2, t, 1)$  (βλ. Σχήμα 180). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  διαβάσκονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x, y, z$  ως  $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$  παίρνοντας  $OA=\alpha, OB=\beta$  και  $OG=\gamma$ . Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$

τέμνει τη  $C$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\alpha$  και  $t$  στον άξονα των  $x$  και στην καμπύλη  $C$ , να σχεδιάσουμε την επιφάνεια  $S: r(\alpha, t)=(\alpha, t, \alpha t^2)$  (βλ. Σχήμα 181). Ακόμη αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\beta,$



Σχήμα 179. Νομογράφημα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma t + 2t^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 3t^3(\alpha + \beta + \gamma + t) = 1$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται στην καμπύλη  $C_1$  ενώ η τιμή  $t$  στη  $C_2$



Σχήμα 180. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ , των  $y$ , των  $z$  και στην καμπύλη  $C$ , αντίστοιχα.

γ στους άξονες των y, z να σχεδιάσουμε την ευθεία ε:  $r(t)=(0,t,-\beta t-\gamma)$ . Η ευθεία ε και η καμπύλη C για δεδομένα α, β, γ τέμνονται στο X για κάποιο t. Η τιμή t είναι η ζητούμενη.

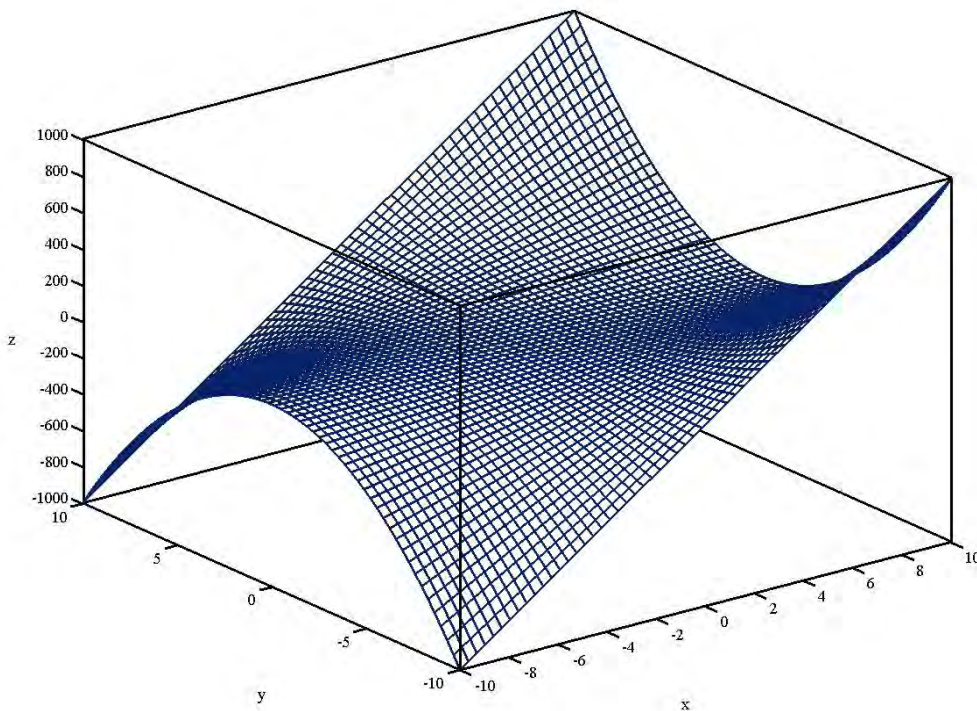
Ακόμη θα περιγράψουμε νομογραφήματα για την εξίσωση τρίτου βαθμού της μορφής  $t^3+\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$  (βλέπε σελίδα 40) και είναι τα παρακάτω:

1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxyz συντεταγμένων την καμπύλη C:  $r(t)=(t,t^2,t^3)$  (βλ. Σχήμα 182). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές α, β και γ διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των x, y, z ως  $-\frac{1}{\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$  παίρνοντας OA=α, OB=β και OG=γ. Τα σημεία A, B και Γ ορίζουν το επίπεδο Π. Το επίπεδο Π

τέμνει τη C στο σημείο X για κάποιο t. Η τιμή  $\frac{1}{t}$  είναι η ζητούμενη.

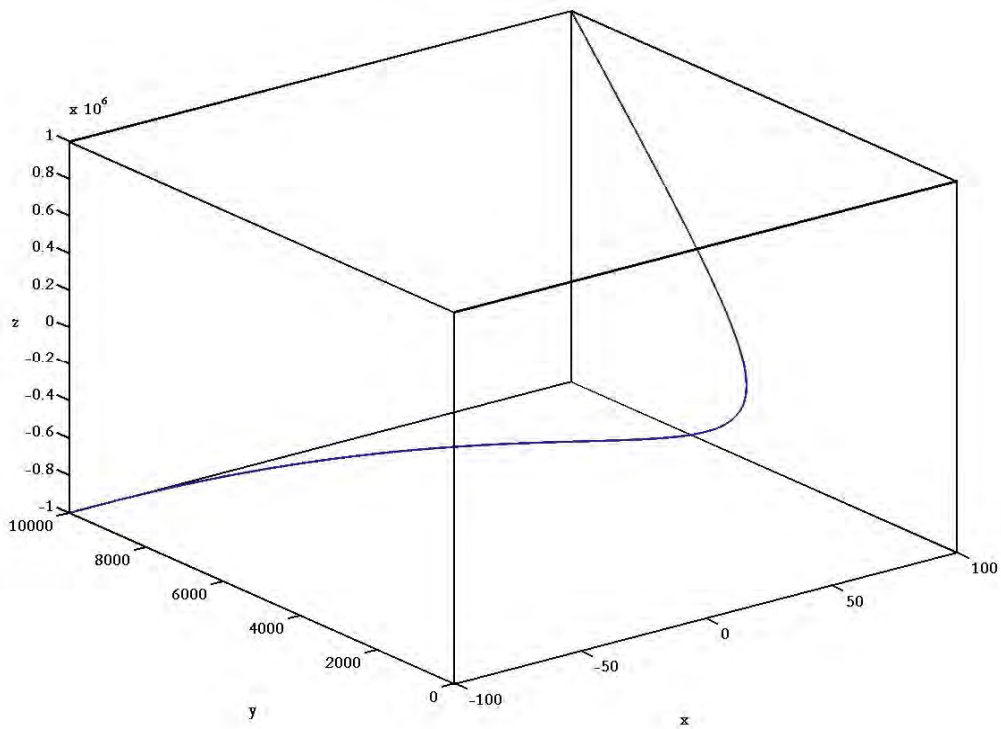
2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές α και t στον άξονα των x και στην καμπύλη C, να σχεδιάσουμε την επιφάνεια S:  $r(\alpha,t)=(\alpha,t,t^3+\alpha t^2)$  (βλ. Σχήμα 183). Ακόμη, αντί να διαβάσουμε τις τιμές β, γ στους άξονες των y, z, να σχεδιάσουμε την ευθεία ε:  $r(t)=(0,t,-\beta t-\gamma)$ . Η ευθεία ε και η επιφάνεια S για δεδομένα α, β, γ τέμνονται στο X για κάποιο t. Η τιμή t είναι η ζητούμενη.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε εξισώσεις τετάρτου βαθμού με τύπο  $t^4+\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta=0$  χρησιμοποιώντας το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα Oxyz συντεταγμένων την καμπύλη  $C_8$ :

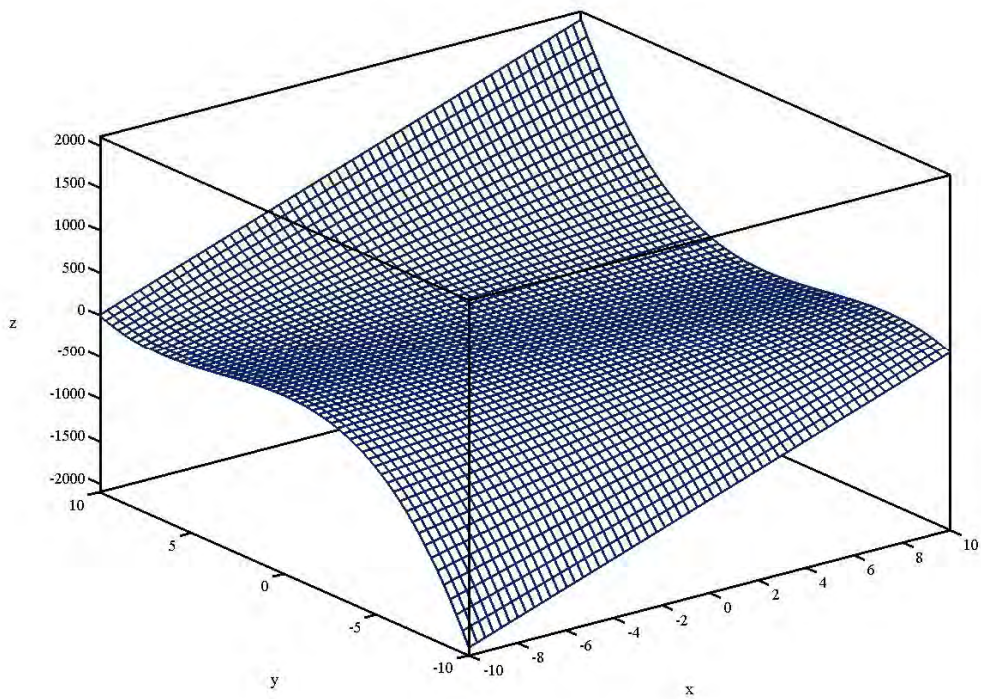


Σχήμα 181. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ . Η τιμή α διαβάζεται στην επιφάνεια S και οι τιμές β, γ στην ευθεία ε. Το σημείο τομής της S με την ε ορίζεται για δεδομένο t. Η τιμή t είναι η ζητούμενη.





Σχήμα 182. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ , των  $y$ , των  $z$  και στην καμπύλη  $C$ .



Σχήμα 183. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ . Η τιμή  $\alpha$  διαβάζεται στην επιφάνεια  $S$ , τις τιμές  $\beta$  και  $\gamma$  στην ευθεία  $\epsilon$ . Το σημείο τομής της  $S$  με την  $\epsilon$  ορίζεται για δεδομένα  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

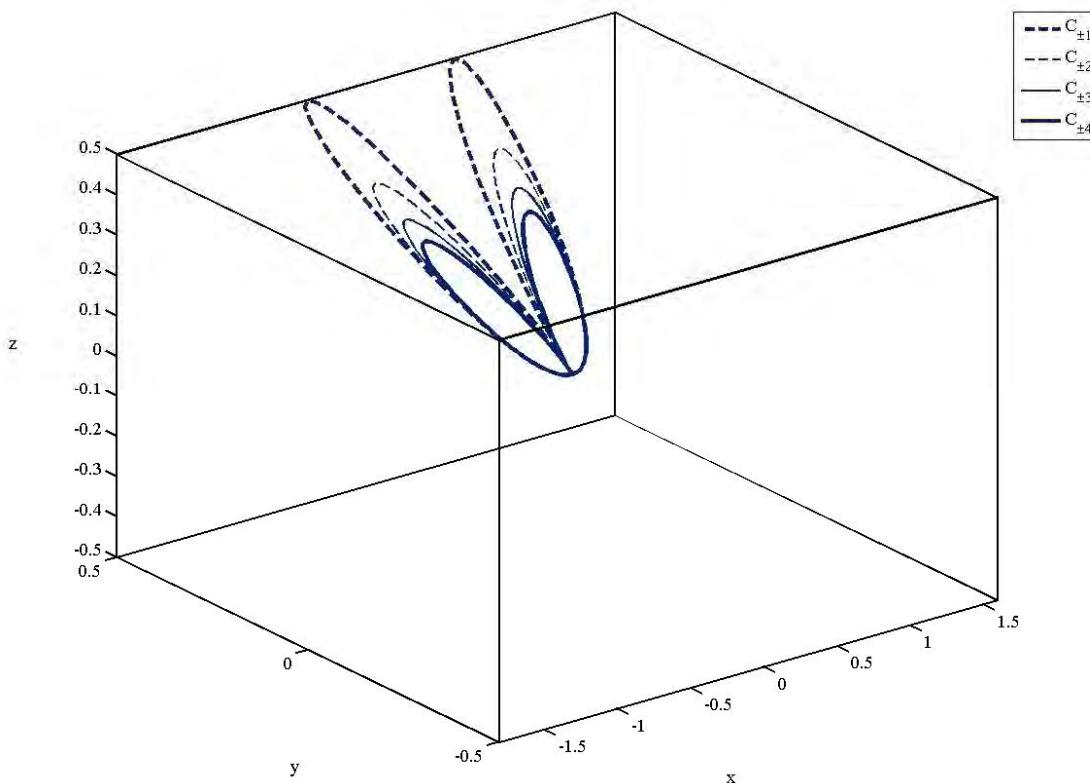
$$r(t) = \left( \frac{t^3}{t^4 + \delta}, \frac{t^2}{t^4 + \delta}, \frac{t}{t^4 + \delta} \right)$$

για κάθε  $\delta$  (βλ. Σχήμα 184). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβά-  
ζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$  παίρνοντας  $OA=\alpha$ ,  $OB=\beta$  και  $OG=\gamma$ . Τα σημεία  $A$ ,  
 $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Η καμπύλη  $C_\delta$  για δεδομένο  $\delta$  και το επίπεδο  $\Pi$  τέμνονται στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ .  
Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

Αν η εξίσωση είναι της μορφής  $t^4 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$  (βλέπε σελίδα 48) τότε η εξίσωση αυτή επιλύεται χρησιμοποιώντας  
με τα παρακάτω νομογραφήματα:

1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την καμπύλη  $C: r(t) = (t^2, t^3, t^4)$  (βλ. Σχήμα 185). Όλοι οι άξονες  
διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ως  
 $-\frac{1}{\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$  παίρνοντας  $OA=\alpha$ ,  $OB=\beta$  και  $OG=\gamma$ . Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$

τέμνει τη  $C$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $\frac{1}{t}$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 184. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^4 + \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta = 0$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\delta$  διαβάζονται  
στους άξονες των  $x$ , των  $y$ , των  $z$  και στην καμπύλη  $C_\delta$ . Το σημείο τομής τους,  $X$  ορίζεται  
για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\gamma$  και  $t$  στον άξονα των  $x$  και στην καμπύλη  $C$ , να σχεδιάσουμε την επιφάνεια  $S: r(\gamma,t)=(\gamma,t,\gamma+t^4)$  (βλ. Σχήμα 186). Ακόμη, αντί να διαβάζουμε τις τιμές  $\alpha, \beta$  στους άξονες των  $y, z$  να σχεδιάσουμε την παραβολή  $C: r(t)=(0,t,-\alpha t^2-\beta t)$ . Από την επιφάνεια  $S$  ορίζεται καμπύλη  $C_\gamma$  για δεδομένο  $\gamma$ . Η καμπύλη  $C_\gamma$  και η παραβολή  $C$  για δεδομένα  $\alpha, \beta, \gamma$  τέμνονται στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

Ενώ, αν η εξίσωση έχει τη μορφή  $pt^4+t^3+qt^2+rt+w=0$  (βλέπε σελίδα 48) όπου

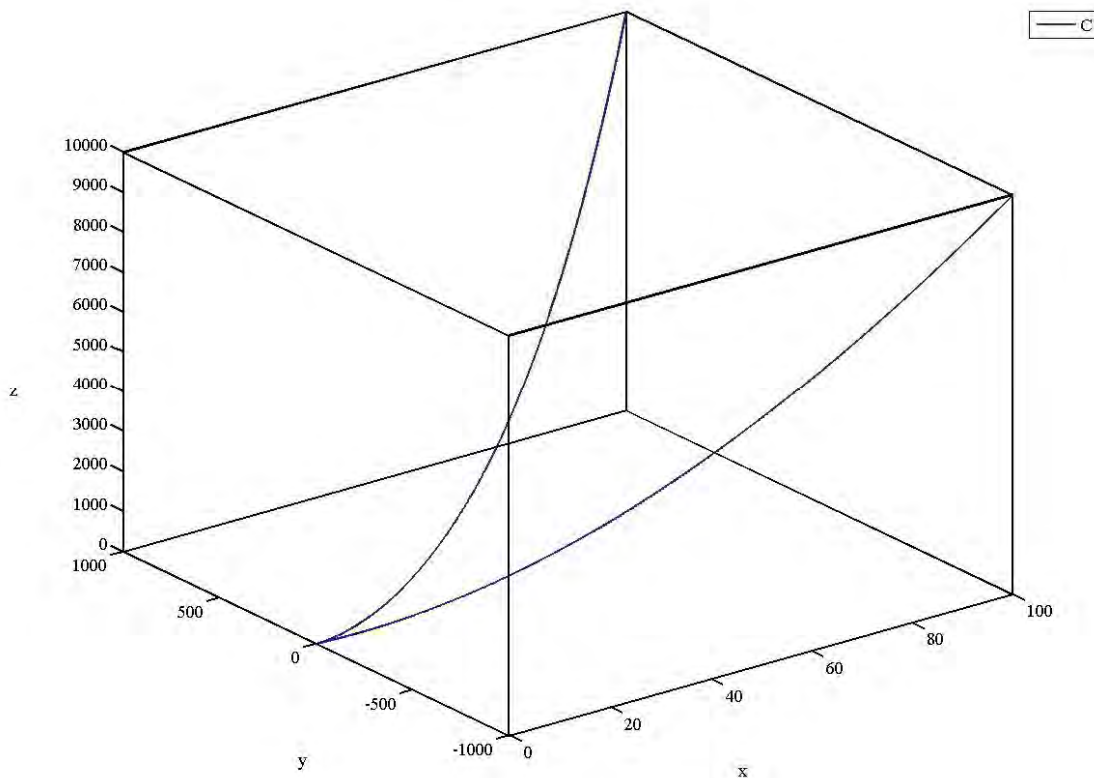
$$r = \begin{cases} -1, & \delta\beta > 0 \\ 1, & \delta\beta < 0 \end{cases}$$

έχουμε το παρακάτω νομογράφημα. Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την καμπύλη  $C:$

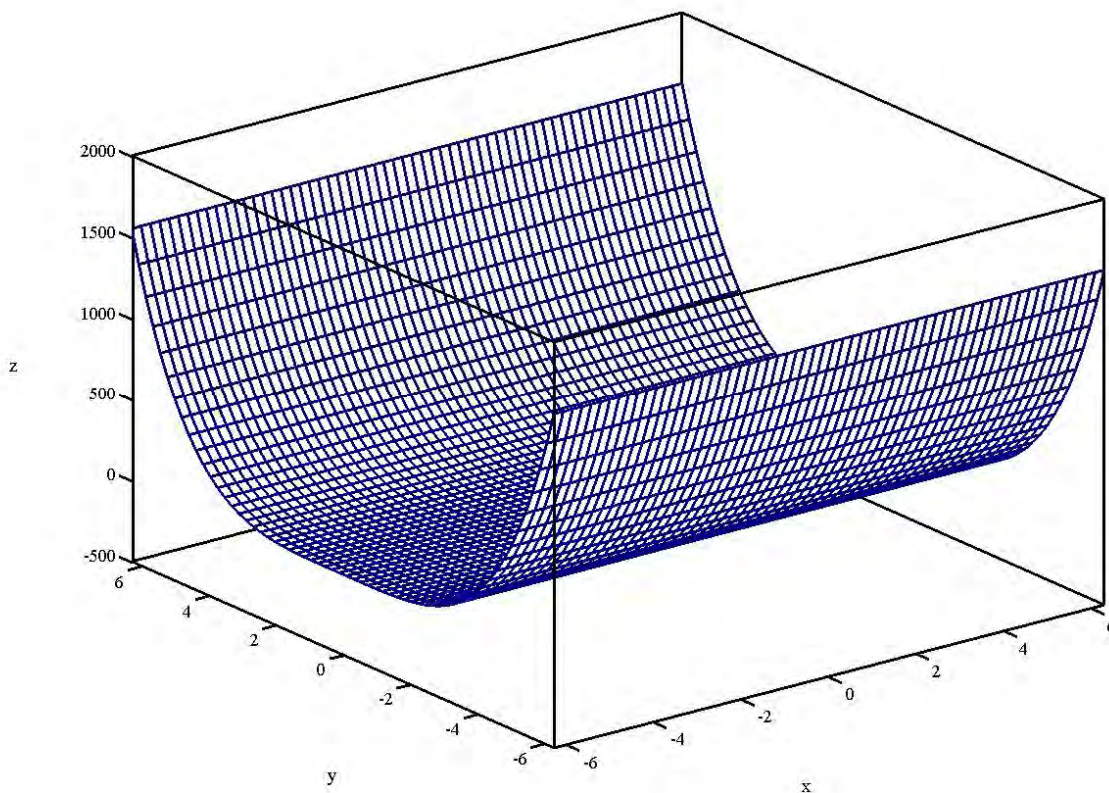
$$κ(t)=(x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{με } x(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{1+t^2}, & r=1 \\ \frac{t^3}{t^2-1}, & r=-1 \end{cases}, y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{1+t^2}, & r=1 \\ \frac{t^2}{t^2-1}, & r=-1 \end{cases} \text{ και } z(t) = \begin{cases} \frac{1}{t+t^3}, & r=1 \\ \frac{1}{t^3-t}, & r=-1 \end{cases} \quad (\text{βλ. Σχήμα 187}).$$

Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $p, q$  και  $w$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x, y, z$  ως  $-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}$  και  $-\frac{1}{w}$  παίρνοντας  $OP=p, OQ=q$  και  $OW=w$ . Τα σημεία  $P, Q$  και  $W$  ορίζουν το



Σχήμα 185. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^4+\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ . Οι τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y, z$  και στην καμπύλη  $C$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 186. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^4 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ . Η τιμή  $\gamma$  διαβάζεται στην επιφάνεια  $S$  και οι τιμές  $\alpha, \beta$  στην παραβολή  $C$ . Για δεδομένο  $\gamma$  ορίζεται από την επιφάνεια  $S$ , η καμπύλη  $C_\gamma$ . Το σημείο τομής των καμπύλων  $C, C_\gamma$  ορίζουν το σημείο  $X$  για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$  τέμνει τη  $C$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

Τέλος, για την εξίσωση πέμπτου βαθμού της μορφής  $t^5 + pt^3 + qt^2 + rt + w = 0$  (βλέπε σελίδα 55) με

$$p = \begin{cases} 1, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 > 0 \\ 0, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 = 0, \\ -1, & 5\alpha\gamma - 2\beta^2 < 0 \end{cases}$$

έχουμε τα παρακάτω νομογραφήματα:

1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την επιφάνεια  $S_p$ :  $r(t,q) = (t, q, t^5 + pt^3 + qt^2)$  (βλ. Σχήματα 188-190). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Σχεδιάζουμε την ευθεία  $\epsilon$ :  $r(t) = (0, t, -rt - w)$  για δεδομένα  $q, w$ . Από την επιφάνεια  $S_p$  ορίζεται καμπύλη  $C_q$  για δεδομένο  $q$ . Η καμπύλη  $C_q$  και η ευθεία  $\epsilon$  τέμνονται στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να σχεδιάσουμε την επιφάνεια  $S_p$  και την ευθεία  $\epsilon$ , να σχεδιάσουμε την επιφάνεια  $S_p'$ :  $r(t,x) = (t, x, t^5 + pt^3 + xt)$  και την παραβολή  $C$ :  $r(t) = (0, t, -qt^2 - w)$ .

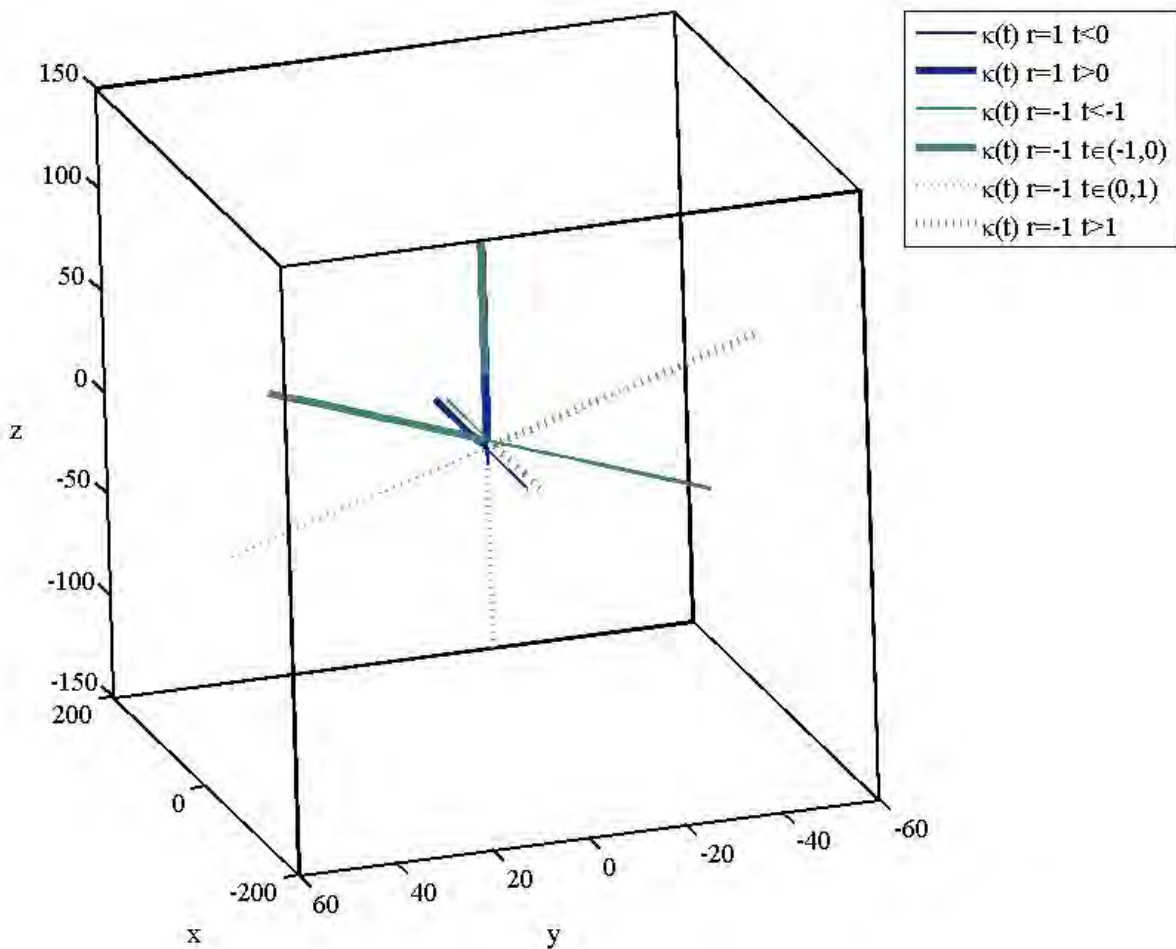
## 7.8 Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε δυο παραδείγματα τριγωνομετρικών εξισώσεων (βλέπε 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο σελίδες 63, 79, αντίστοιχα) που επιλύονται με τη χρήση στερεών νομογραφημάτων όπου  $\alpha, \beta$ , και  $\gamma$  δοθέντα και  $t$  ο άγνωστος.

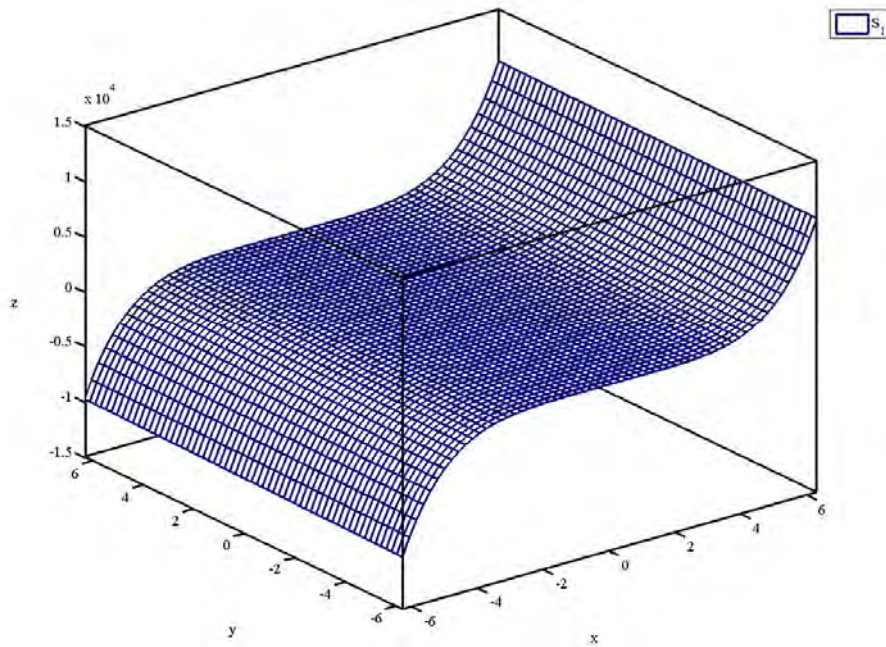
Συγκεκριμένα, για τον τύπο  $\alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\eta t = \gamma$  έτσι ώστε  $\gamma \neq 0$  έχουμε τα παρακάτω νομογραφήματα.

1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων τον κύκλο  $C: r(t) = (\eta\mu t, \sigma\upsilon\eta t, -1)$  (βλ. Σχήμα 191). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ως  $-\frac{1}{\alpha}$ ,  $-\frac{1}{\beta}$  και  $-\frac{1}{\gamma}$  παίρνοντας  $OA = \alpha$ ,  $OB = \beta$  και  $OG = \gamma$ . Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το επίπεδο  $\Pi$  τέμνει τη  $C$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

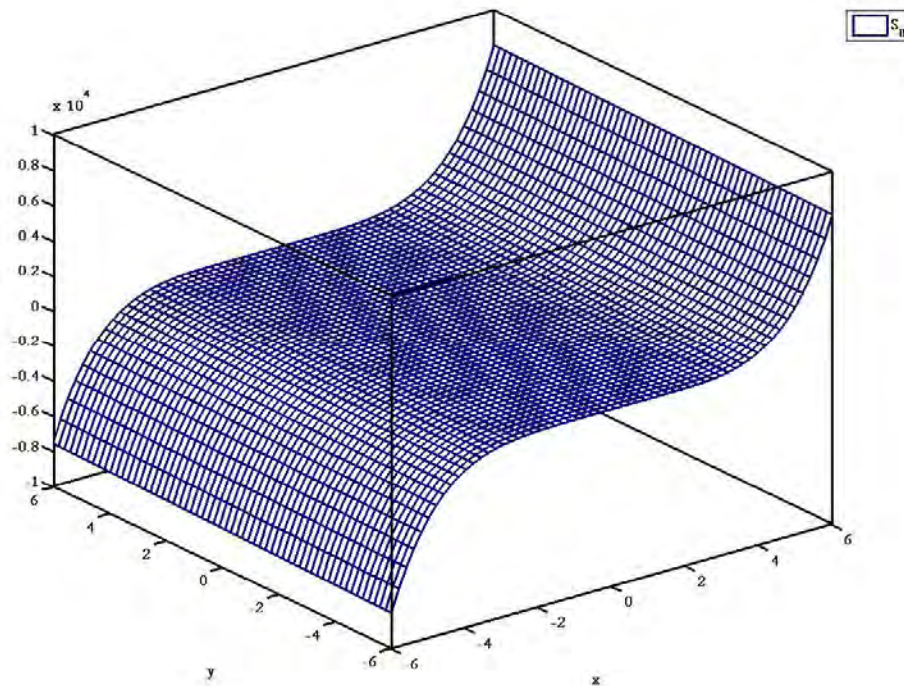
2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\gamma$  και  $t$  στον άξονα των  $x$  και στο κύκλο  $C$  να σχεδιάσουμε το παραβολοειδές εκ περιστροφής  $S_1: r(t, \gamma) = (\gamma\eta\mu t, \gamma\sigma\upsilon\eta t, \gamma^2)$  (βλ. Σχήμα 192). Ακόμη αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$  στους άξονες των  $y$ ,  $z$ , να σχεδιάσουμε το επίπεδο  $S_2: \alpha \operatorname{sgn}(\gamma)x + \beta \operatorname{sgn}(\gamma)y - z = 0$  για δεδομένα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Από την επιφάνεια  $S_1$  και το επίπεδο  $S_2$  ορίζονται, αντίστοιχα, ο κύκλος  $C_\gamma$  και η ευθεία  $\epsilon$  για δεδομένα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Η ευθεία  $\epsilon$  και ο  $C_\gamma$  τέμνονται στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



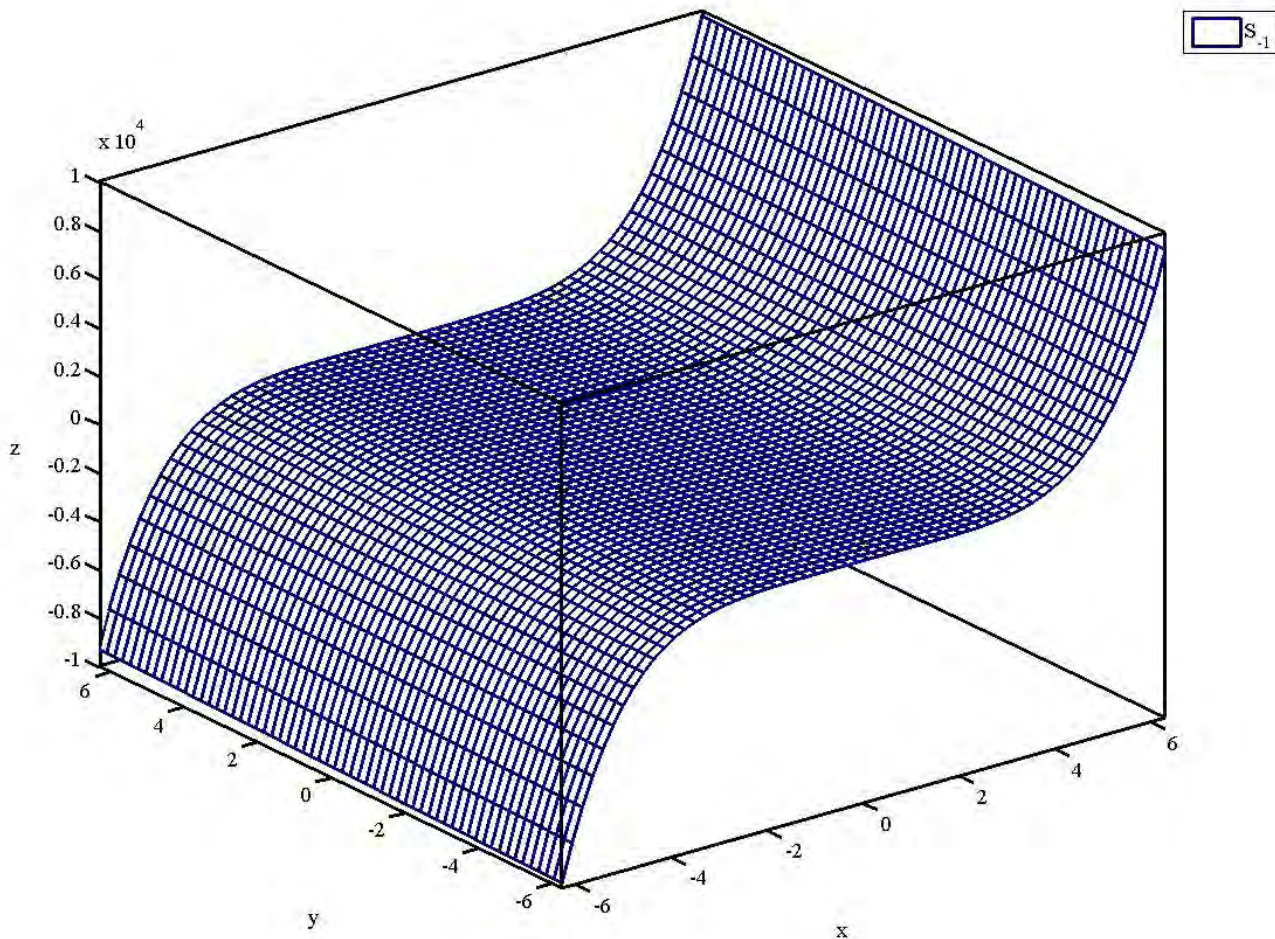
Σχήμα 187. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $pt^4 + t^3 + qt^2 + rt + w = 0$ . Οι τιμές  $p$ ,  $q$ ,  $w$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ , των  $y$ , των  $z$  και στην καμπύλη  $\kappa(t)$ .



Σχήμα 188. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^5+t^3+qt^2+rt+w=0$ . Η τιμή  $q$  ορίζει την  $C_q$ . Σχεδιάζοντας την ευθεία  $\epsilon$  για δεδομένα  $t, w$  έχουμε ότι η ευθεία  $\epsilon$  και η  $C_q$  τέμνονται στο σημείο  $X$  για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 189. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^5+qt^2+rt+w=0$ . Η τιμή  $q$  ορίζει την  $C_q$ . Σχεδιάζοντας την ευθεία  $\epsilon$  για δεδομένα  $t, w$  έχουμε ότι η ευθεία  $\epsilon$  και η  $C_q$  τέμνονται στο σημείο  $X$  για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.



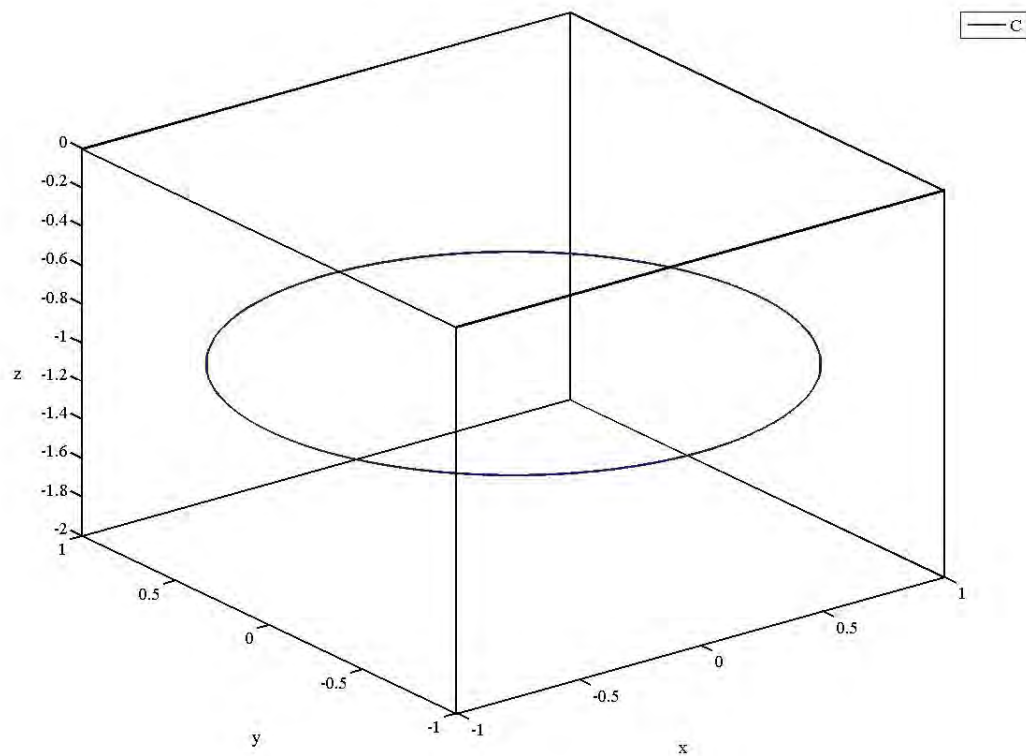
Σχήμα 190. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $t^5 - t^3 + qt^2 + rt + w = 0$ . Η τιμή  $q$  ορίζει την  $C_q$ . Σχεδιάζοντας την ευθεία  $\epsilon$  για δεδομένα  $t, w$  έχουμε ότι η ευθεία  $\epsilon$  και η  $C_q$  τέμνονται στο σημείο  $X$  για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

Ομοίως εργαζόμαστε για τον τύπο  $\alpha\eta\mu 2t + \beta\eta\mu t = 1$  και έχουμε το εξής νομογράφημα: Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την επιφάνεια  $S: r(t, \alpha) = (t, \alpha, \frac{1}{\eta\mu t} - 2\alpha \sin t)$  (βλ. Σχήμα 193). Για δεδομένα  $\alpha, \beta$  έχουμε την καμπύλη  $C_\alpha$  και το επίπεδο  $z = \beta$ . Η καμπύλη  $C_\alpha$  τέμνει το επίπεδο  $z = \beta$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

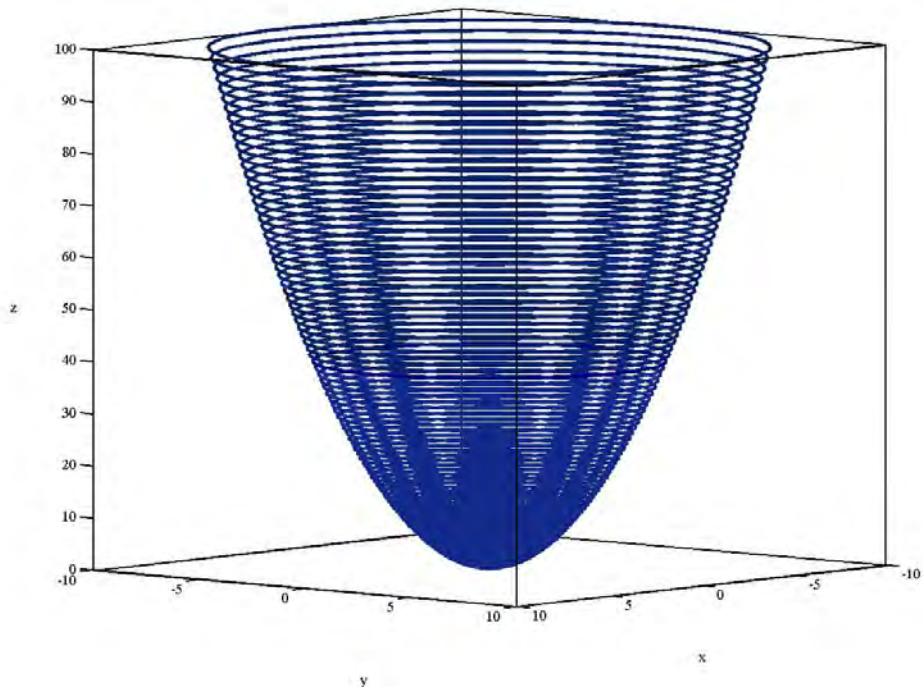
### 7.9 Επίλυση επίπεδου και σφαιρικού τριγώνου.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την επίλυση τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta, \gamma$  και την περιεχόμενη γωνία τους,  $A$ .

Αρχικά, θα περιγράψουμε ένα νομογράφημα για τα επίπεδα τρίγωνα (βλέπε σελίδα 82). Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την επιφάνεια  $S_1: r(t, A) = (t, A, -2t(1 + \sin A))$ , το επίπεδο  $S_2: r(t, s) = (t, s, t + s)$  και την παραβολή  $C: r(t) = (t, 0, t^2)$  (βλ. Σχήμα 194). Στην επιφάνεια  $S_1$  διαβάζουμε τις τιμές  $\beta, \gamma, A$  και στην παραβολή  $C$  την τιμή  $\beta + \gamma$ . Στην επιφάνεια  $S_1$  έχουμε το σημείο  $P_1$  με  $z$ -συντεταγμένη την  $p_1$  για δεδομένα  $\beta, \gamma$  και  $A$ . Στην παραβολή  $C$  έ-

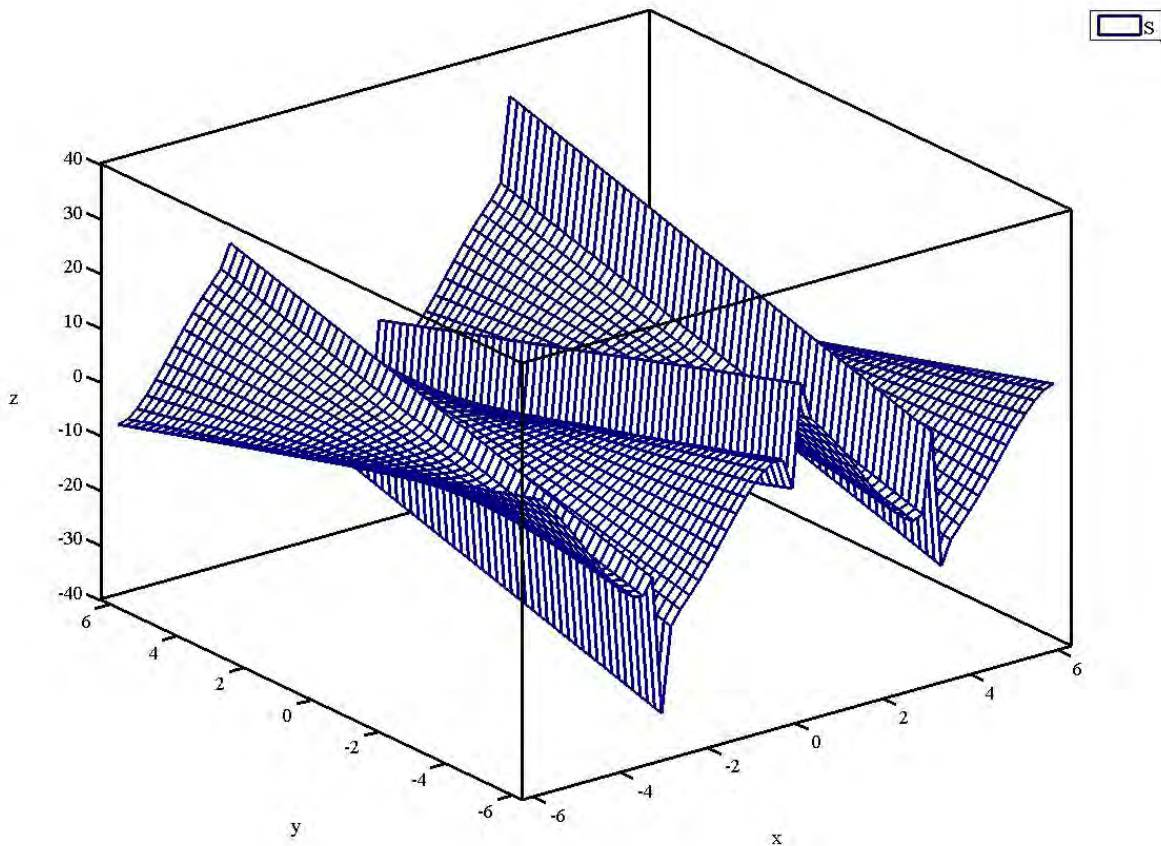


Σχήμα 191. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha\eta\mu\tau + \beta\sigma\upsilon\tau = \gamma$  με  $\gamma \neq 0$ . Οι τιμές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $t$  διαβάζονται στους άξονες των  $x$ , των  $y$ , των  $z$  και στον κύκλο  $C$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 192. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha\eta\mu\tau + \beta\sigma\upsilon\tau = \gamma$  με  $\gamma \neq 0$ . Η τιμή  $\gamma$  ορίζει τον κύκλο  $C_\gamma$ . Σχεδιάζοντας το επίπεδο  $S_2$  για δεδομένα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  έχουμε ότι ο  $C_\gamma$  και το  $S_2$  τέμνονται στο  $X$  για δεδομένο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.





Σχήμα 193. Νομογράφημα για την επίλυση της εξίσωσης  $\alpha\eta\mu 2t + \beta\eta\mu t = 1$ . Για δεδομένα  $\alpha, \beta$  έχουμε ότι η  $C_\alpha$  και το επίπεδο  $z = \beta$  τέμνονται στο  $X$  για δεδομένο  $t$ . η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

χουμε το  $P_2$  με  $z$ -συντεταγμένη  $p_2$  για δεδομένα  $\beta, \gamma$ . Διαβάζοντας στους άξονες των  $x, y$  τις τιμές  $p_1$  και  $p_2$  αντίστοιχα, έχουμε ότι η ευθεία  $\epsilon: r(t) = (p_1, p_2, t)$  τέμνει το  $S_2$  στο  $X$  με  $z$ -συντεταγμένη  $\alpha$ . Η τιμή  $\sqrt{\alpha}$  είναι η ζητούμενη.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε δυο νομογραφήματα για τον αντίστοιχο τύπο ( $\sigma\alpha\alpha = \sigma\sigma\upsilon\beta\sigma\sigma\eta\gamma + \eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\sigma\upsilon\Lambda$ ) στα σφαιρικά τρίγωνα (βλέπε σελίδα 88).

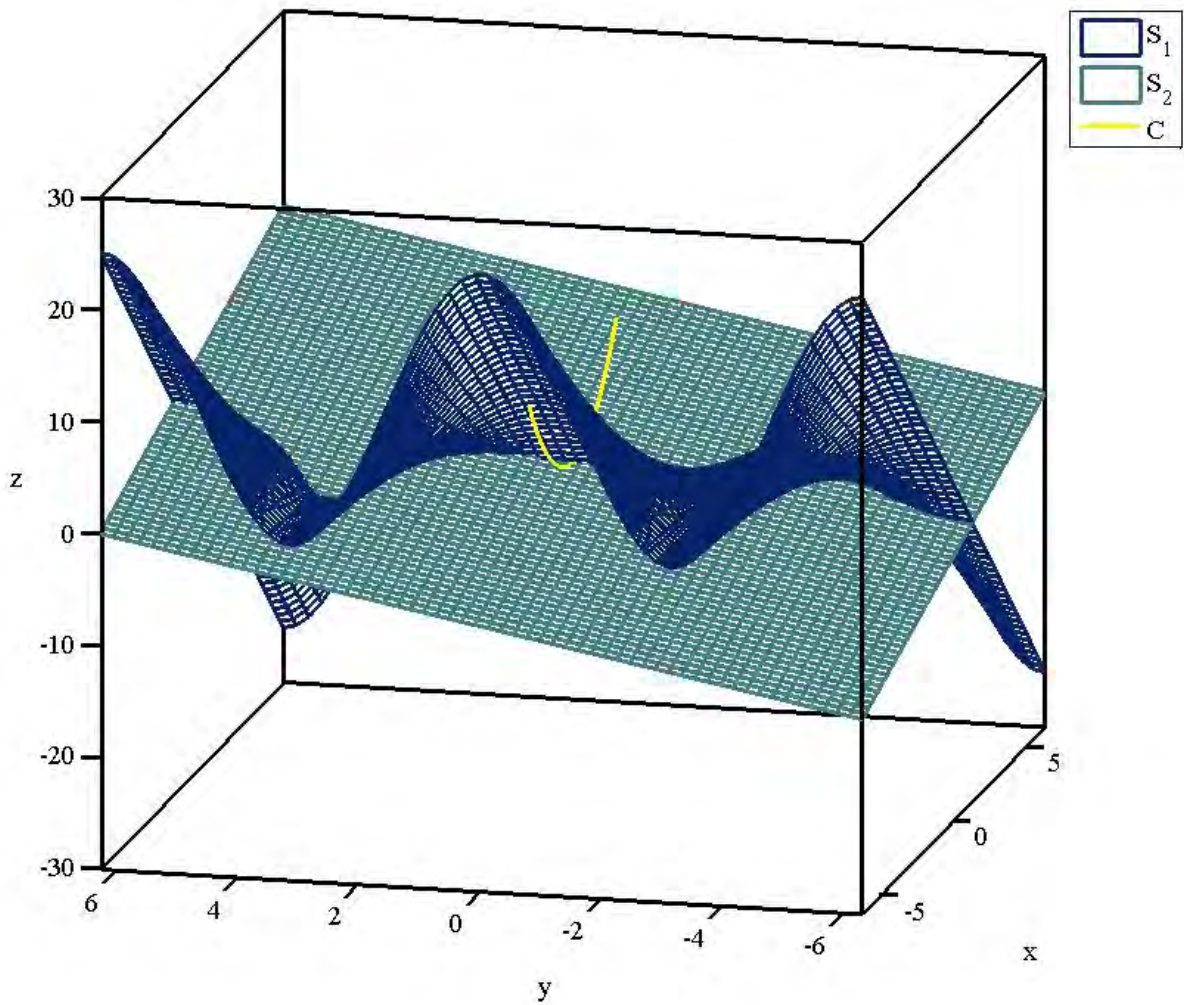
1) Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα  $Oxyz$  συντεταγμένων την ευθεία  $\epsilon: r(t) = (1 + \sigma\upsilon\eta t, 1 - \sigma\upsilon\eta t, -1)$  (βλ. Σχήμα 195). Όλοι οι άξονες διαβαθμίζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης. Οι τιμές  $\beta - \gamma, \beta + \gamma$  και  $\alpha$  διαβάζονται, αντίστοιχα, στους άξονες των  $x, y, z$  ως  $-\frac{1}{\sigma\upsilon\eta(\beta - \gamma)}, -\frac{1}{\sigma\upsilon\eta(\beta + \gamma)}$  και  $-\frac{1}{1 + 2\sigma\upsilon\alpha}$  παίρνοντας  $OB = \beta$  και  $OG = \gamma$ . Ενώ, στην ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο

$A$  διαβάζουμε την τιμή  $A$  για  $t = A$ . Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν το επίπεδο  $\Pi$ . Το  $\Pi$  τέμνει τον άξονα των  $z$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\eta\left(-\frac{1+t}{t}\right)$  είναι η ζητούμενη.

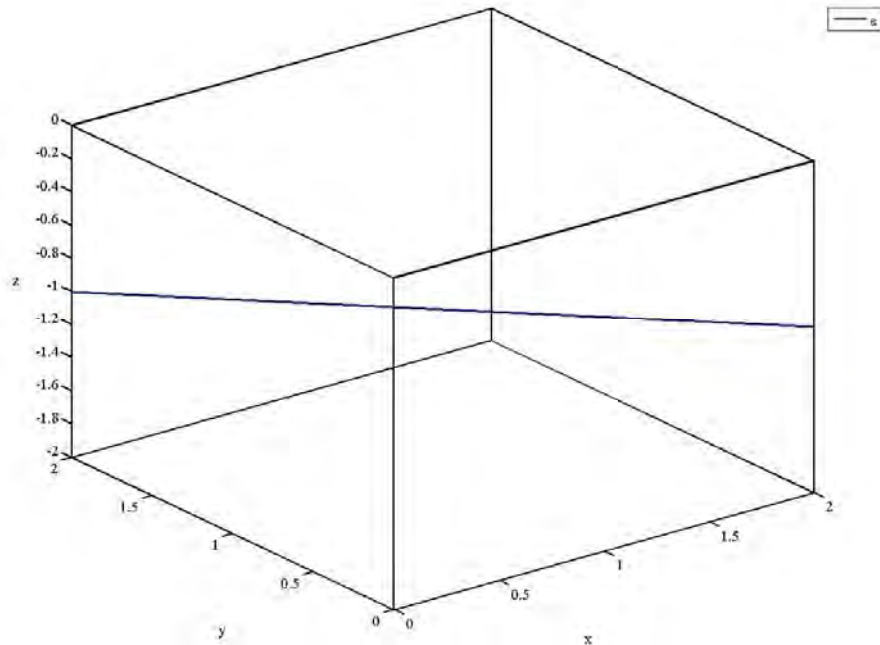
2) Παραλλαγή του παραπάνω νομογραφήματος είναι, αντί να διαβάσουμε τις τιμές  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $A$  στην καμπύλη  $C$  και στους άξονες των  $x, y, z$ , αντίστοιχα, να σχεδιάσουμε τις παρακάτω επιφάνειες:

$S_1: r(t,s) = (t,s,\sigma\upsilon\eta t(1 + \sigma\upsilon\eta s))$ ,  $S_2: r(t,s) = (t,s,\sigma\upsilon\eta t(1 - \sigma\upsilon\eta s))$  και το επίπεδο  $S_3: r(t,s) = (t,s,t+s)$  (βλ. Σχήμα 196).

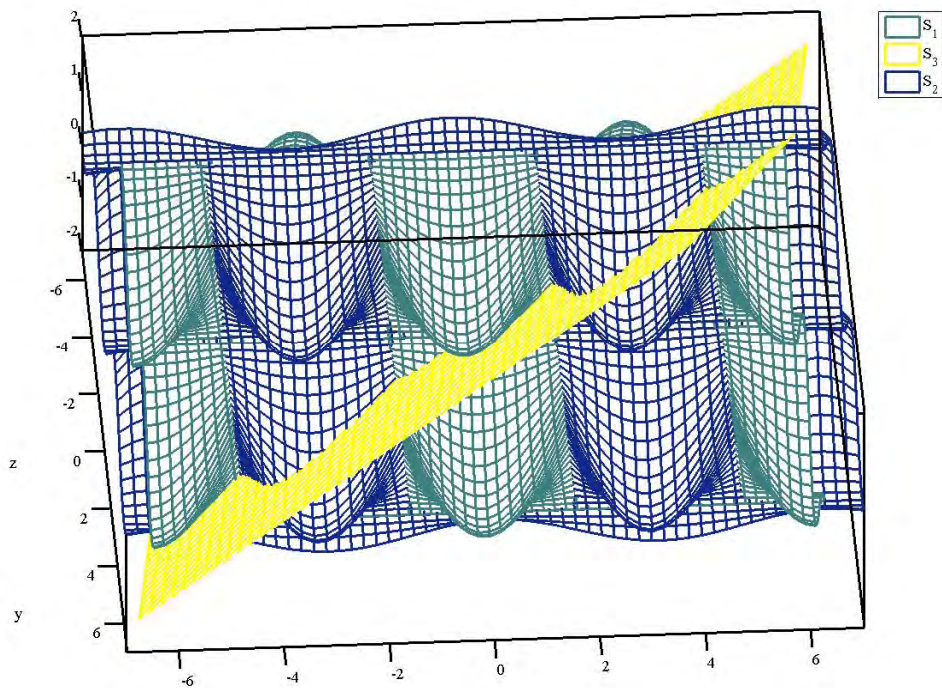
Στις επιφάνειες  $S_1, S_2$  διαβάζουμε την τιμή  $s$  ως  $A$ . Ακόμη η τιμή  $t$  διαβάζεται στην  $S_1$  ως  $\beta-\gamma$  και στην  $S_2$  ως  $\beta+\gamma$ . Αν  $p_1, p_2$  οι αντίστοιχες  $z$ -συντεταγμένες των  $S_1, S_2$  για δεδομένα  $\beta, \gamma, A$  η ευθεία  $e: r(t)=(p_1, p_2, t)$  τέμνει την  $S_3$  στο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή τοξουν  $\left(\frac{t}{2}\right)$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 194. Νομογράφημα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta, \gamma$  και την περιεχόμενη τους γωνία  $A$ . Οι τιμές  $\beta\gamma$  και  $A$  διαβάζονται στην επιφάνεια  $S$  στο σημείο  $P_1$  και η τιμή  $\beta+\gamma$  στην  $C$  στο  $P_2$ . Οι  $z$ -συντεταγμένες των  $P_1, P_2$  διαβάζονται, αντίστοιχα, ως  $x$ -συντεταγμένη και  $y$ -συντεταγμένη της ευθείας  $e$ . Η ευθεία  $e$  τέμνει το  $S_2$  στο σημείο  $X$  με  $z$ -συντεταγμένη  $\alpha$ . Η τιμή  $\sqrt{\alpha}$  είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 195. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta, \gamma$  και την περιεχόμενη τους γωνία  $A$ . Οι τιμές  $\beta-\gamma, \beta+\gamma, A$  και  $\alpha$  διαβάζονται στους άξονες των  $x, y$ , την ευθεία  $\epsilon$  και στον άξονα των  $z$ , αντίστοιχα.

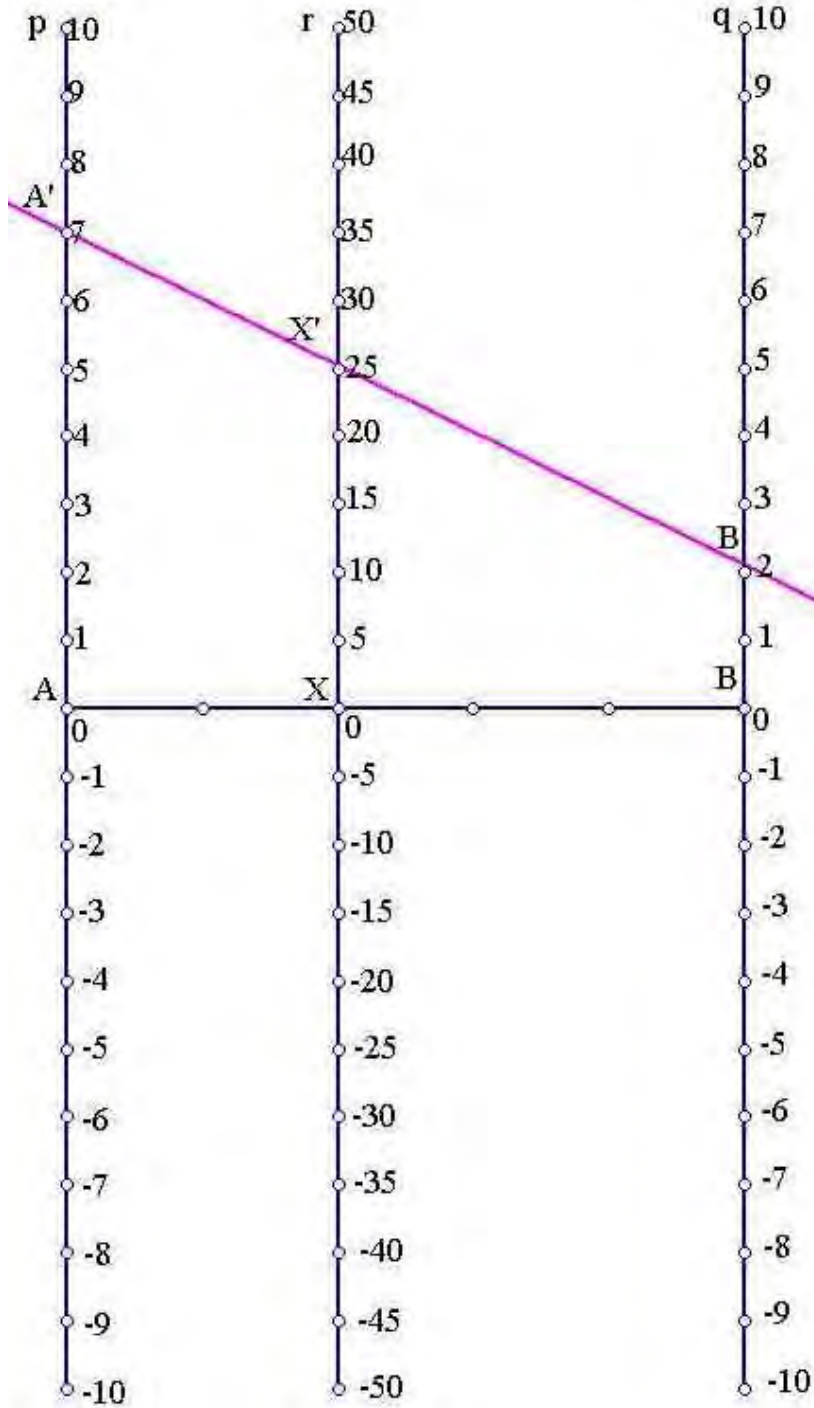


Σχήμα 196. Νομογράφημα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta, \gamma$  και την περιεχόμενη τους γωνία  $A$ . Οι τιμές  $\beta-\gamma$  και  $A$  διαβάζονται στην επιφάνεια  $S_1$ , στο σημείο  $P_1$  και οι τιμές  $\beta+\gamma$  και  $A$  στην επιφάνεια  $S_2$ , στο σημείο  $P_2$ . Οι  $z$ -συντεταγμένες των  $P_1, P_2$  διαβάζονται, αντίστοιχα, ως  $x$ -συντεταγμένη και  $y$ -συντεταγμένη της ευθείας  $\epsilon$ . Η ευθεία  $\epsilon$  τέμνει την  $S_3$  στο σημείο  $X$  για κάποιο  $t$ . Η τιμή  $t$  είναι η ζητούμενη.

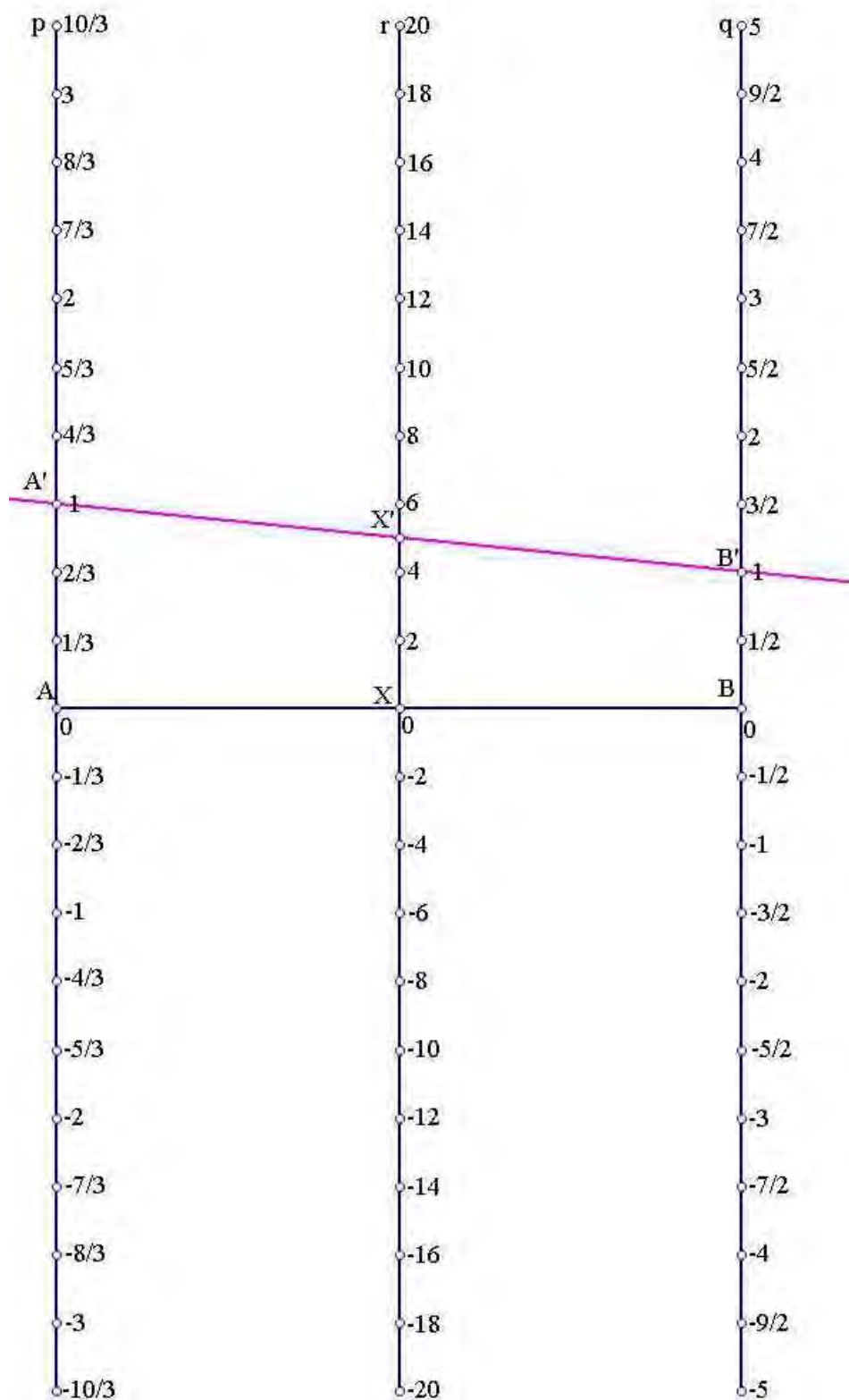
## Παράρτημα



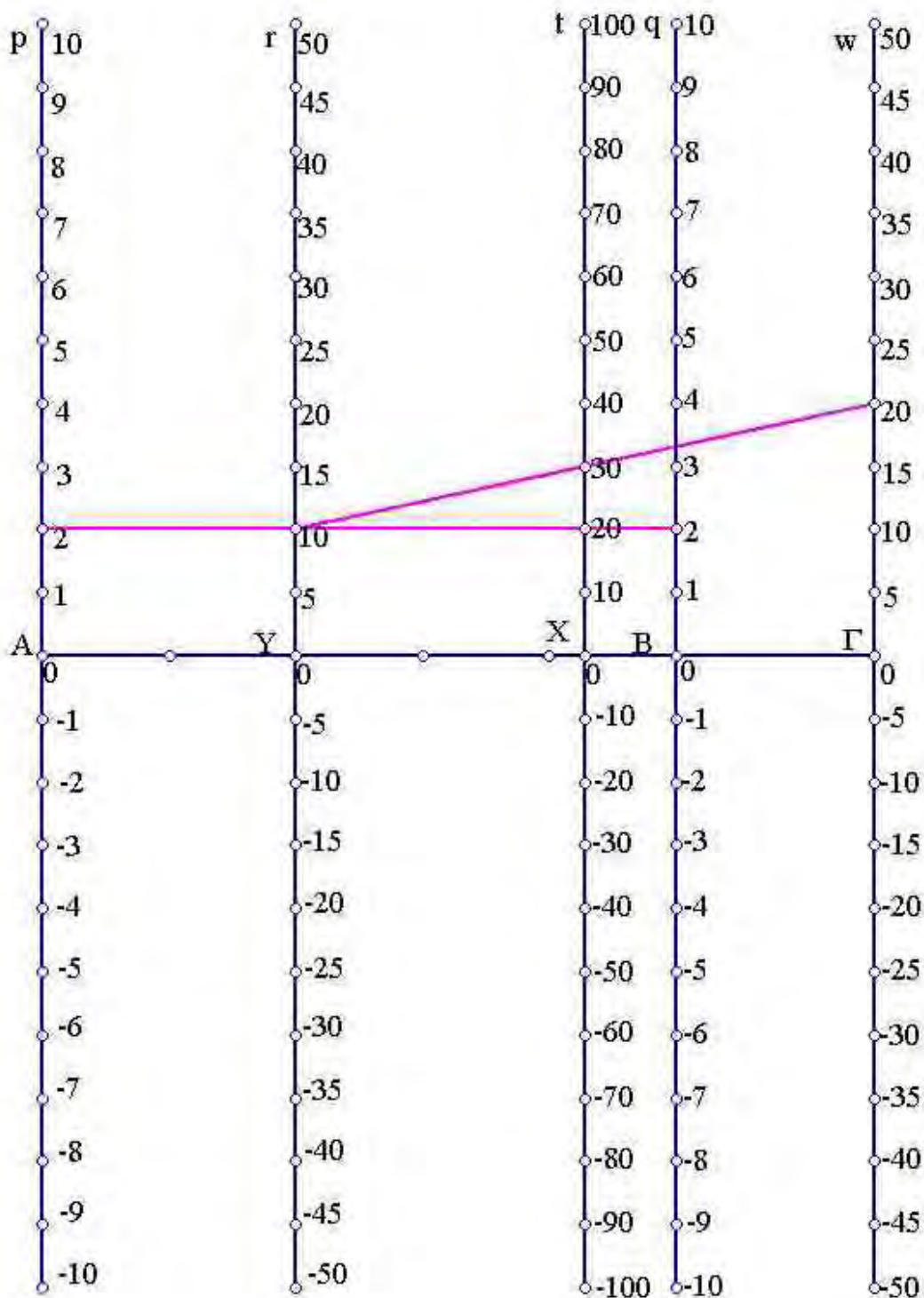
Κεφάλαιο 2



Σχήμα 1. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $3\alpha+2\beta$  με  $\alpha=7$  και  $\beta=2$ .

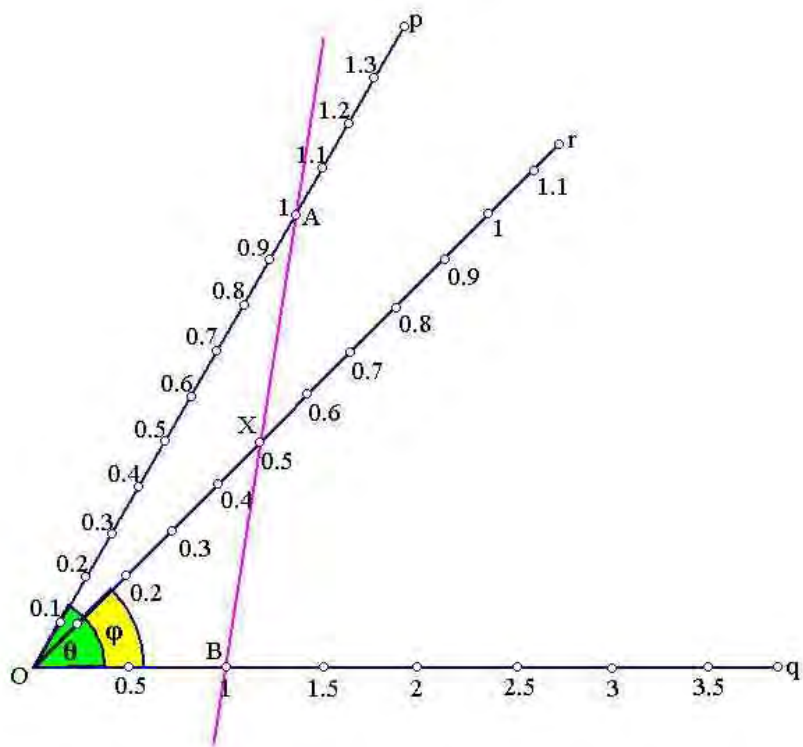


Σχήμα 2. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $3\alpha+2\beta$  με  $\alpha=7$  και  $\beta=2$ .

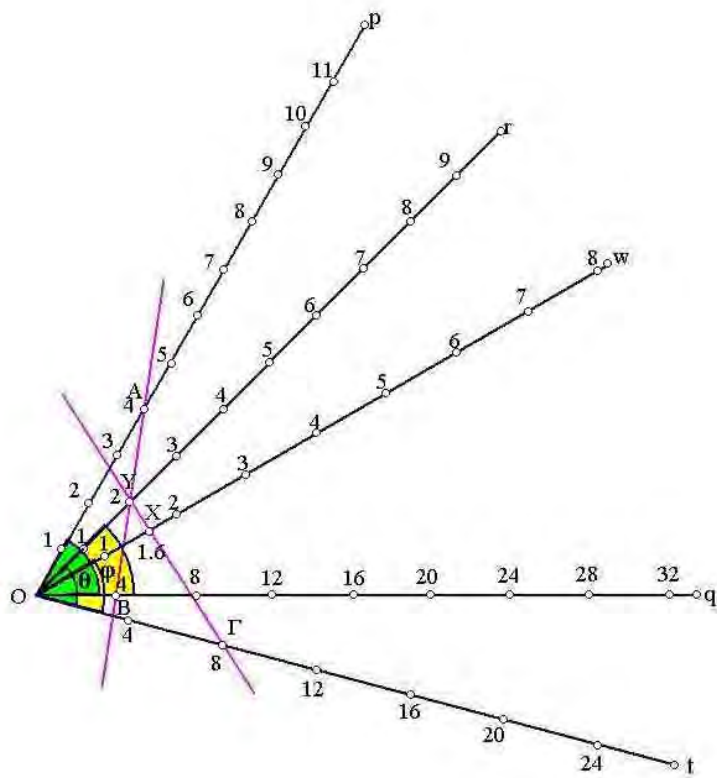


Σχήμα 3. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $3\alpha+2\beta+\gamma$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=20$ .

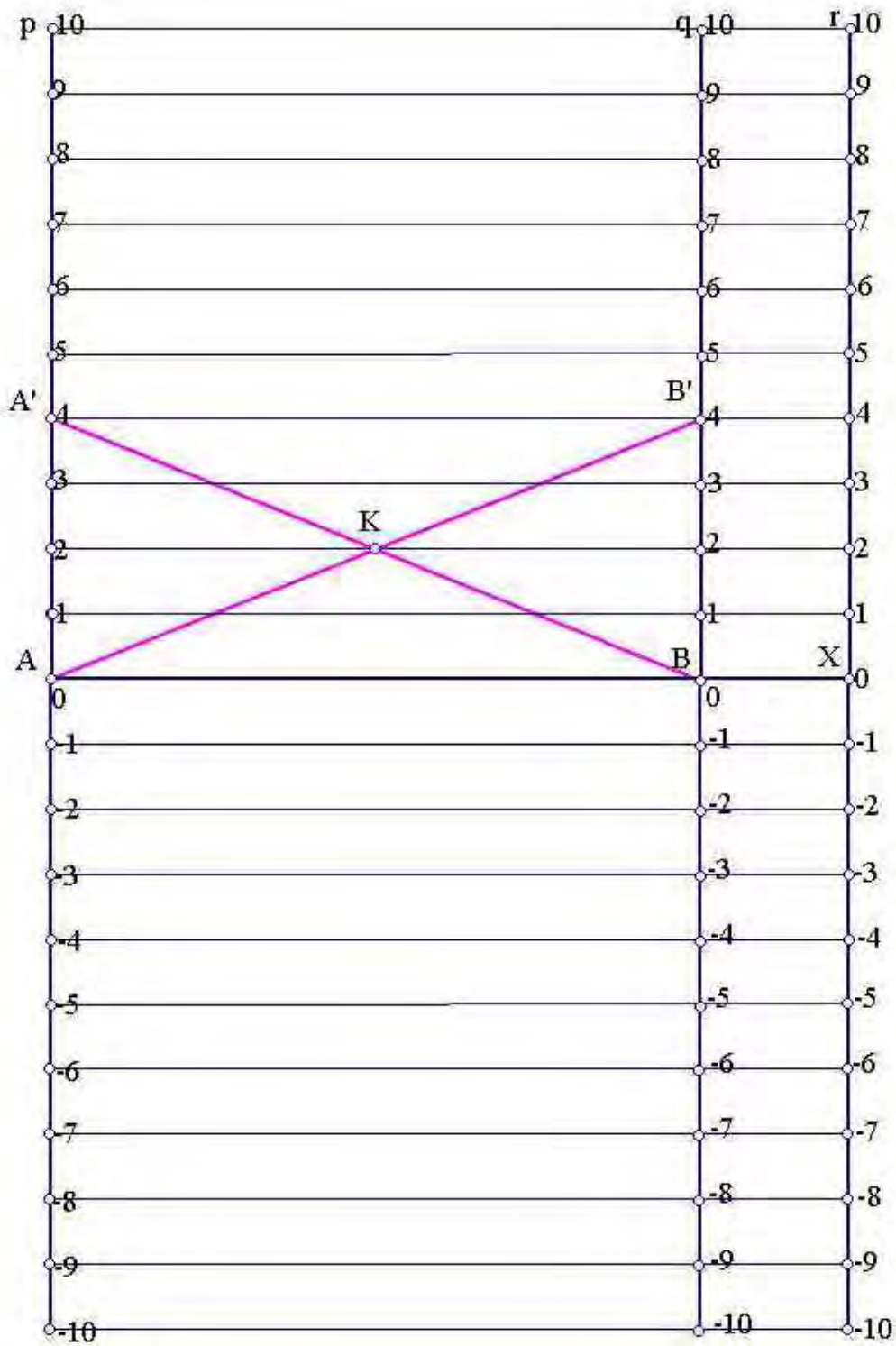




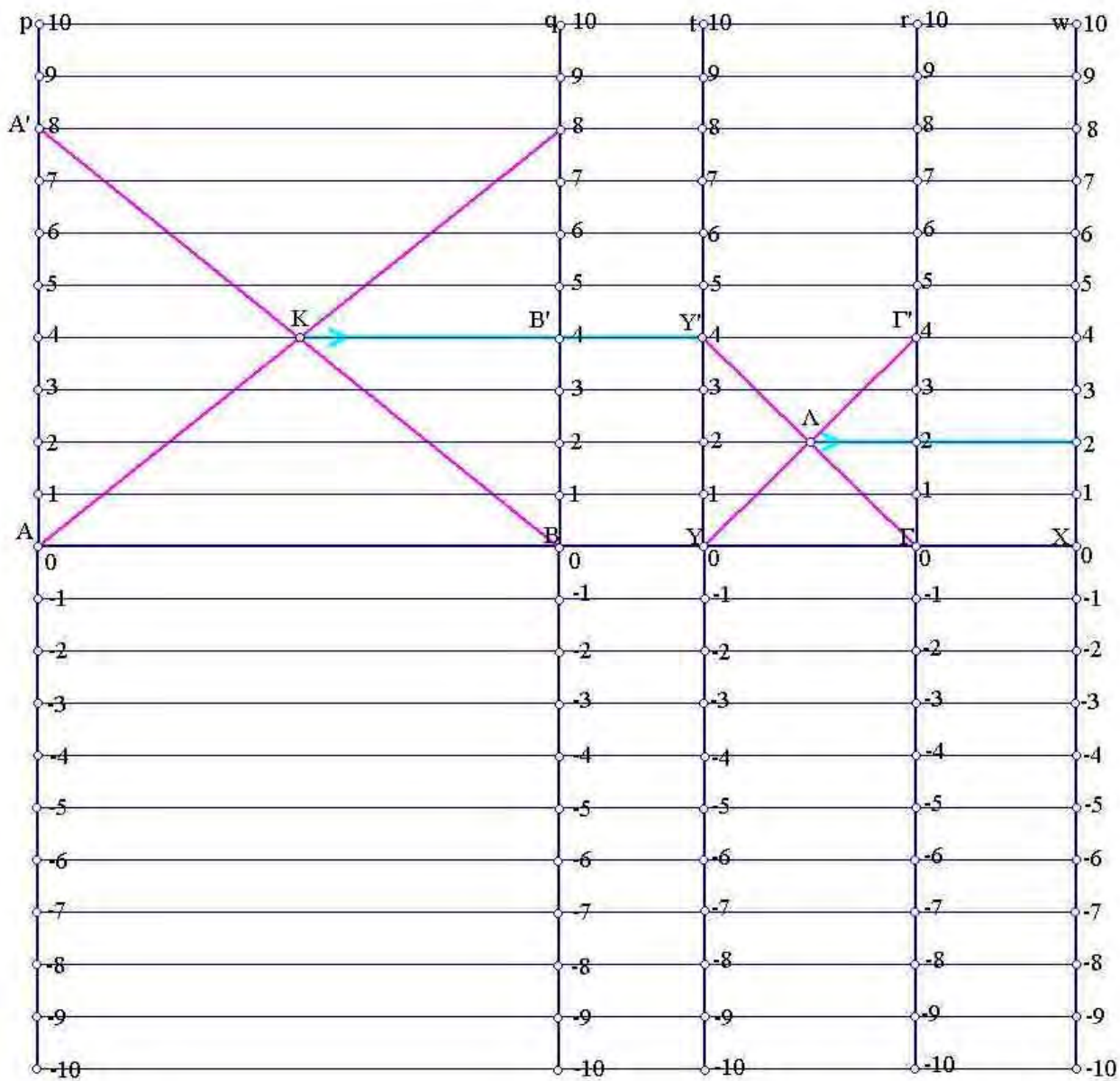
Σχήμα 4. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  με  $\alpha=1$  και  $\beta=2$ .



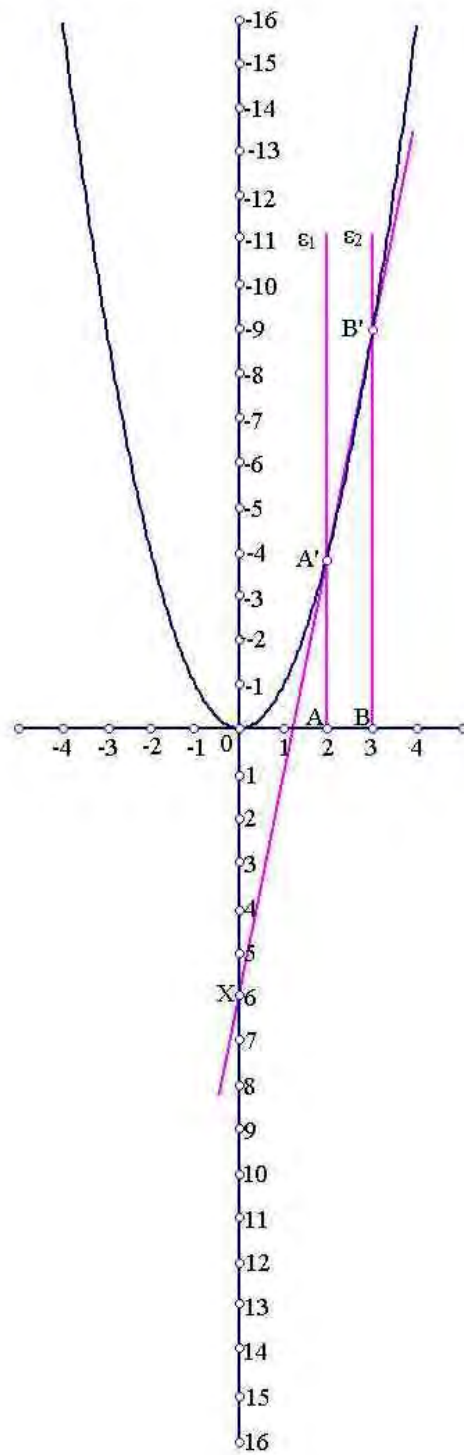
Σχήμα 5. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$  με  $\alpha=4$ ,  $\beta=4$  και  $\gamma=8$ .



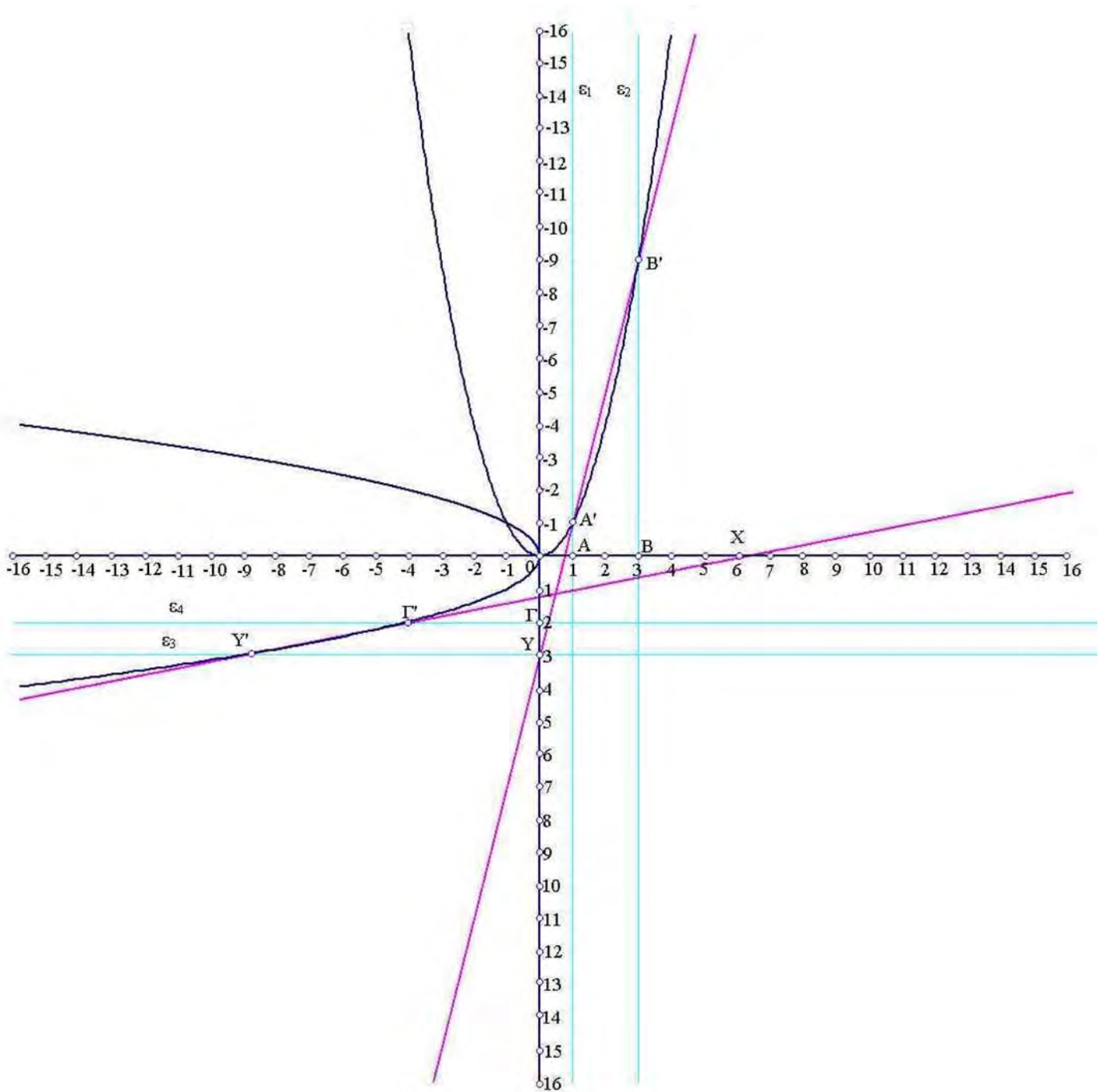
Σχήμα 6. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  με  $\alpha=4$  και  $\beta=4$ .



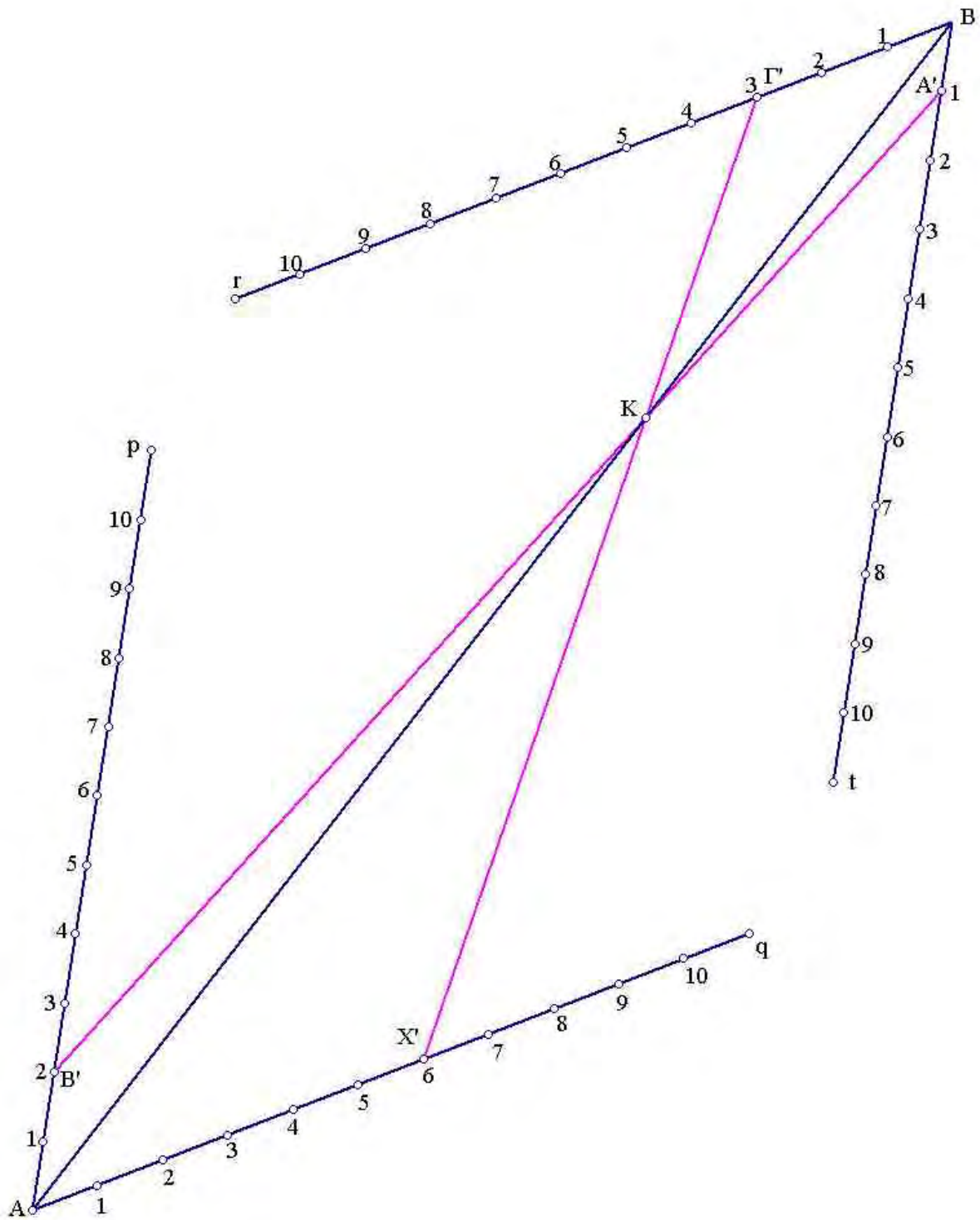
Σχήμα 7. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$  με  $\alpha=8, \beta=8$  και  $\gamma=4$ .



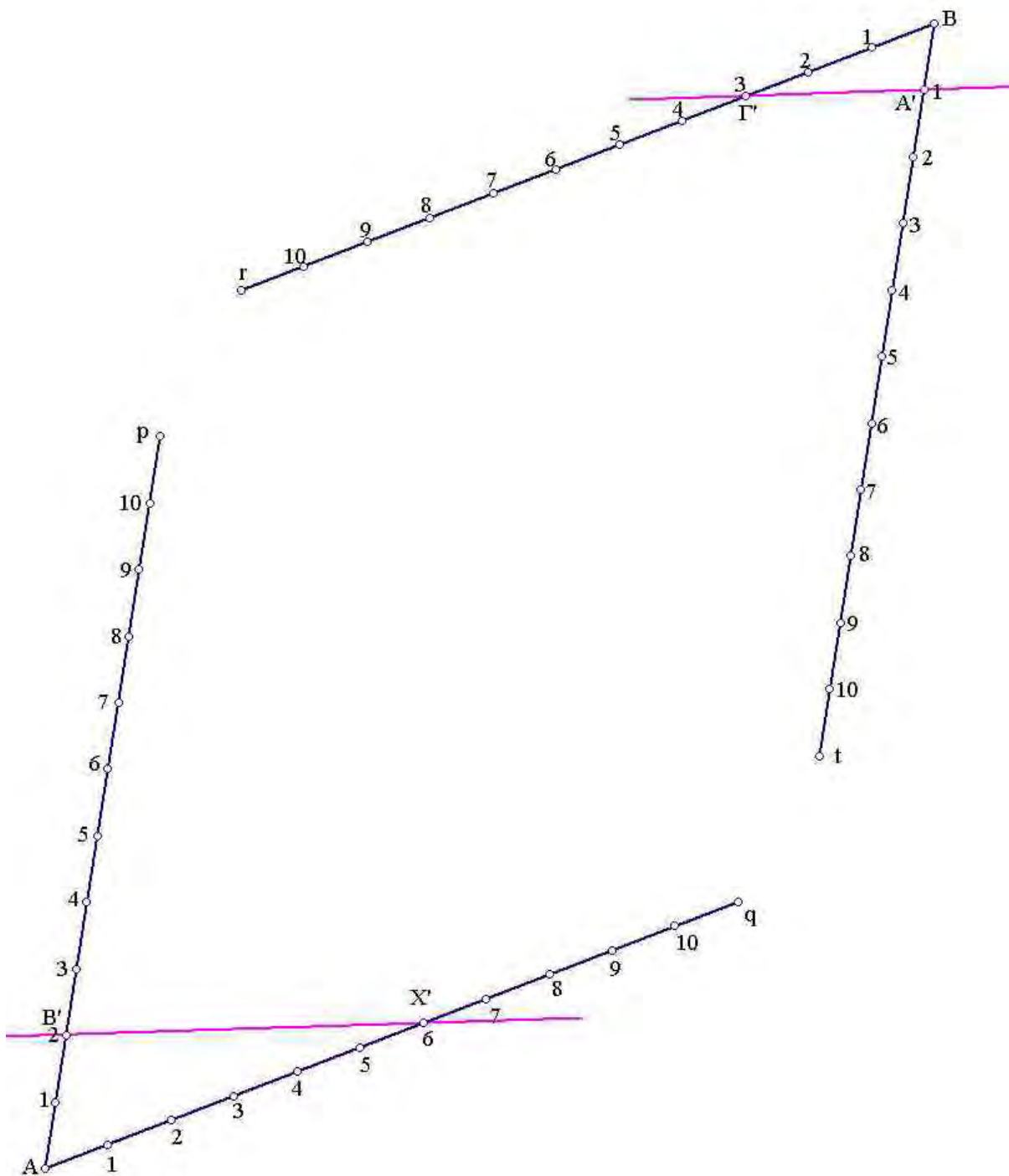
Σχήμα 8. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\alpha\beta$  με  $\alpha=2$  και  $\beta=3$ .



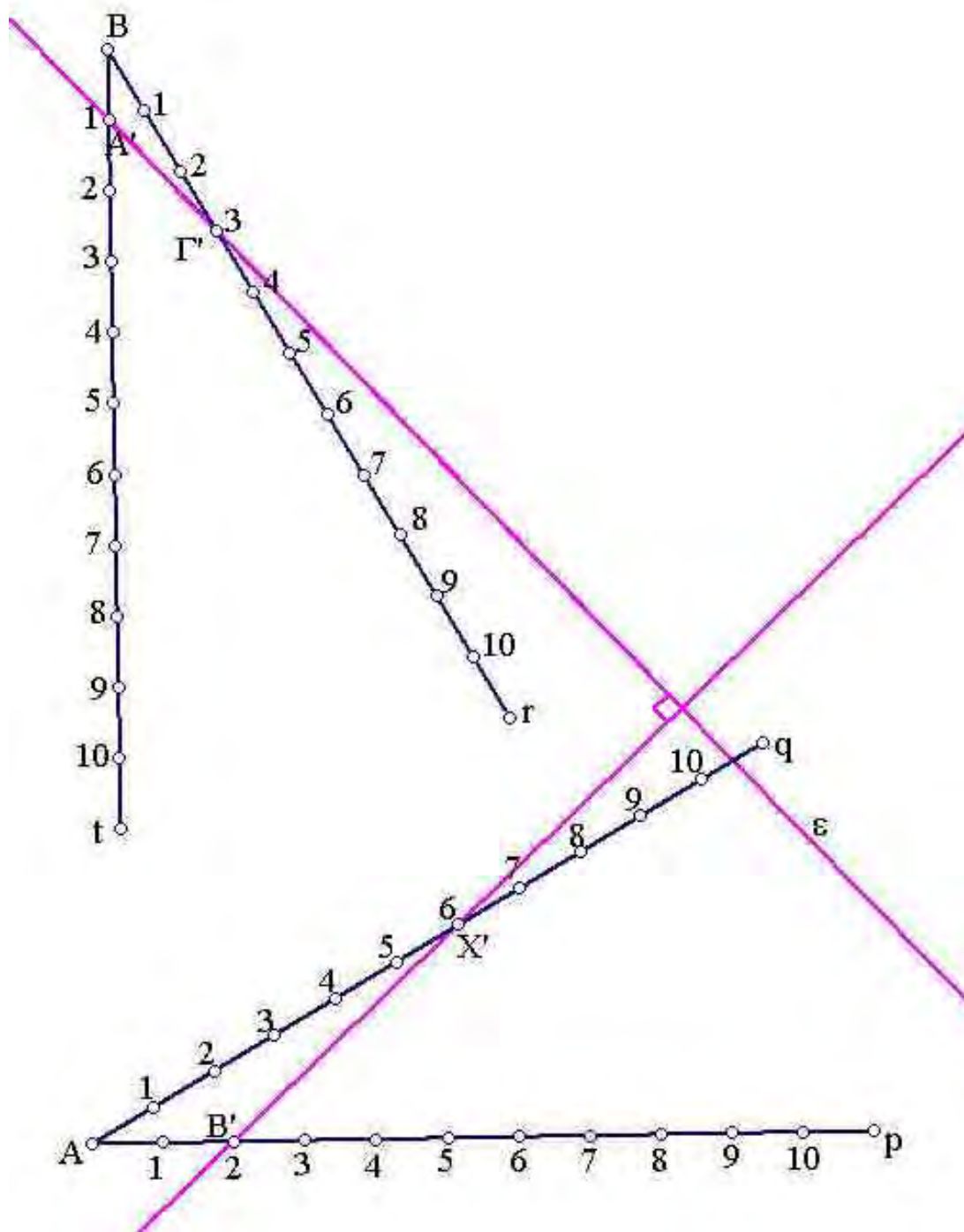
Σχήμα 9. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\alpha\beta\gamma$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=3$  και  $\gamma=2$ .



Σχήμα 10. Παράδειγμα υπολογισμού του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  με  $\alpha=1, \beta=2$  και  $\gamma=3$ .

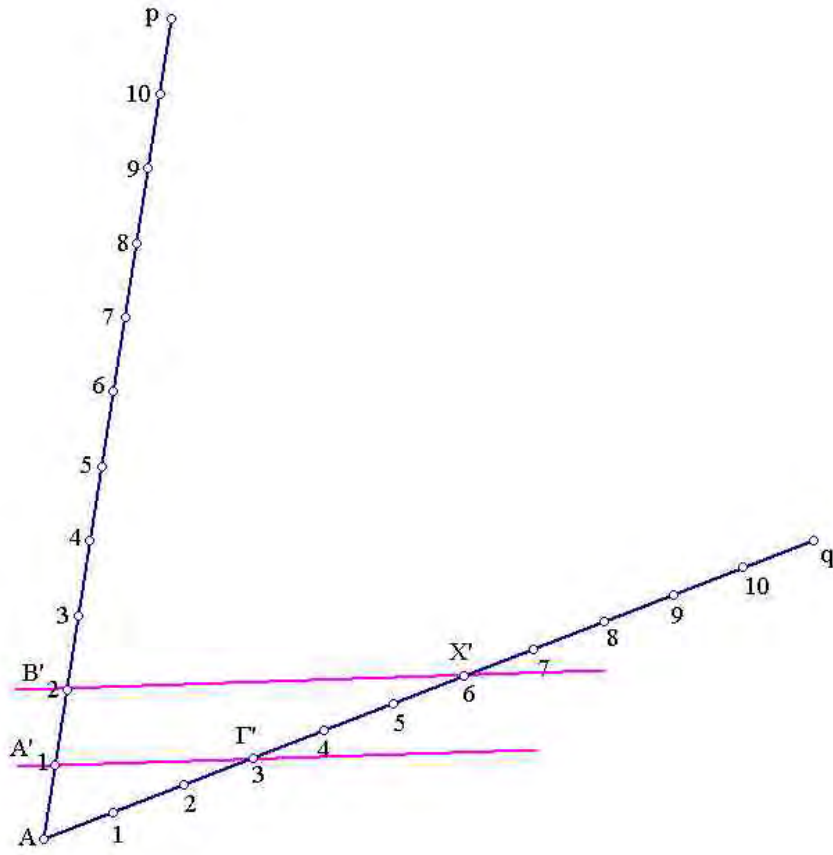


Σχήμα 11. Παράδειγμα υπολογισμού του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=3$ .

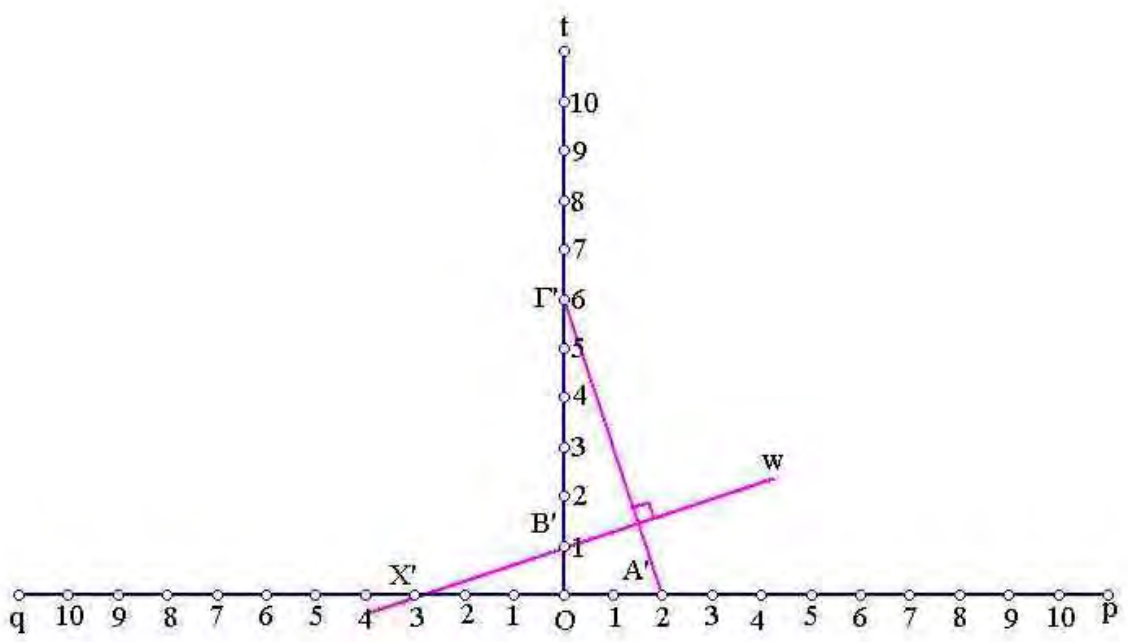


Σχήμα 12. Παράδειγμα υπολογισμού του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=3$ .

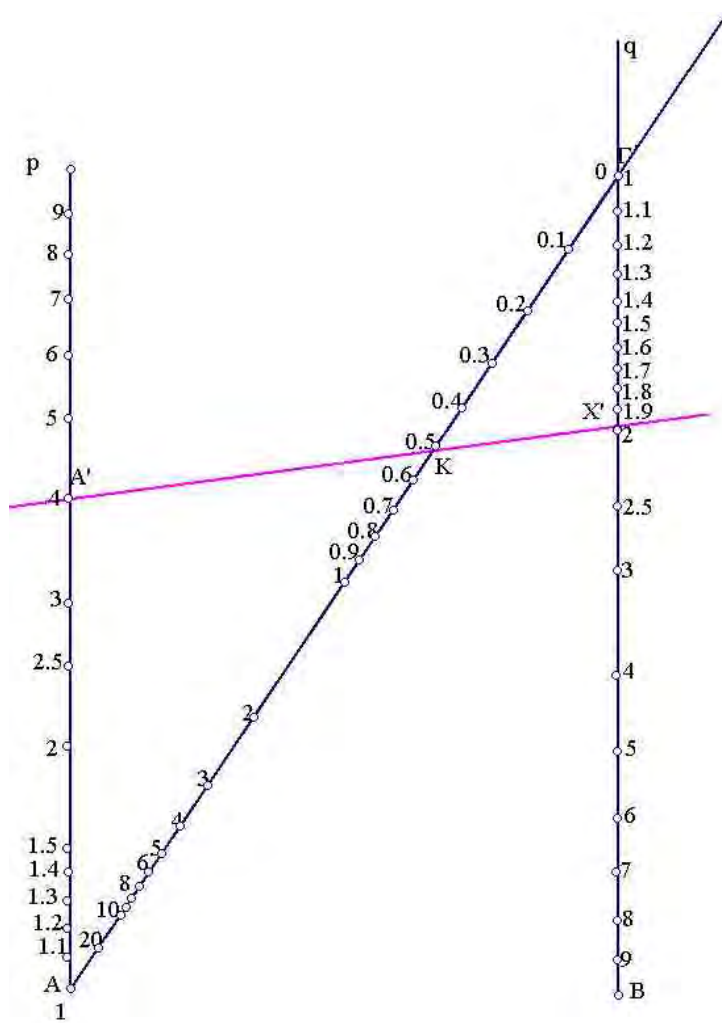




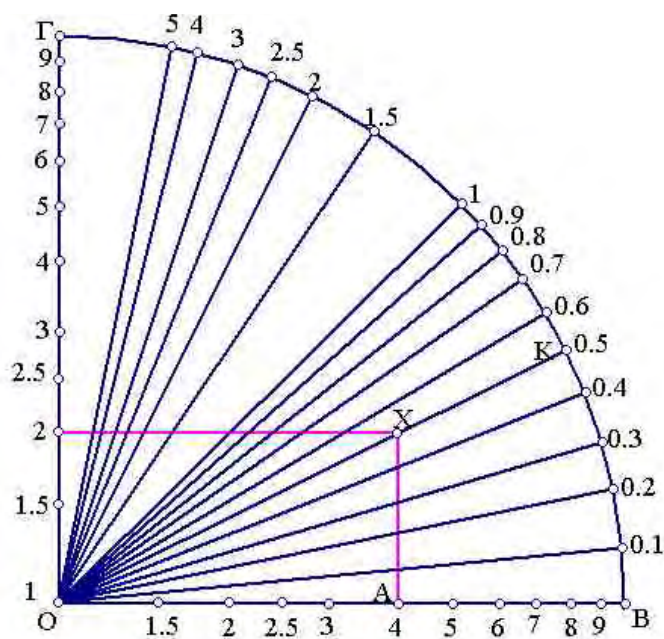
Σχήμα 13. Παράδειγμα υπολογισμού του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  με  $\alpha=1, \beta=2$  και  $\gamma=3$ .



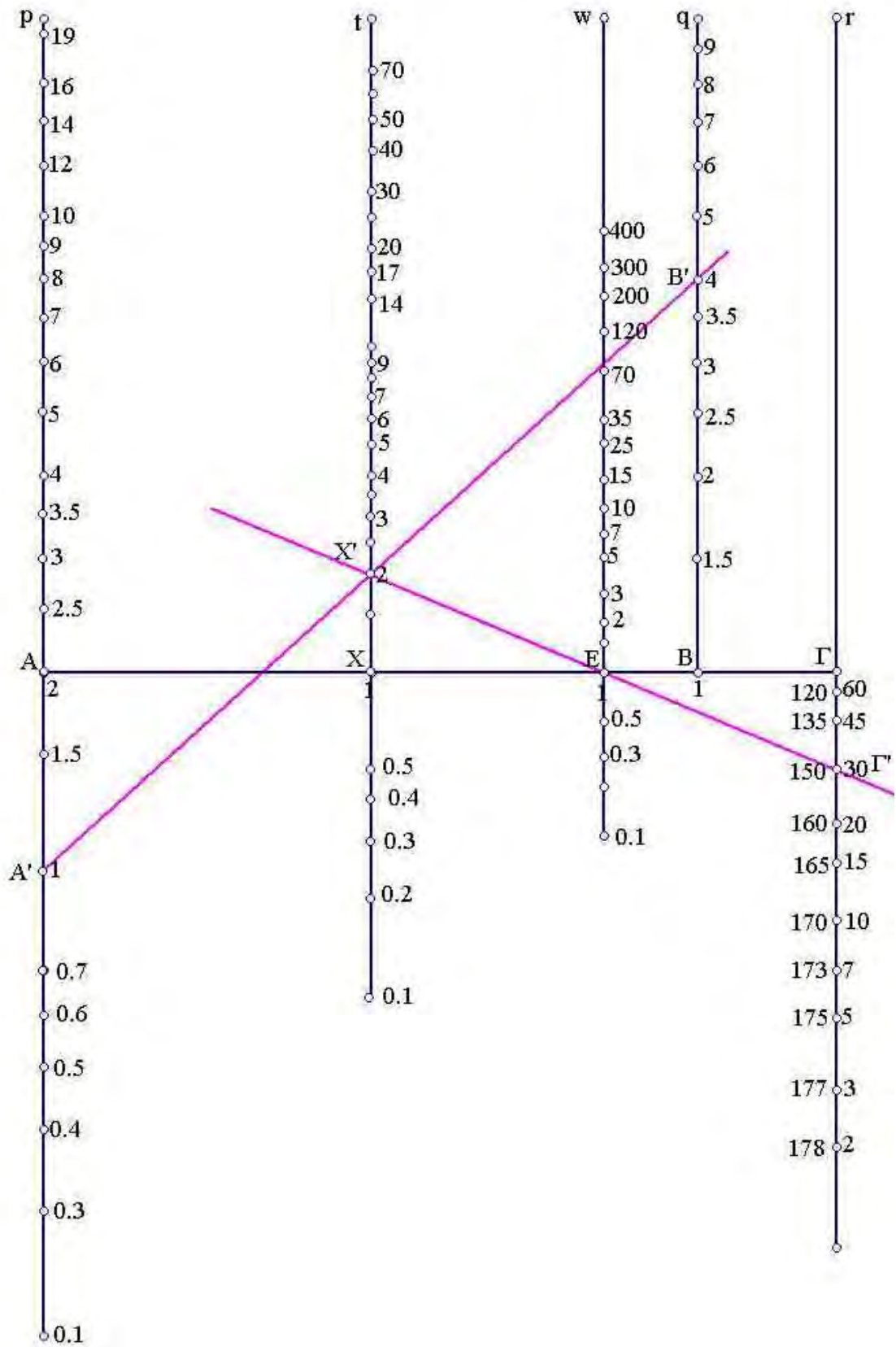
Σχήμα 14. Παράδειγμα υπολογισμού του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$  με  $\alpha=2, \beta=1$  και  $\gamma=6$ .



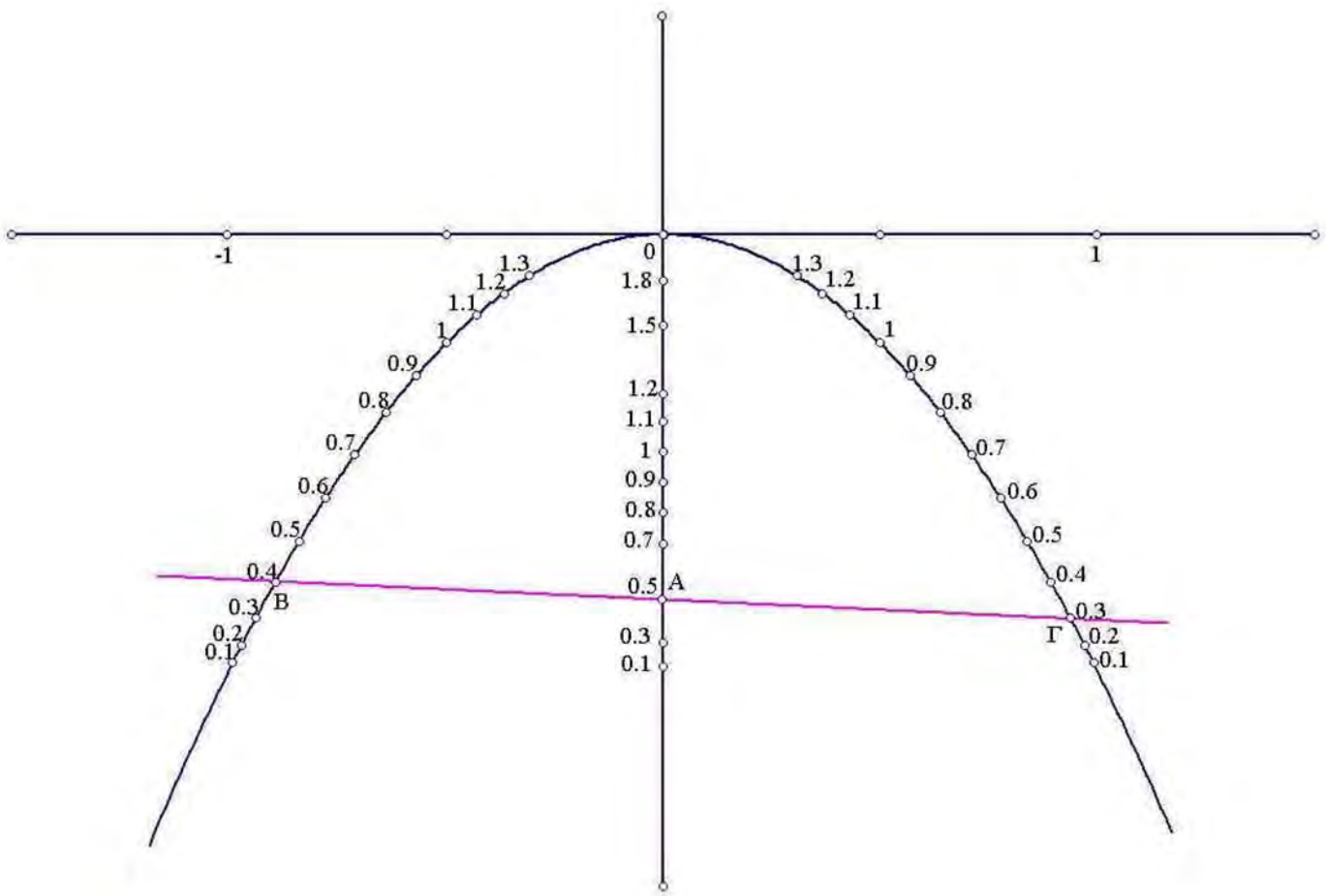
Σχήμα 15. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\alpha^z$  με  $\alpha=4$  και  $\kappa=0.5$ .



Σχήμα 16. Παράδειγμα υπολογισμού της παράστασης  $\alpha^z$  με  $\alpha=4$  και  $\kappa=0.5$ .

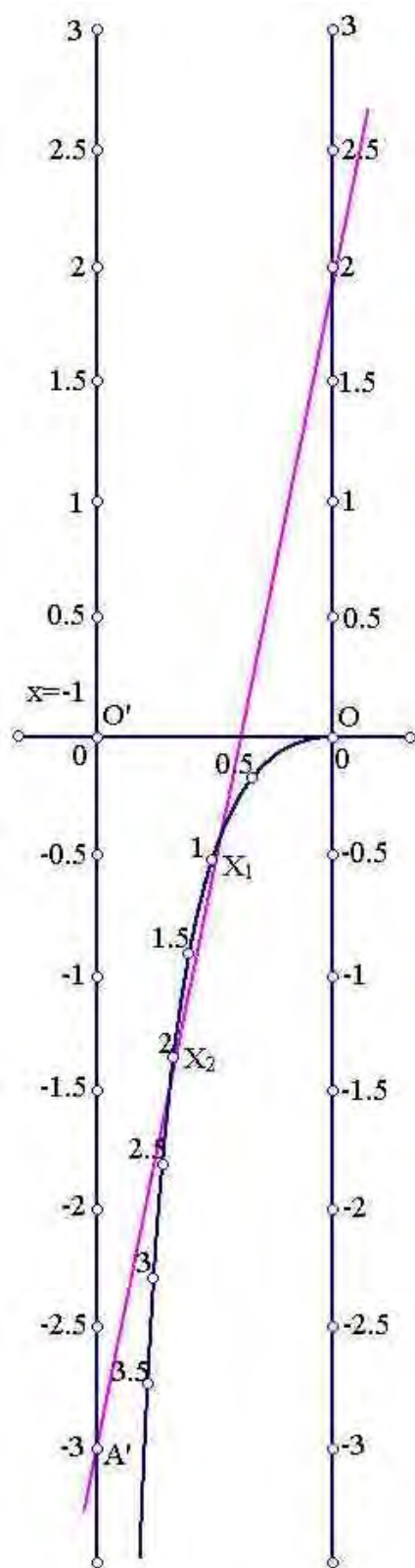


Σχήμα 17. Παράδειγμα υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου με πλευρές  $\alpha=1$ ,  $\beta=4$  και την περιεχόμενη τους γωνία  $\hat{\Gamma}=30^\circ$ .

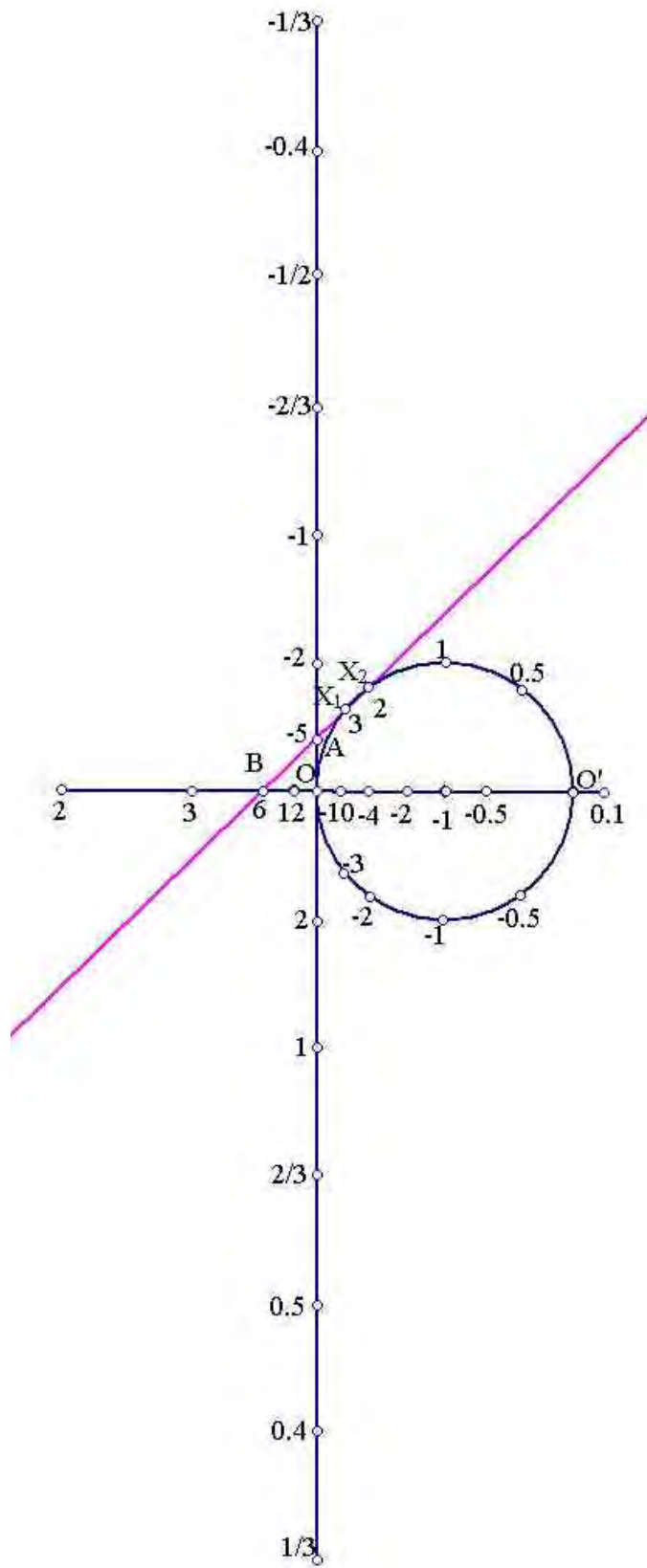


Σχήμα 18. Παράδειγμα υπολογισμού της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές  $\beta=0.4$  και  $\gamma=0.3$ .

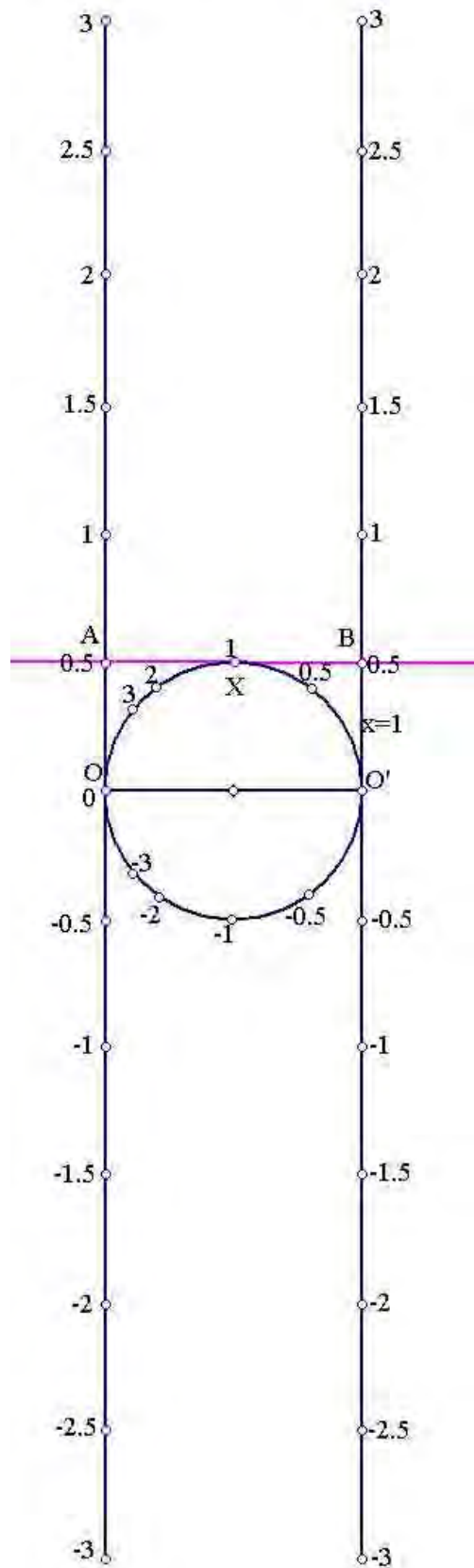
Κεφάλαιο 3



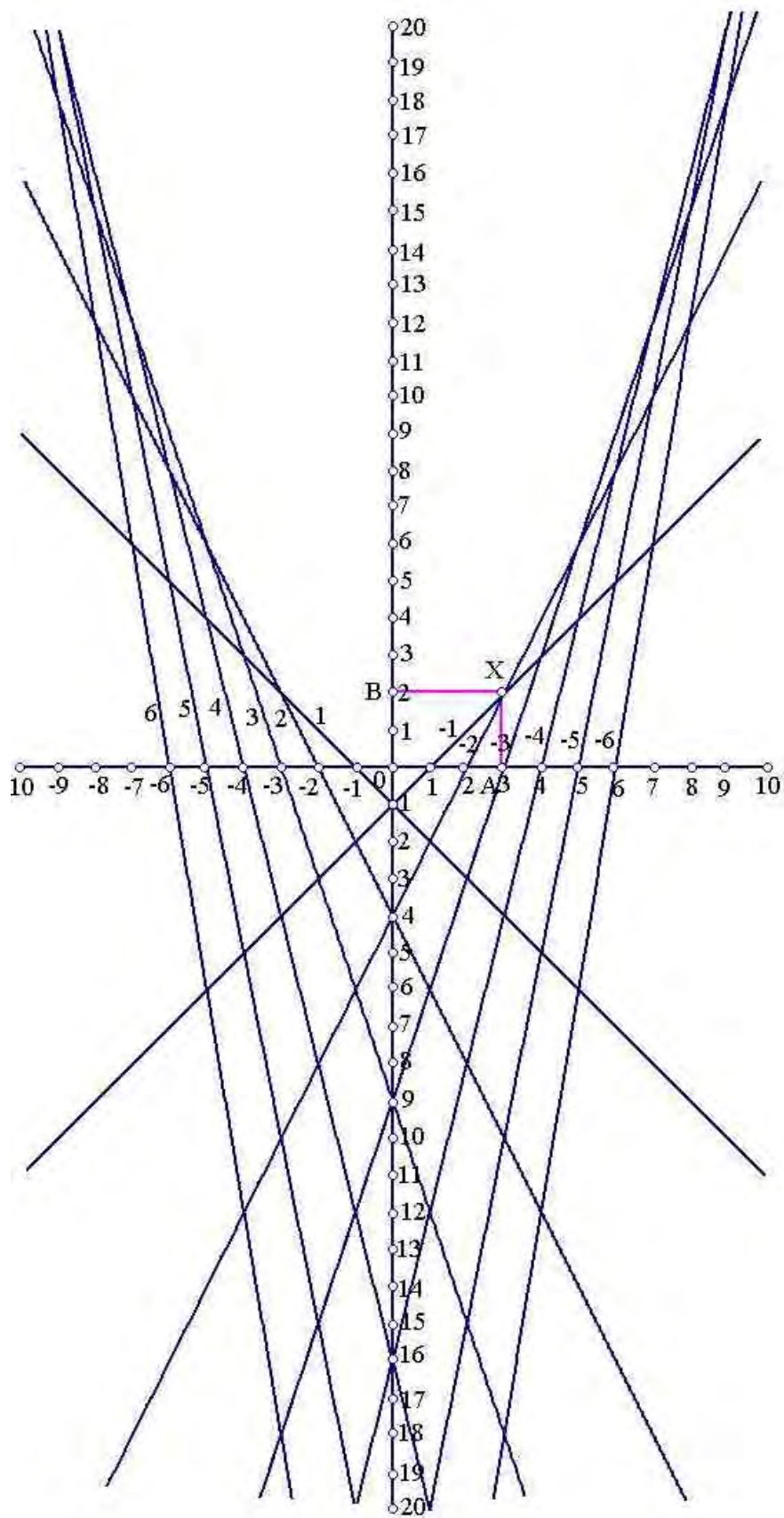
Σχήμα 19. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .



Σχήμα 20. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

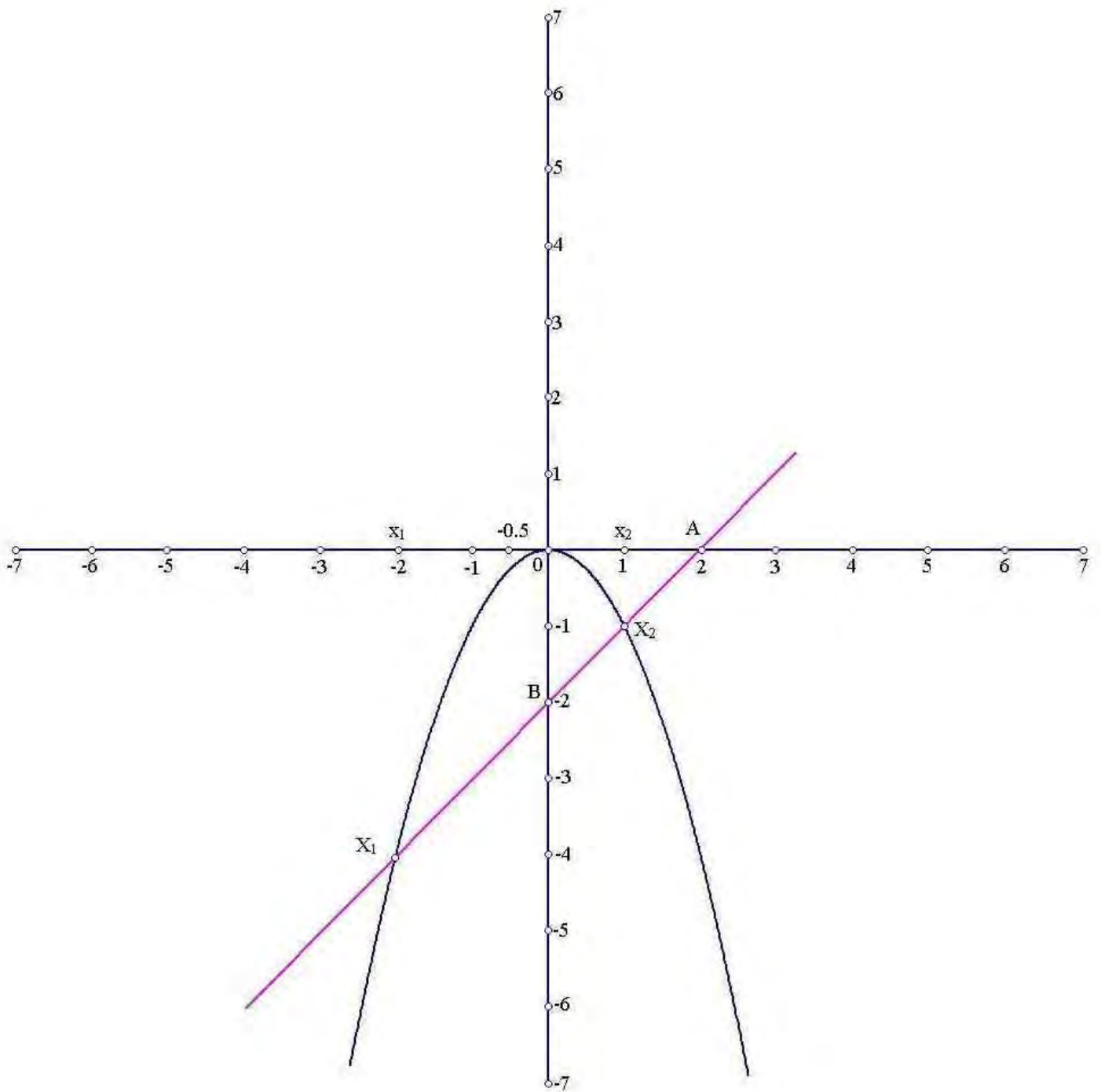


Σχήμα 21. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2 - 2x + 1 = 0$ .

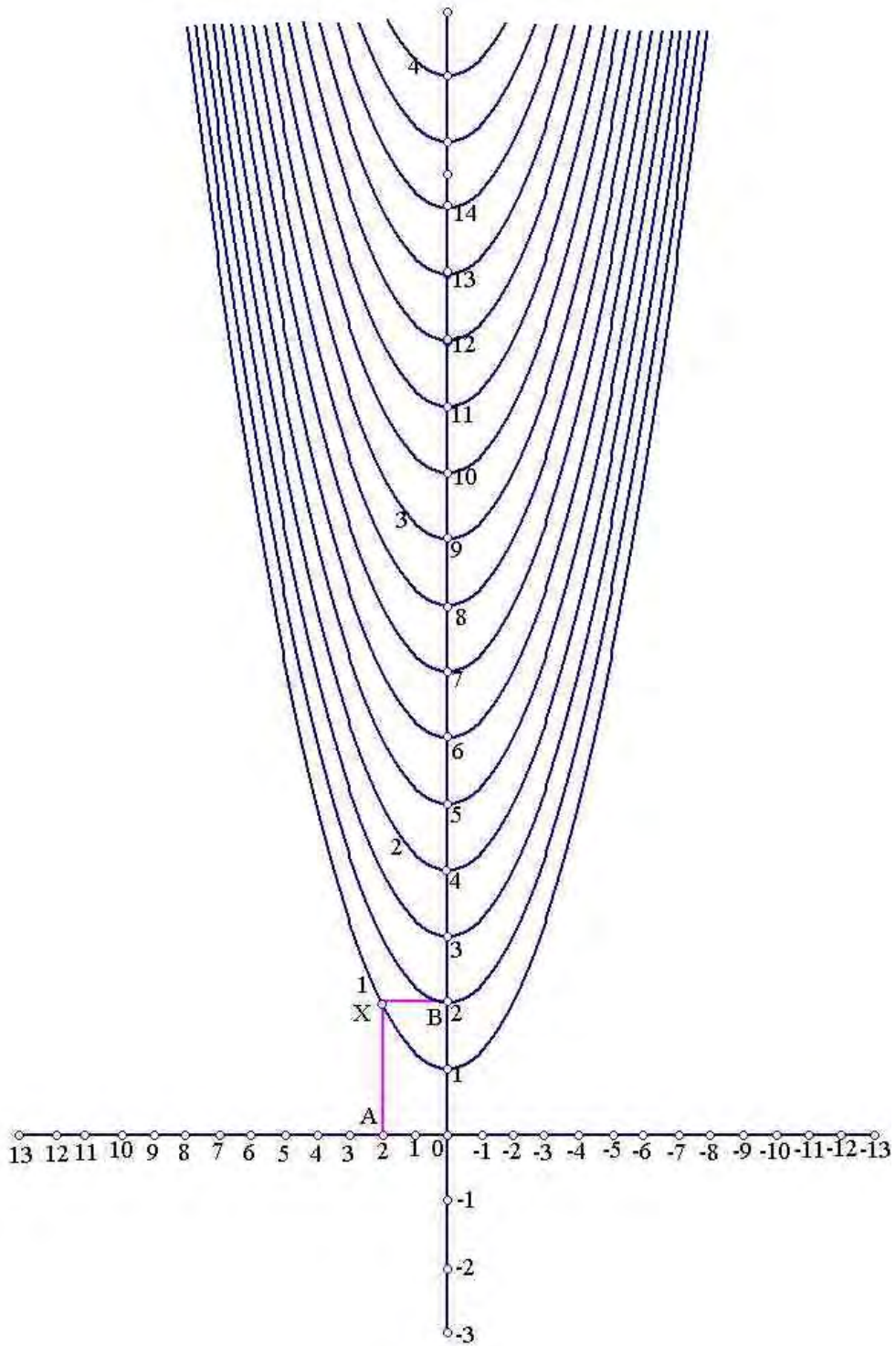


Σχήμα 22. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2+3x+2=0$ .

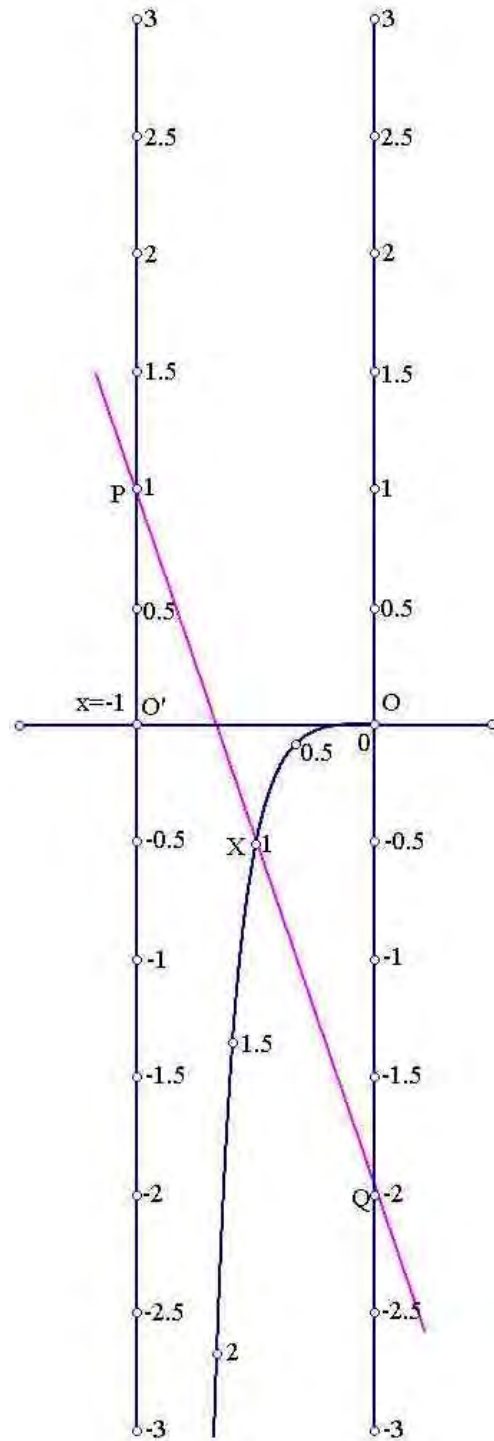




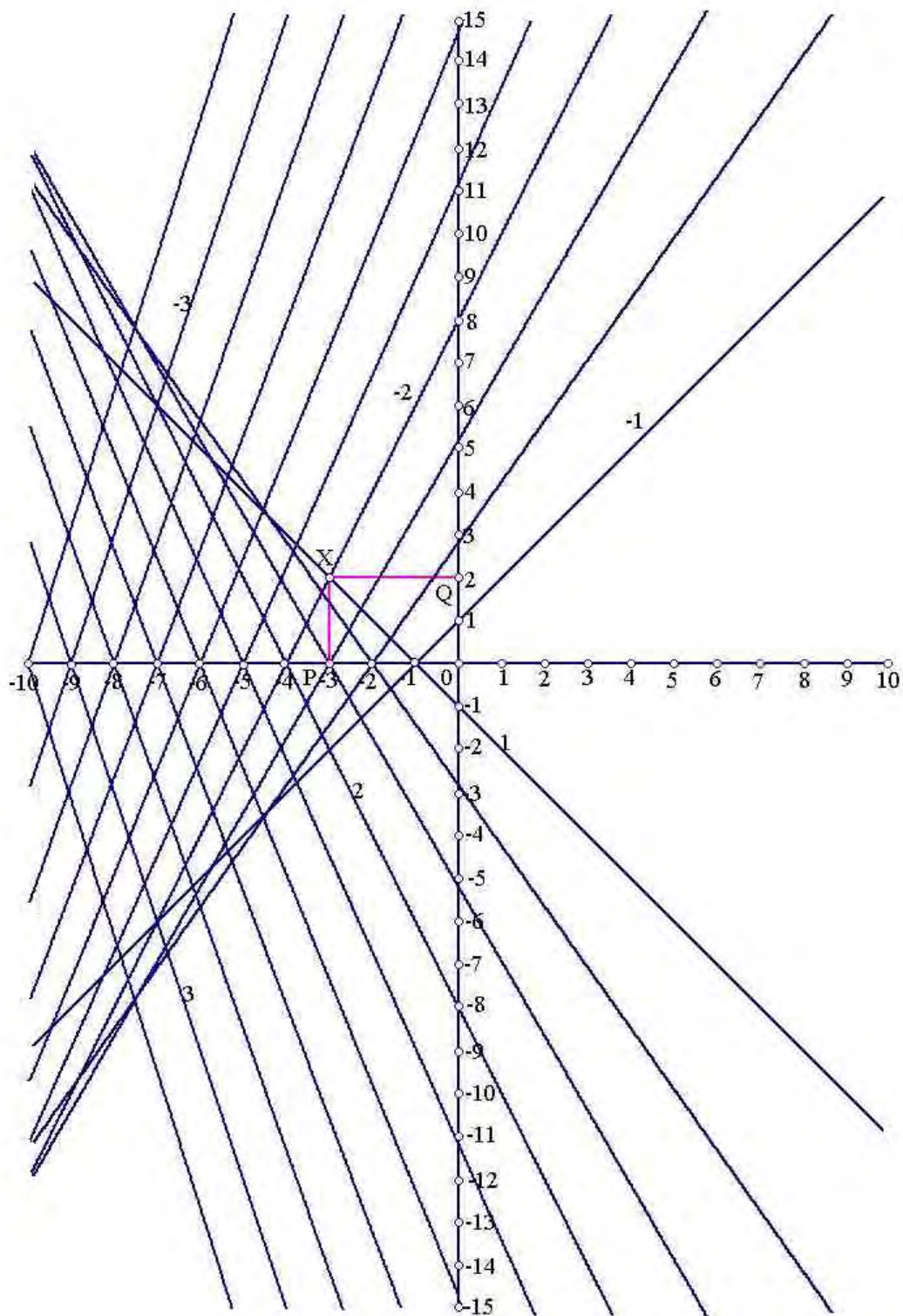
Σχήμα 23. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2+x+2.5=0$ .



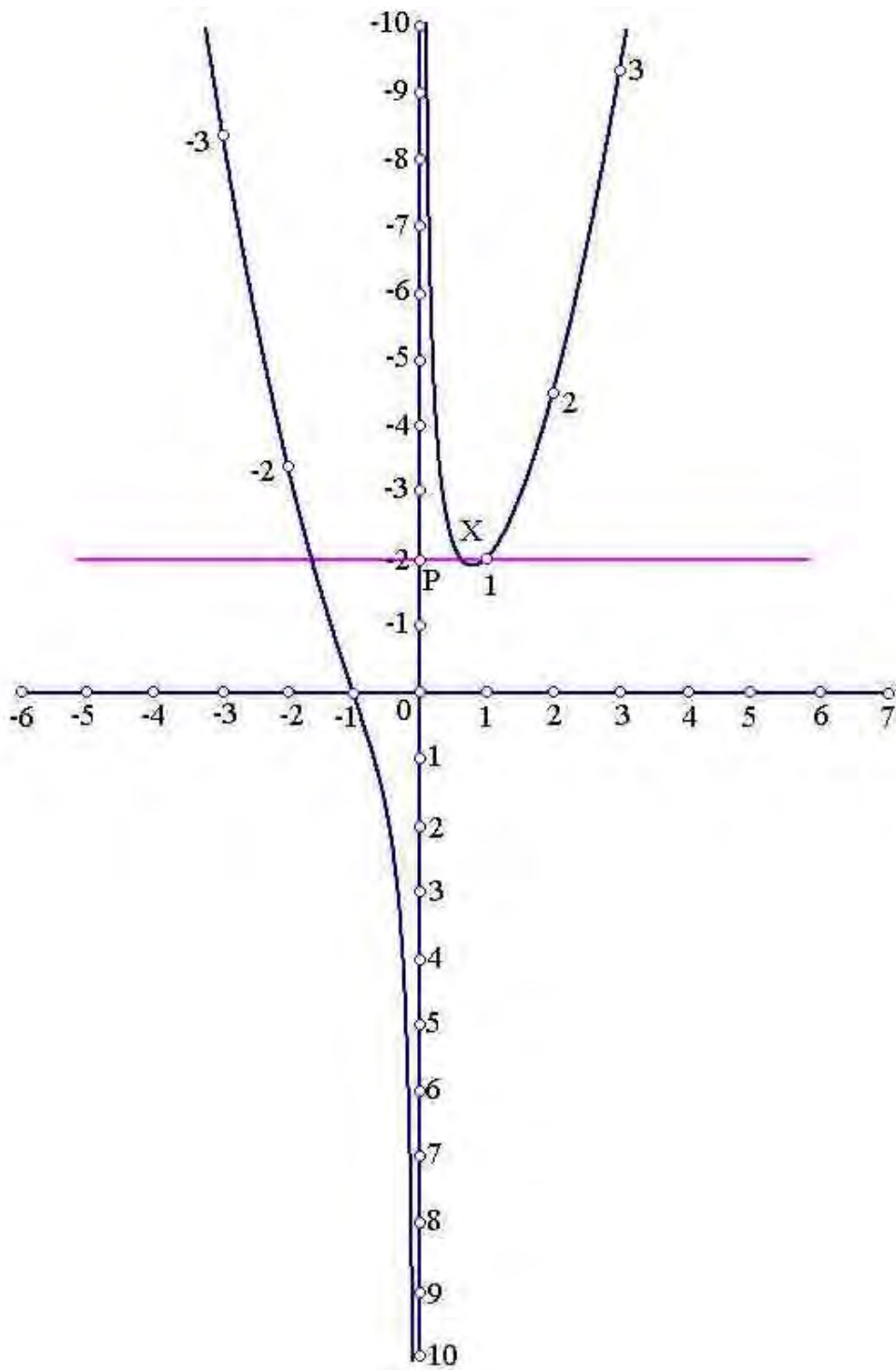
Σχήμα 24. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2+2x+2=0$ .



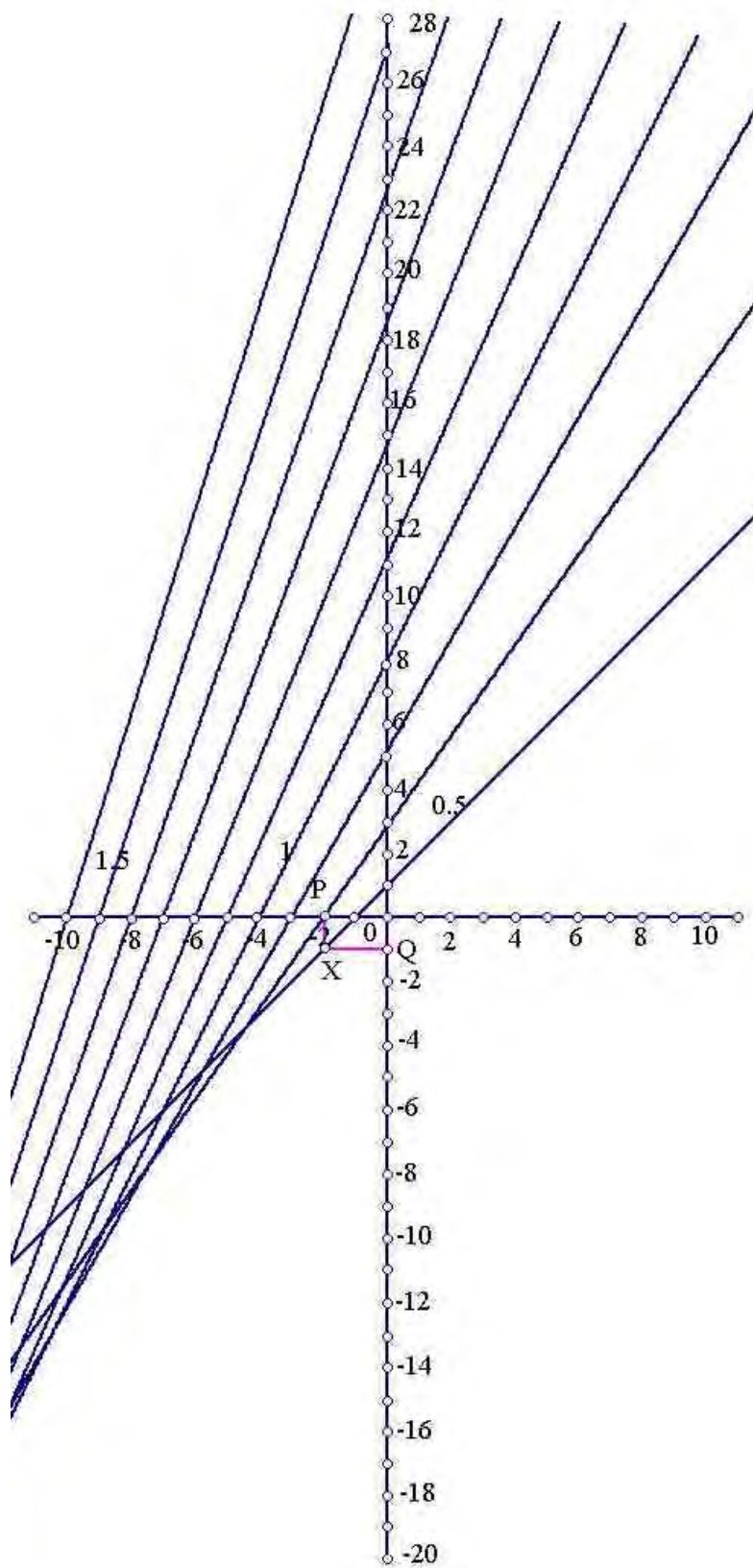
Σχήμα 25. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3+x-2=0$ .



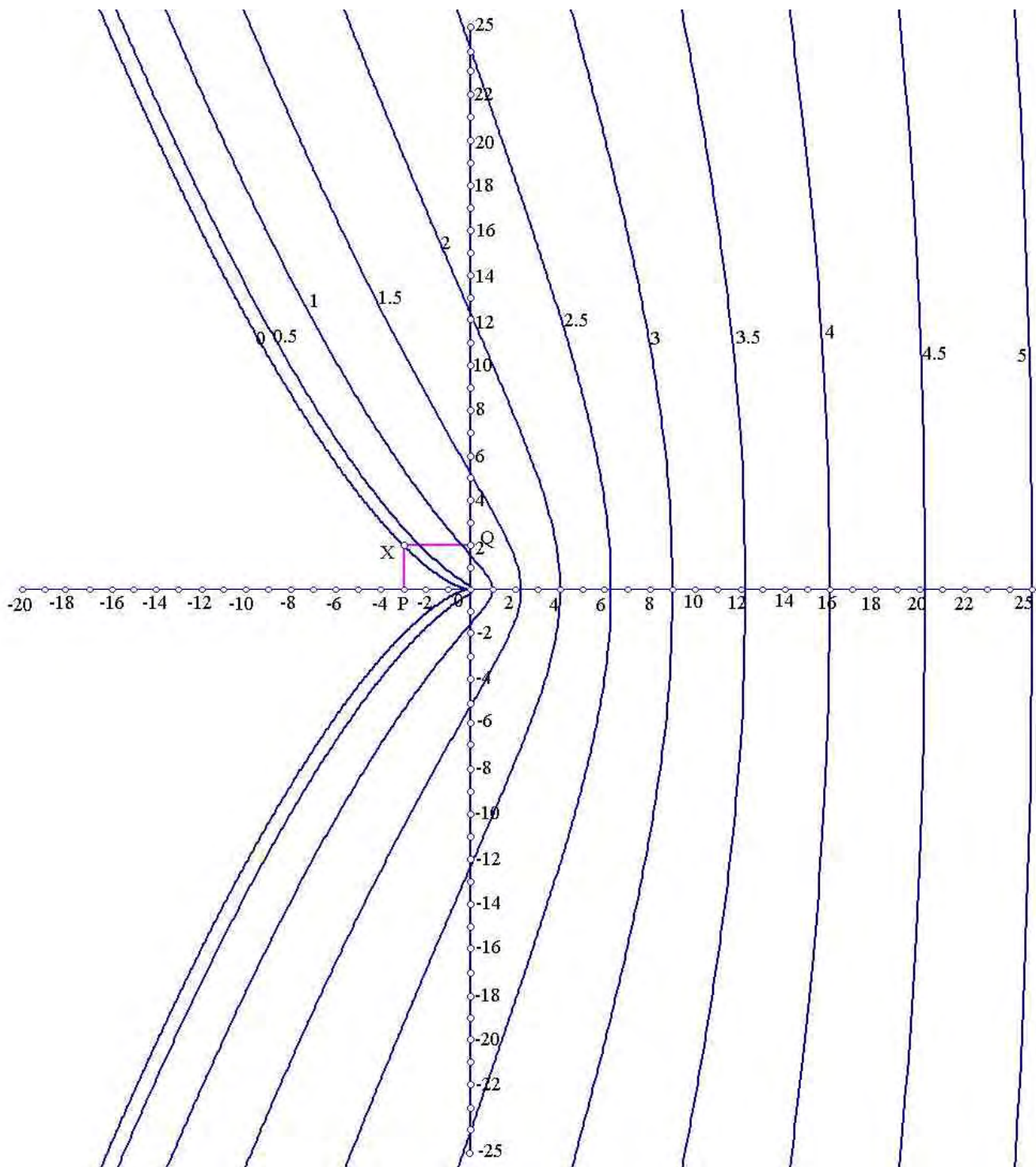
Σχήμα 26. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .



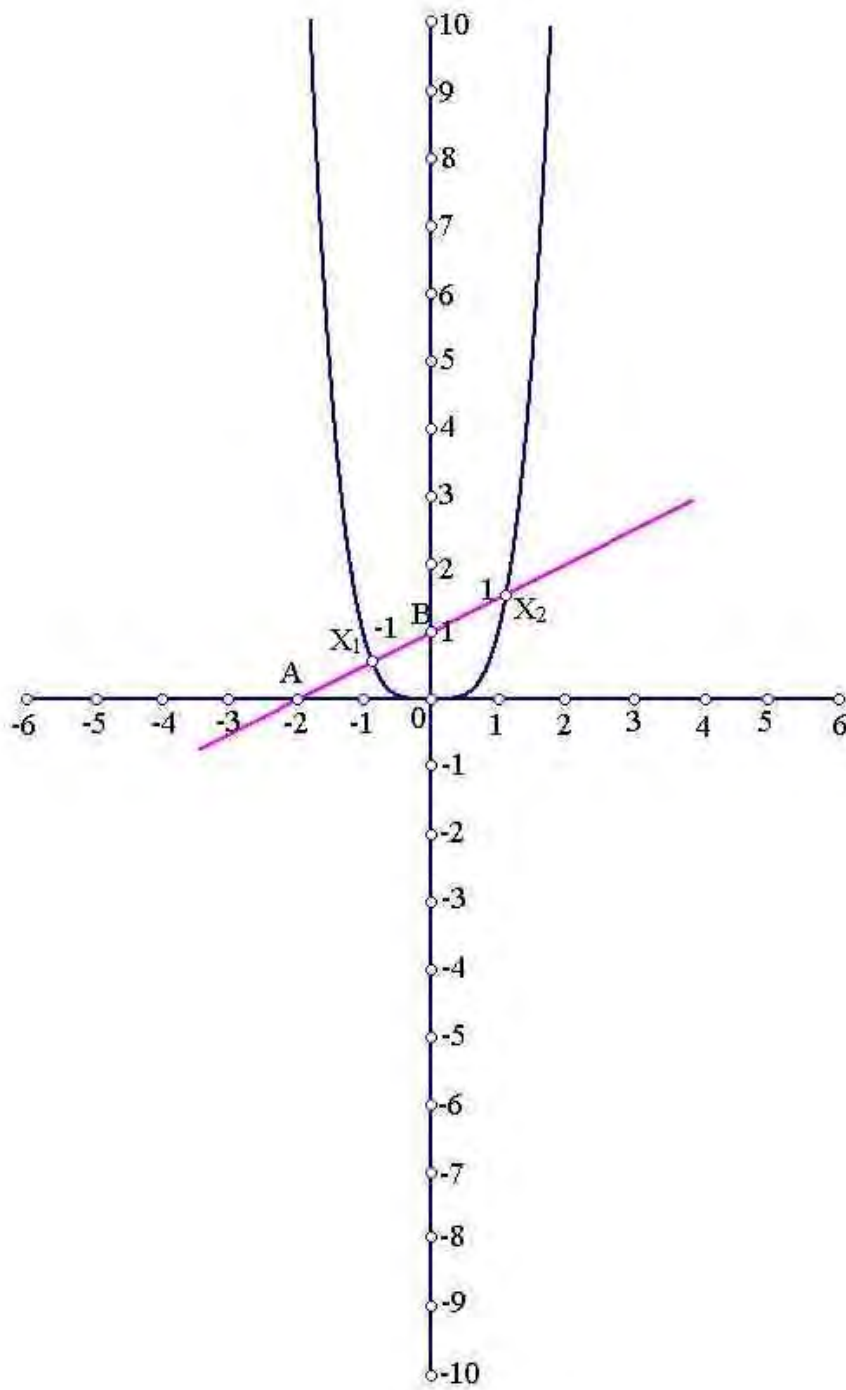
Σχήμα 27. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3 - 2x + 1 = 0$ .



Σχήμα 28. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3 - 2x - 1 = 0$ .

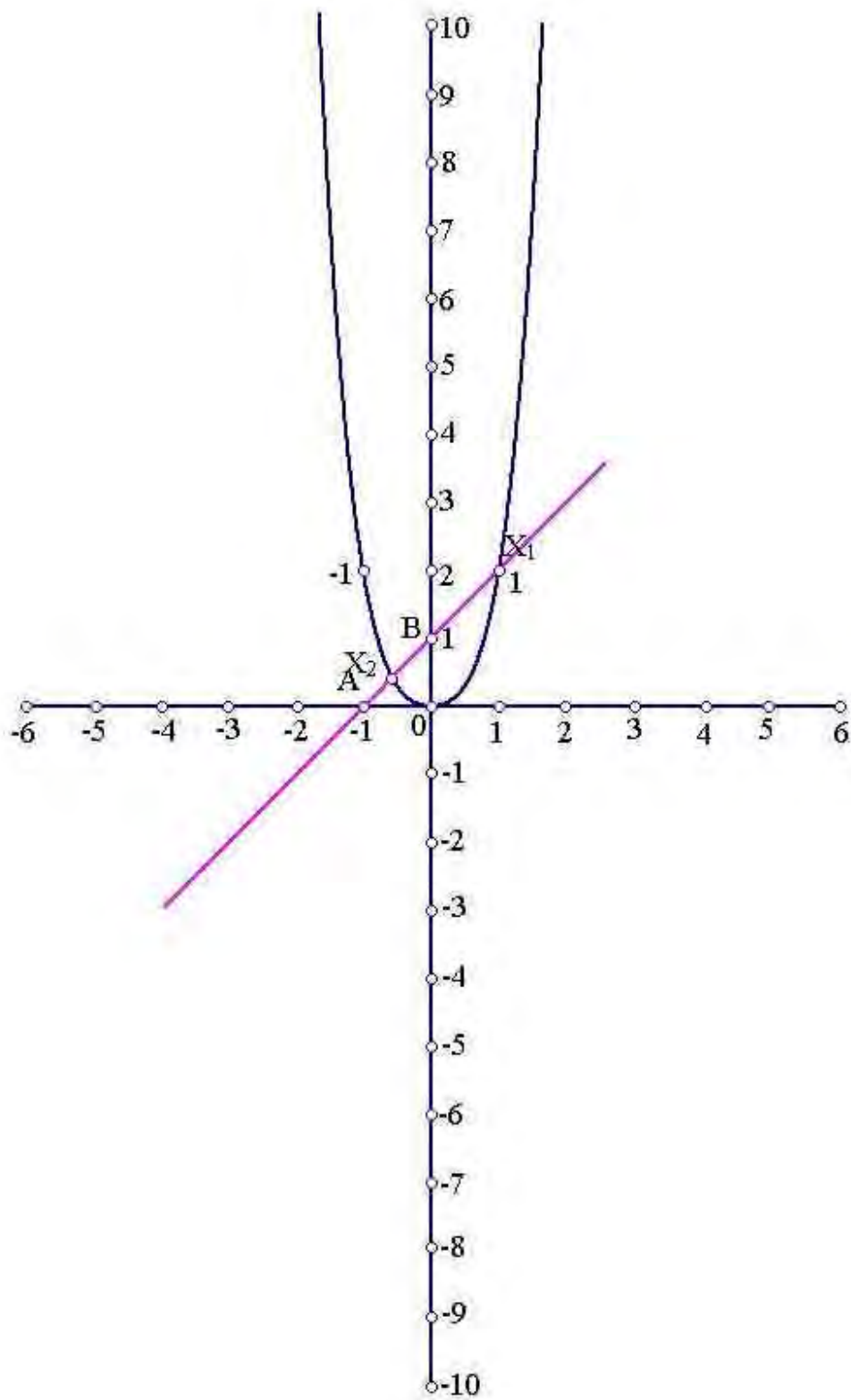


Σχήμα 29. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

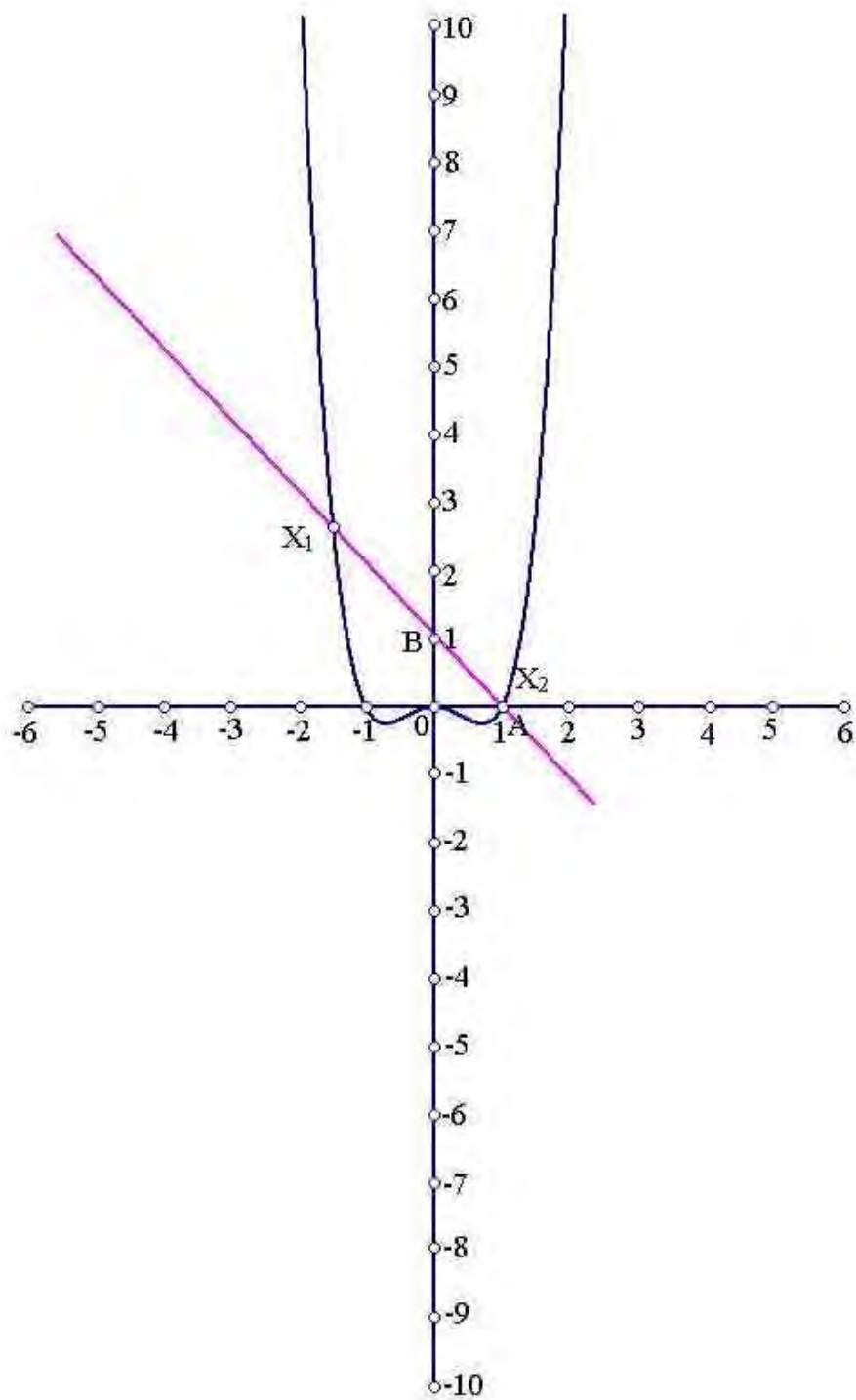


Σχήμα 30. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^2+0.5x+0.5=0$ .

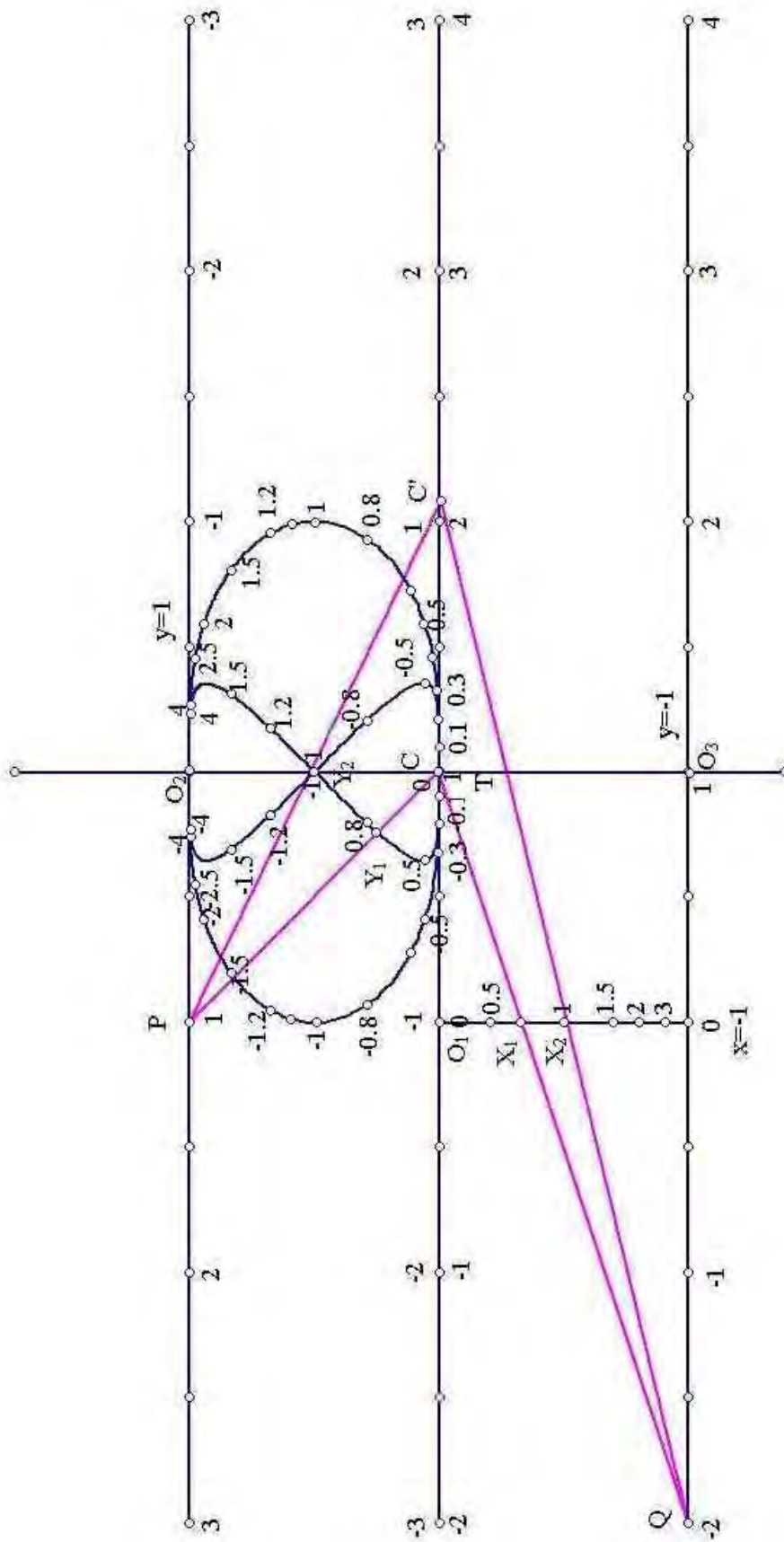




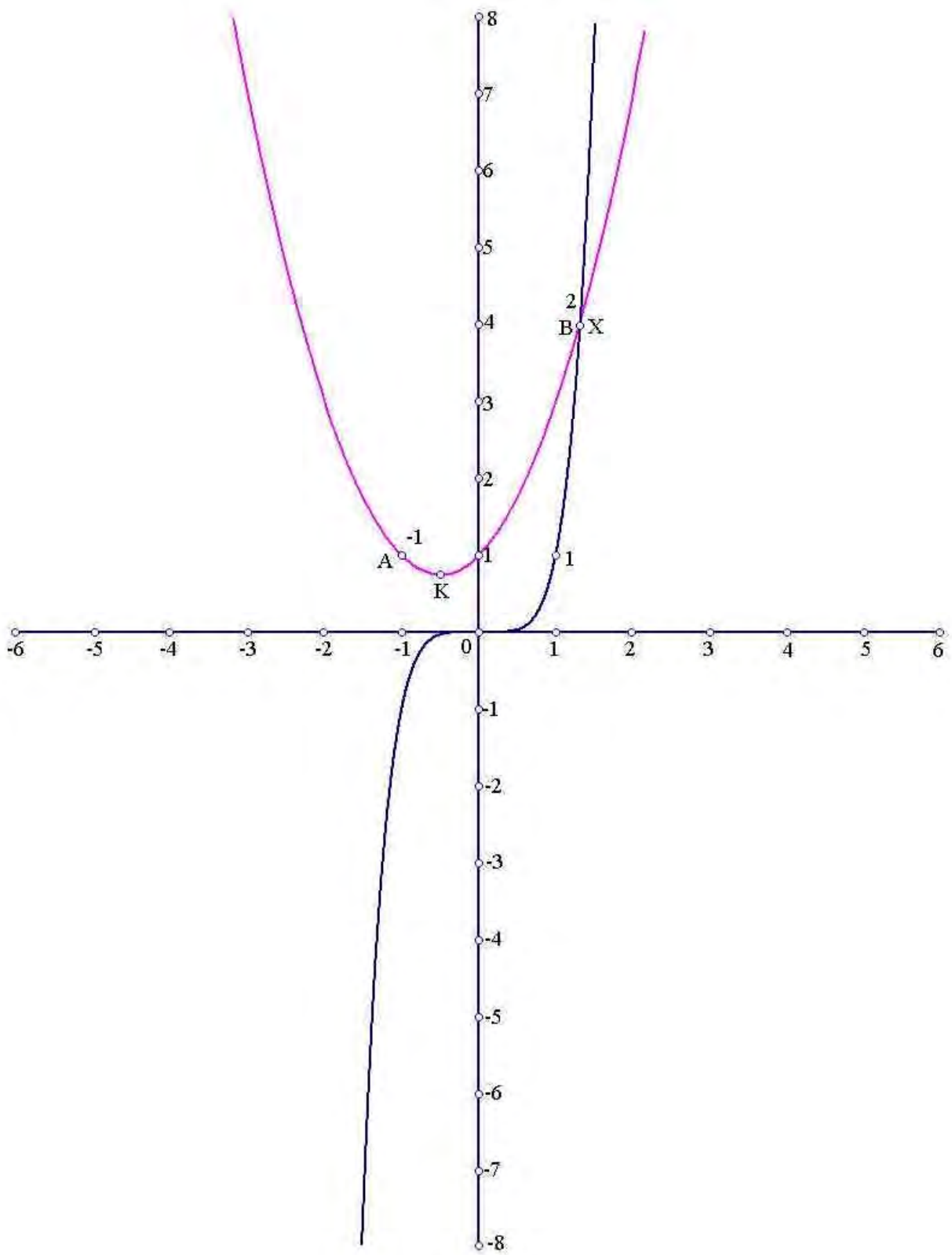
Σχήμα 31. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^4+x^2-3x+1=0$ .



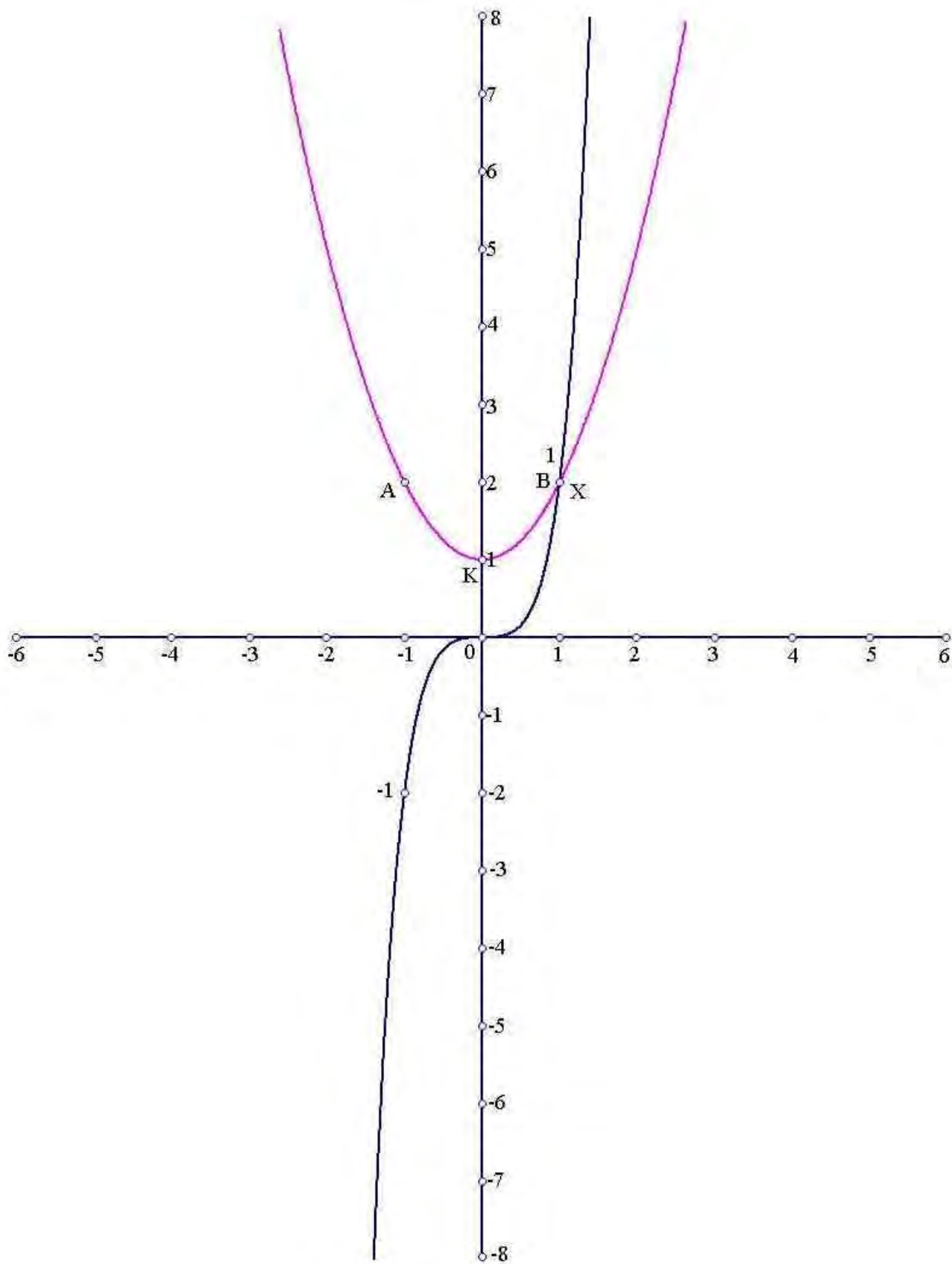
Σχήμα 32. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^4 - x^2 - x + 1 = 0$ .



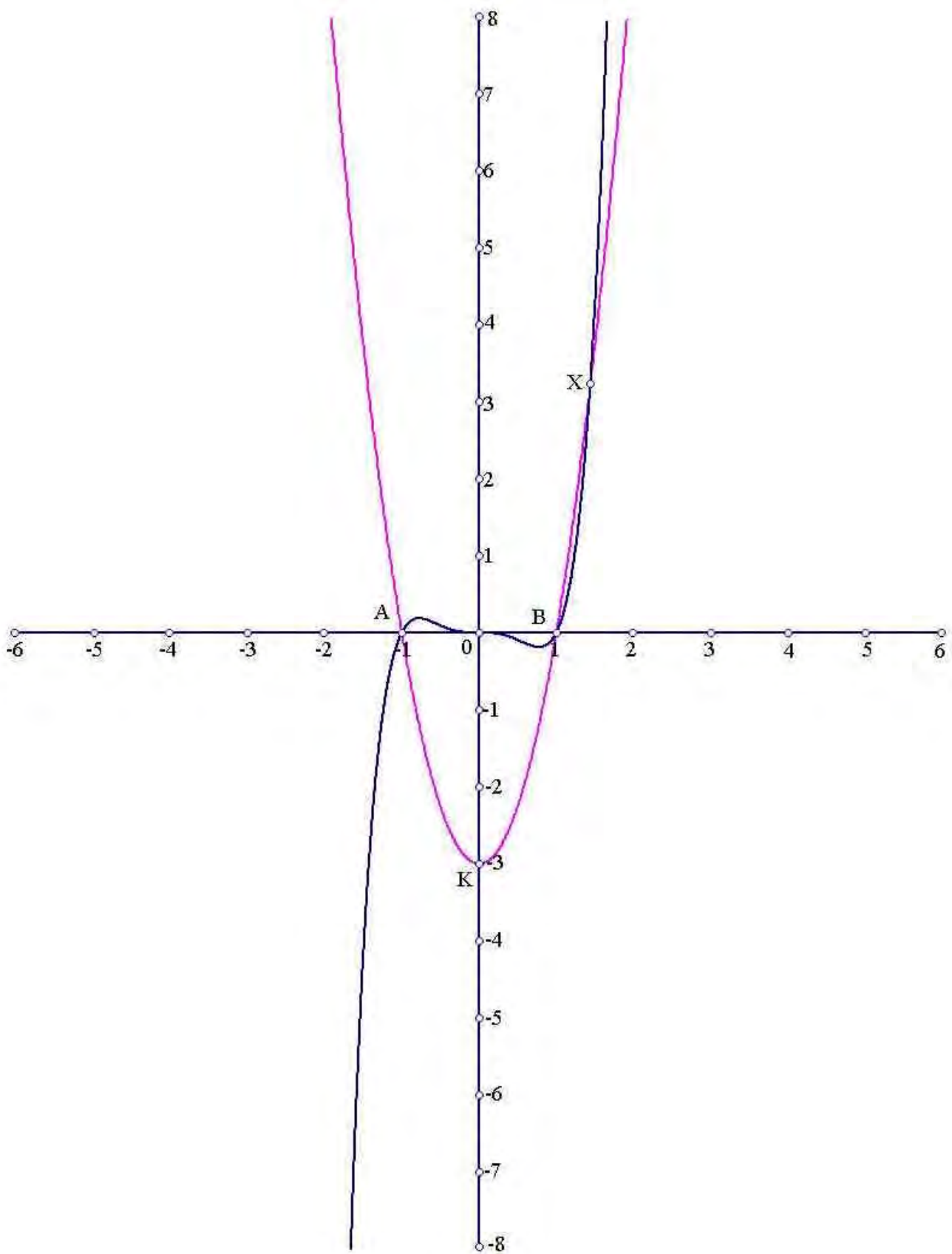
Σχήμα 33. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^4+x^3-2x^2-x+1=0$ .



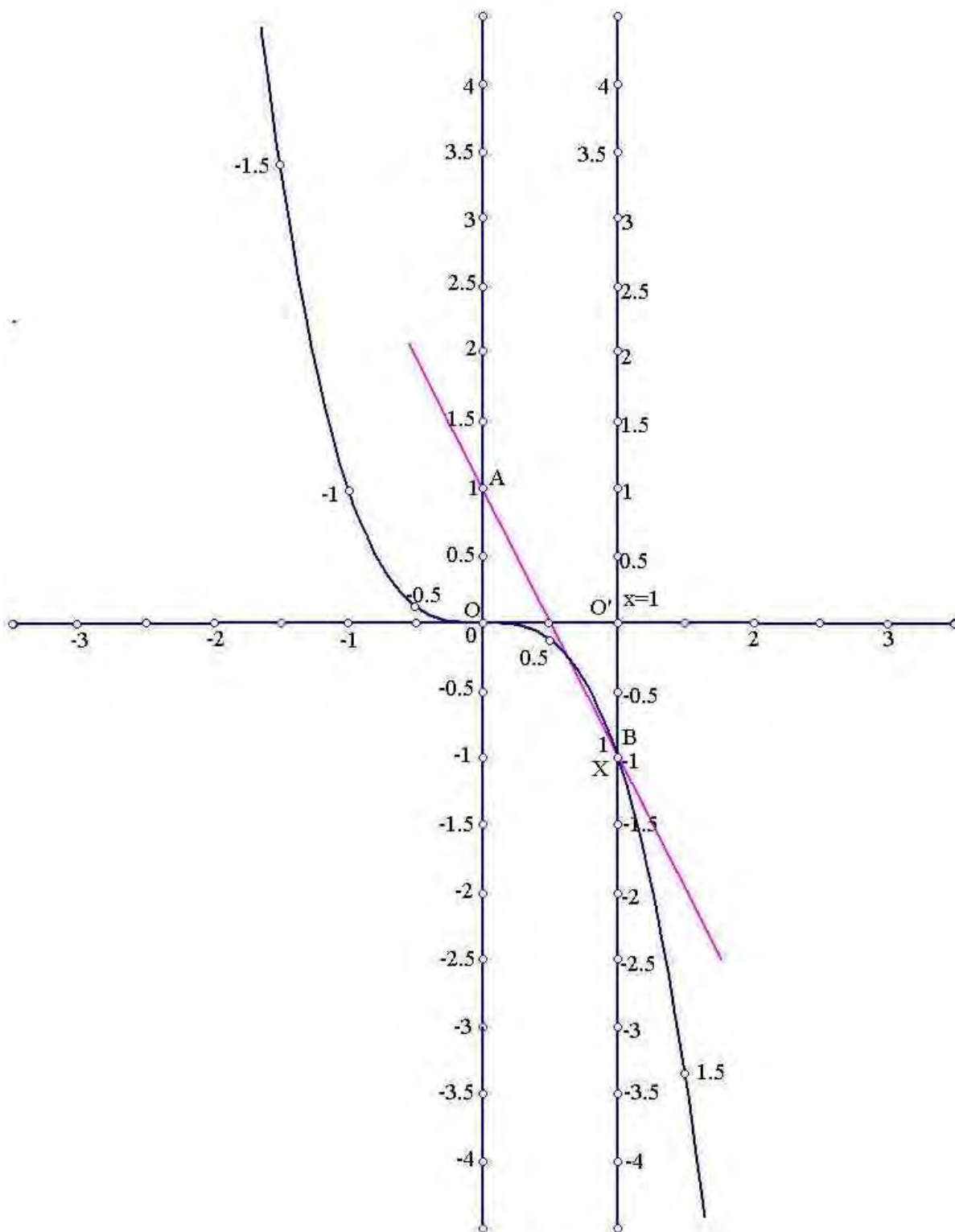
Σχήμα 34. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^5 - x^2 - x + 1 = 0$ .



Σχήμα 35. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^5+x^3-x^2-x+1=0$ .

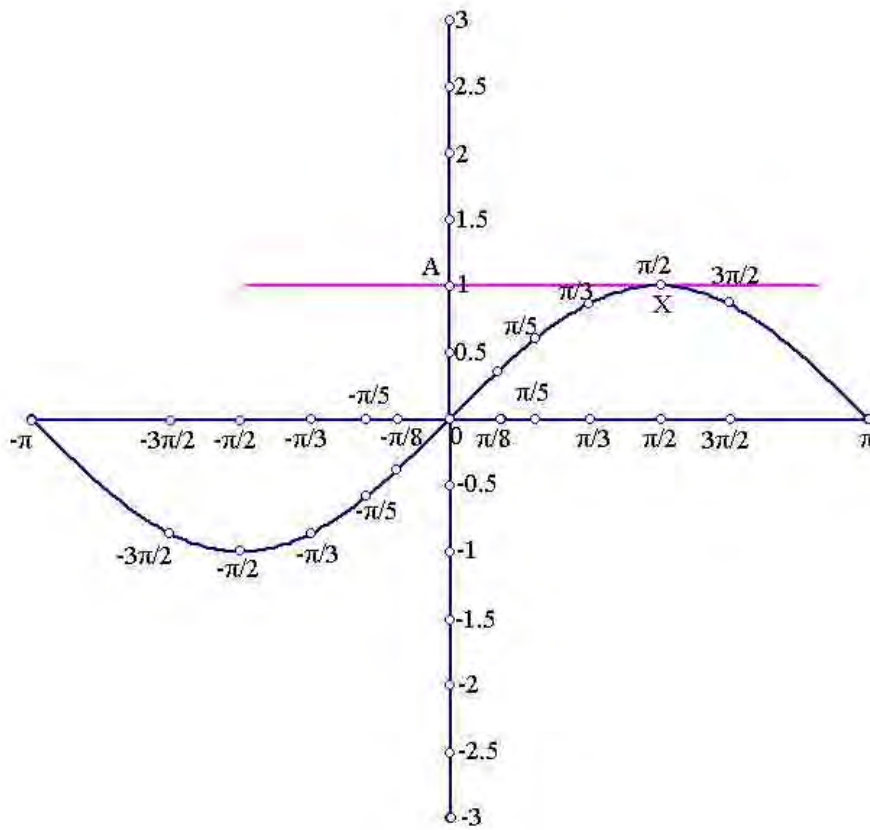


Σχήμα 36. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^5 - x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ .

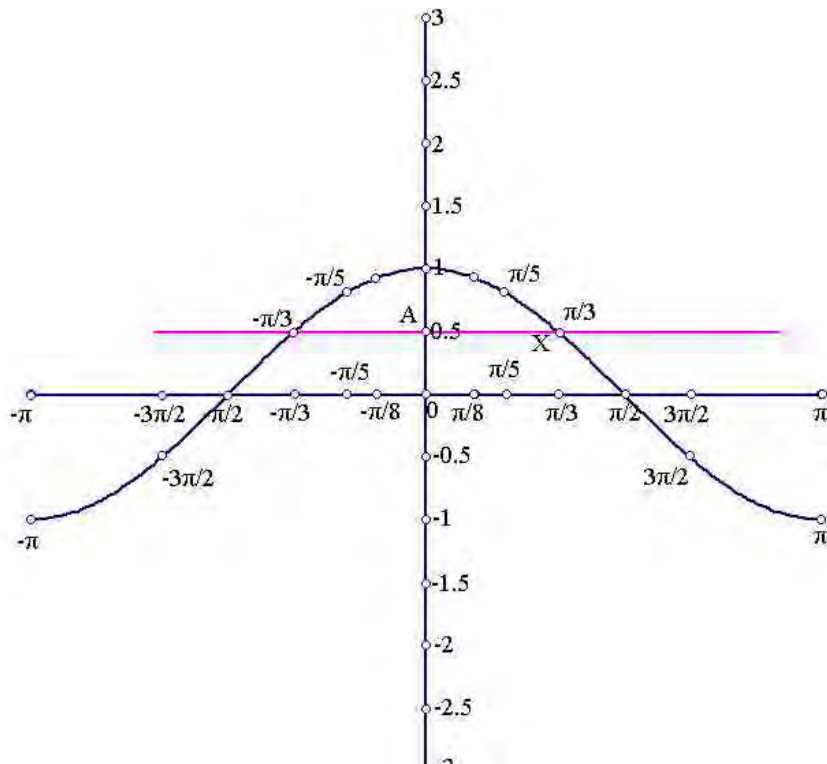


Σχήμα 37. Παράδειγμα της εξίσωσης  $x^3 - 2x + 1 = 0$ .

## Κεφάλαιο 4

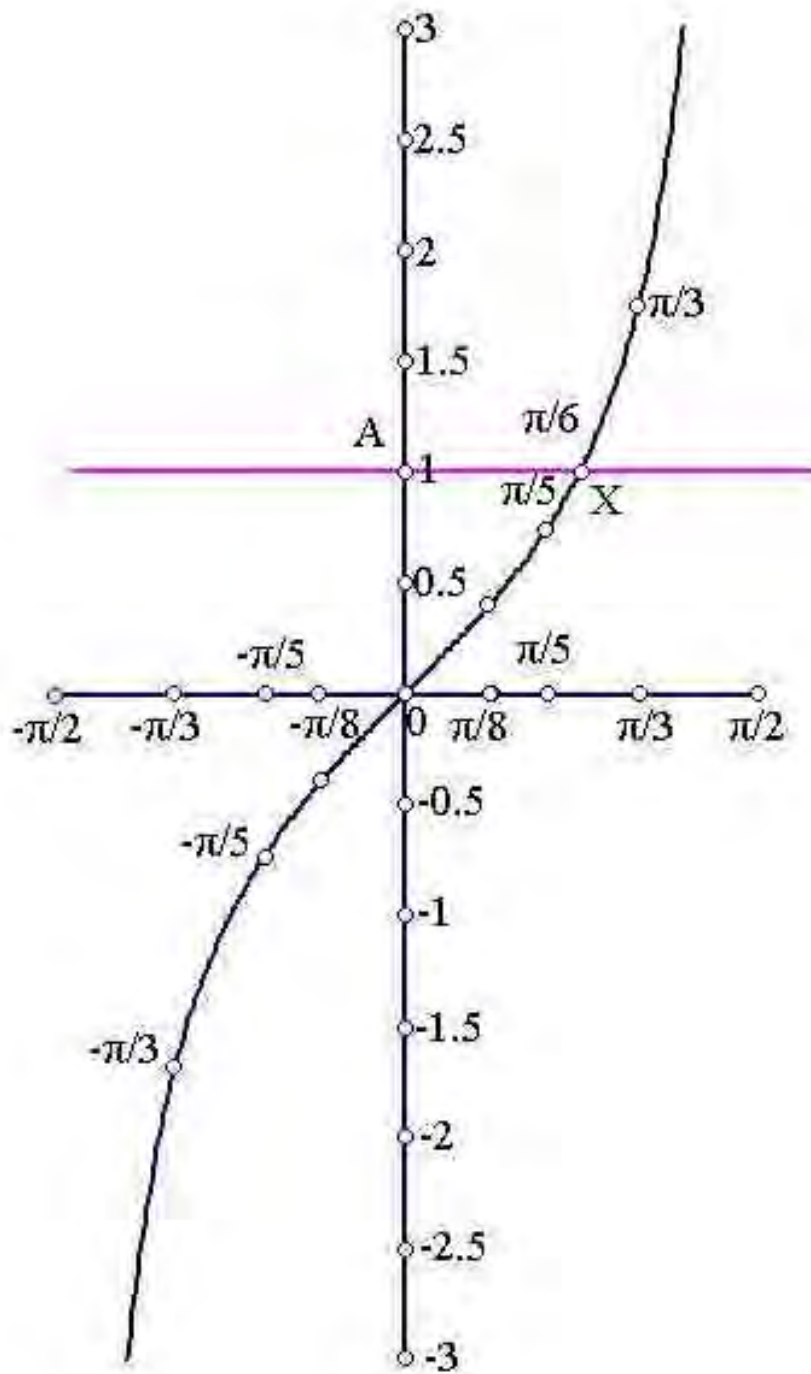


Σχήμα 38. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\eta\mu t=1$ .

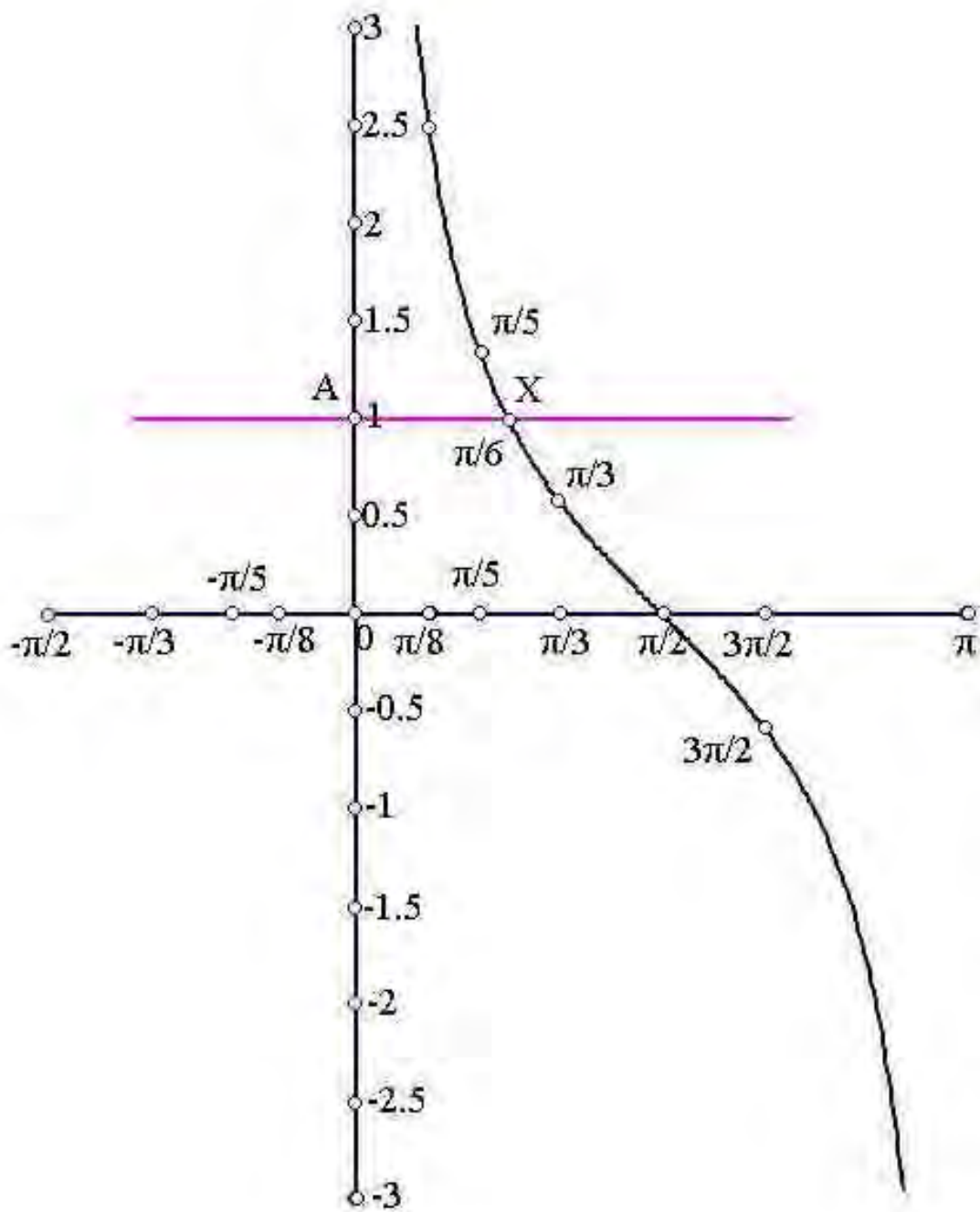


Σχήμα 39. Παράδειγμα της εξίσωσης  $2\sigma\upsilon\eta t=1$ .

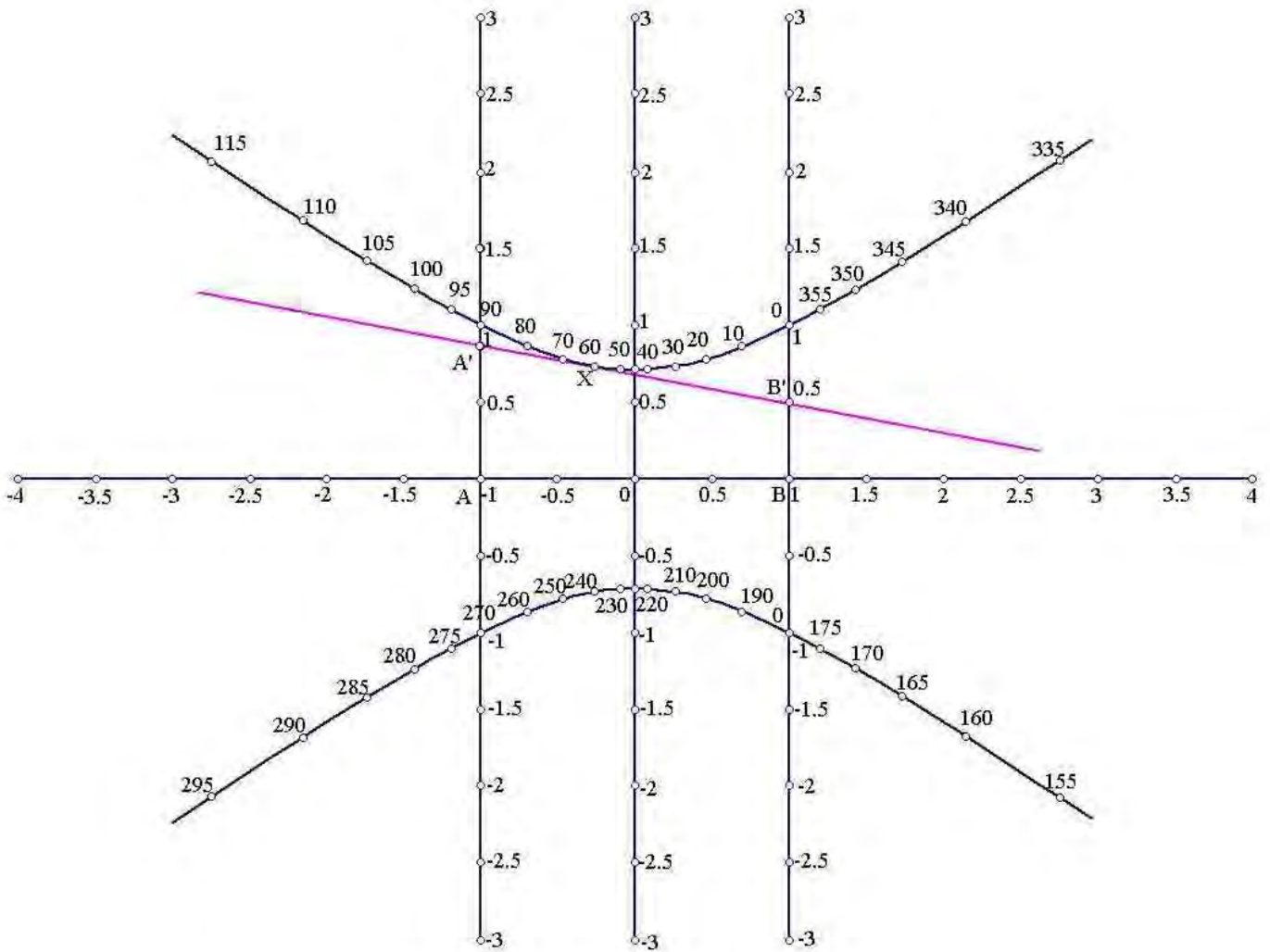




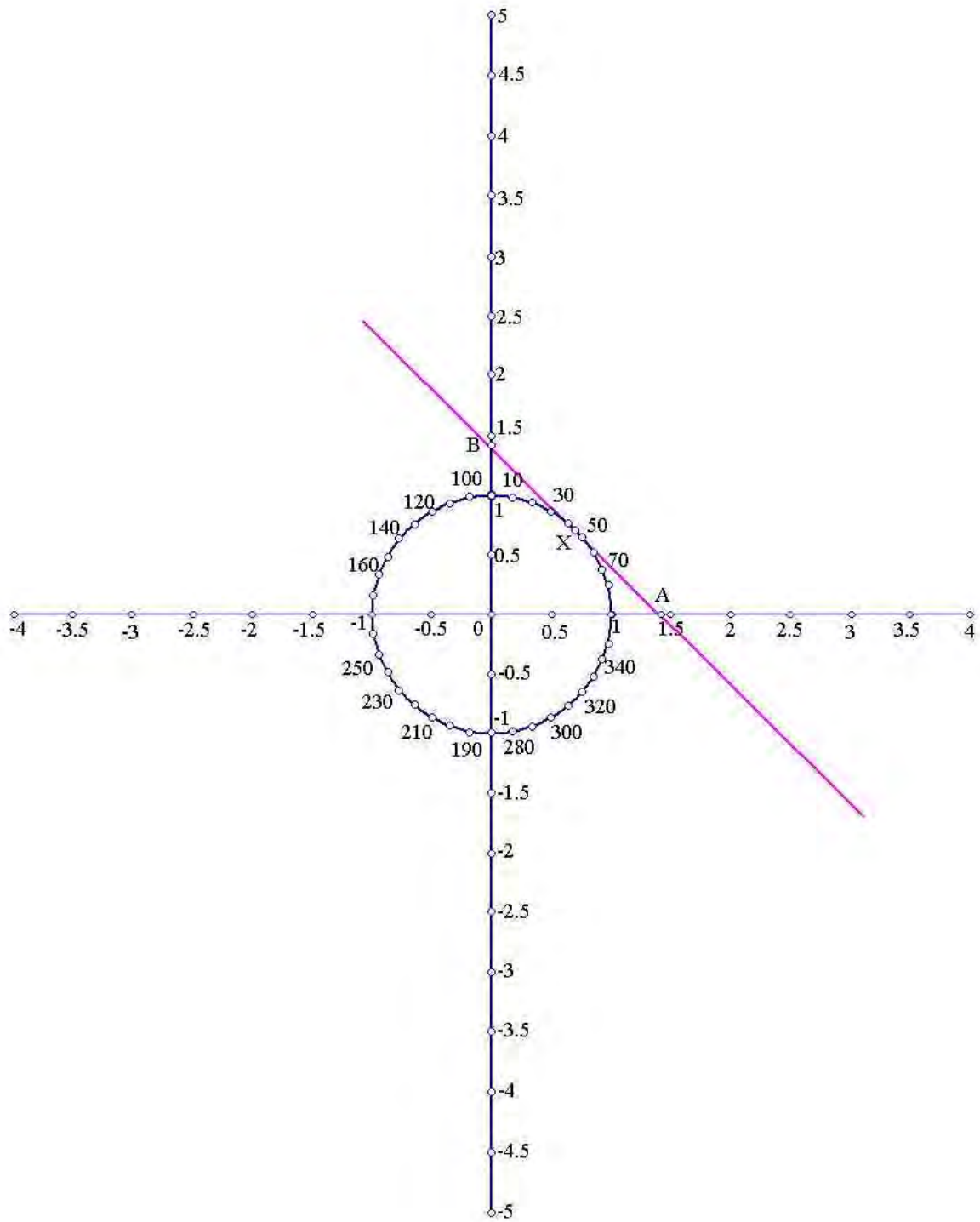
Σχήμα 40. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\text{erf}t=1$ .



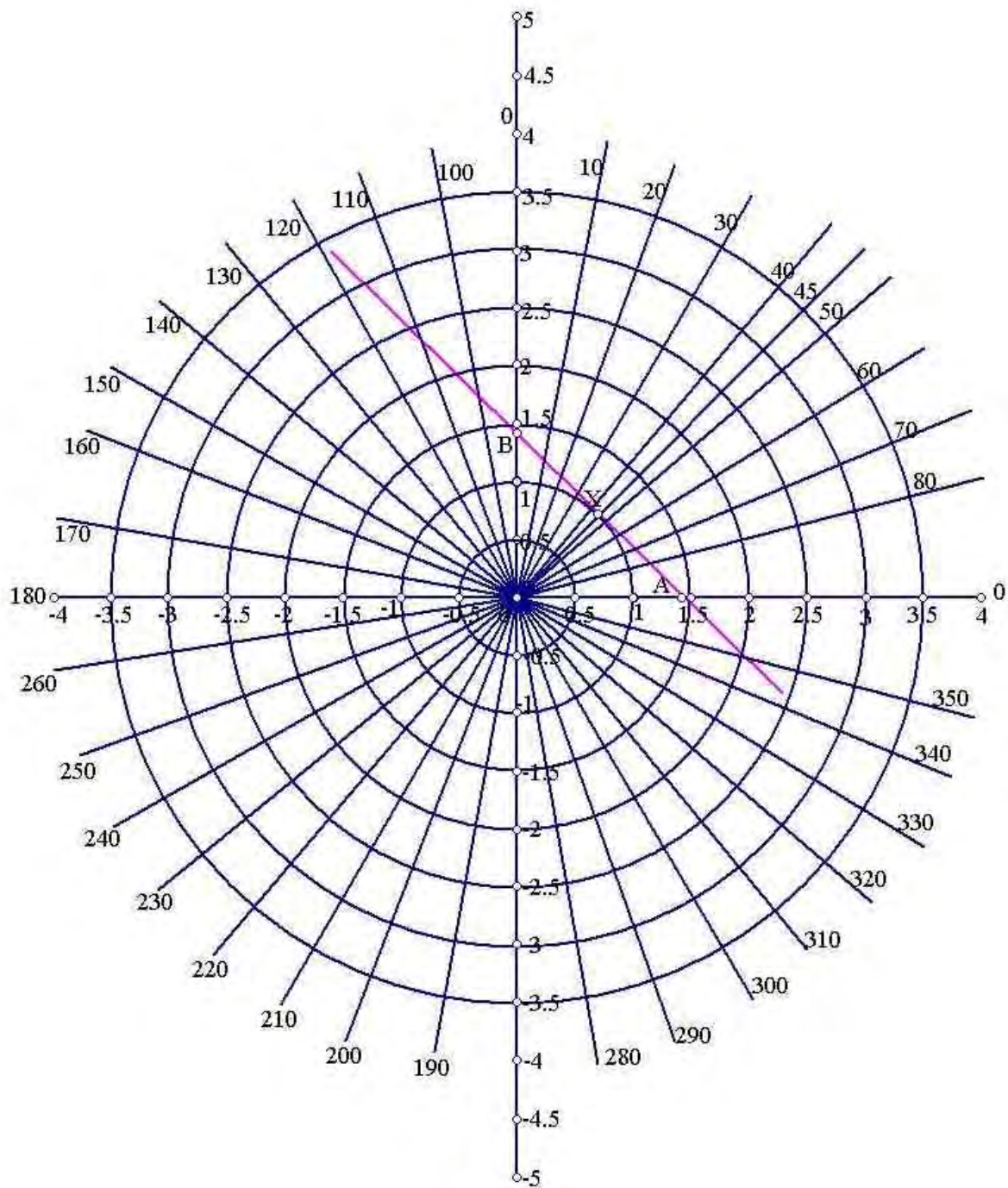
Σχήμα 41. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\sigma_{\text{φτ}}=1$ .



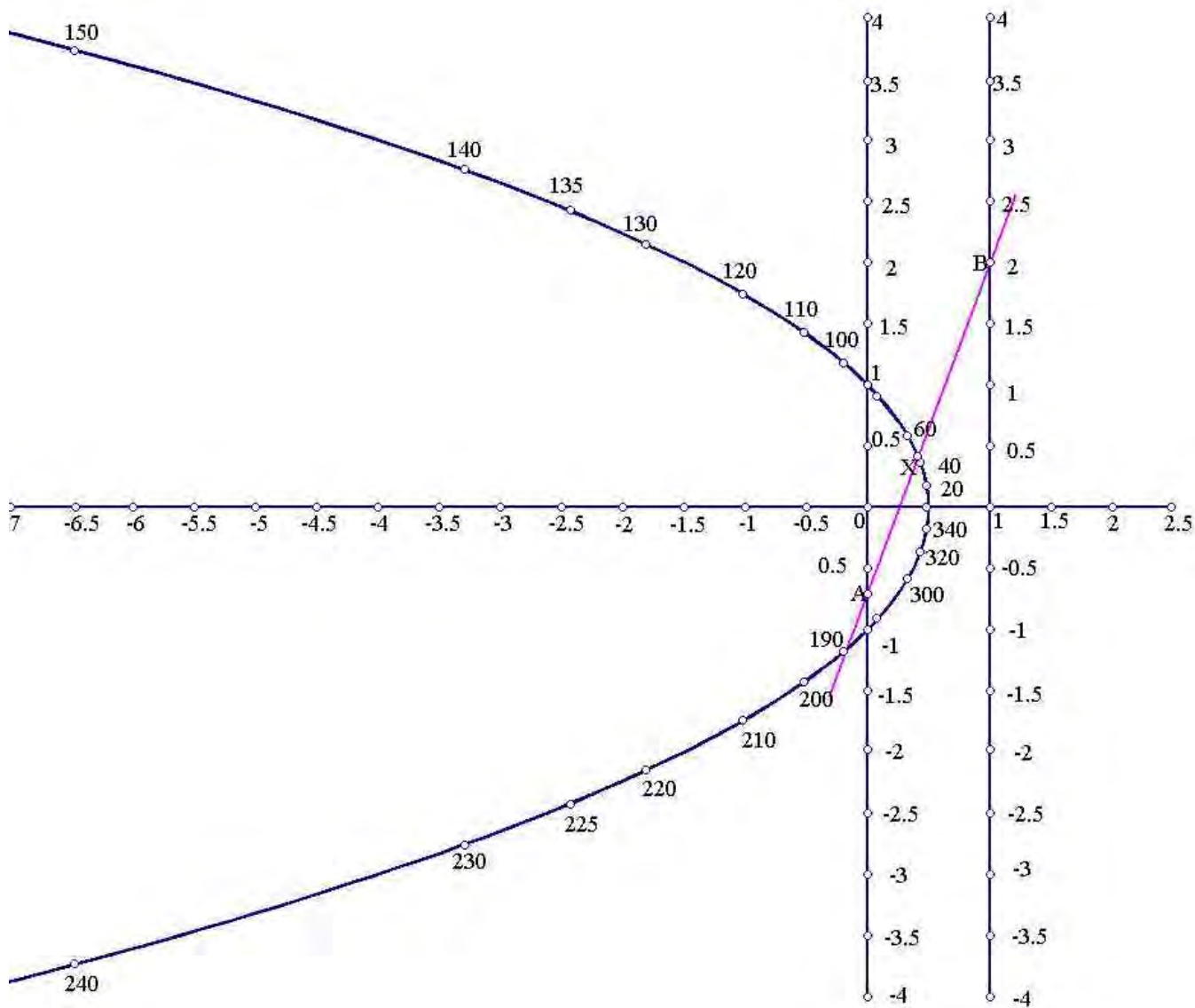
Σχήμα 42. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\sqrt{3x+1}=1$ .



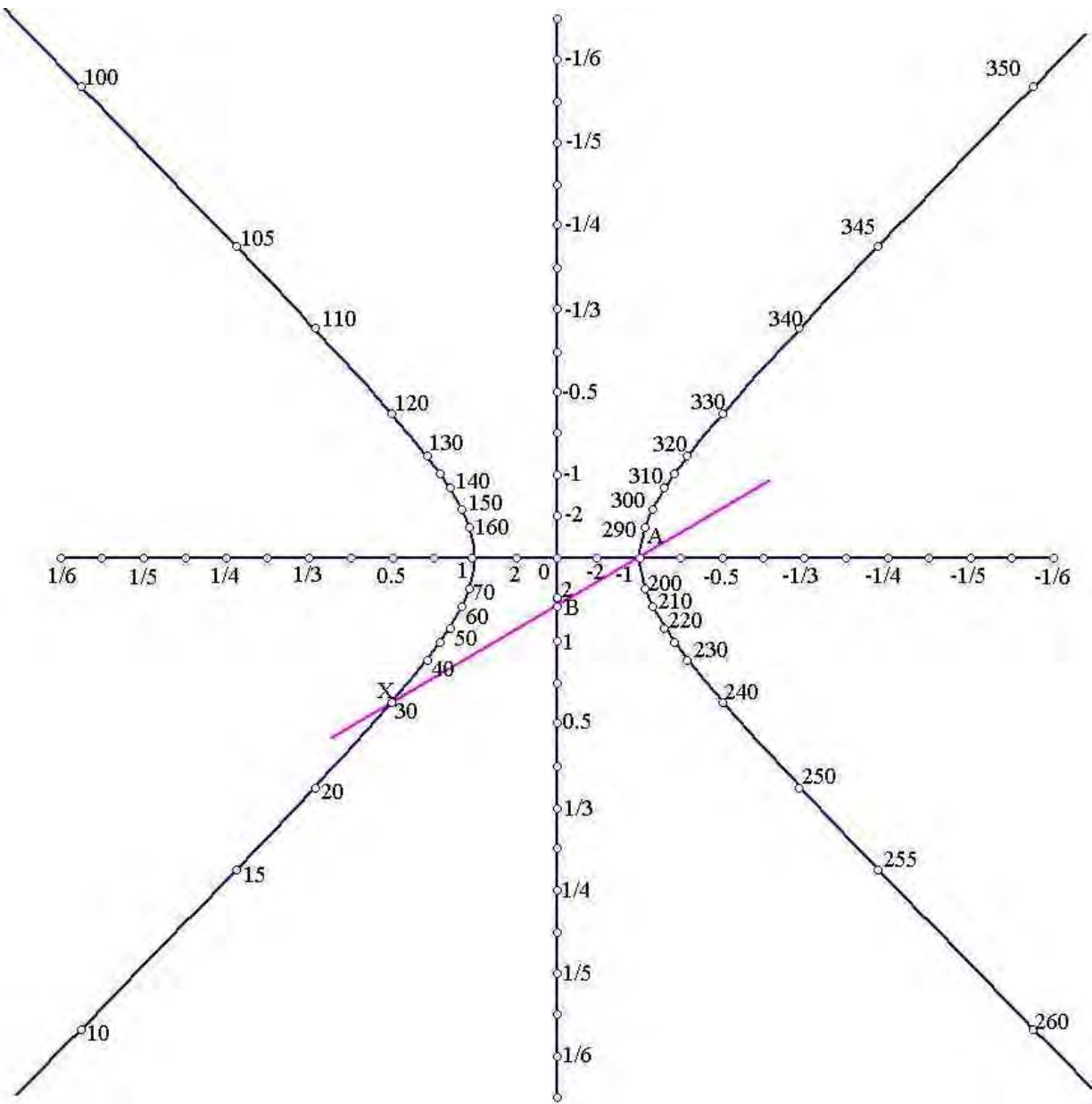
Σχήμα 43. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\eta\mu+\sigma\mu=\sqrt{2}$ .



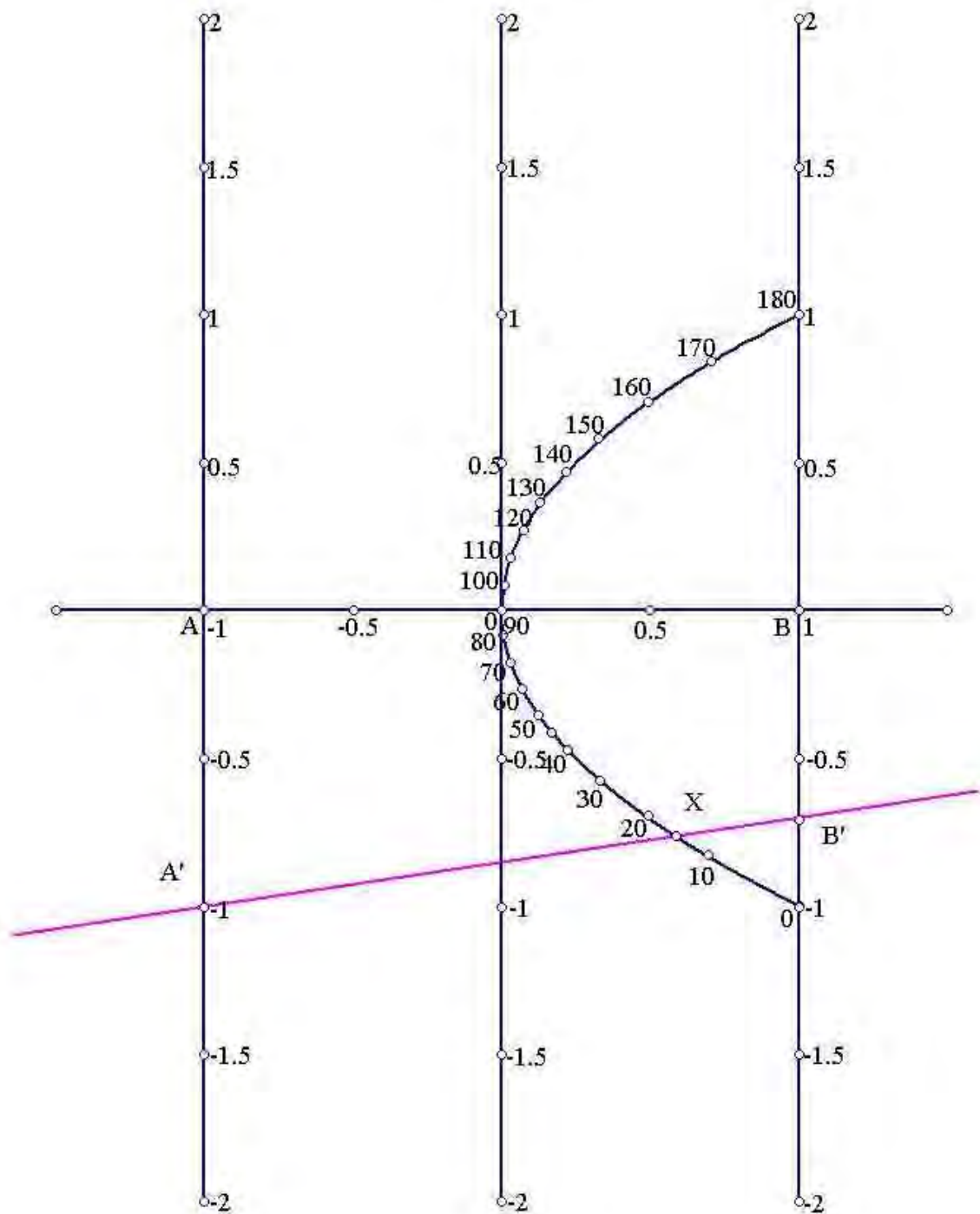
Σχήμα 44. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\mu\phi = 1$ .



Σχήμα 45. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\eta\mu t = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sigma\upsilon t$ .

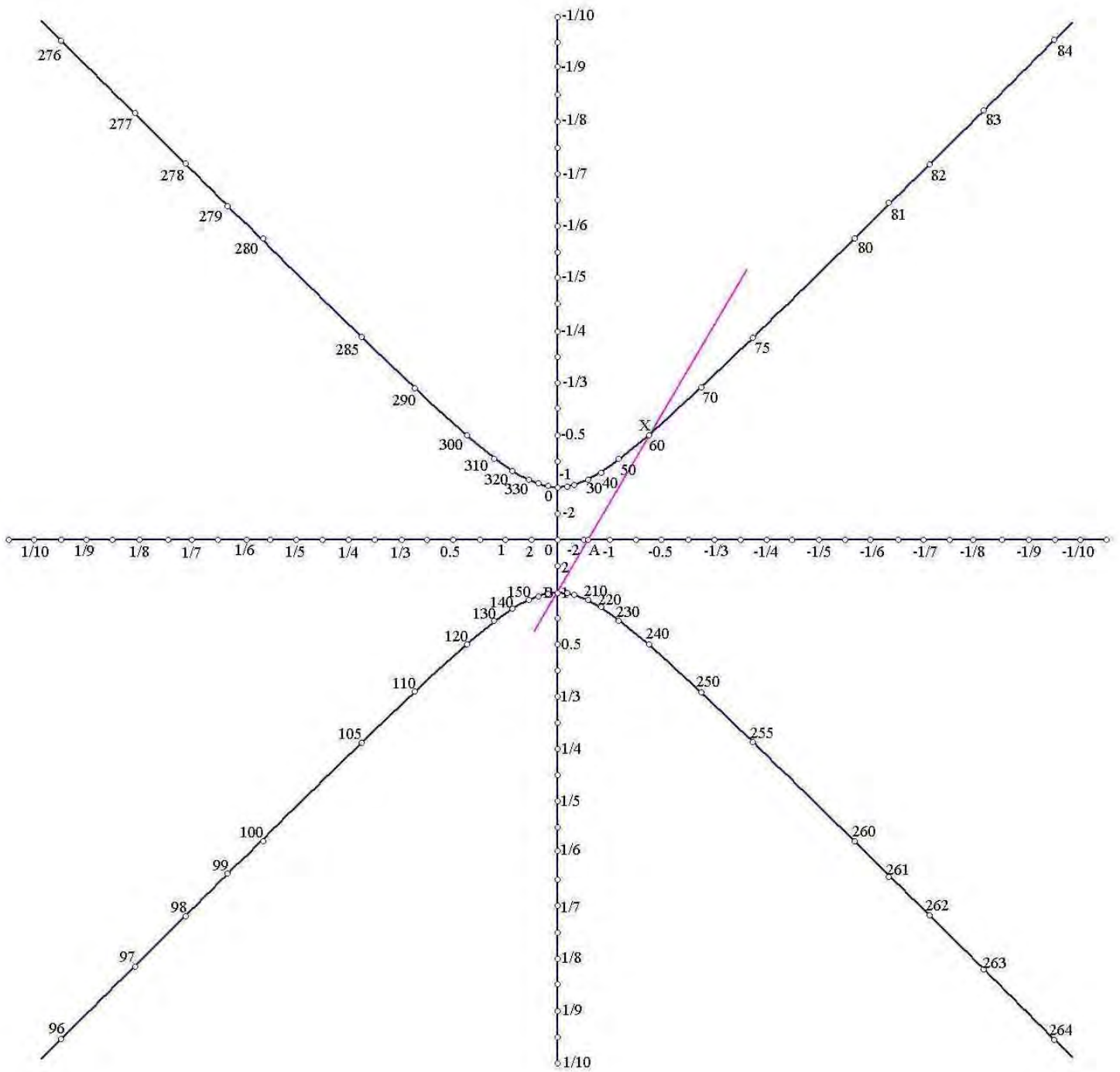


Σχήμα 46. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\eta\mu t = -1 + \sqrt{3}\sigma\upsilon\tau t$ .

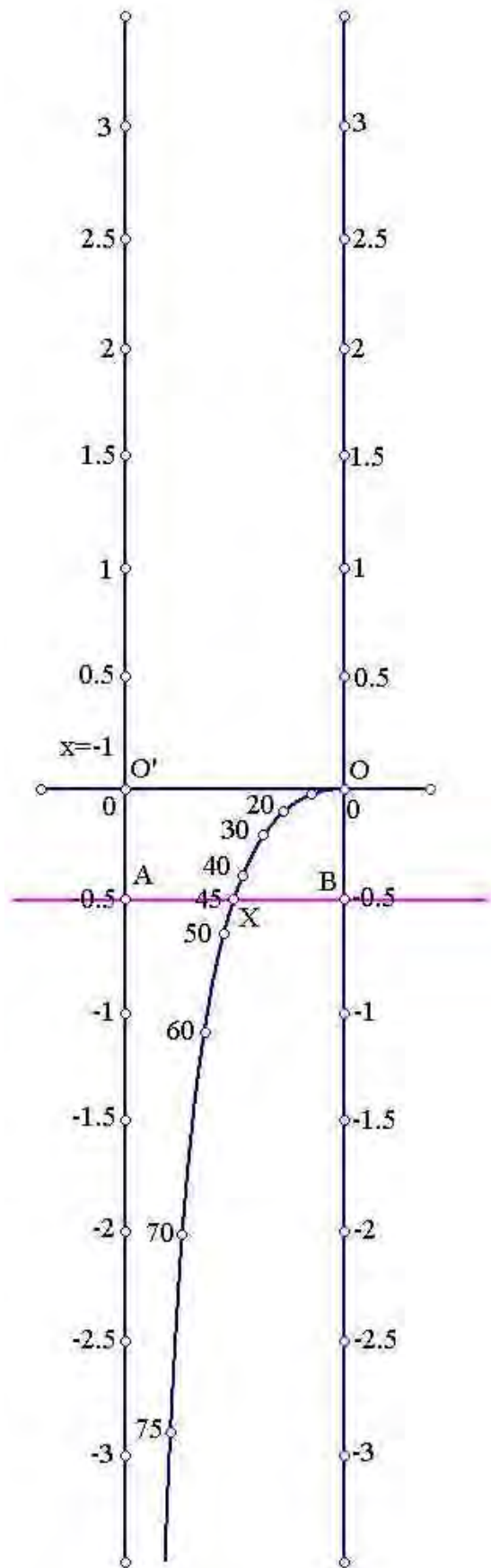


Σχήμα 47. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\sqrt{3}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{\sin t} + 1 = 0$ .

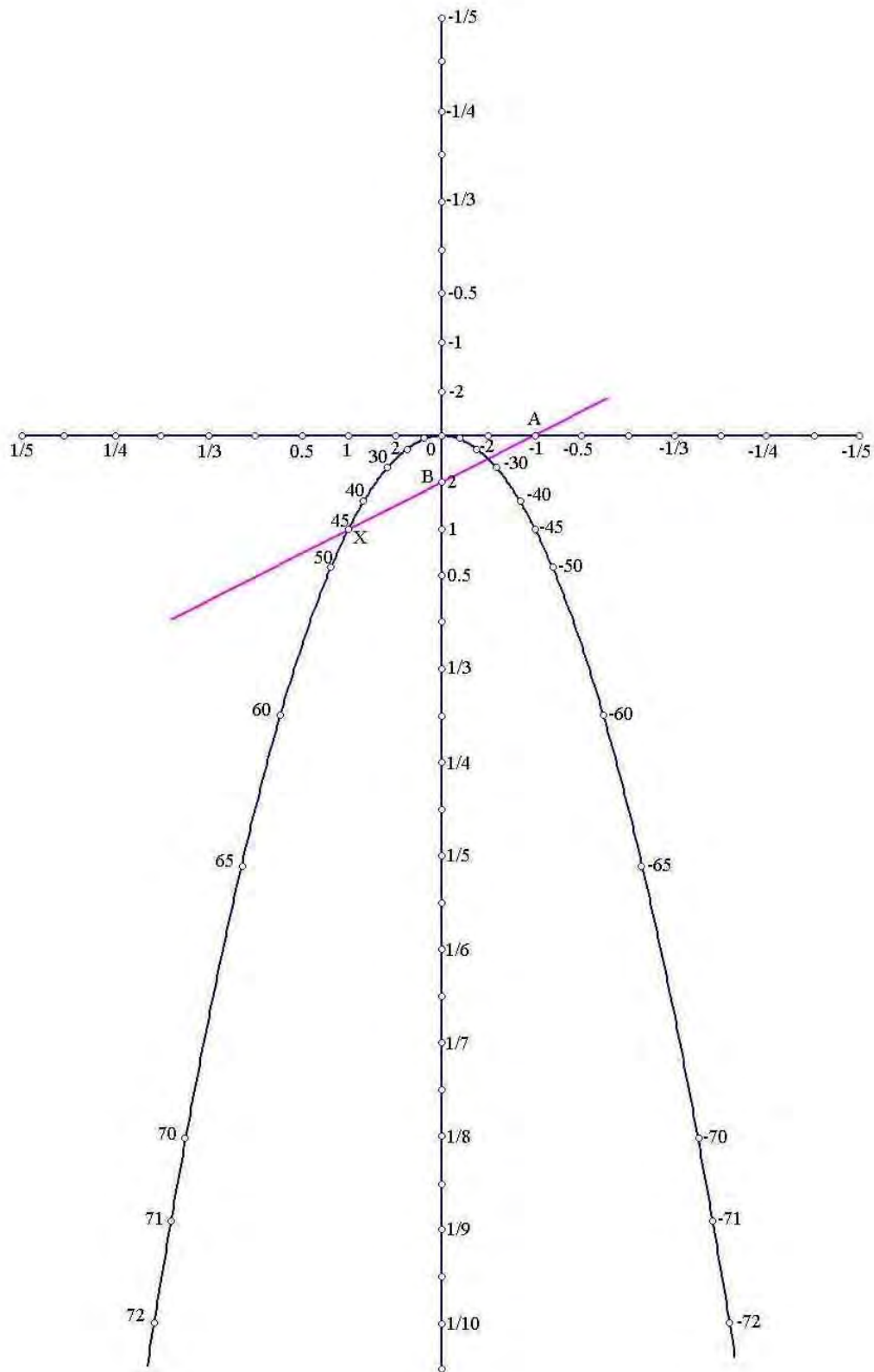




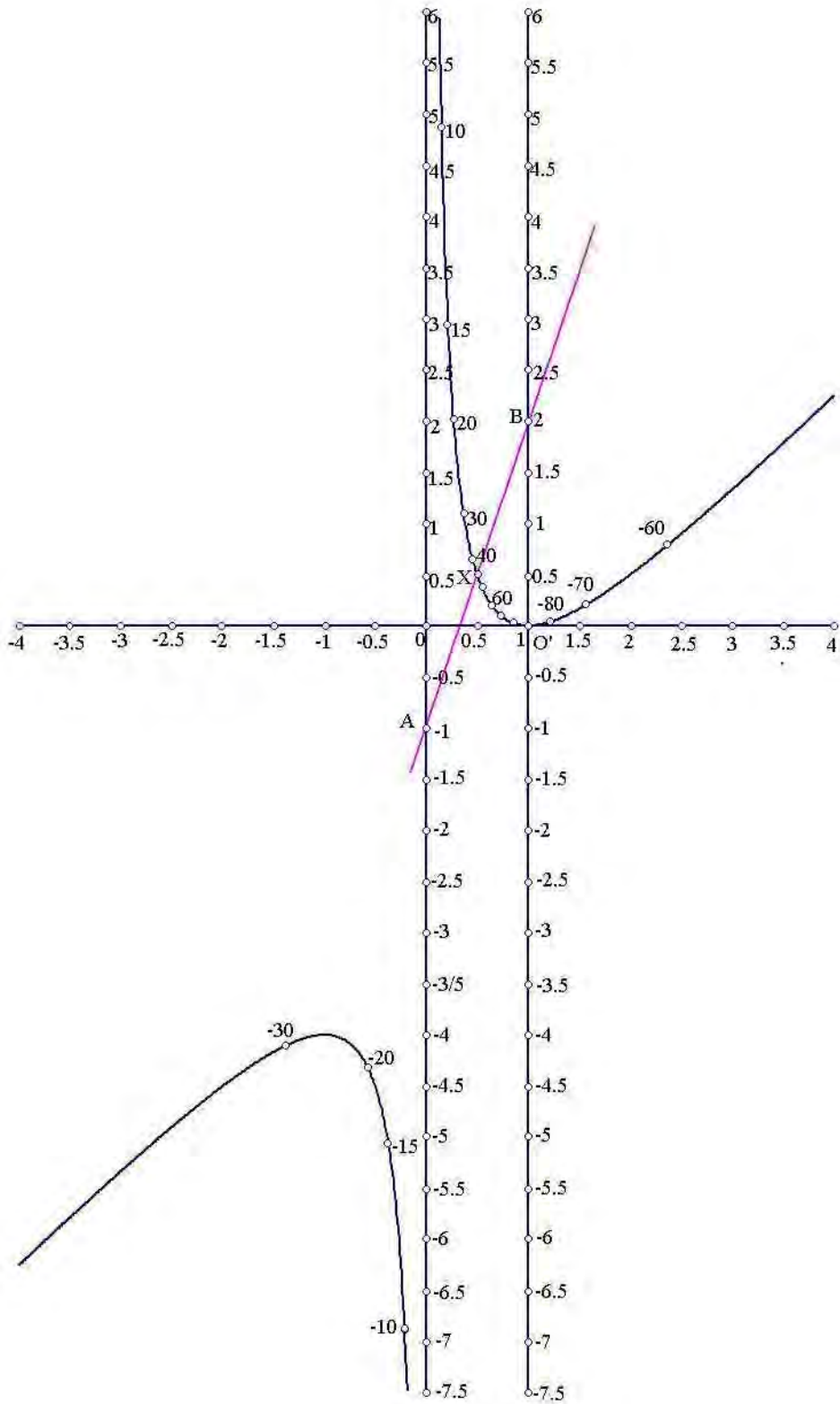
Σχήμα 48. Παράδειγμα της εξίσωσης  $-\sqrt{3}\epsilon\phi\tau + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\tau} + 1 = 0$ .



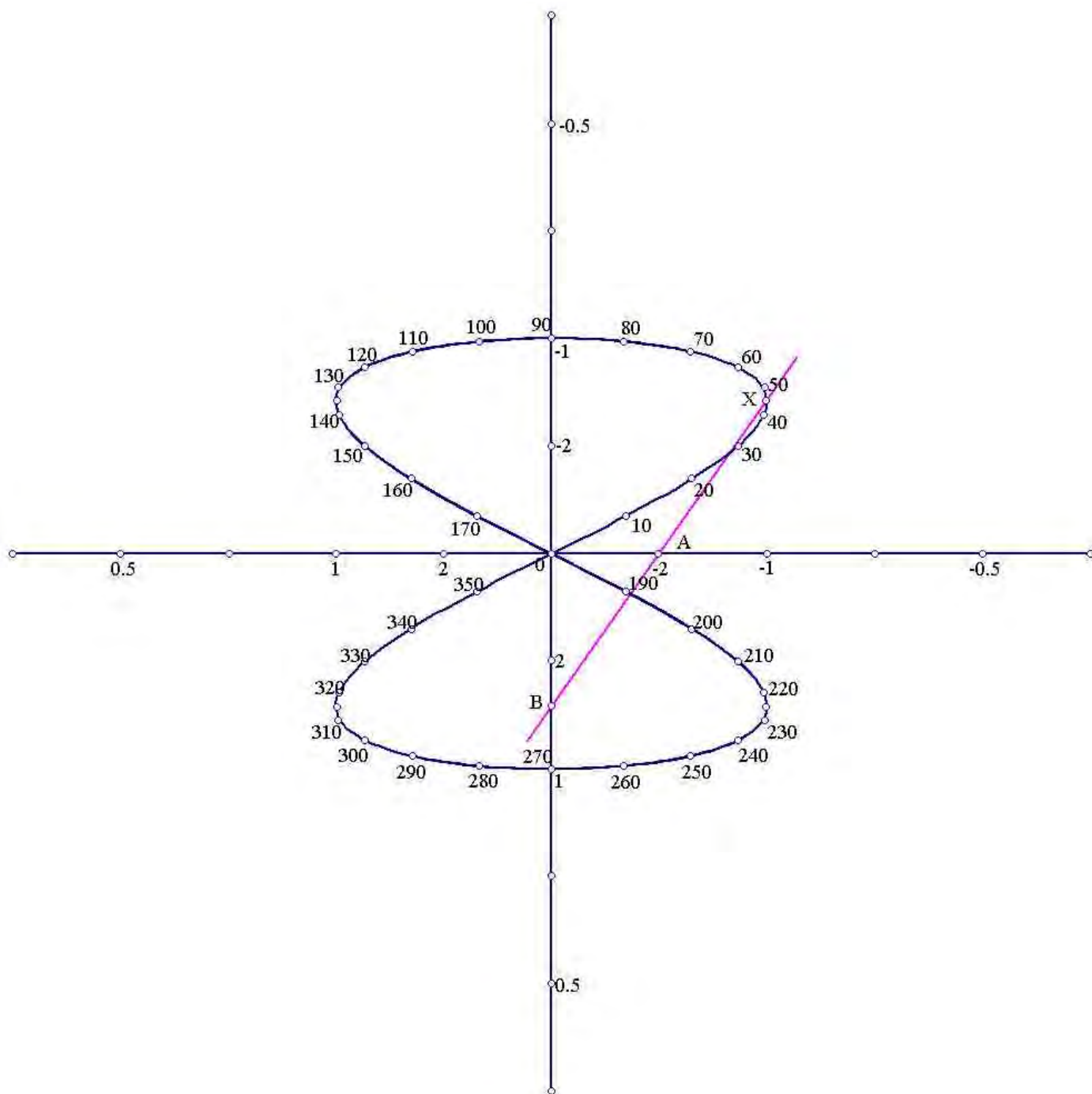
Σχήμα 49. Παράδειγμα της εξίσωσης  $\sigma\pi t = -1 + 2\epsilon\pi t$ .



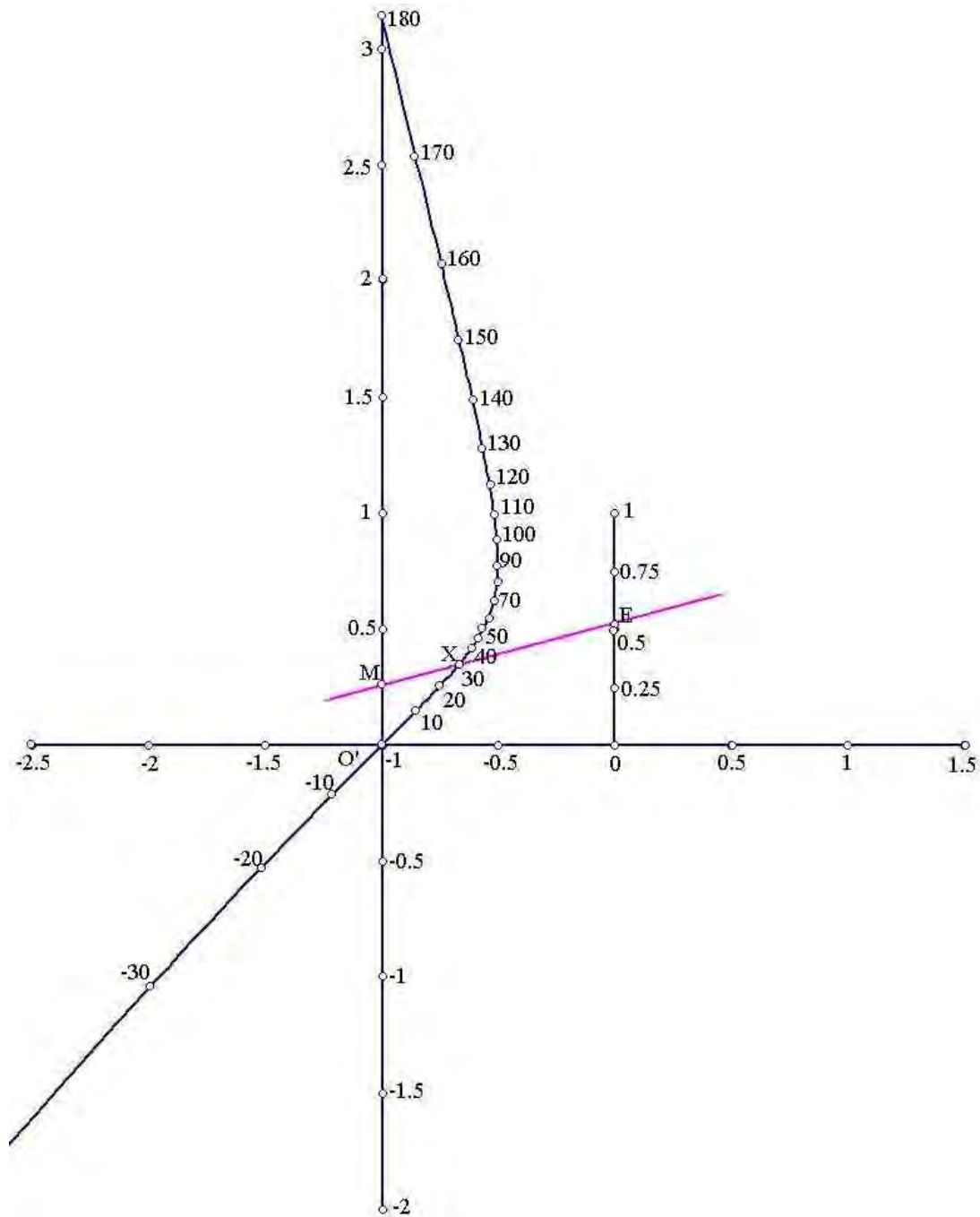
Σχήμα 50. Παράδειγμα της εξίσωσης  $s_{\rho t} = -1 + 2e_{\rho t}$ .



Σχήμα 51. Παράδειγμα της εξίσωσης  $s\sigma t = -1 + 2\sigma t$ .

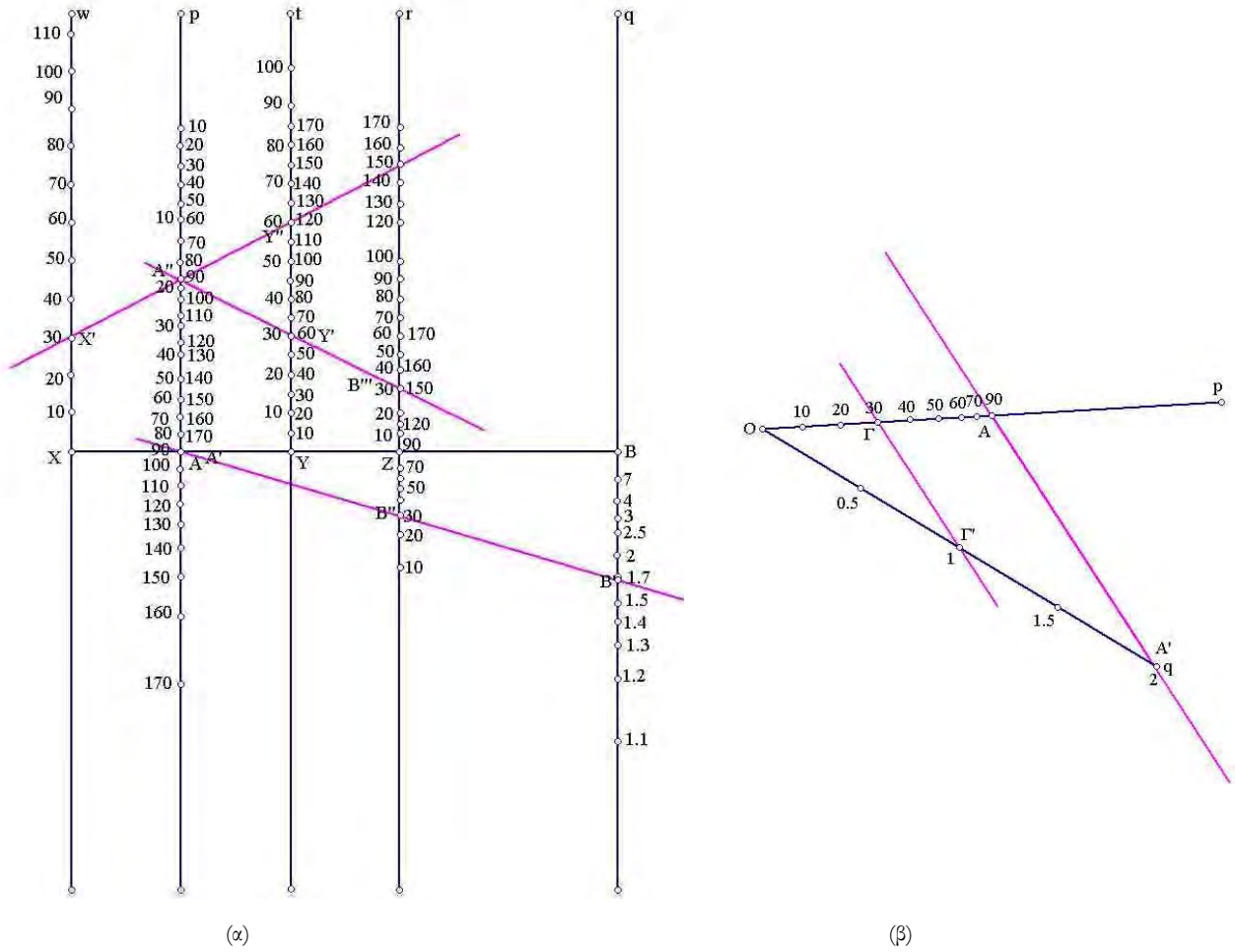


Σχήμα 52. Παράδειγμα της εξίσωσης  $-2\eta\mu^2t + \sqrt{2}\eta\mu t + 1 = 0$

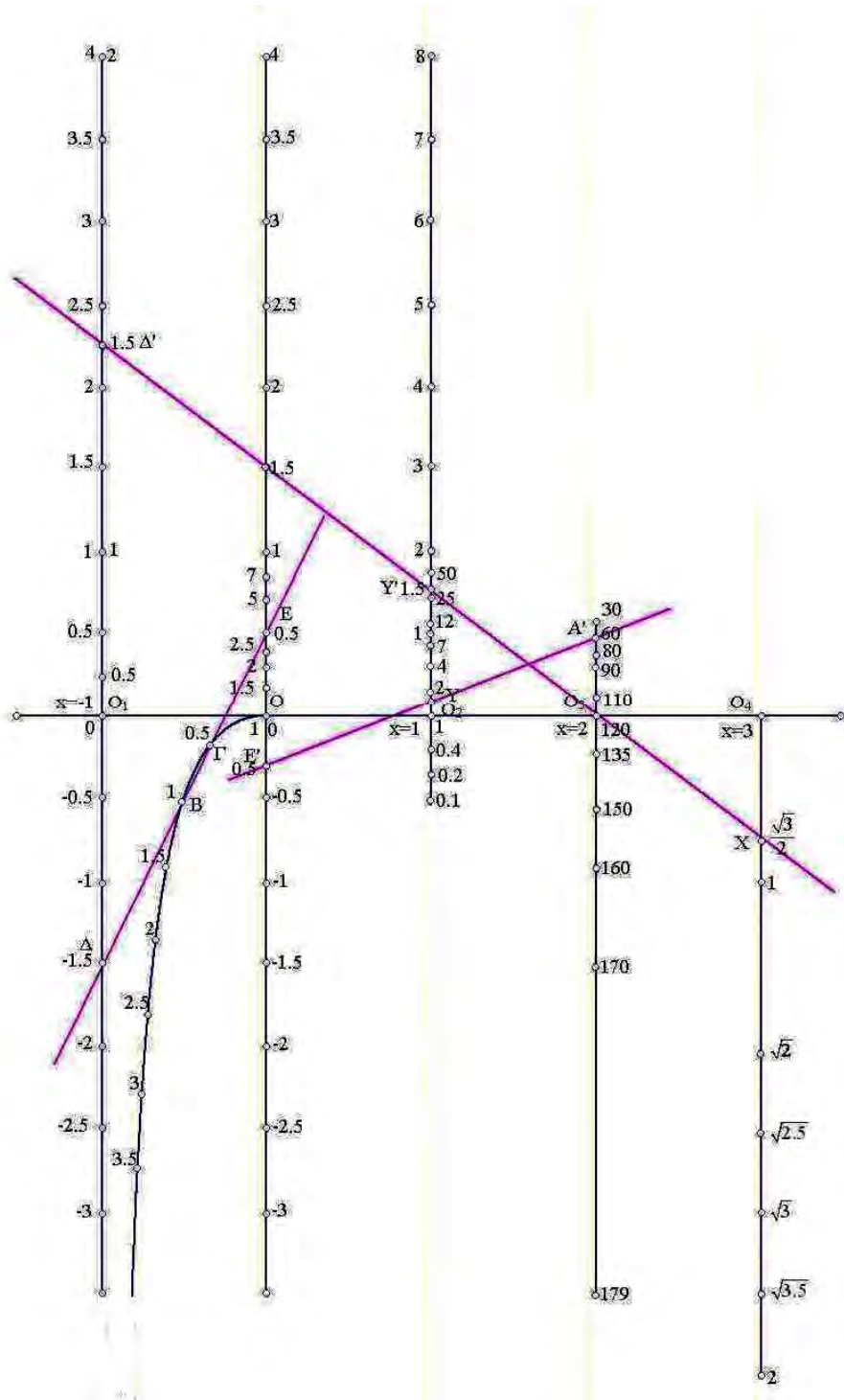


Σχήμα 53. Παράδειγμα της εξίσωσης  $t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \eta\mu t$ .

## Κεφάλαιο 5

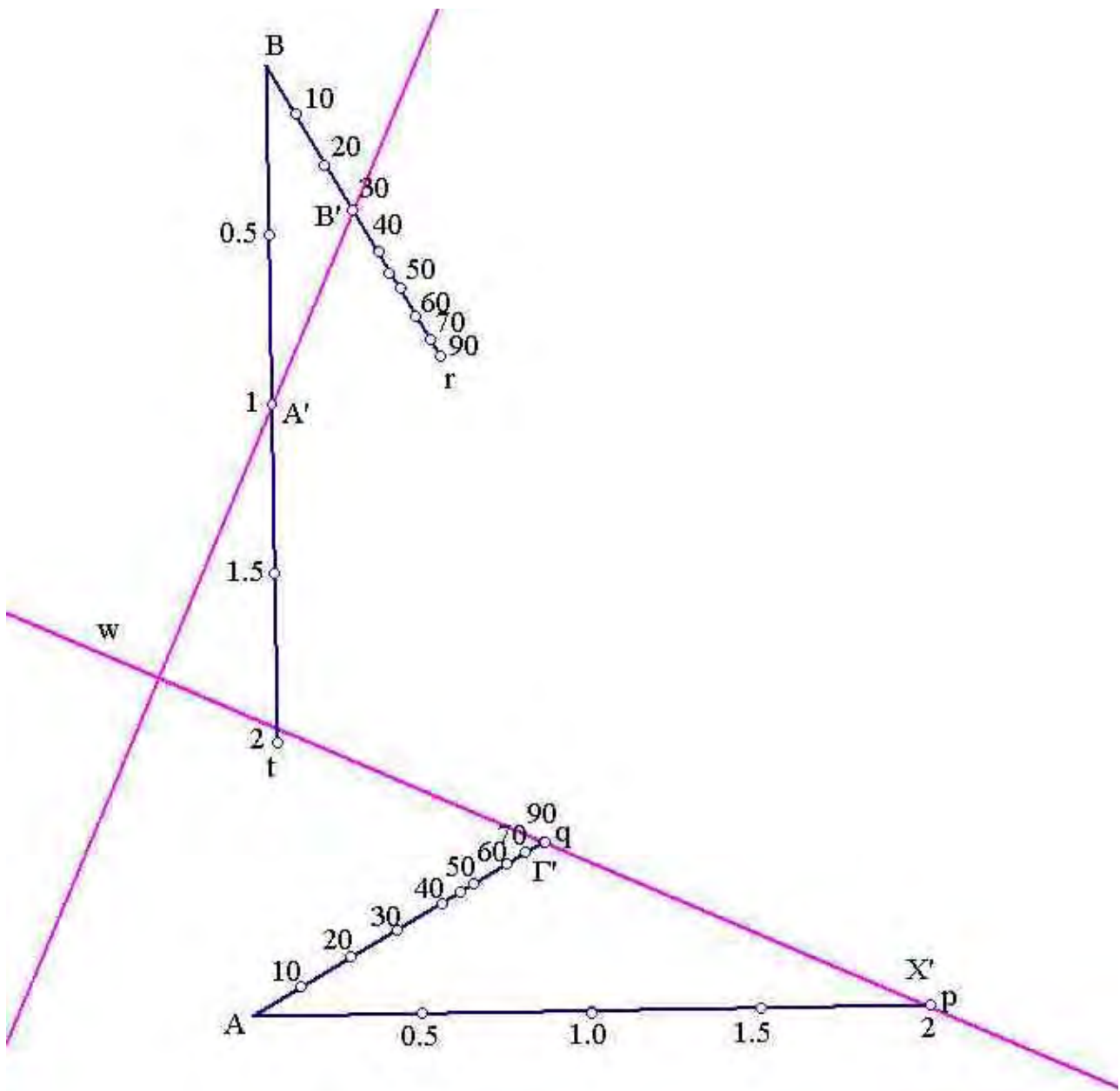


Σχήμα 54. Παράδειγμα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta = \sqrt{3}$ ,  $\gamma = 1$  και την περιεχόμενη γωνία  $\hat{A} = 90^\circ$ . Στο Σχήμα (α) υπολογίζουμε τις γωνίες  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  ενώ στο Σχήμα (β) υπολογίζουμε την πλευρά  $\alpha = 2$ .

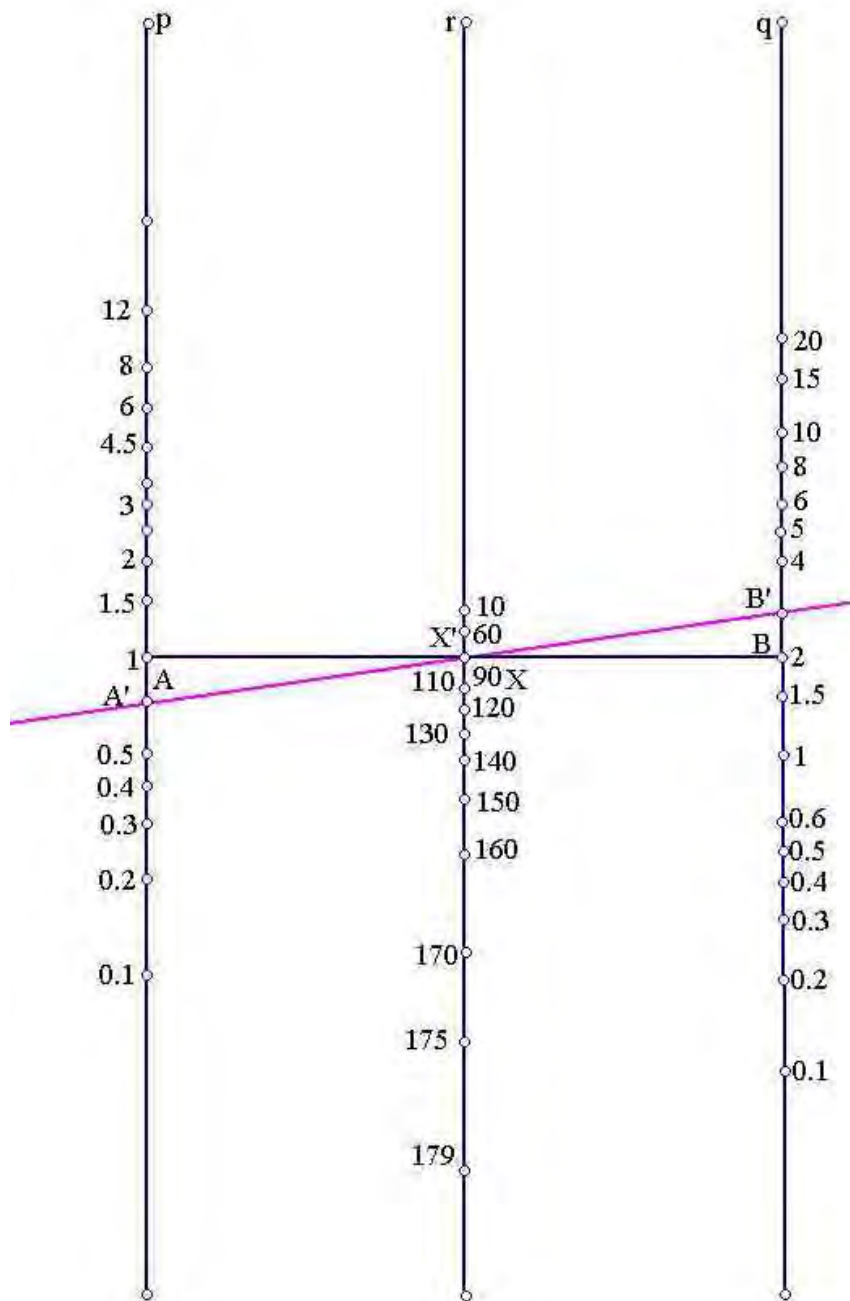


Σχήμα 55. Παράδειγμα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\beta=1$ ,  $\gamma=0.5$  και την περιεχόμενη γωνία  $\hat{A} = 60^\circ$ .

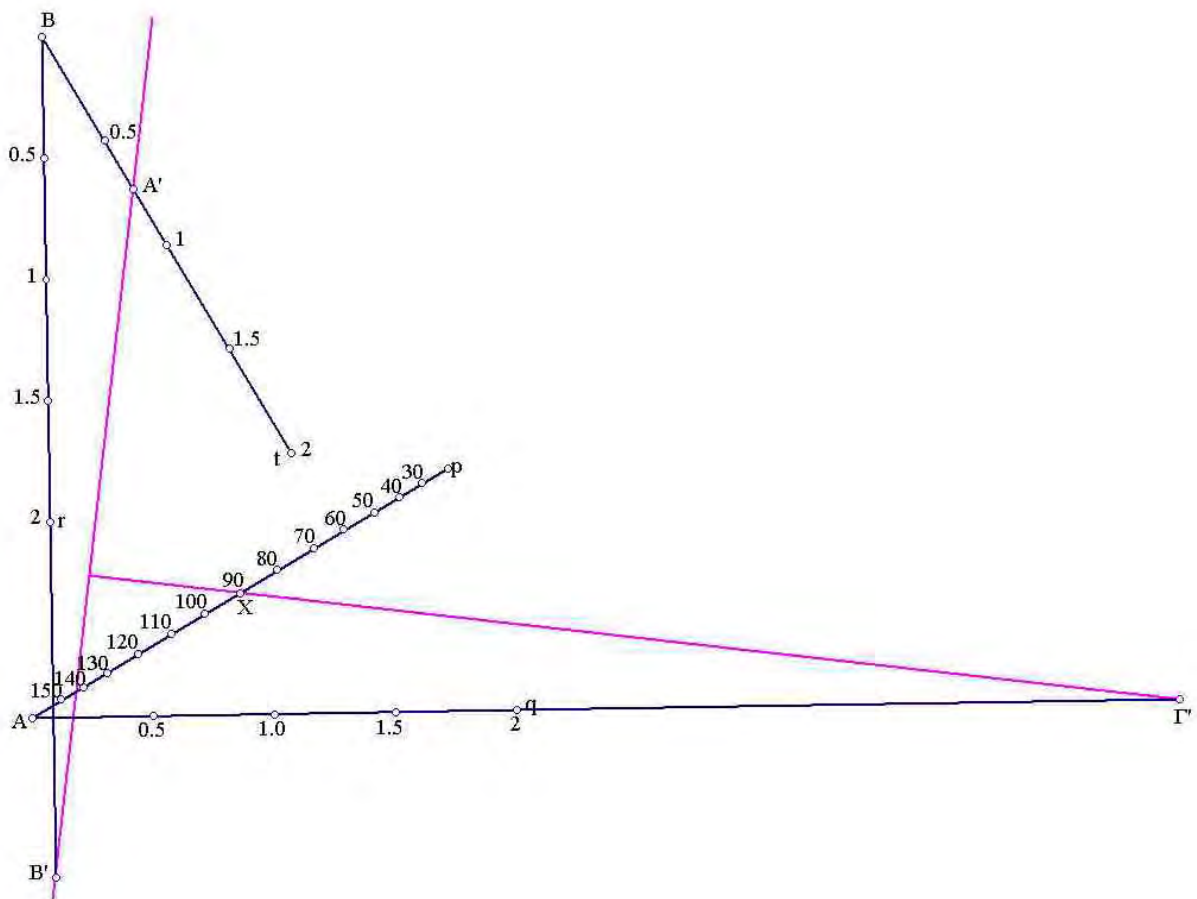




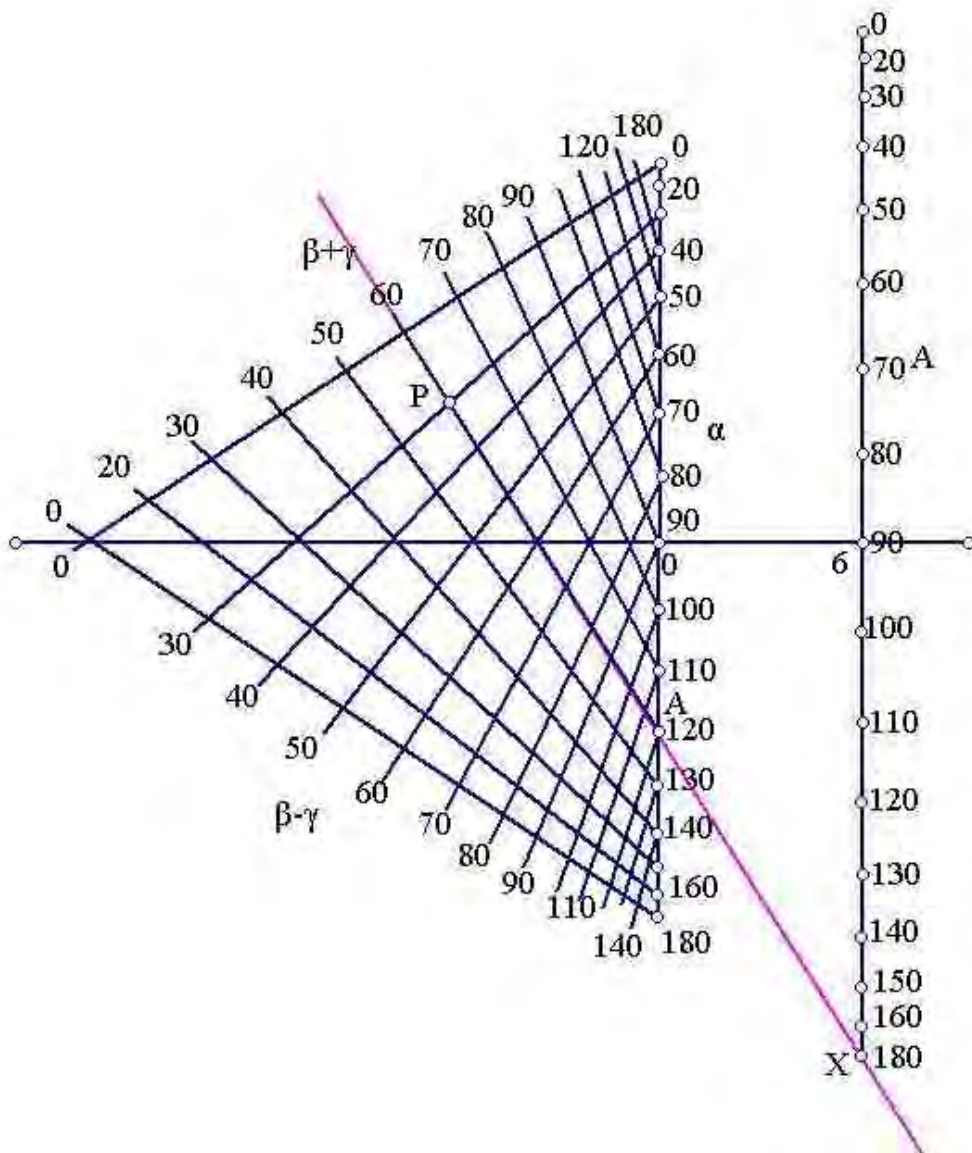
Σχήμα 56. Παράδειγμα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα την πλευρά  $a=2$  και τις προσκείμενες γωνίες  $\hat{B}=30^\circ$  και  $\hat{G}=60^\circ$ .



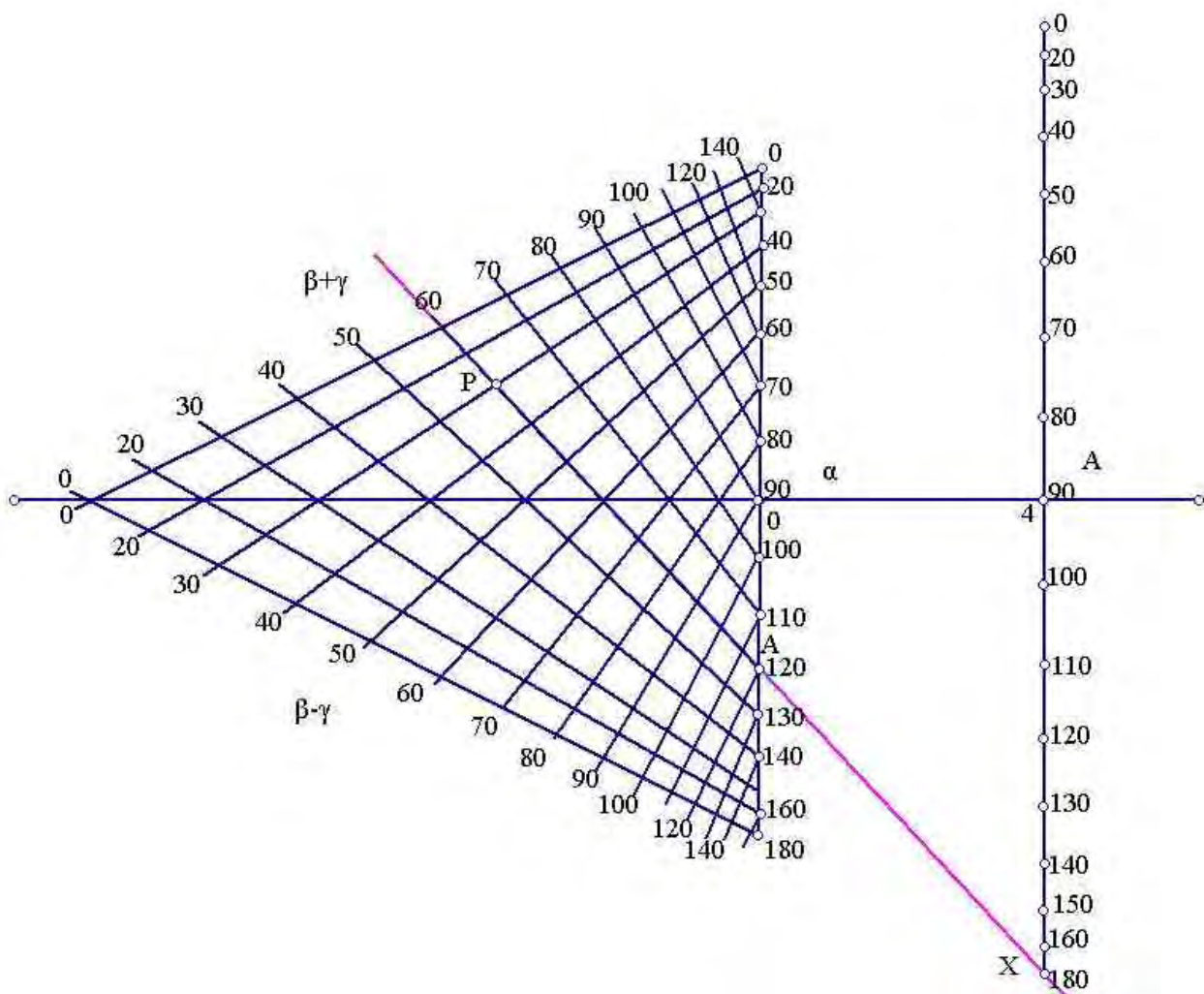
Σχήμα 57. Παράδειγμα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=2$ ,  $\beta=\sqrt{3}$  και  $\gamma=1$ .



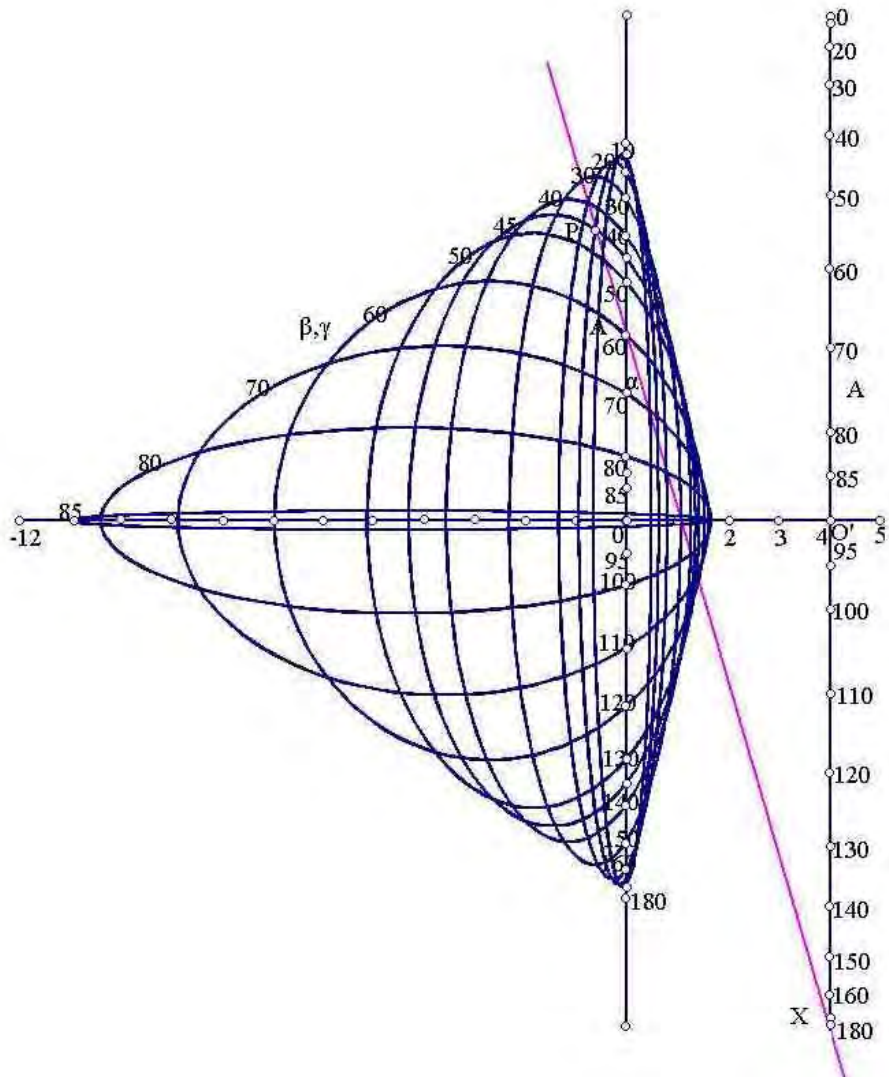
Σχήμα 58. Παράδειγμα για την επίλυση του τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=2$ ,  $\beta=\sqrt{3}$  και  $\gamma=1$ .



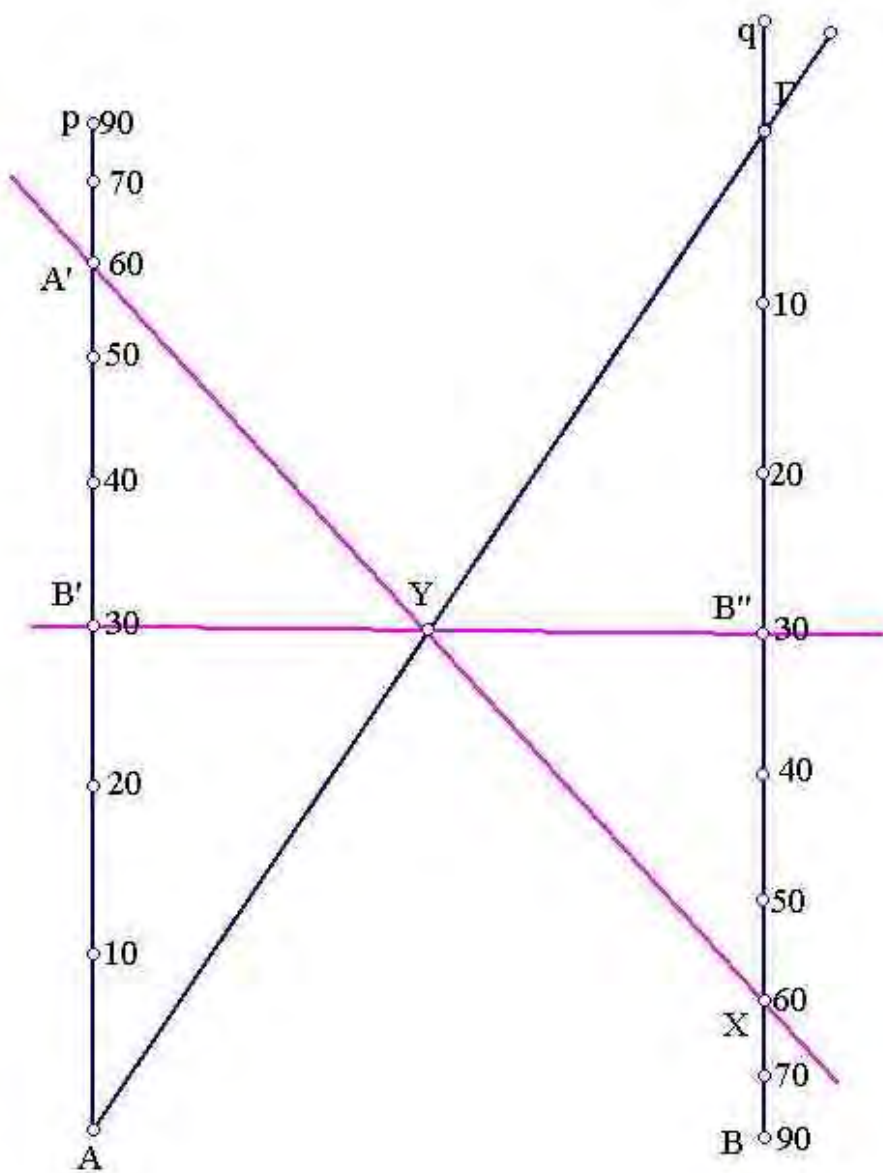
Σχήμα 59. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=120^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$  και  $\gamma=15^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $\Lambda=180^\circ$ .



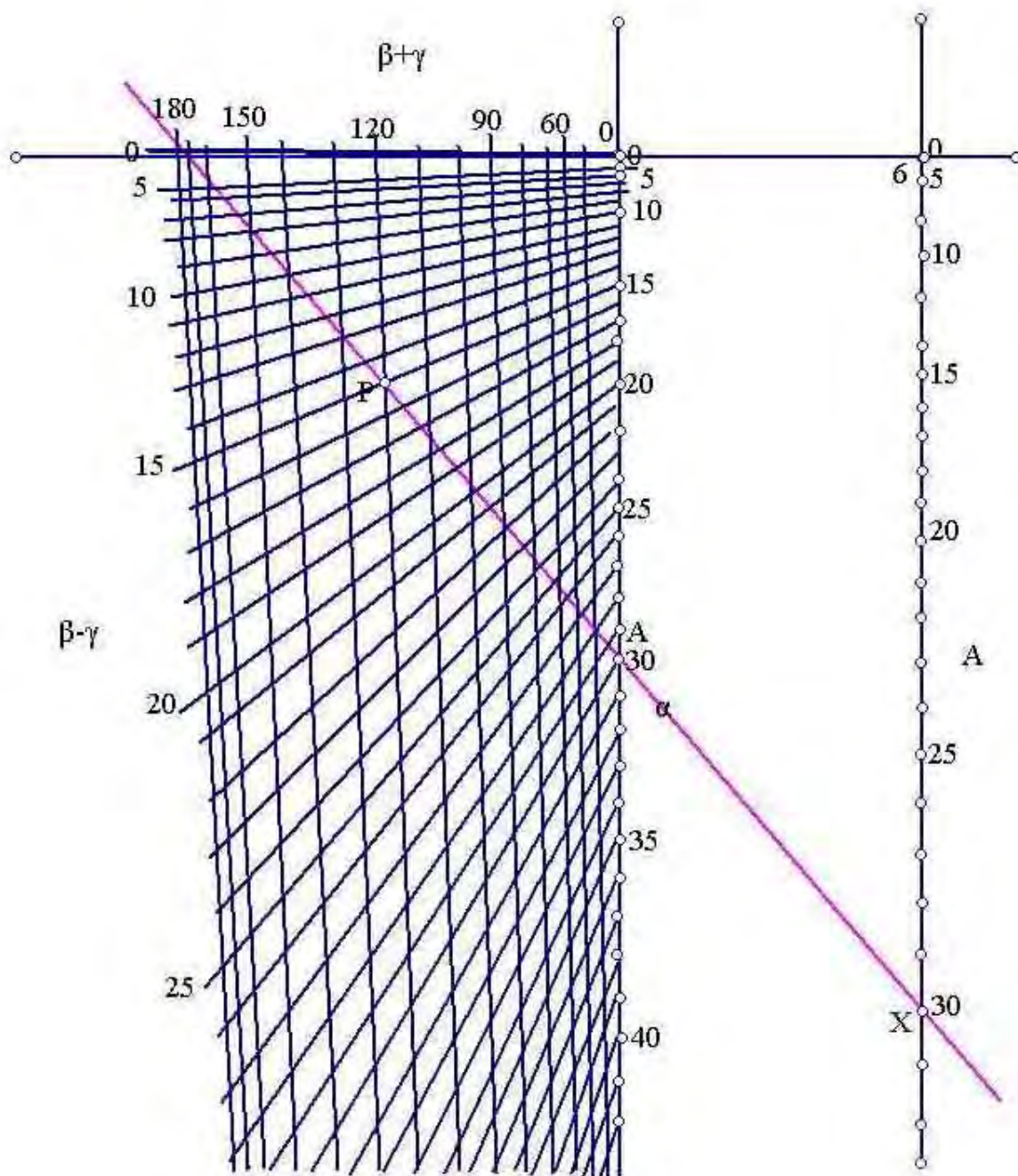
Σχήμα 60. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=60^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$  και  $\gamma=15^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $\Lambda=180^\circ$ .



Σχήμα 61. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=60^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$  και  $\gamma=15^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $\Lambda=180^\circ$ .

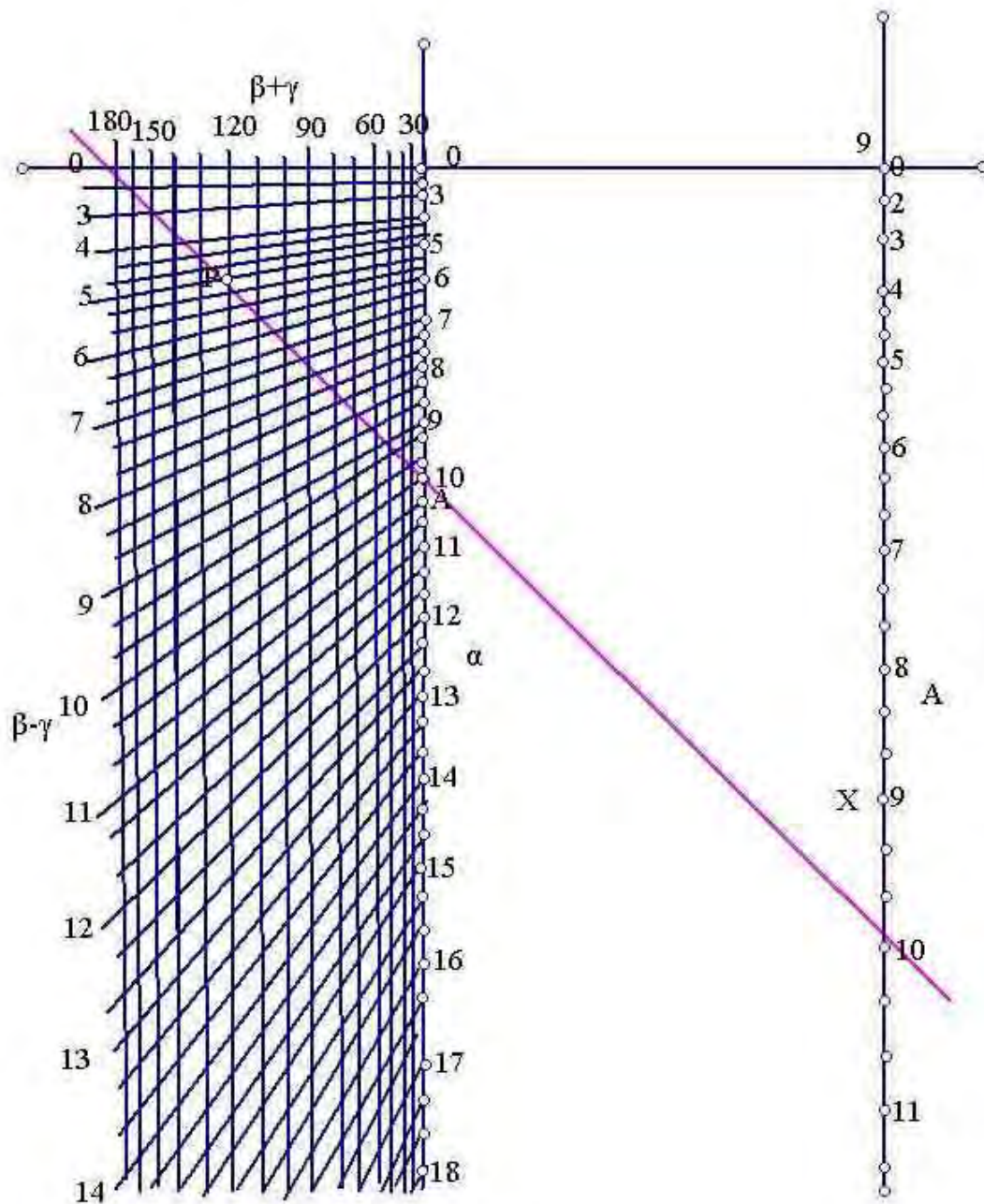


Σχήμα 62. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τη πλευρά  $a=60^\circ$  και τις γωνίες  $A=60^\circ$  και  $B=30^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη πλευρά  $\beta=30^\circ$ .

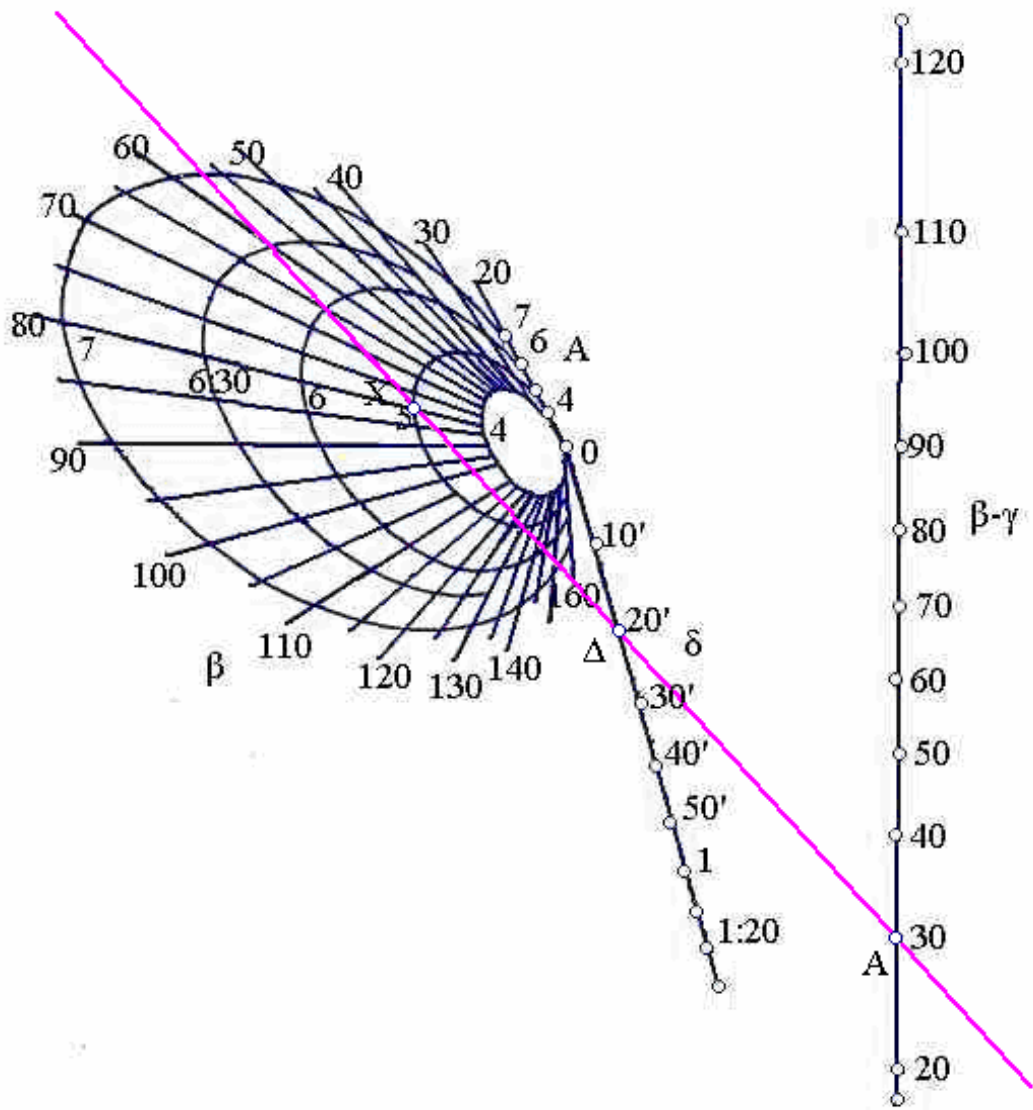


Σχήμα 63. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=30^\circ$ ,  $\beta=62.5^\circ$  και  $\gamma=57.5^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $A=30^\circ$ .

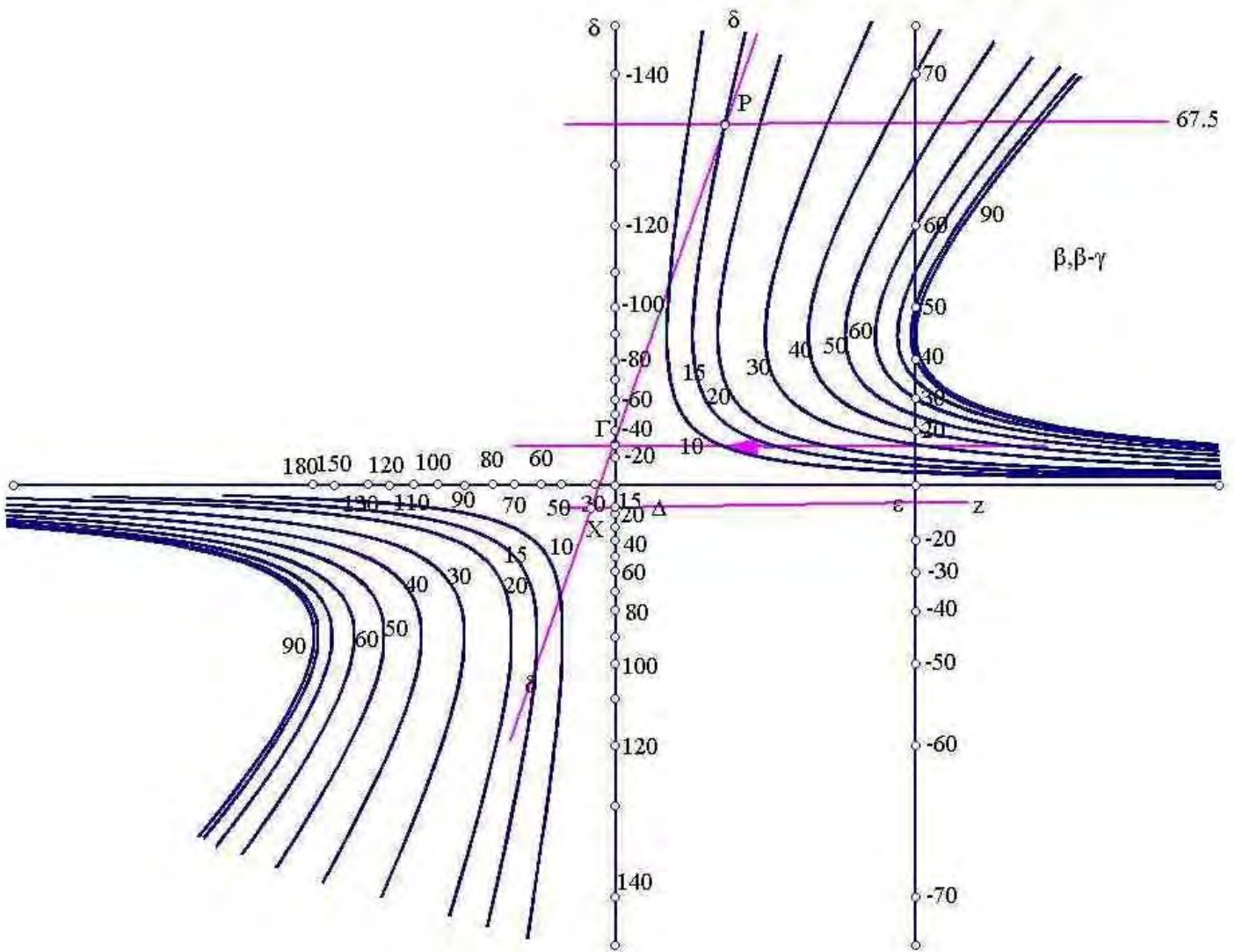




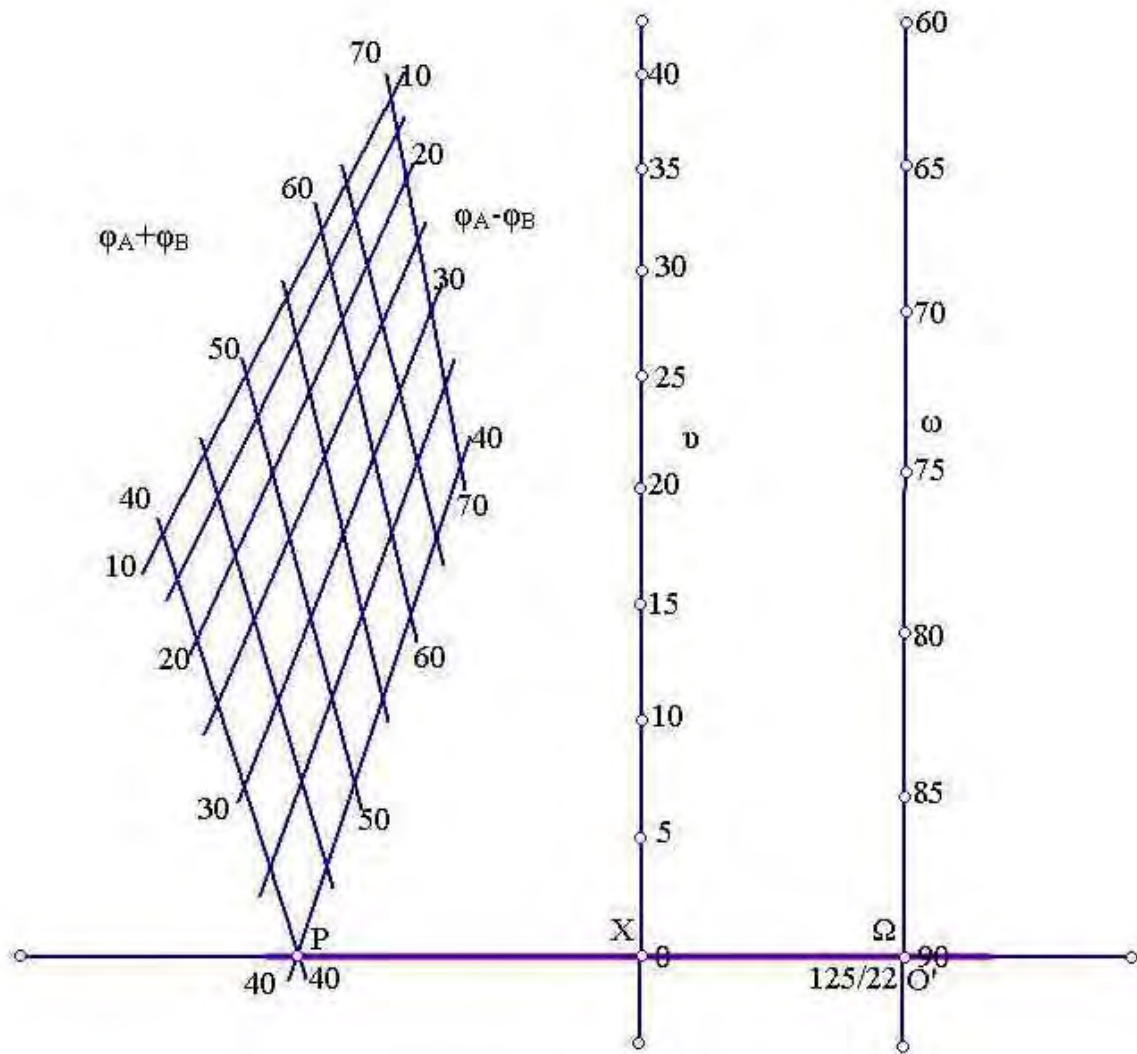
Σχήμα 64. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=30^\circ$ ,  $\beta=62.5^\circ$  και  $\gamma=57.5^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $\Lambda=30^\circ$ .



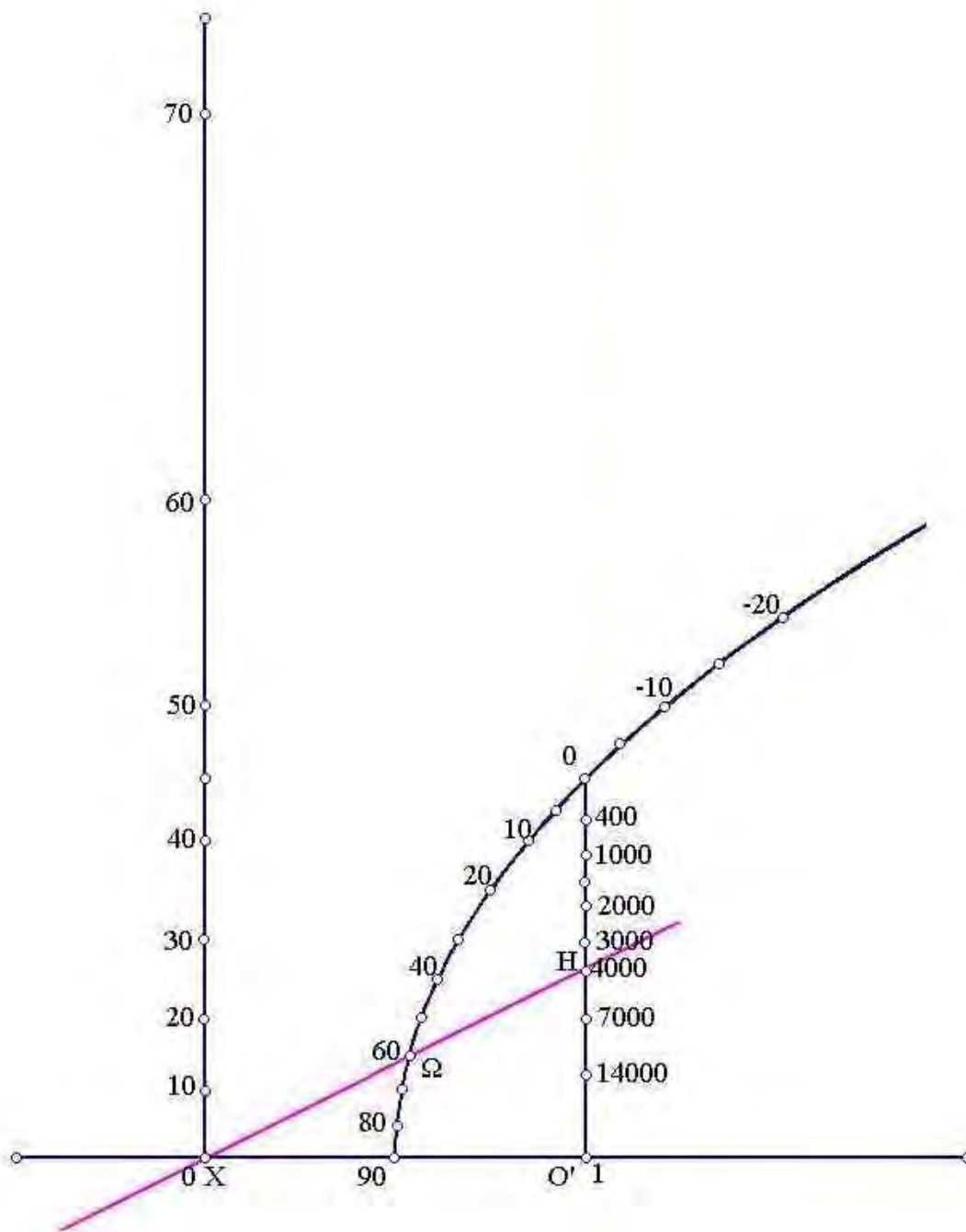
Σχήμα 65. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=30^{\circ}20'$ ,  $\beta=80^{\circ}$  και  $\gamma=50^{\circ}$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $A=5^{\circ}$ . Η τιμή  $\delta$  είναι ίση με την  $\alpha-(\beta-\gamma)$ .



Σχήμα 66. Παράδειγμα για την επίλυση του σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τις πλευρές  $\alpha=30^\circ$ ,  $\beta=67.5^\circ$  και  $\gamma=52.5^\circ$  και υπολογίζουμε τη ζητούμενη γωνία  $\Lambda=30^\circ$ . Η τιμή  $\delta$  είναι ίση με την  $\alpha-(\beta-\gamma)$ .

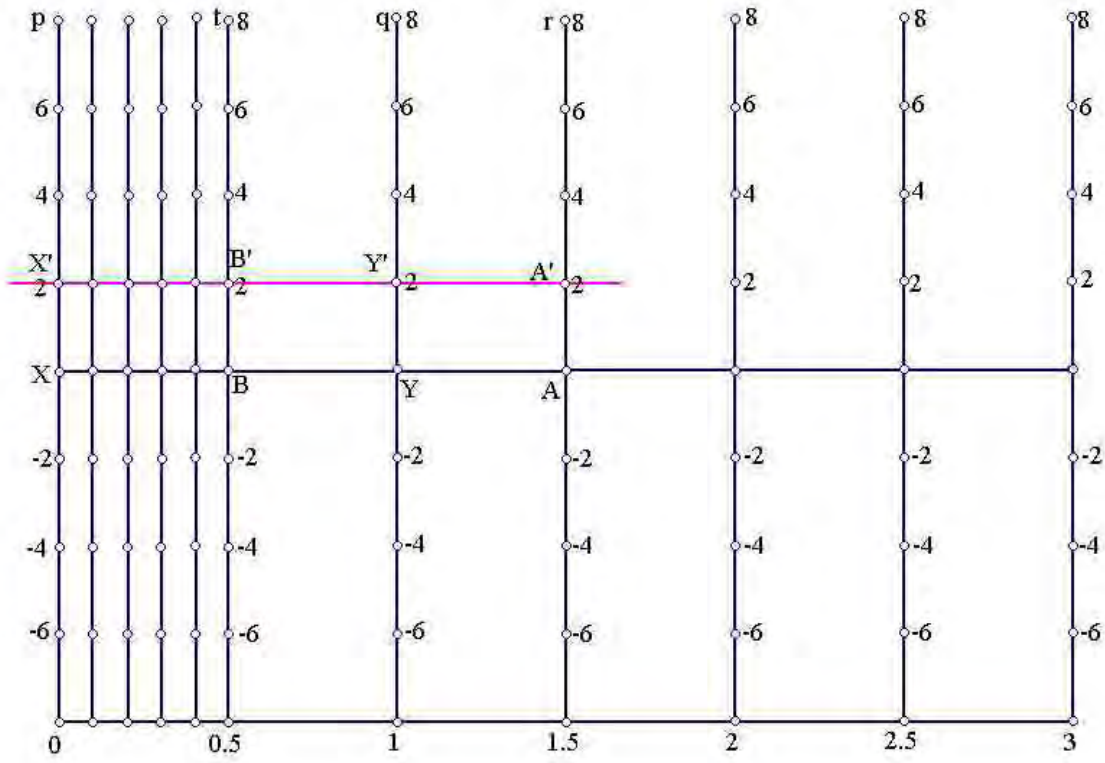


Σχήμα 67. Παράδειγμα για τον υπολογισμό του υψόμετρου  $v$  δυο πόλεων  $A, B$  με γεωγραφικά πλάτη  $\phi_A=40^\circ$  και  $\phi_B=0^\circ$  και ωρική γωνία  $\omega=90^\circ$ .

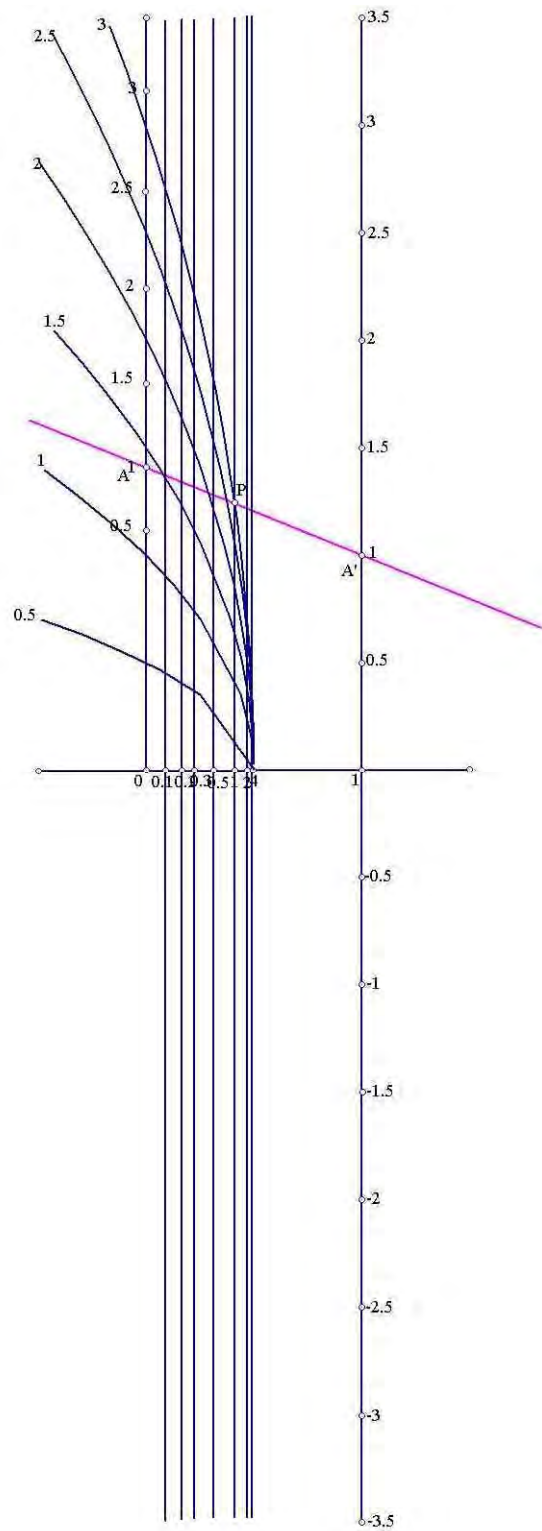


Σχήμα 68. Παράδειγμα για τον υπολογισμό της κλίσης  $\theta$  του ουράνιου σώματος με δεδομένα τη γωνία εδάφους  $\omega=60^\circ$  και την απόσταση  $h=3960$  του σώματος από το κέντρο της γης.

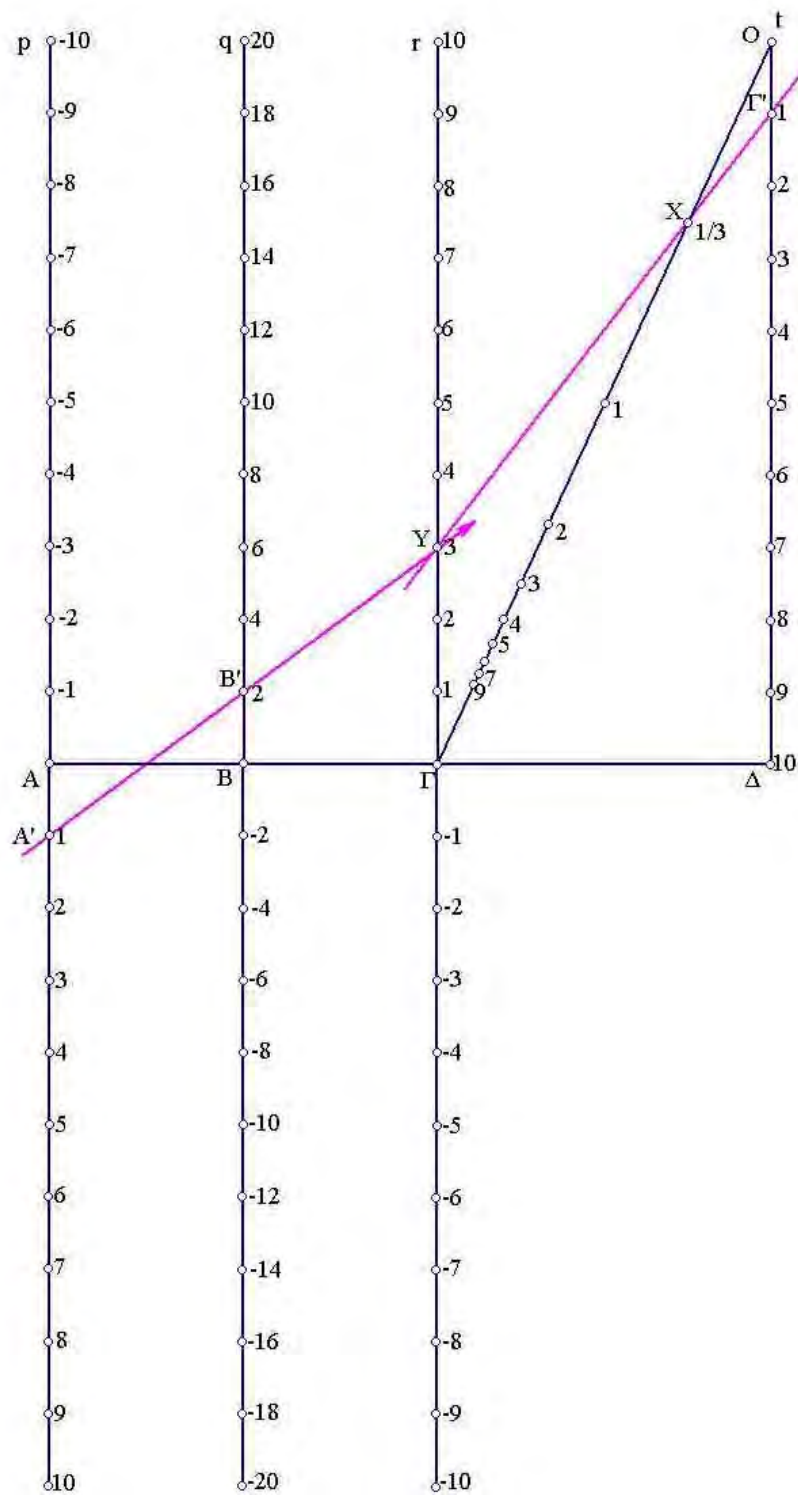
Κεφάλαιο 6



Σχήμα 69. Παράδειγμα επίλυσης του συστήματος  $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ .

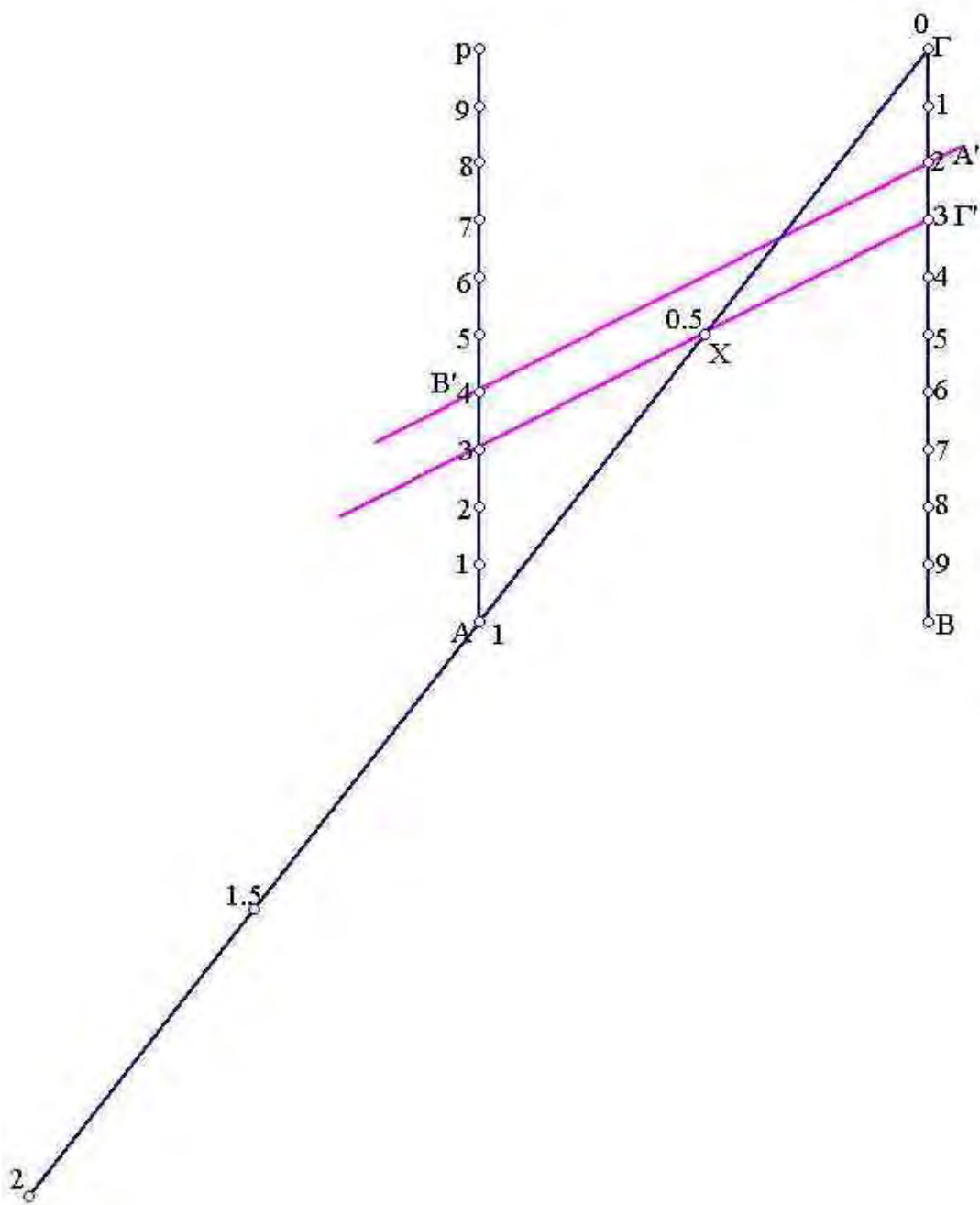


Σχήμα 70. Παράδειγμα επίλυσης του συστήματος  $\gamma = \alpha\beta + \sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}$  με  $\alpha=1$  και  $\beta=1$ .

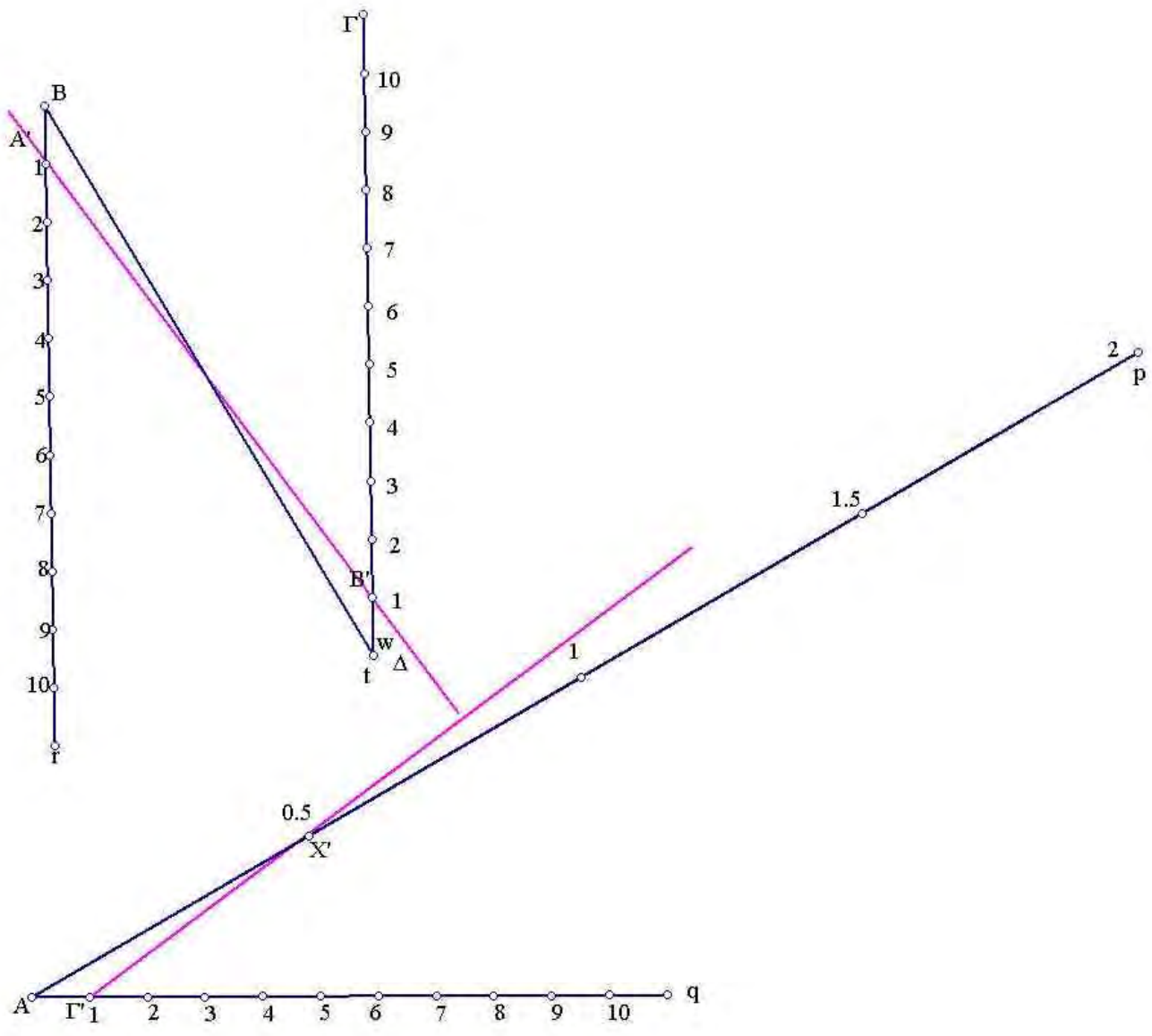


Σχήμα 71. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=1$ .

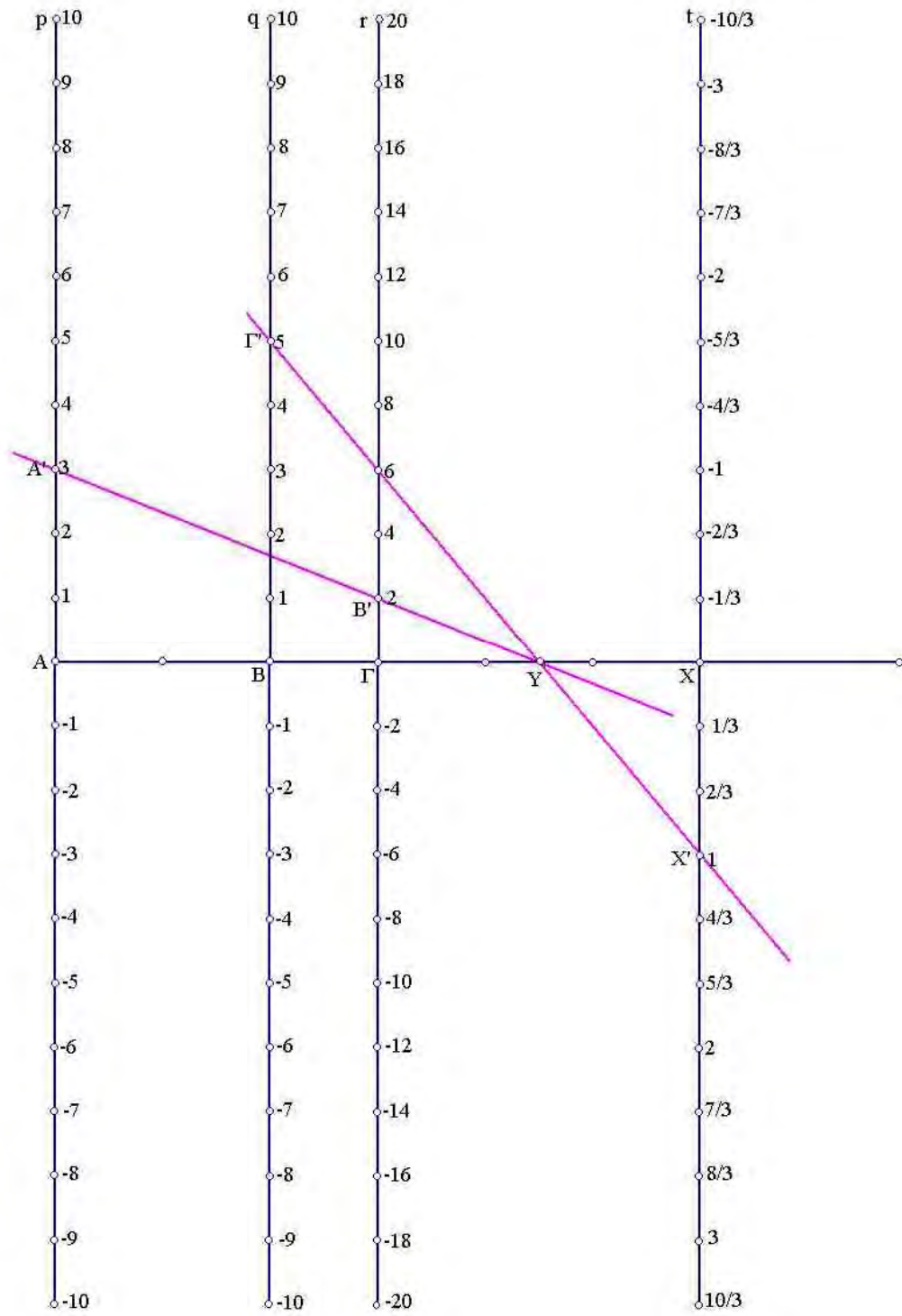




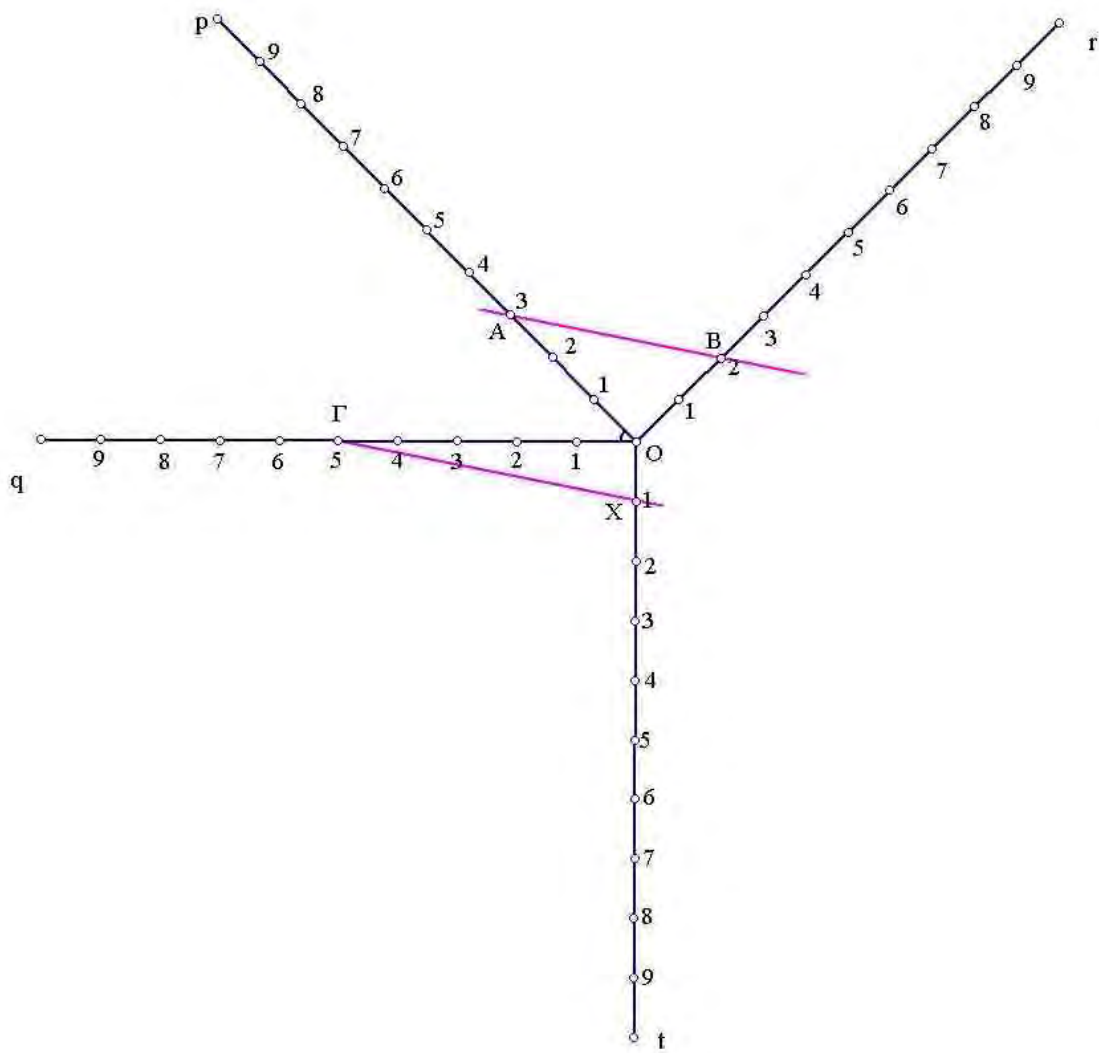
Σχήμα 72. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=4$  και  $\gamma=3$ .



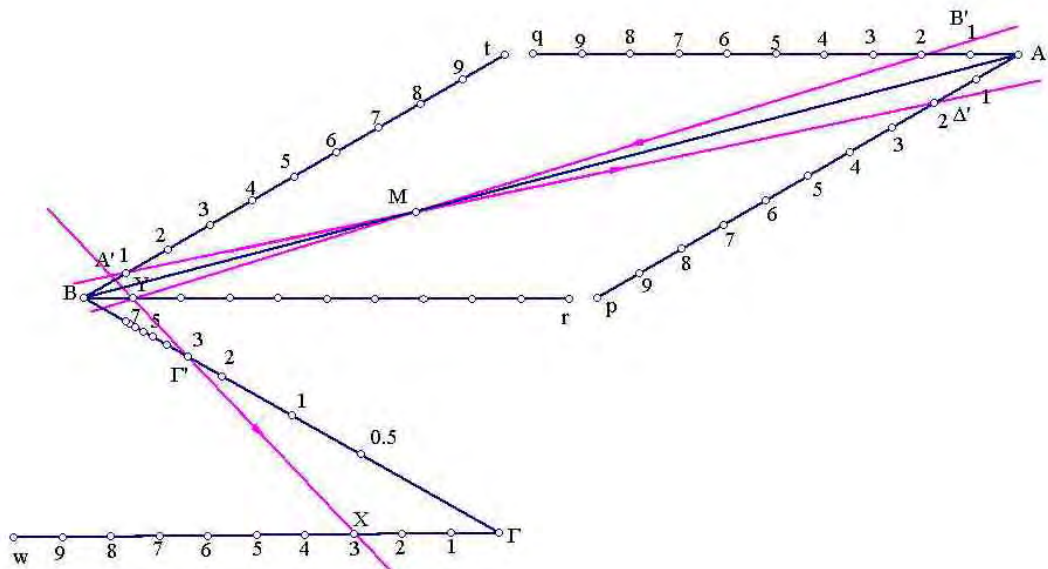
Σχήμα 73. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \alpha + \beta$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$  και  $\gamma=1$ .



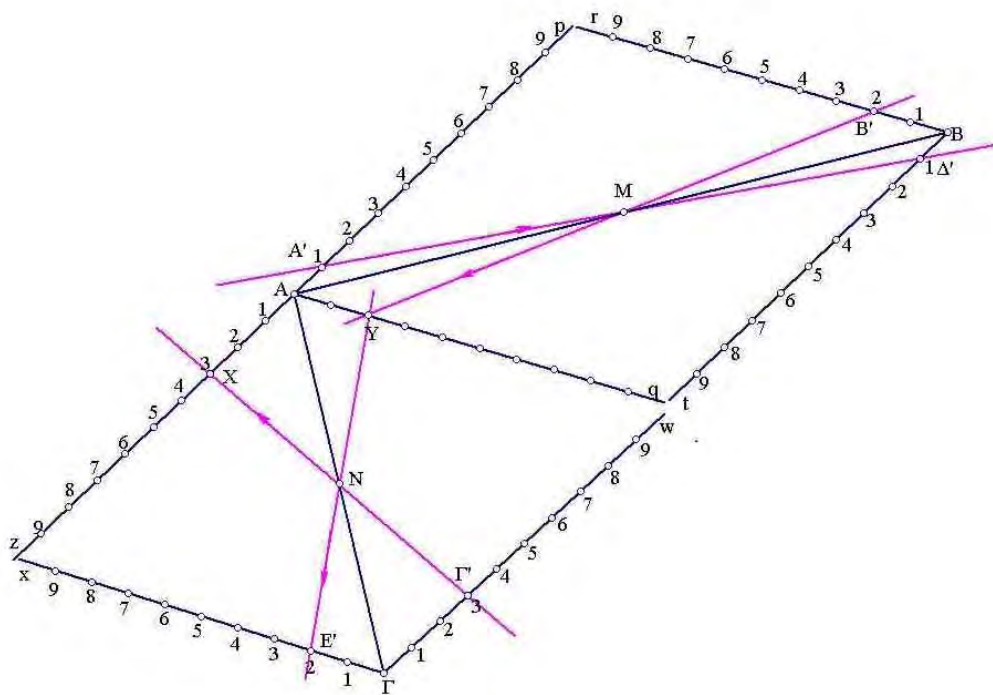
Σχήμα 74. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$  με  $\alpha=3$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=5$ .



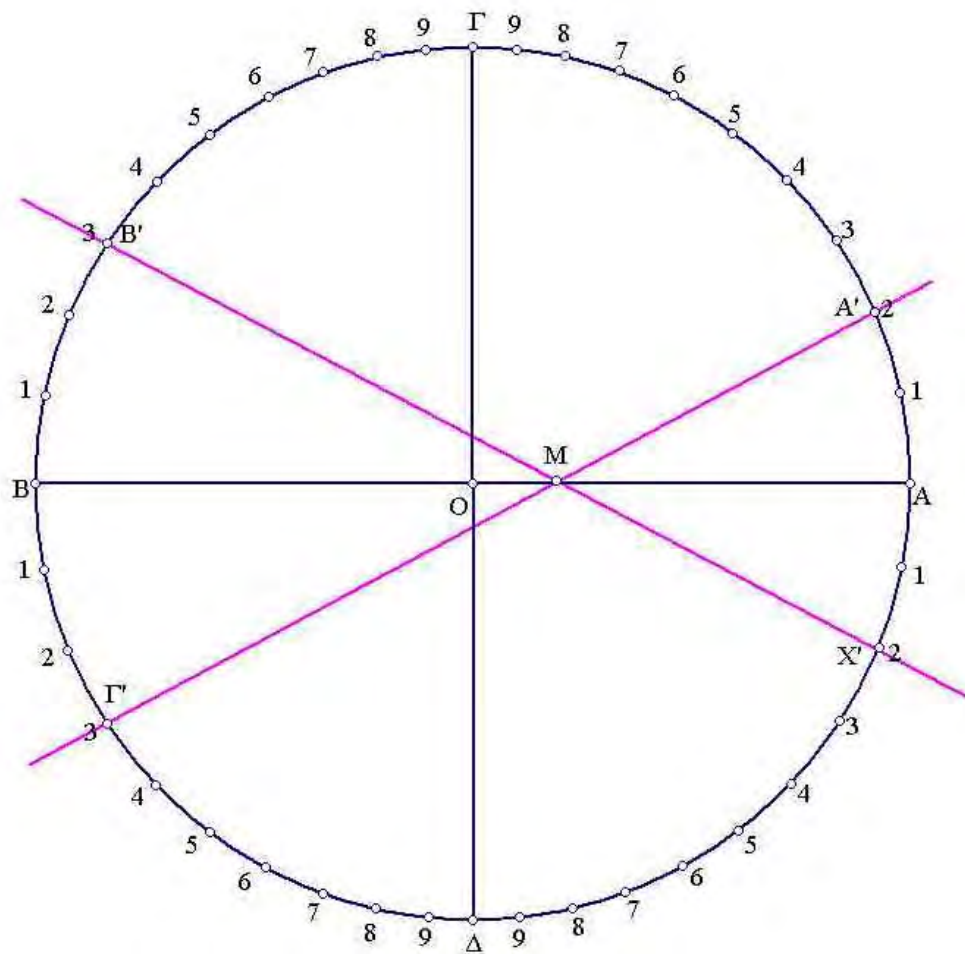
Σχήμα 75. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\gamma}{t} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$  με  $\alpha=3$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=5$ .



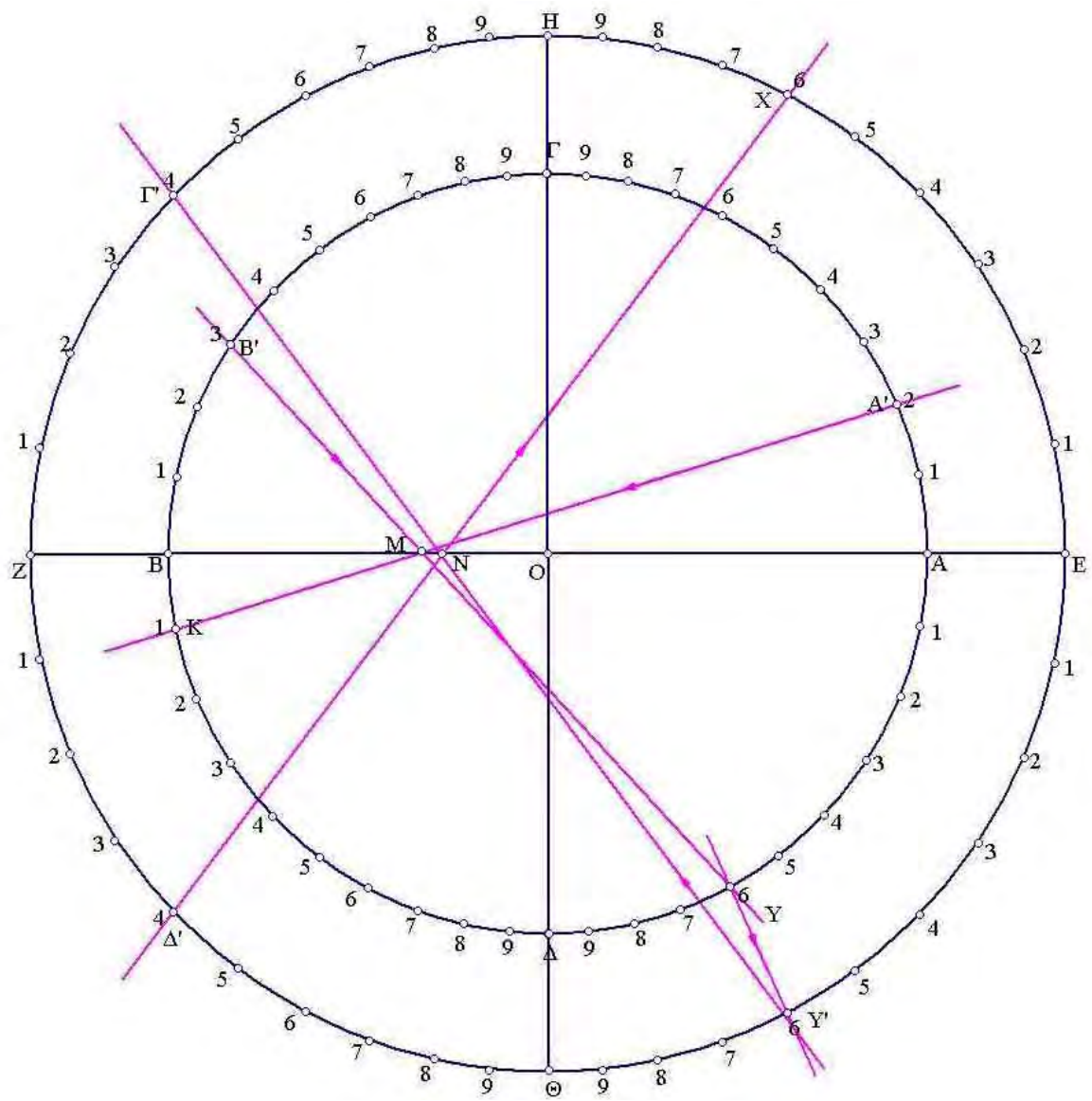
Σχήμα 76. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\epsilon$  με  $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$  και  $\delta=2$ .



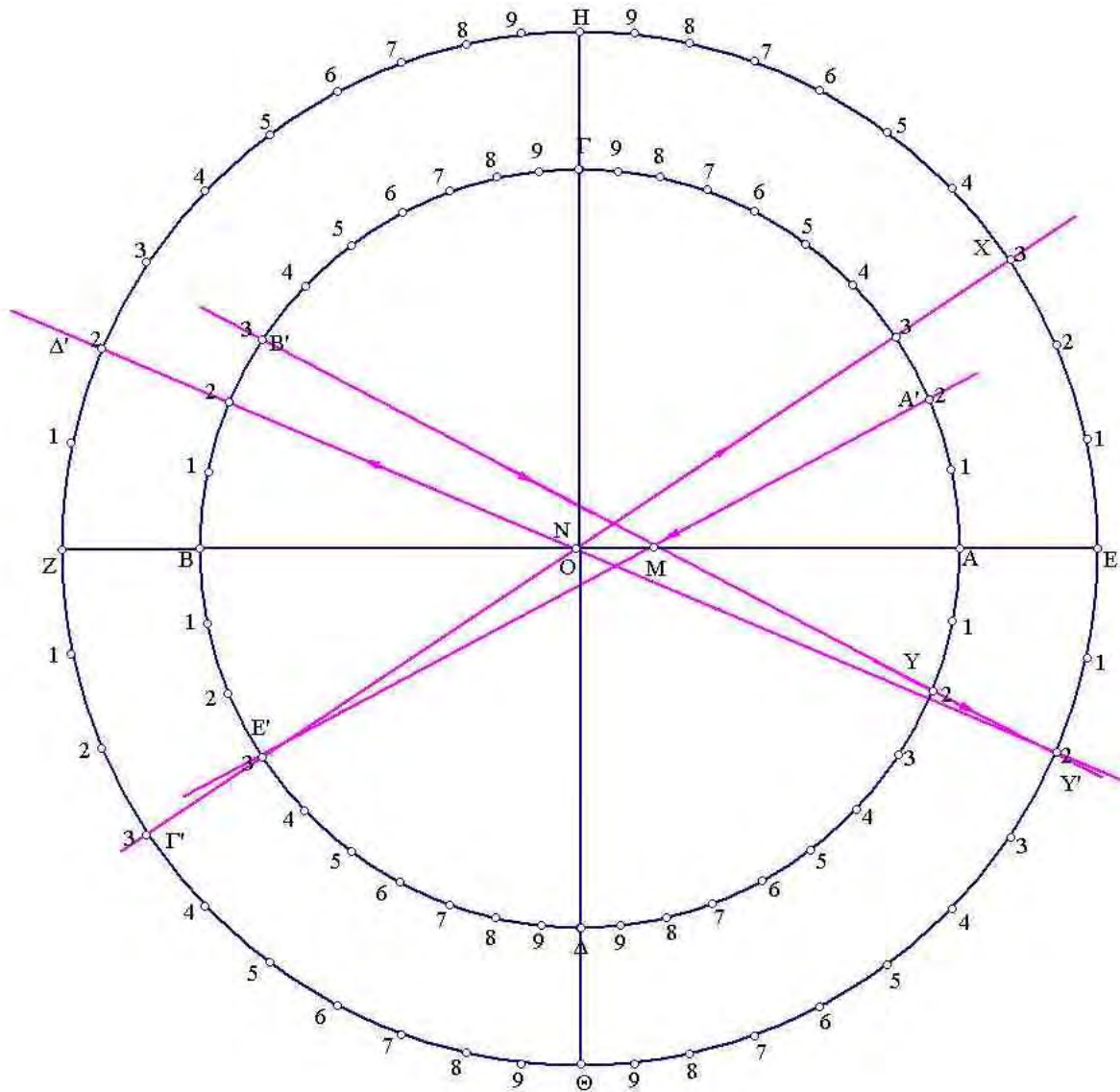
Σχήμα 77. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\epsilon$  με  $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \delta=1$  και  $\epsilon=2$ .



Σχήμα 78. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta=\gamma\tau$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=3$  και  $\gamma=3$ .

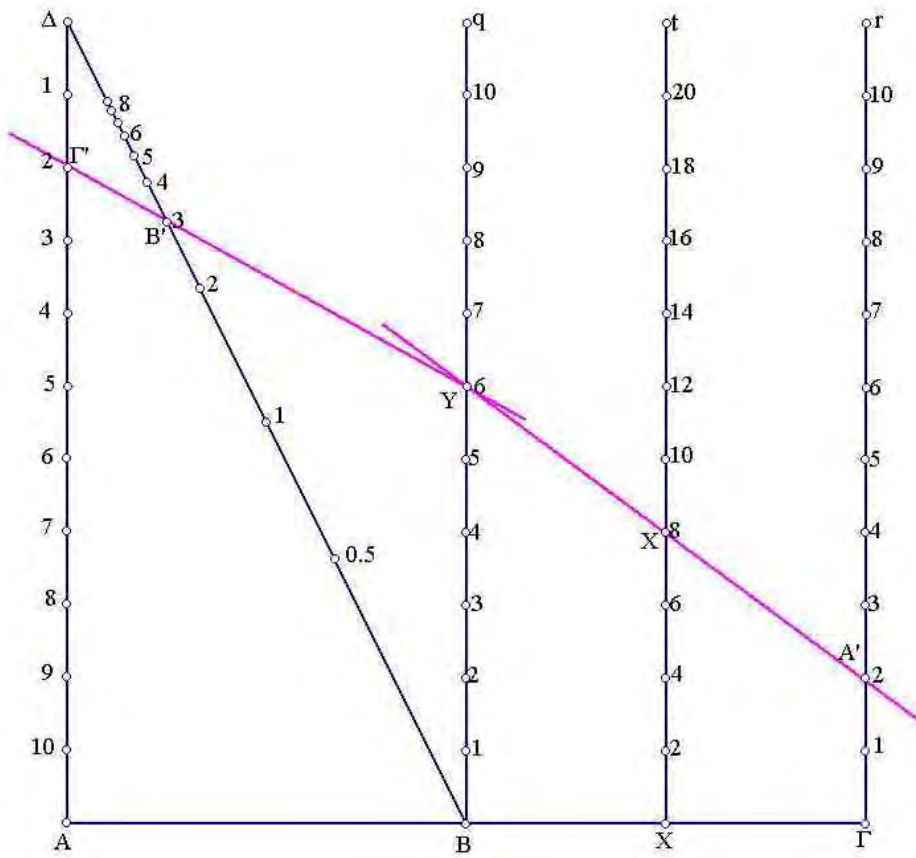


Σχήμα 79. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\iota$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=3$ ,  $\gamma=4$  και  $\delta=4$ .

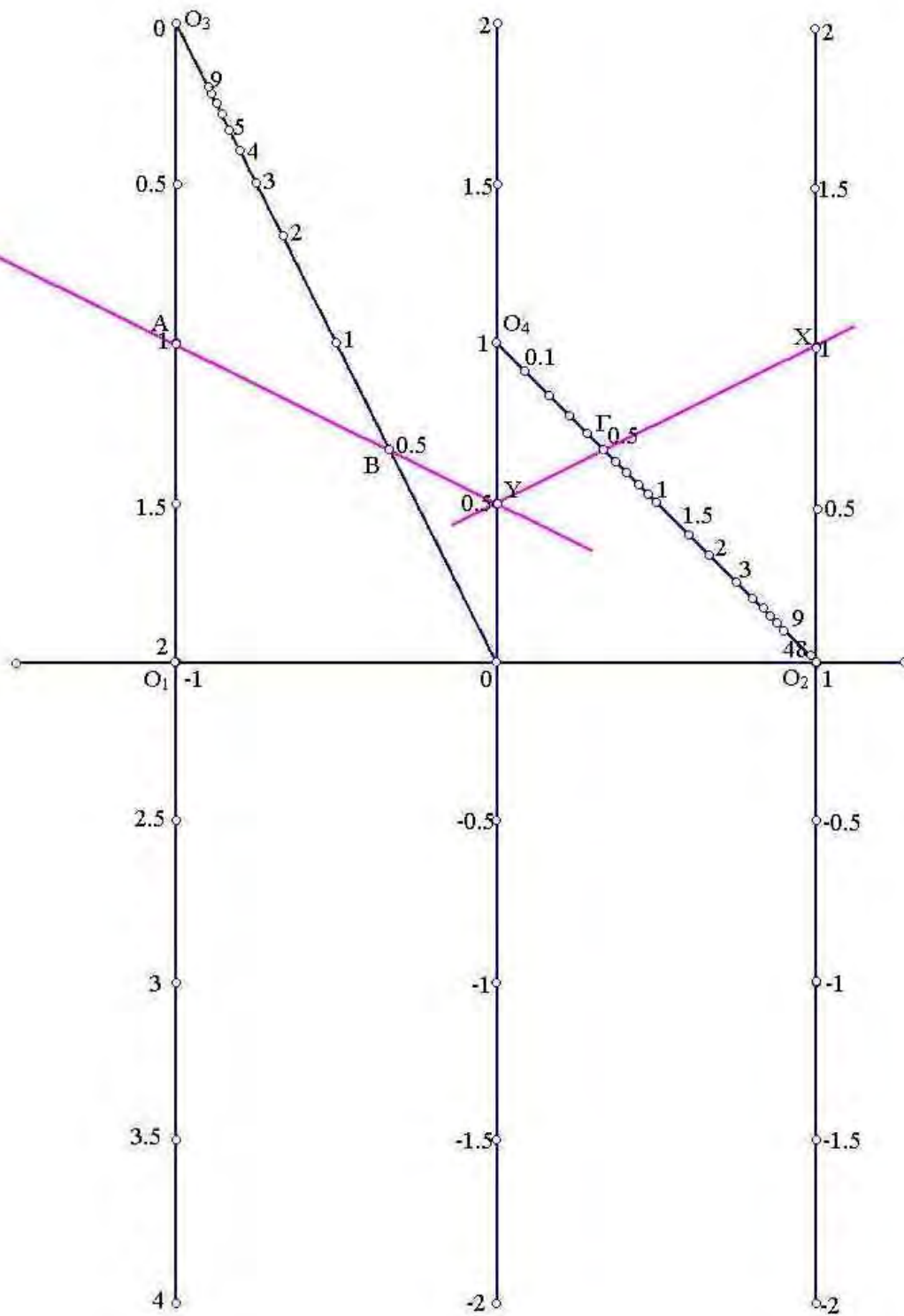


Σχήμα 80. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\epsilon$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=3$ ,  $\gamma=3$ ,  $\delta=2$  και  $\epsilon=3$ .

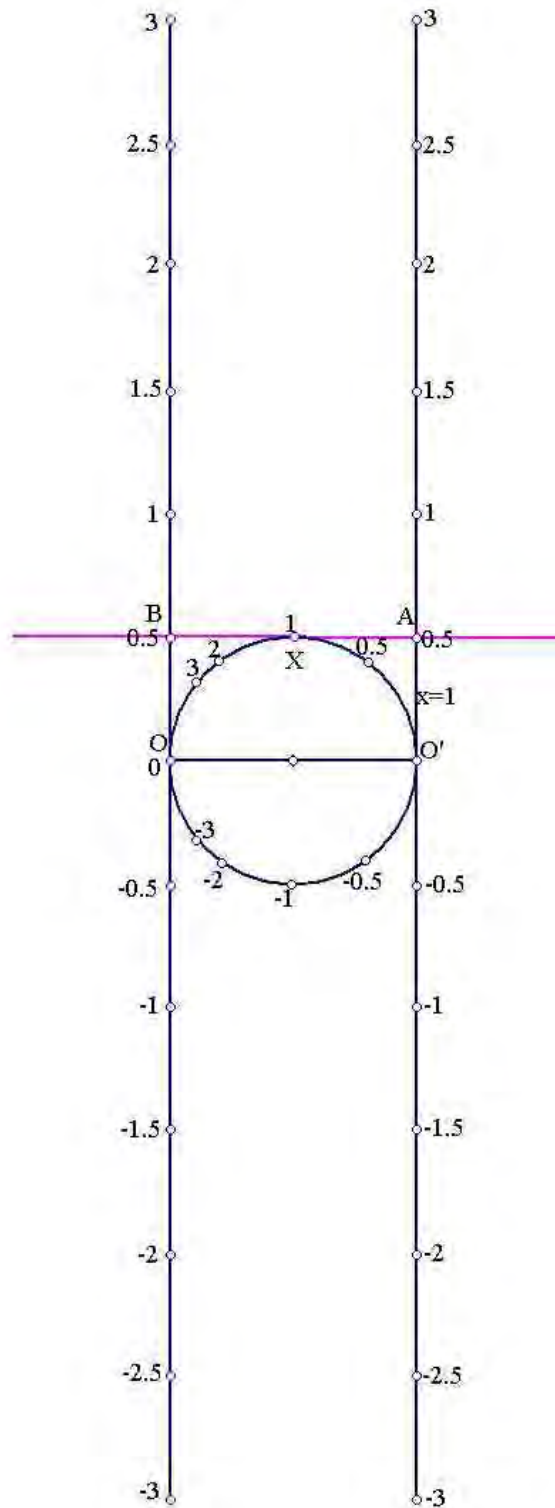




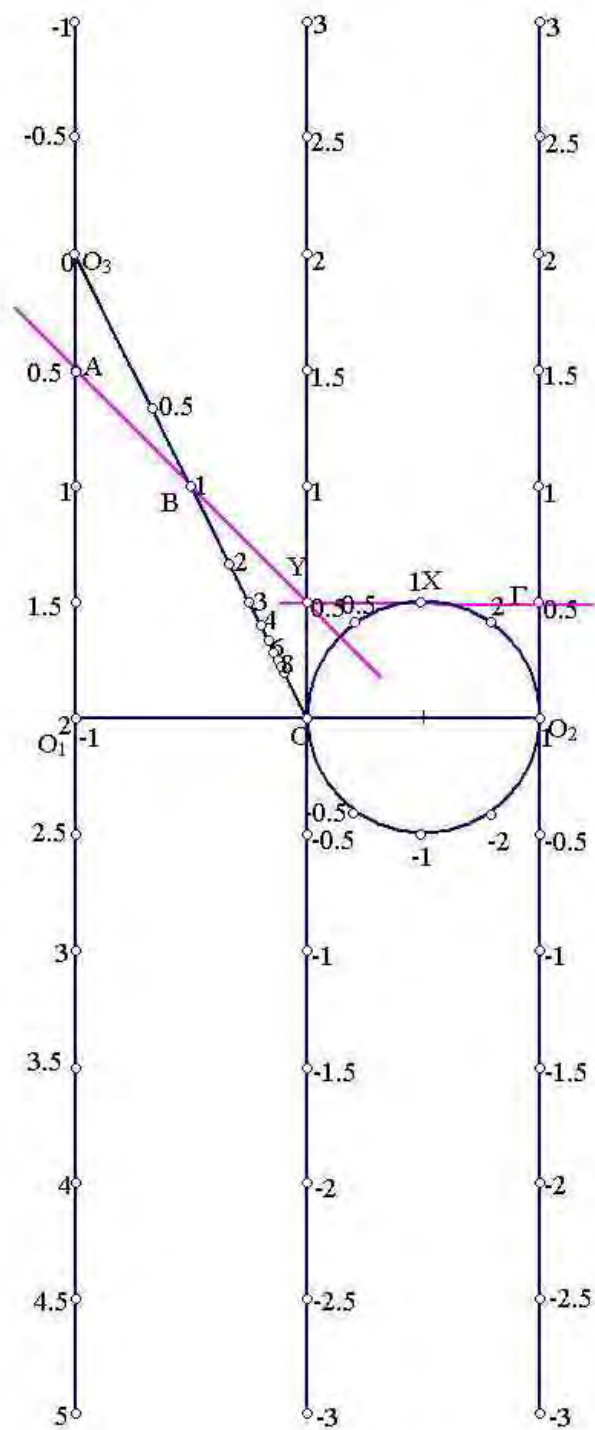
Σχήμα 81. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha + \beta\gamma = t$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=3$  και  $\gamma=2$ .



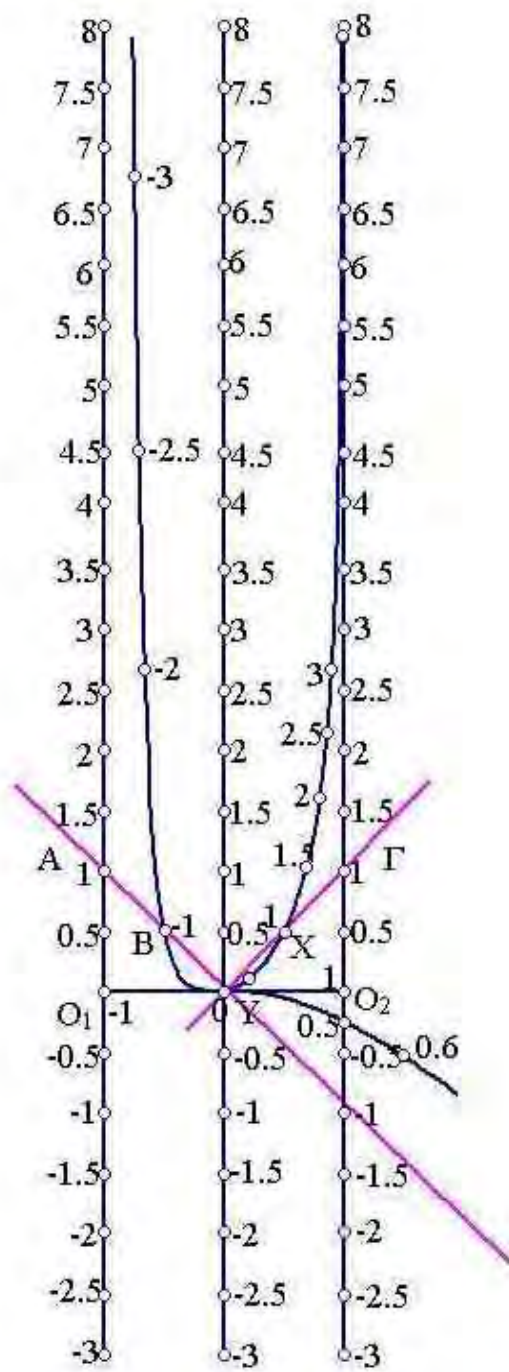
Σχήμα 82. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta+\gamma t=1$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.5$  και  $\gamma=0.5$ .



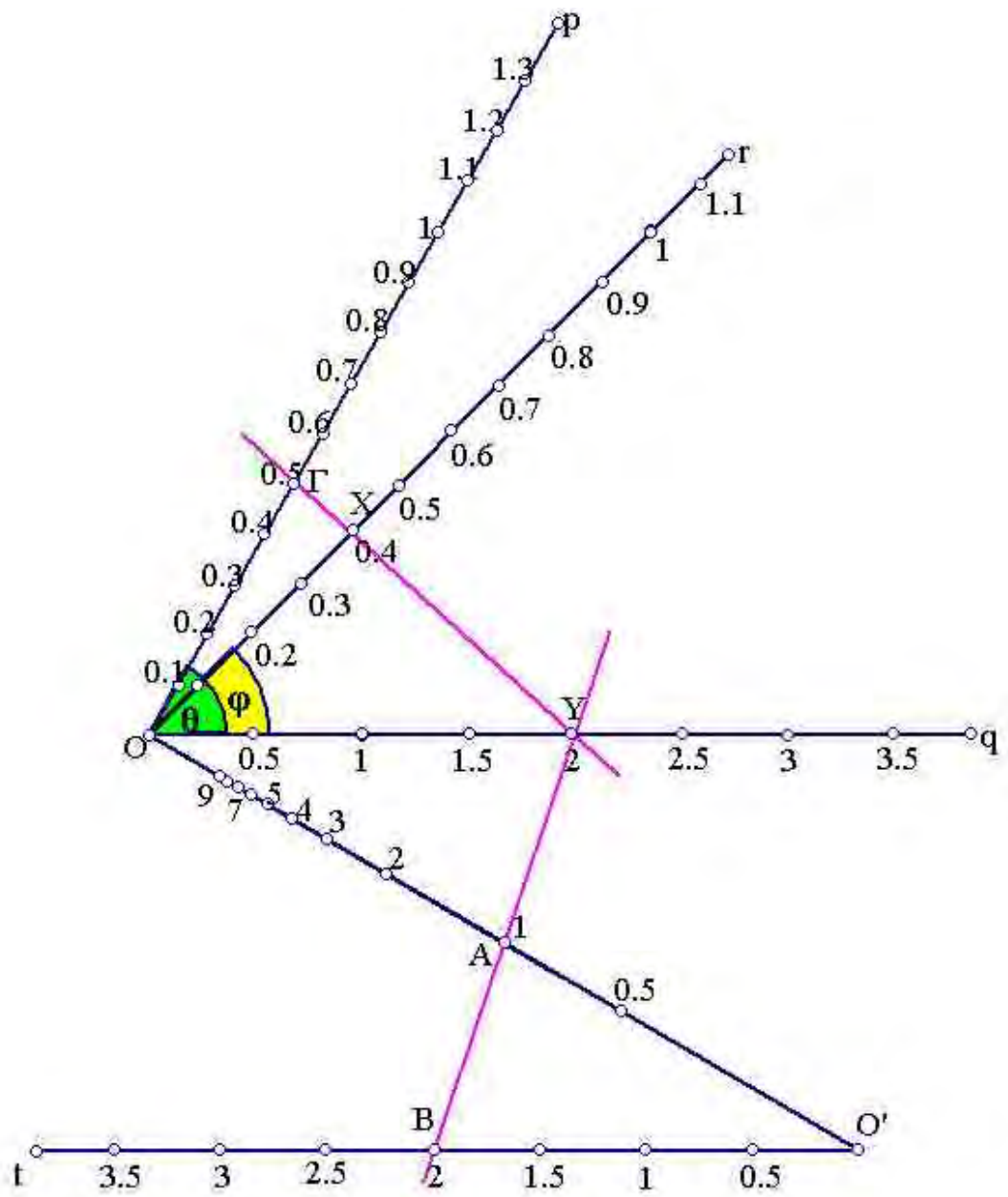
Σχήμα 83. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha + \beta t^2 = t$  με  $\alpha = 0.5$  και  $\beta = 0.5$ .



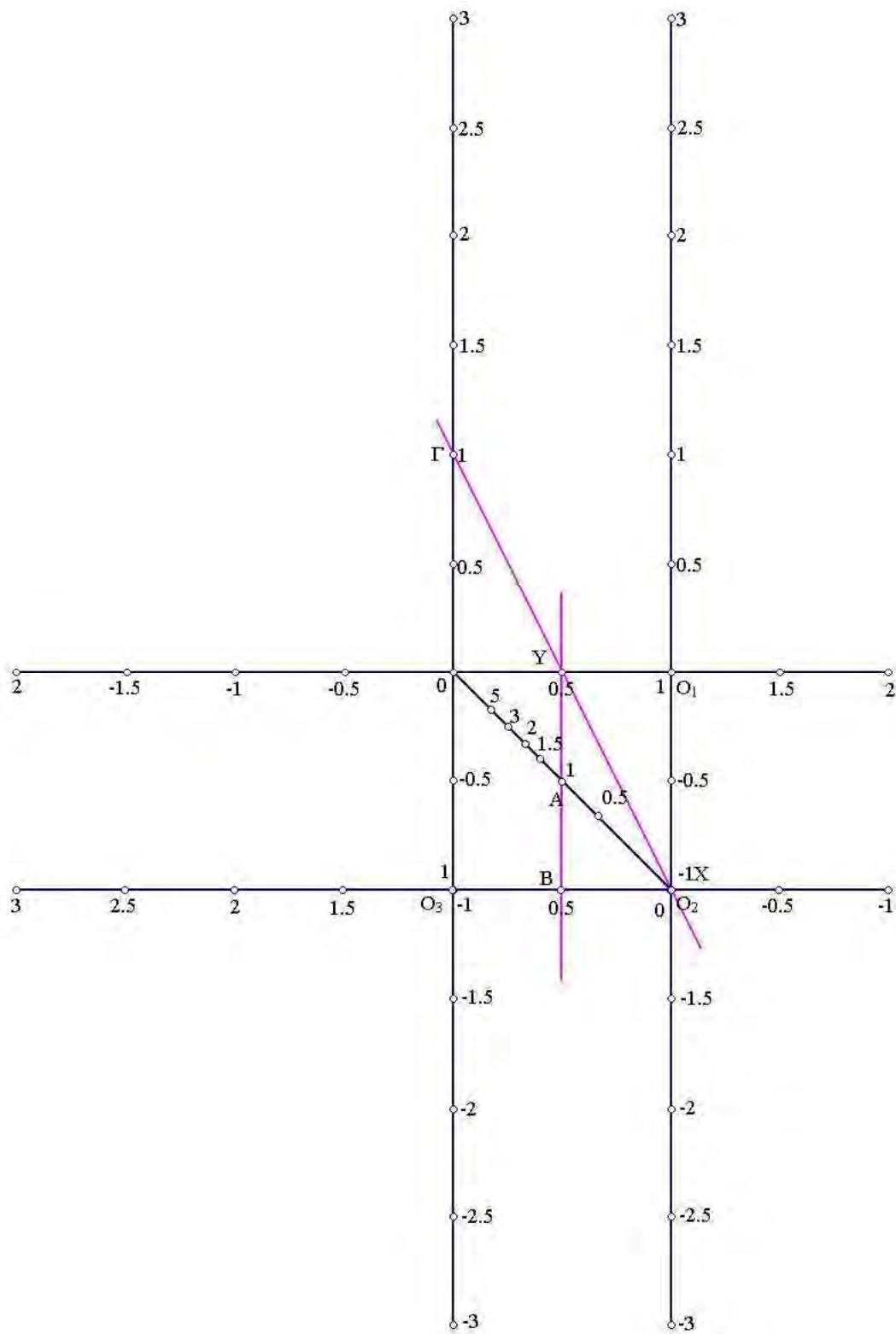
Σχήμα 84. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta + \gamma t^2 = t$  με  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=1$  και  $\gamma=0.5$ .



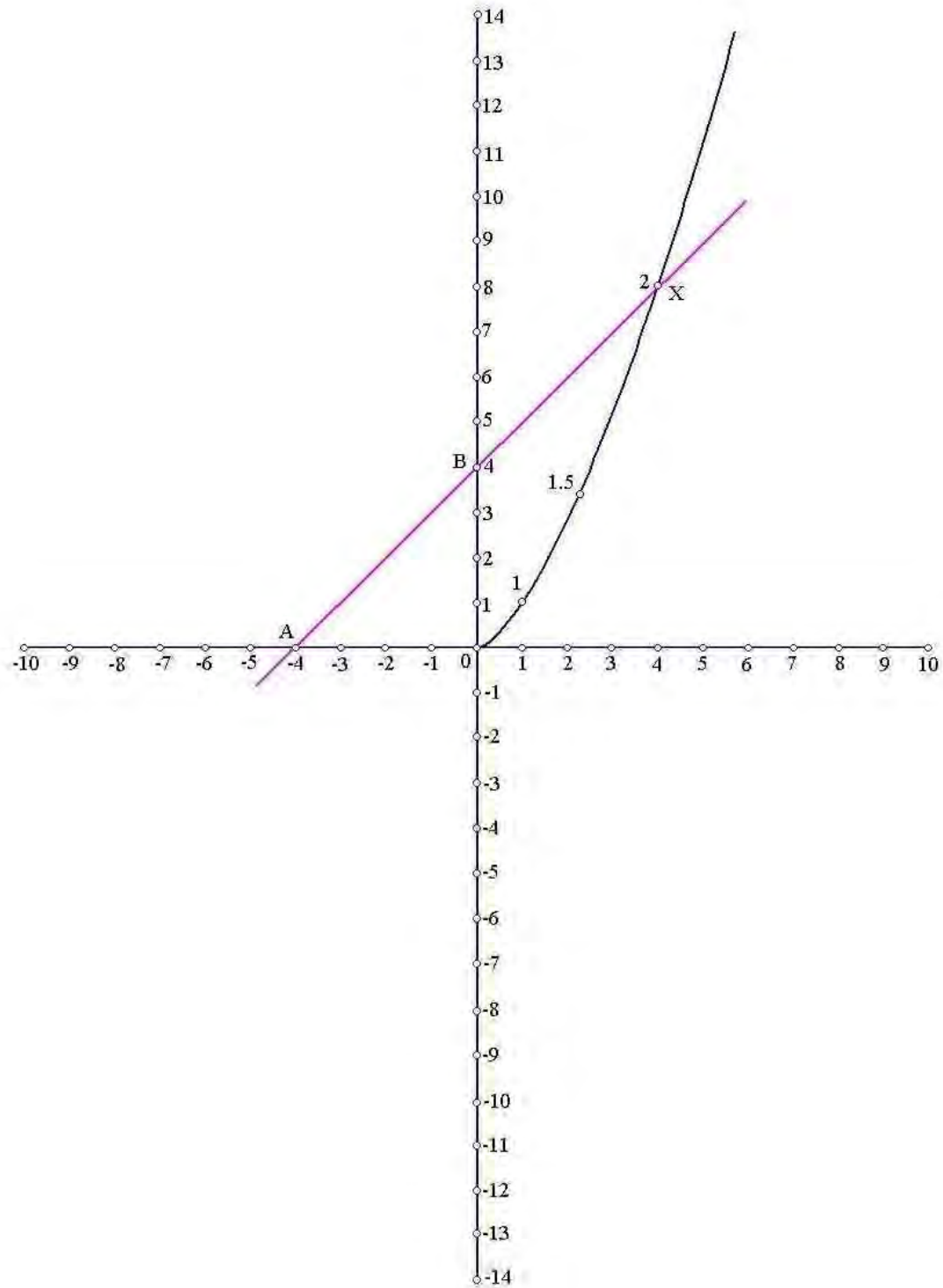
Σχήμα 85. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\alpha\beta + \gamma t^2 = t^3 + \beta^3$  με  $\alpha=1, \beta=-1$  και  $\gamma=1$ .



Σχήμα 86. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{t}$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=0.5$ .

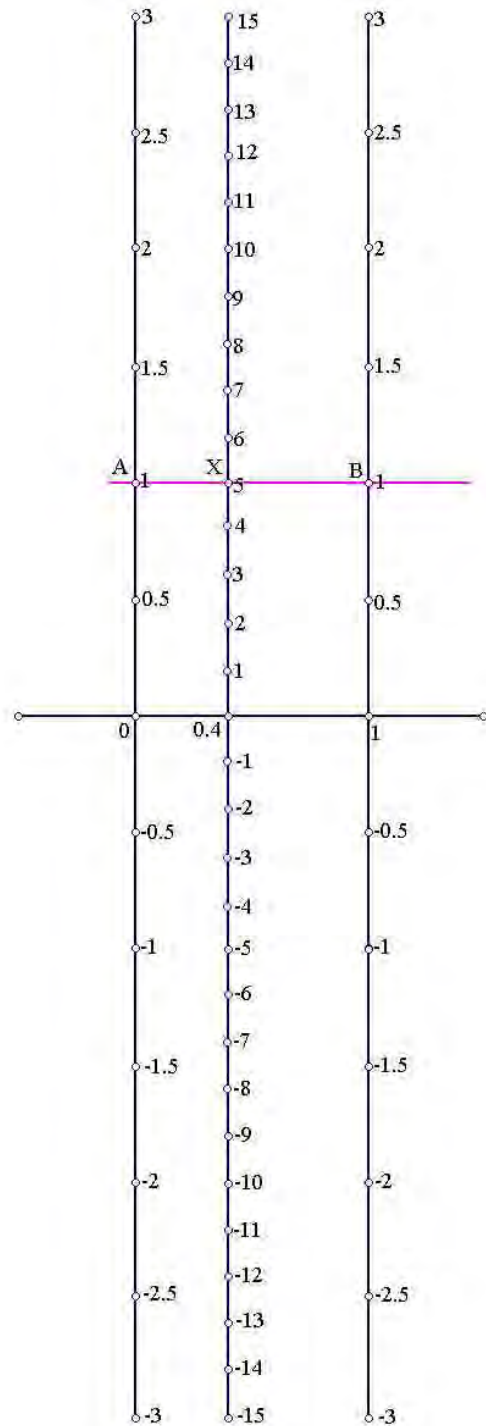


Σχήμα 87. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{\gamma} = 1$  με  $\alpha=1, \beta=0.5$  και  $\gamma=1$ .

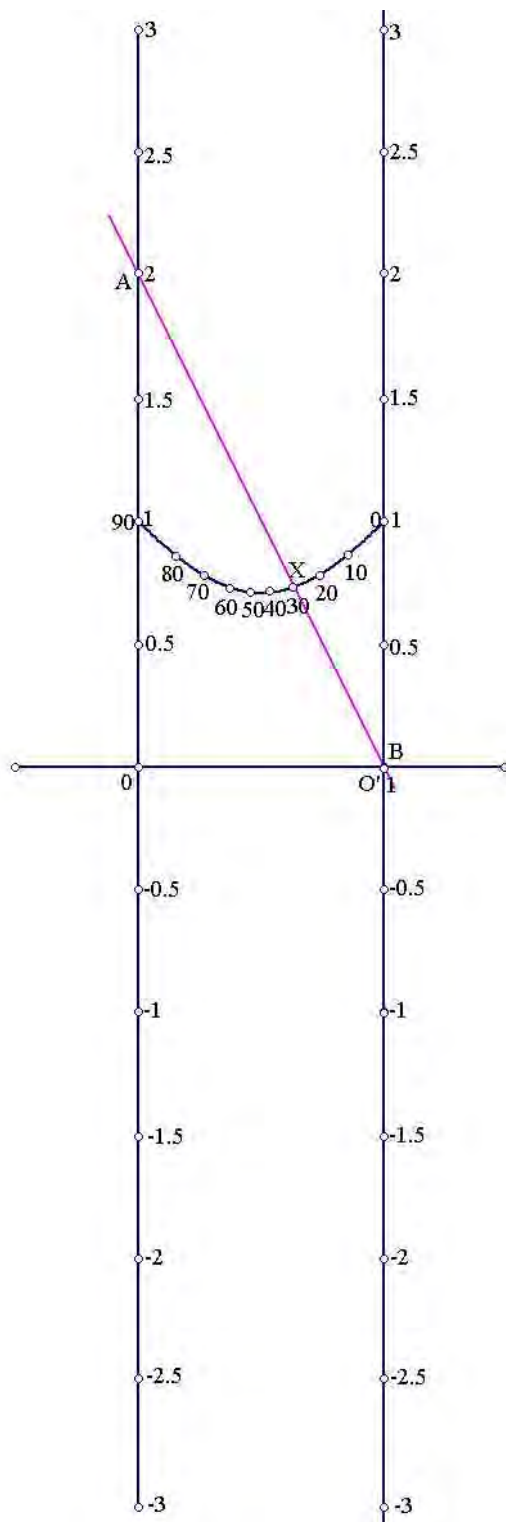


Σχήμα 88. Παράδειγμα επίλυσης του τύπου  $\frac{1}{\alpha} + \frac{t}{\beta} = \frac{1}{t^2}$  με  $\alpha=-4$  και  $\beta=4$ .

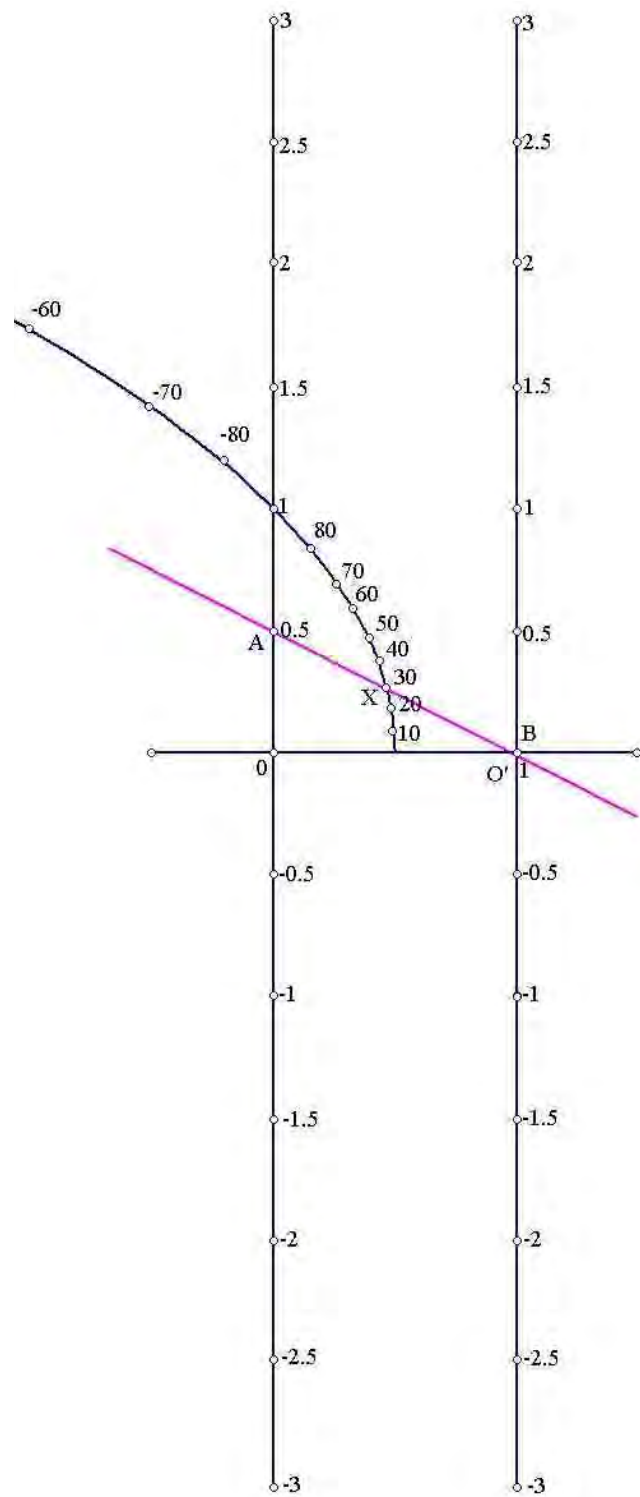




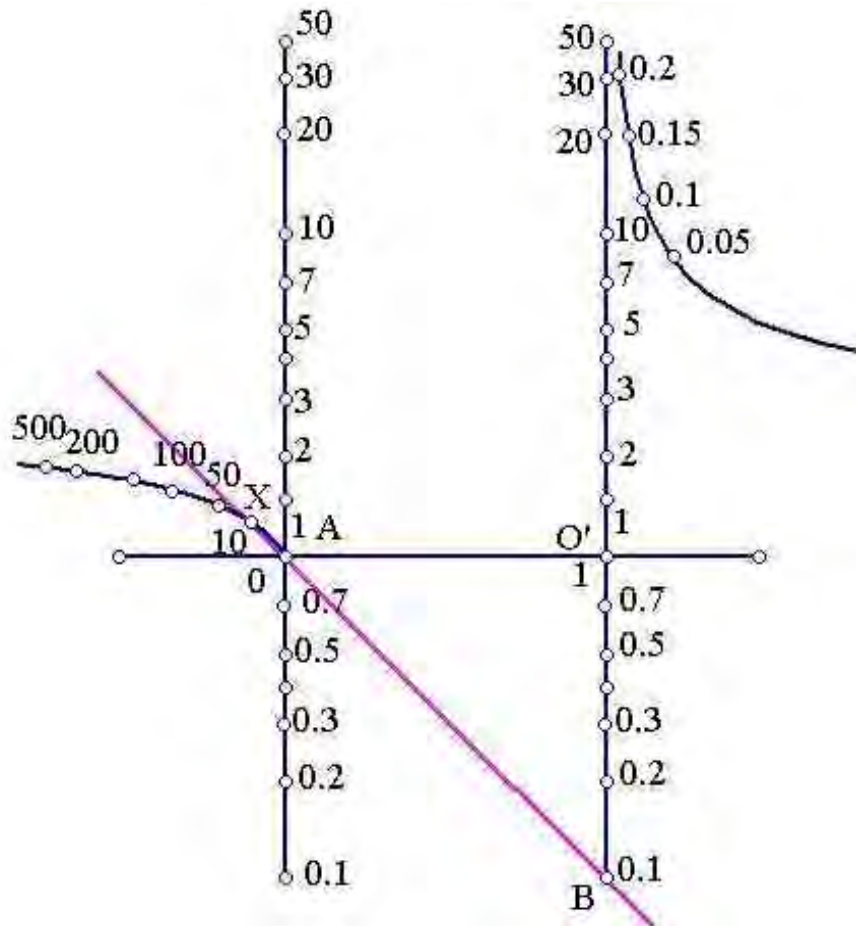
Σχήμα 89. Παράδειγμα υπολογισμού τη παράστασης  $3\alpha+2\beta$  με  $\alpha=1$  και  $\beta=1$ .



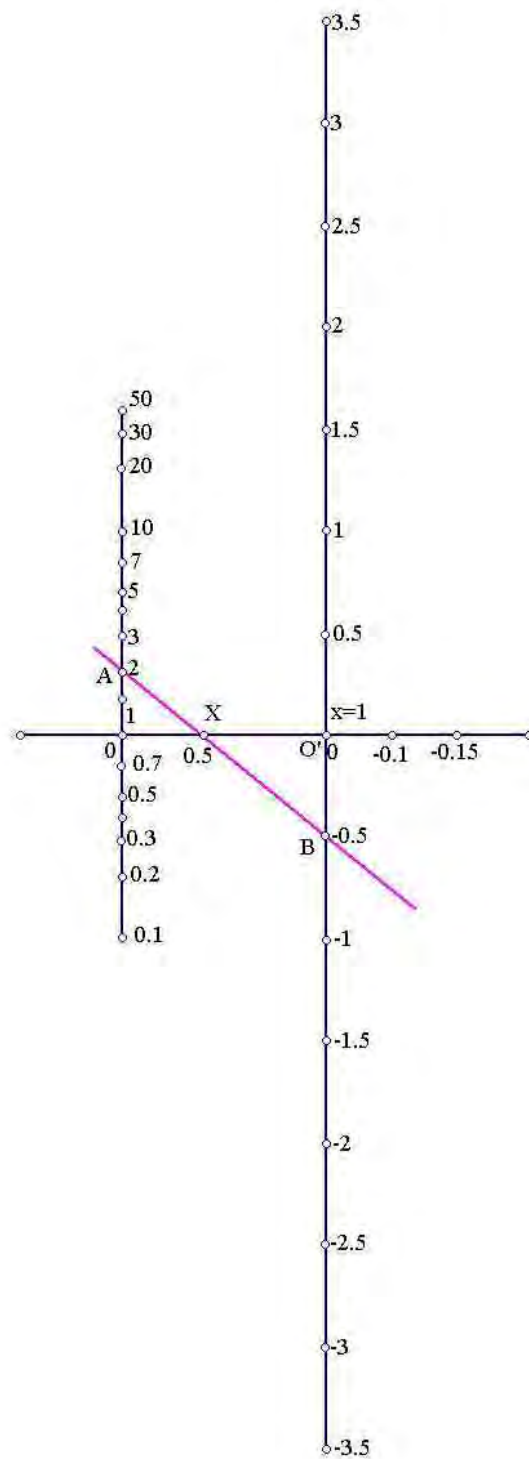
Σχήμα 90. Παράδειγμα επίλυσης της εξίσωσης  $2\eta\mu t + 0\sigma\upsilon\eta t = 1$ .



Σχήμα 91. Παράδειγμα επίλυσης της εξίσωσης  $\eta\mu t = 0.5 + 0\sigma\upsilon\upsilon t$ .

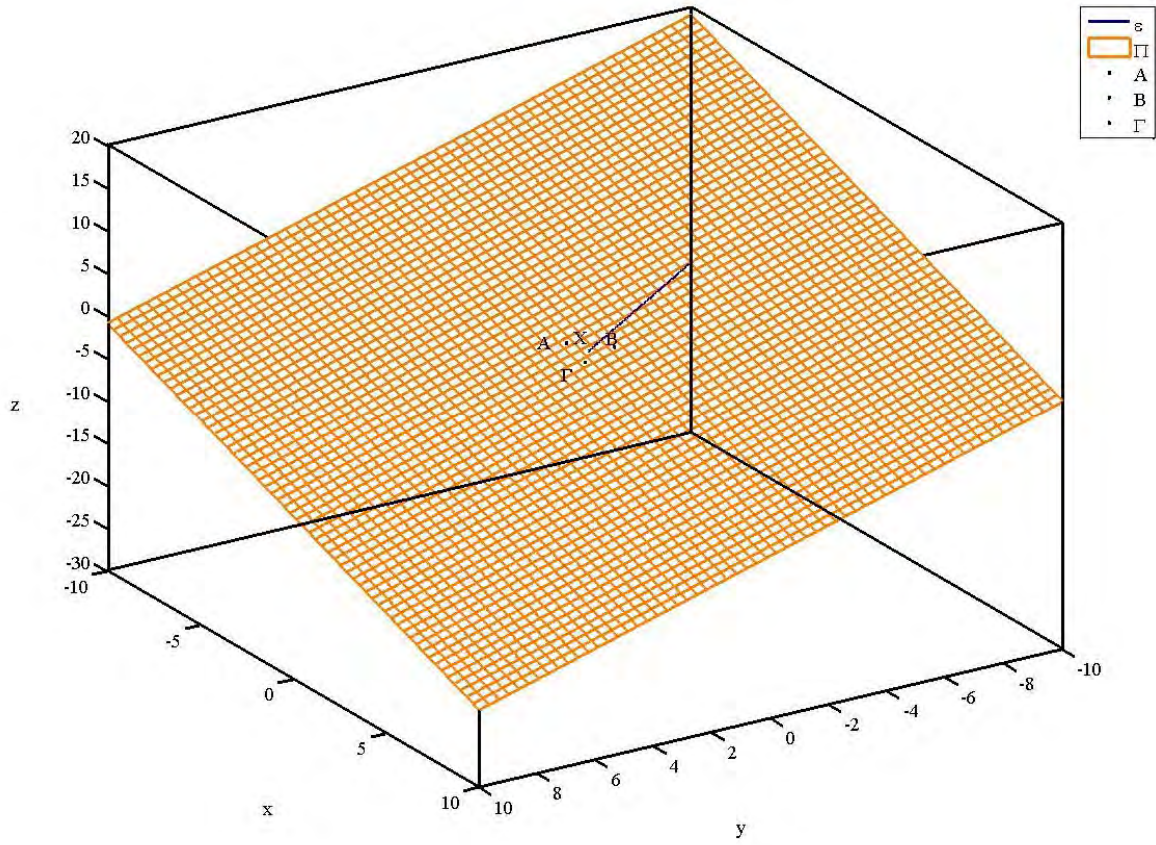


Σχήμα 92. Παράδειγμα επίλυσης της εξίσωσης  $t' = 0.1t$ .

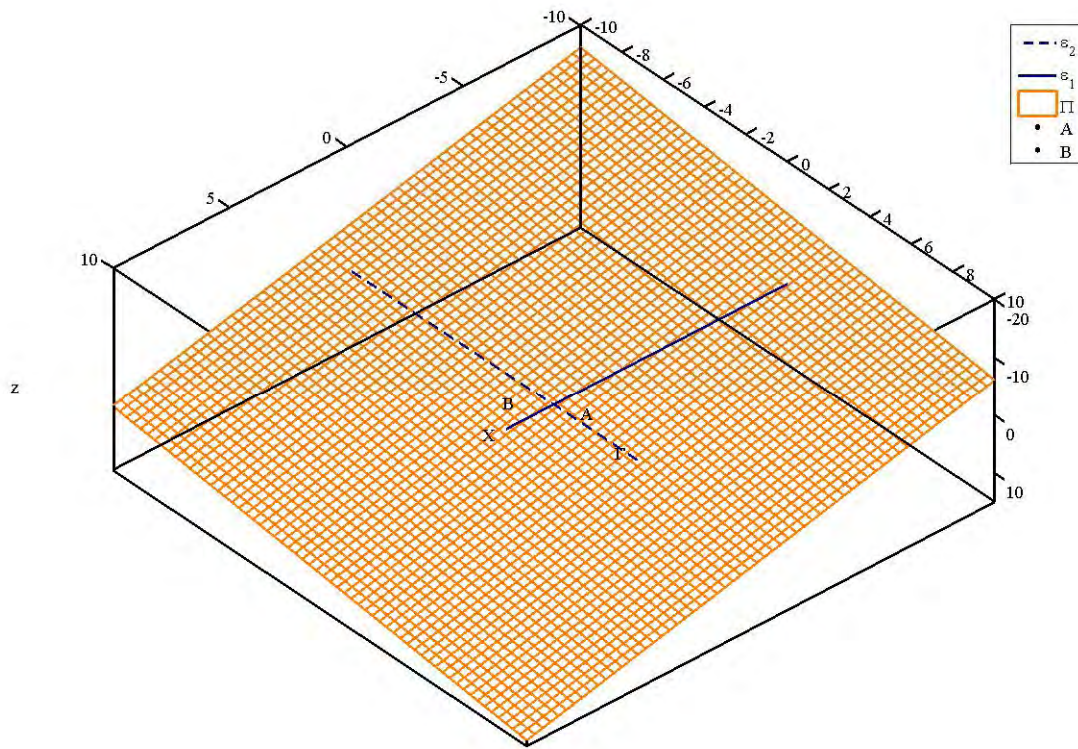


Σχήμα 93. Παράδειγμα επίλυσης της εξίσωσης  $2t = t^{-0.5}$ .

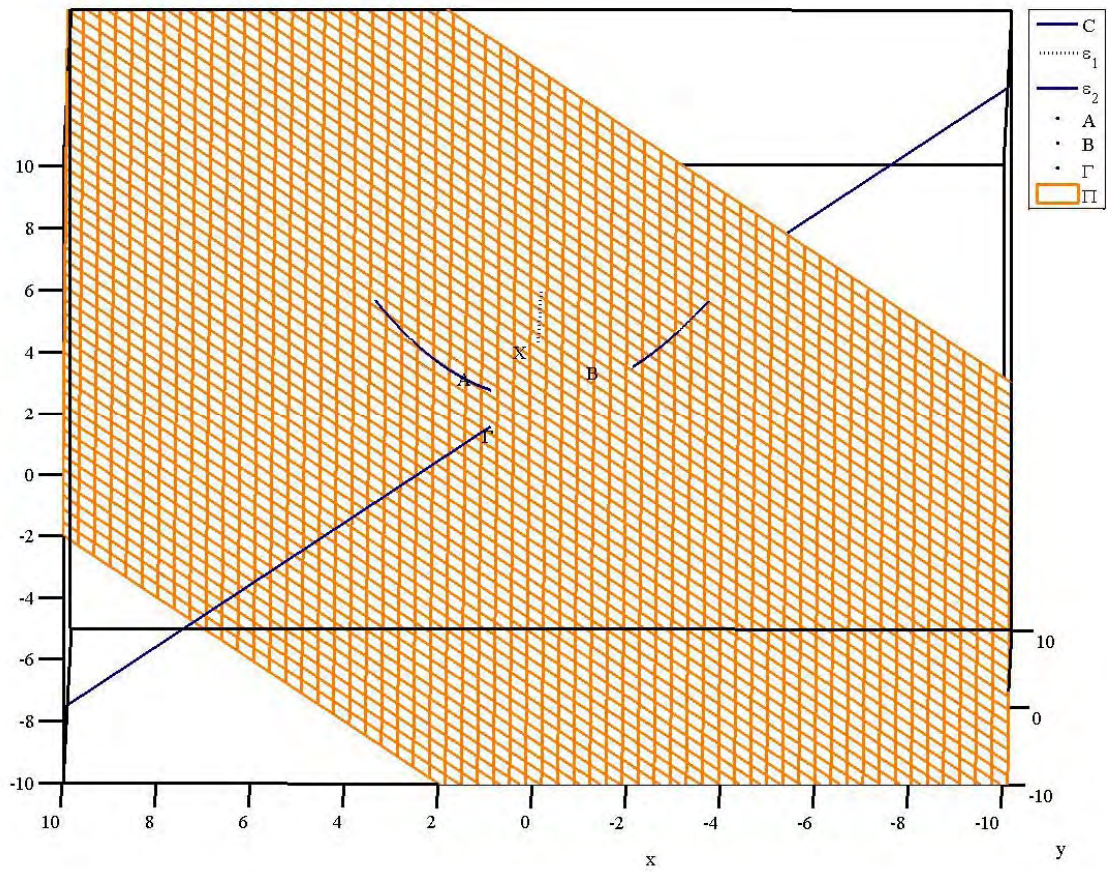
## Κεφάλαιο 7



Σχήμα 94. Παράδειγμα υπολογισμού τη παράστασης  $3\alpha+2\beta+\gamma$  με  $\alpha=\frac{1}{3}$ ,  $\beta=\frac{1}{2}$  και  $\gamma=1$ .

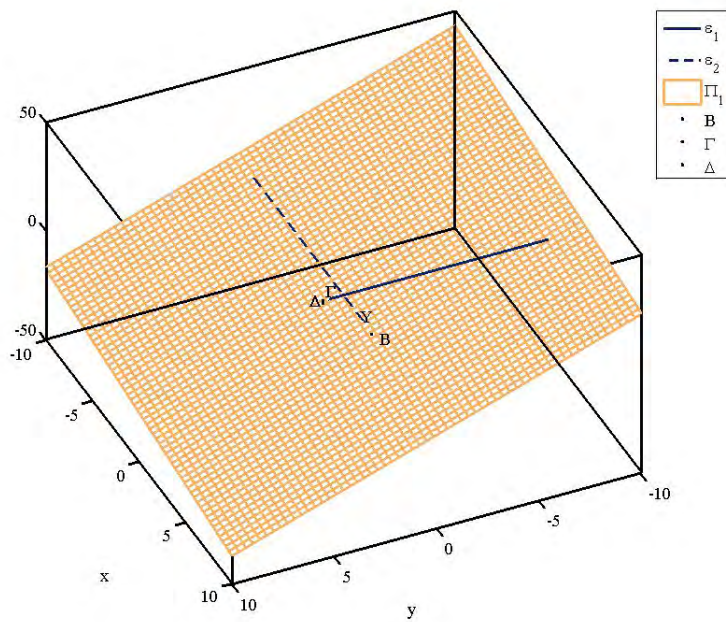


Σχήμα 95. Παράδειγμα υπολογισμού τη παράστασης  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{t}$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=4$ .

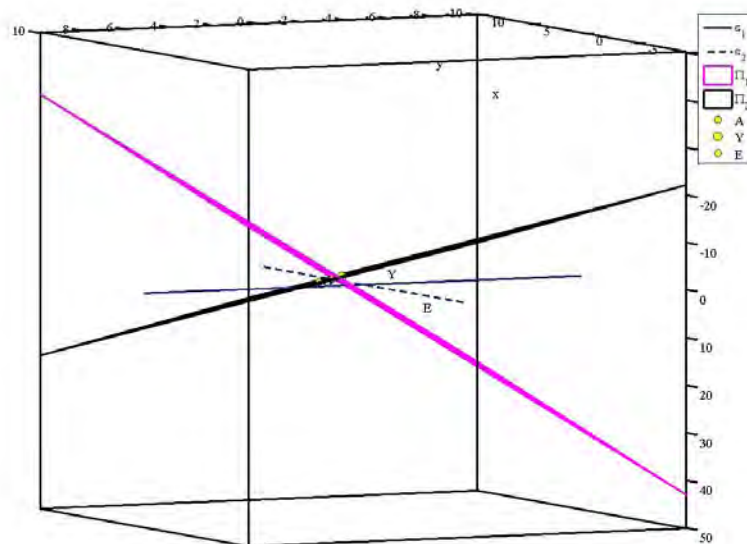


Σχήμα 96. Παράδειγμα υπολογισμού τη παράστασης  $\alpha\beta\gamma+(\alpha-\beta)$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=2$  και  $\gamma=2$ .



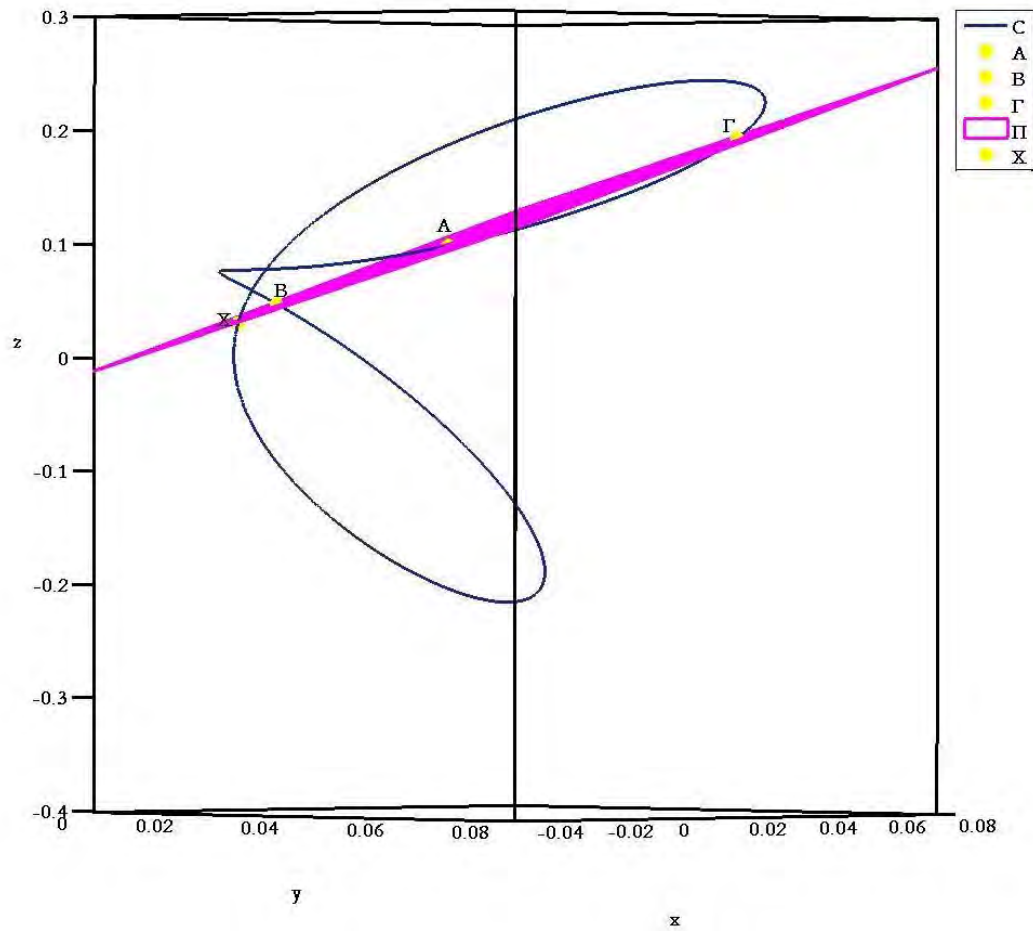


(α)



(β)

Σχήμα 97. Παράδειγμα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma=\delta\epsilon\zeta$  με  $\alpha=2$ ,  $\beta=3$ ,  $\gamma=1$ ,  $\delta=1$  και  $\epsilon=3$ .



Σχήμα 98. Παράδειγμα για την επίλυση του τύπου  $\alpha\beta\gamma t + 3(\alpha + \beta + \gamma + t) = 40$  με  $\alpha=1$ ,  $\beta=-1$  και  $\gamma=2$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] Adikesavan A. S. *Circular nomogram*. Defence Science Journal, Vol. 21(3), 1971, pp. 149-154.
- [2] Brodetsky S. *A first course in nomography*. G. Bell and sons, Ltd, London 1920.
- [3] C. V. G. *Nomograms for Pythagoras*. Mathematical pie, February 1959.
- [4] Coile R. C. *Nomography for operations research*. Center for Naval Analyses, VA, 30 September 1976.
- [5] Doefler R. *The art of Nomography, Dead Reckonings: Lost Art in the Mathematical Sciences*, 2008 <[http:// www.myreckonings.com/wordpress](http://www.myreckonings.com/wordpress)>.
- [6] Evesham H. A. *Origins and Development of nomography*. Annals of the history of computing, Vol. 8, No 4, October 1986.
- [7] Friauf J. B. *Nomograms for the solution of spherical triangles*. Journal of the Franklin Institute, Vol. 232, Iss.2, August 1941, pp.151-171).
- [8] Friauf J. B. *Nomographic solution of a problem in spherical trigonometry*. The American Mathematical Monthly, Vol. 42, No 4, April 1935, pp. 232-235.
- [9] Gluchoff A. *Pure Mathematics applied in early twentieth-century America: The case of T. H. Gronvall consulting mathematician*. Historia Mathematica, Vol. 32, No 3, 2005, pp.312-357.
- [10] Haasbroek N. D. *Stereo nomograms*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 1, No 3, 1962.
- [11] Hankins T. L. *Blood, dirt and nomograms. A particular history of graphs*. Isis: Journal of the History of Science in Society, Vol. 90, No 1, 1999, pp. 50-80.
- [12] Hewes L. I. *Nomograms of adjustment*. The Annals of Mathematics, Series 2 Vol. 18 No 4 June 1917, pp. 194-199.
- [13] Jacobs H. R. *Mathematics: A human Endeavor*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, January 1970.
- [14] Johnson E. Wylie C. R, Jr. *A nomographic solution of quartic*. The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No 5, May 1961, pp. 461-464.
- [15] Klamkin M. S. *A geometric determination of the nature of the roots of the cubic, biquadratic and quintic equations*. The American Mathematical Monthly, Vol. 61, No 5, May 1954, pp.340-342.
- [16] Levens A. S. *Nomography*. John Wiley and Sons, New York, 1948.
- [17] Lipka J. *Graphical and mechanical computation, part I, Alignment charts*. John Wiley and sons, Inc, New York, 1921.
- [18] Pamfilos P. *A program for Dynamic Geometry*. <[www.euclidraw.com](http://www.euclidraw.com)>.

- [19] Peddle J. B. *The construction of graphical charts*. McGraw-Hill, New York, 1910.
- [20] Running T. R. *Graphical solutions of quadratic, cubic and biquadratic equations*. The American Mathematical Monthly, Vol. 28, No 11/12, November- December 1921, pp. 415-423.
- [21] Su, Francis E. et al. "Complex Roots Made Visible." *Mudd Math Fun Facts*. <<http://www.math.hmc.edu/funfacts>>.
- [22] Wilson H. R., Jr. *Nomographic solutions for position relations between a close earth satellite and its observer*. The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No 5, May 1959, pp. 393-401.